

ISSN 0130-2221

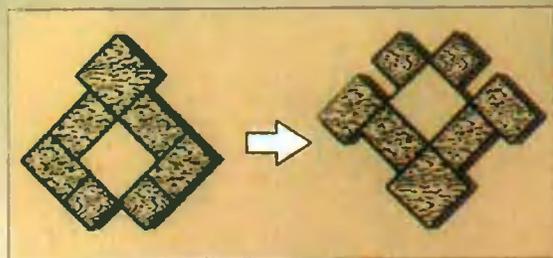
2003 · №4

ИЮЛЬ/АВГУСТ

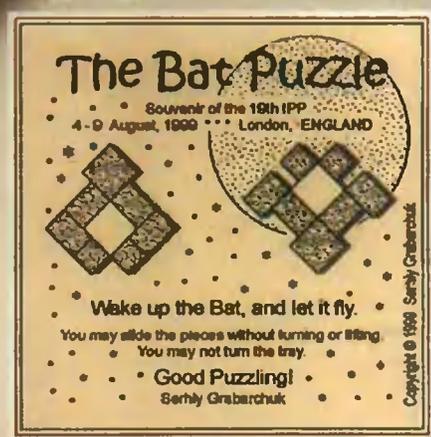
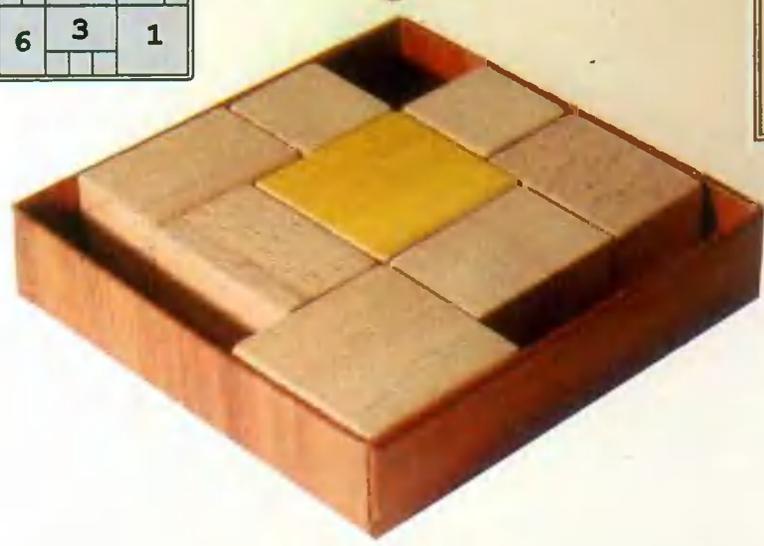
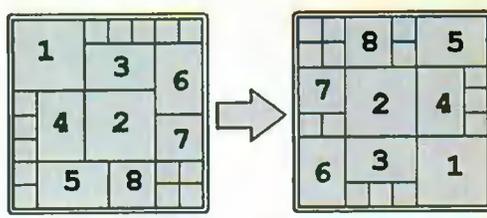
КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ





Разбудите летучую мышь



Эту задачу придумал известный украинский изобретатель головоломок Сергей Грабарчук. Его головоломка представляет собой коробочку размером 8×8 клеток, внутри которой находятся восемь плашек. В исходном состоянии плашки уложены в виде фигуры, напоминающей летучую мышь со сложенными крыльями (поэтому автор и назвал свою головоломку так необычно). Задача состоит в том, чтобы переместить плашку 1 из левого верхнего угла в правый нижний. Новое расположение плашек похоже на мышь с раскрытыми крыльями. Во время решения плашки могут только скользить по дну коробочки, вынимать их или поворачивать не разрешается. Плашка 1 имеет размер 3×3 клетки, плашка 2 такого же размера, и чтобы их не перепутать, вторая плашка покрашена в желтый цвет. Остальные шесть плашек имеют одинаковые цвета и размеры 3×2 и 2×2 клетки.

Эту головоломку очень легко сделать своими руками, особенно если вам удастся найти готовую квадратную коробочку. Плашки можно вырезать из плотного картона, закруглив углы, чтобы они не цеплялись друг за друга. Величину плашек рассчитайте исходя из внутренних размеров коробочки.

Лучшее известное решение головоломки состоит из 33 ходов. Ходом считается перемещение плашки по вертикали или горизонтали на любое количество клеток.

А.Калинин

В номере:



Учредители—Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЕ ЗАМЕСТИТЕЛИ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.С.Кротов, С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,
А.Н.Виленкин, С.А.Гордюнин,
Н.П.Долбиллин, В.Н.Дубровский, А.А.Егоров,
А.Р.Зильберман, В.В.Козлов,

С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,
В.В.Можаев, В.В.Произволов, Н.Х.Розов,
Ю.П.Соловьев, А.Б.Сосинский,

А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров
(заместитель главного редактора),

В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,
А.И.Черноуцан

(заместитель главного редактора),
И.Ф.Шарыгин

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Ю.А.Данилов, Н.Н.Константинов,
Г.Л.Коткин, Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллиончиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро Квантум

©2003, Президиум РАН,
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 Геометрия выпуклости. *В.Тихомиров*
10 Волны на срезе бревна. *Я.Лакота, В.Мещеряков*

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 17 И все-таки она вертится... *А.Васильев*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 20 Задачи М1871–М1875, Ф1878–Ф1882
21 Решения задач М1846–М1855, Ф1863–Ф1867
27 Победители конкурса «Задачник «Кванта» 2002 года

«КВАНТ» ДЛЯ «МЛАДШИХ» ШКОЛЬНИКОВ

- 28 Задачи
29 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»
29 Подозрительные фертинги. *И.Акулич*
37 Из занимательного мироведения

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 39 Принцип Ферма. *А.Сендерихин*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 42 Смерч у вас дома. *С.Бетяев*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 44 Индуктивность в электрических цепях. *В.Можаев*
48 Прямые и параболы. *Б.Писаревский*

ОЛИМПИАДЫ

- 52 LXVI Московская математическая олимпиада
54 Избранные задачи Московской физической олимпиады
58 Ответы, указания, решения
Анкета читателя (31)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Смерч у вас дома»*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Физики и математики на монетах мира*



В 2003 году 6000 экземпляров журнала «Квант» издаются за счет грантов Фонда некоммерческих программ «Династия» и Фонда «Евразия».



Нефтяная компания «Sakhalin Energy Investment Company Ltd.» выписывает сто экземпляров журнала «Квант» для школ Сахалина.



Геометрия выпуклости

В.ТИХОМИРОВ

Введение

Понятие выпуклости возникло в античные времена. Оно встречается в сочинениях Архимеда (III век до н.э.). В труде, озаглавленном «О шаре и цилиндре», есть такие слова: «Я называю выпуклыми в одну и ту же сторону такие поверхности, для которых отрезки, соединяющие две точки, будут... находиться по одну сторону от поверхности».

В новое время изучение выпуклых фигур началось в XIX веке. Как отдельная ветвь геометрии выпуклая геометрия родилась в трудах О.Коши, Я.Штейнера и Г.Минковского.

У нас в стране задачи о выпуклых фигурах были популярны в довоенных школьных математических кружках. Выдающийся математик Лев Генрихович Шнирельман, один из организаторов математического кружка при Московском университете, избрал одной из тем для занятий выпуклую геометрию. Эта тема была подхвачена Давидом Шклярским, аспирантом мехмата, математиком, подававшим большие надежды, но не вернувшимся с войны. Шклярский придал кружкам совершенно новую форму, сохранившуюся и до нашего времени. Основное внимание стало уделяться решению нестандартных задач. Выпуклость оказалась благодатнейшей почвой для развития геометрических способностей: красота и значимость ее результатов сочеталась с совершенной элементарностью постановок задач и средств их исследования.

На базе многолетних занятий по выпуклой геометрии со школьниками и студентами И.М.Яглом и В.Г.Болтянский, участники кружка Шклярского, продолжившие его дело, написали замечательную книгу [1].

Но в ту пору, когда писалась эта книга, авторы не подозревали, что на Западе происходит настоящий «выпуклый бум», связанный с рождением нового направления в теории экстремума, получившего название линейного программирования. Это направление зародилось в нашей стране. Его родоначальником был Леонид Витальевич Канторович, удостоенный за свой вклад в теорию линейного программирования и экономику Нобелевской премии. Результаты Канторовича были переоткрыты на Западе, там было осознано значение выпуклых экстремальных задач при решении актуальных проблем экономики и военно-промышленного комплекса, и многие исследователи приняли участие в развитии новой дисциплины, получившей название *выпуклого анализа*.

Здесь мне хочется коснуться некоторых узловых тем выпуклого анализа, сделав упор на их геометрическую суть.

Евклидова плоскость

Сначала мы будем говорить о выпуклых фигурах на обычной евклидовой плоскости – той самой, которую проходят в школе (а позже у нас появятся и евклидовы пространства, и плоскость Лобачевского).

Наглядной моделью евклидовой плоскости может служить поверхность школьной доски.

Плоскость состоит из точек. Точки плоскости будем обозначать, как обычно, большими латинскими буквами A , B и т.д. Через каждые две различные точки можно провести единственную прямую. Прямая делит плоскость на две полуплоскости. Точка на прямой делит ее на два луча. Две точки на прямой соединяет отрезок, концами которого являются эти точки. Множества точек плоскости называют также плоскими фигурами, или просто фигурами. Их будем обозначать жирными латинскими буквами A , B и т.д.

Множество точек плоскости называется *выпуклым*, если оно вместе с двумя своими точками содержит весь отрезок, соединяющий эти точки (рис.1).

Пересечение выпуклых множеств в любом числе – выпуклое множество. Пересечение

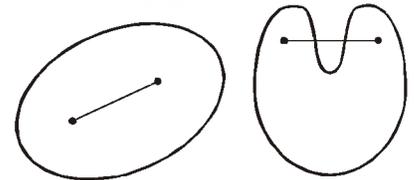


Рис.1. Выпуклое и невыпуклое множества

всех выпуклых множеств, содержащих данное множество, называется *выпуклой оболочкой* множества.

Мир Евклида – это мир циркуля и линейки, с помощью которых возможно совершать всяческие построения. Простейшие выпуклые фигуры, которые можно изобразить с помощью этих приборов, – это отрезок, треугольник и круг (рис.2). Кривая, ограничивающая круг – окружность, – выпуклой фигурой не является.

Циркуль и масштабная линейка позволяют находить расстояния между точками. Множество точек, находящихся на расстоянии не меньшем r от некоторой точки A на плоскости, – круг радиуса r с центром в A .

Собственно говоря, понятие расстояния нам будет нужно, в основном, лишь для того, чтобы определить понятие замкнутого множества на плоскости. Замкнутые множества проще всего определить через дополнительные – открытые – множества.

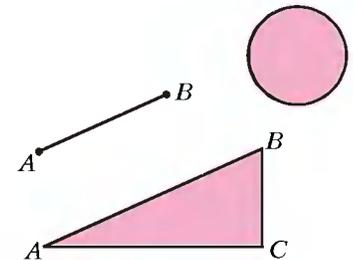


Рис.2. Простейшие выпуклые фигуры

Множество A на плоскости называется *открытым*, если для любой точки A из A найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что все точки плоскости, находящиеся на расстоянии меньшем ε от A , принадлежат A . Множество, дополнение к которому открыто, называется *замкнутым*.

Упражнение 1. Докажите, что круг без ограничивающей его окружности (т.е. множество точек, находящихся на расстоянии меньшем r от некоторой точки на плоскости) – открытое множество, а круг радиуса r с центром в A замкнут.

Любая прямая разбивает плоскость на две открытые полуплоскости и саму прямую. Но мы, употребляя слово «полуплоскость», будем иметь в виду (если другого не оговорено) открытую полуплоскость с соединенной к ней прямой.

Упражнение 2. Докажите, что такие полуплоскости замкнуты.

Ограниченные (т.е. содержащиеся в некотором круге) замкнутые множества на плоскости называются *компактами*.

Этих сведений должно нам хватить, чтобы построить начала теории выпуклости на плоскости.

Андрей Николаевич Колмогоров, великий ученый, столетие которого отмечается в нынешнем году, последние годы своей жизни посвятил школьному математическому образованию. Он задумал преобразовать школьный курс геометрии. Его замысел я (как мне кажется) понял лишь тогда, когда Андрея Николаевича не стало. По моему мнению, ему захотелось описать евклидову плоскость наглядно и точно. В его наглядном описании соединились старинное воззрение самого Евклида, когда плоскость – это плоскость школьной доски, на которой можно совершать построения при помощи линейки и циркуля, т.е. проводить прямые через две точки, измерять расстояния, проводить окружности заданного радиуса, словом, делать то, что обычно делают в школе, и новые воззрения, идущие от Эрлангенской программы Феликса Клейна. Согласно Эрлангенской программе, евклидова плоскость характеризуется группой движений (т.е. изометрических преобразований).

Суть движений легко представить себе наглядно, приложив прозрачное стекло к школьной доске. Если на доске нарисована какая-то фигура (скажем, треугольник), ее можно скопировать на стекло, потом стекло можно переместить в другое место и скопировать чертеж опять на доску. Получится изометрическое (сохранившее все расстояния) преобразование фигуры. Стекло можно «перевернуть», и тогда нарисованная фигура окажется симметричной исходной. Примерами движений являются параллельные переносы, повороты вокруг некоторой точки плоскости, симметрии относительно прямой.

Дополнив Евклида Клейном (т.е. оперируя с понятием движения), можно по-новому доказывать многие теоремы и по-другому решать различные геометрические задачи.

Скажем, одну из первых теорем геометрии (приписываемую Фалесу) о равенстве углов при основании в равнобедренном треугольнике можно, применяя идею движения (так сказать, «с помощью стекла»), доказать так: скопируем треугольник на стекло, потом перевернем его и скопированный образ снова приложим к треугольнику. Два треугольника на доске (изначальный и скопированный с перевернутого стекла) наложатся друг на друга, а значит, углы при основании равны (ибо они «поменялись местами»).

Все сказанное относится к наглядному описанию плоскости.

Точное же описание плоскости возможно с помощью введения координат с последующей алгебраизацией (об этом будет вкратце сказано в конце). Но возможно и аксиоматическое точное описание плоскости. Аксиоматическое описание плоскости начинал Евклид, а завершил великий математик прошлого века Давид Гильберт (1862–1943).

Аксиоматика, придуманная Колмогоровым, не похожа на евклидо-гильбертовскую. Она достаточно проста и естественна. Аксиоматизируются вполне наглядные свойства прямых, расстояний, отрезков, полупространств и движений (скажем, что через две точки проходит прямая и при том только одна, что расстояние симметрично и удовлетворяется аксиома треугольника, что существует ровно два движения, совмещающих отрезок с другим, равным ему по длине). А в заключение добавляется аксиома параллельности, согласно которой через точку, лежащую вне прямой, можно провести единственную прямую, ей параллельную. Причем, если эту аксиому заменить другой, придем к другой геометрии – геометрии Лобачевского.

Судя по некоторым высказываниям Андрея Николаевича, ему мечталось, что учителя, которые любят свой предмет, смогут на кружках и дополнительных занятиях раскрыть перед интересующимися школьниками мир различных геометрий, и прежде всего евклидов мир конечного и бесконечного числа измерений, мир геометрии Лобачевского, выпуклый мир Минковского, аффинный и проективный миры...

Чувствуя свой долг перед своим учителем, я хочу здесь наметить некоторые тропы возможных блужданий по этим мирам. Мы побродим в основной части статьи по плоскому миру выпуклых фигур, а в заключительной части – по конечномерному выпуклому евклидовому миру, войдем в мир бесконечномерной геометрии, и в самом конце постараемся проникнуть в выпуклый мир плоской геометрии Лобачевского.

Все доказательства на евклидовой плоскости мы будем проводить геометрически, с помощью линейки, циркуля и воображения. У нас, скажем, нигде (кроме мелкого шрифта) не появятся ни числа, ни числовые функции. Эти доказательства настолько просты и естественны, что, вообще говоря, нет необходимости сопровождать их чертежами: каждый может взять карандаш и бумагу и, следуя моему изложению, изобразить все самостоятельно, что будет весьма полезно. Но «на всякий случай» мы помещаем всюду нужные чертежи. Глядя на них, можно убедить себя в верности теорем без логических рассуждений – чертеж дает наглядное доказательство.

Теорема о строгой отделимости

Определение. Скажем, что прямая H строго отделяет множество A от точки B , если A лежит в одной из полуплоскостей, ограниченных этой прямой, а B лежит в другой и не принадлежит H (иначе можно сказать, что B лежит в другой открытой полуплоскости; рис.3).

Важнейшей теоремой всего выпуклого анализа (а не только выпуклой геометрии) является следующая теорема.

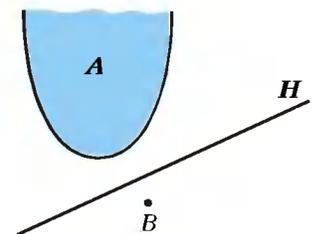


Рис.3. Множество A строго отделено от точки B прямой H

Теорема о строгой отделимости. *Выпуклое замкнутое множество на плоскости можно строго отделить от точки, ему не принадлежащей.*

Доказательство. Пусть множество A выпукло и замкнуто и точка B ему не принадлежит. Найдем среди точек из A точку C , ближайшую к B .

Представьте себе, что граница A – это берег острова, расположенного в неподвижной глади озера, и кто-то бросил камень «в точку B ». Сначала крути, расходящиеся от брошенного камня, не будут иметь общих точек с A , но в некоторый момент волновой фронт впервые коснется A . Точку касания мы и обозначили буквой C .

В течение очень длительного времени математики считали подобные утверждения о существовании ближайших точек очевидными и никаких доказательств не приводили. В девятнадцатом веке для доказательства таких фактов Огюстен Коши и Карлом Вейерштрассом была подведена база. Она основывается на понятии непрерывности и компактности. Кратко расскажем об этом.

Числовая функция f на плоскости называется непрерывной в точке A_0 , если для любого числа $\epsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что если расстояние от точки A до точки A_0 меньше δ , разность значений функции f в точке A и в точке A_0 по модулю меньше ϵ . Вейерштрасс доказал важную теорему, согласно которой непрерывная функция на компакте достигает и своего максимума и своего минимума. Применим эту теорему к нашему случаю.

Расстояние от точки B до точек плоскости – непрерывная функция на плоскости. По теореме Вейерштрасса (ибо можно ограничиться компактом, являющимся пересечением A с кругом радиуса, равного расстоянию от B до любой точки A' из A – рис.4), она достигает своего минимума на A в точке C . Продолжим доказательство.

Прямая H , проходящая через C перпендикулярно прямой, проходящей через B и C , искомая. Действительно, B , очевидно, не принадлежит H . Допустим теперь, что в той же (открытой) полуплоскости, что и B , лежит точка D из A . Тогда угол BCD острый и для любой точки D' на отрезке CD такой, что угол $BD'C$ – тупой, расстояние от B до D' меньше, чем от B до C (против большего угла лежит большая сторона) (см. рис.4). Теорема доказана.

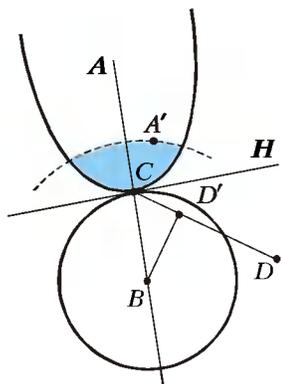


Рис.4. Теорема о строгой отделимости

Действительно, пересечение полуплоскостей выпукло и замкнуто. Если же допустить, что пересечению полуплоскостей A_1 , содержащих выпуклую и замкнутую фигуру A , принадлежит точка B , не принадлежащая A , то, строго отделив эту точку от A , приходим к противоречию.

Следствие (теорема Минковского). *Для того чтобы фигура на плоскости являлась пересечением полуплоскостей, необходимо и достаточно, чтобы она была выпуклой и замкнутой.*

Действительно, пересечение полуплоскостей выпукло и замкнуто. Если же допустить, что пересечению полуплоскостей A_1 , содержащих выпуклую и замкнутую фигуру A , принадлежит точка B , не принадлежащая A , то, строго отделив эту точку от A , приходим к противоречию.

Теорема о строгой отделимости и следствие из нее были доказаны замечательным немецким математиком Германом Минковским (1864–1909), который явился одним из основоположников выпуклой геометрии. Теорема Минковского была перенесена польским математиком Станиславом Магуром (1905–1981) на бесконечномерный случай. Об этом бесконечномерном случае и о теореме Магура мы еще поговорим в конце.

Некоторые теоремы выпуклой геометрии

Точки множества, которые не являются внутренними ни для какого отрезка, расположенного в этом множестве, называются *крайними точками* этого множества. В треугольнике это его вершины, в круге – точки окружности, ограничивающей круг (рис.5).

Пересечение выпуклых замкнутых множеств, содержащих данное множество, называется его *выпуклым замыканием*.¹

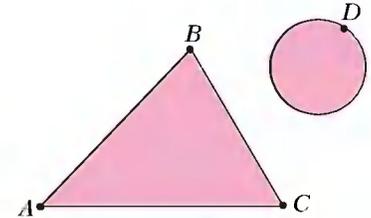


Рис.5. Крайние точки

Теорема (Крейна–Мильмана). *Выпуклый компакт является выпуклым замыканием своих крайних точек.*

Доказательство. Докажем сначала, что множество крайних точек множества A непусто.

Пусть H_0 – любая прямая. Возможно, что H_0 имеет общие точки с A , а само множество лежит по одну сторону от этой прямой (такие прямые называют опорными к A). Если же прямая H_0 опорной не является, начнем «двигать» прямую H_0 параллельно самой себе до тех пор, пока она не станет опорной (рис.6).

И здесь поясним, как строго доказать это (наглядно очевидное) утверждение.

Рассмотрим функцию на плоскости – расстояние от точки плоскости до H_0 . Это непрерывная функция, и значит, по теореме Вейерштрасса она достигает максимума и минимума на A . Прямые, параллельные H_0 , находящиеся на максимальном и минимальном расстояниях, – опорные.

Опорная прямая пересекается с A по отрезку (может быть, вырождающемуся в точку), и тогда крайняя точка этого отрезка будет крайней точкой и для A . (Докажите это.)

Пусть теперь A_1 – выпуклое замыкание крайних точек из A . Оно ограничено и замкнуто (а следова-

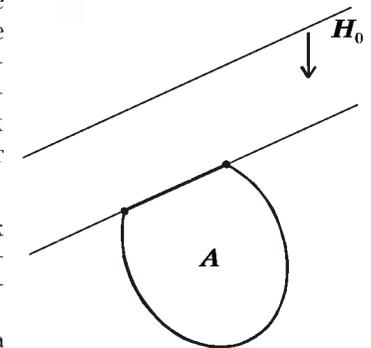


Рис.6. Существование крайних точек

¹ Отметим, что выпуклое замыкание множества и его выпуклая оболочка могут не совпадать. Например, выпуклая оболочка открытого круга совпадает с ним самим, а его выпуклое замыкание содержит граничную окружность.

тельно, компактно) и является подмножеством A . Предположим, что существует точка B из A , не принадлежащая A_1 . По теореме о строгой отделимости

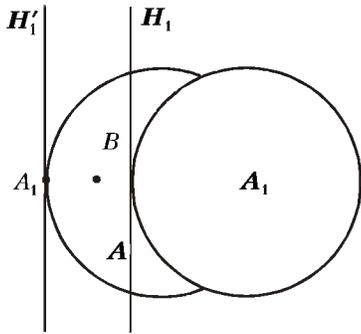


Рис.7. Теорема Крейна–Мильмана

можно строго отделить точку B от A_1 прямой H_1 . Снова найдем точку A_1 из A , самую дальнюю от прямой H_1 и лежащую в той же полуплоскости, что и B .

На прямой H_1' , параллельной H_1 и проходящей через точку A_1 , по доказанному есть крайняя точка множества A , что противоречит нашему построению (рис.7).

Упражнение 3. Докажите, что выпуклая оболочка конечного числа точек является пересечением конечного числа полуплоскостей.

Теорема о крайних точках была доказана в бесконечномерном случае советскими математиками Марком Григорьевичем Крейном (1807–1989) и Давидом Пинхусовичем Мильманом (1913–1982) в 1940 году.

Теорема (Каратеодори). Если точка принадлежит выпуклой оболочке системы из конечного числа точек, то она либо совпадает с одной из точек системы, либо принадлежит отрезку, соединяющему две точки из системы, либо принадлежит треугольнику с вершинами из той же системы.

Иначе говоря, точка, принадлежащая выпуклой оболочке системы из конечного числа точек, является выпуклой оболочкой не более трех точек системы.

Эта теорема была доказана знаменитым немецким математиком греческого происхождения Константином Каратеодори (1873–1950).

Доказательство. Выпуклая оболочка конечного числа точек – многоугольник, крайними точками которого являются точки из данной совокупности (продумайте это). Если точка, о которой идет речь, совпадает с точкой системы или лежит на отрезке между двумя точками, то все доказано. Пусть это не так. Проведем

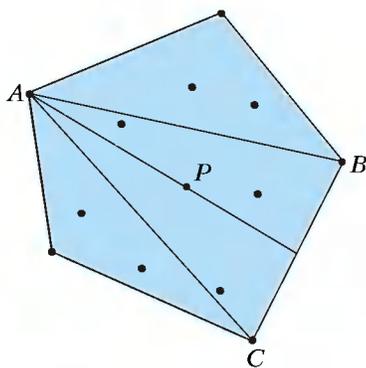


Рис.8. Теорема Каратеодори. Закрашенный многоугольник – выпуклая оболочка системы точек, показанной на рисунке

луч через какую-то вершину A многоугольника и данную точку P . Он пересечет границу многоугольника в точке на стороне многоугольника, концами которой являются две точки B и C системы. Значит, данная точка принадлежит треугольнику с вершинами в описанных точках (рис.8).

Теорема (Радон). Любую систему, со-

стоящую из не менее чем четырех точек, можно разбить на две подсистемы так, чтобы их выпуклые оболочки пересекались.

Доказательство. Этот результат достаточно доказать для четырех точек. Очевидно, можно считать, что три точки не лежат на одной прямой и образуют треугольник ABC . Три прямые, проходящие через эти точки, разбивают плоскость на семь частей, и если четвертая точка попадает в одну из них, то ясно, на какие подсистемы следует разбивать систему (рис.9).

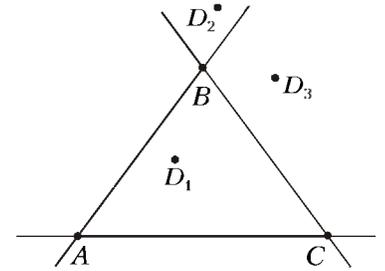


Рис.9. Теорема Радона. Разбиения: $\{A, B, C\}$ и $\{D_1\}$, $\{A, D_2, C\}$ и $\{B\}$, $\{A, D_3\}$ и $\{B, C\}$

Теорема (Хелли).

Пусть задано семейство плоских компактных выпуклых множеств, содержащее по меньшей мере три множества. Если любые три множества из семейства пересекаются, то существует точка, принадлежащая всем множествам семейства.

Доказательство. Докажем этот результат для конечной системы множеств. Доказательство проводится индукцией по числу множеств n . Если $n = 3$, утверждение теоремы очевидно. Допустим, что для $n - 1$ множеств утверждение теоремы справедливо, и пусть задана система $\{A_1, \dots, A_n\}$, состоящая из n множеств. По условию теоремы, для каждого i ($1 \leq i \leq n$) найдется точка B_i , принадлежащая пересечению всех множеств системы без множества A_i . Так как n не меньше четырех, можно применить теорему Радона и множество точек $B = \{B_i\}_{i=1}^n$ разделить на две части B_1 и B_2 такие, что их выпуклые оболочки имеют непустое пересечение. Пусть V лежит в этом пересечении. Тогда V , принадлежа выпуклой оболочке системы точек из B_1 , принадлежит пересечению множеств из B_2 , и аналогично, если она принадлежит выпуклой оболочке второй системы, значит, принадлежит пересечению множеств первой. Следовательно, она принадлежит всем множествам.

Упражнения

4. На плоскости задано конечное число точек, причем каждые три можно поместить в круг радиуса 1. Докажите, что все точки можно заключить в круг единичного радиуса.

5. На плоскости задано конечное число точек, причем расстояние между любыми двумя из них не больше единицы. Докажите, что все эти точки можно поместить в круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (теорема Юнга).

Интересна история теоремы Хелли. В 1913 году австрийский математик Эдвард Хелли (1884–1943) доказал приведенную теорему. Он рассказал о ней своему коллеге Йоганну Радону (1887–1956), известному специалисту в области анализа и теории меры. Хелли не успел опубликовать доказательство своей теоремы: началась первая мировая война, он был призван в армию, воевал на русском фронте, был ранен, захвачен в плен, лечился в госпитале в Сибири

и смог вернуться в Австрию только в 1921 году. Доказательство Хелли этой теоремы вышло в свет лишь в 1923 году. А Радон нашел другое доказательство, основанное на его собственной теореме. Радоновское доказательство теоремы Хелли вышло из печати в 1915 году.

Теорема Фенхеля – Моро

Перейдем теперь к теории выпуклых функций. Будем рассматривать функции одного переменного. Проведем на нашей евклидовой плоскости горизонтальную прямую и перпендикулярную ей вертикальную прямую. Точку пересечения этих прямых обозначим буквой O . Прямые на плоскости делятся на две группы: те, которые пересекают вертикальную прямую, и те, которые ей параллельны.

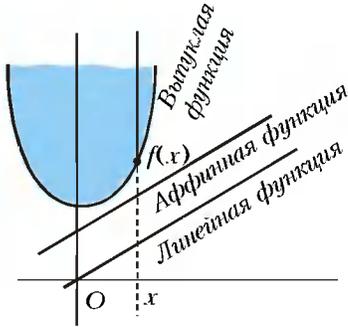


Рис.10. Что такое выпуклая функция

Невертикальные прямые, проходящие через точку O , – это графики линейных функций (рис.10). А вообще невертикальные прямые на плоскости – это графики функций, которые называют аффинными. Любое множество на плоскости, которое вместе с любой своей точкой содержит весь луч, исходящий из этой точки и идущий параллельно вертикальной прямой «вверх», называется надграфиком функции f , которая каждой точке вертикальной прямой ставит в соответствие нижнюю точку $f(x)$ надграфика, проектирующуюся в заданную точку x . Функция называется выпуклой, если ее надграфик – выпуклое множество, и замкнутой, если он – замкнутое множество.

Упражнение 6. Приведите пример функции с выпуклым, но не замкнутым надграфиком.

Имеет место следующая важная теорема – одна из основных в выпуклом анализе функций.

Теорема (Фенхель – Моро). Для того чтобы надграфик функции был пересечением надграфиков аффинных функций, необходимо и достаточно, чтобы сама функция была выпуклой и замкнутой.

Эта теорема была доказана в конечномерном случае немецким математиком В.Фенхелем в 1949 году, а в бесконечномерном случае – французским математиком Ж.Моро в 1960 году.

Доказательство. В одну сторону теорема следует из определений: если надграфик функции является пересечением надграфиков аффинных функций, надграфик функции выпуклый и замкнутый.

Если надграфик пуст (на языке функций это означает, что функция принимает значение, тождественно равное бесконечности), то утверждение теоремы очевидно: надо взять в качестве аффинных функций всевозможные константы (их графики параллельны горизонтальным прямым). Пусть надграфик A непуст и точка B принадлежит его границе. Тогда можно взять точку B' на той же вертикальной прямой, что и B , но

«ниже» (рис.11). Прямая H_0 , строго отделяющая B' от A , не может быть вертикальной (ибо вертикальная прямая, проходящая через точку B' , проходит и через B , а надо, чтобы они были строго отделены). Значит, она – график аффинной функции.

Предположим теперь, что надграфик A_1 функции, являющейся пересечением надграфиков аффинных функций, расположенных под множеством A (ясно, что он содержит A), не совпадает с A . Следовательно, существует точка B_1 из A_1 , не принадлежащая A . Прямая H_1 , отделяющая B_1 от A , не может быть графиком аффинной функции, ибо тогда получалось бы противоречие с построением множества A_1 . Значит, она вертикальна. Прямая H_0 не может лежать «над» точкой B_1 (ибо тогда мы пришли бы к тому же противоречию). Так как прямая H_0 невертикальна, она пересекает вертикальную прямую (невертикальная прямая не может быть параллельна вертикальной). Пусть C – точка пересечения H_0 и H_1 . Возьмем точку B'_1 «выше» B_1 и проведем прямую через C и B'_1 . Она невертикальна и лежит под A выше B_1 . Противоречие доказывает теорему.

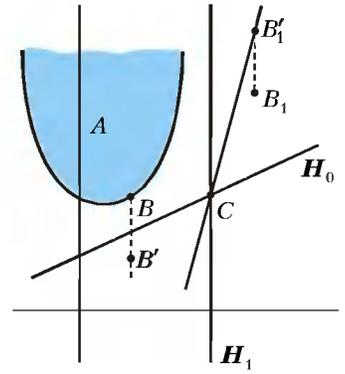


Рис.11. Теорема Фенхеля–Моро

Заключительные замечания

1. При выводе теоремы Фенхеля – Моро нам, по сути дела, удалось доказать больше, чем мы обещали. Рассмотрим ту же плоскость с горизонтальной осью (на этот раз числовой) и вертикальной осью, проходящей через начало координат. В качестве аффинных функций рассмотрим суммы экспонент $C_1e^x + C_2e^{-x}$. Нетрудно убедиться в том, что это семейство функций имеет много свойств обычных аффинных функций. В частности, через любые две точки плоскости проходит единственная «экспоненциальная» аффинная функция. Естественным образом определяется «экспоненциально выпуклая функция» (т.е. функция, надграфик которой вместе с двумя точками содержит весь «экспоненциальный отрезок», соединяющий эти точки). Невыпуклое в обычном смысле множество – надграфик функции $y = e^x - e^{-x}$ (рис.12) – экспоненциально выпукло. Если же проанализировать наше доказательство, то можно убедиться, что доказан следующий результат: для того чтобы функция была верхней гранью экспоненциально аффинных, необходимо и достаточно, чтобы она была экспоненциально выпуклой и замкнутой.

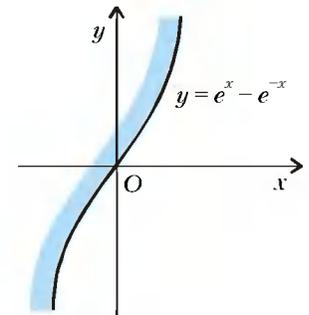


Рис. 12. Экспоненциально выпуклое множество

2. Нами были доказаны некоторые теоремы плоской выпуклой геометрии. Следует сказать при этом, что почти без изменений доказательство переносится на конечномерный евклидов случай любой размерности, а некоторые результаты – на бесконечномерный случай.

Поясним, что это значит.

Представим себе нашу плоскость в несколько ином виде (чтобы переход к конечномерному и бесконечномерному случаям был вполне естественным). Выделим на плоскости точку и обозначим ее буквой O . Точкам плоскости дадим другое название, будем говорить, что это векторы, и будем обозначать их малыми буквами из конца латинского алфавита.

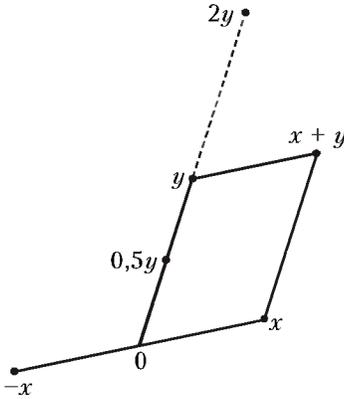


Рис.13. Векторы

Числа будем обозначать греческими буквами. Вектор, соответствующий точке O , будем называть нулевым и обозначать цифрой 0 .

Векторы можно складывать «по правилу параллелограмма» и естественным образом умножать на числа (рис.13). В частности, противоположный вектор — это вектор, умноженный на минус единицу. При этом легко проверяются различные свойства, вроде «от перемены мест слагаемых сумма не меняется».

Выпишем все же несколько таких свойств (далее x, y и z — произвольные векторы нашей плоскости):

- 1) $x + y = y + x$, 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$, 3) $x + 0 = x$,
- 4) $x + (-x) = 0$, 5) $1 \cdot x = x$, 6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
- 7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, 8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Но в точности такими же свойствами обладают многие другие объекты. Рассмотрим, например, совокупность полиномов степени не выше n . Их тоже можно складывать и умножать на числа, и при этом будут удовлетворяться все свойства 1)–8). Можно рассмотреть наше трехмерное пространство, выбрать на нем точку O (которую станем обозначать также и нулем), определить сложение векторов по правилу параллелограмма и умножение вектора на число естественным образом, и снова будут удовлетворяться свойства 1)–8).

Еще один пример. Совокупность n -ок (упорядоченных наборов из n чисел) $x = (x_1; \dots; x_n)$ с покомпонентным сложением и покомпонентным умножением на число также будет системой точек, удовлетворяющих свойствам 1)–8). Это векторное пространство обозначают \mathbf{R}^n .

Если $n = 2$, то соответствие точек плоскости и пар $x = (x_1; x_2)$ осуществляется введением системы координат. Так строится *арифметическая модель* плоскости.

Любая совокупность точек, в которой определены операции сложения и умножения на числа со свойствами 1)–8), называется векторным пространством. При этом на плоскости любые два неколлинеарных вектора e_1 и e_2 обладают тем свойством, что любой вектор x через них «линейно выражается», т.е. представляется в виде $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$. В нашем пространстве можно выбрать три таких вектора, и потому наше пространство называется трехмерным. А полиномы $t \rightarrow x(t)$ степени n являются линейными комбинациями $n + 1$ полинома: $1, t, t^2, \dots, t^n$. Векторное пространство таких полиномов $(n + 1)$ -мерно.

Но, как вы знаете, на плоскости можно ввести скалярное произведение, которое ставит в соответствие двум векторам $x = (x_1; x_2)$ и $y = (y_1; y_2)$ число

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Аналогично, в трехмерном пространстве скалярное произведе-

ние векторов $x = (x_1; x_2; x_3)$ и $y = (y_1; y_2; y_3)$ равно

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Скалярное произведение обладает следующими свойствами: а) $(x, x) \geq 0$ и равно нулю, лишь если $x = 0$, б) $(x, y) = (y, x)$, в) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$, г) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$.

Все эти свойства для векторов на плоскости и в трехмерном пространстве доказываются безо всякого труда. А на пространстве полиномов можно определить скалярное произведение полиномов $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ не геометрически, а аналитически, например так: $(x(\cdot), y(\cdot)) = \int_0^1 x(t)y(t)dt$. Конечно-

мерные векторные пространства со скалярным произведением, обладающим свойствами а)–г), называются *евклидовыми пространствами*. Евклидовым n -мерным пространством является пространство n -ок со скалярным произведением векторов $x = (x_1; \dots; x_n)$ и $y = (y_1; \dots; y_n)$, определяемых

равенством $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Можно рассмотреть и векторное пространство бесконечных последовательностей $x = (x_1;$

$x_2; \dots)$ таких, что $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$, с покомпонентным сложением и покомпонентным умножением на число. Получим векторное пространство, в котором вводится скалярное произведение векторов $x = (x_1; x_2; \dots)$ и $y = (y_1; y_2; \dots)$ по формуле $\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$. Такое пространство обозначают l_2 . Пространство

l_2 не является конечномерным. Оно бесконечномерно. Бесконечномерные векторные пространства со скалярным произведением (и еще одним свойством полноты, определение которого просто, но все-таки за пределами наших интересов) называются *гильбертовыми пространствами*. В евклидовом и гильбертовом пространствах расстояние между точками x и y измеряется числом $d(x, y) = \sqrt{(x - y, x - y)}$, а значит, понятие замкнутого множества определяется аналогично тому, как это было сделано на плоскости. В гильбертовых пространствах доказывается, что существует точка, на которой достигается кратчайшее расстояние от точки, *не принадлежащей выпуклому замкнутому множеству, до точек этого множества*.

Вернемся к нашим теоремам. Если просмотреть их доказательства, то можно убедиться в том, что все результаты переносятся на конечномерный случай, а некоторые и на гильбертов.

Наряду с прямыми, в многомерных случаях основополагающую роль играют *гиперплоскости* — плоскости, перпендикулярные прямым (на плоскости понятия прямой и гиперплоскости совпадают, в трехмерном пространстве гиперплоскости — это привычные нам плоскости).

Формулировка и доказательство теоремы о строгой отделимости (теорема Мазура) почти полностью сохраняются. В определении строгой отделимости и в формулировке теоремы надо слово «прямая» заменить на слово «гиперплоскость», и тогда само доказательство можно проводить в точности по той же схеме, что на плоскости. А именно, надо найти ближайшую к точке B точку C из множества A , провести гиперплоскость, проходящую через C перпендикулярно прямой, соединяющей точку B с C , и далее повторить доказательство плоской теоремы, сведя все к плоскому случаю (для этого надо провести плоскость через B, C и D и рассуждать далее только в этой плоскости).

Формулировка и доказательство теоремы Минковского не требуют изменений.

Доказательство теоремы Крейна–Мильмана сохраняется в конечномерном случае. Его надо проводить по индукции. Для плоскости теорема доказана. Пусть она доказана для $(n - 1)$ -мерных выпуклых множеств; докажем ее для n -мерных множеств (в n -мерном пространстве). Рассмотрим тогда любую гиперплоскость H_0 в этом пространстве, найдем на A самую дальнюю от H_0 точку A_0 и проведем через нее гиперплоскость H'_0 , параллельную H_0 . Гиперплоскость H'_0 пересекается с A по выпуклому множеству размерности $\leq n - 1$ (ибо сама гиперплоскость имеет размерность $n - 1$), и, по предположению индукции, в этом пересечении есть крайняя точка, которая будет крайней и для самого множества A . Дальнейшую часть доказательства читатель может восполнить самостоятельно. (В бесконечномерном случае применяется особая индукция, а геометрическая суть остается прежней.)

Теорема Каратеодори также обобщается на n -мерное пространство: каждая точка, принадлежащая выпуклой оболочке конечной системы точек, расположенных в n -мерном пространстве, принадлежит выпуклой оболочке системы из не более чем $n + 1$ точки системы.

Доказательство этого результата проводится индукцией по размерности. Можно посоветовать читателю продумать его в трехмерном пространстве.

То же самое можно посоветовать читателю и относительно теоремы Радона (в которой в n -мерном пространстве надо 4 заменить на $n + 2$). Но если до сих пор геометрические доказательства были проще или сравнимы с аналитическими, то по отношению к теореме Радона это не так. Обобщение того рассуждения, с помощью которого мы доказали плоскую теорему Радона, достаточно громоздко, в то время как алгебраическое доказательство почти тривиально (см. [2]).

В теореме Хелли в n -мерном случае число 3 надо заменить на $n + 1$, а доказательство сохраняется.

Наконец, формулировка и доказательство теоремы Фенхеля–Моро сохраняется аж в гильбертовом случае. Надо только слово «прямая» заменять на «гиперплоскость», «вертикальная прямая» на «вертикальная гиперплоскость», а «точка C » на «множество C », являющееся пересечением гиперплоскостей H_0 и H_1 . Через C и точку B_1 проводится единственная гиперплоскость, являющаяся графиком аффинной функции. Так что все элементы рассуждения сохраняются.

3. Мы могли бы выше рассматривать не только евклидову плоскость, но и плоскость Лобачевского.

Когда-то исследования Лобачевского были приняты в штыки, над ним издевались, объявляя его геометрию ахинеей (таким человеком был, например, Н.Г.Чернышевский). Но сейчас для любого читателя «Кванта» объяснить, что существует объект, в котором имеются аналоги точек, прямых и полуплоскостей, есть расстояния, но нет параллельности, совсем нетрудно.

Таким объектом является «полуплоскость Пуанкаре» – верхняя полуплоскость (без ограничивающей ее горизон-

тальной прямой). Точки полуплоскости – это точки геометрии Лобачевского, а аналоги прямых (прямые Лобачевского) – это либо вертикальные лучи, либо полукружности, центр которых лежит на горизонтальной прямой, ограничивающей полуплоскость (рис. 15).

Упражнение 7. Докажи-те, что через две различные

точки полуплоскости Пуанкаре проходит единственная прямая Лобачевского.

Прямая Лобачевского делит полуплоскость на две части, являющиеся аналогами полуплоскостей на евклидовой плоскости; точка на прямой Лобачевского разбивает ее на два луча, а две точки на прямой Лобачевского стягивает дуга, которая является аналогом отрезка. Так что имеется полная аналогия с теми свойствами, которые выше были отмечены на нашей евклидовой плоскости. А значит, на полуплоскости Пуанкаре можно определить понятие выпуклой фигуры – фигуры, которая вместе с двумя точками содержит весь «отрезок», их стягивающий.

Между прямыми Лобачевского естественным образом определяется угол, как угол между касательными к окружностям – прямым Лобачевского – в точке их пересечения (или угол между вертикальной прямой и касательной к пересекающей ее окружности – прямой Лобачевского).

Для того чтобы ввести расстояние на полуплоскости Пуанкаре и определить движения на этой полуплоскости, нужны комплексные числа. Приведем нужные формулы для полноты картины. Полуплоскость Пуанкаре состоит из точек $z = x + iy$ комплексной плоскости, для которых мнимая часть $\text{Im } z = y > 0$. Расстояние между точками z_1 и z_2 определяется по формуле

$$\rho(z_1; z_2) = k \ln \frac{1 + \left| \frac{z_2 - z_1}{z_2 - \bar{z}_1} \right|}{1 - \left| \frac{z_2 - z_1}{z_2 - \bar{z}_1} \right|}, \quad k > 0,$$

а движения – это преобразования вида $z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}$, где a, b, c, d – действительные числа, причем $ad - bc = 1$ (здесь $\bar{z} = x - iy$).

Но собственно для теории выпуклости на плоскости Лобачевского важны лишь два факта, связанных с понятием расстояния. Множеством точек (или, как говорят еще, «геометрическим местом точек»), равноудаленных от прямой на евклидовой плоскости, являются параллельные прямые. А на плоскости Лобачевского параллельных прямых много, но множеством точек, равноудаленных от прямой Лобачевского, не будет ни одна из них. Такими множествами (*эквидистантами* – множествами равных расстояний) будут на полуплоскости Пуанкаре дуги окружностей, проходящие через те две точки, в которых прямая Лобачевского пересекается с горизонтальной прямой (или лучи, исходящие из той же точки, что и вертикальная прямая).

Множеством точек, равноудаленных от точки на полуплоскости Пуанкаре, будет (как и на евклидовой плоскости) окружность, правда, центр ее не совпадает с самой точкой.

Этих сведений достаточно для того, чтобы читатель самостоятельно, без поводыря, смог бродить по выпуклому миру плоскости Лобачевского. Он может, например, сделать попытку самостоятельно построить там теорию выпуклых множеств.

В качестве упражнения попробуйте сформулировать и доказать аналоги всех теорем плоской выпуклой геометрии, о которых рассказывалось выше (т. е. теорем о строгой отделмости, Минковского, Крейна–Мильмана, Каратеодори, Радона и Хелли), для геометрии Лобачевского в ее модели на полуплоскости Пуанкаре.

Литература

1. Болтянский В. Г., Яглом И. М. Выпуклые фигуры. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1951.
2. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. – М.: УРСС, 2003.

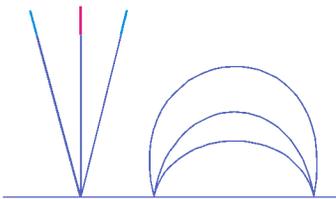
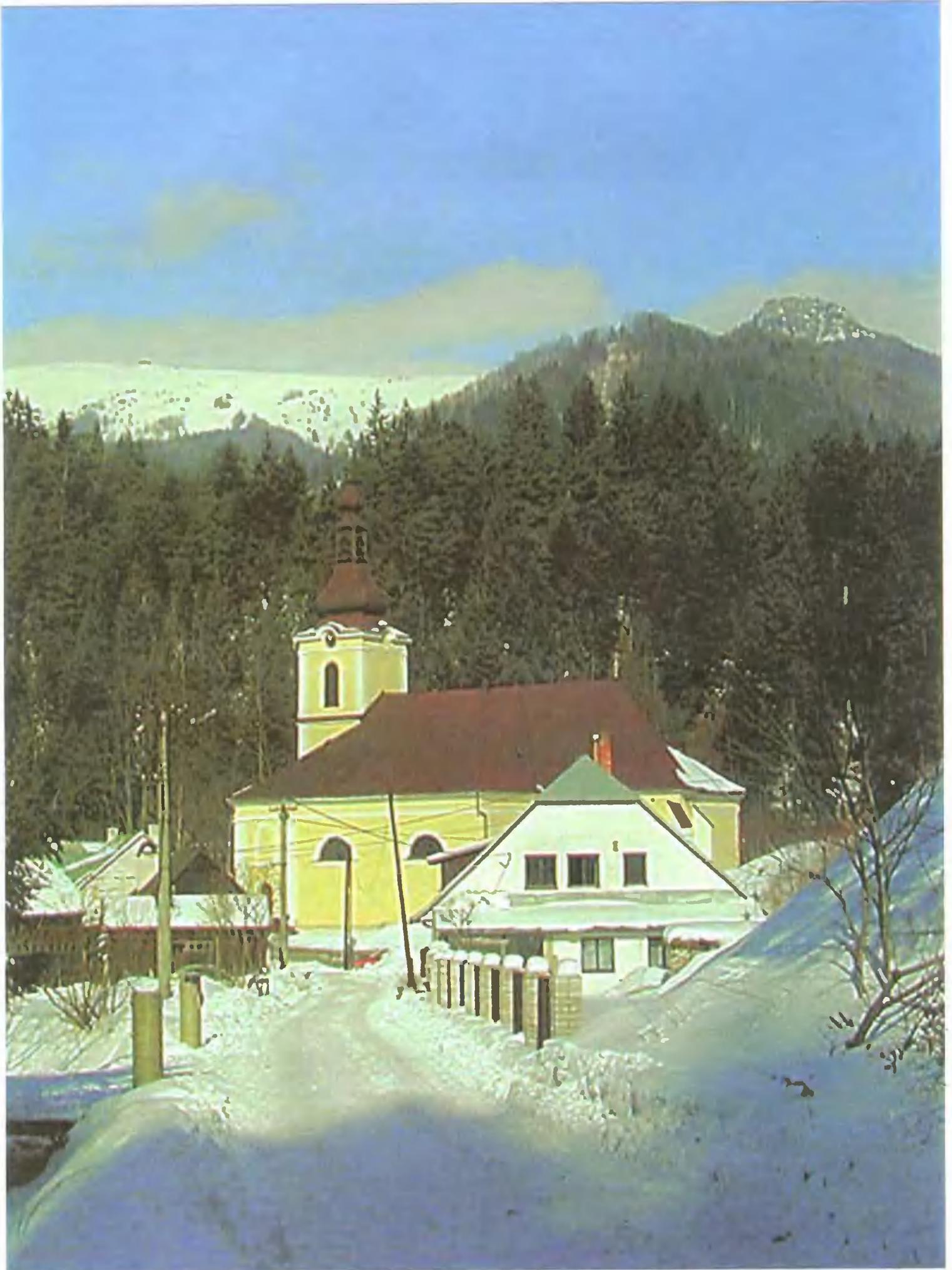


Рис.14. Прямые Лобачевского (красные линии) и эквидистанты (синие линии)



Волны на срезе бревна

Я.ЛАКОТА, В.МЕЩЕРЯКОВ

Дрова для печи

Посмотрите на фотографии на рисунках 1 и 2. Они сделаны в Старых Горах (Stare Hory) Словакии во время пиления дров для печи.

– Валэрий! – воскликнул Ян. – Старые Горы это богоугодное место. Здесь печи топят дровами, украшенными волновыми узорами! В вашей подмосковной деревне так же?

Подмосковная деревня встретила Валерия дымом и лесными пожарами. Здесь не было ни прохладного елового леса, ни горной речки с ласково-природным именем Студничка, в которой можно было охладить разгоряченную голову. Поэтому, найдя старую лучковую пилу, похожую на ту, что использовалась в Словакии, Валерий принялся за дело. Береза распилилась без волнообразного среза. Ясень, рябина, вишня – тоже. Тотчас в Словакию полетела электронная почта: «Дорогой Яно! Похоже на то, что причиной волнообразного среза бревна является неоднородность зубьев пилы ...»

На рисунках 3 и 4 приведены фотографии использованных пил. Видите, в чем отличие? На рисунке 3 пила

имеет неоднородность в виде двух как бы сросшихся или не прорезанных зубьев с длиной между минимумами окружающих ее прорезей около 1,5 см, совпадающую с длиной волны на срезах бревен на рисунках 1 и 2. Похоже, что движение регулярной, т.е. повторяющейся неоднородности по деформируемой среде в присутствии регулярно меняющихся сил трения (сил, действующих на пилу со стороны дерева) может приводить к регулярным деформациям пилы и, вследствие третьего закона Ньютона, к регулярно меняющемуся силовому воздействию на дерево со стороны пилы.

Эта рабочая гипотеза удовлетворяла случайно увиденному проявлению природы. Но, во-первых, было сомнение в ее справедливости, поскольку опытов было мало и для их увеличения пришлось бы приобрести не один десяток различных пил. А во-вторых, в роли неоднородности, обуславливающей колебания пилы, могла выступать не только не прорезанная часть пилы, но и пары разведенных в разные стороны зубьев, которые тоже имеют характерный размер 1,5 см. В этом случае явление волнообразования пришлось бы приписать не конструктивному различию пил, а чему-то другому.

Тут вспомнилось, что регулярно меняющиеся силы трения встречаются при реализации движения по меха-



Рис. 1



Рис. 2



Рис. 3



Рис. 4

низу «застрывать-проскальзывать», например при движении смычка по скрипичной струне. Посмотреть на это явление и получить удовольствие от анимационной картины можно, например, на австралийском сайте www.phys.unsw.edu.au/~jw/Bows.html. Функционирование отдельно взятого зуба пилы, по-видимому, подобно движению смычка по струнам скрипки. В режиме застревания смычок увлекает за собой струну, а зуб пилы – волокно дерева. В режиме скольжения струна срывается и движется в сторону, противоположную смычку, создавая тем самым колебания струны, а волокно дерева разрывается.

Конечно, более подробный анализ распределения упругих напряжений в пиле возможен только в условиях физической лаборатории, но теперь основные черты увиденного явления казались ясными. Движение неоднородной по структуре зубьев пилы по механизму «застрывать-проскальзывать» ведет к неоднородным силовым воздействиям на пилу. Это формирует поперечные колебания пилы, которые приводят к вырыванию частиц дерева из одних мест и переносу их на другие.

Однако главного оценщика завершенности исследования – чувства понимания механизма, приводящего к волнообразному срезу бревна с помощью лучковой пилы, – не пришло. Первая видимая проблема состояла в следующем.

Кинематика пилы

Возможные изгибы пилы ограничены в своей кинематике двумя вертикальными срезами бревна. Это порождает трудности в понимании того, каким же образом колеблющейся и продольно движущейся пиле удастся проскочить через распил бревна, в котором имеются то расширяющиеся, то сужающиеся области (отсканированная форма этих областей вместе с нарисованной не колеблющейся пилой показана на рисунке 5). Ведь очевидно, что из-за продольных смещений

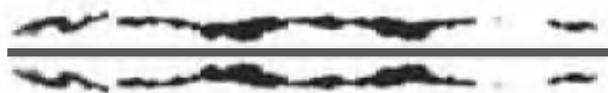


Рис. 5

пилы по правилу «туда-сюда» любые имеющие место или возникающие внутри распила бревна неровности должны срезаться!

Выход из этого противоречия один – изгибы пилы должны представлять собой стоячие волны, имеющие нули и максимумы для прорезания впадин и сохранения выступов. Как известно, стоячая волна образуется при наложении двух бегущих волн, движущихся в разные стороны. Это значит, что одна из бегущих волн должна двигаться в сторону движения пилы, т.е. вместе с ее зубьями, а вторая – в противоположном направлении. Посмотрим, может ли быть такое.

С этой целью проведем компьютерный эксперимент. Задавая длину волны $\lambda = 1,5 \cdot 10^{-2}$ м, определим две безразмерные переменные. Одну из них – для задания смещений x точек пилы: $\xi = \pi x / \lambda$. Другую – для

задания фазы волны, зависящей от времени t и скорости v перемещения пилы: $\phi = \pi v t / \lambda$. Для определенности примем, что $v \sim 1$ м/с, хотя следует сразу же заметить, что пила не имеет постоянной скорости при пилении. Однако сейчас важно другое – необходимо понять в принципе, каким же образом может быть реализована кинематика пилы.

С использованием введенных переменных определим следующие функции: функцию

$$o(\xi, \phi) = 0,25 \sin(\xi - \phi) + 0,25 \sin(\xi + \phi),$$

содержащую суперпозицию двух бегущих волн, – для описания стоячей волны, функцию

$$s(\xi, \phi) = \frac{1}{\pi} \arcsin(\sin(\xi - \phi))$$

– для описания треугольной периодической структуры зубьев пилы и, наконец, функцию

$$F(\xi, \phi) = o(\xi, \phi) + s(\xi, \phi) \quad (*)$$

– для описания эффекта наложения движения зубьев на волновое движение пилы. Постоянные коэффициенты осциллирующих функций $o(\xi, \phi)$ и $s(\xi, \phi)$ заданы из расчета того, чтобы максимальная амплитуда отклонений точек пилы от равновесия равнялась 1.

На рисунке 6 показан характер изменения стоячей волны $o(\xi, \phi)$ и суммарной функции $F(\xi, \phi)$ в различные моменты времени, соответствующие значениям фазы $\phi = 0; 0,25\pi; 0,5\pi; 0,75\pi; \pi$. На рисунке 6,а зубья пилы находятся в состоянии зацепления: верхние – в точках $\xi_1 = \pi/2$ и $\xi_2 = 5\pi/2$, а нижние – в точках $\xi_3 = 3\pi/2$ и $\xi_4 = 7\pi/2$. Пила в этих точках прогнута в сторону зацепления. Понятно, что если какой-либо зуб зацепился за волокно дерева, то пила прогнется в направлении этого зацепа. Через время $\Delta t = \phi\lambda / (\pi v) = 3,75 \cdot 10^{-3}$ с (см. рис.6,б) зубья пилы начинают выходить из состояния зацепления и переходить к состоянию скольжения. Еще через Δt , когда стоячая волна обращается в ноль (см. рис.6,в), зубья пилы принимают то положение, при котором должен происходить идеальный распил бревна. В этом случае ширина распила должна быть приблизительно равной разводу зубьев. И по-видимому, именно в окрестности этого момента времени, когда зубья пилы проскальзывают мимо вертикальных зацеплений на поверхностях среза бревна, они зацепляются за волокна в горизонтальной плоскости и, вырывая их, углубляют пропил бревна. Спустя еще время Δt амплитуда стоячей волны принимает отрицательные значения в окрестностях точек ξ_1 и ξ_2 (см. рис.6,г). Нижние зубья начинают наезжать на пучности стоячей волны и еще через время Δt переходят к состояниям зацепления в этих точках (см. рис.6,д). То же происходит с верхними зубьями в точках ξ_3 и ξ_4 . Вот что формирует длину волны, равную λ на срезе бревна! Например, на верхнем срезе расстояние между ближайшими углублениями равно

$$\Delta x = (\xi_3 - \xi_1) \frac{\lambda}{\pi} = \lambda.$$

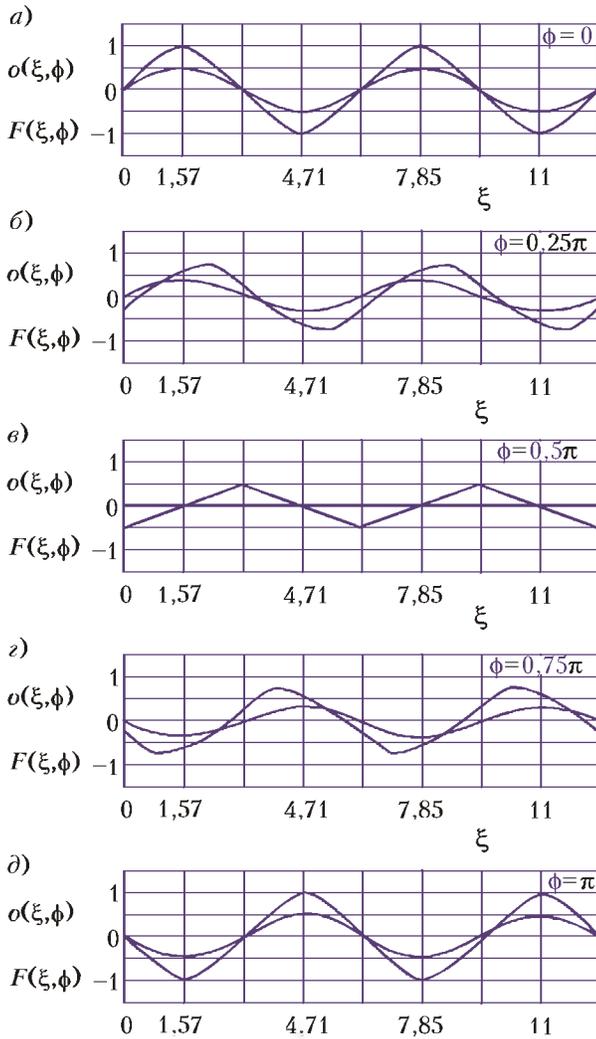


Рис. 6

Рассмотренный вариант кинематики пилы согласуется с двумя основными фактами. Во-первых, состояния зацепления зубьев, при которых они прорезают впадины на противоположных срезах бревна, находятся друг против друга, и, во-вторых, расстояние между серединами впадин (или выступов) равно длине волн λ на срезах бревна. На рисунке 7 эти результаты более наглядно иллюстрируются контурными графиками функций $F(\xi, \phi)$, $o(\xi, \phi)$ и $s(\xi, \phi)$, на которых изображены линии постоянных значений соответствующих функции. Области максимумов функции прорисованы красным цветом, области минимумов – синим. Например, в точках ξ_1 и ξ_2 при $\phi = 0$ находятся максимумы функции $F(\xi, \phi)$, соответствующие точкам зацепления верхних зубьев, показанных на рисунке 6,а.

Можно сказать, что рисунок 7 представляет собой графическое уравнение, являющееся альтернативой функциональному уравнению (*). Графическое уравнение очень удобно для модельных экспериментов. Изменяя характер и параметры исходных функций $o(\xi, \phi)$ и $s(\xi, \phi)$ и анализируя расположение экстремумов функции $F(\xi, \phi)$, можно судить о возможных вариантах кинематики пилы. Эти варианты содержат

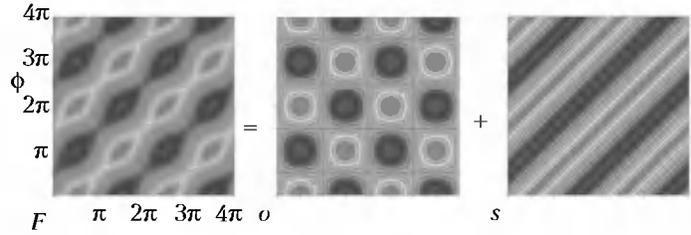


Рис. 7

множество интереснейших деталей, которые Ян и Валерий любезно предоставляют читателям для самостоятельных исследований. Более того, они предлагают заинтересованным читателям, являющимся счастливыми обладателями программы 3D Studio MAX (Autodesk, Inc.), создать анимационную картину движения пилы по типу картины движения смычка по скрипичной струне, созданной на ранее упомянутом австралийском сайте.

Проведенный анализ вряд ли можно считать исчерпывающим как из-за выпавших из рассмотрения изгибных колебаний пилы, обусловленных разводом ее зубьев в разные стороны, так и из-за пренебрежения длинноволновыми колебаниями пилы, например с длиной волны, равной удвоенному размеру всей пилы, или с изменяющимися во времени длинами волн, равными расстоянию от краев бревна до концов движущейся пилы. Последние, кстати, наверняка присутствуют – вспомните, как пила изменяет тон своего пения. Этот тип колебаний можно легко смоделировать, например – поведя ногтем по опутанной канителью басовой фортепьянной или гитарной струне.

Тем не менее, кинематика пилы казалась выясненной, и потому было решено забыть о конструктивном различии пил. Но тут возникли другие проблемы.

Еще проблемы

– Валэрий! Волны на бревнах перестали появляться!
 – со строчек электронного письма слышался взволнованный голос Яна.

Валерий, не долго думая, собрался в дорогу, прихватив с собой много музыки на CD и массу теплых вещей.

В горах Словакии стояли первые морозы. Бревна бука, служившие для летних экспериментов, были замерзшими. Неужели причина исчезновения волн в том, что зубья пилы не могут прорезать соответствующие впадины в отвердевшем от низкой температуры бревне? Решено было заново проверить волнообразование на срезах бревен, исключая влияние температуры и распиливая бревна разных пород. И что вы думаете? Действительно, на срезе отогретого бука появились прежде наблюдаемые и достаточно отчетливые впадины и выступы. На срезе более прочного ствола черешни волны тоже были, но едва заметные – они показаны на рисунке 8. В то же время было сомнение в том, что черешня прочнее бука. На одном из сайтов Интернета удалось раскопать информацию о гигроскопичности бука, снижающей его прочность, поэтому лучшее образование волнистого среза на буке



Рис. 8

оказалось возможным списать на сырые ночи в ущелье Старых Гор.

Так вскрылась еще одна сторона рассматриваемого явления. На твердых породах дерева или на дереве, отвердевшем от холода, образования волн на срезах не происходит, потому что пила не может прорезать в нем волны. Отсюда легко сделать вывод, что на мягких породах дерева волнообразный срез не должен наблюдаться из-за того, что образующиеся неоднородности легко срезаются пилой.

А теперь представьте – среди погожего ноябрьского дня вдруг начавшейся оттепели раздаются громы и молнии! Это Ян и Валерий решили попилить бревна пилой без неоднородности в расположении зубьев (эта пила показана на рисунке 4). Приблизительно каждый третий распил содержал явно выраженные волны на срезе. Это был шок!

– Я зачем сюда прилетел, Яно? – кричал Валерий. – Дрова пилить? Их и так уже мало осталось. Смотри, это не бревна, а одни сучки.

И тут они заметили, что волны на срезах бревен под действием однородно зубчатой пилы образуются тогда и только тогда, когда внутри дерева или по его контуру встречаются сучковатые неоднородности. Особенно ярко этот эффект проявляется при распиле по сучку,



Рис. 9



Рис. 10

как это показано на рисунке 9. В то же время, на том же самом бревне бука (рис.10) и на более прочной черешне (рис.11) при их распиле по круглому сечению, не содержащему выпирающий сук, поверхность среза была идеально ровной. Присмотритесь еще раз к фотографиям черешни, распиленной неоднородной пилой (см. рис. 8) и однородной (см. рис. 11). Не удивительно, что роль неоднородностей самого бревна едва не оказалась упущенной – не станешь же по сучкам пилить при ручной работе, в отличие, скажем, от деревообрабатывающего цеха, где расстояние до распила задают фиксированным.

Подтверждение тому, что неоднородность поверхности, по которой перемещается однородная и могучая изменять свою форму среда, в данном случае пила, может порождать колебания этой среды, было найдено в речке Студничке. Каждый достаточно большой булыжник, лежащий на краю Студнички, порождал статический солитон с характерной длиной, приблизительно равной длине булыжника. (С солитонами вы можете познакомиться, например, по книге А.Т.Филиппова «Многоликий солитон» – серия «Библиотечка «Квант», вып.48.) Но вода не является упруго-дефор-



Рис. 11

мируемой средой, в отличие от полотна пилы. Поэтому возмущение движущейся воды булыжником образует длинный горб. На этом процесс воздействия булыжника на воду заканчивается.

А вот прогиб упругой стальной пилы в окрестности неоднородности дерева может порождать колебательное движение всей пилы. Возникновение такого прогиба, так же, как и в случае неоднородной пилы, должно определяться различием силового взаимодействия пилы с деревом вне этой неоднородности и внутри нее. К тому же, один знакомый подтвердил, что он с 10-летнего возраста наблюдает волны, образуемые затупившимися пилами. Поэтому появление волн на срезе бревен является для него сигналом к необходимости заточить пилу. Это означает, что после некоторого времени эксплуатации заточенной пилы наступает момент, когда пила теряет остроту заточки и становится подверженной качественно новому воздействию со стороны неоднородностей.

По-видимому, зависимость амплитуды образующихся на срезе выступов от прочности дерева и остроты заточки пилы имеет вид, представленный на рисунке 12. При малых значениях прочности дерева $\sigma < 1$ или при острой пиле волн не наблюдается вообще. При значениях $\sigma > 1$ или при затупленной пиле амплитуда образующихся на срезе выступов и впадин уменьшается с ростом прочности дерева или с уменьшением остроты заточки пилы. Наконец, область $1 < \sigma < 3$ является критической, по которой можно судить, достаточно ли заточена пила для данной породы дерева и его физического состояния, чтобы на его срезе не образовывались волны. Например, красная кривая на рисунке 12 соответствует более острой пиле, чем синяя кривая, хвост которой объясняет исчезновение волн на срезе бука в первые октябрьские морозы совместным влиянием низких температур, упрочнивших дерево, и

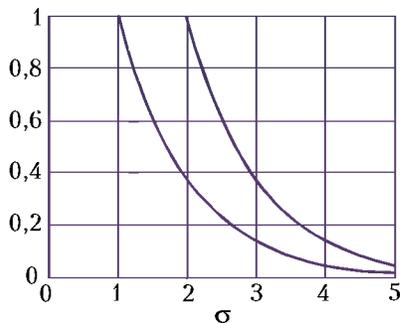


Рис. 12

затупленностью пилы после многочисленных летних экспериментов.

Проведенные рассуждения позволяют сделать обобщающее утверждение. А именно: необходимым условием образования волн на срезе бревна является наличие каких-либо неоднородностей. Правда, это утверждение выглядит слишком общё. Та пила, которая до сих пор считалась однородной, на самом деле тоже содержит неоднородность в виде двух соседних разведенных в разные стороны зубьев, поэтому при распиловке бревен названное необходимое условие выполняется

всегда. Как следствие, появление волн на срезе должно зависеть от достаточных условий, включающих различные соотношения физических характеристик бревна и пилы.

Вот таким образом Яну и Валерию пришлось вспомнить об их рабочей гипотезе, основанной на первоначальных опытных данных и конструктивном различии пил. С одной стороны, и опыты и физически обоснованные рассуждения подтверждают необходимость существования каких-либо неоднородностей для формирования поперечных колебаний пилы. Но, с другой стороны, факт формирования волн на срезе бревна под действием и той и другой пилы упрямо говорит о том, что механизм этого явления должен определяться общим элементом этих пил, т.е. разведенными в разные стороны зубьями. И это подтверждается рассмотренной ранее кинематикой пилы, которая принципиально связана с разводом пилы и не зависит от наличия неоднородностей в расположении зубьев. К сожалению, Яну и Валерию не удалось найти однородно зубчатую пилу, которая регулярно нарезала бы волны при отсутствии достаточно крупных неоднородностей дерева. Хотя, конечно, у них остается надежда на то, что с течением времени они поймут момент, соответствующий пику на рисунке 12, когда пила начнет затупляться и нарезать волны за счет колебаний, вызванных либо своею собственной неоднородностью в виде двух соседних зубьев, либо такими мелкими неоднородностями, как, например, годичные кольца дерева.

Вообще, роль неоднородностей в образовании волн довольно сложная. Внутренние неоднородности дерева, неоднородности дерева вдоль поперечного контура бревна и неоднородности самой пилы могут заставлять пилу колебаться по-разному и при совместном воздействии приводить к исключительно сложной форме волновой поверхности среза бревна. Посмотрите, пожалуйста, на рисунок 13. Как говорится, без коммен-



Рис. 13



Рис. 14



Рис. 15

тариев, тем более что детальных исследований в этом направлении не удавалось провести по причине израсходования экспериментального материала – бревна оказались распиленными на чурбаны, а чурбаны были расколоты на поленья.

Пилить было больше нечего. Ян и Валерий ходили потерянные, бросая осторожные взгляды на окружающие ели. Их мучил гамлетовский вопрос – спилить или не спилить. Но тут в голову Яна пришла блестящая мысль – начать пилить полена, т.е. куски уже распиленных и расколотых бревен. Сразу же удалось дать иллюстрацию двум типам влияния неоднородностей на образование волновой структуры среза.

Распилив одно полено (рис.14), им удалось показать, что волнообразование может возникать не только вследствие однородного увеличения твердости дерева (например, в области большого сучка, как на рисунке 9), но и вследствие существования внутри дерева локальной силовой неоднородности. Распилив другое (рис.15), они выяснили, что изменение формы границ распила (в данном случае, переход от круговой формы поперечника бревна к сегментной форме полена) практически не меняет формы волновой структуры среза. На радостях они даже не обра-

тили внимание на то, где и какой из двух пил пользовались, но это было уже неважно, поскольку внимательный читатель и сам разберется, что к чему.

Фреттинг

Возможно, опрометчивый читатель подумает: ну вот, дошли до того, что в век тонких технологий они тут, понимаете ли, дрова ручной пилой пилят да еще физику этого архаичного процесса обсуждают, не говоря уж об эмоционально-лирической стороне такого обсуждения. Здесь следует заметить, что аналог рассмотренного явления встречается в работе машин и механизмов в условиях трения между металлическими, композиционными или пластическими материалами их деталей. Называется это явление фреттингом (fretting – изнашивание). Его страшные проявления сокращают срок службы деталей и могут быть причиной как мелких поломок, так и настоящих катастроф.

Суть фреттинга состоит в вырывании мелких частиц или волокон с одних участков трущихся поверхностей и их перенос на другие в условиях осциллирующих нагрузок малой амплитуды. При этом изменяется динамика движущихся друг относительно друга деталей, увеличиваются силы трения, растет тепловыделение и т.п.. Нередко фреттинг сопровождается коррозией, что существенно усугубляет негативные проявления этого эффекта и, в частности, может приводить к стихийным прерываниям контактов электрических цепей. Последняя проблема особенно актуальна при эксплуатации радиоэлектронного оборудования на движущихся объектах: автомобилях, самолетах, морских судах, космических кораблях и пр., где имеют место вибрации, приводящие к циклическому силовому взаимодействию между трущимися деталями.

Сегодня в мире работают сотни, если не тысячи, научных институтов и лабораторий, исследующих явление фреттинга. Об этом можно судить по количеству ссылок, которые вы сами можете найти, например, с помощью поискового сервера «Google», задавая слово «fretting». В любом случае, загляните на американские сайты www.hghouston.com/photoset.html и corrosion.ksc.nasa.gov/html/fretcor.htm, где вы найдете фотографии, похожие на те, которые приведены в данной статье.

Физика фреттинга чрезвычайно сложна. Связано это с тем, что в этом явлении идут равно значимые процессы и с характерными значениями энергий порядка 10^{-2} эВ, и с энергиями около 1 эВ, и с энергиями много больше десятков электронвольт. Первые соответствуют возбуждениям в электронной и фононной подсистемах материалов, вторые описывают процессы переноса отдельных атомов, диффузии и коррозии, третьи отвечают за перенос макроскопических частичек или волокон вещества и тепловыделение. Поэтому для анализа фреттинга используют все методы общей и теоретической физики – от термодинамики, теории упругости и пластичности материалов до квантовой теории поля. Хотя и без этих методов, а лишь руководствуясь описанными наблюдениями над пилой, можно предложить несколько правил по избежанию фреттинга.

Во-первых, ясно, что поверхности трущихся деталей не должны содержать неоднородностей, т.е. областей, различающихся своими упругими и прочностными свойствами. Во-вторых, необходимо достаточно большое отличие в прочностных свойствах трущихся деталей. В этом случае поверхностные неровности более прочной детали будут срезать образующиеся борозды на менее прочной. Конечно, изнашивание менее прочной детали возрастет, но, главное, удастся избежать фреттинг-коррозии. Это же правило срабатывает, когда в зимнее время после включения компьютера холодный кулер системного блока сначала начинает завывать, а через некоторое время, необходимое для его

разогрева и размягчения материала подшипника, прекращает. И в-третьих, необходимо учитывать существование критического отношения прочности трущихся деталей при заданной остроте поверхностных выступов одной из них (как это следует из рисунка 12).

Таким образом, бытовой процесс пиления дров, использованный в качестве развлекательного упражнения для ума и тела, оказывается стыкующимся с анализом актуальных для современной техники проблем.

Пилить дрова и готовить статью нам помогли наши дети – София, Барбора, Ксения и Вероника.

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

И все-таки она вертится...

А. ВАСИЛЬЕВ

ОДИН ИЗ ОСНОВОПОЛОЖНИКОВ СОВРЕМЕННОГО естествознания Галилео Галилей родился 15 февраля 1564 года в итальянском городе Пизе в обедневшей дворянской семье (его отец был видным теоретиком музыки и математиком). Еще подростком Галилей познакомился с трудами греческих и латинских философов в монастырской школе во Флоренции. В 17 лет он поступил в Пизанский университет для получения медицинского образования, однако основным его занятием стало изучение физики Аристотеля, сочинений Евклида и Архимеда. В 1584 году он оставил медицину и уже через два года опубликовал оригинальную работу об изобретенных им гидростатических весах и геометрическое исследование о центрах тяжести телесных фигур. Известность и научный авторитет Галилея быстро росли, чему способствовали не только его обширные знания, но и редкая способность по-новому увидеть, казалось, давно знакомые вещи и, как писал Лагранж, «извлечь законы из явлений, постоянно совершающихся перед глазами и все же никем не объясненных».

С 25 лет Галилей – профессор физики и математики в крупнейших итальянских университетах: сначала в Пизанском (1589–1592) и Падуанском (1592–1610), а затем в университете Флоренции, где он занимал почетную должность первого математика и придворного философа при Тосканском герцоге Козимо II Медичи. Большим авторитетом Галилей пользовался также среди высших духовных лиц Флоренции.

Такова была внешняя сторона жизни Галилея до 1632

года, до выхода его знаменитой книги «Диалог о двух главнейших системах мира – птолемеевой и коперниковой», которая обессмертила его имя, но при жизни принесла ему много унижений и лишений.

Уже в ранние годы своей преподавательской деятельности в письмах к друзьям и ученикам, получавших затем распространение в копиях, в своих заметках, долгое время остававшихся в рукописях, Галилей начал наступление на старую и догматизированную физику Аристотеля, на узаконенное католической церковью представление о строении мира – геоцентрическую систему Птолемея. Физика в то время сводилась по существу к механике, проблемами которой Галилей занимался в течение всей жизни, но вместе с тем охватывала и широкий круг общих мировоззренческих проблем. До Галилея в физике господствовали представления аристотелевской школы о принципиальном различии «земных» и «небесных» явлений, о существовании «насильственных» и «естественных» движений, определяемых якобы самой природой тела. Так, согласно Аристотелю, для «совершенных» идеально гладких небесных тел «естественным» было равномерное движение по окружностям, тогда как на Земле одни тела в силу своей природы, например из-за присущего им свойства тяжести, обладали «естественным» для них движением вниз, а другие, не имеющие такого свойства (например, огонь), – движением вверх. Причем тела «тяжелые» должны были, по мнению Аристотеля, падать с различной скоростью в зависимости от их веса. К «насильственным» движениям относились движения под действием некоторой силы (например,

стрела, выпущенная из лука), однако закономерности таких движений изучены не были.

Вместо этих приблизительных, а порой даже неправильных и наивных представлений Галилей построил точную науку о движении – кинематику, законы которой впервые были выведены им как обобщение научного эксперимента. Сравнивая движение тел по наклонной плоскости и их свободное падение, Галилей установил единство этих движений, открыл закон свободного падения тел – если тело, выйдя из состояния покоя, падает равномерно ускоренно, то расстояния, проходимые им за определенные промежутки времени, относятся между собой как квадраты времен – и построил теорию равномерно ускоренного движения. Своими исследованиями в механике он заложил фундамент нового научного метода выявления общих законов природы путем анализа наблюдаемых частных явлений, постепенного мысленного приближения этих явлений к некоторым идеальным условиям, в которых законы, управляющие ими, могли бы проявиться, так сказать, в чистом виде. Такой метод получил название индуктивного метода познания.

Начав с небольшой работы «Диалог о движении», Галилей завершил исследования по механике в своем последнем труде «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению, с приложением о центрах тяжести различных тел» (1638 г.). Это сочинение явилось итогом и вершиной творчества Галилея-физика. Главными его достижениями были: открытие основных законов равномерно ускоренного и ряда более сложных видов движения (например, качание маятника); установление основных понятий кинематики и динамики и некоторых общих принципов классической механики, например принципа относительности. В современной формулировке принцип относительности Галилея звучит так: все механические явления протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета. Галилей понимал его как независимость (инвариантность) уравнений механики относительно преобразований координат движущейся материальной точки и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Исследования Галилея в области механики, которые он сам считал основными в своей деятельности, в значительной степени определили дальнейшее развитие этой науки. Однако первостепенную роль в формировании нового, современного мировоззрения в области естествознания сыграли астрономические открытия Галилея. Во времена Галилея птолемеева система мира с неподвижной Землей в центре Вселенной превратились в догму, поддерживаемую авторитетом церкви. Новое, гелиоцентрическое учение Коперника все еще оставалось теорией. Даже тех немногих, кто начинал склоняться к признанию этой системы, по причине ее большой простоты и логичности, немало смущал тот факт, что только у Земли имеется спутник – Луна – и это как-то выделяет Землю среди других планет.

Свои астрономические наблюдения Галилей начал в 1609 году, когда он узнал об изобретении в Голландии зрительной трубы, значительно приближающей удаленные предметы. Заинтересовавшись этим сообщением, Галилей самостоятельно сконструировал зрительную трубу с двумя стеклянными линзами: плоско-выпуклым объективом и плоско-вогнутым окуляром. Она давала

мнимое прямое увеличенное изображение предмета. Увеличение трубы, первоначально равное 3, было затем доведено Галилеем до 32. Галилей сразу же использовал этот инструмент для наблюдения неба – так зрительная труба стала телескопом, положившим начало современной телескопической астрономии.

Впервые Галилей направил зрительную трубу на звездное небо 7 января 1610 года. Он увидел лунный пейзаж с кратерами и холмами, который поразил его своей необычайной красотой. При этом Галилеем, уже давно стремящимся к физическому обоснованию гелиоцентризма, овладевает мысль о том, что Луна очень похожа на Землю. Наблюдаемые холмы и хребты на Луне были видимым опровержением аристотелева противопоставления небесных тел, которые он считал идеальными и неизменными, Земле. Галилей писал, что Луна «не имеет гладкой полированной поверхности, но представляет неровности и возвышения подобно земной поверхности, покрыта огромными горами, глубокими пропастями, обрывами». Он же впервые оценил высоту самых больших лунных гор (около 7 км, что близко к современным данным) и отметил характерные для Луны кольцевые горы (цирки).

Галилей обнаружил также в сплошном свечении Млечного Пути огромное скопление звезд, невидимых невооруженным глазом, что подтвердило древнюю гениальную догадку Демокрита о звездном составе этой бледной полосы. Позже он обнаружил и в других частях неба существование скоплений звезд, которые простому глазу представлялись маленькими млечными пятнами (Ясли в созвездии Рака, скопление возле звезды Ориона). Таким образом, на основе непосредственных наблюдений Галилей впервые сделал вывод о звездном составе наблюдавшихся туманностей, которые до того принимались за более плотные части твердой небесной сферы, якобы отражавшей солнечные лучи.

Разложение отдельных туманностей на звезды явилось первым реальным свидетельством колоссальных размеров звездной Вселенной. К этому выводу Галилея приводили и другие наблюдения. Он отметил, что в то время как планеты в поле зрения его телескопа имели вид кружков, звезды оставались точками, лишь увеличиваясь в яркости. Это было вторым, после отмеченной Коперником ненаблюдаемости параллакса у звезд (углов, под которыми со звезды виден диаметр земной орбиты), свидетельством огромной удаленности звезд по сравнению с планетами.

Еще большее впечатление на Галилея произвело открытие им спутников у Юпитера и фаз у Венеры. Уже во время первых наблюдений в 1610 году Галилей убедился, что обнаруженные им вблизи Юпитера четыре маленькие звездочки, расположенные на одной прямой, изменяют свое положение относительно планеты. Продолжив свои наблюдения, он установил периодичность в движении этих тел, оказавшихся, таким образом, спутниками планеты. Открытые им звезды Галилей назвал в честь герцога Козимо II Медичи и его братьев медичейскими.

Теперь Земля перестала быть единственной планетой, у которой имелся спутник. Луна более не была исключением в системе Коперника, а Земля – единственным центром, вокруг которого должны были, согласно Птолемею, обращаться все небесные тела.

В конце 1610 года Галилей сообщил об открытии фаз



Венеры. В письме Джулиано Медичи он писал: «Я посылаю Вам шифрованное сообщение о еще одном моем новом необычном наблюдении, которое приводит к разрешению важнейших споров в астрономии и которое содержит решающий аргумент в пользу пифагорейской и коперниковой системы». Наблюдаемые у Венеры фазы были подобны лунным – последовательные периодические изменения видимой формы планеты, зависящие от ее положения по отношению к Солнцу и Земле. Впоследствии, в 1613 году, Галилей решительно говорил: «Эти явления – фазы Венеры – не оставляют места для какого-либо сомнения в том, как происходит обращение Венеры; мы с абсолютной неизбежностью приходим к выводу, соответствующему положениям пифагорейцев и Коперника, что она обращается вокруг Солнца, подобно тому, как вокруг него же, как центра, обращаются и прочие планеты». Еще до открытия фаз Венеры Галилей и его друзья предполагали, что из системы Коперника вытекает существование фаз и наблюдения их станут решающим доказательством идеи гелиоцентризма.

К тому времени общепринятая догма об особом мире совершенных небесных тел была поколеблена и другими наблюдателями, в числе первых воспользовавшимися телескопами. Речь идет об открытии солнечных пятен. Летом 1611 года голландский астроном Фабрициус первый со всей определенностью установил существование темных пятен на поверхности Солнца (которое он, как и другие в его время, считал твердым) и открыл по их видимому перемещению вращение Солнца. В этом же году наблюдал темные пятна на Солнце и Галилей. В отличие от ранее открытых изменений пятен за счет эффекта перспективы (при приближении их к краю диска), Галилей впервые отметил реальные и довольно быстрые изменения формы солнечных пятен и уподобил их поэтому облакам в земной атмосфере. Солнце, таким образом,

также не выдержало испытания на «совершенство» и «неизменность». Для окончательного подтверждения вращения Солнца чрезвычайно важным было открытие Галилеем в конце 1612 года маленьких ярких образований, которые перемещались по диску Солнца, подобно темным пятнам. Эти свои наблюдения Галилей описал в знаменитом письме «О солнечных пятнах» (1613 г.).

Как видно из писем и комментариев Галилея, он был совершенно убежден в истинности гелиоцентрической системы Коперника. Однако открыто провозгласить это в Италии XVII века значило повторить трагическую судьбу сожженного на костре Джордано Бруно. Поэтому прежде всего необходимо было убедить в благонамеренности своих открытий католическую церковь. Но уже опубликованный Галилеем «Звездный вестник» и особенно письмо о солнечных пятнах, где автор утверждал первостепенную роль чувственного опыта в исследовании окружающего мира, вызвали резкие нападки на ученого и обвинения его в отступлении от священного писания. Галилей неоднократно ездил в Рим для объяснения с папой, высшим духовенством и инквизицией. Несмотря на официальный запрет в 1616 году пропаганды системы Коперника, Галилей все еще надеялся на приемлемость для католической церкви его взглядов, правда изложенных в осторожной форме. Система Коперника должна была при этом представляться лишь одной из возможных и чисто абстрактных математических теорий.

В 1632 году Галилей напечатал, с разрешения римской духовной цензуры, свой основной астрономический труд «Диалог о двух главнейших системах мира – птолемеевой и коперниковой». Его форма крайне осторожна на первый взгляд: трое друзей ведут неторопливую беседу, причем каждый искренне старается понять точку зрения другого, допуская сначала ее справедливость. Однако, несмотря на это, догмы аристотелевой физики, которые лежали в основе мировоззрения, принятого католической церковью, как и сама система Птолемея, терпят в «Диалоге» очевидный крах, а новые идеи Коперника, дополненные еще более революционными идеями Джордано Бруно о бесконечности Вселенной, предстают перед читателями во всей своей очевидности. Поэтому уже через несколько месяцев после выхода «Диалог» был изъят из продажи и внесен в папский «Индекс» запрещенных книг, а над Галилеем в 1633 году инквизицией был учинен суд, завершившийся торжественным покаянием и публичным отречением Галилея от «заблуждений», а затем и домашним арестом.

Последние годы жизни ученый провел под надзором инквизиции в своем доме близ Флоренции, но и здесь он продолжал свой научный труд. Доказательством тому были изданные им «Беседы» о механике. Умер Галилей 8 января 1642 года. Его могила находится во Флоренции рядом с могилами двух других великих сынов Италии – Микеланджело и Данте.

Существует легенда, что после отречения от теории Коперника Галилей воскликнул: «*Errur si muove*» (и все-таки она вертится). В действительности подобные слова ни в день отречения, ни позже не были произнесены. И тем не менее, несказанная легендарная фраза выражает действительный смысл жизни и творчества Галилео Галилея.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 2003 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4–2003» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1871» или «Ф1878». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1873 и М1875 предлагались на LXVI Московской математической олимпиаде, а задача М1871 – на XXIX Всероссийской математической олимпиаде.

Задачи Ф1878 – Ф1882 предлагались на Московской физической олимпиаде этого года.

Задачи М1871–М1875, Ф1878–Ф1882

М1871. За круглым столом 35 гостей уселись пить чай. Им выдали 10 литровых и 25 пол-литровых кружек. Каждому принесли пол-литровый чайник с чаем. Гость может вылить содержимое чайника себе или одному из своих соседей. Гости согласны пить только из полной кружки. Какое наибольшее число гостей может напиться чаю?

Р.Женодаров

М1872. Большой прямоугольник разрезан на прямоугольники, у каждого из которых имеется сторона, принадлежащая границе большого прямоугольника. Докажите, что найдутся два прямоугольника с общей стороной.

В.Произолов

М1873. В стране несколько городов, соединенных дорогами с односторонним и двусторонним движением. Известно, что из каждого города в любой другой можно проехать ровно одним путем, не проходящим два раза через один и тот же город. Докажите, что страну можно разделить на три губернии так, чтобы ни одна дорога не соединяла два города из одной губернии.

А.Стивак, И.Межиров

М1874. Найдите все решения уравнения

$$x^y - y^x = 1$$

в натуральных числах x и y .

В.Произолов, В.Сендеров

М1875. У выпуклого многогранника внутренний двугранный угол при каждом ребре острый. Сколько может быть граней у многогранника?

О.Подлипский, А.Заславский

Ф1878. В вертикальную стену вбиты два гвоздя так, что они лежат на одной вертикальной прямой. Кусок однородной проволоки массой m согнули в дугу в виде половины окружности и шарнирно прикрепили за один из концов к верхнему гвоздю A (рис.1). Дуга при этом оперлась на нижний гвоздь B . Найдите величину силы, с которой проволока действует на верхний гвоздь, если известно, что в отсутствие нижнего гвоздя, когда проволока находится в равновесии, диаметр AC дуги составляет с вертикалью угол α_0 . Расстояние между гвоздями равно радиусу дуги. Трения нет.

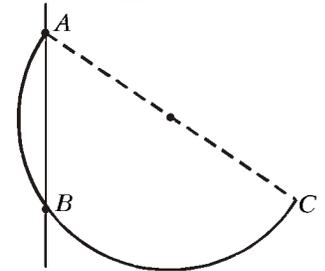


Рис.1

А.Якута

Ф1879. В машине Атвуда (рис.2) массы грузов равны m_1 и m_2 , блок и нить невесомы, трение отсутствует. Вначале более тяжелый груз массы m_1 удерживают на высоте h над

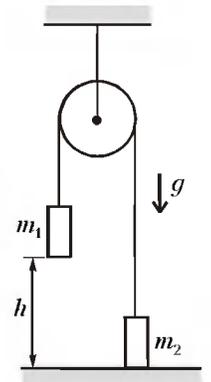


Рис.2

горизонтальной плоскостью, а груз массой m_2 стоит на этой плоскости, причем отрезки нити, не лежащие на блоке, вертикальны. Затем грузы отпускают без начальной скорости. Найдите, на какую максимальную высоту поднимется первый груз после абсолютно неупругого удара о плоскость, если нить можно считать гибкой, неупругой и практически нерастяжимой. Ускорение свободного падения равно g , блок находится достаточно далеко от грузов.

М.Семенов

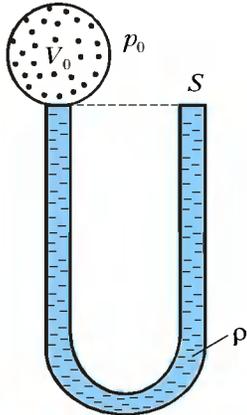


Рис.3

Ф1880. В установленной вертикально U-образной трубке площадью S с внутренним объемом V_0 находится жидкость плотностью ρ (рис.3). Колена трубки одинаковы по высоте, одно из них открыто в атмосферу, а второе герметично соединено с сосудом объемом V_0 , внутри которого находится идеальный одноатомный газ. Жидкость заполняет всю U-образную трубку. Найдите количество теплоты, которое необходимо сообщить газу в сосуде для того, чтобы медленно вытеснить из трубки половину жидкости.

Атмосферное давление постоянно и равно p_0 . Давлением паров жидкости, поверхностным натяжением и потерями тепла пренебречь. Радиус полукруглого участка трубки, соединяющего ее колена, считать много меньшим высоты трубки.

А.Якута

Ф1881. Что покажет каждый из трех одинаковых амперметров A_1 , A_2 и A_3 в схеме, изображенной на рисунке 4, при подключении клемм A и B к источнику

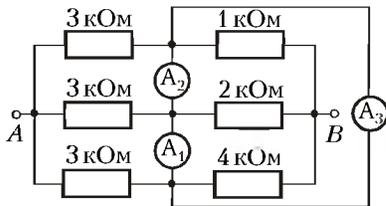


Рис.4

с напряжением $U = 3,3$ В? Сопротивления амперметров много меньше сопротивлений резисторов.

О.Шведов

Ф1882. Путнику, возвращавшемуся темной ночью домой в свою деревню по дороге, идущей прямо к его дому, с расстояния $r = 5$ км стал виден огонек свечи в одном из окон. Внутри дома вблизи соседнего окна стоит наряженная к Новому году елка с зеркальными шарами. Оцените, на каком расстоянии от дома путнику станет видно отражение свечи в елочном шаре диаметром $D = 10$ см, если он идеально отражает свет и находится на расстоянии $d = 1,8$ м от свечи на линии, перпендикулярной дороге. Окна одинаковые, свеча горит ровно.

М.Семенов

Решения задач М1846–М1855, Ф1863–Ф1867

М1846. Докажите, что для любого натурального n и любого натурального $k \leq n$ выполняется неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \leq 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}.$$

Это любопытное неравенство доказывается просто по индукции. Для $k = 1$ и любого n оно справедливо. Проверим его справедливость для $k + 1$ при условии, что оно справедливо для $k < n$. Последовательно получаем

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} &\leq \left(1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\ &= 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{k^2+k}{n^2} + \frac{k^2}{n^3} < 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2}. \end{aligned}$$

Этим все доказано. В частности, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

В.Орлов

М1847. В 8 банках сидят 80 пауков. Разрешается выбрать любые две банки, суммарное число пауков в которых четное, и пересадить часть пауков из одной банки в другую, чтобы их стало поровну. При любом ли начальном распределении пауков в банках с помощью нескольких таких операций можно добиться того, чтобы в каждой банке оказалось одинаковое число пауков?

Предположим, что в n банках, где $0 < n < 8$, сидят по $2r$ пауков, а в остальных $(8 - n)$ банках – по $2s + 1$ пауков. Тогда

$$80 = 2nr + (8 - n)(2s + 1),$$

откуда

$$72 - 16s = n(2r - 2s - 1),$$

так что n делится на 16, что невозможно.

Следовательно, либо пауки сидят по 10 в банке, либо существуют две банки, количества пауков в которых одинаковой четности, но разные. Уравняем количества пауков в таких двух банках. Если и после этого пауки сидят не по 10 штук в каждой банке, опять выберем две банки, в которых количества пауков одинаковой четности, но разные, уравняем количества пауков в таких двух банках, и так будем действовать и дальше. Очевидно, рано или поздно процесс завершится.

Почему «очевидно»? Проще всего воспользоваться тем, что сумма квадратов количеств пауков в банках при операциях уравнивания уменьшается: в самом деле, при замене банок с a и b пауками, где a, b – числа одинаковой четности, на две банки с $(a + b)/2$ пауками в каждой, мы меняем сумму квадратов $a^2 + b^2$ на величину

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{2},$$

а неравенство

$$2a^2 + 2b^2 > (a + b)^2$$

равносильно неравенству

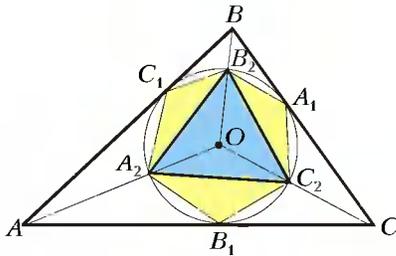
$$(a-b)^2 > 0$$

и потому справедливо для любых различных чисел $a \neq b$. А вечно уменьшаться сумма квадратов не может (ибо не существует бесконечной убывающей последовательности целых неотрицательных чисел).

Замечание. Для 10 банок и 100 пауков утверждение задачи неверно: если в 8 банках сидят по 11 пауков, а в остальных двух – по 6 пауков, то ничего с ними не поделаешь!

В. Каскевич

M1848. В треугольник ABC вписана окружность с центром O , которая касается сторон в точках A_1, B_1, C_1 (см. рисунок). Отрезки AO, BO, CO пересе-



кают окружность в точках A_2, B_2, C_2 . Докажите, что площадь треугольника $A_2B_2C_2$ равна половине площади шестиугольника $B_1A_2C_1B_2A_1C_2$.

Свое пристальное внимание обратим на три треугольника: $A_2B_2C_1, B_2C_2A_1$ и $C_2A_2B_1$. Во-первых, каждые два из них имеют по паре равных сторон: $B_2C_1 = B_2A_1, C_2A_1 = C_2B_1$ и $A_2B_1 = A_2C_1$. Во-вторых, легко видеть, что сумма углов при вершинах A_1, B_1 и C_1 у этих треугольников равна 360° , поскольку общая сумма дуг окружности, на которые эти углы опираются, равна 720° .

Ввиду этих двух обстоятельств из названных трех треугольников, прикладывая их друг к другу равными сторонами, можно сложить один больший треугольник; при этом вершины A_1, B_1 и C_1 сольются в одну точку. Так построенный треугольник имеет те же по величине стороны, что и старый треугольник $A_2B_2C_2$, а значит, равен ему. Впрочем, нам достаточно, что их площади равны – отсюда следует, что утверждение задачи справедливо.

В. Произволов

M1849. Простое число p удовлетворяет равенству

$$p^2 = 2^n \cdot 3^m + 1,$$

где n и m – целые неотрицательные числа. Докажите, что $p \leq 17$.

Легко видеть, что при всяком простом $p > 3$ число $p^2 - 1$ делится на 2 и на 3 (и даже на 24). Докажем, что при $p > 17$ число $p^2 - 1$ обязательно имеет и простой делитель, больший 3.

Предположим противное. Тогда числа $p - 1$ и $p + 1$ равны, в некотором порядке, числам $2 \cdot 3^t$ и 2^k .

Первый случай. $p + 1 = 2^k$. Число $2^n - 1$ при четном $n > 2$ разлагается в произведение $2^n - 1 = (2^{n/2} -$

$-1)(2^{n/2} + 1)$ двух взаимно простых множителей и поэтому имеет не менее двух различных нечетных простых делителей. Следовательно, при $k > 3$ последним свойством обладает хотя бы одно из чисел $2^k - 1$ и $2^k - 2 = 2(2^{k-1} - 1)$.

Второй случай. $p + 1 = 2 \cdot 3^k$, откуда $2^{k-1} + 1 = 3^t$. При $k > 2$ число t четно, так как в противном случае правая часть давала бы остаток 3 при делении на 4. Значит, $(3^{t/2} + 1)(3^{t/2} - 1)$ есть степень двойки. Второй сомножитель обязан равняться 2. Получили: $t = 2$, так что $p + 1 = 18$, т.е. $p = 17$.

В. Сендеров

M1850. Числа натурального ряда от 1 до $n(n+1)$ записаны последовательно красным и синим цветом в следующей очередности. Первые n чисел – красные, затем одно – синее, затем $n - 1$ чисел – красные, затем два – синие и т.д., наконец, одно число – красное и последние n чисел – синие. Таким образом, убывающие по численности группы красных чисел перемежаются возрастающими по численности группами синих чисел. Докажите, что сумма синих чисел вдвое больше суммы красных чисел.

Математическая индукция является естественным методом решения этой задачи. Однако нужно найти такой вариант ее применения, который освободит нас от запутанных комбинированных вычислений.

Сумма всех натуральных чисел от 1 до $n(n+1)$ равна

$$\frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{2}.$$

Чтобы доказать утверждение задачи, достаточно убедиться в том, что сумма синих чисел равна

$$\frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{3}.$$

Убедимся в этом.

Для начальных значений n это проверяется непосредственно, поэтому перейдем к заключительному шагу индукции. При переходе от n к $n + 1$ сумма синих чисел прирастает на

$$(1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + \\ + \left((n+1)^2 + 1 + (n+1)^2 + 2 + \dots + (n+1)^2 + n + 1 \right),$$

или на

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^3 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Обозначим это число через Δ .

Но простые выкладки приводят к равенству

$$\frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{3} + \Delta = \\ = \frac{(n+1)(n+2)\left((n+1)^2 + (n+1) + 1\right)}{3},$$

что и требовалось показать.

В. Произволов

M1851. Нарисованы координатные оси Ox , Oy и график функции $y = \frac{1}{8x}$. Масштаб не указан. Пользуясь только циркулем, постройте точку $(1; 1)$.

Пусть окружность с центром O пересекает положительную ветвь гиперболы в точках $M\left(a; \frac{1}{8a}\right)$ и $N\left(\frac{1}{8a}; a\right)$. Тогда

$$MN^2 = \left(a - \frac{1}{8a}\right)^2 + \left(\frac{1}{8a} - a\right)^2 = 2\left(a^2 + \frac{1}{64a^2}\right) - \frac{1}{2}.$$

Эта же окружность пересекает оси координат в точках

$$M'\left(\sqrt{a^2 + \frac{1}{64a^2}}; 0\right) \text{ и } N'\left(0; \sqrt{a^2 + \frac{1}{64a^2}}\right), \text{ откуда}$$

$$M'N'^2 = 2\left(a^2 + \frac{1}{64a^2}\right) \text{ и } M'N'^2 - MN^2 = \frac{1}{2}.$$

Итак, мы можем построить две точки, которые служат концами отрезка длины $\sqrt{\frac{1}{2}}$. После чего легко построить точку $(1; 1)$, опять-таки пользуясь только циркулем.

С.Токарев

M1852. Дано натуральное число n . В интервале $(n^2; n^2 + n)$ выбраны различные натуральные числа a и b . Докажите, что в этом интервале нет натуральных делителей числа ab , отличных от a и b .

Пусть d – натуральный делитель числа ab из интервала $(n^2; n^2 + n)$. Так как ab делится на d , то число $(a-d)(b-d)$ тоже делится на d . Поскольку a , b и d лежат в интервале длины n , имеют место неравенства $|a-d| < n$ и $|b-d| < n$, откуда можно заключить, что $|(a-d)(b-d)| < n^2 < d$.

Итак, число $(a-d)(b-d)$ делится на d и по модулю меньше d , следовательно, оно равно нулю. Значит, $d = a$ или $d = b$.

С.Иванов

M1853. С числом разрешается производить следующие операции:

- 1) возвести в любую натуральную степень;
- 2) отрезать последние две цифры, умножить образованное ими число на 3 и прибавить к числу, образованному остальными цифрами.

Можно ли с помощью таких операций из числа 81 получить число 82?

Рассмотрим число $n = 100a + b$, где b – число, образованное последними двумя цифрами числа n . Вторая операция переводит число n в число $n_1 = a + 3b$. Заметим, что $3n - n_1 = 299a$ делится на 13. Следовательно,

$$n_1 \equiv 3n \pmod{13},$$

т.е. вторая операция по модулю 13 – это умножение числа на 3. Поскольку исходное число равно $81 = 3^4$, то

после применения обеих операций в любой последовательности и в любом количестве наше число будет сравнимо по модулю 13 с некоторой степенью числа 3. Однако степени тройки дают при делении на 13 только остатки 3, 9 и 1 и не дают остатка 4, а $82 \equiv 4 \pmod{13}$. Следовательно, число 82 не может быть получено с помощью указанных операций.

К.Кохась

M1854*. Пусть $f(x)$ – многочлен степени $m \geq 2$ с целыми коэффициентами. Докажите, что множество значений многочлена $f(x)$ в целых точках содержит бесконечную геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $f(x) = a(bx + c)^m$ (где a , b , c – целые числа, $a \neq 0$, $b \neq 0$).

Сначала убедимся в том, что множество значений многочлена

$$f(x) = a(bx + c)^m$$

(a , b , c – целые числа, $a \neq 0$, $b \neq 0$) в целых точках содержит некоторую бесконечную геометрическую прогрессию. Мы можем считать, что $\text{НОД}(b, c) = 1$. Выберем целое число x_0 так, чтобы $d = bx_0 + c > 1$. Ясно, что $\text{НОД}(d, b) = 1$. Пусть e – какое-нибудь натуральное число, для которого d^e при делении на b дает в остатке 1. Поскольку $\text{НОД}(d, b) = 1$, то такое число обязательно существует: можно, например, взять $e = \varphi(b)$, где $\varphi(b)$ – функция Эйлера (см. статью В.Сендерова и А.Спивака «Малая теорема Ферма» в «Кванте» №1 за 2000 год). Положим

$$x_n = x_0 + \frac{d(d^{en} - 1)}{b}.$$

Так как $d^e - 1$ делится на b , то для любого $n = 0, 1, \dots$ число x_n целое. Имеем

$$f(x_n) = a(bx_n + c)^m = Aq^n,$$

где $A = ad^m$, $q = d^{em}$. Тем самым указанное свойство установлено.

Пусть теперь

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

– многочлен степени $m \geq 2$ с целыми коэффициентами, множество значений которого в целых точках содержит некоторую бесконечную геометрическую прогрессию. Рассмотрим многочлен

$$f_1(y) = (ma_m)^m f\left(\frac{y - a_{m-1}}{ma_m}\right) = a_m y^m + g(y),$$

где $g(y)$ – многочлен с целыми коэффициентами, $g(y) = 0$ либо $\deg g(y) \leq m - 2$. Множество значений многочлена $f_1(y)$ в целых точках также содержит бесконечную геометрическую прогрессию (это следует из равенства $f_1(y) = (ma_m)^m f(x)$, где $y = a_{m-1} + ma_m x$). Покажем, что тогда многочлен $g(y)$ обязан быть нулевым.

Допустим, что $g(y) \neq 0$, а для некоторой последовательности целых чисел y_n и целых чисел A и q имеем

$$f_1(y_n) = Aq^n \quad (n = 0, 1, \dots),$$

при этом $A \neq 0$, $|q| > 1$. Очевидно, что $|y_n| \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). Далее мы будем считать, что числа a_m , A и q положительны (остальные случаи сводятся к этому).

Тогда $y_n > 0$ для всех достаточно больших n , если m нечетно. Положим $z_k = y_{mk}$ и покажем, что

$$w_k = |z_{k+1}| - q|z_k| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Действительно, имеем

$$Aq^{mk} = a_m z_k^m + g(z_k), \quad Aq^{m(k+1)} = a_m z_{k+1}^m + g(z_{k+1}),$$

откуда

$$a_m (z_{k+1}^m - q^m z_k^m) = q^m g(z_k) - g(z_{k+1}),$$

что при достаточно больших k можно переписать в виде

$$a_m (|z_{k+1}|^m - q^m |z_k|^m) = q^m g(z_k) - g(z_{k+1}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} a_m (|z_{k+1}| - q|z_k|) &= \\ &= (q^m g(z_k) - g(z_{k+1})) / (|z_{k+1}|^{m-1} + q|z_{k+1}|^{m-2}|z_k| + \dots \\ &\quad \dots + q^{m-2}|z_{k+1}||z_k|^{m-2} + q^{m-1}|z_k|^{m-1}). \quad (*) \end{aligned}$$

Так как $\deg g(y) \leq m-2$ и $|z_k| \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$), то правая часть равенства (*) стремится к нулю, т.е. $w_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Поскольку последовательность w_k состоит из целых чисел, то $w_k = 0$ для всех k , начиная с некоторого k_0 . Итак,

$$|z_{k+1}| = q|z_k| \quad (k \geq k_0).$$

Следовательно, $z_{l+k_0} = \pm q^l z_{k_0}$ ($l = 0, 1, \dots$). Но тогда

$$Aq^{m(l+k_0)} = \pm a_m q^{ml} z_{k_0}^m + g(\pm q^l z_{k_0}) \quad (l = 0, 1, \dots). (**)$$

Если $g(y) \neq 0$, то равенство (**) противоречиво при достаточно больших l (левая часть делится на q^{ml} , а правая – нет).

Таким образом, $f_1(y) = a_m y^m$, так что

$$f(x) = a_m \left(x + \frac{a_{m-1}}{m a_m} \right)^m = a (bx + c)^m$$

для некоторых целых чисел a, b, c ($a \neq 0, b \neq 0$). Этим сформулированное в задаче утверждение полностью доказано.

Н.Осипов

M1855. Плоскости, параллельные граням прямоугольного параллелепипеда, разрежали его на меньшие параллелепипеды, которые окрасили в черный и белый цвета в шахматном порядке. Известно, что суммарный объем черных равен суммарному объему белых параллелепипедов. Докажите, что из черных можно составить параллелепипед P , а из белых можно составить параллелепипед Q так, что P и Q будут равны.

Все секущие плоскости, разрезающие большой параллелепипед на меньшие параллелепипеды, распадаются на три группы сообразно с тем, какой из граней большого параллелепипеда они параллельны. Секущие плоскости каждой группы разрезают большой параллелепипед на слои, причем любой из слоев состоит из черных и белых параллелепипедов.

Произведем перестройку внутри большого параллелепипеда, специальным образом перемещая слои каждой группы.

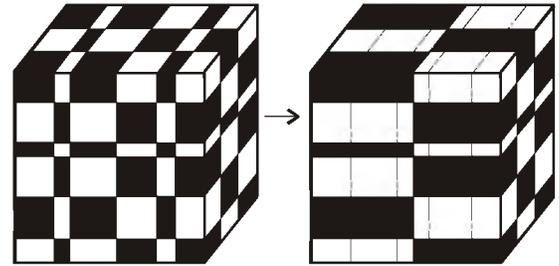


Рис.1

Перестройка проходит в три этапа. На первом этапе занумеруем все слои, параллельные боковой грани, слева направо. Затем все нечетные слои переместим влево, а все четные – вправо (рис.1).

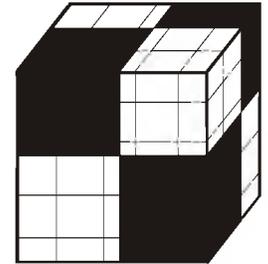


Рис.2

Так перестроенный параллелепипед подвергнем второму этапу перестройки. Для этого все нечетные по порядку слои, параллельные верхней грани параллелепипеда, переместим вверх друг за другом, а все четные – вниз.

После чего на третьем этапе все нечетные слои, параллельные передней грани параллелепипеда, переместим вперед, а все четные – назад.

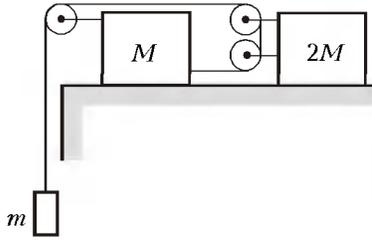
В результате перестройки все черные параллелепипеды «склеятся» в четыре черных параллелепипеда, а все белые – в четыре белых (рис.2). При этом три плоскости, параллельные граням большого параллелепипеда, разделяют черные и белые параллелепипеды. Пусть ребра большого параллелепипеда имеют длины $2a, 2b$ и $2c$, а названные три плоскости проходят через их точки $a+x, b+y$ и $c+z$, где $|x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c$. По условию, суммарный объем черных параллелепипедов равен суммарному объему белых. Поэтому справедливо равенство

$$\begin{aligned} (a+x)(b+y)(c+z) + (a+x)(b-y)(c-z) + \\ + (a-x)(b+y)(c-z) + (a-x)(b-y)(c+z) = \\ = (a-x)(b-y)(c-z) + \\ + (a-x)(b+y)(c+z) + (a+x)(b-y)(c+z) + \\ + (a+x)(b+y)(c-z). \end{aligned}$$

После раскрытия скобок получаем $xyz = 0$, т.е. хотя бы один из сомножителей равен нулю. Это означает, что хотя бы одна из трех плоскостей делит большой параллелепипед ровно пополам. В силу этого возможен завершающий этап перестройки большого параллелепипеда: по одну сторону от этой плоскости размещаем четыре черных, а по другую – четыре белых параллелепипеда. Это и есть требуемые P и Q .

В.Произволов

Ф1863. В системе (см. рисунок) нить очень легкая и нерастяжимая. Грузы, массы которых M и $2M$, вначале удерживают, а затем отпускают. С каким ускорением начнет двигаться груз массой m ? Трение в системе отсутствует.



Обозначим силу натяжения нити через T (она всюду одинакова). Тогда ускорение груза массой M направлено вправо и равно

$$a = \frac{2T}{M}.$$

Ускорение груза массой $2M$ направлено влево и равно

$$b = \frac{2T}{2M}.$$

Через малый отрезок времени, прошедший с момента отпускания грузов, грузы сдвинутся совсем немного, тогда можно считать, что нить с грузом массой m пока вертикальна и ускорение этого груза направлено вниз. Запишем для груза массой m уравнение движения:

$$mg - T = mc$$

и связь его ускорения c с ускорениями других грузов:

$$c = 2a + 2b = \frac{4T}{M} + \frac{4T}{2M} = \frac{6T}{M}.$$

Отсюда найдем искомое ускорение:

$$c = \frac{g}{1 + M/(6m)}.$$

П. Митюшкин

Ф1864. На горизонтальном столе находится очень легкий клин с углом $\alpha = 30^\circ$ при основании (рис. 1). На него поставили тяжелый тонкий обруч и отпустили его без начальной скорости. Коэффициент трения между обручем и клином $\mu = 0,7$. При каком коэффициенте трения между клином и столом клин останется неподвижным?

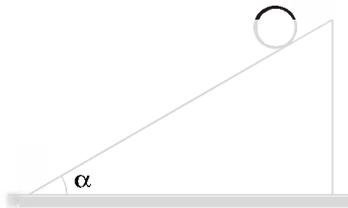


Рис. 1

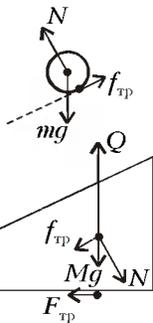
Трение между обручем и клином очень велико, поэтому обруч катится по клину без проскальзывания (мы это обязательно проверим!). При таком движении полная энергия обруча (поступательного и вращательного движений) при скорости его центра v равна mv^2 . Запишем баланс энергий для начального момента и через промежуток времени τ , когда скорость центра обруча достигла значения v :

$$mv^2 = mg\Delta h,$$

или

$$m(a\tau)^2 = mg(a\tau^2/2)\sin\alpha.$$

Рис. 2



Отсюда найдем ускорение обруча:

$$a = \frac{g \sin \alpha}{2}.$$

Для сил трения и реакции опоры, действующих на обруч (рис. 2), получим

$$f_{\text{тр}} = mg \sin \alpha - ma = \frac{mg \sin \alpha}{2} \text{ и } N = mg \cos \alpha.$$

Теперь запишем условие неподвижности клина в проекциях на вертикальное и горизонтальное направления:

$$Mg + N \cos \alpha + f_{\text{тр}} \sin \alpha - Q = 0$$

и

$$F_{\text{тр}} + f_{\text{тр}} \cos \alpha - N \sin \alpha = 0,$$

где

$$F_{\text{тр}} = \mu_1 Q.$$

Отсюда найдем искомый коэффициент трения μ_1 между клином и столом:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{F_{\text{тр}}}{Q} = \frac{N \sin \alpha - f_{\text{тр}} \cos \alpha}{Mg + N \cos \alpha + f_{\text{тр}} \sin \alpha} = \\ &= \frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{2Mg + 2mg \cos^2 \alpha + mg \sin^2 \alpha} \approx \\ &\approx \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{7} \approx 0,25. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что клин очень легкий, а обруч тяжелый, т.е. что $M \ll m$.

М. Учителев

Ф1865. В сосуде объемом $V = 100$ л находится гелий при давлении $p = 0,5$ атм и температуре $T = 350$ К. Давление снаружи немного возросло, и объем сосуда изменился, при этом температура газа увеличилась на $\Delta T = 1$ К, а в окружающую среду было отдано количество теплоты $Q = 20$ Дж, после чего в сосуде установилось равновесие. Оцените, на сколько изменился объем сосуда и давление газа в сосуде.

Внутренняя энергия газа увеличилась на

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} \frac{pV}{T} \Delta T \approx 21,5 \text{ Дж}.$$

Из баланса энергий видно, что работа внешних сил над газом равна

$$A = \Delta U + Q \approx 41,5 \text{ Дж}.$$

Ясно, что давление изменилось на очень небольшую часть ($\Delta p \ll p$) и для расчета работы давление можно считать практически постоянным. Тогда

$$A = p \Delta V, \text{ и } \Delta V = \frac{A}{p} \approx 0,83 \text{ л}.$$

Итак, объем уменьшился на $\Delta V \approx 0,83$ л.

Теперь оценим изменение давления. Из уравнения состояния идеального газа $pV = \nu RT$ получим

$$\frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T},$$

откуда

$$\Delta p = p \left(\frac{\Delta T}{T} - \frac{\Delta V}{V} \right) = 0,5 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot \left(\frac{1}{350} - \frac{-0,83}{100} \right) \approx 560 \text{ Па}.$$

Итак, давление газа увеличилось на $\Delta p \approx 560 \text{ Па}$. Заметим, что 560 Па действительно много меньше чем $0,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

А.Простов

Ф1866. Заряд q находится на расстоянии h от бесконечной слабопроводящей плоскости. Заряд быстро перемещают параллельно плоскости на расстояние $2h$, так что распределение зарядов не успевает измениться. Сколько тепла выделится, когда распределение зарядов снова установится? Сколько еще выделится тепла, если заряд быстро сдвинуть на h перпендикулярно плоскости?

Поле, которое создают наведенные заряды на плоскости, эквивалентно полю точечного заряда величиной $-q$, расположенного на прямой, перпендикулярной плоскости, симметрично заряду q . Распределение зарядов на плоскости не изменяется во время перемещения заряда q на расстояние $2h$, поэтому работа, совершенная при перемещении заряда, будет равна

$$A = \frac{kq^2}{2h} - \frac{kq^2}{2\sqrt{2}h} = \frac{kq^2(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}h}, \text{ где } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

Энергия системы в начале и в конце одна и та же; значит, вся совершенная работа перейдет в тепло:

$$Q = A = \frac{kq^2(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}h}.$$

Теперь рассмотрим второй случай, когда заряд q быстро смещают на h перпендикулярно плоскости. Пусть W_1 и W_2 — энергии электрического поля в начале и в конце. Каждая из них вдвое меньше соответствующей энергии взаимодействия двух зарядов q и $-q$, потому что электрическое поле занимает вдвое меньшую область (оно существует только с той стороны плоскости, где расположен заряд q). Закон сохранения энергии в этом случае дает

$$A^* = Q^* + W_2 - W_1,$$

или

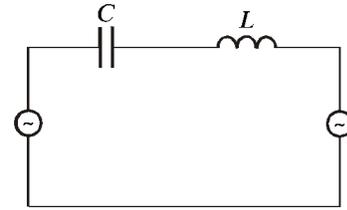
$$\frac{kq^2}{2h} - \frac{kq^2}{3h} = Q^* + \left(-\frac{1}{2} \frac{kq^2}{4h} \right) - \left(-\frac{1}{2} \frac{kq^2}{2h} \right).$$

Отсюда находим выделившееся количество теплоты:

$$Q^* = \frac{kq^2}{6h} - \frac{kq^2}{8h} = \frac{kq^2}{24h}.$$

Е.Антышев

Ф1867. Два генератора гармонических колебаний с частотами 50 Гц и 400 Гц включены, как показано на рисунке: «общие» их выходы соединены непосредственно, а «сигнальные» — через последовательно соединенные катушку индуктивностью 1 Гн и конденсатор емкостью 1 мкФ. Амплитуда напряжения



каждого генератора 10 В, сопротивление провода, которым намотана катушка, 1 Ом, в остальном элементы цепи можно считать идеальными. Найдите максимальный заряд конденсатора и среднюю мощность, переходящую в тепло.

Для расчета тока в цепи воспользуемся принципом суперпозиции — найдем его как сумму токов каждого из источников. Для частоты $f_1 = 50$ Гц сопротивления конденсатора и катушки равны соответственно

$$X_{C1} = \frac{1}{2\pi f_1 C} \approx 3185 \text{ Ом} \text{ и } X_{L1} = 2\pi f_1 L \approx 314 \text{ Ом}.$$

Видно, что для расчета силы тока сопротивление провода (1 Ом) можно не учитывать. Тогда амплитуда тока этой частоты равна

$$I_1 = \frac{U}{X_{C1} - X_{L1}} \approx 3,5 \text{ мА}.$$

Амплитуда напряжения этой частоты для конденсатора составит

$$U_{C1} = I_1 X_{C1} \approx 11,1 \text{ В}$$

(она и должно получиться больше амплитуды напряжения источника).

Для частоты $f_2 = 400$ Гц получим

$$X_{C2} = \frac{1}{8} X_{C1}, \quad X_{L2} = 8X_{L1},$$

$$I_2 = \frac{U}{|X_{C1}/8 - 8X_{L1}|} \approx 4,7 \text{ мА}.$$

Амплитуда напряжения этой частоты на конденсаторе составит

$$U_{C2} = I_2 \frac{X_{C1}}{8} \approx 1,9 \text{ В}.$$

Частоты источников относятся приблизительно (все же разные генераторы!) как 400:50 = 8:1. Тогда непременно настанет такой момент, когда оба напряжения на конденсаторе максимальны. Именно в этот момент конденсатор имеет максимальный заряд, равный

$$q = C(U_{C1} + U_{C2}) \approx 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}.$$

Среднюю тепловую мощность, выделяющуюся в проводе катушки ($R = 1$ Ом), найдем как среднее арифметическое:

$$P_{cp} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) = \frac{1}{2}(I_1^2 R + I_2^2 R) \approx 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}.$$

З.Рафаилов



Победители конкурса
«Задачник «Кванта»
2002 года

Первое место заняли

по математике

Исаев Михаил – г. Барнаул, школа-гимназия 42;

по физике

Шеронов Антон – Украина, г. Кузнецовск Ровенской обл., Кузнецовская гимназия,
Поляков Павел – Украина, г. Кузнецовск Ровенской обл., Кузнецовская гимназия.

Второе место заняли

по математике

Сушко Денис – Украина, г. Донецк, лицей «Эрудит»;

по физике

Жариков Антон – Татарстан, г. Набережные Челны, гимназия 26.

Третье место заняли

по математике

Добровольская Галина – Украина, г. Киев, лицей 171 «Лидер»;

по физике

Беланов Борис – г. Братск, лицей 1,
Передерей Евгений – г. Морозовск Ростовской обл., школа 4.

Кроме того, в число победителей вошли

по математике

Мамбетов Тимур – Киргизия, г. Бишкек, школа-лицей 61,

Авдеев Роман – г. Иркутск, лицей ИГУ,

Ярмухаметов Андрей – г. Оренбург, гимназия 1,

Дятлов Семен – г. Новосибирск, гимназия 3,

Качаев Алексей – Украина, г. Горловка Донецкой обл., средняя школа,

Феофанов Алексей – г. Чита, многопрофильный лицей 1,

Рагимов Муган – Азербайджан, с. Исагабаги Зардобского района, средняя школа,

Силаев Александр – г. Нижний Новгород, школа 40;

по физике

Исаченков Михаил – г. Москва, школа 1271,

Ягнятинский Дмитрий – г. Подольск Московской обл., лицей 26,

Дмитриев Константин – г. Липецк, СУНЦ МГУ,

Бубочкин Кирилл – г. Озерск Челябинской обл., школа 41,

Сатыев Эльдар – Республика Башкортостан, г. Уфа, лицей 153,

Горбенко Ярослав – Чувашская Республика, г. Чебоксары, лицей 1.

**Все победители конкурса «Задачник «Кванта» награждаются комплектами
журнала «Квант» за 2003 год.**

Задачи

1. Вася и Петя задумали по три числа. Каждое из васиных чисел умножили на каждое из петиных чисел и результаты записали в таблицу. Вовочка стер некоторые из чисел этой таблицы. Попробуйте восстановить стертые числа.

Н. Иноземцев (ученик 5 класса)

	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{8}$
$\frac{3}{7}$		$\frac{9}{14}$
$\frac{7}{16}$		



2. Чему равно натуральное число n , если известно, что цифровой ребус

$$\overline{ЖУК} \times n = \overline{ЖУКИ}$$

имеет решение? (Здесь одинаковым буквам русского алфавита соответствуют одинаковые цифры, разным буквам — разные.)

М. Ахмеджанова



3. Имеются 25 одинаковых картонных квадратов, около вершин которых одинаково записаны числа 0, 1, 4, 3. Все квадраты сложили в стопку. Может ли оказаться так, что суммы чисел, записанных около каждой вершины стопки, будут равны?

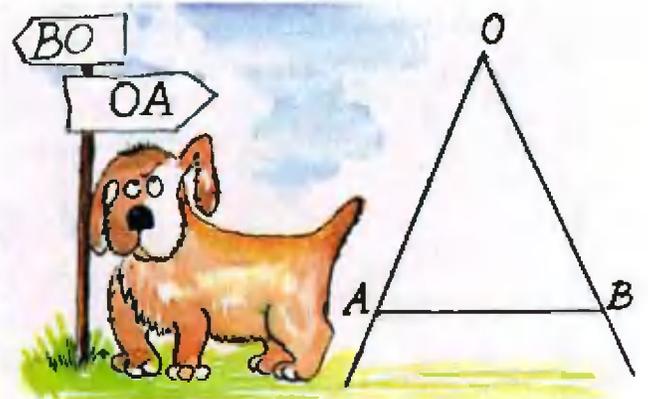
Д. Калинин



Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

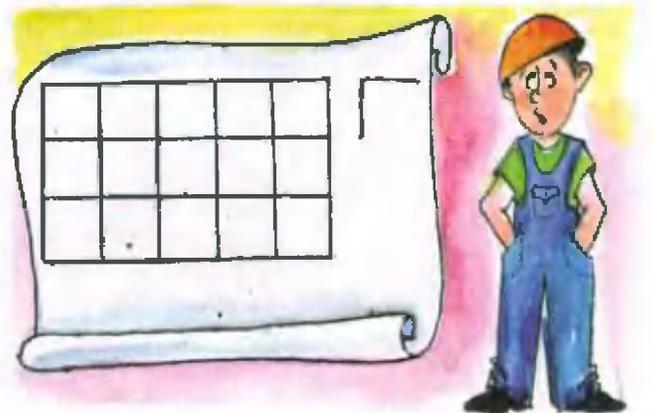
4. Две прямолинейные аллеи парка пересекаются в его центре — точке O . На равном удалении от центра находятся две скамейки — в точках A и B , также соединенных аллеей. На каждой скамейке сидит девочка, а собака Моська располагается ровно посередине между ними. Девочки одновременно встали и с одинаковой скоростью пошли по аллеям. Одна из них пошла по аллее OA от центра, а другая — по аллее BO к центру парка. Собака в каждый момент времени занимает середину отрезка, соединяющего двух девочек. Выбежит ли собака Моська за пределы аллеи AB , пока одна из девочек будет двигаться к центру парка?

В. Дубов



5. В мастерской изготавливают прямоугольные решетки, состоящие из квадратных ячеек со стороной 1. Для этого используют заготовки, состоящие из двух стержней длиной 1, сваренных под прямым углом в виде буквы «Г». При изготовлении решетки запрещается накладывать стержни друг на друга; допускается лишь сваривать их между собой в точках касания. Для каких m и n мастерская может изготовить решетку размером $m \times n$?

И. Акулич



Иллюстрации Д.Гришуквой

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высыпайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители зоочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

1. Восемь одинаковых по внешнему виду монет расположены по кругу. Известно, что три из них – фальшивые, и они расположены рядом друг с другом. Вес фальшивой монеты отличается от веса настоящей. Все фальшивые монеты весят одинаково, но неизвестно, тяжелее или легче фальшивая монета настоящей. Покажите, что за 3 взвешивания на чашечных весах без гирь можно определить все фальшивые монеты.

И. Николаева

2. Даны три отрезка, длины x, y, z которых удовлетворяют равенству

$$x^4 yz + y^4 zx + z^4 xy = x^3 y^3 + y^3 z^3 + z^3 x^3.$$

Докажите, что площадь квадрата, сторона которого равна одному из данных отрезков, равна площади прямоугольника, стороны которого образованы двумя другими отрезками.

А. Жуков

3. Если к 2 приписать справа 5, то получится 25 – точный квадрат. Получится ли точный квадрат, если

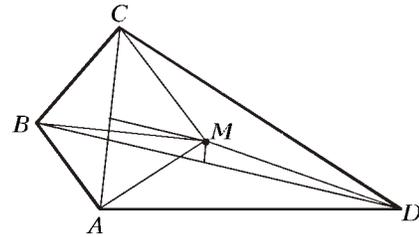
а) к числу 2^{2m+1} приписать справа число 5^{2n+1} ;

б) к числу 2^{2m} приписать справа число 5^{2n} ?

Здесь m, n – натуральные числа.

А. Зайчик

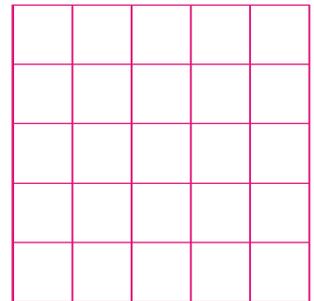
4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ через середины диагоналей проведены прямые, параллельные диагоналям. Эти прямые пересекаются в точке M . Докажите, что площадь треугольника ABM равна площади



треугольника CMD , а площадь треугольника BMC равна площади треугольника AMD .

М. Волчкевич

5. В мастерской изготавливают квадратные решетки, состоящие из квадратных ячеек со стороной 1. Для этого используют заготовки, состоящие из трех стержней длиной 1, сваренных под прямыми углами в виде буквы «П». При изготовлении решетки запрещается накладывать стержни друг на друга; допускается лишь сваривать их между собой в точках касания.



Для каких n мастерская может изготовить решетку размером $n \times n$?

И. Воронович, Е. Барабанов, И. Акулич

Подозрительные фертинги

И. АКУЛИЧ

— ТАК О ЧЕМ Я? А? НИКТО НЕ ПОМНИТ? АХ, ДА — О МАТЕМАТИКЕ, провалиться мне на этом месте! Значит, вы утверждаете, что математика капиталисту ни к чему? — говорил владелец макаронного заведения Скуперфильд консервному фабриканту Скрягину во время

перерыва в очередном заседании Большого Бредлама.¹ Остальные присутствующие в разговоре не участвовали, но прислушивались к нему не без интереса.

¹ Подробности см. в романе-сказке Н.Носова «Незнайка на Луне».



— Конечно, ни к чему! — ответил Скрягинс. — Разве что деньги считать... А что касается всякого там моделирования, оптимизации производственного процесса и прочей дребедени, то у меня своя оптимизация: сырье покупать подешевле, товары продавать подороже, рабочим платить поменьше.

— Да! Это точно! Что касается производственного процесса — вы совершенно правы! И у меня такая же оптимизация. Но в жизни — в обычной жизни! — математика может очень пригодиться. И даже принести прибыль! Не верите? А я вам рассказывал историю с четырьмя фертингами²? Нет? Так слушайте! Позвонили мне однажды из банка и говорят, что после какого-то там перерасчета платы за электричество они должны вернуть мне три фертинга. Целых три! Конечно, я помчался в банк. А? Что вы говорите? Почему не на машине? Еще чего! Бензин — штука не бесплатная. А ноги не отвалятся. В банке мне выдали три новеньких блестящих серебряных фертинга, и я пошел домой. И когда я шагал по Кривой улице (я там живу), вдруг слышу крики, стрельбу и всякий прочий шум. В чем дело — не пойму. Потом

увидел, что полиция преследует каких-то преступников. Конечно, я отступил подальше — ни с теми, ни с другими связываться, сами понимаете, нежелательно. Сначала пробежали бандиты, на ходу выбрасывая что-то из карманов, затем — полицейские. Когда все стихло, я двинулся домой, но не тут-то было! Распроклятые полицейские очень быстро вернулись, оцепили место погони и долго обшаривали все вокруг — по-видимому, искали то, от чего избавлялись преступники. Пришлось ждать, пока они не убралась. Наконец, дорога освободилась, я пошел дальше и вдруг заметил в траве газона что-то блестящее. И как вы думаете, что это было? А? Не знаете? Это был серебряный фертинг — точь-в-точь такой, как те, что мне дали в банке. Возможно, его выбросил один из бандитов или кто-то другой раньше потерял, но мне-то какая разница? Добавив монету к трем полученным в банке, я вернулся домой, а вечером включаю телевизор — и что вы думаете? Оказывается, те самые преступники, которых гоняла полиция по моей улице, были фальшивомонетчиками! Они изготавливали поддельные фертинги высочайшего качества, совершенно неотличимые от настоящих, и единственное, что могло их выдать, — чуть-чуть другой вес. По телевизору, к сожалению, не сообщили, были ли фальшивые монеты легче или тяжелее настоящих, зато заявили, что полиция, возможно, скоро начнет производить обыски, и всякого, у кого обнаружат хотя бы один такой фертинг, будут считать сообщниками тех злоумышленников. Надо было срочно избавиться от фальшивой монеты, но... она лежала у меня в одном кармане с тремя настоящими, и отличить ее я не мог — весов-то у меня нет. Тем более, монета могла быть и настоящая! А? Что вы сказали? Я плохо слышу!

— А вы пошли бы да купили что-нибудь на все эти четыре фертинга! — повторил Скрягинс.

— Да? А если б меня запомнили в магазине, и потом обнаружилось, что среди монет есть фальшивая? Нет уж, надо было как можно быстрее выделить из четырех монет подделку, если, разумеется, она там была! Но как это сделать? Конечно, взвешиванием! Пришлось отправляться к своему соседу — Жадингу. У него весы есть, но он такая жадина, такой скупердяй...

При этих словах окружающие заулыбались. Они хорошо знали и Жадинга, и Скуперфильда, и кто из них скупей — сказать было трудно. В этой области один другому не уступал.

— Жадинг дал мне весы, — продолжал Скуперфильд, не замечая всеобщего веселья, — обычные чашечные весы без гирь. И заявил, что за каждое взвешивание он будет брать с меня по сантику! Представляете — по целому сантику! Жулик! Негодяй! Ворюга! Вымогатель!

Скуперфильд разошелся не на шутку и в сердцах принялся размахивать тростью, так что оказавшимся поближе (в том числе и Скрягинсу) крепко досталось.

² Фертинг — денежная единица на Луне. Один фертинг равнялся 100 сантикам. За 5 сантиков можно было заказать в столовой тарелку каши.

(Продолжение см. на с.35)

Дорогие читатели!

С момента появления в 1970 году и по настоящее время жизнь в журнале «Квант» не затихала ни на день, а его история богата яркими и удивительными событиями.

Явившись детищем выдающихся физиков и математиков, «Квант» был нацелен на раннее и активное вовлечение в научную деятельность достойного пополнения, на воспитание новой плеяды широко образованных ученых, что в то время было признано первоочередной задачей общества. Журнал ворвался в жизнь практически каждой семьи как увлекательный пришелец, быстро снискавший любовь, почтение, уважение, а иногда и ... недоумение. В те годы тираж журнала «Квант», из-за его уникальности и особого положения в ряду учебной литературы, достигал 250–300 тысяч экземпляров. Каждая школа, каждая библиотека регулярно получали наш журнал. Это было своего рода чудом.

С начала 90-х годов тираж журнала «Квант» стал резко падать и вот уже на протяжении ряда лет держится на уровне 4–4,5 тысяч. Много это или мало? Устраивают ли нас эти цифры? Соответствует ли указанная ситуация нашим творческим планам и устремлениям? Нет, нет и нет. Так что же произошло?

Из-за известного крена в умонастроениях в нашем обществе, из-за пошатнувшейся системы жизненных приоритетов и выпадения фундаментальной науки из системы ценностных ориентиров журнал «Квант» оказался вне поля зрения педагогов, учителей, деятелей образования. Но главная потеря состояла в том, что журнал перестал быть поводом для семейных бесед – касалось ли это решения оригинальных задач, знакомства с поразительными научными идеями или ярчайшими моментами биографий уникальных творческих личностей. Иными словами, оказалась утерянной традиция, когда старшие поколения рекомендовали журнал «Квант» представителям подрастающего поколения в качестве компаса, ориентирующего в поисках своего места в жизни. Все чаще приходилось слышать, что нас уже давно нет, и прочее, и прочее.

Мы никак не хотели мириться с создавшейся ситуацией и старались делать все возможное, а иногда и невозможное, чтобы журнал продолжал жить. И вот в очередной раз ветер перемен подул в нашу сторону, и стали появляться признаки новой жизни. Но для ее истинного прихода нужна была помощь извне.

В середине 2002 года нам посчастливилось познакомиться с основателем частного благотворительного фонда «Династия», истинным подвижником, уникальным ученым, человеком благородных рыцарских призваний – Дмитрием Борисовичем Зиминым (создателем телекоммуникационной компании «Вымпелком»). У нас появилась возможность резко увеличить тираж (вдвое) и начать адресную рассылку журнала «Квант» с целью широкого напоминания о себе.

С другой стороны, сразу остро встал вопрос об истинном месте журнала «Квант» в сегодняшней жизни. Здесь нам на помощь пришел благотворительный фонд «Евразия», взявший на себя проведение маркетингового исследования.

К сожалению, ничего более нового для заочного опроса читательской аудитории, кроме простого и подробного анкетирования, на сегодняшний день не появилось. Поэтому обращаемся к вам с убедительной просьбой ответить на вопросы анкеты и выслать ее в адрес редакции. Нам крайне важно ваше неформальное участие, и мы заранее благодарны вам за затраченные усилия.

Для того чтобы придать анкетированию большую привлекательность, мы придумали специальную систему призов и поощрений. Так, все приславшие в редакцию **до 30 ноября** анкеты автоматически становятся участниками лотереи, в которой будут разыграны 30 бесплатных подписок на журнал «Квант» на второе полугодие 2004 года. Десять читателей, ответивших первыми, получают в подарок футболки с логотипом журнала «Квант». А автора самых подробных ответов на вопросы анкеты, вложившего в письмо копию подписной квитанции на наш журнал на первое полугодие 2004 года, ждет главный памятный приз.

С нетерпением ждем ваших писем!

Ф СП-1

АБОНЕМЕНТ на ~~газету~~ журнал 70465
(индекс издания)

КВАНТ Количество комплектов

на 2003 год по месяцам:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
						X	X	X	X	X	X

Куда _____
(почтовый индекс) _____ (адрес)

Кому _____
(фамилия, инициалы)

ИВ	место	ли-тер	на газету журнал	70465
				(индекс издания)

КВАНТ

Стоимость	подписка	_____ руб.	_____ коп.	Количество комплектов
	пере-адресовка	_____ руб.	_____ коп.	

на 2003 год по месяцам:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
						X	X	X	X	X	X

Куда _____
(почтовый индекс) _____ (адрес)

Кому _____
(фамилия, инициалы)

АНКЕТА ЧИТАТЕЛЯ

Фамилия _____ ИМЯ _____

отчество _____

Адрес: индекс _____ край/республика _____

область _____ город/село _____

улица _____ дом _____ корпус _____ квартира _____

тел.: (код) _____ номер _____

Возраст _____

1. Пол (здесь и далее отметьте нужный ответ):

- 1) мужской,
- 2) женский.

2. Образование:

- 1) имеется ученая степень,
- 2) высшее образование,
- 3) незаконченное высшее,
- 4) среднее специальное,
- 5) среднее,
- 6) незаконченное среднее.

3. **Род занятий:**
- 1) школьник,
 - 2) студент,
 - 3) работаю по найму,
 - 4) частный предприниматель,
 - 5) пенсионер.
4. **Кем работаете/где учитесь?** _____
5. **Как давно Вы читаете журнал «Квант»?** _____
6. **Как часто Вы читаете журнал «Квант»:**
- 1) регулярно,
 - 2) от случая к случаю,
 - 3) читаю в первый раз?
7. **Как бы Вы могли охарактеризовать Ваш интерес к журналу:**
- 1) исключительно познавательный,
 - 2) профессиональный,
 - 3) случайный?
8. **Каким образом к Вам попадает журнал?**
- А. По подписке** (*отметьте тип подписки*):
- 1) почтовая доставка,
 - 2) организация-распространитель _____
(название организации-распространителя)
- В. В библиотеке** (*отметьте вид библиотеки*):
- 1) публичная,
 - 2) ведомственная,
 - 3) школьная,
 - 4) библиотека вуза.
- С. Покупаю.**
- Д. Беру у друзей и знакомых.**
- Е. Читаю в Интернете.**
- Ф. По рассылке** (*приходит без подписки*).
9. **Какие темы/разделы вызывают у вас наибольший интерес:**
- 1) все материалы,
 - 2) научные публикации,
 - 3) статьи популярной тематики,
 - 4) биографические и другие материалы об известных ученых,
 - 5) публикации о современной науке,
 - 6) «Задачник «Кванта»,
 - 7) «Математический кружок»,
 - 8) «Квант» для младших школьников»,
 - 9) «Практикум абитуриента»,
 - 10) «Калейдоскоп «Кванта»,
 - 11) материалы вступительных экзаменов,
 - 12) олимпиады,
 - 13) другое (*запишите*)? _____
-
10. **Какие публикации оказались Вам наиболее полезными и интересными** (*напишите названия или темы*)?
-
-
-
11. **Какие материалы Вам хотелось бы видеть в нашем журнале?**

12. Как Вы считаете, что может привлечь новых читателей к нашему журналу?

13. Ваше мнение о художественном оформлении и полиграфическом исполнении журнала:

- 1) все нравится,
- 2) недостаточно красочный,
- 3) необходимо улучшить качество полиграфии,
- 4) мало иллюстраций,
- 5) не нравится совсем,
- 6) другое (укажите). _____

14. Есть ли среди Ваших знакомых читатели журнала «Квант»:

- 1) да, это мои ровесники,
- 2) да, это люди старшего поколения,
- 3) нет?

15. Что оказывает на Вас наибольшее влияние при принятии решения о покупке или подписке на журнал (отметьте не более 2-х вариантов ответа):

- 1) содержание,
- 2) цена,
- 3) удобство получения,
- 4) рекомендации знакомых,
- 5) реклама журнала в СМИ/наружная реклама,
- 6) другое (укажите)? _____

16. Какой вариант возможного изменения содержания журнала Вы бы предпочли:

- 1) повышение сложности задач и статей журнала,
- 2) снижение сложности задач и статей журнала,
- 3) увеличение количества научных публикаций,
- 4) увеличение количества статей популярной тематики,
- 5) другое (укажите)? _____

17. Укажите причины, которые могут Вас заставить отказаться от подписки или приобретения журнала «Квант» (отметьте не более 2-х вариантов ответа):

- 1) изменение содержания/ стиля журнала,
- 2) увеличение цены,
- 3) неудобство получения,
- 4) негативные отзывы знакомых,
- 5) наличие рекламы в журнале,
- 6) другое (укажите). _____

18. Планируете ли Вы подписаться на журнал в следующем году:

- 1) да,
- 2) нет (укажите причины)? _____

19. Какие еще научно-популярные журналы Вы читаете?

20. Что еще Вы хотели бы сказать о журнале «Квант»? Что пожелать ему?

(Начало см. на с.29)

С трудом удалось его успокоить и заставить продолжать:

— Да! Так о чем я? А? Никто не помнит? Столько ослов вокруг, и никто не помнит, о чем я говорил? Что? О фертингах? Да, верно — о четырех фертингах, провалиться им на месте! Когда этот бандит Жадинг затребовал с меня такие немыслимые деньги за пользование весами, я стал думать, как выделить фальшивую монету (если она есть) за наименьшее число взвешиваний. И сколько это взвешиваний, по-вашему?

— Ну, трех, видимо, хватит... — стал рассуждать Скрягинс. — Сначала сравнить первую монету со второй, потом вторую с третьей, потом третью с четвертой... Ну и все! Трех взвешиваний точно хватит.

— Значит, три взвешивания? А почему именно три? Может, хватит двух? Или одного?

— Одного-то уж точно не хватает! — заявил Скрягинс.

— Почему вы так считаете?

— Ну...

— Вот видите — не знаете! А я знаю! И помогла мне это узнать математика! И скажите мне теперь, что она — бесполезная вещь!

— Как же она могла помочь?

— А вот послушайте. У меня 4 монеты. Пронумеруем их. Первая может быть легче или тяжелее остальных. Обозначим эти случаи так: 1Л и 1Т. То же самое возможно и для каждой из остальных монет — еще 6 случаев: 2Л, 2Т и так далее. Наконец, возможен и вариант, когда все монеты — настоящие; обозначим его буквой Н. Таким образом, имеется всего 9 случаев: 1Л, 1Т, 2Л, 2Т, 3Л, 3Т, 4Л, 4Т и Н. Это понятно? Хорошо. Вот я сделал первое взвешивание (любым способом распределив монеты по чашкам весов). Здесь могут быть 3 исхода: или левая чашка перевесила, или правая, или равновесие. Понятно, что каждый из 9 случаев соответствует одному из исходов. И непременно найдется исход, которому соответствуют не меньше трех случаев.

— Почему это вдруг непременно найдется?

— Эх, голова вы садовая! Да если такого исхода не будет, то, значит, каждому исходу соответствуют не больше двух случаев, и всего случаев не больше 2×3 . А у нас-то их больше — целых 9! Понятно? То-то же! Когда-нибудь я обобщу этот метод рассуждений и назову его «принципом Скуперфильда»³. Звучит? Ладно, пойдем дальше. Так как найдется исход, которому соответствуют не меньше трех случаев, то, если он наступит, я не смогу различить эти случаи между собой — результат-то взвешиваний для них всех один и тот же! Значит, одного взвешивания и вправду не хватит. Но, может быть, хватит двух? А вот здесь-то надо



³ На Земле этот метод уже обобщили и называют «принципом Дирихле». Он формулируется так: если N исходам соответствуют не меньше $NK + 1$ случаев, то найдется исход, которому соответствуют не меньше $K + 1$ случаев. Принцип Дирихле легко доказывается «от противного», что и сделал Скуперфильд.

порассуждать тоньше! Если после первого взвешивания одному из исходов соответствует не меньше четырех случаев, то нам и второго взвешивания не хватит: ведь если трем исходам второго взвешивания соответствуют четыре случая, то какому-то из этих исходов соответствует не меньше двух случаев! Тот же принцип Скуперфильда — не забыли еще? И потому случись такой исход — потребуется новое взвешивание, уже третье!

— А если... после первого взвешивания каждому исходу соответствуют ровно три случая? — неуверенно предположил Скрыгин. — Всего случаев 9, и это как раз...

— Ага, сообразили! — обрадовался Скуперфильд. — То-то и оно: если первым взвешиванием мы сумеем разделить случаи поровну по трем исходам, то это даст нам надежду покончить с проблемой уже вторым взвешиванием! Но как это сделать?

— А что тут сложного? — возразил Скрыгин. — Кладем на каждую чашку весов по одной монете. Тогда если одна из них перевесит...

— А если равновесие? — перебил Скуперфильд, злорадно улыбаясь; его улыбка, правда, больше походила на устрашающую гримасу. — Тогда у вас останется на подозрении аж пять случаев: 3Л, 3Т, 4Л, 4Т и Н. Попробуйте распознать их за одно оставшееся взвешивание!

— И правда, не выходит... — задумался Скрыгин. — Тогда положим по две монеты. Если равновесие — то все хорошо: фальшивой монеты нет.

— А если неравенство? Получается по 4 случая на каждый исход, какая бы чашка ни перевесила. Ну так что?

— Не знаю... — развел руками Скрыгин. — Других-то способов и нет. Нельзя же класть на чашки разное число монет.

— Еще бы! — воскликнул Скуперфильд. — Тогда уж точно чашка с большим числом монет в любом случае перевесит — ведь фальшивая монета ненамного отличается по весу от настоящей. Такое взвешивание не даст вам ничего!

— Значит, двумя взвешиваниями все-таки не обойтись?

— Это вам не обойтись! — гордо заявил Скуперфильд. — А я обошелся. Еще чего не хватало — лишний сантик выкладывать! Да еще Жадингу! Хватит с него и двух!

— Но... каким образом?

— А вот каким! — Скуперфильд вновь жутко улыбнулся, а затем полез в карман, достал оттуда серебряный фертинг и покрутил монету перед носом Скрыгина. — Я сделал вот так — и победил!

— Не понимаю.

— Сейчас объясню. Когда, выложив все четыре монеты перед весами, я сообразил, что не годится класть на чашки при первом взвешивании ни по одной, ни по две монеты, я подумал: а кто мне мешает использовать другие настоящие монеты, которые у меня есть? Пошарив в карманах, я нашел то,

что требовалось: прекрасный серебряный фертинг — этакий эталон. Поэтому первым взвешиванием я положил на левую чашку весов 1-ю и 2-ю монеты, а на правую — 3-ю и эталонную. И тем самым я распределил-таки все возможные 9 случаев по трем исходам. Обратите внимание: если перевесит левая чашка, значит, имеет место какой-то из трех случаев: 1Т, 2Т или 3Л. Если же перевесит правая, то опять же один из трех: 1Л, 2Л или 3Т. А при равновесии будет 4Л, 4Т или Н. Все! Дальнейшее — проще пареной репы. Как вторым взвешиванием выявить один случай из трех — вы и сами сообразите.

— Ну-ка попробую! — загорелся Скрыгин. Так... если надо выявить один случай из первых трех (1Т, 2Т, 3Л), то, наверное, лучше всего сравнить 1-ю и 2-ю монеты. Какая перевесит — та и фальшивая. Если же будет равенство, то фальшивая — 3-я. Из вторых трех (1Л, 2Л, 3Т) — тоже понятно как, даже и говорить не будем. Последние же три (4Л, 4Т, Н) — вполне очевидно: сравниваем 4-ю монету и эталон. Если равновесие — то фальшивых монет нет, если же нет — то 4-я монета фальшивая (легче она или тяжелее — все равно).

— Хвалю! — великодушно произнес Скуперфильд. — Именно так я и делал. И монета, кстати, оказалась настоящей! Вот вам и прибыль от математики!

— Какая же прибыль? Монету вы нашли без всякой математики, разве что один сантик на взвешиваниях сэкономили...

— А этого разве мало? Если каждый день по сантику — сколько это за год получается? А за десять лет? Тот же! И вообще, как говорит очень мудрая пословица, сантик фертинг бережет.⁴ Я ее никогда не забываю!

Примечание напоследок. Описанную здесь задачу в более общем виде поставил и решил хорватский математик В.Давиде в середине прошлого века. Она формулируется так. Дано $\frac{3^n - 1}{2}$ монет (n — натуральное). Среди них имеется не более одной фальшивой монеты, которая отличается от настоящих по весу (но неизвестно, в какую сторону). Кроме того, есть еще одна настоящая монета — «эталонная». Тогда за n взвешиваний на чашечных весах без гирь всегда можно выделить фальшивую монету и узнать, легче или тяжелее она, чем настоящая (либо же убедиться, что фальшивой монеты нет вообще). При отсутствии же эталонной монеты n взвешиваниями обойтись не удастся — именно потому, что не удастся распределить все возможные случаи (а их всего 3^n) поровну между тремя первыми же взвешиваниями.

⁴ У нас на Земле тоже есть такая пословица, но она в разных странах звучит по-разному.

Из занимательного мироведения

ОДНИМ ИЗ ВЫДАЮЩИХСЯ ПОПУЛЯРИЗАТОРОВ ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ НАУКИ был Василий Иосифович Прянишников (1890–1980). Почти вся его жизнь прошла в городе «на брегах Невы». Здесь он многие годы преподавал в Высшем военно-морском училище, был одним из ведущих научных сотрудников Ленинградского планетария, вошел в «великолепную пятерку» (Я. Перельман, В. Камский, В. Прянишников, Л. Успенский, А. Малков), основавшую первый в истории образования и просвещения Дом занимательной науки (ДЗН), в котором создал и вел отдел астрономии (мироведения). В начале блокады великого города профессор В.И.Прянишников, будучи уже пожилым человеком, ушел на фронт добровольцем. В послевоенные годы он успешно продолжал многогранную педагогическую и методическую работу.

В.И.Прянишников написал около десятка научно-занимательных работ – брошюр, книг, статей, став одним из зачинателей этой разновидности жанра научно-популярной литературы. В отличие от большинства аналогичных изданий, все его занимательные книги написаны в форме вопросов и ответов.

Попробуйте ответить на простые, казалось бы, вопросы, отобранные нами из этих книг для любознательных читателей журнала «Квант».

Вопросы

1. Что произошло бы на Земле, если бы воздух внезапно исчез?
2. Какой камень самый легкий и какой самый тяжелый?
3. Бывают ли кольцеобразные затмения Луны?
4. Почему при облачном небе не всегда идет дождь?
5. Можно ли, находясь на отлогом берегу реки и не имея под руками никаких инструментов, определить ее ширину с помощью кусочка соломинки или травинки?
6. Укажите на географической карте, в каком направлении пройдет кратчайший воздушный путь между Баку и Сан-Франциско.
7. Если надо быстро загасить образовавшееся пламя, то какой водой лучше его заливать – холодной или горячей?
8. Обычно летом дождевые капли крупные, а осенью мелкие. Почему?
9. В каком море северного полушария наблюдается круглогодичный ледоход?
10. С какой скоростью упадет на землю пуля, выпущенная из винтовки прямо вверх?
11. Почему уникальные рукописи немецкого астронома Иоганна Кеплера хранятся не в Германии, а в нашей стране?

12. Сколько километров вы пролетели в мировом пространстве, пока читали этот вопрос?

А теперь сверьте ваши ответы с авторскими.

Ответы

1. Перечислим главные последствия исчезновения воздуха.
 - На Земле установилась бы температура приблизительно $-170\text{ }^{\circ}\text{C}$, замерзли бы все водные пространства, а суша покрылась бы ледяной корой.
 - Наступила бы полная тишина, так как звук в пустоте не распространяется; небо стало бы черным, поскольку окраска небесного свода зависит от воздуха; не стало бы сумерек, зорь, белых ночей.
 - Прекратилось бы мерцание звезд, а сами звезды были бы видны не только ночью, но и днем (днем мы их не видим из-за рассеивания частичками воздуха солнечного света).
 - Погибли бы животные и растения.
2. К числу самых легких камней относятся, например, пемза и янтарь. Плотность их мала благодаря пористости; они плавают, едва погружаясь в жидкость. Самые тяжелые земные природные камни-минералы принадлежат к металлической платиновой группе. Они в двадцать раз тяжелее воды.
3. Не бывают, так как земная тень даже в месте расположения Луны шире ее поперечника.
4. Облака состоят из мельчайших капелек, и при облачном небе дождь идет всегда! Однако капли, пока не увеличатся до определенных размеров, не достигают земли, так как восходящие токи воздуха поддерживают капли на известной высоте.



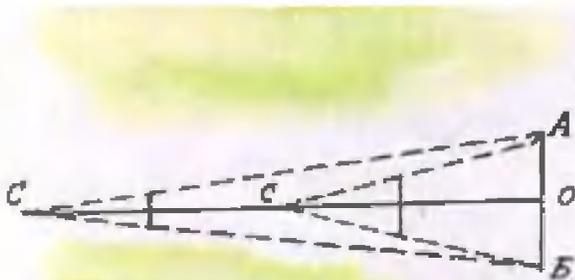
Кроме того, капли, приближаясь к земной поверхности, нагреваются и, испаряясь, перестают быть видимыми. Но если капли становятся большими, а значит, и способными преодолевать сопротивление воздуха, то дождь достигает земли.

5. На противоположном берегу выбирают два заметных предмета и, вытянув обе руки с соломинкой (травинкой), закрывают ею промежуток между этими предметами; при этом один глаз должен быть закрыт (рис.1).



Затем, заметив на земле место, откуда велось наблюдение, и сложив соломинку пополам, отходят под прямым углом от реки до тех пор, пока расстояние между выбранными предметами не уложится в соломинке, укороченной в два раза. Остается сосчитать, сколько шагов отделяют место первого наблюдения от второго. Это расстояние и есть ширина реки.

Действительно, при малых углах вполне справедливо правило: при увеличении расстояния в два раза угловая величина предмета уменьшается вдвое (рис. 2). Угол AcB в два раза больше угла ACB , и расстояние CO в два раза больше CO . Очевидно, что, если A и B — деревья на другой стороне реки, то расстояние CO будет соответствовать ширине реки. В точке c — первое определение угла с помощью соломинки. Вершина



этого угла (глаз наблюдателя) и есть точка c , а прямые, проходящие через концы соломинки и направленные на точки A и B , — стороны угла. В точке C угол получается в два раза меньше, чем в точке c , так как стороны его направлены на те же предметы A и B через укороченную вдвое соломинку. Следовательно, расстояние до них увеличится в два раза. Половину этого расстояния измеряющий прошел, удаляясь от реки; другая половина и есть искомая ширина реки.

Понятно, что таким же образом можно определить ширину озера, пруда, водохранилища.

6. Отвечая на этот вопрос, обычно определяют по карте направление кратчайшего пути в западном и восточном направлениях. Ни то, ни другое неверно. Кратчайший путь между этими городами пройдет через Северный полюс, в чем вы легко убедитесь, натянув нитку на поверхность глобуса между Баку и Сан-Франциско.

7. Если под рукой имеется горячая и холодная вода, то лучше гасить огонь горячей. Она скорее обратится в пар, который окружит горящий предмет со всех сторон и прекратит к нему доступ свежего воздуха. Кроме того, при быстром переходе горячей воды в пар потребуется сразу большее количество теплоты, которое отнимается от горящего предмета.

8. Падающие летом мелкие дождевые капли обычно не достигают поверхности земли, так как они либо испаряются, либо поднимаются восходящими токами воздуха. Крупные же капли, образовавшихся во многих случаях от слияния меньших, достигают земли, не успев по пути испариться и преодолев своей тяжестью восходящие воздушные течения.

Осенью, когда температура воздуха заметно падает, мелкие холодные капельки дождя не успевают испариться, и вся их масса достигает поверхности земли.

9. В Гренландском море. Сюда непрерывно и постоянно выносятся льды из Арктики.

10. Как правило, считают, что у поверхности земли скорость возвращающейся пули будет по величине такой же, как при выстреле. Это неверно. Свободно падающая пуля с любой высоты приобретет у земли скорость не свыше 40 м/с.

11. Кеплер в течение всей жизни сильно нуждался и не мог напечатать свои многочисленные работы. После его смерти рукописи пропали, а когда были случайно найдены, их владелец потребовал за них очень большую сумму денег, и в Германии покупателя не нашлось. По совету знаменитого математика Эйлера, который работал в России, эта сумма была по приказу Екатерины II выделена, и рукописи Кеплера попали в нашу страну.

12. Каждый человек, находясь на земном шаре, как известно, движется с Землей вокруг Солнца со скоростью 30 км/с. Для чтения вопроса вам потребовалось около четырех секунд, следовательно, за это время вы пролетели более 120 км.

Публикацию подготовил Ю.Морозов

Принцип Ферма

А. СЕНДЕРИХИН

ФРАНЦУЗСКИЙ МАТЕМАТИК ПЬЕР ФЕРМА ПРИБЛИЗИТЕЛЬНО в 1660 году сформулировал основной принцип геометрической оптики, называемый теперь принципом Ферма. Согласно этому принципу, из всех возможных путей между двумя точками свет выбирает тот, по которому время прохождения наименьшее. Отсюда следуют все основные законы геометрической оптики. Действительно, в однородной среде свет должен распространяться прямолинейно, поскольку прямая – это кратчайшее расстояние между двумя точками, и, следовательно, время распространения наименьшее. Если же свет падает на границу раздела двух оптически различных сред (сред с разными показателями преломления, или с разными скоростями распространения света), то выполняются законы отражения и преломления света, которые тоже непосредственно вытекают из принципа Ферма.

В более строгой формулировке принцип Ферма представляет собой так называемый вариационный принцип, утверждающий, что свет распространяется от одной точки к другой по линии, вдоль которой время его прохождения экстремально, т.е. или минимально, или максимально, или одинаково по сравнению с временами прохождения вдоль всех других линий.

Обсудим несколько конкретных примеров, иллюстрирующих принцип Ферма.

Отражение света

Пример 1. Рассмотрим отражение света от плоского зеркала (рис.1; заслонка D исключает прямое попадание света из A в B). а) Докажем, что при выполнении закона отражения $\angle ACD = \alpha = \beta = \angle DCB$ свет распространяется по кратчайшей из возможных траекторий, а именно по линии ACB . б) Выведем закон отражения света, исходя из того, что свет, отразившись от зеркала, распространяется по кратчайшей траектории.

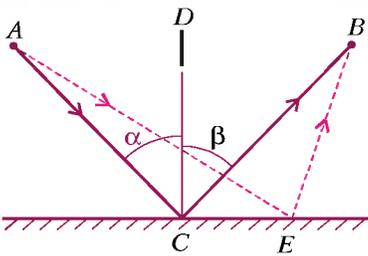


Рис. 1

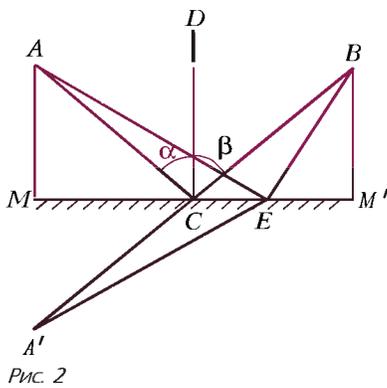


Рис. 2

а) Выполним дополнительное построение (рис.2): отметим на продолжении перпендикуляра AM отрезок $MA' = AM$ и соединим точку A' с точками C и E . Поскольку $\triangle ACM = \triangle A'CM$ (как два прямоугольных треугольника с равными катетами), то $\angle ACM = \angle A'CM$. Так же $\triangle ACM = \triangle BCM'$, откуда $\angle ACM = \angle BCM'$.

Значит, $\angle A'CM = \angle BCM'$. На основе обратной теоремы о накрест лежащих углах получаем, что линия $A'CB$ – прямая, т.е. кратчайшая линия. Но $A'C = AC$ и $AE = A'E$, следовательно,

$$l_{ACB} < l_{AEB}.$$

б) Пусть точка E свободно движется вдоль MM' (рис.3). Когда длина линии AEB становится минимальной, выполняется закон отражения, т.е. $\angle AEK = \angle BEK$. Действительно, из рисунка 3

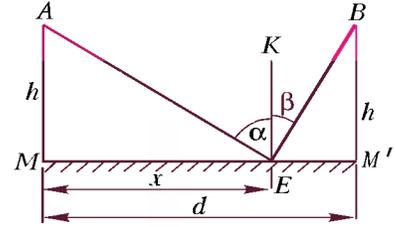


Рис. 3

$$l_{AEB} = l_{AE} + l_{EB} = \sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{(d-x)^2 + h^2}.$$

Запишем необходимое условие минимума:

$$\frac{dl_{AEB}}{dx} = 0.$$

или

$$\frac{d}{dx} \left(\sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{(d-x)^2 + h^2} \right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} - \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + h^2}} = \frac{x}{l_1} - \frac{d-x}{l_2} = 0.$$

Но

$$\frac{x}{l_1} = \sin \alpha \text{ и } \frac{d-x}{l_2} = \sin \beta,$$

поэтому

$$\sin \alpha = \sin \beta, \text{ и } \alpha = \beta.$$

Что экстремум будет именно минимумом, можно показать взятием второй производной или каким-либо еще способом.

Пример 2. Пусть свет отражается от вогнутого сферического зеркала, выполненного в виде полусферы радиусом R . Выведем закон отражения света для этого случая при условии, что свет, распространяясь от точки A к точке B , выбирает экстремальную по длине траекторию (рис.4; заслонка D исключает прямое попадание света из A в B). Исследуем характер этого экстремума.

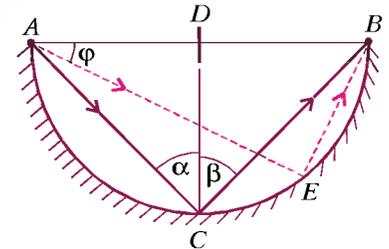


Рис. 4

Согласно рисунку 4,

$$l_{AEB} = l_{AE} + l_{EB} = 2R \cos \varphi + 2R \sin \varphi,$$

т.е. искомая длина является функцией угла φ . Условие экстремума реализуется при

$$\frac{dl_{AEB}}{d\varphi} = 0,$$

или

$$\frac{d}{d\varphi} (2R \cos \varphi + 2R \sin \varphi) = 2R (-\sin \varphi + \cos \varphi) = 0,$$

откуда получаем

$$\sin \varphi = \cos \varphi, \text{ и } \varphi = 45^\circ.$$

Это означает, что точка E при истинной траектории должна

находиться посередине дуги AEB , т.е. в точке C , при этом $\alpha = \beta$.

Теперь исследуем характер экстремума. Возьмем вторую производную от искомой длины по углу:

$$\left. \frac{d^2 l_{AEB}}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=45^\circ} = 2R(-\cos 45^\circ - \sin 45^\circ) = -2\sqrt{2} R < 0.$$

Отрицательный знак второй производной показывает наличие максимума – свет выбирает наидлиннейшую из возможных траекторий:

$$l_{ACB} > l_{AEB}.$$

Пример 3. Докажем, что при отражении от вогнутой эллипсоидной поверхности выполняется закон отражения $\alpha = \beta$ при переходе света из фокуса A эллипса к фокусу B (рис. 5; точка C может быть выбрана произвольно, CN – перпендикуляр к касательной в точке отражения; заслонка D исключает прямое попадание света из A в B). Реализуется ли условие экстремума в этом случае?

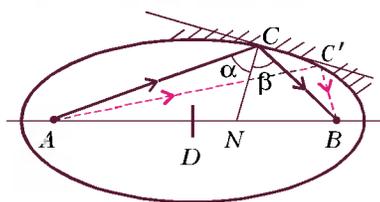


Рис. 5

Опустим из точки A перпендикуляр на касательную и продолжим его на расстояние $LA' = AL$ (рис.6). Соединим произвольную точку эллипса E с точкой A' . Треугольник $A'LE$ равен треугольнику $A'LE$ (как два прямоугольных треугольника с равными катетами), отсюда $\alpha = \alpha'$ и $A'E = AE$. Тогда

$$l_{A'EB} = l_{AEB} = 2a,$$

где a – большая полуось эллипса. Ломаная линия AEB , соединяющая точки A и B через точку касания E , является кратчайшей линией, т.е. $l_{AEB} < l_{A'EB}$, поэтому также линия $A'EB$ является кратчайшей, соединяющей точки A'

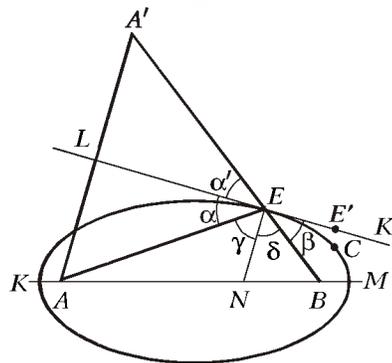


Рис. 6

и B . А такой линией является прямая. На основе теоремы о накрест лежащих углах получаем $\alpha' = \beta$, но $\alpha' = \alpha$, отсюда $\alpha = \beta$, а также

$$\gamma = \delta$$

– угол падения равен углу отражения.

Поскольку условие эллипса $r_1 + r_2 = AE + EB = 2a = \text{const}$ выполняется для всех его точек, то

$$l_{AEB} = l_{ACB} = \text{const},$$

значит, в данном случае не существует экстремума.

Подведем некоторый итог. Во всех трех примерах общим требованием для выполнения закона отражения света является равенство нулю первой производной длины траектории луча по отклонению от истинной траектории в ту или иную сторону. Это отклонение может быть выражено углом поворота (пример 2) или смещением точки падения луча вдоль отражающей поверхности (примеры 1 и 3). Условие это называется условием стационарности. При этом может быть или минимум, или максимум, или не быть ни того ни другого.

Преломление света

Пример 4. а) Докажем, что время распространения света через плоскую границу раздела двух сред из точки A (в среде, где скорость света v_1) в точку B (где его скорость v_2) минимально на такой траектории ACB (рис.7), для которой выполняется закон преломления $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \text{const}$.

б) Выведем закон преломления света, исходя из того, что время его распространения между фиксированными точками A и

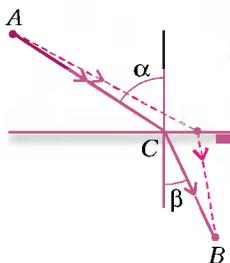


Рис. 7

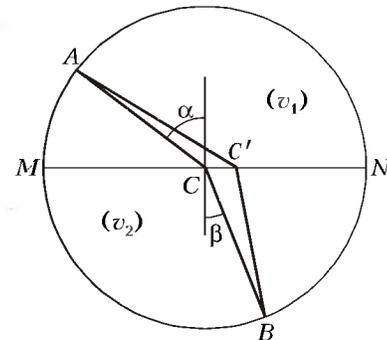


Рис. 8

B при преломлении на плоской границе раздела будет минимальным.

а) Построим круг произвольного радиуса (рис.8). Изобразим его диаметр MN , разделяющий две среды: сверху находится оптически менее плотная среда, снизу – более плотная ($v_1 > v_2$). Отметим наши точки A и B и проведем две ломаные: через центр C круга, при этом α и β – углы падения и преломления света – связаны соотношением

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \text{const},$$

и через произвольную точку C' . Надо доказать, что время прохождения светом пути ACB меньше времени прохождения пути $AC'B$. Предоставляем читателям сделать это самостоятельно.

б) Пусть точка C является подвижной точкой, при движении которой вдоль плоской границы раздела двух сред меняется время перехода из точки A в точку B (рис.9). Из рисунка находим

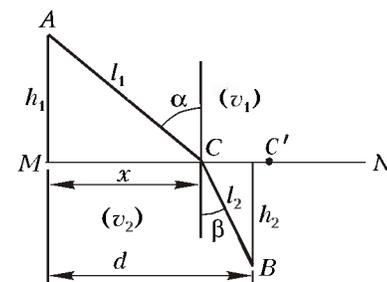


Рис. 9

$$t_{ACB} = t_{AC} + t_{CB} = \frac{AC}{v_1} + \frac{CB}{v_2} = \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + h_2^2}}{v_2}.$$

Необходимое условие минимума (стационарности) запишем в виде

$$\frac{dt}{dx} = 0,$$

откуда получим

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + h_1^2}} - \frac{d-x}{v_2 \sqrt{(d-x)^2 + h_2^2}} = 0,$$

или

$$\frac{x}{v_1 l_1} - \frac{d-x}{v_2 l_2} = 0.$$

Так как

$$\frac{x}{l_1} = \sin \alpha \text{ и } \frac{d-x}{l_2} = \sin \beta,$$

то

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2},$$

что и требовалось доказать.

Далее, стационарность решения означает действительно минимум:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{dx^2} &= \frac{1}{v_1 \sqrt{x^2 + h_1^2}} - \\ &- \frac{x^2}{v_1 (x^2 + h_1^2)^{3/2}} + \frac{1}{v_2 \sqrt{(d-x)^2 + h_2^2}} - \frac{(d-x)^2}{v_2 ((d-x)^2 + h_2^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{v_1 l_1} - \frac{1}{v_1 l_1} \sin^2 \alpha + \frac{1}{v_2 l_2} - \frac{1}{v_2 l_2} \sin^2 \beta = \\ &= \frac{1}{v_1 l_1} \cos^2 \alpha + \frac{1}{v_2 l_2} \cos^2 \beta. \end{aligned}$$

Так как все слагаемые положительные, то $\frac{d^2 t}{dx^2} > 0$, и это соответствует минимуму.

Пример 5. Пусть точка B – действительное изображение ($B \equiv F$) точки A при преломлении пучка света на выпуклой сферической поверхности KCL (рис.10). Докажем, что время распространения света между фиксированными точками A и B по двум путям ACB и $AC'B$ одинаково. Предполагается, что углы α и β малы.

Обозначим (рис.11) $\angle CAC' =$

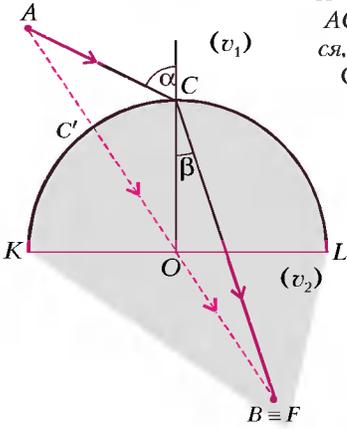


Рис. 10

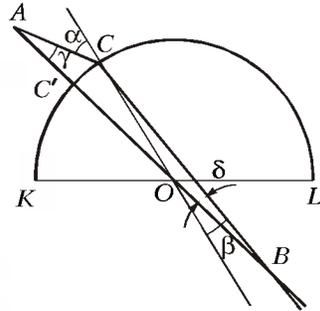


Рис. 11

$= \gamma$, $\angle CBC' = \delta$, $AC' = s$, $C'B = s'$. Тогда

$$t_{AC'B} = \frac{AC'}{v_1} + \frac{C'B}{v_2} = \frac{s}{v_1} + \frac{s'}{v_2}$$

и

$$\begin{aligned} t_{ACB} &= \frac{AC}{v_1} + \frac{CB}{v_2} = \frac{AC'}{\cos \gamma v_1} + \frac{C'B}{\cos \delta v_2} = \\ &= \frac{s}{v_1 (1 - \gamma^2/2)} + \frac{s'}{v_2 (1 - \delta^2/2)} = \frac{s}{v_1} \left(1 + \frac{\gamma^2}{2}\right) + \frac{s'}{v_2} \left(1 + \frac{\delta^2}{2}\right), \end{aligned}$$

если учесть параксиальность пучка лучей, т.е. малость углов α , β , γ и δ . А если пренебречь членами второго порядка малости по сравнению с членами первого порядка, то получим

$$t_{ACB} = \frac{s}{v_1} + \frac{s'}{v_2} = t_{AC'B},$$

что и требовалось доказать.

Пример 6. Докажем, что время распространения света через выпуклую сферическую поверхность раздела двух сред KCL (рис.12) из точки A в точку B , находящуюся за действительным изображением F точки A , максимально на такой траектории ACB , для которой выполняется закон преломления $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \text{const.}$

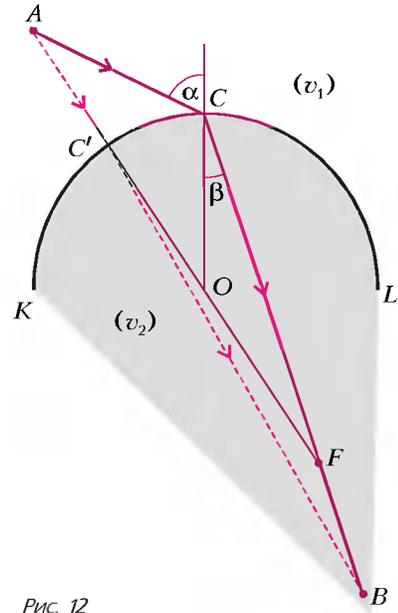


Рис. 12

В однородной среде свет распространяется по прямой линии, поэтому любая возможная траектория должна быть составлена из отрезков прямых. Построим наряду с реальной траекторией $ACFB$ возможную околную траекторию $AC'B$ (рис.13). Обе траектории выходят из одной и той же точки A и кончаются в одной и той же точке B . Докажем, что время распространения света вдоль истинной траектории будет больше, т.е. что

$$t_{ACB} > t_{AC'B}.$$

Проведем малую дугу с центром в точке F и радиусом FB , она пересечет прямую AOF в точке B' . Проведем большую дугу с центром в точке C' и радиусом $C'B'$, она пересечет прямую $C'B$ на ее продолжении в точке D , а точка B окажется выше. Поскольку F – действительное изображение, то

$$t_{ACF} = t_{AC'F}.$$

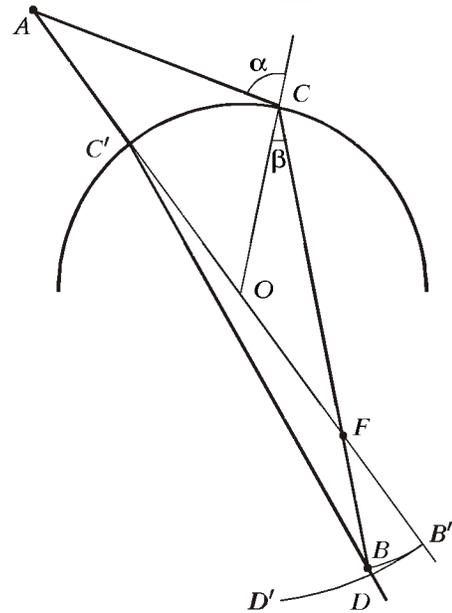


Рис. 13

Так как $FB = FB'$ и среда однородная, то

$$t_{FB} = t_{FB'}$$

Из-за того что $C'D = C'B'$ и среда однородная,

$$t_{AC'D} = t_{AC'B'}$$

Поскольку точка B находится внутри, то

$$t_{AC'B} < t_{AC'D}$$

Итак, получаем, что

$$t_{AC'B} < t_{AC'B'}$$

Слева стоит время возможной траектории. Покажем, что справа стоит время истинной траектории. Действительно,

$$t_{AC'B} = t_{AC'F} + t_{FB} = t_{AC'F} + t_{FB} = t_{AC'FB} = t_{AC'B}$$

Следовательно,

$$t_{AC'B} < t_{AC'B'}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, при преломлении на выпуклой сферической поверхности на пути от A (в среде 1) к B (в среде 2 за фокусом F) время прохождения света по истинной траектории (т.е. с соблюдением закона преломления) будет максимальным по сравнению со временем по другим окольным траекториям.

Заметим, что при преломлении света, как и при отражении, важна стационарность. Время может быть минимальным (если точка B находится ближе действительного изображения точки A в точке F), может быть максимальным (если точка B дальше точки F), а может не быть ни минимальным, ни максимальным (если B находится в точке F).

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Смерч у вас дома

С. БЕТЯЕВ

СМЕРЧ – ЭТО МОЩНЫЙ КОРОТКОЖИВУЩИЙ АТМОСФЕРНЫЙ вихрь, возникающий обычно в грозовом облаке и стремительно движущийся к земле. Будучи одним из главных носителей хаоса в движении воздушных масс, он многолик в проявлении и потому имеет много различных названий: *торнадо* (так называют смерч в Северной Америке), *циклон* (по-гречески это кольцо змеи), *ураган* (от французского ouragan – сильный ветер), *тайфун* (от китайского тай фын – большой ветер), *тромб* (от греческого trómbos – ступок).

Искусственные смерчи

Микросмерч легко наблюдать, например, в только что открытой бутылке минеральной воды, если поставить ее в центр вращающегося диска и бросить на дно кусочек сахара или другого кристаллического вещества. Кристаллики способствуют выделению углекислого газа, так как служат ядрами образующихся газовых пузырьков, причем выделение пузырьков происходит наиболее интенсивно при пониженном давлении. На оси вращающейся жидкости, как и в смерче, давление понижено, поэтому пузырьки возникают преимущественно в центре бутылки. Двигаясь спирально вверх под действием выталкивающей силы, они увлекают за собой частицы воды, на их место по дну бутылки к центру притекают другие порции минералки – образуется смерч.

Некое подобие смерча реализуется в промышленной установке «Циклон», предназначенной для очистки потоков газа от твердых и жидких частиц. Содержащий вредные примеси поток, попадая в «Циклон» (рис.1) через входное отверстие 1 по касательной к его стенкам, закручивается, опускается вниз по спиральным траекториям и, повернув на 180°, еще более закрученным устремляется по оси вверх к выхлопному

патрубку 2. Вредные примеси, прижатые по инерции к стенкам установки, сыпаются вниз через отверстие 3.

Смерч нетрудно смоделировать в лаборатории, причем вращение жидкости можно создать либо пропеллером, либо вращением стенок сосуда, а поднятие можно осуществить с помощью насоса или за счет выталкивающей силы. Вот два примера.

1) Если вентилятор, размещенный в горизонтальной плоскости над резервуаром с водой, привести в движение, то он закрутит расположенный под ним столб воздуха, внутри которого давление окажется пониженным, в результате чего вода из резервуара поднимется на некоторую высоту и, закрученная окружающим воздухом, создаст подобие водяного смерча. В качестве вентилятора пригодно также колесо с наклонными вертикальными перегородками. В зависимости от мощности вентилятора высота водяного смерча может изменяться от нескольких сантиметров до нескольких метров. Аналогичным образом воссоздаются пылевые и песчаные смерчи.

2) Налейте в пол-литровую стеклянную банку воду и раскрутите ее каким-либо образом, например миксером. Небольшой нагрев в центре дна банки инициирует вертикальный вихрь, который с помощью краски легко сделать видимым. Вблизи дна (точка A на рисунке 2) наблюдается так называемый взрыв вихря – резкий переход от упорядоченного течения к хаотическому.

Существует много удивительных разновидностей вихрей, напоминающих

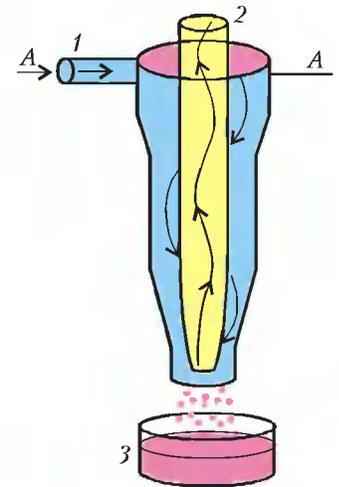


Рис. 1. Схема установки «Циклон».

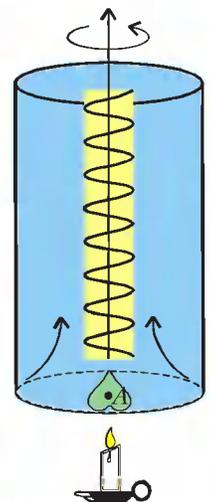


Рис.2. Искусственный смерч

смерч. Вблизи извергающихся вулканов, лесных пожаров и больших костров образуются огненные смерчи. Зимой над незамерзающим озером иногда удается наблюдать туманный вихрь. Дома его можно воспроизвести, пустив струю холодного воздуха над поверхностью теплой воды, наполняющей ванну. Такие же вихорьки возникают на поверхности вынесенного на мороз горячего чая – они образуются вследствие неустойчивости влажного теплого воздуха, расположенного над холодным.

Слив воды в ванне

Конечно же, все видели удивительный короткоживущий вихрь, образующийся при сливе воды в ванне и расположенный вертикально над сливным отверстием. Простые наблюдения показывают, что форма свободной поверхности – границы жидкости с воздухом – зависит прежде всего от параметра δ , равного отношению высоты воды в ванне h к радиусу сливного отверстия r (рис.3). Если значение δ достаточно велико, то на свободной поверхности образуется небольшая впадина (см. рис.3,а). При уменьшении δ до некоторого критического значения δ^* полость вихря достигает дна впадины (см. рис.3,б), а затем проникает в вытекающую струю, образуя как бы полый вихрь (см. рис.3,в). На

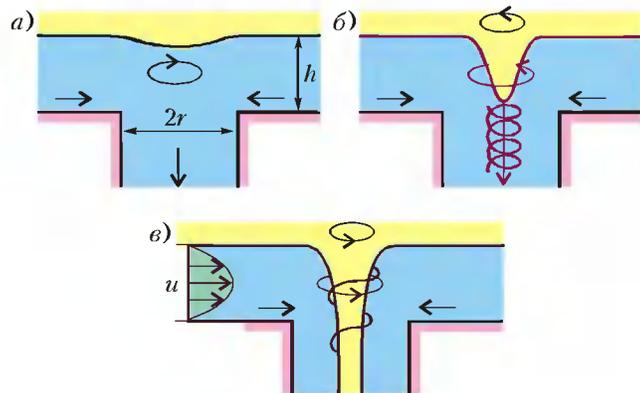


Рис.3. Три схемы истечения жидкости из отверстия: а) $\delta \geq \delta^*$, б) $\delta = \delta^*$, в) $\delta \leq \delta^*$

последнем рисунке слева приведено распределение горизонтальной скорости u по высоте слоя воды: максимум скорости расположен в центре струи, ноль – на дне ванны, где жидкость как бы прилипает к твердой границе.

Кроме параметра δ , на течение жидкости, конечно же, влияет и ее вязкость, но это влияние существенно лишь при малых значениях радиуса r , когда он составляет доли миллиметра (однако в этом случае полый вихрь не образуется).

В какую сторону вращается полый вихрь? Влияет ли, например, на направление вращения вихря сила Кориолиса, вызванная вращением Земли? Разумеется, влияет: в еще незакрученном течении на движущуюся с юга на север струю тока действует кориолисова сила, стремящаяся закрутить водоворот в северном полушарии против часовой стрелки, а в южном полушарии – по часовой стрелке. Теоретически эти рассуждения правильны. Однако реальное влияние вращения Земли на направление вращения вихря в ванне, как и на движение всех смерчевидных вихрей, оказывается пренебрежимо малым. Первопричиной «выбора» того или иного направления вращения является асимметрия в конструкции и установке ванны и в отводящих воду устройствах, и это влияние еще недостаточно изучено. Искусственно в одной и той же ванне можно вызвать вихрь как одного, так и другого направления.

Заметим, что воздух внутри водяной воронки тоже приводится во вращение – благодаря тому, что на свободной границе частицы воды увлекают за собой соседние частицы воздуха. Скорость u на свободной границе не равна нулю, поэтому вихрь в ванне является воздушно-водяным. Правда, из-за того что плотность воздуха почти в тысячу раз меньше плотности воды, его движение незаметно – оно может, разве что, сдуть пламя внесенной в воронку горячей спички.

В природе вихревые воронки часто наблюдаются в реках. На практике они применяются в суспензионном литье для ввода добавок в жидкий металл, а также в нефтехимической промышленности для удаления плавающих гранул со свободной поверхности. Опыты по поглощению воронкой твердых плавающих тел легко провести в ванне, используя для этих целей частицы различной массы (проделайте это самостоятельно). В результате таких опытов было обнаружено, что твердые плавающие частицы могут довольно устойчиво вращаться вокруг воронки, каждая по своему индивидуальному радиусу, не всплывая и не погружаясь.

Принципиально новое явление наблюдается в контейнере с водой, содержащим два симметрично расположенных сливных отверстия (рис. 4). В этом случае характеристики течения зависят еще от одного безразмерного параметра $\alpha = l/r$, где l – расстояние между отверстиями А и В (см. рис.4,а). При достаточно больших значениях α образуются два вихря (см. рис.4,б; вид сверху). Направления вращения вихрей противоположны – в плоскости симметрии CD вихри «сцепляются» друг с другом. При умеренных значениях α режимы попеременно чередуются: безвихревое истечение в окрестности отверстия В сменяется вихревым, в то время как вихревое истечение в окрестности отверстия А становится безвихревым, причем процесс оказывается почти периодическим по времени. Схема такого истечения в некоторый момент времени представлена на рисунке 4,в (вид сверху).

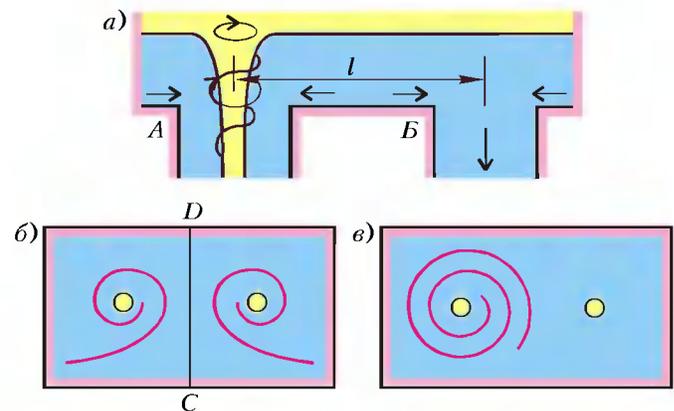


Рис.4. Истечение из сосуда с двумя отверстиями: а) один вихрь (вид сбоку), б) два вихря (вид сверху), в) один вихрь (вид сверху)

Что будет, если взять контейнер с тремя отверстиями, с четырьмя? Детали не известны, но ясно одно – разнообразие режимов увеличится, роль случайного начала усилится.

Взаимодействие вихревого и вращательного движений демонстрирует структурную сложность течений, неразделимость закономерного и непредсказуемого, познанныго и непознанныго, видимого и невидимого. Простые опыты по истечению жидкости подтверждают фундаментальный закон гидродинамики, в соответствии с которым течение перестраивается от простого стационарного к более сложному, а затем к нестационарному и даже к неупорядоченному.

ИНДУКТИВНОСТЬ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

В. МОЖАЕВ

ПРИ ПРОТЕКАНИИ ТОКА В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ ПОМОИМО электрического поля (в проводящих элементах цепи) возникает и магнитное поле, вызванное упорядоченным движением свободных зарядов. Величина, характеризующая магнитные свойства электрической цепи, называется индуктивностью. Ток, текущий в проводящем контуре, создает в окружающем пространстве магнитное поле. Магнитный поток, пронизывающий этот контур, прямо пропорционален току: $\Phi = LI$. Коэффициент пропорциональности L и называют индуктивностью, или коэффициентом самоиндукции контура. Индуктивность зависит от размеров и формы контура, а также от магнитной проницаемости окружающей среды.

Индуктивность соединительных проводов электрической цепи обычно мала (ее часто называют паразитной индуктивностью). Специальные элементы с большой индуктивностью называют катушками индуктивности. Как правило, катушка индуктивности представляет собой достаточно большое количество витков изолированного провода, намотанного на цилиндрический или тороидальный каркас. Для увеличения индуктивности каркасы заменяют магнитными сердечниками в виде цилиндров или торов.

Индуктивность L катушки индуктивности, через которую протекает ток I , напрямую связана с энергией W_M магнитного поля этого тока:

$$W_M = \frac{LI^2}{2}.$$

Если провести аналогию с механическими явлениями, то магнитную энергию можно сопоставить кинетической энергии тела

$$W_k = \frac{mv^2}{2},$$

где m – масса тела, v – его скорость. При этом индуктивность будет играть роль массы, а ток – скорости. Поэтому понятно, что индуктивность определяет инерционные свойства тока.

А теперь перейдем к разбору конкретных задач, в которых присутствует индуктивность.

Задача 1. В электрической схеме, параметры которой указаны на рисунке 1, в начальный момент ключи K_1 и K_2 разомкнуты.

Сначала замыкают ключ K_1 , а когда напряжение на конденсаторе достигнет значения $U_0 = E/2$, замыкают ключ K_2 . Определите напряжение на катушке индуктивности

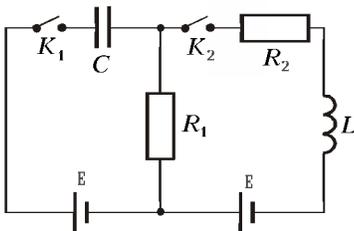


Рис. 1

сразу после замыкания ключа K_2 и напряжение на конденсаторе в установившемся режиме. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

Сначала рассмотрим, что будет происходить в левой части схемы после замыкания ключа K_1 . Сразу после замыкания ключа напряжение на конденсаторе останется равным нулю, и в цепи потечет ток $I_0 = E/R_1$ – это следует из закона Ома для замкнутой цепи. Затем напряжение на конденсаторе будет расти, а ток в цепи будет падать. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе достигнет значения U_0 , напряжение на резисторе сопротивлением R_1 будет равно

$$U_1 = E - U_0 = \frac{E}{2}$$

(сверху будет «+», а снизу «-»). В этот момент мы замыкаем ключ K_2 . При этом возникает замкнутая цепь, которая содержит индуктивность L . Сразу после замыкания ключа K_2 ток через резистор сопротивлением R_2 , катушку индуктивности и батарею (правая часть схемы) будет равен нулю, а напряжение на резисторе сопротивлением R_1 останется неизменным. Отсутствие этого начального тока связано с инерционностью катушки индуктивности – появление небольшого тока в катушке приводит к возникновению в ее обмотке ЭДС индукции, которая по правилу Ленца «направлена» против этого тока и таким образом регулирует его постепенное нарастание. По закону Ома для правой части схемы можно записать

$$E = U_L - U_1.$$

Отсюда находим напряжение на катушке индуктивности сразу после замыкания ключа K_2 :

$$U_L = E + U_1 = \frac{3}{2}E.$$

В установившемся режиме в правой части схемы будет течь постоянный ток (направленный по часовой стрелке)

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2},$$

и на резисторе сопротивлением R_1 установится напряжение

$$U_{1уст} = IR_1 = \frac{R_1 E}{R_1 + R_2}$$

(в этом случае «+» снизу, а «-» сверху). По закону Ома для левого контура можно записать

$$E = U_C - U_{1уст}.$$

Отсюда получаем установившееся напряжение на конденсаторе:

$$U_C = E + U_{1уст} = \frac{(2R_1 + R_2)E}{R_1 + R_2}.$$

Задача 2. В схеме, изображенной на рисунке 2, катушки с индуктивностями L_1 и L_2 закорочены через идеальный диод D . В начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор емкостью C заряжен до напряжения U_0 . Через некоторое время после замыкания ключа напряжение на конденсаторе становится равным нулю. Найдите ток через катушку индуктивностью L_1 в этот момент времени. Затем конденсатор перезаряжает

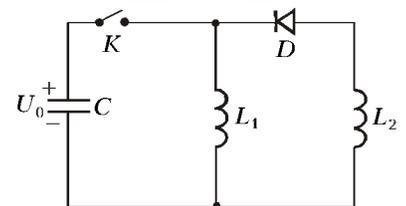


Рис. 2

ся до некоторого максимального напряжения. Чему будет равно это напряжение?

После замыкания ключа K мы будем иметь колебательный контур, состоящий из заряженного конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L_1 . Конденсатор начнет разряжаться, и когда напряжение на нем станет нулевым, начальная энергия конденсатора полностью перейдет в энергию магнитного поля катушки. Если в этот момент ток через катушку равен I_L , то можно записать

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{L_1 I_L^2}{2}.$$

Отсюда находим искомый ток:

$$I_L = U_0 \sqrt{\frac{C}{L_1}}.$$

Это – максимальный ток через катушку индуктивностью L_1 , затем он начнет уменьшаться, при этом часть его будет перезаряжать конденсатор, а часть потечет через катушку индуктивностью L_2 . Пусть в некоторый момент через первую катушку течет ток I_1 , а через вторую – ток I_2 . Тогда по закону Ома для контура, охватывающего обе катушки, можно записать

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt} = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$L_1 I_1 + L_2 I_2 = \text{const}.$$

Константу найдем из начальных условий. В тот момент, когда ток через катушку индуктивностью L_1 был максимален и равен $U_0 \sqrt{C/L_1}$, ток через катушку индуктивностью L_2 был равен нулю, следовательно,

$$\text{const} = U_0 \sqrt{L_1 C}.$$

Тогда решение принимает вид

$$L_1 I_1 + L_2 I_2 = U_0 \sqrt{L_1 C}.$$

Когда напряжение на конденсаторе достигнет максимального значения, ток через конденсатор будет равен нулю, а через катушки будет течь общий ток, который обозначим через I_{12} . Используя предыдущее соотношение, можно записать

$$(L_1 + L_2) I_{12} = U_0 \sqrt{L_1 C},$$

откуда

$$I_{12} = \frac{U_0 \sqrt{L_1 C}}{L_1 + L_2}.$$

Пусть максимальное напряжение на конденсаторе равно U_m . Поскольку в нашей цепи нет тепловых потерь, для любого момента времени мы можем воспользоваться законом сохранения энергии. Полная энергия цепи, очевидно, равна $CU_0^2/2$. В тот момент, когда конденсатор перезарядится и напряжение на нем достигнет максимального значения, часть энергии будет сосредоточена в конденсаторе:

$$W_C = \frac{1}{2} CU_m^2,$$

а остальная часть – в катушках индуктивности:

$$W_L = \frac{1}{2} (L_1 + L_2) I_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{L_1 CU_0^2}{L_1 + L_2}.$$

По закону сохранения энергии,

$$\frac{1}{2} CU_0^2 = \frac{1}{2} CU_m^2 + \frac{1}{2} \frac{L_1 CU_0^2}{L_1 + L_2}.$$

Отсюда получаем

$$U_m = U_0 \sqrt{\frac{L_2}{L_1 + L_2}}.$$

Задача 3. При разомкнутом ключе K (рис. 3) конденсатор емкостью $C = 20$ мкФ заряжен до напряжения $U_0 = 12$ В, ЭДС аккумулятора $E = 5$ В, индуктивность катушки $L = 2$ Гн, D – идеальный диод. Каким будет максимальный ток в цепи после замыкания ключа? Чему будет равно напряжение на конденсаторе в установившемся режиме после замыкания ключа?

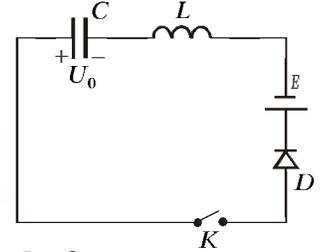


Рис. 3

Поскольку в схеме находится катушка индуктивности, сразу после замыкания ключа ток в цепи будет равен нулю, затем будет происходить нарастание тока, и в некоторый момент он достигнет максимального значения. При максимальном токе в цепи ЭДС индукции в катушке будет равна нулю, и по закону Ома для замкнутой цепи напряжение на конденсаторе в этом случае должно быть равно ЭДС аккумулятора. Обозначим это напряжение через U_1 ($U_1 = E$) и найдем величину максимального тока. Для этого воспользуемся законом сохранения энергии. За время установления максимального тока в цепи протек заряд

$$\Delta q = CU_0 - CU_1 = C(U_0 - U_1).$$

Для перемещения этого заряда против ЭДС аккумулятора необходимо совершить работу

$$A = \Delta q E = CE(U_0 - U_1).$$

Наличие максимального тока I_m в катушке приводит к появлению энергии магнитного поля

$$W_L = \frac{1}{2} LI_m^2.$$

Разность энергий конденсатора в начальном и конечном состоянии равна сумме совершенной работы и энергии катушки:

$$\frac{1}{2} CU_0^2 - \frac{1}{2} CU_1^2 = A + W_L = CE(U_0 - U_1) + \frac{1}{2} LI_m^2.$$

Отсюда находим

$$I_m = (U_0 - E) \sqrt{\frac{C}{L}} \approx 0,022 \text{ А}.$$

Теперь рассмотрим вопрос об установившемся значении напряжения на конденсаторе. После прохождения максимума ток в цепи будет уменьшаться и в конечном итоге станет равным нулю. Поскольку течь в обратном направлении ток не может (мешает диод), то установится стационарное состояние: ток равен нулю, а на конденсаторе имеется некоторое постоянное напряжение, которое обозначим через U_K . Это напряжение можно найти по закону сохранения энергии. За все время с момента замыкания ключа до установления стационарного состояния изменение энергии конденсатора пошло на работу по перемещению всего протекшего заряда против ЭДС аккумулятора:

$$\frac{1}{2} CU_0^2 - \frac{1}{2} CU_K^2 = CE(U_0 - U_K).$$

После простых преобразований это уравнение будет иметь вид

$$(U_0 - U_K)(U_0 - 2E + U_K) = 0.$$

Такое уравнение имеет два решения. Первое решение $U_K = U_0$

соответствует начальному состоянию сразу после замыкания ключа. Второе решение дает

$$U_K = 2E - U_0 = -2E.$$

Знак «минус» означает, что конденсатор перезарядится и установившееся напряжение будет противоположно по знаку первоначальному напряжению.

Задача 4. Незаряженный конденсатор емкостью C подключают к последовательно соединенным батарее с ЭДС E и катушке индуктивностью L . В контуре происходят колебания тока. В тот момент, когда ток становится равным нулю, конденсатор отключают от схемы и подключают вновь, поменяв местами его выводы. Какой максимальный ток будет течь после этого в цепи? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

Сразу после первого подключения конденсатора ток в цепи равен нулю. Затем ток будет расти, достигнет максимального значения, а потом начнет уменьшаться и через время $\tau = \pi\sqrt{LC}$ (половина периода колебаний тока) снова станет равным нулю. Пусть в этот момент напряжение на конденсаторе равно U_x . Поскольку энергетических потерь в цепи нет, можно использовать закон сохранения энергии для начального момента и для момента, когда ток в цепи снова станет равным нулю. За время τ через батарею протек заряд $q_x = CU_x$, и батарея совершила работу $A_x = q_x E = CU_x E$. Вся эта работа пошла на увеличение энергии конденсатора:

$$CU_x E = \frac{CU_x^2}{2}.$$

Это уравнение имеет два решения:

$$U_{1x} = 0 \quad \text{и} \quad U_{2x} = 2E.$$

Первое решение соответствует начальному состоянию и моментам времени, кратным целому числу периодов $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Второе решение будет иметь место через время, равное половине периода плюс целое число периодов.

Разберем первый случай. В исходном состоянии ток в цепи равен нулю, конденсатор не заряжен. Переполюсовка конденсатора в данном случае не играет никакой роли. Когда ток в цепи достигнет максимального значения, ЭДС индукции будет равна нулю, а напряжение на конденсаторе, очевидно, будет равно ЭДС батареи E . Обозначим в этот момент ток в цепи через I_{m1} . По закону сохранения энергии, работа батареи за время установления максимального тока равна сумме энергии конденсатора и энергии, запасенной в катушке:

$$CE^2 = \frac{1}{2}CE^2 + \frac{1}{2}LI_{m1}^2.$$

Отсюда находим

$$I_{m1} = E\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Теперь рассмотрим второй случай. В начальном состоянии после переключения конденсатора ток в цепи равен нулю, а напряжение на конденсаторе равно $2E$, причем на левой пластине будет «минус», а на правой – «плюс» (рис.4). Когда ток в цепи достигнет максимального значения, ЭДС индукции будет равна нулю и, по закону Ома для замкнутого контура, напряжение на конденсаторе будет равно ЭДС батареи E , при этом на левой пластине конденсатора будет «плюс», а на правой – «ми-

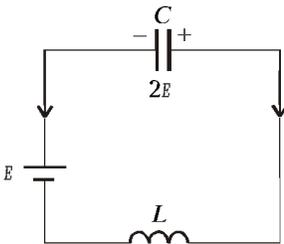


Рис. 4

нус». Следовательно, изменение заряда конденсатора будет равно

$$\Delta q = C(U_K - U_n) = C(E - (-2E)) = 3CE.$$

Начальная энергия нашей системы есть

$$W_n = \frac{1}{2}CU_n^2 = 2CE^2,$$

а конечная равна

$$W_K = \frac{1}{2}CU_K^2 + \frac{1}{2}LI_{m2}^2 = \frac{1}{2}CE^2 + \frac{1}{2}LI_{m2}^2,$$

где I_{m2} – максимальный ток в цепи. По закону сохранения энергии, работа батареи по перемещению заряда Δq пойдет на изменение энергии системы:

$$\Delta q E = W_K - W_n,$$

или

$$3CE^2 = \frac{1}{2}CE^2 + \frac{1}{2}LI_{m2}^2 - 2CE^2.$$

Отсюда получаем

$$I_{m2} = 3E\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Задача 5. В колебательном контуре, изображенном на рисунке 5, происходят свободные колебания при замкнутом ключе K . В тот момент, когда напряжение на конденсаторе емкостью C_1 достигает максимального значения U_0 , ключ размыкают. Определите величину тока в контуре, когда напряжение на конденсаторе емкостью C_1 будет равно нулю при условии, что $C_2 > C_1$.

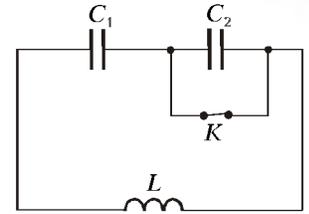


Рис. 5

Когда напряжение на конденсаторе емкостью C_1 достигает максимального значения, ток в цепи равен нулю, и поэтому можно разрывать цепь без всяких проблем. Сразу после размыкания ключа заряд на правой пластине конденсатора емкостью C_1 равен $q_1 = C_1 U_0$, а заряд на левой пластине конденсатора емкостью C_2 равен нулю. Суммарный заряд на этих двух пластинах будет оставаться постоянным и равным $C_1 U_0$. В тот момент, когда напряжение на первом конденсаторе станет равным нулю, весь заряд q_1 будет на втором конденсаторе. Обозначим в этот момент ток в контуре через I_K . По закону сохранения энергии, первоначально запасенная энергия в конденсаторе емкостью C_1 будет равна сумме энергии конденсатора емкостью C_2 и энергии, запасенной в катушке с током I_K :

$$\frac{1}{2}C_1 U_0^2 = \frac{q_1^2}{2C_2} + \frac{LI_K^2}{2},$$

или

$$\frac{1}{2}C_1 U_0^2 = \frac{1}{2} \frac{C_1^2}{C_2} U_0^2 + \frac{LI_K^2}{2}.$$

Отсюда находим

$$I_K = U_0 \sqrt{\frac{C_1(C_2 - C_1)}{C_2 L}}.$$

Задача 6. В схеме на рисунке 6 в начальный момент ключ K разомкнут. Катушка индуктивностью L обладает омическим сопротивлением r . Какой заряд протечет через переключку AB после замыкания ключа? Внутренним сопротивлением батареи и сопротивлением переключки пренебречь. Параметры схемы указаны на рисунке.

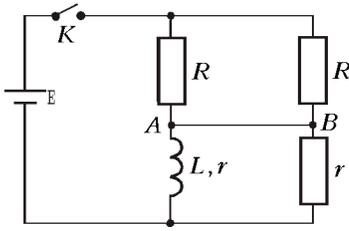


Рис. 6

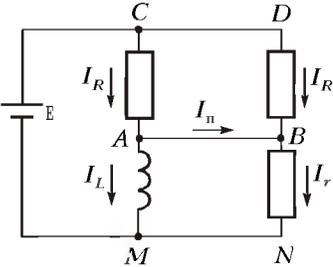


Рис. 7

Пусть в произвольный момент времени в элементах цепи текут токи, изображенные на рисунке 7. Через резисторы сопротивлением R в любой момент будут протекать одинаковые токи I_R – это следует из закона Ома для контура $ABDC$. Через перемычку AB протекает ток I_n , через катушку индуктивности течет ток I_L , а через резистор r – ток I_r . Для узлов A и B можно записать закон сохранения заряда:

$$I_n + I_L = I_R$$

и

$$I_r = I_R + I_n.$$

Для контура $ABNM$ мож-

но записать закон Ома:

$$L \frac{dI_L}{dt} = r(I_r - I_L),$$

или, воспользовавшись соотношениями для токов,

$$L \frac{dI_L}{dt} = 2rI_n.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$L dI_L = 2rI_n \cdot dt = 2r \cdot dq$$

и проинтегрируем:

$$\int_0^Q dq = \frac{L}{2r} \int_0^{I_{Lк}} dI_L.$$

Сразу после замыкания ключа ток через катушку индуктивности равен нулю. Поэтому нижний предел интеграла в правой части уравнения также равен нулю. Найдем верхний предел $I_{Lк}$, т.е. установившийся через катушку ток. Очевидно, что он будет равен

$$I_{Lк} = \frac{E}{R+r}.$$

После интегрирования получим суммарный заряд, протекающий через перемычку AB :

$$Q = \frac{LI_{Lк}}{2r} = \frac{LE}{2r(R+r)}.$$

Задача 7. Для поддержания незатухающих колебаний в контуре с малым затуханием (рис. 8) индуктивность катушки быстро (по сравнению с периодом колебаний в контуре) увеличивают на небольшую величину ΔL ($\Delta L \ll L$) каждый раз, когда ток в цепи равен нулю, а через время, равное четверти периода колебаний, быстро возвращают в исходное состояние. Определите величину ΔL , если

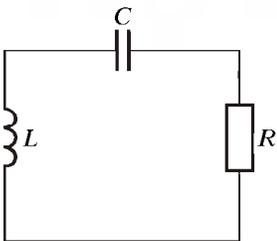


Рис. 8

$L = 0,15$ Гн, $C = 1,5 \cdot 10^{-7}$ Ф, $R = 20$ Ом.

Если изменение индуктивности катушки происходит за малое время (по сравнению с периодом колебаний тока в контуре), то сохраняется магнитный поток Φ , пронизывающий катушку. Увеличение индуктивности при нулевом токе

в цепи не приводит к изменению тока – он остается нулевым. Сохраняется и энергия контура. Через четверть периода ток в контуре достигает максимального значения. Обозначим величину этого тока через I_m . Энергию магнитного поля катушки выразим через поток Φ ($\Phi = LI$):

$$W_L = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L}.$$

Поскольку $\Phi = \text{const}$, при малом изменении индуктивности изменение энергии катушки можно записать в виде

$$\Delta W_L = -\frac{\Phi^2 \Delta L}{2L^2} = -\frac{I_m^2 \Delta L}{2}.$$

Видно, что уменьшение индуктивности приводит к росту энергии магнитного поля. Подкачка энергии в контур будет происходить через временные отрезки, равные половине периода колебаний, т.е. через $T/2 = \pi\sqrt{LC}$. Между двумя соседними подкачками энергия колебательного контура будет уменьшаться за счет тепловых потерь в резисторе. Эти потери за время $T/2$ можно оценить как

$$\Delta W_R = \frac{1}{2} I_m^2 R \pi \sqrt{LC}.$$

Для поддержания незатухающих колебаний необходимо, чтобы поступающая энергия в контур была больше или равна тепловым потерям:

$$|\Delta W_L| \geq \Delta W_R,$$

или

$$\frac{I_m^2 \Delta L}{2} \geq \frac{I_m^2 R \pi \sqrt{LC}}{2}.$$

Отсюда получаем

$$\Delta L \geq \pi R \sqrt{LC} \approx 9,4 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$$

Упражнения

1. В электрической схеме, параметры которой указаны на рисунке 9, в начальный момент ключи K_1 и K_2 разомкнуты. Сначала замыкают ключ K_1 . Когда ток через катушку индуктивности достигает значения I_0 , замыкают ключ K_2 . Определите напряжение на катушке индуктивности сразу после замыкания ключа K_2 и напряжение на конденсаторе в установившемся режиме. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

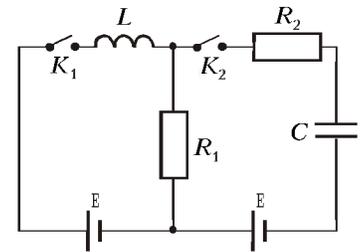


Рис. 9

2. В схеме, изображенной на рисунке 10, сверхпроводящие катушки с индуктивностями L_1 и L_2 соединены последовательно с конденсатором емкостью C . В начальный момент ключи K_1 и K_2 разомкнуты, а конденсатор заряжен до напряжения U_0 . Сначала замыкают ключ K_1 , а после того, как напряжение на конденсаторе станет равным нулю, замыкают ключ K_2 . Через некоторое время после замыкания ключа K_2 конденсатор перезарядится до некоторого максимального напряжения U_m . Найдите ток через катушки непос-

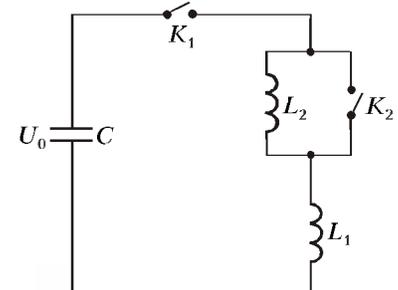


Рис. 10

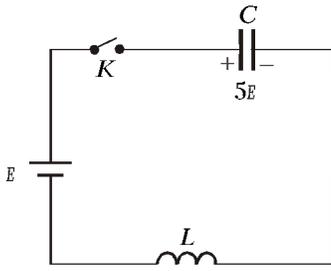


Рис. 11

редственно перед замыканием ключа K_2 и напряжение U_m .
3. В схеме (рис.11) при разомкнутом ключе K напряжение на конденсаторе емкостью C равно $5E$, где E – ЭДС батареи. Какой максимальный ток будет течь через катушку индуктивностью L после замыкания ключа? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

4. При разомкнутом ключе K в контуре (рис.12) происходят незатухающие колебания тока. В тот момент, когда ток в цепи максимален и равен I_0 , замыкают ключ K . Определите максимальное напряжение на конденсаторе после замыкания ключа. Параметры схемы указаны на рисунке.

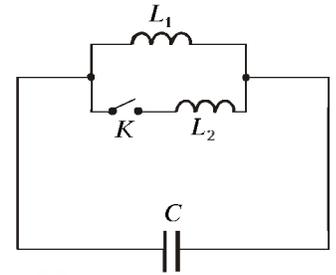


Рис. 12

Прямые и параболы

Б. ПИСАРЕВСКИЙ

ПРОСТЕЙШИЕ ИЗ ИЗУЧАЕМЫХ В ШКОЛЕ ФУНКЦИЙ – это линейная $y = kx + b$ и квадратичная $y = ax^2 + bx + c$. Графики этих функций – неперпендикулярная прямая и парабола – хорошо известны. Поскольку для параболы $y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ ненулевой коэффициент a перед скобкой означает только растяжение графика вдоль оси Oy , будем считать, что $a = 1$, и в дальнейшем рассматривать параболу

$$y = x^2 + px + q. \quad (1)$$

Парабола и прямая

Исследуем взаимное расположение прямой и параболы. Из системы уравнений

$$\begin{cases} y = kx + b, \\ y = x^2 + px + q \end{cases}$$

исключением y приходим к квадратному уравнению

$$x^2 + (p - k)x + (q - b) = 0 \quad (2)$$

с дискриминантом $D = (p - k)^2 - 4(q - b)$. При $D < 0$ прямая и парабола не пересекаются (рис.1,а), при $D > 0$ точек пересечения две (рис.1,б). Если $D = 0$ и x_0 является единственным корнем уравнения (2), то в левой части (2) – полный квадрат, поэтому $p - k = -2x_0$, $q - b = x_0^2$, откуда $k = p + 2x_0$, $b = q - x_0^2$, и уравнение прямой, имеющей с параболой единственную общую точку с абсциссой x_0 , запишется так:

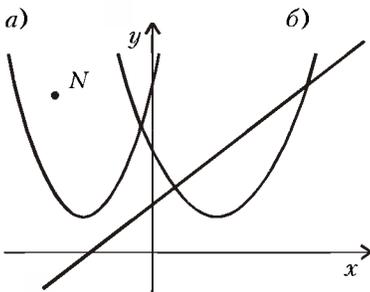
$$y = (p + 2x_0)x + q - x_0^2. \quad (3)$$


Рис. 1

Вспомним, что если на графике функции $y = f(x)$ взята точка M с абсциссой x_0 , то уравнение

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (4)$$

определяет касательную к графику, проведенную в точке M . Если в (4) взять $f(x) = x^2 + px + q$, то мы получим уравнение (3) (проверьте!). В итоге прямая, имеющая с параболой единственную общую точку, оказывается касательной к параболе, проведенной в этой точке (рис. 2,а).

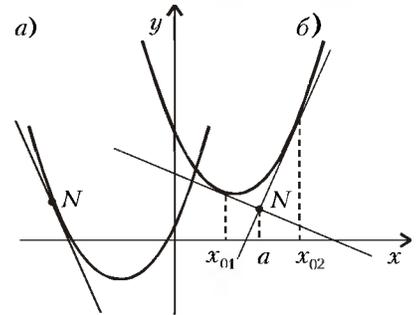


Рис. 2

Рассмотрим теперь следующую задачу: *сколько существует прямых, касающихся параболы (1) и проходящих через данную точку плоскости $N(a; b)$?*

Касательная должна проходить через N , поэтому $b = (p + 2x_0)a + q - x_0^2$. Относительно неизвестной абсциссы точки касания x_0 получаем квадратное уравнение $x_0^2 - 2ax_0 + (b - pa - q) = 0$ с дискриминантом $D = 4(a^2 + pa + q - b)$.

Уравнение не имеет корней, если $D < 0$, т.е. $b > a^2 + pa + q$, в этом случае точка N лежит внутри параболы, и естественно, что через N нельзя провести ни одной касательной (см. рис.1,а).

При $D > 0$, т.е. при $b < a^2 + pa + q$, через N проходят две прямые, касательные к параболе. Если обозначить через x_{01} и x_{02} различные корни квадратного уравнения, то по теореме Виета $x_{01} + x_{02} = 2a$. Это означает, что точка a на оси Ox – середина отрезка $[x_{01}; x_{02}]$ (рис.2,б).

Случай $D = 0$, когда точка N лежит на параболе, означает, что $x_0 = a$, т.е. точка касания совпадает с N и касательная единственна (см. рис.2,а).

Кубическая парабола

График функции

$$y = f(x) = x^3 + px^2 + qx + r \quad (5)$$

будем называть кубической параболой. Как и выше, коэффициент при старшей степени x мы взяли равным единице. Для начала выясним, как может выглядеть эта кривая, ведь в обычном школьном курсе ограничиваются случаем $p = q = r =$

= 0. Существенное отличие кубической параболы от обычной состоит в том, что она всегда пересекает ось Ox , иначе говоря, уравнение

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \quad (6)$$

имеет хотя бы одно действительное решение. Это следует из того, что функция (5) непрерывна, отрицательна при достаточно больших по модулю отрицательных значениях x и положительна при достаточно больших положительных значениях x . Возможно, кто-то из читателей знает о существовании так называемой формулы Кардано для корней кубического уравнения. Беда в том, что использовать эту формулу для решения конкретного уравнения удастся только в исключительных, а точнее – специально подобранных случаях. Рассмотрим, например, уравнение $x^3 - 3x^2 - 16x + 48 = 0$. В левой части его члены легко группируются: $(x - 3)(x^2 - 16) = 0$, поэтому $x_1 = 3$, $x_{2,3} = \pm 4$. Между тем, строгое следование формуле Кардано приводит к такому результату:

$$x = 1 + \sqrt[3]{-15 + \frac{28\sqrt{3}}{9}i} + \sqrt[3]{-15 - \frac{28\sqrt{3}}{9}i}$$

где i – мнимая единица. Даже большой любитель математики вообще и действий с комплексными числами в частности не увидит в этой записи приведенных выше корней.

Если число a является корнем уравнения (6), то по теореме Безу многочлен из левой части делится на $(x - a)$. Частным от деления будет многочлен второй степени, число его различных корней – от 0 до 2, поэтому число различных корней уравнения (6) – от 1 до 3.

Упражнение 1. Докажите, что всякая прямая $y = kx + b$ пересекает кубическую параболу (5) хотя бы в одной точке.

Как и положено при исследовании функции и построении ее графика, отметим, что производная функции (5) равна

$$y' = 3x^2 + 2px + q \quad (7)$$

График производной – обычная парабола с ветвями, направленными вверх, и ее расположение определяется только дискриминантом $D = 4(p^2 - 3q)$. Если $D < 0$, то $y' > 0$ при любых x , исходная функция возрастает на всей оси, имеет единственный корень, а ее график похож на изображенный на рисунке 3,а. Если $D = 0$, то у функции появляется точка, подозрительная на экстремум – единственный корень x_0 правой части (7). Но сама правая часть при этом есть $3(x - x_0)^2$, слева и справа от x_0 будет $y' > 0$, так что возникшие подозрения не оправданы. Точка x_0 замечательна только тем, что в ней касательная к кубической параболе горизонтальна, функция по-прежнему возрастает на всей числовой оси (напомним, что условие $y'(x_0) > 0$, достаточное для возрастания функции $y = f(x)$ в точке x_0 , не является необходимым). В рассматриваемом случае функция по-

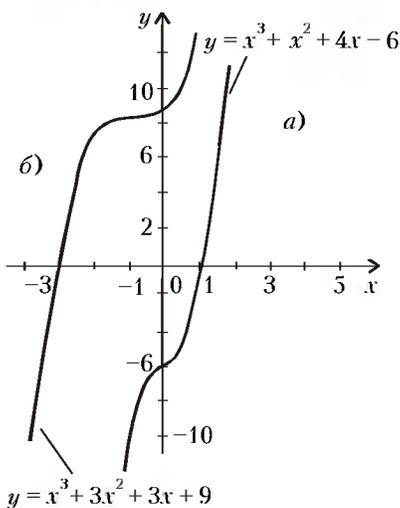


Рис. 3

прежнему имеет единственный корень, ее график похож на приведенный на рисунке 3,б и на график функции $y = x^3$. Последнее естественно, так как если $y' = 3(x - x_0)^2$, то $y = (x - x_0)^3 + C$, где $C = \text{const}$.

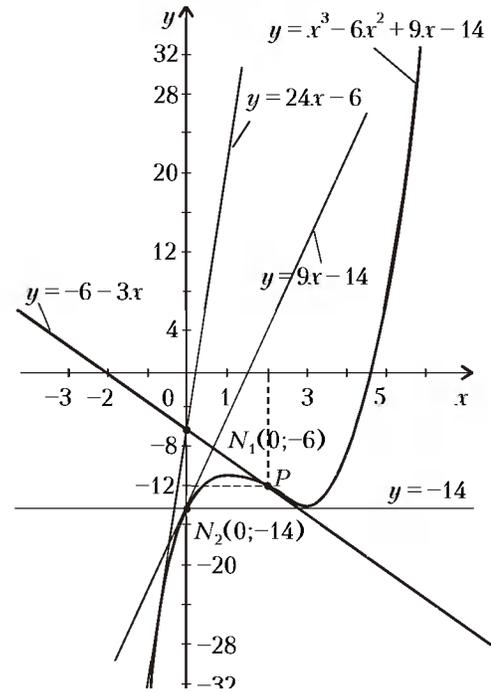


Рис. 4

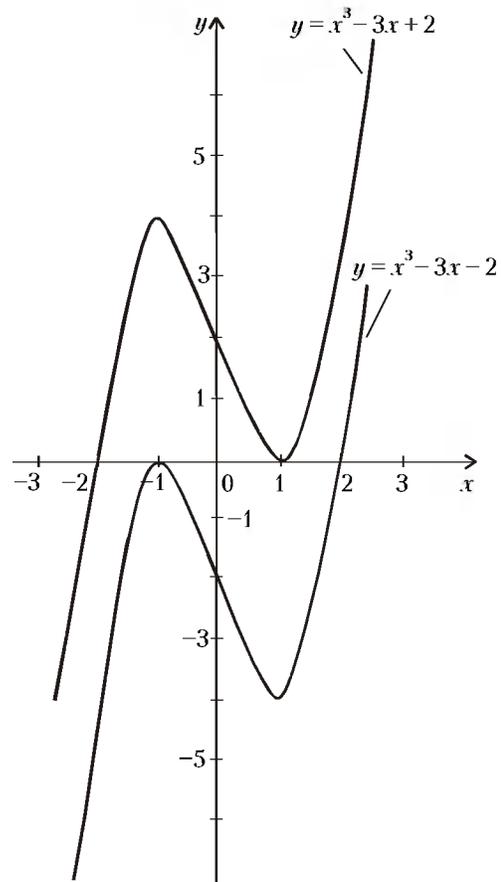


Рис. 5

прежнему имеет единственный корень, ее график похож на приведенный на рисунке 3,б и на график функции $y = x^3$. Последнее естественно, так как если $y' = 3(x - x_0)^2$, то $y = (x - x_0)^3 + C$, где $C = \text{const}$.

При $D = 4(p^2 - 3q) > 0$ производная имеет два различных корня x_{01} и x_{02} . Предположим, что $x_{01} < x_{02}$. Тогда $y' = 3(x - x_{01})(x - x_{02})$, при переходе через каждый из корней производная меняет знак, и функция достигает при $x = x_{01}$ локального максимума, а при $x = x_{02}$ — локального минимума. При этом она может иметь один корень (рис.4), два корня — в этом случае часто говорят, что корней три, но два из них совпадают (рис.5), и три корня (рис.6).

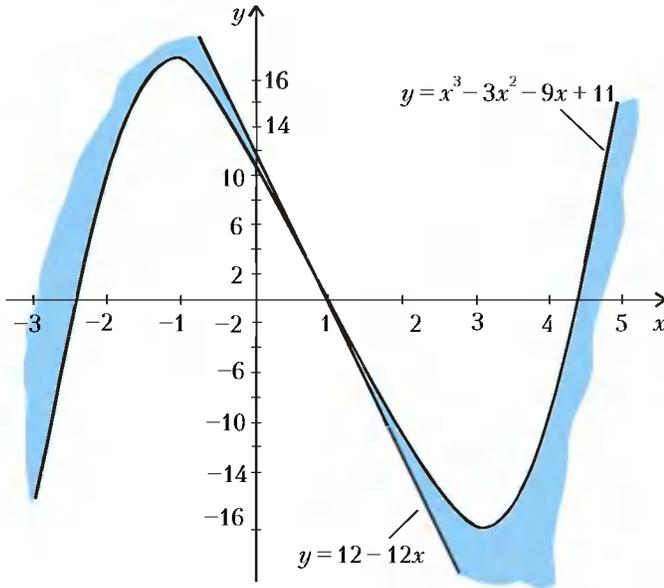


Рис. 6

Теперь нетрудно сформулировать условия, необходимые и достаточные для того, чтобы уравнение (6) имело n различных корней, где $n = 3, 2, 1$. Для функции $y = f(x)$, определяемой равенством (5), и корней x_{01} и x_{02} правой части выражения (7), удовлетворяющих неравенству $x_{01} < x_{02}$, эти условия для $n = 3$ выглядят так:

$$\begin{cases} p^2 - 3q > 0, \\ f(x_{01}) > 0, \\ f(x_{02}) < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Для выполнения условия $n = 2$ необходимо и достаточно, чтобы функция обращалась в ноль в одной из двух различных точек локального экстремума:

$$\begin{cases} p^2 - 3q > 0, \\ f(x_{01})f(x_{02}) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Во всех случаях, когда ни условия (8), ни условия (9) не выполнены, уравнение (6) имеет единственный корень.

Упражнение 2. Почему функция (5) не может обращаться в ноль в обеих точках локального экстремума?

Кубическая парабола и прямая

Перейдем теперь к вопросу о взаимном расположении на плоскости прямой и кубической параболы. Глядя на рисунки 3 и 4 — а они отражают все возможное разнообразие форм кубической параболы, — легко понять, что прямая может пересекать кубическую параболу в одной, двух и трех точках. Согласно упражнению 1, одна точка пересечения есть наверняка. Если такая точка ровно одна, то, как видно из тех же рисунков, прямая вовсе не обязана касаться

кубической параболы. Запишем уравнение касательной:

$$y = (3x_0^2 + 2px_0 + q)x - 2x_0^3 - px_0^2 + r. \quad (10)$$

Упражнение 3. Может ли прямая касаться кубической параболы в двух различных точках?

Нас интересует та же задача, что и выше: сколько касательных к кубической параболе можно провести через фиксированную точку плоскости $N(a; b)$?

Подстановка координат этой точки в (10) приводит к уравнению

$$2x_0^3 + (p - 3a)x_0^2 - 2pax_0 + (b - qa - r) = 0 \quad (11)$$

относительно абсциссы x_0 точки касания. Различных касательных, проходящих через $N(a; b)$, будет столько, сколько различных корней у этого уравнения. Коэффициент «2» перед кубом не пугает, так как можно обе части разделить на 2, т.е. рассмотреть функцию

$$f(x) = x^3 + \frac{1}{2}(p - 3a)x^2 - pax + \frac{1}{2}(b - qa - r). \quad (12)$$

Хотя бы один корень у нее есть наверняка, т.е. хотя бы одна касательная к кубической параболе через любую точку на плоскости заведомо проходит. Для того чтобы выяснить, можно ли провести через $N(a; b)$ две или три касательные, нужно применить полученные выше условия (8) и (9) к новой функции. Рекомендуем читателю далее самому проделать несложные выкладки и для начала убедиться, что производная функции (12) имеет очень приятный дискриминант: $D = (p + 3a)^2$. При $a \neq -\frac{p}{3}$ корни производной различны, а так как мы пока не знаем, какой из них больше, то примем $x_1 = -\frac{p}{3}$, $x_2 = a$. При этом

$$f(x_1) = \left(\frac{p^2 - 3q}{6}\right)a + \frac{1}{2}b + \frac{p^3 - 27r}{54}, \quad (13)$$

$$f(x_2) = \frac{1}{2}(b - (a^3 + pa^2 + qa + r)).$$

Если $a \neq -\frac{p}{3}$, через $N(a; b)$ проходят две касательные к кубической параболе, когда правая часть одного из выражений (13) равна 0. Это означает, что координаты точки $N(a; b)$ связаны между собой одним из соотношений

$$\begin{aligned} b &= \left(q - \frac{p^2}{3}\right)a + \left(r - \frac{p^3}{27}\right), \\ b &= a^3 + pa^2 + qa + r. \end{aligned} \quad (14)$$

Второе из этих равенств безусловно означает, что N может лежать на самой кубической параболе, про первое же пока можно только утверждать, что N лежит на некоторой прямой, и мы сейчас попробуем выяснить, чем замечательна эта прямая. Но сначала еще раз напомним, что выводы (14)

относятся только к случаю, когда $a \neq -\frac{p}{3}$.

Похоже, что точка P с абсциссой $\left(-\frac{p}{3}\right)$ играет на графике какую-то особую роль. Эту роль легко понять, если найти вторую производную функции, определяющей кубическую параболу: $y'' = 6x + 2p$. Таким образом, в точке P вторая производная равна нулю, при $x < -\frac{p}{3}$ будет $y'' < 0$, а при $x > -\frac{p}{3}$ соответственно $y'' > 0$. Искушенный читатель знает, что в этом случае P является точкой перегиба графика, т.е. слева и справа от P кубическая парабола имеет различ-

ные направления выпуклости. Неискушенному смысл этой фразы мы поясним ниже, а пока составим уравнение касательной к кубической параболе в точке P . Для этого достаточно в уравнение касательной подставить $x_0 = -\frac{p}{3}$; после преобразований уравнение примет вид

$$y = \left(q - \frac{p^2}{3} \right) x + \left(r - \frac{p^3}{27} \right). \quad (15)$$

С точностью до обозначений мы получили первое из уравнений (14). **Касательную** к кубической параболе в точке перегиба P , уравнение которой имеет вид (15), мы будем выделять: особым шрифтом в тексте и более толстой линией на рисунке. Если точки на кубической параболе и на **касательной** имеют одну и ту же абсциссу x , то разность ординат этих точек равна

$$\Delta y = \left(x + \frac{p}{3} \right)^3.$$

Это равенство означает, что левее точки перегиба P кубическая парабола расположена ниже **касательной**, а правее – выше.

Приведем теперь точные формулировки, относящиеся к направлению выпуклости графика произвольной функции. График функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 называется выпуклым вверх (вниз), если существует окрестность этой точки, такая что для всех точек этой окрестности касательная к графику, проведенная в точке с абсциссой x_0 , расположена выше (ниже) самой кривой. Можно доказать, что признаком выпуклости вверх (вниз) в точке x_0 является выполнение условия $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$). Таким образом, для точек, лежащих левее P , кубическая парабола выпукла вверх, правее – вниз.

С точкой перегиба P связано еще одно любопытное свойство кубической параболы. Ордината этой точки легко определяется подстановкой абсциссы в (5):

$$y \left(-\frac{p}{3} \right) = \frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r.$$

Перенесем теперь начало координат в точку P , новые координаты обозначим X, Y . Нас интересует, как запишется уравнение (5) в системе координат XPY . Старые координаты связаны с новыми равенствами

$$x = X - \frac{p}{3}, \quad y = Y + \frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r.$$

Подстановка дает (проверьте!)

$$Y = X^3 - \left(\frac{p^2}{3} - q \right) X.$$

Нечетность функции несомненно влечет за собой симметрию ее графика относительно нового начала координат. Таким образом, установлено, что точка перегиба P есть центр симметрии графика любой кубической параболы.

Но вернемся к задаче о числе касательных, т.е. к равенствам (14). Теперь мы можем прочитать их так: через точку N проходят ровно две касательные к кубической параболе тогда и только тогда, когда эта точка лежит на самой кубической параболе или на **касательной**, кроме случая, когда N совпадает с точкой перегиба P . Для касательной, проходящей через N , можно определить абсциссы точек касания.

Пусть сначала N лежит на кубической параболе и имеет абсциссу a , тогда ее ордината определяется правой частью второй из формул (14), и подстановка этих координат в

уравнение (11) дает

$$2x_0^3 + (p - 3a)x_0^2 - 2pax_0 + (a^3 + pa^2) = 0. \quad (16)$$

Найти все корни последнего уравнения помогает то обстоятельство, что один корень $x_0 = a$ мы уже знаем. Разделив уголком левую часть (16) на $(x_0 - a)$, приходим к квадратному уравнению $2x_0^2 + (p - a)x_0 - (a^2 + pa) = 0$, из двух корней которого a и $\left(-\frac{a+p}{2} \right)$ интерес для нас представляет только второй – это и есть абсцисса второй точки касания.

Если N лежит на **касательной**, то в (11) подставляем правую часть первой из формул (14) и получаем уравнение

$$2x_0^3 + (p - 3a)x_0^2 - 2pax_0 - \frac{p^2}{27}(9a + p) = 0. \quad (17)$$

Один из корней этого уравнения мы также знаем – вспомним, что **касательная** касается кубической параболы в точке перегиба P с абсциссой $x_0 = -\frac{p}{3}$. Снова на помощь приходит деление уголком, на сей раз – левой части равенства (17) на $\left(x_0 + \frac{p}{3} \right)$, что дает уравнение $2x_0^2 + \frac{1}{3}(p - 9a)x_0 - \frac{p}{9}(9a + p) = 0$ с ожидаемым корнем $x_0 = -\frac{p}{3}$ и новой для нас абсциссой точки касания $x_0 = \frac{p + 9a}{6}$.

На рисунке 4 изображена кубическая парабола $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 14$, точка ее перегиба есть $P(2; -12)$, уравнение **касательной** получается из (15): $y = -6 - 3x$. Точки пересечения **касательной** и кубической параболы с осью Oy обозначены соответственно N_1 и N_2 . Через N_1 проходят **касательная** и вторая касательная $y = 24 - 6x$. Через N_2 проходят горизонтальная и наклонная касательные $y = -14$ и $y = 9x - 14$.

Наконец, вернемся к условиям (8), гарантирующим существование трех корней, в них используется, что один из корней производной – меньший, а другой – больший. Если a лежит левее абсциссы точки перегиба, то это и есть меньший корень, x_{01} в обозначениях формулы (8), соответственно, $x_{02} = -\frac{p}{3}$, а необходимые значения функции в этих точках определяются равенствами (13). В итоге получаем, что при выполнении неравенства $a < -\frac{p}{3}$ условия (8) для рассматриваемой задачи выглядят так:

$$\begin{aligned} b &< \left(q - \frac{p^2}{3} \right) a + \left(r - \frac{p^3}{27} \right), \\ b &> a^3 + pa^2 + qa + r. \end{aligned} \quad (18)$$

При выполнении противоположного неравенства $a > -\frac{p}{3}$ меняются местами и знаки неравенств в (18):

$$\begin{aligned} b &> \left(q - \frac{p^2}{3} \right) a + \left(r - \frac{p^3}{27} \right), \\ b &< a^3 + pa^2 + qa + r. \end{aligned} \quad (19)$$

Условия (18) и (19) легко прочитать: для того чтобы через точку на плоскости можно было провести три касательные к кубической параболе, необходимо и достаточно, чтобы точка принадлежала области между этой параболой и **касательной**. На рисунке 6, где изображены кубическая парабола $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$ и ее **касательная** $y = 12 - 12x$, эта область выделена цветом. К сожалению, определить в общем случае абсциссы всех трех точек касания нам не удастся, но если задать одну из них, то две другие легко найти с помощью

деления уголко, как это было сделано выше. В частности, одна из проходящих через точку $N(4; -16)$ касательных будет горизонтальной с точкой касания $x_0 = 3$. Теперь один из корней (11) мы знаем и можем определить абсциссы двух других точек касания: $x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{105}}{4}$. Проведите соответствующие касательные на рисунке 6 самостоятельно.

Упражнение 4. Сколько существует целых значений параметра r , при которых через начало координат проходят три различные прямые, касающиеся графика функции $y = x^3 + 6x^2 - 12x + r$?

Задачи о касательной к параболе и кубической параболе часто встречаются на вступительных экзаменах. Вот несколько примеров.

Упражнения

5. При каком значении коэффициента b прямые $y = -x$ и $y = 7x$ касаются параболы $y = ax^2 + bx + c$ в двух различных точках?

6. Прямые $y = 4x + 5$ и $y = 2x + 9$ касаются параболы $y = ax^2 + bx + c$ в двух различных точках. Найдите абсциссу середины отрезка, соединяющего точки касания.

7. Касательная к параболе $y = x^2 + ax + 9$ проходит через начало координат, точка касания обозначена через M . Найдите наименьшее возможное значение длины отрезка OM при всевозможных допустимых значениях параметра a .

8. Касательная к параболе $y = x^2 - 3$ отсекает от координатных осей треугольник. Найдите наименьшее возможное значение площади этого треугольника.

9. На параболе $y = ax^2 + bx + 4$ существует единственная

точка M , обладающая тем свойством, что если в этой точке провести касательную к параболе, то отрезок этой касательной, заключенный между координатными осями, делится точкой M пополам. Найдите ординату вершины параболы.

10. К параболе $y = x^2 - (a^2 + 4)x + 8\sqrt{a}$ в точке ее пересечения с осью Oy проведена касательная. Найдите наибольшее возможное значение площади треугольника, ограниченного этой касательной и координатными осями, при всевозможных допустимых значениях параметра a .

11. График функции $y = -x^3 + px^2 + qx + r$ пересекает ось Ox в точке с абсциссой $x = 0$ и касается оси Ox в точке с абсциссой $x = 6$. Найдите абсциссу точки локального максимума этой функции.

12. Найдите абсциссу точки локального максимума функции $y = x^3 + px^2 + r$, если прямая, касающаяся графика этой функции в точке с абсциссой 5, пересекает этот график в точке с абсциссой -13.

13. При каком отличном от нуля значении параметра r касательная к графику функции $y = x^3 + 2x^2 + 3x + r$, проведенная в точке его пересечения с осью Oy , проходит через точку пересечения этого графика с осью Ox ?

14. Касательная к графику функции $y = x^3 + px^2 + qx + r$, проведенная в точке с абсциссой 15, проходит через точку пересечения этого графика с осью Oy . Абсцисса точки локального минимума этой функции равна 25. Найдите абсциссу точки локального максимума.

15. Сколько существует целых значений параметра r , при которых через начало координат проходят четыре различные прямые, касающиеся графика функции $y = 5x^4 - 18x^2 + r$?

О Л И М П И А Д Ы

LXVI Московская математическая олимпиада

Математический праздник

6 класс

1. Один мальчик 16 февраля 2003 года сказал: «Разность между числами прожитых мною месяцев и прожитых (полных) лет сегодня впервые стала равна 111». Когда он родился?

С.Токарев

2. Найдите наименьшее четырехзначное число СЕЕМ, для которого существует решение ребуса

$$\text{МЫ} + \text{РОЖЬ} = \text{СЕЕМ}$$

(одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные).

С.Токарев, А.Хачатурян

3. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, каждое утверждение которых ложно. Путник встретил троих островитян и спросил каждого из

них: «Сколько рыцарей среди твоих спутников?» Первый ответил: «Ни одного». Второй сказал: «Один». Что сказал третий?

С.Токарев

4. Прямоугольник разрезан на несколько прямоугольников, периметр каждого из которых – целое число метров. Верно ли, что периметр исходного прямоугольника – тоже целое число метров?

А.Стивак

5. В распоряжении юного паркетчика имеются 10 одинаковых плиток, каждая из которых состоит из 4 квадратов и имеет форму буквы Г (все плитки ориентированы одинаково). Может ли он составить из них прямоугольник размером 5×8 ? (Плитки можно поворачивать, но нельзя переворачивать. Например, на рисунке 1 изображено неверное решение: закрашенные плитки неправильно ориентированы.)

А.Стивак

6. На гранях кубика расставлены числа от 1 до 6. Кубик бросили два раза. В первый раз сумма чисел на четырех

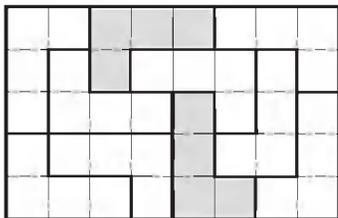


Рис. 1

боковых гранях оказалась равна 12, во второй – 15. Какое число написано на грани, противоположной той, где написана цифра 3?

А.Кустарев

7 класс

1. Расставьте скобки и знаки арифметических действий так, чтобы получилось верное равенство:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{6} \frac{1}{6009} = 2003.$$

Т.Голенищева-Кутузова, И.Яценко

2. Квадратную салфетку сложили пополам, полученный прямоугольник сложили пополам еще раз. Полученный квадрат разрезали ножницами (по прямой). Могла ли салфетка распастись на а) 2; б) 3; в) 4; г) 5 частей?

А.Чеботарев

3. Найдите делящееся на 3 и на 4 семизначное число, все цифры которого – двойки и тройки, причем двоек больше, чем троек.

О.Карпенков

4. Прямоугольник разрезали шестью вертикальными и шестью горизонтальными разрезами на 49 прямоугольников. Оказалось, что периметр каждого из полученных прямоугольников – целое число метров. Обязательно ли периметр исходного прямоугольника – целое число метров?

В.Произволов

5. В честь праздника 1% солдат получили новое обмундирование. Солдат расставили в виде прямоугольника так, что не менее чем в 30% колонн и не менее чем в 40% шеренг есть хотя бы по одному солдату в новом обмундировании. Какое наименьшее число солдат могло быть в полку?

Р.Федоров

6. Куб размером $3 \times 3 \times 3$ состоит из 27 единичных кубиков. Можно ли побывать в каждом кубике по одному разу, двигаясь следующим образом: из очередного кубика можно пройти в любой кубик, имеющий с данным общую грань, причем запрещено ходить два раза подряд в одном направлении?

С.Токарев

Избранные задачи старших классов

1. В семье 4 человека. Если Маше удвоят стипендию, общий доход всей семьи возрастет на 5%, если вместо этого маме удвоят зарплату – на 15%, если же зарплату удвоят папе – на 25%. На сколько процентов возрастет доход всей семьи, если дедушке удвоят пенсию? (8)¹

Л.Звавич, А.Чеботарев

2. Придумайте десятизначное число, в записи которого нет нулей и при прибавлении к которому произведения его цифр получается число с таким же произведением цифр. (8)

А.Хачатурян

3. Можно ли покрасить некоторые клетки доски 8×8 так, чтобы в любом квадрате 3×3 было ровно 5 закрашенных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 (вертикальном или горизонтальном) – ровно 4 закрашенные клетки? (8)

П.Пушкарь

4. В треугольнике ABC на сторонах AC и BC взяты соответственно точки X и Y такие, что $\angle ABX = \angle YAC$, $\angle AYB = \angle BXC$, $XC = YB$. Найдите углы треугольника ABC . (8)

Т.Караваева

5. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трем авиакомпаниям. Известно, что если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из любого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране? (8)

Р.Федоров

6. Петя задумал целое число, большее 100. Маша называет целое число, большее 1. Если Петинo число делится на это число, Маша выигрывает. В противном случае Петя вычитает из своего числа названное, а Маша называет следующее число. Она не может повторять числа, названные ранее. Если Петинo число станет отрицательным, Маша проигрывает. Есть ли у нее выигрышная стратегия? (8)

А.Чеботарев

7. Хулиганы Джей и Боб на уроке черчения нарисовали головастиков (четыре окружности на рисунке 2 одного радиуса, треугольник равносторонний, горизонтальная сторона этого треугольника – диаметр окружности). У какого из головастиков площадь больше? (9)

Р.Федоров

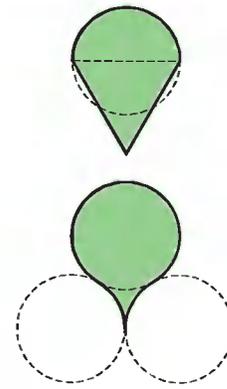


Рис. 2

8. Имеется шоколадка в форме равностороннего треугольника со стороной n , разделенная бороздками на равносторонние треугольники со стороной 1. Играют двое. За ход можно отломить от шоколадки треугольный кусок вдоль бороздки, съесть его, а остаток передать противнику. Побеждает тот, кто получит последний кусок – треугольник со стороной 1. Тот, кто не может сделать ход, досрочно проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре? (9)

А.Хачатурян

9. В окружность вписан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB . Пусть K – середина дуги BC , не содержащей точку A , N – середина отрезка AC , M – точка пересечения луча KN с окружностью. В точках A и C проведены касательные к окружности, которые пересекаются в точке E . Докажите, что $\angle EMK = 90^\circ$. (9)

И.Шарыгин

10. В тюрьму поместили 100 узников. Надзиратель сказал им: «Сегодня вы поговорите друг с другом, а потом я расскажу вас по отдельным камерам. Иногда я буду одного из вас отводить в комнату, в которой есть лампа (вначале она выключена). Уходя из комнаты, вы можете оставить лампу как включенной, так и выключенной.

Если в какой-то момент кто-то из вас скажет мне, что вы все уже побывали в комнате, и будет прав, то я всех выпущу на свободу. А если не прав – скормлю всех крокодилам. Если будете молчать, то все побываете в комнате и ни для кого никакое посещение комнаты не станет последним».

Придумайте стратегию, гарантирующую узникам освобождение. (9)

Фольклор

¹ В скобках после номера задачи указан класс, в котором она предлагалась.

11. Существуют ли такие натуральные числа a , b и c , что у каждого из уравнений $ax^2 + bx + c = 0$, $ax^2 + bx - c = 0$, $ax^2 - bx + c = 0$, $ax^2 - bx - c = 0$ оба корня целые? (10)

В.Клетцын

12. По ребрам выпуклого многогранника с 2003 вершинами проведена замкнутая ломаная, проходящая через каждую вершину ровно один раз. Докажите, что в каждой из двух частей, на которые эта ломаная делит поверхность многогранника, количество граней с нечетным числом сторон нечетно. (10)

А.Заславский

13. Пусть $P(x)$ – многочлен со старшим коэффициентом 1, а последовательность целых чисел a_1, a_2, \dots такова, что $P(a_1) = 0$, $P(a_2) = a_1$, $P(a_3) = a_2$ и т.д. Числа в последовательности не повторяются. Какую степень может иметь $P(x)$? (10)

Б.Френкин

14. Пусть M – точка пересечения медиан в треугольнике ABC . На перпендикулярах, опущенных из M на стороны BC , AC и AB , взяты точки A' , B' и C' соответственно, причем $A'B' \perp MC$ и $A'C' \perp MB$. Докажите, что M является точкой пересечения медиан также и в треугольнике $A'B'C'$. (10)

А.Заславский

15. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Точки P и Q симметричны точке C относительно прямых AB и AD соответственно. Докажите, что прямая PQ проходит через ортоцентр (точку пересечения высот) H треугольника ABD . (11)

А.Заславский

16. На берегу круглого острова Гдетотам расположено 20 деревень, в каждой живет по 20 борцов. Был проведен турнир, в котором каждый борец встретился со всеми борцами из всех других деревень. Деревня A считается сильнее деревни B , если хотя бы k поединков между борцами из этих деревень закончились победой борца из деревни A . Выяснилось, что каждая деревня сильнее следующей за ней по часовой стрелке. Какое наибольшее значение может иметь k ? (У всех борцов разная сила, и в поединке всегда побеждает сильнейший.) (11)

И.Богданов

17. Дано равенство

$$(a^{m_1} - 1) \dots (a^{m_n} - 1) = (a^{k_1} + 1) \dots (a^{k_l} + 1).$$

где a , n , l и все показатели степени – натуральные числа. Найдите все возможные значения числа a . (11)

В.Сендеров

Публикацию подготовили А.Стивак, Б.Френкин

Избранные задачи Московской физической олимпиады

Первый теоретический тур

8 класс

1. Велосипедисту и автобусу нужно проехать из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 11 км. Они выезжают одновременно. Автобус, двигаясь со скоростью 60 км/ч, через каждый километр пути делает остановку на 2 мин. Велосипедист движется с постоянной скоростью, не останавливаясь. Какой должна быть скорость велосипедиста, чтобы он обогнал автобус на каждой промежуточной остановке между пунктами A и B ?

О.Шведов

2. Алюминиевую болванку массой $M = 108$ кг нужно переправить на противоположный берег озера. В качестве «плавсредства» можно использовать сосновое бревно с площадью поперечного сечения $S = 0,034$ м². Болванка привязывается к бревну веревкой. Какова должна быть минимальная длина бревна L ? Плотность алюминия $\rho_a = 2700$ кг/м³, плотность древесины $\rho_d = 600$ кг/м³, плотность воды $\rho_v = 1000$ кг/м³. Сам переправляющий может плыть и тянуть бревно с болванкой за собой на веревке.

С.Варламов

3. В сосуд, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, основание которого – квадрат со стороной $a = 10$ см, налили $V = 1$ л воды с температурой $t_1 = 5$ °С, после чего положили туда кубик льда массой $m = 100$ г с температурой $t_2 = 0$ °С. Какими будут установившиеся температура, состав системы и уровень воды в сосуде? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4,2$ кДж/(кг·°С), плотность воды $\rho_v = 1$ г/см³, плотность льда $\rho_l = 0,9$ г/см³. Теплоемкостью сосуда и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

О.Шведов

9 класс

1. Два корабля находятся в море и движутся равномерно и прямолинейно. Первый в полдень был в 40 милях севернее маленького острова и двигался со скоростью 15 миль в час в направлении на восток. Второй в 8 часов утра этого же дня был в 100 милях восточнее того же острова и двигался со скоростью 15 миль в час в направлении на юг. На каком минимальном расстоянии друг от друга прошли корабли, и в какой момент времени это случилось?

С.Варламов

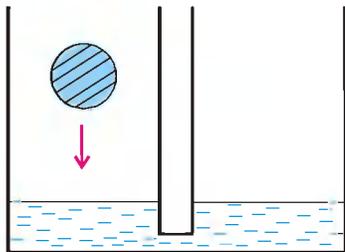


Рис. 1

2. В два одинаковых сообщающихся сосуда налита вода (рис.1). В один из них опускают ледяной шарик объемом $V = 100 \text{ см}^3$, который через небольшое время после установления уровня воды в сосудах оказался погруженным в воду ровно наполовину. Какая масса воды перетекла при этом во второй сосуд, и какая перетечет потом в процессе таяния льда? Плотность воды $\rho_v = 1000 \text{ кг/м}^3$, плотность льда $\rho_l = 900 \text{ кг/м}^3$.

О.Шведов

3. В калориметр, в котором находилось $m_0 = 100 \text{ г}$ воды при температуре $t_0 = 20^\circ\text{C}$, по каплям с постоянной скоростью начинают наливать горячую воду постоянной температуры. График зависимости температуры t воды в калориметре от времени τ изображен на рисунке 2. Найдите температуру горячей воды, считая, что между падением капель в калориметре каждый раз успевает установиться тепловое равновесие. Потерями тепла пренебречь.

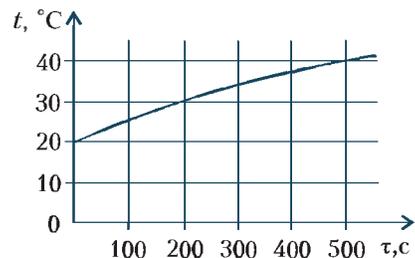


Рис. 2

О.Шведов

4. Школьницы Алиса и Василиса решили изготовить самодельные вольтметры из имеющихся в школьной лаборатории миллиамперметров. Алиса соединила миллиамперметр последовательно с резистором сопротивлением $R_1 = 1 \text{ кОм}$ и приклеила на прибор шкалу напряжений, показывающую произведение текущего через миллиамперметр тока I на R_1 . Василиса собрала ту же схему, используя другой резистор, с сопротивлением $R_2 = 2 \text{ кОм}$, и приклеила шкалу, показывающую произведение IR_2 . Школьницы решили испытать свои приборы, подключив их к схеме, изображенной на рисунке 3, с неизвестным напряжением батарейки и неизвестными сопротивлениями резисторов. Прибор Алисы при подключении к контактам 1 и 2 показал напряжение $U_{12} = 1,8 \text{ В}$, к контактам 2 и 3 – напряжение $U_{23} = 1,8 \text{ В}$, к контактам 1 и 3 – напряжение $U_{13} = 4,5 \text{ В}$. Что покажет прибор Василисы при подключении к тем же парам контактов? Внутренним сопротивлением батарейки и миллиамперметров пренебречь.

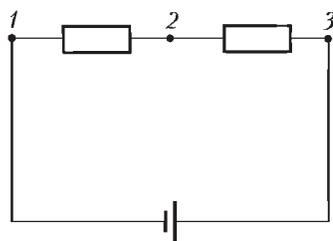


Рис. 3

О.Шведов

10 класс

1. В автомобиле спидометр и счетчик пройденного пути регистрируют скорость автомобиля и пройденный им путь относительно поверхности, по которой движется автомобиль. Автомобиль последовательно проехал по двум конвейерам (движущимся дорожкам) длиной $L = 500 \text{ м}$ каждый. Полотна конвейеров движутся в одну сторону с постоянными

скоростями $v_1 = 20 \text{ км/ч}$ и $v_2 = 30 \text{ км/ч}$. По первому конвейеру автомобиль ехал с некоторой постоянной скоростью, а по второму конвейеру – с другой постоянной скоростью. Что показывал спидометр во время движения по каждому из конвейеров, если с момента въезда на первый конвейер до съезда со второго прошло время $t = 72 \text{ с}$, а счетчик пути показал, что при этом был пройден путь L ? Расстоянием между конвейерами и временем переезда с первого конвейера на второй пренебречь.

Д.Харабадзе

2. Магазин пистолета представляет собой металлический пенал, внутри которого имеется легкий поршень, подпираемый пружиной (рис.4). Когда магазин пуст, поршень касается его крышки. Магазин устроен таким образом, что из него можно вынимать только находящийся у крышки патрон – через небольшое отверстие в боковой стенке. После вынимания патрона поршень под действием пружины перемещается и передвигает все оставшиеся в магазине патроны к крышке. В магазин вставили N одинаковых патронов массой m и длиной L , после чего вынули по очереди все патроны, держа магазин крышкой вверх. Коэффициенты трения между патронами, а также между патроном и крышкой и между патроном и поршнем одинаковы и равны μ . На сколько работа против сил трения при опустошении магазина будет больше, если при вынимании патронов держать его крышкой вниз? Трением между патронами и боковыми стенками магазина, а также массой пружины пренебречь.

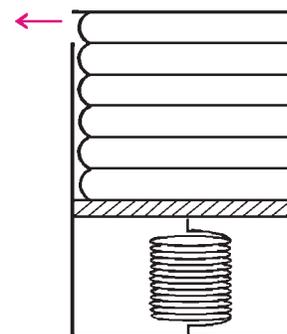


Рис. 4

Д.Харабадзе

3. Над идеальным газом проводят процесс 1–2, который изображается на pV -диаграмме наклонным отрезком прямой (рис.5). В начальном и конечном состояниях газ имеет одинаковую температуру $T = 300 \text{ К}$. Найдите максимальную температуру газа в этом процессе, если конечный объем газа превышает начальный в $n = 3$ раза.

А.Якута

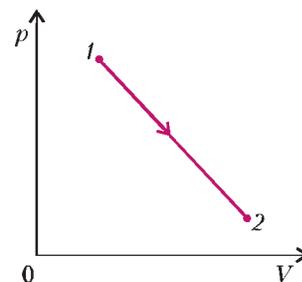


Рис. 5

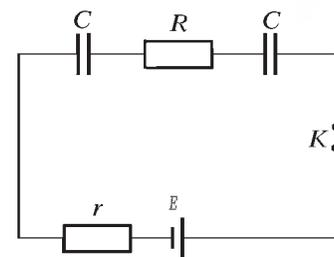


Рис. 6

4. В схеме, изображенной на рисунке 6, конденсаторы емкостью C вначале не заряжены. Какое количество теплоты выделится в каждом из резисторов с сопротивлениями r и R после замыкания ключа K ? Батарея с ЭДС E имеет пренебрежимо малое внутреннее сопротивление.

О.Шведов

11 класс

1. На горизонтальном столе некоторая прямая линия разделяет две области: по одну сторону от этой линии стол гладкий, а по другую – шероховатый. На столе лежит

однородная доска длиной $L = 1$ м. Она расположена перпендикулярно линии и целиком находится на гладкой поверхности. К концу доски прикреплен один конец невесомой пружины, имеющей жесткость $k = 4$ Н/м. Другой конец пружины начинают медленно тянуть в горизонтальном направлении вдоль доски так, что она перемещается через линию в сторону шероховатой поверхности. Для того чтобы полностью перетащить доску на шероховатую поверхность, нужно совершить минимальную работу $A = 17,5$ Дж. Найдите, какое при этом выделится количество теплоты. Пружина не касается шероховатой поверхности.

А. Якута

2. Идеальный одноатомный газ находится в закрепленном теплоизолированном цилиндре, разделенном на две части неподвижной теплопроводящей перегородкой и закрытом слева подвижным поршнем, не проводящим тепло (рис. 7). Масса газа в левой части цилиндра m_1 , а в правой m_2 . Давление на поршень медленно увеличивают, начиная с некоторого начального значения. Найдите молярную теплоемкость газа в левой части цилиндра в данном процессе.

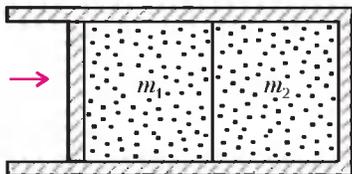


Рис. 7

3. К проволочному каркасу K , имеющему вид окружности, прикрепил нить, которая связана из четырех кусков A , B , C и D с длинами, относящимися друг к другу как 1:2:1:3. Каркас окунули в мыльный раствор, вынули и, удерживая каркас в вертикальной плоскости, проткнули образовавшуюся мыльную пленку между кусками нити B и D с длинами, относящимися как 2:3. Нить приняла форму, показанную на рисунке 8. Углы, образованные касательными к кускам нити вблизи узелков, все одинаковы и равны 120° , а куски нити, прикрепленные к каркасу, вблизи узелков наклонены под углами 30° к горизонту. Расстояние между узелками $L = 4$ см, коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора $\sigma = 0,04$ Н/м. Мыльная пленка настолько тонкая, что ее массой можно пренебречь. Какова масса M всей мокрой нити?

Рис. 8

С. Варламов

4. Маленький шарик массой m с зарядом q падал в вязкой среде вдоль вертикальной прямой с постоянной скоростью v . В некоторый момент включили постоянное однородное горизонтальное магнитное поле, и через достаточно большое время после этого шарик стал двигаться с другой постоянной скоростью таким образом, что количество теплоты, выделяющееся в вязкой среде в единицу времени, уменьшилось в n раз по сравнению с движением в отсутствие магнитного поля. Найдите, при какой максимальной величине индукции B магнитного поля такое движение возможно. Вид зависимости силы вязкого трения от скорости неизвестен.

А. Якута

Второй теоретический тур

8 класс

1. К свинцовому грузу, имеющему температуру $t_0 = 0^\circ\text{C}$, привязали кусок льда массой $M = 1$ кг с температурой

$t = -30^\circ\text{C}$, после чего опустили их в большую бочку с водой температуры 0°C . При этом лед и груз сначала утонули, а через некоторое время всплыли. В каких пределах может находиться масса груза m ? Плотность свинца $\rho_c = 11$ г/см³, плотность воды $\rho_v = 1$ г/см³, плотность льда $\rho_l = 0,9$ г/см³, удельная теплоемкость льда $c_l = 2,2$ Дж/(г·°C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ Дж/г.

Д. Харабадзе

2. На плоском горизонтальном дне неглубокого озера находятся три маленьких пузырька воздуха, расположенных на одной прямой. Расстояния между соседними пузырьками 1 м и 2 м. Все три пузырька одновременно оторвались от дна и начали всплывать с различными постоянными скоростями. Во время движения в воде пузырьки все время располагались так, что через них можно было провести прямую линию. Через 15 секунд после начала всплытия на поверхности воды оказался один из пузырьков, а через 20 секунд после начала всплытия – другой. Через какое время после начала всплытия на поверхности появится последний из пузырьков?

С. Варламов

3. Школьник спаял схему, состоящую из двух лампочек, батарейки и двух кнопочных переключателей. Переключатель (рис. 9) устроен так, что при нажатии на кнопку контакт 1 соединяется переключкой с контактом 3, а при отпускании кнопки пружина возвращает переключку, и замыкаются контакты 1 и 2. Если обе кнопки в схеме не нажаты, то обе лампочки не горят. Если нажата только первая кнопка, то загорается одна лампочка, если нажата только вторая кнопка, то загорается другая лампочка. Если же нажаты сразу две кнопки, то обе лампочки не горят. Нарисуйте возможные схемы соединения этих элементов. Учтите, что контакты батарейки при работе схемы никогда не должны замыкаться накоротко.

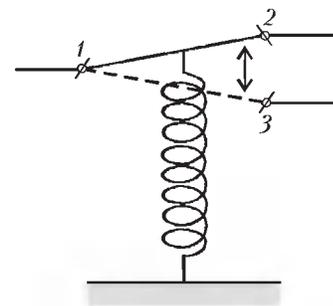


Рис. 9

М. Семенов

9 класс

1. Один корабль идет по морю на север с постоянной скоростью 20 узлов, а другой – навстречу ему на юг с такой же скоростью. Корабли проходят на очень малом расстоянии друг от друга. Шлейф дыма от первого корабля вытянулся в направлении на запад, а от второго – на северо-запад (рис. 10). Определите величину и направление скорости ветра. (1 узел = 1 морская миля в час, 1 морская миля = 1852 м.)

С. Варламов

2. В системе, изображенной на рисунке 11, блоки имеют пренебрежимо малые массы, нить невесомая и нерастяжимая, не лежащие на блоках участки нити горизонтальны. Массы грузов, лежащих на горизонтальной плоскости, одинаковы и равны M . Нить тянут за свободный конец в горизонтальном направ-

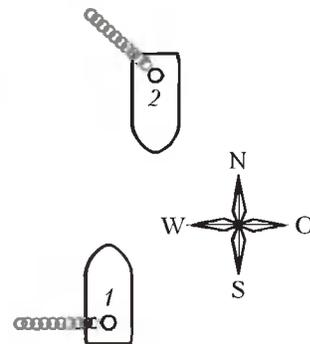


Рис. 10

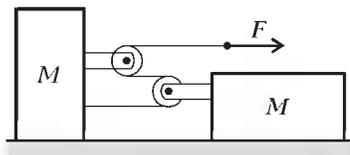


Рис. 11

лении с силой F . С каким ускорением движется конец нити, к которому приложена эта сила? Трения нет, движение грузов считать поступательным.

А.Зильберман



Рис. 12

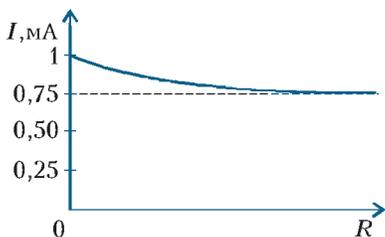


Рис. 13

О.Шведов

10 класс

1. На гладком горизонтальном столе находятся два груза массы 1 кг и 2 кг, скрепленные невесомой и нерастяжимой нитью. К середине нити между грузами прикреплена еще одна такая же нить, за которую тянут с силой 10 Н. В некоторый момент времени все отрезки нитей натянуты, расположены горизонтально и составляют между собой углы 90° , 120° и 150° . Известно, что в этот же момент скорость более легкого груза равна 1 м/с, более тяжелого составляет 2 м/с, а вектор скорости каждого груза направлен перпендикулярно отрезку нити, который прикреплен к данному грузу. Найдите ускорения грузов в рассматриваемый момент времени, если известно, что они одинаковы по величине.

С.Варламов

2. На рисунке 14 приведена зависимость силы упругости f , возникающей при растяжении резинового стержня, от величины Δl его удлинения. Стержень очень медленно протягивают через щель, имеющую достаточно узкие закругленные края-щечки, так, как показано на рисунке 15. Каждая из щечек прижимается к стержню с постоянной силой $F = 30$ Н. Коэффициент сухого трения между резиной и материалом щечек $\mu = 0,5$, длина стержня в нерастянутом состоянии $L = 10$ см. Какую работу совершают силы трения, действующие на стержень, к тому моменту, когда он весь будет протянут через щель?

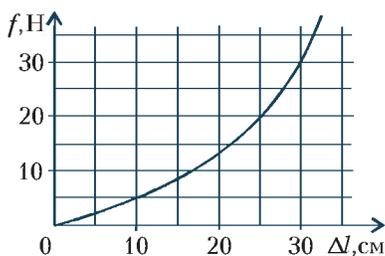


Рис. 14

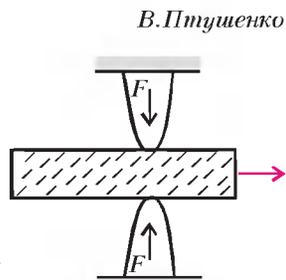


Рис. 15

В.Птушенко

11 класс

1. Найдите ускорение груза 1 в системе, изображенной на рисунке 16. Горизонтальная плоскость гладкая, трения между грузами нет, нить и блоки невесомы, нить нерастяжима, массы всех трех грузов одинаковы. В начальный момент все тела покоятся.

М.Семенов

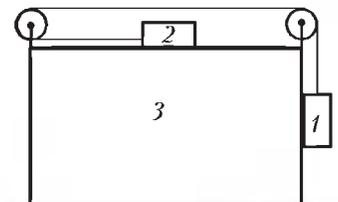


Рис. 16

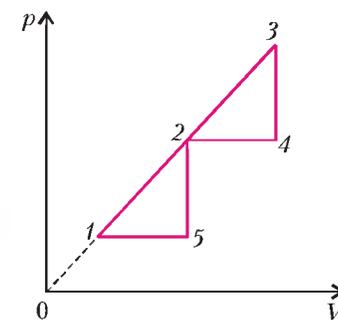


Рис. 17

2. Тепловая машина, рабочим телом которой является идеальный одноатомный газ, совершает работу в цикле $1-2-3-4-2-5-1$, показанном на pV -диаграмме на рисунке 17. Точки 1, 2 и 3 лежат на прямой, проходящей через начало координат диаграммы, а точка 2 является серединой отрезка $1-3$. Найдите КПД тепловой машины, работающей по такому циклу, если максимальная температура газа в данном цикле отличается от минимальной температуры в n раз. Чему равен КПД этой машины при $n = 4$?

А.Якута

3. На горизонтальной поверхности лежит грузик массой m , соединенный с неподвижной вертикальной стенкой горизонтальной невесомой пружиной жесткостью k . Коэффициент трения между грузом и поверхностью $\mu \ll 1$. Известно, что после начального отклонения от положения равновесия вдоль оси пружины отпущенный без начальной скорости грузик совершил много колебаний и прошел до остановки путь s . Оцените время, которое занял процесс колебаний от начала движения грузика до полной его остановки, а также погрешность полученного результата. Считать силу трения скольжения не зависящей от скорости и равной максимальной силе трения покоя.

М.Семенов

4. Монокристаллы галлия, как и ряда других проводников, обладают анизотропией сопротивления: удельное сопротивление ρ_x галлия вдоль главной оси симметрии монокристалла (оси X) максимально, а вдоль любой другой оси, перпендикулярной оси X , минимально и равно ρ . Из кристалла галлия вырезали тонкую прямоугольную пластинку (рис. 18) длиной $a = 3$ см и шириной $b = 3$ мм так, что ось X параллельна грани $ABCD$ пластинки и образует с ребром AB угол $\alpha = 60^\circ$. Если между гранями пластинки, перпендикулярными AB , создать постоянную разность потенциалов $U_0 = 100$ мВ, то через пластинку потечет ток, и в ее середине между точками F и G поперечного сечения будет существовать разность потенциалов $U = 6,14$ мВ. Найдите отношение ρ_x/ρ .

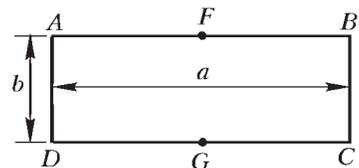


Рис. 18

В.Погожев

Публикацию подготовили М.Семенов, А.Якута

«Квант» для «младших» школьников

Задачи

(см. «Квант» №3)

1. Каждому (кроме первого) вошедшему в дом правдун должен предшествовать лгун, а каждому лгуну – правдун. Следовательно, в дом вошли 5 правдунов и 5 лгунов.
2. Совместим вершину A кирпича с углом O стола, а ребра кирпича направим по краям стола (рис.1, а). Трижды повер-

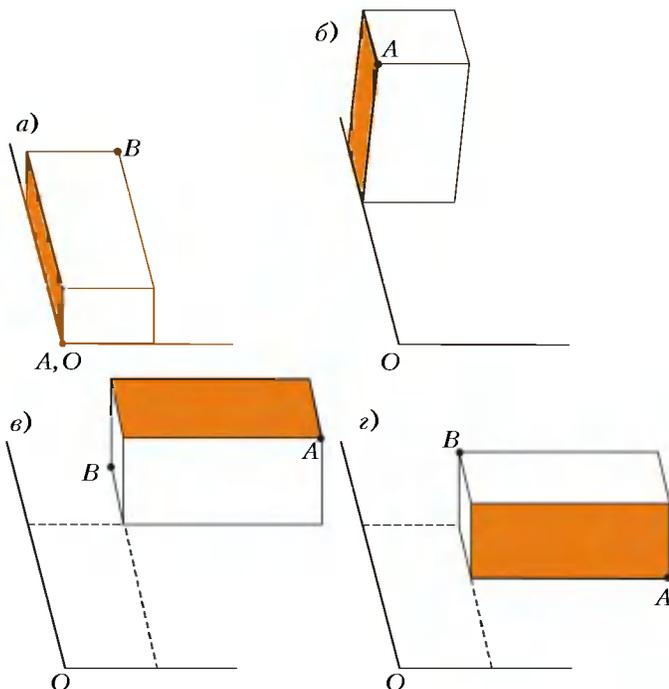


Рис. 1

нув кирпич относительно ребер так, как показано на рисунке, добьемся того, что вершина B кирпича после трех поворотов займет свое исходное положение. На рисунке 1,г кирпич уже не мешает измерить расстояние между точками O и B , которое равно расстоянию между точками A и B .

3. Клад не может быть зарыт ближе чем в пяти километрах от Гадюкина, так как тогда он будет далее 4 км от Мартышкина. Но клад не может также быть далее 5 км от Гадюкина, так как тогда береза окажется более чем в двух километрах от него, а дуб – менее чем в двух километрах, т.е. клад окажется не посередине между ними. Значит, клад зарыт ровно в 5 км от Гадюкина.

4. Умножив обе части исходного уравнения

$$x, (yz) + y, (zx) = z, (xy) \quad (1)$$

на 100, получим

$$\overline{xyz}, (yz) + \overline{yzx}, (zx) = \overline{zxy}, (xy). \quad (2)$$

Вычтя из уравнения (2) уравнение (1), выводим

$$\overline{xyz} - x + \overline{yzx} - y = \overline{zxy} - z,$$

или

$$100x + 10y + z - x + 100y + 10z + x - y = 100z + 10x + y - z.$$

После преобразований находим

$$9(5x + 6y) = 44z. \quad (3)$$

Одно из возможных решений уравнения (3): $x = y = z = 0$.

Исследуем другие решения. Равенство (3) означает, что цифра z кратна 9, следовательно, $z = 9$. В этом случае (3) запишется так:

$$5x + 6y = 44, \text{ или } x = 8 - y + \frac{4 - y}{5}.$$

Отсюда видно, что число x может быть целым только в том случае, если $y = 4$. Но тогда $x = 4$.

Итак, среди цифр x, y, z обязательно имеются одинаковые.

5. Лом может справиться за три попытки. Опишем порядок его действий.

Вначале Лом указывает на две крайние слева карты, а Фукс ему сообщает, какая из этих карт старшая. Если старшая карта находится слева, то Лом перекладывает ее в середину. При отсутствии нужного порядка (это означает, что в середине оказался туз) Лом отворачивается, а Фукс меняет расположение двух соседних карт. В результате туз попадает на левый или правый край.

Во второй попытке Лом указывает на две крайние карты. После ответа Фукса он узнает, какая из этих карт – туз, и помещает, если это необходимо, туза на последнее место (правый край). Если нужного порядка все еще нет, то единственно возможное расположение карт таково: король–дама–туз. Лом отворачивается, а Фукс перемещает даму в крайнюю (справа или слева) позицию. После этого возможны два варианта расположения карт: король–туз–дама или дама–король–туз.

В третьей попытке Лом опять просит сравнить две крайние карты. Если старшая карта находится справа, то имеет место второй вариант (дама–король–туз), а если слева, то первый (король–туз–дама). В последнем случае достаточно даму переложить на левый край.

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №1)

16. Если сумма $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ равна произведению двух последовательных натуральных чисел k и $k + 1$, то $n(n+1) = 2k(k+1)$. Отсюда получаем

$$n^2 + (n+1)^2 = 2n(n+1) + 1 = 4k(k+1) + 1 = (2k+1)^2$$

– квадрат целого числа.

Наоборот, если существует такое целое число m , что $n^2 + (n+1)^2 = m^2$ (в этом случае число m должно быть нечетным), то существует такое натуральное число k , что $n^2 + (n+1)^2 = (|m|)^2 = (2k+1)^2$.

Но тогда

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + (n+1)^2 - 1}{4} = \frac{m^2 - 1}{4} = \frac{2k(2k+2)}{4} = k(k+1).$$

17. Подсчитаем, в каком количестве игр принимает участие каждый мальчик. Он может составить с четырьмя другими 4 различные команды. Каждая такая команда должна сыграть три игры, поскольку остальные три мальчика могут составить 3 различные команды. Следовательно, каждый мальчик в турнире должен сыграть 12 раз.

Таким образом, Андрей все игры проиграл и ни одной не выиграл. Каждый из остальных четырех мальчиков сыграл против Андрея 6 раз.

Действительно, например, Дима против пары Андрей + Боря сыграл 2 раза (вместе с Васей и вместе с Геней), точно так же он играл по 2 раза против пары Андрей + Вася и против пары Андрей + Гена; итого – 6 раз. Следовательно, Боря, Вася, Гена и Дима в играх против Андрея с напарником

одержали по 6 побед. Поскольку, как уже отмечалось, каждый участвовал в 12 играх, то согласно условию Боря во всех остальных своих матчах проиграл. 3 матча Бори без участия Андрея можно представить так:

$$(Г+Д) \rightarrow (Б+В); (В+Д) \rightarrow (Б+Г); (В+Г) \rightarrow (Б+Д).$$

Здесь буквы Б, В, Г, Д – заглавные буквы имен мальчиков, а стрелки идут от победителей к проигравшим командам. Из приведенной схемы видно, что в этих играх Вася, Гена и Дима выиграли по две игры, а всего – по восемь.

Итак, Андрей не выиграл ни разу; Боря выиграл 6 раз; Вася, Гена и Дима выиграли по 8 раз.

18. Пусть в треугольнике ABC из середины M стороны AC восстановлен перпендикуляр, делящий его на 2 части, площади которых различаются в 3 раза (рис.2). Этот перпендикуляр пересекает одну из остальных двух сторон треугольника;

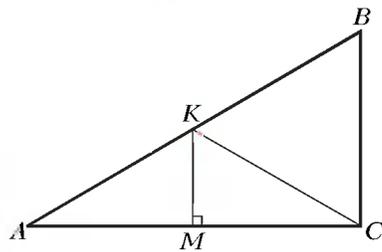


Рис. 2

пусть для определенности это сторона AB .

Точку пересечения обозначим через K . Проведем отрезок CK . Треугольники AMK и CMK равны, поэтому площадь четырехугольника $BCKM$ больше площади треугольника AMK в 3 раза и

площадь треугольника CKB равна площади треугольника CAK . Отсюда заключаем, что $AK = KB$. Из равенства треугольников AKM и CKM следует также $AK = KC$. Итак, точка K является центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC , причем отрезок AB является ее диаметром. Поэтому $\angle C = 90^\circ$ и $KM \parallel BC$.

Заметим, что в этом случае перпендикуляр к середине второго катета BC также проходит через точку K и делит треугольник ABC на две части, площади которых опять же различаются ровно в 3 раза. Поэтому BC – это «третья» сторона треугольника, о которой говорится в условии, и перпендикуляр к ее середине делит треугольник ABC на две части, площади которых различаются в 3 раза. Это и есть ответ.

19. При нечетном n число $z = n^{n+1} + (n+1)^{n+2} + (n+2)^{n+3}$ четно и больше 2, следовательно, оно составное.

При четном n число z можно представить в виде

$$z = (n^{n+1} + 1) + (n+1)^{n+2} + ((n+2)^{n+3} - 1).$$

Но

$$n^{n+1} + 1 = (n+1)(n^n - n^{n-1} + \dots - n + 1),$$

$$(n+2)^{n+3} - 1 = ((n+2) - 1)((n+2)^{n+2} + (n+2)^{n+1} + \dots + 1),$$

так что число z представляет собой сумму трех слагаемых, кратных $n+1$, поэтому само делится на $n+1$ и является составным.

20. Достаточно положить $x = a + b$, $y = a - b$, после чего исходное уравнение превращается в тождество. Следовательно, для любых целых чисел (a, b) уравнение

$$x^2 + xy + y^2 = 3a^2 + b^2$$

имеет решения в целых числах (x, y) .

Индуктивность в электрических цепях

1. $U_L = \frac{E(2R_1 + R_2) - I_0 R_1 R_2}{R_1 + R_2}$; $U_C = 2E$.

2. $I_{L_1} = I_{L_2} = U_0 \sqrt{\frac{C}{L_1 + L_2}}$; $U_m = U_0 \sqrt{\frac{L_1}{L_1 + L_2}}$.

3. $I_m = 4E \sqrt{\frac{C}{L}}$.

4. $U_m = I_0 \sqrt{\frac{L_1 L_2}{C(L_1 + L_2)}}$.

Прямые и параболы

1. Уравнение (6) (см. статью) имеет хотя бы один корень.
2. Функция (5) не может иметь два нуля второго порядка.
3. Нет. Функция (5) не может иметь два нуля второго порядка.

4. 7. Уравнение касательной $y = -24x + r - 8$, точка $(0; 0)$ должна лежать между параболой и касательной, т.е.

$0 \in (r - 8; r)$, поэтому $0 < r < 8$ и количество целых значений 7.

5. 3. Пусть x_1, x_2 – абсциссы точек касания. Так как прямые пересекаются в точке $(0; 0)$, то $x_1 + x_2 = 0$. Складывая равенства $2ax_1 + b = -1$ и $2ax_2 + b = 7$, получаем $b = 3$.

6. 2. Середина отрезка имеет ту же абсциссу, что и точка a_* , следовательно, $4x + 5 = x + 9$, и $x = 2$.

7. 3. Уравнение для определения абсциссы точки касания $x_0^2 - 9 = 0$, $x_0 = \pm 3$. $y_0 = 18 \pm 3a$. Квадрат искомой длины есть $OM^2 = 9 + (18 \pm 3a)^2$, и $OM_{\min} = 3$.

8. 4. Уравнение касательной $y = 2x_0 x - 3 - x_0^2$, ордината и абсцисса точек пересечения этой касательной с координатными

осями $y = -3 - x_0^2$, $x = -\frac{3 + x_0^2}{2x_0}$, и $S = \frac{1}{2}|xy| = \frac{(3 + x_0^2)^2}{4|x_0|}$. По-

этому $x_{0\min} = 1$, $S_{\min} = 4$.

9. 1. Уравнение касательной $y = (2ax_0 + b)x + 4 - ax_0^2$, точки пересечения этой касательной с координатными осями

$A(0; 4 - ax_0^2)$, $B(\frac{ax_0^2 + 4}{2ax_0 + b}; 0)$. Так как M – середина отрезка

AB , то $2(ax_0^2 + bx_0 + 4) = 4 - ax_0^2$. Получившееся уравнение

имеет единственное решение, поэтому $b^2 = 12a$, и $y_{\text{верш}} = 4 - \frac{b^2}{4a} = 1$.

10. 8. Уравнение касательной $y = 8\sqrt{a} - (a^2 + 4)x$, ордината и абсцисса точек пересечения этой касательной с координатными

осями $y = 8\sqrt{a}$, $x = \frac{8\sqrt{a}}{a^2 + 4}$. Поэтому $S = \frac{1}{2}|xy| = \frac{32a}{a^2 + 4}$, $a_{\max} = 4$, $S_{\max} = 8$.

11. -2. Поскольку $r = 0$, а при $x = 6$ будет $y = 0$ и $y' = 0$, получаем систему

$$\begin{cases} 36p + 6q = 216, \\ 12p + q = 108, \end{cases}$$

откуда $p = 12$, $q = -36$ и $x_{\max} = -2$.

12. 3. При $q = 0$ уравнение касательной для $x_0 = 5$ запишется так: $y = (10p + 75)x - 250 - 25p + r$. При $x = -13$ это совпадает со значением функции. Поэтому $p = 3$.

13. 6. При $x_0 = 0$ уравнение касательной $y = 3x + r$. Точка пересечения с осью Ox есть $x = -r/3$. Подстановка в уравнение кривой дает $r = 6$.

14. -5. В уравнение касательной при $x_0 = 15$ подставляем $x = 0$ и находим, что $p = -30$. Один из корней квадратного уравнения 25, а их сумма 20. Поэтому другой корень есть -5.

15. 5. Фраза «касательная проходит через начало координат» означает, что $f(x_0) = f'(x_0)x_0$, в данном случае $15x_0^4 - 18x_0^2 - r = 0$. Чтобы это уравнение имело 4 различных корня, должно быть $r < 0$, $D > 0$. Отсюда $-5,4 < r < 0$; целых чисел 5.

Математический праздник

6 класс

1. 16 января 1993 года. Пусть мальчик прожил x лет и y месяцев. Тогда он прожил $12x + y$ месяцев и потому

$$12x + y - x = 111,$$

т.е.

$$11x + y = 11 \cdot 10 + 1.$$

Поскольку $y < 12$, то $y = 1$ и $x = 10$.

2. Поскольку $C > P$, то $C > 1$. Пусть $P = 1$, $C = 2$ и $E = 0$. Тогда $M \geq 3$. Случай $CEEM = 2003$ возможен: $35 + 1968 = 2003$ или $38 + 1965 = 2003$.

Кроме вышеуказанных двух решений ребус, как легко проверить при помощи компьютерной программы, имеет еще 38 решений: $58 + 2947 = 3005$, $31 + 4972 = 5003$, ..., $28 + 5974 = 6002$.

3. Один. Если первый – рыцарь, то в силу его слов второй и третий – лжецы, что невозможно из-за высказывания второго островитянина. Значит, первый – лжец. Если второй – лжец, то в силу его слов третий тоже лжец, но тогда первый сказал правду, а он должен был соврать. Значит, второй – рыцарь. Третий честно ответит: «Один».

4. Нет. Например, число $8/3$ не целое, а средняя линия делит квадрат со стороной $2/3$ на два прямоугольника, периметры которых равны 2 (рис.3). Есть и другие примеры (рис.4).

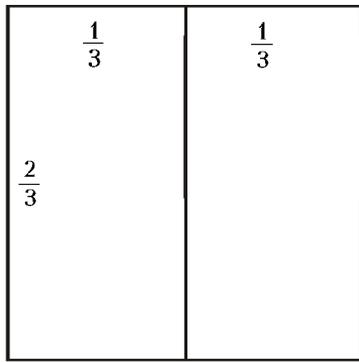


Рис. 3

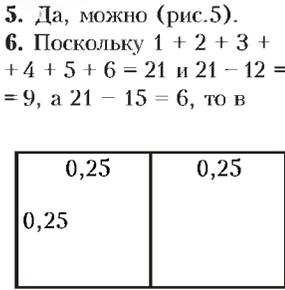


Рис. 4

первый раз сумма чисел нижней и верхней граней кубика равнялась 9, а во второй – 6. Бросим кубик третий раз так, чтобы он упал на одну из тех двух граней, которые оба раза

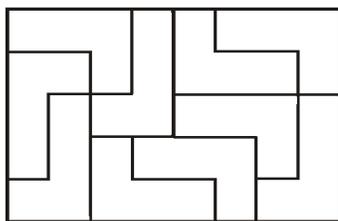


Рис. 5

были боковыми. Поскольку $21 - 9 - 6 = 6$, то сумма чисел, которые при третьем броске оказались на верхней и нижней гранях, равна 6. Очевидно, цифра 3 не могла ни во второй, ни в третий раз оказаться на верхней или нижней грани: иначе напротив нее стояла бы цифра $6 - 3 = 3$, а тройка только одна. Поэтому напротив тройки стоит цифра $9 - 3 = 6$.

Примечание. Удовлетворяющий условию задачи кубик существует: $1 + 5 = 2 + 4 = 6$ и $3 + 6 = 9$.

$$1. \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) : \frac{1}{6009} = 2003.$$

2. На рисунке 6 изображены все возможные способы разрезания салфетки.

3. 2222232. По признаку делимости на 4 число, образованное двумя последними цифрами, должно делиться на 4. Поэтому число оканчивается на 32. Так как двоек больше, чем троек,

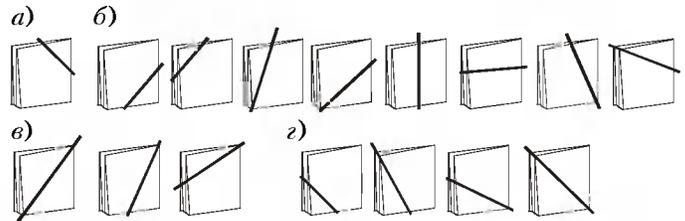


Рис. 6

двоек может быть 4, 5 или 6 штук. В первом случае сумма цифр числа равна 17, во втором – 16, в третьем – 15. По признаку делимости на 3 число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Значит, годится только последний вариант.

4. Да. Рассмотрим прямоугольники, выделенные на рисунке 7 («диагональные»). Горизонтальная сторона исходного прямоугольника складывается из их горизонтальных сторон. То же – для вертикальной стороны. Поэтому периметр исходного прямоугольника равен сумме периметров заштрихованных прямоугольников.

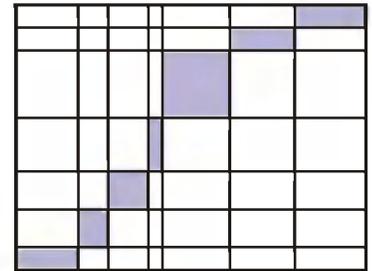


Рис. 7

5. Предположим, что солдаты выстроены в m колонн и n шеренг. Тогда в полку mn солдат. Согласно условию, новое обмундирование получили $mn/100$ из них, и не менее чем в $40n/100$ шеренгах есть хотя бы по одному солдату в новом обмундировании. Значит,

$$\frac{mn}{100} \geq \frac{40n}{100}.$$

откуда $m \geq 40$. Аналогично, $n \geq 30$. Следовательно, в полку не менее $40 \cdot 30 = 1200$ солдат.

Покажем, что 1200 солдат можно построить нужным образом. Поставим по диагонали 12 солдат в новом обмундировании (рис.8). Ясно, что солдаты в новом обмундировании стоят ровно в 30% колонн и в 40% шеренг (ибо 30% от 40 – это 12, а 40% от 30 – тоже 12).

6. Нельзя. Предположим, что можно. В кубе 8 угловых кубиков и 6 кубиков, расположенных в центрах граней. Любой ход из углового кубика ведет в кубик в середине ребра, а следующий ход – в кубик в центре грани. Таким образом, чтобы попасть из одного углового кубика в другой, нужно пройти хотя бы через один кубик в центре грани. Значит, последних не меньше семи, а их всего лишь шесть.

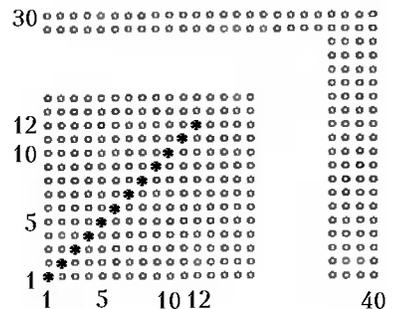


Рис. 8

Избранные задачи старших классов

1. 55%. Если всем членам семьи станут платить вдвое больше, общий доход увеличится на 100%. Из этих 100 процентов 5 приходится на Машу, 15 – на маму, 25 – на папу, а остальные 55 – на дедушку. Значит, если дедушке удвоят пенсию, доход всей семьи возрастет на 55%.

2. Например, 111111613. Сначала найдем какое-нибудь число, не обязательно десятизначное, но удовлетворяющее остальным условиям задачи. Например, такое число, что после прибавления к нему произведения цифр они попросту меняются местами. Если последние цифры числа 13, то, чтобы поменять их местами, нужно прибавить 18. Чтобы произведение цифр было 18, нужно дописать еще цифру 6. Чтобы получить десятизначное число, припишем слева недостающее число единиц. Произведение цифр от этого не изменится.

3. Нельзя. Предположим, что такая раскраска возможна. Доску 8×8 можно разрезать на восемь прямоугольников 4×2 , поэтому на ней ровно $8 \cdot 4 = 32$ закрашенные клетки. Ее же можно разрезать на четыре квадрата 3×3 , три прямоугольника 4×2 и угловой квадратик 2×2 (рис.9). В четырех квадратах и трех прямоугольниках уже $4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 32$

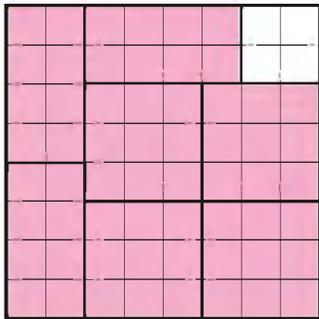


Рис. 9

закрашенные клетки, поэтому в угловом квадратике не должно быть закрашенных клеток. То же и в остальных угловых квадратиках 2×2 . Доску без таких квадратиков можно разрезать на шесть прямоугольников 4×2 . Получаем, что всего на доске $6 \cdot 4 = 24$ закрашенные клетки. Противоречие.

4. Все углы по 60° , треугольник равносторонний. Для внешних углов BXC и $A'YB$

треугольников ABX и $CA'Y$ запишем равенства

$$\angle BXC = \angle ABX + \angle BAX,$$

$$\angle A'YB = \angle CA'Y + \angle YCA'.$$

В силу условия задачи $\angle BAX = \angle YCA'$, т.е. $AB = BC$. В треугольниках XBC и YAB равны две стороны и угол между ними: $\angle BXC = \angle A'YB$, $XC = YB$, $BC = AB$. Такие треугольники либо равны, либо $\angle XBC + \angle YAB = 180^\circ$ (докажите!). Но второй вариант в данной ситуации невозможен (докажите!). Как следствие, $\angle ABC = \angle BCA'$, и треугольник ABC равносторонний.

5. 21 авиалиния. Обозначим число различных авиалиний между городами через k . Если мы уберем одну из них, города могут распасться на две несвязанные группы. После удаления следующей авиалинии не более одной группы распадется еще на две. Продолжая аналогично, получим, что после удаления последней авиалинии количество разрозненных групп не превысит $k + 1$. Поскольку 15 городов без авиалиний – это 15 групп, то $k \geq 14$.

Обозначим количество линий у авиакомпаний через a , b и c . По доказанному, $a + b \geq 14$, $b + c \geq 14$, $c + a \geq 14$. Складывая эти неравенства, получаем $2(a + b + c) \geq 42$. Примеры с 21 авиалинией показаны на рисунке 10.

6. Есть. Сначала Маша называет 2. Если Петя не проиграл, то его число было нечетным и после вычитания двойки останется нечетным.

Теперь Маше следует назвать 3. Рассмотрим возможные остатки исходного Петиного числа (нечетного) при делении на $6 = \text{НОК}(2, 3)$. Если остаток был 5, то после первого хода

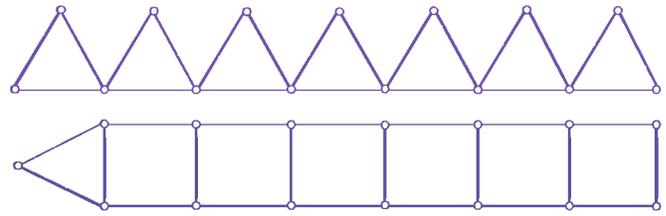


Рис. 10

он стал 3, и Маша выигрывает вторым ходом. Игра будет продолжаться, если исходное Петино число давало остаток 1 или 3 при делении на 6. После двух ходов из него вычтется $2 + 3 = 5$, и остаток при делении на 4 станет 2 или 0.

Третье число Маши – 4. Возможные остатки Петиного числа перед этим ходом при делении на $12 = \text{НОК}(3, 4)$ были 2, 4, 8 или 10. Игра будет продолжаться, если остаток был 2 или 10 (иначе число разделится на 4), после вычитания 4 он превратится соответственно в 10 или 6.

Четвертое число Маши – 6. Если Петино число давало остаток 6 при делении на 12, оно разделится на 6. В противном случае после вычитания 6 остаток равен 4. Маша называет 16, чтобы после вычитания 15 Петино число стало делиться на 12. После этого можно называть 12 – число разделится! Участниками олимпиады были придуманы и другие последовательности ходов Маши. Попробуйте доказать, что минимально возможную сумму чисел имеет последовательность 6, 4, 3, 2, 5, 12.

7. Площади фигур равны. *Указание.* Наложим одного головастика на другой, как показано на рисунке 11. Если отрезать от первого головастика закрашенные сегменты и повернуть их вокруг точек A_1 и B_1 на 180° , то получится в точности второй головастик.

8. Если число n простое, то выигрывает второй игрок, иначе выигрывает первый игрок. После первого хода образуется равнобедренная трапеция, у которой сумма меньшего основания и боковой стороны равна большому основанию. Пусть на каком-то ходу один из игроков получил шоколадку в форме равнобедренной трапеции с меньшим основанием a , большим основанием b и боковой стороной $b - a$.

Если он отломит треугольник (у большего основания), сторона которого меньше, чем $b - a$, то другой игрок может отломать треугольник со стороной 1 у другого конца большего основания, и первый из игроков досрочно проигрывает. Следовательно, в этой ситуации он должен отломить треугольник со стороной $b - a$, и получится параллелограмм.

Пусть игрок получил шоколадку в форме параллелограмма со сторонами a и b , причем $a < b$. Тогда, по аналогичным соображениям, он должен отломить треугольник со стороной a . Как следствие, если в некоторый момент один из игроков получил шоколадку в форме параллелограмма со сторонами a и b ($a < b$), то через два хода он получит шоколадку в форме параллелограмма со сторонами a и $b - a$. Если же он получил ромб, то после его хода образуется треугольник.

Приведем выигрышную стратегию для второго игрока при простом n . Ему достаточно каждый раз отламывать кусок наибольшего размера. После каждого хода второго игрока об-

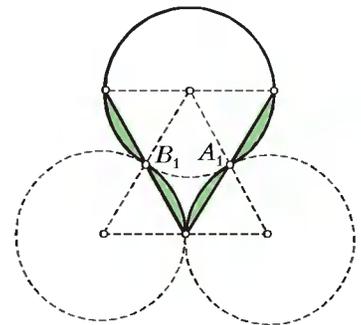


Рис. 11

разуется параллелограмм со сторонами взаимно простой длины, пока не получится ромб. Длины сторон ромба взаимно просты и потому равны 1. Первый оламывает треугольник со стороной 1, и второй выигрывает.

Если $n = 1$, то первый уже выиграл. Пусть теперь число n составное, p – любой его простой делитель. Выигрышная стратегия для первого игрока состоит в том, что он сначала оламывает треугольник со стороной p , а потом каждый раз оламывает самый большой кусок. Через некоторое время второй игрок получит треугольник со стороной p , после чего, как было разобрано выше, проигрывает. Заметим, что описанный процесс есть не что иное, как алгоритм Евклида.

9. Пусть точка O – центр окружности, т.е. середина гипотенузы AB . Точки E, N и O лежат на одной прямой (докажите!). Точки A, E, C и O лежат на одной окружности, так как $\angle ECO = \angle EAO = 90^\circ$. Из теоремы о пересекающихся хордах окружности следует, что $AN \cdot NC = EN \cdot NO$. Применяя ту же теорему к хордам AC и MK исходной окружности, получаем $AN \cdot NC = MN \cdot NK$. Как следствие, $MN \cdot NK = EN \cdot NO$. По теореме, обратной к теореме о пересекающихся хордах, получаем, что точки M, K, E и O лежат на одной окружности.

Углы EMK и EOK равны, как опирающиеся на одну дугу. Теперь достаточно показать, что угол NOK прямой. Но средняя линия NO треугольника ABC параллельна его стороне BC , а прямая OK является биссектрисой (а следовательно, и высотой) равнобедренного треугольника BOC .

10. Узнки выбирают «счетчика», который делает лишь следующее: если, приходя в комнату, он обнаруживает, что свет включен, то он прибавляет к уже посчитанному числу узников единицу и выключает свет. Каждый из остальных узников действует так: если, приходя в комнату, он обнаруживает, что свет не горит, и до этого ни разу не включал свет, то он его включает. Когда число посчитанных узников становится равным 99, «счетчик» говорит, что все узники уже побывали в комнате.

Действительно, каждый узник включит свет в комнате не более одного раза. Докажем, что каждый из узников, кроме «счетчика», включит свет. Пусть это не так. Тогда, начиная с некоторого дня n , свет включаться не будет. Так как никакой заход в комнату не будет для счетчика последним, он побывает в комнате на m -й день, при некотором $m > n$. Если свет при этом горел, он его выключит. Значит, начиная с $(m + 1)$ -го дня свет будет все время выключен. Для узника, который свет еще ни разу не зажигал, также никакой заход в комнату не последний, и он побывает в комнате после m -го дня. Но тогда он должен включить свет – противоречие.

11. Да, например, $a = 1, b = 5, c = 6$. Можно считать, что $a = 1$, так как иначе все коэффициенты уравнений можно сократить на a (докажите). Достаточно также, чтобы корни уравнений $x^2 + bx + c = 0$ и $x^2 + bx - c = 0$ были целыми (докажите).

Необходимо, чтобы дискриминанты двух указанных уравнений были точными квадратами: $b^2 - 4c = m^2, b^2 + 4c = n^2$. Это же условие оказывается и достаточным (по соображениям четности). Соответствующих b, c, m, n существует бесконечно много.

В действительности задача представления заданного числа в виде суммы двух квадратов хорошо изучена. Она связана с так называемыми гауссовыми целыми числами – числами вида $x + yi$, где x и y – целые числа, i – мнимая единица. В частности, можно доказать, что нетривиальное представление $2b^2 = m^2 + n^2$ существует тогда и только тогда, когда в разложении b на простые множители входит хотя бы одно простое число вида $4k + 1$. (Подробнее об этом см. в статье В.Сенде-

рова и А.Спивака «Суммы квадратов и целые гауссовы числа» в «Кванте» №3 за 1999 г.)

12. Выберем любую из получившихся частей. Рассмотрим сумму $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, где a_i – количество сторон i -й грани. Каждое ребро многогранника, по которому ломаная не проходит, посчитано в этой сумме дважды. Каждое ребро, через которое проходит ломаная, входит в сумму ровно один раз. Таких ребер 2003, поэтому вся сумма нечетна. Если количество граней с нечетными числом сторон четно, то рассмотренная сумма должна быть четной. Значит, это количество нечетно.

13. Степень многочлена может равняться только 1. Если степень многочлена $P(x)$ равна 0, то $P(x) = 1$ (старший коэффициент равен 1). Но тогда уравнение $P(a_1) = 0$ не имеет решения. Если степень многочлена равна 1, то, например, многочлен $P(x) = x - 1$ и последовательность $a_n = n$ удовлетворяют условию задачи.

Пусть степень многочлена не меньше 2. Найдется такая положительная константа C , что если $|x| > C$, то $|P(x)| > |x|$. Например, можно взять $C = |b_{n-1}| + \dots + |b_1| + |b_0| + 1$ (докажите!).

Если $|a_n| > C$, то $C < |a_n| < |P(a_n)| = |a_{n-1}|$. Тогда, аналогично, $|a_{n-1}| < |P(a_{n-1})| < \dots < |P(a_1)| = |0|$, что неверно. Таким образом, последовательность состоит из целых чисел, по модулю не превосходящих C , а их количество конечно, т.е. в последовательности обязательно будут повторения.

14. Сведем задачу к случаю равностороннего треугольника, для которого утверждение задачи тривиально. Точки A', B' и C' определяются следующими условиями:

$$MA' \perp BC, MB' \perp AC, MC' \perp AB,$$

$$A'B' \perp MC, A'C' \perp MB.$$

Повернем треугольник $A'B'C'$ вокруг точки M на 90° против часовой стрелки. Условия на точки A', B' и C' перейдут в следующие:

$$MA' \parallel BC, MB' \parallel AC, MC' \parallel AB, A'B' \parallel MC, A'C' \parallel MB.$$

При этом утверждение задачи перейдет в равносильное. Выполним аффинное преобразование, переводящее треугольник ABC в равносторонний. Утверждение задачи снова перейдет в равносильное, поскольку формулируется только в терминах параллельности, пересечения прямых и середин отрезков. Теперь повернем треугольник $A'B'C'$ по часовой стрелке на 90° . Задача перейдет в исходную, но с равносторонним треугольником ABC .

15. Пусть U, V – точки, симметричные точке H относительно AB и AD соответственно, X – точка пересечения прямых UC и AV , Y – точка пересечения прямых VC и AD . Так как прямая PH проходит через X , а QH – через Y , утверждение задачи равносильно тому, что точки X, H, Y лежат на одной прямой.

Точки U и V лежат на описанной окружности четырехугольника. Действительно,

$$\angle(UA, UB) = \pi - \angle(HA, HB) = \angle(DA, DB)$$

(углы ориентированные). Как следствие,

$$\begin{aligned} \angle(HX, HY) &= \angle(HX, HU) + \angle(HU, HV) + \angle(HV, HY) = \\ &= \angle(U'D, UC) + \angle(HD, HB) + \angle(VC, VB) = \\ &= \angle(AD, AC) + \pi - \angle(AD, AB) + \angle(AC, AB) = \pi. \end{aligned}$$

16. 290. Покажем, что при $k > 290$ такая ситуация невозмож-

на. В каждой деревне упорядочим борцов по убыванию силы и выберем десятого по силе борца. Покажем, что деревня, в которой живет слабейший из выбранных борцов, не может быть сильнее следующей за ней. Обозначим выбранных борцов в нашей и следующей деревнях через A и B соответственно. Тогда в нашей деревне 11 борцов не сильнее, чем A , а в следующей – 10 борцов хотя бы такой же силы, как B . Все поединки между этими борцами закончатся в пользу второй деревни, и этих поединков 110, т.е. поединков, в которых выиграл борец нашей деревни, не больше $20 \cdot 20 - 110 = 290$. Приведем пример, показывающий, что при $k \leq 290$ описанная ситуация возможна. Пусть среди борцов есть 210 новичков и 190 мастеров (любой новичок слабее любого мастера). Пронумеруем деревни *против* часовой стрелки. Поместим в первую деревню одного слабейшего новичка и 19 слабейших мастеров; во вторую – двух новичков, слабейших из оставшихся, и 18 мастеров, слабейших из оставшихся; в третью – трех слабейших из оставшихся новичков и 17 мастеров, слабейших из оставшихся; ...; в последнюю деревню поместим 20 сильнейших новичков.

Покажем, что i -я деревня сильнее $(i - 1)$ -й при $i > 1$. Действительно, мастера i -й деревни победят всех в $(i - 1)$ -й, а новички победят новичков, и всего побед будет $20(20 - i) + i(i - 1) = i^2 - 21i + 400$. Вершина этой параболы находится в точке $i = 10,5$, а ветви направлены вверх, поэтому минимальное значение в целой точке достигается при $i = 10, 11$ и равно 290, т.е. каждая i -я деревня сильнее $(i - 1)$ -й при $k \leq 290$. Кроме того, мастера первой деревни победят новичков 20-й, и здесь побед будет $20 \cdot 19 = 380 > 290$.

17. 2 и 3 (например, выполнены равенства $2^2 - 1 = 2 + 1$, $(3 - 1)^2 = 3 + 1$). Предположим, что при некотором $a > 3$ условие задачи выполнено:

$$A = (a^{m_1} - 1) \dots (a^{m_n} - 1) = (a^{k_1} + 1) \dots (a^{k_j} + 1).$$

Докажем сначала, что как любое m_i , так и число $a - 1$ являются степенями двойки. Пусть γ – нечетный делитель числа m_i , а p – любой простой делитель числа $a^\gamma - 1$. Тогда в правом произведении найдется множитель $a^{k_j} + 1$, делящийся на p . Поэтому число

$$\left((a^{k_j})^\gamma + 1 \right) - \left((a^\gamma)^{k_j} - 1 \right) = 2$$

делится на p , т.е. все простые делители числа $a^\gamma - 1$ – двойки и $a^\gamma - 1 = (a^{\gamma-1} + \dots + a + 1)(a - 1) = 2^n$. Поскольку $a > 3$, то $n > 1$. При этом γ нечетно, поэтому выражение в первой скобке – нечетный делитель числа 2^n . Значит, $\gamma = 1$ и $a - 1 = 2^n$. В частности, $a - 1$ делится на 4 (ибо $a - 1 > 2$), поэтому $a^k + 1$ имеет остаток 2 при делении на 4.

Каждая скобка в левой части исходного равенства представляется в виде

$$a^{2^d} - 1 = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1) \dots (a^{2^{d-1}} + 1) = 2^n \cdot 2^d \cdot a_0 \dots a_{d-1},$$

где $a_i = \frac{a^{2^i} + 1}{2}$ – нечетные числа. Заметим, что при $m > n$ число $a^{2^m} - 1$ делится на $a^{2^n} + 1$, поэтому $\text{НОД}(a_m, a_n) \leq (a^{2^n} + 1) - (a^{2^n} - 1) = 2$; поскольку a_i нечетны, они попарно взаимно просты. Пусть q – максимальная степень двойки, входящая в m_i или k_j . Тогда A представляется в виде $A = 2^N a_0^{N_0} \dots a_q^{N_q}$, причем $N > N_0 + \dots + N_q$, так как анало-

гичное неравенство справедливо для каждого из $a^{2^d} - 1$.

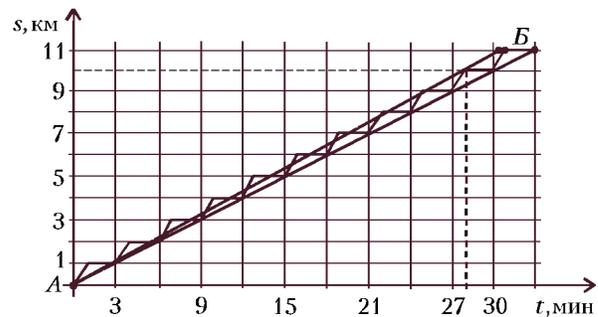
Поскольку любое число вида $a^{k_j} + 1$ делится лишь на первую степень двойки, то их количество в представлении числа A не меньше N . Но каждое из них делится на одно из чисел a_i : если $k_j = 2^r s$, где s нечетно, то $a^{k_j} + 1$ делится на a_r . Поскольку $N > N_0 + \dots + N_q$, то на какое-то число a_i делится больше, чем N_i чисел $a^{k_j} + 1$, а следовательно, A делится на большую степень a_i , чем N_i . Противоречие с тем, что a_i нечетны и попарно взаимно просты.

Избранные задачи
Московской физической олимпиады

Первый теоретический тур

8 класс

1. На рисунке 12 изображены графики зависимости пройденного пути от времени для автобуса (ломаная линия) и для велосипедиста (две прямые линии). Скорость велосипедиста должна быть такой, чтобы на отметке «10 км» он находился в



период времени от 28 мин до 30 мин. Таким образом, скорость велосипедиста должна лежать в интервале от

$$v_1 = 10 \text{ км}/30 \text{ мин} = 20 \text{ км}/\text{ч}$$

до

$$v_2 = 10 \text{ км}/28 \text{ мин} \approx 21,4 \text{ км}/\text{ч}.$$

2. $L = \frac{M}{\rho_a S} \frac{\rho_a - \rho_B}{\rho_B - \rho_D} = 5 \text{ м}.$

3. В сосуде будут находиться лед и вода массой

$$m_{л} = m - \frac{c \rho_B V (t_1 - t_2)}{\lambda} = 37 \text{ г}$$

и

$$m_{в} = \rho_B V + \frac{c \rho_B (t_1 - t_2)}{\lambda} \approx 1063 \text{ г}$$

при температуре $t = 0$ °С, при этом высота уровня воды в сосуде будет

$$H = \frac{V}{a^2} + \frac{m}{\rho_B a^2} = 11 \text{ см}.$$

9 класс

1. Минимальное расстояние между кораблями было в полдень и составляло

$$L = 100\sqrt{2} \text{ миль} \approx 141,4 \text{ миль}.$$

2. Сразу после опускания льда перетечет $m_1 = \rho_B V/4 = 25 \text{ г}$ воды, а в процессе таяния льда дополнительно перетечет $m_2 = \rho_B V/2 - \rho_B V/4 = 20 \text{ г}$ воды.

3. $t_r = 80^\circ\text{C}$.

4. $U_{12}^* = U_{23}^* = 2\text{ В}$, $U_{13}^* = 4,5\text{ В}$.

10 класс

1. $u_1 = v_2 \frac{L - v_1 t}{v_2 t - L} = 30\text{ км/ч}$, $u_2 = v_1 \frac{v_2 t - L}{L - v_1 t} = 20\text{ км/ч}$.

2. $\Delta A = 2\mu mgLN^2$.

3. $T_{\max} = T(n+1)^2 / (4n) = 400\text{ К}$.

4. $Q_r = \frac{CE^2}{4} \frac{r}{R+r}$, $Q_R = \frac{CE^2}{4} \frac{R}{R+r}$.

11 класс

1. $Q = \frac{kL^2}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{8A}{kL^2}} - 1 \right) = 5\text{ Дж}$.

2. $C_M = -\frac{3}{2} \frac{m_2}{m_1} R$; теплоемкость отрицательна, потому что в данном процессе газ отдает тепло, хотя его температура и повышается.

3. $M = 2\sigma L/g \approx 0,32\text{ г}$.

4. $B_{\max} = \frac{mgn}{2qv}$.

Второй теоретический тур

8 класс

1. $m_{\min} = M \frac{\rho_c(\rho_B - \rho_L)}{\rho_L(\rho_c - \rho_B)} \approx 0,122\text{ кг}$,

$m_{\max} = M \frac{\rho_c(\rho_L - \rho_B)}{\rho_L(\rho_c - \rho_B)} \left(1 + \frac{c_L(t_0 - t)}{\lambda} \right) \approx 0,147\text{ кг}$.

2. $t_3 = 24\text{ с}$ или $t_3 = 60\text{ с}$ (в зависимости от начального расстояния между пузырьками).

3. Три возможные схемы соединения элементов изображены на рисунке 13.

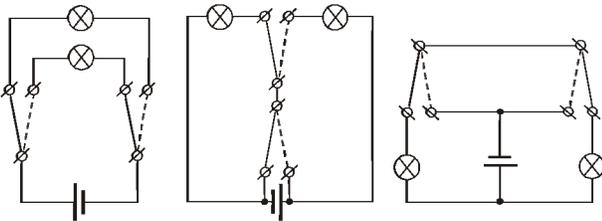


Рис. 13

9 класс

1. Скорость ветра равна $v \approx 44,7\text{ узла} \approx 82,82\text{ км/ч}$ и составляет с курсом первого корабля угол $\alpha = \arctg 2 \approx 63^\circ$.

2. $a = 13F/M$.

3. $R_1 = 6\text{ кОм}$ и $R_2 = 2\text{ кОм}$ или наоборот.

10 класс

1. $a = 10/\sqrt{3}\text{ м/с}^2 \approx 5,8\text{ м/с}^2$, при этом ускорение первого груза составляет с силой натяжения угол 90° , а второго – 150° .2. $A_{\text{тр}} \approx -9\text{ Дж}$ (заметим, что работа постоянной внешней силы расходуется на увеличение потенциальной энергии стержня и на работу против сил трения).

11 класс

1. Ускорение равно $a = g\sqrt{2/5}$ и направлено вниз под углом $\alpha = \arctg 3$ к горизонту.

2. $\eta = \frac{1}{8} \frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n} + 1}$, при $n = 4$ $\eta = \frac{1}{24}$.

3. $\tau \approx \pi \sqrt{\frac{s}{2\mu g}}$, $\Delta\tau = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}$.

4. $\frac{\rho_x}{\rho} = \frac{U_0 b \cos \alpha + U a \sin \alpha}{U_0 b \sin \alpha - U a \cos \alpha} \text{ tg } \alpha \approx 3,2$.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Московский Центр непрерывного математического образования
kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru

Курьер образования
www.courier.com.ru

Vivos Voco!
vivovoco.nns.ru
(раздел «Из номера»)

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов,
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия,
П.И.Чернуский**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ на печати.

Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»,
тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховском полиграфическом комбинате
Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №

Короли и роботы

— СТАТУС-КВО

Зимой в Нью-Йорке состоялся исторический матч двух сильнейших шахматистов в мире: среди людей и среди компьютеров. В поединке между российским гроссмейстером Гарри Каспаровым и израильским роботом «Дип Джуниором» было сыграно шесть партий с полноценным контролем времени. Итог 3:3, по одному разу выиграли человек и машина, четыре встречи закончились вничью. Программу «Дип Джуниор» разработали программисты Амир Бай и Шай Бушинский, а за дебютную библиотеку отвечал гроссмейстер Борис Алтерман.

В первой партии Каспаров уверенно взял верх, во второй получил перевес, но упустил его после одного импульсивного хода. Напряженно протекала третья партия: «Джуниор» остроумно защищался и отбил угрозы соперника. Ничья была неизбежна, но Гарри опять сделал резкий ход, теперь уже проигрывающий, и счет сравнялся. В четвертой Каспаров избрал осторожный вариант, и машина захватила инициативу, но все закончилось благополучно для человека.

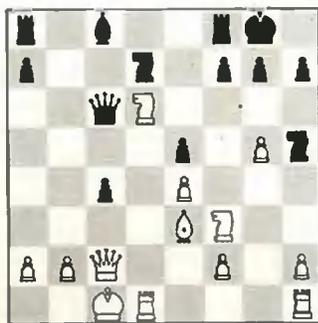
В пятой Каспаров спровоцировал робота на комбинацию с жертвой фигуры. Выигрыша у черных не было, и все закончилось миром. В заключительной схватке Каспаров перенял «Джуниора», но решил не рисковать и согласился на ничью.

Приведем несколько партий матча.

Г.Каспаров — «Дип Джуниор» 1-я партия

Славянская защита

1. d4 d5 2. c4 c6 3. ♖c3 ♗f6 4. e3 e6 5. ♗f3 ♗bd7 6. ♘c2 ♗d6 7. g4. Прогнать черного коня из центра всегда полезно. 7... dc 8. ♗:c4 b6. Диагональ a8-h1 ослаблена, и есть смысл занять ее слоном. 9. e4 e5. Последовательнее 9... ♗b7 10. e5 c5! с головоломными осложнениями. 10. g5 ♗h5 11. ♗e3 0-0 12. 0-0-0 ♘c7. Эта позиция встречалась на практике, но после получасового раздумья Каспаров делает новый ход. 13. d5! Белые приступают к захвату белых полей. 13...b5. Здесь Гарри думал еще полчаса и нашел убедительный способ добиться преимущества. 14. dcl bc 15. ♗b5! В случае 15. ♘d2 ♗b4 16. cd ♗b7 пешка прорывается на d7, но вскоре может стать добычей черных. 15... ♘:c6 16. ♗:d6. Появление этого коня в логове электронного врага более

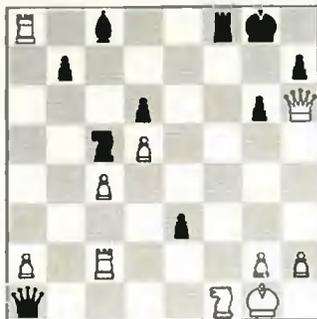


чем опасно. 16... ♗b7 17. ♘c3 ♗ae8. Черные отдают качество за грозного всадника, но человек быстро ставит машину на место. 18. ♗:c8 ♗:e8 19. ♗he1 ♘b5 20. ♗d2 ♗c8 21. ♗b1 ♗f8 22. ♗a1 ♗g6 23. ♗c1 ♗a6 24. b3 cb 25. ♘:b3 ♗a8 26. ♘:b5 ♗:b5 27. ♗c7. Черные сдались.

«Дип Джуниор» — Г.Каспаров 2-я партия

Сицилианская защита

1. e4 c5 2. ♗f3 e6 3. d4 cd 4. ♗:d4 a6 5. ♗d3 ♗c5 6. ♗b3 ♗a7 7. c4 ♗c6 8. ♗c3 d6 9. 0-0 ♗ge7 10. ♗e1. Похоже, теория уже закончилась. 10...0-0 11. ♗e3 e5 12. ♗d5 a5 13. ♗c1. В борьбе за центральные поля черным удается добиться большего. 13...a4 14. ♗:a7 ♗:a7 15. ♗d2 ♗d4 16. ♘h5 ♗c6 17. ♗c3 ♗c5 18. ♗c2. С угрозой 19. ♗g3, 20. ♗f6+ и 21. ♘:h7×, но в шахматах ходят по очереди. 18... ♗:d5 19. ed g6 20. ♘h6 f5 21. ♗a3 ♘f6 22. b4! ab! 23. ♗:a7 bc 24. ♗c1 e4 25. ♗:c2. У черных за качество опасная атака — 25...f4 и т.д. Вместо этого Гарри дает импульсивный шах, и «Джуниор» выходит сухим из воды. 25... ♘a1+? 26. ♗f1 f4 27. ♗a8 e3 28. fe fe.

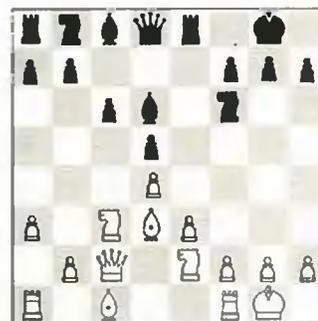


29. ♘:f8+!! ♗:f8 30. ♗:c8+ ♗f7. Ничья. Теперь неизбежно следует 31. ♗e2, и белые съедают опасную нешку; а две ладьи, соединившись, не уступают ферзю. На первый взгляд, при 31... ♗e4 32. ♗:e3 ♗d2 белым совсем плохо, но издалека Каспаров не заметил, что после 33. ♗c7+ ♗f6 у белых есть шах — 34. ♗e6+! ♗g5 35. ♗f7, и конь спасен.

Г.Каспаров — «Дип Джуниор» 5-я партия

Защита Нимцовича

1. d4 ♗f6 2. c4 e6 3. ♗c3 ♗b4 4. e3 0-0 5. ♗d3 d5 6. cd ed 7. ♗ge2 ♗e8 8. 0-0 ♗d6 9. a3 c6. 10. ♘c2. Провоцируя черных на комбинацию, знакомую каж-



дому шахматисту.

10... ♗:h2+! У черных мало фигур в атаке, и вопрос об их форсированной победе не стоит. Более того, они могут рассчитывать только на ничью. Но компьютер, подумав всего несколько минут, решает на позиционную жертву фигуры — что-то новое в творчестве шахматных компьютеров. 11. ♗:h2 ♗g4+ 12. ♗g3. Разумеется, не 12. ♗g1 ♘h4 13. ♗d1 ♘:f2+ 14. ♗g1 ♗e6 с разгромом. 12... ♘g5 13. f4 ♘h5. Белый ферзь потерял контроль над полем h1, и теперь его черного оппонента нелегко прогнать с h5. 14. ♗d2 ♘h2+ 15. ♗f3 ♘h4.

Здесь Каспаров долго думал, но не решился на 16. g3 — единственный способ продолжить борьбу. После 16... ♗h2+ 17. ♗f2 ♗g4+ 18. ♗e1 ♘h3 белый король привязан к ладье, и ему не так просто уйти в безопасное место на ферзевый фланг.

16. ♗:h2+ ♗h8. После 16... ♘:h7 17. ♘:h7+ ♗:h7 18. ♗h1+ ♗g8 19. ♗h4 у белых микроскопический перевес в эндшпиле, и «Джуниор» сразу форсирует ничью. 17. ♗g3 ♗h2+ 18. ♗f2 ♗g4+ 19. ♗f3 ♗h2+. Ничья.

Итак, ушли в историю оба матча между шахматными королями Владимиром Крамником и Гарри Каспаровым, с одной стороны, и компьютерами «Фрицем» и «Джуниором», с другой. Оба завершились вничью. Ясно, что сильнейшие роботы уже на равных сражаются с сильнейшими людьми: компьютеры пока не все понимают, но зато никогда не зевают. Ясно и то, что короли при серьезной подготовке и, главное, удаче еще могут победить электронных гроссмейстеров. Очевидно, эта увлекательная дискуссия будет продолжена.

Е.Гук

Физики и математики на монетах мира



Великому естествоиспытателю ГАЛИЛЕО ГАЛИЛЕЮ (1564–1642) посвящены богато иллюстрированная итальянская банкнота достоинством в 2000 лир и алюминиевая монета Республики Сан-Марино достоинством в 5 лир. К 350-летию выхода в свет знаменитого «Диалога о двух главнейших системах мира – птолемеевой и коперниковой» в Италии была издана юбилейная серебряная монета достоинством в 500 лир.

(Подробнее о научной деятельности Галилея – внутри журнала.)

