

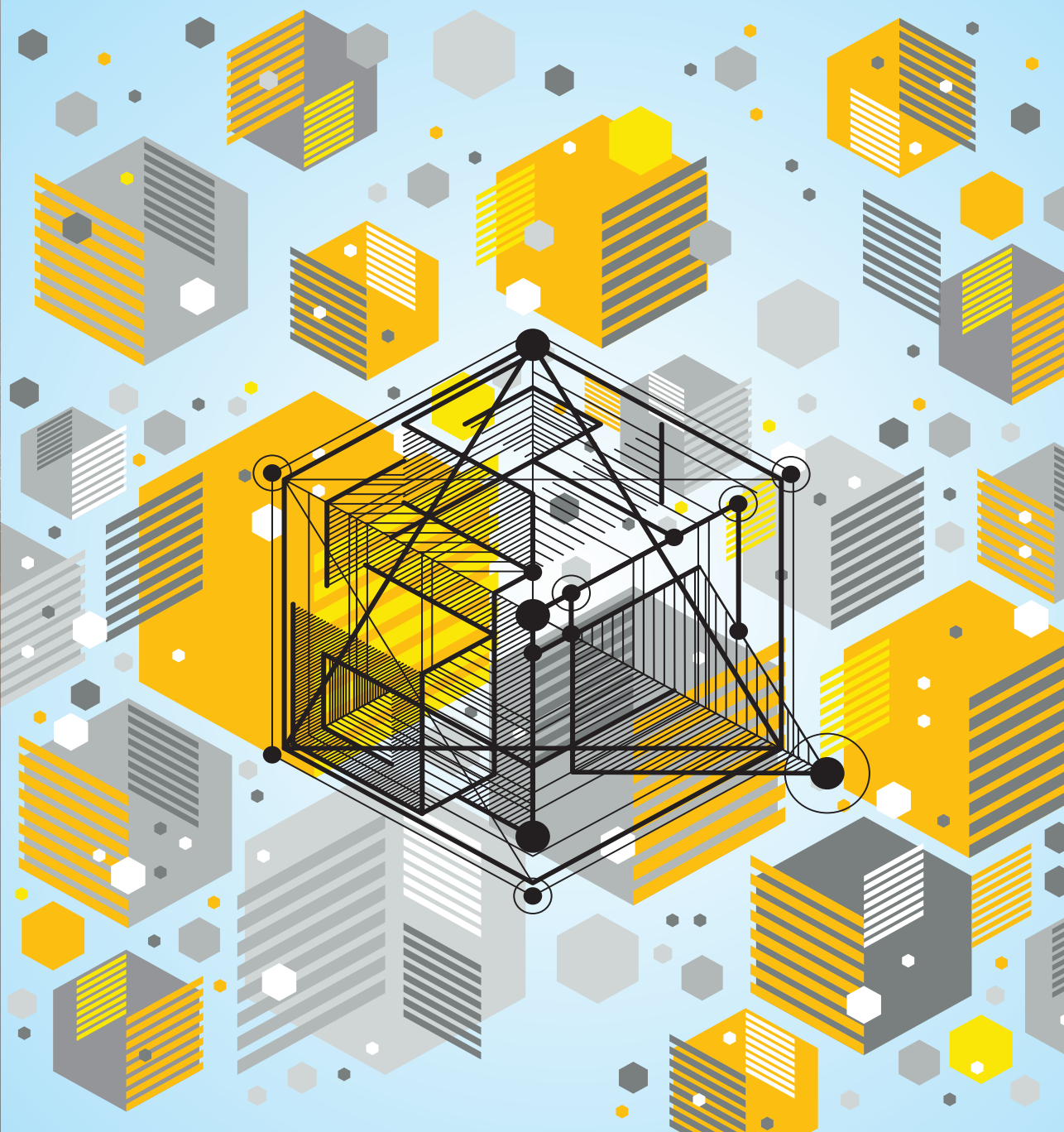
ЯНВАРЬ

ISSN 0130-2221

2022 · № 1

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ





**ЛУТЦЕМ** называется один из типов прыжка в фигурном катании: фигурист скользит на одном коньке вперед спиной, потом резко приседает и, оперевшись зубцом второго конька в лед, закручивается и выпрыгивает вверх. Но в головоломке, придуманной известным изобретателем Фолькером Латуссеком (Volker Latussek), деталям запрещено отрываться от поверхности своего «катка»: они могут только скользить по дну рамки и столу рядом с ней.

Деталей всего четыре: это пентамино, формой напоминающие буквы **L, U, T, Z**, – отсюда и название головоломки (хотя, быть может, ее автор любит фигурное катание). Сама рамка – это квадрат  $5 \times 5$ . Обратите внимание, что в бортике рамки есть «ворота» длиной 2,75, которые отстоят от одного из углов рамки на 0,25. Этот небольшой выступ и обуславливает сложность головоломки. В ней требуется вдвинуть все детали через «ворота» и расположить их внутри рамки так, чтобы ничего не торчало наружу. Три из четырех деталей в одном из измерений имеют ширину 2 и свободно проходят сквозь «ворота» – с ними проблем не должно возникнуть. А вот с буквой **T** все не так просто: она в обоих измерениях имеет ширину 3, так что придется покрутиться, чтобы придумать, как ее вдвинуть внутрь рамки.

Желаем успеха!

*Е.Епифанов*



## В номере:

### УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук  
Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАН  
Физический институт  
им. П.Н.Лебедева РАН

### ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР А.А.Гайфуллин

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,  
М.Н.Бондаров, А.А.Варламов,  
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,  
А.Н.Виленкин, Н.П.Долбинин,  
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,  
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,  
П.А.Кожевников (заместитель главного  
редактора), С.П.Коновалов, К.П.Кохась,  
А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев,  
В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский,  
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,  
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан  
(заместитель главного редактора)

### РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
А.А.Боровой, В.В.Козлов,  
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,  
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА

### ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР И.К.Кикоин

### ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,  
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,  
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,  
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

- 2 Аэродинамическая задача Ньютона и человек-невидимка. *А.Плахов, В.Протасов*  
13 Космический лифт. *М.Никитин, А.Тепляков*

### ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 18 Краткая история тепловых машин. *М.Ромашка*

### ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 26 Задачи M2682–M2685, Ф2689–Ф2692  
27 Решения задач M2666–M2673, Ф2673–Ф2679  
40 Задача о рассеянной старушке. *А.Заславский*

### КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Заблуждения в физике

### «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 42 Задачи

### КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 43 Задачи 17–20

### МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 44 Квадраты вокруг параллельников и полупараллельников. *Е.Морозов, Ф.Нилов*

### ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 51 Пленка воды, закон Кеплера и многое другое. *А.Стасенко*

### ОЛИМПИАДЫ

- 53 XLIII Турнир городов. Задачи осеннего тура  
55 18-я Международная естественно-научная олимпиада юниоров

- 59 Ответы, указания, решения  
«Квант» улыбается (12)  
Вниманию наших читателей (17,39)

### НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье Е.Морозова и Ф.Нилова*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*

# Аэродинамическая задача Ньютона и человек-невидимка

**А. ПЛАХОВ, В. ПРОТАСОВ**

– Но какая чертовщина может сделать человека невидимым?

– Никакой чертовщины. Это вполне логичный и довольно несложный процесс.

Г.Уэллс. Человек-невидимка

## 1. Задача Ньютона

Существуют ли невидимые вещи? Которые были бы сделаны из непрозрачного материала, но сквозь которые было бы видно без малейших искажений? Вопрос кажется противоречивым: как можно ви-

деть через непрозрачный материал? Оказывается, можно. И свойства материала тут ни при чем. Невидимости можно добиться, используя только геометрию поверхности. Но не будем забегать вперед. Мы начнем издалека – с аэродинамической задачи. А потом увидим, как она связана с невидимостью.

Аэродинамическая задача состоит в том, чтобы отыскать форму поверхности, которая испытывала бы наименьшее сопротивление при движении в определенной среде: в воздухе, воде и т.д. Какая форма самая обтекаемая? Взглянув на скоростные средства передвижения, мы сразу поймем, что ответ не очевиден. Ракета, самолет, спортсмен, даже «летающая тарелка» – все они имеют разные формы. Уже среди гоночных автомобилей нет единства: они тоже бывают самых различных форм. Может быть, нам подскажет природа? Увы, даже перелетные птицы, для которых хорошая аэродинамика – вопрос жизни, могут быть совсем разные. Что общего между уткой и журавлем? Еще есть рыбы. Но и они не дают однозначного ответа. В любом аквариуме – огромное разнообразие форм!

Впервые аэродинамическую задачу исследовал Исаак Ньютон в 1686 году. И занялся он ею не просто так, а по поводу. Ньютон заканчивал главный труд своей жизни – «Математические начала натуральной философии», где сформулировал законы классической механики, которыми человечество пользуется до сих пор. Во втором томе, который называется «О движении тел»,

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20220101>



Иллюстрация М.Кашина



Ньютон привел несколько примеров, как открытые им законы помогают на практике. Одна из задач звучала так.

**Аэродинамическая задача.** Среди всех поверхностей, в основании которых находится круг заданного радиуса и которые имеют заданную высоту, найти ту, которая испытывает наименьшее сопротивление при поступательном движении в однородной неподвижной среде.

Здесь надо сделать несколько пояснений. Поскольку маленькая поверхность будет иметь маленькое сопротивление, нужно сразу оговорить, среди поверхностей какого размера мы ищем самую обтекаемую. Поэтому мы считаем, что основание поверхности – круг радиуса  $R$ , а высота поверхности равна заданному числу  $h$ . Движение естественно считать поступательным: тело движется в одном направлении, не вращаясь. Теперь про среду, в которой идет движение. Она неподвижна и однородна, т.е. везде одинакова. Мы вслед за Ньютоном рассмотрим самый простой, в физическом смысле, случай: среда разрежена, т.е. ее молекулы находятся далеко друг от друга и потому не сталкиваются, и молекулы неподвижны, т.е. температура среды близка к абсолютному нулю. Например, при движении ракеты в верхних слоях атмосферы воздух достаточно разреженный и холодный. Наконец, мы предполагаем, что молекулы, сталкиваясь с поверхностью, отскакивают от нее по «закону бильярда»: угол падения равен углу отражения. Конечно, аэродинамическая задача ставится и в более сложных условиях, но Ньютон решил начать с такой постановки, и мы последуем его примеру.

## 2. Даем математическую формулировку

Сейчас мы получим формулу для силы сопротивления, которую испытывает поверхность при движении в однородной разреженной среде.

Определимся с условиями на поверхность. Естественно считать, что она выпуклая (ограничивает выпуклую фигуру).

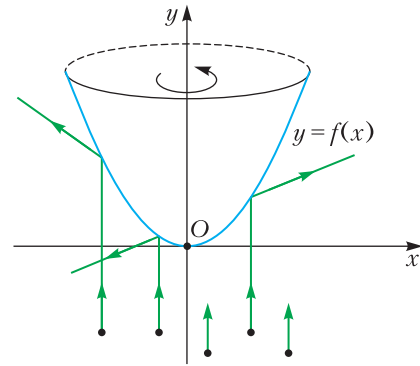


Рис. 1

Выдвинем, согласно Ньютону, еще одно условие: поверхность симметрична, т.е. является поверхностью вращения. Вполне естественно предположить, что наиболее обтекаемая поверхность должна быть симметричной. Следовательно, мы можем считать, что поверхность получена вращением графика некоторой функции  $y = f(x)$  относительно оси  $Oy$ . При расчете сопротивления удобнее представить, что сама поверхность неподвижна, а частички среды движутся на нее снизу вверх. Суммарная сила, с которой они действуют на поверхность, и будет силой сопротивления. Из условий на поверхность следует, что  $f(0) = 0$ ,  $f(R) = h$  (высота равна  $h$ , а основание – круг радиусом  $R$ ). Функция  $f$  – выпуклая и неубывающая (рис.1).

Возьмем на графике функции  $f$  две точки  $A$  и  $B$  (рис.2). Если они достаточно близки друг к другу, то участок графика между ними можно приближенно заменить отрезком  $AB$ . При вращении вокруг оси  $Oy$  этот отрезок замечает тонкое кольцо – боковую поверхность усеченного конуса с образующей  $AB$ . Мы вычислим силу сопротивления

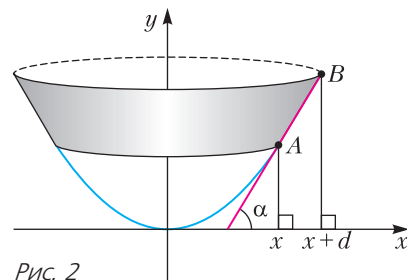


Рис. 2

этого кольца. Затем разобьем весь график функции  $f$  на маленькие отрезки; соответственно, вся поверхность вращения разрежется на колечки. Сложив силы сопротивления всех колечек, мы приближенно получим сопротивление поверхности.

Итак, рассмотрим отрезок  $AB$  между точками на графике функции. Точка  $A$  имеет абсциссу  $x$ , а точка  $B$  — абсциссу  $x + d$ . Таким образом, проекция  $AB$  на ось  $Ox$  равна  $d$ . Угол, который образует  $AB$  с осью абсцисс, обозначим через  $\alpha$  (см. рис. 2). Теперь введем несколько обозначений физических величин:  $v$  — скорость частиц,  $m$  — масса одной частицы,  $\rho$  — плотность среды. Мы вычислим силу, с которой одна частица воздействует на поверхность, а затем умножим на количество частиц. Поскольку общая сила сопротивления направлена вертикально, мы можем брать только вертикальную составляющую силы каждой частицы. Иными словами, вычислим проекцию силы на ось  $Oy$ . Возьмем маленький промежуток времени  $t$  и рассмотрим одну частицу, которая в течение этого промежутка ударила об отрезок  $AB$ . До соударения частица двигалась вертикально вверх со скоростью  $v$ . После соударения скорость также будет равна  $v$  (удар абсолютно упругий), а направление скорости изменится. Поскольку угол падения равен углу отражения, угол  $KLM$  на рисунке 3 равен  $2\alpha$ . Проекция на ось  $Oy$  начальной скорости частицы равна  $v$ , а проекция конечной скорости

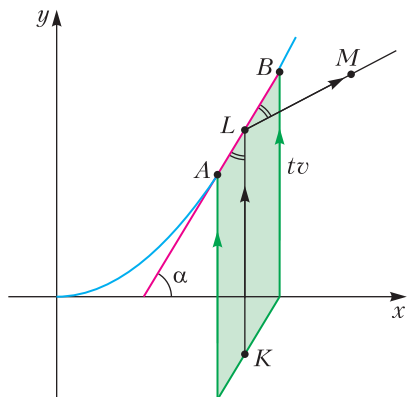


Рис. 3

равна  $v \cos(180^\circ - 2\alpha) = -v \cos 2\alpha$ . Следовательно, проекция изменения скорости — это  $(-v \cos 2\alpha) - v = -v(\cos 2\alpha + 1) = -2v \cos^2 \alpha$  (рис. 4). Поэтому проекция изменения импульса частицы равна  $-2mv \cos^2 \alpha$ . Соответственно, проекция импульса, переданного телу, равна  $2mv \cos^2 \alpha$ . Как мы знаем, изменение импульса равно величине внешней силы, умноженной на время взаимодействия. Обозначив через  $F_y$  проекцию силы, получим  $F_y t = 2mv \cos^2 \alpha$ . Итак, сила, оказываемая одной частицей на поверхность, равна  $F_y = 2 \frac{mv \cos^2 \alpha}{t}$ . Сколько частиц ударится за время  $t$  о кольцо, образованное вращением отрезка  $AB$ ? Ровно столько, сколько за это время долетит до этого кольца. Фигура, где может находиться частица, чтобы за время  $t$  долететь до отрезка  $AB$ , заштрихована на рисунке 3. Это — параллелограмм со стороной  $AB$  и вертикальной стороной  $tv$ . Его площадь равна стороне  $tv$ , умноженной на высоту  $d$ . А фигура, получающаяся вращением этого параллелограмма вокруг оси  $Oy$ , имеет объем, равный (приблизительно) произведению данной площади на длину окружности вращения, т.е. на  $2\pi x$ . Таким образом, объем фигуры, где находятся все частицы, столкнувшиеся с кольцом за время  $t$ , равен  $2\pi x d t v$ . А общая масса всех этих частиц равна объему, умноженному на плотность:  $2\pi x d t v \rho$ . Разделив ее на массу одной частицы, получим общее чис-

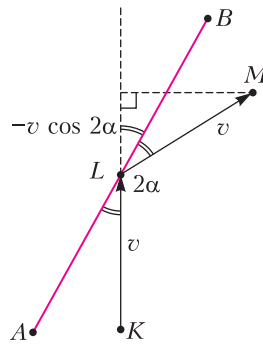


Рис. 4

лю  $N$  частиц, столкнувшихся с кольцом за время  $t$ :

$$N = \frac{2\pi x dt \rho v}{m}.$$

Теперь, умножив силу воздействия одной частицы  $F_y$  на количество частиц  $N$ , получаем силу сопротивления всего кольца:

$$F_{AB} = \frac{2\pi x dt \rho v}{m} \cdot \frac{2mv \cos^2 \alpha}{t} = 4\pi \rho v^2 x \cos^2 \alpha.$$

Таким образом, сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости, что уже само по себе интересно. Кроме того, из данной формулы можно сделать важнейший вывод:

*Сила сопротивления поверхности, полученной вращением отрезка, образующего угол  $\alpha$  с горизонталью, пропорциональна  $\cos^2 \alpha$ .*

Поскольку отрезок  $AB$  маленький, прямая  $AB$  близка к касательной к графику функции  $f$  в точке  $A$ . Разбив теперь график функции  $f$  на маленькие отрезки и сложив сопротивления колец по всем отрезкам, переходим к интегралу:

$$F = 4\pi \rho v^2 \int_0^R x \cos^2 \alpha(x) dx$$

(длина проекции  $d$  превратилась в  $dx$ ). Угол  $\alpha(x)$  образует касательная к графику функции  $f$  в точке  $x$  с осью абсцисс. Напомним, что  $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$ . Воспользовавшись известным тригонометрическим тождеством  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ , получаем

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + (f'(x))^2}$$

и приходим к окончательному виду силы сопротивления:

$$F = 4\pi \rho v^2 \int_0^R \frac{x}{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Остается найти функцию  $f(x)$ , для которой данный интеграл принимает наименьшее значение. Тогда вращение графика  $f$  определяет поверхность с наименьшей силой сопротивления  $F$ . В следующем разделе мы решим эту задачу и получим уравнение самой обтекаемой поверхности враще-

ния. Для этого нам неизбежно придется иметь дело с интегралами. Читателю, не знакомому с понятием интеграла, предложим два варианта: либо воспользоваться интуитивным определением интеграла (интеграл от положительной функции равен площади фигуры под ее графиком), либо

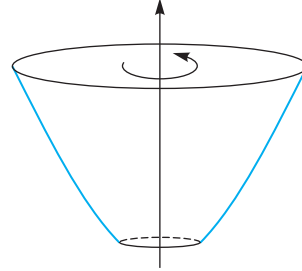


Рис. 5

полностью пропустить следующий раздел и прямо перейти к разделу 4, посмотрев ответ. Оптимальная поверхность изображена на рисунке 5.

### 3. Оптимальная выпуклая поверхность

Среди всех неубывающих функций  $f(x)$  на отрезке  $[0; R]$  нам нужно найти ту, для которой интеграл

$$\int_0^R \frac{x}{1 + (f'(x))^2} dx$$

наименьший, при условии, что высота поверхности равна  $h$ , т.е.  $f(R) - f(0) = h$ . Это условие мы перепишем в виде

$\int_0^R f'(x) dx = h$ . Заменив для краткости  $f' = u$ , мы приходим к такой задаче:

$$\begin{cases} \int_0^R \frac{x}{1 + u^2} dx \rightarrow \min, \\ \int_0^R u dx = h, \end{cases}$$

которая принадлежит циклу задач с ограничениями, когда нужно найти минимум одной величины (она обычно называется целевой функцией) при условиях на одну или несколько других величин (они называются ограничениями). В данном случае

у нас есть одно ограничение на функцию  $u(x)$  – это равенство  $\int_0^R u dx = h$ . Задачи с ограничениями решаются с помощью *метода множителей*, предложенного великим итало-французским математиком Жозефом Луи Лагранжем (1736–1813). Он открыл этот метод, когда ему было всего 19 лет! Один из величайших математиков в истории Леонард Эйлер (1707–1783) с восторгом отзывался об открытии молодого ученого, отмечая, что новый метод позволяет единообразно решать многие задачи, для каждой из которых ранее приходилось придумывать отдельный подход.

Метод Лагранжа состоит в том, чтобы домножить ограничения на некоторые числа и прибавить к целевой функции, после чего искать минимум суммы. В нашем случае одно ограничение, поэтому и множитель будет один, назовем его  $p$ . Получаем новую задачу уже без ограничений: среди всех неотрицательных функций  $u(x)$  найти такую, для которой

$$\int_0^R \left( \frac{x}{1+u^2} + pu \right) dx \rightarrow \min.$$

Число  $p$  выступает в роли параметра, который еще предстоит найти. Известно только, что  $p \geq 0$ , иначе, умножив функцию  $u(x)$  на очень большое положительное число, получим, что интеграл будет стремиться к  $-\infty$  и наименьшего значения у него не будет.

Метод множителей имеет простое объяснение. Мы прибавляем к целевой функции константу  $\int_0^R p u dx = ph$ , при этом ответ в задаче (т.е. функция  $u(x)$ , на которой достигается минимум) не изменится. Но это – всего лишь объяснение, а не доказательство. Если попытаться доказать строго, сразу возникнут сложные вопросы. Например, почему мы можем решать новую задачу уже без ограничений? Почему минимум суммы будет достигаться на такой функции  $u$ , для которой  $\int_0^R p u dx = h$ ? Сам Лагранж свой метод никак не обосновал.

В то время это не считалось обязательным. Сейчас, конечно, у него есть доказательство, и не одно. Правда, все они довольно сложные. Это не случайно. Мощный математический инструмент, который помогает решать весьма сложные задачи, вряд ли сам может быть просто обоснован.

Поэтому метод множителей мы доказывать не будем. Это и не понадобится. Мы получим с его помощью функцию  $f(x)$ , а потом строго докажем, что именно она дает решение задачи. Сделаем так: при каждом  $x$  мы найдем минимум функции  $L(u) = \frac{x}{1+u^2} + pu$  (обозначение  $L$ , конечно же, в честь Лагранжа). Обозначим через  $u(x)$  точку минимума этой функции. А потом найдем функцию  $f$ , для которой  $f'(x) = u(x)$  при каждом  $x \in [0; R]$ .

**Теорема 1.** *Если функция  $f$  такова, что при любом  $x$  значение  $u = f'(x)$  является точкой минимума функции  $L(u)$  на множестве  $[0; +\infty)$ , то  $f$  является решением основной задачи.*

**Доказательство.** Так как число  $f'(x)$  является точкой минимума функции  $L(u)$ , то для любой функции  $g(x)$  величина  $L(u)$  при  $u = g'(x)$  будет не меньше, чем при  $u = f'(x)$ . Следовательно,

$$\int_0^R \left( \frac{x}{1+(g')^2} + pg' \right) dx \geq \int_0^R \left( \frac{x}{1+(f')^2} + pf' \right) dx.$$

Но если функция  $g'$ , как и  $f'$ , удовлетворяет условию, что ее интеграл по отрезку  $[0; R]$  равен  $h$ , то  $\int_0^R pg' dx = \int_0^R pf' dx = ph$ . На это число можно сократить обе части неравенства и получить

$$\int_0^R \frac{x}{1+(g')^2} dx \geq \int_0^R \frac{x}{1+(f')^2} dx.$$

Значит, сопротивление фигуры, полученной вращением графика функции  $f$ , не превосходит сопротивления фигуры, полученной вращением  $g$ , т.е.  $f$  – решение основной задачи.



Осталось воспользоваться теоремой 1 и найти функцию  $f$ . Минимум величины  $L(u)$  на промежутке  $[0; +\infty)$  мы найдем с помощью производной:

$$L'(u) = -\frac{2xu}{(1+u^2)^2} + p$$

(напомним, что число  $p$  пока неизвестно, знаем только, что  $p \geq 0$ ). Заметим, что величина  $L(u)$  стремится к  $+\infty$  (т.е. становится очень большой) при  $u \rightarrow +\infty$ . Следовательно, функция  $L$  имеет минимум либо в точке  $u$ , где  $L'(u) = 0$ , либо на конце интервала, т.е. при  $u = 0$ . Чтобы разобраться, посмотрим на график функции  $\frac{2u}{(1+u^2)^2}$  (рис. 6). Эта функция имеет

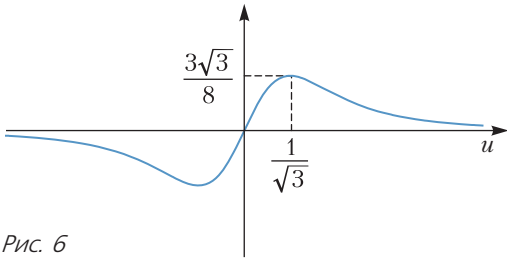


Рис. 6

максимум  $3\sqrt{3}/8 \approx 0,65$  в точке  $u = 1/\sqrt{3}$ , что можно доказать строго, вновь с помощью производной.

Если минимум функции  $L$  достигается в точке  $u \neq 0$ , то выполнены два условия:  $L'(u) = 0$  и  $L(u) \leq L(0)$ . Подставив выражения для  $L$  и ее производной, перепишем эти условия так:

$$\frac{p}{x} = \frac{2u}{(1+u^2)^2} \text{ и } \frac{1}{1+u^2} + \frac{p}{x}u \leq 1.$$

Отсюда получим

$$\frac{1}{1+u^2} + \frac{2u^2}{(1+u^2)^2} \leq 1,$$

что после всех упрощений приведет нас к  $u^2 \geq 1$ , а значит,  $u \geq 1$ . Итак, при любом  $x$  величина  $u$  может быть найдена из уравнения

$$x = \frac{p}{2} \left( u^3 + 2u + \frac{1}{u} \right), u \geq 1.$$

Конечно, она «может быть найдена» только теоретически, мы не знаем, как данное уравнение решать. Но это и не потребуется. Главное, что функция в правой части уравнения является возрастающей по переменной  $u$ , а значит, ее минимум находится в точке  $u = 1$  и равен, как легко убедиться,  $2p$ . Следовательно, решение уравнения единственно при любом  $x \in [2p; +\infty)$ , а значит, уравнение устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками  $x \in [2p; +\infty)$  и  $u \in [1; +\infty)$ . Для каждого  $x > 2p$  минимум функции  $L(u)$  достигается при  $u > 1$ , для каждого  $x \in [0; 2p)$  минимум достигается в  $u = 0$ , а при  $x = 2p$  минимум достигается в двух точках:  $u = 0$  и  $u = 1$ . Мы получили такое описание величины  $u(x)$ :

При  $x \leq 2p$  имеем  $u(x) = 0$ , а при  $x > 2p$ , значение  $u(x)$  ищется из уравнения  $L'(u) = 0$ : оно является тем корнем данного уравнения, который больше 1.

Поскольку  $u = f'(x)$  и при этом  $f(0) = 0$ , у нас получается следующий вид оптимальной функции  $f$ :

На отрезке  $[0; 2p]$  функция  $f$  равна нулю, а на отрезке  $[2p; R]$  ее производная является корнем уравнения  $L'(u) = 0$ , большим 1.

Заметим, что в «точке переключения»  $u = 2p$  производная функция  $f$  разрывна: слева она равна 0, а справа равна 1. Поэтому график функции  $f$  будет иметь угол в  $45^\circ$  в точке  $(2p; 0)$ .

Нам осталось только найти  $u$  из уравнения  $L'(u) = 0$ , т.е.  $\frac{2u}{(1+u^2)^2} = \frac{p}{x}$ . Здесь, однако, нас ждет горькое разочарование: решить это уравнение не получится. Оно имеет четвертую степень и не имеет целых корней. Есть явная формула для уравнений четвертой степени, изобретенная еще в 1540 году Людовико Феррари, но она слишком громоздка, ее и в университетах не изучают. Поэтому мы сделаем по-другому. Мы оставим  $u$  в качестве параметра и с его помощью получим график функции  $f(x)$ .

Это значит, что мы выразим через  $u$  обе координаты точки  $(x; f(x))$ . Первая координата выражается напрямую из уравнения:

$$x = \frac{p}{2} \left( u^3 + 2u + \frac{1}{u} \right).$$

Примем за  $y = f(x)$ . Воспользовавшись «цепным» правилом вычисления производной от композиции функций, мы получим  $f'(x) = f'(u)u'(x) = \frac{f'(u)}{x'(u)}$ . С другой стороны,  $f'(x) = u$ , поэтому  $u = \frac{f'(u)}{x'(u)}$ , или  $f'(u) = ux'(u)$ . Формулу для  $x(u)$  мы уже знаем, теперь надо найти от нее производную:

$$x'(u) = \frac{p}{2} \left( 3u^2 + 2 - \frac{1}{u^2} \right).$$

Домножив на  $u$ , получим

$$f'(u) = ux'(u) = \frac{p}{2} \left( 3u^3 + 2u - \frac{1}{u} \right).$$

Чтобы вычислить функцию  $f(u)$ , берем первообразную:

$$f(u) = \frac{p}{2} \left( \frac{3u^4}{4} + u^2 - \ln u + C \right),$$

где  $C$  — неизвестная константа, всегда возникающая при вычислении первообразных. Вспомним сначала, что  $u \geq 1$ , поскольку это число является тем корнем уравнения  $L'(u) = 0$ , который больше 1. При  $u = 1$  происходит переключение функции  $f$  с тождественного нуля, значит,  $f(1) = 0$ . Подставив  $u = 1$  в последнюю формулу для  $f(u)$ , получаем  $C = -\frac{7}{4}$ . Таким образом, мы нашли уравнение для графика  $y = f(x)$ :

$$\begin{cases} x = \frac{p}{2} \left( u^3 + 2u + \frac{1}{u} \right), \\ y = \frac{p}{2} \left( \frac{3u^4}{4} + u^2 - \ln u - \frac{7}{4} \right). \end{cases}$$

А чему же равен параметр  $p$ ? Его мы найдем из условия  $f(R) = h$ . Если увели-

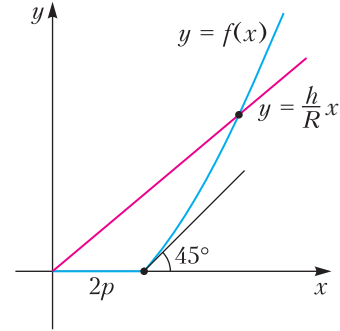


Рис. 7

чить  $p$  в несколько раз, то во столько же раз увеличатся  $x$  и  $y$ . Поэтому с графиком  $y = f'(x)$  произойдет гомотетия с тем же коэффициентом. Итак, изменяя  $p$ , мы гомотетично меняем график. Параметр  $p$  подбирается так, чтобы графики  $y = f(x)$  и  $y = \frac{h}{R}x$  (рис.7) пересекались в точке  $(R;h)$ .

#### 4. Обсуждаем решение Ньютона

Вывод Ньютона довольно неожиданный. Самая обтекаемая поверхность должна иметь тупой конец! Какие бы ни были начальные данные  $R$  и  $h$ , поверхность наименьшего сопротивления будет содержать плоский участок, причем он тем больше, чем меньше отношение  $h/R$ . Напомним, что для построения поверхности надо взять график оптимальной функции  $f$  от нуля до точки пересечения с прямой  $y = \frac{h}{R}x$  и закрутить его вокруг оси  $Oy$ .

Если высота  $h$  сильно больше радиуса основания  $R$ , то поверхность будет действительно похожа на верхушку ракеты, но с маленьким «затуплением» в вершине. Если же высота мала, то плоская часть будет большой, поверхность станет похожа на перевернутую сковородку.

Неужели это и есть самая обтекаемая поверхность? Вы когда-нибудь видели ракеты с плоским концом? Причина столь странного ответа кроется в нашем предположении, что среда разрежена, т.е. расстояния между молекулами гораздо больше их размеров. В высоких слоях атмосферы, где воздух холодный и сильно разрежен,

поверхность Ньютона действительно близка к оптимальной. Тем самым, такая форма пригодна для космических кораблей и ракет. Сам Ньютон писал: «Я считаю, что это замечание может быть не бесполезно при построении судов». В наше время к слову «судов» мы можем добавить: «космических». Ньютон, в некотором смысле, опередил свое время на 300 лет.

В следующем столетии после Ньютона теория экстремума оформилась в отдельную науку под названием «вариационное исчисление», а в XX столетии – в «оптимальное управление». Решение Ньютона стало главным примером и образцом, вошедшим во все учебники. И вдруг...

### 5. Прошло 300 лет...

В 1993 году математики Джузеппе Буттаццо (университет Пизы, Италия) и Бернард Каволь (университет Кельна, Германия) задались вопросом: существуют ли поверхности, сопротивление которых меньше, чем у поверхности Ньютона? При тех же условиях: высота равна  $h$  и в основании круг радиуса  $R$ . Вскоре Паоло Гуасони, студент-дипломник Дж.Буттаццо, такую поверхность построил!

Как такое возможно? Ведь мы только что доказали, что наименьшим сопротивлением обладает поверхность Ньютона. Значит, Ньютон ошибся? И да, и нет. В его решении все верно, и в наших рассуждениях тоже. Ошибка – в самом первом предположении, которое мы сделали. Помните? Мы предположили, что поверхность наименьшего сопротивления должна быть симметрична и что решение надо искать среди поверхностей вращения (рис. 8,а).

Постойте, а разве может быть по-другому? Ведь мы привыкли, что все оптимальные фигуры должны быть симметричны. Среди всех замкнутых линий данной длины наибольшую площадь ограничивает окружность. Среди всех поверхностей данной площади наибольший объем ограничивает

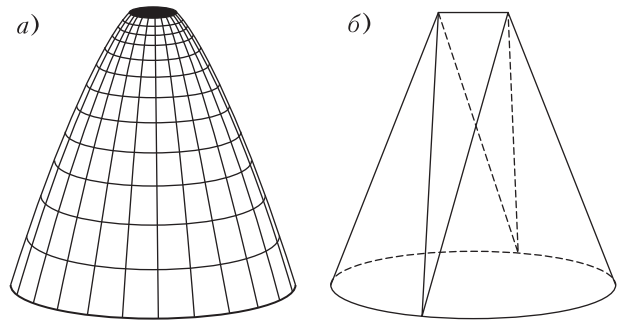


Рис. 8

сфера и т.д. Все эти фигуры симметричны. Но оказывается, что в данном случае интуиция математиков подвела. Поверхность, построенная П.Гуасони, изображена на рисунке 8,б. По форме она похожа на «отвертку» и состоит из двух плоских треугольников и двух конических поверхностей, а сверху заканчивается горизонтальным отрезком. При достаточно больших значениях высоты  $h$  сопротивление отвертки меньше, чем поверхности Ньютона. Проверка этого факта довольно сложна и поэтому выходит за рамки нашего повествования.

Впоследствии были обнаружены и другие поверхности малого сопротивления. Давайте потихоньку уменьшать высоту  $h$ . Оказывается, в какой-то момент отвертка перестанет давать выигрыш в сопротивлении. Тогда мы заменим ее на поверхность, образованную равносторонним треугольником сверху и совокупностью трех треугольников и трех конических поверхностей сбоку (рис. 9). Отрезок сверху поверхности заменился на равносторонний треугольник! И поверхность снова приобрела меньшее сопротивление, чем поверхность Ньютона. Уменьшая далее

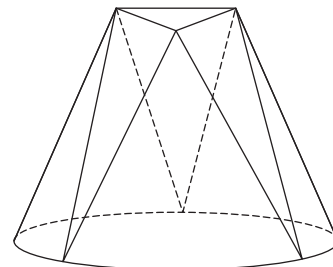


Рис. 9

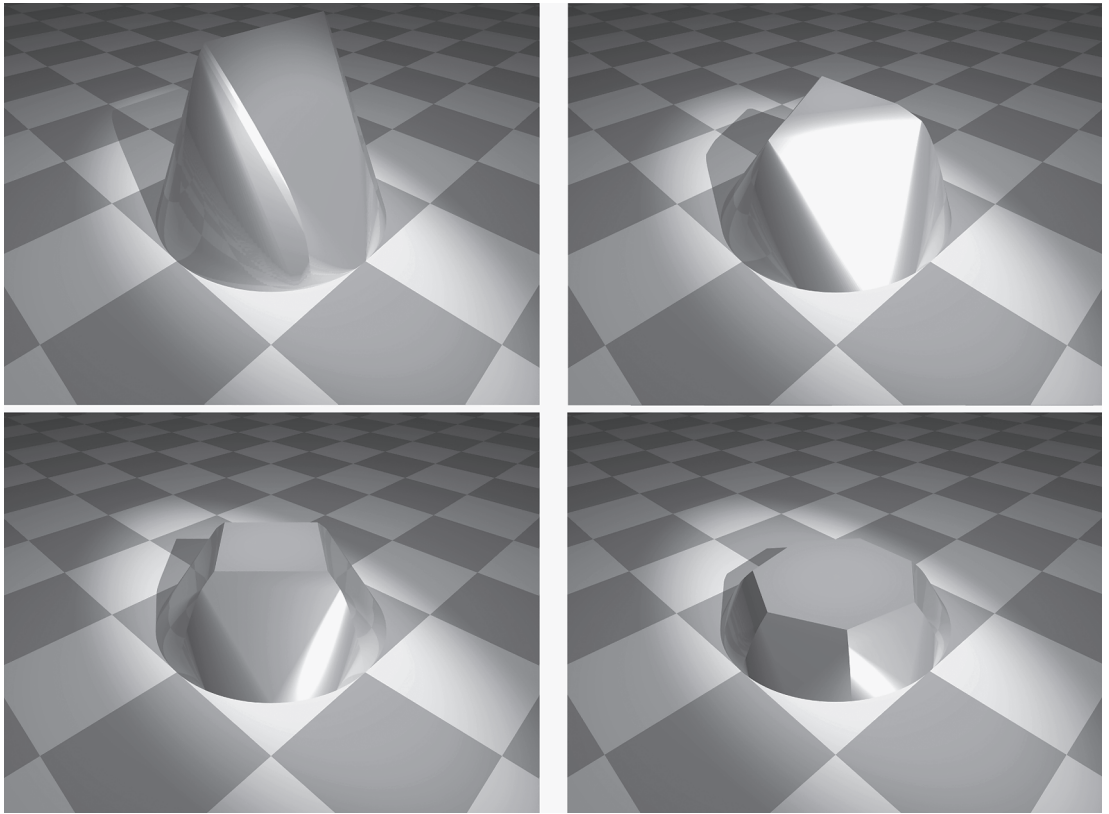


Рис. 10

высоту  $h$ , через какое-то время мы будем вынуждены заменить и эту поверхность новой, и равносторонний треугольник заменится на квадрат, потом на правильный пятиугольник, шестиугольник и т.д. Так у нас возникает семейство поверхностей (рис. 10), у которых сверху правильный многоугольник; чем меньше высота, тем больше число его сторон. Будут ли эти поверхности иметь наименьшее сопротивление (при заданных высоте и радиусе основания)? Да, но только среди поверхностей, состоящих из отрезков, которые соединяют основание с верхней частью. И все они имеют меньшее сопротивление, чем поверхность Ньютона!

Но, может быть, существуют выпуклые поверхности с еще меньшим сопротивлением? Численный счет показывает, что да, существуют. Среди них есть оптимальные – с наименьшим (в классе выпуклых поверхностей) сопротивлением. Мы пока

не можем их построить, но предполагаем кое-какие их свойства. В частности, они похожи на те поверхности, которые мы построили выше, и также имеют на вершине правильные многоугольники. Но оптимальные поверхности – более «гладкие». Чтобы придать понятию гладкости строгий смысл, нам придется объяснить некоторые термины.

Гладкость означает, что поверхность не имеет заострений и ребер, т.е. в каждой точке можно провести единственную касательную плоскость. Вблизи точки касания данная плоскость хорошо приближает поверхность. При этом если непрерывно перемещать по поверхности точку касания, то плоскость тоже меняется непрерывно. Подведем итог: поверхность, которая в каждой точке имеет единственную касательную плоскость, непрерывно зависящую от точки, называется «поверхностью класса  $C^1$ ». Но нам понадобится



даже более сильное свойство: гладкость класса  $C^2$ , которая означает, что в каждой точке можно провести не только касательную плоскость, но и касательный эллипсоид, который еще лучше приближает поверхность. И еще одно определение нам понадобится. «Кусочно развертывающаяся поверхность» означает, что все ее куски между линиями изломов можно развернуть на плоскость без складок и наложений. Такие куски можно представить как непрерывную совокупность отрезков. К примеру, поверхность многогранника, конечно же, кусочно развертывающаяся. Тем же свойством обладает боковая поверхность цилиндра, причем не только с круглым, но и с любым основанием. Коническая поверхность (с исключенной вершиной) также кусочно развертывающаяся, а вот сфера – нет. Никакой кусочек сферы нельзя развернуть на плоскость без разрывов, складок или растяжений.

Возьмем к поверхностям наименьшего сопротивления. Большинство исследователей верят, что условия гладкости для них выполняются, а значит, они являются кусочно-развертывающимися. Но доказательств этому до сих пор нет. Компьютерные модели, построенные в 2006 году французскими математиками Т.Лашан-Робером и Э.Уде и затем уточненные в 2014 году немецким математиком Г.Вахсмутом, скорее подтверждают эту гипотезу. Похоже, что все оптимальные поверхности действительно кусочно развертывающиеся.

### 6. Отказ от выпуклости. Ребристые поверхности

Итак, наиболее обтекаемые поверхности – не поверхности вращения! Парадоксально, но факт: отказ от симметричности может улучшать аэродинамические свойства. А если отказаться не только от симметричности, но и еще, скажем, от выпуклости?

Возьмем поверхность Ньютона и сделаем в ее плоской части углубление в виде

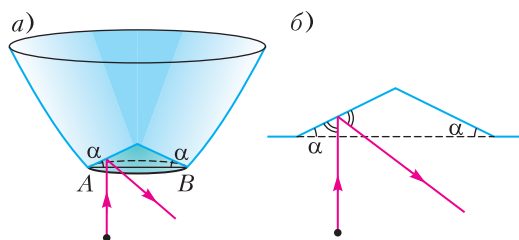


Рис. 11

конуса (рис. 11,а). Что произойдет с сопротивлением? Если угол при основании конуса равен  $\alpha$ , то сопротивление плоской части умножится на  $\cos^2 \alpha$ . Значит, сопротивление в самом деле уменьшится! Обозначим через  $F_{пл}$  сопротивление плоского участка поверхности Ньютона, а  $F_{кр}$  – сопротивление остальной («криволинейной») части. Вся поверхность, таким образом, имеет сопротивление  $F_{кр} + F_{пл}$ . А новая невыпуклая поверхность имеет сопротивление  $F_{кр} + F_{пл} \cos^2 \alpha$ . Если увеличивать угол  $\alpha$ , сопротивление будет уменьшаться. Когда угол близок к  $90^\circ$ , сопротивление плоской части практически исчезнет. Но так не получится: конус станет слишком высоким, выше самой поверхности. Тогда можно пойти на хитрость: сделать в плоской части не одно углубление, а много углублений в виде колец. Это значит, сделать из отрезка  $AB$  ломаную, состоящую из одинаковых маленьких равнобедренных «треугольников» с углами при основании  $\alpha$ , и закрутить вокруг оси  $Oy$ . Получится рифленая поверхность, напоминающая дно сковородки (рис. 12). Сопротивление каждого кольца, которое получается вращением одного треугольника, умножится на  $\cos^2 \alpha$ , итоговое сопротивление снова примет значение  $F_{кр} + F_{пл} \cos^2 \alpha$ . Теперь, уменьшая размер треугольников (делая мелкое рифление), можно довести угол  $\alpha$  сколь угодно близко к  $90^\circ$ . Сопротивление плоского участка при

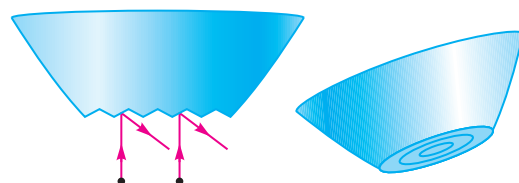


Рис. 12

этом должно стремиться к нулю, но в реальности этого не произойдет. Почему? Потому что некоторые частицы, влетающие в треугольник, будут ударяться о его поверхность два и более раз, а значит, наша формула сопротивления будет неверна. Какой максимальный угол  $\alpha$  можно взять, чтобы этого не происходило, т.е., чтобы у каждой частицы было только одно соударение? При таком угле частица, ударившись о боковую сторону треугольника, вылетит параллельно его второй стороне. Посчитав углы на рисунке 11,б, получаем  $90^\circ - \alpha = 2\alpha$ , откуда  $\alpha = 30^\circ$ .

Итак, покрыв плоский участок узкими круглыми бороздками, образующими угол с поверхностью  $\alpha = 30^\circ$ , мы умножаем его сопротивление на  $\cos^2 30^\circ = \frac{3}{4}$ , т.е. уменьшаем его на 25%. Естественно, бороздками можно покрыть не только плоский участок, но и всю оставшуюся поверхность, и ее сопротивление также уменьшится. Мы

приходим ко второму выводу, не менее парадоксальному:

*Сопротивление гладкой поверхности можно уменьшить нанесением на нее рифления и мелких бороздок.*

### Упражнения

**1.** Дан равнобедренный прямоугольный треугольник. Частица влетает в него, пересекая основание, и после двух соударений с боковыми сторонами вылетает из треугольника. Докажите, что она вылетает под тем же углом, под которым влетела, но в противоположном направлении. Где в реальной жизни используется это свойство?

*Указание.* Оно применяется на каждом автомобиле и велосипеде.

**2.** Дан равнобедренный треугольник с углом при вершине  $30^\circ$ . Частица влетает в него, пересекая основание под прямым углом. Сколько соударений с боковыми сторонами она сделает, прежде, чем вылететь? Под каким углом она вылетит?

**3.** Тот же вопрос для треугольника с углом при вершине  $45^\circ$ .

*(Продолжение следует)*

## « К В А Н Т » У Л Ы Б А Е Т С Я

\*\*\*

Задачи будут интересные. Одну из них сейчас решает вся кафедра. Если решит, мы ее включим в экзаменационную работу.

\*\*\*

Вы увидите, что вы родились с мерой Жордана, и первым словом, что вы сказали, было слово «мама», а вторым – «мера Жордана».

\*\*\*

Эти вычисления я проведу в уме, так что вам несложно будет их проверить.

\*\*\*

Нам заданы три параметра: объемище, объем и объемчик.

\*\*\*

Дайте-ка я покрупнее нарисую бесконечно малые треугольники.

\*\*\*

Полярный медведь – это прямоугольный медведь после преобразования координат.

\*\*\*

Легко убедиться, что эта функция бесконечно дифференцируема. Сейчас мы продифференцируем один раз, а дома вы закончите...

\*\*\*

Математика – это вам не физика, в ней нельзя химичить...

\*\*\*

Черные дыры во вселенной образовались там, где Бог поделил на ноль.

\*\*\*

Сколько уже раз я говорил вам, что не бывает большей и меньшей половины, и все равно большая половина из вас этого не усвоила!

\*\*\*

Все люди в мире делятся на три типа: те, кто умеет считать, и те, кто не умеет.

*Из книги «Математики тоже шутят»*

# Космический лифт

М. НИКИТИН, А. ТЕПЛЯКОВ

**КОСМИЧЕСКИЙ ЛИФТ** – ЭТО фантастическое сооружение, предназначенное для подъема грузов на лифте на геостационарную орбиту, которая находится над экватором на высоте приблизительно 36000 км. Конструктивно космический лифт состоит из орбитальной геостационарной станции, троса, соединяющего эту станцию с «причалом» на Земле, и противовеса, располагающегося выше станции (рис.1). Устойчивость подобной конструкции в околоземном пространстве достигается за счет действующей на трос и противовес центробежной силы инерции, уравновешивающей действие силы тяжести на эти элементы. Подчеркнем, что для геостационарной станции равновесие этих двух сил достигается автоматически.

Впервые идею о космическом лифте высказал в 1895 году Константин Эдуардович Циолковский. Он же первым указал на главную трудность создания подобных устройств – отсутствие материалов с прочностью, необходимой для предотвращения разрыва троса. По этой причине долгие годы идею о космическом лифте не рассматривали всерьез, пока спустя 65 лет публикации советского инженера Юрия Арцутанова не вернули интерес специалистов по космической технике к идее Циолковского. Возрождению интереса содействовали также достижения науки в создании новых материалов с прочностью на разрыв, на порядки превосходящие сталь. К таким материалам, в частности, относятся углеродные трубки, открытые примерно 30 лет назад. Есть

надежда, что тросы, сплетенные из нанотрубок, смогут выдержать предельные напряжения, характерные для тросов реальных космических лифтов. Удастся ли это реализовать, покажет время. Пока же полезно обсудить задачу равновесия конструкции космического лифта, так как она поможет оценить титанические трудности, стоящие перед разработчиками реальных космических лифтов.

Рассмотрим однородный трос космического лифта, закрепленного на геостационарной орбите. На этой орбите период обращения спутника равен суткам и сила тяжести равна по величине центробежной силе инерции. Радиус орбиты  $r$  определяется на основе второго закона Ньютона:

$$\frac{mv^2}{r_{\text{гс}}} = m\omega^2 r_{\text{гс}} = G \frac{mM}{r_{\text{гс}}^2} = mg_0 \left( \frac{R}{r_{\text{гс}}} \right)^2,$$

где  $g_0$  – ускорение свободного падения на поверхности Земли,  $M$  – масса Земли,  $R$  –

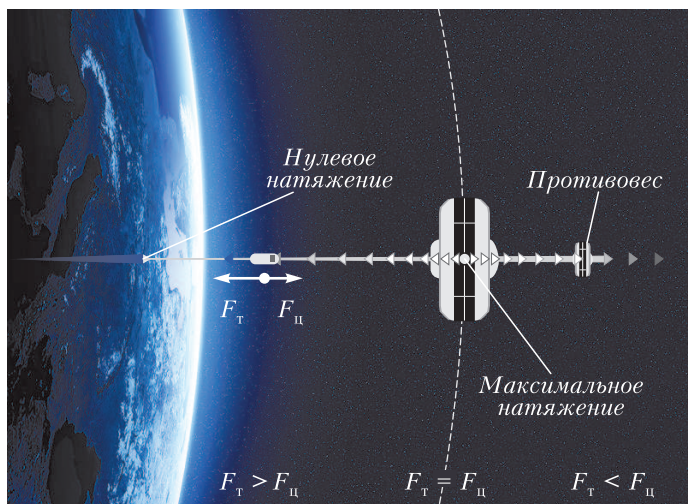


Рис. 1. Основные элементы конструкции космического лифта и соотношение силы тяжести и центробежной силы инерции в разных точках лифта

ее радиус,  $\omega = 2\pi/T$ ,  $T$  – период обращения. Отсюда легко находим выражение для радиуса геостационарной орбиты:

$$r_{\text{гс}} = \sqrt[3]{\frac{g_0 R^2}{\omega^2}}.$$

На произвольный малый элемент троса  $m_i$  действуют две внешние силы: сила тяжести и центробежная сила инерции, возникающая из-за вращательного движения троса относительно Земли. Модуль силы тяжести равен  $F_{\text{ит}} = G \frac{m_i M}{r_i^2} = m_i g_0 \left(\frac{R}{r_i}\right)^2$ , модуль центробежной силы инерции равен  $F_{\text{иц}} = m_i \omega^2 r_i$ , где  $r_i$  – расстояние до массы  $m_i$ . С учетом этих соотношений результирующая внешняя сила, действующая на трос, будет равна

$$F = \sum_{i=1}^N \left( m_i \omega^2 r_i - m_i g_0 \left(\frac{R}{r_i}\right)^2 \right).$$

Здесь суммирование проводится по всем элементарным массам. Выберем эти массы одинаковыми и равными  $m_i = \rho S (r_{\text{гс}} - R)/N$ , где  $\rho$  – линейная плотность материала троса, а  $S$  – его сечение. В результате получим

$$F = \rho S \left( \omega^2 (r_{\text{гс}} - R) \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i - g_0 R^2 (r_{\text{гс}} - R) \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{r_i^2} \right),$$

где  $r_i = R + i\Delta r$  и  $\Delta r = (r_{\text{гс}} - R)/N$ . С хорошим приближением обе суммы в последнем выражении для  $F$  можно представить следующим образом:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i = \frac{R + r_{\text{гс}}}{2} \text{ и } \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{r_i^2} = \frac{1}{R r_{\text{гс}}},$$

где учтено, что  $r_i$  меняется от  $R$  до  $r_{\text{гс}}$ .

Окончательно для силы натяжения троса в точке крепления на геостационарной орбите получаем

$$F = \rho S \left( \frac{\omega^2 (r_{\text{гс}}^2 - R^2)}{2} - \frac{g_0 R (r_{\text{гс}} - R)}{r_{\text{гс}}} \right).$$

Воспользуемся тем, что в этой точке  $\omega^2 = g_0 R^2 / r_{\text{гс}}^3$ , и перепишем формулу для модуля силы натяжения в более удобном для расчетов виде:

$$F = \rho g_0 R^2 S \left( \frac{R^2}{2r_{\text{гс}}^3} + \frac{1}{R} - \frac{3}{2r_{\text{гс}}} \right).$$

Для тех, кто знает правила интегрирования, заметим, что строгий вывод выражения для силы  $F$  можно легко получить с помощью замены  $m_i$  на  $dm = \rho S dr$  и суммирования на интегрирование по переменной  $r$  в пределах от  $R$  до  $r_{\text{гс}}$ .

Прочностные свойства троса характеризует напряжение  $p_{\text{max}} = F/S$ , т.е. сила натяжения, отнесенная к единице площади сечения. Для троса, закрепленного на геостационарной орбите,

$$p_{\text{max}} = \rho g_0 R^2 \left( \frac{R^2}{2r_{\text{гс}}^3} + \frac{1}{R} - \frac{3}{2r_{\text{гс}}} \right).$$

Как видно, напряжение троса линейно зависит от плотности материала: чем больше плотность, тем больше натяжение. Это означает, что для изготовления космического троса предпочтительны высокопрочные материалы с плотностью, значительно меньшей, чем у стали.

Данные таблицы, где приведены предельные и расчетные напряжения для разных материалов, хорошо подтверждают этот вывод. Однако даже беглый взгляд на таблицу говорит о том, что в настоящее время нет конструкционных материалов, которые могли бы послужить основой для изготовления троса космического лифта. Ближе всех по требуемому предельному напряжению оказываются углеродные нанотрубки. Этот структурный материал стал

Материал	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Расчетное напряжение, ГПа	Предельное напряжение, ГПа
Сталь	7800	480	1,4
Кевлар	1440	90	2,6–4,1
Паутина	1000	60	2,5
Кварцевое волокно	2700	160	20,0
Углеродные нанотрубки	1600	100	30,0–50,0



известен сравнительно недавно. Открыт он был в 1991 году, хотя существуют упоминания и о более раннем открытии тонких трубок из углерода. Как бы там ни было на самом деле, сейчас в распоряжении ученых и технологов имеется материал, который обладает предельным напряжением, всего лишь в два раза уступающим расчетному напряжению, требуемому для создания троса космического лифта. Это обнадеживает и побуждает специалистов по углеродным нанотрубкам искать модификации нанотрубок с нужными для космического лифта свойствами. Параллельно идут работы по созданию других структурных наноматериалов с низкой плотностью и рекордно высокой предельной прочностью. Есть надежда, что поиск новых материалов, пригодных для изготовления троса космического лифта, завершится успешно и специалисты получат в руки материал, способный воплотить в жизнь фантастическую идею К.Э.Циолковского.

Пришло время ответить на вопрос, почему желателен космический лифт. Причин несколько. Прежде всего укажем на экологическую чистоту доставки грузов в космос с помощью космического лифта. При такой доставке отпадает необходимость использования ракетных двигателей, загрязняющих атмосферу продуктами сгорания ракетного топлива. А масштаб загрязнения со временем будет только нарастать, так как будущая колонизация ближнего и дальнего космоса потребует использования сотен и тысяч мощных ракетоносителей. Это, несомненно, отрицательно отразится на состоянии атмосферы и ускорит ее разогревание за счет парникового эффекта. Следующей причиной является безопасность лифтинга грузов на промежуточные и геостационарные орбиты. Надежная конструкция космического лифта защитит космонавтов и грузы от маловероятных, но возможных катастроф. И наконец, главная причина – это низкая, по сравнению с традиционной ракетной, стоимость доставки груза в космос. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Оценим стоимость доставки одного килограмма полезного груза на геостационарную орбиту. Будем исходить из того, что КПД электродвигателей лифта составляет 90%. Для подобного КПД затраты энергии составят

$$W = -\frac{1}{0,9}(E_1 - E_2) = \frac{1}{0,9} \left( G \frac{mM}{R} - G \frac{mM}{r_{гс}} \right) = \frac{m}{0,9} \left( g_0 R - \frac{g_0 R^2}{r_{гс}} \right),$$

где  $E_1$  и  $E_2$  – потенциальные энергии груза на поверхности Земли и на геостационарной орбите. Положим  $m = 1$  кг и учтем, что основной вклад в энергозатраты вносит первое слагаемое в выражении для  $W$ . Тогда для оценки получим

$$W \approx \frac{mg_0 R}{0,9} \approx 7,1 \cdot 10^7 \text{ Дж} \approx 20 \text{ кВт} \cdot \text{ч}.$$

Стоимость 1 кВт·ч энергии в России составляет 4,53 рубля, а в США – 0,13 доллара. Отсюда следует, что доставка на геостационарную орбиту 1 кг полезного груза обойдется примерно в 1,2–2,6 доллара. А стоимость доставки такого же груза с помощью ракеты составляет тысячи долларов. Сопоставляя приведенные цифры, видим, что подъем груза с помощью космического лифта в сотни раз выгоднее, чем с помощью ракеты.

Самое интересное при этом заключается в том, что низкая стоимость доставки грузов в космос с помощью космического лифта не означает использование малых мощностей. Напротив, при подъеме 10 тонн груза в сутки для обеспечения работы лифта потребуется мощность около 10 МВт. Это достаточно большая мощность, что порождает проблему доставки ее на двигатели лифта. Есть два возможных решения доставки электроэнергии: по тросу или с помощью электромагнитных волн. Какое из них будет выбрано, определится конкретными характеристиками материала троса, в частности – его проводимостью.

В начале статьи было сказано, что конструктивно космический лифт будет состо-

ять из трех элементов, одним из которых является противовес. Там же говорилось, что противовес нужен для того, чтобы с помощью центробежной силы скомпенсировать действие силы тяжести на всю конструкцию в целом. Рассчитаем параметры противовеса для случая однородного троса космического лифта. Для этого используем условие равновесия всей конструкции лифта:

$$m\omega^2 r + \rho S \frac{\omega^2}{2} (r^2 - R^2) = mg_0 \left( \frac{R}{r} \right)^2 + \rho S \frac{g_0 R (r - R)}{r},$$

где  $m$  – масса противовеса,  $r$  – радиус орбиты, на которой находится противовес. Отсюда найдем необходимую массу противовеса:

$$m = \frac{\rho S \left( \frac{g_0 R (r - R)}{r} - \frac{\omega^2}{2} (r^2 - R^2) \right)}{\omega^2 r - g_0 \left( \frac{R}{r} \right)^2}.$$

На рисунке 2 приведен график зависимости  $m$  от  $r$  для случая  $r > r_{гс}$ ,  $\omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ ,  $\rho = 1,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$  и  $S = 10^{-3} \text{ м}^2$ . Как видно, масса противовеса сильно зависит от радиального расстояния. Она может составлять почти 100000 тонн для  $r = 105000 \text{ км}$  и около 10000 тонн для  $r = 150000 \text{ км}$ . Несложно сообразить, что предпочтительно расположить противовес повыше, чтобы значительно уменьшить его массу. В этом случае выигрыш в тоннаже легко

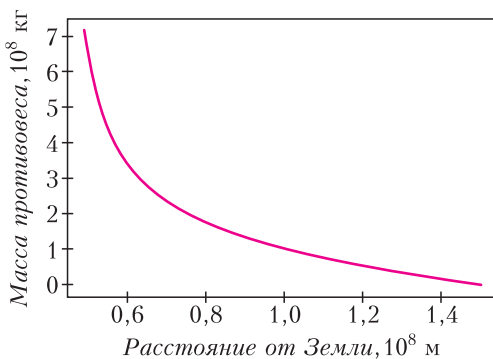


Рис. 2. Зависимость массы противовеса от его положения

скомпенсирует потери, связанные с выводом грузов на более высокие орбиты при создании лифта.

Теперь рассмотрим вопрос о выборе оптимальной формы сечения троса космического лифта. Как уже говорилось, по мере подъема вверх сила натяжения троса возрастает с увеличением  $r$ . Если в точке закрепления троса на Земле натяжение отсутствует (нижний конец троса свободен), то на нижних участках троса сила натяжения мала. Затем она нарастает и достигает максимального значения на геостационарной орбите. Возникает вопрос: нельзя ли спрофилировать сечение троса так, чтобы он не обладал избыточной прочностью. Оказывается, это возможно. Для этого достаточно подобрать сечение так, чтобы на каждой высоте прочности троса с избытком хватало для компенсации силы натяжения троса, создаваемой массой троса, расположенной ниже этой высоты.

Несложно получить нужную функциональную зависимость для этого случая. Рассмотрим небольшой элемент троса длиной  $dr$  и массой  $dm$  переменного сечения (рис. 3) и запишем условие его равнове-

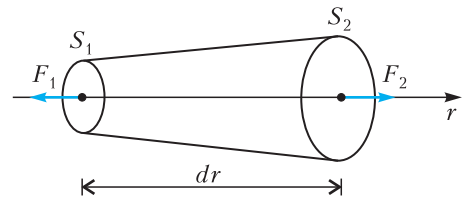


Рис. 3. Элемент троса с силами, действующими на его торцах

сия с учетом сил, действующих на обоих торцах элемента:

$$F_2 - F_1 - dm g + dm \omega^2 r = 0,$$

где  $F_2 = p S_2$ ,  $F_1 = p S_1$ ,  $dm = \rho dV$ ,  $dV$  – объем элемента. Далее предположим, что сечение  $S(r)$  слабо меняется в зависимости от  $r$ . В этом случае с хорошим приближением объем элемента равен  $dV \approx S dr$ , а площади торцов связаны соотношением  $S_2 \approx S_1 + \frac{dS}{dr} dr$ , где  $\frac{dS}{dr}$  – производная площади сечения троса по радиальному расстоянию. Тогда условие равновесия

примет вид

$$p \frac{dS}{S} = -\rho\omega^2 r dr + \rho g_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2 dr.$$

Осталось проинтегрировать это выражение, чтобы получить явную зависимость  $S$  от  $r$ . Интегрируя по переменной  $r$  от  $R$  до некоторого промежуточного значения  $r$ , получим

$$\begin{aligned} \ln S - \ln S_0 &= \\ &= -\frac{\rho\omega^2}{2p}(r^2 - R^2) + \frac{\rho g_0 R^2}{p} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right), \\ S &= S_0 \exp\left(-\frac{\rho(r-R)}{p} \left(\frac{\omega^2(r+R)}{2} - g_0 \frac{R}{r}\right)\right), \end{aligned}$$

где  $S_0$  и  $S$  – площади сечения троса на уровне Земли и на произвольной высоте  $r$ . Видно, что площадь профилированного троса нарастает с высотой по экспоненциальному закону и на геостационарной стороне, в соответствии с полученным ранее выражением для  $p_{\max}$ , будет равна

$$S = S_0 \exp\left(\frac{\rho g_0 R^2}{p} \left(\frac{R^2}{2r_{\text{гс}}^3} + \frac{1}{R} - \frac{3}{2r_{\text{гс}}}\right)\right).$$

Численные оценки показывают, что даже для минимальных начальных значений  $S_0$  площадь сечения на геостационарной орбите примет такие большие значения, что подобные тросы невозможно создать в

реальности. Это говорит о том, что красивая идея оптимизации сечения троса является только математическим изыском, достойным восхищения, но еще более фантастическим изобретением, чем сам космический лифт.

Итак, в статье рассмотрены самые общие вопросы, касающиеся физики и конструкции космического лифта. Вне рассмотренных остались многие интересные темы, связанные с конструкцией лифта и его основных элементов, организацией транспортировки грузов и использованием не только геостационарной станции, но и промежуточных баз.

В заключение предлагаем читателям самостоятельно подумать над такими вопросами.

- Как запускать с помощью космического лифта космические аппараты на промежуточные орбиты, находящиеся ниже геостационарной станции или противовеса?
- Облегчит ли космический лифт запуск космических аппаратов в дальний космос?
- Будет ли полезно объединить несколько лифтов в единую конструкцию?
- Есть ли какой-либо смысл в креплении нижнего конца троса к океанскому лайнеру, свободно перемещающемуся по океану?

Желаем успехов в поиске ответов на эти вопросы.

### Вниманию наших читателей

Подписаться на журнал «Квант» можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: [biblio.mcsme.ru](http://biblio.mcsme.ru)), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>

# Краткая история тепловых машин

*М. РОМАШКА*

## **Эолипил – первый паровой двигатель**

Иногда говорят, что у греков было все. Во многом Древнюю Грецию можно считать колыбелью науки. Тепловые машины в этом плане – не исключение. Первая тепловая машина была изобретена Героном Александрийским (вторая половина I века н.э.) и называлась эолипил (в переводе с греческого: шар бога ветров Эола).

Эолипил (рис. 1) представлял собой наглухо запаянный котел с двумя трубками на крышке. На трубках устанавливался вращающийся полый шар, на поверхности которого находились два Г-образных патрубков-сопла. В котел через отверстие заливалась вода, отверстие закрывалось пробкой, и котел устанавливался над огнем. Вода вскипала, образовывался пар, который по трубкам поступал в шар и в Г-образные патрубки. При достаточном давлении струи пара, вырываясь из сопел,

быстро вращали шар. Построенный современными учеными по чертежам Герона эолипил развивал до 3500 оборотов в минуту!

При сборке эолипила ученые столкнулись с проблемой уплотнения в шарнирных соединениях шара и пароподающих трубок. При большом зазоре шар получал большую степень свободы вращения, но зато пар легко выходил через щели и его давление быстро падало. Если зазор уменьшали, потеря пара исчезала, но и шар вращался труднее из-за возросшего трения. Нам неизвестно, как Герон решал эту проблему. Возможно, его эолипил вращался не с такой большой скоростью, как современная модель.

К сожалению, эолипил не получил должного признания и не был востребован ни в эпоху античности, ни позже, хотя и производил огромное впечатление на всех, кто его видел. К этому изобретению относились лишь как к забавной игрушке. Фактически же эолипил Герона является прототипом паровых турбин, появившихся спустя почти два тысячелетия.

## **Первые поршневые паровые двигатели**

Вероятно, первым, кто догадался применить цилиндр и поршень для создания тепловой машины, был французский математик, физик и изобретатель Дени Папен. В 90-х годах XVII века он построил первую паровую машину с поршнем, которая, правда, была еще весьма несовершенна. В цилиндрическом сосуде с поршнем кипятили воду. Образующийся пар, имевший большое давление (больше атмосферного), поднимал поршень. Затем сосуд обливали холодной водой, чтобы пар в нем



*Рис. 1. Эолипил Герона Александрийского*



сконденсировался и образовался вакуум. Тогда под действием атмосферного давления поршень опускался обратно вниз. Это был рабочий ход поршня (фактически, основную работу за цикл совершал даже не пар, а внешний воздух за счет атмосферного давления). Для следующего хода поршня вверх надо было снова кипятить воду в цилиндре. КПД этой машины был очень низок, а работала она медленно. Однако, большая заслуга Дени Папена состоит в том, что он впервые правильно описал, в какой последовательности должен идти процесс работы поршневой паровой машины.

После этого Папен продолжил совершенствовать идею парового двигателя, однако успешно реализовать «в железе» проекты новых паровых двигателей удалось лишь его последователям (ближайшими последователями были англичане Ньюкомен и Коули). Основной новой идеей Папена было отделить паровой котел от рабочего цилиндра. На рисунке 2 показан проект его второй паровой машины, которая могла бы иметь практическое применение в роли водяного насоса или водоподъемной машины. В котле справа постоянно кипятится вода и превращается в пар. Через трубку *D* пар подается в цилиндр с поршнем, и поршень, опускаясь вниз, выталкивает воду, которая закачивается в

высокий сосуд через клапан *K*. Когда поршень в цилиндре доходил до нижнего положения, открывался клапан *G*, и пар выходил из цилиндра. Снизу на цилиндр давила вода (ее гидростатическое давление в некоторый момент оказывалось больше, чем давление пара сверху). Поршень поднимался в верхнее положение, и цикл начинался заново. По идее Папена, вода из высокого сосуда, падая, могла вращать колесо и приводить в движение судно. Но идею реализовать не удалось.

### Паровые машины Ньюкомена–Коули и Ползунова

По сравнению со второй паровой машиной Папена (которая осталась проектом), в конструкции Ньюкомена и Коули присутствовала новая идея: в цилиндр впрыскивалась холодная вода, и пар конденсировался. Машина Ньюкомена успешно работала в качестве водяного насоса (это было впервые сделано в 1711 году). Рабочий цикл состоял из двух частей. Сначала пар низкого давления впускается в вертикальный рабочий цилиндр, открытый сверху, поднимая поршень (на рисунке 3 – поршень в верхнем положении). Затем впускной клапан закрывается, и пар охлаждается, конденсируясь. Для быстрой конденсации в цилиндр впрыскивается холодная вода. (В классическом двигателе

Ньюкомена охлаждающая вода распыляется непосредственно в цилиндр, и конденсат стекает в сборник конденсата.) При конденсации пара давление в цилиндре падает, и атмосферное давление с усилием двигает поршень вниз, совершая рабочий ход. Смазка и уплотнение поршня осуществляются небольшим количеством воды, налитой на него сверху. Работа, производимая атмосферным давлением, тем больше, чем больше ход поршня и сила давления на него. Перепад давлений при этом зависит только от температуры, при которой пар конден-

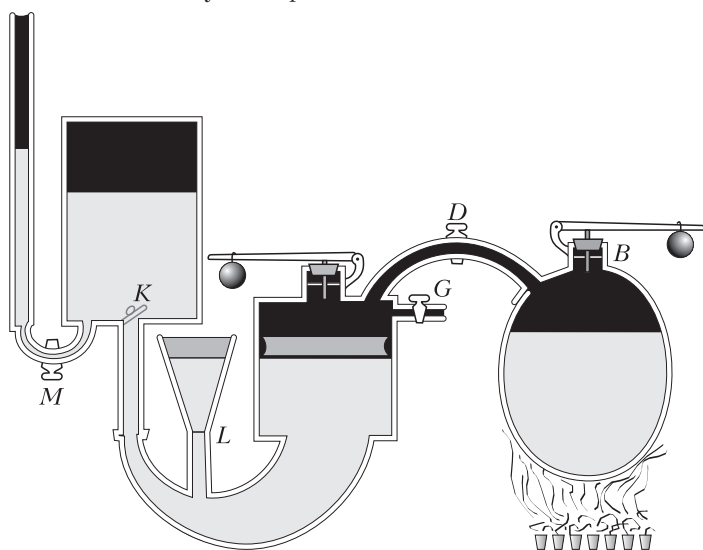


Рис. 2. Проект второй поршневой машины Дени Папена

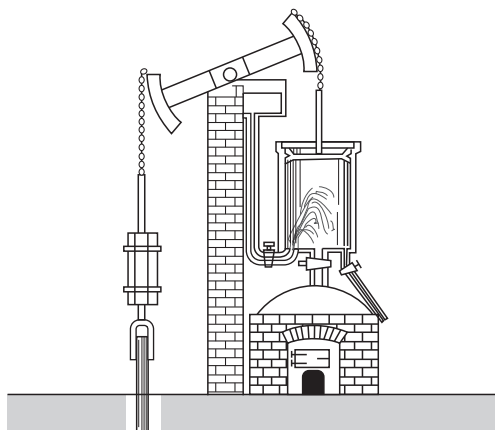


Рис. 3. Паровая машина Ньюкомена–Коули

сируется, и сила, равная произведению перепада давлений на площадь поршня, увеличивается при увеличении площади поршня, т.е. диаметра цилиндра. Поршень связан цепью с концом большого коромысла, представляющего собой дву-плечий рычаг. Насос под нагрузкой связан цепью с противоположным концом коромысла. При рабочем ходе поршня вниз насос поднимает вверх порцию воды. Затем цилиндр снова заполняется паром, а поршень насоса опускается.

Постоянное охлаждение и повторное нагревание рабочего цилиндра машины было очень расточительным и неэффективным, тем не менее, эти паровые машины позволяли откачивать воду с большей глубины, чем это было возможно при помощи лошадей. Отопление машин углем, добытым в той же шахте, которую машина обслуживала, оказалось выгодно, несмотря на чудовищную прожорливость установки.

Машина Ньюкомена не была универсальным двигателем и могла работать только как насос. Попытки Ньюкомена использовать возвратно-поступательное движение поршня для вращения гребного колеса на судах оказались неудачными. Однако заслуга Ньюкомена в том, что он одним из первых реализовал «в железе» идею использования пара для получения механической работы.

Далее русский техник Иван Иванович Ползунов (рис. 4) усовершенствовал машину Ньюкомена–Коули. Постройку сво-



Рис. 4. Памятник И.И. Ползунову в Великом Новгороде



Рис. 5. Действующий уменьшенный образец паровой машины Ползунова

ей машины Ползунов завершил в 1765 году, а пущена она была в следующем году, уже после смерти изобретателя. Машина Ползунова (рис. 5) имела два цилиндра. Когда в один цилиндр поступал пар из парового котла и поршень в нем поднимался, в другой цилиндр впрыскивалась холодная вода, пар в нем конденсировался, а поршень в нем опускался. Цилиндры поочередно менялись ролями, и машина работала непрерывно. Движение поршней передавалось на шкив, поэтому шкив непрерывно поворачивался то в одну, то в другую сторону. Изначально эта машина приводила в движение меха для поддува рудоплавильных печей. Но возвратно-вращательное движение шкива могло быть преобразовано во вращение рабочего вала, что давало возможность приводить в движение станки и другие механизмы.

### Паровая машина Джеймса Уатта

Как ясно на сегодняшний день, все описанные выше паровые машины обладали существенным недостатком: рабочий цилиндр приходилось попеременно то нагревать, то охлаждать. Это приводило, во-первых, к большим потерям теплоты, а во-вторых, работа машины была медленной (мощность была низкой).

Как и многие мыслящие люди, Уатт попытался сначала разобраться в работе паровых машин и в сопутствующей физике почти с нуля. Пробовал он и конструировать свои машины, однако его первые опыты не привели к заметному успеху. В середине 60-х годов XVIII века Уатт работал в университете Глазго. Однажды ему поступил заказ на ремонт паровой машины Ньюкомена, и, разобравшись в конструкции агрегата, Уатт решил попробовать ее немного усовершенствовать. Он предположил, что можно сократить расход недешевого топлива, если цилиндр паровой машины будет постоянно оставаться в нагретом состоянии. Чтобы воплотить в жизнь данную идею, следовало разобраться с проблемой конденсации пара, которую Уатт решил достаточно элегантно.

Согласно некоторым источникам, мысль о том, как можно сконденсировать пар,

пришла Уатту в голову совершенно случайно, когда он увидел, как под давлением вырываются струи пара из котлов прачечных. Джеймс сообразил, что пар – это обыкновенный газ, который из цилиндра можно легко направить в другую емкость, создав в ней меньшее давление. Так паровая машина приобрела конденсатор – отдельный цилиндр, который постоянно поддерживался холодным. Важную роль здесь играет то, что давление насыщенного водяного пара сильно зависит от температуры, и потому при температурах около 0 или 10 °С давление пара в конденсаторе быстро падало ниже атмосферного давления. Выпускать пар в конденсатор оказалось заметно эффективнее, чем просто в атмосферу.

Следующее усовершенствование было направлено на то, чтобы заставить поршень в цилиндре совершать полезную работу не за счет атмосферного давления, а с помощью давления пара. Основная сложность состояла в том, чтобы сделать всю конструкцию герметичной, ведь добиться этого в то время было непросто. Но Уатт и здесь продемонстрировал отличную работу мысли – в своей машине он использовал в качестве уплотнителя пеньковую веревку, пропитанную маслом. Она по специальным углублениям наматывалась вокруг поршня, что позволило в большей части решить эту проблему. Первые действующие машины с двумя описанными усовершенствованиями были построены в 1780-х годах, имели мощность около 35 кВт и КПД чуть менее 3%.

Трудами Уатта и других изобретателей паровая машина постепенно совершенствовалась и завоевывала все новые и новые отрасли промышленности и транспорт. В 1829 году Джордж Стефенсон построил паровоз «Ракета», с которого началось широкомаштабное использование паровозов. В России в 1834 году был построен паровоз Черепановых – первый отечественный паровоз. Началась эпоха паровозов. Изобретение же действующего парохода связывают с именем американца Роберта Фултона, его пароход «Клермонт» был построен в 1807 году.

В течение почти всего XIX века паровая машина являлась универсальным двигателем на транспорте. Но КПД поршневых паровых машин был все-таки низким, и в дальнейшем на замену им пришли более совершенные тепловые двигатели, среди которых важное место занимают двигатели внутреннего сгорания.

### **Идея двигателя внутреннего сгорания. Двигатель Ленуара**

Двигатель внутреннего сгорания (ДВС) – двигатель, в котором топливо сгорает непосредственно в рабочей камере (внутри) двигателя. Идея создания двигателя внутреннего сгорания родилась еще в XVII веке. И принадлежит уже известному нам Дени Папену. Он задумал заставить пушку совершать полезную работу. Вместо ствола пушки Папен решил поставить вертикальный цилиндр с поршнем внутри. К поршню прикрепляли шнур, перекинутый через блоки. Во время испытаний к свободному концу шнура привязали гирию; впоследствии Папен собирался соединить шнур с поршнем насоса для откачивания воды из шахт. В днище цилиндра находилась выдвигающая полочка, на которую насыпался порох, поджигаемый фитилем. Взрыв пороха подбрасывал поршень вверх,

при этом открывалось окно, и пороховые газы с большой скоростью выходили наружу. Затем цилиндр снаружи охлаждали водой, и в нем создавалось разрежение. Под действием атмосферного давления поршень опускался вниз, а гирия, привязанная к концу шнура, поднималась. Так представлялась Папену работа новой машины, но уже при первом испытании она была разрушена взрывом. У изобретателя не было средств, чтобы машину сделать заново. Он даже обращался за помощью к королю, но получил отказ.

И, увы, на долгое время идея двигателя, сжигающего топливо внутри цилиндра, была забыта. Однако в середине XIX века научились получать новое топливо – светильный газ. Тогда-то и вспомнили идею Папена. Но не все было так просто; первые попытки создать ДВС, работающий на светильном газе, были неудачны.

Французский изобретатель Этьен Ленуар применил для зажигания газовой смеси в цилиндре электрическую искру. Основными частями этого двигателя (рис. 6) были цилиндр и поршень, как в паровой машине, но в цилиндр поступал не пар, а смесь светильного газа с воздухом, поджигаемая искрой. Продукты сгорания выпускались в атмосферу. Двигатель был запа-

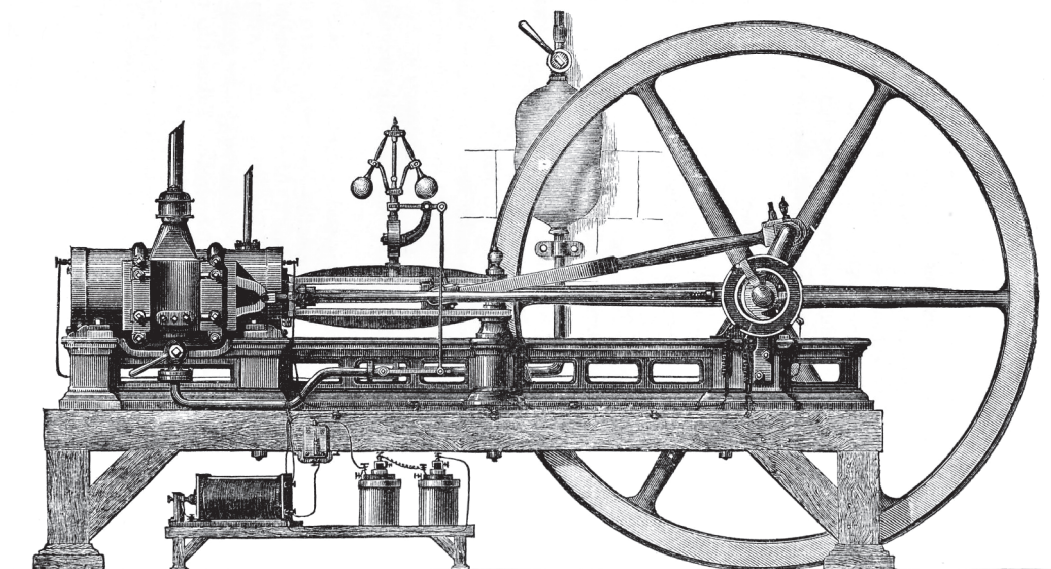


Рис. 6. Двигатель Ленуара



тентован в 1860 году. На конструкцию этого двигателя заметное влияние оказали технические решения, использованные в паровой машине Уатта: поршень двойного действия (такой двигатель называется двухтактным: первый такт – сгорание топлива и расширение газа, второй такт – поршень идет обратно и вытесняет из цилиндра продукты сгорания) и золотниковый механизм, управляющий подачей рабочего тела в цилиндр и удалением отработанного. Только рабочим телом является не пар, а продукты сгорания смеси воздуха и светильного газа.

Обратим внимание, что важными деталями двигателя Ленуара являются кривошипно-шатунный механизм (преобразующий поступательное движение поршня во вращательное движение) и маховик (маховое колесо). Маховик служит для того, чтобы сглаживать неравномерность вращения вала (подобно тому, как тяжелое тело движется по инерции почти равномерно, маховик почти равномерно вращается), и для обеспечения обратного хода поршня.

Газовый двигатель был менее громоздким и тяжелым в сравнении с паровым, проще в управлении, при запуске не требовал длительной подготовки (разогрева котла), а в стационарном режиме работал полностью автоматически, тогда как для работы паровой машины требовалось постоянное участие кочегара. По этим причинам газовый мотор сразу привлек к себе внимание потребителей (несколькими французскими фирмами было выпущено, по разным источникам, от 300 до 500 таких двигателей). Его КПД был около 3–5%. Но газ в то время стоил дорого. Топливо для такого двигателя было дорогим, и это было недостатком. В истории ДВС начался новый этап – борьба за повышение КПД. На помощь практике пришла теория.

### Новые идеи.

#### Четырехтактный двигатель Отто

Изучая теоретические работы Карно о тепловых машинах, французский инженер Бо де Роша пришел к новым идеям о том, как улучшить двигатель внутреннего сгорания. Он заметил, что в двигателе

Ленуара продукты сгорания выходят из цилиндра при слишком высокой температуре и в силу этого слишком много тепла теряется в окружающую среду (отдается холодильнику). Как уменьшить потери? Рассуждая теоретически, Бо де Роша пришел к выводу: газ в цилиндре перед сжатием нужно сжать. Тогда, расширяясь, он совершит большую работу, и в итоге КПД будет больше. Чтобы сделать это эффективно, он придумал схему нового цикла двигателя – четырехтактного. Полезно сразу назвать эти четыре такта: впуск, сжатие, рабочий ход, выпуск. По этим названиям легко догадаться, как работает этот двигатель. Свои идеи Бо де Роша изложил в книге, вышедшей в 1862 году, но экспериментальной машины строить не стал.

Первый действующий четырехтактный двигатель (рис. 7) создал немецкий инженер и изобретатель Николаус Отто в 1876 году. Двигатель был одноцилиндровый, однако в нем поочередно происходили четыре такта. Этот двигатель имел КПД около 22%.

Рассмотрим более подробно четыре такта работы этого двигателя.

*Впуск.* Во время первого такта поршень движется от одного из крайних положений. При этом открывается впускной клапан, и топливо (в данном двигателе – газ) поступает в цилиндр. Когда поршень доходит до другого крайнего положения, впускной клапан закрывается и начинается второй такт.

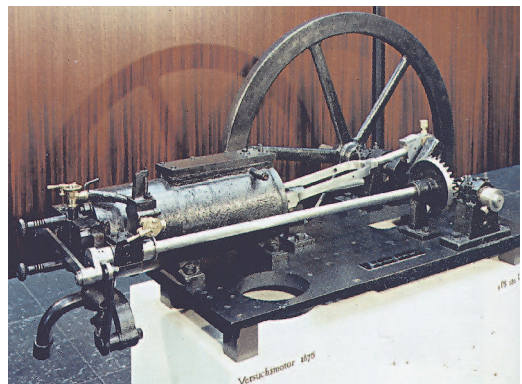


Рис. 7. Четырехтактный двигатель Отто



*Сжатие.* Оба клапана (впускной и выпускной) закрыты, и поршень сжимает топливо. Как только поршень доходит по первоначальному крайнего положения, начинается третий такт.

*Рабочий ход.* В начале этого такта сжатое топливо зажигается. В первом двигателе Отто зажигание производилось открытым пламенем через трубку, и только в 1884 году Отто начал использовать зажигание электрической искрой. Топливо быстро сгорает, при этом температура и давление газов в цилиндре резко возрастают. Под действием этого давления поршень движется ко второму крайнему положению, а газовая смесь охлаждается и совершает полезную работу. Когда поршень достигает крайнего положения, начинается четвертый такт.

*Выпуск.* Во время этого такта открывается выпускной клапан. Поршень движется к своему первоначальному положению (за счет того, что маховик продолжает вращаться по инерции). Поршень выталкивает продукты сгорания в атмосферу. После этого начинается новый цикл работы двигателя.

Первый четырехтактный двигатель Отто был одноцилиндровый. Но стоит сразу отметить, что позже стали применяться (и сейчас применяются) четырехцилиндровые двигатели с коленчатым валом (коленвалом). В каждый момент времени в каждом из цилиндров происходит один из четырех тактов, описанных выше.

### **Применение карбюратора и первый бензиновый двигатель Даймлера**

Двигатель Отто работал только на газе. К 1897 году было выпущено около 42 тысяч таких двигателей разной мощности. Однако то обстоятельство, что в качестве топлива использовался светильный газ, сильно уменьшало область применения двигателей. Количество светильногазовых заводов было незначительно даже в Европе, а в России их вообще было только два – в Москве и Петербурге. Поэтому не прекращались поиски нового горючего для двигателя внутреннего сгорания.

Некоторые изобретатели пытались применить в качестве газа пары жидкого топлива. Еще в 1872 году американец Брайтон пытался использовать в этом качестве керосин. Однако керосин плохо испарялся, и Брайтон перешел к более легкому нефтепродукту – бензину. Но для того чтобы двигатель на жидком топливе мог успешно конкурировать с газовым, необходимо было создать специальное устройство для испарения бензина и получения горючей смеси его с воздухом. Такое устройство называется карбюратором. Брайтон в том же 1872 году придумал один из первых так называемых «испарительных» карбюраторов, но он действовал неудовлетворительно.

В Европе в создание бензиновых двигателей наибольший вклад внес немецкий инженер Готтлиб Даймлер. Много лет он работал в фирме Отто и был членом ее правления. В начале 80-х годов он предложил своему шефу проект компактного бензинового двигателя, который можно было бы использовать на транспорте. Отто отнесся к предложению Даймлера холодно. Тогда Даймлер вместе со своим другом Вильгельмом Майбахом принял смелое решение – в 1882 году они ушли из фирмы Отто, приобрели небольшую мастерскую близ Штутгарта и начали работать над своим проектом.

В 1883–1885 годах им удалось создать действующий бензиновый двигатель, в котором использовался удовлетворительно работавший поверхностный (барботажный) карбюратор, или карбюратор испарительного типа. Он представлял собой бачок, в который наливался бензин. Воздух, засасываемый в двигатель поршнем, проходил над поверхностью бензина. Бензин испарялся, пары смешивались с воздухом и поступали в цилиндры двигателя. Для ускорения испарения бензина карбюратор снаружи нагревался выхлопными газами. Таким образом, двигатель Даймлера был по принципу работы похож на двигатель Отто, но топливом для него служил не газ, а смесь паров бензина с воздухом. Это открыло новую эпоху в применении двигателей: вскоре Даймлер и Майбах построили мотоцикл, карету и

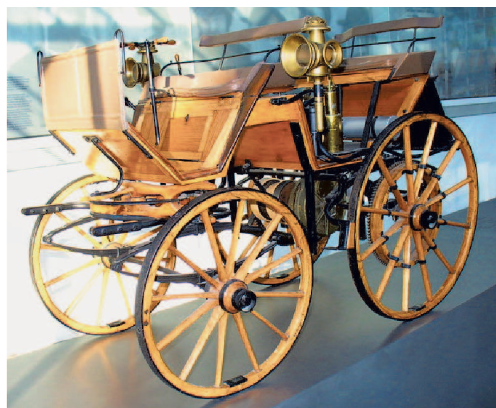
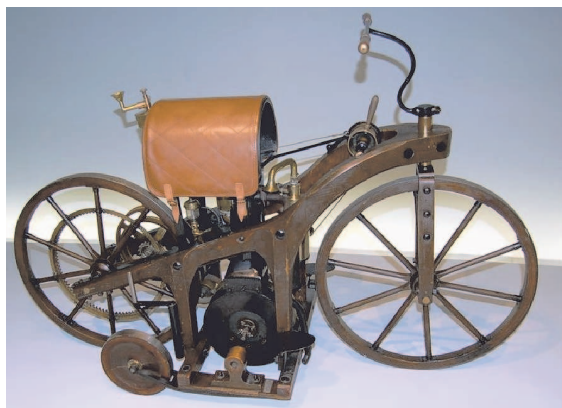


Рис. 8. Мотоцикл и карета Даймлера с двигателем внутреннего сгорания

автомобиль с бензиновыми двигателями внутреннего сгорания (рис. 8).

Как видим, важной составляющей успеха была «одна маленькая деталь»: карбюратор. Совершенствование конструкции карбюратора – отдельная страница в истории техники.

### Двигатель Дизеля

Борьба за повышение КПД двигателей внутреннего сгорания продолжалась. Казалось, путь уже известен: надо как можно сильнее сжать горючую смесь перед ее сжиганием. Однако, тут возникла проблема: горючая смесь, нагреваясь при сжатии, самовоспламенялась. Решение проблемы нашел немецкий инженер Рудольф Дизель. В 1892 году он получил патент на двигатель, в котором были следующие нововведения:

- в цилиндре сжимается только воздух, причем настолько сильно, что его температура возрастает так, что при впрыскивании в цилиндр топлива оно воспламеняется само;
- как следствие, такой двигатель способен работать без карбюратора и запального устройства (без устройства, производящего зажигание смеси), топливом могли быть и бензин, и керосин, и сырая нефть.

Построенный в 1897 году двигатель Дизеля работал на керосине и имел КПД 25%. Можно сказать, что цикл двигателя Дизеля был близок к циклу Карно. Но у себя на родине Рудольф Дизель не нашел признания и тяжело это переживал.

Двигатель Дизеля (или, кратко, «дизель»), имеет как преимущества, так и недостатки по сравнению с бензиновыми двигателями. Он долгое время оставался тяговитым и экономичным мотором, однако был тихоходным. Высокий КПД (и, как следствие, энергоэкономичность) является одним из главных преимуществ. Высокий крутящий момент на низких оборотах – тоже преимущество. Но – только на низких оборотах. На дизельном двигателе труднее, чем на бензиновом, добиться высоких скоростей. В силу этого дизели успешно используются на судах (теплоходах), поездах (тепловозах) и грузовых автомобилях, но реже – на легковых автомобилях. Однако, совершенствование двигателей и конкуренция между бензиновыми и дизельными двигателями продолжается до сих пор.

А в последние годы во многих странах стали набирать популярность электромобили. Это связано, во-первых, с необходимостью, а во-вторых, с новыми возможностями. Необходимость обусловлена тем, что нефть – самый ограниченный энергоресурс на земле, а сжигание углеводородов дает выбросы углекислого газа в атмосферу. Новые возможности связаны с изобретением аккумуляторов новых типов. На сегодняшний день наиболее распространенными являются литий-ионные аккумуляторы, но продолжается поиск новых решений. Однако это уже совсем другая история.

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: *math@kvant.ras.ru* и *phys@kvant.ras.ru* соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2682–M2685 предлагались на VI Олимпиаде мегаполисов.

## Задачи M2682–M2685, Ф2689–Ф2692

**M2682.** Даны шесть действительных чисел  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$ . Для каждой тройки различных чисел из этих шести Витя вычислил их сумму. Оказалось, что все 20 полученных сумм попарно различны; обозначим их через

$$s_1 < s_2 < s_3 < \dots < s_{19} < s_{20}.$$

При этом  $x_2 + x_3 + x_4 = s_{11}$ ,  $x_2 + x_3 + x_6 = s_{15}$  и  $x_1 + x_2 + x_6 = s_m$ . Найдите все возможные значения  $m$ .

А.Юран

**M2683.** Есть сейф, который можно открыть, введя секретный код, состоящий из  $n$  цифр, каждая из которых – это 0 или 1. Изначально было введено  $n$  нулей, но сейф остался закрыт (т.е. все нули – это не секретный код).

За одну попытку можно ввести произвольную последовательность из  $n$  цифр, каждая из которых – это 0 или 1. Если введенная последовательность совпадет с секретным кодом, то сейф откроется. Если введенная последовательность совпадет с секретным кодом в большем количестве позиций, чем предыдущая введенная последовательность, то будет слышен щелчок. В иных случаях сейф останется закрытым и щелчка не будет.

За какое наименьшее количество попыток гарантированно удастся открыть сейф?

Д.Афризов

**M2684.** Даны неотрицательные действительные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 2$ ), сумма которых равна  $\frac{n}{2}$ . Для каждого  $i = 1, \dots, n$  обозначим

$$b_i = a_i + a_i a_{i+1} + a_i a_{i+1} a_{i+2} + \dots$$

$$\dots + a_i a_{i+1} \dots a_{i+n-2} + 2a_i a_{i+1} \dots a_{i+n-1},$$

где  $a_{j+n} = a_j$  для всех  $j$ . Докажите, что  $b_i \geq 1$  хотя бы для одного индекса  $i$ .

Д.Джукич

**M2685\*.** Внутри тетраэдра  $ABCD$  выбрана точка  $M$  таким образом, что  $\angle MAD = \angle MBC$  и  $\angle MDB = \angle MCA$ . Докажите, что  $MA \cdot MB + MC \cdot MD < \max(AD \cdot BC, AC \cdot BD)$ .

Н.Седракян

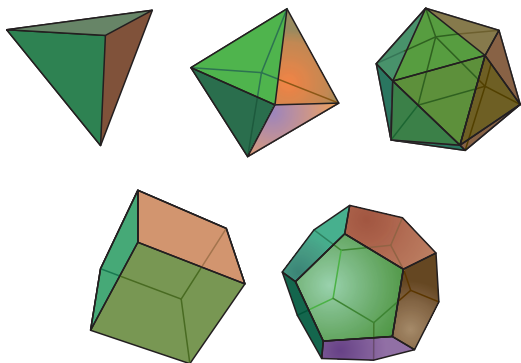
**Ф2689.** Пыльную доску, наклоненную под углом  $\theta$  к горизонту, привели во вращение вокруг вертикальной оси. Какая область останется заполненной пылью? Считается, что пыль находится поверх доски и держится на ней благодаря сухому трению с коэффициентом трения  $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$  – угол трения. Предполагается, что  $\alpha + \theta = \pi/2$ . Ускорение силы тяжести  $g$ , угловая скорость вращения  $\omega$ .

А.Бузов, В.Никонов

**Ф2690.** Правильный многогранник висит, будучи прикрепленным одной из своих вершин к шарниру без трения. Период малых колебаний возле положения равновесия равен  $T_1$ . Каким будет период  $T_2$  малых колебаний этого же многогранника,

если точкой крепления шарнира выбрать центр одной из его граней? Масса многогранника равномерно распределена по его объему. Расстояния от центра многогранника до точек крепления равны  $L_1$  и  $L_2$  соответственно.

*Подсказка.* Для правильных многогранников, коих, как известно, всего пять (см. рисунок), момент инерции относительно



любой оси, проходящей через центр масс, имеет одно и то же значение.

*С. Многогранный*

**Ф2691.** Два одинаковых сосуда шарообразной формы с жесткими и не проводящими тепло стенками, у которых еще и нулевая теплоемкость, используются в некотором эксперименте. Емкость каждого сосуда  $V = 1 \text{ м}^3$ . В одном из сосудов вакуум, а в другом газ аргон ( $M = 40 \text{ г/моль}$ ) при комнатной температуре  $T_0 = 300 \text{ К}$  и под давлением  $p_0 = 1 \text{ атм}$ . Сосуды соединены короткой трубкой, первоначально перекрытой задвижкой. Сечение трубки от стенки сосуда с большим давлением сначала плавно уменьшается до минимального в виде круга площадью  $S = 1 \text{ см}^2$ , и в этом месте установлена задвижка. Затем поперечное сечение трубки остается неизменным вплоть до стенки сосуда с низким давлением. Оба сосуда снабжены манометрами. Задвижку быстро открывают, дожидаются момента, когда показания манометров станут одинаковыми, и снова быстро закрывают. Какими будут температуры (разные) и давления (одинаковые) в этих сосудах? Какая доля от общей массы газа окажется в итоге в первоначально

пустом сосуде? Оцените также время, в течение которого шло перетекание газа из одного сосуда в другой.

*С. Варламов*

**Ф2692.** Космический аппарат двигался точно по орбите Земли. В тот момент, когда Земля полностью спряталась от аппарата за Солнце (это было летом, в июле), по корпусу аппарата ударил микроскопический камешек и отколол от его зеркальной обшивки маленький плоский кусочек. Относительная скорость зеркального кусочка и аппарата была невелика, но этот кусочек уже никогда с аппаратом не встретился. Больше того, под воздействием солнечного света и гравитации Солнца он стал двигаться с постоянной скоростью и через некоторое время покинул Солнечную систему навсегда. Какова толщина этого кусочка, если плотность материала, из которого он состоит, примерно  $1,5 \text{ г/см}^3$ ? Можно считать, что плоская зеркальная поверхность отколовшегося кусочка всегда ориентирована перпендикулярно солнечным лучам и что зеркало отражает 100% падающего на него света. На каком расстоянии от Земли и через какое минимальное время после начала его самостоятельного полета оказался зеркальный осколок, если в этот момент с Земли удалось увидеть в телескоп отраженный им солнечный свет? (Необходимые для вычислений величины ищите в справочниках самостоятельно.)

*В. Зеркальный*

**Решения задач М2666–М2673, Ф2673–Ф2679**

**М2666.** Пусть  $x, y$  – натуральные числа, большие 1. Оказалось, что  $x^2 + y^2 - 1$  делится на  $x + y - 1$ . Докажите, что  $x + y - 1$  – составное.

Заметим, что

$$x^2 + y^2 - 1 + 2xy = (x + y)^2 - 1 = (x + y - 1)(x + y + 1)$$

делится на  $x + y - 1$ . Тогда из условия задачи следует, что  $2xy$  делится на  $x + y - 1$ . Если бы  $x + y - 1$  было простым числом, то хотя бы один из множителей 2,  $x, y$  делился бы на  $x + y - 1$ . Но это невозмож-



но, так как по условию  $x \geq 2, y \geq 2$ , а значит,  $x + y - 1$  больше 2, а также больше каждого из чисел  $x, y$ . Полученное противоречие завершает решение задачи.

**M2667.** Существует ли на плоскости множество  $M$  из 100 точек такое, что для любых 10 различных точек из  $M$  их центр масс также принадлежит  $M$ ?

**Ответ:** не существует.

В решении будем использовать такое утверждение: если в конечном множестве точек одну из точек  $A$  заменить на другую точку  $B$ , то центр масс этого множества точек сдвинется на вектор, сонаправленный с вектором  $\overline{AB}$ .

Доказать утверждение можно так. Пусть  $G$  – центр масс множества  $M$ , состоящего из  $m$  точек,  $G_A$  – центр масс множества  $M \cup \{A\}$ , а  $G_B$  – центр масс множества  $M \cup \{B\}$ . Тогда центр масс  $G_A$  расположен на отрезке  $GA$  и делит его в отношении  $\overline{AG_A} : \overline{G_A G} = m$ ; аналогично,  $\overline{BG_B} : \overline{G_B G} = m$ . Значит, после замены в множестве  $M \cup \{A\}$  точки  $A$  на точку  $B$  центр масс сместится на вектор  $\overline{G_A G_B} = \frac{1}{m+1} \overline{AB}$ .

Предположим, что указанное в условии задачи множество  $S$  существует. Введем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы все точки множества  $S$  имели различные абсциссы. Точки  $1, 2, \dots, 100$  занумеруем так, чтобы соответствующие абсциссы возрастали, т.е.  $x_1 < x_2 < \dots < x_{100}$ .

Покажем, как свести наше предположение к противоречию. Рассмотрим 10-элементные подмножества  $A_1 = \{1, 2, \dots, 9, 10\}$ ,  $A_2 = \{1, 2, \dots, 9, 11\}$ ,  $A_3 = \{1, 2, \dots, 9, 12\}, \dots, A_{91} = \{1, 2, \dots, 9, 100\}$ ,  $A_{92} = \{1, 2, \dots, 8, 10, 100\}$ ,  $A_{93} = \{1, 2, \dots, 8, 11, 100\}, \dots, A_{101} = \{1, 2, \dots, 8, 19, 100\}$ . Для перечисленных подмножеств выполнено условие: каждое подмножество получается из предыдущего заменой одной из точек на точку с большим номером. Из нашего утверждения следует, что при такой замене абсцисса центра масс подмножества увеличивается, поэтому центры масс подмножеств  $A_1, A_2, \dots, A_{101}$  различны, и, значит, все они не могут принадле-

жать 100-элементному множеству  $S$ . Противоречие. Задача решена.

Приведем другой возможный вариант рассуждения, приводящего к противоречию. Среди длин  $x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_{100} - x_{99}$  выберем наименьшую, пусть это  $x_{i+1} - x_i$ . Возьмем 10-элементное подмножество  $M$ , содержащее точку  $i$ , но не содержащее точку  $i + 1$ . Тогда после замены в множестве  $M$  точки  $i$  на  $i + 1$  центр масс должен сместиться по оси абсцисс на расстояние  $(x_{i+1} - x_i)/10$ . Но в силу минимальности выбора разности  $x_{i+1} - x_i$ , если центр масс множества  $M$  лежал в множестве  $S$ , то после такого сдвига он уже не будет лежать в  $S$ .

П. Кожевников

**M2668\*.** Даны две окружности, для которых есть семейство четырехугольников, описанных вокруг первой окружности и вписанных во вторую (вписанно-описанные четырехугольники).

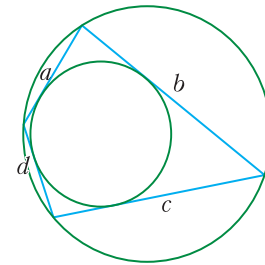


Рис. 1

и вписанных во вторую (вписанно-описанные четырехугольники). Обозначим  $a, b, c, d$  последовательные длины сторон одного из таких четырехугольников (рис.1). Докажи-

те, что величина  $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{d} + \frac{d}{b}$  не зависит от выбора четырехугольника.

Пусть  $ABCD$  – один из данных четырехугольников,  $O$  и  $I$  – центры его (фиксированных) описанной и вписанной окружностей  $\Omega$  и  $\omega$  радиусов  $R$  и  $r$  соответственно (рис.2). Пусть стороны  $AB, BC, CD, DA$  касаются  $\omega$  в точках  $K, L, M, N$  соответственно. Известно, что диагонали  $AC, BD$  четырехугольника  $ABCD$  и диагонали  $KM, LN$  четырехугольника  $KLMN$  пересекаются в одной и той же точке  $P$  (это следует из вырожденной теоремы Бриансона для описанных вокруг  $\omega$  «шестиугольников»  $AKBCMD$  и  $BLCDNA$ ). Более того, эта точка  $P$  фиксированная, она не зависит от выбора четырехугольника  $ABCD$  (доказательство этого факта можно найти, напри-



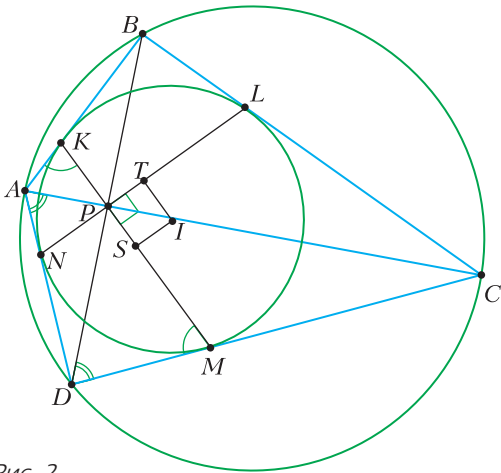


Рис. 2

мер, в статье В.Протасова «Два века теоремы Понселе» в «Кванте» №5-6 за 2014 год, см. следствие 2 из теоремы 3). Также отметим, что  $KM \perp NL$  (это следует из вписанности  $ABCD$ : равенство  $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$  дает, что сумма дуг  $KL$  и  $MN$  в окружности  $\omega$  равна  $180^\circ$ ).

Касательные  $AK$  и  $DM$  составляют равные углы с  $KM$ :  $\angle AKP = \angle DMP$ , поэтому в подобных треугольниках  $APB$  и  $DPC$  чевианы  $PK$  и  $PM$  – соответственные, откуда  $AB/CD = KP/MP$ . Аналогично,  $BC/DA = LP/NP$ . Остается доказать для вписанных в  $\omega$  четырехугольников  $KLMN$  с перпендикулярными диагоналями, пересекающимися в фиксированной точке  $P$ , что

$$KP/MP + MP/KP + LP/NP + NP/LP = \text{const.}$$

Имеем

$$KP/MP + MP/KP + LP/NP + NP/LP = \frac{KP^2 + MP^2}{MP \cdot KP} + \frac{LP^2 + NP^2}{LP \cdot NP}.$$

Знаменатели у этих дробей равны одной и той же константе, равной (минус) степени точки  $P$  относительно  $\omega$ . Покажем, что

$$KP^2 + MP^2 + LP^2 + NP^2 = 4r^2.$$

Пусть  $S$  и  $T$  – середины  $KM$  и  $LN$  соответственно, они же – проекции центра  $I$  на  $KM$  и  $LN$ , так что  $ISPT$  – прямоугольник. Тогда

$$KP^2 + MP^2 = (KS - PS)^2 + (KS + PS)^2 = 2KS^2 + 2PS^2 = 2KS^2 + 2IT^2.$$

Аналогично,

$$LP^2 + NP^2 = 2LT^2 + 2IS^2.$$

Окончательно,

$$\begin{aligned} KP^2 + MP^2 + LP^2 + NP^2 &= \\ &= 2(KS^2 + IT^2 + LT^2 + IS^2) = \\ &= 2(KS^2 + IS^2) + 2(LT^2 + IT^2) = 2r^2 + 2r^2. \end{aligned}$$

Задача решена.

Изначальное авторское решение строилось на других метрических инвариантах четырехугольников  $ABCD$  из «семейства Понселе». Именно, доказывалось соотношение

$$AC \cdot BD = 4r^2 \cdot \frac{OP}{IP},$$

и, следовательно, независимость произведения длин диагоналей  $AC$  и  $BD$  от выбора четырехугольника. Далее рассматривались формулы для площади

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \frac{1}{2}(AB \cdot BC + AD \cdot DC) \sin \angle B = \\ &= \frac{AC}{4R}(AB \cdot BC + AD \cdot DC) \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$S_{ABCD} = \frac{BD}{4R}(BC \cdot CD + BA \cdot AD),$$

после перемножения которых и сопоставления с известной формулой для площади вписанно-описанного четырехугольника

$$S_{ABCD} = \sqrt{abcd}$$

получался нужный результат.

Для более глубокого знакомства с разными инвариантами и свойствами «семейств Понселе» вписанно-описанных многоугольников читатель может обратиться к статье А.А.Заславского и Г.Р.Челнокова «Теорема Понселе в евклидовой и алгебраической геометрии» («Математическое образование», 2001, выпуск 4(19)).

*И. Вайнштейн, П. Кожевников*

**M2669\***. Докажите, что для любого натурального числа  $n$  числа  $1, 2, \dots, n$  можно разбить на несколько групп так, чтобы сумма чисел в каждой группе была равна степени тройки.

Будем доказывать утверждение задачи индукцией по  $n$ . Представим  $n$  в виде

$3^k + s$ , где  $0 \leq s < 2 \cdot 3^k$ . В индукционное предположение включим также утверждение о том, что все получающиеся степени тройки не больше  $3^{k+1}$ . Базу индукции проверим в конце.

*Переход от  $n - 1$  к  $n$ .*

**Случай 1.** Пусть  $s = 0$ . Тогда  $n = 3^k$ . Из разбиения для  $n - 1$  легко получить разбиение для  $n$  путем добавления одной группы с  $n = 3^k$ .

**Случай 2.** Пусть  $s > \frac{3^k}{2}$ . Тогда можно составить несколько групп, в каждой из которых будет по 2 числа с суммой  $3^{k+1}$  (беря числа, симметричные относительно  $3^k + \frac{3^k}{2}$ ). Оставшиеся числа будут подряд идущими числами от 1 до некоторого  $t$ , которые по предположению индукции можно разбить на группы, сумма каждой из которых будет степенью тройки, не превосходящей  $3^{k+1}$ .

**Случай 3.** Пусть  $1 \leq s < \frac{3^k}{2}$ . Среди чисел от  $3^k - s$  до  $3^k + s$  выделим как можно больше троек  $(3^k + a, 3^k + b, 3^k + c)$ , где  $a + b + c = 0$ . Покажем, что если  $s = 3m$ , то все числа, кроме  $3^k$ , можно разбить на такие тройки. Предъявим явный пример разбиения (указываются только  $a, b, c$ ):

$$\begin{aligned} &(1, 3m - 1, -3m), \dots \\ &\dots, (t, 3m + 1 - 2t, -(3m + 1 - t)), \dots \\ &\dots, (m, m + 1, -(2m + 1)), \\ &\quad (m + 2, -(m + 1), -1), \dots \\ &\dots, (m + 2t, -(m + t), -t), \dots \\ &\quad \dots, (3m, -2m, -m). \end{aligned}$$

Все числа, меньшие  $3^k - s$ , разобьем на группы по предположению индукции. Число  $3^k$  образует отдельную группу. Несложно видеть, что сумма чисел в каждой группе является степенью тройки и не больше  $3^{k+1}$ .

Если  $s = 3m + 1$ , то для чисел от  $3^k - s + 1$  до  $3^k + s - 1$  применим разбиение из предыдущего случая. Числа  $3^k + s$  и  $3^k - s$  объединим вместе с  $3^k$  в отдельную группу с

суммой  $3^{k+1}$ , а числа, меньшие  $3^k - s$ , разобьем по предположению индукции.

Если  $s = 3m + 2$ , то числа  $3^k + s - 1, 3^k - s + 1$  и  $3^k$  объединим в отдельную группу. Осталось разобраться с числами  $3^k + s$  и  $3^k - s$ . Воспользуемся разбиением чисел, меньших  $3^k - s$ , на группы и объединим несколько этих групп так, чтобы в сумме получилось  $3^k$ . Так как по предположению индукции сумма в каждой из этих групп не больше  $3^k$ , это можно будет сделать, если их сумма не меньше  $3^k$ . Поскольку  $s < \frac{3^k}{2}$ ,

сумма чисел от 1 до  $3^k - s - 1$  не меньше  $\frac{3^k + 1}{2} \cdot \frac{3^k - 1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ . При  $k \geq 2$  это больше  $3^k$ .

Таким образом, при  $n \geq 9$  переход индукции работает. При  $5 \leq n \leq 8$  переход индукции тоже работает, так как в этих случаях  $s > \frac{3^1}{2}$ . Для  $n \leq 4$  приведем явно

разбиения на группы:

для  $n = 1$  – группа (1); для  $n = 2$  – группа (1, 2); для  $n = 3$  – группы (1, 2) и (3); для  $n = 4$  – группы (1) и (2, 3, 4).

*В. Новиков*

**M2670.** На плоскости расположены 100 точек так, что любые 10 из них являются вершинами выпуклого многоугольника. Следует ли отсюда, что все эти точки являются вершинами выпуклого 100-угольника?

**Ответ:** следует.

Рассмотрим выпуклую оболочку  $P$  данных 100 точек. Предположим противное, тогда  $P$  – это выпуклый  $n$ -угольник для некоторого  $n < 100$  (из условия ясно, что не все точки лежат на одной прямой) и найдется хотя бы одна данная точка  $K$ , не являющаяся вершиной  $P$ . Значит,  $K$  лежит внутри или на границе  $P$ . Разобьем  $P$  непересекающимися диагоналями на треугольники (триангулируем), тогда  $K$  окажется внутри или на границе какого-то треугольника  $ABC$  с вершинами в трех из данных точек. Добавив к точкам  $A, B, C, K$  произвольные шесть данных точек, мы получим 10 точек, которые, очевидно, не являются вершинами выпуклого 10-уголь-

ника (иначе  $K$  лежала бы вне треугольника  $ABC$ ). Получено противоречие. Тем самым, задача решена.

В решении мы фактически использовали утверждение о том, что если на плоскости точка принадлежит выпуклой оболочке некоторого множества точек, то она принадлежит выпуклой оболочке некоторых трех из них. Обобщение этого утверждения на  $n$ -мерное пространство (с заменой «трех» на  $n + 1$ ) – классическая теорема выпуклой геометрии, она носит имя Каратеодори.

*П. Кожевников*

**M2671.** Пусть  $x_1$  и  $x_2$  – корни уравнения  $x^2 - px + 1 = 0$ , где  $p > 2$  – простое число. Докажите, что  $x_1^p + x_2^p$  – целое число, делящееся а) на  $p$ ; б) на  $p^2$ .

Из теоремы Виета получаем, что  $x_1 + x_2 = p$ ,  $x_1 x_2 = 1$ .

Индукцией по  $k$  докажем такое **утверждение**: сумма  $k$ -х степеней  $s_k = x_1^k + x_2^k$  является целым числом.

Для  $k = 0$  и  $k = 1$  это верно. Сделаем переход от  $k - 1$  и  $k$  к  $k + 1$ . Имеем  $s_{k+1} = (x_1^k + x_2^k)(x_1 + x_2) - x_1 x_2 (x_1^{k-1} + x_2^{k-1}) = s_k s_1 - s_{k-1}$ , поэтому если  $s_{k-1}$  и  $s_k$  целые, то  $s_{k+1}$  тоже. Утверждение доказано. (Рассуждение, приведенное выше, повторяет решение известной задачи о том, что если число  $t + \frac{1}{t}$  целое, то при любом натуральном  $k$  число  $t^k + \frac{1}{t^k}$  также целое. Это также

следует из более общего факта о представлении симметрического многочлена от  $x_1$  и  $x_2$  в виде многочлена от  $x_1 + x_2$  и  $x_1 x_2$ .)

После того, как стало ясно, что  $x_1^p + x_2^p$  – целое число, возможно, самый простой подход к решению – подставить в выражение явные формулы корней. Запишем  $2x_1 = p - \sqrt{D}$ ,  $2x_2 = p + \sqrt{D}$ , где  $D = p^2 - 4$ .

Тогда  $2^p (x_1^p + x_2^p) = (p - \sqrt{D})^p + (p + \sqrt{D})^p$ . Достаточно показать, что правая часть делится на  $p^2$ . После разложения по биному в правой части слагаемые вида  $C_p^k p^{p-k} (\sqrt{D})^k$  при нечетном  $k$  сократятся.

А при четном  $k$  число  $(\sqrt{D})^k$  целое, и

каждое слагаемое будет делиться на  $p^2$ , поскольку при простом  $p$  и  $1 \leq k \leq p - 1$  биномиальный коэффициент  $C_p^k$  делится на  $p$ . Тем самым, задача решена.

Укажем еще один путь завершения решения (в котором не рассматриваются иррациональности вида  $\sqrt{D}$ , а используются только симметричные выражения от корней  $x_1$  и  $x_2$ ).

Вернемся к задаче и докажем, что  $s_k$  делится на  $p$  при любом нечетном  $k$ . Утверждение а), очевидно, является частным случаем этого. Имеем

$$\begin{aligned} x_1^k + x_2^k &= (x_1 + x_2)(x_1^{k-1} - x_1^{k-2}x_2 + x_1^{k-3}x_2^2 - \dots + x_2^{k-1}) = \\ &= (x_1 + x_2)((x_1^{k-1} + x_2^{k-1}) - (x_1^{k-2}x_2 + x_1x_2^{k-2}) + \\ &\quad + (x_1^{k-3}x_2^2 + x_1^2x_2^{k-3}) - \dots). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$s_k = x_1^k + x_2^k = p(s_{k-1} - s_{k-3} + s_{k-5} - \dots).$$

Теперь доказать утверждение б) можно, используя разложение по биному:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2)^p &= x_1^p + C_p^1 x_1^{p-1} x_2 + C_p^2 x_1^{p-2} x_2^2 + \dots \\ &\dots + x_2^p, \text{ из которого после соответствующей} \\ &\text{группировки (с учетом } C_n^k = C_n^{n-k}) \text{ следует} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^p + x_2^p &= (x_1 + x_2)^p - C_p^1 x_1 x_2 (x_1^{p-2} + x_2^{p-2}) - \\ &\quad - C_p^2 x_1^2 x_2^2 (x_1^{p-4} + x_2^{p-4}) - \dots \\ &\quad \dots - C_p^{(p-1)/2} x_1^{(p-1)/2} x_2^{(p-1)/2} (x_1 + x_2), \end{aligned}$$

или

$$s_p = s_1^p - C_p^1 s_{p-2} - C_p^2 s_{p-4} - \dots - C_p^{(p-1)/2} s_1.$$

В правой части все слагаемые делятся на  $p^2$  (поскольку соответствующие  $C_p^k$  делятся на  $p$ ), а по доказанному  $s_k$  делится на  $p$  при нечетных  $k$ .

Итак, задача решена и вторым способом.

*П. Кожевников*

**M2672.** Пусть вписанная окружность  $\omega$  треугольника  $ABC$  имеет центр  $I$  и касается сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  в точках  $D$ ,  $E$ ,  $F$  соответственно (рис.1). Пусть  $M$ ,  $N$  – точки на прямой  $EF$  такие, что

*Всё движущееся необходимо бывает двигаться чем-то.*

Аристотель

*Рене Декарт... представлял себе межзвездное пространство наполненным жидкостью, находящейся в вихревом движении и увлекающей за собой плавающие в ней планеты.*

Макс Лауэ

*...воздух в воздухе, не имея веса, не может давить на расположенные ниже слои и на земную поверхность.*

Галилео Галилей

*Выскажем великую истину: никаких нематериальных материй не существует.*

Роберт Майер

*Реальное существование среды, сходной по многим своим свойствам с так называемым эфиром, неоспоримо доказано явлениями электричества.*

Томас Юнг

*Природа хранит свои тайны с присущим ей благородством, не прибегая к мошенническим уловкам.*

Альберт Эйнштейн

## А так ли хорошо знакомы вам заблуждения в физике ?

Кто только не заблуждается! И все мы, стремясь найти объяснение каким-то бытовым ситуациям, и фантасты с футурологами, предсказывающие будущие достижения прогресса, и горе-изобретатели, до сих пор старающиеся обойти законы природы, и... ученые-физики. История науки весьма богата порой курьезными, а иногда и очень серьезными заблуждениями. Не будем излишне строги к нашим предшественникам, сегодня изумляющим нас, казалось бы, очевидными огрехами. Нередко ошибочные идеи оказывались «счастливыми» и приводили к ценным научным решениям. Ведь «заблуждаться» – не только «блуждать в темноте», но и подталкивать к дальнейшему поиску более верных представлений. Вспомним Пушкина: «...и опыт, сын ошибок трудных...»

Что ж, попробуем воспользоваться этим изрядным наследством совершения и преодоления промахов, следуя девизу «заблуждайся, но в меру».

### Вопросы и задачи

1. Когда самолет летит над облаками, пассажирам иногда кажется, что они падают вниз. Что происходит на самом деле?
2. Чтобы избежать перегрузок при взлете космического корабля с Земли, предлагалось помещать космонавтов в камеру с жидкостью, плотность которой равна плот-

ности человеческого тела. Действительно ли, как считалось, это сделает космонавтов невесомыми?

3. В романе Жюль Верн «Путешествие на Луну» говорится, что человек теряет свой вес, когда достигает точки, в которой притяжение к Земле уравновешивается притяжением к Луне. Верно ли это?

4. Сила тяжести на Луне в шесть раз меньше, чем на Земле. Согласны ли вы с тем, что спортсмен, прыгающий на Земле на 2 метра, сможет взять на Луне высоту в 12 метров?

5. В народных легендах рассказывается, как люди проходили по дну рек, дыша через длинные тростниковые трубки. Возможно ли это при большой глубине погружения?

6. Где ошибка в рассуждениях Галилея (см. эпиграф)?

7. Верно ли расхожее утверждение «шуба греет»?

8. Иногда газ при охлаждении отдает меньшее количество теплоты, чем было затрачено на его нагревание. Разве это не противоречит закону сохранения энергии?

9. Теплоизолированный сосуд состоит из двух половин, разделенных краном. В левой половине находится идеальный газ, в правой – вакуум. Не должна ли уменьшиться температура газа, если, открыв кран, предоставить ему возможность расшириться?

10. На вопрос, зачем мы зимой используем отопление, получено два ответа: а) чтобы повысить внутреннюю энергию воздуха в комнате; б) чтобы в комнате стало теплее. Какой ответ неверен?

11. Иногда утверждают, что силовые линии электростатического поля – это траектории, по которым двигались бы внесенные в поле электрические заряды. Правильно ли это утверждение?

12. Средняя скорость направленного движения зарядов в проводнике составляет не более нескольких сантиметров в секунду. Почему же настольная лампа зажигается сразу после нажатия кнопки выключателя?

13. В романе Герберта Уэллса описаны приключения человека-невидимки, прозрачного для световых лучей, но способного видеть все окружающее. В чем физическая ошибка фантаста?

### Микроопыт

Понаблюдайте за полетом брошенного вами в корзину баскетбольного мяча. Какая сила «толкает» его во время движения до высшей точки траектории?

### Любопытно что...

...многие утверждения Аристотеля, например о бесконечной скорости тела в пустоте, не соответствовали действительности. Однако авторитет ученого был настолько бесспорен, что его ошибочные представления продержались более полутора тысяч лет.

...Декарт, исходя из неверной теории света, вывел вполне безошибочный закон преломления светового луча на границе двух сред; когда Кеплер искал законы, управляющие движением планет, он руководствовался ложной идеей об осознанности небесными телами своих «поступков».

...в 1680 году, полагая, что кометы должны двигаться по прямой, Ньютон принял яркую комету за две: одну – приближающуюся к Солнцу, другую – удаляющуюся от него. Правда, через пять лет он признал ошибочность своей точки зрения.

...основоположники закона сохранения энергии Роберт Майер и Джеймс Джоуль «крайне непочтительно» отнесли к уди-

вительно живучим научным призракам, изгнав их из физики. Это теплород – «непостижимо тонкая жидкость, изливающаяся из Солнца» и объясняющая все наблюдаемые тепловые явления, и флогистон – «невесомая материя огненной субстанции», высвобождающаяся из веществ в процессе горения.

...американский ученый и государственный деятель Бенджамин Франклин полагал, что электричество – это особая жидкость (флюид), содержащаяся в каждом теле в определенном «нормальном» для этого тела количестве. Процесс электризации состоит в том, что часть этого флюида из одного тела передается другому.

...Генрих Герц, открывший электромагнитные волны, обнаружил расчеты, «доказывающие» невозможность беспроводной передачи сигналов. Более того, он просил коммерсантов, финансирующих научные работы, запретить исследования радиоволн как бесполезные.

...великий Эдисон, творец фонографа и множества других замечательных изобретений, мечтал о «духографе» – приборе, который мог бы записывать голоса умерших людей с того света.

...уравнения Максвелла, легшие в основу его классической теории электромагнитного поля, были им не один раз переписаны, пока он не очистил их от «потока несжимаемой жидкости», «молекулярных вихрей», двух «эфирных сред» и т.д. Осталась лишь единая эфирная среда, от которой удалось избавиться через несколько десятилетий, когда теория относительности Эйнштейна нанесла окончательный удар по гипотезе эфира.

### Что читать в «Кванте» о заблуждениях в физике

*(публикации последних лет)*

1. «О роли парадоксов в развитии науки» – 2016, Приложение №2, с. 165;
2. «На том стоим!» – 2018, №5, с. 26;
3. «Джеймс Джоуль» – 2018, №7, с. 10;
4. «Об одном стихотворении А.С. Пушкина» – 2020, №1, с. 54;
5. «Калейдоскоп «Кванта» – 2020, №11-12, с. 32.

*Материал подготовил А.Леонович*



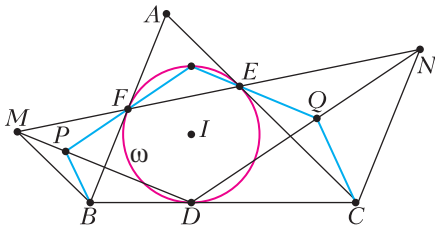


Рис. 1

$BM \parallel AC$  и  $CN \parallel AB$ . Пусть  $P$  и  $Q$  – точки на отрезках  $DM$  и  $DN$  соответственно такие, что  $BP \parallel CQ$ . Докажите, что точка пересечения прямых  $PF$  и  $QE$  лежит на  $\omega$ .

Так как  $BM \parallel AC$ , а треугольник  $AEF$  равнобедренный ( $AE = AF$ ), то  $BM = BF = BD$  (рис.2). В равнобедренном треугольнике  $BDM$  имеем  $\angle DBM = 180^\circ - \angle ACB$ , откуда  $\angle BDM = \frac{1}{2} \angle BCA = \angle BCI$ . Следова-

тельно,  $MD \parallel CI$ , или  $PD \parallel CI$ . Аналогично  $QD \parallel BI$ . Построим точки  $K = BP \cap CI$  и  $L = CQ \cap BI$ . Из параллельностей  $PD \parallel CI$ ,  $QD \parallel BI$ ,  $BP \parallel CQ$  следует, что  $PB/PK = BD/CD = QL/QC$ , поэтому  $PQ$  проходит через  $I$  – точку пересечения  $CK$  и  $BL$ .

Далее, пусть  $DP$  и  $DQ$  пересекают окружность  $\omega$  в точках  $U$  и  $V$ . Так как  $DE \perp CI$ , то  $\angle EDU = 90^\circ$ , значит,  $EU$  проходит через центр  $I$  окружности  $\omega$ . Аналогично,  $FV$  проходит через  $I$ . Пусть  $PF$  вторично пересекает  $\omega$  в точке  $S$ . По теореме Паскаля, примененной к шестерке точек  $S, E, U, D, V, F$ , получаем, что точки  $I = EU \cap VF$ ,  $P = UD \cap FS$  и  $SE \cap DV$  лежат на одной прямой. Но тогда  $SE \cap DV$  совпадает с точкой  $Q = PI \cap DV$ . Значит,  $S$  – это точка пересечения прямых  $PF$  и  $QE$ , откуда и следует утверждение задачи.

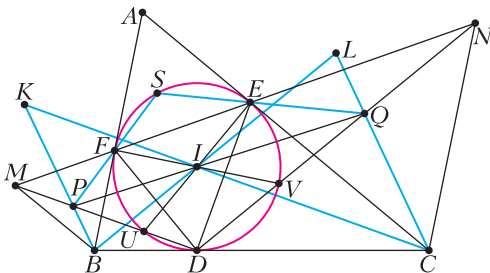


Рис. 2

Отметим, что техника «переброски двойных отношений» позволяет получить совсем короткое решение следующим образом. Положим  $X = AB \cap DM$ ,  $Y = AC \cap DN$ , а вторые точки пересечения  $PF$  и  $QE$  с окружностью  $\omega$  обозначим  $S$  и  $R$ . Двойное отношение  $(D, X, P, M)$  равно двойному отношению четверки прямых  $(BD, BX, BP, BM)$ . Аналогично,  $(D, N, Q, Y) = (CD, CN, CQ, CY)$ . Из параллельностей  $BD \parallel CD$ ,  $BX \parallel CN$ ,  $BP \parallel CQ$ ,  $BM \parallel CY$  тогда следует  $(D, X, P, M) = (D, N, Q, Y)$ . Спроектировав с центром  $F$  четверку точек  $D, X, P, M$  с прямой  $DM$  на окружность  $\omega$ , получим  $(D, X, P, M) = (D, F, S, E)$ . Аналогично,  $(D, N, Q, Y) = (D, F, R, E)$ . Получаем  $(D, F, S, E) = (D, F, R, E)$ , откуда следует совпадение точек  $S$  и  $R$ .

Донг Люу, П.Кожевников

**M2673.** Решение этой задачи см. в статье «Задача о рассеянной старушке».

**Ф2673.** «Вода камень точит», – говорит пословица. Асфальт имеет коэффициент прочности на сжатие  $\sigma_{пр} = 10$  МПа. С какой высоты должны падать в одно и то же место капли воды на асфальт, чтобы он начал разрушаться?

Давление, которое создается в капле воды при торможении, можно оценить так:  $p = \rho v_{зв} v$ . Здесь  $\rho$  – плотность воды,  $v$  – скорость движения капли за мгновение до соприкосновения с твердой поверхностью,  $v_{зв}$  – скорость звуковых волн в воде, равная приблизительно 1500 м/с. Приравняв это давление коэффициенту прочности асфальта, получаем скорость за мгновение до падения:

$$v = \frac{\sigma_{пр}}{\rho v_{зв}} = 6,6 \text{ м/с.}$$

Чтобы приобрести такую скорость, капли должны падать с высоты

$$h = \frac{v^2}{2g} \approx 2,2 \text{ м.}$$

А.Сфальт

**Ф2674.** Длинная,  $L = 2$  м, полиэтиленовая труба диаметром  $D = 2$  см располо-

жена вертикально. Трубу потерли сверху донизу шерстяной тряпочкой, и на ее поверхности появились равномерно распределенные электрические заряды. Из шприца, заполненного водой и не имеющего электрического заряда, в направлении, перпендикулярном оси трубы, выпускают со скоростью  $v = 2$  м/с тонкую струю воды, которая тут же разбивается на одинаковые по размеру мелкие капельки. Место вылета капелек из иголки шприца находится на  $H = 2$  дм ниже верха трубы. Капли все время падения находятся на одном и том же расстоянии  $R = 2$  см от оси трубы. Каков электрический заряд, находящийся на всей поверхности трубы? Сопротивлением воздуха при движении капелек в нем можно пренебречь.

Длина трубы велика в сравнении с другими характерными размерами, поэтому можно считать эту длинную трубу «бесконечно длинной». Заряды на трубе создают в пространстве возле нее электрическое поле, вектор напряженности которого в любой точке вне трубы перпендикулярен ее оси симметрии и прямая линия, вдоль которой расположился этот вектор, проходит через ось симметрии трубы-цилиндра. С расстоянием  $R$  от оси симметрии величина вектора напряженности поля убывает по закону  $E = E_{R_0} R_0 / R$ . Здесь  $R_0 = D/2$ ,  $E_{R_0}$  – величина вектора напряженности поля вблизи поверхности трубы вне трубы. Если найти эту величину, то суммарный заряд  $Q$  на трубе можно будет вычислить с помощью формулы

$$Q = \pi DL \epsilon_0 E_{R_0}.$$

Мелкие капельки воды, не несущие электрического заряда, во внешнем электрическом поле приобретают на своей поверхности такие электрические заряды, что внутреннее поле во много раз меньше внешнего. А с учетом того, что вода имеет (хоть и небольшую) проводимость, электрическое поле внутри капелек оказывается просто нулевым. Поляризованные таким образом капельки находятся в неоднородном электрическом поле, поэтому на них действует со стороны внешнего поля суммарная ненулевая сила, которая «тя-

нет» эти капельки в сторону более сильного поля, т.е. в направлении оси симметрии трубы. Движение капелек по вертикали происходит под действием силы тяжести, а поскольку сопротивлением воздуха пренебрегается (по условию задачи) пренебречь, то в вертикальном направлении капли движутся равноускоренно с ускорением свободного падения. Горизонтальная же составляющая скорости капелек все время изменяется, но только по направлению. И происходит такое вращательное движение вокруг оси под действием электрической силы. Величина этой силы пропорциональна величине напряженности электрического поля  $E$ , созданного в месте нахождения капелек, скорости изменения (градиенту) этой величины с расстоянием, т.е.  $dE/dR = E_{R_0} R_0 / R^2$ , направленной от оси трубы в этом же месте, и объему  $\alpha$  капелек (если капелька маленькая):

$$F_E = E (dE/dR) \epsilon_0 \alpha = E_{R_0}^2 R_0^2 \epsilon_0 \alpha / R^3.$$

Поэтому для мелких капелек разных размеров, находящихся на одном и том же расстоянии  $R$  от оси трубы, отношение силы  $F_E$  к массе капли  $m = \alpha \rho_{\text{воды}}$ , т.е. горизонтальная составляющая ускорения, в первом приближении оказывается одним и тем же и равным

$$a = E (dE/dR) \epsilon_0 / \rho_{\text{воды}} = E_{R_0}^2 R_0^2 \epsilon_0 / (\rho_{\text{воды}} R^3).$$

Это же ускорение можно вычислить из данных, приведенных в условии задачи:

$$a = v^2 / R = 200 \text{ м/с}^2.$$

В результате получим уравнение для нахождения величины напряженности поля вблизи поверхности трубы:

$$\epsilon_0 E_{R_0}^2 R_0^2 / R^2 = \rho_{\text{воды}} v^2,$$

откуда

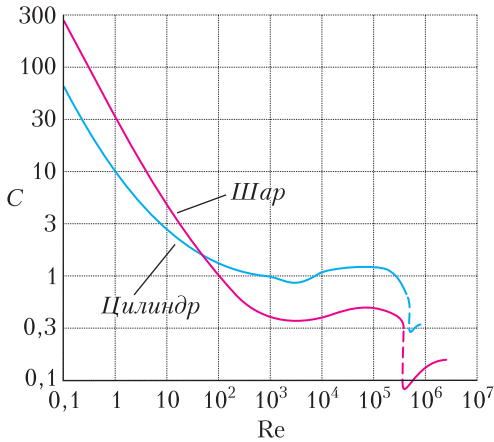
$$E_{R_0} = (\rho_{\text{воды}} / \epsilon_0)^{1/2} (2vR/D).$$

Теперь можно вычислить суммарный электрический заряд всей трубы:

$$Q = \pi DL (\rho_{\text{воды}} \epsilon_0)^{1/2} (2vR/D) = 2\pi vRL (\rho_{\text{воды}} \epsilon_0)^{1/2} \approx 47,3 \cdot 10^{-6} \text{ Кл} = 47,3 \text{ мкКл}.$$

А.Водяной

**Ф2675.** Во время дождя вода, упавшая на крышу, медленно стекает к ее краю, и отрывающиеся от края крыши капли, диаметром 5 мм в полете, имеют начальную нулевую (по отношению к месту отрыва) скорость. Однако, пролетев расстояние  $L = 0,2$  м в воздухе, эти крупные капли приобретают такую же скорость, какую имели мелкие капельки в дожде, а дальше обгоняют их. На рисунке показана связь коэффициента пропорциональности



$C$  между силой сопротивления среды  $F_{\text{сопр}}$  и величиной  $S\rho v^2/2$  в зависимости от числа Рейнольдса  $Re = Dv\rho_{\text{среды}}/\eta_{\text{среды}}$  для шара и для длинного цилиндра при поступательной скорости движения цилиндра, перпендикулярной его оси симметрии. Здесь  $S$  – максимальная площадь поперечного к скорости движения предмета сечения,  $D$  – характерный размер движущегося в подвижной среде (в газе или в жидкости) предмета (диаметр шара или цилиндра в частности),  $v$  – скорость поступательного движения предмета относительно покоящейся среды,  $\rho_{\text{среды}}$  – плотность среды,  $\eta_{\text{среды}}$  – вязкость среды. Если число Рейнольдса меньше  $10^3$ , то установившемся режиму обтекания шарика средой соответствует сила сопротивления, которая описывается формулой Стокса  $F = 3\pi D\eta v$ . Найдите (оцените) установившуюся скорость падения крупных капель. Оцените расстояние, на котором устанавливается скорость больших капель, и размеры (диаметры) мелких капелек дождя.

Не все необходимые для решения задачи численные значения величин приведены в условии. Найдём из справочника значение вязкости воздуха:  $\eta \approx 2 \cdot 10^{-5}$  кг/(м·с). Плотность воздуха зависит и от давления и от температуры, примем значение плотности  $\rho_{\text{воз}} = 1,2$  кг/м<sup>3</sup>. А плотность воды, из которой состоят капли, конечно же, равна  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Будем считать, что капли имеют форму шариков, и найдём из справочника ещё и коэффициент поверхностного натяжения воды:  $\sigma = 0,07$  Дж/м<sup>2</sup>. При нахождении скорости, которую приобретают крупные капли после пролета в воздухе расстояния  $L = 0,2$  м (всего-то!), можно не учитывать силу сопротивления воздуха. Тогда приобретенная скорость будет равна  $v = (2gL)^{1/2} = 2$  м/с. Если предположить, что сила сопротивления, действующая на крупные капли, определяется формулой Стокса, то получается совершенно большое значение установившейся скорости: около 700 м/с. Очевидно, что это неправильный ответ. Используя формулу для турбулентного трения, получаем разумное значение скорости падения больших (5 мм в диаметре) капелек:  $v \approx 3,7$  м/с. Сразу проверим, что при этом значении скорости число Рейнольдса для этих капелек попадает в диапазон  $10^3 - 10^5$ , где коэффициент  $C$  примерно постоянен:

$$Re = 1,2 \cdot 3,7 \cdot 0,005 / (2 \cdot 10^{-5}) = 1,1 \cdot 10^3.$$

Действительно, число Рейнольдса попало в указанный диапазон.

Считая, что капли имеют форму шариков, сравним давление внутри шарика  $p_{\sigma}$ , создаваемое поверхностным натяжением воды, с разницей гидростатических давлений в верхней и нижней частях капли  $\Delta p$ , которая установится, когда скорость капли перестанет изменяться:

$$p_{\sigma} = 4\sigma/D = 56 \text{ Па}, \quad \Delta p = \rho g D = 50 \text{ Па}.$$

Да, капиллярное давление, конечно, больше гидростатического, но не во много раз, т.е. в установившемся режиме движения крупные капли не будут иметь форму шариков. Кривизна поверхности в нижней и в верхней частях капли будет разная. Это означает, что максимальное поперечное сечение движущейся в воздухе с установив-

шейся скоростью капли будет больше, чем у шарика с таким же объемом. Но, отметив это, продолжим оценки для крупных капель. Весьма грубая оценка для расстояния, на котором устанавливается скорость движения, такова:

$$l = (v/g) \cdot 2 \cdot (v/2) \approx 1,4 \text{ м.}$$

Первый множитель соответствует времени разгона тел до скорости  $v$ , если пренебречь трением. Это время умножается на два и на среднюю скорость  $(0 + v)/2$ . Для оценки это подойдет.

Теперь перейдем к мелким каплям. Повидимому, для них режим установившегося движения в воздухе соответствует вязкому трению. Воспользуемся формулой Стокса и запишем условие установившегося движения:

$$3\pi Dv\eta = (4/3)\pi(D/2)^3 \rho g.$$

Скорость движения известна:  $v = 2 \text{ м/с}$ , отсюда находим диаметр мелких капелек:  $D \approx 0,27 \text{ мм}$ . Вычислим для этих капелек число Рейнольдса:  $Re = \rho_{\text{воз}} v D / \eta = 32$ . Полученная величина действительно значительно меньше, чем  $10^3$ , поэтому предположение о вязком характере силы трения справедливо.

*К. Дождевой*

**Ф2676.** Астероид имеет форму плоского диска одинаковой толщины по всей его площади. Диаметр диска во много раз больше его толщины. Этот диск состоит из меди, и вся его поверхность черная-черная. Астероид давно летает вокруг Солнца по круговой орбите и обращен к Солнцу все время одной большой поверхностью, на которую лучи Солнца падают перпендикулярно. Обращенная к Солнцу поверхность диска имеет температуру  $T_1 = 300 \text{ К}$ , а противоположная поверхность, не освещенная Солнцем, имеет температуру  $T_2 = 250 \text{ К}$ . Солнечная постоянная для Земли равна  $E = 1370 \text{ Вт/м}^2$ . Расстояние от Земли до Солнца  $L = 150 \text{ млн км}$ . На каком расстоянии  $x$  от Солнца летает астероид и какова его толщина  $h$ ? Постоянная Стефана–Больцмана  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$ , теплопроводность меди  $\lambda = 400 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ .

В условии сказано, что поверхность «черная-черная», из чего следует, что такая поверхность поглощает все падающее на нее излучение Солнца. Толщина диска во много раз меньше его диаметра, поэтому поглощением и излучением на боковой поверхности диска можно пренебречь в сравнении с потоками мощности через большие (торцевые) поверхности. Тепловой режим уже установился, поэтому существует баланс между поступлением энергии к астероиду и потерями энергии, связанными с тепловым излучением в окружающее космическое пространство. Уравнение теплового баланса поступления и потерь энергии имеет вид

$$ESL^2/x^2 = \sigma(T_1^4 + T_2^4)S.$$

Отсюда находим искомое расстояние:

$$x = L(E/\sigma)^{1/2} / (T_1^4 + T_2^4)^{1/2} = 212,8 \text{ млн км.}$$

К неосвещенной поверхности диска поток мощности обеспечивается за счет разницы температур и теплопроводности материала, из которого состоит диск:

$$S\lambda(T_1 - T_2)/h = S\sigma T_2^4,$$

откуда толщина астероида

$$h = \lambda(T_1 - T_2) / (\sigma T_2^4) = 90,3 \text{ м.}$$

*А. Медный*

**Ф2677.** Возраст Анатолия Ивановича в годах численно совпадает с его массой в килограммах – 75 кг. Масса кресла 5 кг. Масса полиспаста с подвижной осью 10 кг. Пренебрегая массой веревки и трением в осях шкивов, найдите, с какой силой Анатолий Иванович должен тянуть за веревку, чтобы медленно поднимать себя вместе с креслом (см. рисунок).

На фотографии видно, что в состав полиспаста входят три шкива с одинаковыми размерами. От этих трех шкивов вверх уходят шесть вертикальных участков веревки. И еще за один участок веревки Анатолий Иванович держится рукой. Итого вертикальных участков веревки семь, и все они при подъеме будут натянуты с одинаковыми силами. Общая масса всего, что поднимается вверх, равна 90 кг. По-





этому сила, с которой можно себя поднять, потянув за веревку, равна  $90 \cdot 9,8/7 \text{ Н} = 126 \text{ Н}$ . Кстати, такое кресло с полиспастом имеется в детском лагере «Океан».

*С. Полиспастов*

**Ф2678.** На высоком,  $H = 30 \text{ м}$ , ледяном утесе (айсберге) на его гладкой поверхности лежит выпрямленная тонкая однородная золотая цепочка длиной  $L = 30 \text{ см} \ll H$ . Совсем небольшой по длине участок цепочки,  $d = 30 \text{ мм} \ll L$ , свешивается с закругленного,  $R = L/30 \text{ см} \ll d$ , и гладкого края этого айсберга параллельно его вертикальной стенке. Вся цепочка перпендикулярна краю горизонтальной площадки на вершине айсберга и в начальный момент неподвижна. Цепочка начинает скользить и, слетев целиком с айсберга, падает в воду, занимая в момент перед касанием воды вертикальное положение. Каково в итоге горизонтальное смещение того маленького участка цепочки, который свешивался с края

айсберга до начала ее скольжения? Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Будем пользоваться всеми неравенствами, обозначенными в условии, считая их «сильными». Обозначим длину участка цепочки, который уже соскользнул с края ледяной горизонтальной поверхности и принял вертикальное положение, через  $x < L$ . Считаем, что остальная часть цепочки еще находится на горизонтальной поверхности и продолжает ускоряться. Из закона сохранения механической энергии находим величину скорости всех частей цепочки в этот момент:

$$mg \frac{x}{L} \cdot \frac{x}{2} = \frac{mv_x^2}{2}, \text{ и } v_x = x \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

Ищем такую величину  $x$ , при которой горизонтальная составляющая импульса цепочки принимает максимальное значение. Начиная с этого момента сила, действующая на цепочку со стороны айсберга, имеет только вертикальную составляющую.

Горизонтальная составляющая импульса цепочки равна

$$m \frac{L-x}{L} \cdot x \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

Ее максимальная величина достигается в момент, когда  $x = L/2$ . В итоге центр масс цепочки приобретает горизонтальную составляющую скорости, равную

$$v_0 = \frac{\sqrt{gL}}{4}.$$

Эта составляющая скорости при дальнейшем движении цепочки не изменяется.

С учетом условия, что высота айсберга во много раз больше длины цепочки, можно найти время свободного падения цепочки:

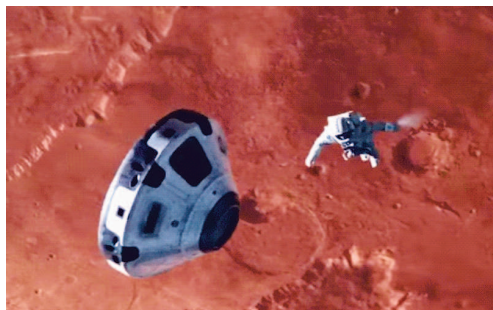
$$H = \frac{gt^2}{2}, \text{ откуда } t = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

К моменту, когда цепочка долетела до поверхности воды, ее горизонтальное смещение по отношению к вертикальной стене айсберга составило

$$l = v_0 t = \frac{\sqrt{gL}}{4} \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{\sqrt{2LH}}{4} \approx 1,06 \text{ м}.$$

*В. Цепочкин*





**Ф2679.** Герой фильма «Марсианин» для управления своим движением в открытом космосе сделал в перчатке своего скафандра с помощью кусачек отверстие и, направляя струю вылетающего из отверстия воздуха, изменял свою скорость движения. Оцените величину силы, которая толкала этого героя, и ускорение, которое он приобретал. А также проанализируйте ситуацию, показанную на рисунке (кадр из фильма). Космонавт длительное время движется поступательно, разгоняясь.

Если площадь сечения отверстия  $S = 1 \text{ см}^2$ , а давление воздуха внутри скафандра  $p = 10^5 \text{ Па}$ , то оценка для силы получается такой:

$$F = Sp = 10 \text{ Н.}$$

При массе космонавта (астронавта, марсианина) вместе со скафандром  $m = 100 \text{ кг}$  он будет приобретать ускорение, равное

$$a = \frac{F}{m} = 0,1 \text{ м/с}^2 \text{ (всего-то!).}$$

Это означает, что «швырять» космонавта из стороны в сторону в корабле, как это показано в фильме, такая сила уж точно не могла, и приобрести за несколько секунд скорость в несколько метров в секунду марсианин тоже не мог. При этом «расход» воздуха (в  $\text{м}^3/\text{с}$ ), равный произведению площади поперечного сечения отверстия на скорость звука в воздухе при температуре внутри скафандра (а это примерно  $300 \text{ м/с}$ ), составлял бы  $0,03 \text{ м}^3/\text{с} = 30 \text{ л/с}$ . Иными словами, всего-то за одну секунду из отверстия вылетел бы воздух, объем которого в несколько раз больше объема воздуха внут-

ри скафандра. И весьма маловероятно, что система подачи воздуха, хранящегося в сжатом виде в скафандре, могла обеспечивать такой расход воздуха.

И наконец, в показанной на рисунке ситуации при таком расположении руки, струи воздуха и тела космонавта он обязательно должен был бы изменять свою угловую скорость, т.е. поступательное движение в этой ситуации невозможно.

Так что и фильм фантастический, и физика в нем тоже фантастическая, т.е. нереальная.

Д.Марсианин



**БИБЛИО-ГЛОБУС**  
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНЫЙ

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ  
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

УСЛУГИ	АССОРТИМЕНТ
<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Интернет-магазин <a href="http://www.bgshop.ru">www.bgshop.ru</a></li> <li>■ Кафе</li> <li>■ Клубные (дисконтные) карты и акции</li> <li>■ Подарочные карты</li> <li>■ Предварительные заказы на книги</li> <li>■ Встречи с авторами</li> <li>■ Читательские клубы по интересам</li> <li>■ Индивидуальное обслуживание</li> <li>■ Подарочная упаковка</li> <li>■ Доставка книг из-за рубежа</li> <li>■ Выставки-продажи</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Книги</li> <li>■ Аудиокниги</li> <li>■ Антиквариат и предметы коллекционирования</li> <li>■ Фильмы, музыка, игры, софт</li> <li>■ Канцелярские и офисные товары</li> <li>■ Цветы</li> <li>■ Сувениры</li> </ul>

г. Москва,  
м. Лубянка,  
м. Китай-город  
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1

8 (495) 781-19-00

[www.biblio-globus.ru](http://www.biblio-globus.ru)

пн – пт 9:00 - 22:00  
сб – вс 10:00 - 21:00  
без перерыва на обед

[www.biblio-globus.ru](http://www.biblio-globus.ru)

2 января 2022 года исполнилось бы 90 лет Николаю Николаевичу Константинову, выдающемуся популяризатору науки. Эта статья посвящена его памяти.

## Задача о рассеянной старушке

**А.ЗАСЛАВСКИЙ**

Источником этой статьи послужила следующая задача.

**Задача 1.** В очереди на посадку в  $n$ -местный самолет стоят  $n$  пассажиров. Первой в очереди стоит рассеянная старушка, которая, зайдя в самолет, садится на случайно выбранное место. Каждый следующий пассажир садится на свое место, если оно свободно, и на случайное место в противном случае. С какой вероятностью последний пассажир сядет на свое место?

Сложно сказать, кто является автором этой задачи. Автор статьи узнал ее от Николая Николаевича Константинова, у которого задача была одной из любимых. Она действительно весьма интересна. В частности, на каждого решившего ее производит впечатление неожиданный ответ.

**Ответ:**  $1/2$ .

**Решение.** Будем доказывать ответ индукцией по длине очереди. При двух пассажирах он, очевидно, верен. Предположим его справедливость для  $2, 3, \dots, n-1$  пассажиров и рассмотрим очередь длины  $n$ . Можно считать, что у  $k$ -го пассажира билет на место с номером  $k$ . Возможны следующие случаи.

1. Старушка села на место 1. Тогда все остальные пассажиры окажутся на своих местах, т.е. у последнего пассажира вероятность занять свое место равна 1.

2. Старушка села на место  $n$ . Тогда для последнего пассажира вероятность занять свое место равна 0.

3. Старушка села на место  $k$ ,  $2 \leq k \leq n-1$ . Тогда пассажиры  $2, 3, \dots, k-1$  сядут на свои места, а пассажир  $k$  будет вести себя так же, как еще одна рассеянная старушка с билетом на место 1. По предположению индукции вероятность, что последний пассажир займет свое место, равна  $1/2$ .

Теперь получаем, что искомая вероятность равна.

$$\frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{1}{n} \cdot 0 + \frac{n-2}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Обобщением задачи 1 является такая задача.

**Задача 2** (M2220, М.Гервер). Скандалист и  $n$  нормальных зрителей купили билеты в кинотеатр. При этом билеты на  $s$  мест остались непроданными. Скандалист вошел первым и сел на первое попавшееся место. Нормальный зритель, войдя в кинотеатр, занимает свое место, если оно свободно, и садится на первое попавшееся место в противном случае. С какой вероятностью последний зритель не сможет сесть на свое место?

**Ответ:**  $\frac{1}{s+2}$ .

Решение задачи M2220, практически повторяющее решение задачи 1, можно прочитать в «Кванте» № 5–6 за 2011 год.

Задачу 2 можно переформулировать так.

**Задача 3.** В условиях задачи 1 найдите вероятность того, что  $l$ -й с конца пассажир не сможет занять свое место.

**Ответ:**  $\frac{1}{l+1}$ .

Нетрудно видеть, что задачи 3 и 2 фактически не различаются: если удалить из очереди несколько последних пассажиров и считать билеты на их места непроданными, для оставшихся пассажиров ничего не изменится. А мы переходим к решению следующей задачи.

**Задача 4** (M2673). Сколько в среднем пассажиров окажутся не на своих местах в условиях задачи 1?

**Ответ:**  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}$  (при больших  $n$  эта сумма близка к  $\ln n$ ).

**Решение.** Обозначим через  $N$  общее количество равновероятных вариантов рассадки. Тогда, как следует из задачи 2, при  $l \leq n-1$  пассажир,  $l$ -й с конца, не занял свое место в  $\frac{N}{l+1}$  вариантах, а  $n$ -й с конца пассажир, т.е. старушка, не занимает свое место в  $\frac{(n-1)N}{n}$  вариантах. Усреднив (т.е. сложив эти количества и разделив на  $N$ ), получим ответ.

То же решение на языке случайных величин, который принят в теории вероятностей, будет выглядеть так. Пусть случайная величина  $X_l$ ,  $l = 1, \dots, n$ , принимает значение 1, если  $l$ -й с конца пассажир не смог занять свое место, и 0 в противном случае. Из задачи 2 следует, что при  $l \leq n-1$  среднее значение  $X_l$  равно  $\frac{1}{l+1}$ . Очевидно также, что среднее значение  $X_1$  (для рассеянной старушки) равно  $\frac{n-1}{n}$ . Сложив эти значения, получим ответ.

Предположим теперь, что в начале очереди стоит не одна, а  $k$  старушек.

**Задача 5.** Для каждого  $l = 1, 2, \dots, n-k$  найдите вероятность того, что  $l$ -й с конца пассажир не сможет занять свое место.

**Ответ:**  $\frac{k}{k+l}$ .

**Решение.** Обозначим искомую вероятность через  $P_n(k, l)$  и будем решать задачу по индукции. Для  $k = 1$  доказываемая формула совпадает с полученной в задаче 3. Предположим, что она верна для любой длины очереди, если рассеянных пассажиров  $1, 2, \dots, k-1$ , а также для  $k$  рассеянных пассажиров и длине очереди  $n-1$ . Заметим, что для  $l$ -го с конца пассажира несущественно, садится ли очередной рассеянный пассажир на одно из  $k$  первых или на одно из  $l-1$  последних мест. Назовем эти  $k+l-1$  мест *безопасными*, а остальные  $n-k-l$  (исключая место самого пассажира) — *опасными*. Возможны следующие случаи.

1. Первая старушка садится на место  $l$ -го пассажира. Тогда вероятность, что он не займет свое место, равна 1.

2. Первая старушка занимает безопасное место. Тогда мы попадаем в ситуацию, когда в очереди из  $n-1$  пассажира стоят  $k-1$  старушек, а число безопасных мест равно  $k+l-2$ . Можно считать, что  $k-1$  из этих мест являются первыми, а остальные последними, поэтому искомая вероятность равна

$$P_{n-1}(k-1, l) = \frac{k-1}{k+l-1}.$$

3. Первая старушка занимает опасное место. Тогда пассажир с билетом на это место будет вести себя, как еще одна старушка, а число безопасных мест не изменилось. Значит, искомая вероятность равна

$$P_{n-1}(k, l) = \frac{k}{k+l}.$$

Окончательно получаем

$$P_n(k, l) = \frac{1}{n} + \frac{k+l-1}{n} \frac{k-1}{k+l-1} + \frac{n-k-l}{n} \frac{k}{k+l} = \frac{k}{k+l}.$$

Тем самым, задача 5 решена.

Последний случай требует некоторых пояснений. После того, как первая старушка займет опасное место, задача формально не будет эквивалентна исходной, поскольку старушки не обязательно будут занимать  $k$  первых мест в очереди. Однако с точки зрения  $l$ -го с конца пассажира существенно лишь, что  $k$  рассеянных пассажиров стоят впереди него (действительно, нетрудно убедиться, что при перестановке двух соседних пассажиров вероятность того, что пассажир, стоящий после них, окажется не на своем месте, не изменится). Это соображение позволяет сделать последний шаг и рассмотреть случай, когда рассеянные старушки стоят не в начале очереди, а распределены по ней случайно. У автора не получилось привести ответ для этого случая к замкнутому (не содержащему знака суммирования) виду. Возможно, это удастся читателям.

## Задачи

1. В Солнечном городе 5 коротышек едят пончики ежедневно, 7 коротышек едят пончики через день, а остальные вообще не едят пончики. Вчера 9 коротышек ели пончики. Сколько коротышек будут есть пончики сегодня?

*Е.Бакаев*



2. Вставьте вместо каждой звездочки цифру так, чтобы произведение трех десятичных дробей равнялось



натуральному числу. Использовать ноль нельзя, зато остальные цифры могут повторяться.

*А.Шаповалов*


Задача 1 предлагалась на муниципальном этапе Всероссийской олимпиады по математике в Московской области, задачи 2–4 предлагались – на XLIV Турнире имени М.В.Ломоносова.

3. В игре «Тантрикс-солитер» возможны фишки 14 типов:



Каждую из них можно поворачивать, но нельзя переворачивать: именно поэтому первые 2 фишки разные – их нельзя получить друг из друга поворотом. Фишки разрешается прикладывать друг к другу так, чтобы линии одного цвета были продолжениями друг друга. У Саши было по одной фишке каждого типа, и он мог выложить их так, чтобы все синие линии образовывали «петлю» и при этом чтобы в картинке не было «дырок»:



Саша потерял фишку . Докажите, что теперь он не сможет выложить оставшиеся 13 фишек так, чтобы в картинке не было «дырок», а все синие линии образовывали петлю.

*А.Антропов*

4. У золотоискателя есть куча золотого песка массой 37 кг (и больше песка у него нет), двухчашечные весы и две гири 1 и 2 кг. Золотоискатель умеет делать действия двух типов:

- уравнивать весы, т.е. если сейчас весы не в равновесии, то он может пересыпать часть песка с одной чаши на другую так, чтобы весы уравнились;





• досыпать до равновесия, т.е. если сейчас весы не в равновесии, то он может добавить песка на одну из чаш так, чтобы весы уравнились. Конечно, каждое из этих действий он может совершить, только если для этого у него хватает песка. Как ему за два действия с весами получить кучку, в которой ровно 26 кг песка? Смешать две кучки песка, а также просто поставить что-то на весы действием не считается.

*М.Евдокимов*

## КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

*Мы продолжаем конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на участников не младше 8–9 класса, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).*

*Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com. Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.*

*Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.*

*Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest Желаем успеха!*

17. И круг, и прямоугольник легко разрезать на любое количество одинаковых частей. Существует ли фигура с тем же свойством, у которой нет ни центра симметрии, ни оси симметрии? (Части должны быть одинаковы и по форме, и по площади.)

*Фольклор*

18. а) В белом клетчатом квадрате  $101 \times 101$  покрасили черным несколько клеток. Каждая пара соседних по стороне клеток бывает одного из трех типов: обе клетки белые, обе клетки черные или же клетки разного цвета. Может ли оказаться, что количество пар всех трех типов одинаковое?

б) Тот же вопрос про квадрат  $100 \times 100$ .

*Н.Авилов*

19. Правильный треугольник со стороной 3 и правильный треугольник со стороной 4 в пересечении дают выпуклый шес-

тиугольник периметра 7. Докажите, что у треугольников соответствующие стороны параллельны.

*П.Кожевников*

20. Последовательностью Фибоначчи называется последовательность чисел, в которой первые два числа равны 1, а каждое последующее число равно сумме двух предыдущих. Вот первые несколько чисел, Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...

а) Для каких  $n$  можно первые  $n$  чисел последовательности Фибоначчи разделить на две группы, содержащие поровну чисел, так, чтобы суммы чисел в этих группах были равны между собой?

б) Для каких  $n$  можно первые  $n$  чисел последовательности Фибоначчи разделить более чем на две группы (не обязательно содержащие поровну чисел) так, чтобы суммы чисел в этих группах были равны между собой?

*И.Акулич*



# Квадраты вокруг параллельников И полупараллельников

*Е.МОРОЗОВ, Ф.НИЛОВ*

**В** ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЯХ зачастую оказывается интересным строить на сторонах произвольного многоугольника правильные многоугольники. Несмотря на то, что подобные построения рассматривали еще древние греки, некоторые новые результаты появляются и в наши дни. В классическом доказательстве Евклида теоремы Пифагора на сторонах прямоугольного треугольника строятся квадраты (рис. 1,а). Теорема Наполеона гласит, что если на сторонах произвольного треугольника построить правильные треугольники, то их центры также будут являться вершинами правильного треугольника (рис. 1,б). Французский задачный композитор Виктор Тебо заметил, что если построить на сторонах параллелограмма квадраты, то их центры будут образо-

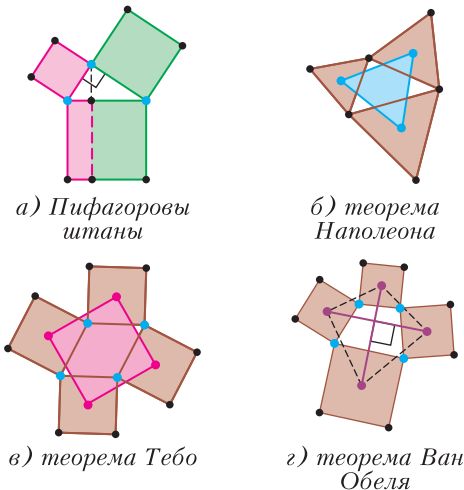


Рис. 1. Надстройки из квадратов и правильных треугольников

вывать квадрат (рис. 1,в). Теорема фламандского математика Ван Обеля утверждает, что если взять центры квадратов, построенных на сторонах произвольного четырехугольника, то они будут являться вершинами четырехугольника, диагонали которого перпендикулярны и имеют равную длину (рис. 1,г). Отметим, что на рисунках 1,б-г правильные треугольники и квадраты можно строить и во внутреннюю сторону, для них будут справедливы аналогичные утверждения.

В этой статье мы будем надстраивать вокруг некоторых многоугольников бесконечное число слоев квадратов и изучать свойства полученной конструкции. Мы решим задачу **M2629** (теорема 1 ниже) и докажем теоремы, анонсированные в статье [1].

Рассмотрим произвольный (зеленый) треугольник (рис. 2). На его сторонах за внешнюю

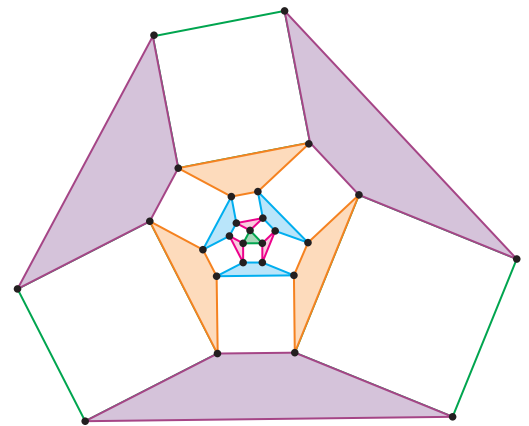


Рис. 2. Квадраты вокруг треугольника

сторону построим белые квадраты. Некоторые из их вершин соединим отрезками, на них снова построим во внешнюю сторону белые квадраты и т. д. В промежутках между квадратами образовались треугольники и четырехугольники, которые окрасим так, чтобы многоугольники в одном слое были окрашены одинаково, а в разных – по-разному. Тогда справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** а) Все окрашенные четырехугольники являются трапециями;

б) площади всех многоугольников одного и того же цвета равны;

в) отношения длин оснований одноцветных трапеций равны;

г) если  $S_0 = 1$  – площадь исходного треугольника, а  $S_i$  – площадь цветного многоугольника в  $i$ -м слое, то  $S_1 = 1$ ,  $S_2 = 5$ , а для  $n \geq 3$  выполняется равенство  $S_n = 5S_{n-1} - S_{n-2}$ .

Пункты а), б), г) этой теоремы были сформулированы в работе [2] и доказаны с помощью методов линейной алгебры. Мы приведем два красивых геометрических доказательства (первое придумано вторым автором, второе – первым). Оба доказательства основаны на упрощении исходной конструкции с помощью некоторых специальных преобразований, в результате которых все квадраты «схлопываются» в отрезки.

В первом доказательстве конструкция из теоремы рассматривается как шарнирный механизм, который сначала изгибается до некоторого крайнего положения, а затем к получившейся конструкции применяется аффинное преобразование. Второе доказательство использует параллельный сдвиг одноцветных многоугольников, при котором они стыкуются друг с другом по равным сторонам (эти стороны являются сторонами квадратов в одном слое).

Теорема 1 допускает обобщения для многоугольников некоторого специального вида – *параллельников* и *полупараллельников*. Определения этих понятий и формулировки соответствующих теорем мы дадим позже.

### Шарнирное доказательство

Давайте представим, что окрашенные многоугольники (кроме белых квадратов) в теореме 1 являются жесткими фигурами, а в их вершинах поместим шарниры. Оказывается, получившуюся конструкцию можно изгибать таким образом, что все квадраты в процессе изгибания деформируются в подобные друг другу ромбы, а в крайнем положении вырождаются в отрезки (рис.3). Поясним это утверждение.

Мы стартуем с точно такого же зеленого треугольника, как на рисунке 2. На его сторонах во внешнюю сторону построим белые ромбы с одинаковым острым углом  $\varphi$  таким образом, чтобы к каждой вершине примыкали

ли углы двух ромбов, составляющие в сумме  $180^\circ$ . Так же, как и в теореме 1, некоторые из их вершин соединим отрезками. Заметим, что вновь образованные треугольники будут равны треугольникам в конструкции теоремы 1 (по первому признаку). На проведенных отрезках снова построим во внешнюю сторону белые ромбы с углом  $\varphi$  таким образом, чтобы к каждому концу отрезка снова примыкали углы двух ромбов, дополняющие друг друга до  $180^\circ$ . Давайте опять соединим те же вершины отрезками, что и в теореме 1. Заметим, что вновь получившиеся четырехугольники будут равны четырехугольникам второго слоя на рисунке 2 (по трем последовательным сторонам и двум углам между ними), окрасим их точно таким же образом. Повторяя данный процесс, мы убеждаемся, что четырехугольники одного слоя на рисунке 2 и на рисунке 3 слева являются равными.

Таким образом, меняя угол  $\varphi$ , мы действительно получаем изгибание конструкции на рисунке 2. Стартуя с угла  $\varphi = 90^\circ$ , можно уменьшить его до  $0^\circ$ . В итоге получим вырожденную ситуацию, изображенную на рисунке 3 справа. Анимацию этого изгибания можно найти на сайте журнала «Квантик» (там же представлены интерактивные чертежи к теореме 1 и ее обобщениям). Теперь нам достаточно доказать утверждения теоремы 1 для окрашенных многоугольников на рисунке 3 справа. Для этого нам понадобится следующее понятие.

*Аффинным* называется преобразование плоскости, переводящее каждую прямую в прямую и параллельные прямые в параллельные.

Отметим два важных свойства аффинных преобразований.

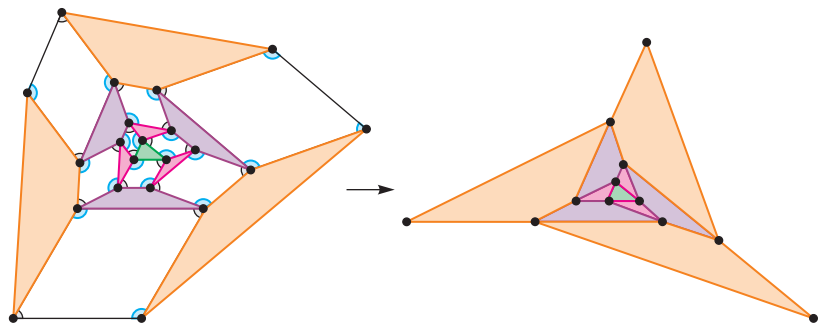


Рис. 3. Изгибание, при котором белые подобные ромбы вырождаются в отрезки

(1) Аффинные преобразования сохраняют отношения длин параллельных отрезков.

(2) Отношение площади любой фигуры к площади ее образа при аффинном преобразовании постоянно для всех фигур.

Если одну фигуру можно перевести аффинным преобразованием в другую, то такие фигуры мы будем называть *аффинно эквивалентными*. Нам понадобится такое утверждение.

**Утверждение 1.** *Для любых двух треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$  существует аффинное преобразование, переводящее  $A$  в  $A'$ ,  $B$  в  $B'$ ,  $C$  в  $C'$ . В частности, любой треугольник аффинно эквивалентен правильному.*

Более подробно про аффинные преобразования (в том числе доказательство данного утверждения) можно прочитать в брошюре [3].

Используя утверждение 1, переведем исходный треугольник в вырожденной конфигурации на рисунке 3 справа в правильный. Заметим, что теперь пункты б) и в) теоремы 1 становятся очевидными, поскольку окра-

шенные одинаково многоугольники просто равны (переходят друг в друга при повороте на  $120^\circ$  относительно центра правильного треугольника). Для доказательства пункта а) можно применить «обратное» шарнирное изгибание, при котором угол  $\Phi$  меняется от  $0^\circ$  до  $90^\circ$  (все окрашенные многоугольники при этом не меняются). В результате получим конфигурацию из квадратов, построенных вокруг правильного треугольника. Очевидно, что в этом случае все окрашенные четырехугольники будут являться трапециями, значит, и изначально они были трапециями.

Пункт г) теоремы 1 мы докажем в следующем разделе.

*Замечание 1.* Отметим, что если пытаться сразу (минуя изгибание) применять аффинное преобразование к исходному треугольнику, переводящее его в правильный, то квадраты конструкции перейдут в параллелограммы, поэтому так доказать теорему не получится.

**Доказательство с помощью сдвигов**

Обозначим точки, как показано на рисунке 4. Тогда утверждения теоремы относятся к четырехугольникам  $A_n A_{n+1} F_{n+1} F_n, B_n B_{n+1} C_{n+1} C_n,$

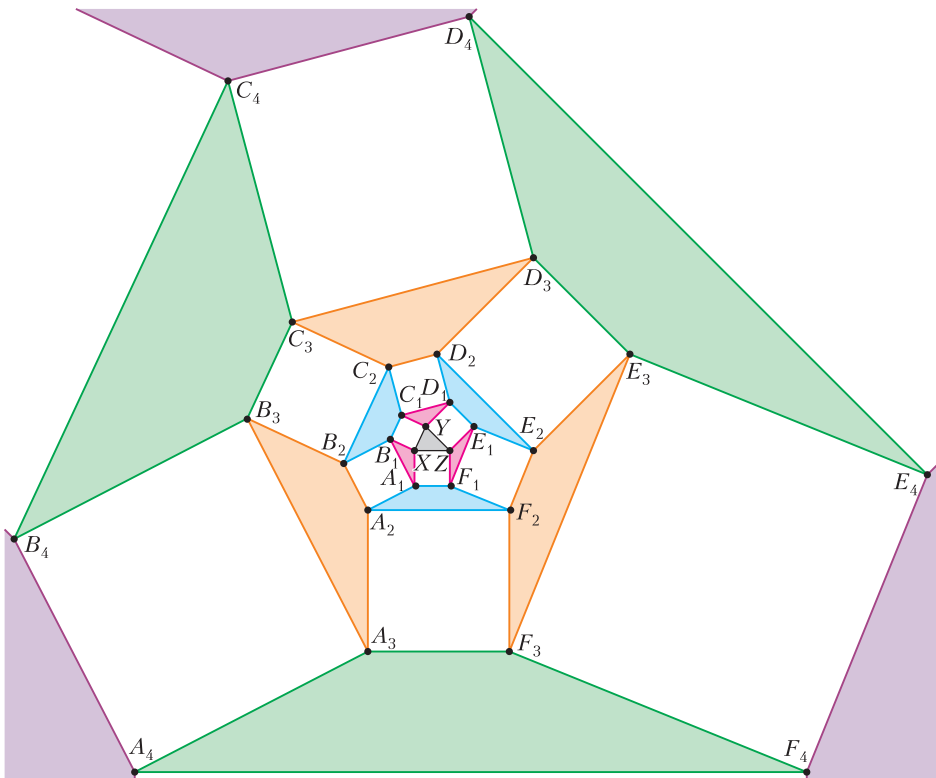


Рис. 4. Надстройки из квадратов

$D_n D_{n+1} E_{n+1} E_n$  для четного  $n$  и четырехугольникам  $A_n A_{n+1} B_{n+1} B_n$ ,  $C_n C_{n+1} D_{n+1} D_n$ ,  $E_n E_{n+1} F_{n+1} F_n$  для нечетного  $n$ . Число  $n$  будем называть порядком четырехугольника.

Доказательство теоремы требует некоторой подготовки. Следующая лемма содержит необходимые нам факты о паре квадратов с общей вершиной.

**Лемма.** Пусть  $BCDA$  и  $BKMN$  – два квадрата с общей вершиной  $B$  (вершины обоих квадратов перечислены по часовой стрелке). Тогда

- (i) площади треугольников  $ABK$  и  $CBN$  равны;
- (ii) медиана  $BE$  треугольника  $ABK$  и высота  $BF$  треугольника  $CBN$  лежат на одной прямой;
- (iii) в обозначениях предыдущего пункта  $CN = 2BE$ .

**Упражнение 1.** Докажите эту лемму.

Теперь сдвинем четырехугольник  $A_1 A_2 F_2 F_1$  на вектор  $\overline{A_1 X}$  (см. рис. 4). Затем сдвинем четырехугольник  $A_3 A_4 F_4 F_3$  на вектор  $\overline{A_3 A_2} + \overline{A_1 X}$ , и вообще, для каждого нечетного  $n$  сдвинем четырехугольник  $A_n A_{n+1} F_{n+1} F_n$  на вектор

$$\overline{A_n A_{n-1}} + \overline{A_{n-2} A_{n-3}} + \dots + \overline{A_3 A_2} + \overline{A_1 X}.$$

Поступив аналогичным образом с остальными четырехугольниками нечетного порядка, получим то, что изображено на рисунке 5,а. Легко видеть, что в результате этого процесса четырехугольники нигде не наложатся друг на друга и вместе с треугольником  $XYZ$  заполняют всю плоскость.

Нечто похожее можно проделать и для четырехугольников четного порядка. Пусть  $M$  – точка пересечения медиан треугольника  $XYZ$ . Сдвинем треугольник  $A_1 X B_1$  на вектор  $\overline{XM}$ . Затем для каждого четного  $n$  сдвинем четырехугольник  $A_n A_{n+1} B_{n+1} B_n$  на вектор

$$\overline{A_n A_{n-1}} + \overline{A_{n-2} A_{n-3}} + \dots + \overline{A_2 A_1} + \overline{XM}$$

и поступим аналогичным образом с остальными четырехугольниками четного порядка. Результат показан на рисунке 5,б. Из п.(ii) леммы следует, что  $A_1 X$  параллелен медиане треугольника  $C_1 Y D_1$ . Отсюда следует, что прямая  $P_1 M$  содержит медиану треугольника  $Q_1 M R_1$ , т.е.  $M$  лежит на медиане треугольника  $P_1 Q_1 R_1$  из вершины  $P_1$ . Аналогично,  $M$  лежит и на остальных медианах треугольника  $P_1 Q_1 R_1$ , т.е. является его точкой пересечения медиан.

Мы наконец готовы приступить к доказательству теоремы. Будем рассуждать индукцией по  $n$ . Начнем с  $n = 1$ . Многократное применение п.(i) леммы дает

$$S_{A_1 F_1 A_2} = S_{A_1 X B_1} = S_{XYZ} = S_{F_2 Z E_1} = S_{F_1 A_1 F_2},$$

откуда получаем, что  $A_1 A_2 F_2 F_1$  – трапеция. Аналогичным образом доказывается, что  $B_1 B_2 C_2 C_1$  и  $D_1 D_2 E_2 E_1$  – трапеции.

Чтобы доказать оставшиеся утверждения теоремы для трапеций 1-го порядка, обратимся к рисунку 5,а. Мы уже знаем, что четырехугольники  $XP_2 Q_2 Y$ ,  $YQ_2 R_2 Z$ ,  $XP_2 R_2 Z$  – трапеции. Поэтому стороны треугольников  $XYZ$  и  $P_2 Q_2 R_2$  параллельны, а

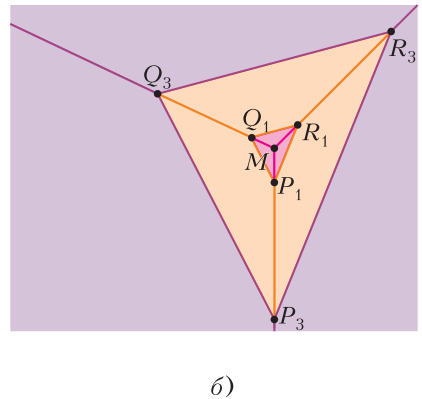
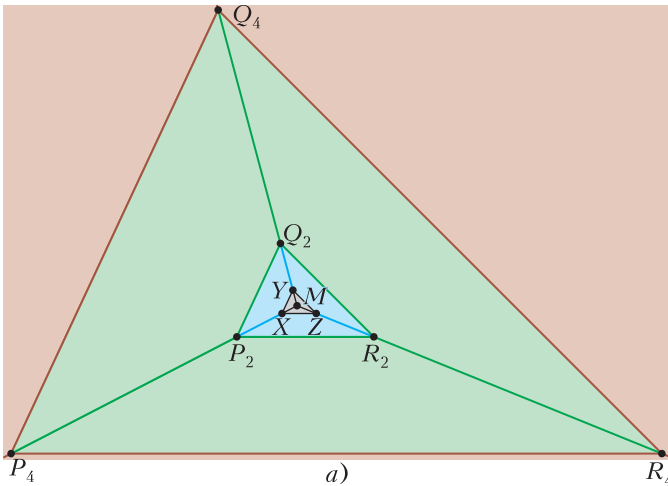


Рис. 5. Результат сдвига четырехугольников

сами треугольники подобны. Это доказывает равенство отношений оснований трапеций. Далее, по п. (ii) леммы имеем  $A_1B_1 \perp XM$ , поэтому  $A_1A_2 \parallel XM$ . Это значит, что на рисунке 5,а точка  $P_2$  лежит на прямой  $XM$ . Аналогично, точка  $Q_2$  лежит на прямой  $YM$ , а точка  $R_2$  – на прямой  $ZM$ . Поскольку  $M$  – точка пересечения медиан треугольника  $XYZ$ , то и площади трапеций равны.

Переход индукции  $n \rightarrow n + 1$  доказывается похожим образом. Пусть  $n$  нечетно (случай четного  $n$  доказывается аналогично). Имеем

$$S_{A_{n+2}A_{n+1}B_{n+1}} = S_{A_nA_{n+1}F_{n+1}} = S_{B_nB_{n+1}C_{n+1}} = S_{B_{n+2}B_{n+1}A_{n+1}},$$

где два крайних равенства следуют из п. (i) леммы, а среднее – из предположения индукции (площади и отношения оснований трапеций  $A_nA_{n+1}F_{n+1}F_n$  и  $B_nB_{n+1}C_{n+1}C_n$  равны). Следовательно, четырехугольники  $A_{n+1}A_{n+2}B_{n+2}B_{n+1}$  является трапецией и, аналогично, четырехугольники  $C_{n+1}C_{n+2}D_{n+2}D_{n+1}$  и  $E_{n+1}E_{n+2}F_{n+2}F_{n+1}$  тоже.

Теперь посмотрим на рисунок 5,б. Мы только что доказали, что четырехугольники  $P_nP_{n+2}Q_{n+2}Q_n$ ,  $Q_nQ_{n+2}R_{n+2}R_n$ ,  $P_nP_{n+2}R_{n+2}R_n$  – трапеции. Отсюда и из предположения индукции следует, что стороны треугольников  $P_{n+2}Q_{n+2}R_{n+2}$ ,  $P_nQ_nR_n$ , ...,  $P_1Q_1R_1$  параллельны, а сами треугольники подобны. Это доказывает равенство отношений оснований трапеций. Далее, из предположения индукции  $A_{n+1}F_{n+1} \parallel A_nF_n \parallel \dots \parallel A_1F_1 \parallel XZ$ . Поэтому  $A_{n+2}A_{n+1} \parallel A_nA_{n-1} \parallel \dots \parallel A_1X$ . Это значит, что на рисунке 5,б точки  $P_{n+2}, P_n, \dots, P_1, M$  лежат на одной прямой. Аналогично, точки  $Q_{n+2}, Q_n, \dots, Q_1, M$  лежат на одной прямой и точки  $R_{n+2}, R_n, \dots, R_1, M$  лежат на одной прямой. Поскольку  $M$  – точка пересечения медиан треугольника  $P_1Q_1R_1$ , то площади трапеций равны. Теорема доказана.

Пусть теперь  $S_{XYZ} = S_0$  и  $S_{A_1XB_1} = S_{C_1YD_1} = S_{E_1ZF_1} = S_1$ , а площадь трапеций  $n$ -го порядка равна  $S_{n+1}$ . Имеем

$$XP_2 = A_1A_2 = A_1B_1 = 3XM,$$

где последнее равенство следует из п. (iii) леммы, а также из того, что точка пересечения медиан делит сами медианы в отношении 2:1, считая от вершины. Отсюда получаем, что коэффициент подобия треугольников  $XYZ$  и  $P_2Q_2R_2$  равен 4, откуда уже легко видеть, что  $S_2 = 5S_0$ . Покажем, что для любого  $n \geq 1$  имеет место равенство

$$S_{n+2} = 5S_{n+1} - S_n. \quad (*)$$

Обозначим через  $k_n$  коэффициент подобия треугольников  $P_nQ_nR_n$  и  $XYZ$ , если  $n$  четно, и коэффициент подобия треугольников  $P_nQ_nR_n$  и  $P_1Q_1R_1$ , если  $n$  нечетно. Тогда  $k_1 = 1$ , а при четном  $n \geq 2$  имеем

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{P_nM}{XM} = \frac{P_nP_{n-2}}{XM} + \frac{P_{n-2}P_{n-4}}{XM} + \dots + \frac{P_2X}{XM} + 1 = \\ &= 3 \left( \frac{P_{n-1}Q_{n-1}}{P_1Q_1} + \frac{P_{n-3}Q_{n-3}}{P_1Q_1} + \dots + \frac{P_1Q_1}{P_1Q_1} \right) + 1 = \\ &= 3(k_{n-1} + k_{n-3} + \dots + k_1) + 1. \end{aligned}$$

Похожим образом, для нечетного  $n \geq 3$  справедливо равенство

$$k_n = k_{n-1} + k_{n-3} + \dots + k_2 + 1.$$

Следовательно,  $k_n$  линейно и с постоянными коэффициентами выражается через  $k_{n-1}, \dots, k_1$ ; в частности, оно не зависит от исходного треугольника  $XYZ$ . Отсюда легко получить, что и отношение площадей  $S_{n+1}/S_n$  для любого  $n \geq 1$  тоже не зависит от треугольника  $XYZ$ . Поэтому достаточно доказать соотношение (\*) в случае, если треугольник  $XYZ$  равносторонний.

Итак, пусть треугольник  $XYZ$  равносторонний, а  $n$  нечетно (случай четного  $n$  аналогичен). Тогда трапеции  $A_nA_{n+1}F_{n+1}F_n$ ,  $A_{n+1}A_{n+2}B_{n+2}B_{n+1}$ ,  $A_{n+2}A_{n+3}F_{n+3}F_{n+2}$  равнобедренные с углом  $30^\circ$  при основании. Поэтому если  $A_nF_n = a$ ,  $A_nA_{n+1} = b$ , то

$$A_{n+1}B_{n+1} = A_nA_{n+1} = b,$$

$$A_{n+1}F_{n+1} = A_{n+1}A_{n+2} = A_{n+2}F_{n+2} = a + b\sqrt{3},$$

$$\begin{aligned} A_{n+2}B_{n+2} &= A_{n+2}A_{n+3} = b + (a + b\sqrt{3})\sqrt{3} = \\ &= 4b + a\sqrt{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{n+3}F_{n+3} &= (a + b\sqrt{3}) + (a\sqrt{3} + 4b)\sqrt{3} = \\ &= 4a + 5b\sqrt{3}, \end{aligned}$$

а высоты трапеций равны

$$b/2, (a + b\sqrt{3})/2, (4b + a\sqrt{3})/2.$$

Следовательно,

$$S_n = \frac{1}{4}(2ab + b^2\sqrt{3}),$$

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{1}{4}(5b + a\sqrt{3})(a + b\sqrt{3}) = \\ &= \frac{1}{4}(8ab + (a^2 + 5b^2)\sqrt{3}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{n+2} &= \frac{1}{4}(5a + 6b\sqrt{3})(4b + a\sqrt{3}) = \\ &= \frac{1}{4}(38ab + (5a^2 + 24b^2)\sqrt{3}) = 5S_{n+1} - S_n. \end{aligned}$$



**Квадраты вокруг параллельников и полупараллельников**

Параллельником мы назовем выпуклый многоугольник, в котором параллельны в точности те же стороны и диагонали, как если бы он был правильным. Например, параллелограмм – это четырехугольный параллельник. Пятиугольный параллельник – это пятиугольник, в котором каждая диагональ параллельна соответствующей ей стороне (рис. 6,а). Произвольный треугольник мы также будем считать параллельником.

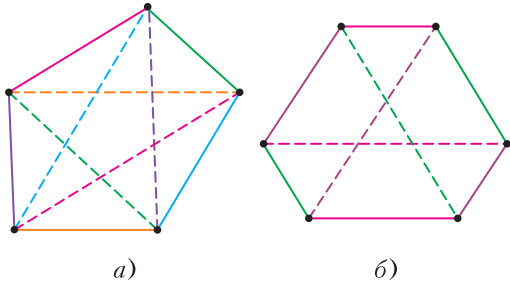


Рис. 6. Пятиугольный параллельник и шестиугольный полупараллельник

Назовем *полуправильным* многоугольником выпуклый четноугольник, у которого равны все углы, а стороны равны через одну. Таким образом, длины сторон могут принимать лишь два значения. *Полупараллельником* назовем такой выпуклый многоугольник, у которого параллельны в точности те стороны и диагонали, как если бы он был полуправильным. На рисунке 6,б изображен шестиугольный полупараллельник.

**Утверждение 2** (ср. [4, Теорема 1, п. (4)]). *Всякий параллельник можно перевести аффинным преобразованием в правильный многоугольник. Всякий полупараллельник можно перевести аффинным преобразованием в полуправильный многоугольник.*

**Задача 1.** Докажите это утверждение.

*Указание.* Рассмотрите 6 последовательных вершин параллельника/полупараллельника. По обратной теореме Паскаля они лежат на одной конике. Проверьте, что эта коника является эллипсом, и аффинным преобразованием переведите его в окружность.

Оказывается, что для параллельников и полупараллельников справедливы аналоги теоремы 1. Рассмотрим произвольный параллельник (рис. 7). На его сторонах во внешнюю сторону построим белые квадраты

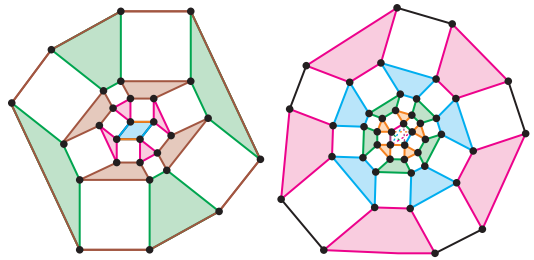


Рис. 7. Квадраты вокруг параллельников

ты. Некоторые из их вершин соединим отрезками, на них снова построим во внешнюю сторону белые квадраты и т.д. В промежутках между квадратами образовались треугольники и четырехугольники, которые окрасим так, чтобы многоугольники в одном слое были окрашены одинаково, а в разных – по-разному. Тогда справедлива следующая теорема.

- Теорема 2.** а) *Все окрашенные четырехугольники являются трапециями;*  
 б) *площади всех многоугольников одного и того же цвета равны;*  
 в) *отношения оснований одноцветных трапеций равны.*

Для произвольного полупараллельника можно проделать те же построения, и будет справедлива аналогичная теорема (рис. 8).

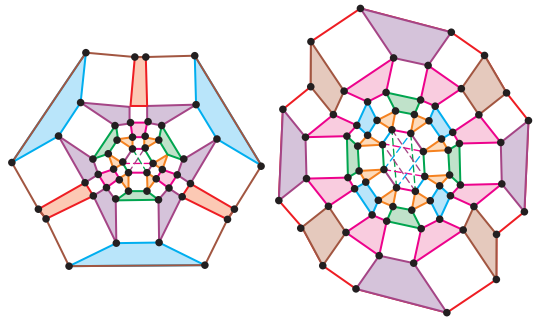


Рис. 8. Квадраты вокруг полупараллельников

- Теорема 3.** а) *Все окрашенные четырехугольники в четных слоях являются трапециями;*  
 б) *площади всех многоугольников одного и того же цвета равны;*  
 в) *отношения оснований одноцветных трапеций равны.*

*Замечание 2.* Отметим, что для полупараллельников в некоторых слоях квадраты могут накладываться друг на друга. В этом случае надо рассматривать самопересекающиеся окрашенные четырехугольники и брать их ориентированную площадь.

Шарнирное доказательство теоремы 1 практически дословно переносится на теоремы 2 и 3. Достаточно заменить слово «треугольник» на слово «параллельник»/«полупараллельник» и применить вместо утверждения 1 утверждение 2. Доказательство сдвигами обобщается на теорему 2. Для этого всюду, где используется точка пересечения медиан исходного треугольника, ее следует заменить на центр масс параллельника.

**Упражнение 2.** Убедитесь в этом.

*Замечание 3.* Авторам неизвестно, обобщается ли доказательство сдвигами на теорему 3.

*Замечание 4.* Из обоих доказательств можно вывести, что в теореме 2 отношение площади окрашенного многоугольника к площади исходного параллельника такое же, как и для правильного многоугольника, и зависит лишь от числа вершин параллельника и номера слоя, в котором он находится.

### Теорема Понселе для параллельников

Теорема Понселе (см., например, [5]) утверждает, что *если вокруг многоугольника можно описать эллипс и в многоугольник можно вписать эллипс, то существует бесконечно много многоугольников, вписанных в первый эллипс и описанных вокруг другого*. Иначе говоря, многоугольник можно «вращать» между двумя эллипсами. Поскольку любой параллельник можно перевести аффинным преобразованием в правильный многоугольник, у которого есть вписанная и описанная окружности с общим центром, то у параллельника есть гомотетичные вписанный и описанный эллипсы с общим центром. Таким образом, параллельник можно вращать между его вписанным и описанным эллипсами. Что же будет происходить при этом с нашей конфигурацией из надстроенных квадратов? Оказывается, верна следующая теорема (рис.9).

**Теорема 4.** а) Центры квадратов каждого слоя являются вершинами параллельника;

б) центры квадратов каждого слоя двигаются по фиксированным эллипсам, concentричным со вписанным и описанным эллипсами исходного параллельника;

в) площади всех окрашенных многоугольников будут оставаться неизменными при вращении параллельника;

г) сумма площадей квадратов в одном слое будет оставаться неизменной при вращении параллельника.

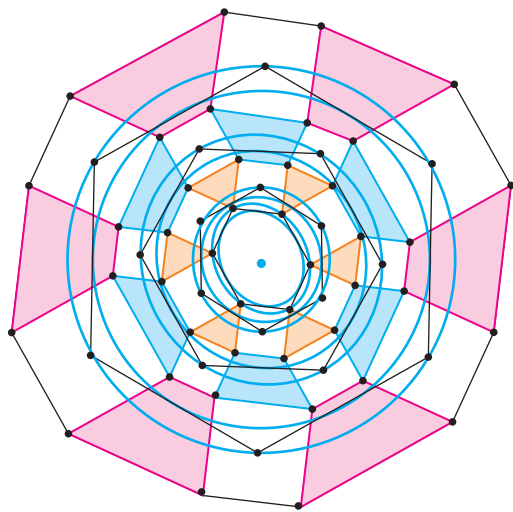


Рис. 9. Теорема Понселе для параллельников

*Замечание 5.* Пункт а) этой теоремы напоминает теорему Наполеона–Барлотти (см. [6]), которая утверждает, что если построить на сторонах  $n$ -угольного параллельника правильные  $n$ -угольники, то их центры будут являться вершинами правильного  $n$ -угольника.

**Задача 2.** Докажите теорему 4.

*Указание.* Для доказательства пунктов а) и б) положите начало системы координат в центр исходного параллельника. Тогда радиус-векторы центров квадратов одного слоя являются линейной комбинацией радиус-векторов исходного параллельника и образов его сторон-векторов при поворотах на  $45^\circ$ . Для доказательства пунктов в) и г) используйте то, что отношение площади окрашенного многоугольника и суммы площадей квадратов в одном слое к площади исходного параллельника зависит лишь от числа вершин параллельника и номера слоя (см. замечание 4 и [2]).

Авторы благодарны А.В.Акопяну, А.А.Заславскому и П.А.Кожевникову за ценные замечания и советы.

### Литература

1. Ф. Нилов. Параллельники, полупараллельники и равные площади. – «Квантик», 2020, №11.
2. D. DeTemple and M. Hudelson. Square-Banded Polygons and Affine Regularity. – The American Mathematical Monthly, 108:2 (2001), p.100–114.
3. А.А. Заславский. Геометрические преобразования. – М.: МЦНМО, 2-е издание, 2004.

(Продолжение см. на с. 52)

# Пленка воды, закон Кеплера и многое другое

А. СТАСЕНКО

**Г**ДЕ ТОЛЬКО НИ ТЕКУТ ПЛЕНКИ жидкости – на ветровом стекле автомобиля, на вертикальных поверхностях химических реакторов, на крыле самолета, попавшего в переохлажденные облака и готового подвергнуться обледенению... Причем во многих случаях важно знать скорость движения, массовый расход, температуру жидкости, фазовые превращения в пленке. А зачем? Ну, чтобы заранее оценить скорость химических реакций в стекающей пленке или подобрать такой гидрофобный (водобоязненный) материал, который будет препятствовать обледенению.

Но от чего зависит толщина  $h$  пленки жидкости, которую пытаются сдуть с поверхности тела потоком воздуха (рис.1)? Разумеется, от плотности жидкости  $\rho$ , ее размерность  $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ , – чем больше плотность тела, тем меньший объем она занимает. А еще, конечно, от коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma$ , его размерность  $\frac{\text{Н}}{\text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2}$ , и от угла

смачивания  $\theta$ , определяющих взаимодействие жидкости с окружающими телами.

Уже из соображений размерностей можно утверждать, что между искомой величиной  $h$ , ее размерность  $m$ , и указанными аргументами должна быть связь вида

$$h^m \sim \frac{\sigma^k}{\rho^n}. \quad (1)$$

И уже ясно, что показатели степени  $k$  и  $n$  должны быть равны друг другу – для того, чтобы исчезла зависимость от килограммов, входящих в размерности  $\rho$  и  $\sigma$ . Более того, видно, что отношение этих величин имеет размерность  $\frac{\text{м}^3}{\text{с}^2}$ . Значит, в выражении (1) нужно принять  $m=3$ ,  $k=n=1$  и справа написать недостающий множитель, имеющий размерность квадрата времени:

$$h^3 \sim \frac{\sigma}{\rho} T^2. \quad (2)$$

Ба! – воскликнул широко образованный Школьник – это же напоминает третий закон Иоганна Кеплера (1571–1630): «квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей орбит планет».

Но как оценить это характерное время  $T$ ? Предположим, что течение в пленке является слоистым (ламинарным), так что скорость слоев линейно изменяется от нулевой (как это принято в классической гидромеханике) до максимальной на поверхности (см. рис.1). Такая ситуация соответствует тече-

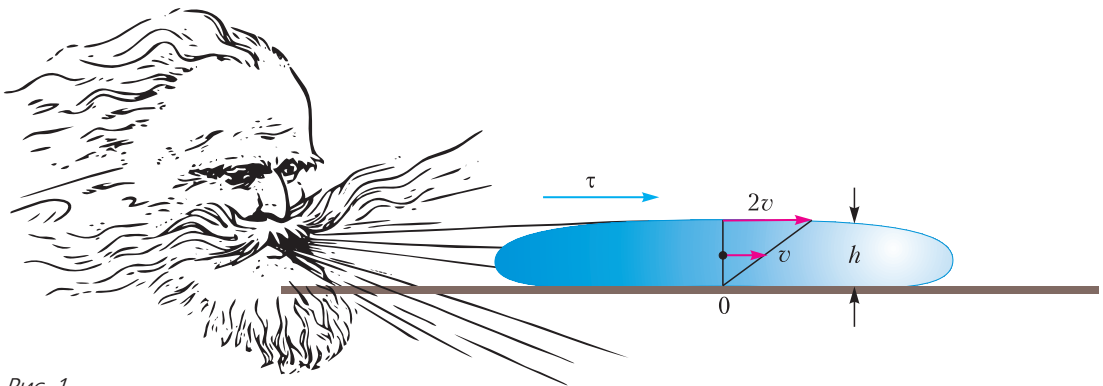


Рис. 1

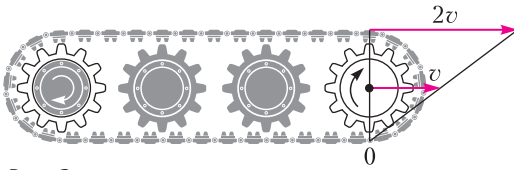


Рис. 2

нию, которое исследовал Морис Мари Альфред Куэрт (1858–1943). Понятно, что при этом средняя по толщине пленки скорость жидкости равна половине ее значения на поверхности. Ситуация напоминает движение гусеницы танка или трактора (рис.2): траки, соприкасающиеся с землей, имеют нулевую скорость, а верхние – вдвое большую скорости движения машины.

А как найти эту максимальную скорость пленки? Очевидно, что она связана с трением воздуха, приводящего пленку в движение. А именно, напряжение трения  $\tau$ , т.е. тангенциальная сила, приходящаяся на единицу площади поверхности пленки, пропорционально «наклону» зависимости  $v(y)$ :

$$\tau \sim \frac{v}{h} \cdot (?).$$

Размерность слева известна – это  $\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ , размерность первого сомножителя справа тоже известна – это  $\frac{1}{\text{с}}$ . А недостающий множитель справа называется коэффициентом вязкости  $\mu$  и, как легко установить, имеет размерность

$$\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}, \text{ так что}$$

$$\tau = \mu \frac{v}{h} = \frac{\mu}{T}.$$

Это закон вязкого трения Исаака Ньютона (1643–1727).

В результате выражение (2) принимает вид

$$h^3 \sim \frac{\sigma \mu^2}{\rho \tau^2}, \text{ или } h \sim \sqrt[3]{\frac{\sigma \mu^2}{\rho \tau^2}}.$$

Но что же угол смачивания  $\theta$ ? Конечно, и он влияет на процесс, но, измеряясь в радианах, не «схватывается» теорией размерностей.

Используем для численных оценок табличные данные для холодной воды:

$$\sigma = 0,077 \frac{\text{Н}}{\text{м}}, \mu = 1,8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2},$$

$$\rho = 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Поверхностная плотность силы, увлекающей пленку, при скорости в несколько десятков метров в секунду, как показывает гидродинамика пограничного слоя воздуха, имеет порядок  $\tau \sim 10 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ . Тогда

$$h \sim \left( \frac{0,077}{10^3} \left( \frac{1,8 \cdot 10^{-3}}{10} \right)^2 \right)^{1/3} \text{ м} =$$

$$= 1,37 \cdot 10^{-4} \text{ м} \approx 140 \text{ мкм} = 0,14 \text{ мм}.$$

А если это пленка переохлажденной жидкости, как в случае обледенения крыла самолета, то появляется еще много интересного. Так, в сдвиговом течении кристаллизация происходит быстрее, чем в спокойной луже. При этом вязкость среды, содержащей микрорекристаллы льда, растет с увеличением их объемной доли  $\alpha$ . Например, согласно известной формуле Альберта Эйнштейна (1879–1955)

$$\mu = \mu_0 \left( 1 + \frac{2}{3} \alpha \right).$$

Что же получается: пленка жидкости, гусеница танка, закон Кеплера ... – до чего же Физика едина в своих аналогиях!

---

(Начало см. на с. 44)

4. J.C.Fisher, R.E. Jamison. Properties of Affinely Regular Polygons. – Geometriae Dedicata, 69 (1998), p. 241–259.

5. В. Протасов. Два века теоремы Понселе. – «Квант», 2014, №5-6.

6. A. Barlotti. Una proprietà degli  $n$ -agoni che si ottengono trasformando in una affinità un  $n$ -agone regolare. – Bollettino dell'Unione Matematica, Serie 3, 10 (1955), p. 96–98.

# ОЛИМПИАДЫ

## XLIII ТУРНИР ГОРОДОВ

### Задачи осеннего тура

#### Базовый вариант

8–9 классы

1. (4)<sup>1</sup> Турнир городов проводится раз в год. Сейчас год проведения осеннего тура делится на номер турнира:  $2021 : 43 = 47$ . Сколько еще раз человечество сможет наблюдать это удивительное явление?

А.Заславский

2. (5) Дан куб. Три плоскости, параллельные граням, разделили его на 8 параллелепипедов (рис.1). Их покрасили в шахматном порядке. Объемы синих параллелепипедов оказались равны 1, 6, 8, 12. Найдите объемы белых параллелепипедов.

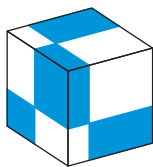


Рис. 1

О.Смирнов

3. (5) У пирата есть пять мешочков с монетами, по 30 монет в каждом. Он знает, что в одном лежат золотые монеты, в другом – серебряные, в третьем – бронзовые, а в каждом из двух оставшихся поровну золотых, серебряных и бронзовых. Можно одновременно достать любое число монет из любых мешочков и посмотреть, что это за монеты (вынимаются монеты один раз). Какое наименьшее число монет нужно достать, чтобы наверняка узнать содержимое хотя бы одного мешочка?

М.Евдокимов

4. (5) Выпуклый  $n$ -угольник ( $n > 4$ ) обладает таким свойством: если диагональ отсекает от него треугольник, то этот треугольник равнобедренный. Докажите, что среди любых четырех сторон этого  $n$ -угольника есть хотя бы две равные.

М.Дидин

5. (5) В турнире участвовали 20 шахматистов. Каждый играл с каждым один раз белыми и один раз черными. Обязательно ли

<sup>1</sup> В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждающихся за ее полное решение. Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты (баллы за разные пункты одной задачи суммируются).

найдутся такие два шахматиста, что один из них выиграл не меньше партий белыми и не меньше партий черными, чем другой?

Б.Френкин

10–11 классы

1. (3) Натуральное число  $k$  назовем *интересным*, если произведение первых  $k$  простых чисел делится на  $k$  (например, произведение первых двух простых чисел – это  $2 \cdot 3 = 6$ , и 2 – число интересное). Какое наибольшее количество интересных чисел может идти подряд?

Б.Френкин

2. (4) См. задачу 2 базового варианта для 8–9 классов.

3. (6) В белом клетчатом квадрате  $2021 \times 2021$  требуется закрасить черным две клетки. После этого через каждую минуту одновременно закрашиваются черным все клетки, которые граничат по стороне хоть с одной из уже закрашенных. Ваня выбрал две начальные клетки так, чтобы весь квадрат закрасился как можно быстрее. Через сколько минут закрасился квадрат?

И.Яценко

4. (6) Дан отрезок  $AB$ . Точки  $X, Y, Z$  в пространстве выбираются так, чтобы  $ABX$  был правильным треугольником, а  $ABYZ$  – квадратом. Докажите, что ортоцентры всех получающихся таким образом треугольников  $XYZ$  попадают на некоторую фиксированную окружность.

А.Матвеев

5. (6) См. задачу M2674 «Задачника «Кванта».

#### Сложный вариант

8–9 классы

1. (5) В ряд записаны  $n > 2$  различных ненулевых чисел, причем каждое следующее больше предыдущего на одну и ту же величину. Обратные к этим  $n$  числам тоже удалось записать в ряд (возможно, в другом порядке) так, что каждое следующее больше предыдущего на одну и ту же величину (возможно, иную, чем в первом случае). Чему могло равняться  $n$ ?

А.Заславский

2. (6) На столе лежат 8 всевозможных горизонтальных полосок  $1 \times 3$  из трех квадратов  $1 \times 1$ , каждый из которых либо белый, либо красный (рис.2). Разрешается



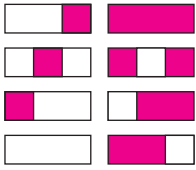


Рис. 2

переносить полоски в любых направлениях на любые (не обязательно целые) расстояния, не поворачивая и не переворачивая. Можно ли расположить полоски на столе так, чтобы все белые точки образовали многоугольник, ограниченный замкнутой несамопересекающейся ломаной, и все красные – тоже? (Полоски не должны перекрываться.)

*М.Ильинский*

**3. (7)** В прямоугольный треугольник с гипотенузой длины 1 вписали окружность. Через точки ее касания с его катетами провели прямую. Отрезок какой длины может высекать на этой прямой окружность, описанная около исходного треугольника?

*Фольклор, предложил М.Волчкевич*

**4. (8)** См. задачу М2679 «Задачника «Кванта».

**5. (9)** Параллелограмм  $ABCD$  разделен диагональю  $BD$  на два равных треугольника (рис.3). В треугольник  $ABD$  вписан правильный шестиугольник так, что две его соседние стороны лежат на  $AB$  и  $AD$ , а одна из вершин – на  $BD$ . В треугольник  $CBD$  вписан правильный шестиугольник так, что две его соседние вершины лежат на  $CB$  и  $CD$ , а одна из сторон – на  $BD$ . Какой из шестиугольников больше?

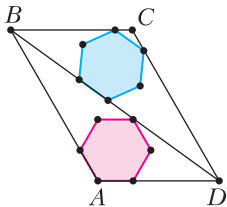


Рис. 3

*К.Кноп*

**6. (9)** Пусть  $[x]$  обозначает целую часть числа  $x$  (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Докажите для любых натуральных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  неравенство

$$\left\lfloor \frac{a_1^2}{a_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2^2}{a_3} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{a_n^2}{a_1} \right\rfloor \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

*М.Дидин*

**7. (12)** См. задачу М2677 «Задачника «Кванта».

*10–11 классы*

**1. (5)** Мудрецам  $A, B, C, D$  сообщили, что числа  $1, 2, \dots, 12$  написаны по одному на 12 карточках и что эти карточки будут розданы

им по три, причем каждый увидит лишь свои карточки. После раздачи мудрецы по очереди сказали следующее.

$A$ : «На одной из моих карточек число 8».

$B$ : «Все числа на моих карточках простые».

$C$ : «А все числа на моих составные, причем имеют общий простой делитель».

$D$ : «Тогда я знаю, какие карточки у каждого из вас».

Какие карточки у  $A$ , если все сказали правду?

*М.Евдокимов*

**2. (7)** См. задачу М2675 «Задачника «Кванта».

**3. (7)** На плоскости сидят кузнечик Коля и 2020 его товарищей. Коля собирается совершить прыжок через каждого из остальных кузнечиков (в произвольном порядке) так, что начальная и конечная точки каждого прыжка симметричны относительно перепрыгиваемого кузнечика. Назовем точку *финишной*, если Коля может в нее попасть после 2020-го прыжка. При каком наибольшем числе  $N$  найдется начальная расстановка кузнечиков, для которой имеется ровно  $N$  различных возможных финишных точек?

*М.Святловский*

**4. (7)** При каком наименьшем  $k$  среди любых трех ненулевых действительных чисел можно выбрать такие два числа  $a$  и  $b$ , что  $|a - b| \leq k$  или  $\left| \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right| \leq k$ ?

*М.Дидин*

**5. (9)** См. задачу М2676 «Задачника «Кванта».

**6. (10)** См. задачу М2677 «Задачника «Кванта».

**7.** Клетчатый квадрат  $2 \times 2$  накрыт двумя треугольниками. Обязательно ли

а) (6) хоть одна из четырех его клеток целиком накрыта одним из этих треугольников; б) (6) в один из этих треугольников можно поместить квадрат со стороной 1?

*А.Шаповалов*

*Материал подготовили Е.Бакаев, А.Грибалко, М.Дидин, С.Дориченко, М.Евдокимов, А.Заславский, П.Кожевников, М.Малкин, Л.Медников, В.Ретинский, Е.Рябов, М.Святловский, А.Тертерян, А.Толтыго, Б.Френкин, И.Фролов, Е.Хинко, А.Шаповалов*

## 18-Я МЕЖДУНАРОДНАЯ ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНАЯ ОЛИМПИАДА ЮНИОРОВ (IJSO-2021)

Олимпиада юниоров в 2021 году проходила в Дубае (Объединенные Арабские Эмираты) в дистанционном формате. В состязании принимали участие 400 юношей и девушек более чем из 70 стран мира. По условиям олимпиады, участники должны быть не старше 15 лет.

Олимпиада включала три тура: тестовый, теоретический и экспериментальный, в ходе которых участники выполняли задания по физике, химии и биологии.

Золотые медали олимпиады завоевали все шесть членов российской команды:

*Вячеслав Бобков* (школа 1589, город Москва),

*Даниил Гаврилов* (Республиканский лицей для одаренных детей, город Саранск, Республика Мордовия),

*Григорий Зутлер* (школа 179, город Москва),

*Иван Мякутин* (школа 179, город Москва),

*Егор Потапов* (Республиканский лицей для одаренных детей, город Саранск, Республика Мордовия),



Слева направо: Я.Шастин, Д.Гаврилов, Г.Зутлер, И.Мякутин, Е.Потапов

*Ярослав Шастин* (Республиканский лицей для одаренных детей, город Саранск, Республика Мордовия).

Подготовка российской сборной длилась более полугода. Она началась в мае с дистанционных домашних заданий, затем в июне в МФТИ прошли учебно-тренировочные сборы, в августе – смена в Образовательном центре «Сириус», сборы в октябре и установочные сборы в первой декаде декабря.

Ниже приводятся вопросы теста и условия теоретических задач по физике.

### Тест (30 очков)

**Вопрос 1.** Сигнальная сирена издает звук постоянной частоты и находится рядом с каруселью. Карусель вращается по часовой стрелке так, как показано на рисунке 1. Ниже приведены несколько утверждений о том, когда человек, катающийся на карусели, слышит звук максимальной или минимальной частоты, а когда слышит исходную частоту звука самой сирены.

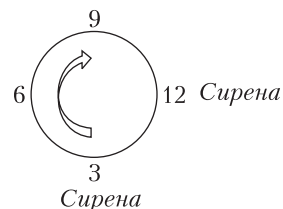


Рис. 1

1) Человек слышит исходную высоту звука тогда, когда находится в точках на 12 и 6 часов.

2) Человек слышит исходную высоту звука тогда, когда находится в точках на 9 и 3 часа.

3) Самый высокий звук человек слышит в точке на 3 часа, а самый низкий звук – в точке на 9 часов.

4) Самый высокий звук человек слышит в точке на 9 часов, а самый низкий звук – в точке на 3 часа.

Выберите верное утверждение:

a) 1,4; b) 2,3;

c) 1,3; d) 2,4.

**Вопрос 2.** Луч света переходит из безграничной среды 1 в среду 4 (рис.2). Показатели преломления сред 1, 2, 3 и 4 равны 1,62, 1,60, 1,55 и 1,50 соответственно. При каком угле падения луч бу-

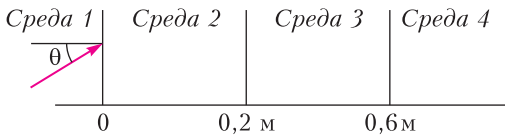


Рис. 2

дет испытывать полное внутреннее отражение на границе между третьей и четвертой средой:

- a)  $\sin^{-1}\left(\frac{1,50}{1,55}\right)$ ; b)  $\sin^{-1}\left(\frac{1,50}{1,62}\right)$ ;  
 c)  $\sin^{-1}\left(\frac{1,60}{1,62}\right)$ ; d)  $\sin^{-1}\left(\frac{1,55}{1,60}\right)$ ?

**Вопрос 3.** В приведенной схеме (рис.3)

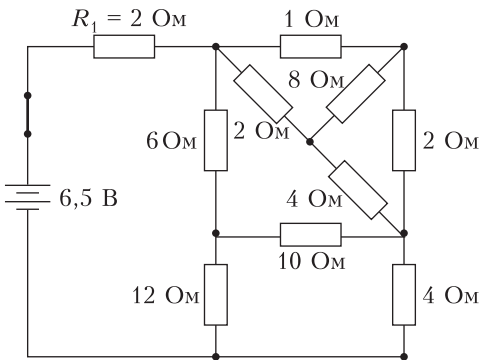


Рис. 3

через резистор  $R_1$  ( $= 2 \text{ Ом}$ ) течет ток  $I$ . Значение  $I$  равно:

- a) 0,5 А; b) 1,0 А;  
 c) 1,8 А; d) 2,0 А.

**Вопрос 4.** Нагреватель чайника сделан из провода длиной  $L$  и диаметром  $d$ . Используя источник постоянного напряжения, 0,5 кг воды нагрели на 40 К за 4 минуты. Данный нагреватель решили заменить новым, который состоит из двух проводов, сделанных из того же материала, что и первый. Длина каждого провода  $L$ , а диаметр  $2d$ . Ниже приведены варианты подключения проводов в нагревательном элементе и время, за которое точно такая же масса воды нагреется на столько же градусов. Систему считайте термоизолированной. Какое из утверждений верно:

- a) 4 минуты, если провода соединены последовательно;  
 b) 2 минуты, если провода соединены параллельно;  
 c) 1 минута, если провода соединены последовательно;

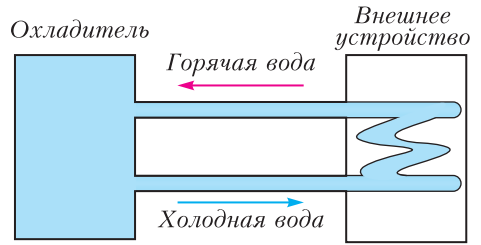


Рис. 4

d) 0,5 минуты, если провода соединены параллельно?

**Вопрос 5.** В охладителе воды объемом 120 литров вода может охлаждаться с постоянной мощностью  $P$ . В замкнутой системе (рис.4) вода из охладителя используется для охлаждения внешнего устройства, которое постоянно выделяет 3000 Вт тепла (тепловая нагрузка). Температура воды, которая попадает в устройство, не должна превышать 300 °С. Первоначально все 120 литров воды охлаждаются до 100 °С. Вся система теплоизолирована. Минимальное значение  $P$  (в ваттах), при котором устройство может работать в течение 3 часов, равно:

- a) 2067; b) 3533;  
 c) 3933; d) 4220.

**Вопрос 6.** Луч света испытывает в равносторонней призме  $P$  минимальное отклонение. К призме  $P$  добавили призмы  $Q$  и  $R$ ,



Рис. 5

идентичные  $P$ , и расположили их близко друг к другу так, как показано на рисунке 5.

Если вышедший луч из  $P$  войдет в  $Q$  и продолжит движение к  $R$ , то этот луч выйдет из  $R$ :

- a) с большим отклонением;  
 b) с тем же отклонением, что и раньше;  
 c) испытав полное внутреннее отражение;  
 d) не отклонившись.

**Вопрос 7.** Когда две механические волны встречаются в некоторой области пространства, то происходит суперпозиция двух волн. Это явление называют интерференцией. Какое из следующих утверждений является неверным:

- a) итоговое колебание, вызванное двумя волнами, может быть получено путем сложения их отдельных колебаний;  
 б) после того, как волны покинут эту область, энергию, которую они переносят, будет меньше, чем она была до интерференции;

с) частота каждой волны не изменяется после интерференции;

д) после того, как волны покинут эту область, все характеристики волн останутся точно такими же, какими они и были до интерференции?

**Вопрос 8.** Во время эксперимента в физи-

ческой лаборатории Мустафа последовательно соединил две катушки (катушку 1 и катушку 2) с гальванометром. Мустафа бросил магнит через катушки так, как показано на рисунке 6. Он заметил, что когда магнит проходил через катушку 2, стрелка гальванометра не отклонялась, а когда магнит проходил через катушку 1, Мустафа наблюдал большое отклонение стрелки гальванометра. Обе катушки имеют одинаковую форму, размеры и

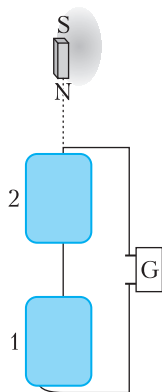


Рис. 6

и сделаны из одного и того же материала. У обеих катушек одинаковое количество витков, и скорость, с которой магнит проходил через каждую катушку, была почти одинаковой. Мустафа пришел к выводу, что:

А) суммарный магнитный поток через катушку 2 должен быть равен нулю;

В) при прохождении через катушку 2 индуцированные ЭДС на катушках 1 и 2 направлены противоположно друг другу;

С) стрелка гальванометра отклонилась бы при прохождении катушки 2, если бы магнит был перевернут так, что его полюса поменялись местами;

Д) у катушек 1 и 2 направления намотки витков должны отличаться.

Какие из приведенных выше утверждений верны:

а) А, В; б) В, С;

с) В, Д; д) А, Д?

**Вопрос 9.** Шарик для пинг-понга отпускают с высоты 1 м над мраморным полом. Шарик несколько раз отскакивает от пола, прежде чем остановиться. За каждый удар он теряет 20% от своей максимальной высоты. Фатима нарисовала график зависимости двух физических величин от времени (рис. 7). Определите, какие две физические величины откладываются по вертикальной оси:

а) высота и проекция вектора скорости;

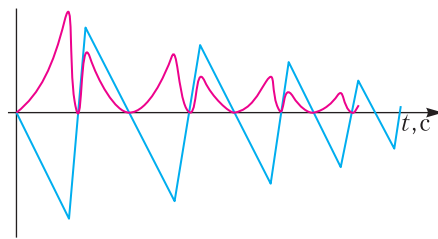


Рис. 7

б) проекция вектора скорости и кинетическая энергия;

с) потенциальная энергия и кинетическая энергия;

д) проекция вектора скорости и потенциальная энергия.

**Вопрос 10.** Меркурий – самая быстрая планета в Солнечной системе, движущаяся со средней орбитальной скоростью 47 км/с. Земля движется медленнее, со средней орбитальной скоростью 30 км/с. Чему равен радиус орбиты Меркурия вокруг Солнца в астрономических единицах:

а) 0,25; б) 0,40; с) 0,50; д) 0,70?

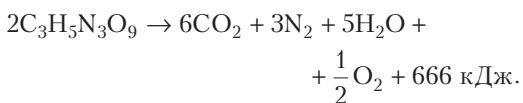
*Подсказка.* Астрономическая единица почти равна радиусу орбиты Земли.

### Теоретические задачи

#### Задача 1. Выстрел из ружья (5 баллов)

##### Часть А. Механизм выстрела из ружья в наши дни

При выстреле из ружья происходит реакция разложения нитроглицерина:



Считайте, что масса вылетевшей пули 100 г, а масса нитроглицерина, используемого в реакции, 11,35 г.

**А1.** Найдите молярную массу нитроглицерина. (0,5 б.)

**А2.** Найдите число молей нитроглицерина, используемого при одном выстреле. (0,5 б.)

**А3.** Найдите, сколько энергии выделяется в реакции разложения при одном выстреле (численное значение в единицах СИ). (0,5 б.)

**А4.** Считая, что вся энергия, выделяемая при реакции разложения, идет на увеличение кинетической энергии пули, найдите ее скорость при вылете из ствола (численное значение в единицах СИ). (1 б.)

### Часть В. Выстрел из пушки

Порох (нитроцеллюлоза) занимает 20% объема пушки диаметром 15,0 см и длиной 5,0 м и плотно зажат ядром того же диаметра. Когда порох поджигают, он мгновенно сгорает и становится идеальным газом при давлении 1000 атм. Когда ядро вылетает из пушки, температура газа уменьшается в три раза по сравнению с его начальной температурой.

**В1.** Напишите формулу для давления газа  $p_2$  в конце процесса, перед вылетом ядра из ствола пушки, через начальное давление  $p_1$ , начальный объем  $V_1$ , начальную температуру  $T_1$ , конечный объем  $V_2$  и конечную температуру  $T_2$ . (0,5 б.)

**В2.** Вычислите давление газа (численное значение в единицах СИ) на ядро, когда оно вылетает из пушки (запишите ответ с точностью до трех значащих цифр, т.е. две цифры после запятой). (1,5 б.)

**В3.** Вычислите силу (численное значение в единицах СИ), действующую на ядро, когда оно вылетает из пушки (запишите ответ с точностью до трех значащих цифр, т.е. две цифры после запятой). (0,5 б.)

### Задача 2. Багги и абра (5 баллов)

#### Часть А. Багги

Багги – это транспортное средство, используемое в пустынях (рис.8). Рассмотрим такой автомобиль массой 200,0 кг, движущийся с постоянной скоростью 72 км/ч по песчаной дюне, представляющей собой плоскость, образующую  $30^\circ$  с горизонтом. Сила трения качения со стороны песка направлена против направления движения автомобиля и пропорциональна нормальной силе реакции опоры, действующей на багги, с коэффициентом пропорциональности  $f = 0,15$ .



Рис. 8

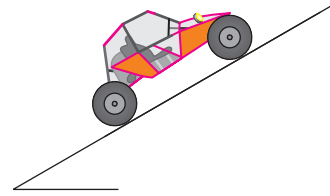


Рис. 9

**А1.** Изобразите на рисунке 9 все ВЕКТОРЫ сил, действующих на багги. (1 б.)

**А2.** Вычислите суммарную силу (численное значение в единицах СИ), препятствующую движению багги, направленную вдоль склона противоположно движению багги. (0,5 б.)

**А3.** Вычислите минимальную мощность (численное значение в единицах СИ), развиваемую двигателем багги при движении вверх. (0,5 б.)

**А4.** При движении вверх вдоль плоскости багги заглох. Найдите модуль ускорения (численное значение в единицах СИ). (0,5 б.)

**А5.** Какое расстояние проедет багги до полной остановки после того, как он заглох (численное значение в единицах СИ)? (0,5 б.)

#### Часть В. Лодка абра

В Дубае есть традиционный вид водного транспорта – лодка абра (рис.10). Длина лодки 6 м. Места, на которых сидят пассажиры, представляют собой две параллельные линии скамеек по обе стороны от вертикальной плоскости, разделяющей лодку в продольном направлении. Центр масс лодки лежит на вертикальной линии, проходящей точно через ее центр. Пассажиры могут садиться по обеим сторонам лодки. Когда пассажиры сидят, можно считать, что их центр



Рис. 10



масс находятся на высоте 0,4 м над палубой. В случае максимальной загрузки граница воды находится на 0,5 м ниже палубы, выталкивающая сила действует в точке на 0,1 м ниже границы воды, а центр масс лодки находится на 1,6 м ниже палубы. Масса разгруженной лодки составляет 1000 кг, а средняя масса каждого пассажира 60 кг.

**В1.** Схематично изобразите на рисунке 11 по линии XY положение центра масс лодки, точку приложения выталкивающей силы, центр масс пассажиров и линию палубы по

отношению к границе воды и обозначьте расстояния между ними. На рисунке представлено вертикальное сечение лодки. (0,5 б.)

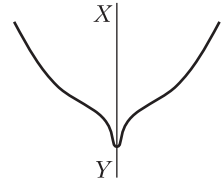


Рис. 11

**В2.** Найдите максимальное число пассажиров, при котором лодка не перевернется. (1,5 б.)

Публикацию подготовил В.Слободянин

## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

### Конкурс имени А.П.Савина

(см. «Квант» №10)

5. Нет.

Посмотрим на размеры трех меньших команд. Изначально они равны (нулю). Добавление экстраверта не меняет эти размеры, а интроверт может увеличить разницу наименьшей и наибольшей из них, только если до него они были равны, причем разность увеличится до 1. Значит, размеры трех меньших команд отличаются не больше чем на 1. Тогда три размера принимают два значения, и какие-то два размера совпадают.

**6.** Пример, как отметить 4 точки, показан на рисунке 1. Менее чем 4 точками не обойтись: отрезки EA, AC и CE делят шестиугольник на 4 непересекающихся треугольника, в каждом должна быть хотя одна отмеченная точка.

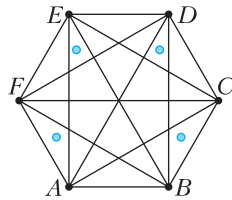


Рис. 1

7. Да.

Четырехугольник  $BC_0B_0C$  является вписанным, поэтому  $\angle ABC = \angle AB_0C_0$ . Тогда из параллельности  $B_0C_0$  и  $B_1C_1$  получаем  $\angle ABC = \angle AB_1C_1$ , а значит, вписанным является и четырехугольник  $BC_1B_1C$ . Тогда равны вписанные углы  $B_1BC_1$  и  $B_1CC_1$ , а это половины углов  $ABC$  и  $ACB$ , поэтому они также равны и треугольник  $ABC$  равнобедренный.

**8.** Для всех  $n$ , не кратных 10.

Если  $n$  кратно 10, то палиндром, кратный  $n$ , заканчивается на 0, а значит, и начинается на 0, чего быть не может. Покажем, что при  $n$ , не кратном 10, такой палиндром существует. Представим число  $n$  как произведение  $bc$ , где  $c$  — это  $2^k$  или  $5^k$ , а  $b$  взаимно просто с 10.

Рассмотрим последовательность

$$a_0 = 1, a_1 = 10^k + 1, a_2 = 10^{2k} + 10^k + 1, \dots, a_m = 10^{mk} + 10^{(m-1)k} + \dots + 10^k + 1.$$

Покажем, что есть число такого вида, кратное  $b$ . При  $m > b$  среди этих чисел найдутся два с одинаковым остатком при делении на  $b$ , пусть это  $a_i$  и  $a_{i+j+1}$  ( $j \geq 0$ ). Рассмотрим их разность, она кратна  $b$ :

$$a_{i+j+1} - a_i = 10^{(i+j+1)k} + 10^{(i+j)k} + \dots + 10^{(i+1)k} - 10^{ik} - 10^{(i-1)k} - \dots - 10^k - 1 = 10^{(i+1)k} a_j.$$

Итак,  $10^{(i+1)k} a_j$  делится на  $b$ , а раз  $b$  взаимно просто с 10, то  $a_j$  делится на  $b$ .

Рассмотрим для примера ситуацию  $n = 7 \cdot 16$ ,  $b = 7$ ,  $c = 16$ ,  $k = 4$ ,  $j = 2$ . Тогда мы нашли  $a_j = 100010001$  — число, кратное 7. Умножим  $a_j$  на  $c$ . В нашем примере это  $100010001 \cdot 16 = 1600160016$ . В числе  $a_j$  количество нулей между единицами равно  $k - 1$ , а число  $c$  — это  $2^k$  или  $5^k$ , что меньше  $10^k$ . Так что нулей достаточно много, чтобы при этом умножении цифры числа  $c$  не «наложились» друга на друга и получилось число вида  $cc \dots cc$  (где  $c$  могут быть с лидирующими нулями, т.е. вместо 16 может браться 0016, например).

Обозначим число, которое получается при записи числа  $c$  наоборот как  $\bar{c}$ . Умножим  $a_j$  на  $\bar{c}$  и припишем получившееся число слева к  $a_j c$ , получим палиндром вида  $\bar{c} a_j c \bar{c} a_j c$ , в нашем примере это 61006100611600160016.

Получившееся число делится на  $a_j$  и поэтому делится на  $b$ . А на  $c$  оно делится по признаку делимости на степени двойки и пятёрки: число, образованное последними  $k$  цифрами (в нашем примере это 0016), делится на  $c$ . Таким образом, полученный палиндром делится на взаимно простые числа  $b$  и  $c$ , а значит, и на  $bc = n$ .

## Калейдоскоп «Кванта»

### Вопросы и задачи

1. Облака вследствие конвекции поднимаются вверх, что воспринимается как падение самолета вниз.
2. Человек, помещенный в такую жидкость, всего лишь будет находиться в состоянии безразличного равновесия. Как в покое, так и при взлете с ускорением он не потеряет веса и будет сжат.
3. Верно, но не только в этой точке. И на космический корабль, движущийся по орбите, и на все находящиеся в нем тела действует только сила тяготения, поэтому они пребывают в состоянии невесомости.
4. Допустим, центр тяжести спортсмена находится на высоте около одного метра. Значит, прыгнув на 2 метра в высоту, он поднял свой центр тяжести всего на 1 метр! На Луне он, соответственно, сможет поднять его в шесть раз выше, т.е. прыгнуть на 7 метров.
5. Для того чтобы человек мог дышать, разница давлений внутри легких и снаружи должна быть около 0,1 атм. Значит, уже на глубине порядка 1 метра человек не сможет вдохнуть через выведенную в атмосферу трубку, так как сила, действующая на грудную клетку со стороны воды, будет очень большой.
6. Если есть направленная вверх архимедова сила, действующая на выделенный объем воздуха, то этот объем, в соответствии с третьим законом Ньютона, действует на остальной воздух вниз с силой, равной весу «вытесненного воздуха», т.е. своему собственному. Таким образом, он все же давит на нижележащие слои воздуха и на землю.
7. В буквальном смысле неверно. Шуба, в силу плохой теплопроводности, лишь сохраняет тепло человеческого тела.
8. Не противоречит. Если газ при нагревании совершал работу, он может отдать холодильнику меньшее количество теплоты, чем было затрачено на его нагревание.
9. Нет. Охлаждение идеального газа при расширении происходит тогда, когда он совершает работу. В данном случае этого нет, значит, внутренняя энергия газа и его температура не изменяются.
10. Процесс нагревания воздуха в комнате – изобарический. При этом увеличение внутренней энергии газа, происходящее за счет увеличения температуры, в точности равно ее убыли за счет уменьшения массы воздуха, частично выходящего наружу. Следовательно, внутренняя энер-

гия воздуха в комнате не изменится, но в ней станет теплее.

**11.** Нет. Направление касательной к силовой линии совпадает с направлением силы, действующей на заряд, а значит, с направлением его ускорения. Траектория же движения заряда – это линия, направление касательной к которой совпадает с направлением скорости заряда.

**12.** «Зажигают» лампу вовсе не заряды, прижавшиеся к ней от выключателя, а изменение электрического поля в проводнике, распространяющееся со скоростью света.

**13.** Чтобы человек стал невидимым, показатель преломления всех тканей его тела должен стать равным единице. Значит, глаз такого человека не будет преломлять свет и не сможет фокусировать его на сетчатке. Кроме того, свет будет попадать на сетчатку со всех сторон, а не только через зрачок. И наконец, невидимая сетчатка не будет поглощать свет. Любой из перечисленных причин достаточно, чтобы невидимка оказался слепым.

### Микроопыт

Даже если пренебречь трением о воздух, на восходящем участке траектории тело не «толкает», а тормозит сила тяжести. «Сила бросания», действующая на тело во время полета, – заблуждение, идущее еще от Аристотеля (см. эпиграф).

## XLIII Турнир городов

### Задачи осеннего тура Базовый вариант

8–9 классы

**1.** Еще 4 раза.

Так как сейчас 43-й турнир, то осенний тур  $n$ -го турнира проходит в году  $46 \cdot 43 + n$ . Число  $46 \cdot 43 + n$  делится на  $n$  тогда и только тогда, когда  $46 \cdot 43 = 2 \cdot 23 \cdot 43$  делится на  $n$ . У числа  $2 \cdot 23 \cdot 43$  есть 4 делителя, больших чем 43, – это  $2 \cdot 23$ ,  $2 \cdot 43$ ,  $23 \cdot 43$  и  $2 \cdot 23 \cdot 43$ .

Номер турнира  $N$  на  $2021 - 43 = 1978$  меньше номера года  $M$ , и так будет всегда. Поэтому  $M : N = 1 + 1978 : N$ . Таким образом, требуется, чтобы число 1978 нацело делилось на номер очередного турнира. Но  $1978 = 43 \cdot 23 \cdot 2$ , т.е. оно делится (из чисел, больших 43) на 46, 86, 989 и на само себя. Поэтому ответ: еще 4 раза – в 2024, 2064, 2967 и 3956 годах.

**2.** Их объемы равны 2, 3, 4, 24.

Обозначим точку пересечения трех плоскостей, разрезающих куб, через  $A$ . Заметим, что объем любого из 8 полученных параллелепипедов ра-

вен произведению трех его ребер, выходящих из  $A$ . Пусть мы хотим найти объем какого-то белого параллелепипеда  $\alpha$ . Перемножим объемы трех синих параллелепипедов, примыкающих к  $\alpha$ . Мы получим произведение длин 9 отрезков: ребра параллелепипеда  $\alpha$ , выходящие из  $A$ , будут входить в произведение по два раза, а ребра противоположного к  $\alpha$  синего параллелепипеда  $\beta$ , выходящие из  $A$ , – по одному разу. Тогда, поделив полученное число на объем  $\beta$ , мы получим квадрат объема  $\alpha$ .

Таким образом, перемножая тройки чисел из условия и деля на четвертое, мы получим квадраты объемов белых параллелепипедов; останется извлечь корни.

### 3. 5 монет.

*Пример.* Достанем по одной монете из каждого мешочка. Среди этих пяти монет есть монеты всех трех видов, поэтому какого-то вида есть только одна монета. Если она, например, золотая, то ее достали из мешочка с золотыми монетами. Действительно, для каждой монеты из «смешанного» мешочка есть парная из соответствующего «однородного» мешочка.

*Оценка.* Пусть мы достали только 4 монеты (или меньше). Заметим, что не имеет смысла доставать больше одной монеты из одного и того же мешочка, так как они могут оказаться одинаковыми, а тогда никакой дополнительной информации мы не получим. Поэтому можно считать, что мы достали по одной монете из четырех разных мешочков. Тогда мы могли достать монеты З, З, С, Б, и в этом случае есть по крайней мере два варианта распределения соответствующих мешочков: З, Смеш, С, Смеш, Б и Смеш, З, Смеш, Б, С, не совпадающих ни в одной из позиций (последним указан мешочек, из которого монеты не доставались).

4. Рассмотрим группы равных сторон, расположенных подряд. Заметим, что на стыке таких групп находится острый угол  $n$ -угольника – угол при основании равнобедренного треугольника. Но в многоугольнике не может быть больше трех острых углов (сумма внешних углов равна  $360^\circ$ , поэтому среди них не больше трех тупых), значит, этих групп не больше трех. Следовательно, среди каждых четырех сторон найдутся две из одной группы, т.е. равные.

### 5. Обязательно.

Будем говорить, что шахматист  $A$  не слабее шахматиста  $B$ , если  $A$  выиграл и белыми, и черными не меньше партий, чем  $B$ . Предположим, что такой пары нет.

Если у каких-то двух игроков одинаковое число побед белыми, один из них не слабее другого. То же верно, если у каких-то двух игроков одинако-

вое число побед черными. Значит, число побед белыми у всех разное и число побед черными – тоже. Отсюда следует, что количества побед белыми у 20 игроков равны числам 19, 18, ..., 2, 1 и 0, и то же для количеств побед черными. Пусть 19 партий белыми выиграл  $A$ , а 19 партий черными выиграл другой шахматист  $B$ . Но тогда игру  $A$  с  $B$ , где  $A$  играл белыми, а  $B$  – черными, выиграли и  $A$ , и  $B$ . Такая ситуация невозможна, поэтому 19 партий белыми и черными выиграл один и тот же шахматист. Но тогда он не слабее всех остальных. Противоречие.

## 10–11 классы

### 1. Три числа.

*Оценка.* Нетрудно понять, что число интересное в точности тогда, когда оно свободно от квадратов, т.е. в его разложении на простые каждое простое число появляется не больше одного раза. Теперь заметим, что числа, кратные четырем, не свободны от квадратов. *Примеры:* 1, 2, 3; 5, 6, 7.

### 3. Через 1515 минут.

Занумеруем строки и столбцы числами от  $-1010$  до  $1010$ . Через  $n$  минут будут закрашены клетки, до которых хромая ладья (за ход сдвигается на соседнюю клетку) дойдет от одной из исходных клеток не более чем за  $n$  ходов.

*Пример.* Закрасим клетки  $A(-505; 0)$  и  $B(505; 0)$ . За 1515 ходов ладья дойдет из  $B$  до любой клетки правой половины доски (клетки  $(x; y)$  с неотрицательным  $x$ ): потребуется не более 505 ходов по горизонтали и не более 1010 по вертикали. Аналогично из  $A$  ладья дойдет до любой клетки левой половины.

*Оценка.* Назовем *расстоянием* между клетками сумму расстояний между ними по вертикали и по горизонтали. Оно равно минимальному числу ходов, за которое хромая ладья сможет пройти из одной клетки в другую (и поэтому удовлетворяет «неравенству треугольника»). Пусть все клетки будут черными через 1514 минут. Противоположные угловые клетки не могут быть «обслужены» одной ладьей: расстояние между ними больше чем  $2 \cdot 1514$ . Поэтому каждая ладья «обслужила» две угловые клетки с одной стороны, например ладья из клетки  $A$  – обе левые:  $(-1010; \pm 1010)$ , а ладья из клетки  $B$  – обе правые:  $(1010; \pm 1010)$ . Но тогда вторая ладья не успела пройти ни до одной из клеток  $(0; \pm 1010)$ : расстояние от такой клетки до противоположной угловой клетки равно  $3030 > 2 \cdot 1514$ . Аналогично и первая ладья не дошла до этих клеток. Противоречие.

4. Пусть  $AB = 2$ ,  $O$  и  $M$  – середины отрезков  $AB$  и  $YZ$  соответственно,  $H$  – ортоцентр треугольни-

ка  $XYZ$ . Поскольку треугольник  $XYZ$  равнобедренный, точка  $H$  лежит на серединном перпендикуляре к стороне  $YZ$ , т.е. в плоскости  $\pi$ , перпендикулярной  $AB$  и проходящей через  $O$ . Точка  $X$  лежит на окружности  $\omega$  радиуса  $\sqrt{3}$  с центром  $O$ , лежащей в  $\pi$ . Пусть прямая  $XM$  второй раз пересекает  $\omega$  в точке  $W$  (если  $XM$  касается  $\omega$ , то точки  $X$  и  $W$  совпадают), а прямая  $OM$  пересекает  $\omega$  в точках  $P$  и  $Q$ . Тогда  $MX \cdot MW = MP \cdot MQ = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$ .

Пусть  $YN$  – высота треугольника  $XYZ$ . Прямая  $YN$  пересекает прямую  $XM$  в ортоцентре  $H$ . Заметим, что прямоугольные треугольники  $HYM$  и  $YXM$  подобны, так что  $MH : MY = MY : MX$ . Поскольку  $MY = 1$ , то  $MX \cdot MH = 1$ . Поэтому  $MH = MW$ , а так как обе точки  $H$  и  $W$  лежат на луче  $MX$ , они совпадают. Таким образом,  $H$  лежит на  $\omega$ .

**Сложный вариант**

8–9 классы

1.  $n = 3$  и  $n = 4$ .

Примеры:  $-1, \frac{1}{2}, 2$  и  $-3, -1, 1, 3$ .

Оценка. Если чисел больше 4, то среди них есть три одного знака (пусть положительных). Выберем три наименьших их них:  $a - d, a, a + d$ , где  $0 < d < a$ . Обратные числа будут идти в обратном порядке:  $\frac{1}{a-d} > \frac{1}{a} > \frac{1}{a+d}$ , но  $\frac{1}{a-d} - \frac{1}{a} = \frac{d}{a(a-d)} \neq \frac{d}{a(a+d)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+d}$ .

Замечание. Оба примера – единственные с точностью до постоянного множителя.

2. Можно.

См. примеры на рисунке 2.

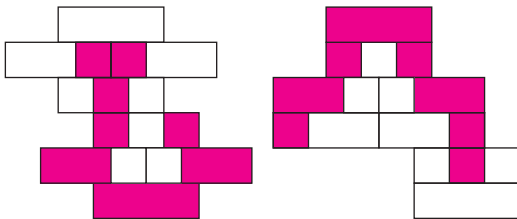


Рис. 2

3.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Пусть  $ABC$  – наш треугольник с прямым углом  $B$ , точка  $O$  – центр его описанной окружности,  $M$  и  $N$  – точки касания вписанной окружности с катетами  $AB$  и  $BC$ ,  $X$  и  $Y$  – середины дуг  $AB$  и  $BC$  соответственно (рис.3). Достаточно дока-

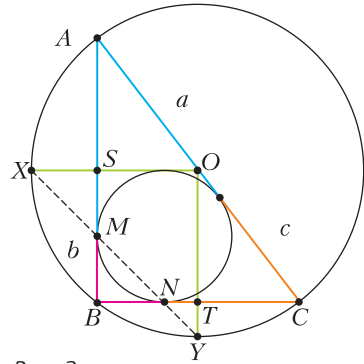


Рис. 3

зать, что  $M$  и  $N$  лежат на  $XY$ . Опустим из  $O$  перпендикуляры  $OS$  и  $OT$  на катеты  $AB$  и  $BC$  и продлим перпендикуляры до пересечения с описанной окружностью в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Пусть  $a, b, c$  – длины касательных из точек  $A, B, C$  к вписанной окружности.

Треугольник  $XOY$  – равнобедренный прямоугольный. Заметим, что  $OX = \frac{a+c}{2}, OS = \frac{b+c}{2}$ ,

откуда  $XS = OX - OS = \frac{a-b}{2}$ . Если  $M'$  – точка

пересечения  $XY$  с  $AB$ , то  $SM' = SX = \frac{a-b}{2}$ , откуда  $SM' + MB = \frac{a-b}{2} + b = \frac{a+b}{2} = BS$ , а значит,  $M'$  и  $M$  совпадают. Аналогично,  $N$  лежит на  $XY$ .

5. Тот, который примыкает к вершине  $A$ .

Решение Макара Чудновского (7 класс). Параллелограмм разделен на два данных шестиугольника, четыре невыпуклых четырехугольника, которые мы обозначили на рисунке 4 цифрами 1, 2, 3, 4, и треугольник, примыкающий к вершине  $C$ . Заметим, что четырехугольники 1 и 4 подобны – они получаются вырезанием из двух подобных прямоугольных треугольников равнобедренных треугольников с углом  $120^\circ$  при вершине. Аналогично, подобны четырехугольники 2 и 3. Заметим, что коэффициенты подобия равны отношению сторон данных шестиугольников. Но площади половинок параллелограмма  $ABD$  и  $CBD$  равны, причем половинка  $ABD$  состоит из первого шестиугольника и четырехугольников 1

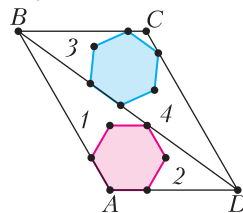


Рис. 4

и 2, а вторая – из второго шестиугольника, четырехугольников 3 и 4 и еще белого треугольника. Значит, сторона шестиугольника, примыкающего к вершине А, больше.

**6.** Перепишем очевидное неравенство  $(a_k - a_{k+1})^2 \geq 0$  в виде  $\frac{a_k^2}{a_{k+1}} \geq 2a_k - a_{k+1}$ . Так как число справа – целое, то и  $\left\lfloor \frac{a_k^2}{a_{k+1}} \right\rfloor \geq 2a_k - a_{k+1}$ . Сложив такие неравенства, получим требуемое.

10–11 классы

**1.** Карточки 1, 8 и 9.

Простые числа могут быть только у А, В и D. На карточках В – три из пяти возможных простых чисел (2, 3, 5, 7, 11). Остальные два простых числа – у D, иначе он не знал бы, какие именно из простых чисел есть у В, а какие – у А. На карточках С могут быть тройки (4, 6, 10), (4, 6, 12), (4, 10, 12), (6, 10, 12) или (6, 9, 12). Только если у D есть 6 или 12, он может определить, какая именно тройка у С. Итак, у D – два простых числа и одно из чисел 6 и 12, у С соответственно – 4, 6, 10 или 4, 10, 12, у В – три простых числа, у А – числа 1, 8, 9.

**3.**  $C_{2020}^{1010}$ .

*Оценка.* Введем на плоскости систему координат так, чтобы Коля сидел в точке (0; 0). Пусть  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{2020}$  – радиус-векторы кузнечиков в порядке их перепрыгивания Колей. Нетрудно найти радиус-вектор финишной точки:  $2(-\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3 + \dots - \vec{a}_{2019} + \vec{a}_{2020})$ . Число различных по виду сумм равно  $C_{2020}^{1010}$  (числу способов выбрать 1010 слагаемых на нечетных местах).

*Пример.* Расположим кузнечиков в точках числовой прямой с координатами 0 (у Коли) и 1, 3, 3<sup>2</sup>, ..., 3<sup>2019</sup> у остальных. Докажем, что все суммы степеней троек с коэффициентами ±1 различны. Прибавив к такой сумме постоянную сумму 1 + 3 + 3<sup>2</sup> + ... + 3<sup>2019</sup>, получим сумму с коэффициентами 0 и 2. Она соответствует 2020-значному троичному числу из нулей и двоек, а все такие числа различны. (На самом деле, почти любое расположение кузнечиков дает  $C_{2020}^{1010}$  финишных точек.)

**4.** При  $k = \frac{3}{2}$ .

Докажем, что для любых трех ненулевых чисел  $a < b < c$  одна из шести разностей  $b - a, c - b,$

$c - a, \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right|, \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right|, \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right|$  не превосходит  $\frac{3}{2}$ . Не

умалая общности, считаем, что хотя бы два числа положительны.

Разберем возможные случаи.

1)  $a > 0$ . Если  $b \leq 1$ , то  $b - a < 1$ ; если  $b > 1$ , то  $\frac{1}{b} - \frac{1}{c} < 1$ .

2)  $a < 0$ . Можно считать, что  $bc \leq 1$  (иначе заменим все числа на обратные). Пусть  $b - a > \frac{3}{2}$  и  $c - b > \frac{3}{2}$ . Тогда  $b\left(b + \frac{3}{2}\right) < bc \leq 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)$ . Значит,  $b < \frac{1}{2}$ . Следовательно,

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{a} < \frac{1}{\frac{3}{2} + b} + \frac{1}{\frac{3}{2} - b} = \frac{3}{\frac{9}{4} - b^2} < \frac{3}{\frac{9}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}.$$

Улучшить результат нельзя: для чисел  $-1, \frac{1}{2}, 2$  все шесть разностей не меньше  $\frac{3}{2}$ .

**7. а)** Не обязательно.

Впишем в квадрат четырехугольник без параллельных сторон так, чтобы одна его сторона разбила на части обе левые клетки, вторая – обе верхние, третья – обе правые, четвертая – обе нижние. Продлим пары противоположных сторон до пересечения. Теперь квадрат покрыт двумя углами, при этом нет клетки, целиком покрытой одним углом. Отрезав лишнее, превратим углы в треугольники. На рисунке 5 – пример искомого четырехугольника на клетчатой бумаге с вспомогательными клетками размера  $0,25 \times 0,25$ .

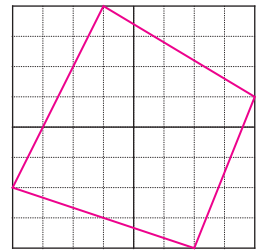


Рис 5

б) Обязательно.

Отметим 9 вершин клеток квадрата  $2 \times 2$ , как на рисунке 6, а. Треугольники их все накрывают. Возможны три случая распределения вершин квадрата А, В, С, D между треугольниками.

1) В один накрывающий треугольник Т попали три вершины, скажем А, В, С. Тогда фигура Т накрывает весь треугольник АВС и, тем более, клетку ВFOE.

2) В накрывающие треугольники попали пары вершин на противоположных сторонах, скажем, в один А, В, в другой С, D. Тогда первый накрывает и точку Е, а второй – точку G. Из трех точек H, O, F либо две, либо все три попадут в один треугольник. В силу выпуклости среди них есть пара точек на расстоянии 1. Пусть, например, H и O попали вместе с А, Е, В.



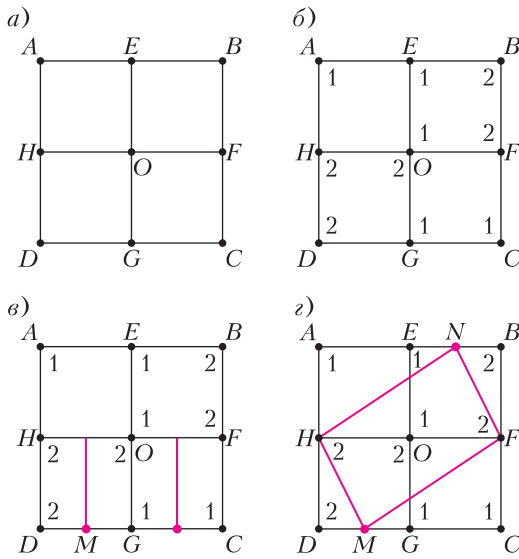


Рис. 6

Тогда в этом треугольнике лежит клетка  $AEOH$ .  
 3) В накрывающие треугольники  $T_1$  и  $T_2$  попали пары противоположных вершин квадрата: скажем, в  $T_1 - A$  и  $C$ , в  $T_2 - B$  и  $D$  (рис. 6, б). Тогда лежащая на пересечении диагоналей точка  $O$  попала и в  $T_1$ , и в  $T_2$ . Будем искать такое распределение точек  $E, F, G, H$  по треугольникам, чтобы ни один из треугольников не накрывал целую клетку. Можно считать, что точка  $E$  попала в  $T_1$ . Тогда  $H -$  в  $T_2$  (иначе  $T_1$  накроет клетку  $AEOH$ ),  $G -$  в  $T_1$  (иначе  $T_1$  накроет  $HOGD$ ),  $F -$  в  $T_2$  (иначе  $T_2$  накроет  $OFCG$ ).

Рассмотрим теперь середину  $M$  отрезка  $DG$  (рис. 6, в). Если она тоже принадлежит  $T_1$ , то, сдвинув клетку  $DHOG$  на  $1/2$  вправо, мы расположим ее целиком в  $T_1$  (ведь середина  $AG$ , лежащая над  $M$ , лежит в  $T_1$  и середина  $EC$  лежит в  $T_1$ ). Значит, можно считать, что  $M$  лежит в  $T_2$ . Аналогично, можно считать, что середина  $N$  отрезка  $EB$  лежит в  $T_2$ . Но тогда в  $T_2$  лежит параллелограмм  $MHN$  (рис. 6, з).

Осталось доказать, что внутри  $MHN$  помещается квадрат  $1 \times 1$ . Заметим, что угол  $NHM$  тупой (например, потому, что угол  $MHB$  прямой). Далее, площадь параллелограмма  $MHN$  равна  $4 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2$ . Далее,  $HN = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ . Тогда высота  $HX$  параллелограмма  $MHN$ , опущенная из  $H$  на  $MF$ , равна  $2 : \frac{\sqrt{13}}{2} > 1$ .

При этом  $MX = \sqrt{HM^2 - HX^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} - HX^2} < \sqrt{1 + \frac{1}{4} - 1} = \frac{1}{2}$ .

Тогда  $HN - MX > \frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{1}{2} > 1$ , откуда в параллелограмм  $MHN$  помещается квадрат с вершиной  $H$  и стороной длины 1, идущей вдоль  $HN$ .

# КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,  
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**М.Н.Грицук**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован  
в Комитете РФ по печати.**

**Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,  
«Квант»**

**Тел.: +7 916 168-64-74**

**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

**Отпечатано**

**в соответствии с предоставленными  
материалами**

**в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,  
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8**

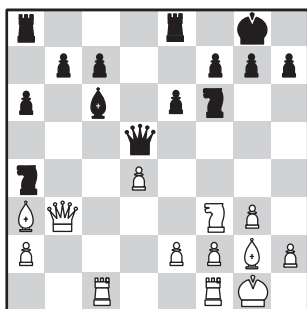
**Тел.: (831) 218-40-40**

## Оружие ЧЕМПИОНА

В январе внимание любителей шахмат традиционно приковано к голландскому городку Вейк-ан-Зее, в котором проходит супертурнир с участием сильнейших гроссмейстеров. Победителем турнира досрочно стал Магнус Карлсен, которому удалось трижды переиграть соперников в Каталонском начале.

**М.Карлсен-А.Гири**  
**Вейк-ан-Зее, 2022**

1. d4 ♘f6 2. c4 e6 3. ♘f3 d5 4. g3 ♗e7 5. ♔g2 0-0 6. 0-0 dc 7. ♗a3!? Новинка, вероятно, подготовленная к матчу с Я.Непомнящим, обычно здесь играют 7. ♗c2. 7...♗a3. Вынужденно, иначе белые возьмут на c4 конем. 8. ba ♗d7 9. a4 ♗c6 10. ♗a3 ♗e8 11. ♗c2 ♗bd7 12. ♗ac1 a6 13. ♗c4 ♗b6 14. ♗c3 ♗a4 15. ♗b3 ♗d5. Черные вроде бы защитились от 16. ♗c6, но белые все равно жертвуют качество, руководствуясь позиционными соображениями.



16. ♗c6! ♗c6 17. ♗e5 ♗b5 18. ♗c2. У черных лишнее качество и пешка, но они вынуждены защищаться ввиду неудачного положения ферзя и коня. Грозит 19. ♗b1 ♗a5 20. ♗b4 ♗b5 21. ♗e1, и ферзь пойман. 18...♗d5? (необходимо 18...♗b6 19. ♗b7 ♗c4! 20. ♗a8 ♗a3 21. ♗c6 ♗e2 22. ♗c7 ♗f8! с равенством) 19. ♗b1 ♗a5 20. ♗d5! ed? Нешаблонный размен слона, веро-

ятно, выпал из поля зрения черных. Единственный ход, позволяющий продолжить борьбу, – компьютерное 20...♗c3!!, и после 21. ♗b4! ♗e2+ 22. ♗e2 ♗d5 23. ♗c1! позиция у черных более перспективна, чем случившаяся в партии. 21. ♗b7! У черных лишнее качество, но они беспомощны из-за неудачного расположения фигур. Белые выигрывают несколько пешек и партию. 21...c5 22. ♗f5 ♗f8 23. ♗f7 ♗d8 24. dc ♗f6 25. ♗f6 gf 26. ♗h6+ ♗h8 27. c6 ♗fc8 28. c7 ♗c3 29. ♗b2 d4 30. ♗f7+ ♗g7 31. ♗d6 ♗g6 32. ♗f1 ♗b5 33. ♗c8 ♗c8 34. a4 ♗c7 35. ♗d4 ♗e6 36. ♗c3, и черные сдались.

В партии с М.Карлсеном Ш.Мамедьяров неудачно пожертвовал качество и вынужден был вскоре признать поражение.

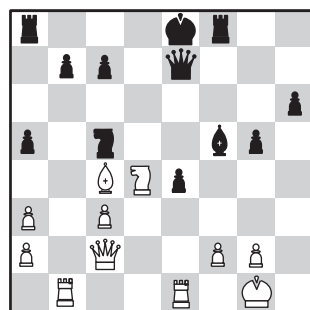
**М.Карлсен-Ш.Мамедьяров**  
**Вейк-ан-Зее, 2022**

1. d4 ♘f6 2. ♘f3 d5 3. c4 e6 4. g3 dc 5. ♔g2 ♗b4+ 6. ♗d2 a5 7. 0-0 0-0 8. e3. С перестановкой ходов получилась защита Боголюбова. Наиболее популярные ходы 8. ♗c2 и 8. ♗g5. 8...♗a6 9. ♗c2 b5 10. a4 c6 11. ♗c3 ♗b6 12. e4 ♗e7 13. e5 ♗d5 14. ab cb? 15. ♗d5 ed 16. ♗a5 ♗c6 17. ♗b6 ♗b6. Черные пожертвовали качество, однако белые виртуозно используют единственную открытую линию. 18. ♗a8 h6 19. ♗fa1 ♗e6 20. ♗d1 b4 21. b3 c3 22. ♗8a6 ♗c7 23. ♗e1 f6? 24. ♗d3 fe. Черные сами открывают линии для белых, что равносильно признанию поражения. 25. ♗e5 ♗e5 26. ♗e6 c2 27. ♗e1, и черные сдались.

Неудачно сложился турнир для одного из наиболее ярких современных шахматистов – Даниила Дубова: он был вынужден сняться из-за положительного теста на коронавирус. Но успел сыграть с С.Видитом партию, ставшую одним из ударных соревнований.

**Д.Дубов-С.Видит**  
**Вейк-ан-Зее, 2022**

1. e4 e5 2. ♗f3 ♗c6 3. ♗c4 ♗f6 4. d3 ♗c5 5. c3 d6 6. ♗g5 h6 7. ♗h4 a5 8. ♗a3. Новинка в, казалось бы, изученном вдоль и поперек дебюте. 8...♗a3 9. ba ♗e7 10. 0-0 ♗b8 11. d4 ♗bd7 12. ♗b1 g5 13. ♗g3 ♗e4 14. ♗c2 f5 15. de de 16. ♗fe1 ♗g3 17. hg e4 18. g4! Белые пожертвовали пешку в дебюте и теперь начинают атаку на нерокированного короля. 18...♗c5 19. ♗d4 ♗f8 20. gf ♗f5.



21. ♗b7! Ладью брать нельзя: 21...♗b7 22. ♗b5+ ♗f7 23. ♗f5, и черного короля атакуют сразу все белые фигуры. 21...♗f6!! Единственный ход! 22. ♗b1 ♗b7. Черные вынуждены принять жертву, грозило ♗b8+. 23. ♗b7 ♗d8 24. ♗f5 ♗f5 25. ♗e4 ♗d1+! Важный промежуточный ход. Проигрывало 25...♗e5? 26. ♗c6+ d7 27. ♗g6+ ♗d8 28. ♗g8+. 26. ♗h2 ♗e5 27. ♗c6+ ♗d8 28. ♗a8+ ♗d7 29. ♗b5+ ♗e6 30. ♗c8+ ♗f6 31. ♗h8+ ♗f5 32. f3? Грубая ошибка – белые не нашли 32. ♗c8+, и черные должны возвращаться назад, форсируя вечный шах, так как 32...♗e4?? ведет к мату после 33. ♗g4+ ♗d5 34. ♗c4+ ♗d6 35. ♗c6x. 32...♗e4 33. fe+ ♗e4. Теперь король черных убегает от шахов на ферзевый фланг, вынуждая белых остановить часы. 34. ♗a8+ ♗e3 35. ♗c6 ♗e5+ 36. g3 g4 37. ♗a7+ ♗d2, и белые сдались.

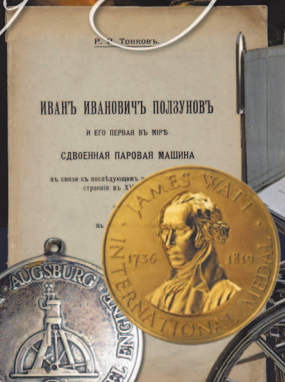
*А. Русанов*



Индекс 90964

ОТ ЭОЛИПИДА ДО ДИЗЕЛЯ...

*Игрушки с физикой*



ISSN 0130-2221 22001  
9 770130 222221

(ПОДРОБНЕЕ — НА С. 18 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)