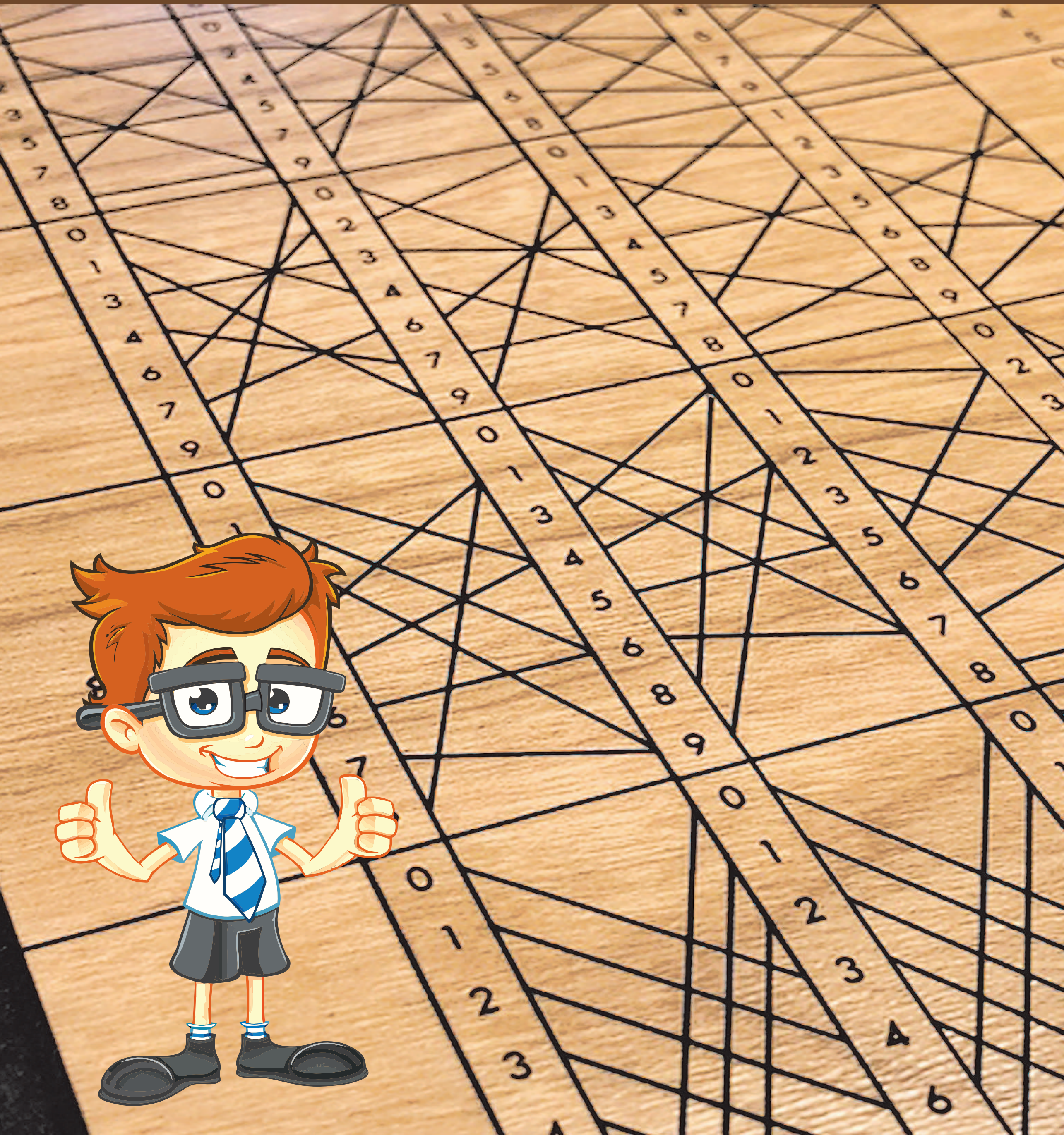
ISSN 0130-2221
2022 · № 6

ИЮНЬ

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

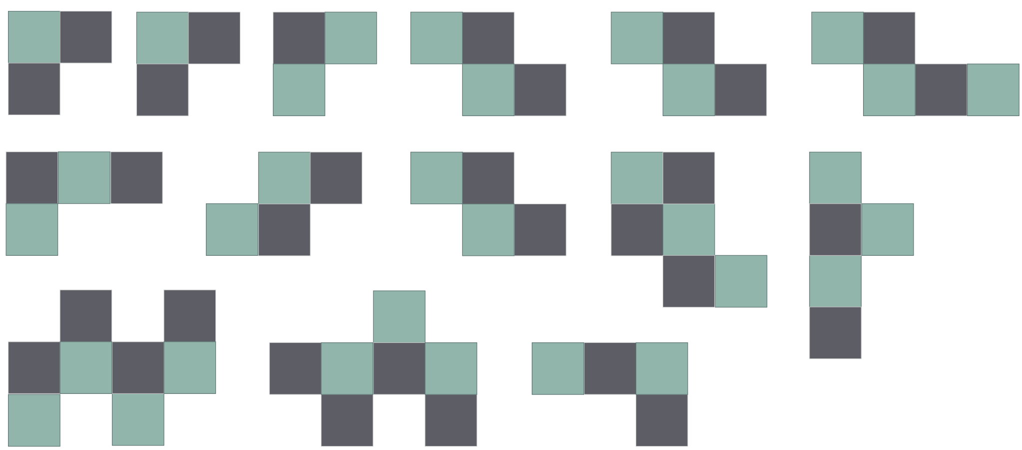


БОРИСУ 125 лет КОРДЕМСКОМУ

23 мая исполнилось 125 лет со дня рождения Бориса Анастасьевича Кордемского – замечательного математика и педагога, автора популярных книг и учебников. Несколько статей Кордемского вышло и в «Кванте». Особенно рекомендуем статью «Топологические опыты своими руками», опубликованную в № 2 и 3 за 1973 год. Но больше всего Кордемский известен, наверное, как автор «Математической смекалки» – сборника занимательных задач, который для многих стал первым шагом в удивительный и прекрасный мир математики.

Есть в «Математической смекалке» и задачи, в которых содержатся идеи для создания головоломок. Предлагаем одну из таких задач, названную автором «Разборная шахматная доска».

Веселый шахматист разрезал свою картонную шахматную доску на 14 частей, как показано на рисунке. Получилась разборная шахматная доска. Товарищам, приходившим к нему играть в шахматы, он предварительно предлагал головоломку: составить из данных 14 частей шахматную доску. Вырежьте из клетчатой бумаги такие же фигурки и убедитесь сами – трудно или легко из них составить шахматную доску.



Желаем успеха!

Е.Епифанов

КВАНТ ИЮНЬ 2022 № 6

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Игра в нетранзитивные кости

Д.ФОМИН

Мы начнем с одного, хотя и простого, но необычного варианта распространенной игры в кости с двумя участниками. Допустим, что кости, используемые для игры, не одинаковы и не являются хорошо знакомыми нам всем стандартными кубиками, на которых написаны числа от 1 до 6. А именно, предположим, что каждый игрок имеет собственный игральный кубик с неким набором чисел, написанных на его гранях. Оба игрока одновременно бросают свои кубики и выигрывает тот, у кого выпало большее число, после чего проигравший платит выигравшему 1 рубль. Для простоты изложения давайте пока будем считать, что у разных игроков числа разные, т.е. никакое число на одном кубике не совпадает ни с одним из чисел на другом кубике (обозначим это ограничение значком $*$).

Например, несложный перебор вариантов показывает, что кубик A с числами 1, 8, 11, 12, 13, 14 в среднем выигрывает у кубика B с числами 5, 6, 7, 9, 10, 18. И в самом деле, среди 36 возможных и равновероятных[1] вариантов выпадения чисел на этих двух кубиках имеется 23 таких, когда число на первом кубике строго больше, чем число на втором. Поскольку $23 > 18 = 36/2$, то мы можем говорить, что первый кубик «выгоднее» или «сильнее» второго. Можно также сказать, что *вероятность* того, что при случайном броске обоих кубиков победит кубик A, равна $23/36$. Тогда средний выигрыш игрока с первым кубиком будет примерно 28 копеек. И в самом деле, с вероятностью $23/36$ этот игрок получает 1 рубль, а с вероятностью $1 - 23/36 = 13/36$ он теряет ту же сумму. Значит, его средний выигрыш (в рублях) составляет

$$\frac{23}{36} - \frac{13}{36} = \frac{10}{36} \approx 0,2777.$$

Ясно, что такая игра с самого начала несправедлива, так как одному из игроков достался кубик, который заметно «сильнее» другого. Это можно сравнить с тем, как если бы в футбольном матче примерно равных по силе команд у одной из них в самом начале встречи удалили одного игрока.

Есть ли какой-то несложный способ восстановить справедливость игры? Конечно, есть! Давайте отринем идею личных кубиков, а предположим, что имеется общий игровой набор из двух кубиков, и разрешим игрокам самим выбирать свою игральную кость. Но… это никак не должно нам помочь, ведь первый игрок простонапросто выберет кубик A, и дальше все пойдет, как и раньше.

И тут, в продолжение предыдущей идеи, которая оказалась не такой уж и удачной, возникает новая, совершенно неожиданная и, на первый взгляд, бессмысленная идея. Что если мы добавим еще один кубик (или даже несколько), и пусть игроки выбирают не из двух кубиков, а из трех (или четырех и так далее). Казалось бы, это не должно решить проблему несправедливости набора игральных кубиков – ведь один из них все равно будет самый сильный.

И все-таки попробуем – добавим третий кубик $C = (2, 3, 4, 15, 16, 17)$. Мы уже подсчитали, что игрок с кубиком A выигрывает у того, кто бросает кубик B, с вероятностью $23/36$. Продолжая наши вычисления, получим, что кубик B выигрывает у

[1] Мы предполагаем, что кубик у каждого игрока «честный», т.е. все его грани выпадают с одной и той же вероятностью.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20220601

Крестьяне, играющие в кости. Давид Тенирс Младший (коллекция Эрмитажа)

кубика C с вероятностью $21/36 = 7/12$. Значит, кубик A сильнее, чем B, а B сильнее, чем C, ну и стало быть, кубик A по-прежнему сильнее всех. Осталось только убедиться в этом и сравнить кубики A и C. И тут вдруг оказывается, что... C выигрывает у A с вероятностью $7/12$.

Как же такое возможно? Ведь все эти три вероятности превосходят $1/2$ и получается, что A сильнее, чем B, B сильнее, чем C, а C сильнее, чем A. Так не бывает!

Для упрощения нашего исследования давайте формально определим, что же именно означает тут слово «сильнее».

Определение 1. Будем говорить, что набор чисел $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ *сильнее* набора чисел $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, если среди mn неравенств $a_i > b_j$ $(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ более половины являются верными. Если набор A сильнее, чем набор B, то мы будем обозначать это отношение через $A \succ B$.

Наш пример с тремя кубиками показывает, что это отношение не является *транзитивным*. В математике транзитивным называется такое отношение между множествами, числами или другими объектами, которое «распространяется» по цепочке. Например, если есть три таких целых числа a, b и c, что $a > b$ и $b > c$, то тогда $a > c$. Так вот, в данном случае, это не так — ведь кубики A, B и C таковы, что

$$A \succ B \succ C \succ A.$$

Интуиция говорит нам, что так быть не должно, ведь если A выигрывает у B чаще, чем проигрывает ему, и то же самое верно для B по отношению к C, то тогда кубик A должен «побеждать» кубик C. Оказывается, что не все так просто, и, как мы уже продемонстрировали, вообще говоря, это неверно.[2]

Вот наш первый пример нетранзитивных кубиков.

Пример 1

$$\begin{array}{lcllllllll}
A & = & (& 1, & 8, & 11, & 12, & 13, & 14 &), \\
B & = & (& 5, & 6, & 7, & 9, & 10, & 18 &), \\
C & = & (& 2, & 3, & 4, & 15, & 16, & 17 &).
\end{array}$$

Получается, что в игре с двумя участниками, где каждый сам выбирает себе игровую кость из данного набора, всегда выиг-

[2] Впервые этот парадокс был обнаружен в 1959 году польскими математиками Хуго Штейнгаузом и Станиславом Трыбулой [1].

рывает второй игрок – он попросту будет брать себе тот кубик, который сильнее кубика, выбранного первым игроком. В этом замечательном наборе из трех кубиков нет самого сильного кубика, поскольку каждый из них слабее какого-то другого.

После такого выбора каждый бросок игральных костей приносит второму игроку гарантированный средний выигрыш, равный примерно 17 копейкам. И в самом деле, из трех вероятностей выигрыша 23/36, 21/36 и 21/36 наименьшая равна 21/36 и в такой ситуации (когда первый игрок выбирает кубик A, а второй, конечно же, берет себе кубик C) средний выигрыш второго игрока равен $7/12 - 5/12 = 1/6$ рубля, т.е. $16\frac{2}{3}$ копейки.

Эти кубики нетрудно изготовить самому из картона. Воспользуйтесь, например, такими развертками (рис. 1).

А вот еще один набор игральных костей,

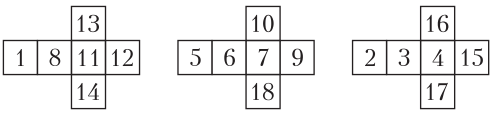


Рис. 1

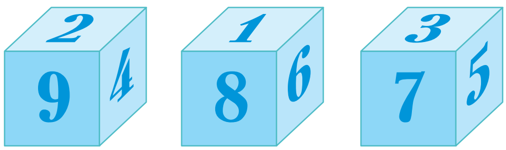
немного попроще.

Пример 2

$$A = (2, 2, 4, 4, 9, 9),$$
$$B = (1, 1, 6, 6, 8, 8),$$
$$C = (3, 3, 5, 5, 7, 7).$$

Тут все три вероятности выигрыша в цепочке $A \succ B \succ C \succ A$ одинаковы и равны $5/9 > 1/2$.

Если хорошенько подумать, то станет понятно, что нет ничего особенного в существовании таких «невозможных» игральных кубиков. Подобная нетранзитивность нам всем хорошо известна, например, по игре «камень–ножницы–бумага». И в других играх и видах спорта есть масса подобных примеров.



Здесь мы ограничимся лишь одним из них, выбранном нами практически случайно из классических шахмат элитного уровня. Как показывает нам статистика сайта Chess Games на август 2021 года, российский гроссмейстер Петр Свидлер обычно побеждает американца Хикару Накамуру ($+7 - 2 = 11$, т.е. семь побед, два поражения, одиннадцать ничьих), Накамура в свою очередь обычно выигрывает у гроссмейстера Сергея Карякина ($+8 - 5 = 24$), но при этом Карякин имеет весьма положительный результат против Свидлера ($+9 - 5 = 23$). Вот и пойди разберись, кто из этих трех шахматистов *сильнее*. Тут приходит на память книжка Льва Кассиля «Кондуит и Швамбрания», где мальчик Ося озадачивает взрослых вопросом «А если слон вдруг на кита налезет, кто кого сборет?»

И наконец, еще один важный пример нетранзитивности – это проблема выбора по нескольким критериям. Что здесь имеется в виду? Представим себе, что в выборах президента Страны Дураков участвуют трое кандидатов, Дуремар, Буратино и Мальвина, которых вы оцениваете по тому, какую позицию они занимают по следующим шести параметрам: налоги, иммиграционная политика, судебная реформа, образование, здравоохранение и борьба с коррупцией. По каждому из этих шести важных вопросов вы определили, какой кандидат нравится вам больше всего (оценка – 3 очка), какой – меньше всего (1 очко), ну а третий – серединка на половинку (2 очка). В результате многодневной тщательной аналитической работы у вас получилась следующая сводная таблица:

	налог	иммиг.	суды	образ.	здрав.	кор.
Дуремар	3	2	1	3	1	2
Буратино	2	1	3	2	3	1
Мальвина	1	3	2	1	2	3

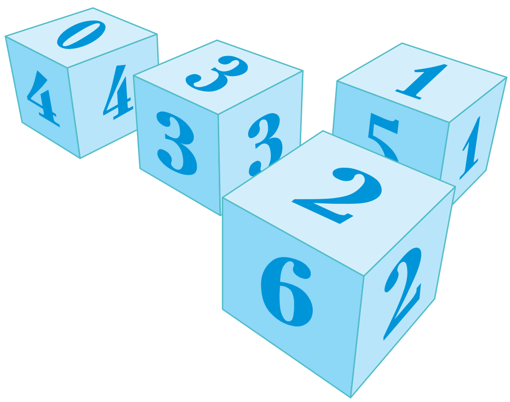
За кого же вам голосовать? Дуремар лучше Буратино по четырем из шести параметров, так что вам, видимо, надо голосовать за него. Но ведь Мальвина лучше Дуремара – тоже по четырем параметрам из шести (правда, по другим четырем). Ну тогда, конечно, ясно, что Мальвина и есть самый правильный для вас кандидат – ведь она лучше Дуремара, а Дуремар лучше Буратино. Но тут выясняется, что в этом мини-конкурсе, где кандидаты борются за ваш голос, Буратино побеждает Мальвину, причем тоже по четырем параметрам из шести. Приходится махнуть на все это рукой и, выкинув вашу табличку в мусорное ведро, голосовать за Мальвину, потому что она убедительнее всех излагает свою предвыборную программу, и к тому же она закончила тот же университет, в котором когда-то учились и вы сами.

Возвращаясь к нетранзитивным кубикам, надо упомянуть, что любителям математики и логических головоломок уже давно известны аналогичные наборы и из четырех кубиков – например, так называемые *кубики Эфрона.*

Пример 3 (кубики Эфрона)

$$
\begin{array}{lclcccccccl}
A & = & (& 0, & 0, & 4, & 4, & 4, & 4 &), \\
B & = & (& 3, & 3, & 3, & 3, & 3, & 3 &), \\
C & = & (& 2, & 2, & 2, & 2, & 6, & 6 &), \\
D & = & (& 1, & 1, & 1, & 5, & 5, & 5 &).
\end{array}
$$

Обратите внимание, что каждый кубик в этом наборе побеждает следующий (а последний кубик побеждает первый) с одной и той же вероятностью, равной 2/3. Это означает, что если вы играете с кем-то в кости, пользуясь кубиками Эфрона – как «истинный джентльмен», вы, конечно же, уступаете вашему оппоненту право первому выбрать себе «самый лучший» кубик, – то вам гарантирован средний выигрыш, равный примерно 33 копейкам за один бросок костей. Очень даже неплохо, не правда ли? Во всяком случае, это лучше, чем то, чего вы можете добиться в примерах 1 и 2.[3]



Также можно подобрать набор из семи кубиков таких, что для любых двух (!) из них существует другой кубик набора, который выигрывает у *обоих* выбранных кубиков. Это означает, что в игре с тремя участниками, где каждому из них разрешается выбрать себе кубик из такого набора, полную победу одержит тот, кто выбирает последним – он всегда может выбрать кубик, который сильнее обоих выбранных первым и вторым игроками. Этот набор известен под названием *кубиков Оскара*.

Пример 4 (кубики Оскара)

$$
\begin{array}{lclcccccccl}
A & = & (& 2, & 2, & 14, & 14, & 17, & 17 &), \\
B & = & (& 7, & 7, & 10, & 10, & 16, & 16 &), \\
C & = & (& 5, & 5, & 13, & 13, & 15, & 15 &), \\
D & = & (& 3, & 3, & 9, & 9, & 21, & 21 &), \\
E & = & (& 1, & 1, & 12, & 12, & 20, & 20 &), \\
F & = & (& 6, & 6, & 8, & 8, & 19, & 19 &), \\
G & = & (& 4, & 4, & 11, & 11, & 18, & 18 &).
\end{array}
$$

Задача 1. *В наборе Оскара найдите кубик, который побеждает кубики B и D.*

Настало время ввести простейшую терминологию и обозначения для исследования нашей игры.

Определение 2. В игре с костями A и B будем обозначать вероятность выигрыша игрока с костью A через $p(A \succ B)$, а средний выигрыш игрока с костью A – через $w(A \succ B)$.

Например, для кубиков Оскара C и F мы имеем $p(C \succ F) = 2/3$ и $w(C \succ F) = 2/3 - 1/3 = 1/3$. Также $p(B \succ E) = 4/9$ и $w(B \succ E) =$

[3] В русскоязычной научно-популярной литературе описание кубиков Эфрона и парадокса нетранзитивных костей впервые появилось в замечательной книге «Крестики-нолики» [2] известного популяризатора математики Мартина Гарднера.

$= 4/9 - 5/9 = -1/9$. Отрицательный средний выигрыш $(-1/9)$, естественно, означает средний проигрыш, равный $1/9$.

Для любого набора из m костей

$$\mathcal{A} = \left\{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(m)}\right\}$$

мы можем построить полный граф $K_{\mathcal{A}}$, в котором кости – это вершины, а каждое его ребро UV можно ориентировать в направлении от более слабой кости к более сильной (если они равны по силе, то выберем ориентацию наобум) и пометить неотрицательным числом, равным модулю среднего выигрыша $w(V \succ U)$, которое мы будем называть *весом* этого ребра. Такой граф проще всего описать при помощи *матрицы вероятностей выигрыша*, т.е. квадратной таблицы размером $m \times m$, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца написано число $p\left(A^{(i)} \succ A^{(j)}\right)$.

Определение 3. Для каждой кости $U = A^{(k)}$ в наборе $\mathcal{A}$ найдем другую кость $V = A^{(j)}$, для которой средний выигрыш $w(V \succ U)$ является максимально возможным (если имеется несколько таких костей, то мы выбираем одну из них случайным образом), после чего отметим ориентированное ребро $\overrightarrow{UV}$. Эти m ребер определяют *ориентированный взвешенный граф* $G_{\mathcal{A}}$ с m вершинами и m ориентированными ребрами (при этом каждое из этих ребер помечено его весом) такой, что в этом графе из каждой вершины выходит ровно одно ребро (а вот входить в данную вершину могут сразу несколько ребер или вовсе ни одного ребра).

В качестве примера рассмотрим кубики Оскара. Тогда матрица вероятностей и граф $G_{\mathcal{A}}$ (точнее, один из графов $G_{\mathcal{A}}$) выглядят так, как показано на рисунках 2 и 3.

	A	B	C	D	E	F	G
A	1/3	5/9	5/9	4/9	5/9	4/9	4/9
B	4/9	1/3	5/9	5/9	4/9	5/9	4/9
C	4/9	4/9	1/3	5/9	5/9	4/9	5/9
D	5/9	4/9	4/9	1/3	5/9	5/9	4/9
E	4/9	5/9	4/9	4/9	1/3	5/9	5/9
F	5/9	4/9	5/9	4/9	4/9	1/3	5/9
G	5/9	5/9	4/9	5/9	4/9	4/9	1/3

Рис. 2

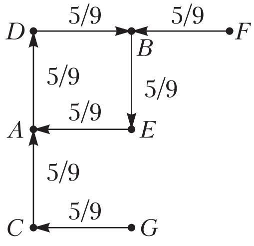


Рис. 3

При помощи графа $G_{\mathcal{A}}$ можно наглядно продемонстрировать стратегию второго игрока, которая позволяет ему максимизировать свой средний выигрыш. Пусть первый игрок выбрал кость U – в графе есть ровно одно ребро, выходящее из U. Тогда второму игроку надо выбрать кость V, в которую ведет это ребро. По определению 3 графа $G_{\mathcal{A}}$ этот выбор даст ему наибольшую вероятность выигрыша, а следовательно, и наибольший средний выигрыш.

Теперь давайте избавимся от кубиков (которые имеют всего шесть граней) и обобщим нашу задачу на случай произвольных наборов чисел. Дадим следующее определение.

Определение 4. Последовательность наборов чисел $A_1, A_2, \ldots, A_m$ будем называть *нетранзитивной цепочкой*, если

$$A_1 \succ A_2 \succ \ldots \succ A_m \succ A_1.$$

Продолжая изучение нетранзитивных кубиков, естественно задать вопрос – для каких m и n существуют нетранзитивные цепочки из m наборов чисел по n (или менее) чисел в каждом?

Задача 2. *Для каких $m, n \in \mathbb{N}$ существуют m непересекающихся наборов $A_1, \ldots, A_m$ таких, что каждый из них содержит не более чем n чисел и при этом*

$$A_1 \succ A_2 \succ \ldots \succ A_m \succ A_1?$$

Во-первых, совершенно очевидно, что нетранзитивная цепочка должна иметь длину 3 или больше.

Во-вторых, совсем нетрудно понять, что наборы в такой цепочке не могут состоять лишь из одного или двух чисел. И в самом деле, если набор A состоит из двух чисел $a_1 \le a_2$, а набор B – из двух чисел $b_1 \le b_2$, то для выполнения соотношения $A \succ B$ необходимо, чтобы $a_1 > b_1$. А это, конечно же, означает, что нетранзитивная цепочка таких наборов невозможна.

Аналогично, не может существовать нетранзитивная цепочка произвольной длины, в которой все наборы состоят из одного или двух чисел. Значит, мы можем предположить, что $m,\ n > 2$. Существует ли нетранзитивная цепочка из трех наборов по три числа? А цепочка из четырех наборов по четыре числа? Ответ положителен, и при этом придумать такие цепочки совсем несложно.

Пример 5

$$[m = n = 3]: \quad \begin{matrix} 1 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7, \\ 2 & 4 & 9 \end{matrix}$$

Пример 6

$$[m = n = 4]: \quad \begin{matrix} 1 & 5 & 13 & 14 \\ 2 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 7 & 9 & 16 \\ 4 & 6 & 8 & 15 \end{matrix}$$

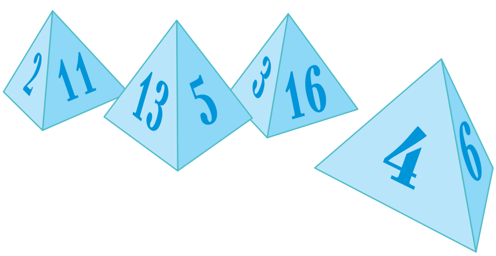
Мы предоставляем читателям самим убедиться в том, что в каждой из этих двух таблиц первая строка сильнее второй, вторая сильнее третьей и так далее, а последняя строка сильнее первой.

Используя пример 6, читатель может склеить из картона четыре тетраэдральные игровые кости такие, что для любого «кубика» в наборе найдется другой, который у него выигрывает.

Теперь мы можем ответить на общий вопрос, заданный в задаче 2.

Теорема 1. *Для любых натуральных чисел $m,\ n > 2$ существует нетранзитивная цепочка из m наборов, каждый из которых содержит ровно n чисел.*

Перед тем, как переходить к доказательству теоремы, введем некоторые обозначения и докажем три несложные вспомогательные леммы.



Если набор A сильнее набора B, то мы будем также говорить, что набор B *слабее* набора A (обозначая это $B \prec A$).

Для любого набора $A = (a_1, \ldots, a_n)$ и числа ε обозначим через A_ε^- набор, состоящий из чисел $(\tilde{a}_1 = a_1 - \varepsilon, \ldots, \tilde{a}_n = a_n - \varepsilon)$. Аналогично, обозначим через A_ε^+ набор, состоящий из чисел $(\tilde{a}_1 = a_1 + \varepsilon, \ldots, \tilde{a}_n = a_n + \varepsilon)$.

Лемма 1.1. *Для любого набора $A = (a_1, \ldots, a_n)$ и для любого положительного числа ε набор A_ε^- всегда слабее набора A. Аналогично, набор A_ε^+ всегда сильнее набора A.*

Доказательство леммы. Удобства ради можно считать, что $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$. Тогда легко видеть, что количество верных неравенств вида $a_i > \tilde{a}_j = a_j - \varepsilon$ заведомо не меньше, чем количество верных неравенств $a_i \ge a_j$, т.е. не меньше, чем $n + (n-1) + \ldots$ $\ldots + 2 + 1 = n(n+1)/2 > n^2/2$.

Лемма 1.2. *Если наборы $A = (a_1, \ldots, a_n)$ и $B = (b_1, \ldots, b_k)$ не пересекаются и A сильнее B, то существует набор X из n (равно как и из k) чисел, не имеющий общих элементов ни с A, ни с B и такой, что $A \succ X \succ B$.*

Доказательство леммы. Рассмотрим минимальную разность δ между числами набора A и числами набора B и выберем $\varepsilon = \delta/2$. Тогда очевидно, что $X = A_\varepsilon^-$ по-прежнему сильнее, чем B; а то, что $A \succ X$, следует из леммы 1.1. Аналогично, в качестве набора X можно выбрать набор B_ε^+.

Лемма 1.3. *Если имеется нетранзитивная цепочка из m наборов $A_1, \ldots, A_m$ по n чисел в каждом, то существует нетранзитивная цепочка из m наборов $B_1, \ldots, B_m$ по $n+2$ чисел в каждом.*

Доказательство леммы. Пусть a – это максимальное из всех чисел, входящих в наборы $A_i, 1 \le i \le m$. Теперь дополним каждый набор A_i двумя числами $a + m + 1 - i$ и $a + m + 1 + i$, после чего обозначим полученный набор из $k+2$ чисел через B_i. Это и будет необходимая нам цепочка из m наборов по $n+2$ чисел в каждом.

Доказательство теоремы легко получится из лемм 1.1, 1.2 и 1.3, и примеров 5 и 6 с самыми короткими цепочками, содержащими, соответственно, минимально возможное нечетное и четное количество чисел. Формальное доказательство мы оставляем нашим читателям в качестве не очень сложного упражнения.

Таким образом, можно считать, что задача 2 нами полностью решена – и ответ и решение оказались довольно-таки прямолинейными.

Попробуем теперь исследовать вопрос о нетранзитивности в другом направлении. Мы видели, что в цепочке из примера 2 все вероятности выигрыша $p(A \succ B)$, $p(B \succ C)$ и $p(C \succ A)$ равны 5/9, что означает довольно маленький средний выигрыш – каждый набор выигрывает у следующего в 5 случаях из 9, но в 4 случаях проигрывает. Нам хотелось бы научиться выигрывать как можно больше – так на сколько же могут все вероятности выигрыша в цепочке превышать 1/2?

Может ли, например, в нетранзитивной цепочке каждый набор быть как минимум в два раза сильнее, чем следующий, т.е. выигрывать в два раза чаще, чем проигрывать?

Ответ на этот вопрос положителен. И в самом деле, в наборе кубиков Эфрона (пример 3) каждый кубик ровно в два раза сильнее следующего, поскольку вероятность выигрыша в этой цепочке всегда равна 2/3. Надо отметить, однако, что это возможно только потому, что цепочка Эфрона состоит из четырех кубиков. Для трех кубиков это было бы невозможно.

Задача 3. *Даны три шестигранных кубика A, B и C. Докажите, что по крайней мере одно из трех чисел $p(A \succ B)$, $p(B \succ C)$ и $p(C \succ A)$ не превосходит 7/12.*

А может быть, есть такая нетранзитивная цепочка, где каждый набор в три раза сильнее следующего за ним? Или даже в пять раз сильнее?

А вот ответы на эти два вопроса оказываются отрицательными, причем вне зависимости от длины цепочки и размера наборов чисел.

Литература

1. *H.Steinhaus*, *S.Trybula*. On a Paradox in Applied Probabilities. – Bull. Acad. Polon. Sci., 7 (1959), p.67–69.

2. *М.Гарднер*. Крестики-нолики. – М.: Мир, 1988.

(Продолжение следует)

Парадоксы теплообмена: невероятный теплообменник

Е.СОКОЛОВ

Весь вечер пятницы и всю субботу я рисовал разные схемы теплообмена. Но все зря – построить более эффективный процесс теплообмена, чем у Маши, не получалось. В конце концов мама не выдержала и сказала: «Сходи завтра к дедушке. Может он тебе поможет!» В воскресенье утром я уже был у дедушки.

– Ты знаешь, Петя, мне кажется, что для той задачи, которую вы решали, Машин метод действительно самый эффективный, хотя доказать это я не могу. Если ты хочешь предложить что-то лучшее, то тебе, по моему мнению, следует изменить постановку задачи. Как-то так расширить ее, чтобы ваш теплообмен между n стаканами был частным случаем.

А парадоксы в теплотехнике встречаются. Когда-то я сам был поражен неожиданным открытием парадоксального свойства теплообменника обратного тока. Да и не только я один. Но, обо всем по порядку.

Рассказ про теплообменники прямого тока

Теплообменники – это технические устройства, в которых отработанный теплоноситель отдает свое тепло теплоносителю, вновь поступающему в систему. Теплообменники очень важны и в технике, и в живой природе. Представьте себе громадный нефтеперегонный завод. Каждый день на нем надо нагреть до температуры 350 °С тысячи тонн нефти, прежде чем закачать ее в ректификационные колонны. С другой стороны, мы не можем уже полученные продукты перегонки сразу разлить по цистернам и отправить потребителю – они слишком горячие. Так вот, теплообменники позволяют решить сразу обе эти проблемы. В них уже бесполезное и ненужное тепло, содержащееся в нефтепродуктах, передается поступающей в теплообменник сырой нефти. В результате – продукты перегона охлаждены, а сырая нефть нагрета. И в живой природе теплообменники важны. Без внутренних теплообменников не могли бы жить ни киты в ледяных морях Антарктиды, ни антилопы с гепардами в жарких саванах Африки.

Если спросить обычного человека, какой максимальный КПД может иметь теплообменник, то он скажет: «В идеале до 50%» и, скорее всего, в качестве доказательства сошлется на теплообмен между двумя стаканами с холодной и горячей водой.

– Смотрите, – скажет он, – идеальный результат получится в том случае, когда температуры стаканов станут равными. Но реально это недостижимо – для полного выравнивания необходимо бесконечно большое время. Вот почему я добавил «в идеале».

То, что сказал наш собеседник, абсолютно справедливо для теплообменников прямого тока (рис. 1,*а*). Такой теплообменник представляет собой две трубы, имеющие общую стенку, через которую и происходит теплообмен. На вход теплообменника подается горячая и холодная вода. При движении внутри теплообменника горячая вода отдает часть тепла холодной воде, что и требуется.

При рассмотрении работы теплообменников всегда полезно строить их дискретную модель. Давай сегодня, чтобы не запутаться в частностях, мы будем рас-

Это вторая часть статьи о теплообмене. Первая опубликована в «Кванте» №4 за этот год.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20220602

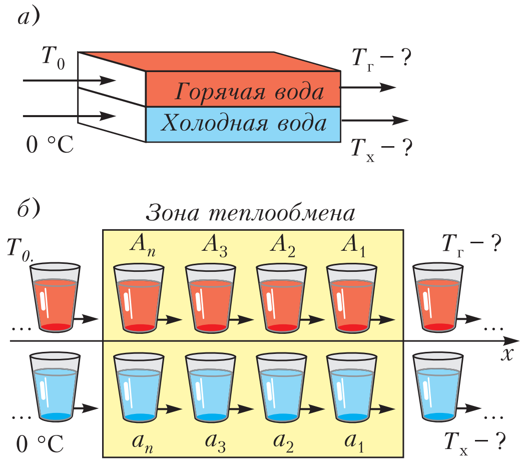


Рис. 1. Теплообменник прямого тока (а) и его дискретная модель (б)

сматривать только симметричные теплообменники, у которых трубы имеют одинаковые размеры и вода движется в них с одинаковой скоростью. Тогда работа такого теплообменника может быть смоделирована дискретной моделью, изображенной на рисунке 1,*б*: в зоне теплообмена в одном направлении и с одной и той же скоростью v движутся «паровозики», состоящие из α- и β-стаканов, о которых вы говорили в классе.

– Тогда я знаю, что получится, – не удержался я. – Это наивный способ теплообмена (рис. 2,*а*), и эффективность такого способа, т.е. доля тепла, захваченного холодным телом, равна 50%.

– Да, для вашего модельного предположения, что температуры стаканов успевают полностью выровняться, это так. В реальности, конечно, полного выравнивания не происходит и эффективность меньше. Давай подправим твой вывод.

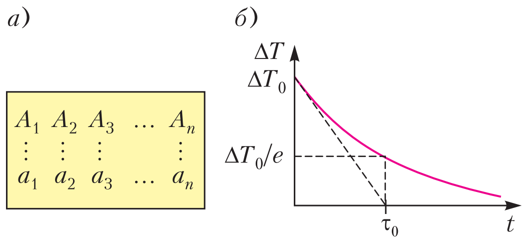


Рис. 2. а) Схема обмена в теплообменнике прямого тока; б) изменение разности температур со временем

Опыт показывает, что если между двумя одинаковыми телами происходит теплообмен, то разность их температур изменяется со временем по закону

$$\Delta T(t) = \Delta T_0 \cdot e^{-t/\tau_0}.$$

Обрати внимание, разность температур стремится к нулю (рис. 2,*б*), но никогда в ноль не обращается. Поэтому для теплообменов нет термина «время выравнивания температур». Договорились скорость выравнивания температур характеризовать параметром τ_0, который имеет размерность времени. Это время, за которое разность температур между телами уменьшается в e раз, где $e = 2{,}718281828$ – уже известное тебе знаменитое число, которое называют основанием натуральных логарифмов. Наряду с этим характерным временем используют и характерную длину $l_0 = v\tau_0$, где v – скорость движения теплоносителя по трубам. Это …

– Это расстояние, при прохождении которого разность температур «соседствующих» элементов горячей и холодной жидкостей падает в e раз.

– Правильно! Так вот, экспериментальный факт позволяет получить точное выражение для эффективности теплообменника прямого тока:

$$\eta = \left(\frac{T_х}{T_0}\right)_{вых} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-t_{вых}/\tau_0}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-l/l_0}\right),$$

где $t_{вых} = l/v$ – время прохождения теплообменника элементом жидкости, l – длина теплообменника. Из этой формулы видно, что эффективность теплообменника с прямым током всегда меньше 50%. Она растет с увеличением его длины и достигает предельного значения 50% для бесконечно длинного теплообменника.

Рассказ про теплообменники обратного тока

Теплообменники обратного тока устроены точно так же, как и предыдущие, только движение воды по трубам идет в разные стороны – горячая и холодная вода движутся навстречу друг другу (рис. 3,*а*). Так вот, предельное значение эффектив-

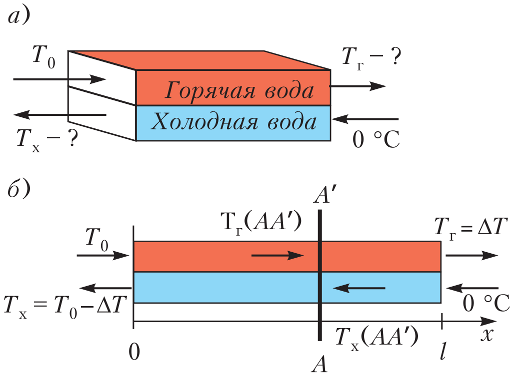


Рис. 3. а) Теплообменник обратного тока; б) к записи условия постоянства потока тепла

ности для таких теплообменников равно 100%. В принципе, горячую отработанную воду с температурой , которую мы выводим из системы, можно охладить до 2 °C, и за счет этого холодную воду, взятую при температуре 0 °C, можно нагреть до температуры 98 °C (для этого примера эффективность равна 98%).

Идея о том, что холодную воду можно нагреть так, чтобы она стала горячее бывшей горячей, настолько парадоксальна, что каждый раз, когда это обнаруживалось, начинались бурные дискуссии. Дело доходило до ревизии закона сохранения энергии. Но, конечно, теплообменники с обратным током не опровергают этот закон, а просто показывают, что на уровне макроскопических тел обмены могут быть организованы по самым разным схемам, что разнообразие и богатство окружающего нас мира поистине неисчерпаемы.

– А как это все работает? Как объяснить работу таких теплообменников?

– Ты знаешь, Петя, объяснить это я пока тебе не смогу, а вот получить все формулы, описывающие работу теплообменников с обратным током, из самых общих соображений, даже не понимая полностью внутренних причин происходящего, мы сможем.

И такая ситуация очень характерна для физических исследований. Да, бывает так, что у ученого не хватает знаний, чтобы вывести физический закон, исходя из рассмотрения «внутренних механизмов» явления, но он можем получить его, исходя из некоторых общих соображений. Физические теории, построенные таким образом, называются феноменологическими теориями и являются очень важной частью физического знания. Так и мы с тобой давай построим феноменологическую теорию теплообменника обратного тока.

Сначала посмотрим, что нам даст условие постоянства теплового потока. Для теплообменников прямого тока оно давало нам условие, что в каждом сечении имеет место равенство

$$T_г + T_х = T_0.$$

А что получается для теплообменников обратного тока?

Я записал, что за единицу времени через каждое сечение (рис. 3,*б*) переносится количество тепла, равное

$$\Delta Q = c\Delta m\left(T_г - T_х\right),$$

где c – удельная теплоемкость, а Δm – массовый расход каждого теплоносителя. Получается, что если количество тепла должно иметь одно и то же значение в каждом сечении, то тогда на всем протяжении теплообменника должна быть постоянной и разность температур между горячей и холодной водой:

$$\Delta T = T_г - T_х = \text{const}.$$

Правда, найти, чему равна константа, у меня не получилось: при применении к правому концу теплообменника написанное соотношение давало, что горячая вода выходит из теплообменника при температуре ΔT, а в применении к левому концу – что холодная вода входит в систему при температуре $T_0 - \Delta T$.

– Идем дальше. Смотри, из твоего равенства следует, что на всем протяжении теплообменника в каждом сечении температура горячей воды выше, чем температура холодной воды. Значит, при своем течении от входа к выходу она постоянно охлаждается. И мы можем нарисовать качественный график изменения температур по длине теплообменника (рис. 4,*а*).

– Это все понятно! Не совсем понятно, чему равна разность температур ΔT. Что это за загадочная величина? Чем она

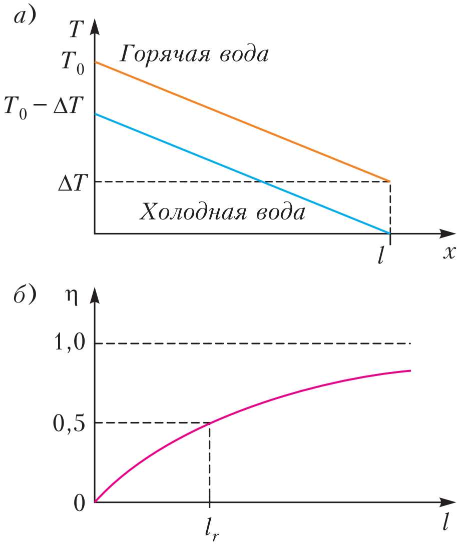


Рис. 4. а) Качественный график изменения температур по длине теплообменника; б) зависимость эффективности теплообменника обратного тока от его длины

определяется? Получается, пока мы не разберемся с внутренней «кухней», окончательную формулу мы получить не сможем?

– Как ни странно, сможем. Только обычно она записывается не для разности температур, а для более «глубокой» величины, которая прячется за ΔT. Смотри, в нашей задаче есть только одна температура – температура горячей воды на входе T_0. Поэтому из соображений размерности мы можем утверждать, что $\Delta T = \xi T_0$, где ξ – безразмерная постоянная, которая зависит только от параметров теплообменника. Численно эта величина равна доле тепла, выносимого из системы отработанной горячей водой (почему?), поэтому ее естественно назвать коэффициентом пропускания теплообменника.

Так вот, Петя, формула для этого главного параметра теплообменника может быть получена из самых общих соображений. Ты можешь сделать это и сам, а я просто выпишу итоговый результат. Коэффициент пропускания ξ или, если тебе это больше нравится, эффективность η (напоминаем, что $\eta + \xi = 1$) выражаются через параметры теплообменника следующим образом:

$$\xi = \frac{l_r}{l + l_r},$$

$$\eta = \frac{l}{l + l_r},$$

где l – длина теплообменника, $l_r = 2v\tau_0 = 2l_0$, τ_0 – характерное время выравнивания температур, v – скорость течения теплоносителей. Теперь доказательство: из записанных формул видно, что эффективность теплообменника с обратным током увеличивается с увеличением его длины (рис. 4,*б*) и для бесконечно длинного теплообменника достигает значения 1, т.е. 100%.

Подводим итог нашего разговора. Получается, что, укрепив общие соображения силой математики, мы можем полностью описать работу теплообменников с обратным током. Только жаль, что в данном случае математика не дает нам понимания причин такого поведения. Таким образом, тебе остается тема для размышлений: что в двух пустотелых трубах теплообменника может быть такого, что выпускает из теплообменника лишь малую толику тепла?

Первый опыт объяснения работы теплообменников обратного тока

Была у меня одна проблема – придумать новую схему теплообмена, а теперь появилась и вторая – понять суть работы теплообменника с обратным током. Однако по здравому размышлению я понял, что не все так плохо: каждая проблема – это ключ к другой. Задачи про теплообмен между стаканами подсказывают, как сконструировать дискретную модель теплообменника. С другой стороны, теплообменники подсказали новый способ организации теплообмена между стаканами – теплообмен между движущимися стаканами, который происходит в момент их встречи.

Для начала я решил попробовать что-нибудь не очень сложное. Я взял два паровозика, каждый из трех стаканов, которые движутся навстречу друг другу (рис. 5,*а*). В качестве основного положения модели я принял, что температуры стаканов выравниваются, когда их координаты на оси x совпадают. Чему же будет

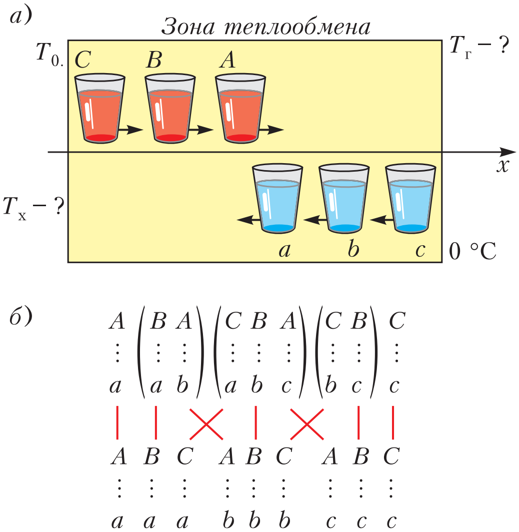


Рис. 5. а) Простейшая дискретная модель теплообменника обратного тока; б) сведение к Машиной схеме

равна эффективность такой схемы? Я даже нарисовал схему обмена (рис. 5,*б*; верхняя строчка). Скобками я объединил обмены, которые происходили одномоментно, при желании их можно располагать внутри скобок в произвольном порядке.

Сложная картина! – подумал я. – Однако понятно, что причинно-следственные связи нашей цепочки событий не изменятся, если теплообмены, в которых участвуют разные стаканы, например теплообмены *C–a* и *A–b*, мы переставим во времени (события, в которых участвует одинаковые стаканы, например *A–b* и *C–b*, переставлять нельзя). И тогда цепочку событий для движущихся стаканов мы можем преобразовать в цепочку, изображенную на рисунке 5,*б* внизу. А это цепочка для … Машиного метода! И эффективность для этого случая нам известна:

$$\eta = 1 - \xi, \text{ где } \xi = \frac{(2n)!}{n!^2}\frac{1}{2^{2n}},$$

что для трех стаканов дает

$$\eta = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}.$$

– Ах да Маша, хорошую ты схему придумала! Теперь у меня остается только один шанс – использовать бесконечные линии стаканов.

Окончательная дискретная модель для теплообменников обратного тока

На занятии я рассказал ребятам и учителю о том, что узнал, и предложил дискретную модель теплообменника с обратным током (рис. 6).

– Молодец, Петя! – похвалил меня учитель. – Очень хорошая модель! Конечно, мы уже знаем, что реально полного выравнивания температур при теплообмене не происходит, и, наверное, более реальной была бы модель, в которой при контакте стаканов разность температур уменьшается в заданное количество раз. Но это детали. Твоя модель сохранила главное качество теплообменников обратного тока – ответ здесь так же невозможно предска-

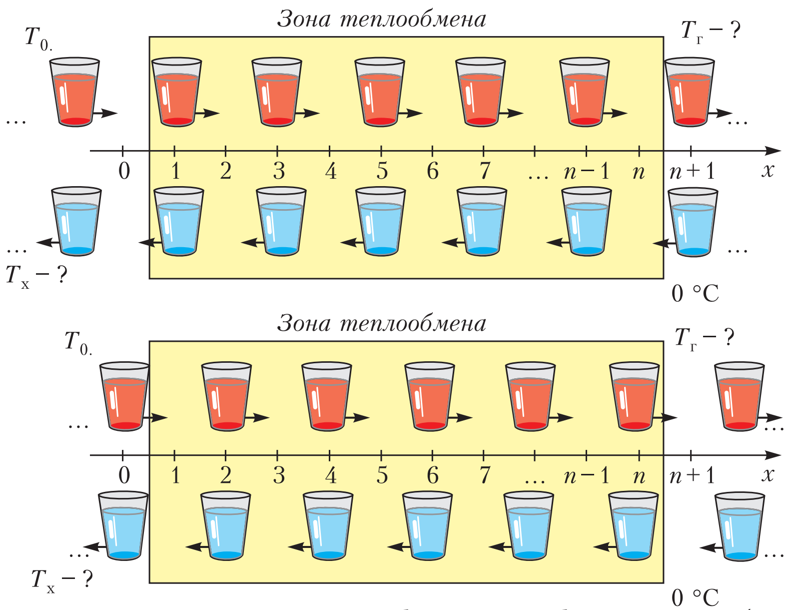


Рис. 6. Дискретная модель теплообменника с обратным током (два полутакта)

зать, как и в случае реального теплообменника. Ты, Петя, сам-то знаешь, какая температура будет у холодных стаканов на выходе и чему равна эффективность твоей линии?

Конечно, я этого не знал, эта задача оказалась мне не по зубам.

– Ничего, сейчас мы решим твою задачу. Но вначале еще несколько похвальных слов в твой адрес. Вы знаете, ребята, Пете удалось расширить нашу задачу, так что рассмотренная нами проблема о теплообмене в системе из n стаканов стала просто частью новой Петиной задачи.

В технике бывают случаи, когда производство «по кусочкам» неприемлемо. Самый знаменитый пример такого рода – прокладка трансатлантического телеграфного кабеля длиной три тысячи километров. Здесь уж точно из кусочков линию не сошьешь – работать не будет. Так вот, пришлось поставить громадный корабль около берега, а на берегу построить кабельный завод. На заводе скручивали бесконечный кабель и подавали его прямо на корабль.

Давайте и мы представим, что перед нами стоит задача организовать процесс непрерывного теплообмена с заданной эффективностью между громадными количествами α- и β-стаканов. И что ограниченность наших возможностей не позволяет нам применить замечательный Машин метод сразу ко всей этой огромной совокупности.

В такой ситуации один из вариантов – организовать такой теплообмен «погруппно», т.е. брать группы по n стаканов и проводить между ними теплообмен. Конечно, наивный и Сашин методы здесь не подойдут, первый дает эффективность только 50%, а второй – максимум 63,2%. А вот Машин метод будет работать всегда, какую бы эффективность заказчик не потребовал. Мы даже можем сказать, какой величины группы надо будет создавать. Мы знаем, что эффективность Машиного метода равна

$$\eta = 1 - \xi, \text{ где } \xi = \frac{(2n)!}{n!^2}\frac{1}{2^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Поэтому если заказчик потребует эффективность $\eta = 99{,}9\%$ ($\xi = 0{,}001$), то в группах должно быть по

$$n \sim \frac{1}{\pi\xi^2} = 320000 \text{ стаканов.}$$

– Многовато, даже если стаканчики очень маленькие!

– А еще персонал должен где-то ходить и носить эти стаканчики друг к другу.

– Однако вполне возможно, что Петин метод в такой ситуации позволит сделать процесс производства более компактным.

Здравствуй, теплород!

– До сих пор, пока мы с вами обсуждали технические проблемы, мы пользовались понятием «тепло». В технике очень легко и просто относятся к этому понятию. Никого не смущают фразы «нагретое тело отдало половину своего тепла холодному», «в теле содержится 5 калорий тепла» и даже фраза «при прохождении тока в проводнике выделяется тепло». И, наверное, это правильный способ работы мышления при рассмотрения практических задач. Но сейчас мы с вами говорим понятию «тепло» спасибо и берем к использованию понятие, которое так помогло нам прошлый раз, – теплород!

Почему теплород будет полезным для нас? Потому, что мы можем приписать ему свойства, полезные для решения нашей задачи. Прошлый раз мы приписали ему свойство «цвет». Теперь мы скажем: 1) теплород состоит из атомов; 2) атомы умеют подкидывать монетку – всякий раз, когда один стакан встречается с другим, каждый атом теплорода с вероятностью 1/2 остается в своем стакане и с вероятностью 1/2 перескакивает в другой стакан. Второе свойство мы приписали атомам, чтобы для наших стаканов выполнялось основное свойство Петиной модели – при контакте двух одинаковых стаканов их общее количества теплорода должно делиться между ними поровну.

Действительно, пусть в первом стакане находилось N_1 атомов теплорода, а во втором N_2. После того, как все атомы сделают свой выбор, в первом и во втором стаканах окажется по $(N_1 + N_2)/2$ атомов (проверьте!), т.е. теплород поделился поровну. И знаете, чтобы игра случая не приводила к отступлению от Петиного правила, сделаем допущение, которое ничего не будет нам стоить. Примем, что число атомов теплорода в горячем стакане так же астрономически велико, как и число молекул в стакане воды.

Давайте проследим за судьбой одного атома. Он заходит в зону обмена вместе с α-стаканом и в точке с координатой $x = 1$ делает свой первый выбор. С вероятностью $1/2$ он может остаться в своем стакане и вместе с ним на следующем шаге продвинуться в точку с координатой $x = 2$. А может, также с вероятностью $1/2$, перепрыгнуть в β-стакан и на следующем шаге вернуться обратно в систему в точку $x = 0$. (Ого – эффективность Петиного метода заведомо больше 50%!) И так происходит в каждой внутренней целочисленной точке оси x независимо от того, в каком из стаканов частица находится.

И знаете, теперь мы можем не говорить о стаканах, а рассматривать только движение атома теплорода. При этом задача расчета Петиной модели сводится к следующей задаче:

Частица, первоначально помещенная в точку $x = 1$, может на следующем шаге с вероятностью $1/2$ сместиться на единицу вправо и с такой же вероятностью сместиться на единицу влево. С какой вероятностью она закончит свое путешествие в точке $x = 0$ (эта вероятность есть эффективность Петиной модели)? С какой вероятностью она закончит свое путешествие в точке $x = n + 1$ (эта вероятность есть коэффициент пропускания Петиной модели)?

Это очень известная задача теории вероятности. Она имеет свое собственное название – «Задача о разорении», потому что обычно формулируется на втором языке теории вероятности, на языке игры «орел–решка». Используя этот язык, мы могли бы представить условие нашей задачи более живо:

Плотно пообедав в трактире «Три пескаря», лиса Алиса и кот Базилио спросили кофе и стали играть в игру, когда при выпадении орла один золотой выигрывает Алиса, а при выпадении решки один золотой выигрывает Базилио. Вопрос сводится к тому, чему равна вероятность разорения каждого из них, если в начале игры у Базилио всего один золотой, а у Алисы – целый мешок: $n = 100$ золотых. И, конечно, надо сказать, что наши уважаемые герои в долг не играют – игра прекращается при разорении одного из них.

В таком изложении наш атом теплорода будет указателем количества монет у кота Базилио, а его возвращение в систему – разорением Базилио.

– Да здесь как-то сразу понятно, что скорее всего Базилио будет постоянно проигрывать!

– А вероятность выигрыша у Базилио есть?

– Есть, но совсем маленькая – ведь надо, чтобы n раз подряд выпала решка.

– Не совсем так, Саша. Базилио может выиграть, даже если несколько раз выпадет орел. Главное, чтобы после выпадения орла решки снова взяли бы свое. Здесь расчеты посложнее.

– А можно так получить вероятность разорения Базилио? Если при каждом подбрасывании все честно и средние выигрыши игроков одинаковы, то честность должна иметь место и при другой организации игры. Поэтому примем, что Алиса выиграла N_1 игр, а Базилио N_2, и приравняем их средние выигрыши: $1 \cdot N_1 = 100 \cdot N_2$. Получаем, что вероятность выигрыша Алисы равна $100/101$, а Базилио $1/101$.

– Все правильно, Маша. А если в твой ответ подставить не 100, а n, то получатся правильные формулы для эффективности Петиной системы:

$$\eta = \frac{n}{n+1}$$

и коэффициента прозрачности:

$$\xi = \frac{1}{n+1}.$$

Вот только твой принцип «сохранения честности», как мы уже знаем, может не иметь места. Поэтому давай получим твои формулы «честно».

Основной расчет

– Мы уже говорили, что теория вероятности использует разные языки для описания случайных явлений: можно говорить о случайных блужданиях, а можно об игре «орел–решка». Иногда удобно анализировать происходящее, рассматривая движение отдельной частицы, а иногда удобно взять громадное количество частиц и смотреть, что происходит с этим коллективом.

Для нашей задачи удобен второй прием. Дело в том, что проследить за атомом теплорода, который в конце концов доберется до выхода из системы (дойдет до точки $x = n + 1$), очень сложно. Для $n = 10$ каждый такой атом совершает в среднем 40 шагов, чтобы в результате случайных блужданий добраться до точки $x = n + 1$. Для $n = 100$ это число еще больше – 3400. Поэтому поступим так, как поступают теплотехники, – «заполним систему и запустим ее».

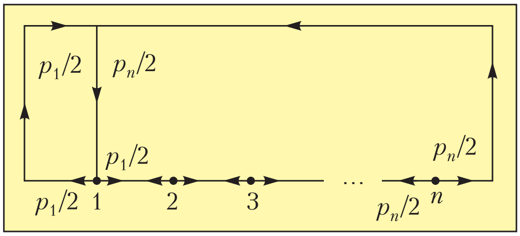
Помещаем в точку $x = 1$ очень-очень большое число атомов теплорода и говорим: Старт! Атомы начнут свое путешествие по решетке, и через некоторое время установится стационарная картина их распределения по узлам. Только надо помнить, что каждый такт из узла $x = 1$ из зоны обменов обратно в систему уходит $p_1/2$ атомов, а из узла $x = n$ наружу выходит $p_n/2$ атомов. Здесь p_i – число атомов в i-м узле. Для того чтобы количество теплорода в зоне обмена оставалось постоянным, мы каждый такт должны подавать в узел $x = 1$ новую порцию атомов в количестве $(p_1/2 + p_n/2)$. Картина такого круговорота изображена на рисунке 7,*а*.

Напишем уравнения, описывающие изменение величин p_i на каждом шаге:

$$p_i' = (p_{i+1} + p_{i-1})/2,$$
$$p_n' = p_{n-1}/2,$$
$$p_1' = (p_2 + p_1 + p_n)/2.$$

Здесь мы учли, что все атомы каждого центрального узла уходят из него – половина влево, половина вправо, а на их место

а)



б)

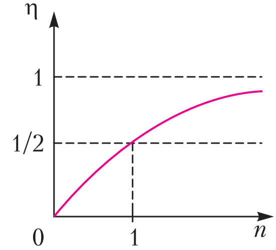


Рис. 7. а) Круговорот атомов теплорода в зоне обмена; б) эффективность Петиного метода

приходят атомы из соседних узлов. Кроме этого мы учли, что в последний узел $x = n$ приходит пополнение только из левого узла $x = n - 1$, а в первый узел мы на каждом шаге дополнительно добавляет $(p_1/2 + p_n/2)$ атомов.

Когда система приходит в стационарный режим, величины p_i перестают изменяться $(p_i' = p_i)$ и мы получаем систему уравнений для определения числа атомов в каждом узле. Решения этой системы уравнений имеют вид

$$p_i = p_0\left(1 - \frac{i}{n+1}\right),$$

где p_0 – параметр, который зависит от того, какое общее количество атомов циркулирует в системе.

Теперь мы готовы выписать ответ. Количество атомов, возвращающихся на каждом такте в систему, равно $\frac{p_1}{2} = p_0\frac{n}{n+1}$, а количество атомов, которые безвозвратно покидают систему, равно $\frac{p_n}{2} = p_0\frac{1}{n+1}$. Отношение этих двух количеств равно $p_1/p_n = n$. Понятно, что точно такое же отношение имеет место и для теплот, возвращающихся и покидающих систему, поэтому коэффициент пропускания (это вероятность выхода из системы) и эффективность Петиной системы (это вероятность возвращения) равны, соответственно,

$$\xi = \frac{1}{n+1},$$

$$\eta = \frac{n}{n+1}.$$

Обсуждение результатов

– Ну вот, Петя, мы и нашли ответы на все твои вопросы.

Мы, во-первых, получили формулы для эффективности твоего метода. Во-вторых, из этих формул сразу следует, что предельное значение эффективности теплообмена для твоей дискретной модели, так же, как и для Машиного метода, равно единице (рис. 7,*б*). Но вот стремление к единице у тебя более быстрое: $\xi = 1/(n+1) \sim 1/n$ против $\xi \sim 1/\sqrt{\pi n}$. Для нашего примера ($\xi = 0{,}001$) там, где Машин метод требует 320000 стаканов, для твоего метода будет достаточно всего 1000 стаканов. Выигрыш впечатляющий!

И наконец, мы предложили вероятностный язык описания работы теплообменников обратного тока. Теперь на вопрос, почему так эффективен теплообменник обратного тока, ты сможешь ответить: «Потому, что атому теплорода выйти из очень длинного теплообменника обратного тока так же сложно, как игроку с одним золотым в кармане разорить казино». А на вопрос «Что в двух пустотелых трубах теплообменника может быть такого, что выпускает из теплообменника лишь малую толику тепла?» ты можешь теперь ответить так: «Не верь глазам своим! Да, мы видим, что трубы теплообменника пусты и открыты, но пусты и открыты они лишь для воды. Мышление рисует нам другой образ теплообменника обратного тока – для тепла это черная камера с маленьким-маленьким окошком, которое практически невозможно найти на ощупь».

Задачи для самостоятельного решения

1. Теплообменник прямого тока с эффективностью 45% стали использовать как теплообменник обратного тока. Чему равна эффективность нового теплообменника?

2. Какими станут эффективности теплообменников из предыдущей задачи, если скорости прокачки воды уменьшить в два раза?

3. В некоторых случаях необходимо не заменять рабочую горячую жидкость новой, холодной, а просто сильно охладить ее. Для этого теплообменники прямого тока не подходят – они могут понизить температуру горячего теплоносителя максимум в два раза. А вот теплообменники обратного тока вполне могут решить задачу сильного охлаждения. Какой длины (в единицах l_0) теплообменник обратного тока надо использовать для охлаждения горячего теплоносителя до температуры $T_0/10$?

4. В феноменологической теории теплообменников обратного тока, изложенной в статье, недостает одного факта. Дополните теорию, доказав, что температура теплоносителей линейно изменяется по длине теплообменника.

5. Покажите, что в Петиной системе теплообмена температуры встречающихся α- и β-стаканов всегда отличаются на одну и ту же величину, равную $\Delta T = 2T_0/(n+1)$. Найдите температуры стаканов на выходе.

Бруски Женая–Люка

Д.ЗЛАТОПОЛЬСКИЙ

О СТАРИННОМ СЧЕТНОМ ПРИборе – так называемых «палочках Непера» – рассказывается во многих источниках. Прибор, впервые описанный в книге «Рабдология» («Rabdologiæ seu Numerationis per Virgulas libri duo») шотландского барона и любителя математики Джона Непера (кстати – первым предложившего понятие логарифма), изданной в 1617 году, позволял быстро получать произведение многозначного числа на однозначное.

Он состоял из прямоугольных брусков (рис. 1); в верхней части брусков указывалась та или иная цифра, а ниже были записаны пары цифр, разделенных наклонной чертой.

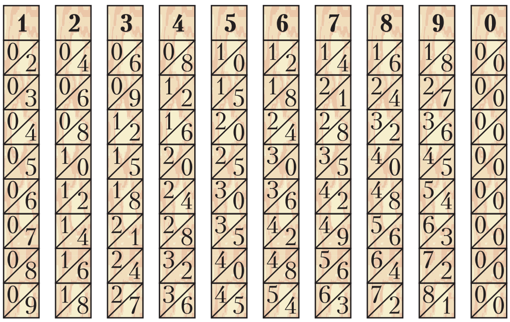


Рис. 1

Рис. 2

Что за цифры нанесены на палочках, вы, конечно, уже поняли. Например, на палочке с цифрой семь – это цифры произведения числа 7 на 2, 3, …, 9. Аналогично устроены и другие палочки. В комплект прибора входила также палочка с цифрами 2, 3, …, 9 (рис. 2). Назовем ее «вспомогательной».

Как определялся результат умножения? Рассмотрим пример определения произведения числа 5619 на 5.

Палочки с цифрами числа-множимого размещались так, чтобы в верхней части было представлено это число[1], а слева от них располагалась вспомогательная палочка (рис.3). Затем выделялся ряд, соответствующий числу-множителю на вспомогательной палочке. Результат определялся следующим образом.

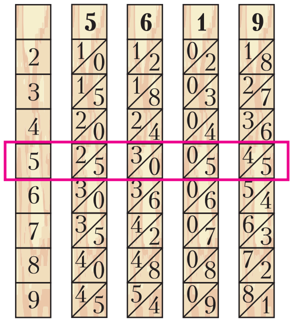


Рис. 3

Последняя цифра произведения – 5 – равна цифре под наклонной чертой на крайней правой палочке. Предпоследняя – это сумма цифры над чертой на крайней правой палочке – 4 – и цифры под чертой на предпоследней палочке – 5, т.е. 9. Аналогично определялись остальные цифры (справа налево): 0 + 0 = 0, 3 + 5 = 8, 2 (первая цифра результата). Все произведение равно 28095.

Конечно, были возможны случаи, когда при определении очередной цифры имел место перенос единицы в уме в соседний слева разряд, где она также должна быть учтена (убедитесь в этом, например, для случая умножения числа 8365 на 8).

Существенным недостатком палочек Непера было то, что приходилось при определении очередной цифры произведения

[1] Конечно, в наборе должны были присутствовать по нескольку палочек с одной и той же цифрой в верхней части.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20220603

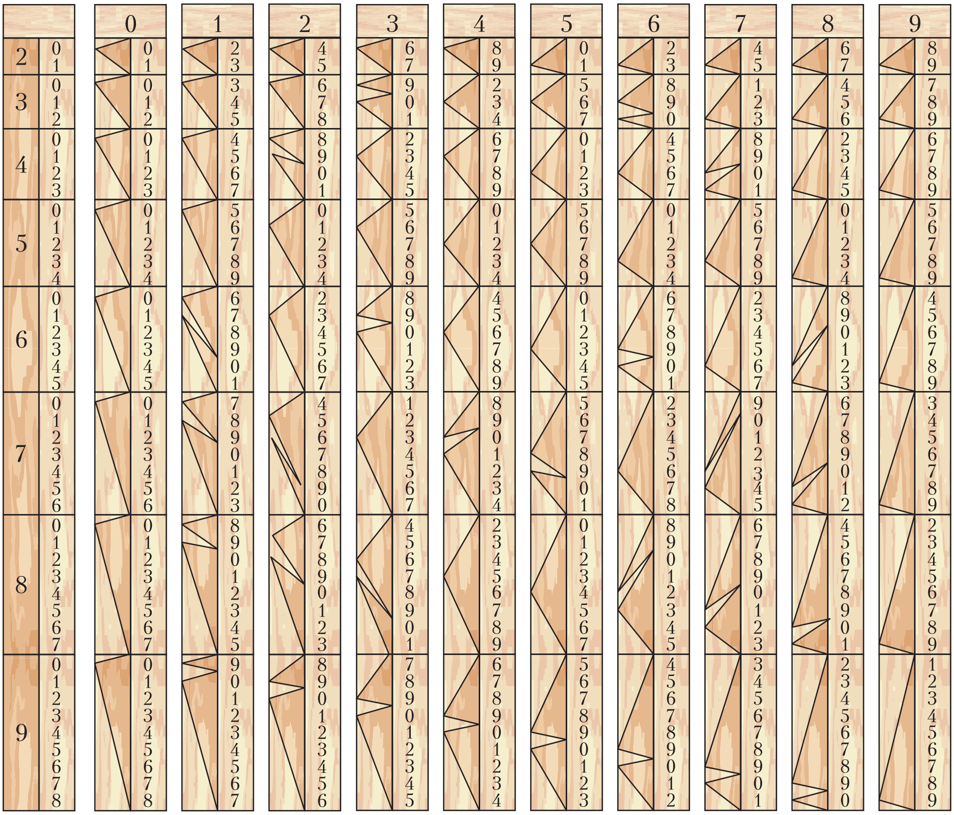


Рис. 4

складывать числа в уме, часто с учетом переноса из разряда справа, и запоминать сумму. В 80-х годах XIX века французский инженер Анри Женай по предложению математика Эдуарда Люка автоматизировал указанные вычисления. Прибор, получивший название «Бруски Женая–Люка», показан на рисунке 4.

Он состоял из ряда узких деревянных брусков, на длинных гранях которых были изображены цифры и темные треугольники.

Как же работал этот прибор? Прежде чем ответить на этот вопрос, объясним, почему на нем множество цифр расположено именно так и что это за темные треугольники.

Рассмотрим умножение 10-значного числа на однозначное, приняв при этом, что все цифры множимого различны, например 2607194385.

Поскольку результат может быть и 11-значным, составим таблицу с 11 отдельными табличками – это будут наши «бруски». В верхней части табличек укажем соответствующие цифры множимого (рис.5). Крайнюю левую табличку в дальнейшем будем называть «базовой». Разделим ее на два столбца. В первом столбце базовой таблички предусмотрим 8 клеток с возможными цифрами множителя (2–9), а во втором столбце для каждой цифры запишем все возможные значения первой цифры произведения на нее. Какими они могут быть, эти первые цифры? При умножении на однозначное число n первая цифра произведения может быть равна 1, 2, …, $n - 1$. Запишем это в таблицу (цифры синего цвета), учтя также цифру 0 (искомое произведение может быть и 10-значным).

В каждой из табличек-брусков, кроме базовой левой, запишем также возможные значения количества единиц в произведении цифры в ее верхней части на соответствующую цифру в базовой таблице. Минимальная цифра единиц (без учета возможного переноса из разряда справа) рав-

		2	6	0	7	1	9	4	3	8	5
2	0 1	4 5	2 3	0 1	4 5	2 3	8 9	8 9	6 7	6 7	0 1
3	0 1 2	6 7 8	8 9 0	0 1 2	1 2 3	3 4 5	7 8 9	2 3 4	9 0 1	4 5 6	5 6 7
4	0 1 2 3	8 9 0 1	4 5 6 7	0 1 2 3	8 9 0 1	4 5 6 7	6 7 8 9	6 7 8 9	2 3 4 5	2 3 4 5	0 1 2 3
5	0 1 2 3 4	0 1 2 3 4	0 1 2 3 4	0 1 2 3 4	5 6 7 8 9	5 6 7 8 9	5 6 7 8 9	0 1 2 3 4	5 6 7 8 9	0 1 2 3 4	5 6 7 8 9
6	0 1 2 3 4 5	2 3 4 5 6 7	6 7 8 9 0 1	0 1 2 3 4 5	2 3 4 5 6 7	6 7 8 9 0 1	4 5 6 7 8 9	4 5 6 7 8 9	8 9 0 1 2 3	8 9 0 1 2 3	0 1 2 3 4 5
7	0 1 2 3 4 5 6	4 5 6 7 8 9 0	2 3 4 5 6 7 8	0 1 2 3 4 5 6	9 0 1 2 3 4 5	7 8 9 0 1 2 3	3 4 5 6 7 8 9	8 9 0 1 2 3 4	1 2 3 4 5 6 7	6 7 8 9 0 1 2	5 6 7 8 9 0 1
8	0 1 2 3 4 5 6 7	6 7 8 9 0 1 2 3	8 9 0 1 2 3 4 5	0 1 2 3 4 5 6 7	6 7 8 9 0 1 2 3	8 9 0 1 2 3 4 5	2 3 4 5 6 7 8 9	2 3 4 5 6 7 8 9	4 5 6 7 8 9 0 1	4 5 6 7 8 9 0 1	0 1 2 3 4 5 6 7
9	0 1 2 3 4 5 6 7 8	8 9 0 1 2 3 4 5 6	4 5 6 7 8 9 0 1 2	0 1 2 3 4 5 6 7 8	3 4 5 6 7 8 9 0 1	9 0 1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7 8 9	6 7 8 9 0 1 2 3 4	7 8 9 0 1 2 3 4 5	2 3 4 5 6 7 8 9 0	5 6 7 8 9 0 1 2 3

Рис. 5

на последней цифре указанного произведения и выделена в таблице красным цветом. Учтем также перенос, имея в виду, что при умножении на b в базовой табличке он может быть равен 1, 2, …, $b-1$ (убедитесь в этом!). Если сумма с учетом переноса получается двузначная – запишем только единицы.

Теперь можно переходить к вычислению произведений. Предположим, мы ищем произведение 2607194385 и 4. В этом случае нас будет интересовать фрагмент всей таблицы рисунка 5, относящийся к цифре 4 на базовой табличке (рис. 6).

		2	6	0	7	1	9	4	3	8	5
2	0 1	4 5	2 3	0 1	4 5	2 3	8 9	8 9	6 7	6 7	0 1
3	0 1 2	6 7 8	8 9 0	0 1 2	1 2 3	3 4 5	7 8 9	2 3 4	9 0 1	4 5 6	5 6 7
4	0 1 2 3	8 9 0 1	4 5 6 7	0 1 2 3	8 9 0 1	4 5 6 7	6 7 8 9	6 7 8 9	2 3 4 5	2 3 4 5	0 1 2 3

Рис. 6

Последняя цифра произведения равна 0, при этом имеет место перенос двойки в соседнюю табличку. В ней должна использоваться цифра 4 (2 + 2): за счет переноса двойки происходит сдвиг на две позиции вниз. Цифра 4 и будет второй справа цифрой результата. При этом также произойдет перенос тройки в соседний старший разряд. В нем должна использоваться цифра 5 (2 + 3). Это будет третья справа цифра искомого произведения. В следующем разряде учет переноса единицы дает очередную цифру 7 (6 + 1). Продолжая перемещаться справа налево, учитывая возможные переносы, получим цифры, на рисунке 6 они обведены красными кружочками.

Итак, результат равен 10428777540. Эффектно, не правда ли? Но это еще не все.

Можно ли учитывать перенос автоматически, а не проводить расчеты и каждый раз рисовать стрелки, как это делали мы? Оказывается – можно! Это и было реализовано Анри Женаем. Темные стрелки-треугольники на брусках как раз и делают этот перенос. Посмотрите на рисунок 4. Например, стрелка-треугольник на бруске с цифрой 6, расположенная напротив цифры 7 в базовой табличке, учитывает перенос 4 в разряд слева. На бруске с цифрой 3, расположенном напротив цифры 6 в базовой таблице, две стрелки-треугольника, поскольку в разряд слева может случится и перенос 1, и перенос 2.

В качестве примера применения всего вышесказанного рассмотрим вычисление произведения 7569 и 4 с помощью брусков Женая (рис.7). Передвигаясь вдоль направления стрелок-треугольников, быстро получаем в результате 30276.

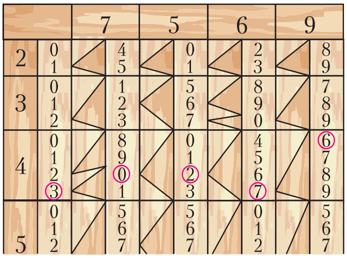


Рис. 7

Анри Женай разработал также вариант прибора, предназначенный для деления. Он позволял определять целую часть от деления многозначного числа на однозначное и состоял из 11 брусков (рис.8).

Вычисления проводились следующим образом. Бруски с цифрами делимого размещались так, чтобы цифры в их верхней части образовывали соответствующее число.

Объясним логику действий на примере деления числа 83 на 6. Для этого рассмотрим деление на 6 двузначного числа с последней цифрой 8. Все возможные варианты значений приведены в таблице 1.

Таблица 1

8			
Количество десятков	Число	Целая часть частного	Остаток
0	8	1	2
1	18	3	0
2	28	4	4
3	38	6	2
4	48	8	0
5	58	9	4

Аналогичная таблица 2 – для деления на 6 двузначного числа с последней цифрой 3.

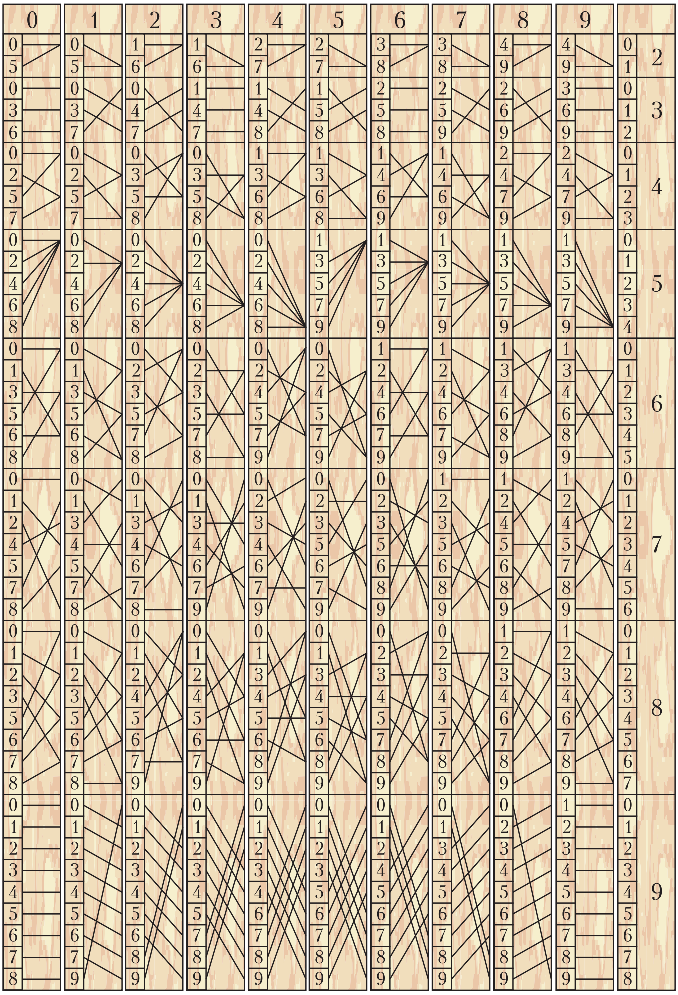


Рис. 8

Объединим информацию из таблиц 1 и 2 в таблицу 3, выписав в ее последнем столбце все возможные значения остатка и «связав» целые части частного с соответствующими им остатками стрелками, ведущими «на уровень» остатков.

Определим результат деления числа 83 на 6. Его первая цифра равна 1 (рассматриваем цифру 8 как однозначное число), а соответствующий остаток в последнем столбце равен 2 (по стрелке, ведущей от 1 на строку, соответствующую остатку 2). Можем сказать, что без учета уже найденной цифры 1 для расчета частного остается $83 - 6 \times 10 = 23$.

Прежде чем идти дальше, сделаем важный вывод: количество десятков в оставшейся части совпадает с остатком от предыдущей (левой) цифры. Это значит, что следующую цифру можно получить, рассмотрев число 23. А числу 23 в столбце для цифры 3 соответствуют

– целая часть от деления: 3;

– остаток: 5 (по стрелке, ведущей от 3).

Итак, результат: целая часть искомого частного равна 13, а остаток 5.

Таблица 2

3			
Количество десятков	Число	Целая часть частного	Остаток
0	3	0	3
1	13	2	1
2	23	3	5
3	33	5	3
4	43	7	1
5	53	8	5

Таблица 3

	8	3	
Количество десятков	Целая часть частного	Целая часть частного	Остаток
0	1	0	0
1	3	2	1
2	4	3	2
3	6	5	3
4	8	7	4
5	9	8	5

Для трехзначного делимого, например 838, первые две цифры частного определяются аналогично, это 13, а остаток равен 5. В столбце для цифры 8 в последней строке имеем

– цифра: 9;
– остаток: 4.

Общий результат: частное равно 139, остаток 4.

Для чисел с бóльшим количеством цифр все рассуждения аналогичны. На рисунке 9 приведен пример деления числа 536027

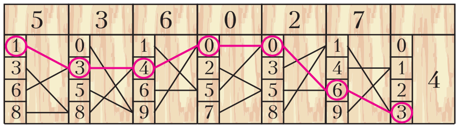


Рис. 9

на 4 (показан только фрагмент брусков, относящийся к делению на 4). Результат: частное равно 134006, остаток 3.

Помимо приборов для умножения и деления существовал также прибор для проведения финансовых расчетов. Он позволял рассчитывать сумму денег, которая будет начислена банком за один день при той или иной процентной ставке. Полученное дневное значение суммы по процентам ставки, будучи умноженным на количество дней с помощью брусков для умножения, давало общую сумму за все дни.

Популярность брусков Женая–Люка была большой, но недолгой, в начале XX века их заменили механические счетные приборы – арифмометры. Как говорится, технический прогресс не остановить...

ЗАДАЧА О ПУШЕЧНЫХ ЯДРАХ

Французский математик Эдуард Люка известен своими работами по теории чисел. Например, его имя носит один из критериев простоты чисел Мерсенна, т.е. чисел вида $2^n - 1$, где n – натуральное число. Люка доказал простоту числа $2^{127} - 1$, оно несколько десятков лет оставалось наибольшим известным науке простым числом.

Во время франко-прусской войны (1870–1871 гг.) Люка служил артиллеристом. Быть может, именно в то время ему и пришла в голову следующая задача.

Найдите число пушечных ядер, которые можно уложить и в форме квадрата (в один слой), и в форме пирамиды с квадратом в основании.

Задачу легко переформулировать на языке диофантовых уравнений.

Найдите все натуральные k, n такие, что

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = n^2.$$

Два решения: $k = 1$, $n = 1$ и $k = 24$, $n = 70$ нашел сам Люка. Однако полностью задача была решена лишь в 1918 году с использованием аппарата эллиптических функций: было доказано, что других решений нет.

Н.Панюнин

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2702 – М2705 предлагались на заключительном этапе XLVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи Ф2709 – Ф2712 предлагались на олимпиаде «Росатом» 2021/22 учебного года. Автор задач – С.Муравьев.

Задачи М2702–М2705, Ф2709–Ф2712

М2702. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I, внешние биссектрисы его углов B и C пересекаются в точке J (рис. 1). Окружность ω_b с центром в точке O_b проходит через точку B и касается прямой CI в точке I. Окружность ω_c с центром в точке O_c проходит через точку C и касается прямой BI в точке I. Отрезки O_bO_c и IJ пересекаются в точке K. Найдите отношение IK/KJ.

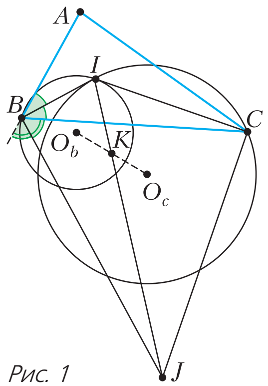


Рис. 1

Л.Емельянов, И.Богданов

М2703. Дана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$, в которой нет двух равных членов. Отрезок $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+m-1}$ этой последовательности назовем *монотонным отрезком длины m*, если выполнены неравенства $a_i < a_{i+1} < \ldots < a_{i+m-1}$ или неравенства $a_i > a_{i+1} > \ldots > a_{i+m-1}$. Оказалось, что для каждого натурального k член a_k содержится в некотором монотонном отрезке длины $k+1$. Докажите, что существует натуральное N такое, что последовательность $a_N, a_{N+1}, \ldots$ монотонна, т.е. $a_N < a_{N+1} < \ldots$ или $a_N > a_{N+1} > \ldots$

А.Голованов

М2704. Изначально на доске написана пара чисел $(1,1)$. Если для некоторых x и y на доске написана одна из пар $(x, y-1)$ и $(x+y, y+1)$, то можно дописать другую. Аналогично, если на доске написана одна из пар (x, xy) и $\left(\frac{1}{x}, y\right)$, то можно дописать другую. Докажите, что в каждой выписанной паре первое число будет положительным.

М.Антипов

М2705*. Дано натуральное число $n > 4$. На плоскости отмечены n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Василий проводит по одному все отрезки, соединяющие пары отмеченных точек. На каждом шаге, проводя очередной отрезок S, Василий помечает его наименьшим натуральным числом, которым еще не помечен ни один отрезок, имеющий с S общий конец. Для какого наибольшего k Василий может действовать так, чтобы пометить какой-то отрезок числом k?

А.Глебов, Д.Храмцов

Ф2709. На горизонтальной поверхности покоится незакрепленная горка массой m с углом наклона одной грани к горизонту α (рис. 2). У основания горки на ее наклонной грани находится точечное тело массой m. В некоторый момент времени тело толкают вверх вдоль наклонной грани горки, и оно приобретает скорость v_0. Горка в этот момент имеет нулевую скорость. Известно, что тело не «переваливает» через верхушку горки, а после подъема возвращается обратно по наклонной грани. По какой траектории движется тело? Чему равна и как направлена скорость тела (относительно земли), когда оно возвращается на первоначальную высоту? Трение между всеми поверхностями отсутствует. Ответ обоснуйте.

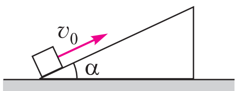


Рис. 2

Ф2710. Тонкий однородный массивный стержень массой m и длиной $3l/2$ подвешен на двух невесомых нерастяжимых нитях длинами l и $2l$, которые прикреплены к концам стержня и к одной точке горизонтального потолка (рис. 3). Найдите силы натяжения нитей.

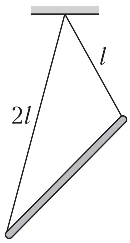


Рис. 3

Ф2711. В цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем находится идеальный газ. Объем газа V_0, абсолютная температура T_0, давление газа равно внешнему давлению p_0. Между поршнем и стенками сосуда действует сила трения. Газ в сосуде медленно нагревают, и при температуре $6T_0/5$ поршень начинает перемещаться. Газ нагревают до температуры $2T_0$, затем нагрев прекращают, и газ медленно остывает до первоначальной температуры. Постройте график зависимости объема газа от его температуры для указанного процесса и найдите объем и давление газа во всех состояниях, когда меняется характер процесса, происходящего с газом. Считайте, что максимальная сила трения между поршнем и стенками сосуда не зависит от их температуры.

Ф2712. Две частицы с одинаковыми массами m и зарядами q и $-q$ ($q > 0$) удерживают на расстоянии l друг от друга в однородном магнитном поле, которое перпендикулярно отрезку, соединяющему частицы (рис. 4). Частицы отпускают. При какой минимальной индукции магнитного поля B частицы не столкнутся? На какое минимальное расстояние в этом случае сблизятся частицы?

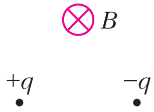


Рис. 4

Решения задач М2690–М2693, Ф2697–Ф2700

М2690. *У Васи есть n конфет нескольких сортов, где $n \geq 145$. Известно, что если из данных n конфет выбрать любую группу, содержащую не менее 145 конфет (в частности, можно выбрать группу из всех данных n конфет), то существует такой сорт конфет, что выбранная группа содержит в точности 10 конфет этого сорта. Найдите наибольшее возможное значение n.*

Ответ: 160.

Оценка. Докажем, что $n > 160$ «не работает».

Пусть дан набор из n конфет. Назовем сорт *критическим*, если конфет этого сорта ровно 10 (среди всех данных n конфет). Пусть у нас k критических сортов, тогда всего конфет не менее $10k$, т.е. $n \geq 10k$. Уберем по одной конфете каждого критического сорта и организуем группу из оставшихся $n-k$ конфет. Для этой группы нет сорта, представленного ровно 10 конфетами. Кроме того, $n - k \geq n - \frac{n}{10} = \frac{9n}{10} > \frac{9 \cdot 160}{10} = 144$. Значит, в рассматриваемой группе не менее 145 конфет, поэтому условие задачи не выполняется.

Пример. Теперь приведем пример ситуации, в которой у Васи может быть 160 конфет. Пусть у него есть ровно по 10 конфет 16 сортов. Пусть выбрана группа, для которой нет сорта, представленного ровно 10 конфетами. Тогда в эту группу не входит хотя бы одна конфета каждого сорта (иначе говоря, ни один сорт не будет взят полностью), т.е. группа содержит не более $16 \cdot 9 = 144$ конфет, значит, условие задачи выполнено.

А.Антропов

М2691. *На плоскости отмечены N точек. Любые три из них образуют треугольник, величины углов которого в градусах выражаются натуральными числами. При каком наибольшем N это возможно?*

Ответ: 180.

Пример. Покажем сначала, что при $N = 180$ требуемое возможно. Отметим на окружности 180 точек, разбивающих ее на 180 равных дуг величиной по $2°$ каждая. Величина любой дуги с концами в двух из отмеченных точек выражается четным числом градусов, поэтому величина любого вписанного в окружность угла, образованного тремя отмеченными точками, выражается натуральным числом градусов. Следовательно, 180 отмеченных точек удовлетворяют условию задачи.

Оценка. Осталось доказать, что $N \le 180$. Любые три отмеченные точки образуют треугольник, поэтому не могут лежать на одной прямой. Считая отмеченные точки расположенными на координатной плоскости, обозначим через A любую из них с максимальной ординатой. Среди оставшихся выберем точки B и C такие, что угол BAC максимален (иначе говоря, точки B, A, C – последовательные точки на выпуклой оболочке множества отмеченных точек).

Из условия задачи следует, что в треугольнике ABC величины углов ABC и ACB не меньше $1°$, поэтому величина угла BAC не больше $178°$. Ввиду выбора точек B и C, остальные $N-3$ отмеченные точки лежат строго внутри угла BAC и каждый луч с началом в точке A содержит не больше одной из них. Проведя через каждую отмеченную точку внутри угла BAC луч с началом в точке A, получим $N-3$ различных луча, делящих $\angle BAC$ на $N-2$ угла. Если $N-2 > 178$, то хотя бы один из этих углов имеет величину, меньшую $1°$, и является углом некоторого треугольника с вершинами в трех отмеченных точках, что противоречит условию задачи. Следовательно, $N-2 \le 178$, т.е. $N \le 180$, что и требовалось доказать.

Е.Бакаев

М2692. *В окружность Ω вписан шестиугольник AECDBF (рис. 1). Известно, что точка D делит дугу BC пополам, а*

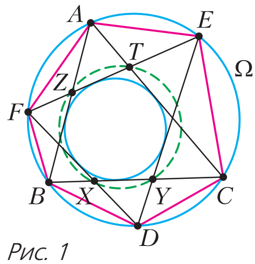


Рис. 1

треугольники ABC и DEF имеют общую вписанную окружность. Прямая BC пересекает отрезки DF и DE в точках X и Y, а прямая EF пересекает отрезки AB и AC в точках Z и T соответственно. Докажите, что точки X, Y, T, Z лежат на одной окружности.

Отметим точку I – центр общей вписанной окружности ω треугольников ABC и DEF (рис. 2). Поскольку D – середина дуги

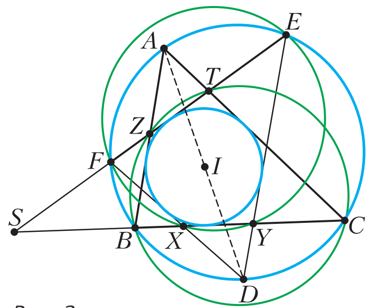


Рис. 2

BC, точки A, I, D лежат на одной прямой. Окружность ω вписана в угол FDE, поэтому DI – биссектриса угла FDE, а точка A – середина дуги FE.

Заметим, что четырехугольник $FEYX$ вписанный. Это следует из равенства углов

$$\angle FED = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{FB} + \overset{\frown}{BD}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{FB} + \overset{\frown}{CD}) = \angle FXB .$$

Аналогично, четырехугольник $BCTZ$ – вписанный. Если $BC \parallel EF$, то конструкция симметрична относительно прямой AD, и утверждение задачи очевидно. Иначе отметим точку S пересечения прямых FE и BC. Приравнивая произведения отрезков секущих для окружностей Ω, $(BCTZ)$ и $(FEYX)$ (т.е. степени точки S относительно этих трех окружностей), имеем $SX \cdot SY = SF \cdot SE = SB \cdot SC = SZ \cdot ST$. Полученное равенство $SX \cdot SY = SZ \cdot ST$ означает, что X, Y, Z, T лежат на одной окружности, что и требовалось доказать.

Д.Бродский

М2693. *Докажите, что существует натуральное число b такое, что при любом натуральном $n > b$ сумма цифр числа $n!$ не меньше 10^{100}.*

Положим $a = 10^{100}$. Через $s(m)$ обозначим сумму цифр числа m. Отметим простое свойство $s(l) + s(m) \geq s(l+m)$, которое сразу становится очевидным, если числа l и m сложить в столбик.

Лемма. *Пусть k – натуральное число, и пусть натуральное число m кратно $10^k - 1$. Тогда $s(m) \geq 9k$.*

Доказательство. Индукция по m. База $m = 10^k - 1$ очевидна.

Предположим, что $m \geq 10^k$ и что утверждение доказано для всех чисел, меньших m. Докажем его и для m. Пусть последние k цифр числа m образуют число v (возможно, с ведущими нулями), а все остальные – число $u > 0$ (иначе говоря, $m = \overline{uv} = 10^k u + v$). Поскольку m делится на $10^k - 1$, то и (положительное) число $m' = u + v = m - (10^k - 1)u$ также кратно $10^k - 1$. Поэтому $s(m') \geq 9k$ по предположению индукции, а тогда и $s(m) = s(u) + s(v) \geq s(u+v) = s(m') \geq 9k$. Лемма доказана.

Для решения задачи осталось взять такое k, что $9k \geq a$, и заметить, что если $b = 10^k - 1$ и $n \geq b$, то $n!$ делится на $10^k - 1$, а значит, $s(n!) \geq 9k \geq a$.

Д.Храмцов

Ф2697.[1] *Незнайка решил изготовить «инновационного ваньку-встаньку». Для этого он взял очень много шаров одинаковой плотности, радиусы которых отличаются вдвое. Незнайка скрепил шары так, что все их центры лежат на одной прямой, а радиус каждого последующего меньше радиуса предыдущего в 2 раза.*

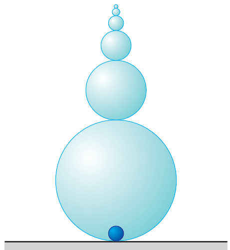


Рис. 1

Незнайка решил, что из-за большой массы самого нижнего шара такая конструкция, поставленная на большой шар, будет устойчивой. Но «ванька-встанька» устойчивым не был. Объясните, почему. Знайка посоветовал Незнайке прикрепить к самой нижней точке большого шара точечное массивное тело (рис. 1; массивное тело показано цветной жирной точкой). Какую оно должно иметь массу, чтобы «инновационный ванька-встанька» стал устойчивым? Масса самого большого шара m.

Чтобы тело, имеющее сферическую нижнюю поверхность и обладающее осевой симметрией, находилось в равновесии на горизонтальной поверхности (рис. 2, слева), необходимо, чтобы его центр тяжести (отмечен крестиком) находился ниже геометрического центра поверхности тела (отмечен точкой). Действительно, при отклонении тела вправо (рис. 2, справа) сила тяжести, которая приложена к центру тяжести, окажется левее геометрического центра нижней поверхности, который будет лежать над точкой касания поверхности тела с горизонтальной поверхностью, и момент силы тяжести относительно точки касания вернет тело в первоначальное положение. Так же момент силы тяжести вернет тело назад и при его отклонении влево. Если же центр тяжести тела окажет-

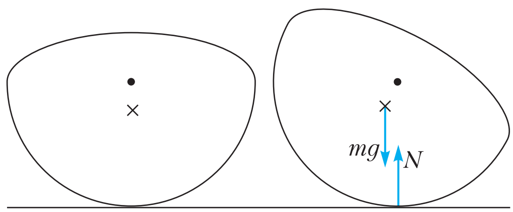


Рис. 2

[1] Автор решений задач Ф2697–Ф2700 – С.Муравьев.

ся выше геометрического центра нижней поверхности, то при отклонении тела момент силы тяжести будет и дальше отводить его от первоначального положения. Поскольку центр тяжести нижнего шара ваньки-встаньки лежит в его геометрическом центре и есть дополнительные шары сверху, то центр тяжести ваньки-встаньки будет лежать выше геометрического центра нижнего шара, и ванька-встанька не будет устойчивым.

Найдем положение центра тяжести ваньки-встаньки (пока без прикрепленного массивного тела). Координата центра тяжести системы тел в некоторой системе координат определяется соотношением

$$x_{\text{ц}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}, \qquad (*)$$

где $m_1, m_2, m_3, \ldots$ – массы частей, на которые можно разбить тело, $x_1, x_2, x_3, \ldots$ – координаты центров тяжести этих частей тела. Определим сначала массу ваньки-встаньки M. Поскольку радиусы шаров отличаются вдвое, то объем и, следовательно, массы отличаются в $2^3 = 8$ раз. Поэтому

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots = m + \frac{1}{2^3}m + \left(\frac{1}{2^3}\right)^2 m + \ldots,$$

где $m_1, m_2, m_3, \ldots$ – массы шаров. Сумма в этой формуле образует геометрическую прогрессию со знаменателем 1/8, следовательно,

$$M = \frac{m}{1-(1/8)} = \frac{8m}{7}.$$

Сумма в числителе формулы (∗) не сводится к простой геометрической прогрессии, поэтому для ее вычисления поступим следующим образом. Положим ваньку-встаньку «на бок» на поверхность (рис. 3), найдем расстояние от поверхности до центра тяжести ваньки-встаньки и угол α между поверхностью и прямой, проведенной от нижней точки ваньки-встаньки к его центру тяжести.

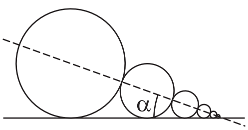


Рис. 3

Очевидно (благодаря тому, что каждый последующий шар вдвое меньше предыдущего), все шары будут касаться поверхности и расстояние от центра тяжести каждого шара до поверхности будет равно его радиусу. Используя формулу (∗), найдем расстояние d от поверхности до центра тяжести ваньки-встаньки:

$$d = \frac{m_1 r + m_2(r/2) + m_3(r/4) + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}.$$

Сумма в знаменателе этой формулы есть масса ваньки-встаньки M, а сумма в числителе есть геометрическая прогрессия со знаменателем $1/16$. Следовательно,

$$d = \frac{mr\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{16}}}{\dfrac{8}{7}m} = \frac{14}{15}r.$$

Поскольку центр тяжести ваньки-встаньки лежит на прямой, соединяющей центры шаров, то угол α между этой прямой и поверхностью можно найти так:

$$\sin\alpha = \frac{r}{r + 2(r/2) + 2(r/4) + 2(r/8) + \ldots} = \frac{r}{2r\left(1 + (1/2) + (1/4) + \ldots\right) - r}.$$

Сумма в скобках в знаменателе – это геометрическая прогрессия со знаменателем 1/2. Поэтому

$$\sin\alpha = \frac{1}{3}.$$

Легко найти расстояние от центра большого шара до центра тяжести ваньки-встаньки:

$$l_{\text{ц}} = \frac{r-d}{\sin\alpha} = \frac{r}{5}.$$

Значит, расстояние от нижней точки ваньки-встаньки (когда он стоял на горизонтальной поверхности) да его центра тяжести равно

$$L_{\text{ц}} = r + l_{\text{ц}} = \frac{6r}{5}.$$

Теперь найдем массу тела, которую нужно прикрепить к нижней точке ваньки-встаньки, чтобы он был устойчивым. Для этого (как это было показано выше) центр тяжести ваньки-встаньки с телом должен лежать ниже геометрического центра первого шара. Используя формулу (*), получим следующее условие равновесия ваньки-встаньки:

$$\frac{ML_{\text{ц}}}{M+\mu} \le r, \text{ где } \mu - \text{масса тела.}$$

Отсюда получаем

$$\mu \ge M\frac{L_{\text{ц}}-r}{r} \ge \frac{8}{35}m.$$

Ф2698. *Кривошипно-шатунный механизм состоит из кривошипа OA (стержня, прикрепленного к шарниру O), шатуна AB (стержня, шарнирно прикрепленного к кривошипу в точке A) и ползуна B (точечной детали, шарнирно связанной с шатуном и способной перемещаться вдоль поверхности). Известно, что механизм находится в равновесии в положении, показанном на рисунке 1. Найдите коэффициент трения между ползуном и поверхностью, если* $\alpha = 60°$, $\beta = 90°$, *массы кривошипа и шатуна одинаковы, масса ползуна пренебрежимо мала.*

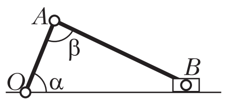


Рис. 1

Определим силу, с которой кривошип действует на шатун (или шатун на кривошип) в шарнире A. Поскольку соединение кривошипа и шатуна шарнирное, то никаких общих соображений о направлении этой силы высказать нельзя – оно должно быть определено из условия равновесия системы. Пусть сила, действующая со стороны шатуна на кривошип, направлена под углом γ к кривошипу (рис. 2, слева). Тогда сила, действующая со стороны кривошипа на шатун, направлена противоположно, т.е. под углом $\beta - \gamma = 90° - \gamma$ по отношению к шатуну (рис. 2, справа; для упрощения рисунка кривошип и шатун разъединены в шарнире A). В результате условия равновесия кривошипа и шатуна – условия моментов относительно точек O и B – дают

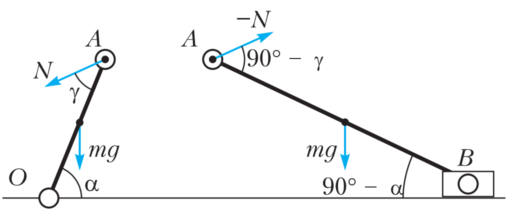


Рис. 2

$$mg \cdot \frac{OA}{2}\cos\alpha = N \cdot OA\sin\gamma,$$

$$mg \cdot \frac{AB}{2}\cos(90° - \alpha) = N \cdot AB\sin(90° - \gamma).$$

Деля первое уравнение на второе, получим

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\gamma,\ \gamma = 90° - \alpha$$

и из любого уравнения моментов найдем

$$N = \frac{1}{2}mg.$$

Теперь рассмотрим второе условие равновесия для шатуна AB – уравнение сил (рис. 3):

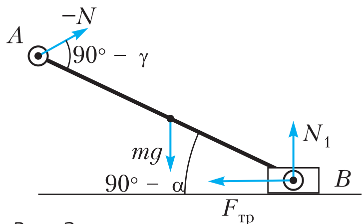


Рис. 3

$$-\vec{N} + m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{\text{тр}} = 0.$$

Из проекций этого уравнения на вертикальную и горизонтальную оси находим

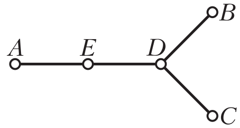
$$N_1 = mg - N\sin(\alpha - \gamma),$$

$$F_{\text{тр}} = N\cos(\alpha - \gamma).$$

Поскольку условием отсутствия скольжения является неравенство $F_{\text{тр}} \le \mu N_1$, где μ – коэффициент трения между ползуном и поверхностью, получим

$$\mu \ge \frac{\cos(\alpha-\gamma)}{2-\sin(\alpha-\gamma)} = \frac{\sin 2\alpha}{2+\cos 2\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ф2699. *Четыре одинаковых стержня AE, ED, DB и DC соединены так, как показано на рисунке. В точках соединения обеспечен тепловой контакт между стержнями.*



Температуры точек A, B и C поддерживаются равными $t_A = t$, $t_B = 2t$, $t_C = 3t$ соответственно. Найдите температуру точки D. Известно, что поток тепла по стержню зависит от его длины, площади сечения и материала и пропорционален разности температур его концов. Потоком тепла через боковые поверхности стержней можно пренебречь.

Пусть имеется стержень, концы которого поддерживаются при температурах t_1 и t_2 ($t_1 > t_2$). Тогда по стержню от конца с большей температурой в направлении конца с меньшей температурой распространяется поток тепла

$$w_{1\to2} = k(t_1 - t_2),$$

где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от геометрии стержня (длины и площади сечения) и его материала, но не зависящий от температур. Действительно, при $t_1 > t_2$ тепло распространяется от конца с температурой t_1 к концу с температурой t_2 и поток положительный. Если $t_1 < t_2$, тепло распространяется от конца с температурой t_2 к концу с температурой t_1 и поток тепла отрицателен.

Рассмотрим тепловое равновесие системы стержней. В равновесии температура точки D не меняется с течением времени, поэтому поток тепла, приходящего в точку D, равен потоку тепла, уходящего от этой точки. Иными словами, сумма всех потоков тепла, входящих в точку D, должна равняться нулю. Поэтому

$$w_{A\to D} + w_{B\to D} + w_{C\to D} = 0$$

(какие-то потоки отрицательны). Здесь

$$w_{B\to D} = k(t_B - t_D) = k(2t - t_D),$$
$$w_{C\to D} = k(t_C - t_D) = k(3t - t_D),$$

где t_D – температура точки D. Для потока тепла от A к D написать формулу $w_{A\to D} = k(t_A - t_D)$ с тем же коэффициентом пропорциональности нельзя, поскольку стержень AD имеет другую длину. Но этот поток можно найти так. Потоки тепла по стержням AE и ED одинаковы, поскольку в равновесии температура точки E не меняется. Поэтому температура точки E является средним арифметическим температур точек A и D, а разность температур точек E и D ровно вдвое меньше разности температур точек A и D. Тогда из формулы для потока тепла получаем

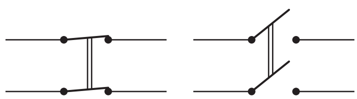
$$w_{A\to D} = w_{A\to E} = w_{E\to D} = k(t_E - t_D) = \frac{1}{2}k(t_A - t_D) = \frac{1}{2}k(t - t_D).$$

Следовательно,

$$k(2t - t_D) + k(3t - t_D) + \frac{1}{2}k(t - t_D) = 0,$$

откуда $t_D = \frac{11}{5}t$.

Ф2700. *При фотографировании в помещении с помощью двух фотоламп с ограниченным ресурсом работы используется следующая методика работы. При наводке на резкость, выборе экспозиции и т.д. лампы включают не на полную мощность последовательно, а при фотографировании лампы включают параллельно, обеспечивая максимальную освещенность фотографируемого объекта. Предложите такую схему соединения двух ламп, чтобы лампы были подключены к источнику последовательно, но при включении одного выключателя их соединение с источником менялось на параллельное. Во сколько раз возрастает освещенность объекта при таком переключении? Считайте, что вся энергия, выделяющаяся в лампах, превращается в световую. В распоряжении имеются один идеальный источник электрического напряжения, две одинаковые электрические лампы, один двухполюсный выключатель и провода. Двухполюсный выключатель (рис. 1) одновременно замыкает или размыкает два провода.*



Двухполюсный выключатель

Рис. 1

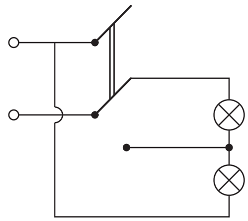


Рис. 2

Искомая схема включения двух ламп так, чтобы при одном переключении двухполюсного выключателя соединение ламп менялось с последовательного на параллельное, показана на рисунке 2. Для нахождения изменения освещенности заметим, что при последовательном подключении двух одинаковых ламп к идеальному источнику напряжения U к каждой лампе будет приложено напряжение $U/2$. Поэтому суммарная мощность, выделяющаяся в лампах при последовательном подключении, будет равна

$$P_{\text{посл}} = 2\frac{(U/2)^2}{R} = \frac{U^2}{2R},$$

где R – сопротивление каждой лампы. При параллельном подключении к каждой лампе приложено напряжение источника U. Тогда суммарная мощность, выделяющаяся в лампах при параллельном подключении, будет равна

$$P_{\text{парал}} = 2\frac{U^2}{R}.$$

А поскольку по условию вся выделяющаяся в лампах электрическая мощность превращается в световую, то отношение освещенностей объекта, даваемых лампами, равно отношению мощностей:

$$\frac{W_{\text{посл}}}{W_{\text{парал}}} = \frac{P_{\text{посл}}}{P_{\text{парал}}} = \frac{1}{4}.$$

Значит, при переключении мощность возрастет в 4 раза.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

ИТОГИ КОНКУРСА ИМЕНИ А.П.САВИНА 2021/22 УЧЕБНОГО ГОДА

Победители

Лучшие результаты показали

Нестеренко Александра – Москва, школа 1287, 9 кл.,

Чалык Павел – Балаково Саратовской области, гимназия 2, 10 кл.,

Часовских Иван – Химки Московской области, школа 14, 8 кл.,

Чуб Владимир – Харьков, Украина, «Академическая гимназия», 10 кл.

Призеры

Также высокие результаты показали участники

Подгорнов Иван – Курган, школа 48, 10 кл.,

Приходько Тамара – Красноярск, школа 3, 9 кл.

и команды

команда 9 класса школы «Летово» (Москва):

Беляев Юрий, Гаек Антон, Кузнецов Кирилл,

команда кружка «Умники и умницы в математике» (Тула, Центры образования 4 и 44):

Давыдов Алексей (ЦО 4, 8 кл.), Федоров Алексей (ЦО 44, 6 кл.), Канунов Виктор (ЦО 4, 8 кл.), Васильева Надежда (ЦО 4, 8 кл.), Макеев Антон (ЦО 4, 8 кл.).

Поздравляем!

Победителям и призерам будут высланы дипломы журнала «Квант» и призы от издательства МЦНМО. Помимо этого призы получат также наиболее активные участники конкурса.

Задачи

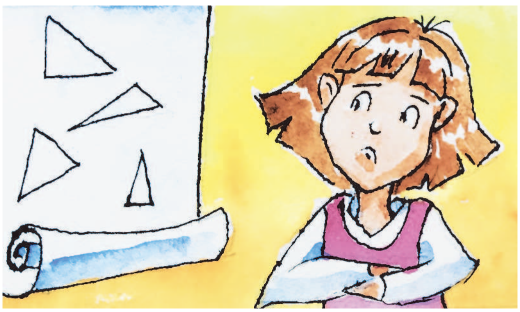
1. Дана таблица размером 100×100 клеток. Петя выбирает строку и в каждую из ее клеток ставит число 1. Затем Вася выбирает столбец и в каждую его

свободную клетку ставит число -1. Затем Петя выбирает другую строку и в каждую ее свободную клетку ставит 1. И так далее, пока в таблице есть свободные клетки. Чему равна сумма чисел в таблице, заполненной таким образом?

Б. Френкин

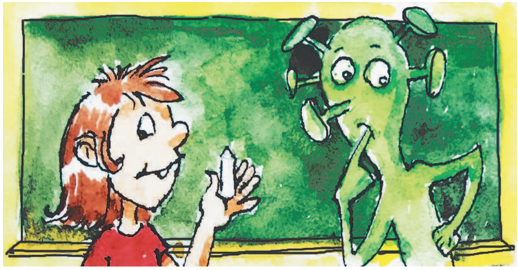
2. Серединный перпендикуляр к стороне остроугольного треугольника делит одну из его высот в отношении $2:1$, считая от вершины. Найдите один из углов треугольника.

А. Пешнин



Эти задачи предлагались на XIX Устной математической олимпиаде для 6–7 классов.

3. На доске записаны четыре последовательных натуральных числа в порядке возрастания. Требуется между каждыми двумя соседними числами



поставить знак арифметического действия и вычислить значение полученного выражения. Всегда ли можно сделать это двумя различными способами, дающими одинаковые результаты?

А. Грибалко

4. У царя есть 12 различных украшений из чистого золота. Царь и ювелир знают, что массы украшений 28, 29, 30,... ..., 39 граммов, но только ювелир помнит, у какого украшения какая масса. Царь не доверяет ювелиру и считает,

Иллюстрации Д.Гришуковой

что тот все напутал. Сможет ли ювелир за два взвешивания на чашечных весах без гирь доказать царю, что масса выбранного им украшения действительно 39 граммов?

М. Евдокимов

Опыт есть то, до чего мы доходим опытным путем, на опыте убедившись, что не надо было набираться этого опыта.

Иоганн Петер Эккерман

Математики похожи на французов: что бы им ни сказали, они все переведут на свой язык, и при этом получится нечто другое.

Иоганн Вольфганг Гёте

На свете есть столь серьезные вещи, что говорить о них можно только шутя.

Нильс Бор

У нас как-то не умеют делать самые серьезные дела и при этом смеяться и шутить, ведь это так оживляет жизнь и помогает!

Петр Капица

Если вы не делаете ошибок, вы решаете слишком простые задачи, и это большая ошибка.

Фрэнк Вильчек

У физиков есть привычка брать простейший пример какого-то явления и называть его «физикой», а примеры посложнее отдавать на растерзание другим наукам...

Ричард Фейнман

Науки делятся на естественные, неестественные и противоестественные.

Лев Ландау

Наука не терпит звериной серьезности!

Николай Тимофеев-Ресовский

А так ли хорошо знакомо вам, как «КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ?

Людям науки, как видим, вовсе не чуждо желание пошутить, и физики с математиками – отнюдь не исключение. Более того, благодаря именно точным дисциплинам родился своеобразный жанр «научного» юмора, иногда понятного только специалистам, но большей частью все же общедоступного. Школьники посмеиваются над учителями, студенты – над профессорами, а преподаватели – над учениками. Ученые подтрунивают друг над другом, да и над собой, и все вместе потешаются над телеведущими, потчующими нас «цифрами Фибоначчи» и «андронным коллайдером».

Занятные истории, порой сдобренные сарказмом и парадоксами, – это и средство борьбы с невежеством, ведь известно, что «в каждой шутке лишь доля шутки». «Квант» никогда не расставался с юмористической рубрикой, а сегодня мы призываем вас улыбаться вместе с «Калейдоскопом».

Вопросы и задачи

1. Ученый обнаружил, что некоторая реакция протекает в течение 80 минут, если он в пиджаке. Если же он без пиджака, то та же самая реакция протекает за 1 час 20 минут. Как это объяснить?

2. Одному профессору предложили садовый участок в форме треугольника со сторонами 55, 62 и 117 метров. Сколько придется заплатить за участок, если один квадратный метр стоит 1000 рублей?

3. На березе росло 90 яблок. Подул сильный ветер и 10 яблок упало. Сколько осталось?

4. Может ли быть, что $23 + 2 = 1$?

5. Известно, что на Луне сила тяжести меньше, чем на Земле. Быстрее или медленнее будет летать птица на Луне, если и там, и на Земле она летает в тех же космических доспехах?

6. 4 водопроводчика, выпив 10 литров пива, чинили кран 3 часа и в конце концов сломали. А за какое время сломают такой же кран 6 водопроводчиков и сколько пива им для того понадобится?

7. Чему равно значение выражения $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-z)$?

8. Как назвал бы обычную и крестовую отвертки любитель математики, чтобы отличить их друг от друга?

9. Чему равна молярная теплоемкость гелия при изохорическом расширении?

10. Определите, чему равно выражение $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\ldots\sin\omega$.

11. Что означает формула $\mathrm{apelsin}^2\alpha + \mathrm{abricos}^2\alpha = 1$?

12. Можно ли найти высоту здания с помощью двух секундомеров?

Микроопыт

Вы должны встать с товарищем на один газетный лист, не имея возможности прикоснуться друг к другу. Как этого добиться, если сходить с газеты не разрешается?

Любопытно и ... смешно

– Папа, что такое литр?

– Это то же, что и метр, только жидкий.

* * *

Некая дама на вопрос, сколько ей лет, ответила: «Когда я выходила замуж, мужу было 40, а мне 20. Сейчас ему 60. Значит, мне 30».

* * *

У них средняя температура двадцать градусов, а у нас ноль: в двадцать раз меньше! (В.В.Жириновский)

* * *

Полицейский – водителю остановленной машины:

– Холодное оружие есть?

– Не знаю – у меня нет термометра.

На экзамене

– Почему трамвай работает на постоянном токе?

– Если б он работал на переменном, рельсы пришлось бы укладывать по синусоиде.

* * *

– Как изменяется долгота дня в течение года и почему?

– Летом жарко, и дни удлиняются, а зимой холодно, и они укорачиваются.

* * *

– Что такое лошадиная сила?

– Это мощность, которую развивает лошадь ростом в 1 метр и массой в 1 килограмм.

– Да где вы такую лошадь видели?

– Увы, она хранится вдали от людских глаз в палате мер и весов во Франции!

* * *

– Какие лучи называются инфракрасными?

– Невидимые лучи красного цвета.

* * *

– Из каких частиц состоит атом?

– Из электронов, протонов и ньютонов.

Из научного фольклора

В какой-то степени два это тоже восемь.

* * *

Каков антоним слову «параллельно»?

Математик: «перпендикулярно».

Физик: «последовательно».

* * *

Ректор университета: «Почему это физики всегда требуют такое дорогое оборудование? Вот, например, математики просят лишь деньги на бумагу, карандаши и ластики». Подумав, добавил: «А философы, те еще лучше. Им даже ластики не нужны».

* * *

Тьма тоже распространяется со скоростью света.

* * *

– Известно, что появление дробей сопровождалось необычайно широким их использованием.

– Где это?

– В 3/9 царстве, в 3/10 государстве.

* * *

Встречаются как-то в мороз два физика. Один другому и говорит:

– Ну у тебя и нос! 720 нанометров.

– Что, такой маленький?

– Нет. Такой красный.

* * *

Знаменитый физик-теоретик Ричард Фейнман медленно поворачивал перед студентами лекало, говоря: «Оно сделано так, что независимо от того, как вы его повернете, в наинизшей точке контура касательная горизонтальна». Студенты стали приставлять карандаш к нижней точке лекала и были крайне возбуждены от этого открытия.

Что читать в «Кванте»

(публикации последних лет)

1. «Квант» улыбается» – 2018, №1, с.30; 2018, №9, с.35; 2020, №5, с.39; 2021, №5, с.23; 2022, №1, с.12;
2. «Численные значения…» – 2019, №4, с.2;
3. «Квант, который построил Исаак» – 2020, №1, 3-я с. обл.;
4. «Из записной книжки экзаменатора» – 2020, №2, с.51.

Материал подготовил А. Леонович

Как реки освобождаются ото льда

Т.МОРОЗОВА

Процесс таяния льда на реках и озерах кажется на первый взгляд тривиальным, хотя это не совсем так. Часто весной за потеплением идет похолодание, и так происходит несколько раз, пока природа не исчерпает свои запасы холода и окончательно не пустит весну на просторы земли и воды.

Во время зимних морозов на реках нарастает лед. Так, толщина льда в Днепре составляет 0,5 метра, в реках среднеевропейской равнины – порядка 1 метра, а на сибирских реках – до 1,5 метра. Чем больше морозных дней в году, тем толще лед. Заледеневшие реки открывают новые пути для передвижения от места к месту и дают своеобразный простор пешим прогулкам и путешествиям. Но когда лед начинает таять, по нему ходить становится опасно.

Лед на канале имени Москвы

Какой же лед наименее благоприятен для прогулок по нему? Самый опасный вариант – это тонкий ровный лед после резкого похолодания, когда создаются большие напряжения в материале и легко могут возникнуть трещины. То же относится и к свежеобразовавшемуся льду. Сетка неоднородностей во льду при его хаотичных замерзаниях–размерзаниях с небольшими колебаниями температур создает своего рода каркас. Однако если в нем имеются пустоты, то это также представляет опасность. После таяния прибрежная полоса замерзает быстрее и в холодные весенние ночи по ней безопаснее ходить, чем по середине реки. При передвижении по льду он трещит там, где есть неоднородности и искривление рельефа. В таких местах не стоит пересекать замерзший водоем в период таяния льда и его последующего замерзания. Если ходить по льду на лыжах, то давление на него будет оказываться гораздо меньшее, чем при пешей ходьбе. Если бежать, то толчки создадут большие давление и большую опасность проломить лед.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20220604

Итак, по какому льду на реке особенно опасно ходить?

1) Когда есть заметное течение реки. Чем больше сужается река, тем течение быстрее. Это непосредственно следует из уравнения неразрывности струи $v_1S_1 = v_2S_2$, где v – скорость, S – площадь поперечного сечения.

2) Где лед только что намерзший или после потепления, а за ним похолодания. Но тут все зависит от множества факторов. Если, например, похолодание сильное – то лед безопасен. А потепление может перемешать лед, и он плотнее замерзнет без пустот и неоднородностей.

3) В резко наступивший трескучий мороз, когда могут образовываться пустоты, трещины, а также создаваться большие напряжения во льду и возникать подледные течения.

Когда лед тает постепенно, то появляется скорее снежная каша, чем лед, который может треснуть. Иными словами, при постоянном градиенте температур во время потепления лед почти не трескается в спокойных водоемах. Но на реках с большим течением треснувшие льдины появляются почти всегда – само течение не представляет возможности создать плавный градиент температур. Под мостами лед тает особо быстро ввиду наличия газов, испарений и теплых конвективных потоков. Сам лед плотнее у берега, чем на середине реки. Но не у самого-самого берега, а чуть поодаль. Реки и озера на мелководье промерзают полностью, однако когда начинается таяние, то самый край водоема быстро тает, так как абсолютная

Треснувший лед на реке

толщина льда на кромке воды небольшая. В середине же реки течение поддерживает более высокую температуру воды и не дает льду намерзать.

В отличие от рек, озера долго размораживаются, потому что нижние слои льда не успевают прогреваться из-за большой теплоемкости. А кроме того, в озере больше воды и больше льда, следовательно, оно будет дольше размораживаться. Малое же количество воды быстрее замерзнет и быстрее растает. Также существенно быстрее освобождаются ото льда реки с течением, и чем оно больше, тем интенсивнее происходит процесс таяния.

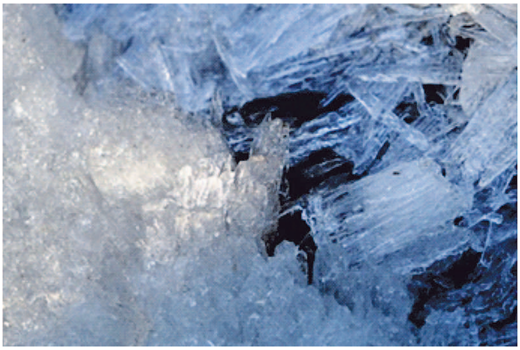
Почему снег на речке при потеплении и дальнейшем замерзании становится плотным льдом, в то время как снежные сугробы на берегах не леденеют? Все дело в том, что у воды теплоемкость и теплопроводность больше, чем у снега и льда, и вода вбирает в себя больше тепла и интенсивнее разогревает прилежащие слои. От слоя к слою тепло передается быстро, но чтобы прогреть каждый слой, энергии нужно затратить больше. Таким образом, на реке происходит плавление большей массы снега, а при похолодании – ее тотальное замерзание и превращение в лед. Гладь водоема при последующем похолодании замерзает ровно, если воды расплавилось много. По такой поверхности даже можно кататься на коньках.

Но все же рано или поздно весна берет свое, и водоемы постепенно освобождаются ото льда. Талая вода особо холодная. Любители моржевания хорошо это знают – ведь в ней еще холоднее плавать, чем в проруби в бодрящий мороз. Дело в том, что замерзающий на поверхности водоема лед образуется из очищенной воды приповерхностных слоев, из которой весь осадок ушел на дно. Очень чистую воду можно охладить до температуры –40 °С. В этой связи можно провести такой эксперимент: на небольшом морозе отстоявшуюся родниковую воду в бутылке взболтать, и она меньше чем за минуту замерзнет – примеси повысят ее температуру замерзания. Соленая вода, в силу своих физико-химических свойств, замерзает при –3 °С.

Намерзание льда происходит неравномерно, особенно в солнечный день, из-за того, что на краях проруби лед охлаждает воду и намерзающие льдины и не дает растаять тому льду, что плавит солнце (в отличие от середины проруби). В итоге возникают касательные напряжения, и лед поднимается дугой.

Снежный наст на берегах рек дифференцируется в отдельные вертикальные льдинки, и они имеют структуры, похожие на

Прорубь с дугообразным льдом, не прилегающим плотно к ее середине сталактиты и сталагмиты в пещерах. Появляются трещины и разломы пластов. В низинах снег тает медленнее, происходит деструктурирование снега и намерзшего льда. Весной возникают постоянные колебания температур от плюса к минусу. В итоге размерзшийся снег снова замерзает, превращаясь в ледяную фрактальную структуру из множества мелких ледышек неправильной формы.



Вертикальные льдинки

Сам по себе снег очень хороший теплоизолятор. И даже когда вокруг резко теплеет, он хранит в себе холод. Более того, даже достигнув равновесия с окружающим воздухом, снег не может растаять очень быстро, так как для этого его нужно не только нагреть, но и расплавить (суммируются количества теплоты плавления и нагревания). На берегу при таянии снега образуется вода, которая уходит в грунт. Снег же не дает прогреться внутрилежащим слоям. Поэтому при похолодании и последующем потеплении гладь реки становится ледяной, а снежные сугробы на берегах остаются непоколебимыми по своей структуре. Однако при общем потеплении и они постепенно тают и уменьшаются, уходя в грунт или стаивая на лед реки. Чем глубже река у берегов, тем меньше по ее краям сугробы. Также они могут давать трещины и разбиваться на пласты – это зависит от грунта.

Сама структура льда формируется в зависимости от грунта. Внутри льда могут быть линзы и другие образования. Песчаный грунт очень плотный и практически не пропускает частицы воды, а глиняный пропускает. Поэтому когда вода замерзает, глиняные почвы упрочняются, а когда лед начинает таять, вода быстро уходит через их поры в грунт. Если бы у реки не было песчаного русла, она бы быстро обмелела. Помимо этого, при замерзании лед расширяется и грунт вспучивается. Также при резком морозе замерзающий лед может давать трещины при расширении. Таким образом, получается, что опасно ходить по льду не только во время оттепели, но и когда резко ударяют морозы.

Трещины снежного пласта на берегу

Почему некоторые речки зимой мелеют и показывают свои песчаные берега, покрытые снегом? Здесь происходят два процесса: во-первых, испарение воды и последующий унос испарившихся масс, которые, в отличие от других сезонов, не возвращаются в водоем и выпадают осадками равномерно по всей земле, а во-вторых, уход воды в грунт и его промерзание. Интенсивность второго процесса зависит от типа грунта и глубины реки. Весной снег тает, и вода с берегов стекает в речку, где она возвращается в прежний объем. У рек часто бывают крутые берега, которые постепенно подмываются течением, да и сама река обычно течет в самом низком месте, стекая с окрестных берегов. Летом осадки стекают в реку с окрестных берегов, а зимой нет, поэтому испарения и не возвращаются. Весной испарения и талые снега не идут в облака не только из-за холодных ночей, но и потому, что растительность вбирает в себя влагу. Но иногда в особенно солнечный день влага может выпадать отдельными капельками, не собираясь в облака и дожди.

В заключение отметим, что талая вода стекает в реку или под землю, образуя структуру из льдинок. В итоге уровень воды в водоеме повышается. Вот почему с приходом весны идет так называемая большая вода.

Математические секреты проектирования многоступенчатых ракет

М.НИКИТИН, А.ТЕПЛЯКОВ

Формула Циолковского, на первый взгляд, позволяет легко достичь первой и второй космических скоростей для требуемой полезной массы. Действительно, подставляя в хорошо известную формулу

$$v = u\ln\left(\frac{m_0}{m_\text{п}}\right),$$

где m_0 – начальная масса ракеты, u – скорость истечения реактивной струи, зависящая от типа ракетного двигателя, массу полезного груза $m_\text{п}$, находим v – скорость движения ракеты. Для характерной скорости истечения $u = 3{,}0$ км/с легко получить соответствующим подбором требуемое отношение масс как для первой космической скорости $v_\text{I} = 7{,}9$ км/с, так и для второй $v_\text{II} = 11{,}2$ км/с .

В реальности все намного сложнее. И повинна в этом структурная масса ракеты, определяемая массой всех конструкционных элементов за исключением топлива и полезной нагрузки. Даже в самых инновационных ракетах структурная масса составляет приблизительно 0,07 от полной массы ракеты. Это затрудняет вывод в ближний космос значительных по весу полезных грузов с помощью одноступенчатых ракет, структурная масса которых сохраняется до конца полета. В этом легко убедиться, поэкспериментировав с формулой

$$v = u\ln\left(\frac{m_0}{m_\text{п} + \lambda m_0}\right),$$

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20220605

где λ – доля структурной массы для различных комбинаций параметров, входящих в формулу.

Проблему несоответствия одноступенчатых ракет задачам освоения космоса впервые увидел К.Э.Циолковский. Для ее решения он предложил конструкцию многоступенчатых ракет, в которых структурная масса каждой ступени отделяется от ракеты после использования всего топлива ступени. Идеальным вариантом была бы ракета, в которой структурная масса сбрасывается непрерывно. В этом случае формула Циолковского принимает вид

$$v = u(1-\lambda)\ln\left(\frac{m_0}{m_\text{п}}\right),$$

где параметр λ определяет долю сбрасываемой непрерывно конструкционной массы.

Понятно, что реализовать такую ракету невозможно, поэтому конструкторы пошли по пути проектирования многоступенчатых ракет с отделением отработанных конструкций. Для трехступенчатой ракеты (такие ракеты используются для вывода полезных грузов в дальний космос) скорость движения полезного груза определяется тремя слагаемыми, каждое из которых учитывает формулу Циолковского для рассматриваемой ступени:

$$v = v_1 + v_2 + v_3 = u\left(\ln\left(\frac{m_0}{m_\text{п} + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right) + \right.$$

$$\left. + \ln\left(\frac{m_\text{п} + m_2 + m_3}{m_\text{п} + \lambda m_2 + m_3}\right) + \ln\left(\frac{m_\text{п} + m_3}{m_\text{п} + \lambda m_3}\right)\right). \quad (1)$$

Здесь λ – структурный параметр, характеризующий массу конструкции ступени, причем в записанной формуле он один и тот же для всех трех ступеней. Из приведенного соотношения следует, что при заданных λ, v, u и $m_\text{п}$ скорость движения полезного груза сложным образом зависит от трех конструкционных параметров: m_1, m_2, m_3. В результате возникает типичная задача на оптимизацию, в которой из полного набора возможных решений ищется такое, которое является наилучшим по условиям задачи.

В случае трехступенчатой ракеты таким оптимальным решением является минимальная полная масса ракеты при заданной скорости полезного груза, его массе, скорости истечения u и значении параметра λ. В общем случае поиска оптимального распределения масс в трехступенчатой ракете необходимо использовать специальные математические приемы, но для заданных выше условий можно получить решение на основе знаний школьной математики. Покажем это для случая, когда на всех ступенях скорость истечения u и параметр λ одинаковы. Для этого перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{v}{u}=\ln\left(\left(\frac{m_0}{m_п+\lambda m_1+m_2+m_3}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{m_п+m_2+m_3}{m_п+\lambda m_2+m_3}\right)\left(\frac{m_п+m_3}{m_п+\lambda m_3}\right)\right). \quad (2)$$

Для типичного значения $\lambda\approx 0{,}085$ слагаемые λm_1, λm_2 и λm_3 в множителях знаменателя значительно меньше остальных сумм (справедливость этого будет подтверждена дальше). Это обстоятельство позволяет преобразовать все множители знаменателя в выражения, упрощающие поиск оптимального решения в распределении масс по ступеням ракеты.

Рассмотрим вначале первый множитель $\frac{m_0}{m_п+\lambda m_1+m_2+m_3}$ и представим его в виде

$$\frac{m_0}{m_п+m_2+m_3\left(1+\frac{\lambda m_1}{m_п+m_2+m_3}\right)}.$$

Отношение $\frac{\lambda m_1}{m_п+m_2+m_3}$, входящее в знаменатель, значительно меньше единицы. Это позволяет воспользоваться известным приближенным равенством $\frac{1}{1+\alpha}\approx 1-\alpha$ для $\alpha\ll 1$, которое в нашем случае тем точнее, чем меньше отношение конструкционной массы первой ступени к суммарной массе остальной ракеты. В результате проделанной процедуры получим

$$\frac{m_0}{m_п+\lambda m_1+m_2+m_3}=$$
$$=\frac{m_0}{m_п+m_2+m_3}\left(1-\frac{\lambda m_1}{m_п+m_2+m_3}\right).$$

Аналогичные неравенства запишем и для двух остальных множителей под знаком логарифма в уравнении (2):

$$\frac{m_п+m_2+m_3}{m_п+\lambda m_2+m_3}=\frac{m_п+m_2+m_3}{m_п+m_3}\left(1-\frac{\lambda m_2}{m_п+m_3}\right),$$

$$\frac{m_п+m_3}{m_п+\lambda m_3}=\frac{m_п+m_3}{m_п}\left(1-\frac{\lambda m_3}{m_п}\right).$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$\frac{v}{u}=\ln\left(\left(\frac{m_0}{m_п+m_2+m_3}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{m_п+m_2+m_3}{m_п+m_3}\right)\left(\frac{m_п+m_3}{m_п}\right)\right)+$$
$$+\ln\left(\left(1-\frac{\lambda m_1}{m_п+m_2+m_3}\right)\left(1-\frac{\lambda m_2}{m_п+m_3}\right)\left(1-\frac{\lambda m_3}{m_п}\right)\right).$$

Во втором логарифме стоят сомножители, у которых отрицательные части значительно меньше 1. Вновь используем приближенное соотношение $\ln(1-\alpha)\approx-\alpha$, где $\alpha\ll 1$, и получим

$$\frac{v}{u}=\ln\frac{m_0}{m_п}-\lambda\left(\frac{m_1}{m_п+m_2+m_3}+\frac{m_2}{m_п+m_3}+\frac{m_3}{m_п}\right).$$

Вычитаемое с множителем λ учитывает отрицательный вклад конструкционной массы в скорость ракеты: чем меньше эта величина, тем больше отношение $\frac{v}{u}$. Поэтому задача оптимизации трехступенчатой ракеты сводится к поиску минимума величины

$$W=\frac{m_1}{m_п+m_2+m_3}+\frac{m_2}{m_п+m_3}+\frac{m_3}{m_п}$$

при условии, что масса каждой ступени значительно больше массы полезной нагрузки.

Поверхностный анализ показывает, что для масс ступеней должны выполняться следующие соотношения: $m_1>m_2>m_3$. Более глубокий анализ приводит к выводу, что слагаемые W должны быть равны друг другу. Только при таком соотношении уменьшение или увеличение любой массы ступени автоматически приводит к возрастанию W (рекомендуем это проверить самостоятельно). Обозначив каждое слагаемые через k, получим следующие связи между массами ступеней:

$$k=\frac{m_1}{m_п+m_2+m_3}=\frac{m_2}{m_п+m_3}=\frac{m_3}{m_п}. \quad (3)$$

Отсюда следует, что масса каждой ступени в k раз больше суммарной массы расположенных над ней ступеней. При таком соотношении масс может быть достигнута требуемая скорость ракеты при минимальной стартовой массе. Это и есть главный математический секрет оптимального проектирования трехступенчатых ракет.

Условие оптимального распределения масс позволяет легко найти нужное значение параметра k. Для этого достаточно подставить соотношения (3) в выражение (2). При такой подстановке все множители под знаком логарифма примут одинаковый вид $\dfrac{1+k}{1+\lambda k}$ и уравнение (2) сведется к следующему уравнению:

$$\frac{v}{3u} = \ln\frac{1+k}{1+\lambda k},$$

в котором v и u являются известными величинами. Решая это уравнение, получим

$$k = \frac{e^{v/(3u)} - 1}{1 - \lambda e^{v/(3u)}}. \qquad (4)$$

Массы ступеней ракеты при этом выражаются через k простыми соотношениями:

$$m_1 = k(k+1)^2 m_п,\ m_2 = k(k+1) m_п,\ m_3 = k m_п. \quad (5)$$

Тогда полная масса ракеты будет равна

$$m_0 = \left(k(k+1)^2 + k(k+1) + k + 1\right) m_п = (k+1)^3 m_п.$$

Важным следствием соотношений (3) является вывод о том, что при оптимальном распределении масс в трехступенчатой ракете каждая ступень вносит одинаковый вклад в итоговую скорость. Это условие полезно не только для нахождения оптимального распределения масс ракет с одинаковыми λ и u, но и для ракет, в которых ступени различаются своими параметрами. Для таких ракет скорость v будет определяться выражением

$$v = u_1 \ln\frac{m_0}{m_п + \lambda_1 m_1 + m_2 + m_3} + u_2 \ln\frac{m_п + m_2 + m_3}{m_п + \lambda_2 m_2 + m_3} + u_3 \ln\frac{m_п + m_3}{m_п + \lambda_3 m_3}.$$

Считая все слагаемые здесь одинаковыми, можно найти «нулевое» решение для распределения масс по ступеням. Будет ли это распределение оптимальным, придется уточнить дополнительно.

Разберемся теперь, почему не делают четырех- и более ступенчатые ракеты. На первый взгляд это должно приводить к уменьшению полной массы конструкции, так как в случае одинаковых скоростей истечения и конструкционного параметра λ величина параметра k будет уменьшаться в соответствии с выражением

$$k = \frac{e^{v/(Nu)} - 1}{1 - \lambda e^{v/(Nu)}},$$

где N – число ступеней. С уменьшением k будет уменьшаться и полная масса ракеты. В реальности подобная зависимость не имеет места, так как увеличение числа ступеней увеличивает массу соединительных элементов и за счет этого увеличивает ее конструкционную массу.

Пришел черед подтвердить обоснованность приближений, которые были сделаны при выводе формул (3) и (4). Эти приближения связаны с неравенствами

$$\frac{\lambda m_1}{m_п + m_2 + m_3} = \frac{\lambda m_2}{m_п + m_3} = \frac{\lambda m_3}{m_п} \ll 1. \qquad (6)$$

Тогда для $\lambda = 0{,}085$, $u = 3{,}0$ км/с и скоростей ракеты, лежащих в диапазоне от первой до второй космической, значения параметра k находятся в диапазоне 1,74 – 3,50, а произведения λk – в диапазоне 0,15 – 0,30. Нижний диапазон λk вполне отвечает неравенству (6), а вот верхний – с натяжкой. Последнее обстоятельство, однако, не ограничивает области применения массовых соотношений (3). Они оказываются справедливыми и для значений λk, больших чем 0,30. В пользу этого говорят расчеты оптимального распределения масс трехступенчатой ракеты, полученные более обоснованными математическими методами. В них также оказываются справедливыми массовые соотношения (3) и (5), которые можно рассматривать как обязательные условия оптимального проектирования многоступенчатых ракет. Эти условия изначально закладываются в технические требования при проектировании всех мощных ракетоносителей[1].

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим характеристики самых известных ракетоносителей «Протон» и «Сатурн-5» (этот ракетный комплекс обеспечивал лунные миссии американских астронавтов в 60–70 годы прошлого столетия). Масса первой ступени «Протона» 459 т, второй 168 т, третьей 46,6 т, полезной нагрузки 23,7 т. В соответствии с этими данными,

$$k_1 = \frac{m_1}{m_п + m_2 + m_3} = 1{,}96,$$

$$k_2 = \frac{m_2}{m_п + m_3} = 2{,}39,\ k_3 = \frac{m_3}{m_п} = 2{,}01.$$

Масса первой ступени «Сатурна-5» 2290 т, второй 496 т, третьей 92 т, полезной нагрузки 43 т. По этим данным,

$$k_1 = 3{,}64,\ k_2 = 3{,}75,\ k_3 = 2{,}16.$$

Таким образом, для ракетоносителя «Протон» все три параметра k близки друг к другу, для ракетоносителя «Сатурн-5» параметры k близки по величине для первой и второй ступеней. Это указывает на то, что при проектировании этих ракетоносителей использовалась оптимальная иерархия масс ступеней. Различие в величинах k для ракетоносителей «Протон» и «Сатурн-5» связаны с конструкционными отличиями этих ракет. Различие в k между ступенями «Сатурна-5» связаны с конструкционными особенностями третьей ступени, которая содержала значительную массу топлива для лунных маневров и возвращения на Землю.

В заключение получим модифицированную формулу Циолковского для случая, когда структурная масса ракеты сбрасывается непрерывно. Для этого воспользуемся законом сохранения импульса для двух близких моментов времени t и $t + \Delta t$:

$$Mv = (M - \Delta m)(v + \Delta v) + \lambda \Delta m v + (1 - \lambda)\Delta m (v - u),$$

где M и $M - \Delta m$ – масса ракеты в моменты времени t и $t + \Delta t$, Δm – масса, оказавшаяся вне ракеты за промежуток времени Δt. В этой формуле второе и третье слагаемые определяют импульсы отброшенной структурной и истекающей из ракетного двигателя масс. Все величины здесь записаны в неподвижной инерциальной системе отсчета. При пренебрежении произведением $\Delta m \Delta v$, как величиной второго порядка малости по сравнению с остальными величинами, последнее уравнение легко приводится к виду

$$M \Delta v = (1 - \lambda)\Delta m u.$$

Разделив правую и левую части на Δt и используя предельное условие $\Delta t \to 0$ для перехода к производным по времени от величин v и m, получим уравнение

$$M \frac{dv}{dt} = (1 - \lambda) u \frac{dm}{dt},$$

причем $\frac{dm}{dt} = -\frac{dM}{dt}$. Интегрируя это уравнение по времени, окончательно имеем

$$v = u(1 - \lambda)\ln \frac{m_0}{m_п}.$$

Это и есть уравнение Циолковского для ракеты, структурная масса которой отделяется непрерывно. Из уравнения следует, что при заданных значениях величин u и λ полезный груз может быть ускорен до любой скорости соответствующим увеличением отношения $\frac{m_0}{m_п}$. Однако, как уже отмечалось в начале статьи, создание подобных ракет физически невозможно.

[1] В данном контексте более правильно писать «ракета-носитель». (*Прим. ред.*)

Очередной набор в ВЗМШ

Наши контакты:
https://vzms.ru/
https://lycuz2.mskobr.ru/
+7(926)280-28-20
vzms2015@mail.ru
(почта, прием)
https://vk.com/vzmsh
119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, Второй учебный корпус, ауд. 307

Всероссийская заочная многопредметная школа приглашает школьников и учителей из всех регионов России, ближнего и дальнего зарубежья для обучения по программам дополнительного дистантного (он-лайн) образования.

ВЗМШ – старейший в России центр дополнительного образования. Она была основана в 1964 году по инициативе выдающихся математиков, академиков И.Г.Петровского (в то время ректора МГУ) и И.М.Гельфанда. В настоящее время ВЗМШ – структурное подразделение знаменитого московского физико-математического Лицея «Вторая школа».

Мы учим математике, физике, биологии, русскому языку и литературе, истории, обществознанию. Наши преподаватели – это сотрудники МГУ имени М.В.Ломоносова и других ведущих вузов и академических институтов. Ими написана обширная библиотека уникальных учебных пособий по математике, истории, обществознанию и другим предметам. Созданные ими методики позволяют вести заочное (он-лайн) обучение на самом высоком уровне.

Обучение старшеклассников в ВЗМШ направлено прежде всего на подготовку к олимпиадам и ЕГЭ. Однако мы считаем, что даже самая высокая оценка не может быть самоцелью. У нас занимаются преимущественно такие ученики, для которых на первом месте стоит саморазвитие, которые хотят знать СВЕРХ ТОГО (сверх школьной программы) и приобрести дополнительные знания по самым разным предметам.

ВЗМШ окончили более 200 тысяч школьников. Из их рядов вышло множество ученых, исследователей, педагогов. Многим учеба в ВЗМШ помогла лучше ориентироваться в жизни, ставить перед собой бо́льшие задачи, добиваться задуманного.

ВЗМШ, в отличие от курсов или кружков, это самая настоящая школа, со своей программой, ритмом, контрольными работами, двусторонней связью между учеником и учителем. Мы предоставляем наши материалы в электронном виде, постоянно общаемся с нашими учениками через социальные сети, рассказываем им о том, что не входит в программу обучения, но помогает их развитию, знакомим с книгами и статьями наших преподавателей, проводим видеоконференции и видеолекции.

В ВЗМШ существует особая форма работы – группа «Коллективный ученик». Это группа школьников, работающая по методическим пособиям ВЗМШ под руководством школьного учителя по тем же программам и пособиям, что и индивидуальные ученики. В помощь учителям – кураторам таких групп – разрабатываются специальные методические и учебные материалы. Ученики под руководством учителя вместе обсуждают пройденный материал, полученные задания. Сотрудничество с ВЗМШ, как показывает наш многолетний опыт, многие учителя воспринимают и как свою собственную учебу.

Обучение в формате «Коллективный ученик» имеет следующие преимущества: контакт с учителем упрощает обучение, что особенно важно для тех школьников, которым сложно самостоятельно, без наставника, организовать свое время; совместные занятия создают творческую атмосферу, в которой есть место и для конкуренции, и для кооперации; присылаемые из ВЗМШ материалы могут служить учителю хорошей базой для организации в школе кружка или факультатива, помогают подготовить учеников к участию в олимпиадах и сдаче ЕГЭ; ученики принимаются в ВЗМШ без выполнения вступительного задания; плата за обучение одного ученика меньше, чем при индивидуальном обучении.

Подробно ознакомиться с программами обучения, зарегистрироваться, выполнить вступительные задания, а также подать заявку для группы «Коллективный ученик» можно здесь: math-vzms.org

Приступить к обучению можно в любое время!

Расскажем подробнее о наших отделениях и приведем условия соответствующих вступительных работ.

Отделение математики

Будущих математиков мы обучаем работать с научными текстами, четко излагать свою мысль, предоставляем возможность, используя наши пособия, продвинуться в изучении различных математических вопросов настолько далеко по сравнению с необходимым минимумом, насколько они сами этого захотят.

Мы помогаем углубить и расширить полученные в школе знания, подготовиться к ЕГЭ, ОГЭ и прочим экзаменам.

Тем, кому уже ведомо удовольствие от решения математических задач, мы надеемся доставить радость от размышления над новыми, похожими и вовсе не похожими на прежние, задачами.

Мы последовательно обучаем школьников с 4 по 11 класс. Начать обучение можно с любого класса.

Вступительная работа

Рядом с порядковым номером задачи в скобках указано, ученикам какого класса эта задача предназначается (имеется в виду тот класс, в котором вы будете учиться в следующем учебном году). Вы можете, если хотите, дополнительно решать задачи, адресованные более старшим классам.

Возможно, вы не сможете решить все задачи своего класса, присылайте решения тех, которые сделать удалось. Не забудьте обосновать свои решения, «голый» ответ к задаче решением не считается.

1. (5 кл.). Бурундуки Чип и Дейл должны запасти одинаковое количество орехов на зиму. После того, как Чип принес 120, а Дейл – 147 орехов, Чипу осталось запасти орехов в четыре раза больше, чем Дейлу. Сколько орехов должен запасти каждый из них?

2. (5 кл.) Охотник рассказал приятелю, что видел в лесу волка с метровым хвостом. Тот рассказал другому приятелю, что в лесу видели волка с двухметровым хвостом. Передавая новость дальше, простые люди увеличивали длину хвоста вдвое, а творческие – втрое. В результате по телевизору сообщили о волке с хвостом длиной 648 метров. Сколько простых и сколько творческих людей «отрастили» волку хвост?

3. (5 кл.) Известно, что в январе четыре пятницы и четыре понедельника. На какой день недели приходится 1 января?

4. (6 кл.) На поляну прилетело 35 ворон. Неожиданно вороны взлетели и разделились на две стаи: одна стая уселась на ветви старой березы, а другая – на ольху. Через некоторое время с березы на ольху перелетело 5 ворон, столько же ворон совсем улетело с березы, после чего на березе осталось вдвое больше ворон, чем на ольхе. Сколько ворон было в каждой из двух стай первоначально?

5. (6 кл.) На карточках были написаны числа 1, 2, 3, ..., 111. Ваня взял себе карточки с четными номерами, а Таня – с нечетными. У кого из них сумма чисел на карточках получилась больше и на сколько?

6. (6 кл.) На клетчатой бумаге нарисован квадрат со стороной 5 клеток. Разбейте его на 5 частей одинаковой площади, проводя отрезки внутри квадрата только по линиям сетки так, что суммарная длина проведенных отрезков не превосходит 16 клеток.

7. (7 кл.) Иннокентий хочет записать по кругу 2015 натуральных чисел так, чтобы для каждых двух соседних чисел частное от деления большего на меньшее было простым числом. Его друг Макар утверждает, что это невозможно. Кто прав?

8. (7 кл.) В правильном 2018-угольнике провели все диагонали. Петя выбирает наугад какие-то N диагоналей. При каком наименьшем N среди выбранных диагоналей гарантированно найдутся две, имеющие одинаковую длину?

9. (7 кл.) У юного художника была одна банка синей и одна банка желтой краски, каждой из которых хватает на покраску 38 дм^2 площади. Использовав всю эту краску, он нарисовал картину: синее небо, зеленая трава и желтое солнце. Зеленый цвет он получал, смешивая две части желтой краски и одну часть синей. Какая площадь на его картине закрашена каждым цветом, если площадь травы на картине на 6 дм^2 больше, чем площадь неба?

10. (8–10 кл.) Два города A и B расположены на берегу реки на расстоянии 10 км друг от друга. Пароход может проплыть из A в B и обратно за 1 час. Больше или меньше времени понадобится ему, чтобы проплыть 20 км по озеру?

11. (7–10 кл.) а)Можно ли занумеровать ребра куба натуральными числами от 1 до 12 так, чтобы для каждой вершины куба сумма номеров ребер, которые в ней сходятся, была одной и той же?

б) Аналогичный вопрос, если расставлять по ребрам куба числа –6, –5, –4, –3, –2, –1, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

12. (8–11 кл.) Найдите целые числа x и y такие, что $x > y > 0$ и $x^3 + 7y = y^3 + 7x$.

13. (9–11 кл.) Разложите на множители:

а) $x^8 + x^4 + 1$ (на три множителя);

б) $x^5 + x + 1$ (на 2 множителя).

14. (8–11 кл.) В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании равна одной из сторон. Определите углы треугольника.

15. (9–11 кл.) а) Докажите, что при $a > 0$ $1 + \frac{1}{a} \geq 2$.

б) Постройте график функции $y = x + \frac{1}{x}$.

16. (9–11 кл.) Известно, что $a + b + c < 0$ и что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней. Определите, какой знак имеет число c.

17. (9–11 кл.) Можно ли восстановить треугольник по серединам его сторон? А четырехугольник? Любой ответ требует доказательства!

Отделение физики

Если вы интересуетесь физикой, хотите понять ее немножко глубже, чем объясняют в школе, собираетесь изучать физику в вузе – поступайте к нам!

Мы объясняем, как решать типичные для ЕГЭ задачи (в том числе повышенной сложности), рассказываем о математических методах современной физики и многих других вопросах, которые остаются за рамками школьной программы.

Мы предлагаем программы обучения различной длительности и уровня сложности для школьников 9–11 классов: 9-классники учатся три года (курс Ф3), 10-классники – два (курс Ф2), 11-классники – один (курс Ф1). У нас есть и программа углубленного изучения физики для 11-классников (курс Ф0).

На ближайший учебный год приема на физическое отделение нет.

Отделение биологии

Цель биологического отделения – помочь школьникам углубить и расширить свои знания, а также познакомиться с современными методами и достижениями науки.

Программа биологического отделения включает в себя наиболее интересные темы, которым в базовом школьном курсе уделяется мало внимания: это физиология растений, цитология и генетика, теория систематики, физиология человека и животных и некоторые другие разделы.

Наши пособия и учебные материалы в первую очередь приучают школьников к самостоятельной творческой работе, дают им возможность приобретения навыков письменного изложения своих мыслей, выдвижения и критического анализа различных гипотез, работы с биологической литературой. Каждый учащийся биологического отделения получает куратора, который проверяет работы и отвечает на возникшие вопросы, а также помогает школьнику увидеть свои слабые места и их скорректировать. Это обеспечивает получение школьниками информации «из первых рук», знакомство с фактами и теориями, которые еще не успели войти в школьные учебники.

В зависимости от класса – 8 или 9 – школьники учатся на биологическом отделении ВЗМШ 2 или 3 года. Закончившие 8 классов поступают на 1 курс, а 9 классов – на 2, по окончании 3 курса все ученики, выполнившие программу обучения (по схемам 1–2–3 или 2–3), получают диплом об окончании биологического отделения ВЗМШ.

Вступительная работа

1. Составьте определитель (в форме тез и антитез) овощей, продающихся в магазине, по внешнему виду, собрав в нем десяток видов, наиболее типичных для вашей местности. Включать в определитель полные описания не нужно – только те признаки, которые реально могут быть использованы для отличия одних овощей из вашей выборки от других.

2. На океаническом дне обитают представители самых разных групп животных. Какие приспособления к такому образу жизни у них возникли? Для каждого из указанных вами приспособлений приведите по одному-два примера животных, у которых оно имеется.

3. При разведении животных в неволе имеет место эффект так называемого «вырождения» – уменьшения жизнеспособности из-за близкородственного скрещивания. Интересно, что у разных видов животных вырождение наступает с разной скоростью – в то время как одним видам хватает нескольких поколений, чтобы начать вырождаться, у других маленькие близкородственные популяции могут существовать достаточно долго. Как можно объяснить это явление? С какими особенностями вида может быть связано быстрое или медленное вырождение?

4. Апоптоз – запрограммированная клеточная гибель. Когда клетка получает сигнал к запуску апоптоза, она фактически оканчивает жизнь самоубийством. Подумайте: в каких случаях это может быть полезно для организма? С какими проблемами столкнется человек, если механизм апоптоза в его клетках отключится?

5. В настоящее время на наших глазах разворачивается пандемия нового коронавируса. Расскажите, как вы понимаете:

а) чем этот вирус опаснее предыдущих;

б) как быстро может появиться лекарство, помогающее в случае нового заболевания или предупреждающее его;

в) какие меры могут быть приняты для предотвращения или замедления эпидемии.

Отделение филологии

Мы помогаем желающим систематизировать и углубить имеющиеся знания, расширить свой кругозор, приобрести навыки исследовательской работы.

Объект нашего интереса, внимания и исследования, конечно же, Слово. Родное и «чужое», «претворенное» метафорой, образное и терминологически точное. Как правильно написать и к месту использовать; как учесть системные связи; как увидеть и оценить уникальность работы со Словом великих Мастеров? Сколько с ним проблем – у многих, и как приятно встретить к нему интерес – пусть у некоторых! Наши курсы будут полезны и тем, и другим.

Прагматики смогут повысить грамотность, научиться решать олимпиадные лингвистические задачи, подготовиться и хорошо сдать ЕГЭ. Те же, кто получает удовольствие от общения с художественным текстом, научатся размышлять над поэзией и прозой русских классиков и писать сочинения, отвечающие требованиям ДВИ (дополнительных вступительных испытаний) филологических факультетов вузов.

Ученик филологического отделения находится в постоянном взаимодействии со своим преподавателем, который в рецензии к работе обязательно дает рекомендации, как улучшить результат, а при необходимости индивидуально подбирает дополнительные задания для отработки темы или литературу для более глубокого понимания исследуемого материала.

Вступительная работа

1. Подумайте и напишите, что не так с выражениями: *остался за бортом разбитого корыта; довести до белого колена; заморить червячков; ни зги не брезжит; ни слуху ни пера; скрипя сердцем; шито-крыто белыми нитками; не в коне корм.*

2. Почему зайчишка имеет окончание – А, как мыслишкА, а домишкО – О, как золотишкО?

3. Определите часть речи: (НА)ВСТРЕЧУ, ОЗАБОЧЕ(Н/НН)О. Придумайте предложения, которые помогут доказать вашу точку зрения.

4. Вспомните трех героев русской литературы с «говорящими» фамилиями. Предложите для каждого из них две другие, тоже «говорящие» об их свойствах и качествах, и объясните свой выбор.

5. В приведенном ниже отрывке из Пушкинского «Евгения Онегина» найдите аллитерацию и попытайтесь объяснить: зачем автор использует этот фонетический прием, почему именно так?

Бывало,
Когда гремел мазурки гром,
В огромной зале все дрожало,
Паркет трещал под каблуком,
Тряслися, дребезжали рамы;
Теперь не то: и мы, как дамы,
Скользим по лаковым доскам.
Но в городах, по деревням
Еще мазурка сохранила
Первоначальные красы:
Припрыжки, каблуки, усы...

Отделение истории

Обучение на историческом отделении позволит расширить кругозор, подготовиться к олимпиадам по истории, получить высокий балл по ЕГЭ, ОГЭ и другим экзаменам.

Каждый раздел курса посвящается определенному периоду российской истории, сопровождается множеством иллюстраций, историческими документами, сводами дат, династическими таблицами, которых не найдешь в обычном учебнике. Такие материалы помогут не просто запомнить пройденное, но и понять содержание эпохи. Ведь мы учим не просто запоминать, но и размышлять!

На каждое выполненное задание мы даем свой комментарий: ученик не просто знает, правильно ли он ответил, а узнает, почему верен или неверен именно такой ответ.

Мы рекомендуем лучшие учебники и пособия, но предлагаем свой, оригинальный, проверенный временем курс. На нашем форуме можно задавать вопросы преподавателям. Отвечают они незамедлительно.

Программа обучения рассчитана на школьников старших классов.

Вступительная работа

1. Сколько правительниц государства насчитывает история России?

2. Какой сборник законов из ниже перечисленных был первым, изданным массовым тиражом?

а) Судебник Ивана III.
б) Судебник Ивана IV.
в) Соборное Уложение.
г) Воинский артикул Петра I.

3. Почему в совхозе был директор, а в колхозе председатель?

Отделение обществознания

Когда наук много, а предмет один – это обществознание. Наш курс нацелен на подготовку к ЕГЭ, ОГЭ, олимпиадам по этому предмету и входящим в его состав дисциплинам, в том числе по экономике, праву, политологии, социологии, философии. Он будет интересен и тем, кто просто хочет стать разносторонне образованным человеком.

Задания ЕГЭ по обществознанию, особенно второй части этого экзамена, задания олимпиад, очень сложные. Поэтому мы объясняем каждый ответ (неважно, верен он или нет), а не просто ставим баллы за его выполнение.

Особое место мы уделяем самому сложному заданию экзамена – написанию эссе. Только такая обратная связь позволяет вдумчиво и полноценно подготовиться к любым экзаменам. Эту же цель преследует форум, на котором ученики могут задать любой вопрос преподавателю. Кроме того, с преподавателем можно связаться через WhatsApp.

Программа обучения рассчитана на школьников старших классов.

Вступительная работа

1. Какая республика – субъект Российской Федерации – имеет территориальную основу?

2. Какая форма правления существовала в России с апреля 1906 по март 1917?

а) Абсолютная монархия.
б) Дуалистическая монархия.
в) Сословно-представительная монархия.
г) Теократическая монархия.
д) Традиционная монархия.

3. В стране Ухляндии в 2016 году фирма «Грейдер», используя экскаватор и прочую технику, вырыла, во исполнение контрактных обязательств, канаву длиной в один километр и шириной в один метр, за что получила от заказчика оплату в размере 2000 рыжиков (рыжики – ухляндская валюта). В 2017 году также по заданию заказчика она эту канаву зарыла, на чем заработала 3000 рыжиков. На сколько изменился в результате этих двух операций валовой внутренний продукт Ухляндии, если учесть, что он изменяется по состоянию на конец каждого года?

а) Вырос на 2000 рыжиков.
б) Вырос на 3000 рыжиков.
в) Упал на 1000 рыжиков.
г) Не изменился.
д) Вырос на 5000 рыжиков.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Олимпиада «Покори Воробьевы горы!»

Физика

Олимпиада «Покори Воробьевы горы!» по физике проводится с 2005 года и традиционно входит в I уровень Перечня олимпиад школьников в РФ. Особенностью олимпиады являются творческие задания отборочного этапа олимпиады, требующие от участников высокой эрудиции, уверенного владения математическом аппаратом и отличного понимания сути физических процессов. Каждый год в задание для старших школьников (10 и 11 классов) включается задача, требующая построения и анализа модели явления, в которой авторское решение не считается единственным правильным, и в ходе проверки оцениваются и разумные альтернативные модели, анализ которых проведен корректно. Традиционно задание для старших классов посвящено необычному персонажу (литературному или реальному), работавшему в области физики, а одно из заданий связано с темой Нобелевской премии по физике, врученной в стартовом году проведения олимпиады.

Олимпиада «Покори Воробьевы горы!» нацелена на поиск талантливых школьников из регионов России, и жюри очень внимательно относится к каждой работе, стараясь оценить все достижения участников.

Отборочный этап

Творческое задание

10 и 11 классы

Работы доктора Сарториуса

1. Замечательная кривая (18 баллов)

Однажды, во время краткого отдыха на стации вблизи Соляриса, доктор Сарториус рассеянно наблюдал за вращением шестеренок в демонстрационном часовом механизме. Его внимание привлекла шестеренка, вращающаяся вокруг точно такой же, но закрепленной шестеренки (рис. 1). Сбоку, на одном из ее зубчиков, сидела неподвижно (относительно шестеренки) небольшая букашка. Вращение происходило в вертикальной плоскости (поле тяжести на станции было такое же, как на Земле, и $g \approx 9{,}8$ м/с^2). Из паспорта механизма доктор узнал радиус шестеренок: $R = 10$ см и период обращения оси подвижной шестеренки вокруг неподвижной: $T \approx 898$ мс. С помощью зоологического справочника он выяснил, что масса букашки $m \approx 0{,}15$ г. В некоторый момент времени букашка, проходя точку наибольшего удаления от оси неподвижной шестеренки, оказалась на одной горизонтали с этой осью. «А с какой силой в этот момент букашка действует на шестеренку?» – подумал Сарториус. Исследуйте движение букашки, изобразите ее траекторию, вычислите радиус кривизны траектории в точке, в которой в этот момент времени находилась букашка, и ответьте на вопрос доктора. Размерами букашки и зубцов шестеренок по сравнению с радиусом можно пренебречь. Зубцы не проскальзывают друг по другу. В дополнение найдите радиус кривизны траектории букашки и величину силы, с которой букашка действует на шестеренку, для ее положений, которые соответствуют самому верхнему и самому нижнему положениям подвижной шестеренки.

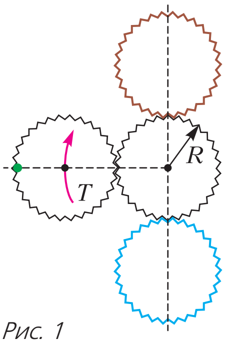


Рис. 1

2. Модель атмосферы (25 баллов)

До Соляриса доктор Сарториус изучал другую планету-океан – не такую удивительную, как Солярис, но тоже весьма необычную. Эту планету назвали Терма. Вся ее поверхность была покрыта химически однородным океаном, состоящим всего из одного вещества. Атмосфера Термы состояла только из паров этого же вещества. Молярная масса этого вещества $\mathrm{M} \approx 54$ г/моль, его пары в интересующем нас диапазоне температур похожи на многоатомный идеальный газ. Размеры планеты были больше земных, и она вращалась по почти круговой орбите, значительно удаленной от своего Солнца, которое не могло существенно обогреть планету. Несмотря на это, на Терме поддерживалась довольно высокая по земным меркам температура за счет интенсивных радиоактивных распадов внутри твердой части планеты. Например, в период работы доктора Сарториуса температура поверхности океана Термы равнялась $T_0 \approx 400$ К и практически не изменялась. Ускорение свободного падения вблизи поверхности океана на Терме $g \approx 20$ м/с^2. Сарториусу удалось построить реалистичную модель строения атмосферы Термы, используя следующие предположения:

- в области, в которой пар не является насыщенным, атмосфера находится в квазиравновесном механическом состоянии, причем медленные перемещения пара по вертикали можно считать адиабатическими (т.е. происходящими практически без теплообмена);
- в области, в которой пар является насыщенным, он находится в механическом равновесии практически без конвекции, но условие адиабатичности нарушается;
- зависимость давления насыщенного пара вещества атмосферы от температуры хорошо описывается соотношением Клапейрона–Клаузиса $p_{\text{н}}(T) = p_{\text{н}}(T_0) \cdot \exp\left(\frac{\mathrm{M}r}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right)$, в котором удельную теплоту парообразова-

ния $r \approx 154$ кДж/кг можно считать не зависящей от температуры, а универсальная газовая постоянная $R \approx 8{,}31$ Дж/(моль · К).

Используя те же предположения, постройте свою аналогичную модель и получите формулы, описывающие зависимости температуры и давления пара от высоты над поверхностью океана. Определите диапазон высот, в котором пар в атмосфере Термы не насыщен. Учтите, что в реалистичной модели вам понадобятся численные расчеты, и используйте для их проведения доступную вам вычислительную технику (например, удобно использовать возможности таблиц Excel). Что изменилось бы в строении атмосферы (укажите наиболее важное, по вашему мнению, качественное отличие), если бы при тех же температуре океана и силе тяжести веществом океана и атмосферы была бы обычная вода с $\mathrm{M} = 18$ г/моль и средней величиной $r \approx 2300$ кДж/кг?

3. Поездка по склону (16 баллов)

Еще в школе будущий доктор Сарториус увлеченно занимался конструированием. Както раз он построил самодвижущийся робот-наблюдатель. Корпус робота имел форму полусферы с глубоко утопленными внутрь четырьмя ведущими колесами (рис. 2). Колеса могли синхронно (т.е. так, что их плоскости оставались параллельны) поворачиваться в любом направлении. При движении по горизонтальной поверхности, на которой коэффициент трения между колесами и поверхностью $\mu = 0{,}6$, робот мог разогнаться до скорости $v = 5$ м/с и при этом его колеса проскальзывали. Может ли этот робот двигаться вдоль горизонтали по той же поверхности, наклоненной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту (рис. 3)? Найдите максимальную возможную скорость такого движения. Какой должна была быть угловая скорость вращения колес робота при таком движении с максимальной возможной скоростью, если радиус колес $r = 6$ см? Известно, что величина силы сопротивления воздуха для робота с хорошей точностью пропорциональна величине его скорости относительно воздуха (который можно считать неподвижным).

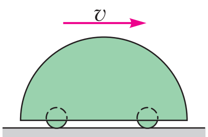


Рис. 2

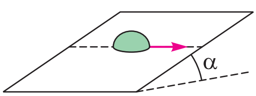


Рис. 3

4. Нелинейные колебания (16 баллов)

Однажды, еще студентом, будущий доктор Сарториус выполнял лабораторную работу по изучению нелинейных колебаний. В работе рассматривался колебательный контур, схема которого показана на рисунке 4. Источник имел ЭДС $\mathcal{E} = 24$ В, а катушка имела индуктивность $L = 0{,}05$ Гн. Сопротивление всех элементов контура очень мало, и

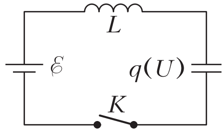


Рис. 4

потерями на выделяющееся тепло на изучаемых отрезках времени можно пренебречь. Вместо обычного конденсатора в контур был включен *вариконд* – конденсатор с переменной емкостью. Свойства такого конденсатора обычно задают КВХ (кулон-вольтной характеристикой), и для конденсатора в контуре КВХ с хорошей точностью описывается выражением $q(U) = \alpha\sqrt{U}$, причем $\alpha = \dfrac{\tau^2\sqrt{\mathcal{E}}}{2L}$, где $\tau = 2$ мс. Изначально конденсатор разряжен, и колебания запускаются замыканием ключа. Определите амплитуды колебаний напряжения на вариконде и силы тока в катушке. Найдите период колебаний в мс, с точностью до сотых.

Указание. Считайте известной константой

$$\beta = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} \approx 1{,}311.$$

7, 8 и 9 классы

1. Куда дует ветер (12 баллов)

Теплоход двигался по морю, держа курс строго на север. При этом «хвост» дыма от его трубы вытянулся вдоль прямой линии, идущей от теплохода строго на юго-восток. Когда теплоход изменил свой курс, повернув на угол $\alpha = 30°$ к востоку, то линия дыма после поворота стала уходить от теплохода на юг. Отметим, что ветер не изменялся в течение всего времени наблюдений. Также постоянной оставалась и величина скорости теплохода. Определите направление ветра. Во сколько раз величина скорости ветра отличается от величины скорости теплохода?

2. До краев (15 баллов)

С помощью системы блоков над большой открытой сверху емкостью с водой подвешены три ледяных брикета и небольшой груз массой $m = 50$ г (рис. 5). Изначально систе-

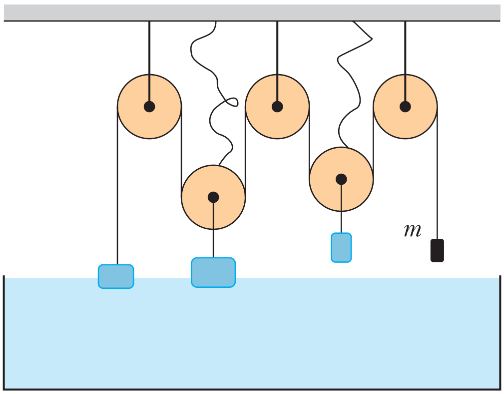


Рис. 5

ма находится в равновесии, причем два брикета плавают в воде, а третий висит над поверхностью воды, как и груз. В этом положении вода заполняет сосуд по края. Известно, что груз изготовлен из сплава, плотность которого в $n = 5$ раз больше плотности воды. Все нити в системе можно считать невесомыми и нерастяжимыми, все блоки невесомые и не имеют трения в осях. Подвижные блоки «пристрахованы» невесомыми нитями, которые не позволяют этим блокам опуститься в сосуд даже при полной разгрузке системы блоков. Далее система медленно прогревается, и весь лед постепенно тает, груз медленно опускается в воду (брызг или волн, бегущих по поверхности воды, при этом не возникает). Выливающаяся через край сосуда вода покидает систему и больше не оказывает влияния на нее. Найдите массу воды, которая выльется из сосуда за все время таяния льда.

3. Управляемый нагрев (24 балла)

Лабораторная электроплитка работает от источника постоянного напряжения. Регулировка мощности плитки производится с помощью регулятора напряжения источника – на панели источника есть регулятор и цифровой датчик выходного напряжения, причем максимальное возможное напряжение равно $U_m = 200$ В. Известно, что сопротивление спирали плитки довольно существенно зависит от ее температуры. Было установлено, что при выходном напряжении источника $U_1 = 100$ В выделяемая плиткой в установившемся режиме тепловая мощность равна $P_1 = 854$ Вт. При повышении выходного напряжения до $U_2 = 150$ В эта мощность увеличивается до $P_2 = 1869$ Вт. Какова максимальная возможная мощность тепловыделения этой плитки в установившемся режиме? Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь по сравнению с сопротивлением спирали плитки. Можно также считать, что поток тепла от спирали плитки с хорошей точностью пропорционален разности температур спирали и окружающей среды, которая практически неизменна.

4. Замечательная кривая (24 балла)

Однажды некий девятиклассник, прочитав статью «Замечательные кривые», решил построить одну и них. Закрепив на горизонтальном листе шестеренку радиусом $R = 6$ см с мелкими зубчиками, он с помощью электромотора и специального привода стал прокатывать по ней шестеренку вдвое меньшего радиуса $r = 3$ см с постоянной угловой скоростью вращения оси подвижной шестеренки вокруг неподвижной, равной $\omega = 5\ \text{с}^{-1}$. При этом специальная меленькая метка на краю одного из зубчиков «рисовала» на листе свою траекторию. Изобразите эту траекторию. Определите величины скорости и ускорения метки в тот момент, когда она находится на максимальном расстоянии от оси неподвижной шестеренки (рис. 6). В дополнение найдите величины скоростей и ускорений, а также радиусы кривизны траектории метки в точке, соответствующей положению подвижной шестеренки, в котором направление на ее ось от оси неподвижной повернулось на угол $\alpha = 60°$ от положения с максимальным удалением метки.

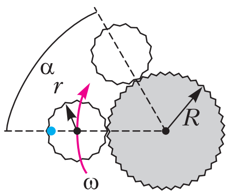


Рис. 6

Заключительный этап

Задания заключительного этапа олимпиады – задания высокого уровня сложности по основным темам школьной программы (механика, молекулярная физика, электродинамика и – для старших классов – оптика). Каждое задание состоит из предварительного вопроса, тестирующего понимание физических процессов и знание принципов их теоретического описания, и основной задачи. Максимальная оценка за вопрос 5 баллов, за задачу 20 баллов.

10 и 11 классы

Задание 1

Вопрос. Гантель из двух маленьких шариков, соединенных прямым жестким стержнем длиной $L = 60$ см, скользит по ровной поверхности. В некоторый момент времени один из шариков движется со скоростью $v = 1{,}5$ м/с под углом 60° к стержню, а скорость другого направлена под углом 30° к стержню (рис. 7). Найдите угловую скорость вращения гантели в этот момент времени.

Рис. 7

Задача. Кот Леопольд добрался до середины длинной лестницы, один из концов которой опирался о горизонтальный пол, а другой – о стену, составляющую с полом прямой двугранный угол, и остановился передохнуть. В этот момент мыши потащили нижний конец лестницы от стены с постоянным ускорением a_0. Найдите скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ кота Леопольда в момент времени $t = \sqrt{\dfrac{L}{2a_0}}$ (время отсчитывается от начала движения лестницы, L – длина лестницы), когда лестница проходила положение, в котором она составляла угол $\alpha = 45°$ с полом.

Задание 2

Вопрос. Температура с точки зрения молекулярно-кинетической теории. Абсолютная шкала температур.

Задача. Постоянное количество гелия участвует в процессе, диаграмма которого в координатах плотность газа – температура изображается участком прямой (рис. 8). Во сколько раз максимальное давление гелия в этом процессе больше минимального?

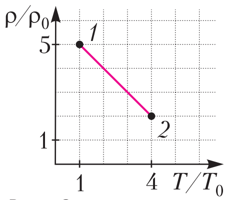


Рис. 8

Задание 3

Вопрос. Какой будет сила тока, текущего через диод, ВАХ (вольт-амперная характеристика) которого изображена на рисунке 9, если его подключить к источнику с ЭДС 4 В и внутренним сопротивлением 4 Ом?

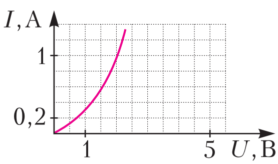


Рис. 9

Задача. На рисунке 10 показана схема с диодом, ВАХ которого в открытом состоянии изображена на рисунке 9. У лампы ВАХ описывается выражением $I = I_0\sqrt{\dfrac{U}{\mathscr{E}}}$, где $I_0 = 0{,}5$ А. Внутренние сопротивления обоих источников пренебрежимо малы, $\mathscr{E} = 5$ В, сопротивление резистора $R = 20$ Ом. Найдите мощность, потребляемую диодом.

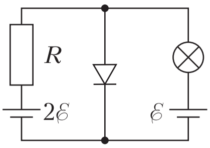


Рис. 10

Задание 4

Вопрос. Как изменится, по сравнению со значением в воздухе, оптическая сила тонкой линзы, если погрузить ее в прозрачную жидкость, показатель преломления которой больше, чем у воздуха?

Задача. Тонкая плосковыпуклая линза немного погружена в воду своей горизонтальной плоской стороной (выпуклая поверхность линзы находится в воздухе). На линзу падает сверху узкий вертикальный пучок света, ось которого проходит точно через вершину выпуклой поверхности. Этот пучок фокусируется в воде на глубине $h = 20$ см. Оптическая сила линзы в воздухе $D = 7$ дптр. Найдите показатель преломления воды.

7, 8 и 9 классы

Задание 1

Вопрос. Рассмотрите разгон по горизонтальной прямой дороге автомобиля с нейтральным аэродинамическим профилем (при его движении сила, действующая на него со стороны воздуха, не имеет ни подъемной, ни прижимающей к дороге компоненты), для которого сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату его скорости относительно воздуха. В безветренную погоду он может разогнаться до скорости 100 км/ч, и на такой скорости колеса автомобиля уже проскальзывают. До какой скорости сможет разогнаться этот автомобиль, если мощность его двигателя увеличить на 20% (при тех же форме и размерах корпуса и массе автомобиля)? Считайте, что КПД двигателя от скорости не зависит.

Задача. У модели самолета винт установлен на носу корпуса и сила его тяги направлена «вперед» вдоль корпуса. Силу взаимодействия корпуса модели с воздухом при движении со скоростью, направленной вдоль корпуса, можно разложить на две компоненты: силу лобового сопротивления, направленную против скорости модели, и подъемную силу крыльев, направленную «вверх» перпендикулярно плоскости крыльев (она всегда параллельна оси корпуса). Величины обеих компонент пропорциональны квадрату скорости самолета относительно воздуха (коэффициенты пропорциональности – постоянные величины для данной конструкции модели). Для горизонтального полета по прямой в безветренную погоду модели необходимо двигаться со скоростью $v_0 = 10$ м/с, и при этом двигатель модели должен развивать мощность, равную 51,2% от максимальной. Найдите радиус окружности, по которой будет лететь эта модель в горизонтальной плоскости при максимальной мощности двигателя (в отсутствие ветра). Ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с^2.

Задание 2

Вопрос. Как изменится температура плавления льда, если добавить к нему поваренной соли? Приведите пример известного вам явления, подтверждающего ваш ответ.

Задача. В три одинаковых стакана с толстыми стенками, в которых налиты одинаковые количества горячей воды, после установления равновесия бросают одинаковые кубики мокрого льда (т.е. покрытые очень тонким слоем воды, находящейся в равновесии со льдом). В первый стакан бросили один кубик, и после повторного установления равновесия температура в нем оказалась равной $t_1 = 42{,}5$ °С. Во второй стакан бросили два кубика, и установившаяся температура воды в этом стакане $t_2 = 25{,}0$ °С. Какой будет установившаяся температура воды в третьем стакане, в который бросили три кубика? Изначально стаканы имели комнатную температуру. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг · °С), удельная теплота плавления льда в кубиках $\lambda = 336$ кДж/кг. Теплообменом с окружающими телами и испарением воды пренебречь.

Задание 3

Вопрос. Сформулируйте закон Джоуля–Ленца.

Задача. Три одинаковых нагревательных элемента Н подключены к аккумулятору вместе с сигнальной лампочкой и четырьмя

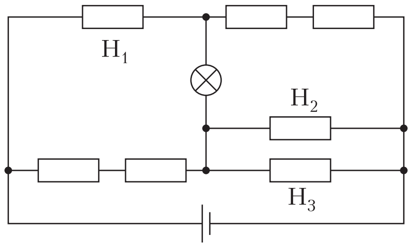


Рис. 11

одинаковыми резисторами по схеме, показанной на рисунке 11. Известно, что сопротивление нагревательного элемента в $n = 5$ раз больше сопротивления резистора. Нагревательный элемент H_1 потребляет мощность $P_1 = 972$ Вт. Каковы мощности потребления элементов H_2 и H_3?

Задание 4

Вопрос. Опишите различия между силами трения покоя и трения скольжения.

Задача. Одна из двух одинаковых небольших тяжелых шайб прикреплена легкой нерастяжимой нитью к оси подвижного блока, другая – к концу еще одной легкой нерастяжимой нити, которая перекинута через два подвижных блока (рис. 12) и прикреплена к неподвижной стенке. Обе шайбы находятся на горизонтальной поверхности таким образом, что участки нитей, не лежащие на блоках, в натянутом состоянии параллельны. Блоки практически невесомы, нить скользит по ним без трения. Сначала система покоилась и центры шайб находились на одной прямой, перпендикулярной нитям. Затем, удерживая левую шайбу, правый блок потянули так, что далее он двигался с постоянной скоростью $u = 1{,}6$ м/с, и практически сразу после этого левую шайбу отпустили. Блок движется параллельно нитям, коэффициент трения каждой из шайб о поверхность $\mu = 0{,}3$. Через какое время после начала движения центры шайб вновь окажутся на одной прямой, перпендикулярной нитям? Считайте, что блоки и шайбы не касаются друг друга. Ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с^2.

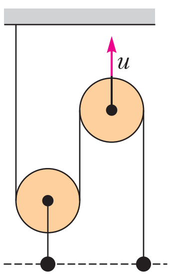


Рис. 12

Публикацию подготовил К.Парфенов

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №5)

1. См. рис. 1.

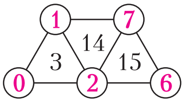


Рис. 1

Комментарий. Найти этот ответ и заодно доказать его единственность можно так. Число 3 не может быть получено как произведение трех различных чисел, значит, оно получено как сумма: $0+1+2$. Тогда число 14 уже не может быть получено как сумма: две «общие» с числом 3 цифры в сумме дадут максимум 3, и еще одной цифры, чтобы набрать 14, не хватит. Значит, 14 получено как произведение: $1 \cdot 2 \cdot 7$.

Тогда число 15 получено с использованием 7 и 1 или 7 и 2 – в частности, как сумма. Вариант 7 и 1 невозможен: третьей цифрой должна быть $15-1-7=7$, а она уже использована. Значит, 15 составлено как $2+7+6$.

2. Независимо от того, как сидели лягушки вначале, после первого прыжка они будут на одной прямой, причем первая (А) посередине (рис.2).

Теперь прыгает вторая лягушка (Б). Она пролетает расстояние до А и еще половину этого расстояния, что по условию составляет 60 см (рис.3). Значит, между нею и А (равно как и между А и В) было 40 см.

Итак, теперь между А и В 40 см, ровно посередине между ними находится Б, а очередь прыгать за В. Она пролетит 20 см и еще половину этого расстояния, т.е. всего 30 см (рис.4).

3. Сумма всех десяти цифр равна 45. Поэтому, назвав все десять букв, мы узнаем, какими буквами зашифрованы цифры 4 и 5. Исключив эти буквы и спросив про сумму остальных восьми, мы узнаем, как зашифрованы цифры 3 и 6. В каждом следующем вопросе так же будем спрашивать про сумму еще не расшифрованных букв. В результате после третьего вопроса узнаем, какими буквами зашифрованы 2 и 7, после четвертого – 1 и 8 и, наконец, после пятого узнаем, какой из оставшихся букв зашифрована цифра 9, а какой 0.

Рис. 2

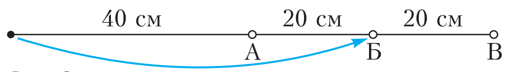


Рис. 3

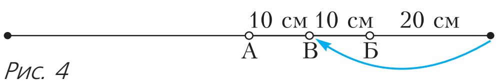


Рис. 4

4. 60° и 130° или 140° и 50°.

Первое решение. Проведем отрезок BE так, что точка E лежит на AD, а угол ABE равен 40° (рис.5). Тогда $\angle AEB = 180° - 70° - 40° = 70°$, следовательно, треугольник ABE равнобедренный, $AB = BE$. Рассмотрим треугольник BCE: $\angle CBE = 100° - 40° = 60°$ и $BE = AB = BC$, значит, треугольник BCE равносторонний, и $CE = BC = AB$. А это означает, что четырехугольник $ABCE$ подходит под условие, один из возможных ответов – угол C такого четырехугольника равен 60° и оставшийся угол равен $\angle AEB + \angle BEC = 70° + 60° = 130°$.

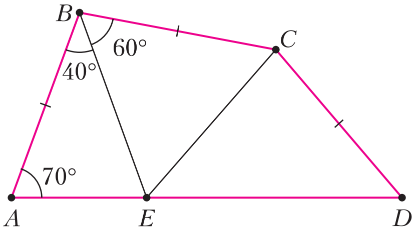


Рис. 5

Заметим, что для любой точки D' на отрезке AE справедливо $CD' > CE = BC$ (так как CD' – наибольшая сторона в тупоугольном треугольнике CED'). Пусть точка D лежит на луче AE за точкой E, $CD = BC = CE$. Тогда $\angle CED = 180° - \angle AEB - \angle BEC = 180° - 70° - 60° = 50°$, и поскольку $CE = CD$, то $\angle CDE = \angle CED = 50°$, а значит, $\angle ECD = 180° - 2 \cdot 50° = 80°$ и $\angle BCD = 60° + 80° = 140°$.

Второе решение. В равнобедренном треугольнике ABC угол ABC равен 100°, значит, $\angle BAC = \angle ACB = 40°$, и тогда $\angle CAD = 70° - 40° = 30°$. Отметим середину M отрезка AC и основание P перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AD (рис.6). Тогда в прямоугольном треугольнике ACP против угла в 30° лежит катет CP, значит, $CP = \frac{1}{2} AC = CM$. Следовательно, прямоугольные треугольники BCM и DCP равны по

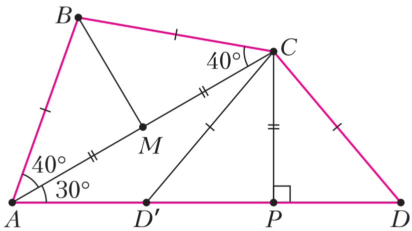


Рис. 6

катету и гипотенузе, значит, $\angle CDP = \angle MBC = 50°$, т.е. в зависимости от того, лежит точка P внутри отрезка AD или снаружи, либо угол ADC, либо смежный с ним равен 50°. Соответственно, в первом случае $\angle ADC = 50°$ и $\angle BCD = 140°$, а во втором случае $\angle AD'C = 130°$ и $\angle BCD' = 60°$.

Конкурс имени А.П.Савина

(см. «Квант» №4)

29. Раскрасим плоскость, как показано на рисунке 7. Любой квадрат 5×5 (например, выделенный) будет раскрашен как надо. А еще можно вырезать из этого рисунка любой квадрат 4×4 и, считая, что он сделан из тянущегося материала, превратить его сначала в трубочку, состыковав две противоположные стороны, а потом состыковать концы трубочки (не перекручивая ее). Получится бублик (тор), разделенный на 16 клеток, в котором любое поле 2×2 раскрашено по-своему!

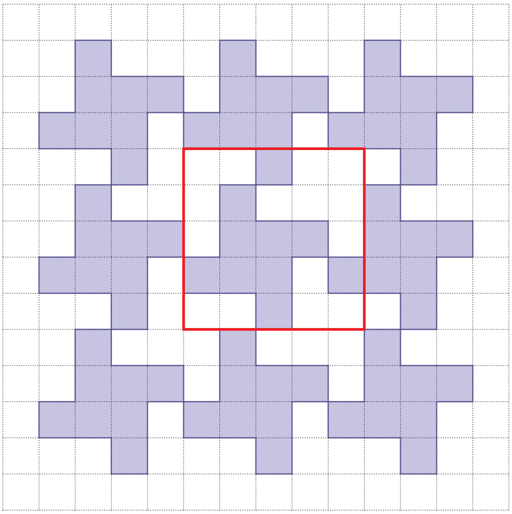


Рис. 7

30. Могло.

Разделим треугольник на 16 равных равносторонних треугольников и проведем красные прямые, как показано на рисунке 8. Тогда все части состоят из 1, 2 или 4 маленьких треугольников.

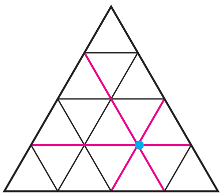


Рис. 8

31. $674(a+b)$.

Рассмотрим последовательность $d_n = c_n - an$. Заметим, что для нее выполняются правила, аналогичные правилам, задающим последовательность c_n, но с другими первыми членами:

$$d_1 = 0;\ d_2 = b - 2a = p;$$

$$d_{2n+1} = d_n + d_{n+1} \text{ при } n \ge 1;$$

$$d_{2n+2} = d_n + d_{n+2} \text{ при } n \ge 1.$$

Догадаться до правильной формулы для d_n можно, вручную найдя первый десяток членов последовательности d_n. Докажем, что последовательность, заданная правилом

$$e_n = p\left[\frac{n+1}{3}\right] \text{ при } n \ge 1,$$

удовлетворяет тем же условиям, что и последовательность d_n. Очевидно, что $e_1 = 0$ и $e_2 = p$. Покажем теперь, что $e_{2n+1} = e_n + e_{n+1}$. Для этого требуется доказать, что

$$\left[\frac{2n+2}{3}\right] = \left[\frac{n+1}{3}\right] + \left[\frac{n+2}{3}\right].$$

Используем то, что $x = [x] + \{x\}$:

$$\frac{2n+2}{3} - \left\{\frac{2n+2}{3}\right\} = \frac{n+1}{3} - \left\{\frac{n+1}{3}\right\} + \frac{n+2}{3} - \left\{\frac{n+2}{3}\right\},$$

$$\left\{\frac{n+1}{3}\right\} + \left\{\frac{n+2}{3}\right\} - \left\{\frac{2n+2}{3}\right\} = \frac{1}{3}.$$

Заметим, что это выражение зависит только от остатка при делении n на 3. Нетрудно все эти остатки перебрать. Например, при остатке 0 получим

$$\left\{\frac{0+1}{3}\right\} + \left\{\frac{0+2}{3}\right\} - \left\{\frac{0+2}{3}\right\} = \frac{1}{3}.$$

Равенства для других остатков читатель может проверить устно.

Аналогичным образом, для доказательства равенства $e_{2n+2} = e_n + e_{n+2}$ потребуется доказать равенство

$$\left\{\frac{n+1}{3}\right\} + \left\{\frac{n+3}{3}\right\} - \left\{\frac{2n+3}{3}\right\} = \frac{1}{3}.$$

Это снова можно сделать, рассмотрев все три возможных остатка. Опять же, оставим это в качестве упражнения в устном счете. Итак, последовательности d_n и e_n совпадают.

Осталось найти ответ:

$$c_{2022} = d_{2022} + 2022a = p\left[\frac{2023}{3}\right] + 2022a =$$

$$= (b - 2a)674 + 2022a = 674(a+b).$$

32. Да, можно.

Введем на $A_1B_1C_1$-решетке координаты так, что точки с целыми координатами будут узлами и точки будут иметь координаты $A_2(0;0)$, $B_2(a;b)$, $C_2(c;d)$, где a, b, c, d – целые. Так как A_2, B_2, C_2 не лежат на одной прямой, то $ad - bc \ne 0$.

Заметим, что $A_2B_2C_2$-решетка переходит в себя при сдвиге на вектор $\overrightarrow{A_2B_2}(a;b)$, а также на вектор $\overrightarrow{B_2A_2}(-a;-b)$, $\overrightarrow{A_2C_2}(c;d)$, $\overrightarrow{C_2A_2}(-c;-d)$, т.е. при любом из таких сдвигов каждый узел решетки переходит в другой узел этой решетки.

Сделаем d сдвигов на $(a;b)$ и b сдвигов на $(-c;-d)$. Это можно представить как один сдвиг на вектор $d(a;b)-b(c;d)=(ad-bc;0)$. При этом $A_2B_2C_2$-решетка перейдет в себя, а значит, узел $(0;0)$ перейдет в другой узел этой же решетки. Таким образом, $(ad-bc;\,0)$ – узел $A_2B_2C_2$ решетки.

Рассуждая аналогично, получим, что $a(c;d)-c(a;b)=(0;ad-bc)$ тоже является узлом этой решетки.

Итак, точки $(0;0)$, $(ad-bc;\,0)$, $(0;ad-bc)$ лежат в $A_2B_2C_2$-решетке и образуют треугольник, подобный треугольнику с вершинами $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$ с ненулевым коэффициентом $ad-bc$, т.е. подобный треугольнику $A_1B_1C_1$.

Игра в нетранзитивные кости

1. Кубик G побеждает и B и D. При этом, как нетрудно подсчитать, $p(G\succ B)=p(G\succ D)=5/9$.

2. Решение приведено в доказательстве теоремы 1.

3. Допустим, что все три вероятности больше чем $7/12=21/36$. Это значит, что при рассмотрении любых двух кубиков и всех возможных пар чисел на этих кубиках количество пар, в которых число с более сильного кубика превосходит число с более слабого кубика, должно быть не меньше 22.

Обозначим числа на кубиках $a_1\ge\ldots\ge a_6$, $b_1\ge\ldots\ldots\ge b_6$ и $c_1\ge\ldots\ge c_6$. Теперь рассмотрим произвольный индекс k от 1 до 6. Поскольку цепочка неравенств

$$a_k>b_k>c_k>a_k$$

невозможна, то по крайней мере для одного из трех сравнений $A\succ B$, $B\succ C$ и $C\succ A$ соответствующее неравенство неверно. Будем называть это «сбоем» этого сравнения в индексе k.

Поскольку каждый из шести сбоев – для $1\le k\le 6$ – происходит для одного из трех сравнений, то какие-то из этих сравнений имеют более одного сбоя. Давайте изучим, как это может случиться. Для этого составим матрицу M размером 6×6, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца (при $i\ne j$) запишем число m_{ij}, равное максимально возможному количеству верных неравенств для данного сравнения при условии одновременного наличия сбоев для обоих индексов i и j.

Путем несложного, хотя и занудного, подсчета мы получаем таблицу, в которой жирным шрифтом выделены значения 22 и выше. Теперь мы можем построить граф G с вершинами 1,…, 6, в

Таблица

	1	2	3	4	5	6
1	*	**25**	**22**	21	**22**	**25**
2	**25**	*	**22**	20	20	**22**
3	**22**	**22**	*	21	20	21
4	21	20	21	*	**22**	**22**
5	**22**	20	20	**22**	*	**25**
6	**25**	**22**	21	**22**	**25**	*

котором вершины i и j соединены только в том случае, если $m_{ij}\ge 22$ (рис. 9).

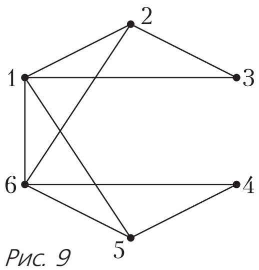


Рис. 9

Еще один, совсем нехитрый, перебор показывает, что три сбоя не могут приходиться на одно сравнение – в такой ситуации невозможно получить больше, чем 21 верное неравенство.

Следовательно, на каждое из трех сравнений должны приходиться ровно два сбоя, и при этом индексы этих сбоев должны быть смежными вершинами в графе G. Иными словами, мы должны найти три ребра в нашем графе, которые содержат все шесть вершин. Нетрудно видеть, что имеется лишь три варианта:

$$1-5,\quad 2-3,\quad 4-6,$$
$$2-6,\quad 1-3,\quad 4-5,$$
$$1-6,\quad 2-3,\quad 4-5.$$

С каждым из них можно разобраться по отдельности. Например, рассмотрим вариант [1–5, 2–3, 4–6]. Видно, что для каждого из трех сравнений число верных неравенств должно быть в точности 22. Тогда нетрудно убедиться в том, что в сравнении со сбоями 2–3 (без потери общности можно считать, что это $A\succ B$) второе число набора A обязательно должно быть больше, чем третье число набора B. Какие бы два сбоя ни имело сравнение $B\succ C$ (1–5 или 4–6), в любом случае третье число набора B обязано превосходить второе число набора C. Следовательно, второе число в A больше, чем второе число в C, а тогда сравнение $C\succ A$ должно иметь сбой в индексе 2, что невозможно.

Парадоксы теплообмена: невероятный теплообменник

1. Из данной эффективности теплообменника прямого тока мы можем добыть основной параметр конструкции: $l/l_0=\ln 10$. Подставляя это значение в формулу эффективности теплообменника обратного тока, получаем $\eta_{об}=53{,}5\%$.

2. Время теплообмена возрастет в два раза, поэтому эффективности также возрастут и станут равными $\eta'_{\text{пр}} = 49,5\%$ и $\eta'_{\text{об}} = 69,7\%$.

3. Температура горячей воды на выходе из теплообменника обратного тока равна $T_{\text{г}} = \dfrac{1}{1+l/l_r}T_0$, где $l_r = 2l_0$. Отсюда получаем $l = 18l_0$.

4. Мысленно разрежем теплообменник обратного тока плоскостью, проходящей на расстоянии x от его левого края. Найдем температуру горячей воды в этом сечении. Правая часть теплообменника также является теплообменником длины $l_2 = l - x$, поэтому температура горячей воды на его входе связана с температурой на выходе уравнением $\Delta T = T_{\text{г}}(x)\xi_2$, где $\xi_2 = \dfrac{l_r}{l_r + l_2}$ – эффективность правого теплообменника. Отсюда для температуры горячей воды в произвольной точке получаем

$$T_{\text{г}}(x) = \frac{\Delta T}{\xi_2} = \frac{\Delta T\left(l_r + l - x\right)}{l_r}.$$

Это выражение показывает, что температура горячей воды, а следовательно и холодной воды, меняется по длине теплообменника по линейному закону.

5. После контакта с последним β-стаканом α-стакан выйдет из зоны обмена с температурой $T_0/(n+1)$, а β-стакан – с температурой $T_0 n/(n+1)$.

Олимпиада «Покори Воробьевы горы!»

Физика

Отборочный этап

Творческое задание

10 и 11 классы

1. Величина силы, действующей на шестеренку со стороны букашки, в положении максимального удаления $F = m\sqrt{g^2 + 36\omega^4R^2} \approx 4,64$ мН, в верхнем положении $F = m\sqrt{\left(g - 2\omega^2R\right)^2 + 16\omega^4R^2} \approx 2,9$ мН, в нижнем $F = m\sqrt{\left(g + 2\omega^2R\right)^2 + 16\omega^4R^2} \approx 4,15$ мН, где $\omega = 2\pi/T$. Радиус кривизны траектории в положении максимального удаления $R_{\text{к}} = \dfrac{8}{3}R \approx 26,7$ см, в верхнем и нижнем положениях радиусы одинаковы и равны $R_{\text{к}} = \dfrac{8}{3\sqrt{2}}R \approx 18,9$ см.

2. Начнем с того, что изучим квазиравновесные состояния атмосферы. Пусть $T(z)$ и $p(z)$ – это функции, описывающие зависимости температуры и давления пара от высоты z над поверхностью океана. Условие механического равновесия для бесконечно малой порции газа высотой dz с площадью горизонтального сечения S имеет вид

$$\rho S dz g = \left(p(z) - p(z+dz)\right)S, \text{ или } \frac{dp}{dz} = -\rho g.$$

Так как пар по условию похож на идеальный газ, то его плотность ρ связана с давлением соотношением $\rho = \dfrac{\mathrm{M}p}{RT}$. Таким образом,

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\mathrm{M}gp}{RT}.$$

Далее нам нужно рассмотреть две возможности.

1) Пар не насыщен. Согласно модели Сарториуса, в соответствующей области медленные перемещения пара по вертикали можно считать адиабатическими, поэтому $p = \text{const}\cdot T^{\nu}$, где показатель степени выражается через молярные теплоемкости в изобарном и изохорном процессах:

$$\nu = \frac{C_p}{C_p - C_V} = \frac{C_p}{R} = 4$$

(здесь $C_p - C_V = R$ и $C_p = 4R$). Поэтому

$$\frac{dp}{dz} = \frac{C_p}{R}\frac{p}{T}\frac{dT}{dz} = 4\frac{p}{T}\frac{dT}{dz} = -\frac{\mathrm{M}gp}{RT},$$

и в этой части атмосферы температура является линейной функцией высоты:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\mathrm{M}g}{4R},\ T(z) = T(z_0) - \frac{\mathrm{M}g}{4R}(z - z_0),$$

где z_0 – нижняя граница слоя ненасыщенного пара. При этом

$$p(z) = p(z_0)\left(\frac{T(z)}{T(z_0)}\right)^4 = p(z_0)\left(1 - \frac{\mathrm{M}g}{4RT(z_0)}(z - z_0)\right)^4.$$

2) Пар – насыщенный. В этом случае условие адиабатичности не выполняется, но давление однозначно связано с температурой:

$$p_{\text{н}}(T) = p_{\text{н}}(T_0)\cdot\exp\left(\frac{\mathrm{M}r}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right).$$

Уравнение механического равновесия превращается в такое:

$$\frac{dp}{dz} = p_{\text{н}}(T_0)\cdot\frac{\mathrm{M}r}{RT^2}\cdot\exp\left(\frac{\mathrm{M}r}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right)\frac{dT}{dz} =$$

$$= \frac{\mathrm{M}r}{RT}\frac{p}{T}\frac{dT}{dz} = -\frac{\mathrm{M}gp}{RT},\ \frac{dT}{dz} = -\frac{g}{r}T.$$

Таким образом,

$$\frac{dT}{T} = d(\ln T) = -\frac{g}{r}dz,$$

т.е. выше нижней границы области насыщенного пара z_1 закон изменения температуры экспоненциальный:

$$T(z) = T(z_1)\cdot \exp\left(-\frac{g}{r}(z - z_1)\right),$$

а давление определяется соотношением Клапейрона–Клаузиса.

Ясно, что на уровне океана $(z = 0)$ пар насыщенный. Выясним, что будет происходить на небольших высотах. Пар станет ненасыщенным, если его давление будет падать с высотой быстрее, чем давление насыщенного пара, определяемое его температурой. Предположим, что пар на небольших высотах ненасыщенный. Тогда его температура $T(z) = T_0\left(1 - \frac{z}{H}\right)$, а давление $p(z) = p_{\text{н}}(T_0)\left(1 - \frac{z}{H}\right)^4$, где $H = \frac{4RT_0}{\text{M}g} \approx 12{,}31$ км. Если предположение справедливо, то относительная влажность

$$\varphi(z) = \frac{p(z)}{p_{\text{н}}(z)} = \left(1 - \frac{z}{H}\right)^4 \cdot \exp\left(\frac{\text{M}r}{R}\left(\frac{1}{T(z)} - \frac{1}{T_0}\right)\right)$$

в слое ненасыщенного пара должна быть меньше 1. С учетом формулы для $T(z)$ это требование приводится к виду

$$\left(1 - \frac{z}{H}\right)^4 \cdot \exp\left(\frac{\text{M}r}{RT_0}\frac{z}{H - z}\right) < 1.$$

Используя численное значение $\frac{\text{M}r}{RT_0} \approx 2{,}502$, для переменной $x = \frac{z}{H}$ имеем

$$(1 - x)^4 \cdot \exp\left(\frac{2{,}5x}{1 - x}\right) < 1.$$

Это трансцендентное неравенство лучше анализировать численно – например, посчитать значения функции в левой части при разных x (это легко можно сделать в таблице Excel) и особо выделить значение переменной, при которой функция достигает значение единицы: $x = 0{,}5832$. Как видно, слой с ненасыщенным паром существует – он простирается от поверхности океана $(z_0 = 0)$ до высоты $z_1 \approx 0{,}5832H \approx 7{,}18$ км. При бóльших высотах температура убывает экспоненциально:

$$T(z) \approx 167\ \text{К} \cdot \exp\left(-\frac{z - 7{,}18\ \text{км}}{7{,}7\ \text{км}}\right),$$

а пар остается насыщенным. Отметим, что реалистичность модели Сарториуса означает, что вплоть до температур порядка 150 К и (возможно) даже ниже вещество океана Термы еще не замерзает – для него еще справедливо уравнение связи давления с температурой, соответствующее кривой фазового равновесия пар–жидкость. Если бы вместо вещества океана Термы была обычная вода при тех же условиях, то для нее $\frac{\text{M}r}{RT_0} \approx 12{,}45$, а условие для выделения слоя ненасыщенного пара имело бы вид

$$(1 - x)^4 \cdot \exp\left(\frac{12{,}45x}{1 - x}\right) < 1.$$

Это неравенство в нужном диапазоне значений $0 < x < 1$ не имеет решений. Кроме того, вычислив производную $\varphi(x)$ в нуле: $\varphi'_x(0) = \frac{\text{M}r}{RT_0} - 4$, можно заметить, что при $\frac{\text{M}r}{RT_0} \geq 4$ относительная влажность не убывает при подъеме от поверхности океана. Значит, в случае воды вся атмосфера в рамках модели Сарториуса состояла бы из насыщенного пара.

3. Робот может двигаться по наклонной поверхности горизонтально, максимальная возможная скорость такого движения $v_m \approx 1{,}18$ м/с, для этого угловая скорость вращения его колес должна быть больше $19{,}64\ \text{с}^{-1}$.

4. Рассмотрим процесс зарядки конденсатора после замыкания ключа. За счет работы источника будут увеличиваться энергия магнитного поля в катушке и энергия электрического поля в конденсаторе. Запишем закон сохранения энергии для момента времени, к которому заряд конденсатора увеличился до q:

$$\mathcal{E}q = \frac{LI^2}{2} + W_C(q).$$

Здесь $I = \frac{dq}{dt}$ – сила тока в катушке, а энергия поля в конденсаторе равна

$$W_C(q) = \int_0^q U(q')\,dq' = \frac{1}{\alpha^2}\int_0^q q'^2\,dq' = \frac{q^3}{3\alpha^2}.$$

Следовательно, изменение силы тока в процессе зарядки описывается формулой

$$I^2(q) = \frac{2}{L}q\left(\mathcal{E} - \frac{q^2}{3\alpha^2}\right).$$

Сила тока равна нулю в начальный момент и в момент достижения максимальной величины заряда, поэтому $q_m = \alpha\sqrt{3\mathcal{E}}$. Эта величина заряда соответствует максимальному напряжению на конденсаторе $U_m = 3\mathcal{E}$. Максимальная величина силы тока в процессе зарядки находится по максимуму функции $I^2(q)$. Как видно, он достигается при $q_0 = \alpha\sqrt{\mathcal{E}}$, и

$$I_m = 2\sqrt{\frac{\alpha}{3L}}\mathcal{E}^{3/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\tau\mathcal{E}}{L}.$$

После окончания зарядки конденсатора ток обращается в ноль, но контур не переходит в стационарное состояние, так как теперь напряжение на конденсаторе больше (в три раза) ЭДС источника, и конденсатор разряжается через источник. Закон сохранения энергии для процесса разрядки

$$\frac{q_m^3}{3\alpha^2} + \mathcal{E}(q - q_m) = \mathcal{E}q = \frac{LI^2}{2} + \frac{q^3}{3\alpha^2}$$

демонстрирует нам, что связь величины силы тока с зарядом остается прежней, только изменяется знак $I = \frac{dq}{dt}$. Поэтому заряд конденсатора убывает до нуля симметричным по сравнению с процессом зарядки образом, и в конце напряжение на конденсаторе и сила тока в катушке опять становятся нулевыми. Схема вернулась в начальное состояние, и начинается новый период колебаний. Таким образом, напряжение на конденсаторе колеблется между значениями $U_{\text{н}} = 0$ и $U_m = 3\mathcal{E}$, а сила тока – между $+I_m = +\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\tau\mathcal{E}}{L}$ и $-I_m = -\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\tau\mathcal{E}}{L}$. Равновесное состояние схемы соответствует $U_0 = \mathcal{E}$ и $I_0 = 0$. Поэтому амплитуды напряжения и силы тока равны

$$U_{\text{а}} = 2\mathcal{E} = 48\ \text{В и}\ I_{\text{а}} = I_m = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\tau\mathcal{E}}{L} \approx 0{,}784\ \text{А}.$$

Ясно, что время зарядки конденсатора составляет половину от периода колебаний и его можно найти, пользуясь законом изменения силы тока

$$\frac{dq}{dt} = I = \sqrt{\frac{2}{L}q\left(\mathcal{E} - \frac{q^2}{3\alpha^2}\right)}.$$

Используя соотношение $q_m = \alpha\sqrt{3\mathcal{E}}$ и определение $\alpha = \frac{\tau^2\sqrt{\mathcal{E}}}{2L}$, получим

$$\frac{dq}{dt} = \frac{q_m}{\tau}\sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{q}{q_m}\left(1 - \frac{q^2}{q_m^2}\right)},\ \text{или}$$

$$dt = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}\tau\frac{dx}{\sqrt{x\left(1 - x^2\right)}},\ \text{где}\ x = \frac{q}{q_m}.$$

За половину периода x изменяется от 0 до 1, т.е.

$$\frac{T}{2} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}\tau\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x\left(1 - x^2\right)}}.$$

Сделаем замену $x = y^2$ и найдем

$$T = 2\sqrt[4]{3}\tau\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1 - y^4}} = 2\sqrt[4]{3}\beta\tau \approx 6{,}9\ \text{мс}.$$

7, 8 и 9 классы

1. Обозначим величину скорости ветра символом u, а величину скорости теплохода – символом V. В первую очередь нужно отметить, что шлейф дыма вытягивается в направлении скорости ветра относительно теплохода, т.е. вдоль вектора $\vec{u} - \vec{V}$. Поэтому, построив примерную диаграмму (рис. 10,*а*) для первого случая (теплоход движется на север, шлейф вытягивается на юго-восток) и используя систему координат,

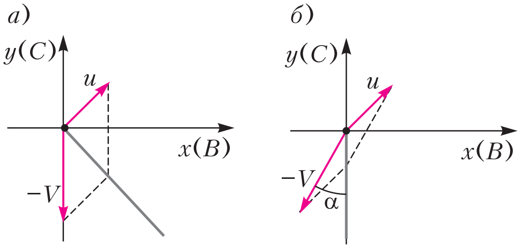


Рис. 10

в которой ось x направлена на восток, а ось y – на север, замечаем, что должно быть выполнено требование $u_y - V_y = -\left(u_x - V_x\right)$, т.е. $u_x + u_y = V$. Аналогичное построение (рис. 10,*б*) для второго случая (после поворота теплохода) демонстрирует нам, что должно выполняться требование $-V\sin\alpha + u_x = 0$. Из двух полученных уравнений находим компоненты скорости ветра $u_x = V\sin\alpha = \frac{V}{2}$ и $u_y = \ = V\left(1 - \sin\alpha\right) = \frac{V}{2}$. Это означает, что ветер дует с юго-запада и его скорость $u = \frac{V}{\sqrt{2}}$, т.е. она в $\sqrt{2}$ раз меньше скорости теплохода.

2. $\Delta M = \frac{5n + 1}{n}m = \frac{26}{5}m = 260$ г.

3. Пусть t_0 – температура окружающей среды, а коэффициент пропорциональности между потоком тепла от спирали плитки и разностью температур обозначим κ. Температура спирали t при заданном напряжении источника U определяется из условия теплового баланса

$$\frac{U^2}{R} = \kappa\left(t - t_0\right).$$

Зависимость сопротивления спирали от температуры описывается соотношением $R(t) = R_0\left(1 + \alpha t\right)$, где зависящая от материала спирали константа α называется температурным коэффициентом сопротивления. Выразим из этого соотношения $t = \frac{R - R_0}{\alpha R_0}$ и запишем уравнение баланса в виде

$$\frac{\alpha R_0}{\kappa}U^2 = R\left(R - R_0\left(1 + \alpha t_0\right)\right).$$

Для сокращения записей введем обозначение

$\overline{R} = R_0(1+\alpha t_0)$ и найдем зависимость сопротивления спирали от напряжения источника как положительный корень получившегося квадратного уравнения: $R = \frac{\overline{R}}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{4\alpha R_0}{\kappa \overline{R}^2}U^2}\right)$. Следовательно, зависимость мощности тепловыделения от напряжения источника описывается выражением $P = \frac{2U^2}{\overline{R}}\left(1+\sqrt{1+\frac{4\alpha R_0}{\kappa \overline{R}^2}U^2}\right)^{-1}$. Удобно ввести безразмерный параметр $x = \frac{U}{U_m}$, безразмерную константу $A = \frac{4\alpha R_0 U_m^2}{\kappa \overline{R}^2} = \frac{4\alpha U_m^2}{\kappa R_0(1+\alpha t_0)^2}$ – комбинацию параметров системы и константу размерности мощности $\overline{P} = \frac{2U_m^2}{\overline{R}} = \frac{2U_m^2}{R_0(1+\alpha t_0)}$. Тогда эта зависимость P от U переписывается в виде $P = \overline{P}\frac{x^2}{1+\sqrt{1+Ax^2}}$. Две точки этой зависимости нам известны: при $x_1 = \frac{1}{2}$ мощность $P_1 = \overline{P}\frac{1}{2\left(2+\sqrt{4+A}\right)}$, а при $x_2 = \frac{3}{4}$ мощность $P_2 = \overline{P}\frac{9}{4\left(4+\sqrt{16+9A}\right)}$. Разделив эти соотношения друг на друга, получаем уравнение для определения константы A:

$$\frac{9P_1}{4P_2} = \frac{183}{178} = \frac{1+\sqrt{1+9A/16}}{1+\sqrt{1+A/4}} \approx 1{,}028.$$

Это уравнение можно решить точно, но проще сразу заметить, что отличие от 1 здесь очень мало, и поэтому $\frac{1+\sqrt{1+9A/16}}{1+\sqrt{1+A/4}} \approx 1+\frac{5}{64}A$, т.е. $A \approx \frac{32}{89} \approx 0{,}36$. Теперь по любому из двух известных значений находим $\overline{P} \approx 4\left(1+\sqrt{1{,}09}\right)P_1 \approx 6982$ Вт. Итак,

$$P \approx \frac{6982x^2}{1+\sqrt{1+0{,}36x^2}} \text{ Вт},$$

максимальное значение достигается при $x=1$, т.е. $P_m \approx 3225$ Вт.

4. Траектория показана на рисунке 11,

$$v_m = 2\frac{n+1}{n}\omega R = 0{,}9 \text{ м/с, где } n = \frac{R}{r},$$

$$a_m = \frac{(n+1)(n+2)}{n}\omega^2 R = 9 \text{ м/с}^2,$$

$$v(\alpha) = 2\frac{n+1}{n}\omega R\left|\cos\frac{n\alpha}{2}\right| = 0{,}45 \text{ м/с},$$

$$a(\alpha) = 3\omega^2 R\sqrt{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\cos 2\alpha} = 5{,}95 \text{ м/с}^2,$$

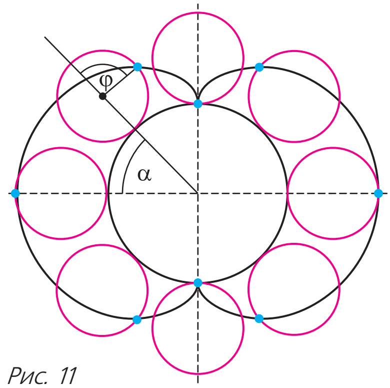


Рис. 11

$$R_{\text{к}} = \frac{4(n+1)}{n(n+2)}R\left|\cos\frac{n\alpha}{2}\right| = 4{,}5 \text{ см}.$$

Заключительный этап

10 и 11 классы

Задание 1

Вопрос. $\omega = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{v}{L} \approx 2{,}9 \text{ с}^{-1}$.

Задача. Скорость равна $v = \frac{1}{2}\sqrt{a_0 L}$ и направлена вдоль лестницы, ускорение равно $a = a_0\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$ и направлено под углом $\beta = \arcsin\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{8} = 22{,}5°$ к вертикали.

Задание 2

Вопрос. Температура есть мера средней кинетической энергии поступательного движения молекул. Абсолютный ноль интерпретируется как температура, при которой прекращается тепловое движение молекул.

Задача. $\frac{p_{\max}}{p_{\min}} = \frac{9}{5} = 1{,}8.$

Задание 3

Вопрос. $I_D \approx 0{,}6$ А.

Задача. $P_D \approx (1{,}43 \pm 0{,}02)$ Вт.

Задание 4

Вопрос. См. рис.12, где D_0 – оптическая сила линзы в воздухе.

Задача. $n \approx Dh = 1{,}4$.

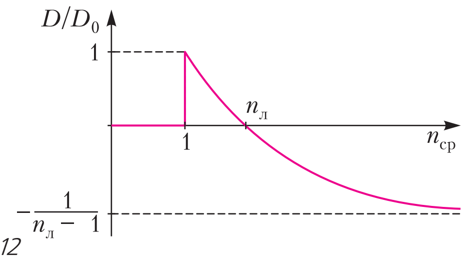


Рис. 12

7, 8 и 9 классы

Задание 1

Вопрос. Максимальная скорость практически не изменится при увеличении мощности, увеличится лишь угловая скорость вращения колес, что приведет к более сильному проскальзыванию и более интенсивному разогреву и износу шин.

Задача. $R = \frac{25}{3\sqrt{41}}\frac{v_0^2}{g} \approx 13$ м.

Задание 2

Вопрос. Температура плавления льда понизится. Пример – использование соли (и других веществ, способных к диссоциации на ионы в воде) в качестве антиобледенителей, которыми посыпают дороги и тротуары зимой, лед на дорогах после такого посыпания тает даже при температуре ниже 0 °С .

Задача. $t_3 = \frac{ct_1t_2 + \lambda(2t_2 - t_1)}{\lambda + c(2t_1 - t_2)} = 11\frac{7}{8}$ °С $= 11{,}875$ °С.

Задание 3

Вопрос. Мощность, потребляемая элементом электрической цепи, через который течет ток силой I при напряжении на этом элементе U, равна $P = UI$.

Задача. $P_2 = P_3 = \left(\frac{n+2}{n+4}\right)^2 P_1 = 588$ Вт.

Задание 4

Вопрос. Сила трения покоя препятствует проскальзыванию поверхностей, она всегда направлена против силы, пытающейся вызвать скольжение, и равна этой силе по величине. При этом сила трения покоя не может быть произвольной – она принимает значения в интервале от нуля до некоторого максимального значения, зависящего от свойств поверхностей и силы прижатия их друг к другу. Сила трения скольжения направлена против скорости относительного движения поверхностей (она препятствует скольжению, которое уже существует). Величина силы трения скольжения в некотором интервале скоростей относительного движения слабо зависит от этой скорости и вычисляется по формуле $F_{тр} = \mu N$, где N – сила нормальной реакции, а μ – коэффициент трения, который зависит от свойств поверхностей. Обычно считается, что максимальная величина силы трения покоя примерно совпадает с величиной силы трения скольжения, но на самом деле для большинства поверхностей она несколько больше («эффект застоя»), поэтому в области малых скоростей в зависимости величины силы трения скольжения от скорости бывает участок, на котором сила трения скольжения падает с ростом скорости. При больших относительных скоростях поверхности могут начать разрушаться и даже плавиться (как лед под скользящим лезвием конька), и тогда сила трения может существенно измениться – как в сторону уменьшения, так и в сторону увеличения.

Задача. $t = \frac{15u}{2\mu g} \approx 4$ с.

XLIII Турнир городов

(см. «Квант» № 5)

Задачи весеннего тура

Базовый вариант

8–9 классы

1. Собаки вернулись одновременно.

Первое решение. Пусть L – расстояние между людьми в момент, когда они отпустили собак, v и V – скорости людей ($V > v$), u – скорость собак. Собака медленного хозяина добежит до быстрого за время $\frac{L}{u+V}$ и за это время убежит от своего хозяина на расстояние $\frac{L(u-v)}{u+V}$, а вернется к нему за время $\frac{L(u-v)}{(u+V)(u+v)}$. Общее время ее «путешествия» равно $\frac{L}{u+V} + \frac{L(u-v)}{(u+V)(u+v)} = \frac{2Lu}{(u+V)(u+v)}$. Тот же результат аналогично получится для другой собаки.

Второе решение. На рисунке 13 по горизонтали откладывается расстояние вдоль дорожки, а по вертикали – время. Точки A и B соответствуют положениям хозяев (и их собак) в начальный момент, люди движутся в пространстве-времени по лучам AC и BC, а собаки – по ломаным APR и BQS. Поскольку скорости собак одинаковы, то $AP \parallel QS$ и $BQ \parallel PR$. По теореме Фалеса $CQ : CA = CS : CP$ и $CR : CQ = CP : CB$, откуда $CR : CA = CS : CB$. Следовательно, $RS \parallel AB$, что и означает одновременность событий R и S.

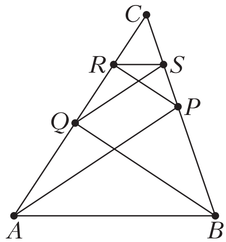


Рис. 13

2. Верно.

Запишем исходное число в виде $2^k m$, где m нечетно («вынесем все двойки»). После $k+1$ умножений на 5 мы получим число, оканчивающееся на k нулей, перед которыми стоит пятерка, и она сохранится при дальнейших умножениях.

3. Сможет.

Пусть Буратино сначала положит на чаши по две свои монеты. Если одна из чаш перевесит, то среди его монет есть фальшивые.

В случае равновесия у Буратино могут быть 0, 2 или 4 фальшивые монеты. Теперь пусть на одну чашу он положит свои монеты, а на другую – 4 монеты Алисы. Если все монеты Буратино настоящие, его чаша перевесит (ведь настоящих монет только 7), в остальных случаях – нет, так как при этом у Алисы не более двух фальшивых монет.

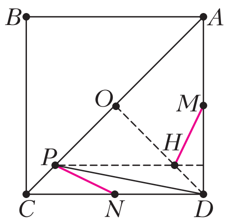


Рис. 14

4. При одном из поворотов на 90° вокруг центра O квадрата точка A перейдет в точку D, точка D – в точку C, а точка M – в точку N (рис. 14). Так как OPH – равнобедренный прямоугольный треугольник, H перейдет в P. Значит, отрезок MH перейдет в NP, поэтому они перпендикулярны.

Замечание. Если треугольник APD тупоугольный, точка H лежит вне него, что никак не сказывается на решении.

5. 14 рублей.

Пусть вертикальная сторона доски равна 20, а горизонтальная – 21.

Пример. Покажем, как Васе гарантированно получить не менее 14 рублей. Он разбивает доску на горизонтальные триминошки. Пусть количество Петиных горизонтальных триминошек, центр которых лежит в i-м столбце, равно a_i. В i-й столбец залезают триминошки с центрами в столбцах $i-1$, i и $i+1$. Поскольку в столбце 20 клеток, а вертикальная триминошка покрывает три клетки, сумма $a_{i-1}+a_i+a_{i+1}$ дает остаток 2 при делении на 3. Сумма $a_{i-1}+a_{i+1}+a_{i+2}$ тоже дает остаток 2 от деления на 3, откуда остатки у a_{i-1} и a_{i-2} одинаковы. Число центров горизонтальных триминошек, попавших в столбец 2, дает остаток 2 при делении на 3, откуда в каждом из столбцов 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 лежат центры хотя бы двух горизонтальных триминошек Пети. Они совпадут с Васиными, что даст ему не менее 14 рублей.

Оценка. Можно считать, что Петя знает Васино разбиение. Верхние две строки Петя разбивает на горизонтальные триминошки, они дадут Васе не более 14 совпадений. Оставшуюся доску Петя разделит на квадраты 3×3. Если в какой-то квадрат полностью входит Васина горизонтальная триминошка, то Петя разобьет его на вертикальные триминошки, иначе – на горизонтальные, и в этом квадрате не будет совпадений.

10—11 классы

1. Пусть исходное число равно n. В качестве искомого числа годится $5^k n$. Действительно, последовательно умножая его на двойки, получим числа $5^{k-1}\cdot 10n, 5^{k-2}\cdot 10^2 n,\ldots,10^k n$, которые отличаются от чисел $5^{k-1}n, 5^{k-2}n,\ldots,n$ только наличием нескольких нулей в конце и поэтому не содержат семерок.

2. Сможет.

Пусть сначала Буратино сравнит три свои монеты с тремя монетами Алисы. Если его чаша окажется легче, то у него есть фальшивые монеты. В случае равновесия – тоже есть, поскольку настоящих монет всего пять.

Пусть чаша Буратино тяжелее (т.е. на чаше Алисы фальшивых монет больше). Тогда он заменит две монеты с чаши Алисы на еще неиспользованные. Если и теперь чаша Буратино перевесит, то все монеты у него настоящие: иначе оба раза на чаше Алисы было по две фальшивые монеты, что невозможно. В противном случае, как показано выше, какие-то из монет Буратино фальшивые.

3. При $n\equiv 0,1 \pmod 4$ сумма на втором листке больше на 1, при остальных n – наоборот. Иными словами, больше на 1 та сумма, где присутствует слагаемое $2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)$.

Рассмотрим равенство $1=(2-1)(3-2)\ldots(n-(n-1))\times$ $\times((n+1)-n)$.

Раскрыв все скобки в правой части, получим сумму из 2^n слагаемых со знаками плюс и минус, каждое из которых является произведением n чисел: по одному числу из каждой скобки. Так как в i-й скобке выбирается число $i+1$ или $-i$, то каждое слагаемое по модулю равно произведению чисел какой-то интересной последовательности, при этом слагаемое входит в сумму со знаком плюс, если множитель $-i$ выбирается в четном числе скобок, и со знаком минус, если в нечетном. Значит, произведения тех интересных последовательностей, которые имеют ту же четность, что и последовательность 2, 3, …, n, $n+1$, входят в сумму со знаком плюс, а произведения интересных последовательностей противоположной четности входят в сумму со знаком минус. Отсюда следует искомое равенство.

5. Пусть Ω – описанная окружность треугольника AOC. Напомним, что ориентированным углом $\angle(l,m)$ между прямыми l и m называется угол, на который надо повернуть прямую l, чтобы она стала параллельна m (этот угол определен по модулю 180°).

Пусть касательные к ω в точках A и C пересекаются в точке P, которая, очевидно, лежит на окружности Ω. Так как PA – касательная, то $\angle(PA,AB) = \angle(AC,CB)$, т.е. $\angle(PA,AM) = \angle(AC,CN)$. Значит, ориентированные дуги PM и AN равны, откуда равны хорды PA и MN. Аналогично, $PA = KL$. Равенство $PA = PC$ очевидно. Следовательно, хорды MN, KL, PA и PC равноудалены от центра окружности Ω, что и требовалось.

Сложный вариант

8–9 классы

1. $n = 10$.

При $n > 10$ числа $n-3$, $n-5$, $n-7$ больше 3, а одно из них кратно 3, поэтому n не больше 10. Число $n = 10$ подходит, так как числа $10-3=7$, $10-5=5$ и $10-7=3$ простые.

3. 4.

Пример. При $n = 34$ получаем первые цифры 3, 6, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3.

Оценка. Поделим n на такую степень десятки, чтобы для полученного числа m (не обязательно целого) выполнялись неравенства $1 \le m < 10$, и решим задачу для числа m (первые цифры не изменятся).

Среди чисел km есть несколько чисел, меньших 10, и несколько тех, что не меньше 10. Назовем «местом перескока» то наименьшее k, для которого $km \ge 10$. Из неравенств $1 \le m < 10$ следует, что все первые цифры до перескока разные, тогда как первые цифры после перескока могут совпадать, но все они идут подряд: 1, 2, 3 и т.д. Поэтому:

если $1 \le m < 2{,}5$, имеется по меньшей мере 4 числа до перескока, и все они имеют разные первые цифры;

если $2{,}5 \le m < 10/3$, имеется, как минимум, три разные цифры до перескока (причем они не меньше 2), а также цифра 1 (после перескока);

если $10/3 \le m < 4$, имеется не менее двух цифр до перескока (причем они больше 2), а также цифры 1 и 2 после перескока;

наконец, если $m \ge 4$, имеются, во всяком случае, цифры 1, 2 3 после перескока и еще одна цифра (не меньше 4) до перескока.

4. а) См. решение задачи 6 из статьи «LXXXV Московская математическая олимпиада школьников» в «Кванте» № 4.

б) Не обязательно. На рисунке 15 приведен пример для квадрата 6×6 (обозначения: В – клетка, средняя по вертикали, Г – по горизонтали, О – и по вертикали, и по горизонтали). Добавив нужное количество белых горизонталей и вертикалей, получим квадрат 100×100.

	О				
О					
		В	Г		
		Г	В		
					О
				О	

Рис. 15

5. Обозначим точки, как показано на рисунке 16. Пусть r – радиус вписанной окружности маленького треугольника, $2p$ – периметр шести-

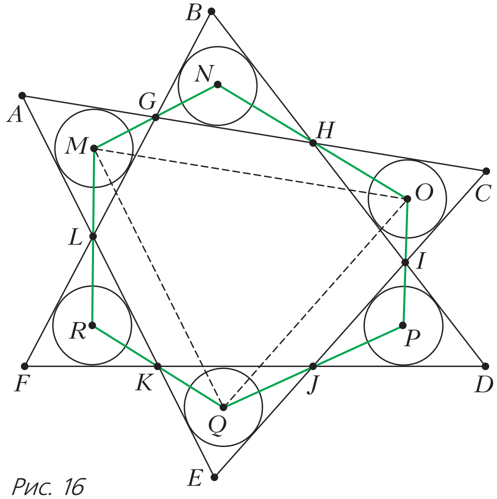


Рис. 16

угольника $GHIJKL$, S – площадь шестиугольника $MNOPQR$. Заметим, что радиус вписанной окружности треугольника MOQ на r меньше радиуса вписанной окружности треугольника ACE. То же верно для треугольников NPR и BDF. Поэтому достаточно доказать равенство радиусов вписанных окружностей треугольников MOQ и NPR. Для этого достаточно доказать равенство их периметров и площадей.

Заметим, что $GH + IJ + KL = HI + JK + LG = p$ (поскольку касательные из каждой вершины шестиугольника $GHIJKL$ к двум «соседним» с этой вершиной маленьким окружностям равны). Так как GH – средняя линия треугольника MNO и т.д., периметр треугольника MOQ равен $2p$.

Кроме того, $S_{MNO} = \frac{1}{2} MO \cdot 2r = MO \cdot r$ и т.д., значит, $S_{MOQ} = S - 2pr$. То же верно для треугольника NPR.

Замечание. Исходные треугольники не обязательно равны между собой, а вписанные в них окружности не обязательно совпадают (рис. 17).

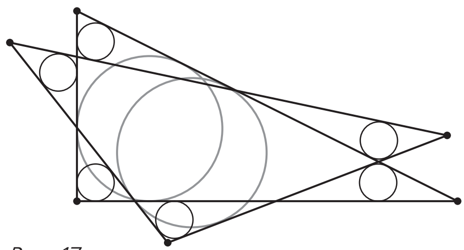


Рис. 17

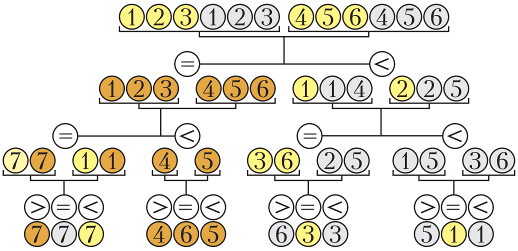


Рис. 18

6. Можно.

Взвешивания приведены на схеме (рис. 18; золотые монеты – желтые, серебряные – серые, бронзовые – коричневые). Случаи, когда левая чаша перевешивает, разбираются аналогично.

7. Заметим, что угол многоугольника M может быть равен $60°$, $90°$, $120°$, $150°$. Значит, каждый внешний угол M не меньше $30°$. Поскольку сумма внешних углов многоугольника равна $360°$, у M не более 12 углов, причем их может быть 12 только в случае, когда все углы равны по $150°$. Если у M меньше 12 сторон, то не все его углы равны $150°$. Мысленно вставим несколько сторон нулевой длины: если есть угол $120°$, вставим в соответствующую вершину сторону нулевой длины, если есть угол $90°$ ($60°$) – две (три) последовательные стороны нулевой длины. В итоге получится 12 сторон, некоторые из которых равны 0. Назовем *характеристикой* многоугольника M набор $(a_1, a_2, \ldots, a_{12})$ длин его сторон, перечисленных в порядке обхода против часовой стрелки от фиксированной вершины. Стороны $a_1, a_3, \ldots, a_{11}$ будем называть *нечетными*, а стороны $a_2, a_4, \ldots, a_{12}$ – *четными*.

Назовем *каемкой* разбиения объединение *плашек* (квадратов и равносторонних треугольников), имеющих хотя бы одну общую точку с границей многоугольника M (рис.19). Если каемка не совпадает с M, обозначим через M_1 многоугольник, полученный из M отбрасыванием каемки.

Рассмотрим плашку каемки, примыкающую к углу, сторона которой лежит на стороне AB многоугольника M. Если это квадрат, то все плашки, примыкающие к AB, – тоже квадраты (образующиеся углы в $90°$ можно замостить только квадратами; см. рис. 19,*а*). Если это треугольник, то все оставшиеся плашки, примыкающие к этой стороне, – тоже треугольники (см.рис. 19,*б*). Таким образом, к каждой стороне многоугольника M примыкают либо только квадраты, либо только треугольники.

Отсюда следует, что стороны M_1 будут параллельны соответствующим сторонам M (стороны AB и CD на рисунке 19). Если у M нет углов по $60°$ или $90°$, то длины сторон M_1 будут либо

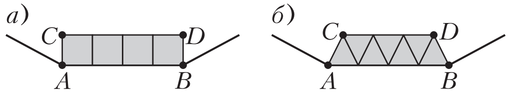


Рис. 19

равны соответствующим длинам сторон M (в случае квадратов), либо на единицу меньше (в случае треугольников). При этом длина стороны M_1 может стать равной 0. Таким образом, M_1 – выпуклый многоугольник, у которого сторон не больше, чем у M. Многоугольник M_1 также имеет характеристику – набор, построенный по тем же правилам так, чтобы нумерации сторон в M и M_1 соответствовали друг другу.

Пусть длины всех сторон M отличны от нуля, т.е. все углы M равны $150°$. Существует два варианта расположить квадрат и треугольник, примыкающие к углу $150°$. При выборе одного из вариантов остальная каемка восстанавливается однозначно (сначала восстанавливается часть каемки, примыкающая к сторонам угла, затем разбиения двух соседних углов и т.д.).

Итого получается два варианта каемки: треугольники расположены вдоль всех нечетных сторон, а квадраты – вдоль всех четных, или наоборот (рис. 20). В первом варианте характеристи-

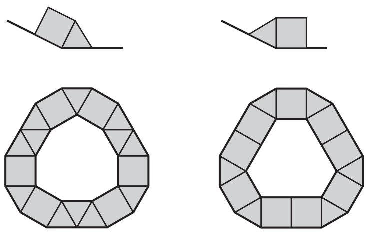


Рис. 20

кой M_1 будет набор $(a_1-1, a_2, a_3-1, a_4, \ldots, a_{11}-1, a_{12})$, во втором – набор $(a_1, a_2-1, a_3, a_4-1, \ldots, a_{11}, a_{12}-1)$.

Пусть по крайней мере одна нечетная сторона M равна 0, а все четные стороны отличны от нуля. Рассмотрим такое i, что $a_i = 0$. Тогда угол при соответствующей вершине в многоугольнике M будет равен $120°$ (поскольку a_{i-1} и a_{i+1} не равны 0), т.е. его единственным образом можно разбить на два треугольника. Далее каемка восстанавливается однозначно: вдоль всех четных сторон лежат треугольники, а вдоль всех нечетных сторон ненулевой длины – квадраты. Характеристика M_1 будет равна $(a_1, a_2-1, a_3, a_4-1, \ldots, a_{11}, a_{12}-1)$.

Если хоть одна четная сторона M равна нулю, а все нечетные стороны отличны от нуля, аналогично получим, что характеристика M_1 будет равна $(a_1-1, a_2, a_3-1, a_4, \ldots, a_{11}-1, a_{12})$.

Если же по крайней мере одна четная и одна нечетная стороны M равны нулю, то каемка тем более восстанавливается однозначно. Поскольку все ненулевые стороны M_1 параллельны соответствующим сторонам M и имеют такую же или меньшую длину, то по крайне мере одна четная и одна нечетная стороны M_1 равны нулю. Значит, и следующая каемка восстанавливается (не более чем) однозначно и т.д. Обозначим $m = \min\{a_1, a_3, \ldots, a_{11}\}$, $n = \min\{a_2, a_4, \ldots, a_{12}\}$. Одно из чисел m или n отлично от нуля, иначе M можно разбить не более чем одним способом. Выделим у многоугольника M каемку, уменьшающую либо четные, либо нечетные стороны M (если одно из чисел m или n равно 0, то каемку можно выбрать единственным способом). Уберем каемку, останется многоугольник M_1. Выделим какую-нибудь каемку многоугольника M_1, уберем ее и обозначим оставшийся многоугольник через M_2. Будем продолжать так до тех пор, пока хотя бы одна четная и хотя бы одна нечетная стороны станут равны нулю. В этот момент характеристика многоугольника будет равна $(a_1 - m, a_2 - n, a_3 - m, a_4 - n, \ldots, a_{11} - m, a_{12} - n)$.

Оставшийся многоугольник M_{m+n} не зависит от того, какие именно каемки были выбраны на предыдущих шагах, поскольку такая характеристика задает не более одного многоугольника. Поэтому M_{m+n} можно разбить на плашки (иначе и M нельзя было разбить), причем единственным образом. Следовательно, количество разбиений M равно количеству способов уменьшить оба числа m и n до 0 (за ход уменьшая одно из чисел на 1), т.е. C_{m+n}^{m}.

По условию C_{m+n}^{m} – простое число p. Заметим, что $m + n \geq p$ – иначе C_{m+n}^{m} не делится на p. Также m и n отличны от 0, иначе $C_{m+n}^{m} = 1$. Значит, $C_{m+n}^{m} \geq C_{m+n}^{1} = m + n \geq p$. Равенство достигается только для $\{m, n\} = \{1, p-1\}$. В обоих случаях одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ равно $p - 1$.

10–11 классы

2. а) См. решение задачи 9 из статьи «LXXXV Московская математическая олимпиада школьников» в «Кванте» №4.

б) Пусть график $y = \log_a x$ пересекает ось абсцисс в точке A. Проведем в верхней полуплоскости прямые l и m, параллельные оси абсцисс, так, чтобы расстояние между l и m равнялось расстоянию от l до оси абсцисс. Пусть $B(x;0)$ и $C(x^2;0)$ – проекции на ось абсцисс точек пересечения этих прямых с графиком. Достаточно построить начало координат.

Заметим, что $AB = x - 1$, $BC = x^2 - x$, $BC - AB = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, тогда можно построить отрезок длины $\frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)^2} = 1$. Отложив его «влево» от точки A, получим начало координат.

7. Может.

а) См. решение задачи 10 из статьи «LXXXV Московская математическая олимпиада школьников» в «Кванте» №4.

б) Пусть корабль находится в некоторой точке O. Рассмотрим правильный октаэдр $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, описанный возле шара радиуса a с центром в точке O (рис. 21). В решении п. а) показано, что путь $O \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4 \to A_5 \to A_6$ позволяет достигнуть граничной плоскости и имеет длину $14a$.

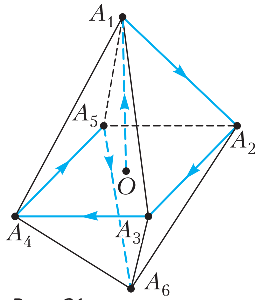


Рис. 21

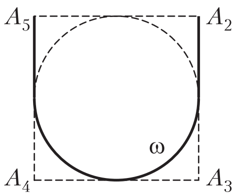


Рис. 22

Если же заменить участок пути $A_2 \to A_3 \to A_4 \to A_5$ из п. а) на путь, приведенный на рисунке 22 (половина стороны квадрата, полуокружность, половина стороны квадрата), то длина пути сократится на $\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{6}a > a$. Выпуклая оболочка точек нового пути все еще содержит вписанный в октаэдр шар радиуса a, поскольку этот шар касается образующей конуса с вершиной A_1, основанием которого является вписанная окружность ω квадрата $A_2A_3A_4A_5$.

Замечание. Можно сократить путь примерно до $12{,}75a$, если в плоскости квадрата $A_2A_3A_4A_5$ рассмотреть правильный шестиугольник $ABCDEF$, описанный вокруг окружности ω (рис. 23). Пройдем по отрезку OA_1, затем по прямой до вершины A шестиугольника, по касательной до точки его касания с ω, по дуге окружности ω, по касательной к ω до точки F, наконец по отрезку FA_6. Можно еще немного сократить путь, если изменить расстояние от точек A_1 и A_6 до плоскости окружности ω и путь в этой плоскости так, чтобы объединение двух соответствующих конусов содержало шар с центром в O радиуса a. Однако улучшение получается незначительным.

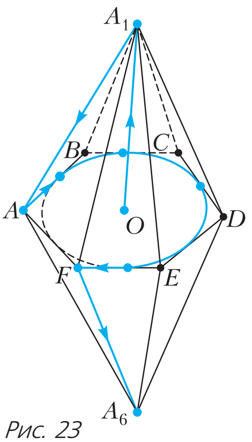


Рис. 23

Если у кого-нибудь из читателей получится существенно улучшить оценку сверху или получить хорошую оценку снизу, просьба написать автору задачи по адресу mmo2022kosmos@mail.ru

Устный тур для 11 класса

1. Да, можно.

Пусть a, b, c, d – коэффициенты многочлена от старшего к младшему, α, β – известные корни, γ – неизвестный корень. Прежде всего заметим, что так как все корни лежат между 0 и 1, то в силу теоремы Виета коэффициент d – наименьший из коэффициентов по абсолютной величине. Поскольку все корни многочлена положительны, знаки коэффициентов чередуются. Поэтому, зная d, определяем b. Если найти a, то определяется и c. Заметим, что $a\gamma = \frac{-d}{\alpha\beta}$. Поскольку $b = -a(\alpha+\beta+\gamma)$, можно найти $a(\alpha+\beta)$. Так как α и β известны, отсюда определяется a.

2. Все углы должны быть по 60°.

Докажем сначала, что неравносторонний треугольник под условие подходить не может. Предположим противное: пусть такой треугольник ABC есть и в нем $AB \neq AC$, причем длины этих сторон различаются хотя бы на d. Рассмотрим точку P, расположенную на перпендикуляре к плоскости ABC, проходящем через точку A, на расстоянии ε от A. Тогда $PB = \sqrt{AB^2+\varepsilon^2}$, $PC = \sqrt{AC^2+\varepsilon^2}$. Можно выбрать P настолько близко к вершине A, уменьшая ε, чтобы PB и PC отличались от AB и AC соответственно меньше чем на $d/3$ и чтобы ε было меньше $d/3$. Тогда стороны PB и PC будут различаться более чем на $d/3$, а длина стороны PA меньше $d/3$ – противоречие с неравенством треугольника.

Покажем теперь, что равносторонний треугольник удобен.

Пусть $AB = BC = CA$. Отметим на лучах PA, PB, PC точки A_1, B_1, C_1 так, чтобы выполнялись равенства

$$AB \cdot PA_1 = PB \cdot PC,$$
$$BC \cdot PB_1 = PC \cdot PA,$$
$$CA \cdot PC_1 = PB \cdot PA.$$

Треугольники APB и B_1PA_1 подобны по углу и отношению двух сторон, откуда $A_1B_1 = \frac{AB \cdot PA_1}{PB} = PC$. Аналогично вычисляем длины остальных сторон. Получаем, что треугольник $A_1B_1C_1$ искомый.

3. $1 + n/2$.

Пример. Для прямоугольника $n \times 2$ получаем $x = n+2$, $y = 2$.

Оценка. Пусть в кроссворде z клеток. Выберем некоторое его покрытие наименьшим количеством слов. Слова из этого покрытия назовем *правильными*, а остальные *неправильными*.

Каждая клетка содержится не более чем в одном горизонтальном и одном вертикальном слове. Хотя бы одно из этих слов правильное, так как правильные слова покрывают весь кроссворд. Значит, каждая клетка принадлежит не более чем одному неправильному слову. Поэтому сумма количеств клеток в неправильных словах не больше z.

Если клетка является словом, то к ней не примыкает другая клетка кроссворда ни по горизонтали, ни по вертикали. Следовательно, клетка входит в любое покрытие кроссворда словами и, значит, является правильным словом. Поэтому все неправильные слова содержат не меньше чем по две клетки и количество неправильных слов не больше $z/2$.

Так как правильные слова покрывают весь кроссворд, сумма количеств клеток в них не меньше z. Каждое слово содержит не больше n клеток, поэтому количество правильных слов не меньше z/n. Отсюда $x/y \le 1 + \frac{z/2}{z/n} = 1 + n/2$, что и требовалось.

4. Любому четному числу.

Любая функция, полученная описанным способом, – многочлен от $\sin x$ и $\cos x$ с целыми коэффициентами. Доказательство индукцией по числу шагов: исходная функция имеет такой вид; производная многочлена с целыми коэффициентами – многочлен с целыми коэффициентами; аналогичное верно для суммы и произведения. При $x = 0$ синус и косинус принимают целые значения, поэтому значение многочлена от них с целыми коэффициентами – целое, т.е. c целое.

Положим $f(x) = \sin x + \cos x$. Запишем на доску $f'(x) = \cos x - \sin x$, $f''(x) = -\sin x - \cos x$, $f'''(x) = -\cos x + \sin x$. Тогда $f^2(x) + f'^2(x) = (\sin x + \cos x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 \equiv 2$. Аналогично, $f(x)f''(x) + f'(x)f'''(x) \equiv -2$. Суммируя такие функции, получаем все четные константы.

Покажем, что нечетную константу получить нельзя. Заметим, что

$$\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin\frac{\pi}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Поэтому все функции, которые можно получить, – это многочлены от $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ и $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ с целыми коэффициентами и нулевым свободным членом. При $x=\frac{\pi}{4}$ остаются лишь члены с косинусом (равным 1). Коэффициенты при четных степенях косинуса четны, а при нечетных либо иррациональны, либо равны нулю. Целочисленное значение получится, если сумма коэффициентов при нечетных степенях равна 0, но тогда значение четно, что и требовалось доказать.

5. Пусть R – точка пересечения касательных AP и CQ. Докажем, что все прямые PQ проходят через точку D – основание внешней биссектрисы угла B треугольника ABC (точка D существует, так как треугольник неравнобедренный). По теореме, обратной к теореме Менелая, для треугольника ARC достаточно проверить, что $\frac{AP}{PR}\cdot\frac{RQ}{QC}\cdot\frac{CD}{DA}=1$. Поскольку RQ и PR равны как касательные, достаточно проверить равенство $\frac{AP}{QC}=\frac{AD}{DC}$. Но $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}$ по свойству внешней биссектрисы, так что проверяем равенство $\frac{AP}{QC}=\frac{AB}{BC}$.

Пусть AB и BC пересекают окружность ω в точках X и Y соответственно. Запишем степени точек A и C относительно окружности ω: $AX\cdot AB=AP^2$, $CY\cdot CB=CQ^2$, поэтому осталось проверить равенство $AX/AB=CY/CB$. Это равенство следует из того, что ω касается описанной окружности треугольника ABC в точке B.

6. Назовем слова, которые можно получить, *достижимыми*. Всего существует 2^n различных слов длины n, поэтому достаточно доказать, что количество достижимых слов длины n равно 2^{n-1}. Докажем это утверждение по индукции.

База индукции. Для $n=1$ и $n=2$ это легко проверяется: $А\to АА$, $А\to АБ$.

Шаг индукции. Пусть для всех длин, не превосходящих n, утверждение верно. Посмотрим, как можно получить слово длины $n+1$.

1) Из слова длины n, применив операцию а): $W\to АW$;

2) из слова длины n, применив операцию б): $W\to WБ$;

3) из слова длины $n-1$, применив операцию в): $W\to БWА$.

Слов 1-го и 2-го типов по 2^{n-1}, а слов 3-го типа – 2^{n-2}. При этом слова 3-го типа не могут совпадать со словами 1-го и 2-го типов. А вот множества слов 1-го и 2-го типов пересекаются. Их общие слова имеют вид $АwБ$. Докажем, что слова w (которые находятся между буквами А и Б) – это все достижимые слова длины $n-1$. Понятно, что если w – достижимое слово, то за две операции из него можно получить $АwБ$. С другой стороны, если слово $wБ$ достижимое, то посмотрим, как оно было получено. Если проделать все те же операции, но пропустить приписывание последней буквы $Б$, то будет получено слово w, значит, оно достижимое.

Таким образом, общих слов 1-го и 2-го типов столько же, сколько достижимых слов длины $n-1$, т.е. 2^{n-2}. Следовательно, количество слов длины $n+1$ равно $2^{n-1}+2^{n-1}-2^{n-2}+2^{n-2}=2^n$, что и требовалось доказать.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

М.Н.Грицук

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

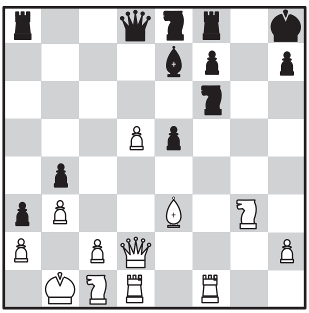
Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8 Тел.: (831) 218-40-40

НовыЙ «СТАРЫЙ» ПРЕТЕНДЕНТ?

В Мадриде завершился первый круг турнира претендентов, по результатам которого в отрыв ушли участники двух последних матчей на первенство мира – Ян Непомнящий и Фабиано Каруана, и велика вероятность, что один из них завоюет право повторно сразиться с Магнусом Карлсеном.

Я.Непомнящий – А.Фирузджа
Мадрид, 2022, 4 тур

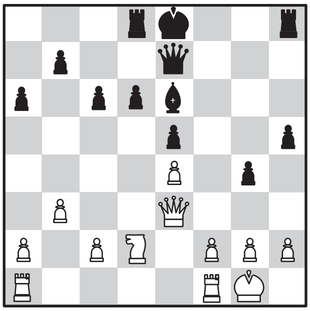
1. e4 c5 2. ♘f3 d6 3. d4 cd 4. ♘d4 ♞f6 5. ♘c3 a6 6. f3 e5 7. ♘b3 ♝e6 8. ♗e3 ♝e7 9. ♕d2 0-0 10. 0-0-0 ♞bd7 11. g4 b5 12. g5 b4 13. ♘e2 ♞e8 14. f4 a5 15. f5 ♝c4 16. ♔b1 a4 17. ♘bc1 d5 18. f6 gf 19. gf ♞df6 20. ♘g3 ♝f1?! (лучше 20…♚h8, или 20…♞d6) **21. ♖hf1 a3.** На раздумья над последними двумя ходами черные потратили около часа: А.Фирузджа, вероятно, забыл точное продолжение, разработанное при домашнем анализе. Для современных шахмат, особенно в варианте Найдорфа, это практически равносильно поражению. **22. b3 ♚h8 23. ed.**



23…♞d6? Черных оставляло в игре лишь точное 23…♛c7!, на что белые должны были бы найти (или вспомнить) жертву качества 24. ♖f6! ♝f6 25. ♘d3, угрожая пешке на b4. Теперь же ее можно забрать без жертв, и партия становится технически выигранной. **24. ♕b4 ♜c8 25. ♗b6! ♛d7 26. ♕e1! ♜b8 27. ♗a5 ♞c4 28. d6 ♝d8 29. ♗c3 ♛e6 30. ♘d3 ♞d5 31. ♘f4 ♞f4 32. ♖f4 f6 33. ♕e2 ♞b2 34. ♖df1 ♜e8 35. ♖h4 f5 36. ♖h7+ ♚h7 37. ♕h5+ ♚g8 38. ♘f5 ♝f6 39. ♖g1+, черные сдались.**

Ф.Каруана – Х.Накамура
Мадрид, 2022, 1 тур

1. e4 e5 2. ♘f3 ♞c6 3. ♗b5 ♞f6 4. d3 ♝c5 5. ♗c6 dc 6. ♘bd2 ♝e6 7. 0-0 ♝d6 8. ♘b3 ♛e7!? 9. ♘a5 ♜b8!? Новинка – обычно предыдущий ход делается для подготовки длинной рокировки, однако, как отметил Х.Накамура, он решил сбить соперника с дебютной подготовки и поиграть «с листа». **10. ♗g5 h6 11. ♗h4 g5 12. ♗g3 ♞d7 13. d4 f6 14. ♕d3 h5 15. de ♞e5 16. ♗e5 fe 17. ♘c4 ♜d8 18. ♘d6+ cd 19. ♕e3 g4 20. ♘d2 a6 21. b3.**

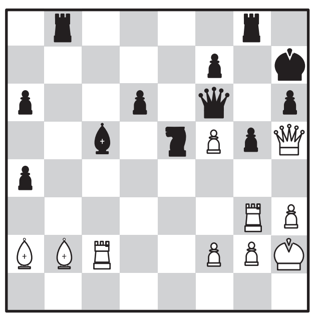


21…0-0?! Излишне оптимистично. Аккуратное 21…♚d7 сохраняло равенство, теперь же белые могут воспользоваться открытым положением черного короля. **22. f3! ♛g7 23. fg hg 24. ♖ad1 d5 25. ed cd 26. ♖de1 e4 27. ♖f8+ ♜f8 28. c4 ♜e8 29. cd ♝d5 30. ♘f1 ♛e5 31. ♕h6 ♛g7 32. ♕d6 ♝c6 33. ♘e3 g3 34. hg ♛e5 35. ♕g6+ ♛g7 36. ♕d6 ♛e5 37. ♕h6 ♛g3 38. ♖f1 ♛g7 39. ♕h4 ♛h7 40. ♕g3+?!** (сразу выигрывало 40. ♕f4 с идеей ♘g4-♘f6) **♛g7 41. ♕h4 ♝d7! 42. ♖d1 ♝e6?!** Позволяло держаться 42…♜e7 43. ♘d5 ♜f7, защищаясь от вторжения коня. Теперь же конь подключается с решающим эффектом. **43. ♘d5 ♜f8 44. ♕e4 ♛h6 45. ♖e1 ♜d8 46. ♘e7+ ♚f7 47. ♘f5 ♛f6 48. ♖f1 ♝d5 49. ♘h6+ ♚g7 50. ♕g4+, черные сдались.**

Встреча лидеров произошла во втором туре, и в ней удача оказалась на стороне российского гроссмейстера.

Я. Непомнящий – Ф. Каруана
Мадрид, 2022, 2 тур

1. e4 e5 2. ♘f3 ♞c6 3. ♗c4 ♞f6 4. d3 ♝c5 5. 0-0 d6 6. c3 a6 7. a4 ♝a7 8. ♖e1 h6 9. ♘bd2 g5 10. b4 ♞g4!? Интересная новинка. Ход в стиле начинающих шахматистов, но сделан он, разумеется, не из расчета выиграть пешку f2, а чтобы удивить соперника и воспользоваться нюансами, найденными при домашнем анализе. **11. ♖e2 ♛f6 12. ♕e1 ♛g7 13. ♘f1 0-0 14. ♘g3 ♞e7 15. d4 ed 16. cd ♞c6** (конечно, не 16…♝d4?, так как потеря слона грозит обернуться сильной атакой по большой диагонали) **17. ♖a3!?** (жертва пешки ради активизации ладьи) **♞ d4 18. ♘d4 ♝d4 19. h3 ♞e5 20. ♗a2 c5 21. bc ♝c5!** («компьютерный ход» в расчете на контроль черных полей) **22. ♖b3 b5! 23. ♘f5 ♛f6 24. ♔h2 ba 25. ♖g3 ♚h7 26. ♕d1 ♝d7 27. ♖c2 ♝f5 28. ef ♜ab8 29. ♕h5!** (единственный ход, создающий угрозы, иначе у белых просто хуже) **♜g8 30. ♗b2 ♜ge8 31. ♗c1 ♜g8 32. ♗b2.** Кульминация партии. Благодаря дебютной новинке черные смогли получить преимущество и обязаны были решиться на жертву качества: 30…♜b2! 31. ♖b2 a3 32. ♖b7 ♝f2 33. ♖a3 d5! с мощной атакой. Однако Ф.Каруана предпочел повторение ходов, и, возможно, именно эти пол-очка будут иметь решающее значение в борьбе за первое место.

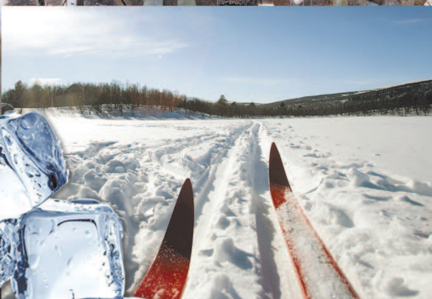


32…♜ge8 33. ♗c1, ничья.

А.Русанов

Индекс 90964

Прогулки с физикой



ЛЕД ТРОНУЛСЯ...

Как происходит процесс таяния льда на реках и озерах?

ISSN 0130-2221 22006

(Подробнее – на с. 34 внутри журнала)