

ISSN 0130-2221

2023 · № 3

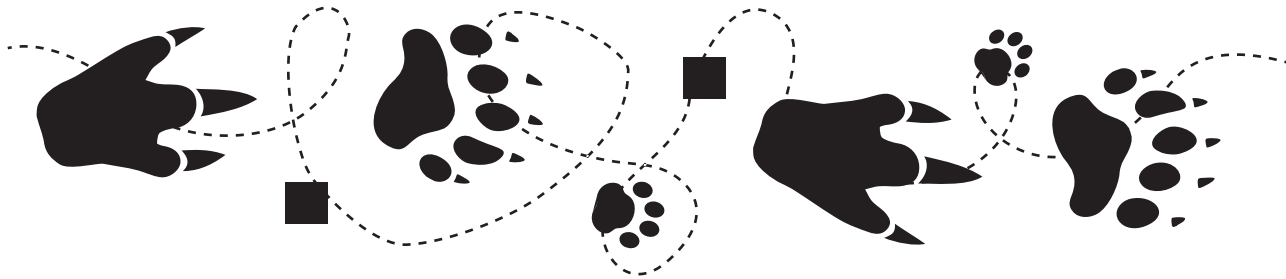
МАРТ

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



**ЗВЕРЬ** не **СТОЛ**,  
а *собака* не **МЕДВЕДЬ**...



**ДАНЫ СЛЕДУЮЩИЕ ЧЕТЫРЕ МНОЖЕСТВА СЛОВ:**

- 1** (а) зверь, червь, инфузория, поэт, щука  
(б) стол, книга, земля, треугольник, пальто
- 2** (а) кит, ласточка, окунь, тигр, муравей  
(б) женщина, начальник, парикмахер, муж, кассир
- 3** (а) воробей, самолет, баба-яга, муха, ракета  
(б) книга, туннель, уж, колодец, телефон
- 4** (а) собака, лошадь, голубь, осел, мул  
(б) медведь, кенгуру, змея, тигр, окунь

Подмножества (а) и (б) соотносятся следующим образом. Слова из подмножества 1 (а) все обладают некоторым смысловым признаком, которым не обладает ни одно из слов из 1 (б); назовем этот признак первым. Аналогично получаем второй признак (им обладают слова из 2 (а) и не обладают слова из 2 (б)), третий и четвертый.

### **ЗАДАНИЕ**

Найдите слово (или слова), которое обладает всеми четырьмя признаками вместе.

## В номере:

## УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук  
Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАН

Физический институт  
им. П.Н.Лебедева РАН

Московский  
физико-технический институт  
Московский центр непрерывного  
математического образования

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**А.А.Гайфуллин**

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,  
М.Н.Бондаров, А.А.Варламов,  
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,  
А.Н.Виленин, Н.П.Долбилин,  
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,  
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,  
П.А.Кожевников, С.П.Коновалов,  
К.П.Кохась, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,  
А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,  
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,  
А.В.Устинов (заместитель главного  
редактора), А.И.Черноуцан  
(заместитель главного редактора)**

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, В.И.Берник,  
А.А.Боровой, В.В.Козлов,  
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,  
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**А.Н.Колмогоров**

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,  
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,  
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,  
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 Трансурановые элементы. *Л.Белопухов*  
14 Еще об одной «олимпиадной» задаче  
графы, или Еще одна задача о раскраске.  
*А.Райгородский*

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МИР

- 20 Дендрокомбинаторика. *А.Заболотский*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 24 Задачи M2738–M2741, Ф2745–Ф2748  
26 Решения задач M2726–M2729, Ф2733–Ф2736

## КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 32 Задачи 25–28

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 33 Задачи  
34 Задача Джона Сильвера (о математических  
задачах с позиций физики). *С.Дворянинов*

## НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

- 37 Светлое отражение темного пятна

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 38 Вспомогательные равносторонние  
треугольники. *М.Васильев, Т.Корчемкина*

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 43 Капля, отвердевающая в поле центробежных  
сил. *А.Кашеваров, А.Стасенко*

## ОЛИМПИАДЫ

- 45 Региональный этап XLIX Всероссийской  
олимпиады школьников по математике  
47 Региональный этап LVII Всероссийской  
олимпиады школьников по физике

- 55 Ответы, указания, решения

## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Капля,  
отвердевающая в поле центробежных сил»*  
II *Лингвистические задачи*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*

# Трансурановые элементы

Л. БЕЛОПУХОВ

В 1789 ГОДУ БЫЛ ОПУБЛИКОВАН «Трактат о химии» великого французского химика Антуана Лорана Лавуазье. Фактически это был первый научный учебник химии. В нем была приведена «таблица субстанций, принадлежащих всем царствам природы, которые могут считаться простейшими составными частями тел». Позднее эти «субстанции» были названы химическими элементами – самыми маленькими носителями определенных химических свойств.

В таблице Лавуазье их было 33. Кроме водорода, углерода, азота, кислорода и известных тогда 17 металлов и неметаллов в список попали и такие субстанции, как теплород, свет и некоторые окислы. Но около 30 субстанций – это и были химические элементы.

Через 80 лет, в созданной Д.И. Менделеевым таблице (системе) было уже 62 элемента, включая и уран, самый тяжелый из известных тогда элементов, занявший 62-е место. Самое главное в менделеевской системе – это периодичность химических свойств. Числа 8 и 18, как характеристики этой периодичности, оказались верными, они и сейчас присутствуют в таблице элементов. В современном варианте таблицы элементы расположены в 18 группах и подгруппах.

В числе 62 элементов таблицы были и некоторые неоткрытые в природе. Менделеев назвал их по имени расположенных в предыдущих периодах элементов той же группы с приставкой «эка». Наиболее интересным был элемент №43, названный Менделеевым *экамарганец*. Его долго искали в природе, но так и не могли найти долгие годы. Только сто лет спустя,

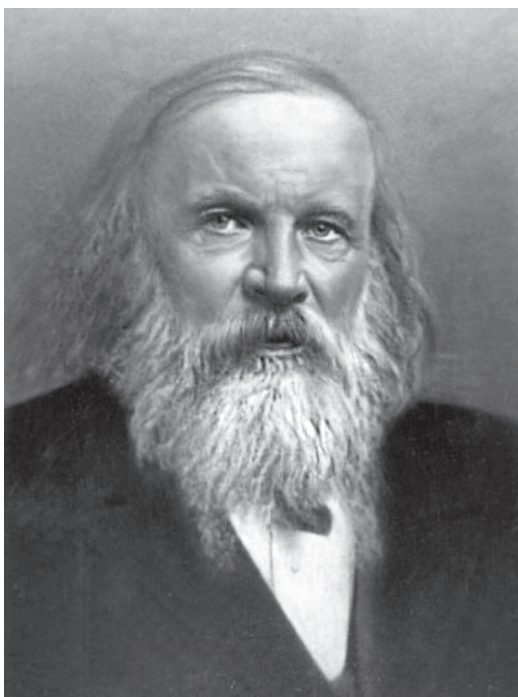


Антуан Лоран Лавуазье

в середине прошлого века ничтожные следы этого элемента были обнаружены в некоторых урановых рудах. Оказалось, что этот элемент рождается в реакциях самопроизвольного деления ядер урана (явлении, открытом в 1939 году советскими физиками Г.Флёровым и К.Петржаком).

Но еще в 1937 году 43-й элемент был синтезирован в результате бомбардировки атомов предыдущего элемента №42, молибдена, ядрами изотопа водорода – дейтерия. Эти ядра разгонялись до больших скоростей на циклотроне в радиационной лаборатории Калифорнийского университета в Беркли. Большая кинетическая энергия ядер дейтерия позволяла преодолеть испытываемое ими электрическое отталкивание от ядер молибдена.

Пожалуй, именно это событие можно считать началом эры искусственного создания элементов, отсутствующих в земной коре (или присутствующих в совершенно ничтожных количествах). Элемент и получил имя «искусственник», что на латыни звучит *технециум*, а в российской



*Дмитрий Иванович Менделеев*

традиции – *технеций*. Сегодня он не является каким-либо экзотическим веществом. Этот искусственно созданный элемент нашел широкое применение в медицине как «меченый атом». Один из изотопов технеция особенно удобен для целей медицинской диагностики и лечения новообразований. Его маленький период полураспада (6 часов) означает, что он не накапливается в организме. А небольшая энергия гамма-частиц, сопровождающих его бета-распад, обеспечивает «мягкое» воздействие на ткани организма.

Понятно, что такое вещество нужно синтезировать только в самом лечебном учреждении – при перевозке от него ничего не останется. В больницу доставляют радиоактивный изотоп молибдена, который превращается в технеций, легко извлекаемый химическим путем. Больничная установка называется «генератор технеция». В нее помещается изотоп молибдена. А очень высокая цена такого метода диагностики и лечения связана с производством этого изотопа молибдена на специальных ядерных реакторах.

### Начало трансурановой эры

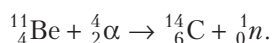
В 30-е годы прошлого столетия после создания Д.Иваненко и В.Гейзенбергом протонно-нейтронной модели атомного ядра началось стремительное развитие ядерной физики. В Италии в это время работал талантливый экспериментатор (и теоретик) Энрико Ферми. Он понимал, что самыми удобными «снарядами» для «стрельбы» по атомным ядрам являются именно нейтроны, поскольку они не имеют электрического заряда и могут очень близко подходить к атомным ядрам – настолько близко, что начинают действовать мощные ядерные силы притяжения нейтрона к ядру. И поскольку при проникновении нейтрона в ядро в нем нарушается тот баланс чисел протонов и нейтронов, при котором ядро было устойчивым, в нем происходят процессы, приводящие к увеличению на единицу числа протонов. А это означает увеличение положительного заряда ядра и, в соответствии с законом сохранения электрического заряда, появление электрона с большой кинетической энергией, позволяющей ему стремительно удалиться от ядра. Родается изотоп химического элемента, имеющий номер на единицу больше, чем имеет элемент, атомы которого подверглись бомбардировке нейтронами.

В этом и заключается сущность отрицательного бета-распада. Ферми первым создал основы теории этого превращения атомных ядер. Она оказалась настолько сложной, что и сейчас еще не имеет окончательного завершения. Теория предсказывала, что вероятности бета-распадов у разных элементов могут отличаться во много раз. В отдельных случаях при поглощении нейтрона вылетает не электрон, а его античастица, которая получила название «позитрон». При этом новое ядро («дочернее») будет иметь электрический заряд на единицу меньше исходного ядра и в периодической системе будет занимать предыдущее место. Такое превращение называется положительным бета-распадом.

И при отрицательном, и при положительном бета-распадах образующиеся

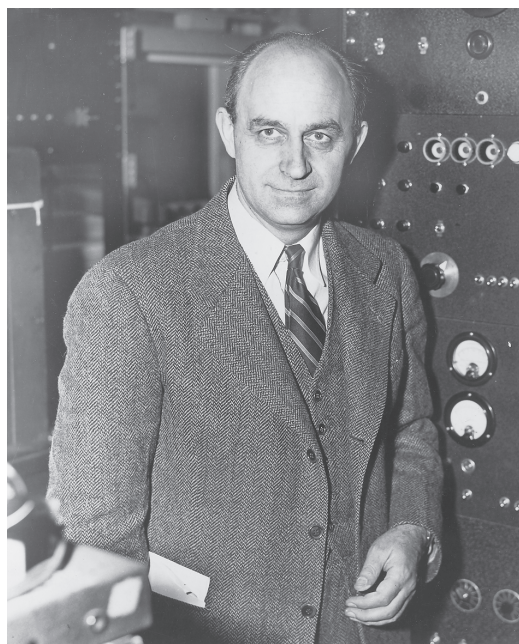
изотопы дочерних ядер неустойчивы, т.е. являются радиоактивными (искусственно созданными, а не природными радиоактивными элементами конца периодической системы). Они и получили название «меченых атомов», поскольку их путь в веществе можно проследить с помощью регистраторов частиц, которые обычно называются счетчиками. Меченые атомы нашли широкое применение в различных технических исследованиях, а главное – в биологии и медицине. Изотоп первого искусственного элемента – пример меченого атома.

Энрико Ферми в Италии, Ирен и Фредерик Жолио-Кюри во Франции в 1932–37 годах подвергали нейтронному облучению чуть ли не все элементы периодической системы. Были открыты десятки новых изотопов. Нейтроны при этом получались в радио-бериллиевых источниках, где происходила ядерная реакция



Получающиеся нейтроны имеют большую кинетическую энергию (в соответствии с законами сохранения энергии и импульса) и их скорости столь велики, что большая часть вылетает за пределы реакционной зоны, не успев присоединиться к какому-либо ядру мишени.

Ферми был первым, кто понял, что эти нейтроны целесообразно замедлить, и осуществил это, поставив на пути нейтронов замедлитель – вещество, которое будет не поглощать нейтроны, а в упругих соударениях замедлять их. Атомные ядра этого вещества должны быть достаточно легкими для того, чтобы отнимать у нейтронов кинетическую энергию. В начале периодической системы таких элементов всего только два – водород (точнее, его изотоп дейтерий) и углерод. Ферми использовал парафин – вещество, содержащее много углерода и водорода. И сейчас в большинстве ядерных реакторов в качестве замедлителя нейтронов используется углерод (в виде химически чистого графита) или «тяжелая» вода, в которой обычный водород заменен дейтерием.



*Энрико Ферми*

В 1935 году Ирен и Фредерик Жолио-Кюри стали нобелевскими лауреатами по химии «за синтез новых радиоактивных элементов», а в 1938 году Энрико Ферми получил Нобелевскую премию по физике «за открытие искусственной радиоактивности, вызванной бомбардировкой медленными нейтронами».

В 1934 году группа Ферми облучала нейтронами уран (элемент №92). По аналогии со всеми предыдущими опытами Ферми считал, что в результате был синтезирован 93-й элемент. Вполне логично Ферми назвал его трансурановым элементом. Об этом он заявил в своей Нобелевской лекции в декабре 1938 года. Но увы! Это было ошибкой.

На вручение Нобелевской премии Ферми приехал в Стокгольм со всей семьей – с женой, двумя детьми и их няней и после нобелевских торжеств не вернулся в Италию, а уехал в Нью-Йорк. И Ферми не успел узнать, что в эти самые дни, когда он готовился к невозвращению на родину (где во всю господствовал фашистский режим), в Германии радиохимики Отто Ган и Фриц Штрассман, повторив опыты Ферми, доказали, что принятый им за

трансурановый элемент №93 на самом деле представлял собой хорошо известный барий, родившийся совсем в другом процессе – делении ядра изотопа урана  $^{235}\text{U}$  при попадании в него нейтрона. Работавшая в контакте с этими учеными выдающаяся физик-теоретик Лизе Мейтнер и ее коллега Отто Фриш создали теорию этого процесса. Весной 1939 года была опубликована их статья.

Нильс Бор был одним из первых, кто обратил внимание на возможность цепного (лавинного) процесса деления этого изотопа урана. В каждом акте деления под действием нейтрона обязательно кроме продуктов деления («половинок» ядра урана) должно рождаться несколько нейтронов, которые в свою очередь будут вызывать деление других урановых ядер. Реакция приобретает цепной (лавинный) характер. И за короткое время процесс деления может охватить все ядра урана.

В природе этого не происходит прежде всего потому, что изотопа  $^{235}\text{U}$  в природном уране мало (0,72%), а рождающиеся нейтроны – быстрые. Они вылетают за пределы реакционной зоны, не успев вызвать развитие цепной реакции. Кроме того, в природной горной породе, содержащей уран, другие атомы будут активно поглощать нейтроны. И группа физиков-ядерщиков, сосредоточившаяся в США, пришла к выводу о возможности создания искусственных условий для развития цепной реакции. Из расчетов стало ясно, что это может стать источником огромной энергии (в расчете на килограмм в десять миллионов раз больше, чем выделяется при горении или обычном взрыве).

Поскольку деление урана было открыто немецкими физиками, в стране, грозящей войной всему миру, нужно было опередить Германию в работах по созданию страшного оружия. Прежде всего

физики договорились не публиковать в научных журналах материалы по ядерной физике, а сами же работы не прекращать и, наоборот, всемерно усиливать. Особенно ускорились работы после получения в 1940 году грантов от правительства США (в результате знаменитого письма А.Эйнштейна президенту Ф.Рузвельту) и успешной тайной закупки США у Бельгии большого количества урановой руды (в то время уран добывали только в Чехословакии и в африканской бельгийской колонии).

### Нептуний и плутоний

В 1940 году в США уже широким фронтом шло изучение реакции деления изотопов урана. Развернулись и работы по получению трансурановых элементов, но не с помощью нейтронов, как это делалось за несколько лет до этого в Италии, Франции и Германии, а на ускорителе в Беркли. Радиационная лаборатория Калифорнийского университета стала ведущей научной организацией, занимавшейся «проблемой урана», и была такой до создания сверхсекретной лаборатории в Лос-Аламосе, где были сосредоточены работы по конструированию бомбы. А работами по урану стал руководить Эрнест Орландо Лоуренс, получивший в 1939 году Нобелевскую премию по физике «за изобретение и совершенствование циклотрона». В 1936 году Лоуренс возглавил Берклиев-



Национальная лаборатория в Беркли

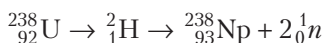


*Эрнест Орландо Лоуренс*

кую лабораторию и оставался на этом посту до конца жизни (до 1958 г.). В августе 1958 года лаборатория стала носить имя Лоуренса, сокращенно ее называют LBL, и получила статус Национальной лаборатории США.

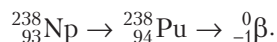
В Берклиевской национальной лаборатории имени Э.Лоуренса сосредоточены прорывные работы по физике, астрономии, химии и биологии, так или иначе связанные с атомной и ядерной физикой. Среди сотрудников лаборатории (по данным на 2022 год) 16 нобелевских лауреатов. Девиз лаборатории – «Привнесение научных решений в мир».

В создании атомной бомбы на первый план быстро вышли работы по получению сверхчистого изотопа урана-235, способного к эффективной реакции деления и получению второго делящегося элемента – трансуранового, как назвал его Лоуренс. На ускорителе разгонялись дейтроны, а мишенью были ядра изотопа урана-238. В ядерной реакции



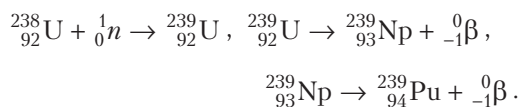
получается ядро атома нового элемента с числом протонов 93. Имя «нептуний» ему

было дано Э.Лоуренсом некоторое время спустя. Изотоп этого трансуранового элемент испытывает бета-распад с коротким временем жизни (периодом полураспада) около 3 суток. Он превращается в изотоп следующего, 94-го элемента в реакции радиоактивного превращения



Трансурановый элемент №94 и представлял главный интерес для создания атомной бомбы. Лоуренс впоследствии назвал его плутонием, завершая «планетный» ряд названий. Он, правда, не мог знать, что вскоре астрономы лишат Плутон звания планеты и переведут в группу планет-карликов.

Быстро выяснилось, что 3 из 20 изотопов плутония обладают свойствами при попадании нейтрона испытывать деление с выделением большого количества энергии. Один из них, плутоний-239, оказался самым подходящим для использования в бомбе. Его сейчас называют «оружейным плутонием». Этот изотоп получается не в ускорителях, а в цикле ядерных реакций



Большое количество медленных нейтронов, необходимых для первой реакции этого цикла, можно получить за счет реакции деления урана-235.

Получением плутония стал заниматься Э.Ферми. Под его руководством в Металлургической лаборатории в Чикаго был сооружен первый в мире графитовый ядерный реактор. Работы по его созданию развернулись в декабре 1941 года, а уже через год реактор был запущен и стал вырабатывать первые ощутимые граммы плутония. А еще через три года в СССР физики вновь проделали весь этот путь – от получения первых атомов трансурановых элементов нептуния и плутония до промышленных реакторов, ставших фабриками оружейного плутония и мирными атомными электростанциями.



**От №95 к №118**

Работы по синтезу других трансуранных элементов 70 лет назад развернулись в нескольких научных центрах. В США это была, конечно, Берклиевская национальная лаборатория. Позднее неподалеку, в городе Ливерморе, возникла еще одна национальная лаборатория, созданная для работ по термоядерной реакции синтеза – вначале для создания водородной бомбы. Но в ней тоже занимались синтезом трансуранных элементов. И сегодня в этой лаборатории продолжают эти работы, а также идет работа по созданию управляемого термоядерного синтеза как источника энергии. Разогрев плазмы до высокой температуры начала термоядерной реакции (20 миллионов градусов) здесь осуществляется с помощью концентрации многих лазерных излучений на плазменном шарике. Недавно в печати появилось сообщение о том, что концентрация лучей 192 мощных лазеров нагрела плазму до нужной температуры и реакция началась.

Два крупных научных центра по синтезу трансуранных элементов появились 70 лет назад в Европе. Один центр – Институт тяжелых ионов – возник в Германии, в земле Гессен в пригороде Дармштадта. Сейчас он называется Центром по изучению тяжелых ионов имени Гельмгольца. В этом названии отражена главная особенность этого центра – использование для синтеза линейных ускорителей тяжелых ионов (тяжелых по сравнению с протонами, дейтронами и альфа-частицами). Другой центр – в Советском Союзе в подмосковном городе Дубне (о нем будет рассказано дальше). Еще один центр возник в далекой Японии. Он называется просто: Институт физико-химических исследований. В США к двум национальным лабораториям присоединилась и еще одна, в штате Теннесси в городе Ок-Ридж.

Все эти центры до недавнего времени плодотворно сотрудничали, соревнуясь в своих открытиях и споря иной раз по поводу приоритета и присвоения названий открываемым трансуранным элементам. Утверждение открытия элемента, внесение

его в периодическую систему и окончательное присвоение названия производится Международным союзом теоретической и прикладной химии (IUPAC). Эта авторитетная международная организация была создана в 1919 году, она состоит из 20 отделов, один из которых (отдел неорганической химии) занимается, в частности, трансуранными элементами. Утверждение рекомендаций этого отдела происходит на конгрессах IUPAC раз в 4 года. Последний раз это было в 2016 году, с тех пор новые элементы официально еще не открыты.

Открытие трансуранных элементов можно разделить на три этапа. С 1940 по 1974 год это происходило практически только в Берклиевской национальной лаборатории. Было синтезировано 14 трансуранных – с №93 по №106. Всеми этими работами руководил Гленн Теодор Сиборг, выдающийся американский физик и химик. Всю жизнь он был верен Берклиевской лаборатории и Калифорнийскому университету, где стал его президентом. В годы создания атомной бомбы он возглавлял плутониевую часть проекта в Чикагской металлургической лаборатории, где работал Ферми. В 1961 году Сиборг был назначен председателем



*Гленн Теодор Сиборг*

Комиссии по атомной энергии США. Вместе с сотрудниками Берклиевской лаборатории Сиборг идентифицировал более 100 изотопов четырнадцати трансурановых элементов, разработав тончайшие методы изучения свойств этих изотопов. Он стал нобелевским лауреатом по химии 1951 года (вместе с Эдвином Макмилланом). И поэтому заслуженно элементу №106 было присвоено имя *сиборгий* (впервые при жизни ученого-открывателя).

Получение новых элементов начиналось с атомов плутония, бомбардируемых альфа-частицами, разогнанными в циклотронах. Так был получен элемент №95 (америций). Его бомбардировка альфа-частицами дала следующий элемент – №96 (кюриий). Затем были синтезированы берклий (№97) и калифорний (№98). Эти 4 элемента нашли широкое применение и в научных исследованиях, и в самых различных областях (от военного дела до медицины). Сегодня их получают в реакциях с нейтронами на специально сооруженных для этой цели ядерных реакторах. При длительной работе реакторов потоки нейтронов постепенно, один за другим превращают плутоний в америций, америций – в кюриий, кюриий – в берклий, берклий – в калифорний. Главная трудность и огромный объем работ связаны с извлечением новых элементов из их смеси с продуктами деления урана в отработанном ядерном топливе реактора. Понятно, что себестоимость новых изотопов очень высокая. Так, например, один грамм калифорния стоит 60 миллионов долларов. Это – самый дорогой металл в мире. Для сравнения – грамм золота (в зависимости от конъюнктуры) имеет цену 40–50 долларов.

Следующие элементы, №99 (эйнштейний), №100 (фермий), №101 (менделевий), №102 (нобелий) и №103 (лоуренсий), характерны тем, что у них нет долгоживущих изотопов. Максимальные периоды полураспада не превышают нескольких часов, а большинство изотопов имеют миллисекундные периоды полураспада. Это сильно затруднило изучение химических свойств изотопов и их спектров. По



*Георгий Николаевич Флёрв*

этим причинам их главное применение – это использование для синтеза последующих трансурановых элементов. Интересно, что эйнштейний и фермий были обнаружены впервые в осадках после испытания первого американского устройства прообраза водородной бомбы в 1952 году на атолле Эниветок в Тихом океане. И только через 10 лет ничтожное количество эйнштейния было получено на синхротроне в Беркли.

Вторая группа трансурановых элементов, от №104 (резерфордий) до №112 (коперниций), характерна тем, что они были синтезированы не на американском континенте, а в Европе – в Институте тяжелых ионов в Дармштадте и в Объединенном институте ядерных исследований в подмосковной Дубне. Идея получения всех этих элементов родилась в Дубненском институте (Г.Н.Флёрв и Ю.Ц.Оганесян). Это – столкновение ядер элементов конца периодической системы с ядрами середины периодической системы, а именно висмута и хрома, свинца и железа, свинца и никеля. При этом важно, чтобы ядро одного из этих атомов было особенно крепким, имело большую энергию связи нуклонов, что следовало из теоретической оболочечной модели атомных ядер. Но для разгона

одного из ядер до нужной энергии при этом необходимы были мощные ускорители. Они и были построены в этих двух центрах, в Дармштадте – линейный, в Дубне – циклический. Идентификация новых ядер стала еще более трудной. Время их жизни было столь коротким, что идентификация, например получение характеристических рентгеновских спектров, не поспевала за их радиоактивным распадом. Нужно было разрабатывать специальные методы исследования для каждого элемента.

Третий этап синтеза трансуронов, с №113 (нихоний) по №118 (оганесон) – это приоритетность Дубненского института (с участием для двух элементов ученых из Ливерморской национальной лаборатории США). Развивая оболочечную теорию ядер, Ю.Ц.Оганесян рассчитал, что наиболее подходящими ядрами для бомбардировок должны быть ядра изотопа кальция. Так и оказалось. И многие теоретические предсказания свойств новых элементов были подтверждены, например – плотность дармштадтия. Она оказалась самой большой плотностью для всех элементов, как и было предсказано, равной  $34,8 \text{ г/см}^3$ .

Особый интерес представляло получение 118-го элемента, оганесона, названного так в честь его создателя, академика Юрия Цолаковича Оганесяна. Внимательный читатель, возможно, обратил внима-

ние на необычное для всех других трансурановых элементов окончание *он* у этого элемента. Дело в том, что у атома оганесона наружная, седьмая электронная оболочка имеет 8 электронов. Подобные наружные электронные оболочки имеют химически инертные атомы («благородные газы»). Все они (кроме гелия) имеют окончание *он*. Самый тяжелый благородный газ на Земле – это радон. Эти атомы мало подвержены соединению с другими атомами – они химически нейтральны. Они даже не могут объединиться в собственную молекулу, как это делают водород, кислород и азот. Теория однако предсказывала, что температура сжижения этого нового вещества будет примерно 350 К, а температура отвердевания еще ниже. При комнатной температуре вещество из оганесона теоретически должно быть не благородным газом, а «благородным» твердым телом, оганесоновым льдом. Правда, в 2007 году было синтезировано всего три (!) атома оганесона и проверить эти предсказания было невозможно. Но прошло много лет, научились получать уже заметные доли грамма этого элемента (бомбардировкой заряженными частицами мишени из калифорния), и теоретические предсказания сбываются.

Может возникнуть вопрос: почему так трудно идентифицировать новые элементы и определять их физические и химические свойства? Казалось бы, что после открытия элемента и убежденности в его существовании нужно переходить к его массовому производству с использованием калифорниевой мишени (другие трансурановые изотопы не подходят из-за малого времени жизни). Но вспомните цену калифорния! Мишени из калифорния делают только лишь в двух местах – в США и в России. Дубненский институт имеет калифорниевую мишень, он ее бережет для



Юрий Цолакович Оганесян

получения новых, еще не открытых элементов.

В двух следующих абзацах обсуждаются вопросы о порядке заполнения электронных атомных оболочек. Это особенно интересно тем, кто любит химию.

Открытие 118-го элемента подвело некоторый итог заполнению периодической системы новыми элементами. Еще Лоуренс в 1947 году назвал элементы после актиния (№89) актиноидами, по аналогии с лантаноидами (элементами с №57 по №72). У 14 лантаноидов при неизменной наружной оболочке из двух  $5s$ -электронов постепенно заполняется электронами внутренняя подоболочка  $4f$ . У актиноидов при неизменной наружной оболочке из двух  $7s$ -электронов четырнадцатью электронами заполняется внутренняя подоболочка  $5f$ . Последний элемент, у которого она заполнена, это 102-й элемент – нобелий. Лоуренс предсказал, что у 103-го элемента останется неизменной наружная оболочка, состоящая из двух электронов, а начнет заполняться внутренняя оболочка  $6d$ . Так и оказалось – это было подтверждено исследованием химических свойств 103-го элемента. Не потому ли его и назвали лоуренсием?

В  $d$ -подоболочке может быть не больше 10 электронов, и 10 элементов, начиная с лоуренсия, сейчас принято называть сверхактиноидами (это слово тоже придумал Лоуренс). Последний из них – 112-й элемент, коперниций. Поэтому очень важно было знать, как поведет себя 113-й атомный электрон. Оказалось, что ему выгоднее стать в состоянии  $7p$  наружной седьмой оболочки, чем в состоянии внутренних оболочек  $5g$  или  $6f$ . Изучение химических свойства 113-го элемента (нихония), проведенное в Дубне, надежно показало это. Полностью заполненной  $7p$ -подоболочка стала у оганесона, 118-го элемента.

Сегодня сверхактиноидами называют элементы с №103 по №118. А что же дальше? Последующие элементы продолжателем дела Лоуренса Гленн Сиборг назвал суперактиноидами. Дальнейшие синтезы покажут характер заполнения электронных оболочек у них. Но кроме этого

физиков волнует вопрос о теоретических предсказаниях особой устойчивости некоторых суперактиноидов, которые были названы «островом стабильности».

Но вот уже 7 лет нет сведений о синтезе новых элементов. У кандидатов на места №119 и №120, об открытии которых промелькнули сообщения, слишком короткое время жизни, чтобы можно было сделать надежные выводы. В Дубне ждут полного ввода в строй нового мощного ускорителя – ионного коллайдера. Аналогичные проблемы существуют и в других мировых центрах синтеза трансуранных элементов.

А нужно ли продолжать работы по синтезу трансуранов? Может быть, следует прекратить эти сверхдорогие исследования и ограничиться 118-ю элементами периодической системы? Есть несколько ответов на такой вопрос. Прежде всего, исследования эти развивают всю ядерную физику. Сегодня создается кварк-глюонная модель атомного ядра. Она должна прийти на смену оболочечной модели, на которой были основаны все сделанные синтезы. В ближайшие годы научное сообщество физиков-ядерщиков ждет открытия новых элементов, у которых найдутся долгоживущие изотопы. Тогда станет ясно, находятся ли на верном пути теоретики-ядерщики.

Но не слишком ли велика плата за новый вариант теории ядра? Ведь все эксперименты ядерной физики очень дорого обходятся. Строительство гигантских ускорителей, трансуранные синтезы, проблема захоронения радиоактивных отходов – это многомиллиардные затраты. Однако напрашивается аналогия с освоением ближнего космоса и астрофизическими исследованиями Вселенной. Это ведь тоже стоит очень дорого. Но остановить развитие работ как в космических исследованиях, так и в ядерной физике невозможно. Кроме вопросов национально-государственного престижа, это необходимо для удовлетворения жажды узнать новое о том мире, в котором мы живем. Развитие прогресса с самого начала возникновения человечества определялось не только материальными потребностями. Жажда познания (или,

как иногда более грубо говорится, любопытство), наверное, самая главная духовная потребность человечества.

Не менее важно, по-видимому, и практическое значение получения новых элементов. Считается, что заметное уменьшение смертности от онкологических заболеваний связано именно с использованием для ранней диагностики и лечения искусственных, созданных на ускорителях и в реакторах элементов – технеция, калифорния и др. Вполне возможно, что изотопы из «острова стабильности» тоже проявят себя в этом применении.

Впрочем, есть и другие области, где трансуранные элементы оказались незаменимыми. Интересно, что без трансуранных элементов, как источников энергии, многие космические исследования были бы невозможны, например – посылка космических аппаратов к Луне или проекты отклонения крупных астероидов от возможного удара по Земле.

### О названиях элементов

Что касается «старой» периодической системы, с ее 92 элементами, то созданная в 1919 году международная организация IUPAC первым делом навела порядок в их названиях, вернее в окончаниях этих названий. Было решено (в старом варианте периодической системы) названия элементов с первой по шестую группу заканчивать окончанием *um*, седьмой группы (галогенов) – окончанием *in*, восьмой группы (химически нейтральных, «благородных» элементов) – окончанием *on* (кроме гелия, который произносится как *helium*).

В бурные послереволюционные годы российские химики не успели (или не захотели) освоить эти правила, и нашему времени достался полный хаос в этом вопросе. Из 92 элементов периодической системы 48 заканчиваются у нас на *ий*, что, вообще говоря, соответствует духу славянских языков. У 10 элементов сохранились их исторически укоренившиеся в русском языке имена, естественно, не предусмотренные их открывателями (кремний, железо, медь, мышьяк, серебро, олово, сурьма, золото, ртуть, свинец). Правда, в

химических формулах эти элементы произносятся, как и полагается – в латинском международном звучании с окончанием *um* (силиций, феррум, купрум, арсеникум, аргентум, станнум, стибиум, аурум, хидраргирум, плюмбум). Пять благородных газов произносятся так, как и во всем мире, и заканчиваются на *on*. Что же касается оставшихся 29 элементов, то тут – полный разнобой. Шесть элементов, имеющих и славянские и неславянские корни, – водород, углерод, азот, кислород, фосфор, сера – в формулах произносятся просто по первой букве их латинского (международного) названия. Самое известное вещество с таким произношением – это  $H_2O$ . И еще у 23 элементов много разных вариантов – все галогены, титан, хром, марганец, кобальт, никель и т.д. до платины и урана.

Когда был синтезирован 43-й элемент, он получил международное имя *технециум*. Но, естественно, в нашей стране он получил имя с традиционным окончанием большинства элементов – *технеций*. То же самое произошло и со всеми трансуранными элементами. Все они у нас оканчиваются на *ий*, а «там» – на *ум*. Единственное исключение – 118-й элемент. Как и полагается благородному химическому элементу, он всюду произносится одинаково – *оганесон*.

Как обстоит дело с присвоением названий новым трансуранным элементам? Отдел Международного союза теоретической и прикладной химии, который занимается трансуранными элементами, работает над утверждением нового элемента с внесением его в периодическую систему и присвоением ему названия. Этот отдел готовит предложения для утверждения их конгрессом Международного союза.

Дело в том, что синтезированный элемент принято сразу же называть условным именем – по принципу, введенному еще Д.И.Менделеевым. Так, 118-й элемент вначале имел названия *экарадон*. В 2015 году было признано его открытие коллективом Дубенского института и он был внесен в периодическую систему элементов под предварительным именем *унунок*–

тий. А через год он получил окончательное имя *оганесон* (*oganesson* в международном написании).

Для первых трансурановых элементов трудностей в утверждении приоритета и присвоении названий не возникало. Была только одна научная организация, где совершался синтез новых элементов, Берклиевская национальная лаборатория, и один научный руководитель, Э.Лоуренс. Названия элементов с №93 по №100 (от нептуния по фермий) не вызывали никаких дискуссий. Все началось потом, когда в работу по синтезу включились немецкая и советская группы. Появился даже термин «трансфермиевские войны». Эти «войны» на самом деле были доброжелательными дискуссиями, не мешавшими продолжению совместной работы по обсуждению результатов и поиску истины.

Два элемента получили «планетные» названия, а десять элементов после урана – по географическому названию страны или региона, где были проведены работы (даже если они и не завершились в этой стране). Это – америций, берклий, калифорний, дубний, дармштадтий, хассий (Дармштадский научный центр находится в немецкой земле Гессен), нихоний (древнее название Японии), московий (в честь Московской области, в которой находится город Дубна), ливерморий и теннессий (в честь штата, где находится Ок-Риджский научный центр). А 102-й элемент получил название *нобелий* по предложению шведских ученых, много сделавших для его синтеза. Остальные названия даны в честь ученых – физиков и химиков. Это – кюрий, эйнштейний, фермий, менделевий, лоуренсий, резерфордий, сиборгий, борий, мейтнерий, рентгений, коперниций, флеровий и оганесон.

Неожиданное название 112-го элемента – коперниций – было присвоено по просьбе ученых Дармштадского института тяжелых ионов, которые синтезировали его, а 110-й элемент уже получил имя дармштадтий. И в 537-ю годовщину со дня рождения Коперника, 19 февраля 2010 года, немецкие ученые обратились в IUPAC с соответствующей просьбой.



*Объединенный институт ядерных исследований в Дубне*

Мейтнерий получил свое название в честь Лизе Мейтнер, которая в 1939 году первой разобралась в реакции деления ядра урана и создала теорию этого явления в рамках капельной модели ядра. С этого и начался «атомный век» цивилизации.

Утвержденная приоритетность государств в открытии трансуранов такова: США – 10 элементов, Россия (СССР) – 7 элементов, Германия – 5 элементов, совместный приоритет у России и США у 3 элементов. И еще один элемент имеет совместный приоритет России и Германии.

### **Физика в городе на Волге**

В заключение – немного о нашем российском центре, дубненском Объединенном институте ядерных исследований (ОИЯИ), где было синтезировано большинство трансурановых элементов, открытых в этом столетии.

Дубненский институт был создан одновременно с выступлением И.В.Курчатова в английском центре ядерных исследований, тогда занимавшимся, главным образом, созданием ядерного оружия – водородных бомб. Это выступление 25 апреля 1956 года само было бомбой. В разгар первой холодной войны главный ядерщик нашей страны подробно рассказал, какие работы ведутся в СССР по термоядерной реакции синтеза гелия из изотопов водорода. В Англии и США эти



*Один из дубненских ускорителей*

работы считались тогда сверхсекретными.

А за месяц до этого в Москве представители 11 стран подписали Соглашение о создании ОИЯИ с целью «объединения их научного и ядерного потенциала для изучения фундаментальных свойств материи». Этот институт возник на базе Института ядерной физики АН СССР, находящегося в подмосковном городе Дубна, около Волги, вытекающей в этом месте из Московского моря (Иваньковского водохранилища). Там уже был ускоритель и под руководством В.И. Векслера велись работы по созданию протонного синхрофазотрона на 10 ГэВ, тогда самого крупного в мире.

ОИЯИ, как коллаборация исследователей из многих стран, был создан по аналогии с появившимся Европейским центром (ЦЕРН) для стран, не вошедших в него. Финансовый вклад СССР составлял 50%, КНР 20%. Остальные 30% приходились на долю других 9 стран-учредителей, – Чехословакии, Польши, Румынии, Болгарии, Греции, Вьетнама, Египта, Кубы и Монголии. Первым директором института стал профессор Д.И. Блохинцев, создавший в подмосковном Обнинске Физико-энергетический институт АН СССР и первую в мире атомную электростанцию.

В первые же годы работы ОИЯИ были достигнуты успехи в понимании кварковой структуры адронов, хромодинамики («цветность» кварков), нейтринных ос-

цилляций и др. Это был передний край физики микромира.

Была создана лаборатория ядерных реакций под руководством академика Г.Н. Флёрва, а затем – академика Ю.Ц. Оганесяна. Уже в 1957 году в этой лаборатории был достигнут успех – был синтезирован один из изотопов nobelium, 102-го элемента. За прошедшие 60 лет в лаборатории было открыто свыше 200 радиоактивных изотопов трансурановых элементов, созданы уникальные установки для определения их физических

и химических характеристик. Теоретические разработки ученых лаборатории получили всемирное признание.

Сегодня ОИЯИ – это комплекс из 7 крупных лабораторий, в которых работают более 1200 научных сотрудников, в том числе действительные члены и члены-корреспонденты Национальных академий наук, доктора и кандидаты наук, около 2000 техников и инженеров. Экспериментальная база – прежде всего, 5 исследовательских реакторов и 3 ускорителя. Закачивается строительство единственного в мире ионного ускорителя-коллайдера.

Сегодня (на 1 января 2023 года) 13 государств финансируют ОИЯИ и их ученые работают в нем. Это – Азербайджан, Армения, Белоруссия, Вьетнам, Греция, Египет, Казахстан, Куба, Молдавия, Монголия, Российская Федерация, Словакия и Узбекистан. Директором института два года назад выбран российский физик, 45-летний академик Григорий Владимирович Трубников. Дубна уже давно получила статус наукограда.

Высокий научный потенциал, которым обладает ОИЯИ, его экспериментальная база позволяющая надеяться на дальнейшее раскрытие тайн атомного ядра. А синтез трансурановых элементов, которых нет в природе, – свидетельство могущества человеческой мысли, не боящейся дерзкого вмешательства в действия законов природы, управляющих нашим миром.

# Еще об одной «олимпиадной» задаче про графы, или Еще одна задача о раскраске

А.РАЙГОРОДСКИЙ

## Была недавно такая задачка...

В 2022 году я в очередной раз руководил командой, которая составляла вариант Московской математической олимпиады для 10 класса. И придумал я задачку, которая попала на шестую позицию. Сейчас я ее здесь сформулирую и сразу же решу. Но это будет только началом большой истории, которая выведет нас буквально на передний край современной комбинаторики и теории графов. Формулировку и решение я привожу дословно по тексту из брошюры [1].

**Формулировка.** Андрей Михайлович выписал на доску все возможные последовательности длины 2022, состоящие из 1011 нулей и 1011 единиц. Назовем две последовательности *совместимыми*, если они совпадают ровно в 4 позициях. Докажите, что Андрей Михайлович может разбить все последовательности на 20 групп так, чтобы никакие две совместимые последовательности не попали в одну группу.

**Решение.** Понятно, что совместимые последовательности в двух позициях совпадают по единицам, а в двух – по нулям. Рассмотрим первые пять позиций. Существует  $C_5^3 = 10$  способов поставить три единицы на эти пять позиций. Для каждого из этих десяти способов Андрей Михайлович выделяет группу написанных на доске последовательностей, первые три единицы которых стоят на соответствующих трех позициях. Таким образом, Андрей Михайлович разбивает на десять групп все написанные на доске последовательности,

у которых на первых пяти позициях встречаются хотя бы три единицы. Кроме того, любые две последовательности из одной группы совпадают по единицам хотя бы в трех позициях, следовательно, не являются совместимыми. Аналогично, Андрей Михайлович разбивает на десять групп все написанные на доске последовательности, у которых на первых пяти позициях встречаются хотя бы три нуля. А поскольку у каждой последовательности на первых пяти позициях встречаются или три нуля, или три единицы, Андрей Михайлович разбил все последовательности на 20 групп.

Из решения видно, что число 2022 в формулировке выбрано исключительно из соображений «стиля». Подойдет любое четное число  $n$ , а в последовательностях тогда будет по  $n/2$  единиц и нулей. Ответ 20 при сохранении метода решения не изменится. Несложно придумать и еще одно обобщение. А именно, пусть  $n$  – четное число, снова выписаны все последовательности из  $n/2$  единиц и  $n/2$  нулей, но теперь две последовательности *совместимы*, если они совпадают ровно в  $2s$  позициях, где  $s$  – любое целое неотрицательное число, меньшее  $n/2$ . Данное нами решение воспроизводится практически дословно, и число групп получается равным  $2C_{2s+1}^{s+1} = 2C_{2s+1}^s$ . Любопытно, что, поставив мы задачу сразу в таком виде, вряд ли бы она заняла шестую позицию в варианте: биномиальный коэффициент дает намек на то, как нужно действовать.

Скоро мы узнаем, что все, о чем мы до сих пор говорили, лишь верхушка айсбер-



га. Для этого мы в следующем разделе переведем задачу на язык теории графов.

### На языке графов

В этом разделе мы предполагаем, что читатель знаком с понятием графа как математического объекта, а не аристократического титула. Название раздела не должно приводить читателя в ступор: «А что, графы говорят на особом языке? Князья их не поймут?»

Перейдем от шуток к делу и прежде всего договоримся, что всюду далее мы будем встречаться только с обыкновенными (простыми) графами, т.е. графами, у которых нет кратных ребер, нет ориентации и нет петель. Желая подчеркнуть, что данный граф  $G$  имеет множество вершин  $V$  и множество ребер  $E$ , мы будем писать, как это принято, что  $G = (V, E)$ .

Теперь напомним одну очень важную характеристику графа – его *хроматическое число*. Для данного графа  $G = (V, E)$  хроматическое число – это минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить все вершины из множества  $V$ , чтобы концы каждого ребра из множества  $E$  имели разные цвета. Обозначается хроматическое число  $\chi(G)$ . Например, если  $C_n$  – это простой цикл на  $n$  вершинах (рис. 1), то  $\chi(C_n) = 2$  при четных  $n$  и  $\chi(C_n) = 3$  при нечетных  $n$ . А если  $T_n$  – дерево с  $n \geq 2$  вершинами, то  $\chi(T_n) = 2$  (рис. 2). Если же, скажем,  $K_n$  – это полный граф на  $n$  вершинах, т.е. граф, в котором проведены все возможные  $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$  ребер, то  $\chi(K_n) = n$ .

В целом, хроматические числа графов устроены крайне непросто. Легко лишь проверить, что граф с хотя бы одним ребром тогда и только тогда имеет хроматическое число 2 (красится в 2 цвета или,

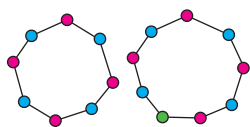


Рис. 1

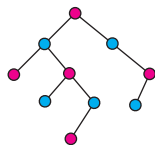


Рис. 2

как еще говорят, *двудолен*), когда в нем нет простых циклов  $C_n$  с нечетным  $n$ . Доказательство утверждения в одну сторону («необходимость») очевидно (см. предыдущий абзац), а доказательство в другую сторону («достаточность») посложнее, но читатель, который ранее не знал этого факта, может найти его в литературе или даже самостоятельно доказать. Уже проверка существования раскраски графа в 3 цвета – алгоритмически трудная проблема.

Мы не будем много времени тратить здесь на обсуждение различных вопросов, которые возникают в связи с понятием хроматического числа, хотя они безумно интересны. Наша цель – олимпиадная задача и ее обобщение из первого раздела. Причем же здесь хроматические числа?

Пусть  $n$  – четное число, а  $s$  – неотрицательное целое число, строго меньшее  $n/2$ . Обозначим  $J(n, s)$  граф, вершинами которого служат все возможные последовательности из  $n/2$  единиц и  $n/2$  нулей, а ребрами соединены все пары вершин, отвечающих совместимым последовательностям, т.е. последовательностям, совпадающим ровно в  $2s$  позициях. Что значит покрасить вершины этого графа согласно условиям из определения хроматического числа: концы каждого ребра должны иметь разные цвета? Это то же самое, что так разбить множество вершин (последовательностей) на группы (цвета), чтобы никакие две совместимые последовательности не попали в одну группу. Таким образом, результат первого раздела – это утверждение о том, что независимо от величины  $n$  справедливо неравенство  $\chi(J(n, s)) \leq 2C_{2s+1}^s$ . Здесь именно неравенство, так как мы лишь предложили способ покраски, но отнюдь не доказали, что он оптимален, т.е. дает *минимальное* количество цветов, как это требуется в определении хроматического числа.

Раз мы не знаем, оптимальна ли «олимпиадная» оценка, значит, нужно бы подумать о нижних оценках величины  $\chi(J(n, s))$ . Оказывается, что все сколь угодно нетривиальные результаты здесь

являются следствиями из большой и очень глубокой науки о так называемых *кнезеровских графах*. О них рассказывалось в статьях [2–4], и в рамках этой статьи не станем вдаваться в довольно сложные подробности. Скажем лишь, что в итоге получается неравенство  $\chi(J(n, s)) \geq s + 2$ , которое пока никто не умеет усиливать.

Итак, сейчас мы знаем, что

$$s + 2 \leq \chi(J(n, s)) \leq 2C_{2s+1}^s.$$

А насколько велик разрыв между оценками? Как растет «олимпиадная» величина  $2C_{2s+1}^s$ ? Давайте ее тоже оценим. Хорошо известно тождество

$$C_{2s+1}^0 + C_{2s+1}^1 + \dots + C_{2s+1}^s + C_{2s+1}^{s+1} + \dots + C_{2s+1}^{2s+1} = 2^{2s+1}.$$

Более того, слагаемые сначала растут, а потом убывают. Наша величина – одна из двух наибольших в сумме. Значит,

$$C_{2s+1}^s \geq \frac{2^{2s+1}}{2s + 2}.$$

Таким образом, известная нам сейчас верхняя оценка растет примерно как экспонента, в то время как нижняя оценка линейна. Это чудовищный зазор! Но его можно очень мощно сократить, улучшив... верхнюю оценку. В следующем разделе мы свяжем нашу задачу с еще одним очень красивым разделом комбинаторики – раскрасок. Это позволит нам показать, что олимпиадная оценка невероятно завышена и вместо нее справедлива оценка порядка  $s^2$ , которая уже совсем не так ужасно смотрится при сравнении с нижней оценкой  $s + 2$ .

В завершение раздела дадим еще один равносильный вариант определения графа  $J(n, s)$ , с которым нам будет удобно работать. В этом варианте вершинами графа служат все возможные  $n/2$ -элементные подмножества множества  $R_n = \{1, \dots, n\}$ , а ребрами две вершины соединяются тогда и только тогда, когда соответствующие подмножества имеют ровно  $s$  общих элемен-

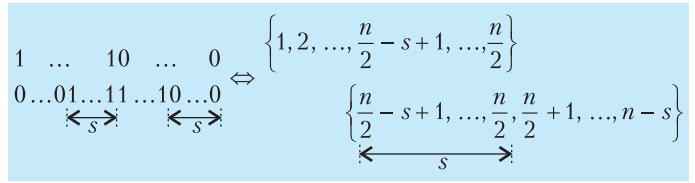


Рис. 3

тов. На рисунке 3 показано, почему исходное определение эквивалентно приведенному только что.

### Задача об уклонении и значительное уточнение олимпиадной оценки

#### Гиперграфы и их раскраски

Классическое понятие графа допускает очень естественное обобщение. По сути, что такое граф? Это множество объектов, на которых введены парные отношения (скажем, множество людей и отношение знакомства или множество последовательностей и отношение совместимости). Но ведь на множестве можно и более сложные соотношения рассматривать. Например, есть 30 школьников, из которых пятеро очень любят комбинаторику, еще пятеро очень любят геометрию, еще четверо – теорию графов, шестеро – теорию чисел и т.д. Множества любителей могут и пересекаться. Получается объект, который называется *гиперграфом*. У него, как и у графа, есть вершины (в данном примере это 30 школьников) и есть ребра (в данном примере это подмножества множества вершин, имеющие мощности 5, 5, 4, 6 и т.д.). В общем случае пишут прямо так же, как и в теории графов:  $H = (V, E)$ . Только теперь  $E$  – это совокупность некоторых подмножеств множества  $V$ , и эти подмножества не обязательно двухэлементные и даже не обязательно одинаковой мощности. Для дальнейшего удобства мы будем считать, что одноэлементными или пустыми ребра все-таки не бывают. При этом, как и раньше, мы считаем, что в гиперграфе нет кратных ребер, у ребер нет ориентации (т.е. они являются сочетаниями) и нет совпадающих вершин (это сочетания без повторений). Отметим, что отсутствие кратных ребер – это удобное нам сейчас

соглашение, хотя в примере со школьниками вполне могли быть и совпадающие множества.

Конечно, графы имеют неоспоримое преимущество перед гиперграфами: их гораздо удобнее рисовать. Типичный «портрет» гиперграфа изображен на рисунке 4. Ребра напоминают эдакие сардельки, и я постоянно упоминаю в лекциях этот аппетитный факт. Смотреть приятно, но понимать, что там за варево, труднее.

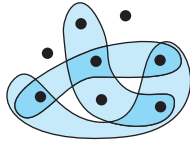


Рис. 4

Гиперграфы тоже можно красить. Давайте, как и прежде, красить вершины, причем только в два цвета. Условно назовем эти цвета красным и синим. Какая раскраска «лучше»? Ну, например, та, в которой в каждом ребре примерно поровну поровну красных и синих вершин. Разумеется, далеко не всегда такого удается добиться. Очень красивая и нетривиальная теорема звучит следующим образом.

**Теорема 1.** Для любого натурального  $k$  существует  $m \in [k; 8k]$  и существует гиперграф  $H = (V, E)$ , обладающий следующими свойствами: (1)  $|V| = |E| = m$  (здесь и далее модуль множества – это его мощность, т.е. количество элементов в нем), (2) при любой раскраске множества  $V$  в красный и синий цвета найдется ребро  $e \in E$ , в котором разность чисел красных и синих вершин по модулю не меньше  $\frac{\sqrt{m}}{2}$ .

Теорема говорит о том, что для произвольного гиперграфа не только не получится добиться того, чтобы в каждом ребре было поровну (или почти поровну) вершин красного и синего цветов, но и не получится сделать так, чтобы в каждом ребре числа вершин разного цвета отличались меньше, чем на величину порядка корня от количества вершин и ребер. Иными словами, бывают гиперграфы, на которых уклонение любой раскраски от разбиения каждого ребра на две почти равные части весьма велико.

Доказательство теоремы 1 и множество других интересных сведений про задачу об уклонении можно найти в брошюрах [5], [6], в книге [7], а также в статье [8]. В частности, там доказано, что в некотором смысле теорема 1 неулучшаема. Еще была очень близкая по теме статья [9], но там до задач об уклонении дело не дошло.

### Катарсис<sup>1</sup>

Олимпиадная оценка допускает следующее феерическое усиление.

**Теорема 2.** Пусть  $32(s+1)^2 \leq n$ . Тогда  $\chi(J(n, s)) \leq 64(s+1)^2$ .

Это действительно очень мощный ход. Вместо экспоненциальной оценки получаем квадратичную! Конечно, зазор между  $s+2$  (нижняя оценка) и  $64(s+1)^2$  выглядит намного приличнее, чем зазор между  $s+2$  и  $2C_{2s+1}^s$ . Однако зазор по-прежнему есть, и, как я обещал в начале статьи, мы выходим здесь на передний край науки: устранение этого зазора – открытая проблема! Множитель 64 не оптимален. Его можно уменьшить. Но это и все, что мы сейчас умеем. Придумали эту оценку Д. Черкашин, С. Киселев и Й. Балог примерно в 2018 году. Их рассуждение – это обобщение идеи из решения олимпиадной задачи. Ну, скоро все увидим.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 2, заметим еще, что в ней есть ограничение на  $s$ , которое отсутствует в случае олимпиадной оценки. На самом деле, при больших значениях  $s$  есть еще

<sup>1</sup> Катарсис – это слово, которое я часто употребляю в лекциях, имея в виду восторг, который после долгого и, казалось бы, трудно доказательство должен испытать слушатель, неожиданно осознавший в конце, что же случилось. Ударение правильно ставить на любую из букв «а», хотя считается, что на первую – лучше. Лично я почему-то люблю говорить «катарсис». Читаем в словаре литературоведческих терминов: «катарсис (др.-греч. – возвышение, очищение, оздоровление) – ...очищение, просветление человеческой души под влиянием сопереживания, сострадания, потрясения, вызванного соприкосновением человека с произведением искусства». А математика – это искусство!

нетривиальные подходы (совсем другие!), которые также позволяют значительно уточнить олимпиадное неравенство. Но это уже выходит за рамки данной статьи.

**Доказательство теоремы 2.** Теорема 1 верна для любого  $k$ . Рассмотрим  $k = 4(s + 1)^2$ , возьмем соответствующее  $m \in [4(s + 1)^2; 32(s + 1)^2]$  и соответствующий гиперграф  $H = (V, E)$ . Поскольку  $32(s + 1)^2 \leq n$ , то  $m \leq n$ . У нас есть множе-

ство  $\mathcal{R}_n = \{1, \dots, n\}$ , из которого формируются вершины графа  $J(n, s)$ . Давайте отождествим вершины гиперграфа  $H$  с первыми  $m$  числами из множества  $\mathcal{R}_n$  (фактически просто занумеруем вершины гиперграфа). Тогда  $V = \mathcal{R}_m$  и каждое ребро  $e \in E$  – подмножество в  $\mathcal{R}_m \subset \mathcal{R}_n$ . При этом каждая вершина  $A$  графа  $J(n, s)$  – это тоже подмножество в  $\mathcal{R}_n$  мощности  $n/2$ . Таким образом, мы вполне можем пересекать между собою ребра гиперграфа и вершины графа. Забавно?

Зафиксируем произвольное ребро  $e \in E$ . Если вершина  $A$  графа  $J(n, s)$  такова, что  $|A \cap e| \geq \frac{|e| + s + 1}{2}$ , то красим вершину  $A$  в цвет, который обозначим  $\chi_1(e)$ . Пусть  $\bar{A} = \mathcal{R}_n \setminus A$ . Если вершина  $A$  графа  $J(n, s)$  такова, что  $|\bar{A} \cap e| \geq \frac{|e| + s + 1}{2}$ , то красим вершину  $A$  в цвет, который обозначим  $\chi_2(e)$ . Конечно, никакая вершина не может оказаться покрашенной сразу в оба цвета  $\chi_1(e)$  и  $\chi_2(e)$ , ведь иначе получилось бы, что ребро  $e$  пересекает и вершину  $A$ , и ее дополнение  $\bar{A}$  по строго более чем половине своих элементов, что, очевидно, невозможно. Однако остаются еще три вопроса, ответы на которые завершат доказательство теоремы. Приведем эти вопросы.

**Вопрос 1.** Все-таки одна и та же вершина может оказаться покрашенной сразу в несколько цветов. Только эти цвета будут соответствовать разным ребрам гиперграфа, т.е. вполне может случиться так, что

вершина  $A$  покрашена в цвета  $\chi_1(e_1)$  и  $\chi_2(e_2)$  или в цвета  $\chi_1(e_1)$  и  $\chi_1(e_2)$ . Что делать?

**Вопрос 2.** Вполне может случиться так, что какая-то вершина  $A$  вовсе не покрашена. Так будет, если для каждого  $e \in E$  одновременно выполнены неравенства

$$|A \cap e| < \frac{|e| + s + 1}{2},$$

$$|\bar{A} \cap e| < \frac{|e| + s + 1}{2}.$$

Но так ли это?

**Вопрос 3.** Если все-таки две разные вершины покрашены в один и тот же цвет, то почему между ними нет ребра?

Давайте снимем вопросы. Сначала ответим на вопрос 1, потом – на вопрос 3, а в самом конце – на вопрос 2.

**Ответ на вопрос 1.** Тут все совсем просто. Если какая-то вершина покрашена в несколько цветов, то выберем любой один из них.

**Ответ на вопрос 3.** Понятно, что если какие-то две вершины  $A, B$  покрашены в один и тот же цвет  $\chi_1(e)$ , то уже внутри ребра  $e$  они пересекаются по, как минимум,  $s + 1$  элементам (рис. 5), а значит, ребра в  $J(n, s)$  между  $A$  и  $B$  нет. Таким образом, покраска в цвет  $\chi_1(e)$  корректна. Если же  $A$  и  $B$  покрашены в цвет  $\chi_2(e)$ , то аналогично получаем, что  $|\bar{A} \cap \bar{B}| \geq s + 1$ . Но

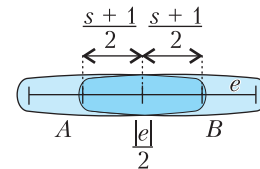


Рис. 5

так что  $|A \cap B| \geq s + 1$ , и снова покраска корректна.

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = n - |A \cup B| = n - |A| - |B| + |A \cap B| =$$

$$= n - \frac{n}{2} - \frac{n}{2} + |A \cap B| = |A \cap B|,$$

так что  $|A \cap B| \geq s + 1$ , и снова покраска корректна.

**Ответ на вопрос 2.** Давайте убедимся, что все вершины графа  $J(n, s)$  покрашены. Пусть  $A$  – произвольная вершина. Нам нужно найти такое ребро  $e \in E$ , что либо  $|A \cap e| \geq \frac{|e| + s + 1}{2}$ , либо  $|\bar{A} \cap e| \geq \frac{|e| + s + 1}{2}$ .

Для этого мы покрасим... гиперграф! А именно, покрасим вершины гиперграфа  $H$ , т.е. элементы множества  $\mathcal{R}_m$ , в два цвета: элементы, попадающие в множество  $A$ , покрасим в синий цвет, а элементы, попадающие в  $\bar{A}$ , сделаем красными. Мы знаем (по теореме 1), что при любой раскраске вершин гиперграфа  $H$  найдется ребро  $e \in E$  с большим уклонением, т.е.

$$\left| |e \cap A| - |e \cap \bar{A}| \right| \geq \frac{\sqrt{m}}{2},$$

где  $|e \cap A|$  – число синих вершин в ребре  $e$ , а  $|e \cap \bar{A}|$  – число красных вершин в том же ребре. Поскольку  $m \geq k = 4(s+1)^2$ , имеем  $\frac{\sqrt{m}}{2} \geq s+1$ .

Докажем, что найденное ребро и есть то, что мы ищем. Предположим противное:

$$|A \cap e| < \frac{|e| + s + 1}{2}, \quad |\bar{A} \cap e| < \frac{|e| + s + 1}{2}.$$

Если мы придем к противоречию, то  $A$  будет покрашена, а стало быть, и все вершины графа  $J(n, s)$  будут покрашены по аналогии. Итак, во-первых,  $|A \cap e| < \frac{|e| + s + 1}{2}$ . Значит,  $|\bar{A} \cap e| < \frac{|e| - s - 1}{2}$ , откуда

$$|A \cap e| - |\bar{A} \cap e| < \frac{|e| + s + 1}{2} - \frac{|e| - s - 1}{2} = s + 1.$$

Во-вторых,  $|\bar{A} \cap e| < \frac{|e| + s + 1}{2}$ . Значит,  $|A \cap e| < \frac{|e| - s - 1}{2}$ , откуда

$$|A \cap e| - |\bar{A} \cap e| > \frac{|e| - s - 1}{2} - \frac{|e| + s + 1}{2} = -s - 1.$$

В итоге получаем, что

$$\left| |A \cap e| - |\bar{A} \cap e| \right| < s + 1,$$

и это противоречит неравенству

$$\left| |e \cap A| - |e \cap \bar{A}| \right| \geq \frac{\sqrt{m}}{2} \geq s + 1.$$

Итак, мы покрасили все вершины графа  $J(n, s)$ . Сколько цветов мы использовали?

Точно не больше, чем  $2|E| = 2m < 16k = 64(s+1)^2$ . Это катарсис.

Как мы говорили выше, теорема 1 не-улучшаема, разве что константу в ней можно улучшить. Поэтому трудно ожидать, что аналогичными методами удастся серьезно продвинуться в вопросе получения верхних оценок хроматического числа.

Завершая статью, скажем, что изучение графов  $J(n, s)$  и их различных обобщений глубоко мотивировано вопросами теории кодирования, теории Рамсея, комбинаторной геометрии и др. Например, хроматические числа этих графов связаны со знаменитой задачей о хроматическом числе пространства (см. [10], [11]), с не менее знаменитой проблемой Борсука (см. [5], [12]) и др.

### Литература

1. LXXXV Московская математическая олимпиада. Задачи и решения. – М.: МЦНМО, 2022.
2. А.М.Райгородский. Гипотеза Кнезера и топологические методы в комбинаторике. – М.: МЦНМО, 2011.
3. А.Райгородский. Гипотеза Кнезера и топологические методы в комбинаторике. – «Квант», 2011, №1.
4. А.М.Райгородский. Об одной «олимпиадной» задаче про графы. – «Квант», 2017, №2.
5. А.М.Райгородский. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. – М.: МЦНМО, 2015.
6. А.М.Райгородский. Задачи о раскрасках. – М.: МЦНМО, 2020.
7. Н.Алон, Дж.Спенсер. Вероятностный метод. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007.
8. А.М.Райгородский. Математика раскрасок. – Математическое просвещение, сер. 3, вып.27, с. 99–127, 2021.
9. А.Райгородский. Одна задача о раскраске. – «Квант», 2019, №8.
10. А.М.Райгородский. Хроматические числа. – М.: МЦНМО, 2015.
11. А.Райгородский, В.Воронов, А.Савватеев. Прорыв в задаче о раскраске плоскости. – «Квант», 2018, №11.
12. А.М.Райгородский. Проблема Борсука. – М.: МЦНМО, 2015.

# Дендрокомбинаторика

А. ЗАБОЛОТСКИЙ

**П**РОДОЛЖАЕМ НАЧАТОЕ В 7-М И 8-м номерах «Кванта» за прошлый год исследование Онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей – OEIS.

Огромный пласт интересных последовательностей в OEIS связан с подсчетом количества тех или иных сущностей, которые конструируются из заданного количества элементов. Особенно интересно, когда одна и та же последовательность имеет несколько разных комбинаторных интерпретаций. В одних случаях мы умеем проводить подсчет только прямым ручным или компьютерным перебором, в других же удается задействовать всю мощь науки о подсчетах – перечислительной комбинаторики.

## Деревья и леса

Возьмем, к примеру, деревья. Здесь *дерево* – это связный граф без циклов. Несвязное объединение нескольких деревьев (или мультимножество деревьев, т.е. множество, в котором элементы могут повторяться) образует *лес*. Если же в дереве выделить одну вершину и назвать ее *корнем*, получится *дерево с корнем* (рис. 1).

Последовательность A000055 подсчитывает количество различных деревьев с  $n$  (неразличимыми) вершинами. Для небольших  $n$  можно аккуратным перебором найти все деревья; они изображены на рисунке 2. Получаем, что существует 1, 1, 1, 2,



Рис. 1

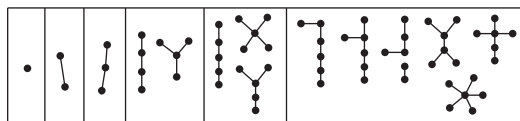


Рис. 2

3, 6, 11, 23, ... деревьев с 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... вершинами.

Комбинируя между собой деревья и учитывая, что *пустой граф* с 0 вершинами тоже является лесом, можно убедиться, что лесов с 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... вершинами существует 1, 1, 2, 3, 6, 10, 20, 37, ... штук – это последовательность A005195. Можно ли как-то связать ее с предыдущей? Ответ на это дает равенство, которое в OEIS называют преобразованием Эйлера.

## Преобразование Эйлера

Предположим, имеется  $n$  неразличимых элементов (например, отдельных вершин графа) и есть  $a_n$  способов придать этим элементам некую структуру (например, собрать из вершин дерево). Тогда количество способов разбить  $n$  элементов на сколько-то групп и придать структуру элементам в каждой группе (в данном случае – сделать лес из  $n$  вершин) – обозначим это число  $b_n$  – связано с числами  $a_n$  преобразованием Эйлера

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_{n-k} \sum_{d|k} d a_d. \quad (1)$$

Здесь внутреннее суммирование идет по всем делителям  $d$  числа  $k$ . При этом всегда  $b_0 = 1$ .

В этом подсчете группы считаются различными лишь тогда, когда различаются структуры, приданные элементам этих групп. В примере с лесами это означает, что важно лишь то, из каких деревьев состоит лес; ни то, в каком порядке они

записаны, ни какая-либо другая информация не учитывается.

Именно равенство (1) связывает A000055 и A005195. Более общо, если  $a_n$  подсчитывает *связные* графы на  $n$  вершинах, обладающие неким свойством, то  $b_n$  подсчитывает *все* графы, обладающие тем же свойством. Обобщая еще сильнее, если  $a_n$  подсчитывает количество неких структур на  $n$  элементах, то  $b_n$  подсчитывает количество *мультимножеств* таких структур.

Другой пример: пусть структурой, о которой идет речь, является множество не равных, но неразличимых элементов без всякой дополнительной информации. Тогда  $a_n = 1$  при всех  $n$ , поскольку множества из неразличимых элементов отличаются лишь их количеством и для любого  $n$  существует лишь одно множество из  $n$  элементов. В этом случае преобразование Эйлера дает последовательность A000041 – количество разбиений числа  $n$  в сумму натуральных чисел (порядок слагаемых не имеет значения) или, что то же самое, количество разбиений множества из  $n$  неразличимых элементов на непересекающиеся подмножества: 1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, ...

Равенство, связывающее количество связанных и несвязных графов, приведено в книге Харари и Палмера [1], различные «родственники» его обсуждаются в книге Стенли [2], а почти точно в таком виде равенство (1) приведено во вводной части еще бумажной «Энциклопедии целочисленных последовательностей» [3]. Обычно это равенство получают с помощью аппарата производящих функций, повсеместно используемого в перечислительной комбинаторике. Мы докажем его иначе.<sup>1</sup>

В этом нам поможет некий трюк, который мы продемонстрируем сначала на числах Каталана  $C_n$  (см. [4]). Числа Каталана образуют последовательность A000108: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, ... Помимо прочего они подсчитывают количество правильных скобочных строк, т.е.

таких строк из  $n$  пар скобок, что каждый открывающей скобке однозначно соответствует закрывающая. Например, скобочная строка  $s = ((())())(())$  – правильная, а  $w = )(($  – неправильная. Выделяем в правильной скобочной строке крайнюю правую закрывающую скобку вместе с соответствующей открывающей и обращаем внимание на скобочную строку  $s_1$  до этой пары скобок и  $s_2$  внутри нее, например:  $s = ((())())(()) = s_1(s_2)$ , где  $s_1 = ((())($ ) и  $s_2 = )()$ . Каждая непустая правильная скобочная строка единственным образом разлагается на  $s_1$  и  $s_2$  как  $s_1(s_2)$ , и из каждой двух правильных скобочных строк  $s_1$  и  $s_2$  (возможно, пустых) однозначно восстанавливается  $s_1(s_2)$ . При этом  $s_1$  и  $s_2$  независимы – между ними не требуется никаких соотношений, кроме того, что суммарно в них должно быть  $n$  пар скобок. Обозначаем количество пар скобок в  $s_2$  через  $k$ , перебираем все возможные варианты  $k$ , а для каждого  $k$  – все пары из двух правильных скобочных строк и получаем рекуррентное соотношение для чисел Каталана:

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}. \quad (2)$$

Для доказательства равенства (1) попробуем похожим образом разбить на две независимые части лес (более общо – мультимножество структур).

Возьмем лес из  $n$  вершин и каким-нибудь образом расположим все его деревья слева направо, сгруппировав одинаковые. Отметим какую-нибудь одну вершину в этом графе (таким образом выбрать лес и отметить в нем вершину можно  $nb_n$  способами). Выделим блок из нескольких деревьев, а именно дерево с отмеченной вершиной и все такие же деревья *справа* от него (рис. 3). Таким образом мы разбили лес на две части: остаточную невыделенную, представляющую собой лес (возможно, пустой), и выделенную, представляющую со-



Рис. 3

<sup>1</sup> Наше доказательство равенства (1) – точнее, его специального случая, равенства (3) – также независимо нашли М.Тихомиров и Д.Гринберг.

бой блок из некоторого ненулевого количества одинаковых деревьев. Количество вершин в каждом дереве выделенного блока обозначим  $d$ , а общее количество вершин в блоке –  $k$ ; так, на рисунке 3 имеем  $d = 5$ ,  $k = 15$ ,  $n = 57$ .

Заметим, что даже если забыть про то, как мы расположили деревья в лесу и какая именно вершина в блоке был изначально выделена, то из остаточного леса и блока одинаковых деревьев можно однозначно собрать исходный лес, причем остаточный лес и блок одинаковых деревьев могут быть любыми, единственное ограничение – общее количество вершин должно равняться  $n$  (прямо как со скобочными строками!). В то же время любая пара из остаточного леса и блока одинаковых деревьев, получаемая из данного исходного леса, может быть получена ровно  $d$  способами – по числу вершин в самом левом дереве из блока. Поэтому если мы сосчитаем всевозможные пары из леса и блока одинаковых деревьев с суммарным числом вершин  $k$ , учтя каждую пару с весом  $d$  (определяется блоком), то мы получим в точности количество способов составить лес на  $n$  вершинах и выделить в нем одну вершину, оно равняется  $nb_n$ . Учитывая, что количество лесов на  $n - k$  вершинах равно  $b_{n-k}$ , количество деревьев на  $d$  вершинах равно  $a_d$  и  $k$  должно делиться на  $d$ , получаем равенство (1).

### Подсчет деревьев с корнем

Вернемся теперь к деревьям с корнем. Обозначим  $c_n$  количество деревьев с корнем на  $n$  вершинах. В них замечательно то, что каждая «растущая» из корня (рис. 4, а) «ветвь» дерева сама по себе может считаться деревом с корнем, поскольку она, несомненно, является деревом, а ее корнем естественно назначить вершину, ближайшую к корню исходного, «большого» де-

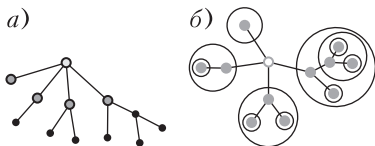


Рис. 4

рева. Отсюда вытекает взаимно однозначное соответствие между деревьями с корнем из  $n + 1$  вершин и лесами из деревьев с корнем, имеющими в общей сложности  $n$  вершин: имея дерево с корнем, убираем из него корень, назначаем во всех образовавшихся деревьях корнями те вершины, что были связаны с прежним корнем, получаем лес; обратное, имея лес, добавляем к нему новую вершину, соединяем ее с корнями всех деревьев леса, назначаем ее новым корнем, получаем дерево с корнем. Это значит, что  $c_n$  является последовательностью, которая переходит сама в себя со сдвигом индекса на 1 при преобразовании Эйлера!

Равенство (1) превращается в рекуррентное соотношение для  $c_{n+1}$  при  $n > 0$ , в которой не используются никакие дополнительные последовательности:

$$c_{n+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_{n-k+1} \sum_{d|k} d c_d. \quad (3)$$

При этом будем считать, что  $c_0 = 0$ , поскольку в дереве с корнем все-таки должна быть хотя одна вершина – корень, и  $c_1 = 1$ .

Последовательность 0, 1, 1, 2, 4, 9, 20, 48, ..., полученная таким образом, имеется в OEIS под номером A000081. Ее можно связать и с количеством деревьев без корня.

### Деревья и конфигурации окружностей

Часто комбинаторные объекты и последовательности имеют несколько разных интерпретаций. Один пример мы видели только что – деревья с корнем из  $n + 1$  вершин и леса из деревьев с корнем из  $n$  вершин. Но деревья с корнем имеют и иную интерпретацию.

Возьмем дерево с корнем и для каждой вершины, кроме корня, нарисуем замкнутую кривую так, чтобы внутрь этой кривой попадала эта вершина и все другие вершины, находящиеся дальше ее от корня, вместе с соответствующими им кривыми. Ничто не мешает нам изобразить дерево на плоскости так, чтобы в качестве этих кривых можно было взять окружности (рис. 4, б). В результате плоскость оказалась разделена на области, в каждой из



которых находится ровно одна вершина, причем корень находится в единственной неограниченной, «внешней» области. С другой стороны, для любого расположения непересекающихся окружностей на плоскости мы можем нарисовать вершину внутри каждой окружности, еще одну вершину – корень – снаружи, соединить ребром каждую пару вершин, отделенных друг от друга только одной любой окружностью, и получить дерево с корнем. Если считать эквивалентными расположения окружностей, которые получаются друг из друга их движением и изменением размеров, но без пересечений, то таким образом оказывается установлено взаимное однозначное соответствие между расположением  $n$  окружностей на плоскости (или на диске) и деревом с корнем на  $n + 1$  вершинах.

Что же деревья без корня? Можно нарисовать на плоскости дерево и окружности так же, как в случае дерева с корнем, назначив любую вершину корнем. В этой конструкции, как и в случае дерева с корнем, две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие им области разделены одной окружностью. В случае дерева с корнем снаружи всегда находится область, соответствующая вершине, которая ближе к корню, в случае же дерева без корня не должно быть разницы.

Существует операция, которая преобразует плоскость, разделенную окружностями на регионы, как раз так, что сохраняется набор областей и отношение между ними «граничит через окружность», но при этом может сделать любую область внешней. Эта операция – инверсия плоскости относительно окружности. Таким образом, каждое дерево без корня с  $n + 1$  вершинами соответствует конфигурации  $n$  не пересекающихся окружностей на плоскости с точностью до инверсий, перемещений и изменений размеров (без возникновения пересечений).

На рисунке 5,а показано действие одной такой инверсии. При инверсии меняются положение вершин и положение и размеры остальных окружностей, но поскольку конфигурация определена с точностью до

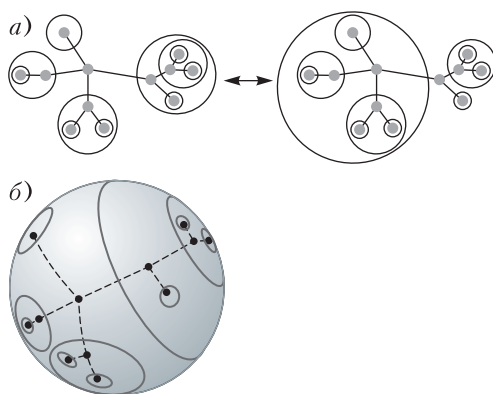


Рис. 5

этих преобразований, то это несущественно. Важно лишь, что одна или несколько окружностей «выворачиваются наизнанку».

Или же можно дополнить плоскость бесконечно удаленной точкой (строго говоря, это необходимо, если мы рассматриваем все возможные инверсии) и через стереографическую проекцию свернуть плоскость в сферу, что вовсе устранил разницу между внутренностью и внешностью каждой окружности (рис. 5,б).

Соответственно, последовательности A000055 и A000081 подсчитывают не только деревья без корня и с корнем, но и конфигурации окружностей на плоскости и на сфере соответственно. Но лишь непересекающихся.

Конфигурации пересекающихся окружностей на плоскости – куда более сложная история, где в нашем распоряжении есть лишь компьютерный перебор; их подсчитывает последовательность A250001.

#### Список литературы

1. Ф.Харари, Э.Палмер. Перечисление графов. – М.: Мир, 1977.
2. Р.Стенли. Перечислительная комбинаторика, том 2. – М.: Мир, 2009.
3. N.J.A.Sloane, S.Plouffe. The Encyclopedia of Integer Sequences. – Academic Press, 1995.
4. М.Гарднер. Числа Каталана. – «Квант», 1978, №7.

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) и [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru) соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2738 – M2741 предлагались на региональном этапе XLIX Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи Ф2745 – Ф2748 предлагались на региональном этапе LVII Всероссийской олимпиады школьников по физике.

## Задачи M2738–M2741, Ф2745–Ф2748

**M2738.** Даны различные вещественные числа  $a_1, a_2, a_3$  и  $b$ . Оказалось, что уравнение

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) = b$$

имеет три различных вещественных корня  $c_1, c_2, c_3$ . Найдите корни уравнения

$$(x + c_1)(x + c_2)(x + c_3) = b.$$

А.Антропов, К.Сухов

**M2739.** Дан остроугольный треугольник  $ABC$ , в котором  $AB < BC$  (рис. 1). Пусть  $M$  и  $N$  – середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно, а  $H$  – основание высоты, опущенной из вершины  $B$ . Вписанная окружность касается стороны  $AC$  в точке  $K$ . Прямая, проходящая через  $K$  и парал-

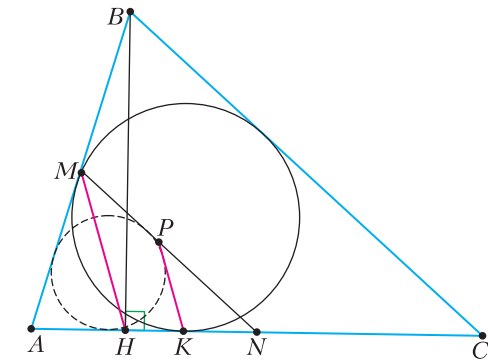


Рис. 1

лельная  $MN$ , пересекает отрезок  $MN$  в точке  $P$ . Докажите, что в четырехугольнике  $AMPK$  можно вписать окружность.

П.Бибииков

**M2740.** Даны натуральные числа  $a, b, c$  такие, что  $a > 1, b > c > 1$ , а число  $abc + 1$  делится на  $ab - b + 1$ . Докажите, что  $b$  делится на  $a$ .

М.Антипов

**M2741.** Дано натуральное число  $k$ . Вдоль дороги стоят  $n$  столбов через равные промежутки. Миша покрасил их в  $k$  цветов и для каждой пары одноцветных столбов, между которыми нет других столбов того же цвета, вычислил расстояние между ними. Все эти расстояния оказались различны. При каком наибольшем  $n$  так могло оказаться?

М.Тихомиров, Ф.Петров

**Ф2745.** На отдельно стоящих роликовых легких опорах, оси которых находятся на расстоянии  $l = 9$  м, лежит однородный рельс постоянного сечения. Ролики начинают вращаться, в результате чего рельс движется горизонтально с некоторой постоянной скоростью, как показано на рисунке 2 (масштаб не выдержан). Под опорами находятся динамометры. Зависимости по-



Рис. 2

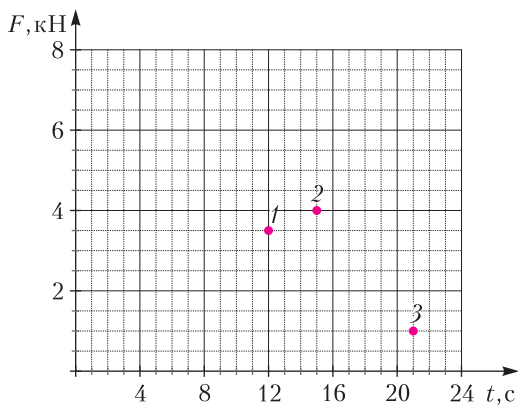


Рис. 3

казаний  $F$  динамометров от времени  $t$  для каждой из опор сняли и решили построить их графики. Однако лаборант, который должен был это сделать, случайно пролил на таблицы с данными кофе и смог восстановить только три точки (они показаны на рисунке 3). Помогите лаборанту восстановить графики. Определите массу рельса  $m$ . Найдите скорость рельса  $v$ . Какую минимальную длину  $L_{\min}$  мог иметь рельс?

А.Евсеев

**Ф2746.** Жесткий невесомый стержень длиной  $L$  лежит на шероховатой наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом (рис. 4). Один конец стержня шарнирно прикреплен к плоскости, а ко второму концу присоединен небольшой массивный груз. Изначально стержень расположен так, что груз находится в самой нижней точке.

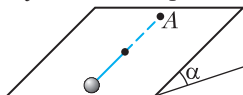


Рис. 4

Какую минимальную скорость  $v_1$ , направленную перпендикулярно стержню и вдоль плоскости, необходимо сообщить грузу, чтобы он, двигаясь вместе со стержнем, смог оказаться в точке, диаметрально противоположной начальной (в точке  $A$ )? Какую минимальную скорость  $v_2$ , направленную перпендикулярно стержню и вдоль плоскости, необходимо сообщить грузу, чтобы он смог вернуться в исходную точку после одного полного оборота стержня? Коэффициент трения между грузом и наклонной плоскостью  $\mu = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$ ,

трение между стержнем и плоскостью и трение в шарнире отсутствуют.

А.Заяц

**Ф2747.** Ваня и Маша провели 2 эксперимента. В первом десятилитровую кастрюлю, заполненную наполовину водой комнатной температуры ( $t_0 = 20^\circ\text{C}$ ), грели на плитке мощностью  $P = 1,4$  кВт в течение  $\tau = 10$  мин. При этом через  $\tau_1 = 5$  мин после начала эксперимента в кастрюлю, не снимая ее с плитки, долили некоторое количество воды комнатной температуры, а еще через  $\tau_2 = 3$  мин, также не снимая кастрюлю с плитки, из нее столько же воды отлили. Во втором эксперименте при тех же начальных условиях отлив и долив поменяли местами, не меняя общее время эксперимента, моменты манипуляций и количества доливаемой и отливаемой воды. Конечные температуры воды в кастрюле в обоих экспериментах совпали. Какой была масса добавляемой в экспериментах воды? Какую температуру имела вода в кастрюле в конце экспериментов? Какого максимального значения достигала температура воды в кастрюле в каждом из проведенных экспериментов? Считайте, что долив и отлив воды происходят очень быстро. Тепловые потери и теплоемкость кастрюли пренебрежимо малы, а вода в процессе экспериментов не закипала. Удельная теплоемкость воды  $c = 4,2$  кДж/(кг  $\cdot$   $^\circ\text{C}$ ), плотность воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>.

А.Евсеев

**Ф2748.** В поле тяжести на двух невесомых нерастяжимых нитях к горизонтальному стержню  $CD$  подвешена планка  $AB$  массой  $m$  и длиной  $L$ . Нити прикреплены к концам планки и располагаются вертикально (рис. 5,а). После погружения системы в неизвестную жидкость и последующего извлечения ее из жидкости в пространстве

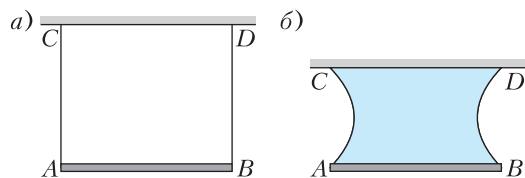


Рис. 5

между нитями, планкой и стержнем сформировалась пленка жидкости, а сама система приобрела вид, представленный на рисунке 5,б. При этом минимальное расстояние между нитями оказалось равным  $d$ , а расстояние между планкой и стержнем равным  $h$ . Определите коэффициент поверхностного натяжения жидкости  $\sigma$ . Вычислите величину  $\sigma$  при  $L = 10$  см,  $m = 2$  г,  $d = 5$  см,  $h = 8,7$  см.

А.Аполонский

**Решения задач M2726–M2729, Ф2733–Ф2736**

**M2726.** *Выясните, какое из двух чисел больше:*

$$\frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2}}}}} \text{ или } \frac{3}{3 + \frac{3}{3 + \frac{3}{3 + \frac{3}{3 + \frac{3}{3}}}}}$$

(В каждом выражении по 2022 знака дроби.)

Положим

$$a = \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2}}}}}, \quad b = \frac{3}{3 + \frac{3}{3 + \frac{3}{3 + \frac{3}{3 + \frac{3}{3}}}}}$$

где в каждом выражении по 2020 знаков дроби. Ясно, что  $0 < a < 1$  и  $0 < b < 1$  (в числителе и знаменателе положительные числа, причем знаменатель больше числителя). Тогда первое из данных чисел равно

$$\frac{2}{2 + \frac{2}{2 + a}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + a}}$$

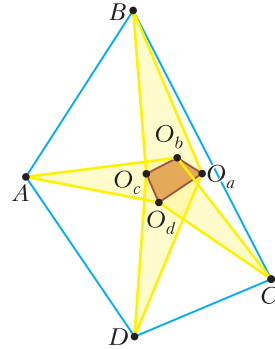
и, аналогично, второе из данных чисел равно  $\frac{1}{1 + \frac{1}{3 + b}}$ . Имеем  $0 < 2 + a < 3 + b$ ,

тогда  $\frac{1}{2 + a} > \frac{1}{3 + b} > 0, 1 + \frac{1}{2 + a} > 1 + \frac{1}{3 + b}$ ,

и окончательно,  $\frac{1}{1 + \frac{1}{2 + a}} < \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + b}}$ .

П.Кожевников

**M2727.** *Дан выпуклый четырехугольник ABCD. Пусть  $O_a, O_b, O_c, O_d$  – центры окружностей (DAB), (ABC), (BCD), (CDA) соответственно. Точки  $O_a, O_b, O_c, O_d$  являются вершинами выпуклого четырехугольника (см. рисунок). Докажите, что*



его площадь равна половине модуля разности площадей четырехугольников  $AO_bCO_d$  и  $BO_cDO_a$ .

Площадь треугольника  $O_aO_bO_c$  выражается через площади треугольников  $BO_aO_b, BO_bO_c, BO_cO_a$ . Чтобы избежать разбора разных случаев расположения точек, запишем универсальное равенство в ориентированных площадях:

$$[O_aO_bO_c] = [BO_aO_b] + [BO_bO_c] + [BO_cO_a].$$

(Здесь и далее через  $[XYZ]$  обозначаем площадь треугольника  $XYZ$ , взятую со знаком «+», если обход контура  $XYZ$  совершается против часовой стрелки, и взятую со знаком «-» в противном случае.) Аналогично имеем

$$[O_cO_dO_a] = [DO_cO_d] + [DO_dO_a] + [DO_aO_c].$$

Сложив, получаем

$$[O_aO_bO_cO_d] = ([BO_aO_b] + [BO_bO_c] + [DO_cO_d] + [DO_dO_a]) + [BO_cDO_a]. \quad (1)$$

Аналогично,

$$[O_aO_bO_cO_d] = ([AO_dO_a] + [AO_aO_b] + [CO_bO_c] + [CO_cO_d]) + [AO_bCO_a]. \quad (2)$$

Далее заметим, что треугольники  $AO_dO_a$  и  $DO_dO_a$  симметричны относительно серединного перпендикуляра  $O_aO_d$  к отрезку  $AD$ . Поэтому  $[AO_dO_a] = -[DO_dO_a]$ . Аналогично,  $[AO_aO_b] = -[BO_aO_b]$ ,  $[CO_bO_c] = -[BO_bO_c]$  и  $[CO_cO_d] = -[DO_cO_d]$ . Значит, сложив (1) и (2), после сокращений получаем

$$2[O_aO_bO_cO_d] = [BO_cDO_a] + [AO_bCO_d],$$

откуда и следует то, что требуется доказать.

*В. Дубровский*

**M2728.** Дано натуральное  $n \geq 3$ . Найдите наименьшее  $k$ , для которого верно утверждение: для любого  $n$ -угольника и любых двух точек внутри него найдется  $k$ -звенная ломаная, соединяющая эти точки, лежащая целиком внутри  $n$ -угольника.

**Ответ:**  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ .

Пусть  $A$  и  $B$  — точки внутри данного  $n$ -угольника. Докажем, что  $A$  и  $B$  можно соединить  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ -звенной ломаной, лежащей целиком внутри  $n$ -угольника. Воспользуемся известным утверждением о том, что любой  $n$ -угольник можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники (триангулировать). Триангулируем данный многоугольник. Если  $A$  и  $B$  принадлежат одному треугольнику триангуляции, то их можно соединить отрезком (т.е. 1-звенной ломаной), лежащим внутри данного  $n$ -угольника. Иначе, покрасим красным вершины того треугольника из триангуляции, внутри или на границе которого лежит точка  $A$ . Аналогично покрасим синим вершины треугольника, внутри или на границе которого лежит точка  $B$  (рис. 1). Красные и синие вершины разбивают контур  $n$ -угольника на участки. Тогда найдется участок между красной и синей точками, между которыми не более  $\frac{n}{2} - 2$  сторон  $n$ -угольника (если красная и синяя точка совпадают, считаем, что меж-

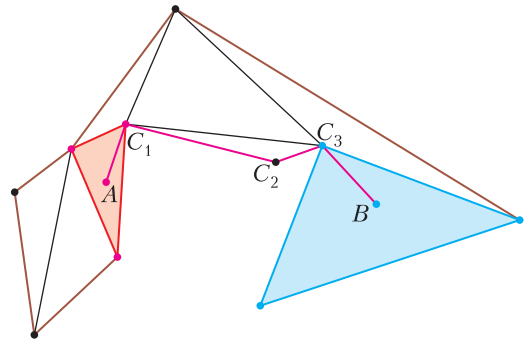


Рис. 1

ду ними 0 сторон). Действительно, контур разбивается красными и синими вершинами на 6 участков, из которых 4 участка между точками одного цвета, в этих участках не менее 4 сторон. Оставшихся сторон не более  $n - 4$ , и они составляют два участка контура между вершинами разных цветов. Значит, на один из этих участков приходится не более  $\frac{n}{2} - 2$  сторон  $n$ -угольника. Пусть это участок контура  $C_1C_2 \dots C_t$  между красной точкой  $C_1$  и синей точкой  $C_2$ . Тогда ломаная  $AC_1C_2 \dots C_tB$  состоит из не более  $\frac{n}{2}$  отрезков и лежит внутри или на границе  $n$ -угольника. Ясно, что можно взять близкую к ней  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ -звенную ломаную, соединяющую  $A$  и  $B$  и лежащую целиком внутри  $n$ -угольника.

Теперь опишем нужный пример. Построим бесконечную «молнию»  $\dots X_t X_{t-1} \dots \dots X_1 Z Y_1 Y_2 \dots Y_t \dots$  (рис. 2) так, что  $X_i X_{i+1} Y_{i+1} Y_i$  — параллелограммы и прямая  $l$

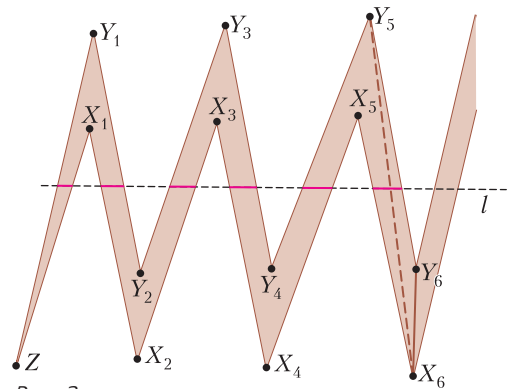


Рис. 2

пересекает каждый такой параллелограмм, а также треугольник  $ZX_1Y_1$  по отрезку (на рисунке выделены красным). Тогда для нечетного  $n = 2k + 1$  искомым примером будет многоугольник  $X_kX_{k-1}\dots X_1ZY_1Y_2\dots Y_k$ , а для четного  $n = 2k$  — многоугольник  $X_kX_{k-1}\dots X_1ZY_1Y_2\dots Y_{k-1}$ . Действительно, если взять точки  $A$  и  $B$  вблизи точек  $X_k$  и  $Z$ , требуемая ломаная, соединяющая  $A$  и  $B$ , должна пересекать каждый из  $k$  красных отрезков, находящихся внутри нашего  $n$ -угольника. При этом никакие два красных отрезка не могут быть пересечены одним звеном. Таким образом, ломаная, лежащая внутри многоугольника и соединяющая  $A$  и  $B$ , должна иметь не менее  $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  звеньев.

Л. Емельянов

**M2729.** Найдите все натуральные  $m$  и  $n$  такие, что выполнено равенство  $m^n = n^{3m}$ .

**Ответ:** (1;1), (3;27), (6;36) и (64;256) (скобками обозначены пары  $(m;n)$ ).

Если  $m = n$ , получаем  $m^m = (m^3)^m$ ,  $m = m^3$ , значит,  $m = n = 1$ .

Если  $m > n$ , то, разложив  $m$  и  $n$  на простые множители, получим

$$\begin{aligned} m &= p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}, \\ n &= p_1^{\beta_1} \dots p_s^{\beta_s}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $p_1, \dots, p_s$  — попарно различные простые числа, а  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  — целые неотрицательные числа. Заметим также, что  $n > 1$ . Иначе было бы  $m = n = 1$ .

Из равенства  $m^n = n^{3m}$  получаем  $n\alpha_i = 3m\beta_i$ , откуда следует, что  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  могут быть равны нулю только одновременно. Далее, не ограничивая общности, мы будем считать, что  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  — натуральные числа. Так как  $\frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{3m}{n} > 1$ , то при каждом  $i$  имеем  $\alpha_i > \beta_i$ , поэтому  $m$  делится на  $n$ , т.е.  $m = kn$ , где  $k > 1$  (иначе было бы  $m = n = 1$ ). Следовательно,  $(kn)^n = n^{3kn}$ ,  $kn = n^{3k}$ , значит,  $k = n^{3k-1}$ . С учетом того, что  $3k - 1 > 2$  и  $n > 1$ , получим  $k - 1 = n^{3k-1} - 1 = (n - 1)(n^{3k-2} + n^{3k-3} + \dots + 1) > 3k - 1$  — противоречие, значит,  $m \leq n$ .

Если  $m < n$ , то на этот раз заметим, что  $m > 1$ . Из равенства  $m^n = n^{3m}$  и неравенства  $m < n$  получаем

$$n > 3m. \quad (2)$$

Разложив  $m$  и  $n$  на простые множители, мы получим равенства (1). В этом случае условия на  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ , с учетом неравенства (2), будут следующими:  $\frac{\beta_i}{\alpha_i} = \frac{n}{3m} > 1$ .

А значит, при каждом  $i$  имеем  $\beta_i > \alpha_i$ , поэтому  $n$  делится на  $m$ , т.е.

$$n = km, \quad (3)$$

где  $k > 3$  (это следует из неравенства (2)). Подставляя из (3) выражение для  $n$  в исходное равенство, получим

$$\begin{aligned} m^{km} &= (km)^{3m}, \\ m^k &= (km)^3, \\ m^{k-3} &= k^3. \end{aligned} \quad (4)$$

Разложим  $k$  на простые множители:

$$k = p_1^{\gamma_1} \dots p_s^{\gamma_s}, \quad (5)$$

где  $\gamma_i$  — натуральные числа.

Из равенства (4), с учетом (1) и (5), получим

$$(k-3)\alpha_i = 3\gamma_i. \quad (6)$$

Далее рассмотрим два случая.

1) Если  $\text{НОД}(k-3, 3) = \text{НОД}(k, 3) = 1$  (т.е.  $k$  не делится на 3), то из (6) следует, что  $\alpha_i = 3\lambda_i$ . Поэтому, с учетом разложения (1) для  $m$ , получим

$$m = l^3. \quad (7)$$

Подставим (7) в (4):

$$\begin{aligned} l^{3(k-3)} &= k^3, \\ k &= l^{k-3}. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что  $l > 1$ .

Учитывая, что  $l > 1$  ( $l-1 \geq 1$ ), разложим (8) по биному Ньютона до члена с  $(l-1)^2$ :

$$\begin{aligned} k &= (1 + (l-1))^{k-3} \geq \\ &\geq 1 + (k-3)(l-1) + \frac{(k-3)(k-4)}{2}(l-1)^2 \geq \\ &\geq 1 + k - 3 + \frac{(k-3)(k-4)}{2}, \end{aligned}$$

$$k^2 - 7k + 8 \leq 0,$$

$$1 < \frac{7 - \sqrt{17}}{2} \leq k \leq \frac{7 + \sqrt{17}}{2} < 6.$$

С учетом неравенства (2) получим  $3 < k < 6$ . Теперь, учитывая равенства (3) и (4), проверим значения  $k$  из полученного интервала:

$$k = 4 \Rightarrow m = 4^3 = 64, n = 256; \quad (9)$$

$k = 5 \Rightarrow m^2 = 5^3 = 125$  – противоречие.

2) Если НОД  $(k - 3, 3) = \text{НОД}(k, 3) = 3$ , то  $k = 3q$  и из (4) следует

$$m^{3q-3} = (3q)^3,$$

$$k = 3q = m^{q-1}. \quad (10)$$

Так как  $k > 3$  (неравенство (2)), то  $q > 1$ . Учитывая, что  $m > 1$  ( $m - 1 \geq 1$ ), разложим (10) по биному Ньютона до члена с  $(m - 1)^2$ :

$$3q = (1 + (m - 1))^{q-1} \geq 1 + (q - 1)(m - 1) + \frac{(q - 1)(q - 2)}{2}(m - 1)^2 \geq$$

$$\geq 1 + q - 1 + \frac{(q - 1)(q - 2)}{2},$$

$$q^2 - 7q + 2 \leq 0,$$

$$0 < \frac{7 - \sqrt{41}}{2} \leq q \leq \frac{7 + \sqrt{41}}{2} < 7.$$

С учетом того, что  $q > 1$ , получим  $1 < q < 7$ . Теперь, учитывая равенства (3) и (10), проверим значения  $q$  из полученного интервала:

$$q = 2 \Rightarrow k = 6 \Rightarrow m = 6, n = 36; \quad (11)$$

$$q = 3 \Rightarrow k = 9 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = 3, n = 27; \quad (12)$$

$q = 4 \Rightarrow k = 12 \Rightarrow m^3 = 12$  – противоречие;

$q = 5 \Rightarrow k = 15 \Rightarrow m^4 = 15$  – противоречие;

$q = 6 \Rightarrow k = 18 \Rightarrow m^5 = 18$  – противоречие.

И, наконец, собирая вместе (9), (11) и (12), получаем ответ.

Отметим, что в «Кванте» №4 за 2011 год была опубликована похожая, но более простая задача М2231. Интересна аналогичная задача для рациональных чисел:

она оказывается связанной с уравнениями Пелля и гипотезой Пиллаи.

И. Дорощев

**Ф2733.**<sup>1</sup> К батарее подключили амперметр и вольтметр, соединенные последовательно. Приборы показали ток  $I_1$  и напряжение  $U_1$ . Потом к этой же батарее подключили эти же приборы, соединенные параллельно. Показания приборов стали  $I_2$  и  $U_2$ . Что покажет амперметр, подключенный (один) к этой батарее? Что покажет вольтметр, подключенный (один) к этой батарее? Параметры измерительных приборов (их внутренние сопротивления) и параметры батареи (ее ЭДС и внутреннее сопротивление) не известны.

По показаниям приборов  $U_1$  и  $I_1$  можно вычислить внутреннее сопротивление вольтметра:  $R_V = U_1/I_1$ . По показаниям приборов  $U_2$  и  $I_2$  можно вычислить внутреннее сопротивление амперметра:  $R_A = U_2/I_2$ . Теперь, зная внутренние сопротивления приборов, можно найти и два параметра, характеризующие батарею. А именно, ее ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутреннее сопротивление  $r$  могут быть найдены из системы двух уравнений

$$\mathcal{E} = I_1(R_V + R_A + r)$$

и

$$\mathcal{E} = \left( I_2 + \frac{U_2}{R_V} \right) r + U_2:$$

$$r = \frac{U_1 + U_2 \left( \frac{I_1}{I_2} - 1 \right)}{I_2 + I_1 \left( \frac{U_2}{U_1} - 1 \right)},$$

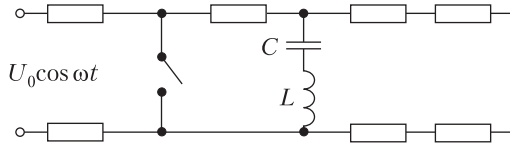
$$\mathcal{E} = U_1 + U_2 \frac{I_1}{I_2} + I_1 \frac{U_1 + U_2 \left( \frac{I_1}{I_2} - 1 \right)}{I_2 + I_1 \left( \frac{U_2}{U_1} - 1 \right)}.$$

Показания «одиноких» приборов  $I_3$  и  $U_3$  напишем без подробной расшифровки:

<sup>1</sup>Автор решений задач Ф2733–Ф2736 – С.Варламов.

$$I_3 = \frac{\xi}{R_A + r}, U_3 = \xi \frac{R_V}{R_V + r}.$$

**Ф2734.** В электрической схеме (см. рисунок), давно подключенной к источнику переменного напряжения  $U_0 \cos \omega t$ , все 7



резисторов одинаковы, их сопротивление равно  $R$ . Емкость конденсатора  $C$  и индуктивность катушки  $L$  подобраны такими, что выполняется соотношение  $\omega L = 1/(\omega C)$ . Сколько тепловой энергии выделится в каждом из резисторов, расположенных справа от ключа, после его замыкания?

Для переменного тока последовательно соединенные емкость и индуктивность с выбранными значениями параметров представляют собой бесконечно малое сопротивление. Это означает, что до замыкания ключа переменный ток, текущий через конденсатор и катушку индуктивности, определяется исключительно резисторами. Амплитуда переменного тока до замыкания ключа равна  $I = U_0/(3R)$ . Накопленная в этих двух элементах суммарная энергия, равная

$$\frac{LI^2}{2} = \frac{L(U_0/R)^2}{18},$$

после размыкания ключа выделится в резисторах в виде теплоты. Из этой энергии  $4/5$  достанется резистору, расположенному левее  $C-L$  цепочки, т.е.

$$\frac{2L(U_0/R)^2}{45}.$$

А каждому из четырех резисторов, расположенных правее  $C-L$  цепочки, достанется по  $1/20$  этой энергии, т.е. по

$$\frac{L(U_0/R)^2}{360}.$$

**Ф2735.** Карбид бора  $B_4C$  характеризуется такими параметрами: плотность  $2,52 \text{ г/см}^3$ , микротвердость  $49,1 \text{ ГПа}$ ,

модуль упругости  $450 \text{ ГПа}$ . Прочность на сдвиг у карбида бора примерно в 2–3 раза меньше величины микротвердости, поэтому его используют в защитных пластинах для бронезилетов (см. рисунок).



В середину пластины из такого материала перпендикулярно ей попадает пуля (стальной шарик или цилиндр с одинаковыми диаметром и длиной) массой  $10 \text{ г}$ , летящая со скоростью  $500 \text{ м/с}$ . Какими должны быть параметры (толщина и площадь) пластины, чтобы она выполняла свою функцию? Твердость стали  $60 \text{ МПа}$ , ее плотность и модуль Юнга  $7,9 \text{ г/см}^3$  и  $200 \text{ ГПа}$  соответственно.

Понятно, что пластина для бронезилета сделана такой, чтобы при попадании в нее пули или осколка снаряда она, приняв на себя импульс пули или осколка, распределила бы этот импульс на всю свою площадь. Это уменьшает давление на то место, куда пришелся удар. При этом пластина может треснуть или расколоться на части, но все эти части должны получить примерно одинаковую скорость. Конечно, солдат, принявший такой удар от пластины, будет травмирован, но результатом травмы будет лишь ушиб, а не серьезное ранение.

В стали и в карбиде бора звук (продольные и поперечные волны) распространяется с разными скоростями. А именно, в стали продольные волны имеют скорость примерно  $v_{ст} = \sqrt{E/\rho} = 4,5 \text{ км/с}$ . В карбиде бора их скорость равна  $v_{кб} = 12,5 \text{ км/с}$ . Это примерно в 3 раза больше скорости продольных волн в стали. Поперечные



волны распространяются в каждом из материалов примерно в два раза медленнее продольных. Таким образом, в материале пластины даже поперечные волны распространяются быстрее продольных волн в стали примерно в полтора раза.

Сначала рассмотрим модельную ситуацию, когда стальной предмет ударяется об абсолютно твердую поверхность. В этом случае сразу после соприкосновения с поверхностью возникает ударная волна, которая создает давление в стали, равное примерно  $p_{\text{ст}} \approx 18$  ГПа. Эта величина меньше, чем микротвердость карбида бора, примерно в три раза и сопоставима с прочностью на сдвиг. Следовательно, при ударе пули о поверхность из карбида бора материал защитной пластины может раскалываться на части, но эти части приобретают примерно одинаковые скорости, а поскольку материал пластины (карбид бора) придет в движение в направлении движения пули, то относительная скорость движения пули и пластины становится меньше, поэтому и давление в ударной волне станет меньше, чем приведенная оценка 18 ГПа. Распространение и продольных и поперечных волн в материале пластины ведет к тому, что вовлеченная в движение масса материала пластины будет сопоставима и даже больше массы стали, которая уже «почувствовала» удар. Оценка этого соотношения масс основывается на предположении, что толщина пластины должна быть примерно такой же, как и продольный размер пули, т.е.  $L \approx 1$  см. При этом за время полной остановки (по отношению к пластине) пули продольные волны в пластине успевают трижды пройти расстояние, равное толщине пластины, а поперечные волны успевают распространиться на расстояние, в 1,5 раза больше размера пули. Таким образом, за время остановки пули в движение приходит объем пластины, равный примерно  $1,5^2 \pi L^3$ . Этот объем карбида бора имеет массу примерно в два раза большую, чем масса пули. Скорость движения такой суммарной массы уже в 3 раза меньше скорости пули. А если пластина имеет размеры  $5 \times 5 \times 1$  см, то ее масса равна примерно 320 г, и в таком случае

после вовлечения в движение всей массы пластины скорость движения системы «пуля–пластина» уменьшается до величины  $10 \cdot 500/320$  м/с  $\approx 15$  м/с. Эффект от такого удара сопоставим или просто такой же, как от попадания камня массой 320 г, летящего со скоростью 15 м/с, на площадку размерами  $5 \times 5$  см. Конечно, такой удар будет чувствительным, но не смертельным.

**Ф2736.** *Замкнутая в кольцо веревка охватывает шкивы двух блоков с горизонтальными и параллельными друг другу осями симметрии. Сбоку веревка выглядит симметричной, повернутой на  $90^\circ$  восьмеркой ( $\infty$ ). Оси расположены на расстоянии 2 метра друг от друга на одном горизонтальном уровне и радиусы шкивов одинаковы. В канавки шкивов сверху (над тонкой веревкой) положен длинный, длиной 3 метра, однородный прямой стержень круглого сечения. При медленном движении веревки (с постоянной по величине скоростью каждой ее точки в каждом месте на веревке) стержень смещается от одного положения до другого, причем по одному из шкивов стержень проскальзывает, а по другому шкиву стержень движется без проскальзывания. В момент остановки расстояния от концов стержня до ближайших точек касания стержня и шкива отличаются в полтора раза. После остановки стержень меняет направление скорости, и ситуация с проскальзыванием и непроскальзыванием по отношению к шкивам изменяется на противоположную. В некоторый момент скорость движения веревки увеличилась, и теперь стержень, двигаясь поступательно, совершает гармонические колебания с периодом 3 секунды. Каков коэффициент трения при скольжении стержня по шкиву? Каков максимальный коэффициент трения покоя?*

При медленном движении веревки в момент остановки стержня силы трения, действующие на стержень со стороны шкивов, таковы, что одна из сил соответствует силе трения скольжения, а другая – силе трения покоя. Поскольку они (силы трения) в этот момент одинаковы, отношение ко-

эфициента трения покоя и коэффициента трения скольжения равно отношению расстояний от середины стержня до мест опоры стержня на шкивы. Это отношение равно  $11/9$ , т.е. стержень от положения равновесия смещается то в одну, то в другую сторону на максимальное расстояние

$$10 \text{ см} \cdot \frac{50 \text{ см} + 10 \text{ см}}{50 \text{ см} - 10 \text{ см}} = 15 \text{ см}.$$

Такое смещение во много раз меньше расстояния между осями шкивов (2 метра). Следовательно, колебания, которые возникли после увеличения скорости движения веревки, можно считать малыми. При быстром движении веревки проскаль-

зывание стержня происходит относительно обоих шкивов, поэтому коэффициент трения один и тот же: это коэффициент трения скольжения. Уравнение, описывающее малые колебания вблизи положения равновесия, дает связь между периодом колебаний и коэффициентом трения скольжения: квадрат угловой частоты колебаний  $\omega^2$  равен  $2\mu g/D$ . В нашем случае  $\omega = 2\pi/T$ , где  $T = 3$  с, а  $D = 2$  м – расстояние между осями шкивов. Вычисления дают величину коэффициента трения скольжения, равную примерно 0,44. А коэффициент трения покоя больше этой величины в  $11/9$  раза, т.е. равен примерно 0,54.

## КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

*Мы продолжаем конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся начиная с 8–9 классов, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).*

*Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com. Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь.*

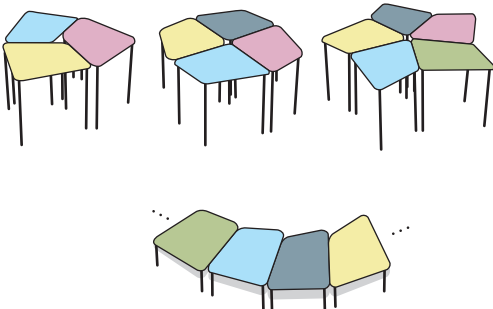
*Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.*

*Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest  
Желаем успеха!*

**25.** Можно ли покрасить все натуральные числа в три цвета так, чтобы сумма любых двух чисел разных цветов была покрашена в третий цвет?

*Ф.Нилов*

**26.** В офис привезли много одинаковых четырехугольных столов, у каждого стола все стороны разной длины. Оказалось, что и 3 таких стола, и 4, и 5 можно поставить по кругу одинаковыми углами к центру так, чтобы между соседними столами не было



зазора. Сколько таких столов можно поставить по кругу одинаковыми сторонами наружу и без зазоров между соседними столами? Укажите все варианты и докажите, что других нет.

*Е.Бакаев*

**27.** Что больше – количество способов заполнить таблицу  $2 \times 100$  числами 1, 2, ... ..200 (каждое число встречается один раз) так, чтобы сумма чисел в каждом из 102 рядов (строк и столбцов) была четной, или так, чтобы каждая такая сумма была нечетной?

*Е.Бакаев, П.Кожевников*

**28. а)** Для каких натуральных  $n$  существует натуральное число  $k$ , которое ровно в  $n$  раз превышает количество своих цифр?

**б)** Для каких натуральных  $n$  существуют два таких числа  $k$ ?

**в)** Может ли для какого-либо  $n$  существовать больше двух таких чисел  $k$ ?

*И.Акулич*

## Задачи

1. На доске написаны две суммы:  
 $1 + 22 + 333 + 4444 + 55555 +$   
 $+ 666666 + 7777777 + 88888888 +$   
 $+ 999999999$

и  
 $9 + 98 + 987 + 9876 + 98765 +$   
 $+ 987654 + 9876543 + 98765432 +$   
 $+ 987654321.$

Какая из сумм больше? Или они равны?

*Г. Гальперин*



2. Сто сидений карусели расположены по кругу через равные промежутки. Каждое покрашено в желтый, синий или красный цвет. Сиденья одного и того же цвета расположены подряд и пронумерованы 1, 2, 3, ... по часовой стрелке. Синее сиденье №7 противоположно красному №3, а желтое №7 — красному №23. Найдите, сколько на



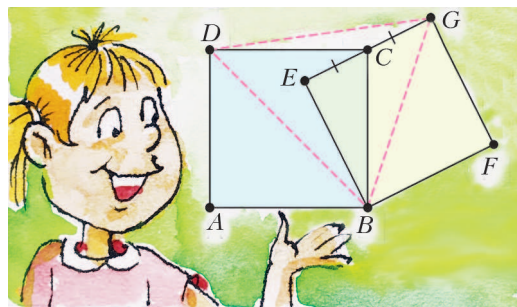
*Эти задачи предлагались на Математическом празднике.*

карусели желтых сидений, сколько синих и сколько красных.

*А. Шаповалов*

3. Два квадрата расположены, как показано на рисунке, отмеченные отрезки равны. Докажите, что треугольник  $BDG$  равнобедренный.

*Фольклор*



4. В параллели седьмых классов 100 учеников, некоторые из которых дружат друг с другом. 1 сентября они организовали несколько клубов, каждый из которых основали три ученика (у каждого клуба свои). Дальше каждый день в каждый клуб вступали те ученики, кто дружил хотя бы с тремя членами клуба. К 19 февраля в клубе «Гепарды» состояли все ученики параллели. Могло ли получиться так, что в клубе «Черепашки» в этот же день состоялось ровно 50 учеников?

*В. Клепцын, М. Раскин*



# Задача Джона Сильвера (о математических задачах с позиций физики)

**С.ДВОРЯНИНОВ**

*Когда в делах, я от веселий прячусь,  
Когда дурачиться — дурачусь;  
А смешивать два этих ремесла  
Есть тьма искусников, я не из их числа.*

А.С.Грибоедов

Смешивать разные жидкости человеку приходится очень часто, можно сказать — каждый день. В чай и кофе мы добавляем молоко или сливки. Если чай оказался слишком крепким, то разбавляем его кипятком. Смешивая различные соки, мы получаем всевозможные коктейли. Если краска загустела, то ее разбавляют уайт-спиритом, олифой или бензином. На эту тему уже в учебнике математики для 5 класса есть такая задача про смесь.

**Задача 1.** Отпили полчашки черного кофе и долили ее молоком. Потом отпили  $\frac{1}{3}$  чашки и долили ее молоком. Потом отпили  $\frac{1}{6}$  чашки и долили ее молоком. Наконец, допили содержимое чашки до конца. Чего выпили больше: кофе или молока?

Решение очевидно. Первый раз доливаем молоко, объем которого равен половине объема чашки. Потом доливаем ее треть и, наконец, одну шестую часть чашки. Складываем дроби и получаем число 1:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Получается, что за три приема мы долили ровно чашку молока. Была чашка кофе,



добавили чашку молока. Стало быть, кофе и молока выпили поровну. На всякий случай смотрим в ответ и читаем: *Кофе и молока поровну.*

Замечательно, задача решена!

Вспомним, однако, что часто при решении конкретной задачи полезно рассмотреть ее простой аналог или частный случай. Давайте так поступим и с задачей про кофе.

**Задача 2.** Есть два одинаковых заполненных до краев бочонка: в одном — апельсины, в другом — свежий зеленый горох. Слону в зоопарке дали бочонок с апельсинами. Когда слон съел половину, в бочонок до самых краев насыпали горох. Все содержимое слон съел с большим удовольствием. Чего слон съел больше — апельсинов или гороха? Во сколько раз? Сколько гороха осталось?

Рассуждаем так же, как и с кофе. Вначале слон освободил от апельсинов полбочонка. Свободную половину заполнили горохом, и слон все съел. Получается, что апельсинов он съел бочонок, а гороха — полбочонка, т.е. в два раза меньше. И полбочонка гороха осталось.

Но если представить, как горох сыпется в бочонок, то станет ясно: гороха на угощение слону уйдет больше, чем полбочонка. Мелкий горошек будет заполнять пустоты между апельсинами. Гороха останется меньше, чем полбочонка. Пусть для определенности объем каждого бочонка 20 л. Ясно, что высыпав и апельсины, и горох в один сорокалитровый бочонок, мы не заполним его полностью.

Вернемся к чашке с кофе и внимательно отнесемся к каждому слову из условия



— Вот вам нитроглицерин.

Жюль-Декарт Фера. Иллюстрация к роману Жюль Верна «Таинственный остров»

задачи. Сначала отпили «полчашки черного кофе», а потом отпили « $1/3$  чашки». Чувствуете разницу? После того, как в чашку долили молоко, там уже оказалось и не кофе, и не молоко. Получилась третья жидкость — смесь кофе и молока. Чистого молока в чашке вообще нет. Все ясно: эта задача некорректна. Правильный ответ такой: выпили полчашки черного кофе, молока (чистого молока!) не пили вовсе, а еще выпили смесь черного кофе с молоком трех разных концентраций. А каков объем выпитой смеси?

\* \* \*

На уроках физики школьники узнают немало законов сохранения: при всех природных и искусственных процессах сохра-

няются энергия и масса, есть законы сохранения импульса и момента импульса, закон сохранения электрического заряда. А что известно о сохранении объема? В простейшем случае при склеивании двух параллелепипедов получается новое тело, объем которого равен сумме объемов параллелепипедов. Но для переноса этого свойства на смеси нет никаких оснований!

Вообще к смесям нужно относиться внимательно, можно сказать — с уважением. На уроках химии учат, как следует смешивать кислоту с водой, что во что добавлять. В прежние времена, когда фантастика Жюль Верна еще не стала явью, книги этого писателя были очень популярны, в библиотеках за ними была очередь. В романе «Таинственный остров» юные читатели могли узнать, как «выпарив глицерин в водяной ванне, Сайрес Смит подлил к нему азотной кислоты и получил, не применяя охлаждающей смеси, несколько пинт желтой маслянистой жидкости...

Это был нитроглицерин».

В средние века начинающие алхимики в угоду королям намеревались сплавить мелкие алмазы в один большой. Подобным образом они поступали с золотом и серебром. И что же? При нагревании алмазов до 1000 градусов они сгорали. Ведь алмаз — это один из изотопов химического элемента углерода. Случалось, что за свое невежество алхимики несли тяжелую кару.

\* \* \*

В задаче про кофе физика смешана с математикой. А кто же ее придумал, кто является ее автором? Проведем небольшое историческое расследование.

В 1967 году был выпущен Сборник подготовительных задач к XXXI Московской

математической олимпиаде для школьников. В аннотации к сборнику, в частности, говорилось: «Задачи олимпиады, кроме прочного знания школьного курса математики, требуют смекалки и сообразительности. Поэтому для подготовки к олимпиаде выпускается настоящий сборник. Многие задачи, представленные в сборнике, предлагались на предыдущих олимпиадах и в конкурсах вечерней математической школы. В сборнике представлены как относительно легкие, так и более трудные задачи. В сборнике помещены также краткие примечания к задачам (как правило, не исчерпывающие решения, а лишь указания основной идеи)».

Обратимся к одной из задач этого сборника.

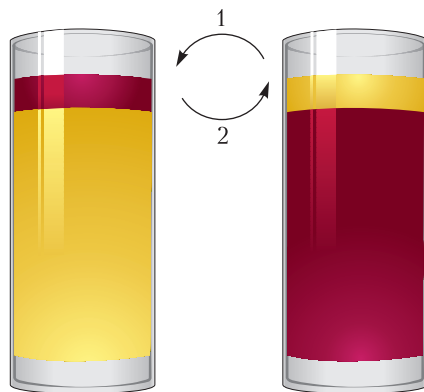
**Задача 3.** Даны полстакана воды и полстакана вина. Ложку воды перелили в вино, а затем ложку образовавшейся смеси перелили в воду. Чего в результате оказалось больше: воды в вине или вина в воде?

Чуть дальше читаем пояснение: «В первый стакан долили столько же вина, сколько оттуда было отлито воды».

Пойдем по времени еще дальше. В 1946 году в шестом выпуске Известий Академии педагогических наук была опубликована статья «Принципы отбора и составления арифметических задач». Ее автор – И.В.Арнольд. Здесь мы находим такой вариант задачи о смеси двух жидкостей.

**Задача 4.** Из стакана с красным вином перелили в стакан, содержащий такое же количество белого, одну ложку. Перемешав, ложку смеси перелили обратно в первый стакан. Спрашивается, больше ли в итоге концентрация белого вина в красном в первом стакане или красного в белом – во втором?

Для решения задачи достаточно задать себе вопрос: куда девалось то красное вино, которое вытеснено белым из первого стакана? Этот вопрос ориентирует на рассмотрение соответствующего рисунка. А рисунок подталкивает к таким ответам на две последние задачи. Задача 3: вина в воде в первом стакане столько же, сколько воды в вине во втором стакане. Задача 4:



белого вина в красном столько же, сколько красного в белом.

В 2008 году статья И.В.Арнольда была издана в виде отдельной книжки (М.: МЦНМО). Если внимательно читать эту книжку, то можно узнать, *что* происходит с объемом при смешивании: «Смесь двух одинаковых объемов воды и спирта занимает меньший объем, чем сумма объемов обоих смешиваемых веществ. Литр такой смеси имеет массу 936 г, между тем как литр чистого спирта имеет массу 729 г, а литр воды – 1 кг. Сколько нужно взять воды и спирта, чтобы получить литр смеси?»

Итак, обе задачи о переливании – некорректны, а рисунок приводит к неверным ответам. В условиях задач ничего не сказано, как меняется объем при смешивании, а на самом деле объем смеси двух растворов не равен сумме объемов исходных растворов. В математике много красивых задач в стиле «пожалуйста, не вычисляйте!» Математика несколько не обеднеет, если вопрос про кофе с молоком мы исключим из этого множества.

\*\*\*

На самом деле задача про кофе и молоко – это адаптированная для младших школьников задача, которую старый пират Джон Сильвер из «Острова сокровищ» Р.Л.Стивенсона задал юнге Джиму Хоккинсу, заглянувшему к нему в камбуз: «Знаменитый капитан Флинт налил стакан рома и выпил половину. Напиток был крепок, и Флинт долил стакан водой.

Отпив треть содержимого, он вновь долил в стакан воду. Когда же старый пират отпил шестую часть стакана и в третий раз разбавил содержимое водой, то только тогда смог осушить стакан до дна. После этого Флинт задумался: чего он выпил больше – рома или воды?»

Юный Джим Хоккинс быстро сложил три дроби и сказал, что поровну. Автор книги Стивенсон словами Сильвера похвалил Джима и заверил, что из него вырастет замечательный моряк.

Заметим, что первое книжное издание «Острова сокровищ» вышло 140 лет на-

зад, в ноябре 1883 года. Тогда писатель Стивенсон не знал, что русский химик Дмитрий Иванович Менделеев изучал, как изменяется объем при смешивании спирта с водой.

Первая глава магистерской диссертации Менделеева называлась так: «О сжатии, происходящем при образовании растворов».

В русские переводы для детей задача про выпивку Флинта не вошла. А вот И. В. Арнольд читал по-английски и потому включил задачу про красное и белое в свою книгу. И учил решать ее правильно.

## НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

# Светлое отражение темного пятна

Морозный день. Холодно не только на улице, но и в подъездах зданий. В павильоне при входе в метро все стекла покрыты густым инеем. Этот иней можно растопить прикосновением руки, и тогда возникает удивительная картина: проплавленное «окно» в инее выглядит темным пятном на белом фоне. А в блестящем, как зеркало, мраморном подоконнике оно отражается... как светлое пятно на темном фоне! Не просто отражение, а «комплементарное отражение» – с заменой негативного изображения на позитивное.

Этот эффект – результат игры прохождения и отражения света, свойств поверхностей, на которые он падает, а также расположения источников света. Полированная поверхность мрамора работает как нормальное зеркало: через более прозрачное «окошко» в инее на нее падает больше света, чем через матовую заиндевевшую поверхность стекла. Поэтому рисунок ладони и отражается в ней как более светлое

пятно. Этот свет падает сверху, со стороны светлого неба. Но когда мы смотрим непосредственно на стекло, наш взгляд устремлен сквозь это «окно», скорее, вниз, к земле или же к каким-то окружающим вход в метро строениям. А вот для заиндевевших матовых участков стекла это не проблема: с какой бы стороны к ним свет ни пришел, они все равно его рассеют во все стороны, в том числе и в нашу. Поэтому эти участки и выглядят более светлыми, чем прозрачный отпечаток ладони. В том, что дело именно в этом, можно легко убедиться, глянув на снимок, где одновременно присутствуют несколько следов от руки.



Видно, что те, которые расположены повыше и проецируются на небо (или хотя бы поближе к нему), те и светлее.

Казалось бы, столь простые оптические явления, а какой необычный и красивый рисунок они создают!

*В. Птушенко*

# Вспомогательные равносторонние треугольники

*М.ВАСИЛЬЕВ, Т.КОРЧЕМКИНА*

**У**МЕНИЕ ДЕЛАТЬ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ построения всегда являлось залогом успешного решения сложных геометрических задач. Не секрет, что очень непросто сформулировать точные и четкие инструкции для выбора и применения того или иного построения, однако зачастую в условии задачи присутствуют «маячки» – подсказки, позволяющие догадаться, какие дополнительные линии следует провести. Так, практика показывает, что медиану треугольника бывает полезно продлить на ее длину, а специальное добавление середин отрезков и последующее рассмотрение средних линий соответствующих треугольников помогают решить задачу. К таким типовым дополнительным построениям можно также смело отнести метод «спрямления суммы», стандартные построения в трапеции, метод вспомогательной окружности и др.

Более сложным приемом, требующим большей изобретательности и появляющимся в олимпиадных задачах, является поиск и построение правильных многоугольников или их элементов. Эту идею заинтересованные читатели увидят, например, в статье Е.Бакаева и А.Блинкова «Вспомогательные квадраты» («Квант» № 4 за 2016 г.). Ниже мы покажем, в каких случаях равносторонние треугольники помогают решить задачу.

**Задача 1.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  угол при вершине  $A$  равен  $100^\circ$ . На продолжении стороны  $AB$  за точку  $B$  отмечена такая точка  $D$ , что  $AD = BC$ . Чему равен угол  $BCD$ ?

**Решение.** Как догадаться до нужного дополнительного построения? Заметим, что углы при основании  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  равны по  $40^\circ$ , а значит,

разность известных нам углов составляет  $100^\circ - 40^\circ = 60^\circ$ . Мотивацией к построению вспомогательного равностороннего треугольника также служат равные «неудобно» расположенные отрезки  $AD$  и  $BC$ .

Итак, построим теперь равносторонний треугольник  $ADE$  (рис. 1) и получим еще один угол в  $40^\circ$  при вершине  $A$ . Тогда

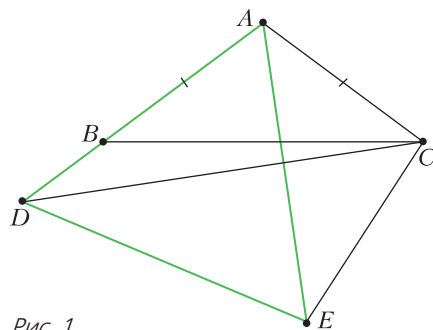


Рис. 1

треугольники  $BAC$  и  $ACE$  равны по двум сторонам ( $AB = AC$ ,  $BC = AE$ ) и углу между ними ( $\angle ABC = \angle CAE$ ), следовательно,  $\angle ACE = \angle BAC = 100^\circ$ . Кроме того, по трем сторонам равны треугольники  $DAC$  и  $DEC$ , откуда  $\angle ACD = \angle ECD = 50^\circ$  и, наконец,

$$\angle BCD = \angle ACD - \angle ACB = 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ.$$

Как правило, что мы видим и на примере предыдущей задачи, после сделанного дополнительного построения завершающим шагом в решении является поиск равных треугольников.

**Задача 2.** Внутри равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $BC$  отмечена такая точка  $M$ , что  $\angle MBC = 30^\circ$ ,  $\angle MCB = 10^\circ$ . Найдите угол  $AMC$ , если  $\angle BAC = 80^\circ$ .

**Решение.** Поскольку угол при вершине равнобедренного треугольника равен  $80^\circ$ , углы при основании будут равны  $50^\circ$  каждый. Отсюда можно вычислить углы  $\angle MBA = 20^\circ$  и  $\angle MCA = 40^\circ$ . Тот факт, что в условии дан равнобедренный треугольник, уже намекает на возможную пользу от построения треугольника равностороннего. Действительно, построив равносторонний треугольник  $ABD$  так, как показано на рисунке 2, получим  $\angle CBD = 60^\circ - 50^\circ = 10^\circ$  и равнобедренный треугольник  $DAC$ . В этом треугольнике угол при вершине равен



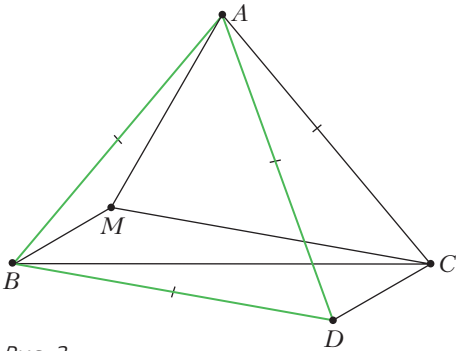


Рис. 2

$\angle BAC - \angle BAD = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$ , следовательно,  $\angle DCA = 80^\circ$ , и  $\angle BCD = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$ . Таким образом, треугольники  $BMC$  и  $CDB$  равны по стороне  $BC$  и прилежащим к ней углам с градусными мерами  $10^\circ$  и  $30^\circ$ , что означает равенство сторон  $MC = BD = AC$ . Тогда в равнобедренном треугольнике  $ACM$  с углом в  $40^\circ$  при вершине искомый угол  $AMC$  равен  $70^\circ$ .

**Упражнение 1.** Найдите другой способ решения задачи 2, использующий равносторонний треугольник, построенный на  $AC$ . Не менее красивое решение задачи читатель узнает из статьи В.Прасолова «Диагонали правильного 18-угольника» («Квант» № 5 за 1995 г.).

Зачастую при первом взгляде на чертеж возникает несколько разумных идей для построения вспомогательного треугольника. Любопытно, однако, что почти всегда каждый из пришедших в голову способов позволяет (с разной степенью сложности) прийти к ответу. Это справедливо, например, для нескольких следующих задач.

**Задача 3.** Внутри треугольника  $ABC$  отмечена такая точка  $M$ , что  $AM = BM$ ,  $\angle MVA = 10^\circ$ ,  $\angle MBC = 20^\circ$  и  $\angle MAC = 40^\circ$ . Найдите угол  $MCA$ .

**Решение.** Итак, какой же треугольник здесь может оказаться полезным (рис. 3)?

С одной стороны, если построить равнобедренный треугольник  $ABK$  с основанием  $AB$  так, чтобы точки  $M$  и  $C$  были внутри треугольника, то  $BC$  окажется биссектрисой, а  $\angle CAK = \angle MAB = \angle MBA = 10^\circ$ .

Можно также использовать равные стороны  $AM$  и  $BM$ , построив равнобедренные треугольники  $AMN$  или  $BML$ . В каждом из случаев помимо сторон, равных  $AM$  и  $MB$ , появляются и углы, равные данным в условии.

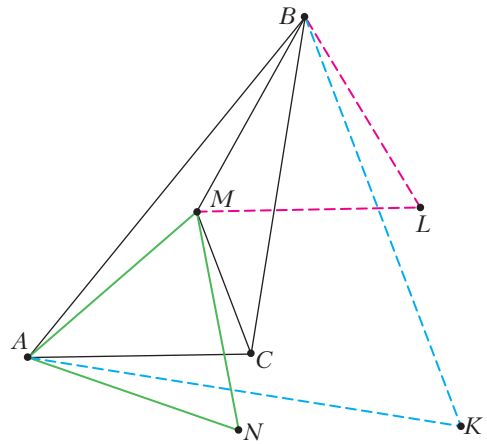


Рис. 3

На самом деле каждое из перечисленных выше построений помогает решить задачу, но мы остановимся подробнее на треугольнике  $AMN$ , поскольку попутно он приводит к дополнительным интересным фактам.

Действительно, в силу условия и дополнительного построения можно вычислить угол  $\angle BMN = 360^\circ - (180^\circ - 2 \cdot 10^\circ) - 60^\circ = 140^\circ$ . Поскольку также  $MN = AM = BM$ , треугольник  $MBN$  — равнобедренный, причем  $\angle MBN = 20^\circ = \angle MBC$ . А это означает, что точки  $B$ ,  $C$  и  $N$  лежат на одной прямой! Рассмотрим теперь треугольник  $ANC$ . В нем  $\angle ANC = \angle ANM + \angle MNB = 60^\circ + 20^\circ = 80^\circ$  и  $\angle ACN = \angle CAB + \angle ABC = 30^\circ + 50^\circ = 80^\circ$  как внешний угол треугольника  $ABC$ . Таким образом, треугольник  $ANC$  равнобедренный, но тогда равнобедренным будет и треугольник  $ACM$ . Отсюда легко вычислить, что  $\angle MCA = 70^\circ$ .

**Упражнение 2.** Решите предыдущую задачу, пользуясь треугольником  $ABK$ .

Следующая задача давно уже вошла в математический фольклор и неоднократно появлялась на различных олимпиадах. Речь пойдет о равнобедренном треугольнике с углом при вершине в  $20^\circ$  и углами при основании по  $80^\circ$ . Его интересные свойства послужили источником для множества новых задач и исследований. С одной из таких удивительных задач можно познакомиться в статье К.Кюпа «История с геометрией, или Девять решений одной задачи» («Квант» № 3 за 1993 г.).

**Задача 4.** В треугольнике  $ABC$  углы  $ABC$  и  $ACB$  равны  $80^\circ$ . На стороне  $AB$  отмечена

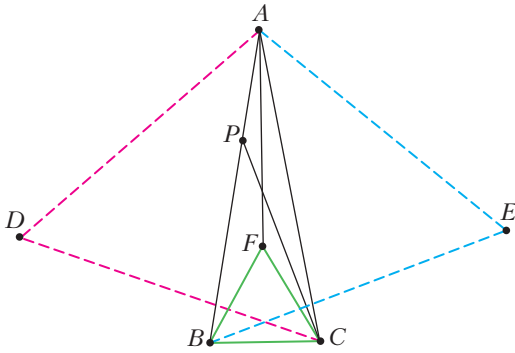


Рис. 4

такая точка  $P$ , что  $\angle BPC = 30^\circ$ . Докажите, что  $AP = BC$ .

**Решение.** Подсказкой к построению вспомогательного равностороннего треугольника служит то, что  $80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$ . В зависимости от того, как именно «отнять» угол в  $60^\circ$ , можно построить треугольники  $ABE$ ,  $ACD$  или  $BCF$  (рис. 4). Опять же, каждый из этих треугольников приводит к решению задачи. Здесь мы приведем решение с помощью треугольника  $BCF$ .

По трем сторонам равны треугольники  $ABF$  и  $ACF$ , значит,  $\angle BAF = \angle CAF = 10^\circ$  и  $\angle ABF = \angle ACF = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$ . По свойству внешнего угла  $BPC$  треугольника  $APC$  получаем, что  $\angle ACP = 30^\circ - 20^\circ = 10^\circ$ . Таким образом, в треугольниках  $APC$  и  $CFA$  к стороне  $AC$  прилегают углы  $10^\circ$  и  $20^\circ$ , откуда следует равенство треугольников  $APC$  и  $CFA$  и  $AP = CF = BC$ .

**Упражнение 3.** Проведите до конца рассуждения, связанные с треугольниками  $ABE$  и  $ACD$ .

**Задача 5** (Е.Бакаев, LXXIX Московская математическая олимпиада, 2016). На медиане  $AM$  треугольника  $ABC$  нашлась такая точка  $K$ , что  $AK = BM$ . Кроме того,  $\angle AMC = 60^\circ$ . Докажите, что  $AC = BK$ .

**Решение.** Наличие угла  $60^\circ$  и множество равных отрезков однозначно намекают на построение вспомогательного равностороннего треугольника. Классическое решение предлагает продлить медиану  $AM$  и построить треугольник  $BMD$  (рис. 5), но равносторонний треугольник  $EMC$  также оказывается полезен.

Действительно, вне зависимости от расположения точек  $K$  и  $E$  на  $AM$ , отрезки  $AE$  и  $KM$  равны либо как сумма, либо как разность длин отрезков  $ME = AK$  и отрезка  $EK$ .

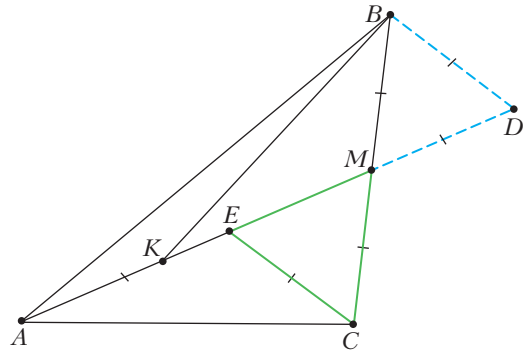


Рис. 5

Кроме того, по построению  $CE = BM$ . Для равенства треугольников  $AEC$  и  $KMB$  не хватает только равенства углов  $AEC$  и  $KMB$ , но оба эти угла – смежные с углами в  $60^\circ$ , откуда  $\triangle AEC = \triangle BKM$  и  $AC = BK$ .

**Задача 6** (Е.Бакаев, LXXXII Московская математическая олимпиада, 2019). Внутри равностороннего треугольника  $ABC$  отмечена точка  $K$  так, что  $\angle KAC = 30^\circ$  и  $AB = BC = CK$ . Найдите угол  $AKB$ .

**Решение.** В этой задаче, опять же, есть несколько способов найти ответ с помощью равностороннего треугольника. Построение равностороннего треугольника  $ACL$  (рис. 6) превратит  $AK$  в биссектрису, медиану и высоту, а построение равносторонних треугольников  $ABP$  или  $BMC$  добавит и равносторонних треугольников. Первые два способа мы оставляем читателю в качестве упражнения, с ними также можно ознакомиться в книге «LXXXII Московская математическая олим-

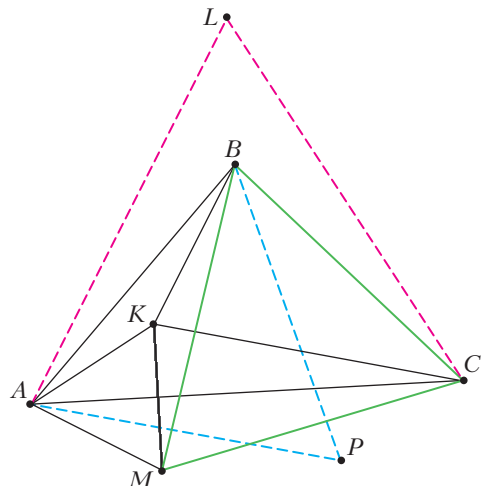


Рис. 6

пиада. Задачи и решения». Мы же рассмотрим решение, получаемое с помощью треугольника  $ВМС$ .

Пусть  $\angle ВАК = \alpha$ . Тогда в силу  $АВ = ВС$  имеем  $\angle АСВ = \angle ВАС = 30^\circ + \alpha$ , и из треугольника  $АВС$  можно вычислить  $\angle АВМ = \angle АВС - \angle МВС = 180^\circ - 2 \cdot (30^\circ + \alpha) - 60^\circ = 60^\circ - 2\alpha$ . Далее, с учетом того, что треугольник  $ВАМ$  также равнобедренный, получаем

$$\begin{aligned} \angle САМ &= \angle ВАМ - \angle ВАС = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 60^\circ + 2\alpha) - \alpha - 30^\circ = 30^\circ = \angle КАС. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь треугольники  $АКС$  и  $АМС$ . Сторона  $АС$  для них — общая, также  $СК = СМ$  и по доказанному выше  $\angle КАС = \angle МАС$ .

Здесь мы воспользуемся известным утверждением, называемым четвертым признаком равенства треугольников или признаком полуравенства треугольников: если две стороны первого треугольника равны двум сторонам второго треугольника и угол, противолежащий одной из сторон первого треугольника, равен углу, противолежащему соответственной ей стороне второго треугольника, то либо эти треугольники равны, либо углы, противолежащие другим двум равным соответствующим сторонам, в сумме составляют  $180^\circ$ .

Отсюда следует, что либо  $\angle КСА = \angle МСА$  и  $\triangle АКС = \triangle АМС$ , либо  $\angle КСА + \angle МСА = 180^\circ$ . Последнее невозможно, поскольку  $\angle КСА + \angle МСА = \angle КСМ < \angle МСВ = 60^\circ$ , а значит,  $\triangle АКС = \triangle АМС$  и  $АК = АМ$ , откуда, в частности, следует, что треугольник  $АКМ$  — также равнобедренный. Тогда  $АК = КМ$  и треугольники  $АВК$  и  $МВК$  равны по трем сторонам, значит,

$$\angle АКВ = \angle МКВ = \frac{1}{2} \cdot (360^\circ - 60^\circ) = 150^\circ.$$

Вспомогательный равнобедренный треугольник может оказаться полезным не только при решении задач. Так, с помощью этого метода можно обосновать построение точки Ферма–Торричелли, не прибегая к окружностям.

*Точкой Ферма* называется точка плоскости, сумма расстояний от которой до вершин треугольника является минимальной.

*Точкой Торричелли* треугольника называется точка, из которой три луча, направленные в вершины треугольника, образуют между собой углы в  $120^\circ$ .

**Задача 7** (точка Ферма–Торричелли). *Найдите внутри треугольника  $АВС$ , у которого все углы меньше  $120^\circ$ , точку  $М$ , сумма расстояний от которой до трех вершин минимальна.*

**Решение.** Построим на каждой стороне треугольника  $АВС$  во внешнюю сторону вспомогательные равнобедренные треугольники  $АСЕ$ ,  $ВСД$  и  $АВF$  (рис. 7). Пусть  $М$  — произвольная точка внутри треугольника  $АВС$ . Соединим теперь точку  $М$  с вершинами и построим равнобедренный треугольник  $АМN$ . Покажем, что сумма расстояний от точки  $М$  до вершин исходного треугольника равна длине ломаной  $ВМNE$ .

Рассмотрим треугольники  $АНЕ$  и  $АМС$ . По построению  $АМ = АN$ ,  $АС = АЕ$ , а также  $\angle МАС = 60^\circ - \angle САН = \angle ЕАН$ , откуда следует равенство рассматриваемых треугольников и их соответственных сторон  $МС$  и  $NE$ . Таким образом,  $АМ + ВМ + СМ = ВМ + МN + NE$ .

Такое построение позволяет также понять, чему равна та самая минимальная сумма расстояний. Действительно, для любой точки  $М$  выполнено неравенство  $ВМ + МN + NE \geq BE$ , причем равенство достигается тогда и только тогда, когда точки  $В$ ,  $М$ ,  $N$  и  $E$  лежат на одной прямой (в указанном порядке).

Пусть теперь полученная конструкция такова, что точки  $М$  и  $N$  лежат на отрезке  $BE$

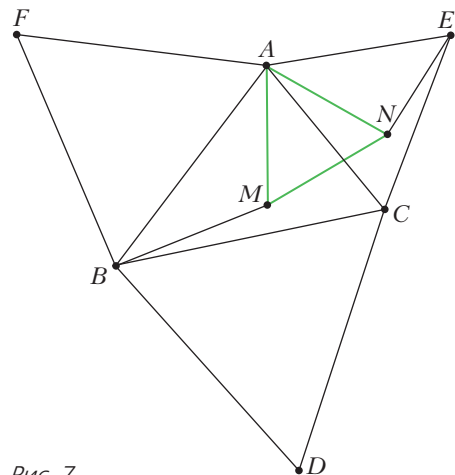


Рис. 7

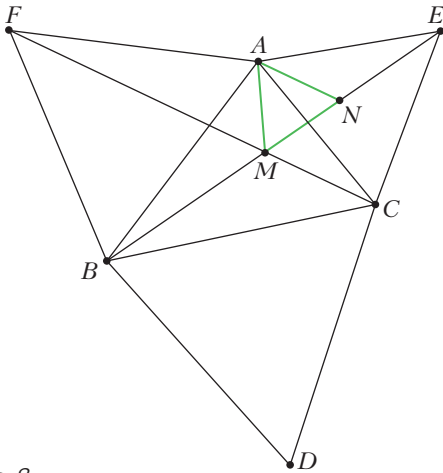


Рис. 8

(рис. 8). Покажем, что на самом деле такая точка  $M$  является точкой пересечения отрезков  $CF$  и  $BE$ .

По построению треугольники  $AMC$  и  $ANE$  равны, но тот факт, что точки  $B, M, N, E$  лежат на одной прямой, также позволяет сказать, что  $\angle AMC = \angle ANE = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ . Чтобы показать, что  $M$  лежит на прямой  $CF$ , докажем, что  $\angle FMA = 60^\circ$ . Рассмотрим треугольники  $FAM$  и  $BAN$ :  $FA = BA$ ,  $AM = AN$  и  $\angle FAM = 60^\circ + \angle BAM = \angle BAN$ , следовательно, треугольники равны, и  $\angle FMA = \angle BNA = 60^\circ$ , что и требовалось. Аналогично доказывается, что точка  $M$  лежит и на отрезке  $AD$ .

Заметим, что отсюда напрямую следует, что  $\angle AMB = \angle AMC = \angle BMC = 120^\circ$ , таким образом, точки Ферма и Торричелли совпадают. Кроме того, из доказательства понятен алгоритм построения точки. Необходимо сначала построить на сторонах треугольника вне него равносторонние треугольники, затем соединить отрезком каждую вершину треугольника с вершиной равностороннего треугольника, построенного на противоположной стороне, и построить точку пересечения этих отрезков.

В качестве упражнения оставляем читателю доказательство того, что если один из углов треугольника не меньше  $120^\circ$ , то точкой Ферма будет являться вершина этого угла. Подробнее о свойствах точки Торричелли можно прочитать в статье В.Протасова «Точка Торричелли и сети Штейнера» («Квантик» № 10–12 за 2021 г.).

### Задачи для самостоятельного решения

**1** (В.Произволов, XI Турнир математических боев имени А.П.Савина). Про четырехугольник  $ABCD$  известно, что  $\angle BAD = \angle CDA = 60^\circ$ , а также  $\angle CAD = \angle CDB$ . Докажите, что  $AB + CD = AD$ .

**2** (Е.Бакаев, XXII Турнир математических боев имени А.П.Савина). Четырехугольник  $ABCD$  таков, что  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle B = 150^\circ$ ,  $\angle C = 90^\circ$ . Докажите, что  $CD = \frac{AB + AD}{2}$ .

**3** (М.Волчкевич, XXXI Математический праздник, 2020). Три стороны четырехугольника равны, а углы четырехугольника, образованные этими сторонами, равны  $90^\circ$  и  $150^\circ$ . Найдите два других угла этого четырехугольника.

**4** (XX Турнир математических боев имени А.П.Савина). В равностороннем треугольнике  $ABC$  на продолжении стороны  $AB$  за точку  $B$  отметили точку  $D$ , а на продолжении  $BC$  за точку  $C$  отметили точку  $E$  так, что  $AD = BE$ . Докажите, что  $CD = DE$ .

**5**. Внутри равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $BC$  отмечена такая точка  $P$ , что  $\angle PAB = 20^\circ$ ,  $\angle PAC = 60^\circ$ ,  $\angle PBA = 10^\circ$ . Найдите угол  $APC$ .

**6**. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с углом  $\angle A = 20^\circ$  к боковой стороне проведена высота  $CM$ , на стороне  $AC$  отмечена точка  $N$  такая, что  $CN = \frac{1}{2}BC$ . Найдите угол  $AMN$ .

**7** (Московская устная командная олимпиада по математике, 2019). В треугольнике  $ABC$  известно, что  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle B = 105^\circ$ . На биссектрисе угла  $A$  внутри треугольника  $ABC$  отмечена точка  $P$  такая, что  $PC = BC$ . Найдите угол  $APC$ .

**8** (VI Новосибирская устная олимпиада по геометрии, 2021). Внутри равностороннего треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что четырехугольник  $APQC$  выпуклый,  $AP = PQ = QC$  и  $\angle PBQ = 30^\circ$ . Докажите, что  $AQ = BP$ .

**9** (В.Расторгуев, XLII Турнир городов, 2021). На сторонах  $AB$  и  $AC$  равностороннего треугольника  $ABC$  выбрали точки  $E$  и  $F$ , а на продолжении стороны  $AB$  – точку  $K$  так, что  $AE = CF = BK$ . Точка  $P$  – середина  $EF$ . Докажите, что угол  $KPC$  прямой.

**10** (Е. Бакаев, XXIII Турнир математических боев имени А.П.Савина). Треугольник  $ABC$  таков, что  $\angle B = 120^\circ$ , точка  $M$  – середина  $AC$ . На сторонах  $AB$  и  $CB$  взяты точки  $K$  и  $L$  соответственно так, что  $AK = CL$  и  $\angle KML = 120^\circ$ . Докажите, что  $KL = AM$ .

# Капля, отвердевающая в поле центробежных сил

А.КАШЕВАРОВ, А.СТАСЕНКО

...кто знает, сколько еще будет увидено и понято благодаря капле?

Я.Е. Гегузин

ДАВНО ИЗВЕСТЕН ТАКОЙ ШКОЛЬНЫЙ опыт: каплю воды кладут на холодную поверхность и в результате вырастает осесимметричная фигура с заострением наверху (рис. 1,а). А что если переохлажденную каплю подвесить под холодным потолком – подумал вдумчивый Ученик. Ясно, что сила тяготения (ускорение  $g$ ) станет удлинять каплю в направлении своего действия, сокращая площадь контакта капли с поверхностью и увеличивая сухой участок (рис. 1,б).

Но переохлажденная капля – совсем не то, что теплая капля на потолке в поле тяжести. Чудесные явления творятся в ее объеме. Запускаются процессы образования нано-

кристаллов (нуклеации), которые растут, выделяя теплоту фазового перехода; последняя удаляется теплообменом с воздухом (а знающие люди говорят, что и инфракрасным излучением). С ростом суммарного объема кристаллов увеличивается вязкость суспензии, сдвиговые течения внутри капли ускоряют нуклеацию...

Но даже поверхность теплой капли у потолка, вытягивающейся вниз, в некоторый момент времени похожа на коническую. И если она замерзнет, ее можно назвать сталактитом (στολακτίτης – *натекшие по капле* по-гречески). Если же такое случится с кристаллизующейся переохлажденной каплей, помещенной на холодную поверхность, то она – сталагмит (στάλαγμα – *капля* по-древнегречески). А что если такую каплю положить на быстро вращающийся цилиндр или экватор сферы (рис. 1,в), да еще при этом для простоты пренебречь влиянием тяготения? В этом случае она окажется в поле сил с ускорением  $g_\omega = \omega^2 R$ , где  $\omega$  – угловая скорость вращения,  $R$  – радиус вращающегося тела.

В любом случае имеется три поверхности контакта: жидкости с воздухом (индекс la от liquid-air), жидкости с твердым телом (ls от liquid-solid) и твердого тела с воздухом (sa от solid-air). Запишем Основную Физическую Идею – изменение суммарной поверхностной энергии равно работе центробежной силы:

$$\sigma_{la}(S_a - S_{a0}) + \sigma_{ls}(S_s - S_{s0}) - \sigma_{sa}(S_s - S_{s0}) = mg_\omega(y_c - y_{c0}). \quad (1)$$

Здесь  $y_c - y_{c0}$  – увеличение расстояния центра масс сталагмита ( $c$ ) от оси вращения, индекс 0 относится к случаю отсутствия вращения ( $\omega = 0$ ), в котором капля тоже предполагается приблизительно конической,  $S_a$  и  $S_s$  – площади поверхности контакта капли с воздухом и твердым телом,  $\sigma$  – соответствующие коэффициенты поверхностного натяжения.

Будем предполагать, что высота конуса  $h \ll R$ . Можно показать, что расстояние центра масс конуса от его основания равно четверти высоты, так что

$$y_c - y_{c0} = \frac{h - h_0}{4}.$$

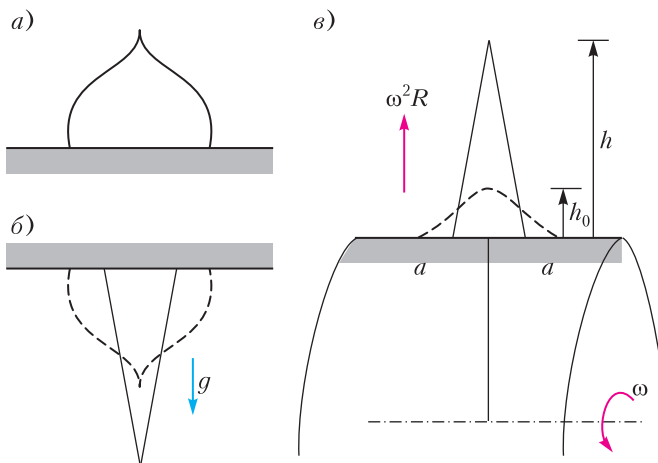


Рис. 1. а) Известная картина капли, отвердевшей на холодной поверхности; б) капля замерзает под холодным потолком; в) предлагаемая модель

Боковая поверхность конуса вращения, как известно, равна произведению длины основания (радиус  $a$ ) на половину длины образующей:

$$S_a = \pi a \sqrt{a^2 + h^2}.$$

И еще Идея: как бы ни изменялась форма, объем  $V$  должен оставаться постоянным и равным его значению для шаровой капли. А объем конического сталагмита равен произведению его площади основания на треть высоты. Поэтому

$$\pi a^2 \frac{h}{3} = \frac{4}{3} \pi a_d^3,$$

где  $a_d$  – радиус капли, если бы она стала шаровой.

Наконец, вспомним рисунок, приведенный во многих книгах, который поясняет связь всех трех коэффициентов поверхностного натяжения – проекция сил на «горизонтальное» направление дает (рис. 2):

$$\sigma_{la} \cos \theta = \sigma_{sa} - \sigma_{ls},$$

где  $\theta$  – угол смачивания.

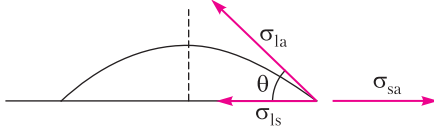


Рис. 2. Обычная картина распределения сил поверхностного натяжения

Учитывая всю накопленную информацию, приведем уравнение (1) к безразмерному виду:

$$\begin{aligned} (1 + x^3)^{1/2} - \frac{x}{x_0} (1 + x_0^3)^{1/2} + \cos \theta \left( \frac{x}{x_0} - 1 \right) = \\ = Ax (x - x_0), \quad (2) \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$x = \left( \frac{h}{a} \right)^{2/3}, \quad x_0 = \left( \frac{h_0}{a_0} \right)^{2/3}, \quad A = \frac{\rho a_d^2 g_\omega}{3\sigma \sqrt[3]{4}},$$

$\rho$  – плотность воды,  $\frac{h}{a}$  – отношение высоты конуса к радиусу его основания.

Уравнение как уравнение, – подумал вдумчивый Ученик, – ничего особенного, его решение зависит всего от трех параметров:  $x(x_0, \theta, A)$  – то ли еще могут современные компьютеры!

Но и не решая приведенного уравнения, можно оценить, при каких условиях капля будет сброшена с поверхности вращающегося цилиндра. Известно, что капля на потолке висит в поле  $g = 10 \text{ м/с}^2$ , если ее радиус не превосходит  $a \sim 3$  мм. При этом по порядку величины  $x \sim 1$ . Подставляя в выражение для  $A$  в (2)  $a$  вместо  $a_d$  и  $g$  вместо  $g_\omega$ , получим, что в момент отрыва центробежное ускорение равно

$$g_\omega \sim \left( \frac{a}{a_d} \right)^2 g.$$

Напомним, что это лишь оценка порядка величины.

Но куда же идет работа центробежной силы – правая часть уравнения (2)? Сумма первых двух слагаемых слева отрицательна – энергия контакта с воздухом убывает. Значит,  $\Delta S_a < 0$ . Центробежная сила стремится очистить от воды поверхность твердого тела! И в этом ей помогает убыль поверхностной энергии деформирующейся капли-сталагмита, которая стремится к минимуму.

На рисунке 3 в качестве примера приведены результаты численного решения уравнения (2). Представлены зависимости высоты  $h$

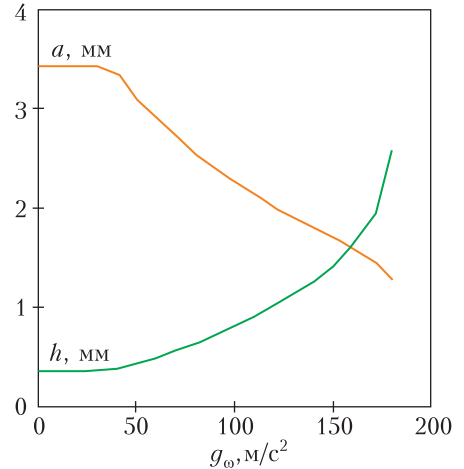


Рис. 3. Пример численного решения уравнения (2)

и радиуса основания  $a$  конического сталагмита от центробежного ускорения  $g_\omega$  для эквивалентной шаровой капли радиусом  $a_d = 1$  мм. Видно, что с увеличением центробежного ускорения радиус основания сталагмита уменьшается, а его высота растет. Кривые обрываются при значении ускорения, соответствующего отрыву капли от поверхности.

## Региональный этап XLIХ Всероссийской олимпиады школьников по математике

### Задачи олимпиады

*9 класс*

**1.** Велодорожка состоит из двух участков: сначала идет асфальтовый, а затем песчаный. Петя и Вася стартовали порознь (сначала Петя, а затем Вася), и каждый проехал всю дорожку. Скорость каждого мальчика на каждом из двух участков была постоянной. Оказалось, что они поравнялись в середине асфальтового участка, а также в середине песчаного. Кто из мальчиков затратил на всю дорожку меньше времени?

*И. Богданов*

**2.** Дан бумажный треугольник, длины сторон которого равны 5 см, 12 см и 13 см. Можно ли разрезать его на несколько (больше одного) многоугольников, у каждого из которых площадь (измеренная в  $\text{см}^2$ ) численно равна периметру (измеренному в см)?

*Д. Храмов*

**3.** Дано натуральное число  $n$ . На клетчатой доске  $2n \times 2n$  расставили  $2n$  ладей так, что никакие две не стоят на одной горизонтали или одной вертикали. После этого доску разрезали по линиям сетки на две связные части, симметричные друг другу относительно центра доски. Какое наибольшее количество ладей могло оказаться в одной из частей? (Клетчатая фигура называется *связной*, если по этой фигуре от любой ее клетки можно добраться до любой другой, переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетку.)

*Д. Храмов*

**4.** См. задачу M2740 «Задачника «Кванта»».

**5.** Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность  $\gamma$ . Оказалось, что окружности, построенные на отрезках  $AB$  и  $CD$  как на диаметрах, касаются друг друга внешним образом в точке  $S$ . Пусть точки  $M$  и  $N$  –

середины отрезков  $AB$  и  $CD$  соответственно. Докажите, что перпендикуляр  $l$  к прямой  $MN$ , восстановленный в точке  $M$ , пересекает прямую  $CS$  в точке, лежащей на  $\gamma$ .

*И. Почепцов, Д. Бродский*

**6.** Для натурального числа  $n$  обозначим через  $S_n$  наименьшее общее кратное всех чисел  $1, 2, \dots, n$ . Существует ли такое натуральное число  $m$ , что  $S_{m+1} = 4S_m$ ?

*А. Кузнецов*

**7.** На доску записали 99 чисел, среди которых нет равных. В тетрадку выписали  $\frac{99 \cdot 98}{2}$  чисел – все разности двух чисел с

доски (каждый раз из большего числа вычитали меньшее). Оказалось, что в тетрадке число 1 записано ровно 85 раз. Пусть  $d$  – наибольшее число, записанное в тетрадке. Найдите наименьшее возможное значение  $d$ .

*Л. Самойлов*

**8.** См. задачу M2739 «Задачника «Кванта»».

**9.** Найдите наибольшее число  $m$  такое, что для любых положительных чисел  $a, b$  и  $c$ , сумма которых равна 1, выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a+bc}} + \sqrt{\frac{ca}{b+ca}} \geq m.$$

*Л. Емельянов*

**10.** Куб  $100 \times 100 \times 100$  разбит на миллион единичных кубиков; в каждом кубике расположена лампочка. Три грани большого куба, имеющие общую вершину, окрашены: одна красным, другая синим, а третья зеленым. Назовем *столбцом* набор из 100 кубиков, образующих блок  $1 \times 1 \times 100$ . У каждого из 30000 столбцов есть одна окрашенная торцевая клетка; в этой клетке стоит переключатель – нажатие на этот переключатель меняет

состояние всех 100 лампочек в столбце (выключенная лампочка включается, а включенная выключается). Изначально все лампочки были выключены. Петя нажал на несколько переключателей, получив ситуацию, в которой ровно  $k$  лампочек горят. Докажите, что после этого Вася может нажать на несколько переключателей так, чтобы ни одна лампочка не горела, использовав не более  $k/100$  переключателей с красной грани.

*С.Кудря, И.Богданов*

10 класс

1. В таблице  $6 \times 6$  изначально записаны нули. За одну операцию можно выбрать одну клетку и заменить число, стоящее в ней, на любое целое число. Можно ли за 8 операций получить таблицу, в которой все 12 сумм чисел в строках и столбцах будут различными положительными числами?

*А.Кузнецов, П.Кожевников*

2. См. задачу 2 для 9 класса.

3. В городе  $N$  прошли 50 городских олимпиад по разным предметам, при этом в каждой из этих олимпиад участвовало ровно 30 школьников, но не было двух олимпиад с одним и тем же составом участников. Известно, что для любых 30 олимпиад найдется школьник, который участвовал во всех этих 30 олимпиадах. Докажите, что найдется школьник, который участвовал во всех 50 олимпиадах.

*В.Дольников*

4. См. задачу M2740 «Задачника «Кванта».

5. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BD$  и отмечена точка пересечения высот  $H$ . Серединный перпендикуляр к отрезку  $HD$  пересекает окружность, описанную около треугольника  $BDC$ , в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что  $\angle APB + \angle AQB = 180^\circ$ .

*М.Туревский, М.Дидин*

6. См. задачу 6 для 9 класса.

7. Петя взял некоторые трехзначные натуральные числа  $a_0, a_1, \dots, a_9$  и написал на доске уравнение

$$a_9x^9 + a_8x^8 + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = *.$$

Докажите, что Вася сможет вместо звездочки написать некоторое 30-значное натуральное число так, чтобы получившееся уравнение имело целый корень.

*А.Кузнецов, А.Антропов*

8. Биссектриса угла  $A$  параллелограмма  $ABCD$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $K$ . На стороне  $AB$  выбрана точка  $L$  так, что  $AL = CK$ . Отрезки  $AK$  и  $CL$  пересекаются в точке  $M$ . На продолжении отрезка  $AD$  за точку  $D$  отмечена точка  $N$ . Известно, что четырехугольник  $ALMN$  вписанный. Докажите, что  $\angle CNL = 90^\circ$ .

*А. Кузнецов*

9. См. задачу M2741 «Задачника «Кванта».

10. Докажите, что для любых трех положительных вещественных чисел  $x, y, z$  выполнено неравенство

$$(x - y)\sqrt{3x^2 + y^2} + (y - z)\sqrt{3y^2 + z^2} + (z - x)\sqrt{3z^2 + x^2} \geq 0.$$

*П.Бибиков*

11 класс

1. Можно ли число 2023 представить в виде суммы трех натуральных чисел  $a, b, c$  таких, что  $a$  делится на  $b + c$  и  $b + c$  делится на  $b - c + 1$ ?

*А.Кузнецов*

2. См. задачу M2738 «Задачника «Кванта».

3. См. задачу 3 для 10 класса.

4. На доску записывают пары чисел. Сначала на доску записали пару чисел  $(1, 2)$ . Если на доске написана пара чисел  $(a, b)$ , то на доску можно дописать пару  $(-a, -b)$ , а также пару  $(-b, a + b)$ . Кроме того, если на доске написаны пары чисел  $(a, b)$  и  $(c, d)$ , то на доску можно дописать пару  $(a + c, b + d)$ . Могла ли через некоторое время на доске оказаться пара  $(2022, 2023)$ ? Порядок чисел в паре существенен, например, пары чисел  $(1, 2)$  и  $(2, 1)$  считаются различными.

*И. Почепцов*

5. В остроугольном неравнобедренном треугольнике  $ABC$  проведена высота  $AH$ , медиана  $AM$ , а также отмечен центр  $O$  его описан-



ной окружности  $\omega$ . Отрезки  $OH$  и  $AM$  пересекаются в точке  $D$ , прямые  $AB$  и  $CD$  – в точке  $E$ , прямые  $BD$  и  $AC$  – в точке  $F$ . Лучи  $EH$  и  $FH$  пересекают окружность  $\omega$  в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что прямые  $BY$ ,  $CX$  и  $AH$  пересекаются в одной точке.

*А. Кузнецов*

**6.** См. задачу 6 для 9 класса.

**7.** Назовем два числа *почти равными*, если они равны или отличаются друг от друга не более чем на единицу. Верно ли, что из любого прямоугольника с натуральными сторонами можно вырезать какой-нибудь прямоугольник с натуральными сторонами, площадь которого почти равна половине площади исходного прямоугольника? Стороны вырезаемого прямоугольника не обязательно параллельны сторонам исходного прямоугольника.

*Е. Молчанов*

**8.** Точка  $O$  – центр описанной окружности остроугольного неравностороннего треугольника  $ABC$ . На биссектрисе угла  $ABC$  внутри треугольника  $ABC$  отмечена точка  $D$ , а на отрезке  $BD$  – точка  $E$  так, что  $AE = BE$  и  $BD = CD$ . Точки  $P$  и  $Q$  – центры окружностей

тей, описанных около треугольников  $AOE$  и  $COD$  соответственно. Докажите, что точки  $A$ ,  $C$ ,  $P$  и  $Q$  лежат на одной прямой или на одной окружности.

*А. Кузнецов*

**9.** Даны ненулевые числа  $a, b, c$ . Докажите, что выполняется неравенство

$$\left| \frac{b}{a} - \frac{b}{c} \right| + \left| \frac{c}{a} - \frac{c}{b} \right| + |bc + 1| > 1.$$

*А. Кузнецов*

**10.** В стране  $2n$  городов ( $n$  – натуральное), некоторые из них соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями. Из любого города можно попасть в любой другой, возможно, с пересадками. Президент хочет разделить страну на две области и включить каждый город в одну из двух областей. При этом авиалинии разделятся на  $k$  межобластных и  $m$  внутриобластных. Докажите, что президент может добиться того, чтобы выполнялось неравенство  $k - m \geq n$ .

*М. Дидин*

*Публикацию подготовили Н. Агаханов, И. Богданов, П. Кожевников, А. Кузнецов, О. Подлипский, К. Сухов*

## Региональный этап LVII Всероссийской олимпиады школьников по физике

*7 класс*

### Задача 1. В ванной

Ванная в квартире экспериментатора Глюка имеет сложную форму (рис. 1). Пол ванной выложен керамической плиткой одного размера. Причем при укладке плитки на пол ее пришлось резать только для того, чтобы уложить вдоль стены с дверным проемом (верхний левый угол рисунка). Глюк проводит свои эксперименты везде. Ванная не является исключением. Однажды он запустил улиток из точек  $A$  и  $B$  в указанных на рисунке направлениях, пытаясь подобрать разность во времени старта так, чтобы улитки непременно встретились, не доползая до противоположной стены. В результате экс-

перимента Глюк выяснил, что улитку из  $B$  надо отправить в путь на  $\Delta t = 200$  с раньше, чем улитку из  $A$ . Найдите площадь ванной

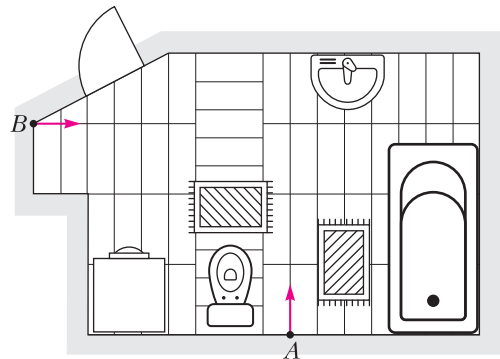


Рис. 1

комнаты экспериментатора, если известно, что улитки всегда движутся прямолинейно с одинаковой скоростью  $u = 12$  см/мин, плитки в ванной плотно прилегают краями друг к другу, а коврики одинаковые.

*А.Евсеев*

### Задача 2. Стадион МФТИ

Беговые дорожки стадиона МФТИ – это 4 дорожки шириной  $d = 1,22$  м каждая (рис. 2). Дорожки состоят из двух прямо-

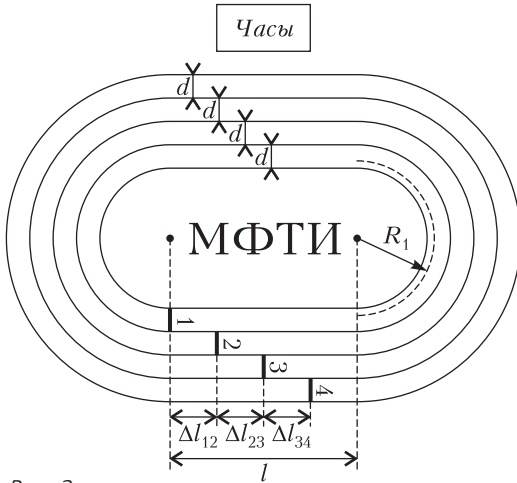


Рис. 2

линейных участков длиной  $l = 84,39$  м и двух участков в виде полуокружностей радиусом  $R$ . Радиус траектории атлета, или эффективный радиус, на первой дорожке  $R_1 = 36,80$  м.

1) Найдите эффективную длину  $L_1$  одного круга первой дорожки.

2) Определите, на каких расстояниях  $\Delta l_{12}$ ,  $\Delta l_{23}$ ,  $\Delta l_{34}$  должны располагаться линии стартов на различных дорожках на прямолинейных участках, чтобы длины дистанций в 3 круга совпадали при условии финиша на линии старта первой дорожки.

3) Какие значения может иметь средняя скорость атлета, пробежавшего 6 кругов по первой дорожке, если он определял время своего забега по стадионным часам (с точностью до минуты)? Стартовал атлет в 13:00, а финишировал в 13:13. Выразите максимальную и минимальную средние скорости и в км/ч, и в м/с.

*Примечание.* Длина окружности радиусом  $R$  равна  $2\pi R$ , где  $\pi = 3,1416$ .

*Д.Рубцов*

### Задача 3. Шоколад и карамель

При производстве конфет в сосуд объемом  $V = 16,0$  л заливают горячий белый шоколад плотностью  $\rho_1 = 1,20$  г/см<sup>3</sup>. Когда сосуд заполняется на 60%, в него вместо шоколада начинают заливать карамель плотностью  $\rho_2 = 1,52$  г/см<sup>3</sup> со скоростью  $\mu = 0,60$  л/мин. Автоматика настроена на определение средней плотности содержимого сосуда, и когда средняя плотность превышает  $\rho_1$  на 10%, подача карамели в сосуд прекращается. Изменением объема жидкостей при их смешивании можно пренебречь. Сколько минут происходила подача карамели?

*В.Слободянин*

### Задача 4. Догонялки

Два автомобиля одновременно начинают движение из пункта  $A$  в пункт  $B$  по прямой дороге. Известно, что первый автомобиль едет с постоянной скоростью  $v_1$  не останавливаясь до пункта  $B$ . В пункте  $B$  он останавливается и ждет прибытия второго автомобиля. Второй автомобиль движется с постоянной скоростью  $v_2$ , меньшей чем  $v_1$ . Через некоторое время он останавливается и, когда первый автомобиль достигает пункта  $B$ , вновь продолжает движение с той же скоростью  $v_2$ . На рисунок 3 приведен график зависимости расстояния между автомобилями от времени вплоть до момента  $t_1 = 4$  мин. В момент времени  $t_2 = 14$  мин автомобили встретились.

- 1) Определите скорости автомобилей  $v_1$  и  $v_2$ .
- 2) В течение какого времени  $\Delta t$  второй автомобиль покоился?
- 3) Найдите расстояние  $L$  между пунктами  $A$  и  $B$ .

*А.Евсеев*

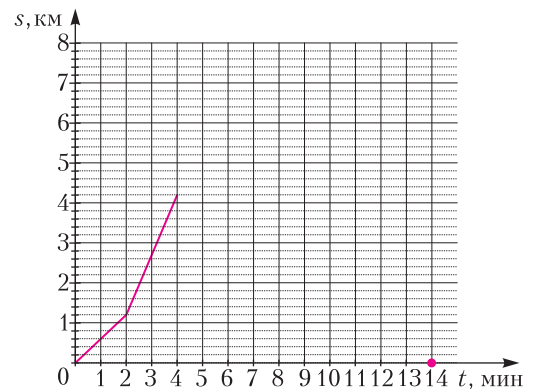


Рис. 3

8 класс

**Задача 1. По трубе**

Два легких небольших упругих шарика движутся внутри закрытой с обоих концов гладкой массивной трубы, расположенной горизонтально. В тот момент времени, когда шарики находятся посередине трубы, их скорости относительно земли равны  $v$  и  $2v$ , а трубу начинают двигать с постоянной скоростью  $0,1v$ , как показано на рисунке 4. Длина трубы  $2L$ .

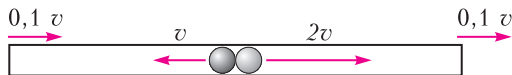


Рис. 4

1) Через какой промежуток времени  $\tau_1$  левый шарик первый раз столкнется с торцевой стенкой трубы?

2) Через какой промежуток времени  $\tau_2$  правый шарик первый раз столкнется с торцевой стенкой трубы?

3) Через какой промежуток времени  $\tau$  шарики в первый раз столкнутся друг с другом?

4) Найдите скорости  $u_1$  левого и  $u_2$  правого шариков относительно земли непосредственно перед их первым соударением.

Соударения шариков с торцевыми стенками трубы считайте абсолютно упругими.

*Примечание.* В результате абсолютно упругого удара скорость шарика относительно стенки остается такой же по величине, как до удара, но направленной противоположно.

О.Инишева

**Задача 2. Изогнутая трубка**

Изогнутая трубка постоянного сечения заполнена несмешивающимися жидкостями с разными плотностями, как показано на рисунке 5. В левом конце трубки, закрытом пробкой, заперт воздух под давлением  $0,8p_0$ , где  $p_0$  – атмосферное давление, которое равно гидростатическому давлению столба жидкости плотностью  $\rho$  высотой  $10h$ . Правый конец трубки открыт в атмосферу, система находится в состоянии равновесия.

1) Определите коэффициент  $k$  у плотности жидкости (см. рис. 5).

2) В каком направлении и на сколько сместится свободная поверхность жидкости

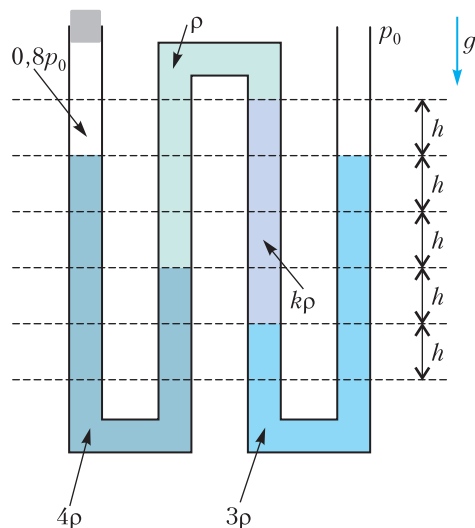


Рис. 5

в правом колене трубки в новом состоянии равновесия, если убрать пробку?

А.Сеитов

**Задача 3. Туда-сюда**

Экспериментатор Глюк провел эксперимент. Десятилитровую кастрюлю, заполненную наполовину водой комнатной температуры  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ , Глюк поставили греться на электрической плитке. Через некоторое время в кастрюлю, не снимая ее с плиты, он долил воду комнатной температуры неизвестного объема. А спустя еще какое-то время воду такого же объема из кастрюли, также не снимая ее с плиты, вылил. Затем он дважды измерил температуру воды в кастрюле – через  $\tau_1 = 8$  мин и  $\tau_2 = 9$  мин с момента начала нагрева и получил значения  $t_1 = 45^\circ\text{C}$  и  $t_2 = 50^\circ\text{C}$ . Всего плитка работала 10 мин.

1) Какую температуру  $t_k$  имела бы вода в кастрюле к концу эксперимента, если бы по ходу нагрева ее масса не изменялась?

2) Определите наименьшее возможное значение массы  $m_{\min}$  воды, доливаемой Глюком в ходе эксперимента.

3) Найдите самый ранний от начала нагрева момент времени  $\tau_{\min}$ , когда мог происходить забор воды из кастрюли.

Тепловые потери и теплоемкость кастрюли пренебрежимо малы. Считайте, что при изменении массы воды ее температура изменяется мгновенно, а при добавлении воды она не выливается из кастрюли. Удельная тепло-

емкость воды  $c = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$ , плотность воды  $\rho = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$ .

*А.Евсеев*

#### Задача 4. Ползущий рельс

На отдельно стоящих роликовых легких опорах, оси которых находятся на расстоянии  $l = 9 \text{ м}$ , лежит однородный рельс постоянного сечения. Ролики начинают вращаться, в результате чего рельс движется горизонтально с некоторой постоянной скоростью, как показано на рисунке 6 (масштаб не



Рис. 6

выдержан). Под опорами находятся динамометры. Зависимости показаний  $F$  динамометров от времени  $t$  для каждой из опор сняли и решили построить их графики. Однако лаборант, который должен был это сделать, случайно пролил на таблицы с данными кофе и смог восстановить только три точки (они показаны на рисунке 7).

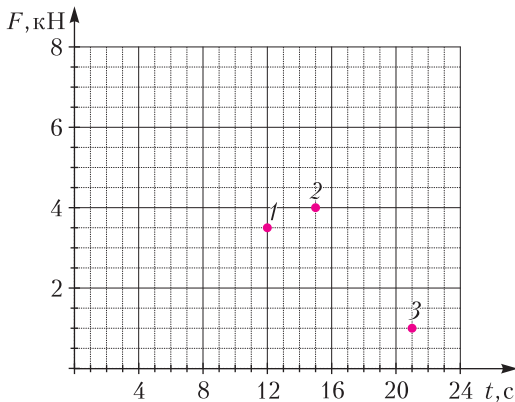


Рис. 7

Помогите лаборанту восстановить графики.

- 1) Определите массу рельса  $m$ .
- 2) Найдите скорость рельса  $v$ .
- 3) Какую минимальную длину  $L_{\min}$  мог иметь рельс?

*А.Евсеев*

9 класс

#### Задача 1. Выцветшие фокусы линзы

В архиве Снеллиуса нашли рукопись с оптической схемой. От времени чернила выцветли и остались видны только две точки, лежащие на луче, прошедшем сквозь линзу,

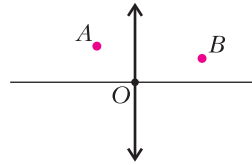


Рис. 8

сама линза и главная оптическая ось (рис. 8). Точечный источник находился на главной оптической оси на двойном фокусном расстоянии от линзы. По имеющимся данным восстановите положение фокусов линзы.

*В.Слободянин*

#### Задача 2. Частицы в трубах

Первая частица разгоняется с ускорением  $a$  в прямой трубе длиной  $L$  от ее конца  $A$  с нулевой начальной скоростью (рис. 9). Вто-

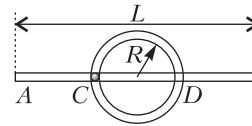


Рис. 9

рая частица движется с постоянной скоростью  $v$  в другой трубе, имеющей форму кольца радиусом  $R$  и расположенной непосредственно над первой трубой таким образом, что центр кольца совпадает с серединой первой трубы. В момент пролета первой частицы через точку  $C$ , которая расположена под кольцевой трубой, вторая частица оказывается точно над первой. Второе пересечение труб (точку  $D$ ) частицы тоже пролетают одновременно.

- 1) Как зависит скорость  $v$  от радиуса  $R$ ?
- 2) Чему равна скорость  $v_1$  при  $R = L/2$ ?
- 3) Чему равна скорость  $v_2$  при  $R \ll L$ ?

*С.Кармазин*

#### Задача 3. Гидростатический реостат

В боковые непроходящие стенки вертикальных сообщающихся сосудов, площади сечения которых  $S = 100 \text{ см}^2$  и  $3S$ , вмонтированы две одинаковые тонкие однородные нихромовые проволоки. Длина проволок равна высоте сосудов. К нижним концам проволок подключена идеальная батарея с напряжением на клеммах  $U = 46,2 \text{ В}$ . Сосуды имеют высоту  $2h_0$ ,  $h_0 = 50 \text{ см}$ . В сосуды до уровня  $h_0$  залита вода, которая накрыта легкими и тонкими проводящими поршнями. Поршни не пропускают воду, имеют контакт с проволоками и могут без трения передвигаться внутри сосудов, не покидая их, благодаря стопорам. К поршням с помощью гибких проводов подключен амперметр (длина проводов позволяет поршням свободно перемещаться). Схема установки изображена на рисунке 10. Когда на маленький

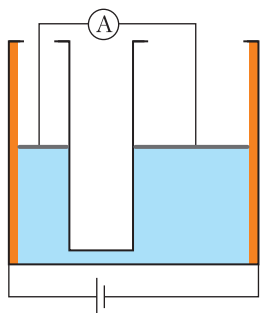


Рис. 10

поршень кладут непроводящую гиру массой 1 кг, амперметр показывает силу тока  $I_1 = 2,31$  А. Если же 3 таких гири положить на большой поршень, то амперметр покажет силу тока  $I_2 = 2,1$  А.

1) Определите сопротивление амперметра  $R_A$  при условии, что соединительные провода и поршни имеют пренебрежимо малое сопротивление.

2) Определите силу тока, который показывает амперметр, когда на поршнях отсутствуют грузы.

3) В каких пределах может меняться сила тока в собранной установке, если в распоряжении имеется широкий выбор грузов?

Можно считать, что соединительная трубка имеет пренебрежимо малое сечение. Проводимость воды также очень мала. Плотность воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>.

*А.Евсеев*

#### Задача 4. Что так, что эдак

Ваня и Маша провели 2 эксперимента. В первом эксперименте десятилитровую кастрюлю, заполненную наполовину водой комнатной температуры  $t_0 = 20$  °С, грели на плитке мощностью  $P = 1,4$  кВт в течение  $\tau = 10$  мин. При этом через  $\tau_1 = 5$  мин после начала эксперимента в кастрюлю, не снимая ее с плитки, долили некоторое количество воды комнатной температуры, а еще через  $\tau_2 = 3$  мин, также не снимая кастрюлю с плитки, из нее столько же воды отлили. Во втором эксперименте при тех же начальных условиях отлив и долив поменяли местами, не меняя общее время эксперимента, моменты манипуляций и количество доливаемой и отливаемой воды. Конечная температура воды в кастрюле в обоих экспериментах совпала.

1) Какой была масса добавляемой в экспериментах воды?

2) Какую температуру имела вода в кастрюле в конце экспериментов?

3) Какого максимального значения достигла температура воды в кастрюле в каждом из проведенных экспериментов?

Считайте, что долив и отлив воды происходят очень быстро. Тепловые потери и теплоемкость кастрюли пренебрежимо малы, а вода в процессе экспериментов не закипала. Удельная теплоемкость воды  $c = 4,2$  кДж/(кг · °С), плотность воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>.

*А.Евсеев*

#### Задача 5. Движение по спице

Материальные точки  $B$  и  $C$  связаны нерастяжимыми нитями  $AB$  и  $BC$  (рис. 11). Точка  $C$  может скользить по неподвижной длинной вертикальной спице, на которой также закреплен конец  $A$  нити  $AB$ . В момент, показанный на рисунке, нить  $BC$  образует угол  $\varphi = 30^\circ$  с вертикалью и перпендикулярна нити  $AB$ , скорость точки  $C$  направлена вниз и равна  $v$ , тангенциальное ускорение точки  $B$  равно  $a_t$  и точка  $B$  движется в плоскости рисунка. Нити натянуты. Оказалось, что ускорение точки  $C$  в рассматриваемый момент равняется нулю.

Рис. 11

1) Определите модуль скорости  $v_B$  точки  $B$  в рассматриваемый момент.

2) Определите длину  $l_{BC}$  нити  $BC$ .

3) Определите модуль ускорения  $a_B$  точки  $B$  в рассматриваемый момент.

*А.Уймин*

10 класс

#### Задача 1. Зонд

Экспериментатор Глюк сконструировал атмосферный зонд, состоящий из шара объемом  $V = 20$  м<sup>3</sup>, заполненного гелием при давлении  $p_0 = 100$  кПа и температуре  $T_0 = 300$  К, и подвешенного к нему набора метеорологических датчиков.

1) При какой максимальной массе датчиков зонд сможет подняться на высоту 4 км?

2) На какую максимальную высоту сможет подняться такой шар без датчиков?

График зависимости давления воздуха от высоты над поверхностью Земли представлен на рисунке 12. Считайте, что температу-

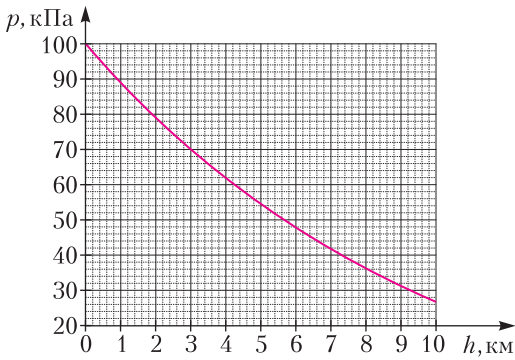


Рис. 12

ра воздуха линейно уменьшается с высотой от 300 К у поверхности Земли до 220 К на высоте 10 км. Оболочка шара является тонкой, нерастяжимой и непроницаемой для газов. Температуру газа внутри шара считайте равной температуре окружающего воздуха. Объемом датчиков при расчетах можно пренебречь. Масса оболочки шара  $m_0 = 8$  кг, молярная масса гелия  $M_{\text{г}} = 4$  г/моль, молярная масса воздуха  $M_{\text{в}} = 29$  г/моль, универсальная газовая постоянная  $R = 8,31$  Дж/(К · моль).

А.Заяц

### Задача 2. Наклонная плоскость

Жесткий невесомый стержень длиной  $L$  лежит на шероховатой наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом

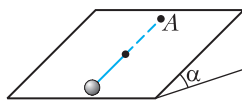


Рис. 13

(рис. 13). Один конец стержня шарнирно прикреплен к плоскости, а ко второму концу присоединен небольшой массивный груз. Изначально стержень расположен так, что груз находится в самой нижней точке.

1) Какую минимальную скорость  $v_1$ , направленную перпендикулярно стержню и вдоль плоскости, необходимо сообщить грузу, чтобы он, двигаясь вместе со стержнем, смог оказаться в точке, диаметрально противоположной начальной (в точке А)?

2) Какую минимальную скорость  $v_2$ , направленную перпендикулярно стержню и вдоль плоскости, необходимо сообщить грузу, чтобы он смог вернуться в исходную точку после одного полного оборота стержня?

Коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью  $\mu = \frac{\text{tg } \alpha}{2}$ , трение между

стержнем и плоскостью и трение в шарнире отсутствуют.

А.Заяц

### Задача 3. Волчок

Волчок представляет собой тонкостенную однородную полусферу, к поверхности которой прикреплен тонкий невесомый стержень с закрепленным на его конце точечным телом (рис. 14). Стержень проходит через центр полусферы. Масса полусферы  $M$ , ее радиус  $R$ . Длина стержня  $L = 2R$ , масса точечного тела  $m$ .

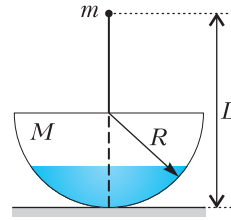


Рис. 14

Волчок расположен на шероховатой горизонтальной поверхности. Внутри волчка налита вода плотностью  $\rho$ . Объем воды меньше объема полусферы. Трением воды о стенки полусферы можно пренебречь.

1) Докажите, что центр масс тонкостенной однородной полусферы расположен на расстоянии  $R/2$  от ее центра.

При ответах на дальнейшие вопросы можете использовать факт из п. 1, даже если не смогли это доказать.

2) Волчок отклоняют так, что его стержень составляет малый угол  $\alpha$  с вертикалью, и отпускают. Нарисуйте все силы, действующие на волчок (вода не считается частью волчка) сразу после того, как его отпустили.

3) Для случая  $M = 6m$  определите, при каких значениях объема воды в волчке его равновесие будет устойчивым.

4) Пусть объем воды внутри волчка равен половине объема полусферы. Определите, при каких значениях отношения  $M/m$  равновесие волчка будет устойчивым.

А.Соколов, С.Муравьев, М.Карманов

### Задача 4. Бусинка на стержне

Твердый невесомый стержень длиной  $2L$  опирается концом А на гладкую вертикальную стенку, а концом В на горизонтальную шероховатую поверхность (рис. 15). Коэффициент трения между стержнем и плоскостью и трение в шарнире отсутствуют.

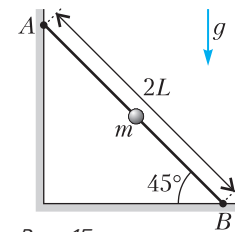


Рис. 15

жнем и горизонтальной поверхностью равен  $\mu$ . По стержню может без трения скользить маленькая бусинка массой  $m$ . Тела удерживают так, что стержень расположен под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту, а бусинка находится посередине стержня. Тела отпускают, и через некоторое время стержень приходит в движение, при этом бусинка к этому моменту времени не успевает удариться о горизонтальную поверхность.

1) Найдите скорость бусинки в момент времени, когда стержень начнет двигаться, и все значения коэффициента трения  $\mu$ , при которых возможна описанная в условии ситуация.

2) Найдите силу взаимодействия стержня с вертикальной стенкой в этот момент времени.

*А. Уймин*

### Задача 5. Весы

В этой задаче вам предлагается изучить работу электронных весов. Принцип их работы, как и у пружинных весов, основан на измерении деформации тела под механической нагрузкой. Деформируемым телом является балка прямоугольного сечения, прикрепленная одним концом к корпусу весов, а другим к платформе, на которую устанавливается измеряемый груз (рис. 16). Тол-

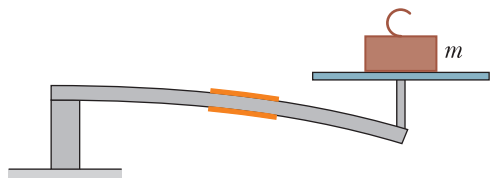


Рис. 16

щина балки  $d$ . Под нагрузкой балка изгибается. Измерение деформации производится с помощью двух одинаковых тензорезисторов №1 и №2, жестко приклеенных на верхнюю и нижнюю части балки соответственно. Таким образом, при деформации балки длина резистора изменяется так же, как длина участка поверхности, на который он приклеен. Тензорезистор представляет змейку из проводящей фольги, наклеенную на поверхность балки (рис. 17). При деформации балки фольга растягивается или сжима-

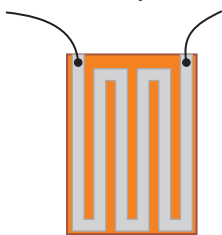


Рис. 17

ется, за счет чего ее сопротивление соответственно увеличивается или уменьшается. Зависимость сопротивления тензорезистора от относительного удлинения (сжатия)  $\epsilon$  поверхности, на которую он приклеен, задается выражением  $R_{1,2} = R_0(1 + k\epsilon)$ , где  $R_0$  – сопротивление при отсутствии деформации,  $k$  – тензометрический коэффициент. Величина  $k$  лежит в пределах от 1 до 2.

Тензорезисторы включены в электрическую цепь с двумя обычными резисторами  $R_3$ , источником постоянного напряжения и вольтметром (рис. 18). Сопротивления резисторов  $R_3$  равны  $R_0$  (сопротивлению тензорезистора при отсутствии деформации).

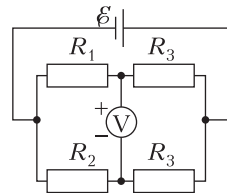


Рис. 18

Когда на платформу весов ставят груз, балка изгибается, при этом верхняя часть балки растягивается, а нижняя сжимается. Некоторая линия внутри балки остается недеформируемой (в дальнейшем – недеформируемая линия), т.е. ее длина при изгибе балки остается неизменной (рис. 19). Участок балки, к которому приклеены тензорезисторы, можно представить в виде дуги окружности. Радиус кривизны недеформируемой линии в месте крепления тензорезисторов обратно пропорционален массе груза  $m$ , поставленного на платформу весов:  $r = \frac{\alpha}{m}$ ,

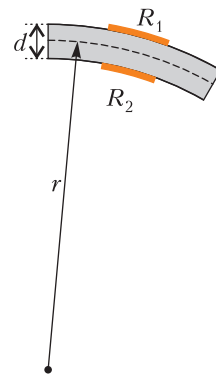


Рис. 19

где  $\alpha$  – некоторый известный коэффициент. При этом значение радиуса кривизны много больше толщины балки и изменением толщины балки можно пренебречь. Массу платформы и балки в рассматриваемой модели учитывать не будем. Вольтметр будем считать идеальным.

Предположим, что недеформируемая линия проходит через середину балки.

1) Выразите величину относительной деформации  $\epsilon_1$  тензорезистора №1 через величины  $r$  и  $d$ .

2) Выразите величину относительной деформации  $\epsilon_2$  тензорезистора №2 через величины  $r$  и  $d$ .

Зависимость величины показаний вольтметра от массы поставленного на платформу груза с учетом малости деформации балки может быть представлена в виде  $U = \gamma m^n$ , где  $n$  – целое число,  $\gamma$  – коэффициент пропорциональности.

3) Определите  $n$  и  $\gamma$ .

4) Теперь предположим, что недеформируемая линия проходит на расстоянии  $x = d/4$  от верхней поверхности балки. Рассчитайте в этом случае показания вольтметра при установке на платформу груза массой  $m$ .

5) Весы перенесли в более теплое помещение, из-за этого они нагрелись. В процессе нагрева весов балка изменила свою длину, ее относительная деформация составила  $\epsilon_3$  (порядка величин  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ ). Изменением толщины и ширины балки можно пренебречь. Рассчитайте в этом случае показания вольтметра при установке на платформу груза массой  $m$ . (Недеформируемая линия проходит посередине балки.)

При решении задачи считайте известными такие величины:  $\mathcal{E}$  – напряжение источника питания;  $k$  – тензометрический коэффициент резисторов №1 и №2;  $m$  – масса груза, установленного на весы;  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности между радиусом кривизны балки в месте крепления резисторов и массой груза в минус первой степени;  $d$  – толщина деформируемой балки;  $\epsilon_3$  – относительное удлинение балки при ее нагреве.

Величину сопротивления резисторов  $R_0$  считайте неизвестной.

*Ю. Черников*

11 класс

**Задача 1. Вращающаяся гильза**

Тонкостенная цилиндрическая гильза массой  $m$ , вращающаяся с угловой скоростью  $\omega_0$  вокруг своей оси, влетает со скоростью  $v_0$  в отверстие в стальной плите (рис. 20,а). Оси гильзы и отверстия совпадают, внешний радиус гильзы  $R$  равен радиусу отверстия, длина гильзы  $l$  равна толщине плиты. График зависимости силы, которую необходимо

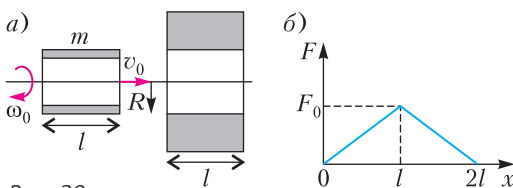


Рис. 20

прикладывать к невращающейся гильзе для проталкивания ее через отверстие, от величины перемещения представлен на рисунке 20,б. Максимальное значение силы равно  $F_0$ . Эта сила нужна для преодоления силы сухого трения, причем нормальные силы реакции, действующие на участки поверхности гильзы со стороны стен отверстия, не зависят от скорости и угловой скорости гильзы. Поверхности гильзы и отверстия однородны и одинаковы по всей длине. Координата  $x = 0$  отвечает положению гильзы, которая только начала входить в плиту.

1) При каком минимальном значении  $v_0 = v_{\min}$  гильза пролетит через отверстие (начальная угловая скорость  $\omega_0$  всегда одна и та же)?

2) Чему будет равна при этом (при  $v_0 = v_{\min}$ ) угловая скорость  $\omega_1$  вращения гильзы в момент, когда гильза окажется целиком внутри плиты?

3) Через какое время  $\tau$  от момента влета в отверстие при начальной скорости  $v_0 \geq v_{\min}$  гильза окажется внутри плиты целиком?

*А. Аполонский*

**Задача 2. Как измерить поверхностное натяжение?**

В поле тяжести на двух невесомых нерастяжимых нитях к горизонтальному стержню  $CD$  подвешена планка  $AB$  массой  $m$  и длиной  $L$ . Нити прикреплены к концам планки и располагаются вертикально (рис. 21,а). После погружения системы в неизвестную жидкость и последующего извлечения ее из жидкости в пространстве между нитями, планкой и стержнем сформировалась пленка жидкости, а сама система приобрела вид, представленный на рис. 21,б. При этом минимальное расстояние между нитями оказалось равным  $d$ , а расстояние между планкой и стержнем равным  $h$ .

1) Определите коэффициент поверхностного натяжения жидкости  $\sigma$ .

2) Вычислите величину  $\sigma$  при  $L = 10$  см,  $m = 2$  г,  $d = 5$  см,  $h = 8,7$  см.

*А. Аполонский*

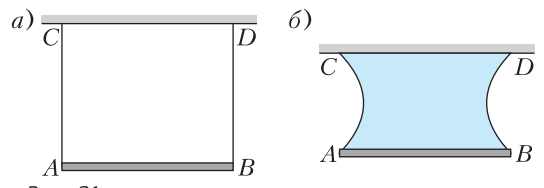


Рис. 21



**Задача 3. Трапеция Лорда Кельвина**

В архиве лорда Кельвина была найдена диаграмма циклического процесса, проводимого с постоянным количеством идеального двухатомного газа, представляющая собой в координатах  $pV$  трапецию. От времени чернила выцвели и на рисунке 22 осталась видна лишь трапеция. Известно, что теплоемкость в каждом из процессов  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$ ,  $da$  была постоянна, причем  $C_{bc} = C_{da} > C_{ab} = C_{cd}$ . Также известно, что максимальная температура газа в цикле равна  $T_1 = 400$  К, а температуры некоторой пары из точек  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  были одинаковы и равны  $T_2 = 200$  К.

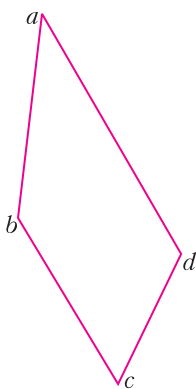


Рис. 22

1) Пользуясь только циркулем и линейкой без делений, восстановите положения координатных осей  $p$  и  $V$ .

*Примечание.* Описывать построение параллельных и перпендикулярных прямых, проходящих через заданную точку, деление отрезка пополам и подобные стандартные геометрические процедуры не обязательно.

2) Определите температуры  $T_a$ ,  $T_b$ ,  $T_c$ ,  $T_d$  в точках  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  соответственно.

3) Найдите КПД цикла  $\eta$ .

А.Уймин

**Задача 4. Цилиндр и нелинейная плотность заряда**

Диполь – жесткий стержень длиной  $H$  с зарядами  $q$  и  $-q$  на концах – находится на оси тонкостенной цилиндрической трубки радиусом  $R$  и высотой  $H$  (рис. 23). На

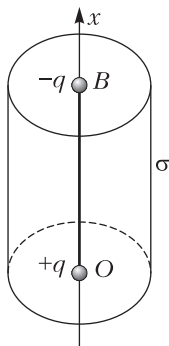


Рис. 23

трубку нанесен заряд с поверхностной плотностью  $\sigma$ , которая зависит от расстояния  $x$  до плоскости нижнего основания по закону

$$\sigma(x) = \sigma_0 \sin^2 \frac{\pi x}{2H},$$

где  $\sigma_0 > 0$ . Найдите направление и величину электростатической силы, действующей на диполь в положении, в котором его заряды  $q$  и  $-q$  находятся в центре нижнего основания (точка  $O$ ) и в центре верхнего основания (точка  $B$ ) соответственно.

К.Соломатин

**Задача 5. Движение в скрещенных полях**

В скрещенных электрическом и магнитном полях движется маленькая частица массой  $m$  с положительным зарядом  $q$ . Вектор однородного электрического поля с напряженностью  $E$  направлен вдоль оси  $y$  (рис. 24).

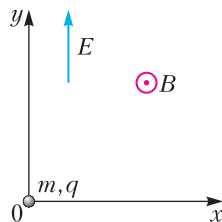


Рис. 24

Вектор индукции магнитного поля направлен вдоль оси  $z$ , перпендикулярной плоскости  $xy$ , а его величина зависит только от координаты  $y$  по закону  $B = \alpha\sqrt{|y|}$ . В начальный момент времени частица расположена в начале координат, а ее скорость равна нулю. При дальнейшем движении частица впервые остановилась в момент времени  $t = T$  после начала движения. Силы тяжести нет.

1) Определите скорость частицы в момент, когда она направлена вдоль оси  $x$ .

2) Определите радиус кривизны траектории частицы в точке с координатой  $y$ .

3) Изобразите траекторию частицы за время движения  $T$ .

4) На каком расстоянии от точки старта окажется частица через время  $\tau = 3T/2$ ?

*Примечание.* При малых значениях  $\Delta x$  справедлива формула  $\Delta(x^n) = nx^{n-1}\Delta x$ .

А.Уймин

Публикацию подготовил В.Слободянин

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## «Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №2)

1. 5.

Эта последовательность периодична: 1 4 6 5 4 6 5 ...  
На сотом месте стоит цифра 5.

2. 8.

Пусть разрез проходит через  $k$  фигурок. Это число не превосходит 9, так как одна из клеток каждой разрезанной фигурки будет попадать в красную зону (рис.1), состоящую из 9 клеток. В левом верхнем прямоугольнике  $4 \times 6$  всего четное количество клеток, из них часть клеток лежит в целых фигурках (и их четное количество), а остальные клетки — из разрезанных фигурок и их ровно  $k$ . Поэтому  $k$  четно. Следовательно,  $k$  не превышает 8.

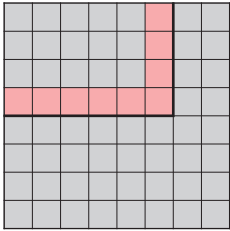


Рис. 1

Пример, в котором разрез проходит через 8 фигурок, показан на рисунке 2.

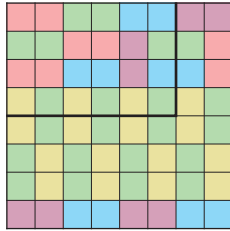


Рис. 2

3. 2.

Прямая  $y = ax + b$  пересекает прямую  $x = 1$  в точке  $(1; a + b)$ . Чтобы провести прямую  $x = 1$ , рассмотрим пересечение прямой  $y = 1 - x$  с осью

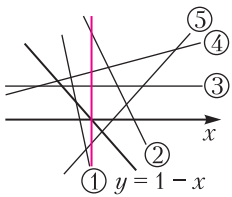


Рис. 3

$Oy$  — это точка  $(1; 0)$ . Восстановив в ней перпендикуляр к оси  $Ox$  (на рисунке 3 он изображен красным цветом), получим прямую  $x = 1$  и среди точек пересечения ее с данными прямыми выберем точку с самой большой ординатой. Это будет пересечение с прямой номер 2.

4. 8753.

Из цифр 1, 2, 4, 5 надо убрать хотя бы три, так как если из них останутся хотя бы две, то они будут идти по возрастанию. Аналогично, из цифр 7, 9 надо убрать хотя бы одну. Следовательно, останется не больше 4 цифр. Число 8753 подходит под условие. Покажем, что большее число получить нельзя. Нельзя получить число, начинающееся с 9, поэтому первой цифрой надо поставить 8. Для второй цифры наибольший вариант это 7, далее нельзя поставить цифру больше 5, затем остается только 3.

## Конкурс имени А.П.Савина

(см. «Квант» №1)

17. Да. Например, на верхней грани кубика напишем 1, на нижней — 13, на левой — 6, на правой — 3, на передней — 2 и на задней — 8. Тогда в вершинах стоят числа 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27 (рис.4).

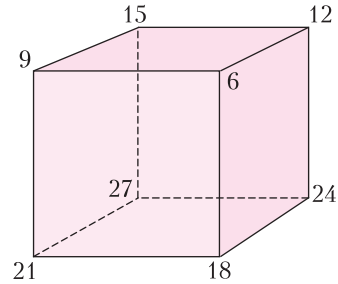


Рис. 4

18. 6.

Пусть  $X$  — точка, где зарыт клад, а  $Y$  — точка, куда прибыл Петя. Пристань равноудалена от  $X$  и  $Y$ , а значит, она на серединном перпендикуляре к отрезку  $XY$ . Аналогично, на той же прямой — крепость и деревня. На этой прямой есть ровно две точки, удаленные от крепости на 3 км. В них и находятся пристань и деревня, а расстояние между ними  $3 + 3 = 6$  (км).

19. 315.

Все треугольники делятся на те, у которых нижняя сторона горизонтальна (назовем их треугольниками первого типа, обозначим их количество  $S_n$ ) и те, у которых верхняя сторона горизонтальна (это треугольники второго типа, их количество  $P_n$ ). Тогда  $X_n = S_n + P_n$ .

Рассмотрим треугольники первого типа и найдем  $S_n$ . Будет только один такой треугольник со стороной длины  $n$ ;  $1 + 2 = 3$  треугольника со стороной длины  $n - 1$ ;  $1 + 2 + 3 = 6$  треугольников со стороной длины  $n - 2$  и так далее, треугольников со стороной длины 1 будет  $1 + 2 + \dots + n$ . Числа вида  $T_k = 1 + 2 + \dots + k$  называются *треугольными*. Известно много свойств треугольных чисел, (см., например, книгу Е.Деа и М.Деа «Фигурные числа»). В частности, известна формула суммы треугольных чисел

$$S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n = 1 + 3 + 6 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Теперь рассмотрим треугольники второго типа и найдем  $P_n$ . Треугольников со стороной 1 будет  $T_{n-1}$ , треугольников со стороной 2 будет  $T_{n-3}$ , треугольников со стороной 3 будет  $T_{n-5}$  и так

далее, самыми большими будут треугольники со стороной  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ . Значит,  $P_n = T_{n-1} + T_{n-3} + T_{n-5} + \dots$

Можно найти эту сумму, например, так:

$$\begin{aligned}
 P_n + P_{n-1} &= T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} + \dots = S_{n-1}, \\
 P_n - P_{n-1} &= (T_{n-1} - T_{n-2}) + (T_{n-3} - T_{n-4}) + \dots = \\
 &= (n-1) + (n-3) + (n-5) + \dots = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \\
 P_n &= \frac{1}{2}(P_n + P_{n-1}) + \frac{1}{2}(P_n - P_{n-1}) = \\
 &= \frac{1}{2}S_{n-1} + \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.
 \end{aligned}$$

Приходим к ответу:

$$\begin{aligned}
 X_n = S_n + P_n &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{1}{2} \frac{(n-1)n(n+1)}{6} + \\
 &+ \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \frac{n(n+1)^2}{4} + \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.
 \end{aligned}$$

Выражение в ответе можно упростить, если рассматривать отдельно четные и нечетные  $n$ . При  $n = 10$  получаем ответ 315.

**20.** 36 ходов.

Возможно, в ходе перестановки некоторые короли сделают единственный ход – по диагонали на другую черную клетку – и больше с места не сдвинутся. Такие ходы назовем *единичными*.

Докажем, что количество единичных ходов не превышает 28. Сначала отметим на доске все возможные диагональные ходы по черным полям (рис. 5). Разобьем эти ходы на группы, как на рисунке 6. Получится 9 групп, имеющих

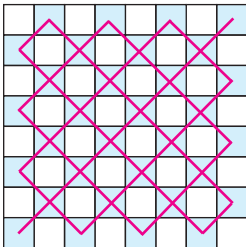


Рис. 5

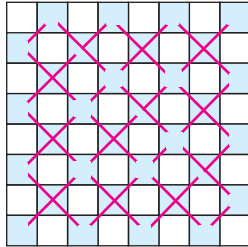


Рис. 6

форму креста, 3 группы в виде буквы Т и 4 группы, состоящие из единственного хода.

Рассмотрим любую группу, имеющую форму креста (рис. 7). Она содержит 4 возможных хода, соединяющих центральную клетку этого креста с крайними. Докажем, что среди этих ходов единичными могут оказаться не более двух.



Рис. 7

Предположим противное – что при перестановках королей было сделано не менее трех из этих

ходов и эти три хода оказались единичными. Каждый из этих ходов может быть либо из центральной клетки в одну из четырех крайних (их мы будем называть ходами на край), либо наоборот (а эти назовем ходами в центр). Самый первый из трех единичных ходов – на край или в центр. Разберем оба случая.

1) Первый единичный ход – на край. Мог ли второй единичный ход тоже быть на край? Нет – ведь король, сделавший этот ход, должен сначала занять центральную клетку, т.е. пойти на нее с какой-то другой клетки. Однако в таком случае его ход с центральной клетки на крайнюю уже не будет единичным. Поэтому второй единичный ход – только в центр, и сделавший этот ход король больше с места не сдвинется. Но тогда нет возможности сделать третий диагональный ход – центральная клетка занята и уже не освободится. Противоречие.

2) Первый единичный ход – в центр. Но тогда центр занят, и невозможно сделать даже второй единичный ход. Опять противоречие.

Таким образом, из всех возможных ходов каждой группы в виде креста единичными могут быть не более двух. Точно такими же рассуждениями можно доказать, что и среди трех возможных ходов каждой Т-образной группы тоже не больше двух могут быть единичными.

Всего у нас 9 групп в форме креста и 3 группы в форме буквы Т, и потому единичных ходов «в пределах» этих групп не более  $2 \cdot (9 + 3) = 24$ . Еще у нас имеется 4 группы, состоящие из единственного хода. Даже если все они единичные, то суммарных единичных ходов может быть сделано не больше  $24 + 4 = 28$ . Всего королей на доске 32, и не более 28 из них могли сделать единичный ход, остальные короли обязаны сделать не менее двух ходов. Поэтому суммарное количество ходов не меньше  $28 + 2 \cdot 4 = 36$ .

Приведем пример, как это можно сделать (рис. 8). Здесь изображен замкнутый маршрут по клеткам доски (всем черным и четырем белым). Сначала один из королей делает в соответствии с

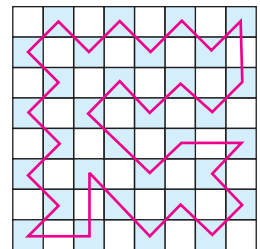


Рис. 8

этим маршрутом ход с черной клетки на белую (например, с клетки a1 на b1). Затем на его место в соответствии с маршрутом переходит другой король (с клетки b2 на a1), потом на место того короля – следующий король (с a3 на b2) и так далее. В конечном счете, когда все короли передвинулись на новые места (послед-

ним из них занимает свое место король, перешедший двумя ходами с клетки c1 на c3), делается последний ход: король, сделавший когда-то самый первый ход, передвигается с клетки b1 на клетку c1. Всего 36 ходов.

Эта задача является развитием задачи M2494 «Задачника «Кванта» (ее автор Р.Ефремов).

**Региональный этап XLIX Всероссийской олимпиады школьников по математике**

9 класс

**1. Они затратили поровну времени.**

Между двумя моментами встречи каждый мальчик проехал половину асфальтового и половину песчаного участков, и они затратили на это поровну времени. Значит, на всю дорожку каждый из них затратил вдвое больше времени, т.е. тоже поровну.

**2. Нельзя.**

Многоугольник, у которого площадь (измеренная в см<sup>2</sup>) численно равна периметру (измеренному в см), назовем *хорошим*.

Заметим, что исходный треугольник – хороший: он прямоугольный с катетами 5 см и 12 см, поэтому его площадь равна 30 см<sup>2</sup> и численно совпадает с его периметром, равным 5 + 12 + 13 = 30 см.

Если какой-то многоугольник П разбит на хорошие многоугольники, то площадь П, равная сумме площадей всех многоугольников разбиения, совпала бы численно с суммой периметров многоугольников разбиения. Но сумма этих периметров больше периметра П (на удвоенную сумму длин общих частей границ многоугольников разбиения). Получаем, что площадь П больше его периметра.

Значит, никакой хороший многоугольник, в том числе данный треугольник, нельзя разрезать на несколько (больше одного) хороших многоугольников.

**3. 2n – 1.**

Заметим, что в каждой вертикали и каждой горизонтали стоит ровно по одной ладье.

Покажем сначала, что все 2n ладей не могли попасть в одну часть. Пусть A, B, C, D – угловые клетки доски (в порядке обхода против часовой стрелки; рис. 9). Из симметрии, A и C должны принадлежать разным частям, как и B и D. Это значит, что либо A и B, либо A и D лежат в одной части, а остальные две клетки – в другой.

Пусть для определенности A и B лежат в части I. Тогда все граничные клетки между ними также должны лежать в части I; действительно, если какая-то такая клетка X лежит в части II, то в

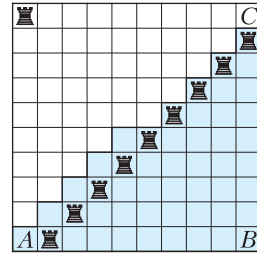


Рис. 9

ней же лежит какой-то путь из X в C, а в части I лежит какой-то путь из A в B; но эти пути должны иметь общую клетку, что невозможно. Значит, вся горизонталь между клетками A и B лежит в части I, т.е. в ней должна быть хотя бы одна ладья. Аналогично, в части II тоже есть целая горизонталь (между C и D), а значит, есть ладья. Отсюда и следует требуемое.

Осталось привести пример, когда в одной из частей расположено 2n – 1 ладей. Один из возможных примеров устроен так. Рассмотрим диагональ квадрата; в одну часть попадут клетки ниже нее, а также нижняя половина самой диагонали; остальные клетки попадут во вторую часть. Расставим 2n – 1 ладей в клетки непосредственно под диагональю; тогда они окажутся в одной части. Оставшуюся ладью поставим в пересечение оставшихся строки и столбца. На рисунке 8 указан такой пример при n = 5.

**5. Обозначим окружности с диаметрами AB и CD через ω<sub>1</sub> и ω<sub>2</sub> соответственно. Заметим, что точка S лежит на отрезке MN.**

Пусть прямые CS и DS пересекают l в точках P и Q соответственно (рис. 10). Поскольку CD – диаметр ω<sub>2</sub>, имеем ∠PSQ = ∠CSD = 90°. В прямоугольном треугольнике PSQ отрезок SM – высота, поэтому ∠MSP = 90° – ∠SPM = ∠SQP. С другой стороны, поскольку NS = NC, имеем ∠SCD = ∠CSN = ∠MSP. Итак, ∠SCD = ∠MSP = ∠SQP, т.е. точки P, Q, C и D лежат на одной окружности γ'.

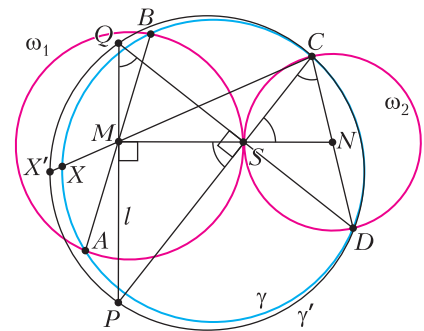


Рис. 10

Пусть теперь прямая  $MC$  пересекает окружности  $\gamma$  и  $\gamma'$  в точках  $X$  и  $X'$  соответственно (точка  $M$  лежит на отрезках  $CX$  и  $CX'$ ). Тогда  $MC \cdot MX = MA \cdot MB = MS^2$ , поскольку  $M$  – центр окружности  $\omega_1$ . С другой стороны,  $MC \cdot MX' = MP \cdot MQ = MS^2$ ; последнее равенство опять же вытекает из того, что  $SM$  – высота в прямоугольном треугольнике  $PSQ$ . Значит,  $MC \cdot MX = MS^2 = MC \cdot MX'$ , т.е.  $X = X'$ . Но точка  $X$  отлична от  $C$  и  $D$ , так как  $M$  не лежит на  $CD$ ; значит, окружности  $\gamma$  и  $\gamma'$  имеют три общие точки  $C, D, X$ , т.е. они совпадают. Поэтому  $P$  лежит на  $\gamma$ , что и требовалось доказать.

**6.** Нет.

Предположим противное. Пусть  $S_{m+1}$  делится на  $2^s$ , но не делится на  $2^{s+1}$ ; тогда  $s \geq 2$ . Это значит, что среди чисел  $1, 2, \dots, m+1$  есть число  $a$ , делящееся на  $2^s$ . Но тогда число  $a/2$  уже не превосходит  $m$  и делится на  $2^{s-1}$ ; значит, и  $S_m$  делится на  $2^{s-1}$ . Поэтому  $S_{m+1}/S_m$  не может делиться на степень двойки, большую первой.

**7.**  $d = 7$ .

Докажем, что  $d \geq 7$ . Все числа с доски разбиваются на цепочки чисел вида  $a, a+1, a+2, \dots, a+t$  так, что числа из разных цепочек не отличаются ровно на 1. Такое разбиение нетрудно построить, соединив любые два числа, отличающиеся на 1, отрезком и рассмотрев полученные ломаные.

Пусть получилось  $k$  цепочек, в которых  $n_1, n_2, \dots, n_k$  чисел соответственно (некоторые цепочки могут состоять из одного числа). В цепочке из  $n_i$  чисел есть ровно  $n_i - 1$  пара чисел, отличающихся на 1. Поэтому общее количество единиц в тетрадке равно

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_k - 1) = (n_1 + n_2 + \dots + n_k) - k = 90 - k,$$

откуда  $k = 99 - 85 = 14$ . Значит, в одной из цепочек не меньше  $99/14$  чисел, т.е. не меньше 8 чисел. Разность наибольшего и наименьшего чисел в такой цепочке не меньше  $8 - 1 = 7$ .

Осталось привести пример, в котором  $d = 7$ . Такой пример дают, например, числа

$$0 = \frac{0}{14}, \frac{1}{14}, \frac{2}{14}, \dots, \frac{98}{14} = 7.$$

Действительно, в этом примере  $d = 7$ , и ровно для первых 85 из этих чисел в наборе есть число, на единицу большее.

**9.**  $m = 1$ .

Докажем сначала, что  $m = 1$  удовлетворяет требованиям задачи. Заметим, что  $ab + c =$

$= ab + c(a + b + c) = (c + a)(c + b)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{ab}{c+ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a+bc}} + \sqrt{\frac{ca}{b+ca}} &= \\ &= \sqrt{\frac{ab}{(c+a)(c+b)}} + \sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}} + \sqrt{\frac{ca}{(b+c)(b+a)}} = \\ &= \frac{\sqrt{ab}\sqrt{a+b} + \sqrt{bc}\sqrt{b+c} + \sqrt{ca}\sqrt{c+a}}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}. \end{aligned}$$

Значит, осталось доказать неравенство

$$\sqrt{ab}\sqrt{a+b} + \sqrt{bc}\sqrt{b+c} + \sqrt{ca}\sqrt{c+a} \geq \sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Возведем это неравенство в квадрат; оно примет вид

$$\begin{aligned} ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + \\ + 2\sqrt{ab^2c(a+b)(b+c)} + \\ + 2\sqrt{bc^2a(b+c)(c+a)} + 2\sqrt{ca^2b(c+a)(a+b)} \geq \\ \geq a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 2abc. \end{aligned}$$

После сокращения слева останется сумма корней, а справа число  $2abc$ . Но любой из корней не меньше  $abc$ ; действительно, например,  $\sqrt{ab^2c(a+b)(b+c)} \geq \sqrt{ab^2c \cdot ac} = abc$ . Отсюда и следует требуемое.

Осталось доказать, что при любом  $m > 1$  неравенство выполнено не всегда; достаточно это сделать при  $1 < m < 3$ . Пусть  $m = 1 + 2t$  при  $0 < t < 1$ . Положим  $a = b = \frac{1-t^2}{2}$  и  $c = t^2$ . Тогда  $a + b + c = 1$ , однако

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{ab}{c+ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a+bc}} + \sqrt{\frac{ca}{b+ca}} < \\ < \sqrt{\frac{ab}{ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} = 1 + 2t = m. \end{aligned}$$

**10.** Ясно, что результат нажатия нескольких переключателей не зависит от того, в каком порядке эти нажатия были произведены – количество переключений каждой лампочки не зависит от этого порядка. В частности, можно считать, что Петя использовал каждый переключатель не более одного раза.

Весь куб разбивается на 100 слоев, параллельных красной грани. Каждый переключатель на некресной грани переключает лампочки в одном слое, а каждый переключатель на красной грани – по лампочке во всех 100 слоях.

После действий Пети найдется слой, в котором включено  $d \leq k/100$  лампочек – назовем один та-

кой слой *главным*. Пусть  $\mathcal{V}$  – набор из  $d$  переключателей на красной грани, связанных со включенными лампочками в главном слое. Мы докажем, что Вася сможет погасить все лампочки, используя с красной грани ровно эти переключатели. Запустим несколько другой процесс, начиная с того же исходного положения. Пусть  $\mathcal{P}$  – набор переключателей с красной грани, использованных Петей, а  $\mathcal{Q}$  – набор использованных им переключателей с неокрасных граней, связанных с главным слоем. Пусть Петя применит  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{Q}$ , а затем Вася применит  $\mathcal{V}$ . После действий Пети в главном слое будут гореть те же  $d$  лампочек, что и раньше, а значит, после действий Васи все лампочки в главном слое будут погашены. Если теперь Вася применит в каждом из остальных слоев наборы переключателей с неокрасных граней, аналогичные  $\mathcal{Q}$ , то все лампочки будут погашены.

Пусть теперь Петя применит все остальные переключатели (с неокрасных граней!), которые он применял исходно, а Вася применит их еще по разу. Все лампочки по-прежнему будут погашены. При этом в новом процессе Петя применил ровно те же переключатели, что и в исходном, а Вася использовал лишь переключатели набора  $\mathcal{V}$  с красной грани (и какие-то – с остальных граней). Значит, если в исходном процессе Вася совершит те же действия, которые он сделал в новом, он добьется требуемого.

10 класс

1. Можно.

Один из многих возможных примеров показан на рисунке 11.

	1	2	9	10	20	90	
1	2	0	0	0	0	0	3
0	0	4	0	0	0	0	4
0	0	5	0	0	0	0	5
0	0	0	10	20	0	0	30
0	0	0	0	0	0	40	40
0	0	0	0	0	0	50	50

Рис. 11

3. Предположим противное, и пусть в множестве всех школьников есть различные 30-элементные подмножества  $A_1, A_2, \dots, A_{50}$  (множества участников каждой олимпиады) такие, что пересечение любых 30 из них непусто, а пересечение всех – пусто.

Пусть среди множеств  $A_1, A_2, \dots, A_{50}$  нашлись два множества  $B$  и  $C$ , имеющие  $k \leq 28$  общих элементов  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Для каждого элемента  $x_i$  среди множеств  $A_1, A_2, \dots, A_{50}$  найдем подмножество  $D_i$ ,

не содержащее  $x_i$  (такое подмножество  $D_i$  найдется, иначе  $x_i$  – общий элемент множеств  $A_1, A_2, \dots, A_{50}$ ). (Заметим, что среди подмножеств  $D_i$  могут быть совпадающие.) Тогда пересечение не более 30 подмножеств  $B, C, D_1, \dots, D_k$  пусто. Это противоречит нашему предположению (к данным подмножествам можно добавить еще несколько, чтобы стало 30 подмножеств, при таком добавлении пересечение остается пустым).

Значит, указанных двух множеств  $B$  и  $C$  не найдется. Тогда пересечение любых двух из множеств  $A_1, A_2, \dots, A_{50}$  содержит в точности 29 элементов. Пусть  $A_1 \cap A_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_{29}\}$ , так что  $A_1 = \{z_1, y_1, y_2, \dots, y_{29}\}$ ,  $A_2 = \{z_2, y_1, y_2, \dots, y_{29}\}$ . Найдем подмножество (пусть, для определенности, это подмножество  $A_3$ ), не содержащее  $y_1$ . Так как  $|A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 29$ , то  $A_3$  обязано содержать все элементы  $z_1, z_2, y_1, y_3, \dots, y_{29}$ . Этих элементов 30 (все они различны), поэтому  $A_3 = \{z_1, z_2, y_2, y_3, \dots, y_{29}\}$ . Рассмотрим любое подмножество  $A_i$  из подмножеств  $A_4, \dots, A_{50}$ . Предположим, что  $A_i$  содержит элемент, лежащий вне 31-элементного множества  $K = \{z_1, z_2, y_1, y_2, \dots, y_{29}\} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ . Тогда  $A_i$  должно пересекаться с каждым из подмножеств  $A_1, A_2, A_3$  по одному и тому же 29-элементному подмножеству множества  $K$ . Но  $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 28$ , значит, такого 29-элементного подмножества не существует – противоречие. Отсюда делаем вывод, что все множества  $A_1, A_2, \dots, A_{50}$  являются подмножествами множества  $K$ . Но в множестве  $K$  количество 30-элементных подмножеств равно  $31 < 50$ . Получаем противоречие, завершающее решение задачи.

5. Заметим, что  $PQ \parallel CD$ , так что  $PQ$  – средняя линия прямоугольного треугольника  $AHD$ . Значит,  $PQ$  пересекает гипотенузу  $AH$  в ее середине  $M$ , так что  $MA = MD = MH$  (рис. 12).

Имеем  $\angle MDH = \angle MHD$ , а поскольку  $MH \perp BC$  и  $HD \perp CD$ , имеем также  $\angle MHD = \angle BCD$ . По-

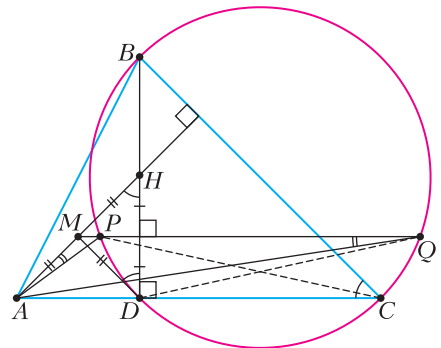


Рис. 12

лучаем равенство  $\angle MHD = \angle BCD$ , из которого следует касание прямой  $MD$  и окружности  $(BCD)$  в точке  $D$ . Отсюда  $MD^2 = MP \cdot MQ$  (по теореме о произведении отрезков секущей).

Далее,  $MA^2 = MP \cdot MQ$ . Значит, треугольники  $AMP$  и  $QMA$  подобны (углы  $AMQ$  общий и  $MA/MP = MQ/MA$ ). Отсюда  $\angle MQA = \angle MAP$ , поэтому  $\angle MPA + \angle MQA = \angle MPA + \angle MAP = \angle HMQ = 90^\circ - \angle MHD = \angle CBD$ . Итак,  $\angle APB + \angle AQB = \angle CBD$ , и, поскольку  $\angle APB + \angle AQB = (\angle MPA + \angle MQA) + (\angle MPB + \angle MQB)$ , для завершения решения остается убедиться, что  $\angle MPB + \angle MQB = 180^\circ - \angle CBD$ .

Для определенности далее считаем, что  $P$  лежит между  $M$  и  $Q$ . Имеем  $\angle MPB + \angle MQB = 180^\circ - (\angle BPQ - \angle PQB)$ . Так как  $PQ \parallel CD$ , то дуги  $PD$  и  $CQ$  равны, а значит, опирающиеся на них вписанные углы равны. Тогда

$$\begin{aligned} \angle BPQ - \angle PQB &= \angle BDQ - \angle PCB = \\ &= (\angle BDC - \angle QDC) - (\angle DCB - \angle DCP) = \\ &= \angle BDC - \angle DCB = 90^\circ - \angle DCB = \angle CBD, \end{aligned}$$

что завершает доказательство.

7. Пусть  $x_i y_i z_i$  – десятичная запись трехзначного числа  $a_i$ . Подстановка в левую часть уравнения  $x = 1000$  дает

$$\begin{aligned} a_9 \cdot 1000^9 + a_8 \cdot 1000^8 + \dots + a_1 \cdot 1000 + a_0 = \\ = \overbrace{x_9 y_9 z_9 0000 \dots 0}^{27 \text{ нулей}} + \overbrace{x_8 y_8 z_8 0 \dots 0}^{24 \text{ нуля}} + \dots + x_1 y_1 z_1 000 + \\ + x_0 y_0 z_0 = x_9 y_9 z_9 x_8 y_8 z_8 \dots x_0 y_0 z_0. \end{aligned}$$

Таким образом, после подстановки вместо звездочки 30-значного числа  $x_9 y_9 z_9 x_8 y_8 z_8 \dots x_0 y_0 z_0$  получится уравнение, имеющее корень 1000.

8. Поскольку  $AM$  – биссектриса угла  $LAN$ , отрезки  $LM$  и  $MN$  равны как хорды, стягивающие равные дуги (рис. 13). Теперь достаточно доказать, что  $CM = LM$  (тогда  $CM = LM = MN$ , значит,  $CNL$  – прямоугольный треугольник и  $NM$  – его медиана, проведенная из прямого угла). Так как  $\angle BKA = \angle NAK = \angle BAK$ , треугольник  $ABK$  – равнобедренный (симметричный относи-

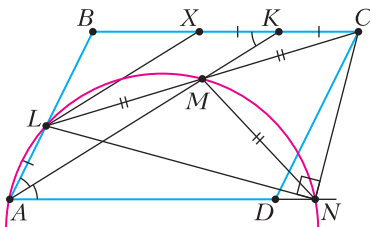


Рис. 13

тельно серединного перпендикуляра к  $AK$ ). Отметим на стороне  $BK$  точку  $X$  так, что  $LX \parallel AK$ . Из симметрии треугольника  $ABK$  имеем  $KX = AL$ . Тогда  $KX = CK$  и  $MK \parallel LX$ , значит,  $MK$  – средняя линия треугольника  $CLX$ , значит,  $CM = LM$ , что завершает решение.

10. Докажем, что  $(x - y)\sqrt{3x^2 + y^2} \geq (x - y)(x + y) = x^2 - y^2$ . Если  $x \geq y$ , то  $x - y \geq 0$  и  $\sqrt{3x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2 + 2xy + y^2} = x + y$ . Если же  $x \leq y$ , то  $x - y \leq 0$  и  $\sqrt{3x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + 2xy + y^2} = x + y$ .

Складывая доказанное неравенство  $(x - y)\sqrt{3x^2 + y^2} \geq x^2 - y^2$  с аналогичными неравенствами  $(y - z)\sqrt{3y^2 + z^2} \geq y^2 - z^2$  и  $(z - x)\sqrt{3z^2 + x^2} \geq z^2 - x^2$ , получаем требуемое.

11 класс

1. Нельзя.

Предположим, такие три числа найдутся. Поскольку  $a$  кратно  $b + c$ , сумма  $a + (b + c) = 2023$  также кратна  $b + c$ , из чего следует, что  $b + c$  нечетно. Значит,  $b - c + 1$  – четное число, и нечетное число  $b + c$  не может на него делиться.

4. Не могла.

Докажем, что для любой пары  $(x, y)$ , записанной на доске, число  $2x - y$  делится на 7.

Действительно, для пары  $(1, 2)$  число  $2 \cdot 1 - 1 = 0$  делится на 7.

Пусть для пары  $(a, b)$  число  $2a - b$  делится на 7. Тогда для пары  $(-a, -b)$  число  $2 \cdot (-a) - (-b) = -(2a - b)$  делится на 7 и для пары  $(-b, a + b)$  число  $2 \cdot (-b) - (a + b) = -a - 3b = 3(2a - b) - 7a$  делится на 7.

Пусть для пар  $(a, b)$ ,  $(c, d)$  числа  $2a - b$ ,  $2c - d$  делятся на 7. Тогда для пары  $(a + c, b + d)$  число  $2(a + c) - (b + d) = (2a - b) + (2c - d)$  делится на 7. Так как для пары  $(2022, 2023)$  число  $2 \cdot 2022 - 2023 = 2021$  не делится на 7, эта пара на доске появиться не может.

5. Пусть  $P$  – такая точка на луче  $HE$ , что  $PB \perp BC$  (рис. 14). Докажем, что точки  $C$ ,  $O$  и  $P$  лежат на одной прямой.

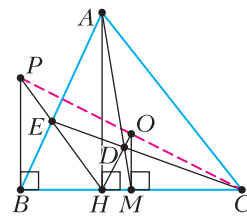


Рис. 14

В самом деле, по теореме Менелая для треугольника  $ADE$  и прямой  $CMB$  имеем  $\frac{EC}{CD} \cdot \frac{DM}{MA} \cdot \frac{AB}{BE} = 1$ . Поскольку прямые  $PB, AH$  и  $OM$  параллельны между собой (так как они все перпендикулярны прямой  $BC$ ), имеем  $AB/BE = HP/PE$ , а также  $DM/MA = DO/OH$ .

Значит,  $\frac{EC}{CD} \cdot \frac{DO}{OH} \cdot \frac{HP}{PE} = 1$ , из чего следует, что точки  $C, O$  и  $P$  лежат на одной прямой по теореме Менелая для треугольника  $EDH$ . Значит, точка  $P$  диаметрально противоположна точке  $C$  в окружности  $\omega$ . Аналогично, если  $Q$  – точка пересечения перпендикуляра к прямой  $BC$ , проходящего через точку  $C$ , и прямой  $HF$ , то точка  $Q$  диаметрально противоположна точке  $B$ . Из этого следует, что  $\angle EXC = \angle PXC = 90^\circ$ , и, аналогично,  $\angle FYB = \angle QYB = 90^\circ$ .

Обозначим через  $H', T_b$  и  $T_c$  точки пересечения прямой  $AH$  с прямыми  $PQ, BY$  и  $CX$  соответственно (рис. 15). Заметим, что треугольники  $HXT_c$  и  $HN'P$  подобны как прямоугольные с вертикальными острыми углами. Значит,  $HT_c/NX = NP/NN'$ , или  $HT_c = NX \cdot NP/NN' = NB \cdot NC/NN'$ . Аналогично,  $HT_b = NB \cdot NC/NN'$ . Следовательно, прямые  $BY$  и  $CX$  пересекают прямую  $AH$  в одной и той же точке, что и требовалось доказать.

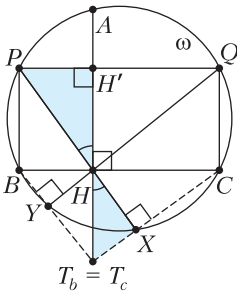


Рис. 15

7. Не всегда.

Возьмем прямоугольник размера  $5 \times 15$ , половина площади которого равняется 37,5. Для того чтобы условие выполнялось, из данного прямоугольника необходимо вырезать прямоугольник площади 37 или 38. Таких прямоугольников всего три:  $1 \times 37, 1 \times 38$  и  $2 \times 19$ . Заметим, что длинная сторона каждого из таких прямоугольников не меньше 19. С другой стороны, диагональ исходного прямоугольника равняется  $\sqrt{250}$ , но  $\sqrt{250} < \sqrt{256} = 16 < 19$ , поэтому ни один из таких прямоугольников вырезать из прямоугольника  $5 \times 15$  нельзя.

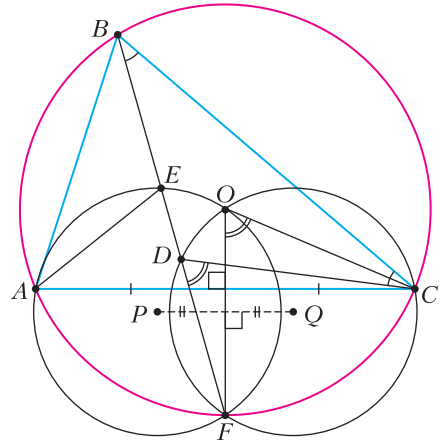


Рис. 16

8. Обозначим вторую точку пересечения биссектрисы угла  $ABC$  с окружностью, описанной около треугольника  $ABC$ , через  $F$  (рис. 16). Тогда точка  $F$  – середина дуги  $AC$ , поэтому  $OF$  – серединный перпендикуляр к хорде  $AC$ . Поскольку вписанный угол вдвое меньше центрального, опирающегося на ту же дугу, то  $\angle FOC = 2\angle FBC$ . С другой стороны, так как  $BD = DC$ , то  $\angle DCB = \angle CBD$ , а тогда  $\angle CDF = \angle DCB + \angle DBC = 2\angle DBC = 2\angle FBC$  как внешний к треугольнику  $BDC$ . Таким образом,  $\angle FOC = \angle FDC$ , поэтому точка  $F$  лежит на окружности, описанной около треугольника  $COF$ . Рассуждая аналогично, мы получаем, что  $\angle AOF = 2\angle ABF = \angle AEF$  и точка  $F$  лежит и на окружности, описанной около треугольника  $AOE$ . Значит, точки  $P$  и  $Q$  – центры описанных окружностей треугольников  $AOE$  и  $COF$ , а эти треугольники симметричны относительно  $OF$ . Получается, что точки  $P$  и  $Q$  также симметричны относительно  $OF$ . Следовательно, либо точки  $P$  и  $Q$  лежат на прямой  $AC$ , либо  $P, Q, A, C$  – вершины равнобокой трапеции, а потому лежат на одной окружности.

9. Положим  $d = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ . Теперь заметим, что

$$\left| \frac{b}{a} - \frac{b}{c} \right| + \left| \frac{c}{a} - \frac{c}{b} \right| + |bc + 1| = |bd + 1| + |cd + 1| + |bc + 1|.$$

Если  $d = 0$ , то два из этих слагаемых равны 1 и, тем самым, сумма не меньше 2. В противном случае числа  $a, b, d$  отличны от нуля. Значит, какие-то два из них одного знака, а тогда их произведение положительно и соответствующее слагаемое больше 1. Поскольку два других слагаемых неотрицательные, то общая сумма больше 1.



**10.** Докажем индукцией по  $n$ , что в любом связном графе, содержащем  $2n$  вершин, их можно покрасить в красный и синий цвета таким образом, что число ребер с разноцветными концами (будем называть такие ребра *разноцветными*) будет превосходить число ребер с одноцветными концами (будем называть такие ребра *одноцветными*) хотя бы на  $n - 1$  — из этого будет следовать утверждение задачи. База  $n = 1$  тривиальна, докажем переход.

Предположим, в графе с  $2n$  вершинами найдется пара вершин, соединенных ребром, при удалении которых граф не теряет связность; обозначим эти вершины через  $u$  и  $v$ . Покрасим оставшиеся вершины таким образом, чтобы число разноцветных ребер было хотя бы на  $n - 1$  больше числа одноцветных ребер — так можно сделать по предположению индукции. Заметим, что вершины  $u$  и  $v$  теперь можно покрасить таким образом, что разность между количествами разноцветных и одноцветных ребер увеличится. В самом деле, без ограничения общности будем считать, что если хотя бы одна из степеней вершин  $u$  и  $v$  нечетна, то степень  $v$  нечетна. Тогда покрасим вершину  $u$  в цвет, который имеет меньшинство ее соседей (в случае равенства покрасим в любой цвет), а затем покрасим таким же образом вершину  $v$ . Очевидно, при каждой покраске требуемая разность не уменьшилась и хотя бы при одной покраске у соответствующей вершины было нечетное число покрашенных соседей, т.е. разность при этой покраске увеличилась. Поскольку до покраски вершин  $u$  и  $v$  разность между числом разноцветных ребер и числом одноцветных ребер была не меньше  $n - 1$ , после этой покраски она стала не меньше  $n$ .

С другой стороны, если в графе найдется пара висячих вершин, то, очевидно, при их удалении граф по-прежнему не теряет связность, и тем же самым алгоритмом можно покрасить весь остальной граф, а затем и эти висячие вершины таким образом, что разность между количествами разноцветных и одноцветных ребер будет не меньше  $n$ . Докажем, что в любом связном графе хотя бы с тремя вершинами или найдутся две смежные вершины, при удалении которых граф останется связным, или найдутся две висячие вершины.

В самом деле, рассмотрим произвольное остовное дерево этого графа и подвесим его за любую не висячую вершину. Пусть  $v$  — наиболее удаленная от корня висячая вершина этого дерева, а  $u$  — предок этой вершины. Обозначим потомков этого предка через  $v_1, \dots, v_k$ . Заметим, что вершины  $v_1, \dots, v_k$  являются висячими в рассматриваемом

остовном дереве. Рассмотрим несколько случаев.

*Случай 1.* Среди вершин  $v_1, \dots, v_k$  есть пара вершин, соединенных ребром в исходном графе. Тогда при удалении этих двух вершин остовное дерево (а значит, и сам исходный граф) сохраняет связность.

*Случай 2.* Среди вершин  $v_1, \dots, v_k$  есть пара вершин, являющихся висячими в исходном графе. Значит, в исходном графе есть хотя бы две висячие вершины.

*Случай 3.* Среди вершин  $v_1, \dots, v_k$  есть не больше одной вершины, являющейся висячей в исходном графе, и никакие две из этих вершин не соединены ребром. Без ограничения общности, будем считать, что если такая вершина есть, то это вершина  $v_1$ . Тогда переподвесим каждую из вершин  $v_2, \dots, v_k$  к любому из ее соседей, отличных от  $u$ : поскольку эти вершины не являются висячими в исходном графе, такой сосед всегда найдется. После всех переподвешиваний вершины  $u$  и  $v_1$  можно будет удалить из графа, и остовное дерево останется связным — а значит, и сам граф.

Поскольку хотя бы один из случаев имеет место и в каждом из них в графе есть или пара смежных вершин, при удалении которых граф остается связным, или пара висячих вершин, переход индукции доказан.

### Региональный этап LVIII Всероссийской олимпиады школьников по физике

7 класс

**1.** Пусть длинная сторона плитки имеет размер  $a$ , а короткая —  $b$ . Поскольку плитку резали только у стены с дверным проемом, по рисунку в условии можно найти соотношение между  $a$  и  $b$ :

$$\frac{a}{b} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Улитка из  $A$  до встречи должна пройти путь  $3a$ , улитка из  $B$  — путь  $(a + 7b)$ . Значит, условие встречи можно записать в виде

$$\frac{a + 7b}{u} - \frac{3a}{u} = \Delta t.$$

С учетом того, что  $a = 2,5b$ , получаем

$$b = \frac{u\Delta t}{2} = 20 \text{ см}, \quad a = 2,5b = 50 \text{ см}.$$

Теперь, зная размеры одной плитки, можно посчитать и площадь всей ванной комнаты, разбив ее на простые части (например, на прямоугольники и прямоугольные треугольники с известными сторонами):

$$S = 4a(a + 9b) + 11ab + \frac{5}{2}ab = 4a^2 + 49,5ab = 5,95 \text{ м}^2.$$

2. Эффективная длина круга первой дорожки складывается из двух прямолинейных участков и двух дуг половинок окружностей:

$$L_1 = 2\pi R_1 + 2l \approx 400 \text{ м.}$$

Длины дорожек имеют различия только на криволинейных участках. Для первой и второй дорожек на трех кругах разность длин равна

$$\Delta L_{12} = 3(L_2 - L_1) = 3(2\pi(R_1 + d) - 2\pi R_1) = 6\pi d \approx 23 \text{ м.}$$

Легко заметить, что

$$\Delta L_{12} = \Delta L_{23} = \Delta L_{34} = 6\pi d \approx 23 \text{ м.}$$

Для расчета средней скорости на дистанции 2400 м нельзя точно определить время. Например, показание часов 13:00 может соответствовать любому моменту от 13:00:00 до 13:00:59.99... Тогда время забега атлета принадлежит интервалу от 12 до 14 минут. Эти границы позволяют найти наименьшее и наибольшее значения средней скорости:

$$v_{\min} = \frac{2400 \text{ м}}{14 \cdot 60 \text{ с}} \approx 2,86 \text{ м/с}, v_{\min} = \frac{2,4 \text{ км} \cdot 60}{14 \text{ ч}} \approx 10,3 \text{ км/ч};$$

$$v_{\max} = \frac{2400 \text{ м}}{12 \cdot 60 \text{ с}} \approx 3,33 \text{ м/с}, v_{\max} = \frac{2,4 \text{ км} \cdot 60}{12 \text{ ч}} \approx 12 \text{ км/ч.}$$

3. Запишем формулу средней плотности:

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2},$$

где масса шоколада  $m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 \cdot 0,6V$ , объем карамели  $V_2 = \mu t$ , масса карамели  $m_2 = \rho_2 V_2 = \rho_2 \mu t$ . После подстановки получим

$$1,1\rho_1 = \frac{0,6\rho_1 V + \rho_2 \mu t}{0,6V + \mu t},$$

откуда найдем

$$t = \frac{0,6V \cdot 0,1V}{\mu(\rho_2 - 1,1\rho_1)} = 9,6 \text{ мин.}$$

Проверим возможность ответа:

$$V_2 = \mu t = 5,76 \text{ л} < 6,4 \text{ л} = 0,4V,$$

т.е. карамель не выливалась!

4. Пусть  $T_1$  – все время в пути первого автомобиля,  $T_2$  – все время в пути второго автомобиля,  $\tau_2$  – время движения второго автомобиля до остановки. Согласно условию задачи,

$$T_1 = \tau_2 + \Delta t, T_2 = t_2 = 14 \text{ мин.}$$

Из графика (точка излома) находим  $\tau_2 = 2$  мин. В течение этого времени расстояние между автомобилями меняется с относительной скоростью  $(v_1 - v_2)$ . За 2 минуты оно станет равным  $s_1 = 1,2$  км. Получаем первое уравнение связи скоростей:

$$s_1 = (v_1 - v_2)\tau_2.$$

За следующие 2 минуты первый автомобиль уехал от стоящего второго еще на

$$s_2 = 4,2 \text{ км} - 1,2 \text{ км} = 3 \text{ км.}$$

Это нам позволяет найти скорость первого автомобиля:

$$v_1 = \frac{3 \text{ км}}{2 \text{ мин}} = 1,5 \text{ км/мин},$$

а затем и скорость второго автомобиля:

$$v_2 = 1,5 \text{ км/мин} - \frac{1,2 \text{ км}}{2 \text{ мин}} = 0,9 \text{ км/мин.}$$

Теперь запишем формулы для расчета пути из A в B:

$$L = v_1 T_1 = v_1(\tau_2 + \Delta t), L = v_2(T_2 - \Delta t).$$

Отсюда найдем время остановки:

$$\Delta t = \frac{v_2 T_2 - v_1 T_1}{v_1 + v_2} = 4 \text{ мин.}$$

Теперь можно найти длину пути:

$$L = v_2(T_2 - \Delta t) = 9 \text{ км.}$$

*(Окончание следует)*

# КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,  
В.А.Тихомирова, А.И.Чернуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,  
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**М.Н.Грицук**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован  
в Комитете РФ по печати.**

**Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,  
«Квант»**

**Тел.: +7 916 168-64-74**

**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

**Отпечатано**

**в соответствии с предоставленными  
материалами**

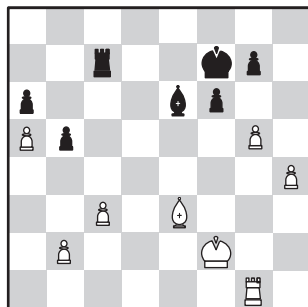
**в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,  
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8**

**Тел.: (831) 218-40-40**

## Коварные РАЗНОЦВЕТНЫЕ СЛОНЫ

В марте традиционно отмечается международный женский день, поэтому сегодняшний выпуск шахматной странички мы посвятим интересным эндшпилям, разыгранным в партиях первого этапа женского гранпри ФИДЕ, победителем которого стала Александра Костенюк. Эндшпиль – наиболее коварная часть шахматной партии, в которой малейшая ошибка может стоить пол-очка, а иногда и целый балл, что в очередной раз доказал этот турнир

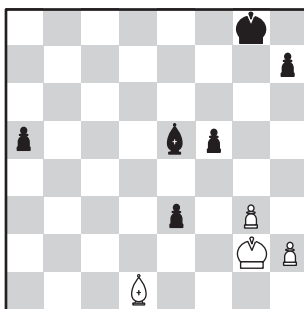
**А.Костенюк –А.Музычук**  
Мюнхен, 2023



Эндшпили с разноцветными слонами имеют ничейные тенденции, однако если на доске остаются ладьи, то атакующая сторона имеет шансы на победу. **38...♖c4?** Ошибка, необходимо было разменять пешки, чтобы уменьшить атакующий потенциал **38...f3** **39. ♖g5** **g6**. **39. g6+!** Блокируя пешку на g7, которая впоследствии может быть выиграна. **39...♗e7** **40. ♗d4!** **♖c8** **41. ♗g3** **♗d5** **42. ♗e1+** **♗d7** **43. ♗d1** **♗e6** **44. ♗e3?** (точнее **44. h5** с идеей **44...♗h8** **45. ♗g4** **♗h5** **46. ♗e1+!**) **♖c4?** (черные упускают шанс зацепиться за ничью после **44...♗e4!** **45. h5** **♗h8** **46. h6** **♗g6** **47. hg** **♗g8**) **45. ♗d4** **♖c8** **46. ♗g4** **♗h8** **47. h5** **f5+**

**48. ♗g5** **♗h5+**. Обычно размен ладей ведет к ничьей в подобных эндшпилях, но не в этом случае, так как черные будут вынуждены отдать слона за пешку g. **49. ♗h5** **♗f3+** **50. ♗g5** **♗d1** **51. b4** **♗b3**. Попытка заблокировать пешку g королем также не спасает, так как после **51...♗e2** **52. ♗g7** **♗c4** **53. ♗d4** **f4** **54. ♗f4** **♗d3** **55. g7** **♗f7** **56. ♗e3** **♗c4** **57. ♗e5** решает марш белого короля к пешке a6, помешать которому черные не в состоянии. **52. ♗g7** **♗c4** **53. ♗d4** **f4** **54. ♗f4** **♗b3** **55. ♗g5** **♗c4** **56. ♗h6** **♗d7** **57. ♗g7** **♗d3** **58. ♗f7**, черные сдались.

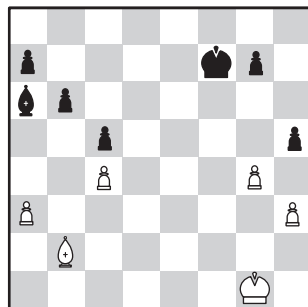
**Тань Чжуньи –А.Дзангидзе**  
Мюнхен, 2023



**36...f4?** В эндшпилье важно не спешить, если у соперника нет конкретных угроз. Черные могли спокойно улучшить позицию короля, переведя его на g5, прежде чем приступать к активным действиям. **37. gf?** Белые упускают красивую ничью: **37. ♗f3!** **fg** **38. ♗e3** **gh** **39. ♗f3** **a4** **40. ♗f2** **a3** **41. ♗g2**, и белые в любой момент могут пожертвовать слона за пешку a2, а их король блокирует пешки на линии h, поскольку слон черных не контролирует угол. **37...♗f4** **38. ♗f3** **♗h6** (но не **38...♗h2?**, так как после **39. ♗e3** белый король успевает к полю h1 раньше своего визави) **39. h4** **♗f7** **40. ♗c2** **♗e6** **41. ♗e2** **♗e5** **42. ♗h7?** **a4** **43. ♗d3** **♗f4** **44. ♗g6** **a3** **45. ♗f7** **♗g3** **46. ♗e2** **♗h4**. Теория гласит, что если две пешки сильнейшей сто-

роны перешли середину доски и их разделяют три вертикали, то она выигрывает, поскольку слон соперника не может заблокировать эти пешки на одной диагонали. **47. ♗f3** **♗g5** **48. ♗a2** **♗f5** **49. ♗e2** **♗e4** **50. ♗g8** **♗d4** **51. ♗d1** **♗c3**, белые сдались.

**Д. Вагнер–Чжу Цзиньэр**  
Мюнхен, 2023



**35. ♗e5?** Удивительно, но с виду безобидная перестановка ходов в данном случае стоит белым партии. Необходимо сначала разменяться: **35. gh** **♗c4** **36. ♗e5** **♗e6** **37. ♗g7** с явной ничьей, ибо белый король вовремя успевает заблокировать связанные проходные пешки. **35... ♗e6!!** Выигрывающий ход – белые не успевают уничтожить черные пешки на ферзевом фланге, в то время как черный король централизован лучше, чем его оппонент. **36. ♗b8** **♗d7!** **37. gh** **♗c4** **38. ♗f2** **♗f7** **39. ♗e5** (в случае **39. ♗a7** белые теряют слона после **39...♗c6** **40. ♗e3** **♗b7**) **♗c6** **40. ♗g7** **♗b5** **41. ♗e5** **♗a4** **42. ♗b8** **a6!** (но не **42... ♗h5?** **43. ♗a7** **♗b5** **44. ♗e3** с ничьей) **43. ♗a7** **♗a3** **44. ♗b6** **c4** **45. ♗c3** **c3** **46. ♗d3** **♗b3** **47. ♗a5** **c2** **48. ♗d2** **a5** **49. h6** **♗g6+** **50. ♗c3** **a4**, белые сдались.

*А.Русанов*

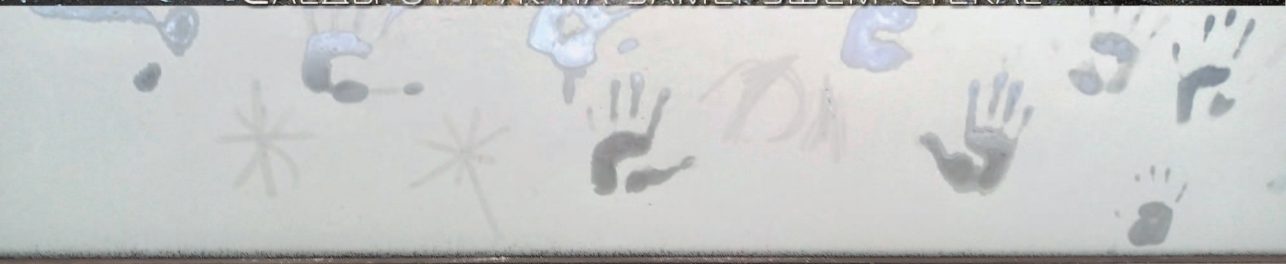
Индекс 90964



# Уроки с физикой



СЛЕДЫ ОТ РУК НА ЗАМЕРЗШЕМ СТЕКЛЕ



Темное пятно на светлом фоне  
или светлое пятно на темном фоне?

ISSN 0130-2221 23003



9 770130 222238



(ПОДРОБНЕЕ – НА С. 37 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)