

ISSN 0130-2221

2023 · № 10

ОКТАБРЬ

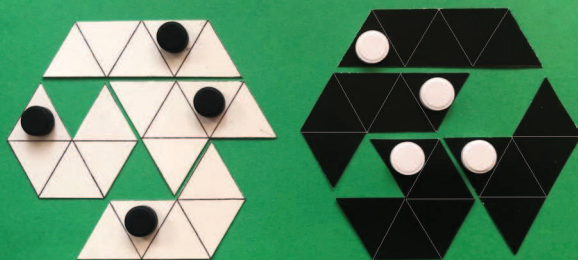
# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



# ДВУСЛОЙНЫЙ ШЕСТИУГОЛЬНИК

На фото представлены две фигуры: белая с черными кнопками и черная с белыми кнопками. Каждая из фигур сложена из полного комплекта пентамондов – так называют фигурки, состоящие из пяти равносторонних треугольников; их как раз существует четыре вида. Видно, что обе фигуры – это правильные шестиугольники с «дырками»: каждой не хватает по четырем треугольникам до полного шестиугольника.



Задача головоломки – сложить два шестиугольника, белый и черный, так, чтобы при наложении кнопки каждого из них попали в треугольные «дырки» другого. Другими словами, требуется сложить двуслойный шестиугольник, один слой которого, с учетом кнопок, полностью белый, а второй слой – полностью черный.

Фигурки-пентамонды легко вырезать из картона, вместо кнопок можно использовать, например, картонные треугольники соответствующего цвета.

Несмотря на кажущуюся простоту, головоломка трудная и имеет единственное решение.

Желаем успеха!

*Н.Авилов*

## В номере:

### УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук  
Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАН

Физический институт  
им. П.Н.Лебедева РАН

Московский  
физико-технический институт  
Московский центр непрерывного  
математического образования

### ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**А.А.Гайфуллин**

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,  
М.Н.Бондаров, А.А.Варламов,  
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,  
А.Н.Виленин, Н.П.Долбилин,  
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,  
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,  
П.А.Кожевников, С.П.Коновалов,  
К.П.Кохась, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,  
А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,  
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Сташенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,  
А.В.Устинов (заместитель главного  
редактора), А.И.Черноуцан  
(заместитель главного редактора)**

### РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, В.И.Берник,  
А.А.Боровой, В.В.Козлов,  
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,  
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА

### ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**

### ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**А.Н.Колмогоров**

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,  
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,  
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,  
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 За игрой в карты с чертиком Визинга.  
*Б.Раберн, Л.Раберн*  
7 Переменность. *Л.Ашкинази*

### ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 17 Задачи M2766–M2769, Ф2773–Ф2776  
18 Решения задач M2754–M2757, Ф2761–Ф2764

### «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 25 Задачи

### КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 26 Задачи 5–8

### ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 27 Теорема о трех плоскостях. *Ю.Блинков*

### ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 31 Механика сферы Дайсона. *М.Никитин,  
А.Тепляков*

### ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 36 Электричество с парусами. *С.Герасимов*

### ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 39 ЕГЭ по физике 2023 года  
45 Санкт-Петербургский политехнический  
университет Петра Великого  
52 Новосибирский государственные университет  
58 Ответы, указания, решения

### НА ОБЛОЖКЕ

- I *Свеча и ее отражение в двух зеркалах*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*

# За игрой в карты с чертиком Визинга

Б.РАБЕРН, Л.РАБЕРН

**В** ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ РАССКАЖЕМ о двух классических результатах теории графов – теоремах Кёнига [1] и Визинга [2]. Стандартные доказательства этих теорем можно прочитать, например, в книге [3]. Мы же получим доказательства из анализа выигрышных стратегий в некоторой карточной игре. Для начала давайте познакомимся с игрой.

## Правила карточной игры

Зададимся произвольным натуральным числом  $k$ , которое будет в дальнейшем означать количество стопок карт в игре. Игру с данным  $k$  будем называть  $k$ -игрой.

В игре будут участвовать *игрок* и *чертик*. Перед началом чертик выбирает число  $m \geq k$ , определяющее число различных достоинств карт (скажем, если  $m = 3$ , у нас будут карты трех достоинств; назовем их 1-карты, 2-карты и 3-карты). Затем чертик создает  $km$  карт для игры:  $k$  штук 1-карт,  $k$  штук 2-карт, ...,  $k$  штук  $m$ -карт. После этого чертик раскладывает карты в  $k$  стопок таким образом, чтобы в каждой стопке была хотя бы одна карта и при этом каждая стопка содержала не более одной карты каждого достоинства. Обозначим число карт в  $i$ -й стопке через  $n_i$ , тогда последовательность  $(n_1, \dots, n_k)$ , описывающую число карт во всех стопках, назовем *раскладом* игры. Оставшиеся карты, не вошедшие в стопки, образуют *колоду*. (Считаем, что все карты в стопках и в колоде всегда видны игрокам.)

Например, рассмотрим игру с  $k = 3$ , картами 4 достоинств, т.е. с  $m = 4$ , и раскла-

| Стопка 1 | Стопка 2 | Стопка 3 | Колода |
|----------|----------|----------|--------|
| 2        | 2        | 2        | 1 1 1  |
|          |          | 4        | 3 3    |
|          |          | 3        | 4 4    |

Рис. 1

дом  $(1, 1, 3)$ . Чертик кладет одну карту в первую стопку, одну во вторую, три – в третью, остальные карты останутся в колоде. На рисунке 1 изображено возможное начальное состояние этой игры.

**Ход игрока.** Игрок выбирает некоторую стопку, в которой есть  $a$ -карта, но нет  $b$ -карты, и меняет  $a$ -карту на  $b$ -карту из колоды (отметим, что  $b$ -карта в колоде найдется, так как  $b$ -карт всего  $k$  штук). Иными словами, игрок может менять любую карту в любой из стопок на карту из колоды, если только это не приведет к тому, что в стопке окажутся две карты одного достоинства.

**Выигрыш.** Игрок побеждает, если перед началом своего очередного хода он может, выбирая из каждой стопки по одной карте, набрать  $k$  карт различных достоинств. Такой набор будем называть *выигрышным набором*.

Чертик усложняет игру: ему разрешено перемещать определенным образом карты после каждого хода игрока. Существует или нет выигрышная стратегия у игрока, зависит от того, как именно может действовать чертик.

Для начала рассмотрим «крайние» случаи.

**Ленивый чертик.** После каждого хода ленивый чертик ничего не делает.

Может ли игрок выиграть? Конечно. Достаточно пройти по стопкам и, если в



| Стопка 1 | Стопка 2 | Стопка 3 | Колода |
|----------|----------|----------|--------|
| 1        | 2        | 2        | 2 1 1  |
|          |          | 4        | 3 3    |
|          |          | 3        | 4 4    |

Рис. 2

стопке с номером  $i$  нет  $i$ -карты, поменять какую-либо карту из этой стопки на  $i$ -карту из колоды (так как всего в игре  $k$  штук  $i$ -карт, то такая карта в колоде найдется).

В приведенном на рисунке 1 примере игроку для выигрыша достаточно заменить 2-карту в первой стопке на 1-карту в колоде (рис. 2). Теперь есть выигрышный набор, и ленивый чертик проигрывает.

**Вредный чертик.** После каждого хода вредный чертик отменяет то, что только что сделал игрок. Тем самым, если игрок поменял в некоторой стопке  $a$ -карту на  $b$ -карту из колоды, то вредный чертик меняет ее обратно.

Ясно, что с таким чертиком игрок победить не сможет, если только начальная позиция уже не была выигрышной для игрока.

### Некоторые интересные чертики

Игры с ленивым и вредным чертиками оказались скучными. Рассмотрим более содержательные примеры чертиков. Забегая вперед, скажем, что выигрышные стратегии в играх с этими чертиками и приведут нас к доказательству теорем Кёнига и Визинга.

**Чертик Кёнига.** Пусть игрок поменял  $a$ -карту из  $i$ -й стопки на  $b$ -карту из колоды. Отвечая на этот ход, чертик Кёнига либо не делает ничего, либо выбирает стопку, отличную от  $i$ -й, которая содержит  $b$ -карту, но не содержит  $a$ -карту, и меняет ее на  $a$ -карту из колоды.

**Теорема 1.** *У игрока есть выигрышная стратегия против чертика Кёнига для любой  $k$ -игры.*

**Доказательство.** Допустим, чертик начал  $k$ -игру с раскладом  $(n_1, \dots, n_k)$ . Рассмотрим максимальный набор карт различного достоинства, который игрок может собрать, взяв не более одной карты из

каждой стопки. Если этот набор содержит  $k$  карт, то этот набор – выигрышный. В противном случае есть стопка, скажем с номером  $i$ , из которой игрок не выбирал карт для максимального набора. Найдется число  $b \leq m$  такое, что в нашем максимальном наборе нет  $b$ -карты. В  $i$ -й стопке нет  $b$ -карты (иначе мы бы добавили ее к максимальному множеству, что противоречило бы максимальнойности). Но в  $i$ -й стопке есть хотя бы одна карта – пусть это  $a$ -карта. Тогда игрок может заменить  $a$ -карту из этой стопки на  $b$ -карту из колоды.

Чертик в ответ либо не делает ничего, либо меняет  $b$ -карту из некоторой другой стопки на  $a$ -карту из колоды, а значит, не сможет помешать игроку перед началом следующего хода увеличить предыдущий максимальный набор на  $b$ -карту из  $i$ -й стопки.

Повторяя этот процесс, игрок может добиться, чтобы в максимальном наборе стало  $k$  карт, и, таким образом, выиграть. Теорема доказана.

**Чертик Визинга.** Рассмотрим теперь игру с чертиком Визинга. Допустим, игрок поменял  $a$ -карту из  $i$ -й стопки на  $b$ -карту из колоды. В ответ чертик Визинга либо ничего не делает, либо выбирает стопку, отличную от  $i$ -й, которая содержит  $b$ -карту, но не содержит  $a$ -карту, и меняет  $b$ -карту на  $a$ -карту из колоды или выбирает стопку, отличную от  $i$ -й, которая содержит  $a$ -карту, но не содержит  $b$ -карту, и меняет  $a$ -карту на  $b$ -карту из колоды.

**Теорема 2.** *У игрока есть выигрышная стратегия против чертика Визинга для любой  $k$ -игры с раскладом  $(n_1, \dots, n_k)$ , в котором не более чем одно  $n_i$  равно 1.<sup>1</sup>*

**Доказательство.** Предположим, что у игрока есть стратегия получить перед своим ходом позицию, в которой найдется некоторое непустое подмножество  $S$  из  $s \leq k - 1$  стопок и такой выбор  $s$  карт различного достоинств (скажем, это  $a_1, \dots, a_s$ -карты) по одной карте из каждой стопки из  $S$ , что карты этих достоинств не

<sup>1</sup> По сути стратегия игрока частично основана на доказательствах теоремы Визинга из [4] и [5].

встречаются в стопках не из  $S$ . Такую позицию мы назовем *приводимой* по следующей причине.

Пусть  $T$  – множество всех стопок, не принадлежащих  $S$ , и пусть их  $t = k - s$  штук. Игрок может мысленно удалить все  $a_1, \dots, a_s$ -карты из колоды и сыграть  $t$ -игру со стопками из  $T$  (при этом если чертик в каком-то ответном ходе задействовал стопку из  $S$ , то можем считать, что в нашей  $t$ -игре он ничего не сделал). Отметим, что расклад в  $t$ -игре удовлетворяет условию теоремы 2. Если игроку удастся выиграть в  $t$ -игре, т.е. набрать из стопок  $T$  карты различного достоинства, то, объединив эти карты с картами  $a_1, \dots, a_s$  из  $S$ , он добьется выигрыша в исходной  $k$ -игре. Иначе, играя в  $t$ -игру, игрок снова дойдет до приводимой позиции и т.д., пока не придет к 1-игре, которая, очевидно, выигрышная.

Покажем, что в любой игре игрок действительно может дойти до приводимой позиции.

Предположим, что есть не более  $k - 1$  достоинств, появляющихся на картах в стопках. По условию теоремы 2 в стопках находится не менее  $2(k - 1) + 1 = 2k - 1$  карт. Из принципа Дирихле получаем, что какое-то достоинство, скажем  $a$ -карта, появляется в трех или более стопках. Поскольку всего в стопках не более  $k - 1$  достоинств, игрок может выбрать достоинство  $b$ , не появляющееся ни в одной стопке, и поменять местами  $a$ -карту в одной из стопок на  $b$ -карту из колоды. Поскольку ни одна другая стопка не содержит  $b$ -карту, после ответа чертика  $b$ -карта останется в стопке, а кроме того, в стопках все еще останется по крайней мере одна  $a$ -карта. Таким образом, игрок увеличил количество достоинств, появляющихся на картах в стопках.

Он может повторять эту процедуру до тех пор, пока в стопках не появится не менее  $k$  различных достоинств.

Теперь покажем, что любая позиция с  $k$  или более различными достоинствами карт, появляющимися в стопках, либо является приводимой, либо уже выигрышная (т.е. игрок сразу может выбрать выигрышный набор из  $k$  карт).

Предположим, у нас есть такая позиция, и пусть  $A$  – множество из  $k$  различных достоинств, появляющихся в стопках. Выберем наименьшее непустое подмножество  $B$  из  $A$  такое, что достоинства из  $B$  появляются не более чем в  $|B|$  стопках. Мы можем это сделать, поскольку  $A$  само является таким подмножеством.

Если  $|B| = 1$ , то пусть  $c$  – единственная стопка, содержащая карту достоинства из  $B$ . Тогда наша позиция приводимая, где  $S = \{c\}$ .

Пусть теперь  $|B| \geq 2$ . Выберем произвольное  $b$  из множества  $B$  и уберем его, получив множество  $B'$ . Из условия минимальности множества  $B$  следует, что достоинства из  $B'$  появляются по крайней мере в  $|B'| + 1 = |B|$  стопках. Следовательно, достоинства из  $B$  появляются в точности в  $|B|$  стопках. Допустим,  $S$  – множество этих стопок. Покажем, что, выбирая из каждой стопки множества  $S$  по одной карте, можно набрать карты разных достоинств, отсюда и будет следовать, что позиция приводимая.

Мы можем сделать это, используя лемму Холла, известную также как теорема о свадьбах ([6], [7]).

**Лемма Холла.** Пусть есть  $n$  юношей и  $n$  девушек. Предположим, что для каждой группы, состоящей из  $k$  девушек ( $k = 1, 2, \dots$ ) имеется по крайней мере  $k$  юношей, имеющих друзей среди этих девушек. Тогда каждого юношу можно женить на девушке, с которой он дружит.

Чтобы применить теорему Холла в нашем случае, будем считать, что множество стопок  $S$  – это юноши, а множество достоинств  $B$  – это девушки. Для каждой девушки  $b$  из  $B$  юноши, с которыми она дружит, будут стопки из  $S$ , содержащие  $b$ -карту.

Мы знаем, что  $|S| = |B|$  и для любого подмножества  $C$  множества  $B$  достоинства из  $C$  присутствуют по крайней мере в  $|C|$  стопках. Тем самым, для любой группы девушек существует группа юношей такого же размера, в которой у каждого юноши есть по крайней мере одна знакомая девушка. Значит, условия теоремы Холла

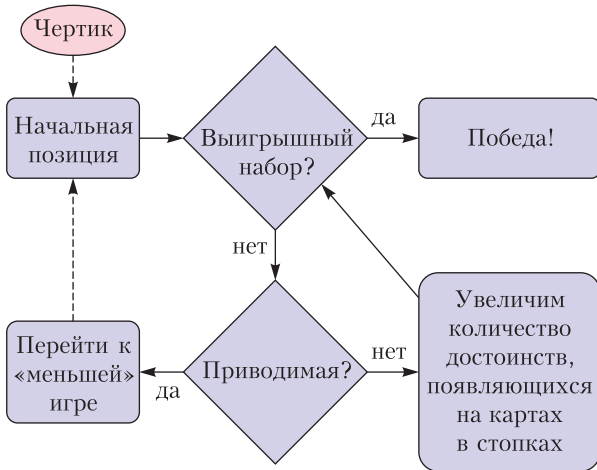


Рис. 3

выполнены и каждого юношу можно женить на девушке, с которой он дружит. Но это в точности и означает, что мы можем выбрать набор карт разных достоинств по одной карте из каждой стопки в  $S$ .

Если  $|S| = k$ , то это выигрышный набор. Если  $|S| < k$ , то позиция приводимая. Что и требовалось доказать.

Итак, у игрока есть выигрышная стратегия против чертика Визинга. На рисунке 3 показана схема этой стратегии.

### Раскраска графов

Применим теперь полученные результаты для доказательства теорем о реберных раскрасках графов. Напомним некоторые необходимые нам понятия, связанные с графами.

*Графом* называется множество точек и линий, их соединяющих. Точки называются *вершинами*, а линии – *ребрами*. Будем рассматривать графы, в которых ни одно ребро не идет из вершины в нее саму и между любыми двумя вершинами проходит не более одного ребра. Две вершины, соединенные ребром, называют *соседними*. *Степенью вершины* называется число выходящих из нее ребер. *Путь* в графе – это последовательность ребер, в которой конец одного ребра является началом другого; *длиной пути* называют количество ребер в нем. *Циклом* в графе называется замкнутый путь.

Граф называется *двудольным*, если его вершины можно разделить на два множества так, чтобы никакие две вершины из одного множества не были соединены ребром. Нетрудно понять, что двудольный граф не содержит циклов нечетной длины.

*Реберной раскраской* графа называется назначение ребрам графа цветов таким образом, что смежные (т.е. выходящие из одной вершины) ребра получают разные цвета.

Классическая теорема Кёнига 1931 года (см. [1]) может быть сформулирована следующим образом.

**Теорема Кёнига.** *Если каждая вершина в двудольном графе имеет степень не более  $k$ , то граф имеет реберную раскраску с использованием не более  $k$  цветов.*

Теорема Визинга 1964 года (см. [2]) утверждает, что для произвольных графов нужен на один цвет больше.

**Теорема Визинга.** *Если каждая вершина в графе имеет степень не более  $k$ , то граф имеет реберную раскраску с использованием не более  $k + 1$  цветов.*

Доказательство обеих теорем можно свести к нашей игре с чертиком. Покажем, как это сделать.

Предположим, что из графа  $G$  удалена вершина  $v$  степени  $k$  и все исходящие из нее ребра, а ребра оставшегося графа покрашены в цвета  $1, 2, \dots, t$ , где  $t$  не меньше  $k$ . Проверим, что можно продолжить эту раскраску ребер до раскраски ребер исходного графа  $G$ , используя только цвета  $1, 2, \dots, t$ .

Для этого сыграем в  $k$ -игру с числом достоинств  $t$ . Для каждой вершины  $x$ , соседней с  $v$ , чертик создает стопку  $S_x$ , в которую он кладет карты с номерами цветов, которые не появляются на ребрах, исходящих из  $x$ . Если степень  $x$  в графе  $G$  равна  $d$ , то в  $S_x$  окажется  $t + 1 - d$  карт, так как все ребра, исходящие из  $x$ , окрашены в некоторые цвета, а ребро, соединяющее вершины  $x$  и  $v$ , пока не окрашено.

Предположим, что  $S_x$  содержит  $a$ -карту, но не содержит  $b$ -карту. Это означает, что есть ребро, исходящее из  $x$ , окрашенное в

цвет  $b$ , но нет ребер, окрашенных в цвет  $a$ . Рассмотрим максимальный по длине путь (без повторяющихся ребер), начинающийся в  $x$ , в котором чередуются ребра цвета  $b$  и ребра цвета  $a$ . Так как из каждой вершины выходит не более одного ребра данного цвета, такой путь единственный.

Если мы поменяем цвета  $a$  и  $b$  ребер вдоль этого пути, то получим другую раскраску ребер графа  $G$  без вершины  $v$ , которая снова использует только цвета  $1, 2, \dots, m$ . При этом в соответствующей стопке  $S_x$   $a$ -карта заменяется на  $b$ -карту из колоды. Если путь не заканчивается в вершине, соседней с  $v$ , то никакая другая стопка не изменяется (т.е. чертик пропустил свой ход). Допустим, что путь все-таки заканчивается в соседней с  $v$  вершиной, и обозначим ее  $y$ . Тогда  $y$  – это не  $x$ , потому что из  $x$  не выходит ребер цвета  $a$  и выходит только одно ребро цвета  $b$ .

Если  $G$  – двудольный граф, то длина рассматриваемого пути четна, поскольку в противном случае этот путь вместе с ребром  $vx$  и ребром  $vy$  создали бы цикл нечетной длины. Следовательно, поскольку путь начинался с ребра цвета  $b$ , он должен заканчиваться ребром цвета  $a$ . Смена цветов вдоль пути соответствует замене в стопке  $S_y$   $b$ -карты на  $a$ -карту из колоды.

Мы видим, что смена цветов ребер вдоль пути в двудольном графе соответствует ходу игрока, за которым следует ход чертика Кёнига.

Если  $G$  не является двудольным, то последнее ребро нашего пути может быть окрашено либо в цвет  $a$ , либо в цвет  $b$  и, следовательно, смена цветов ребер вдоль пути соответствует ходу игрока, за которым следует ход чертика Визинга.

Предположим теперь, что одна из теорем неверна.

Рассмотрим граф с минимальным числом вершин, для которого теорема неверна. Поскольку граф только с одной вершиной не имеет ребер, его можно раскрасить в ноль цветов. Следовательно,  $G$  имеет по крайней мере две вершины. Пусть  $v$  – вершина степени  $k$  и в  $G$  нет вершин степени больше  $k$  (так что  $k$  – максималь-

ная степень вершин в  $G$ ). Из условия минимальности на  $G$  следует, что удаление вершины  $v$  приведет к графу, который может быть раскрашен с использованием  $m$  цветов, где  $m$  равно  $k$  для теоремы Кёнига и  $m$  равно  $k + 1$  для теоремы Визинга. Тогда для каждого соседа  $x$  из  $v$  в стопке  $S_x$  есть  $m + 1 - d$  карт, где  $d$  – количество соседей  $x$ . Поскольку  $d \leq k$ , это не менее  $m + 1 - k$  карт, т.е. по крайней мере одна карта для теоремы Кёнига и по крайней мере две карты для теоремы Визинга.

Сыграв в  $k$ -игру, игрок соберет выигрышный набор из  $k$  карт разного достоинства, взяв по одной карте из каждой стопки. Тогда раскраска ребер, исходящих из  $v$ , в цвета с номерами этих карт даст реберную раскраску  $G$  с использованием  $m$  цветов. Противоречие.

Следовательно, обе теоремы верны!

### Литература

1. *D.König*. Grafok es matrixok. – Matematikai es Fizikai Lapok, vol.38, 1931, p.116–119.
2. *В.Г.Визинг*. Об оценке хроматического класса  $p$ -графа. Дискретный анализ. – Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1964, т.3, с.25–30.
3. *M.Stiebitz, D.Scheide, B.Toft and L.M.Favrholt*. Graph Edge Coloring: Vizing's Theorem and Goldberg's Conjecture. – Wiley, 2012.
4. *A.Ehrenfeucht, V.Faber and H.A.Kierstead*. A new method of proving theorems on chromatic index. – Discrete Mathematics, vol. 52, 1984, no.2–3, p.159–164.
5. *A.Schrijver*. Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency. Vol.A. – Springer Verlag, 2003.
6. *P.Hall*. On representatives of subsets. – Journal of the London Mathematical Society, vol.10, 1935, p.26–30.
7. *М.Башмаков*. Паросочетания и транспортные сети. – «Квант», 1970, №4.
8. *L.Rabern*. A game generalizing Hall's theorem. – Discrete Mathematics, vol.320, 2014, p.87–91; arXiv:1204.0139.

# Переменность

Л.АШКИНАЗИ

**В**СЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРОНИКИ – резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности и даже электровакуумные приборы – могут быть с постоянными и переменными параметрами. Причем не в том смысле, что они изменяются со временем, «дрейфуют», а в том, что мы изменяем их сами, управляем ими. В статье про резисторы (см. «Квант» №5) было рассказано и про постоянные резисторы, и про переменные, а в этой статье будет рассказано про переменные конденсаторы, а также про катушки с переменной индуктивностью и про такое чудо, как вакуумные лампы с переменными параметрами.

## Переменность конденсаторов

Начнем с переменных конденсаторов, т.е. с тех, у которых можно плавно изменять емкость. Именно плавно – потому что изменять дискретно, ступенчато можно посредством обычных постоянных конденсаторов и переключателей.

Изменять емкость конденсатора можно, меняя зазор между пластинами или площадь пластин. Тут необходимо пояснение – под изменением площади пластин конденсатора мы будем понимать не изменение площади отдельной пластины (попробуйте придумать, как это сделать), а изменение площади той части пластины, рядом с которой на малом расстоянии находится другая пластина. Эту площадь можно назвать площадью накрытия, она как раз и входит в вашу любимую формулу  $C = \epsilon\epsilon_0 S/d$ .

Есть способы изменять емкость и без механических перемещений. Существуют полупроводниковые приборы – варикапы, у которых от приложенного к ним обратного напряжения зависит перемещение

зарядов вокруг  $p-n$ -перехода – это эквивалентно изменению емкости. Так можно использовать любой полупроводниковый диод, но конструкция варикапа оптимизирована именно под это применение, т.е. увеличен, по возможности, диапазон изменения эквивалентной емкости.

Другой путь – изменение емкости через изменение диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  среды между пластинами. Это можно сделать двумя способами – вводя в зазор диэлектрическую деталь или изменяя что-то, от чего зависит  $\epsilon$ . Первый способ часто упоминается в задачах – в них конденсатор заряжен или подключен к ЭДС, диэлектрик вводится или выводится и нужно определить, что при этом еще происходит, откуда берется энергия и куда девается работа. Задачи эти сами по себе несложные, но в их глубине закопано некоторое противоречие, на которое не обращают внимания (заметите ли вы его?). Как техническое решение, этот способ управления емкостью, кажется, не применялся. Исторически, наверное, потому, что было непонятно, как делать тонкую, прочную и износостойкую пластинку из диэлектрика с высоким сопротивлением. Технология керамики эту задачу на заре века еще не решила (она и сейчас не вполне тривиальна), все остальные материалы по разным причинам не годятся. Самый близкий по сути (но далекий по времени) пример, который удалось найти, – любительская технология 1924 года, когда в качестве диэлектрика использовалась пропитанная парафином тонкая бумага, естественно, на жесткой подложке (по тем временам – картон и станиоль, оловянная фольга; см. сайт [http://sergeyhry.narod.ru/dr/dr1924\\_02\\_15.htm](http://sergeyhry.narod.ru/dr/dr1924_02_15.htm)). В современных конструкциях часто применяются подвижные детали из керамики, но и они не перемеща-



ются между металлическими пластинами. На поверхность этих деталей наносятся проводящие пленки, которые и выполняют роль пластин. Впрочем, с точки зрения основной формулы для емкости, это не имеет значения.

Что касается второго способа, то  $\epsilon$  зависит от всего на свете, например от температуры, поэтому конденсатор с диэлектриком можно использовать как термометр. Но управлять конденсатором через температуру неудобно – слишком медленны будут изменения (как и насколько их можно ускорить – хорошая задача, но слегка выходящая за порог школы). Можете подумать, от каких параметров зависит эффективность датчика (три параметра можно назвать сразу). Для современной электроники наиболее естественно применить для управления электрическое напряжение. И тут нам повезло – есть вещества, у которых  $\epsilon$  зависит от напряженности поля. Это – сегнетоэлектрики, и есть конденсаторы с таким диэлектриком – вариконды, предназначенные именно для управления емкостью. Причем возможны две ситуации: когда в конечном итоге конденсатором управляет (прямо или через напряжение) человек и когда управляющий сигнал создается устройством, схемой. Во втором случае стабильность параметров этих конденсаторов (например, при изменении температуры) может быть не менее важна, чем для постоянных конденсаторов. Если же управляет человек, ситуация может быть проще, временная стабильность и слабая зависимость от температуры могут быть менее важны. Потому, что мы все равно собираемся при работе изменять их параметры (конечно, если шкала размечена с высокой точностью, то возникнет проблема – деления шкалы перестанут соответствовать тому, что на них написано).

Зато у переменных конденсаторов появляются новые параметры. У них параметр «емкость» – это не одно значение, а два: минимальное и максимальное. Далее, важны плавность регулирования – наличие и величина скачков и вид зависимости сопротивления от перемещения – линейная

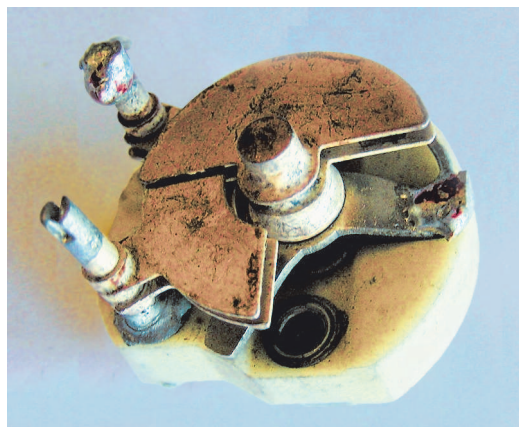


Рис. 1. Переменный конденсатор, пластины – части круга, секторы

или какая-то иная. Кроме этих параметров, для переменных конденсаторов могут быть существенны, естественно, износ трущихся поверхностей, устойчивость контакта при вибрации и ударах. Ну и, конечно, все общие проблемы – зависимость от условий эксплуатации (температура, давление, влажность), срок службы, надежность, вес, размеры, стоимость (и это не весь список).

На рисунке 1 показан переменный конденсатор, у которого пластины являются секторами, их радиус постоянен. Поэтому площадь «накрытия» пластин зависит от угла поворота линейно, а емкость – примерно линейно. Кстати, почему сказано «примерно», т.е. почему и насколько нелинейно? Причем «почему» вы легко сообразите, а вот посчитать удастся лишь очень приблизительно.

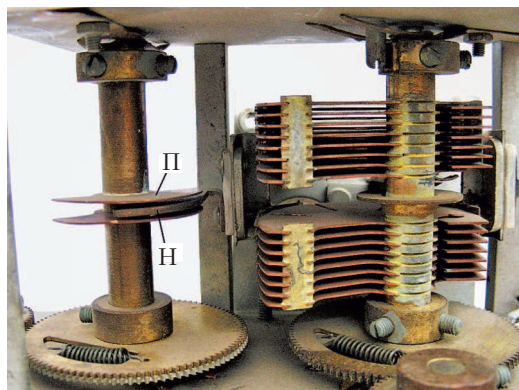


Рис. 2. Справа – два переменных конденсатора на одной оси вращения



На рисунке 2 представлены два переменных конденсатора, емкость которых изменяется при вращении оси, на которой закреплены пластины. У левого конденсатора – подвижные (П) более тонкие пластины «наезжают» на толстую неподвижную (Н), т.е. изменяется площадь  $S$ , которая входит в формулу емкости конденсатора. Обратите внимание на форму пластин правого конденсатора – это не секторы, как в предыдущем случае, т.е. конструктор явно хотел получить какую-то другую зависимость емкости от угла поворота. Как вы думаете, какую и зачем? (Подсказка – вспомните формулу Томпсона.)

На рисунке 3 мы видим два комплекта по 4 конденсатора в каждом. Нижние (на картинке) конденсаторы, у которых все подвижные пластины (12 штук) установлены на общем валу, обычные конденсаторы с изменением площади перекрытия пластин. У верхних конденсаторов неподвижные пластины обозначены Н (они у них общие с нижними конденсаторами), а подвижные обозначены П. Это – подстроечные конденсаторы, их еще называют «триммеры», от английского *trim* – приводить в порядок (подстроечные резисторы тоже так называют). Емкость триммеров изменяется весьма редко, обычно при первоначальной наладке аппаратуры, а возможно – при ремонте и замене каких-то деталей (например, электронных ламп). Триммеры на рисунке 3 отличаются тем, что у них изменяется не площадь накрытия пластин, а зазор между ними.



Рис. 4. Подстроечный конденсатор, верхняя пластина – подвижная

Вообще, ситуация изменения зазора – довольно редкая, поэтому приведем еще один пример. У конденсатора на рисунке 4 верхняя пластина приближается к нижней при завинчивании винта.

У всего «подстроечного» есть несколько важных отличий от просто «переменного». У него по окончании наладки должно фиксироваться значение (или само по себе, или специальной деталью), и в дальнейшем оно не должно меняться само. Но к триммерам не предъявляется требований по возможности многократного изменения значения емкости или сопротивления и необходимый диапазон изменения обычно меньше.

Для всех переменных конденсаторов важна плавность изменения емкости, она определяется плавностью вращения винта или оси (для оси – качеством подшипников). В простой школьной модели трения, когда максимальная сила трения покоя равна силе трения движения, при перемещении скачков нет. На самом деле все сложнее, и на практике скачки могут быть, поскольку максимальное трение покоя больше. Если вам случалось передвигать что-то тяжелое, то вы сталкивались с тем, что стронуть с места труднее, чем тащить (тут рядом лежит почти школьная задача – почему кантовать легче, чем тащить). Но системы передачи движения в переменных конденсаторах конструируются так, чтобы обеспечивать плавность перемеще-

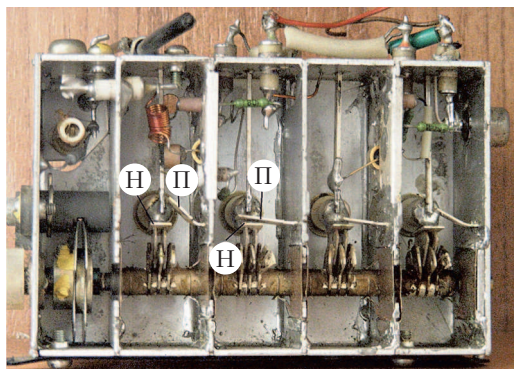


Рис. 3. Конденсаторы – четыре обычных, четыре подстроечных (триммеры)

ния, точнее – чтобы при эксплуатации перемещение ощущалось как плавное.

В случае подстроечных конденсаторов плавность обеспечивается законом Гука. Однако деформация осуществляется перемещением дислокаций, нарушений атомной структуры, а они дискретны. Перемещения атомов в твердом теле вообще дискретны – от одной позиции с минимумом потенциальной энергии к другой, от одной «ямки» к другой. Поэтому закон Гука – это приближение, и отклонения от него в области малых деформаций обнаружены экспериментально. Однако они малы и в реальных условиях использования таких конденсаторов скачки не ощущаются.

Диапазон изменения емкости – это две величины, максимальная и минимальная. Минимальная определяется размерами конденсатора, т.е. насколько далеко мы можем раздвинуть пластины. А максимальная – точностью изготовления, жесткостью конструкции и вибрациями такими, чтобы пластины не вздумали коснуться друг друга. Если переменный конденсатор не чисто воздушный, а между пластинами находится диэлектрик (это мы еще обсудим), то максимальная емкость зависит от диэлектрической проницаемости этого диэлектрика и толщины, а она определяется рабочим напряжением (чтобы не было пробоя). А также немалую роль играет износ диэлектрика при эксплуатации, прочность и технологические ограничения.

Вернемся к зависимости емкости от угла поворота. Во-первых, конденсатор может предназначаться для какой-либо измерительной техники, где нужна линейная шкала, линейная зависимость емкости от угла поворота:  $C \sim \alpha$ . Такая зависимость обеспечивается, если пластины выполнены в виде секторов, радиус у них от угла не зависит, это части круга. Такие конденсаторы называют прямоемкостными. Однако зависимость емкости от угла поворота или смещения пластин не может быть линейной на краях диапазона, при минимальной или максимальной емкости, но с этим приходится мириться. Если конденсатор предназначен для радиоприемника и

мы хотим обеспечить линейную шкалу длин волн, т.е. чтобы длина волны, на которую настроен контур, была пропорциональна углу поворота:  $\lambda \sim \alpha$ , то, в соответствии с формулой  $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ , нам придется сделать конденсатор с емкостью, зависящей от угла квадратично:  $C \sim \alpha^2$ . Такой конденсатор называют прямоугольным или квадратичным, у него радиус подвижных пластин зависит линейно от угла:  $R \sim \alpha$ . Есть и другие варианты, например, мы хотим обеспечить линейную шкалу частот:  $\nu \sim \alpha$  (прямочастотный конденсатор – какие у него пластины?) или какую-то другую. Во всех случаях (для всех зависимостей) можно задать вопрос о точности – насколько точно удастся реализовать чаемую зависимость емкости от перемещения (или угла, или линейной координаты).

Некоторые части этого вопроса просты. Например, если конструктор скажет нам, что при изменении угла среднее расстояние между пластинами изменяется на столько-то процентов, мы сразу сообразим, на сколько процентов это изменит емкость (правда, мы сделаем вид, что не понимаем сложности понятия «среднее расстояние»). Но в целом на этот вопрос ответить сложно, притом что физика явления тривиальна – сложность здесь чисто расчетная. Немного продвинуться в этой проблеме можно, если (это довольно обычный прием в физике) разделить диапазон изменения на три участка – начальный, основной и конечный. Мысленно представьте себе, как наезжает пластина на пластину в простом плоском конденсаторе, и подумайте, как от степени перекрытия зависит объем, занятый краевым полем (подсказка – он располагается вдоль периметра).

В формуле для емкости есть буква  $\epsilon$ , пора ею заняться. Если между пластинами конденсатора воздух, считают, что  $\epsilon = 1$  (на самом деле у сухого воздуха при нормальных условиях  $\epsilon = 1,00058$ , а при относительной влажности 50% и 100% – 1,00060 и 1,00064 соответственно). Но

если пространство между пластинами не содержит диэлектрика, есть риск касания пластин – это определяется точностью изготовления, жесткостью пластин и вибрациями. Поэтому расстояние между пластинами должно выбираться так, чтобы при эксплуатации они не могли соприкоснуться. Если же конденсатор предназначен для работы с высокими напряжениями, это расстояние зависит еще и от напряжения. Пусть, например, пробивная прочность воздуха 30 кВ/см, а возможное отклонение пластин 0,5 мм. Тогда делать зазор меньше 1 мм ни при каких напряжениях нельзя, но при напряжении, например, 3 кВ придется делать зазор 2 мм. Чтобы избежать проблем при касании пластин, иногда в зазор между пластинами вводят тонкую пленку диэлектрика. Если пленка тонкая, на емкость она не влияет, но от касаний противоположных пластин защищает. В некоторых задачниках попадает задача – чему равна емкость конденсатора, в котором между пластинами находится дополнительная проводящая или диэлектрическая пластина, все поверхности параллельны, краевыми эффектами пренебречь. Эта задача тривиальна, но что делать, если дополнительная пластина наклонена? И кстати, как введенная пластина влияет на электропрочность, т.е. на пробивное напряжение? Все вместе – это

большая задача, некоторые ее части просты, некоторые довольно сложны.

Существуют переменные конденсаторы, у которых все пространство между пластинами заполнено диэлектриком, как в конденсаторах постоянной емкости. Но есть между ними различие, которое не сказывается на емкости, – в переменных конденсаторах пластины и диэлектрик все-таки не могут быть соединены пайкой или напылением, не могут быть единым телом, они же должны друг по другу скользить. На рисунке 5 изображен подстроечный конденсатор с диэлектриком, слева в сборе, справа в разобранном состоянии, причем верхняя (подвижная) деталь показана два раза – вверху в стандартном положении, внизу – в перевернутом. Видно, что одна из обкладок – металлический слой, нанесенный на поверхность неподвижной детали, а вторая обкладка не видна – она нанесена на наружную поверхность подвижной детали, но закрыта краской.

Конденсаторы с твердыми диэлектриками при прочих равных условиях имеют большее допустимое напряжение, потому что электропрочность диэлектриков больше, чем у воздуха, а сопротивление достаточно велико, чтобы пренебрегать токами утечек. Но, во-первых, не всегда, во-вторых, про электропрочность диэлектриков мы знаем далеко не все, в-третьих, у

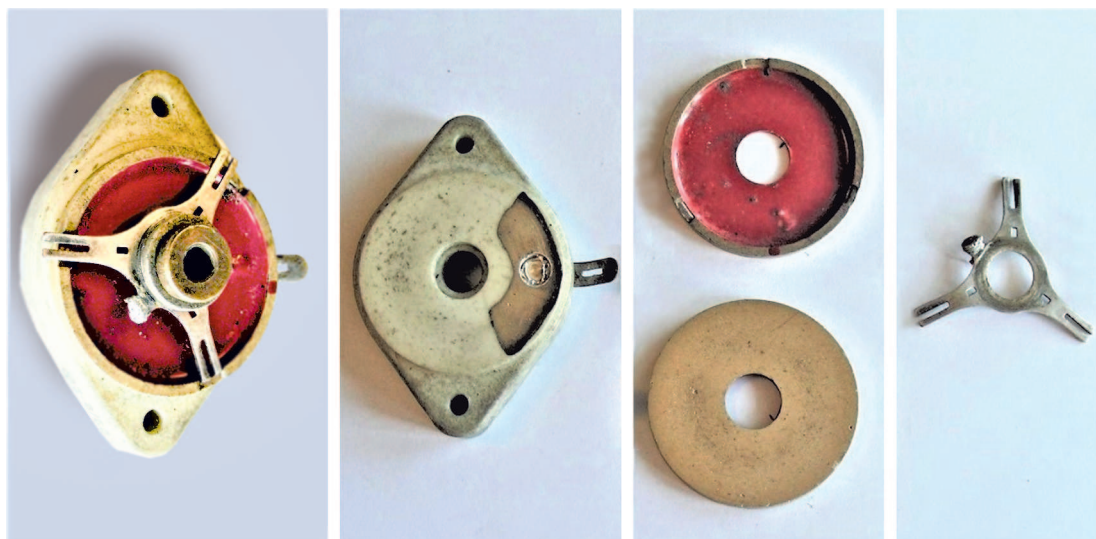
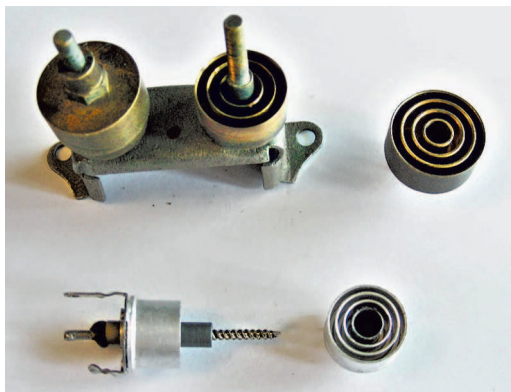


Рис. 5. Подстроечный конденсатор с диэлектриком





*Рис. 6. Подстроечные конденсаторы с цилиндрическими обкладками, вверху – самоделка, внизу – фабричный. У самодельных – левый в положении максимальной емкости, а с правого блок подвижных обкладок вообще снят*

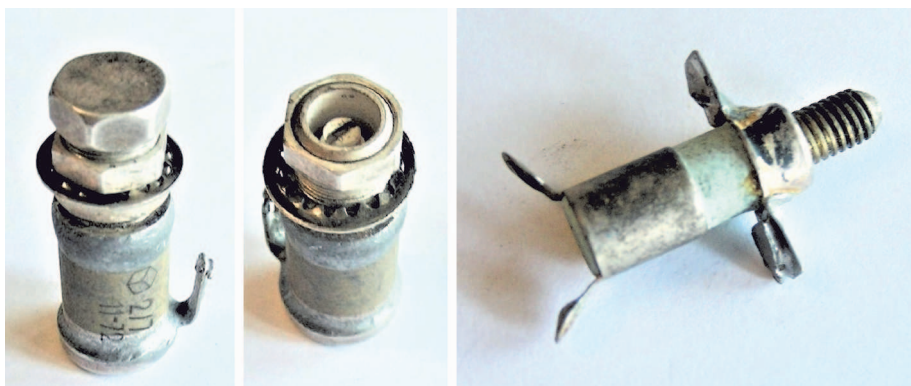
постоянного конденсатора с диэлектриком есть переходной слой между пластиной и диэлектриком, а у переменного конденсатора с диэлектриком там просто маленький, микронный, но воздушный зазор. И в этой компании каждый ведет себя сложнее другого. Так что скучать без задач – настоящих физических задач – вам не придется.

До этого момента мы рассматривали конденсаторы, у которых были плоские пластины. Но ими мир конденсаторов не исчерпывается. Вообще говоря, любые два проводника могут (если человек с паяльником прикажет) стать конденсатором; помните понятие «взаимная емкость»? И даже один проводник может это делать; помните понятие «емкость уединенного тела»? Более того, в высоковольтной тех-

нике такие уединенные тела бывают. Но история техники устроена так, что удобнее работать не с какими угодно телами, а с цилиндрическими. На рисунке 6 изображены подстроечные конденсаторы с цилиндрическими обкладками, которые перемещаются при вращении. Если вы каким-то чудом помните уравнение для электрического поля между цилиндрическими электродами, то формулу для емкости получите мгновенно. Разумеется, краевыми эффектами пренебрегаем, а их учет – задача решаемая, но не школьная; мы можем получить только оценку.

На рисунке 7 мы видим два примера другой реализации цилиндрической геометрии. Один из электродов – цилиндр, другой – винт (естественно, тоже цилиндрический), соосный с цилиндром, при вращении винт перемещается вдоль оси. Здесь есть принципиальное, с точки зрения электростатики, отличие от предшествующих примеров. Размеры винта и его расположение таковы, что все изменение емкости происходит в зоне краевых эффектов. Поэтому «школьный» расчет, который вообще здесь возможен, при этих конкретных размерах не получается. Однако работать этим конденсаторам данное обстоятельство не мешает.

Кстати, есть два вопроса. Первый: как можно было бы сделать цилиндрический конденсатор с винтом, работающий не за счет краевых эффектов? Второй: как в этом случае можно было бы реализовать нелинейную зависимость емкости от угла



*Рис. 7. Подстроечный цилиндрический конденсатор с винтом, две реализации*

поворота винта (предложите два принципиально разных способа).

**Лампа с переменными параметрами**

Такая электронная лампа, которая называется «механотрон», представлена на рисунке 8. В ее стеклянный корпус впаивано

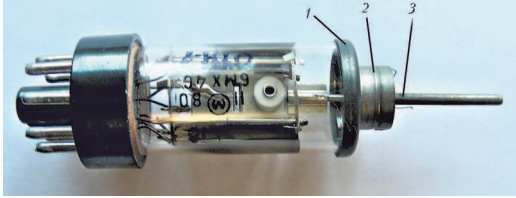


Рис. 8. Механотрон: кольцо, спаянное со стеклом (1), прочная рамка (2), внутри которой находится тонкая мембрана, от нее отходит шток (3), к которому прикладывается продольное усилие

жесткое кольцо из сплава, который по коэффициенту термического расширения согласован со стеклом. Теории, которая могла бы по составу стекла или сплава назвать этот коэффициент, нет – все подбирается опытным путем. Внутри кольца находится мембрана, она может немного деформироваться, если к штоку приложить усилие. От мембраны отходит стержень внутри лампы, и на нем установлен анод. При перемещении анода к катоду и от него ток анода изменяется, т.е. мы сделали управляемую лампу. Простой вопрос: за какое место надо держать лампу, если мы собираемся прикладывать усилие к штоку, и почему?

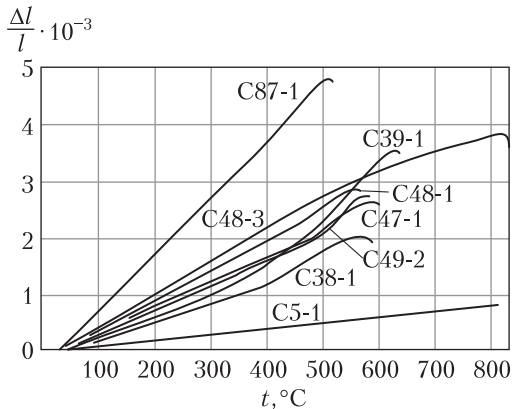


Рис. 9. Расширение стекол

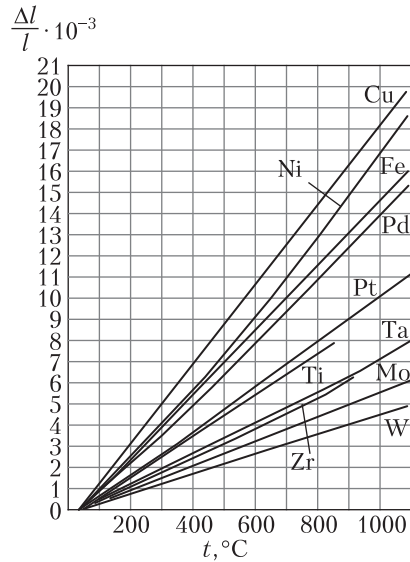


Рис. 10. Расширение чистых металлов

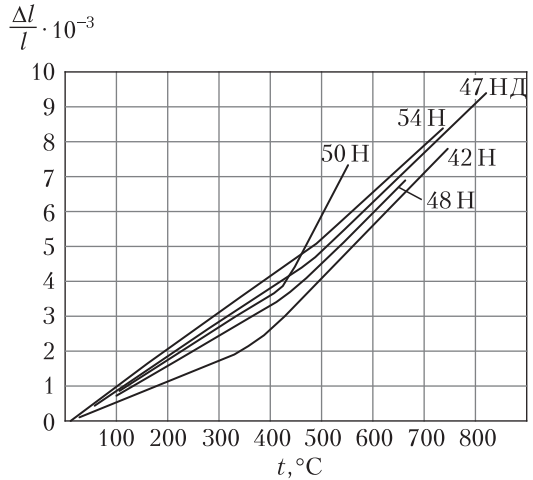


Рис. 11. Расширение сплавов

Ситуация с термическим расширением сложнее; на рисунке 9 приведены данные для различных стекол, на рисунке 10 – для чистых металлов, на рисунке 11 – для разных сплавов. С какими чистыми металлами можно спаивать стекла, и какие именно? Под какие стекла подбирали сплавы при спаивании авторы данных, показанных на рисунке 11?

**Переменные индуктивности**

Прежде всего упоминаем несколько названий устройств, основным свойством которых является индуктивность. Эти на-

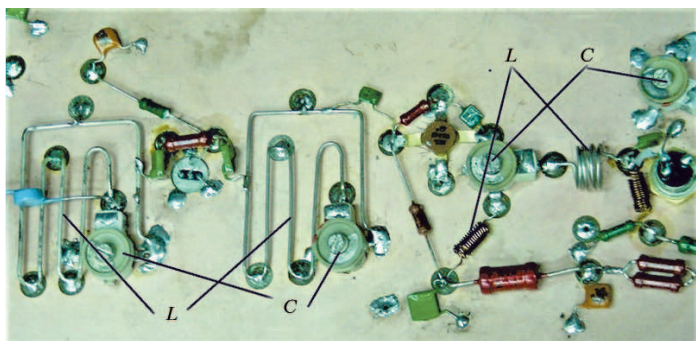


Рис. 12. Части схемы, работающие за счет своей индуктивности, обозначены  $L$ . Слева они образуют колебательные контуры со своими подстроечными конденсаторами, обозначенными  $C$

звания связаны или с конструкцией, или с функцией, или и с тем и другим. Чтобы вы не пугали собеседников, называя соленоидом изображенное на рисунке 12, сделаем некоторые пояснения.

Прежде всего, из  $R$ ,  $C$ ,  $L$  кто есть всегда или не всегда и почему? Любой проводник имеет емкость уединенного тела – просто по определению. И он же имеет индуктивность – потому, что при пропускании по нему тока возникает магнитное поле. Правда, по куску проводника ток можно пропускать по-разному, тогда поле и индуктивность тоже будут разными. Поэтому емкость уединенного тела однозначна, а индуктивность и сопротивление – нет. Кстати, взаимная емкость двух проводников тоже не однозначна, только она зависит не от того, как пропускают ток, а от того, как расположены проводники.

Ток удобно пропускать по проводу, а для увеличения индуктивности провод надо разделить на участки, сблизить их и пропустить ток в одном направлении, проще говоря – сделать катушку (как на рисунке 12 справа). Соленоид – это то же самое, но скорее назовут соленоидом катушку, у которой длина порядка диаметра и больше, а короткую катушку так не назовут, но, по сути дела, это одно и то же. На практике часто и то, и другое назовут индуктивностью (так же, как вместо «конденсатор» скажут «емкость», а вместо «резистор» – «сопротивление»). Некоторые названия связаны с функцией. Если устройство имеет не менее двух катушек, у

каждой два вывода, а магнитное поле, созданное током в каждой катушке, пронизывает витки другой, но электроны из одной в другую попасть не могут, то это трансформатор. Если электроны попасть могут, т.е. катушка одна, но выводов три и более, – это автотрансформатор, если выводов два – дроссель. То, что мы видим на рисунке 12 справа, можно называть дросселями.

Чтобы понять, как сделать переменную индуктивность, вспомним, от чего она вообще зависит. Для этого можно исходить из формулы, но в учебнике ее нет, придется лезть в справочник или выводить самим. Однако на качественном уровне можно считать, что индуктивность управляется тремя факторами. Первый – это общая длина провода; если она стремится к нулю, то стремится к нулю и объем, занимаемый в пространстве магнитным полем, и, в соответствии с определением, индуктивность. Второй фактор – плотность расположения витков; чем ближе и плотнее лежат витки, тем больше поле. Третий фактор – магнитная проницаемость среды.

Соответственно, первый способ показан на рисунке 13 – при вращении соленоида изменяется место контакта ролика с витками. Сам ролик свободно скользит вдоль стержня, проходящего через его центр, «подчиняясь» проволоке витков. При изменении места контакта изменяется часть соленоида, включенная в схему, т.е. ин-

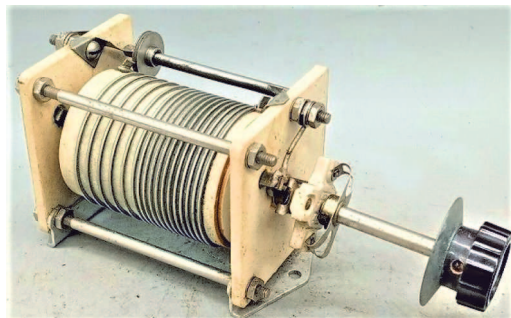


Рис. 13. Соленоид с подвижным контактом



дуктивность. (Обратите внимание на изменение шага витков – как вы думаете, зачем это сделано?) У этой конструкции есть проблемное место – именно этот контакт. Как вы знаете, скользящий контакт может нехорошо себя вести при работе с большими токами.

Второй способ – перемещение витков. Это самый древний путь, ему около века. Кажется, что проще всего использовать в качестве индуктивности нечто вроде пружины – при ее сжатии витки сближаются, индуктивность увеличивается. Однако такие конструкции не использовались – сделать, чтобы витки были закреплены и перемещались управляемо, сложно, а если оставить их свободными, такая индуктивность будет отзываться на вибрации и удары и вообще зависеть от положения аппаратуры в пространстве. Возможен вариант, когда катушка разделялась на две, они располагались на одной оси и могли сближаться и отдаляться одна от другой. Но получил применение вариант с двумя катушками – одна внутри другой, катушки включались последовательно и внутренняя вращалась (рис. 14). Если направление тока в витках катушек совпадало, то индуктивность увеличивалась, если катушка поворачивалась на  $180^\circ$  и токи текли навстречу, то индуктивность существенно уменьшалась. Эта ситуация реализовывалась без переключателей и контактов, что в случае больших токов может быть существенно. В ситуации двух катушек на одной оси для изменения направления тока был бы нужен

переключатель. Если решать эту задачу не вращением катушек, а их сближением и удалением, то диапазон изменения индуктивности получался меньше, а габариты – больше.

Варианты с изменением магнитной проницаемости – третий способ – можно разделить на две группы. Магнитная проницаемость ферромагнетиков зависит от напряженности магнитного поля, и на рисунке 15 показан пример использования этой зависимости. Возможен, однако, и другой вариант – некий аналог конденсатора с

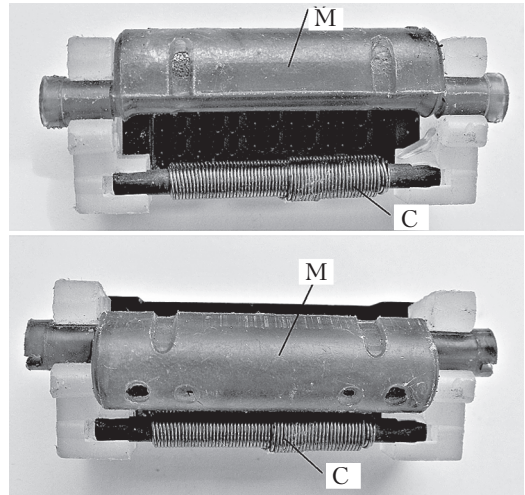


Рис. 15. Переменная индуктивность: М – постоянный магнит, С – соленоид на ферромагнитном сердечнике. Вверху – магнит отведен от соленоида, внизу – приближен. Для перемещения вращают любой из двух винтов – слева и справа

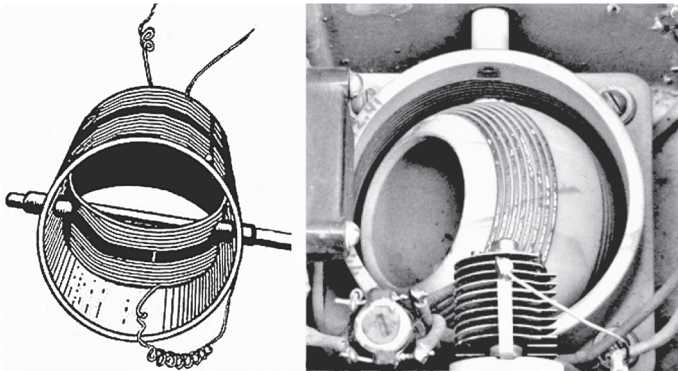


Рис. 14. Варианты с двумя катушками: слева – 1926 года, справа – более поздний

подвижным диэлектриком, причем распространены два варианта конструкции. Один – просто катушка, внутрь которой вводится ферромагнитный сердечник. В другом варианте – это катушка, которая уже была окружена со всех сторон ферромагнетиком, но вдоль оси имелся канал и в него ввинчивался дополнительный ферромагнитный винт, что увеличивало индуктивность. Этот вариант показан на рисунке 16 – катушка вставляется в кольцевой канал.

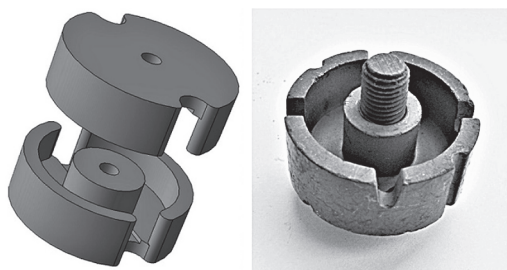


Рис. 16. Переменная индуктивность с дополнительным ферромагнитным винтом: слева – рисунок деталей, справа – половина сердечника, окружающего катушку, с винтом для изменения индуктивности.

У этого варианта есть важное отличие от «просто катушки», о котором мы еще скажем.

### Проблемы индуктивностей

Идеальная индуктивность – это деталька, имеющая такую, как надо, индуктивность, стабильную в условиях эксплуатации и при необходимости управляемую, нулевые емкость, сопротивление, внешнее магнитное поле («поле рассеяния»), вес, размеры и стоимость, способная работать при любом токе. Понятно, что ничего этого не бывает. И это только начало проблем.

Индуктивность не красуется под двойным стеклянным колачком, как бывший эталон чего бы вы думали, она работает в сотнях тысячах схем и делает что-то не одна, не сама по себе, а вместе с другими деталями и должна оптимизироваться вместе с ними. Вот примеры школьного уровня. Пусть нам надо создать колебательный контур на какую-то частоту. В известную вам формулу входит произведение  $LC$ , индуктивность на емкость. С точки зрения математики, это означает, что мы можем взять любое  $L$ , кроме нуля, и соответствующее очень большое  $C$ , а можем поступить и наоборот. Но это невозможно хотя бы потому, что достаточно малые катушки и конденсаторы действительно будут очень маленькие, но соответствующие очень большие конденсаторы и катушки не влезут ни в карман, ни в квартиру. Далее, делать очень малой емкость бессмысленно, потому, что катушка имеет свою емкость (а

конденсатор – индуктивность). В общем понятно, что истина где-то посередине.

Другой пример – это фильтры, в которых один из элементов  $R$ ,  $C$ ,  $L$  включен последовательно, а другой – параллельно нагрузке. В этом случае в зависимости от схемы может быть существенно или произведение, или отношение элементов. Вообще ситуация, когда оптимизация возможна только при учете окружения, для жизни постоянна, хотя люди не всегда это понимают. Ситуация определяется, в частности, параметрами веществ, из которых все сделано, прежде всего –  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\rho$ . У того, что в конденсаторе находится между пластинами,  $\epsilon$  и  $\rho$  должны быть побольше; у катушки ситуация сложнее – у провода  $\rho$  должно быть поменьше, а у сердечника должны быть побольше  $\mu$  и  $\rho$ . Здесь полезно остановиться и представить себе, на что и как влияет каждый параметр. И тут у катушек всплывают две проблемы. Одна – у материалов с большими  $\mu$  индуктивность часто зависит от индукции магнитного поля (помните «петлю гистерезиса», т.е. индуктивность зависит от режима работы). Это наверняка можно как-то использовать, но в каких-то случаях это вредно. Другая проблема – у таких материалов малое  $\rho$ , т.е. они проводники. Следствие – токи Фуко и тепловыделение имени Джоуля и Ленца. С этой неприятностью есть три способа борьбы. Первый – делать сердечник катушки не сплошным, а из тонких пластин (подумайте, как их надо располагать). Второй – взять мелкий порошок материала с большим  $\mu$  и недостатком большим  $\rho$ , смешать его с диэлектриком, например эпоксидной смолой, и полимеризовать. Мы получим «композит» – материал с меньшим  $\mu$ , но зато с большим  $\rho$ . Третий путь – использовать диэлектрики с высоким  $\mu$ , т.е. ферриты.

Но никто не может помешать вам идти дальше...

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) и [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru) соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2766, M2768 предлагались на учебно-тренировочных сборах кандидатов в команду на Международную математическую олимпиаду.

Задача Ф2773 предлагалась на Международной олимпиаде школьников «Туймаада» в 2023 году, а задачи Ф2774–Ф2776 – в 2022 году.

## Задачи M2766–M2769, Ф2773–Ф2776

**M2766.** Дано натуральное число  $n$ . Поле для «Мастер-судоку» представляет собой  $n(n+1)/2$  клеток квадрата  $n \times n$ , лежащих на главной диагонали либо под ней. Мастер загадывает  $n$  клеток этого поля, по одной в каждом столбце, и сообщает ученику про каждую строку, сколько загаданных клеток лежит в ней (ученик также в курсе, что в каждом столбце ровно одна загаданная клетка). Ученик должен иметь возможность по этой информации наверняка восстановить клетки, загаданные Мастером. Сколько различных таких судоку может составить Мастер?

*Т.Амдеберхан, М.Руби, Ф.Петров*

**M2767.** Несложно доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма радиусов вписанной и трех внеписанных окружностей равна периметру. Докажите, что верно и обратное утверждение.

*И.Вайнштейн*

**M2768\*.** Дано натуральное число  $n$ . Парно различные ненулевые целые числа  $a_1, \dots, a_n$  таковы, что число  $(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)$  делится на число  $a_1 a_2 \dots a_n$  при любом целом  $x$ . Найдите наибольшее возможное значение  $a_n$ .

*Ф.Петров, К.Сухов*

**M2769\*.** Вписанная окружность  $\Omega$  треугольника  $ABC$  касается сторон  $BC$ ,  $CA$  и

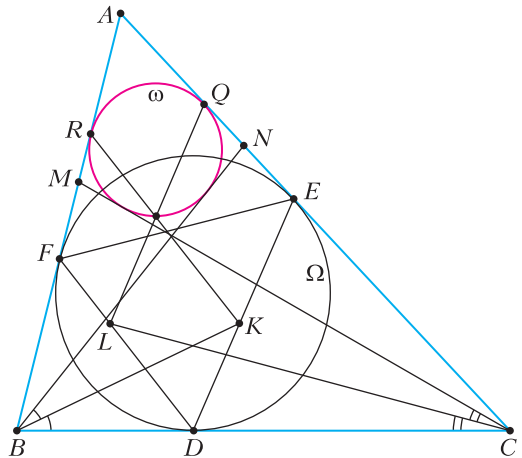


Рис. 1

$AB$  в точках  $D$ ,  $E$  и  $F$  соответственно (рис. 1). Пусть окружность  $\omega$  касается отрезков  $CA$  и  $AB$  в точках  $Q$  и  $R$  соответственно, а точки  $M$  и  $N$  выбраны на отрезках  $AB$  и  $AC$  соответственно так, что отрезки  $CM$  и  $BN$  касаются  $\omega$ . Биссектрисы углов  $NBC$  и  $MCB$  пересекают соответственно отрезки  $DE$  и  $DF$  в точках  $K$  и  $L$ . Докажите, что прямые  $RK$  и  $QL$  пересекаются на  $\omega$ .

*Чан Куанг Хунг (Вьетнам)*

**Ф2773.** Невесомая пружина имеет большое число витков, но изначально только  $N \gg 1$  витков могут деформироваться, а остальные – скреплены между собой. Груз на этой пружине совершает свободные

колебания с периодом  $T_0$  и амплитудой  $A_0$ . Начиная с некоторого момента, при каждом прохождении грузом положения равновесия освобождают по одному из скрепленных витков пружины (длина пружины в недеформированном состоянии при этом не изменяется). Определите амплитуду  $A$  колебаний груза после увеличения числа свободных витков на  $\Delta N \gg 1$ . Оцените (приблизительно) время  $t$ , прошедшее с момента освобождения первого из изначально скрепленных витков до момента завершения колебаний с амплитудой  $A$ .

*А.Власов*

**Ф2774.** Из разных кусков нихромовой проволоки, покрытой одинаковой изоляцией одной и той же толщины, изготовили пять резисторов, соединили их по мостовой схеме (рис. 2)

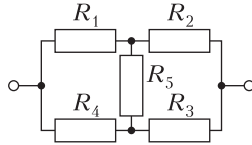


Рис. 2

и подключили к источнику постоянного напряжения. В каждом из четырех описанных ниже опытов найдите разность между максимальной и минимальной температурами резисторов, если температура центрального резистора в тот же момент времени была выше комнатной на  $\Delta T_5 = 10$  мК. В качестве ответа укажите численные значения, округленные до целого числа милликельвинов.

1) Диаметры всех кусков проволоки одинаковы, а длины пропорциональны номерам резисторов. Измерение всех температур производится через *малое* время после замыкания цепи.

2) Диаметры всех кусков проволоки одинаковы, а длины пропорциональны номерам резисторов. Измерение всех температур производится через *большое* время после замыкания цепи.

3) Длины всех кусков проволоки одинаковы, а диаметры пропорциональны номерам резисторов. Измерение всех температур производится через *малое* время после замыкания цепи.

4) Длины всех кусков проволоки одинаковы, а диаметры пропорциональны номерам резисторов. Измерение всех темпера-

тур производится через *большое* время после замыкания цепи.

*С.Варламов*

**Ф2775.** Вдоль ребер куба различными способами прокладывают тонкую проволоку и пускают по ней ток. Индуктивность замкнутого контура из четырех ребер, принадлежащих одной грани, равна  $L_{41}$ . Индуктивность замкнутого контура из шести ребер, принадлежащих двум смежным граням, равна  $L_{62}$ .

1) Найдите индуктивность  $L_{63}$  замкнутого контура из шести ребер, принадлежащих трем попарно смежным граням.

2) Найдите индуктивность  $L_{83}$  замкнутого контура из восьми ребер, принадлежащих трем граням, две из которых параллельны друг другу, а третья является смежной с каждой из двух других.

3) Вдоль ребер двух противоположных граней проложены две замкнутые проволоки. По одному проволочному контуру идет переменный ток силой  $I(t) = I_0 \cos \omega t$ . В другой проволочный контур вставлен идеальный маленький вольтметр. Найдите зависимость  $U(t)$  показаний вольтметра от времени.

*С.Варламов*

**Ф2776.** На плоскую поверхность плоско-выпуклой линзы, изготовленной из стекла с показателем преломления  $n = 1,5$  и расположенной в воздухе, падает вдоль нормали параллельный пучок лучей. Определите форму выпуклой поверхности линзы, если плоская имеет форму круга радиусом  $R = 0,5$  м, а все преломленные линзой лучи прошли через одну точку  $F$ , расположенную на расстоянии  $f = 1$  м от ближайшей к ней точки  $O$  линзы. В качестве ответа укажите толщину  $H$  линзы (максимальное расстояние от точки выпуклой поверхности до плоской).

*А.Власов*

### Решения задач М2754–М2757, Ф2761–Ф2764

**М2754.** Назар выбрал два вещественных числа  $a$  и  $b$  и написал два уравнения:  $x^4 - 2b^3x + a^4 = 0$  и  $x^4 - 2a^3x + b^4 = 0$ . До-



кажете, что хотя бы одно из этих уравнений имеет вещественный корень.

Функции  $f(x) = x^4 - 2b^3x + a^4$ ,  $g(x) = x^4 - 2a^3x + b^4$  — многочлены с положительным старшим коэффициентом, поэтому  $f(x) > 0$  и  $g(x) > 0$  при всех  $x > c$  для некоторой константы  $c$ . Для доказательства наличия корня у многочлена  $f(x)$  достаточно найти хотя бы одно значение  $x_0$ , для которого  $f(x_0) \leq 0$  (существование корня следует из  $f(x_0) \leq 0$  и  $f(x_1) \geq 0$  по теореме о промежуточном значении для непрерывной функции  $f(x)$ ). Аналогичное верно для многочлена  $g(x)$ .

Заметим, что  $f(b) = b^4 - 2b^4 + a^4 = a^4 - b^4$  и, аналогично,  $g(a) = b^4 - a^4$ . Видим, что  $f(b) + g(a) = 0$  и хотя бы одно из чисел  $f(b)$  и  $g(a)$  неположительно. Задача решена.

Существует и более стандартное решение, с нахождением минимального значения каждого из многочленов с помощью производной.

*Н. Агаханов*

**M2755.** Паша и Вова играют в игру, по очереди зачеркивая клетки доски  $3 \times 101$ . Исходно на доске зачеркнута только центральная клетка. За один ход игрок должен выбрать диагональ (в диагонали может быть 1, 2 или 3 клетки) и зачеркнуть в ней все еще не зачеркнутые клетки. Каждым ходом должна быть зачеркнута хотя бы одна новая клетка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Начинает Паша. Кто из игроков может выиграть вне зависимости от ходов противника?

**Ответ:** Вова.

Приведем выигрышную стратегию за Вову. Покрасим клетки доски в шахматном порядке так, чтобы угловые клетки были черными. В нечетных столбцах крайние клетки будут черными, а в четных — белыми. Центральная клетка находится в 51-м столбце, поэтому она сама будет белой. Каждая диагональ либо полностью черная, либо полностью белая. Обе стратегии будут симметричными, но разными для

разных цветов. Для клеток белого цвета будем ходить симметрично относительно центрального столбца (осевая симметрия). Для черных клеток будем ходить симметрично относительно центральной клетки (центральная симметрия).

Докажем, что Вова всегда сможет сделать ход согласно стратегии. Для этого нужно убедиться, что своим ходом он будет зачеркивать хотя бы одну новую клетку. Для черных клеток две диагонали — выбранная Пашей и центрально-симметричная ей, выбранная Вовой, не имеют общих клеток. При этом Паша смог сделать ход, значит, на выбранной им диагонали была незачеркнутая клетка. Так как до хода Паши ситуация для черных клеток была центрально-симметричной, на Вовиной диагонали перед ходом Паши тоже была незачеркнутая клетка. Паша не мог ее зачеркнуть, значит, Вова своим ходом зачеркнет хотя бы одну новую клетку.

Для белых клеток ситуация несколько иная: две диагонали, проходящие через центральную клетку, симметричны относительно центрального столбца, но других симметричных белых диагоналей на доске нет. Опять же, перед ходом Паши ситуация на белых клетках осесимметрична, т.е. и на диагонали, выбираемой сейчас Пашей, и на диагонали, выбранной по стратегии Вовой, есть незачеркнутые клетки. Но единственная общая клетка, которую могут иметь осесимметричные белые диагонали, зачеркнута с самого начала, поэтому Паша не может своим ходом зачеркнуть незачеркнутую клетку с Вовиной диагонали. Таким образом, Вова своим ходом зачеркнет хотя бы одну новую клетку.

Итак, мы доказали, что у Вовы всегда есть ход согласно стратегии. Так как ходов конечное число (игра закончится не позже, чем через  $3 \cdot 101 = 303$  хода, когда точно будут зачеркнуты все клетки), Вова победит.

*И. Ефремов*

**M2756.** а) Выясните, могут ли для некоторого выпуклого шестиугольника  $ABCDEF$  одновременно выполняться три неравенства:

$$\begin{aligned} \angle ABD + \angle AED &> 180^\circ, \\ \angle BCE + \angle BFE &> 180^\circ, \\ \angle CDE + \angle CAF &> 180^\circ. \end{aligned}$$

б) Тот же вопрос, если дополнительно известно, что в шестиугольнике диагонали  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$  пересекаются в одной точке.

**Ответ:** а) да, могут; б) нет, не могут.  
а) Опишем одну из возможных конструкций.

На сторонах  $AC$ ,  $CE$ ,  $EA$  правильного треугольника  $ACE$  отметим соответственно точки  $B$ ,  $D$ ,  $F$  «близко» к вершинам  $A$ ,  $C$ ,  $E$  (рис. 1). В таком положении сумма углов  $\angle ABD + \angle AED$  близка к  $180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$ . То же верно для сумм углов  $\angle BCE + \angle BFE$  и  $\angle CDF + \angle CAF$ . Теперь можно чуть «выдвинуть» точки  $B$ ,  $D$ ,  $F$  вне треугольника  $ACE$  так, чтобы указанные суммы углов «мало» изменились и образовался выпуклый шестиугольник  $ABCDEF$ .

б) Предположим противное: требуемый шестиугольник  $ABCDEF$  существует. Пусть  $P$  – точка пересечения  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$  (рис. 2).

Пусть луч  $PE$  пересекает окружность  $(ABD)$  в точке  $E'$ . Тогда

$$\angle AE'D = 180^\circ - \angle ABD,$$

но по условию

$$180^\circ - \angle ABD < \angle AED.$$

Из неравенства  $\angle AE'D < \angle AED$  следует, что точка  $E'$  лежит на продолжении отрезка  $PE$  (иначе говоря,  $E$  лежит внутри окружности  $(ABD)$ ), откуда  $PE < PE'$ .

Далее,  $PE \cdot PB < PE' \cdot PB = PD \cdot PA$ . Итак, из первого неравенства условия мы вывели, что  $PE \cdot PB < PD \cdot PA$ . Аналогично полу-

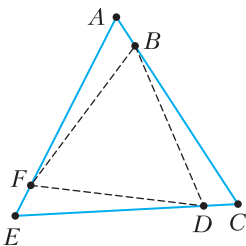


Рис. 1

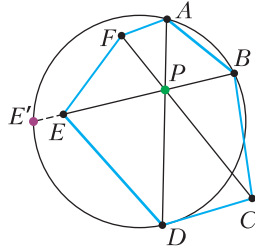


Рис. 2

чим, что  $PD \cdot PA < PF \cdot PC$  и  $PF \cdot PC < PE \cdot PB$ . Отсюда  $PF \cdot PC < PF \cdot PC$  – противоречие.

*М.Сагафян, П.Кожевников*

**M2757.** Дано простое число  $p$ . По окружности стоят  $p$  целых чисел. За один ход разрешается выбрать некоторое целое число  $k$  и заменить имеющийся набор  $a_0, \dots, a_{p-1}$  на набор числа  $a_0 - a_k, a_1 - a_{1+k}, \dots, a_{p-1} - a_{p-1+k}$  (индексы берутся по модулю  $p$ , т.е.  $a_i = a_{i-p}$ ).

а) Докажите, что после выполнения  $p$  таких ходов все числа на окружности будут кратны  $p$ .

б\*) Найдите все пары натуральных чисел  $(m, n)$ ,  $n > 1$ , для которых верно следующее утверждение: для любого начального набора  $p$  целых чисел после выполнения любых  $m$  описанных ходов получится набор из  $p$  чисел, кратных  $n$ .

Ниже мы докажем, что ответ в пункте б) – пары  $(m, n)$ , где  $n = p^\alpha$  – степень простого  $p$ , а  $m \geq M = 1 + (p-1)\alpha$ . Этот результат решает и пункт а).

(I) Пусть  $V$  – это множество всех строк  $X = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  длины  $p$ , где каждое  $x_i$  – вычет (остаток) по модулю  $n$ , так что  $|V| = n^p$ . Строки из  $V$  можно почленно складывать друг с другом и умножать на целое число:

$$\begin{aligned} X + Y &= (x_1, x_2, \dots, x_p) + (y_1, y_2, \dots, y_p) = \\ &= (x_1 + y_1 \pmod n, \dots, x_p + y_p \pmod n), \\ tX &= k \cdot (x_1, x_2, \dots, x_p) = (tx_1 \pmod n, \dots, \\ &\dots, tx_p \pmod n). \end{aligned}$$

Нулевую строку  $(0, 0, \dots, 0)$  будем обозначать  $O$ .

Пусть  $f : V \rightarrow V$  задается как

$$f((x_1, x_2, \dots, x_p)) = (x_2, \dots, x_p, x_1),$$

т.е.  $f$  – циклический сдвиг строки. Ясно, что  $f$  линейно, т.е.  $f(X + Y) = f(X) + f(Y)$ ,  $f(mX) = mf(X)$ . Пусть  $f^k : V \rightarrow V$  обозначает  $k$ -кратное применение  $f$ , так что

$$f_k((x_1, x_2, \dots, x_p)) = (x_{k+1}, \dots, x_p, x_1, \dots, x_k).$$

Тогда отображение  $g_k = I - f^k$ , где  $I$  – тождественное преобразование  $V \rightarrow V$ ,



задает в точности операцию из условия задачи. (Здесь и далее сложение, вычитание и умножение на целое число отображений  $h_1 : V \rightarrow V$  и  $h_2 : V \rightarrow V$  задается естественными правилами  $(h_1 \pm h_2)(X) = h_1(X) \pm h_2(X)$ ,  $(th)(X) = t \cdot h(X)$  для любой строки  $X \in V$ .) Положим  $g_1 = g$ . Тогда

$$g_k = I - f^k = (I + f + \dots + f^{k-1})(I - f) = (I + f + \dots + f^{k-1})g.$$

(II) Положим  $E_i(0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  (единица на  $i$ -м месте), так что любой элемент из  $V$  представим в виде  $\sum_{i=1}^n a_i E_i$  (с целыми  $a_i$ ).

Положим

$$E'_i = g(E_i) = (0, 0, \dots, -1, 1, 0, \dots, 0).$$

Пусть  $V' \subset V$  задается как множество строк  $(x_1, \dots, x_p)$  с суммой  $0 \pmod n$ . Легко видеть, что любой элемент из  $V'$  представим в виде  $\sum_{i=1}^n a_i E'_i$ , что равно  $g\left(\sum_{i=1}^n a_i E_i\right)$ . Значит,  $g(V) = V'$ .

Также для делителя  $d$  числа  $n$  определим  $dV$  как множество строк  $(x_1, \dots, x_p)$ , в которых каждое  $x_i$  делится на  $d$ . В частности,  $nV = O$ .

Пусть  $n = p^\alpha$ . Найдем явно результат многократного применения  $g$  к  $E'_p$ :

$$\begin{aligned} E'_p &= (0, 0, 0, \dots, 0, -1, 1), \\ g(E'_p) &= (0, 0, \dots, 0, 1, -2, 1) = \\ &= (0, 0, \dots, 0, C_2^0, -C_2^1, C_2^2), \\ g^2(E'_p) &= (0, 0, \dots, -1, 3, -3, 1) = \\ &= (0, \dots, 0, -C_3^0, C_3^1, -C_3^2, C_3^3), \\ &\dots \\ g^{p-1}(E'_p) &= (\pm C_p^{p-1}, \dots, -C_p^3, C_p^2, -C_p^1, 0). \end{aligned}$$

Так как для простого  $p$  все биномиальные коэффициенты  $C_p^i$ ,  $i = 1, \dots, p-1$ , делятся на  $p$ , мы видим, что  $g^{p-1}(E'_p) \in V' \cap pV$ . Аналогично,  $g^{p-1}(E'_i) \in V' \cap pV$  при любом  $i$ , и так как любой элемент из  $V'$

представим в виде  $\sum_{i=1}^n a_i E'_i$ , понимаем, что  $g^{p-1}(V') \subset V' \cap pV$ .

Совершенно аналогично, пользуясь тем, что любой элемент из  $V' \cap pV$  представим в виде  $\sum_{i=1}^n a_i pE'_i$ , получаем, что  $g^{p-1}(V' \cap pV) \subset V' \cap p^2V$ , далее  $g^{p-1}(V' \cap p^2V) \subset V' \cap p^3V$  и т.д. Итак, получаем, что

$$\begin{aligned} g^M(V) &= g^{1+(p-1)\alpha}(V) = \\ &= g^{p-1} \dots g^{p-1} g(V) \subset V' \cap p^\alpha V = O. \end{aligned}$$

(III) Оказывается, отсюда можно сделать вывод, что любая строка из  $V$  превращается в  $O$  после выполнения  $M = 1 + (p-1)\alpha$  преобразований вида  $g_k$  (с произвольным выбором  $k$  на каждом шаге). В самом деле,

$$\begin{aligned} g_{k_1} g_{k_2} \dots g_{k_M} &= \\ &= (I + f + \dots + f^{k_1-1})(I - f) \dots \\ &\dots (I + f + \dots + f^{k_M-1})(I - f). \end{aligned}$$

Преобразования в скобках перестановочны (можно проверить непосредственно, что их можно менять местами, так как они выражаются через  $f$ ), поэтому

$$\begin{aligned} g_{k_1} g_{k_2} \dots g_{k_M} &= \\ &= (I + f + \dots + f^{k_1-1}) \dots \\ &\dots (I + f + \dots + f^{k_M-1})(I - f)^M. \end{aligned}$$

Но любая строка из  $V$  превратится в  $O$  уже под действием  $(I - f)^M = g^M$  (и далее останется  $O$  после применения следующих преобразований). Тем самым доказано, что любая строка превращается в  $O$  после  $M$  ходов.

(IV) Теперь покажем, что менее  $M = 1 + (p-1)\alpha$  ходов не будет достаточно. Более того, увидим, что не все элементы из  $V$  превратятся в  $O$  под действием  $(M-1)$ -кратного применения  $g$ .

Для этого заметим, что  $|V'| = n^{p-1}$ , и далее будем оценивать размеры множеств  $g(V'), g^2(V'), \dots$ . Учтем, что, так как  $g(V) = V'$ , все эти множества – подмножества  $V'$ . Если  $g(X) = g(Y)$  для некоторых

$X, Y \in V'$ , то  $g(X - Y) = O$ , откуда, очевидно,  $X - Y = (s, s, \dots, s)$  (т.е. это строка, в которой все  $x_i$  равны). Но  $X - Y \in V'$ , поэтому  $ps \equiv 0 \pmod{n}$ , значит,  $s$  может принимать лишь  $p$  значений:  $p^{\alpha-1}r$ , где  $r \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ . Таким образом,  $g$  как преобразование  $V' \rightarrow V'$  «склеивает» не более  $p$  элементов (т.е. каждая строка из  $V'$  имеет не более  $p$  прообразов из  $V'$  относительно  $g$ ), значит, для любого подмножества  $W \subset V'$  имеем  $|g(W)| \geq |W|/p$ . Пользуясь этим, оцениваем, начиная с  $|g(V)| = |V| = n^{p-1} = p^{\alpha(p-1)} = p^{M-1}$ :

$$|g^2(V)| = |g(V')| \geq p^{M-2},$$

$$|g^3(V)| = |g^2(V')| \geq p^{M-3},$$

...

$$|g^{M-1}(V)| = |g^{M-2}(V')| \geq p,$$

в частности,  $g^{M-1}(V) \neq O$ .

(V) Пусть теперь  $n$  не является степенью  $p$ . Положим  $n = qt$ , где  $q$  – простое число, не равное  $p$ . Рассмотрим подмножество строк  $U = V' \cap tV$ . Легко видеть, что  $g(U) \subset U$ .

С другой стороны, если  $g(X) = g(Y)$  для некоторых  $X, Y \in U$ , то, как мы видели,  $X - Y = (s, s, \dots, s)$ , где  $ps$  делится на  $n$ . Но так как  $X, Y \in U$ , имеем  $X - Y \in U$ , поэтому  $s = tr$ ,  $r \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ . Тогда  $ps = ptr$  делится на  $n = qt$ , значит,  $pr$  делится на  $q$ , что возможно только при  $r = 0$ , т.е.  $s = 0$ . Итак, мы видим, что  $g(X) = g(Y)$  для  $X, Y \in U$  возможно только при  $X = Y$ . Тем самым,  $g$  задает биекцию  $U \rightarrow U$ . Это означает, что любая ненулевая строка из  $U$  при многократном применении  $g$  перейдет в ненулевую строку (на самом деле после нескольких применений  $g$  строка перейдет в себя и далее по периоду). Таким образом, доказано, что  $n$ , не равное степени  $p$ , не подходит.

Задача решена.

(VI) Укажем еще следующую схему альтернативного подхода, работающего при  $n = p$  (т.е. для решения задачи а)). Можно

охарактеризовать явно множества  $g^k(V)$  как множества строк  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , для которых выполнено

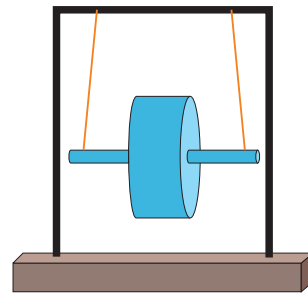
$$P(1)x_1 + P(2)x_2 + \dots + P(n)x_n \equiv 0 \pmod{p}$$

для любого многочлена с целыми коэффициентами  $P$  степени не выше  $k-1$ .

В завершение отметим, что к сюжету этой задачи сводится вопрос из теории групп (о ступени нильпотентности сплетения циклических групп).

*П.Кожевников, И.Соколов*

**Ф2761.**<sup>1</sup> Маятник Максвелла представляет собой конструкцию из П-образного жестко закрепленного на основании штатива, двух жестко соединенных соосных цилиндров разных диаметров и разных длин, а также двух нитей одинаковой длины, причем один конец каждой нити закреплен на цилиндре меньшего диамет-



ра, а второй – на горизонтальной перекладине штатива (см. рисунок). Оба цилиндра сделаны из одного и того же однородного материала плотностью  $\rho = 10 \text{ г/см}^3$ . Соотношение диаметров цилиндров  $D_1/D_2 = 10$ , соотношение их длин (вдоль оси симметрии)  $l_2/l_1 = 3$ . Длина каждой выпрямленной нити  $10,5D_1$ . Максимальное расстояние по вертикали, на которое перемещается ось симметрии цилиндров, равно примерно  $L = 10D_1 = 1 \text{ м}$ . Масса  $m$  такого маятника равна  $1 \text{ кг}$ . Маятник запускается из верхнего положения, когда нити намотаны виток к витку на цилиндр меньшего диаметра и скрепленные цилиндры неподвижны. При движении маятника выпрямленные участки нитей остаются практически вертикальными. Каково максимальное натяжение нитей в те промежутки времени, когда: а) маят-

<sup>1</sup> Автор решений задач Ф2761–Ф2764 – С.Варламов.

ник опускается, б) маятник поднимается, в) подъем оси маятников сменяется опусканием, г) опускание оси в первый раз сменяется подъемом? Считайте, что  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

Понятно, что основная часть массы маятника (больше 98%) связана с цилиндром большего диаметра и меньшей длины. С ней же связана и большая часть механической энергии, которую имеет маятник в процессе движения. Мгновенная ось вращения маятника во время подъема и опускания находится на расстоянии  $r = D_1/20$  от оси симметрии маятников. При таком движении кинетическая энергия, связанная с поступательным движением (маятника), а именно половина произведения массы маятника на квадрат скорости  $v$  движения его центра масс  $E_{\text{пост}} = mv^2/2$ , составляет весьма малую часть от вклада вращательного движения в кинетическую энергию. Вращательная энергия равна, соответственно,

$$E_{\text{вращ}} = (v/r)^2 \cdot m \cdot (D_1)^2 / 8 = \\ = E_{\text{пост}} \cdot (D_1/r)^2 / 4 = E_{\text{пост}} \cdot 100.$$

Суммарная же механическая энергия в процессе движения сохраняется. Если принять ее равной нулю в верхнем положении маятника, то в этом случае координата центра масс маятника  $x$  и скорость его движения  $v$  связаны соотношением

$$100 \cdot (mv^2/2) - mgx = 0, \quad v^2/2 = gx/100.$$

Отсюда следует, что ускорение движения центра масс маятника в промежутки времени, когда он поднимается или опускается, одно и то же и равно  $g/100$ . Следовательно, ответы на вопросы а), б), и в) одинаковы:

$$F = mg \cdot 0,99/2 \approx 4,95 \text{ Н.}$$

А вот в промежуток времени, когда опускание сменяется подъемом, ускорение центра масс, во-первых, направлено не вниз, а имеет вертикальную составляющую, направленную вверх, и во-вторых, максимальная величина силы натяжения нитей достигается в момент, когда центр масс

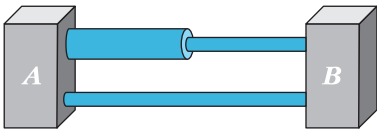
маятника находится в самом нижнем положении. Скорость оси маятника в конце опускания равна  $v = \sqrt{2gL/100} \approx 0,447 \text{ м/с}$ . А угловая скорость вращения в этом нижнем положении маятника составляет  $\omega = v/r = 89,44 \text{ с}^{-1}$ . В самом нижнем положении вертикальная составляющая ускорения маятника направлена вверх и равна  $r \cdot \omega^2 = 40 \text{ м/с}^2$ . Это ускорение обеспечивается двумя натянутыми нитями. Получается, что каждая из двух нитей натянута в этот момент с силой 25 Н.

**Ф2762.** Учитель надул резиновую оболочку шарика воздухом из своих легких и завязал горловину оболочки узлом. В шарике оказалось 10,0 литров воздуха при температуре  $+20^\circ\text{C}$  и давлении, которое примерно на 4% больше атмосферного. Затем шарик стали аккуратно поливать жидким азотом из термоса. Жидкость хорошо смачивала всю поверхность шарика, и он, охлаждаясь, основательно уменьшался в объеме. Оцените, по возможности точнее, минимальный объем шарика при продолжении полива. Сведения о составе газовой смеси в шарике можно отыскать в интернете.

Понятно, что содержимое внутри шарика – это смесь газов при давлении, весьма мало отличающемся от наружного атмосферного давления. Это отличие связано с натяжением резиновых стенок шарика. Человек выдыхает воздух с практически насыщенными парами воды при температуре внутри тела ( $37^\circ\text{C}$ ), но поскольку воздух в шарике успел остыть до комнатной температуры  $20^\circ\text{C}$ , то лишние водяные пары сконденсировались и в шарике установилась 100-процентная влажность, соответствующая температуре  $+20^\circ\text{C}$ . При такой температуре давление насыщенных паров воды равно примерно 2,3 кПа, что составляет около 2% от общего давления, создаваемого всеми газами внутри шарика. После того, как человек вдохнет земной воздух (примерно 78% азота и 21% кислорода плюс 1% аргона и других газов), он выдыхает смесь соединений, похожую на вдыхаемый воздух: 77% азота, 16% кислорода, 1% аргона и 4% углекислого газа, а

оставшиеся в шарике при  $20^\circ\text{C}$  2% – это водяные пары. И аргон, и вода, и углекислый газ, а также все остальные высокомолекулярные соединения, присутствующие в выдыхаемом воздухе, и даже кислород при понижении температуры до температуры кипения жидкого азота ( $77\text{ K} = -196^\circ\text{C}$ ) конденсируются и занимают небольшой объем внутри охладившегося шарика. Резиновые стенки охладившегося шарика – затвердевшие и «сморщенные», а следовательно, создают малое дополнительное давление внутри шарика, которым можно и пренебречь. Плотность жидкого кислорода и присутствующих в жидкости твердых включений в виде кристалликов льда и углекислого газа примерно равна плотности жидкой воды, т.е. около  $1\text{ г/см}^3$ . В результате конденсированная фаза веществ внутри шарика составит объем, равный примерно  $3\text{ см}^3$ . Весь остальной объем займет газообразный азот. Этот объем будет равен примерно  $10\text{ л} \cdot 1,04 \cdot 0,77 \cdot 77\text{ K} / 293\text{ K} \approx 2104,5\text{ см}^3$ . Вместе с конденсированным веществом суммарный объем внутри шарика составит примерно  $2107,5\text{ см}^3$ .

**Ф2763.** Электрическую цепь собрали из кусков медной проволоки разных диаметров  $d$  и  $2d$  и разных длин  $L$  и  $2L$  (см. рисунок). Все участки цепи находятся в воздухе при комнатной температуре



$+20^\circ\text{C}$ . Выводы цепи  $A$  и  $B$  на очень короткое время подключили к мощному источнику тока и отключили. Сразу после отключения короткий участок проволоки большего диаметра имел температуру на  $1^\circ\text{C}$  больше комнатной. Какими были в этот же момент температуры двух других кусков проволоки с одинаковым диаметром, но разной длиной?

На участке с последовательным соединением двух кусков проволоки с разными диаметрами, но одинаковыми длинами ток был одним и тем же, поэтому в проволоке

меньшего диаметра выделилось в 4 раза большее количество теплоты. А поскольку и масса тонкого участка в 4 раза меньше массы толстого, то нагрелся этот тонкий участок на  $16$  градусов и его температура стала равной  $36^\circ\text{C}$ . Если на концах толстого участка проволоки было напряжение  $U$ , то на концах длинного и тонкого участков провода было напряжение  $5U$ . При напряжении  $4U$  в тонком и коротком проводе температура поднялась на  $16$  градусов. На такой же длине во втором тонком участке напряжение будет  $2,5U$ . Поэтому рост температуры этого участка проволоки составит  $16^\circ\text{C} \cdot (2,5U/4U)^2 = 6,25^\circ\text{C}$ . Следовательно, температура второго тонкого, но длинного участка проволоки была равна  $26,25^\circ\text{C}$ .

**Ф2764.** В новом школьном здании нашлось помещение, имеющее форму куба с горизонтальными полом и потолком. В центр пола этого помещения поставили картонный ящик, тоже имеющий форму куба. В точности над центром этого ящика на потолке светится маленькая лампочка. Тень от ящика занимает  $1/4$  часть площади пола в помещении. Если лампочку переместить на  $1\text{ м}$  вниз, то тень от ящика накроет весь пол, а на стенах тени не будет. Каков объем этого помещения?

Обозначим длину ребра ящика  $h$ , а высоту потолка над полом  $H$ . Согласно условию задачи, выполняются два соотношения:

$$h^2 \left( \frac{H}{H-h} \right)^2 = \frac{H^2}{4}, \text{ или } h = \frac{H-h}{2},$$

$$h^2 \left( \frac{H-1\text{ м}}{H-h-1\text{ м}} \right)^2 = H^2, \text{ или}$$

$$h \frac{H-1\text{ м}}{H-h-1\text{ м}} = H.$$

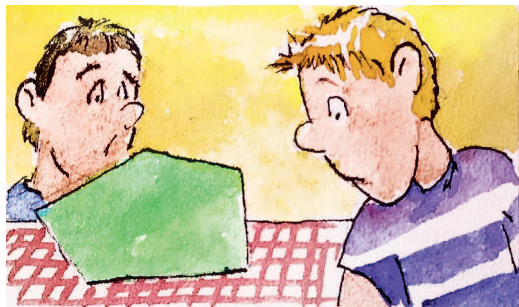
Из этих соотношений следует, что  $H = 2\text{ м}$ . Значит, объем помещения равен  $8\text{ м}^3$ .



## Задачи

1. Покажите, как можно какой-нибудь выпуклый пятиугольник разрезать на четыре остроугольных треугольника.

*Фольклор*



2. На столе по кругу лежат восемь неразличимых на вид монет. Известно, что ровно две из них фальшивые. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые тоже, но они легче настоящих.



Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить, лежат фальшивые монеты рядом или нет?

*А.Грибалко, К.Кноп, Н.Чернятьев*

3. Коробка для конфет – это прямоугольник  $4 \times 5$  ячеек. В нее нужно положить  $n$  конфет (в каждую ячейку



не более одной конфеты) так, чтобы для каждого числа от 1 до  $n - 1$  можно было отделить именно столько конфет либо горизонтальной, либо вертикальной прямой, проходящей по границам ячеек. При каком наибольшем  $n$  это возможно?

*В.Клепцын*

4. Петя и Вася играют, делая ходы по очереди, начинает Петя. За один ход можно поставить фишку в любую свободную вершину 99-угольника. Если в двух соседних с ней вершинах



уже стоят фишки, игрок забирает их себе. Назовем такие фишки призовыми. Выигрывает тот, кто первым соберет 100 призовых фишек. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

*Н.Чернятьев*

# КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся начиная с 8–9 класса, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт [kvantik.com](http://kvantik.com)).

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, по адресу: [savin.contest@gmail.com](mailto:savin.contest@gmail.com). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором учитесь.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Задания, решения и результаты публикуются на сайте [sites.google.com/view/savin-contest](http://sites.google.com/view/savin-contest)  
Желаем успеха!

5. Пятнадцать бочек поставили в виде треугольника (рис. 1) и обтянули кольцевым обручем. Шестнадцать бочек поставили

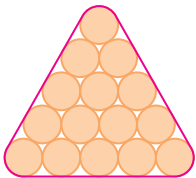


Рис. 1

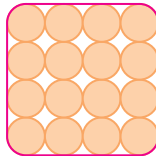


Рис. 2

ли в виде квадрата  $4 \times 4$  (рис. 2) и тоже обтянули кольцевым обручем. Сравните длины этих обручей.

*П. Кожевников*

6. Имеются стакан кофе, наполненный на  $\frac{2}{3}$ , и такой же стакан молока, наполненный на  $\frac{2}{3}$ . Разрешается переливать любое количество жидкости туда и обратно, тщательно ее перемешивая, но нельзя ничего выливать. Можно ли получить в одном из стаканов напиток, составленный из молока и кофе в пропорции 1:1?

*Е. Смирнов*

7. Вася нарисовал фигуру в виде квадрата  $15 \times 15$ , в котором вырезаны четыре отверстия в виде квадратов  $3 \times 3$  (рис. 3).

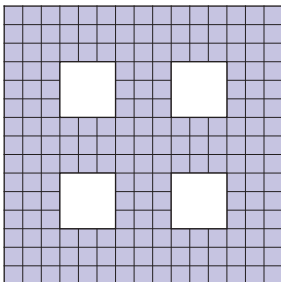


Рис. 3

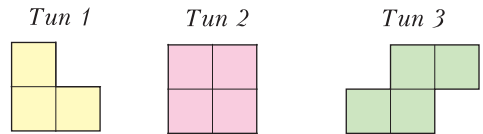


Рис. 4

Эту фигуру Вася разрезал на фигурки, каждая из которых одного из трех типов (рис. 4). Известно, что фигурок типов 2 и 3 в разрезании поровну. Сколько в разрезании фигурок каждого типа?

*С. Костин*

8. а) Петя и Вася играют в такую игру. Петя пишет на доске любое целое число. Вася не видит доску, и его цель – угадать, какое число сейчас на доске. За один ход Вася называет свою догадку, и если она неправильная (т.е. не совпадает с числом на доске в момент произнесения догадки), то Петя увеличивает число на доске на 1, после чего Вася пытается угадать снова. Всегда ли Вася может действовать так, чтобы гарантированно угадать число за конечное количество ходов?

б) Такая же игра и тот же вопрос, но теперь Петя после каждого хода может изменить число на 1 по своему усмотрению (увеличить или убавить на 1; не менять число нельзя).

в) Такая же игра и тот же вопрос, но теперь Петя увеличивает число на 1, когда Васина догадка меньше числа, которое сейчас на доске, и уменьшает число на 1, если Васина догадка больше.

*А. Гаек (ученик 11 класса)*



# Теорема о трех плоскостях

Ю. БЛИНКОВ

**В** СТАТЬЕ БУДЕТ РАССМОТРЕНО одно важное утверждение, которое можно формулировать и использовать сразу после изучения аксиом стереометрии. Отметим, что в виде теоремы оно встречается только в книге [1] и привязано к теме «Параллельность прямой и плоскости». Иногда это утверждение встречается (в упрощенной или другой формулировке) в виде задач (см., например, [2], [3], [4]), но внимание на нем не акцентируется. Мы постараемся частично исполнить этот пробел.

Итак, формулировка.

**Теорема о трех плоскостях.** Если три плоскости пересекаются по трем различным прямым, то эти три прямые либо параллельны друг другу, либо пересекаются в одной точке.

**Доказательство.** Пусть плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $c$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  – по прямой  $a$ ,  $\alpha$  и  $\gamma$  – по прямой  $b$ . Поскольку каждая пара прямых (например,  $a$  и  $b$ ) лежит в одной плоскости, то они либо пересекаются, либо параллельны.

Если никакие две из указанных прямых не пересекаются (рис. 1), то они попарно параллельны и условие теоремы выполняется. Пусть какие-то две из прямых пересекаются, например,  $a$  и  $b$  пересекаются в точке  $C$  (рис. 2). Тогда точка  $C$  принадлежит плоскостям  $\beta$  и  $\gamma$ , поскольку принадлежит их

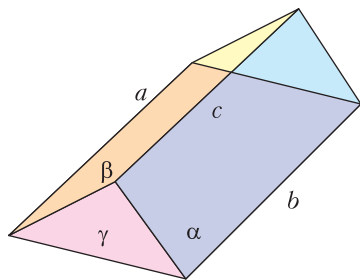


Рис. 1

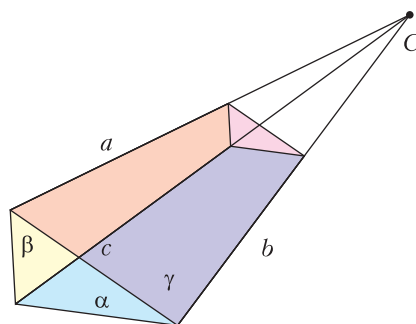


Рис. 2

пересечению (прямой  $a$ ). С другой стороны, эта точка принадлежит плоскостям  $\alpha$  и  $\gamma$ , так как она лежит на прямой  $b$ . Следовательно, точка  $C$  принадлежит все трем плоскостям, в частности, принадлежит пересечению  $\alpha$  и  $\beta$ , т.е. прямой  $c$ .

Итак, прямые  $a$ ,  $b$  и  $c$  либо параллельны, либо пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

Обратим внимание, что в доказательстве использовалось лишь то, что две плоскости пересекаются по прямой.

Рассмотрим применение доказанной теоремы. Начнем с построения сечений. Решим следующую задачу.

**Задача 1.** а) Верно ли выполнено построение сечения тетраэдра на рисунке 3?

б) Постройте сечение тетраэдра  $PABC$ , проходящее через середины ребер  $PA$ ,  $PC$  и  $AB$ .

**Решение.** а) Рассмотрим три плоскости:  $PAC$ ,  $ABC$  и плоскость сечения. По теореме о трех плоскостях прямые их попарного пересечения либо параллельны, либо пересекаются в одной точке. Остается заметить, что на данном чертеже не выполняется ни то, ни другое. Таким образом, построение выполнено неверно.

б) Пусть  $M$ ,  $K$  и  $N$  – указанные середины ребер (рис. 4). Рассмотрим три плоскости:

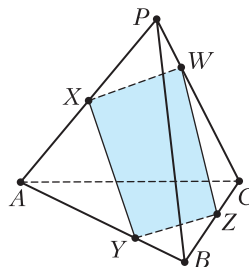


Рис. 3

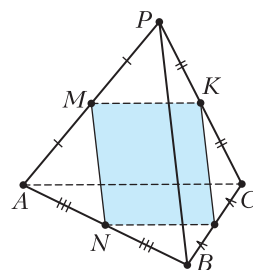


Рис. 4

$PAC$ ,  $ABC$  и плоскость сечения. По теореме о трех плоскостях прямые их попарного пересечения либо параллельны, либо пересекаются в одной точке. Поскольку  $MK$  и  $AC$  параллельны, то имеет место первый случай. Следовательно, сечение проходит также через середину отрезка  $BC$  и является параллелограммом.

**Упражнение 1.** Решите задачу 1, используя другие тройки плоскостей.

Еще раз подчеркнем, что теорема о трех плоскостях использует только пересечение плоскостей, поэтому задачи на эту тему становятся доступны в самом начале изучения стереометрии.

**Задача 2.** Прямые  $a$  и  $b$  параллельны. Точка  $O$  не лежит на этих прямых (рис. 5).

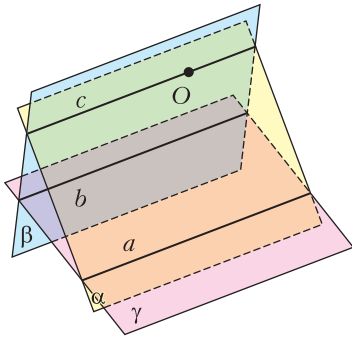


Рис. 5

Плоскость  $\alpha$  проходит через  $O$  и  $a$ , плоскость  $\beta$  проходит через  $O$  и  $b$ . Пусть эти плоскости пересекаются по прямой  $c$ . Докажите, что прямая  $c$  параллельна данным прямым.

**Решение.** Рассмотрим три плоскости:  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , проходящие через прямые  $a$  и  $b$ . По теореме о трех плоскостях прямые  $a$ ,  $b$  и  $c$  их попарного пересечения либо параллельны, либо пересекаются в одной точке. Поскольку  $a$  и  $b$  параллельны, то имеет место первый случай, что и требовалось доказать.

При решении этой задачи мы использовали то, что две параллельные прямые задают плоскость.

**Упражнение 2.** Докажите этот факт.

На самом деле, мы научились решать достаточно широкий класс задач, связанных с взаимным расположением прямых в пространстве. Например, аналогичным образом можно решить следующее упражнение.

**Упражнение 3.** Прямые  $a$  и  $b$  параллельны. Прямая  $c$  не лежит с ними в одной плоскости и пересекает прямую  $b$ . Докажите, что прямые  $c$  и  $a$  скрещиваются. Попробуйте сделать это, не используя признаки скрещивающихся прямых.

Рассмотрим еще одну задачу на построение.

**Задача 3.** Пусть  $PABCD$  – четырехугольная пирамида с основанием  $ABCD$ , причем  $AB$  и  $CD$  параллельны (рис. 6). Нарисуйте прямую пересечения плоскостей  $PAB$  и  $PCD$ .

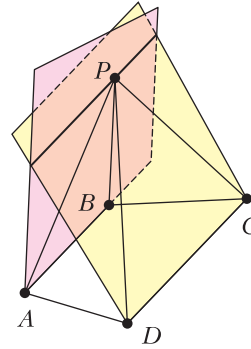


Рис. 6

$AB$  и  $CD$  параллельны (рис. 6). Нарисуйте прямую пересечения плоскостей  $PAB$  и  $PCD$ .

**Решение.** Рассмотрим три плоскости:  $ABCD$ ,  $PAB$  и  $PCD$ . Они пересекаются по трем прямым, две из которых параллельны. Следовательно, прямая пересечения плоскостей  $PAB$  и  $PCD$  параллельна  $AB$  и  $CD$ .

**Упражнение 4.** Решите эту же задачу, если  $AB$  и  $CD$  пересекаются.

Заметим, что в формулировке теоремы и в задачах 16, 2 и 3 возникает конструкция, связанная с тремя параллельными прямыми. Поэтому следующим шагом логично будет рассмотреть транзитивность параллельности прямых.

**Задача 4.** Докажите, что две прямые, параллельные третьей, параллельны.

**Решение.** Пусть прямая  $a$  параллельна прямой  $c$  и прямая  $b$  параллельна прямой  $c$ . Рассмотрим точку  $V$  на прямой  $b$  и проведем плоскости через  $V$  и  $c$  и через  $V$  и  $a$ . Тогда эти плоскости должны пересекаться по прямой, параллельной прямым  $a$  и  $c$  (см. задачу 2). Но прямая, проходящая через  $V$  и параллельная  $c$ , единственна (докажите!), т.е.  $b$  параллельна  $a$ .

Отметим, что доказательство с той же идеей есть в некоторых учебниках (см., например, [3]), но не совсем понятно, как до него додуматься. Здесь же эта идея выглядит вполне естественно.

Двигаемся дальше. На очереди – параллельность плоскостей. Для начала вспомним одно важное утверждение:

*Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии пересечения параллельны.*

**Упражнение 5.** Докажите этот факт.

Сформулированное утверждение также можно считать одним из случаев теоремы о трех плоскостях, если принять, что две параллельные плоскости пересекаются по бесконечно удаленной прямой.

Теперь вспомним второй признак параллельности плоскостей.

**Задача 5.** Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямой другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

**Решение.** Обозначим плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ , а прямые, в них лежащие,  $a, b$  и  $a', b'$  соответственно, тогда  $a \parallel a', b \parallel b'$ . Пусть  $a$  пересекается с  $b$  в точке  $O$ . Докажем, что  $\alpha \parallel \beta$ . Рассмотрим плоскость, содержащую  $a$  и  $a'$ , а также плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ . Если плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются, то по прямой  $c$ , параллельной  $a$  и  $a'$  (см. задачу 2). Рассмотрев плоскость, проходящую через прямые  $b$  и  $b'$ , получим, что прямая  $c$  также параллельна прямым  $b$  и  $b'$ , т.е. через точку  $O$  проходят две прямые, параллельные прямой  $c$ . Противоречие.

Теперь рассмотрим утверждение, связанное с параллельностью прямой и плоскости.

Отметим, что теорема о трех плоскостях позволяет изучать параллельность плоскостей и параллельность прямой и плоскости независимо друг от друга, т.е. порядок изучения тем можно менять в зависимости от целей и вкусов учителя.

**Задача 6.** Если прямая параллельна двум пересекающимся плоскостям, то она параллельна их линии пересечения.

**Решение.** Обозначим плоскости через  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 7), прямую их пересечения – через  $c$ , а данную прямую – через  $x$ . Рассмотрим произвольную плоскость  $\gamma$ , проходящую че-

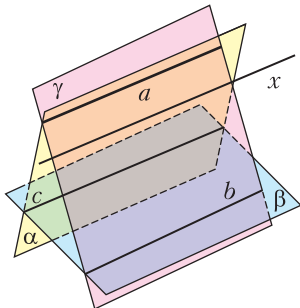


Рис. 7

рез прямую  $x$  и пересекающую  $\alpha$  и  $\beta$ . Пусть она пересекает эти плоскости по прямым  $a$  и  $b$  соответственно. Поскольку прямая  $x$  параллельна  $\alpha$  и  $\beta$ , то она параллельна прямым  $a$  и  $b$  (докажите!). Применив теорему о трех плоскостях к плоскостям  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ , получим, что прямые  $a, b$  и  $c$  параллельны, откуда, учитывая транзитивность параллельности, и следует параллельность прямых  $c$  и  $x$ .

Теперь перейдем к менее стандартным утверждениям. В некоторых случаях увидеть эти три плоскости не так просто. Следующая задача взята из задачника [5].

**Задача 7.** Треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  не лежат в одной плоскости (рис. 8). Извест-

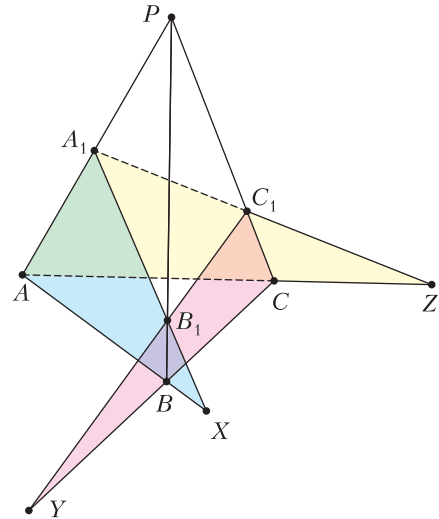


Рис. 8

но, что прямые  $AB$  и  $A_1B_1$ ,  $BC$  и  $B_1C_1$ ,  $AC$  и  $A_1C_1$  попарно пересекаются. Докажите, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке или параллельны.

**Решение.** Воспользуемся тем, что две пересекающиеся прямые задают плоскость. Рассмотрим три плоскости, заданные парами прямых:  $AB$  и  $A_1B_1$ ,  $BC$  и  $B_1C_1$ ,  $AC$  и  $A_1C_1$ . Тогда по теореме о трех плоскостях прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  их попарного пересечения пересекаются в одной точке или параллельны, что и требовалось.

Отметим, что пересечение прямых при решении задачи 7 мы используем только для того, чтобы они образовывали плоскость, т.е. условие задачи остается верным, если какие-то из этих пар прямых параллельны. Кроме того, эти прямые пересекаются в трех

точках, лежащих на одной прямой, так как они принадлежат прямой пересечения плоскостей указанных треугольников. И, наконец, нельзя не отметить связь этого утверждения с теоремой Дезарга (см., например, [2]).

Теперь рассмотрим задачу В.В.Произволова с Турнира городов 2009 года.

**Задача 8.** В пространстве (но не в одной плоскости) расположены шесть различных

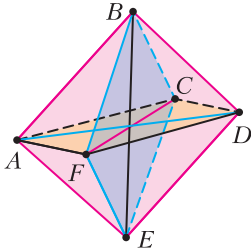


Рис. 9

точек:  $A, B, C, D, E$  и  $F$  (рис. 9). Известно, что отрезки  $AB$  и  $DE$ ,  $BC$  и  $EF$ ,  $CD$  и  $FA$  попарно параллельны. Докажите, что эти же отрезки и попарно равны.

**Решение.** Рассмотрим три плоскости, заданные парами параллельных прямых:  $(ABDE)$ ,  $(BCEF)$ ,  $(CDAF)$ . Они пересекаются по прямым  $(BE)$ ,  $(CF)$  и  $(AD)$ . Тогда эти три прямые либо параллельны, либо пересекаются в одной точке.

В первом случае (если он возможен) из параллельности  $(BE)$  и  $(AD)$  и параллельности  $(AB)$  и  $(DE)$  следует, что  $ABED$  – параллелограмм, т.е.  $AB = DE$ , и аналогично для других пар отрезков.

Во втором случае имеем пространственный шестиугольник с попарно параллельными противоположными сторонами и пересекающимися в одной точке главными диагоналями. Тогда из подобия нескольких пар треугольников следует, что противоположные стороны еще и равны, т.е. коэффициент подобия не может быть отличным от единицы (докажите!).

### Упражнения

6. а) Докажите, что первый случай в решении задачи 8 невозможен.

б) Используя подобие и метод от противного, доведите решение задачи 8 до конца во втором случае.

7. Решите задачу 8, используя второй признак параллельности плоскостей или векторные соот-

ношения.

Отметим, что, как и в задаче 7, взаимное расположение прямых мы использовали для задания плоскости. В следующей олимпиадной задаче (предложил В.А.Лецко), мы используем этот прием еще раз.

**Задача 9.** Все грани выпуклого шестигранника – четырехугольники. Докажите, что если у такого многогранника найдется пара пересекающихся диагоналей, то у него найдется еще одна такая пара.

**Решение.** Пусть диагонали  $AC_1$  и  $BD_1$  шестигранника  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  пересекают-

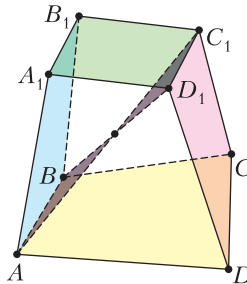


Рис. 10

ся (рис. 10). Тогда точки  $A, B, C_1$  и  $D_1$  лежат в одной плоскости  $\alpha$ , т.е. прямые  $AB$  и  $C_1D_1$  параллельны или пересекаются. Рассмотрим еще две плоскости:  $AA_1B_1B$  и  $A_1B_1C_1D_1$ . Тогда по теореме о трех плоскостях прямая  $A_1B_1$  параллельна прямым  $AB$  и  $C_1D_1$  в первом случае и проходит через точку их пересечения во втором. Проведя аналогичные рассуждения для плоскостей  $\alpha$ ,  $ABCD$  и  $DCC_1D_1$ , получим, что  $CD$  также параллельна  $AB$  и  $C_1D_1$  в первом случае и проходит через точку их пересечения во втором. Следовательно,  $A_1B_1$  и  $CD$  либо параллельны, либо пересекаются, т.е. точки  $A_1, B_1, C$  и  $D$  лежат в одной плоскости, а диагонали  $A_1C$  и  $B_1D$  пересекаются как диагонали выпуклого четырехугольника, что и требовалось.

Продолжение этого сюжета – задача 5 (также предложенная В.А.Лецко) из задач для самостоятельного решения.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Сечением пирамиды  $PABCD$ , проходящим через точки  $A$  и  $D$ , является трапеция с основанием  $AD$ . Определите вид четырехугольника  $ABCD$ , лежащего в основании пирамиды.

2. В пространстве проведены три прямые, не лежащие в одной плоскости, но при этом никакие две не являются скрещивающимися. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку



либо параллельны.

3. Пусть на ребрах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $AD$  тетраэдра  $ABCD$  взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  и  $D_1$  соответственно. Эти четыре точки лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда

$$\frac{AA_1}{A_1B} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1D} \cdot \frac{DD_1}{D_1A} = 1.$$

Докажите это.

4. Докажите, что можно пересечь выпуклый четырехгранный угол плоскостью так, чтобы получился параллелограмм.

5. Все грани выпуклого шестигранника – четырехугольники. а) Сколько пар диагоналей этого шестигранника могут пересекаться? б) Каково возможное количество различных точек пересечения?

Автор благодарен участникам выездного семинара учителей (Санкт-Петербург, май,

2023) за обсуждение материала этой статьи и за некоторые предложенные задачи. Кроме того, автор благодарит за внимание и положительный отклик учеников 10 класса московской школы 2007, которым была прочитана соответствующая лекция.

### Литература

1. Я.П.Понарин. Элементарная геометрия. Т. 2. – М.: МЦНМО, 2006.
2. А.Д.Александров, А.Л.Вернер, В.И.Рыжик. Геометрия. 9–10 классы. – М.: Просвещение, 1988.
3. А.В.Погорелов. Геометрия. 10–11 классы. – М.: Просвещение, 2014.
4. А.Г.Мерзляк, Д.А.Номировский, В.М.Поляков. Геометрия. 10 класс. Углубленный уровень. – М.: Вентана-граф, 2019.
5. В.В.Прасолов. Задачи по стереометрии. – М.: МЦНМО, 2010.

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

# Механика сферы Дайсона

**М.НИКИТИН, А.ТЕПЛЯКОВ**

**С**ФЕРА ДАЙСОНА – ЭТО ФАНТАСТИЧЕСКАЯ КОСМИЧЕСКАЯ КОНСТРУКЦИЯ радиусом в десятки и сотни миллионов километров, полностью охватывающая звезду и аккумулирующая большую часть ее энергии для практического использования. Впервые подобную астроинженерную конструкцию предложил Фримен Дайсон, предположив, что по мере развития человеческой цивилизации людям будущего понадобится источник энергии, сравнимый по мощности с Солнцем. В последующем идею Дайсона подхватили другие авторы, в результате чего появились новые астроинженерные проекты: кольцо Нивена, раковина Покровского, структура Крисвелла и другие. Объединяло все эти проекты желание авторов найти наиболее приемлемый вариант астроинженерной конструкции, способной выдержи-

вать гигантские упругие напряжения, порождаемые действием силы гравитации центрального светила. Преуспеть в затеянном пока не удалось никому – в природе просто нет материалов нужной прочности и, скорее всего, никогда не будет. Попробуем разобраться в проблемах создания астроинженерных конструкций, подобных сфере Дайсона.

### Статическая сфера Дайсона

Начнем с простейшей статической сферы Дайсона, в центре которой находится звезда с массой, близкой массе Солнца (такой звездой может быть и белый карлик). Чтобы оценить напряжения, возникающие в материале конструкции сферы под действием силы гравитации, выберем небольшой элемент сферы, как показано на рисунке 1. На выбранный сферический элемент действуют сила гравитации, направленная к звезде, и силы напряжения, направленные по касательным к поверхности на границах элемента. Для того чтобы элемент находился в равновесии, сумма сил вдоль радиального направления должна равняться нулю. Из этого условия следует, что

$$\frac{GMm}{R^2} = 2\pi r T_S \sin \theta,$$

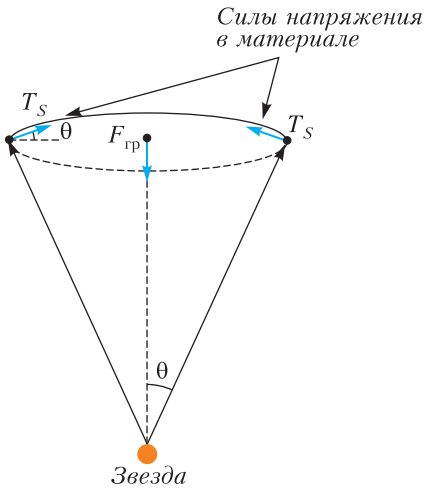


Рис. 1. Элемент статической сферы Дайсона и силы, действующие на него

где  $G$  – гравитационная постоянная,  $M$  – масса звезды,  $m$  – масса элемента,  $R$  – расстояние от элемента до звезды,  $r$  – радиус окружности, ограничивающей элемент,  $T_S$  – сила касательного напряжения, действующая на единицу длины элемента. Масса элемента  $m$  равна объему этого элемента, умноженному на плотность материала:

$$m = \rho V = \rho \pi (R\theta)^2 d,$$

где  $d$  – толщина сферического элемента, а площадь сферической поверхности представлена как совокупность сферических треугольников. Подставляя выражение для массы  $m$  в условие равновесия и учитывая, что для малых углов  $\sin \theta \approx \theta$ , получим

$$p = \frac{T_S}{d} = \frac{GM}{2R} \rho,$$

где  $p$  – напряжения, возникающие в выделенном сферическом элементе из-за действия со стороны сферы. По третьему закону Ньютона точно такой же величины напряжения возникают в сфере Дайсона со стороны рассматриваемого элемента.

Оценим возможные напряжения для сферы Дайсона с радиусом  $R$ , равным радиусу земной орбиты, изготовленной из материала плотностью  $\rho = 3 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>:

$$p \approx 10^{12} \text{ Н/м}^2 = 10^{12} \text{ Па.}$$

Полученная величина напряжения на много порядков больше, чем предельные напряже-

ния, которые могут выдержать наиболее используемые конструкционные материалы. Например, допустимые напряжения для различных марок стали могут меняться в диапазоне от 100 МПа до 200 МПа.

Ситуацию не спасают и уникальные наноматериалы из-за предельной силы напряжения, порождаемой атомарной структурой твердых тел. Оценим «атомную» предельную напряженность. Для этого сделаем два допущения: предположим, что энергия связи двух атомов твердого тела составляет  $\epsilon$  и что связь разрывается, когда атомы разведены на расстояние  $l$ . Из этих допущений следует, что для разрыва связи нужна средняя сила, равная  $f \approx \epsilon/l$ . Пользуясь этим соотношением, найдем суммарную силу, которую нужно приложить нормально к образцу твердого тела площадью  $S$ , чтобы разорвать все атомные связи в поперечной плоскости. Эта сила будет равна  $F \approx fN$ , где  $N$  – число одиночных атомных связей в рассматриваемой плоскости до момента разрыва атомных связей. Число таких связей по порядку величины равно  $N \approx S/l_a^2$  (параметр  $l_a$  численно равен расстоянию между атомами в твердом теле). С учетом этого соотношения,

$$F = fN \approx \frac{\epsilon S}{l_a^2}.$$

Разделив на  $S$ , получим предельное напряжение, которое возникает в твердом теле при разрыве атомных связей:

$$p = \frac{F}{S} \approx \frac{\epsilon}{l_a^2}.$$

Для оценки величины  $p$  используем характерные значения  $\epsilon \approx 1$  эВ и  $l \approx l_a \approx 2 \cdot 10^{-10}$  м. В итоге получим  $p \approx 2 \cdot 10^{10}$  Па, что значительно меньше  $10^{12}$  Па.

Данный результат означает, что твердые тела в принципе неспособны противостоять напряжениям, которые порождаются силой гравитации в статической сфере Дайсона. Отсюда следует очевидный вывод – создание такой конструкции невозможно. Отметим, что при использовании условия  $l \approx l_a$  формула для напряжения может быть записана в виде  $p = \epsilon n$ , где  $n$  – концентрация атомов в твердом теле.

Избавиться от разрушительного действия

силы гравитации возможно только скомпенсировать его полностью или частично. Для этого можно всю конструкцию сферы (или ее значительную часть) перевести в состояние невесомости – так, как это делается с искусственными спутниками Земли. Сделать это можно с помощью придания сфере вращения, центробежная сила инерции которого скомпенсирует действие силы гравитации. К сожалению, у данного решения есть существенный недостаток. Из-за сферической формы силу гравитации можно скомпенсировать только в экваториальной плоскости вращающейся сферы. Вне этой плоскости сила гравитации и центробежная сила инерции становятся неколлинеарными, что приводит к разбалансировке и появлению ненулевой результирующей силы. Частично исправить этот дисбаланс можно с помощью профилирования формы поверхности конструкции таким образом, чтобы результирующая сил гравитации и центробежной инерции была направлена по касательной к внешней поверхности модифицированной сферы Дайсона (МСД). В этом случае основное действие результирующей силы будет перенесено вниз по конструкции МСД к экваториальной плоскости, где оно будет скомпенсировано действующей результирующей силой нижней половины МСД. Механика этого станет яснее из материала, приведенного далее.

**Модифицированная сфера Дайсона**

Рассмотрим небольшой элемент МСД в экваториальной плоскости. На этот элемент действуют две силы: гравитации и центробежной инерции. Равенство нулю результирующей этих сил возможно при выполнении условия

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}},$$

где  $\omega$  – угловая скорость вращения МСД.

Рассмотрим теперь произвольный небольшой элемент МСД массой  $m$ , находящийся на расстоянии  $r$  от звезды, как показано на рисунке 2. Модуль гравитационной силы, действующей на этот элемент, равен

$F_{гр} = \frac{GMm}{r^2}$ , модуль центробежной силы инерции есть  $F_{цб} = m\omega^2 r \cos \alpha$ , модуль результирующей силы равен

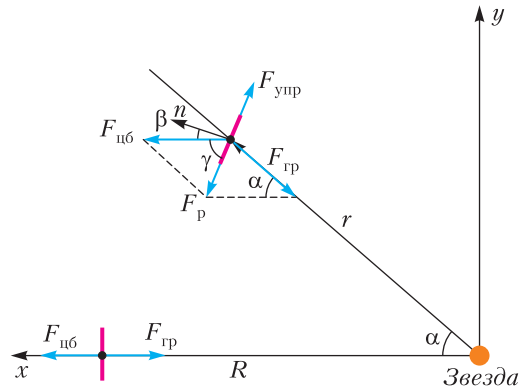


Рис. 2. Геометрия сил, действующих на произвольный малый элемент поверхности МСД

$$F_p = \sqrt{F_{гр}^2 + F_{цб}^2 - 2F_{гр}F_{цб} \cos \alpha}.$$

Если поверхность МСД расположить параллельно результирующей силе, то сила деформации материала  $F_{упр}$  в случае равновесия элемента будет равна по модулю и противоположна по направлению результирующей силе. Для фиксированных значений  $\alpha$  существуют такие  $r$ , для которых результирующая сила минимальна. Чтобы найти эти  $r$ , возьмем производную от выражения для  $F_p$  по  $r$ . Проведя несложные вычисления, получим уравнение шестой степени относительно  $r$ :

$$r^6 \cos^2 \alpha + R^3 r^3 \cos^2 \alpha - 2R^6 = 0.$$

Численное решение этого уравнения показывает, что у него шесть корней, один из которых имеет физический смысл, четыре корня мнимые и один отрицательный. Вещественный корень и задает форму огибающей кривой, которая определяет поверхность вращения МСД, симметричную относительно азимутальной оси. Углы  $\beta$  и  $\gamma$ , задающие положение нормали и касательной к поверхности малого элемента  $m$ , определяются такими соотношениями:

$$\frac{\sin \alpha}{F_p} = \frac{\sin \gamma}{F_{гр}}, \quad \beta = 90 - \gamma.$$

**Расчет формы поверхности и напряжений в МСД**

Используя полученные значения радиусов  $r$  и углов  $\alpha$ , нетрудно построить форму поверхности вращения МСД, экваториальный радиус которой равен расстоянию от

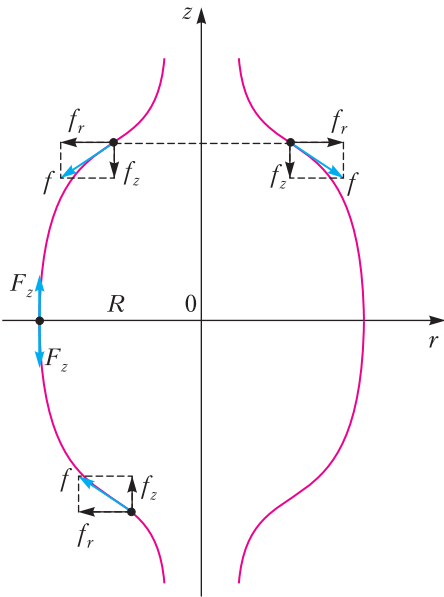


Рис. 3. Геометрия поверхности вращения МСД и сил, действующих на единичную массу ее вещества

Солнца до Земли. Меридиональный разрез этой МСД представлен на рисунке 3. Здесь через  $\vec{f}$ ,  $\vec{f}_z$  и  $\vec{f}_r$  обозначены равнодействующая сила, ее осевая и поперечная составляющие, действующие на точечную единичную массу материала МСД. Функциональные зависимости модуля результирующей силы  $\vec{f}$  и ее гравитационной составляющей  $\vec{f}_{гр}$  в зависимости от угла  $\alpha$  приведены на рисунке 4. Хорошо виден эффект компенсации действия силы гравитации с помощью цент-

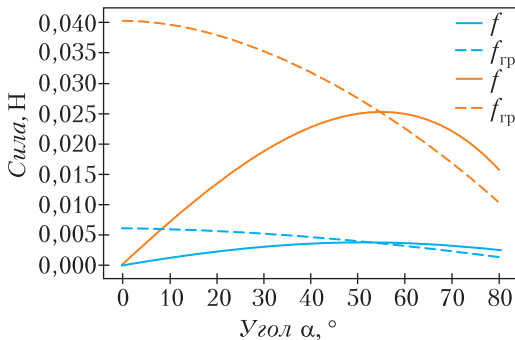


Рис. 4. Зависимость модулей результирующей силы и силы гравитации от угла  $\alpha$ . Синяя линия построена для  $R = 1$  а.е. (орбита Земли), оранжевая – для  $R = 0,387$  а.е. (орбита Меркурия)

робежной силы инерции. Эффект наиболее выражен в области углов, меньших  $20^\circ$ . При больших углах сила гравитации и центробежная сила инерции вносят практически равные вклады.

Рассмотрим теперь вопрос о напряжениях, которые возникают в модифицированной сфере Дайсона при действии силы гравитации и центробежной силы инерции. Осевая составляющая результирующей силы проецируется на сечение сферы в экваториальной плоскости и создает там давление аналогично тому, как создает гидростатическое давление сила тяжести на Земле. Поперечная составляющая силы вызывает растяжение материала сферы в поперечном направлении и порождает напряжение, действующие в меридиональном сечении МСД.

Попытаемся оценить величину этих напряжений. Начнем с нахождения давления, которое оказывает каждая полусфера на другую в экваториальной плоскости. Это давление порождается всеми осевыми компонентами силы  $F_z$ , действующей на каждый элементарный объем сферы. С учетом аксиальной симметрии МСД в качестве элементарного объема целесообразно взять участок стенки толщиной  $\Delta$ , высотой  $h_i$  и шириной  $l_i = r_{\perp i} \theta$ , где  $\theta$  – малый аксиальный угол, под которым виден с оси  $z$  отрезок  $l_i$  (меридиональный срез участка МСД представлен на рисунке 5). Масса выбранного элемента равна  $m_i = \rho \Delta h_i r_{\perp i} \theta$ , где  $\rho$  – плотность мате-

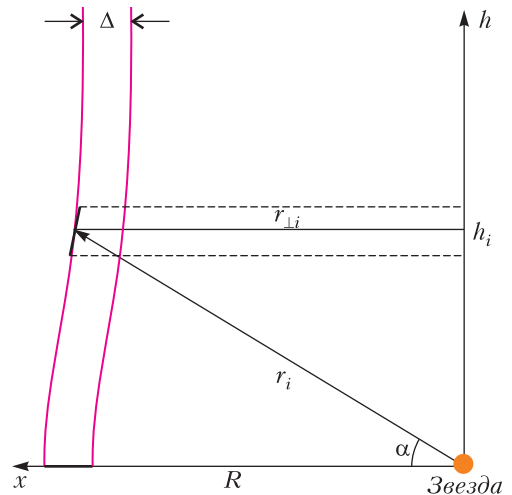


Рис. 5. Меридиональное сечение стенки и выделенного элементарного объема МСД



риала сферы. Осевая компонента силы, действующей на этот элемент, равна

$$F_{iz} = \rho \Delta h_i r_{\perp i} \theta f_i \sin \gamma_i,$$

где  $f_i$  – модуль силы, действующей на единичную массу в месте нахождения элементарного объема сферы. Чтобы найти давление в экваториальной плоскости, нужно просуммировать по всем  $F_{iz}$  и разделить на опорную площадь, на которую приходится действие всех этих сил  $F_{iz}$ . В результате получим

$$p_n = \sum_1^N \left( \frac{\rho \Delta h_i r_{\perp i} \theta f_i \sin \gamma_i}{R \Delta \theta} \right) = \frac{\rho}{R} \sum_1^N (h_i r_{\perp i} f_i \sin \gamma_i),$$

где суммирование идет по всем элементарным объемам, заключенным внутри аксиального угла  $\theta$ . Эта сумма может быть найдена приближенно с помощью подходящего выбора числа  $N$ , которое определяет число разбиений оси  $z$  на отрезки  $h_i$ . На рисунке 6

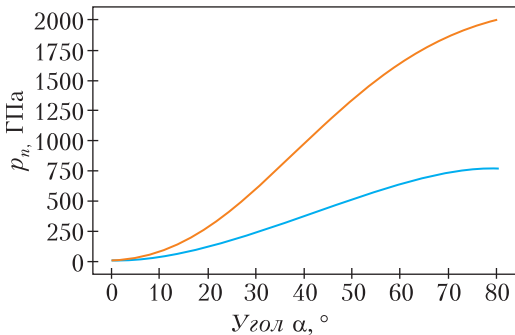


Рис. 6. Зависимости осевого напряжения в экваториальной плоскости от угла  $\alpha$ . Синяя линия построена для Земли, оранжевая – для Меркурия

представлены результаты расчетов  $p_n$  для материала сферы плотностью  $\rho = 3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$  в зависимости от угла  $\alpha$ , который связан с протяженностью МСД вдоль оси  $z$  (чем больше  $\alpha$ , тем протяженнее МСД вдоль оси  $z$ ).

Оценим теперь поперечные напряжения в материале МСД. Для этого рассмотрим небольшой элемент оболочки сферы, лежащий в плоскости, перпендикулярной оси вращения (рис. 7). На этот элемент действуют поперечная составляющая результирующей силы  $F_{\perp} = \rho \Delta h_i r_{\perp i} \theta f_i \cos \gamma_i$  и силы напряжения на торцах элемента, равные  $T_S = p_{iS} \Delta h_i$ , где  $p_{iS}$  – напряжение на торце-

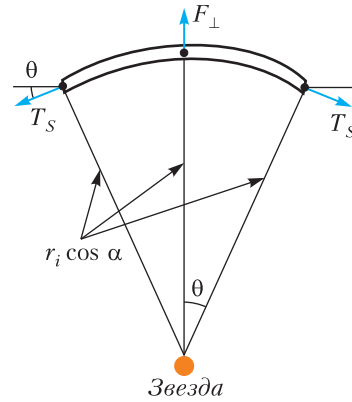


Рис. 7. Поперечное сечение элемента МСД и действующие на него силы

вой поверхности элемента. Для малых углов  $\theta$  имеем такое условие равновесия элемента:

$$2T_S \sin \theta \approx 2p_{iS} \Delta h_i \theta = \rho \Delta h_i r_{\perp i} \theta f_i \cos \gamma_i,$$

откуда следует, что

$$p_{iS} = \frac{1}{2} \rho r_{\perp i} f_i \cos \gamma_i.$$

Результаты расчетов  $p_S$  в зависимости от угла  $\alpha$  приведены на рисунке 8.

Графики на рисунках 6 и 8 показывают, что только в достаточно узком диапазоне углов  $\alpha$  напряжения оказываются по величине ниже предельных напряжений, характерных для большинства современных сверхпрочных материалов. Этот диапазон азимутальных углов в увеличенном масштабе представлен на рисунке 9. Как видно из этого рисунка, только в области углов  $\alpha$  меньше  $1,5^\circ$  для орбиты Земли расчетные напряжения в материале МСД оказываются ниже

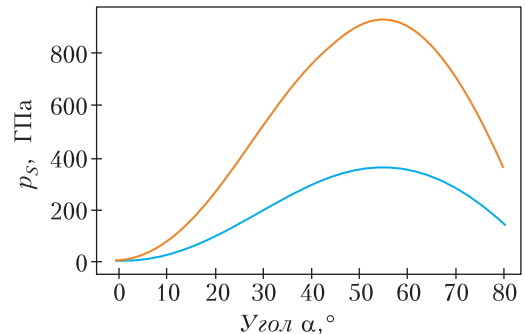


Рис. 8. Напряжения на торцевой поверхности элемента с плотностью  $3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Синяя линия построена для Земли, оранжевая – для Меркурия

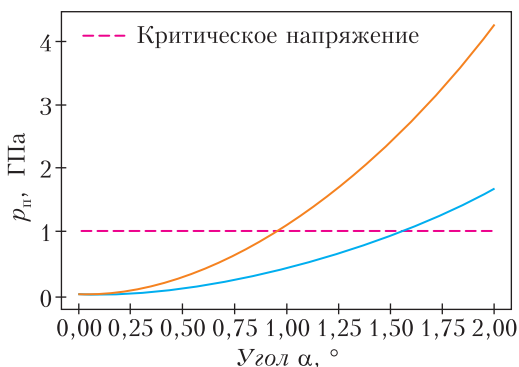


Рис. 9. Приэкваториальная область углов  $\alpha$ , в которой напряжения в материале МСД меньше предельного напряжения  $p = 1$  ГПа

предельного напряжения  $p = 1$  ГПа. Этот результат означает, что возможно создание МСД только в виде достаточно широких колец, расположенных в приэкваториальной плоскости земной орбиты. Ширина колец  $L$  ограничивается условием  $L < 2\alpha R$ . Для орбиты

Земли максимальная ширина кольца должна удовлетворять неравенству  $L < 2,6 \cdot 10^6$  км. Как видно, теоретически возможно создание космических колец в большом диапазоне ширин: от узких в тысячи и десятки тысяч километров до очень широких в миллионы километров. Такие кольца принято называть кольцами Нивена, по имени писателя Ларри Нивена, который впервые описал подобное кольцо в своем романе «Мир–Кольцо», изданной в 1970 году. Нужно отдать должное фантасту Л. Нивену, который, не будучи физиком, интуитивно увидел конструкцию принципиально реализуемого астроинженерного сооружения. В этом отношении его фантастическая идея оказалась реалистичнее идеи Ф. Дайсона, предложенной физиком.

Авторы выражают благодарность Марии Василишней, ученице 9 класса СОШ № 47 города Калининграда, за помощь в проведении численных расчетов.

## ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

# Электричество с парусами

С. ГЕРАСИМОВ

**М**ОЖНО ЛИ ПЛЫТЬ, ДУЯ В ПАРУС собственной лодки? Оказывается, это вполне возможно, если лодка намагничена, а в атмосфере течет электрический ток.

Убедиться в этом можно прежде всего экспериментально. Для этого не нужны сложное оборудование, специальная хитрая и капризная обработка экспериментальных результатов, высокое напряжение и сильные токи. Нужен обычный цилиндрический магнит, цилиндрическая чашка с медной внутренней боковой поверхностью и осью в виде тонкого медного стержня, электропроводящая жидкость (медный купорос – к примеру). В качестве источника электрической энергии достаточно взять обычный источник

постоянного тока с максимальным током в несколько ампер.

Подвесьте магнит над тонкой нитью над чашкой с электропроводящей жидкостью, в которой от края к центру течет электрический ток, – жидкость начнет вращаться (рис. 1).

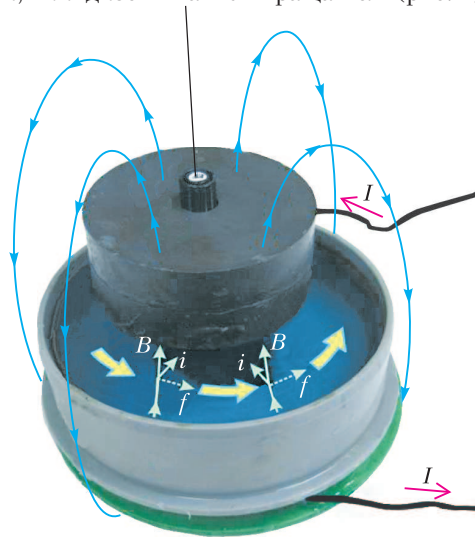


Рис. 1. Магнит над жидкостью с электрическим током

Сильнее ток – быстрее вращается жидкость. Чем ближе магнит к поверхности жидкости, тем сильнее вращение. Так и должно быть: на ток в жидкости, плотность которого  $\vec{i}$ , действует сила Ампера  $\vec{f}$ , перпендикулярная направлению тока и индукции магнитного поля  $\vec{B}$ , создаваемого магнитом. Понятно, что все остальное, включая провода внешней электрической цепи вместе с источником тока, должно вращаться в противоположном направлении. Это – следствие закона сохранения момента импульса: в замкнутой системе суммарный момент сил строго равен нулю.

Пока ничего необычного, неординарного и интересного не происходит, разве что магнит покоится, какой бы ток в жидкости и во всей электрической цепи не тек. Наверное, магнит слишком тяжел, чтобы его повернул слабый электрический ток. Впрочем, о причине, почему магнит не вращается и не должен вращаться, поговорим позже. А вот если магнит снабдить парусами (рис. 2), возникают не только вопросы, но и далеко идущие выводы. Паруса – это что-то вроде крыльчатки, изготовленной из пластмассы, электрический ток она не проводит. Такое приспособление, предварительно перевернув его вверх ногами (простите – вниз парусами), устанавливаем под магнитом. При этом расстояние от нижнего основания магнита до поверхности жидкости следует оставить неизменным.

Прежде чем включать электрический ток, можно попытаться угадать, что произойдет с жидкостью и с магнитом. (Интересуясь тем или иным явлением, так поступают всегда.)

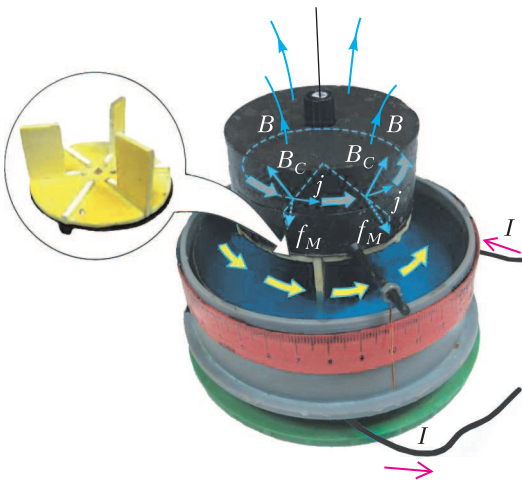


Рис. 2. Магнит с парусами в жидкости с электрическим током

Мысль первая: после включения электрического тока жидкость перестанет вращаться, магнит останется неподвижным. Но это невозможно. Вернее, возможно только в том случае, если магнит прочно прикреплен к подвесу и никакая сила не может его повернуть в ту или иную сторону. Покой магнита можно обосновать и такими аргументами. Вращающаяся жидкость обладает моментом импульса, который передается парусам. Для того чтобы заставить магнит покоиться, этот момент импульса должен быть скомпенсирован силой, действующей на паруса и на магнит, но создающей противоположно направленный момент импульса. Не было этой силы, когда у магнита не было парусов, не могут ее создать и непроводящие пластины парусов.

Мысль вторая: при включении тока магнит будет вращаться в противоположном направлении. Но не могут паруса создать магнитную силу, своим действием превышающую изменение момента импульса вращающейся жидкости. Более того, если без парусов дрейф носителей тока в жидкости происходил, вообще говоря, по спирали, то паруса его делают более прямолинейным, в наибольшей степени происходящим по радиусу. (Уменьшение неопределенности никогда не приводит к появлению неопределенных эффектов и явлений.)

Остается только одно, и реальный простейший эксперимент это подтверждает: магнит вместе с парусами вращается в ту же сторону, что и жидкость с электрическим током. Происходит следующее: магнит в электропроводящей жидкости создает вращение, которое заставляет вращаться его же вместе с парусами. Образно говоря, магнит «дует жидкостью на свои же паруса», что заставляет его двигаться вместе с «жидкостным ветром».

Явление заслуживает того, чтобы о нем поговорить подробнее, хотя сказанное выше – не мысленный эксперимент, а вполне реальное неоднократно проверенное явление. Прежде всего необходимо объяснить, почему магнит не вращается и не должен вращаться. Для того чтобы возникло вращение, либо магнит должен быть аксиально несимметричен, либо должно быть выделенное направление для воздействия. Нет никаких оснований подозревать магнит в его сильной асимметрии: при большом токе он совершает очень большое число оборотов. Поверните кювету, а она симметрична, на угол градусов

на 90, ничего не изменится: как магнит вращался, так и вращается. Можно даже ток в кювету подавать по бифилярю, т.е. проводниками с минимальным расстоянием между ними. Будет то же самое.

Можно иначе: магнитное поле, создаваемое однородно намагниченным телом, в точности совпадает с магнитным полем тела, по поверхности которого течет ток, по величине и по направлению совпадающий с молекулярным током. (Это – гипотеза Ампера.) Вектор намагниченности однородно намагниченного магнита направлен по вертикали, значит, молекулярный ток с плотностью  $\vec{j}$  является аксиальным, перпендикулярным радиусу магнита всюду на его поверхности. Как бы не было направлено магнитное поле  $\vec{B}_C$ , создаваемое внешней электрической цепью и током в жидкости, и какую бы величину оно не составляло, сила  $\vec{f}_M$  перпендикулярна направлению тока, т.е. не создает вращательный момент, действующий или не действующий на магнит. Нет вращательного момента – не должно быть и вращения, а оно есть и должно быть!

Чтобы разобраться с этим экспериментальным фактом, обратимся к модели (рис. 3), в которой магнит представлен в виде тонкого диска, намагниченного вдоль вертикальной оси, внешняя электрическая цепь вместе с источником тока выглядит как П-образный проводник с током, а участок жидкости, действующий на один из парусов, представляет собой участок тока, обозначенный  $\text{CuSO}_4$ .

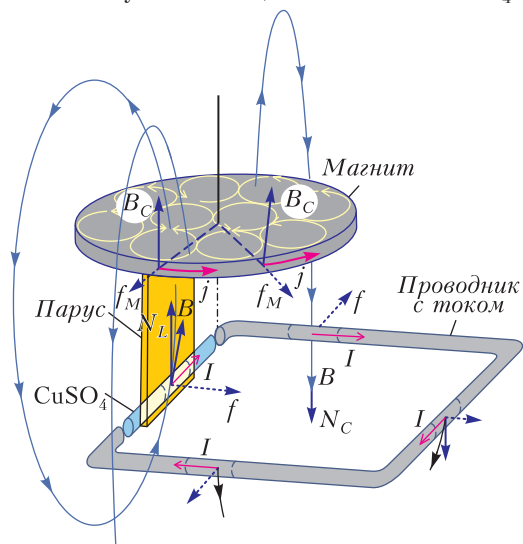


Рис. 3. Модель магнита с парусом

Поскольку диск намагничен вертикально, молекулярные токи внутри диска компенсируют друг друга; нескомпенсированным остается только ток  $j$ , «текущий» по ободу диска. Для любого направления магнитного поля  $\vec{B}_C$ , создаваемого током  $I$  в проводнике и в участке жидкости, а значит, и для любой формы проводника сила  $\vec{f}_M$  направлена вдоль радиуса диска.

Система замкнута, значит, суммарный момент сил равен нулю:  $\vec{N} = 0$ . В системе три тела: магнит с парусом, участок жидкости и П-образный проводник, следовательно, в суммарный момент сил должно входить 9 слагаемых. Магнит с парусом сам на себя не действует, жидкость сама на себя не действует, проводник сам себя не вращает – осталось 6 слагаемых. Взаимодействие токов в замкнутой цепи, включающей в себя П-образный проводник и жидкость, никакого вращения не создает – осталось 4 слагаемых. Поскольку внешняя цепь и ток в жидкости не вращают магнит с его молекулярными токами, то остаются только два слагаемых: вращательный момент  $\vec{N}_L$ , действующий со стороны магнита на жидкость, и вращательный момент  $\vec{N}_C$ , с которым магнит действует на П-образный проводник, поэтому  $\vec{N}_L + \vec{N}_C = 0$ .

Конечно, сила, с которой жидкость действует на парус, равна и противоположна силе, с которой парус действует на участок жидкости, но эти силы действуют на разные тела. Вот и получается, что вращение жидкости компенсируется поворотом электрической цепи. При этом магнит и жидкость вращаются и должны вращаться вместе и в одном направлении. Действительно, можно заставить плыть лодку, дуй в ее парус. Вот только лодка и окружающая среда должны обладать не совсем обычными свойствами.

Это еще не все. Помня о том, что смысл всех расчетов и измерений не цифра, а понимание происходящего, надо признать, что очень часто понимание появляется вслед за цифрой. Поэтому было бы хорошо измерить вращательный момент, а также экспериментально, т.е. ссылаясь на цифры, подтвердить, что магнит не вращается. Без таких измерений может показаться, что эффект пренебрежимо мал.

Если ограничиться измерениями угла поворота (рис. 4), то это достаточно просто – надо лишь тонкую нить, на которой подвешен магнит, заменить тонкой металлической



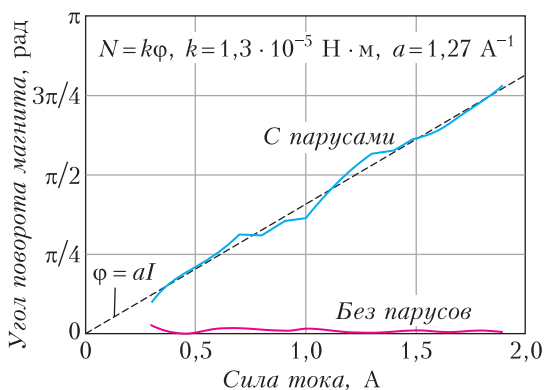


Рис. 4. Вращательный момент, угол поворота магнита и сила тока

струной. Если струна достаточно длинная, то пропорциональность величины момента сил  $N$  углу поворота  $\varphi$  не вызывает сомнений и справедлива даже для большого числа поворота магнита. Для перерасчета углов поворота в значения вращательного момента нужен коэффициент жесткости  $k$ , который можно легко найти, предварительно определив период (крутильных) колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k}}$$

где  $J$  – момент инерции магнита.

Масса паруса достаточно мала, ее при вычислении момента инерции учитывать не обязательно. Для кюветы с радиусом большого цилиндрического электрода 5 см, диаметром центрального электрода 8 мм и высотой обоих электродов 3 см, заполненной

5-процентным водным раствором  $\text{CuSO}_4$ , вращательный момент оказался неожиданно большим для магнита диаметром 6,5 см с намагниченностью  $j = 5 \cdot 10^5$  А/м, снабженного парусами, и пренебрежимо малым, если паруса по тем или иным причинам не прикрепили к магниту. Размеры парусов: высота 2,5 см, ширина 1,5 см. Небольшие крутильные колебания магнита без парусов около неизменного положения равновесия едва ли могут создать основу для сомнений. Раз угол поворота пропорционален силе тока, то разницы в том, как дрейфуют носители тока в жидкости – по спирали или по прямолинейным траекториям, нет.

При всех разумных значениях тока в цепи магнит «без ничего» не вращается, однако при тех же значениях тока магнит с парусами приходит в интенсивное вращение, причем в ту же сторону, что и жидкость с током, которую вращает этот же магнит. Нравится это нам или нет, но это так.

**Литература**

1. И.Копылов, Я.Штейберг. Шесть опытов Фарадея. – «Наука и жизнь», 1971, №10.
2. Р.Г.Сигалов. Новые исследования движущих сил магнитного поля. – Ташкент: Наука Узбекской ССР, 1965.
3. И.Кузьмин. Парадоксы постоянного магнитного поля. – «Квант», 1995, №3.
4. Э.Парселл. Электричество и магнетизм. Гл.10: Магнитные поля в веществе. – М.: Наука, 1971.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

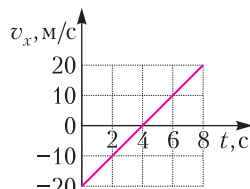
ЕГЭ по физике 2023 года

Варианты ЕГЭ 2023 года близки по структуре к вариантам прошлого года (см. «Квант», 2022, №9). Здесь приводятся задачи одного из вариантов открытого сегмента 2023 года с ответами и решениями. Решения публикуются в редакции предметной комиссии. Кроме того, здесь же приводятся несколько задач из других вариантов открытого сегмента.

Инструкцию по выполнению работы и необходимые справочные данные можно найти на сайте ФИПИ. Там же можно ознакомиться с демонстрационным вариантом 2024 года.

**Часть 1**

1. На рисунке 1 приведен график зависимости проекции скорости  $v_x$  от времени  $t$  для тела, движущегося прямолинейно вдоль оси  $x$ . Определите проекцию  $a_x$  ускорения тела.



2. Две планеты обращаются по круговым орбитам вокруг звезды. Модули сил

Рис. 1

притяжения планет к звезде одинаковы. У первой из планет радиус орбиты в шесть раз больше, чем у второй. Каково отношение  $\frac{m_1}{m_2}$  массы первой планеты к массе второй планеты?

**3.** Точно посередине между наблюдателем и скалой в дерево ударила молния. Наблюдатель услышал первый раскат грома через 1 с после вспышки молнии. Через какое время после вспышки молнии наблюдатель услышит отраженный от скалы звук?

**4.** На полу лифта расположены два одинаковых металлических бака, доверху наполненные водой (рис. 2).

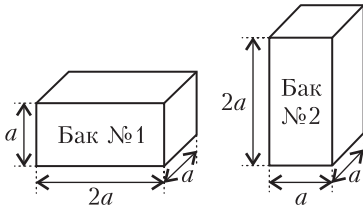


Рис. 2

Из приведенного ниже списка выберите все верные утверждения.

- 1) Первый бак действует на пол лифта с силой, в 2 раза большей, чем второй.
- 2) Первый бак оказывает на пол лифта в 2 раза меньшее давление, чем второй.
- 3) Давление воды на дно первого бака в 2 раза больше, чем на дно второго.
- 4) Силы давления воды на дно первого и второго баков одинаковы.
- 5) Если лифт начнет движение вверх с ускорением  $1 \text{ м/с}^2$ , давление на дно баков уменьшится на 10%.

**5.** На поверхности подсолнечного масла плавает деревянный шарик, частично погруженный в жидкость. Как изменятся сила Архимеда, действующая на шарик, и глубина погружения шарика, если он будет плавать в воде?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

- 1) увеличится; 2) уменьшится; 3) не изменится.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

**6.** В момент  $t = 0$  мячик бросают с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту с балкона высотой  $h$  (рис. 3). Графики А и Б (рис. 4) отображают зависимости физичес-

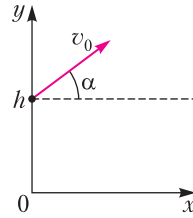


Рис. 3

ких величин, характеризующих движение мячика в процессе полета, от времени  $t$ . Установите соответствие между графиками и физическими величинами, зависимости которых от времени эти графики могут отображать.

Сопротивлением воздуха пренебречь. Потенциальная энергия мячика отсчитывается от уровня  $y = 0$ .

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами (А и Б).

**ГРАФИКИ**                      **ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ**

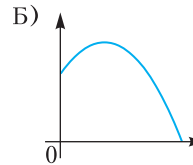
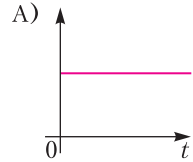


Рис. 4

- 1) кинетическая энергия мячика
- 2) потенциальная энергия мячика
- 3) проекция импульса мячика на ось  $x$
- 4) проекция импульса мячика на ось  $y$

**7.** Разреженный воздух в цилиндре переводится из состояния А в состояние В, причем его масса не изменяется. Параметры, определяющие состояния воздуха, приведены в таблице:

|             | $p, 10^5 \text{ Па}$ | $V, 10^{-3} \text{ м}^3$ | $T, \text{ К}$ |
|-------------|----------------------|--------------------------|----------------|
| Состояние А | 1,0                  | 4                        | 300            |
| Состояние В | 0,5                  |                          | 600            |

Какое число следует внести в свободную клетку таблицы?

**8.** Твердое тело массой 2 кг остывает. На рисунке 5 изображен график зависимости абсолютной температуры тела  $T$  от отданного им количества теплоты  $Q$ . Определите удельную теплоемкость вещества, из которого изготовлено тело.

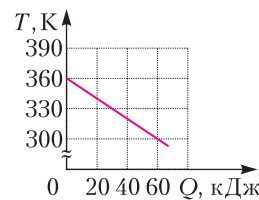


Рис. 5

9. На  $V$ - $T$ -диаграмме (рис. 6) показан процесс изменения состояния неизменной массы идеального одноатомного газа. Внешние

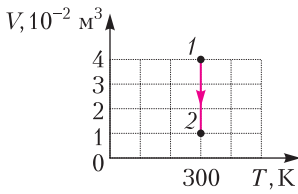


Рис. 6

силы в этом процессе совершили над газом работу, равную 5 кДж. Какое количество теплоты отдал газ в окружающую среду в этом процессе?

10. В двух сосудах одинакового объема содержатся разреженные газы. В первом сосуде находятся 2 моль гелия при температуре 127 °С, во втором сосуде находится 1 моль аргона при температуре 300 К. Выберите все верные утверждения о параметрах состояния указанных газов.

- 1) Абсолютная температура газа во втором сосуде выше, чем в первом.
- 2) Давления газов в сосудах одинаковы.
- 3) Среднеквадратичная скорость молекул газа в первом сосуде больше, чем во втором.
- 4) Концентрация газа в первом сосуде в 2 раза меньше, чем во втором.
- 5) Отношение средней кинетической энергии теплового движения молекул аргона к средней кинетической энергии теплового движения молекул гелия равно 0,75.

11. В калориметр со льдом, имеющим температуру 0 °С, добавили воду при комнатной температуре. Как изменятся в результате установления теплового равновесия удельная теплоемкость воды и масса льда в калориметре?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

- 1) увеличится; 2) уменьшится; 3) не изменится.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

12. На графике (рис. 7) показана зависимость силы тока  $I$  в проводнике от времени  $t$ . Определите заряд, прошедший по проводнику за  $\Delta t = 12$  с с момента начала отсчета времени.

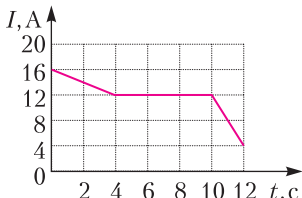


Рис. 7

13. Сила тока в катушке ин-

дуктивностью 0,2 Гн за 0,05 с равномерно увеличилась от 2 А до 5 А. Чему равен модуль ЭДС самоиндукции в катушке?

14. Луч света падает на плоское зеркало (рис. 8). Угол падения равен 20°. Определите угол  $\gamma$  между падающим и отраженным лучами.

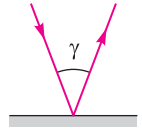


Рис. 8

15. В идеальном колебательном контуре, состоящем из конденсатора и катушки индуктивности, происходят свободные электромагнитные колебания. В таблице показано, как изменялся заряд одной из обкладок конденсатора в колебательном контуре с течением времени:

|                 |   |      |   |       |    |       |   |      |   |      |
|-----------------|---|------|---|-------|----|-------|---|------|---|------|
| $t, 10^{-6}$ с  | 0 | 1    | 2 | 3     | 4  | 5     | 6 | 7    | 8 | 9    |
| $q, 10^{-9}$ Кл | 2 | 1,41 | 0 | -1,41 | -2 | -1,41 | 0 | 1,41 | 2 | 1,41 |

Выберите все верные утверждения о процессе, происходящем в контуре.

- 1) Амплитуда колебаний заряда обкладки равна  $4 \cdot 10^{-9}$  Кл.
- 2) Период колебаний равен  $16 \cdot 10^{-6}$  с.
- 3) В момент  $t = 2 \cdot 10^{-6}$  с модуль силы тока в контуре максимален.
- 4) В момент  $t = 4 \cdot 10^{-6}$  с сила тока в контуре равна 0.
- 5) В момент  $t = 6 \cdot 10^{-6}$  с энергия конденсатора максимальна.

16. Пространство между пластинами заряженного плоского воздушного конденсатора, отключенного от источника напряжения, полностью заполняют диэлектриком. Как изменяются при этом заряд конденсатора и его емкость?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

- 1) увеличивается; 2) уменьшается; 3) не изменяется.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

17. Установите соответствие между формулами для расчета физических величин в цепях постоянного тока и названиями этих величин. В формулах использованы обозначения:  $R$  – сопротивление резистора,  $W$  – мощность тока в резисторе,  $U$  – напряжение на резисторе.

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.





| № сосуда | Объем сосуда, л | Температура газа в сосуде, К | Газ в сосуде |
|----------|-----------------|------------------------------|--------------|
| 1        | 6               | 300                          | аргон        |
| 2        | 5               | 350                          | неон         |
| 3        | 4               | 320                          | аргон        |
| 4        | 4               | 270                          | аргон        |
| 5        | 4               | 320                          | неон         |

димом на опыте обнаружить зависимость давления газа, находящегося в сосуде, от молярной массы газа. У него имеются пять различных сосудов с манометрами. Сосуды наполнены различными газами одинаковой массы при различной температуре (см. таблицу). Какие **два** сосуда необходимо взять ученику, чтобы провести данное исследование? Запишите номера выбранных сосудов.

**Часть 2**

**24.** В опыте по изучению фотоэффекта катод освещается зеленым светом, в результате чего в цепи возникает ток (рис. 12,а). Зависимость показаний амперметра  $I$  от на-

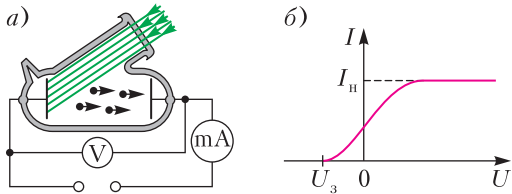


Рис. 12  
пряжения  $U$  между анодом и катодом приведена на рисунке 12,б. Используя законы фотоэффекта и предполагая, что отношение числа фотоэлектронов к числу поглощенных фотонов не зависит от частоты света, объясните, как изменится представленная зависимость  $I(U)$ , если освещать катод фиолетовым светом, оставив мощность поглощенного катодом света неизменной.

**25.** Велосипедист из состояния покоя начинает прямолинейное равноускоренное движение по велодорожке в момент, когда мимо него с постоянной скоростью пробегает человек. Скорость велосипедиста в момент, когда он догнал бегуна, равна 4 м/с. Какова скорость бегуна в этот момент?

**26.** Тонкая линза, оптическая сила которой равна 4 дптр, дает действительное увеличенное в 5 раз изображение предмета. На каком расстоянии от линзы находится предмет? Постройте изображение предмета в линзе.

**27.** В цилиндр объемом  $0,5 \text{ м}^3$  закачивается воздух со скоростью  $0,002 \text{ кг/с}$ . В верхнем торце цилиндра (рис. 13) есть отверстие,

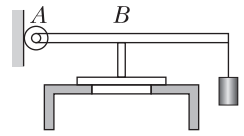


Рис. 13

закрытое предохранительным клапаном. Клапан удерживается в закрытом состоянии стержнем длиной  $0,5 \text{ м}$ , который может свободно поворачиваться вокруг оси в точке А. К свободному концу стержня подвешен груз массой  $2 \text{ кг}$ . Определите момент времени, когда клапан откроется, если в начальный момент времени давление воздуха в цилиндре было равно атмосферному. Площадь закрытого клапаном отверстия  $5 \text{ см}^2$ , расстояние  $AB$  равно  $0,1 \text{ м}$ . Температура воздуха в цилиндре и снаружи не меняется и равна  $300 \text{ К}$ . Стержень и клапан считать невесомыми.

**28.** В электрической схеме, показанной на рисунке 14, ключ  $K$  длительное время замкнут. ЭДС батарейки  $\mathcal{E} = 12 \text{ В}$ , отношение внутреннего сопротивления батарейки к сопротивлению резистора  $k = \frac{r}{R} = 0,2$ . После

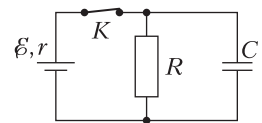


Рис. 14

размыкания ключа  $K$  в результате разряда конденсатора на резисторе выделяется количество теплоты  $Q = 10 \text{ мкДж}$ . Найдите заряд  $q$  конденсатора до размыкания ключа.

**29.** Ион с зарядом  $q = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$  и массой  $m = 10^{-25} \text{ кг}$  проходит ускоряющую разность потенциалов и после этого попадает в однородное магнитное поле с индукцией  $B = 0,5 \text{ Тл}$ , в котором движется по окружности радиусом  $R$ . Определите  $R$ . Считать, что установка находится в вакууме. Силой тяжести и скоростью иона до прохождения ускоряющей разности потенциалов пренебречь.

**30.** Шар массой  $M = 1 \text{ кг}$ , подвешенный на нити длиной  $l = 90 \text{ см}$ , отводят от положения равновесия на угол  $\alpha = 60^\circ$  и отпускают (рис. 15). В момент прохождения шара через положение равновесия в него попадает пуля, летящая навстречу шару, которая пробивает его и продолжает двигаться горизонтально. Определите модуль изменения импульса

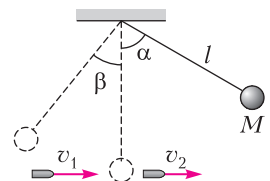


Рис. 15

пули в результате попадания в шар, если он, продолжая движение в прежнем направлении, отклоняется на угол  $\beta = 39^\circ$ . (Массу шара считать неизменной, а диаметр шара – пренебрежимо малым по сравнению с длиной нити;  $\cos 39^\circ = \frac{7}{9}$ .) Сопротивлением воздуха пренебречь. Обоснуйте применимость законов, используемых для решения задачи.

### Избранные задачи открытого сегмента

**1 (24).** Линзу удерживают на расстоянии 3 см от тетрадного листа с клетками, на котором нарисованы направленные в одну сторону одинаковые стрелки. (На фотографии на рисунке 16 показано изображение

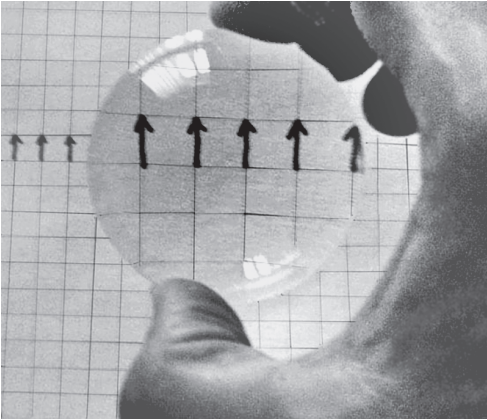


Рис. 16

стрелок, которое видит и глаз человека.) Укажите тип линзы (собирающая или рассеивающая) и вычислите, используя фотографию, фокусное расстояние этой линзы. Ответ объясните, опираясь на явления и законы оптики. Линзу при этом считать тонкой.

**2 (28).** По горизонтальным шероховатым рельсам с пренебрежимо малым электрическим сопротивлением могут скользить два одинаковых стержня сопротивлением (между точками касания)  $R = 0,1$  Ом каждый (рис. 17). Расстояние между рельсами  $l = 10$  см. Рельсы со стержнями находятся в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией  $B = 1$  Тл. Если на первый стержень действует горизонтальная сила  $F = 0,1$  Н,

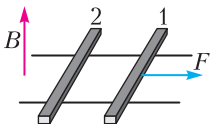


Рис. 17

направленная вдоль рельсов, оба стержня движутся поступательно равномерно с разными скоростями. Какова скорость

движения первого стержня относительно второго? Самоиндукцией контура пренебречь.

**3 (24).** Льдинка находится в яме с гладкими стенками, в которой она может двигаться практически без трения. На рисунке 18 при-

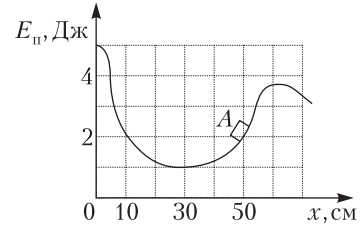


Рис. 18

веден график зависимости потенциальной энергии льдинки от ее координаты в яме. В некоторый момент времени льдинка находилась в точке А с координатой  $x = 50$  см и двигалась влево, имея кинетическую энергию, равную 2 Дж. Сможет ли льдинка выскользнуть из ямы? Ответ поясните, указав, какие физические закономерности вы использовали для объяснения.

**4 (30).** Однородный тонкий стержень массой  $m$  одним концом шарнирно прикреплен к потолку, а другим концом опирается на массивную горизонтальную доску, образуя с ней угол  $\alpha = 30^\circ$  (рис. 19). Под действием

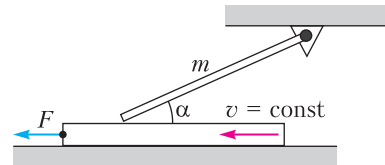


Рис. 19

горизонтальной силы  $\vec{F}$  доска движется поступательно влево с постоянной скоростью. Стержень при этом неподвижен. Найдите  $m$ , если  $F = 2$  Н, а коэффициент трения стержня по доске  $\mu = 0,2$ . Сделайте рисунок с указанием сил, действующих на стержень и доску. Трением доски по опоре и трением в шарнире пренебречь. Обоснуйте применимость законов, используемых для решения задачи.

Публикацию подготовили  
М. Демидова, А. Черноуцан

# Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

## ПОЛИТЕХНИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Политехническая олимпиада школьников в 2022/23 учебном году проводилась по четырем предметам: математике, физике, химии и информатике. Отборочный тур проходил заочно с применением интернет-технологий. Участники выполняли задания тура на официальном сайте олимпиады. Победители и призеры отборочного тура были приглашены к участию в заключительном туре, который по математике, физике и химии прошел в Санкт-Петербургском политехническом университете в форме очного письменного испытания. Заключительный тур по информатике проводился дистанционно с применением интернет-технологий.

Ниже приводятся задачи обоих туров олимпиады по математике, физике и информатике.

Информацию об олимпиаде 2023/24 учебного года можно получить на сайтах СПбПУ: [www.spbstu.ru](http://www.spbstu.ru), [school.spbstu.ru](http://school.spbstu.ru) и [olymp.spbstu.ru](http://olymp.spbstu.ru).

### Математика

#### Отборочный тур

1. Сколько решений имеет уравнение  $\cos x - \cos 4x \sin x = \sqrt{2}$  на промежутке  $[0; 5\pi]$ ?
2. Найдите  $4 \sin^2 15^\circ + \sqrt{3}$ . Убедитесь, что это число целое.
3. Какое наибольшее значение может принимать наибольший общий делитель чисел  $3n + 2$  и  $n + 4$ , где  $n$  – натуральное число?
4. В основании пирамиды объема 16 лежит прямоугольник, а боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом  $30^\circ$ . Найдите синус угла между диагоналями основания, если радиус описанного около пирамиды шара равен 8. В ответе укажите число, обратное найденному синусу.
5. В арифметической прогрессии  $\{a_n\}$  сумма всех членов с шестого до десятого равна

6. Найдите сумму первых пятнадцати членов прогрессии.

6. Найдите наименьшее значение суммы длин трех сторон прямоугольника, площадь которого равна 32.

7. Убедитесь в том, что множество значений функции  $y = 9 \cos 2x + \frac{36}{4 - \sin^2 x}$  есть отрезок. В ответе укажите длину этого отрезка.

8. Вычислите  $3 \log_2^2 10 - 3 \log_2 5 \log_2 20$ .

9. Вычислите  $3 \cos^2 \left( \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ .

10. Автобус отправляется через каждые два часа с 6:00 до 24:00 включительно. Стоянка автобуса 15 мин. Пассажир может прибыть на остановку в любое время суток с одинаковой вероятностью. С какой вероятностью время ожидания посадки  $t \leq 30$  мин? В ответе укажите вероятность, умноженную на 32.

#### Заключительный тур

1. Натуральное число дает остаток 21 при делении на 24 и остаток 5 при делении на 40. Найдите остаток от деления этого числа на 120.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 7, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{5}. \end{cases}$$

3. Найдите корни уравнения

$$\frac{\sin^6 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^6 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2},$$

принадлежащие отрезку  $[0; \pi]$ .

4. Решите уравнение

$$(3 + 2\sqrt{2})^x + (3 - 2\sqrt{2})^x = 34.$$

5. Партия компьютеров была распределена между школами трех районов Санкт-Петербурга в отношении 5:4:2. Если бы распределение этой партии было проведено в отношении 10:7:3, то один из районов получил бы на 10 компьютеров больше. Каков размер партии?

6. В комнате 5 на 8 настилают пол. Настил осуществляется панелями двух типов: прямоугольниками  $2 \times 1$  и квадратами  $2 \times 2$  без углового квадрата  $1 \times 1$ . Какое наименьшее число панелей потребуется для настила пола?

7. В прямоугольном треугольнике две окружности радиуса 3 касаются друг друга и одна из них касается двух катетов, а другая – катета и гипотенузы. Найдите длины катетов треугольника, если радиус вписанной окружности равен 4.

8. В правильной треугольной усеченной пирамиде длины сторон оснований равны 11 и 2, а диагонали боковых граней, не имеющие общих точек, взаимно перпендикулярны. Найдите высоту пирамиды.

9. Найдите многочлен  $p(x)$  с единичным коэффициентом при старшей степени, если

$$p\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \frac{8p(x)}{(x+1)^4} \text{ при всех } x \neq -1.$$

10. Решите уравнение

$$2 \arccos(\sin \pi x) = \pi \cos(\arcsin(x+1)).$$

## Физика

### Отборочный тур

Каждая задача оценивалась в 10 баллов.

1. Мистер и миссис Бобёр решили к коронации подлатать плотину бобров, стоящую на Великой реке, что протекает по Нарнии. Бревна для ремонта пришлось брать в самой западной части роци Фонарного столба выше по течению на расстоянии 16 км от запруды. Бобры заметили, что в роцу они плывут  $t_1 = 5,9$  ч, а обратно  $-t_2 = 1,2$  ч. Сколько времени будет плыть бревно от роци до плотины?

2. Два квадрокоптера летят на разной высоте и по окружностям разного радиуса, но все время находятся на одной прямой относительно оператора, стоящего на земле. Оператор ошибся, и один из них начал ускоряться. В момент времени, когда оба коптера снова оказались на одной прямой с оператором, скорости их стали одинаковыми. При этом коптер, который двигался равноускоренно, сделал 9 оборотов. По окружности какого радиуса летал ускоряющийся коптер, если второй летал по окружности радиусом  $r_2 = 25$  м?

3. По приказу капитана Врунгеля Фукс залез на грот-мачту «Беды», чтобы поставить парус. Под порывами ветра яхта начала раскачиваться. Фукс почувствовал, что на

вершине мачты при максимальном отклонении  $x_m = 59$  см он испытывает ускорение  $a = 0,31$  м/с<sup>2</sup>. С каким периодом раскачивалась «Беда»?

4. Смешарики изучали законы плавания тел. Пин принес сосуд с жидкостью, а Лосяш опустил в него сплошной шар, состоящий из нескольких материалов. Половина шара была деревянной,  $\rho_d = 480$  кг/м<sup>3</sup>, четверть – парафиновой,  $\rho_p = 910$  кг/м<sup>3</sup>, а оставшаяся часть была из пробки,  $\rho_{пр} = 160$  кг/м<sup>3</sup>. Определите, с каким ускорением будет всплывать шар у экспериментаторов, если плотность жидкости  $\rho_ж = 940$  кг/м<sup>3</sup>. Силой сопротивления среды пренебречь.

5. В подарок богатырю Добрыне Никитичу мастера из Златоуста выковали меч массой  $m = 1,45$  кг. Для закалки меч, нагретый до высокой температуры  $t_0 = 817$  °С, опустили в корыто с водой. Масса воды в корыте  $m_1 = 41$  кг, начальная температура воды  $t_1 = 4$  °С, масса испарившейся в результате этого воды  $m_2 = 64$  г. Найдите температуру воды в деревянном корыте (в °С), когда меч остынет? Потерей тепла на нагревание окружающего воздуха и корыта пренебречь. Удельная теплота парообразования воды  $r = 2260$  кДж/кг, удельная теплоемкость воды  $c_v = 4,2$  кДж/(кг · К), средняя удельная теплоемкость стали в этом диапазоне температур  $c = 0,657$  кДж/(кг · К).

6. Один моль гелия совершает циклический процесс, состоящий из изобары, адиабаты и изотермы, причем изотермический процесс происходит при минимальной температуре. КПД этого цикла равен 17%. Определите работу внешних сил над газом в изотермическом процессе, если объем в изобарическом процессе изменяется в 2,9 раза, а минимальная температура в цикле равна  $T_{\min} = 283$  К.

7. Четыре конденсатора емкостями  $C_1 = 2$  мкФ,  $C_2 = 2$  мкФ,  $C_3 = 4$  мкФ,  $C_4 = 2$  мкФ соединены в цепь, как показано на рисунке 1, и подключены к источнику постоянного напряжения  $U_0$ . Разность потенциалов на обкладках четвертого конденсатора равна  $U_4 = 100$  В. Определите напряжение источника.

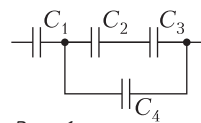


Рис. 1

8. Фиксикам и ДимДимычу необходимо было определить плотность материала металлического стержня, входящего в установку, изображенную на рисунке 2. В ней стержень, прикрепленный к двум упругим непроводящим подвесам, находился в равновесии в горизонтальном однородном магнитном поле.

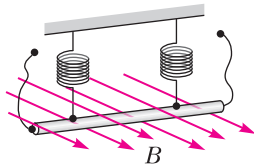


Рис. 2

Друзья узнали, что если изменить направление протекания тока в стержне на противоположное, то величина удлинения подвесов изменится с  $\Delta l_1 = 2,8$  см до  $l_2 = 0,8$  см. Чему равна плотность материала стержня, если коэффициент жесткости каждого из подвесов  $k = 15$  Н/м, диаметр стержня, измеренный микрометром,  $d = 5,65$  мм, а его длина  $L = 28,3$  см?

9. Школьники из кружка юных физиков, узнав о существовании магнитного поля Земли, решили проверить и измерить его. Они взяли мышеловку (рис. 3), сделали неболь-

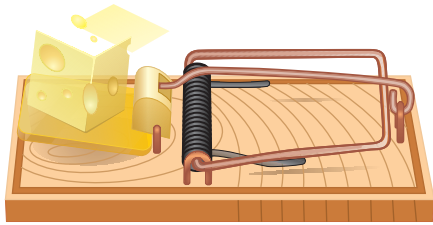


Рис. 3

шой пропил на нижнем ребре рамки мышеловки, подключили в разрыв высокоточный гальванометр. Отпуская рычаг мышеловки, школьники измеряли среднюю величину тока, протекающего через гальванометр, а также промежуток времени срабатывания мышеловки. Они получили следующие результаты:  $I = 0,25$  мкА,  $\Delta t = 90$  мс. Чему, по результатам эксперимента, равна вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли? Общее сопротивление рамки мышеловки и гальванометра  $R = 19,3$  Ом, рамка мышеловки представляет собой прямоугольник со сторонами  $a = 4,1$  см и  $b = 9,8$  см. Заметим, что ни одна мышка в ходе эксперимента не пострадала.

10. Свеча установлена на равных расстояниях от двух зеркал, плоскости которых пересекаются под углом  $\alpha = 37^\circ$  (рис. 4). Наиболее яркие отражения свечи находятся



Рис. 4

на расстоянии  $l = 60$  см друг от друга. Найдите расстояние от свечи до линии пересечения зеркал.

### Заключительный тур

1. Два мальчика перекидывают мяч, ударяя его ногами, через открытый мусорный контейнер. Высота контейнера 1,75 м, ширина 2,5 м. На каком максимальном расстоянии от стен контейнера могут находиться мальчики, если скорость мяча в момент удара равна 10 м/с? Сопротивлением воздуха пренебречь. (20 баллов)

2. В воде плавает цилиндрическое однородное тело с круглым отверстием посередине (рис. 5). Отверстие доверху заполняют оливковым маслом, при этом масло занимает  $3/4$  объема отверстия.

Чему равна плотность материала тела? Плотность воды  $1000$  кг/м<sup>3</sup>, плотность масла  $920$  кг/м<sup>3</sup>. (15 баллов)

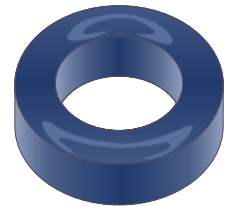


Рис. 5

3. Центры трех упругих шаров лежат на одной прямой. Первому шару массой  $m = 100$  г сообщают некоторую скорость, после чего он сталкивается со вторым шаром, затем второй шар сталкивается с третьим шаром массой  $3m$ . При каком значении массы второго шара скорость третьего будет максимальной? (20 баллов)

4. Для замораживания выловленной рыбы иногда используется льдосолевое охлаждение: при смешивании поваренной соли и льда лед плавится, отбирая тепло у замораживаемой рыбы. Раствор с самой низкой температурой замерзания, равной  $-21,2$  °С, образуется, когда соотношение масс соли и льда равно 3:10. Какую температуру будет



иметь замороженная треска, если ее поместили в такую смесь, приготовленную из расчета 1 кг льда при  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  на 1 кг трески той же температуры? Теплоемкость солевого раствора принять равной  $3,3\text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{K})$ , теплоту плавления льда при  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  – равной  $330\text{ кДж}/(\text{кг})$ . Количество теплоты, которое требуется отобрать у охлажденной до  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  трески, чтобы заморозить ее до температуры  $t$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) в диапазоне  $-20\text{ }^{\circ}\text{C} < t < -5\text{ }^{\circ}\text{C}$ , описывается формулой  $q = -0,16t^2 - 7,9t + 185\text{ кДж}/\text{кг}$ . Теплообменом с окружающей средой пренебречь. (15 баллов)

5. Контур из медного провода сечением  $1,5\text{ мм}^2$  имеет форму квадрата со стороной 10 см и расположен в однородном магнитном

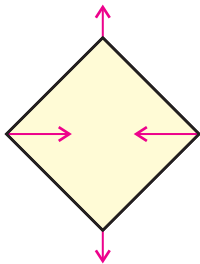


Рис. 6

поле с индукцией  $0,4\text{ Тл}$  перпендикулярно линиям индукции. Контур стали деформировать (см. стрелки на рисунке 6) так, что площадь, ограниченная контуром, равномерно уменьшается вдвое за каждую секунду. Какое количество теплоты выделится в проводнике за все время деформации? Удельное сопротивление меди  $16\text{ нОм} \cdot \text{м}$ . (15 баллов)

6. Когда утром Ксения Петровна собирается на работу, она, делая макияж, держит зеркало перед лицом на расстоянии 20 см. А какой оптической силы очки лежат у Ксении Петровны в сумке? (15 баллов)

### Информатика

Оба тура олимпиады по информатике проходили в компьютерном формате, причем второй – в виде олимпиады по спортивному программированию. По этой причине в публикацию вошли не все задачи первого тура, а только те, которые не связаны с загружаемыми файлами. К задачам заключительного тура ответы не приводятся, проверить решения можно на сайте <http://contester.avalon.ru:23501/>, турнир «Политехническая олимпиада по информатике 2022-23: заключительный этап».

### Отборочный тур

1. Профессор Кругликов и доцент Столбова вместе принимали экзамен по альтернативной биологии в трех студенческих группах. Данные об общем количестве двоек,

троек, четверок и пятерок в каждой группе были внесены в единую таблицу. Затем Кругликов и Столбова, независимо друг от друга, составили по одним и тем же данным диаграммы. Столбова делала гистограммы и располагала их в порядке номеров групп. А Кругликов, естественно, делал круговые диаграммы, располагая их в порядке дат экзамена. На рисунке 7 представлены получив-

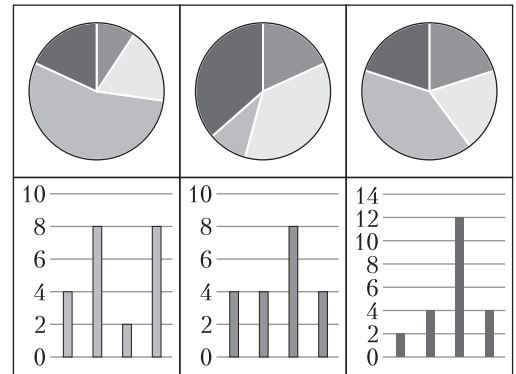


Рис. 7

шиеся у преподавателей диаграммы. Установите соответствие между круговыми диаграммами и построенными по тем же данным гистограммами.

2. На отборочный тур турнира по игре в «Балду» заявили  $N$  игроков ( $N$  четно). Поскольку игра высокоинтеллектуальная, играющих в нее немного, все всех знают, известен рейтинг каждого участника (целое неотрицательное число). Участников упорядочили по невозрастанию рейтинга и разбили на пары: 1-й играет со 2-м, 3-й с 4-м и т.д. Борца за справедливость Фейрплеев захотел выяснить, сколько на турнире пар, в которых соперники имеют неодинаковый рейтинг, и запросил у организаторов данные об участниках. Сославшись на неприкосновенность персональных данных, организаторы прислали Фейрплееву только упорядоченный массив рейтингов  $R$ . Продвинутый Фейрплеев написал программу (рис. 8) для подсчета пар, в которых рейтинги не равны (на псевдокоде – а то вдруг не все разговаривают на родном для Фейрплеева C++). Выяснилось, что программа работает некорректно. Вам предстоит найти ошибку и исправить ее, заменив лишь один символ. В ответе укажите через пробел номер строки с ошибкой, заменяемый символ и символ, на который его следует заменить. Например, если в 13-й строке надо заменить  $A$  на  $Y$ , в поле ответа следует ввести «13 A Y».

|    |  |
|----|--|
| 1  | $C := 0$                                 |
| 2  | $K := 1$                                 |
| 3  | <b>Пока</b> $K < N$ <b>НЦ</b>            |
| 4  | <b>Если</b> $R[K] \neq R[K+1]$ <b>То</b> |
| 5  | $C := C + 1$                             |
| 6  | $K := K + 2$                             |
| 7  | <b>Иначе</b>                             |
| 8  | $K := K + 1$                             |
| 9  | <b>Всё</b>                               |
| 10 | <b>КЦ</b>                                |
| 11 | <b>Вывод</b> $C$                         |

Рис. 8

3. Задумано натуральное число из диапазона от 22 до 37 включительно. Ниже приведены высказывания о задуманном числе (они не связаны между собой и могут относиться к разным числам). Определите количество (в битах) содержащейся в каждом из них информации о задуманном числе.

А. При представлении то ли в пятеричной, то ли в шестеричной системе число на одну цифру длиннее предыдущего.

В. В шестеричном представлении числа есть цифра 3.

С. Число является палиндромом ровно в одной из систем счисления с основаниями 2, 5, 6.

Д. В двух системах счисления из систем с основаниями 2, 5 и 6 задуманное число состоит из одной и той же цифры, но в разных количествах.

4. Буся и Дуся, знакомые участникам предыдущих олимпиад, исследуют поведение виртуальных монстров в компьютерной игре. Программа распознает тип монстра – Абоба, Бублик, Вявка, Гыгык, Долдон, Елель, Ёшкинкот и Зая – и записывает его код в файл. Когда программа уже была готова, а время еще оставалось, Буся и Дуся решили уменьшить объем файла с данными о распознанных монстрах, применив побитовое кодирование. Дуся, не мудрствуя лукаво, использовала равномерный код с минимальной возможной длиной кодового слова. А Буся решила применить неравномерный код, воспользовавшись тем, что частота появления монстров разная. Путем визуальных наблюдений Буся определила, что примерно половина всех монстров – это Ёшкинкоты, четверть – Заи. Вяки и Бублики вместе составили примерно 1/8 от наблюдавшихся монстров, ну а остальная мелочь появлялась

редко и примерно в одинаковых количествах. Буся построила систему кодов так, что коды у более частых монстров были короче, чем у более редких, и у монстров с одинаковой частотой длина кодов одинакова. На сколько байтов файл с данными о 40000 монстров в кодировке Буся короче, чем файл с этими же данными в кодировке Дуся? В качестве ответа введите число (если все сделали верно, оно получится целым).

5. Профессор Злов любит двойки. Но чтобы их было не очень много. Поэтому из многозначных чисел ему нравятся те, в которых ровно две цифры 2. К примеру, 70241725. Студент Банана из очень жаркой страны любит двугорбых верблюдов. Поэтому ему нравятся числа, у последовательности цифр которых ровно два локальных максимума – цифр, которые строго больше предшествующей и последующей (первая и последняя – не в счет). Например, Банане нравится число 2583541. А аспирантка Юля любит всяческие редкости – например, натуральные числа, у которых ровно пять различных делителей. В ответ на просьбу назвать такое число Юля загадочно улыбнулась. Для будущих первокурсников Политеха приготовили зачетные книжки с номерами от 1874000 до 1875678 включительно. Сколько номеров зачеток понравились бы Злову, сколько Банане и сколько Юле?

6. На одном из компьютеров локальной сети расположен файл размером  $V$  Мб, который надо растраскировать на  $N$  других компьютеров сети. Передача осуществляется пакетами по  $P$  Мб, передача пакета длится  $T$  секунд. Скачанный пакет становится доступным для скачивания с других компьютеров, при этом компьютер-источник может одновременно выполнять и прием и передачу данных, но принимается лишь один пакет, передается также только один пакет и только одному абоненту.

Предположим, имеется файл объемом 50 Мб, который надо передать на 3 компьютера пачками по 20 Мб, передача пачки длится 1 секунду. Файл будет разбит на 3 пакета, 1-й пакет передается 1-му абоненту за 1-ю секунду. На 2-й секунде 1-й компьютер скачивает 2-й пакет с первоисточника и одновременно передает скачанный первый пакет на 2-й компьютер. Продолжая моделировать процесс, увидим, что передача данных в этой ситуации заняла 5 секунд (а не 9, как было бы при копировании файла только с первоисточника). Сколько секунд займет

передача данных при  $V = 777$ ,  $P = 200$ ,  $N = 9$ ,  $T = 10$ ? Сколько секунд займет передача данных при  $V = 777$ ,  $P = 10$ ,  $N = 19$ ,  $T = 1$ ?

**7.** Одна виртуальная цивилизация использует для записи чисел забавную систему счисления, основанную на десятичной, но всего с двумя цифрами: 0 и 1. Число записывается как сумма слагаемых, состоящих только из единиц и нулей и идущих в порядке невозрастания, при этом число слагаемых минимальное из всех возможных. При этом для многих чисел возможны несколько представлений: например, 2023 можно представить и как  $1011 + 1011 + 1$ , и как  $1011 + 1001 + 11$ . Сколькими способами можно записать число 4233?

### Заключительный тур

#### 1. Иванов, Петров, Сидоров и НИР

Студенты Иванов, Петров и Сидоров должны срочно обработать результаты эксперимента НИР (научно-исследовательская работа). Всего требуется выполнить расчеты по  $N$  точкам. Иванов просчитывает точку за  $A$  минут, Петров за  $B$ , Сидоров за  $C$  минут. Начали работать они одновременно. Разработайте программу, которая по этим данным определяет, сколько минут займут расчеты.

**Входные данные.** Натуральные числа  $N$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  в одной строке, разделенные пробелами. Все числа не больше тысячи.

**Выходные данные.** Одно натуральное число – длительность выполнения расчетов в минутах.

#### 2. Гуманный Модулев и произведение цифр

Модулев, обучавший первокурсников высшей математике, был сравнительно добрым преподавателем. Он полагал, что знание таблицы умножения и наличие логического мышления и воображения – достаточное условие для того, чтобы не выгонять первокурсника в первую же сессию (можно же потом во вторую сессию отчислить, если не прогрессирует). Заваливающим экзамен студентам Модулев задавал вопрос типа такого:

– Что общего у чисел 2922, 1249, 833, 23232?

Если студент отвечал, что у всех этих чисел произведение цифр равно 72, Модулев задавал второй вопрос:

– А какое наименьшее натуральное число с таким произведением цифр?

За верный ответ Модулев вписывал в зачетку «удовлетворительно» и студент оставался студентом еще на семестр. Но Модулеву требовались тестовые данные – он не любил повторяться. Разработайте программу, которая получает на вход число  $N$  и выводит наименьшее натуральное число, произведение цифр которого равно  $N$ . Если такого числа нет, программа должна вывести  $-1$ .

**Входные данные.** Натуральное число  $N$ , не превосходящее миллиард.

**Выходные данные.** Целое число – наименьшее натуральное число с произведением цифр  $N$  или  $-1$ , если такое число не существует.

#### 3. Том Сойер

– Том! Тооом! Иди сюда, бездельник! Переоденься-ка во что-нибудь погрязнее... Впрочем, куда уж грязнее... Вот забор. Вот банки с краской, с прошлого раза остались. Забор надо покрасить. Но не как попало, а так, чтобы никакие 2 соседние доски забора не были покрашены в одинаковый цвет.

– Зачем так сложно, тетя Полли?

– Это красиво, Том! И модно: вон посмотри, как переокрасила свой забор Мэри Брайт.

– Тетя Полли, а можно переокрасить не все доски, а только некоторые? Так получится быстрее, и Мэри успеет лопнуть от зависти еще до заката!

Итак, у Тома есть банки с краской  $K$  разных цветов. Так как когда-то давно забор красили из этих же банок, на заборе могут встречаться только имеющиеся цвета. Какое минимальное количество досок придется переокрасить Тому?

**Входные данные.** В первой строке – два целых числа  $N$  и  $K$  ( $1 \leq N \leq 10000$ ,  $2 \leq K \leq 26$ ). Вторая строка состоит из  $N$  букв латинского алфавита. Каждая буква обозначает отдельный цвет, «a» – первый цвет, «b» – второй и так далее. В строке используются только первые  $K$  букв латинского алфавита. Каждая буква обозначает исходный цвет соответствующей доски в заборе.

**Выходные данные.** Натуральное число – искомое число перекрашиваний.

#### 4. Мощная площадка

Дачник Дудкин подготовил к мощению плиткой квадратную площадку. Сторона квадрата –  $K$  плиток. У Дудкина в сарае  $P$  видов плитки (одинакового размера, но разного цвета). Замостить двор он решил узором из концентрических квадратов, по периметру плитки типа 1, по периметру оставшейся

части – типа 2, ..., типа Р, типа 1 и т.д. Вот, к примеру, как выглядела бы площадка размером 7 на 7 при мощении 3 типами плитки:

```
1111111
1222221
1233321
1231321
1233321
1222221
1111111
```

Мостить площадку будет бригада наемных работников, пока сам Дудкин будет отсутствовать. Для них нужно заранее подготовить плитку. Разработайте программу, которая определяет количество плиток каждого типа, нужное для мощения площадки.

**Входные данные.** В первой строке натуральное число  $K$  – сторона квадрата. Оно не превышает 1000. Во второй строке натуральное число  $P$ , не меньше 2, не больше 9, – количество типов плиток.

**Выходные данные.** Р целых неотрицательных чисел в одной строке через пробел – количества плиток типов 1, 2, ..., Р, необходимые для мощения площадки.

### 5. Робот ДваБайта

Студент Иванов из подручных материалов соорудил робота, способного бесконечно перемещаться по координатной плоскости в соответствии с заданной программой. Программа робота состоит из двух байтов, А и В, все остальное реализовано аппаратно. Движение робота осуществляется в бесконечном цикле, на каждой итерации которого выполняется вот что:

- вычисляется  $X$  – остаток от деления А на 4;
- если  $X = 0$  – выполняется перемещение на 1 вверх, при  $X = 1$  – на 1 вправо, при  $X = 2$  – на 1 вниз, при  $X = 3$  – на 1 влево;
- байту А присваивается значение  $(A+B) \bmod 256$ .

Сейчас робот находится в начале координат. Разработайте программу, подсчитывающую количество точек, расположенных внутри и на границе круга с радиусом  $R$  ( $R$  – натуральное число, не превышающее  $10^9$ ), до которых робот может добраться за не превышающее  $10^9$  количество шагов, если пододать соответствующие А и В.

**Входные данные.** Натуральное число  $R$  – радиус круга.

**Выходные данные.** Одно натуральное число – количество точек внутри круга заданного радиуса, которые достижимы для робота при

каком-либо сочетании А и В за количество шагов, не превышающее миллиард.

### 6. Математики на медосмотре

Сотрудников Политеха погнали на очередной медосмотр. Необходимо последовательно пройти два кабинета: в одном с помощью хитроумных приборов производят всякие анализы и замеры, а во втором живой врач обсуждает с пациентом результаты посещения первого кабинета. Между кабинетами маленький коридорчик, в котором, если врач пока занят, можно подождать. В Политехе математику знают даже гуманитарии. Кроме того, каждый сотрудник довольно точно знает свои диагнозы и, следовательно, время своего пребывания в каждом из кабинетов. И каждое подразделение старается проходить медосмотр в оптимальной последовательности, чтобы время медосмотра было минимальным. Например, в лаборатории Нестандартной Стандартизации три сотрудника. Завлаб проведет в первом кабинете 3 минуты, а во втором 20, научный сотрудник – соответственно, 7 и 8, лаборант – 15 и 2. Если пойдут на медосмотр в порядке убывания должности, управятся за 33 минуты. А вот если в порядке возрастания, то потратят 50 минут. Разработайте программу, которая по данным о предположительном времени пребывания каждого сотрудника в каждом из кабинетов определяет минимальную возможную длительность прохождения медосмотра подразделением (от входа первого сотрудника в первый кабинет до выхода последнего из второго).

**Входные данные.** В первой строке натуральное число  $N$  – количество сотрудников в подразделении. Далее следуют  $N$  строк, в каждой – два натуральных числа: время пребывания сотрудника в первом и втором кабинете соответственно. Все числа в задаче не превышают 100.

**Выходные данные.** Одно натуральное число – время от входа первого сотрудника в первый кабинет до выхода последнего из второго при оптимальной очередности сотрудников.

*Публикацию по математике  
подготовили А.Моисеев, А.Одинцов,  
С.Преображенский;  
по физике – Т.Андреева, Т.Воробьева,  
С.Старовойтов;  
по информатике – Е.Крылова,  
К.Плотникова*

# Новосибирский государственный университет

## Физика

### ОЛИМПИАДА «ТВОЙ ПУТЬ В НАСТОЯЩУЮ НАУКУ»

#### I (отборочный) этап

##### Вариант 1

##### 8 класс

1. Таня и Петя отправились на машинах из пункта  $A$  в пункт  $B$ . Таня выехала первой и ехала, не останавливаясь, со скоростью  $50$  км/ч. Петя выехал через  $5$  минут после Тани и далее действовал следующим образом: двигался со скоростью  $60$  км/ч, а как только догонял Таню, останавливался на  $5$  минут, а затем опять продолжал движение с прежней скоростью. Таня не очень точно засекала время, но может с уверенностью сказать, что провела в пути более  $2$  часов, но менее  $3$  часов. Какое время Таня находилась в пути, если известно, что в пункт  $B$  машины приехали одновременно? Временами разгона и торможения пренебречь.

2. Тело плавает в жидкости плотностью  $\rho_{\text{ж}}$ . Чтобы медленно полностью вытащить тело из жидкости, нужно к нему приложить вертикальную силу вдвое большую, чем для того, чтобы медленно полностью погрузить тело в жидкость. Найдите плотность тела.

3. По реке, скорость течения которой можно считать постоянной, на двух одинаковых самоходных баржах перевозят песок из пункта  $A$  в пункт  $B$ . Пункты  $A$  и  $B$  находятся на одном берегу реки, течение направлено из  $A$  в  $B$ . В момент, когда первая баржа с песком прибывает к пристани в пункте  $B$ , вторая баржа с песком находится на расстоянии  $3$  км вверх по течению. К пристани вторая баржа прибывает в момент, когда разгрузившаяся первая баржа отплывает от пристани. Какое расстояние будет между баржами, когда они обе будут плыть в пункт  $A$ ? Скорость самоходной баржи в стоячей воде больше скорости течения реки в  $5$  раз, время разгрузки одинаково. Считать, что скорость баржи не зависит от того, загружена она песком или нет.

4. К центрам сторон двух кубиков привязаны нерастяжимые нити, вторые концы которых привязаны к разным концам невесомого

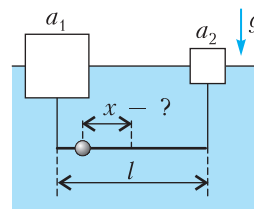


Рис. 1

тонкого стержня длиной  $l$  (рис. 1). На некотором расстоянии  $x$  от центра стержня к нему прикреплен грузик. Систему опускают в сосуд с жидкостью. В равновесии стержень остается горизонтальным, а каждый из кубиков погружен на половину своего объема. Найдите  $x$ , если известно, что ребра кубиков равны  $a_1$  и  $a_2$ . Массой кубиков пренебречь.

##### 9 класс

1. См. задачу 2 для 8 класса.

2. Вагончик прикреплен к стене двумя пружинами жесткостью  $k$  (рис. 2). С другой стороны к вагончику присоединена одна

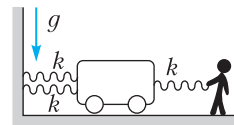


Рис. 2

такая же пружина, второй конец которой держит в руке мальчик. Пружины не натянуты. Какую минимальную работу  $A$  должен совершить мальчик, чтобы переместить вагончик вправо на расстояние  $L$ ? Трением при движении вагончика пренебречь.

3. Имеется схема, составленная из резисторов двух разных номиналов  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 3). Известно, что если замкнуть в схеме только ключ №1, то сопротивление между выводами  $A$  и  $B$  составит  $R_x = 16$  Ом. Если же замкнуть только ключ №2, то сопротивление между этими выводами составит  $R_y = 22$  Ом. Найдите  $R_1$ .

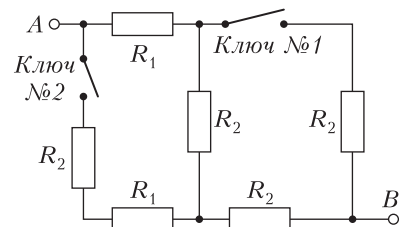


Рис. 3



4. В трубу постоянного сечения каждую секунду закачивают постоянный объем воды с температурой на входе  $T_0 = 10^\circ\text{C}$ . На одном из участков воду подогревают до  $T_1 = 50^\circ\text{C}$ . Где-то до участка, где подогревается жидкость, в трубе появилась течь. Температура на выходе стала равной  $T_2 = 55^\circ\text{C}$ . Найдите отношение расхода воды в течи к полному расходу воды. Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

10 класс

1. См. задачу 3 для 9 класса.
2. См. задачу 2 для 9 класса.
3. См. задачу 4 для 9 класса.
4. На горизонтальной плоскости находится подвижный клин массой  $M$  с углом раствора  $\alpha$ . На нем лежит брусок массой  $m$ , прикрепленный нитью к стене, как показано на рисунке 4. Какую минимальную горизонтальную силу  $F$  надо приложить к клину, чтобы сдвинуть его с места? Коэффициент трения между клином и плоскостью  $\mu$ , остальным трением пренебречь. Участок нити, подходящий к стене, горизонтален. Ускорение свободного падения  $g$ .

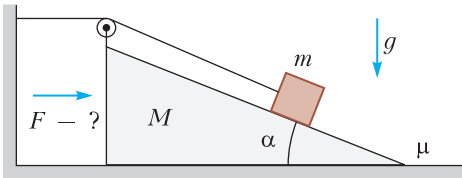


Рис. 4

Рис. 4. Какую минимальную горизонтальную силу  $F$  надо приложить к клину, чтобы сдвинуть его с места? Коэффициент трения между клином и плоскостью  $\mu$ , остальным трением пренебречь. Участок нити, подходящий к стене, горизонтален. Ускорение свободного падения  $g$ .

11 класс

1. На наклонной горке лежит брусок на высоте  $H$ . Если его стащить вниз до самого конца горки, то будет совершена некоторая работа  $A$ . Если потом затащить брусок от конца горки до прежнего места, то будет совершена в два раза большая работа. Найдите  $A$ , если масса бруска  $M$ . Ускорение свободного падения  $g$ .
2. См. задачу 2 для 9 класса.
3. Посередине горизонтальной трубы, закрытой с торцов, находится подвижный теплонепроницаемый поршень сечением  $S$ . В левой и правой частях трубы находится одинаковое количество идеального газа при одинаковой температуре и давлении  $p$ . Левую часть нагрели так, что объем трубы делится поршнем в пропорции 3:1, а в правой температура не поменялась. После чего температуры в левой и правой частях фик-

сируются, трубу ставят в вертикальное положение и поршень опускается до середины трубы. Найдите массу поршня. Ускорение свободного падения  $g$ . Трением пренебречь.

4. На гладкую горизонтальную спицу надеты две одинаковые массивные бусинки с зарядами  $\pm q$ , которые вначале удерживаются на расстоянии  $l$  (рис. 5). Две одинаковые горизонтальные нерастянутые непроводящие пружинки жесткостью  $k$  прикреплены одним концом к левой и правой бусинке соответственно, а другим – к спице. Найдите минимальный заряд бусинки, при котором они столкнутся, если их отпустить. Трением пренебречь.

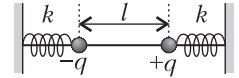


Рис. 5

Вариант 2

8 класс

1. Таня решила изготовить прибор для измерения плотностей жидкостей на основе полого цилиндра с грузиком. В качестве цилиндра она взяла медицинский шприц, так как на него уже нанесена шкала в миллилитрах, вытащила поршень и к концу иглы прикрепила грузик. Опустив конструкцию в воду, Таня определила, что уровень воды совпадает с риской 2 мл (рис. 6). Значит, решила она, отметка 2 мл соответствует плотности жидкости  $\rho_0 = 1\text{ г/см}^3$ . Какой плотности жидкости  $\rho$  соответствует отметка шкалы 3 мл? Толщиной стенок шприца и объемом грузика с иглой пренебречь. Жидкость в шприц через иглу не поступает.

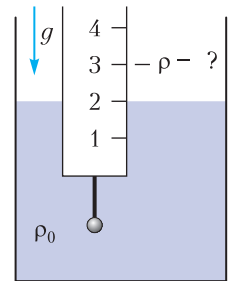


Рис. 6

2. Между городами  $A$  и  $B$  ходит автобус, который, согласно расписанию, делает длительную промежуточную остановку в деревне  $C$  на одно и то же время. Однажды почти сразу после отправления из  $A$  у автобуса лопнуло колесо, и водитель его менял в течение 35 минут. Из-за этого, чтобы прибыть точно по расписанию в  $B$ , водитель после замены колеса увеличил скорость автобуса на 10% и сократил время остановки в  $C$ . На сколько минут пришлось сократить время этой остановки из-за лопнувшего колеса, если с повышенной скоростью автобус ехал всего 5 ч 30 мин?

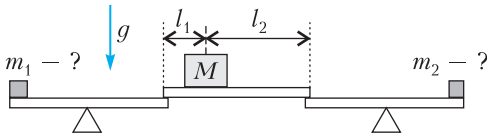


Рис. 7

**3.** На правую чашу левых и левую чашу правых одинаковых равноплечих весов положили невесомую балку, на которую поместили небольшой груз массой  $M$  (рис. 7). Расстояние от левого края балки до груза  $l_1$ , а от правого края до груза  $l_2$ . Найдите массы грузов  $m_1$  и  $m_2$ , которые нужно положить на крайние свободные чаши, чтобы весы были в равновесии.

**4.** Петя изготовил весы оригинальной конструкции: чаши весов он выполнил в форме кубических коробок без крышки, левую с длиной ребра  $a$ , правую –  $b$ , и поместил их в большой сосуд с жидкостью плотностью  $\rho$  (рис. 8). На дно правой коробки он положил

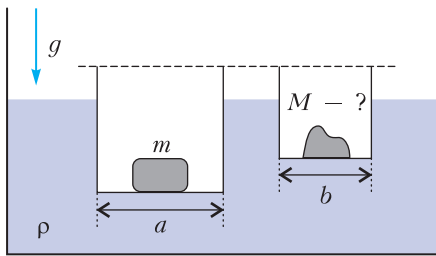


Рис. 8

исследуемый груз, на дно левой – гирию массой  $m$ , которая уравнивала весы. Петя считает весы уравновешенными, если чаши весов выровнены по верхнему краю. Найдите массу  $M$  исследуемого груза. Массой и толщиной стенок коробок пренебречь.

9 класс

**1.** Напряжение в розетке 220 В. Толя захотел использовать для освещения электрическую лампочку, рассчитанную на напряжение 50 В, впаяв последовательно с лампочкой сопротивление. Во сколько раз величина этого сопротивления должна превышать сопротивление горячей лампочки, чтобы она светила своим нормальным накалом?

**2.** См. задачу 3 для 8 класса.

**3.** Массивный цилиндрический груз стоит на дне водоёма глубиной  $H = 2$  м (рис. 9). К грузу прикрепляли нерастяжимый трос и начали его медленно тянуть так, чтобы груз поднимался равномерно. Зависимость силы натяжения троса от времени показана на

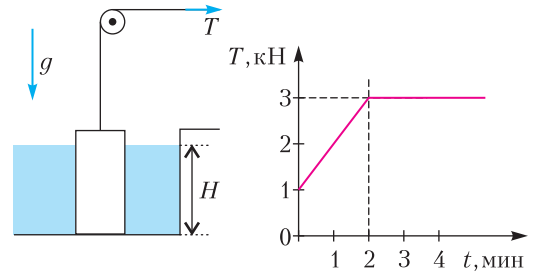


Рис. 9

графике. Найдите работу, которую совершили для того, чтобы достать груз из воды, т.е. с момента времени начала подъема до момента, когда груз полностью окажется в воздухе. Трением пренебречь.

**4.** На прямолинейную горизонтальную спицу на одинаковом расстоянии друг от друга нанизано  $N = 2023$  одинаковых бусинок. Крайней бусинке резким ударом сообщают кинетическую энергию, равную  $E$ . Считая все соударения абсолютно неупругими, найдите энергию, превратившуюся в тепло после того, как произойдет последнее соударение. Трением бусинок о спицу пренебречь.

10 класс

**1.** У левой стенки внутри закрепленной коробки длины  $l$  находится небольшая шайба (рис. 10). Шайбы ударом придают скорость  $v$ . Шайба один раз ударяется о противоположную (правую) стенку и затем останавливается у левой

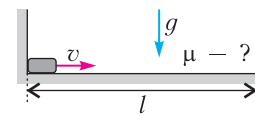


Рис. 10

стенки. Найдите коэффициент трения  $\mu$  шайбы о дно коробки, если известно, что при соударении со стенкой шайба теряет половину своей кинетической энергии. Ускорение свободного падения  $g$ .

**2.** См. задачу 3 для 9 класса.

**3.** На прямолинейную горизонтальную спицу на одинаковом расстоянии друг от друга нанизано большое количество одинаковых бусинок диаметром  $d = 1$  см. Расстояние между центрами бусинок  $a = 2$  см. Какую максимальную скорость можно сообщить крайней бусинке, чтобы бусинка с номером  $N = 2023$  не сдвинулась с места? Все удары центральные и абсолютно упругие. Коэффициент трения бусинки о спицу  $\mu = 0,01$ . Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**4.** Между двумя пунктами  $A$  и  $B$ , расположенными на одном берегу реки, курсируют

одинаковые баржи, которые перевозят песок по течению из  $A$  в  $B$ . Как только в пункт  $B$  прибывает одна баржа, из пункта  $A$  стартует следующая. Скорость баржи в стоячей воде в 5 раз больше скорости течения реки. Известно, что если увеличить массу перевозимого песка на  $x$  процентов, то на столько же процентов уменьшится скорость баржи в стоячей воде. Найдите оптимальную величину  $x$ , при которой таким образом можно перевозить максимальное количество песка в единицу времени.

11 класс

1. См. задачу 1 для 10 класса.

2. Сосуд в виде горизонтальной трубы длиной  $2L$  разделен на две равные половины неподвижным пористым поршнем. Один торец трубы глухой, другой представляет собой подвижный поршень. В начальный момент в каждой половине трубы находится смесь двух газов с числом молей  $\nu_1$  и  $\nu_2$  соответственно. Их суммарное давление равно атмосферному. Снаружи сосуда атмосферное давление. Известно, что средний пористый поршень пропускает только молекулы второго газа. Какую силу  $F$  надо приложить к поршню, чтобы в равновесии он оказался вдвинут на  $L/2$ ? Температура постоянна и равна  $T$ . Универсальная газовая постоянная  $R$ .

3. На горизонтальной плоскости стоит тонкостенная труба радиусом  $R$  (рис. 11). Через край трубы переброшена нить, к концам которой привязаны шары: масса и радиус шара внутри трубы  $M$  и  $r < R$  соответственно, а снаружи  $2M$  и  $2r$ . При какой минимальной массе трубы такая система может находиться в равновесии? Шары не касаются плоскости, трением пренебречь.

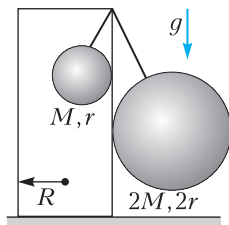


Рис. 11

4. Контейнер прямоугольного сечения шириной  $d$  с одного конца заглушен, а с другого закрыт герметичным подвижным поршнем, который может без трения перемещаться вдоль контейнера. Поршень соединен с противоположной стенкой нерастянутой пружиной. Между стенкой и поршнем через отверстие в контейнер начинают медленно наливать воду. Когда налили объем

воды, равный  $V$ , поршень отодвинулся на расстояние  $x$  от исходного положения, а высота слоя воды оказалась равной  $h$ . Найдите объем воды в контейнере, когда поршень окажется на расстоянии  $4x$  от исходного положения.

## II (заключительный) этап

8 класс

1. Школьник добирается из дома в школу по одной и той же дороге, но может это делать двумя способами: он может дойти до автобусной остановки, сесть в автобус и доехать на нем до школы или он может взять дома электросамокат и доехать на нем сразу до школы. При этом пешком путь от дома до автобусной остановки он проходит за  $t_{п} = 8$  мин, а если едет на электросамокате, то тратит на этот путь  $t_{с} = 2$  мин. Найдите расстояние от остановки до школы, если известно, что средняя скорость движения автобуса  $v_{а} = 30$  км/ч, самоката  $v_{с} = 20$  км/ч, а средняя скорость школьника на всем пути не зависит от того, каким способом он добирается до школы.

2. В бане имеются емкости для воды разного объема. В ушат налили воду, нагретую до температуры кипения  $t_{кип} = 100$  °С, а в лохань – воду при комнатной температуре  $t_{ком} = 20$  °С. Вылив всю эту воду в большой бак, получили воду с температурой  $t = 70$  °С. Какая температура воды в баке получится, если вместо этого в ушат налить воду комнатной температуры, а в лохань – кипяток и потом всю воду из них перелить в бак? Теплоемкость сосудов считать малой, тепловыми потерями пренебречь.

3. Большая группа школьников идет в кино на 6-й этаж торгового центра. С первого этажа туда можно добраться по лестнице или на медленном лифте. Все школьники в лифт не помещались, поэтому одна часть поехала на лифте, вторая часть решила подняться по лестнице пешком, а третья часть школьников стала ждать, пока лифт вернется. Те, кто поднялся на лифте первым, сразу отправили этот лифт назад и он проехал мимо второй части школьников, когда они зашли на 4-й этаж. Между приходом второй части школьников на 6-й этаж и приездом туда лифта с третьей частью прошло 80 с. Сколько времени длится подъем лифта с 1-го на 6-й этаж? Скорость движения лифта всегда одинакова, временем входа-выхода из лифта и воз-

можными промежуточными остановками пренебречь, движение школьников по лестнице считать равномерным.

4. Два шара с помощью нитей прикрепили к концам рычага с плечами  $2L$  и  $L$  и с помощью системы блоков погрузили в воду плотностью  $\rho_v = 1 \text{ г/см}^3$  (рис. 12). Большой

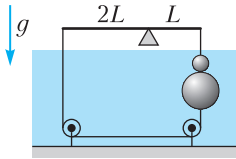


Рис. 12

шар расположили точно под малым так, что они касаются друг друга. В равновесии шары давят друг на друга с силой  $F = 32 \text{ Н}$ . Объем малого шара  $V_1 = 2 \text{ л}$ , а его плотность  $\rho_1 = 9 \text{ кг/дм}^3$ . Чему равна плотность  $\rho_2$  большого шара, если его объем  $V_2 = 16 \text{ л}$ ? Массой рычага пренебречь, ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

### 9 класс

1. По шоссе в безветренную погоду с постоянной скоростью  $v = 40 \text{ м/с}$  на одинаковом расстоянии  $L$  друг за другом ехали три мотоциклиста: Андрей, Петр и Николай. В некоторый момент Андрей, едущий посередине, просигнализ. Петр услышал этот сигнал на  $\Delta t = 0,1 \text{ с}$  раньше Николая. Кто ехал впереди – Петр или Николай? Найдите расстояние  $L$  между мотоциклами, если скорость звука  $c = 300 \text{ м/с}$ . Размером мотоцикла пренебречь.

2. Сопротивление  $R$  некоторых металлов зависит от температуры  $t$  по линейному закону:  $R(t) = R_0(1 + Kt)$ . При температуре  $t_1 = 200 \text{ }^\circ\text{C}$  сопротивление проволоки из такого металла равнялось  $R_1 = 2 \text{ Ом}$ , а при температуре  $t_2 = 400 \text{ }^\circ\text{C}$  оно составило  $R_2 = 3 \text{ Ом}$ . При какой температуре  $t_x$  сопротивление проволоки будет равно  $R_x = 5 \text{ Ом}$ ?

3. Человек в тележке держится за конец невесомой веревки, перекинутой через блок (рис. 13). К другому концу веревки привязан груз массой в 3 раза больше суммарной массы человека вместе с тележкой. Тележка и груз вначале покоятся. Начальное расстояние между тележкой и грузом равно  $L$ . В некоторый момент человек стал тянуть веревку к себе. Какой длины участок веревки вытянет человек к моменту, когда тележка

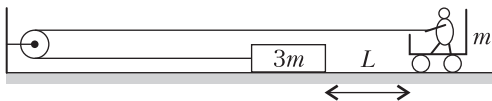


Рис. 13

догонит груз, если веревка при этом не првисла? Трения нет.

4. Автомобиль едет по горизонтальной дороге со скоростью  $v = 20 \text{ м/с}$ . Мощность двигателя во время движения  $W = 30 \text{ кВт}$ . При подъеме с такой же скоростью по дороге с углом наклона к горизонту  $\alpha$  ( $\sin \alpha = 0,3$ ) мощность, развиваемая двигателем, стала в 3 раза больше. Чему равна масса автомобиля  $M$ ? Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Проскальзывания колес на дороге нет, движение происходит в безветренную погоду.

5. С потолка свисает легкая резинка, длина которой равна половине высоты комнаты. К резинке прикрепляют два одинаковых груза – один к свободному концу резинки, а второй – где-то повыше. После установления равновесия оказалось, что один груз почти касается пола, а второй висит ровно посередине между полом и потолком. Внезапно резинка порвалась в месте крепления второго груза. Во сколько раз отличаются длины двух разделившихся частей резинки в нерастянутом состоянии?

### 10 класс

1. Имеется большой цилиндрический сосуд, заполненный идеальным газом. Сосуд перекрыт подвижным тяжелым поршнем площадью  $S$  (рис. 14). Внутри большого сосуда

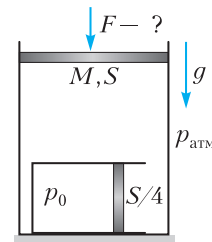


Рис. 14

находится положенный набок меньший сосуд, также заполненный газом и перекрытый поршнем с той же массой и площадью  $S/4$ . В начальной ситуации давление внутри меньшего сосуда равно  $p_0$ . Большой поршень медленно сдвигают, прикладывая к нему внешнюю силу. Какого значения  $F$  достигнет эта сила к моменту, когда давление внутри меньшего сосуда удвоится? Трением пренебречь.

2. Две спицы жестко соединены концами в одной точке  $O$  и расходятся из нее под углом  $\alpha$  (рис. 15). На спицах находятся две маленькие бусинки, соединенные недеформированной резинкой жесткостью  $k$  и собственной длиной  $l$ . За среднюю точку резинки начинают тянуть с некоторой силой, направленной вдоль биссектрисы угла, образованного спицами. Какую силу следует прило-

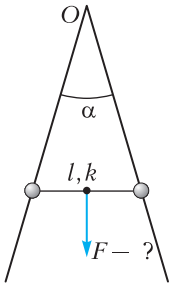


Рис. 15

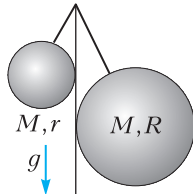


Рис. 16

жить, чтобы увеличить расстояние между бусинками в  $n$  раз? Трением пренебречь.

**3.** Два шара одинаковой массы  $M$ , но разных радиусов  $r$  и  $R$  связаны нерастяжимой нитью длиной  $L$ . Нить с шарами переброшена через тонкую вертикальную стенку так, что шары находятся по разные стороны от стенки (рис. 16). Чему равно натяжение нити, если равновесие установилось, а трения нет? Ускорение свободного падения  $g$ .

**4.** В середине открытой с обоих торцов трубы длиной  $2H$  находится поршень. Эту трубу устанавливают вертикально так, что ее нижний торец касается широкого сосуда с водой. Поршень медленно поднимают вверх до верхнего торца (рис. 17). Найдите, на какую высоту  $x$  поднялась вода в трубе. Толщиной поршня пренебречь. Атмосферное давление  $p_0$  можно представить в виде  $p_0 = \rho g H_0$  ( $\rho$  – плотность воды,  $g$  – ускорение свободного падения).

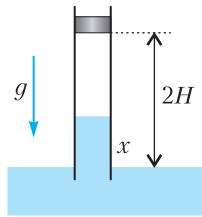


Рис. 17

**5.** Мальчик хочет выстрелить в потолок из водяного пистолета. Расстояние от пистолета до потолка  $H$ . Струя вылетает под углом  $\alpha$  к вертикали. На каком максимальном расстоянии от точки, находящейся над пистолетом, струя может попасть в потолок?

11 класс

**1.** Известно, что аммиак ( $\text{NH}_3$ ) растворяется в воде до концентраций в десятки тысяч раз больше, чем азот ( $\text{N}_2$ ). Для выделения аммиака из смеси с азотом герметичный сосуд, наполненный такой смесью при атмосферном давлении, наполовину заполняют водой, не выпуская газ. Через некоторое время, когда весь аммиак растворился в воде, давление газа в сосуде установилось и

стало в  $4/3$  раза больше, чем было до добавления воды. Какова была мольная доля аммиака в исходной смеси, если растворимостью азота в воде можно пренебречь? Считать плотность воды неизменной. Все процессы протекают при постоянной температуре.

**2.** Тело массой  $m$ , покоящееся на горизонтальной поверхности, прикреплено к стенке с помощью легкого упругого тонкого стержня жесткостью  $k$  и длиной  $L$  (рис. 18). Вначале стержень не деформирован. На сколько градусов  $\Delta t$  нужно охладить стержень,

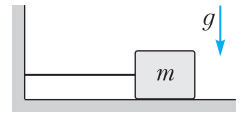


Рис. 18

чтобы сдвинуть тело? Коэффициент линейного теплового расширения стержня  $\beta$  (длина зависит от температуры линейно:  $L(t) = L(t_0) + \beta(t - t_0)$ ), ускорение свободного падения  $g$ , коэффициент трения между телом и поверхностью  $\mu$ .

**3.** Длинный кусок проволоки, изогнутый под углом  $90^\circ$ , помещают в однородное магнитное поле с индукцией  $B$  так, что линии индукции поля перпендикулярны плоскости, в которой находится изогнутая проволока (рис. 19). В начальный момент времени проводящая перемычка находится в углу проволоки. Ее начинают двигать с постоянной скоростью  $v$  вдоль биссектрисы угла так, что она все время касается изогнутой проволоки. Найдите, сколько энергии выделится за время  $t$  движения перемычки, если сопротивление единицы длины перемычки равно  $\rho$ , а сопротивлением проволоки можно пренебречь.

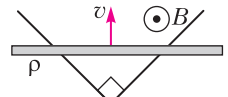


Рис. 19

**4.** На горизонтальной поверхности закреплен клин из прозрачного материала с показателем преломления  $n = \sqrt{3}$ . Клин освещается широким горизонтальным пучком света, как показано на рисунке 20. На клин кладут тело небольших размеров и отпускают, после чего тело начинает соскальзывать вниз. Найдите ускорение тени этого тела на горизонтальной плоскости. Угол при вершине клина равен  $30^\circ$ , коэффициент трения тела о клин  $\mu$ .

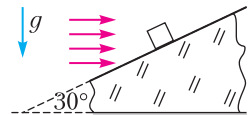


Рис. 20



5. На свободный покоящийся шар массой  $M$  начинают налетать маленькие липкие шарики, которые исходно имеют скорость  $v$ , массу  $m$  ( $m \ll M$ ), и при столкновении с шаром прилипают к нему. Маленькие шарики летят в одном и том же направлении. Шар и шарики сделаны из одинакового материала, удельная теплоемкость которого  $c$ , а их начальная температура  $T_0$ . Найдите, до какой максимальной температуры  $T$  нагреется общая масса шара с налипшими шариками. Сопротивлением окружающей среды и потерями тепла в окружающую среду пренебречь. Силы тяжести нет.

6. **Задача-демонстрация** (демонстрирует-ся видеоролик). На горизонтальном столе собрана установка, основным элементом которой является катушка, намотанная проводом в изоляции на медную трубку (рис. 21). У левого торца трубки, а также снизу и сверху от ее середины расположены три компаса. Подводящие провода катушки соединены с клеммами источника постоянного тока. В начальный момент тока в катушке нет, а стрелки всех компасов направлены перпендикулярно трубке и указывают на север. Проводят два эксперимента. В первом, когда подводящие провода остаются

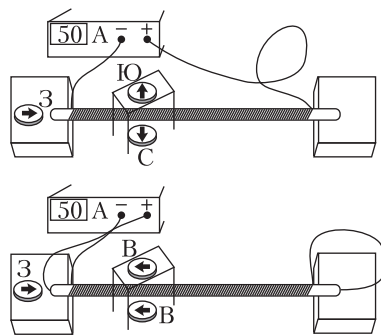


Рис. 21

снаружи катушки, при увеличении тока через катушку стрелка торцевого компаса поворачивается на запад, верхнего на юг, а нижнего почти не изменяет направление. Во втором случае, когда подводящий провод пропущен внутри трубки, при увеличении тока стрелка торцевого компаса по-прежнему поворачивается на запад, а стрелки нижнего и верхнего — на восток. Объясните наблюдаемое явление.

*Публикацию подготовили В.Боровков, Е.Жданов, С.Лежнин, М.Махмудиан, А.Ненашев, Е.Пальчиков, А.Погосов, Д.Похабов, Г.Федотович*

## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

### «Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №9)

1. 4.

*Оценка.* Рассмотрим четыре столбца по два кубика. В каждом должен быть хотя бы один черный кубик, поэтому всего кубиков не менее четырех.

*Пример.* Раскрасим кубики в шахматном порядке, тогда черных кубиков будет 4. Нетрудно проверить, что пример подходит под условие.

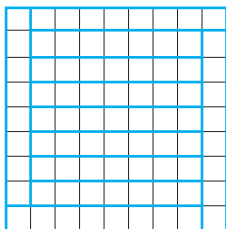


Рис. 1

2. Не обязательно.

Пусть квадрат разрезали так, как показано на рисунке 1. Чтобы из полосок сложить прямоугольник  $8 \times 9$ , нужно выбросить полоски общей площади 9. Однако все полоски состоят из семи или восьми клеток, поэтому

суммарную площадь 9 из них получить нельзя.

3. Масса Макара больше на  $\frac{100}{3}$  кг.

Из условия следует, что средняя масса поросят и телят на 20 кг больше средней массы поросят и на 30 кг меньше средней массы телят. Значит, если к массе каждого поросенка прибавить 20 кг, а от массы каждого теленка отнять 30 кг, то их средние массы станут равны. Поэтому количества поросят и телят относятся как 3:2. Аналогично, средняя масса козлят и телят на 25 кг больше средней массы козлят и на 75 кг меньше средней массы телят, поэтому количества козлят и телят относятся как 3:1. Следовательно, козлят в 2 раза больше, чем поросят. Разность между средней массой поросят и средней массой козлят равна 50 кг. Чтобы найти среднюю массу поросят и козлят, надо эту разность поделить в отношении 2:1, т.е. она на  $\frac{100}{3}$  кг меньше средней массы поросят, а значит, и массы Макара.

4. 30°.

Обозначим через  $DE$  сторону, на которой лежит точка  $B$  (рис. 2). Так как  $BA = BC$ ,  $BD = BE$  и  $\angle D = \angle E = 60^\circ$ , то либо треугольники  $ABD$  и  $CBE$  равны, либо сумма углов, противолежащих сторонам  $BD$  и  $BE$ , равна  $180^\circ$ . Первый случай невозможен, поскольку из условия следует, что не равны соответствующие высоты этих треугольников, проведенные из вершин  $A$  и  $C$ . Значит,  $\angle BAD + \angle BCE = 180^\circ$ . Тогда

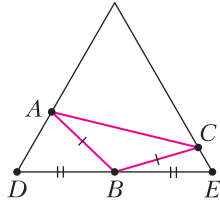


Рис. 2

$$\begin{aligned} \angle ABD + \angle CBE &= (180^\circ - \angle D - \angle BAD) + \\ &+ (180^\circ - \angle E - \angle BCE) = 60^\circ, \end{aligned}$$

откуда  $\angle ABC = 120^\circ$  и

$$\angle BAC = \angle BCA = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ.$$

### XXIX и XXX Международные олимпиады школьников «Туймаада»

(см. «Квант» №9)

#### Физика

#### Теоретический тур 2022 года

1. Горизонтальные составляющие всех внешних сил, действующих на систему, равны нулю. Значит, зависимость  $x_c(t)$  можно искать, считая, что щебень вываливается на землю, а платформа едет с постоянной скоростью:

$$x_c(t) = \frac{M \cdot (L/4 + v_0 t) + \mu t \cdot 0}{M + \mu t} = \frac{L}{4} \cdot \frac{1 + 4v_0 t/L}{1 + \mu t/M} = 20 \text{ м.}$$

Время  $t$  сократилось за счет выполнения соотношения между численными данными:  $\mu L = 4Mv_0$ . В этом случае платформа с щебнем будет двигаться, а центр масс – покоиться. В общем же случае найдем искомую скорость через произвольную координаты:

$$v_c(t) = x'_c(t) = v_0 \frac{1 - \frac{\mu L}{4Mv_0}}{\left(1 + \frac{\mu t}{M}\right)^2}.$$

2. Вращая цилиндр, можно сообщать кольцу ускорение при наличии ненулевой силы трения, что требует ненулевой силы  $N$  нормальной реакции цилиндра, действующей на малую дугу  $2\alpha$  резинового кольца (рис.3). Пусть  $R$  – радиус цилиндра,  $S$  – площадь поперечного сечения резинового жгута, образующего кольцо. Второй закон Ньютона для рассматриваемой дуги, имеющей массу  $m = \rho S \cdot 2\alpha R$ , в проекции на направ-

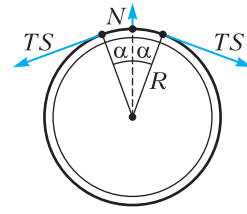


Рис. 3

ление центростремительного ускорения примет вид

$$m \frac{v^2}{R} = 2TS \sin \alpha - N \approx 2TS\alpha - N.$$

Максимальная скорость достигается при  $N = 0$ . Отсюда получаем

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = 2 \text{ м/с.}$$

3. Пусть  $m$  – масса поршня,  $S$  – площадь поперечного сечения цилиндра. Тогда закон сохранения энергии и уравнение адиабаты с постоянной  $\gamma = 5/3$  для одноатомного газа имеют вид

$$\frac{3}{2} p_0 S H_0 + mgH_0 = \frac{3}{2} p_{\max} S H_{\min} + mgH_{\min},$$

$$p_0 (S H_0)^\gamma = p_{\max} (S H_{\min})^\gamma.$$

Используя введенные в условии безразмерные искомые параметры и известное значение  $\varphi = p_0 S / (mg)$ , преобразуем эти уравнения к виду

$$\frac{3}{2} \varphi (Ph - 1) = 1 - h, \quad P = h^{-\gamma}.$$

Отсюда получаем нелинейное уравнение

$$\frac{3}{2} \varphi (h^{-2/3} - 1) = 1 - h.$$

Его можно решить приближенно, если учесть, что  $h \ll 1$  при  $\varphi \ll 1$ , и найти первый ответ:

$$h \approx \left( \frac{3\varphi}{2 + 3\varphi} \right)^{3/2} \approx 1,8 \cdot 10^{-3}.$$

Зная  $h$ , находим второй ответ:

$$P = h^{-\gamma} \approx \left( \frac{2 + 3\varphi}{3\varphi} \right)^{5/2} \approx 3,8 \cdot 10^4.$$

Третий ответ найдем из уравнения Менделеева–Клапейрона, записав его через относительные параметры газа:

$$t = Ph \approx \frac{2 + 3\varphi}{3\varphi} \approx 67,7.$$

4. См. решение задачи Ф2774 «Задачника «Квант»».

5. Рассмотрим преломление луча в произвольной точке  $E$  на расстоянии  $R$  от центра  $O$  туманности (рис.4). Пусть  $n_1$  и  $n_2$  – показатели пре-

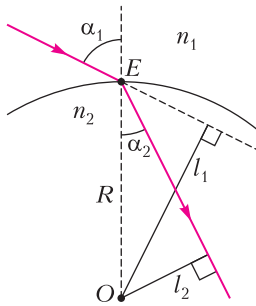


Рис. 4

Применим его к двум точкам – вдали от туманности (в вакууме  $n = 1$ ) и на минимальном расстоянии от ее центра:

$$1 \cdot H = n_0 \cdot D, \text{ откуда } n_0 = \frac{H}{D}.$$

6. См. решение задачи Ф2776 «Задачника «Кванта»».

7. См. решение задачи Ф2775 «Задачника «Кванта»».

### Теоретический тур 2023 года

1. Поскольку капля большая по горизонтальным размерам, можно считать ее верхнюю поверхность плоской почти везде – кроме края, который имеет вид криволинейного полуцилиндра (рис.5). В дальнейших расчетах мы будем использовать высоту  $L$  цилиндра, которая перпендикулярна плоскости рисунка и равна любой распрямленной части периметра капли.

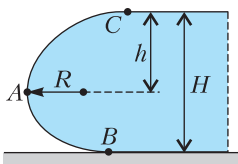


Рис. 5

Запишем условие равновесия жидкости в объеме криволинейного полуцилиндра в проекции на горизонталь (среднее гидростатическое давление  $\rho g H/2$  действует на площади  $HL$  и компенсирует две силы поверхностного натяжения  $\sigma L$  на границах, отмеченных в точках  $B$  и  $C$ ):

$$\rho g \frac{H}{2} \cdot HL = 2\sigma L,$$

откуда получаем первый ответ:

$$H = 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}.$$

Аналогичным образом найдем высоту  $h$  капли над уровнем точки  $A$ :

$$\rho g \frac{h}{2} \cdot hL = \sigma L, \text{ откуда } h = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}}.$$

Получаем второй ответ:

$$k = \frac{h}{H-h} = \sqrt{2} + 1.$$

ломления снаружи и внутри сферической границы раздела вблизи нее, тогда

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2,$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{l_1}{R},$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{l_2}{R}.$$

Получаем инвариант

$$n_1 l_1 = n_2 l_2.$$

Применив формулу Лапласа для добавочного давления под искривленной поверхностью в точке  $A$ , запишем уравнение

$$\frac{\sigma}{R} = \rho g h,$$

из которого получаем третий ответ:

$$R = \sqrt{\frac{\sigma}{2\rho g}}.$$

2. Известно, что для достижения максимальной дальности броска из неподвижного положения с фиксированной по модулю начальной скоростью  $v_0$  нужно направлять ее под углом  $45^\circ$  к горизонту, тогда дальность полета вычисляется по формуле  $L = v_0^2/g$ , из которой получаем  $v_0 = \sqrt{gL}$ . Выясним, как Винтику следует направить начальную скорость апельсина при броске с движущегося стержня. Удобно обезразмерить задачу, обозначив скорость Винтика в момент броска через  $kv_0$ . Пусть  $\varphi$  – угол между начальной скоростью  $v_0$  апельсина и горизонтом в системе отсчета Винтика, тогда горизонтальная составляющая скорости  $v_x$  апельсина относительно земли, время  $T$  и дальность  $x$  полета имеют вид

$$v_x = v_0 \cos \varphi + kv_0, \quad T = \frac{2v_0 \sin \varphi}{g},$$

$$x = v_x T = \frac{v_0^2}{g} (\sin 2\varphi + 2k \sin \varphi) = L (\sin 2\varphi + 2k \sin \varphi).$$

Вычислив производную:

$$x'(\varphi) = L(4 \cos^2 \varphi + 2k \cos \varphi - 2)$$

и приравняв ее к нулю, находим угол, под которым Винтику нужно бросать апельсин для достижения максимальной дальности полета:

$$\varphi = \arccos \frac{\sqrt{k^2 + 8} - k}{4}.$$

Осталось выяснить, когда же нужно совершать бросок. Пусть в некоторый момент времени стержень составляет угол  $\gamma$  с горизонтом,  $v$  и  $u$  – скорости Винтика и Шпунтика соответственно,  $m$  – массы коротышек. Запишем условие постоянства длины стержня и закон сохранения энергии:

$$v \cos \gamma = u \sin \gamma,$$

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2} = mgH(1 - \sin \gamma).$$

После исключения  $u$  получим  $v$  как функцию от  $\gamma$ :

$$v = \sqrt{2gH(\sin^2 \gamma - \sin^3 \gamma)}.$$

Вычислив производную:

$$v'(\gamma) = \sqrt{\frac{gH}{2}} \frac{(2 - 3 \sin \gamma) \cos \gamma}{\sqrt{1 - \sin \gamma}}$$

и приравняв ее к нулю, находим условие  $\sin \gamma = \frac{2}{3}$ , при котором скорость Винтика будет максимальной, и эту скорость:

$$v = \sqrt{\frac{8gH}{27}}.$$

Отсюда получаем лучшее значение введенного ранее коэффициента:

$$k = \frac{v}{v_0} = \sqrt{\frac{8H}{27L}}$$

и искомую максимальную дальность:

$$s = L \left( \sin 2\varphi + \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2H}{3L}} \sin \varphi \right),$$

где

$$\varphi = \arccos \frac{\sqrt{H+27L} - \sqrt{H}}{3\sqrt{6L}}.$$

**3.** См. решение задачи Ф2773 «Задачника «Кванта»».

**4.** По закону теплопроводности мощность потока энергии наружу через сферу радиусом  $r$  и толщиной  $dr$  имеет вид

$$N = -k \cdot 4\pi r^2 \frac{dT}{dr},$$

где знак «минус» обеспечивает условие  $N > 0$  при  $dT/dr < 0$ . В стационарном состоянии эти потери равны тепловой мощности, выделяющейся внутри шара радиусом  $r$ :

$$N = \frac{4}{3} \pi r^3 q.$$

Приравнявая два выражения для  $N$ , получаем дифференциальное уравнение

$$dT = -\frac{qrd r}{3k},$$

интегрируя которое находим общее решение:

$$T = -\frac{qr^2}{6k} + C,$$

а из граничного условия  $T(R) = T_0$  выражаем константу интегрирования:

$$C = T_0 + \frac{qR^2}{6k}.$$

Окончательно получаем

$$T = T_0 + \frac{q}{6k} (R^2 - r^2).$$

**5.** Пусть  $n_1, n_2, n_3$  и  $n_4$  – установившиеся концентрации частиц соответственно в трех сосудах и в свободном пространстве внутри тройника. Тогда уравнения состояния идеального газа для этих четырех объемов имеют вид

$$p_1 = n_1 k T_0, \quad p_2 = n_2 k \cdot 2T_0, \quad p_3 = n_3 k \cdot 3T_0, \quad p_4 = n_4 k T_0,$$

где  $k$  – постоянная Больцмана,  $T_0$  – начальная

температура системы. Объемы трех сосудов равны между собой и много больше объема внутри тройника, поэтому

$$n_1 + n_2 + n_3 = 3 \frac{p_0}{kT_0}.$$

Поскольку диаметр каналов много меньше длины свободного пробега молекул, их поток следует рассчитывать через движение отдельных частиц, а не газа в целом. Поток  $Z$  частиц через канал (в одну сторону) прямо пропорционален концентрации  $n_{in}$  частиц на входе в канал и их средней скорости, которая пропорциональна корню из абсолютной температуры  $T_{in}$ :

$$Z = An_{in} \sqrt{T_{in}},$$

где  $A$  – коэффициент, одинаковый для всех трубок с любой стороны. Через большое время потоки в разные стороны через каждую трубку сравниваются:

$$An_1 \sqrt{T_0} = An_4 \sqrt{T_0},$$

$$An_2 \sqrt{2T_0} = An_4 \sqrt{T_0},$$

$$An_3 \sqrt{3T_0} = An_4 \sqrt{T_0}.$$

Решая совместно все 8 записанных уравнений, исключаем 4 концентрации и находим 4 искомых давления:

$$p_1 = p_4 = \frac{3p_0}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}} \approx 1,3p_0,$$

$$p_2 = \frac{3p_0 \sqrt{2}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}} \approx 1,9p_0,$$

$$p_3 = \frac{3p_0 \sqrt{3}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}} \approx 2,3p_0.$$

**6.** Рассмотрим общий случай взаимодействия точечного заряда  $Q$  с пластиной произвольной формы, заряженной равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma$  и видимой из точечного заряда под телесным углом  $\Omega$ . По теореме Гаусса найдем поток электрического поля точечного заряда через пластину:

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{\Omega}{4\pi} = kQ\Omega.$$

Последовательно используя три определения, т.е. потока поля, поверхностной плотности заряда и напряженности поля, установим связь между потоком  $\Phi$  и перпендикулярной проекцией силы  $F_{\perp}$ , действующей на пластину со стороны точечного заряда:

$$\Phi = \int_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\sigma} \int_S \vec{E} \sigma d\vec{S} = \frac{1}{\sigma} \int_S \vec{E} d\vec{q} = \frac{1}{\sigma} \int_S dF_{\perp} = \frac{F_{\perp}}{\sigma},$$

где под «векторным» зарядом  $\overline{dq}$  подразумевается математическая абстракция: вектор, численно равный заряду  $dq$  и перпендикулярный поверхности  $dS$ , по которой распределен этот заряд. Приравнявая два выражения для  $\Phi$ , находим проекцию силы взаимодействия:

$$F_{\perp} = kQ\sigma\Omega.$$

По третьему закону Ньютона это также и сила, с которой пластина действует на точечный заряд вдоль нормали к пластине, поэтому из определения напряженности находим нормальную составляющую поля пластины в области точечного заряда:

$$E_{\perp} = \frac{F_{\perp}}{Q} = k\sigma\Omega.$$

В силу симметрии каждая равномерно заряженная грань правильного многогранника создает в его центре поле, направленное по нормали к этой грани, т.е. по формуле для  $E_{\perp}$  мы для всех граней обеих рассматриваемых в задаче фигур будем находить полное поле, а не только одну из ненулевых проекций.

1) Каждая из трех взаимно перпендикулярных проекций напряженности поля в центре куба создается зарядами, распределенными по противоположным граням и в сумме составляющими  $7q$ :

$$E_x = k \frac{6q}{a^2} \frac{4\pi}{6} - k \frac{q}{a^2} \frac{4\pi}{6} = \frac{5q}{6\epsilon_0 a^2},$$

$$E_y = k \frac{5q}{a^2} \frac{4\pi}{6} - k \frac{2q}{a^2} \frac{4\pi}{6} = \frac{3q}{6\epsilon_0 a^2},$$

$$E_z = k \frac{4q}{a^2} \frac{4\pi}{6} - k \frac{3q}{a^2} \frac{4\pi}{6} = \frac{q}{6\epsilon_0 a^2}.$$

Искомый модуль напряженности найдем по трехмерной теореме Пифагора:

$$E_1 = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \frac{q\sqrt{35}}{6\epsilon_0 a^2}.$$

2) Поле в центре правильного тетраэдра, создаваемое зарядами на обособленной грани, имеет вид

$$E_+ = k\sigma_1 \frac{4\pi}{4} = \frac{\sigma_1}{4\epsilon_0}.$$

Если бы остальные три грани имели такую же поверхностную плотность заряда  $\sigma_1$ , то они вместе создавали бы в центре такое же поле, но в противоположном направлении, так как суммарное поле должно отсутствовать в силу симметрии. Поэтому фактическое поле  $E_-$  этих трех граней можно найти из прямой пропорциональности напряженности заряду:

$$E_- = E_+ \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = \frac{\sigma_3}{4\epsilon_0}.$$

Ответ получаем, еще раз применяя принцип суперпозиции полей:

$$E_2 = |E_+ - E_-| = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{4\epsilon_0}.$$

7. Пусть  $R$  – радиус пластины, тогда сила тока частиц, падающих не далее чем на расстоянии  $x$  от центра пластины, равна

$$I = I_0 \frac{x^2}{R^2}.$$

Для нахождения приращения потенциала на расстоянии  $x$  от центра пластины применим закон Ома и формулу для удельного сопротивления к току через часть пластины в форме соосного с ней цилиндра радиусом  $x$  и высотой  $h$  с тонкими стенками толщиной  $dx$ :

$$d\varphi = -I\rho \frac{dx}{2\pi x h} = -\frac{\rho I_0 x dx}{2\pi h R^2}.$$

Изменение потенциала от центра к краю найдем с помощью интеграла:

$$\varphi(R) - \varphi(0) = -\int_0^R \frac{\rho I_0 x dx}{2\pi h R^2} = -\frac{\rho I_0 x^2}{4\pi h R^2} \Big|_0^R = -\frac{\rho I_0}{4\pi h}.$$

Из условия  $\varphi(R) = 0$  получаем первый ответ:

$$\varphi_0 = \varphi(0) = \frac{\rho I_0}{4\pi h}.$$

Для нахождения мощности, выделяющейся в рассмотренном тонкостенном цилиндре, применим закон Джоуля–Ленца:

$$dP = I^2 \rho \frac{dx}{2\pi x h} = \frac{\rho I_0^2 x^3 dx}{2\pi h R^4}.$$

Искомую общую мощность найдем путем интегрирования:

$$P_0 = \int_0^R \frac{\rho I_0^2 x^3 dx}{2\pi h R^4} = \frac{\rho I_0^2 x^4}{8\pi h R^4} \Big|_0^R = \frac{\rho I_0^2}{8\pi h}.$$

8. Известно, что поверхность вращающейся жидкости является параболоидом вращения. Рассмотрим отражение лучей лунного света, падающих параллельно оси  $y$ , в точке  $(x; y)$  поверхности ртути (рис.6). Из закона отражения и геометрических соотношений выразим координату  $f$  точки  $F$ , в которой отраженный луч пересечет

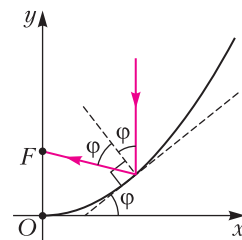


Рис. 6



ось  $y$ :

$$f = y + x \operatorname{ctg} 2\varphi,$$

где  $\varphi$  – угол наклона касательной, равный углам падения и отражения:  $\operatorname{tg} \varphi = y'(x) = \frac{\omega^2 x}{g}$ . После подстановки с помощью тригонометрической формулы  $\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{2 \operatorname{tg} \varphi}$  получаем искомую координату:

$$f = \frac{g}{2\omega^2},$$

которая удивительным образом не содержит координат точки отражения  $(x; y)$ , т.е. все падающие лучи пройдут через точку  $F$ , которую поэтому логично называть фокусом параболического зеркала. Изображение Луны будет находиться в фокальной плоскости параболического зеркала, а диаметр изображения можно в приближении малых углов найти по формуле  $d = f\gamma = \frac{g\gamma}{2\omega^2}$ , из которой получаем окончательный ответ:

$$\omega = \sqrt{\frac{g\gamma}{2d}} \approx 1,1 \text{ с}^{-1}.$$

### Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

(с.м. «Квант» №9)

#### Механика

1. Тела движутся под действием сил, изображенных на рисунке 7. По второму закону Ньютона (в проекциях всех сил и ускорений) имеем

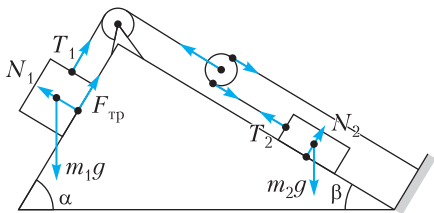


Рис. 7

$m_1 a_1 = m_1 g \sin \alpha - T_1 - \mu m_1 g \cos \alpha$  для левого груза,  $m_2 a_2 = T_2 - m_2 g \sin \beta$  для правого груза. Кроме того, справедливы равенства  $a_2 = 2a_1$ ,  $T_1 = 2T_2$ . Отсюда находим

$$a_1 = \frac{m_1 \sin \alpha - 2m_2 \sin \beta - \mu m_1 \cos \alpha}{m_1 + 4m_2} g \approx 0,22 \text{ м/с}^2.$$

2. Модуль скорости шарика на нити длиной  $L$  непосредственно перед столкновением равен  $u_1 = \sqrt{2gL}$ , а модуль скорости шарика на нити длиной  $2L$  равен  $u_2 = 2\sqrt{gL}$ . При этом скорости направлены горизонтально и взаимно противо-

положно. При абсолютно упругом центральном соударении шарики равной массы обмениваются скоростями. Уравнение движения шарика на длинной нити в нижней точке траектории имеет вид  $\frac{mu^2}{2L} = T - mg$ , где  $T$  – модуль силы натяжения нити в этот момент. Поэтому непосредственно перед столкновением шариков модуль натяжения длинной нити  $T' = \frac{mu_2^2}{2L} + mg = 3mg$ , а сразу после столкновения  $T'' = \frac{mu_1^2}{2L} + mg = 2mg$ . Следовательно,  $n = \frac{T''}{T'} = \frac{2}{3}$ .

#### Молекулярная физика и термодинамика

1. Внутренняя энергия одноатомного идеального газа  $U = \frac{3}{2} \nu RT$ . По условию  $U = \alpha V^2$ , где  $\alpha$  – некоторый постоянный коэффициент. В соответствии с уравнением Менделеева–Клапейрона,  $\nu RT = pV$ , поэтому в данном процессе  $p \sim V$ . Работу, совершенную газом, можно найти, вычислив площадь под графиком зависимости  $p$  от  $V$ :

$$A = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) (V_2 - V_1) = \frac{1}{2} (p_1 V_2 - p_1 V_1 + p_2 V_2 - p_2 V_1).$$

Поскольку  $p \sim V$ , то  $p_1 V_2 = p_2 V_1$  и  $A = \frac{1}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{1}{2} \nu R \Delta T$ . Изменение внутренней энергии  $\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T$ .

Согласно первому закону термодинамики,  $Q = \Delta U + A$ . В данном процессе  $Q = \Delta U + \frac{\Delta U}{3} = \frac{4}{3} \Delta U$ . Отсюда  $\Delta U = \frac{3}{4} Q = 15 \text{ Дж}$ .

2. По закону Дальтона начальное давление влажного воздуха равно сумме давлений сухого воздуха и водяных паров:  $p_0 = p + p_B = \frac{\rho RT}{M} + \frac{\rho_B RT}{M_B} = \frac{\rho_B RT}{M M_B} (k M_B + M)$ , где  $T$  – температура влажного воздуха,  $\rho$  – плотность сухого воздуха,  $\rho_B$  – плотность водяных паров. Отсюда плотность водяных паров  $\rho_B = \frac{p_0 M M_B}{RT (k M_B + M)}$ , а

его парциальное давление  $p_B = \frac{p_0 M}{k M_B + M}$ . Давление сухого воздуха в начальном состоянии  $p = \frac{k \rho_B RT}{M} = \frac{k p_0 M_B}{k M_B + M}$ . Так как масса сухого воздуха не изменяется, то после сжатия давление сухого воздуха возрастет в  $n$  раз:  $p' = \frac{n k p_0 M_B}{k M_B + M}$ .

Давление пара после сжатия также должно возрасти в  $n$  раз, но если получится, что его давле-

ние окажется больше, чем давление насыщенного пара при этой температуре, то  $p'_b = p_{\text{шт}} = p_0$  ( $p_{\text{шт}}$  – давление насыщенного пара при температуре 100 °С). В нашем случае  $p'_s = \frac{\eta p_0 M}{kM_b + M} \approx 1,4p_0 > p_0$ . Значит,  $p'_b = p_{\text{шт}} = p_0$ . Окончательно для давления в цилиндре после сжатия получаем  $p'_0 = \frac{nk p_0 M_b}{kM_b + M} + p_0 = p_0 \left( \frac{nkM_b}{kM_b + M} + 1 \right) \approx 3,6p_0 = 3,6 \text{ атм}$ .

### Электродинамика

1. Согласно закону изменения полной механической энергии,  $\frac{mv^2}{2} - mgH = q(\Phi_A - \Phi_D)$ , где  $\Phi_A$  и  $\Phi_D$  – потенциалы, создаваемые неподвижным зарядом  $q$  в начальной точке  $A$  и в конечной точке  $D$ . Из геометрических соображений следует, что  $\triangle ABO$  – прямоугольный со сторонами  $AO = 5H$ ,  $OB = 4H$ ,  $BA = 3H$ , поэтому  $\Phi_A = \frac{kq}{3H}$ ,  $\Phi_D = \frac{kq}{H}$  (здесь  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ). Тогда  $v^2 = 2gH - \frac{4kq^2}{3mH}$ .

Согласно второму закону Ньютона, записанному для точки  $D$  в проекции на вертикальную ось,  $ma = N - mg - F_K$ ,  $a = \frac{v^2}{R}$ ,  $F_K = \frac{kq^2}{H^2}$ . Отсюда получаем  $N = \frac{7}{5}mg + \frac{11kq^2}{15H^2}$ . По третьему закону Ньютона сила, действующая на стержень со стороны бусинки, равна по модулю силе реакции стержня:  $F = N = \frac{7}{5}mg + \frac{11kq^2}{15H^2}$ .

2. Согласно закону электромагнитной индукции, ЭДС индукции, возникающая при деформации контура,  $\mathcal{E} = -\frac{B\Delta S}{\Delta t}$ , где  $\Delta S$  – изменение площади контура за время  $\Delta t$ . Индукционный ток в контуре равен  $I = \frac{|\mathcal{E}|}{R}$ . За время  $\Delta t$  в контуре протекает заряд  $\Delta q = I\Delta t = \frac{B|\Delta S|}{R}$ , а за время деформации контура в нем протекает полный заряд  $q = \frac{B(S_0 - S_1)}{R}$ , где  $S_0 = a^2$  – начальная площадь,  $S_1 = a^2 \sin \alpha$  – конечная площадь, ограниченная контуром. Таким образом,  $q = \frac{Ba^2(1 - \sin \alpha)}{R}$ . Средняя сила тока в контуре

равна отношению заряда  $q$ , протекшего в контуре, к промежутку времени  $\tau$ , за который произошла деформация контура. Поскольку  $\tau = \frac{a(\cos(\alpha/2) - \sqrt{2}/2)}{v}$ , окончательно получаем

$$I = \frac{Bva(1 - \sin \alpha)}{R(\cos(\alpha/2) - \sqrt{2}/2)} \approx 156 \text{ мкА}.$$

# КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,  
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**М.Н.Грицук**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован  
в Комитете РФ по печати.**

**Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,  
«Квант»**

**Тел.: +7 916 168-64-74**

**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

### Отпечатано

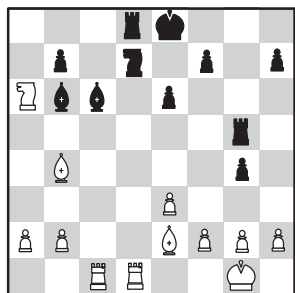
**в соответствии с предоставленными  
материалами  
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,  
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8  
Тел.: (831) 218-40-40**

## Большая ШВЕЙЦАРКА

На острове Мэн завершилась одна из самых представительных «швейцарок» года, в которой более ста ведущих гроссмейстеров сражались за две путевки в турнир претендентов. Единственным победителем соревнования стал индийский гроссмейстер Сантос Видиг, который после поражения в первом туре смог одержать серию побед, набрав 8,5 очков в 11 турах. Второе место и путевка в турнир претендентов достались самому статусному шахматному стримеру современности – Хикару Накамуре.

### С.Видиг – А.Предке FIDE Grand Swiss, 11 тур

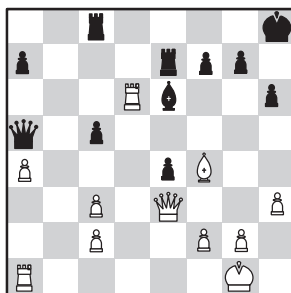
1. d4 d5 2. c4 dc 3. ♘f3 ♗f6 4. e3 e6 5. ♗c4 a6 6. 0-0 c5 7. dc ♗c5 8. ♗d8+ ♗d8 9. ♗e2 ♗e7 10. ♗bd2 ♗d7 11. ♗b3 ♗b6 12. ♗d2 ♗c6 13. ♗c3 ♗hg8 14. ♗fd1 ♗ad8 15. ♗ac1 g5! (с идеей g4-♗g5) 16. ♗fd4 ♗d4?! (сильнее 16...♗d5, сохраняя напряжение) 17. ♗b4+! Важный промежуточный ход, упущенный черными, их король вынужден занять неудачное положение. 17...♗e8 18. ♗d4 g4?! Вновь сильнее 18...♗d5! с хорошими шансами на ничью после серии разменов. 19. ♗b3 ♗g5 20. ♗c5 ♗c6 21. ♗a6! ♗d7. Осложнения после наиболее активного 21...♗f3?! 22. ♗d8 ♗d8 23. h4! ♗e2 24. hg ♗d5 25. ♗c5! ♗a6 26. ♗b6 ♗b6 27. ♗h2!, и в эндшпиль «ладья против двух легких фигур», в котором шансы белых предпочтительнее за счет активности короля и слабости черных пешек на королевском фланге.



22. ♗f1! Точный профилактический ход, отражающий все угрозы, связанные с 22...♗f3. 22... ♗a8 23. ♗d6 ♗a4 24. ♗f4. Еще сильнее 24. b3 ba 25. ba с выигрышем за счет преимущества двух слонов. 24...♗a5. Возможно, стоило попытаться спастись в эндшпиль без пешки после 24...♗d1 25. ♗g5 ♗a4 26. ♗b4. 25. ♗c7+ ♗c7 26. ♗c7 ♗d1 27. ♗a5 ♗a5 28. ♗d1 ♗e5 (28...♗a2? 29. ♗b5! с выигрышем коня) 29. a4 ♗c5 30. ♗d4! ♗c1 31. ♗b4 ♗b1. Последний шанс состоялся в 31...♗a1! 32. b3 ♗e7 33. ♗b7+♗f6, и, несмотря на две лишние пешки, задачу белых осложняет активность черных фигур. 32.f4! Остальное – дело техники. 32...gf 33. gf ♗f3+ 34. ♗g2 ♗d2 35. ♗d3 ♗e1 36. ♗f2 ♗h1 37. ♗g2 ♗e1 38. ♗b7 ♗e3 39. ♗b5+ ♗f8 40. a5 ♗e5 41. a6 ♗g5+ 42. ♗f2 ♗e4+ 43. ♗e3 ♗d6 44. a7 ♗e5+ 45. ♗f3 ♗f5+ 46. ♗g2 ♗g5+ 47. ♗h1, черные сдались.

### Х.Накамурэ – Ф.Каруана FIDE Grand Swiss, 10 тур

1. e4 e5 2. ♗f3 ♗f6 3. ♗c3 ♗c6 4. d4 ed 5. ♗d4 ♗b4 6. ♗c6 bc 7. ♗d3 d5 8. ed 0-0 9. 0-0 cd 10. h3 (обычно здесь играют 10. ♗g5) ♗e6 11. ♗f3 c5 12. ♗d1 ♗c3 13. bc ♗a5 14. ♗g5 ♗e4 15. ♗e4 de 16. ♗g3 ♗h8 17. a4! Новинка. Ранее встречалось 17. ♗ab1 ♗a2 18. ♗b7 e3!, и черные смогли активизировать слона. 17...♗fe8. Черные не могут просто разменять ладьи: 17...f6 18. ♗f4 ♗fd8 19. ♗e1! с двойной угрозой ♗e4 и ♗c7. 18. ♗d6 h6?! За черных сложно найти хорошее продолжение. 18...♗c7? не годится из-за 19. ♗e6!, возможно, стоило подготовить отступление ферзя 18...♗ac8. 19. ♗f4. Слон отступил, а пешка на h6 становится мишенью для атаки. 19...♗e7 20. ♗e3 ♗c8.

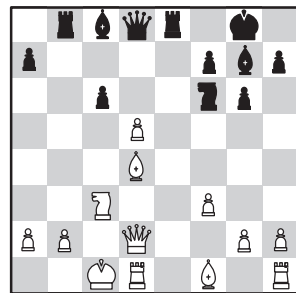


21. ♗h6!? Еще сильнее 21. ♗e5! f6 22. ♗f6! gf 23. ♗h6+ ♗g8 24. ♗ad1 ♗f8 25. ♗e6! ♗e6 26. ♗d7 с матом. 21...f6 (слона брать нельзя из-за 21...gh 22. ♗h6+ ♗g8 23. ♗e1! ♗d8 24. ♗e3) 22. ♗e4 ♗c3 23. ♗ad1 ♗e8 24. ♗d8 ♗g8 25. ♗h4 ♗c2 26. ♗1d3 ♗h7 27. ♗3d7 g5 28. ♗g3 ♗b1+ 29. ♗h2 ♗f5 30. ♗e7 ♗d8 31. ♗c7 ♗f4+ 32. ♗f4 gf 33. ♗g7+ ♗g8 34. ♗f6 ♗b1 35. ♗g7+ ♗f8 36. ♗d8 ♗g7 37. ♗g5 f3 38. g4 c4 39. ♗g3 ♗e4 40. ♗d2, связанные белые проходные пешки будут стоять слона, поэтому черные сдались.

Одну из самых ярких партий на турнире провел шахматист из Узбекистана Жавахир Синдаров, занявший в итоговом протоколе 8 место.

### С.Севян – Ж.Синдаров FIDE Grand Swiss, 6 тур

1. c4 g6 2. e4 e5 3. ♗f3 ♗g7 4. d4 ed 5. ♗d4 ♗f6 6. ♗c3 0-0 7. ♗e3 c6 8. ♗d2 ♗e8 9. f3 d5 10. ed cd 11. 0-0-0 ♗c6 12. ♗c6? Точнее аккуратное 12. ♗b1 или ♗c3. 12...bc 13. ♗d4 (на 13. cd следует 13...♗e3! 14. ♗e3 ♗d5 с сильнейшей атакой) ♗b8 14. cd.



14...c5!! Черные отвлекают слона от большой диагонали, получая несколько решающих темпов. 15. ♗c5 ♗a5 16. ♗d6 ♗f5 17. g4 ♗bc8 18. gf ♗d5! 19. fg (коня брать нельзя из-за мата: 19. ♗d5 ♗c3+! 20. ♗b1 ♗d5 21. ♗d5 ♗e1+ 22. ♗d1 ♗d1x) hg 20. ♗h3 ♗c3 21. ♗c8 ♗c8 22. ♗d3 (взятие коня снова ведет к мату: 22. bc ♗c3+ 23. ♗b1 ♗b5+ 24. ♗b2 ♗c1+ 25. ♗c1 ♗b2x) ♗a2 23. ♗c7 ♗d1, и белые сдались.

А.Русанов



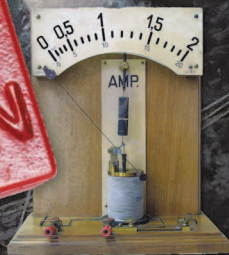
Индекс 90964



# ПАРУС И ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

Возможно ли такое сочетание?

*Игрушки с физикой*



ISSN 0130-2221 23010



(ПОДРОБНЕЕ — НА С. 36 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)