ФЕВРАЛЬ
ISSN 0130-2221
2024 · № 2

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Португальские слова

Португальский язык происходит из латинского; таким образом, основная масса его слов (так называемые исконно португальские слова) представляет собой результат постепенного исторического изменения соответствующих латинских слов. Кроме того, португальский язык заимствовал в разные периоды своей истории слова из разных языков. В данной задаче современные португальские слова записаны в левой колонке, а слова, к которым они восходят (латинские и других языков), – в правой.

Все слова, приведенные в левой колонке, делятся по происхождению на три класса: исконно португальские, ранние заимствования и поздние заимствования.

chegar	-	plicare
praino	-	plaine
plátano	-	platinum
chão	-	planum
plebe	-	plebem
cheio	-	plenum
prancha	-	planche

ЗАДАНИЕ. Укажите для каждого португальского слова, к какому из трех классов оно принадлежит.

ПРИМЕЧАНИЕ. В португальском языке сочетание ch читается как ш.

Из книги «Задачи лингвистических олимпиад»

КВАНТ

ФЕВРАЛЬ 2024 № 2

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Юлий Борисович Харитон

(к 120-летию со дня рождения)

Л.БЕЛОПУХОВ

Юлий Борисович Харитон – без сомнения, самая легендарная личность в истории науки в нашей стране. И не только в истории науки. Вот справка из Большой Российской Энциклопедии: «*Юлий Борисович Харитон – физик-теоретик, физико-химик, трижды Герой Социалистического Труда, доктор физико-математических наук, академик АН СССР и РАН. Один из руководителей советского проекта создания атомной и водородной бомбы, главный конструктор и научный руководитель конструкторского бюро КБ-11*».

За скупыми словами *один из руководителей* на самом деле скрывается второй по значению после И.В.Курчатова создатель ядерного оружия. Но кто же Харитон как ученый? Энциклопедическая справка неясна – теоретик он или экспериментатор; физик или химик? А должность главного конструктора предполагает не научную, а, скорее, инженерную деятельность.

Не вызывает вопросов конкретное *трижды Герой Социалистического Труда*. Ученых, отмеченных такой высочайшей наградой, было всего восемь. Ю.Б.Харитон был в числе тех четверых, которые первыми в 1954 году получили по третьей Звезде Героя. Тогда же трижды Героями стали И.В.Курчатов, К.И.Щелкин и Н.Л.Духов. А в 1953 году Харитон стал академиком (одновременно с Я.Б.Зельдовичем и А.Д.Сахаровым).

Однако самое поразительное и недосказанное в сухой энциклопедической справке – это тот факт, что пост главного конструктора, а потом научного руководителя одной и той же организации Ю.Б.Харитон занимал в течение 46 лет, а потом еще 4 года выполнял роль почетного научного руководителя, в общей сложности 50 лет (с 1946 по 1996 год)! Организация эта много раз меняла свое название, от секретных КБ-11, Приволжская контора Главпромстроя и Арзамас-16 до современного РФЯЦ-ВНИИЭФ (Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики). В 1946 году в КБ-11 было меньше 30 сотрудников, а в 1996 году в Ядерном центре их около 25 тысяч. Другого такого примера по длительности научного руководства одной и той же организацией нет ни в нашей стране, ни в мировой практике.

Ю.Б.Харитон был самым засекреченным и охраняемым ученым в СССР. Рассекречивание его имени происходило одновременно с рассекречиванием советского атомного проекта. Впервые в открытой печати имя Харитона прозвучало в газете «Правда» 26 января 1983 года в редакционной статье, посвященной сороколетию атомного проекта: «Особо важное государственное и научное значение имеют работы академика Юлия Борисовича Харитона в области атомной энергии и ядерной технологии, проложившие новые направления и пути для экспериментальных и теоретических исследований в области явлений, представляющих исключительный интерес». Но в этой многословной характеристике нет ни одного конкретного факта, в чем же заключалась важность и исключительность деятельности Ю.Б.Харитона. Есть только общая оценка этой деятельности.

Прошел год, и в академическом журнале «Успехи физических наук» (№2, 1984 г.)

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20240201


Юлий Борисович Харитон (1904–1996)

появилась статья о Харитоне в связи с его восьмидесятилетием. Это было исключительное событие – статья была подписана девятью академиками, в том числе президентом АН СССР, и тремя российскими Нобелевскими лауреатами. В статье впервые было сказано, что в 1943 году И.В.Курчатов привлек Харитона к участию в исследованиях «по урановой проблеме». Это однозначно означало – к работе по атомной бомбе. В статье обрисованы и личные качества Харитона: «Он исключительно скромен, демократичен, но эта демократичность не противоречит твердому, целеустремленному и успешному руководству работами огромного масштаба». И далее: «Он бесконечно добр – всегда готов оказать помощь нуждающимся в ней. Он интересный собеседник, прекрасный рассказчик и внимательный слушатель. Общение с Юлием Борисовичем доставляет необычайную радость, обсуждение с ним физических проблем, а также и вопросов, связанных с искусством и литературой, стимулирует мысль, расширяет горизонты его собеседников. Он глубоко чувствует и прекрасно знает поэзию и прозу. Он остро чувствует красоту природы во время долгих пеших прогулок. Она является для него неиссякаемым источником наслаждения и вдохновения, дополняющих живопись и музыку».

Не правда ли, необычные слова для статьи в сугубо научном академическом журнале. И как жаль, что эту статью прочитали лишь немногие читатели журнала «Успехи физических наук». Все остальные газеты и журналы проигнорировали юбилейную дату, по-видимому, все еще опасаясь нарушить завесу секретности. И только через 20 лет, уже в другом государстве, в Российской Федерации, в связи со столетием со дня рождения Харитона появилось дополненное переиздание книги, состоящей из нескольких десятков статей о нем и его собственных статей и выступлений. Название этого сборника «Юлий Борисович Харитон. Путь длиною в век».

Вот только несколько отрывков из статей о Харитоне, из которых можно получить некоторое представление о заслугах и облике этого человека.

И.Е.Тамм, академик, Нобелевский лауреат: «Редкое сочетание трех качеств – высокоталантливо одаренный ученый, руководитель и организатор, сочетающий широту горизонта с проникновением, предвидением и вниманием к деталям дела... Человеческие качества: личное обаяние, душевная чистота (это не преувеличение, а, скорее, очень сдержанное проявление моих чувств), полное отсутствие внимания к себе».

Я.Б.Зельдович, академик, начальник теоретического отдела КБ-11: «Мировой лидер науки о взрыве и детонации. Возглавляет работы по тщательному количественному, теоретическому и экспериментальному изучению взрыва и детонации. В трудной области с дорогостоящим экспериментом почти не знает неудач и срывов. Благородство и кристальная моральная чистота».

В.Е.Фортов, академик, вице-президент и президент РАН: «Он взял на себя грандиозную ответственность, пожертвовав, по существу, своей персональной научной карьерой. Его статей после 1940 года не появлялось в научных журналах. А ведь он был ученый высочайшей научной квалификации, человек нобелевского класса. Мудрый, скромный и великий человек, проживший такую долгую и неспокойную жизнь и столь много сделавший для нашей Родины».

А.А.Бриш, главный конструктор ядерных боеприпасов ВНИИ автоматики: «Годы работы в КБ-11, когда складывался новый коллектив, обстановка творчества, которую создавал Юлий Борисович, были незабываемы и на всю жизнь сохранились в памяти как лучшие годы жизни».

В.С.Пинаев, главный научный сотрудник ВНИИ экспериментальной физики: «Он демократично и непринужденно давал указания и поручения, каждый считал за честь выполнить его поручение. Дело было в нем самом, в его житейской мудрости, высокой компетентности, полной самоотдаче, внимательном и уважительном отношении к чужому мнению».

А.И.Павловский, академик, заместитель главного конструктора КБ-11: «Человек богатейшей внутренней культуры, прекрасно чувствующий литературу, музыку, живопись. В этой области у него столь же высокая точность и наблюдательность, как и в физике».

А.М.Шальников, академик, главный научный сотрудник Института физических проблем РАН: «Харитон – удивительный человек. Его единственный недостаток – в том, что у него нет недостатков. Работает столько, сколько нормальные люди не могут работать. Харитон – фантастически аккуратный человек. Всегда ровный, спокойный, он все неприятности прячет внутри себя. Это хорошо для окружающих, но плохо для него самого».

Это – лишь малая часть из десятков отзывов о Харитоне, в которых вновь и вновь повторяются аналогичные восторженные слова. А вот что сказал о Харитоне его антипод (в буквальном и переносном смыслах) Эдвард Теллер, создатель американского термоядерного оружия. В письме в Министерство энергетики США (именно этому органу подчинены все организации и комиссии США по использованию ядерной энергии в мирных и военных целях) в 1995 году он обратился с предложением о присуждении Харитону премии Ферми, одной из самых престижных американских научных наград, и предложил такую формулировку награждения: «.... за оригинальный изначальный вклад в концептуальное и теоретическое обоснование получения энергии атомного ядра, за весомый личный вклад в осуществление прикладных разработок в области ядерной энергии для мирных и военных целей в исключительно сложных условиях и за полувековое высокоэффективное техническое руководство научными исследованиями и прикладными разработками, включая независимое создание термоядерных взрывчатых веществ». В этих насыщенных информацией и поэтому трудных для беглого восприятия строках о Харитоне по сути сказано основное, что касается его научно-технического руководства. И это сказано ученым, который тоже был руководителем в такой же отрасли и хорошо понимал все трудности и значение этой работы.

Все приведенные выше высказывания – это воспоминания о Харитоне. А вот высказанное ему приветствие в день шестидесятилетия, которое от имени всех сотрудников руководимого им теоретического отдела КБ-11 произносит академик А.Д.Сахаров: «...Теоретики – народ шумный, единодушие по какому-нибудь вопросу у них редкость, но величайшее уважение, переходящее в изумление, к Вашему труду, к Вашему мнению объединяет нас так же, как и всех работников нашего коллектива. Мы всегда чувствуем за Вашим высказыванием глубокое стремление к истине, внутреннюю правдивость и честность, уважение к мнению всех участников обсуждения. Особенно близка теоретикам широта Ваших научных взглядов, Ваше настойчивое требование знать в 10 раз больше, чем нужно для непосредственного истолкования. Вы всегда стремитесь к большим и важным задачам, никогда не ограничиваете свою долю ответственности местными рамками, в любом вопросе исходя из широких государственных интересов. Но у Вас при этом остается огромный запас внимания к живым людям, которые Вас окружают и с Вами работают, остается полный запас общечеловеческих интересов и увлечений. Все это заставляет нас видеть в Вас не только глубокоуважаемого руководителя, но и дорогого друга и старшего товарища». Это приветствие было впоследствии случайно обнаружено в архиве писем Юлия Борисовича. Оно оставалось неизвестным, о нем знали только авторы и адресат.

В сделанных выписках по сути сказано достаточно много, чтобы судить о совершенной исключительности этого человека. Но все же, в связи с юбилейной датой, вспомним более детально и конкретно жизнь и деятельность Юлия Борисовича Харитона.

Совсем юный Юлий

Детство и юность

Ю.Б.Харитон родился 27 февраля 1904 года в Петербурге. Фамилия Харитон – греческого происхождения, но эти возможные корни греческого происхождения остались ему неизвестными.

Отец, Борис Иосифович Харитон, имел юридическое образование, но рано занялся литературно-издательской деятельностью, работая в редакциях кадетских газет. В 1918 году организовал в Петрограде «Дом литераторов» – клуб для общения (и некоторой материальной поддержки) столичной интеллигенции. Осенью 1922 года руководство «Дома литераторов» было арестовано и выслано из России вместе с другими деятелями культуры, представителями «идеологически чуждой пролетариату» интеллигенции. Печально известный «философский пароход» высадил изгнанников в Германии, но Б.И.Харитон в конце концов обосновался в Риге, где стал издавать эмигрантскую газету «Сегодня». В 1940 году в соответствии с соглашением с Германией Латвия стала одной из республик СССР. Вскоре Б.И.Харитон был арестован и приговорен к 7 годам лагерей. Через год он умер или в лагере, или по дороге в лагерь.

Мать Ю.Б.Харитона, Мирра Львовна Буровская, была профессиональной актрисой. Она играла и в Московском художественном театре, и в Малом театре. Небольшого роста, худощавая, с нежными чертами лица, она идеально подходила к ролям молоденьких девушек и даже девочек (большой успех она имела в роли Митиль в романтической «Синей птице» Метерлинка). Поэтому она обязательно участвовала в гастрольных поездках московских театров. В одной из поездок она встретилась в Петербурге с Борисом Харитоном. Состоялась свадьба. Родился Юлий. У Мирры были от предыдущего брака две дочери. В новой семье стало трое детей. Сводные сестры очень полюбили своего младшего брата, и он полюбил их. Но все равно прочной семьи и уютного детства не получилось. Мать разъезжала по гастролям, вечером – спектакли, днем – репетиции. Тем не менее, она сумела привить маленькому Юлию интерес к искусству, к чтению и к музыке. Этот интерес у него остался на всю жизнь. Отец, вращающийся в литературных кругах, проводил вечера в богемной клубной обстановке, пристрастился к карточной игре. Семья распа-

Семилетний Юлий с сестрами Лидой и Аней и воспитательницей Розалией Лоор

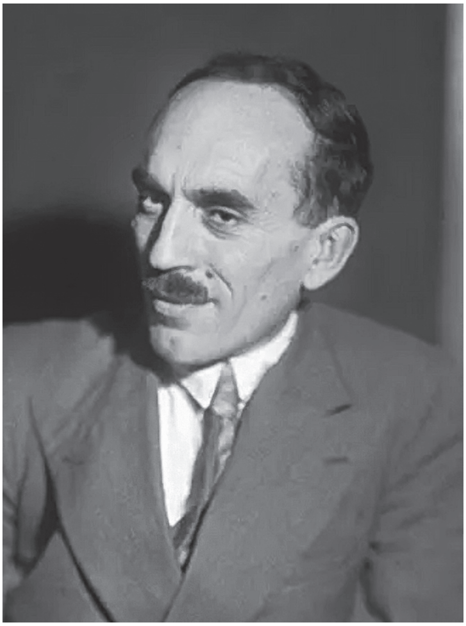
лась. Заболевшая мать в 1910 году уехала лечиться в Германию, где вскоре вышла замуж за известного психолога, ученика Фрейда. В 1932 году они эмигрировали в Палестину и прожили там долгую, спокойную и обеспеченную жизнь.

Но дети, Юлий и его единокровные сестры, не оказались брошенными. Отцу повезло найти для детей бонну (с обязательным обучением немецкому языку). Она была родом из университетского эстонского города Дерпт (Тарту), хорошо образована и учила детей не только немецкому языку, но и многому другому. Ее звали Розалия Лоор, и дети называли ее Ролли. В своей автобиографии Ю.Б.Харитон напишет: «В дальнейшем эта простая, хорошая и добрая женщина заменила нам мать». Юлий не мог учиться в гимназии (препятствовала трехпроцентная норма, ограничивающая классическое гимназическое образование для евреев). Розалия нашла способного студента, который не только подготовил Юлия к поступлению в реальное училище, но и помог способному юноше окончить его за пять лет вместо семи. Любимыми предметами Юлия стали математика, физика и химия.

В 1917 году 13-летнему Юлию пришлось одновременно с учебой начать трудовую жизнь. Сначала он работал в библиотечном архиве, но потом стал учеником механика и электрика в телеграфных железнодорожных мастерских. Такое раннее взросление юноши помогло семье выжить в тяжелых обстоятельствах наступившей разрухи. Кроме того, в 1918 году стало действовать правило о предоставлении высшего образования только тем, кто имел рабочий стаж.

Харитон поставил себе целью поступить в Политехнический институт, и в 1921 году он легко стал студентом электромеханического факультета этого института. На втором семестре он попал в лекционный поток нескольких факультетов, где лекции по физике читал уже тогда ставший ведущим российским физиком Абрам Федорович Иоффе. И это стало поворотным пунктом всей жизни Харитона. В лекциях Иоффе соединялась самая современная атомная физика с классическими термодинамическими понятиями. Курс лекций назывался «Кинетическая теория газов». Юношу потрясла сама возможность объяснения термодинамических законов проникновением в глубинную сущность материи.

В середине семестра (в 17 лет) Юлий решает стать физиком и переходит на физико-механический факультет института. И сразу же делает такие успехи в лабораторных и практических занятиях, что его приглашает на работу в свою только что созданную лабораторию Николай Николаевич Семенов, будущий Нобелевский лауреат по химии. Через 4 года Харитон защищает дипломную работу по специальности «экспериментальная физика» и получает квалификацию «инженер-физик». Эти два названия, введенные А.Ф.Иоффе, и сейчас используются в фи-



Первый научный руководитель, будущий Нобелевский лауреат Николай Николаевич Семенов

зико-техническом и инженерно-физическом образовании.

В возрасте 21 года Ю.Б.Харитон становится научным сотрудником Петроградского физико-технического института.

Начало научной деятельности

Дипломная работа Харитона, как и его работа в научной лаборатории, была связана и с физикой, и с химией. Но, заканчивая институт, Харитон не только занимается наукой. В 1925 году опубликован «Задачник по физике», созданный им вместе с друзьями А.Ф.Вальтером и В.Н.Кондратьевым. Этот задачник стал первым советским вузовским задачником по физике и почти 30 лет использовался во всех технических вузах страны. А ведь его авторы были еще студентами, когда они его создали.

Этот задачник сделал имя Харитона известным всем физикам страны. А опубликование его первых научных работ вывело его имя на международную физическую и химическую арену. Поистине примечательный ранний восход! Уже через год работы он рекомендован А.Ф.Иоффе, П.Л.Капицей и Н.Н.Семеновым на прохождение научной стажировки в Кембриджской лаборатории Э.Резерфорда. Там он занимается точными лабораторными исследованиями взаимодействия альфа-частиц с веществом. Но лаборатория в целом переходит на исследования в области ядерной физики. И Харитон не только в курсе всех работ, ведущихся в лаборатории, он принимает участие в дискуссиях и обсуждениях. Однако его «ядерное» время еще не настало. В 1928 году 24-летний ученый становится доктором философии (по физике) Кембриджского университета, защитив диссертацию по своей экспериментальной работе с альфа-частицами.

Летние перерывы в работе Харитон использовал для поездок по Англии на мотоцикле и автомобиле, для путешествий по Европе с ее музеями и старинной архитектурой. Он становится заядлым и умелым фотографом.

Возвращаясь в 1928 году на родину, Харитон остановился в Берлине для свидания со своей матерью. И он был совершенно потрясен уже ставшими привычными для берлинцев маршами фашистских штурмовиков с лозунгами об избранности германской нации и антисемитскими призывами. На страницах газет шла борьба фашистской демагогии с лозунгами социалистов и коммунистов. Знакомые берлинские физики и интеллигентное окружение его матери уверяли, что все это – только политиканство и шутовство, что фашистов никто не воспринимает всерьез и вскоре о них забудут.

Но история решила по-другому. Через 4 года Гитлер стал рейхсканцлером, а через 10 лет Германия развязала мировую войну. Харитон предвидел такой поворот событий. Вернувшись в Физико-технический институт, он решил направить свою научную работу на путь укрепления обороноспособности родной страны. Это решение было еще одной вехой, определившей его жизненную судьбу. Областью науки, которая объединяла физику и химию в его решении, стала наука о взрывах и детонации. Собственно говоря, такой науки еще не существовало – в основном были лишь опытные достижения отдельных ученых (например, создание А.Нобелем динамита). Лабораторным исследованиям мешала опасность работы со взрывчатыми веществами.

И Харитон организует лабораторию по изучению взрыва и детонации в только что созданном Н.Н.Семеновым Институте химической физики. Эти исследования соответствуют названию нового института (и новой науки). Взрыв и детонация, по глубокому убеждению Харитона, должны изучаться не только как химические явления. Важнейшую роль в них должны иметь газодинамические законы ударных волн.

Для создания теории прежде всего нужно было получить экспериментальные данные о параметрах взрыва и детонации. А для этого необходимы были специальные приборы – датчики высоких давлений, сверхбыстрая киноаппаратура и т.п. За 10 лет экспериментов и их анализа Харитон стал виднейшим ученым в области взрыва и детонации не только в нашей стране, но и в мировой науке. Самое важное в его работах – это выявление пределов детонации, критической массы и критического размера. В теоретическом рассмотрении этих вопросов активное участие приняли выдающийся 20-летний теоретик-физик Яков Борисович Зельдович, будущий академик и трижды Герой Социалистического Труда, и Кирилл Иванович Щелкин, тоже будущий трижды Герой Социалистического Труда и член-корреспондент Академии наук. В 1935 году Ю.Б.Харитону по совокупности работ, без защиты диссертации присваивается ученая степень доктора физико-математических наук.

Характерной чертой руководства лабораторией взрывчатых веществ, как она официально называлась, было обеспечение полной безопасности работ с взрывчатыми веществами, строжайшее выполнение разработанных Харитоном правил техники безопасности. За годы его руководства и за многие последующие годы, когда лабораторией руководили его ученики, в ней не было ни одного несчастного случая. И, наверное, решающую роль в обеспечении безопасности работы сыграли личные

На стажировке в Кембридже (1928 г.)

качества Харитона – необычайная доброта и любовь к людям, которые у него развились именно в эти годы.

Безусловно, немалую роль значило и изменение его семейного статуса. Еще до отъезда в Англию он обратил внимание на артистку балета Марию Николаевну Дубовскую, в танце которой «сочетались тончайшая грация и обаятельность облика», как писал Харитон много лет спустя в своих «Биографических записях». Вскоре после его возвращения из Англии они стали одной семьей. «До сих пор не могу понять, – пишет он в этих Записях, – почему Мусенька ⟨так и только так он называл ее всю жизнь⟩ полюбила меня, тогда как у нее было столько гораздо более интересных поклонников. Очень уж мне повезло. Чем дольше мы жили вместе, тем больше к любви добавлялось уважения, открывались все новые человеческие качества. Чуткость, доброта, прямота, смелость – всего не перечислишь».

А вот что написал А.Ю.Семенов, внук Ю.Б.Харитона и одновременно внук академика Н.Н.Семенова (дочь Харитонов

С женой Марией Николаевной и дочерью Татьяной (1940 г.)

была замужем за сыном Семеновых): «Бабушка была совершенно необыкновенным человеком, сочетая в себе широчайшую культуру, глубокий ум, тонкий вкус, естественную доброту, способность к самопожертвованию, терпимость и дар сопереживания... Не желая умалить личность деда, все же рискну предположить, что во многих областях культуры и человеческих взаимоотношений он испытал влияние бабушки».

Вскоре после замужества Мария Николаевна оставила беспокойную жизнь артистки, преподавала языки, вела литературно-издательскую работу. Но главным в ее жизни стало создание необходимых условий для творчества Юлия Борисовича Харитона.

Ядерная физика

Когда лаборатория Харитона (вместе с Институтом химической физики) отделилась от Ленинградского физико-технического института, сам он регулярно посещал семинар по ядерной физике, который начал вести в ЛФТИ Игорь Васильевич Курчатов, заведующий только что созданной лабораторией атомного ядра. Это был 1932 год, переломный год в физике микромира. Открыт нейтрон, создана протонно-нейтронная модель атомного ядра, начались работы по искусственной радиоактивности. Энрико Ферми в Италии, Фредерик и Ирен Жолио-Кюри во Франции несколько лет ведут работы по взаимодействию нейтронов с атомными ядрами различных элементов, в том числе и с ядрами урана. Присуждение этим ученым Нобелевских премий (Жолио-Кюри – по химии в 1935 году и Ферми – по физике в 1938 году) стало признанием важности этих работ и для развития теории атомного ядра, и для практических целей – получения так называемых меченых атомов.

В 1934 году немецкий физикохимик, первооткрыватель элемента рения Ида Ноддак, анализируя результаты опытов Жолио-Кюри и Ферми, сделала предположение о том, что ядра тяжелых элементов при попадании в них нейтрона могут разделиться на две или три части, имеющие очень большую энергию. Поскольку она занималась физической химией и электрохимией, она свои соображения опубликовала в журнале прикладной химии. Но физики не читали химических журналов, а химикам никакого дела не было до атомных ядер. Поэтому гипотеза Ноддак прошла незамеченной. Особенно протестовал против этой гипотезы немецкий физик и радиохимик Отто Ган, директор Химического института имени кайзера Вильгельма.

Но прошло четыре года, и все изменилось. Отто Ган со своим помощником Фрицем Штрассманом, повторяя опыты Ферми с облучением медленными нейтронами урана, доказали факт деления ядер на две части и появления из ядер урана химических элементов середины периодической системы. Статью об этом открытии они обозначили датой 17 декабря 1938 года. Уже через две недели, 4 января 1939 года она была напечатана в одном из самых известных научных журналов – в журнале «Естественные науки», который читали и химики, и физики.

К этому времени уже почти 30 лет с Отто Ганом работала талантливая австрийская физик и радиохимик Лизе Мейтнер. Именно она убедила Гана в возможности делении ядра урана. (Некоторые историки физики считают, что именно она сделала те опыты, которые заставили Гана поверить в деление ядер.) Вскоре после этого она была вынуждена покинуть Германию и обосновалась в Стокгольме. И Ган послал ей письмо об окончательном подтверждении гипотезы о превращении ядер урана. Мейтнер (вместе со своим племянником физиком Отто Фришем) проделала необходимые расчеты и показала, что в массе урана реакция деления ядер может носить цепной характер, а также впервые оценила энергию, которую будут иметь продукты этой реакции – в десятки миллионов раз больше, чем в химических реакциях горения и взрыва.

Статья Л.Мейтнер и О.Фриша в журнале «Природа» , опубликованная 11 февраля 1939 года, произвела сенсацию в научных кругах. И дело было не только в поражающей воображение величине энергии. Но вскоре Нильс Бор опубликовал расхолаживающую статью, в которой писал о практической невозможности осуществить процесс деления в большой массе урана. Ведь в природе этого не происходит. Природный уран состоит из двух изотопов. Основной изотоп, уран-238, имеет столь малую вероятность деления, что цепная реакция осуществляться не будет. Другого изотопа, урана-235, более способного к делению, в природном уране содержится всего 0,7%, а его выделение потребовало бы создания промышленного производства, недоступного для одной страны.

Хорошо известно, что произошло далее. Уже началась вторая мировая война. Группа европейских физиков, вынужденная эмигрировать в США от ужасов фашистского режима, сумела понять, что такая страна, как США, способна создать промышленное производство изотопа урана-235. И Америка сможет и должна обогнать Германию в создании «супербомбы». Ведь именно в Германии была открыта такая возможность, и там наверняка уже велись такие работы.

В 1944 году Отто Ган стал Нобелевским лауреатом «за открытие расщепления тяжелых ядер». Трудно переоценить роль Лизе Мейтнер в этом эпохальном открытии. Ей принадлежит и сам термин «деление», взятый ею из биологии. Недаром в журналистике даже возникла характеристика Мейтнер – «Мама атомной бомбы». «Отцом» атомной бомбы журналисты называли Отто Гана, а иногда – Альберта Эйнштейна, автора знаменитого соотношения $E = mc^2$, на основе которого Мейтнер, Фриш и Бор оценивали энергию реакции деления. Но когда в 1944 году Мейтнер вместе с Ганом рассматривались Нобелевским комитетом по химии как номинанты на присуждение премии, Мейтнер попросила исключить ее из числа номинантов – она чувствовала личную ответственность за возможные ужасные последствия их открытия. Позже стало известно, что когда ее в это время пригласили работать в Лос-Аламос (американский ядерный центр), она отказалась: «Я не буду работать на бомбу». Но все-таки справедливость восторжествовала, и в 1987 году имя *мейтнерий* было официально присвоено трансурановому элементу № 109, открытому в 1982 году в Дармштадском центре исследования тяжелых ионов.

В США работы по созданию ядерного оружия начались в 1942 году. Была создана Лос-Аламосская национальная лаборатория, развернулось строительство грандиозных заводов по производству чистого урана и разделению его изотопов, был сооружен первый в мире ядерный реактор для получения плутония. К научному руководству атомным проектом были привлечены лучшие научные силы (А.Комптон, Р.Оппенгеймер, Э.Теллер, Э.Ферми и др.). И уже через три с половиной года после начала работ в пустынной местности (Аламогордо, штат Нью-Мексико) 16 июля 1945 года состоялось первое испытание атомной бомбы.

А что же происходило в СССР? Как только в январе 1939 года была опубликована статья Л.Мейтнер и О.Фриша о делении ядер урана, сотрудники Института химической физики – заведующий лабораторией взрывчатых веществ Юлий Борисович Харитон и теоретик Яков Борисович Зельдович – немедленно занялись расчетами кинетики процесса деления урана, имеющего некоторые общие черты с цепными механизмами химических реакций горения и взрыва. Харитон и Зельдович работали с огромным напряжением, рассчитывая необходимые для цепной реакции деления исходные параметры и прежде всего – минимальные критические плотности. Они гораздо более точными расчетами надежно подтвердили те оценочные результаты, которые были приведены в работе Мейтнер и Фриша. Как и Нильс Бор, Харитон и Зельдович пришли к выводу, что для практического использования ядерной энергии необходим труднодоступный изотоп уран-235 или неизвестный пока трансурановый элемент, впоследствии названный плутонием. Две статьи Харитона и Зельдовича, опубликованные в Журнале экспериментальной и теоретической физики, очень встревожили американских физиков, которые решили, что в СССР тоже начались работы по созданию атомной бомбы.

Но они ошибались. Все силы государства были направлены на выпуск современных самолетов, танков и артиллерийских орудий. Единственно существенным было открытие в 1940 году явления самопроизвольного (без участия нейтрона) деления тяжелых ядер (Г.Н.Флёров и др.). Это было очень интересным и важным для развития теории атомного ядра, но не имело практического значения. А работы с облучением урана нейтронами тогда только еще намечались.

В 1940 году И.В.Курчатов на сессии отделения физико-математических наук АН СССР делает большой доклад «О проблеме урана», в котором рассказывает о работах Харитона и Зельдовича по этой проблеме. Но никаких конкретных решений об усилении работ по урану и выделении для этого необходимых средств не было сделано. Зато была создана очередная комиссия Академии наук по проблеме урана. Комиссия состояла из 11 академиков и двух старших научных сотрудников – Курчатова и Харитона, включенных в нее по настоянию Иоффе. Результатом работы комиссии стало постановление СНК СССР от 15 апреля 1941 года «О строительстве мощного циклотрона в Москве (с вводом его в строй в 1943 году)». А 17 мая 1941 года на заседании комиссии была рассмотрена работа Гуревича, Зельдовича и Харитона, в которой была впервые оценена критическая масса изотопа урана-235, необходимая для возбуждения цепной реакции деления урана с гигантским выделением энергии. Но эта работа тогда не была опубликована.

Разразилась война. Первой задачей уже в первом же месяце войны встала эвакуация научного оборудования из ленинградских лабораторий, все институты Академии наук перемещались на восток – в Поволжье, на Урал и в Среднюю Азию. Многое ценное оборудование удалось вывезти с последними эшелонами перед полной блокадой Ленинграда. А эвакуация семей сотрудников удалась только потому, что руководство этой операцией было поручено замечательной женщине – Марии Николаевне Харитон.

После возобновления работ ЛФТИ и Института химической физики в Казани в 1942 году все усилия были направлены на развитие оборонных работ. Я.Б.Зельдович заканчивал разработку порохов для реактивной артиллерии (знаменитых «Катюш»). Ю.Б.Харитон продолжил начатые еще до войны работы по созданию новых видов взрывчатых веществ для мин и других видов оружия, где использовалось не горение, а детонация. А главное, нужно было организовывать массовое производство этих веществ. Он был откомандирован в Москву, в секретный военный научный институт НИИ-6, где полностью проявились его не только научные, но и организационные таланты – умение руководить большими научными коллективами. И.В.Курчатов (вместе с А.П.Александровым) занимались защитой кораблей от новых немецких мин, реагирующих на магнитное поле, создаваемое стальным корпусом корабля. На некоторое время ядерная физика была забыта.

Но к концу 1942 года стала накапливаться информация о том, что в США и Великобритании (а, возможно, и в Германии) идут активные работы по изучению реакции деления урана. Эта информация поступала по двум каналам. Во-первых, успешная работа советской внешней разведки в области науки и техники дала некоторые данные о начале таких работ и о привлечении к ним выдающихся физиков-ядерщиков, прежде всего Э. Ферми. Но, пожалуй, основную роль сыграла научная компетенция сотрудника курчатовской ядерной лаборатории Георгия Николаевича Флёрова. Он тщательно изучил все иностранные научные журналы, еще поступавшие в университетскую библиотеку перед войной и даже в первые военные месяцы. И обнаружил, что к концу 1940 года во всех научных журналах исчезли статьи по ядерной физике и любая информация о работах в этой области физики. Физику-ядерщику Флёрову стало ясно, что это может быть вызвано не прекращением «работ по урану», а, наоборот, их развертыванием и полным засекречиванием. Исчезновение статей выдающихся физиков свидетельствовало об их участии в этих работах и о возможных достижениях. И Флёров стал регулярно посылать письма об этом в Президиум Академии наук. Но письма оставались без ответа.

Флёров стал повышать статус адресатов своих писем – в Совет народных комиссаров, в Народный комиссариат обороны СССР, в Центральный комитет КПСС. И наконец он понял, что главной властью в стране стал Государственный комитет обороны (ГКО), руководимый И.В.Сталиным. Уполномоченным этого комитета по науке был С.В.Кафтанов, председатель Всесоюзного комитета по делам высшей школы. К нему попадает письмо Г.Н.Флёрова, адресованное Сталину. Но в это же время ему передают найденную у убитого на фронте немецкого офицера, бывшего до мобилизации физиком-ядерщиком, тетрадь с расчетами по цепной реакции деления урана. С.В. Кафтанов вместе с А.Ф.Иоффе докладывают об этом Сталину и показывают письмо Флёрова. Вот выдержки из этого письма. «… Уже 10 месяцев прошло с начала войны. И все это время я чувствую себя в положении человека, пытающегося головой пробить каменную стену. Я надеюсь, что Вы поможете мне пробить стену молчания. Это письмо – последнее, после которого я складываю оружие и жду, когда в Германии, Англии и США удастся решить задачу. Результаты будут огромны». Это был вопль отчаяния человека, глубоко уверенного в своей научной правоте и беспокоящегося о судьбе отечества.

Выслушав разъяснения Кафтанова и тронутый отчаянностью в строках Флёрова, Сталин принял решение. Несмотря на тяжелейшую военную обстановку на южном направлении, 28 сентября 1942 года ГКО рассмотрел вопрос и принял постановление № 2352сс («сс» означало *совершенно секретно*) «Организация работ по урану». Первый пункт Постановления обязывал Академию наук СССР организовать специальную лабораторию для работ «по урану». Но только через четыре месяца Академия наук отреагировала на это Постановление. Главной причиной такой длительной задержки был вопрос о начальнике этой лаборатории и о научном руководстве всей урановой проблемой. С.В.Кафтанов от имени ГКО выдвинул кандидатуру А.Ф.Иоффе. Но семидесятилетний «главный физик», ссылаясь на возраст и нездоровье, выдвигает вместо себя кандидатуру 38-летнего заведующего лабораторией атомного ядра ЛФТИ Игоря Васильевича Курчатова, проявившего себя во многих областях физики. В январе 1943 года кандидатура Курчатова на пост руководителя новой Секретной лаборатории №2 была утверждена, и в распоряжении ГКО от 16 февраля 1943 года впервые прозвучало имя Игоря Васильевича Курчатова как научного руководителя всей проблемы «использования энергии атома для военных и мирных целей».

Секретная лаборатория №2 сразу же была создана не в Казани, а в Москве. Вначале в ней числилось всего 10 сотрудников, среди них – отозванные с фронта Г.Н.Флёров и К.И.Щелкин, ближайший сотрудник Ю.Б.Харитона в работах по детонации. Через несколько лет Лаборатория №2 стала называться Лабораторией измерительных приборов АН СССР (ЛИПАН), потом – Институтом атомной энергии имени И.В.Курчатова. Ныне это огромное научное учреждение – Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт».

Одним из пунктов намеченного Курчатовым плана работ было создание конструкции атомной бомбы. Ему было ясно, что это будет очень сложная конструкция, в которой соединятся ядерная физика, физика взрыва и детонации, автоматика и механика. Он знал только одного специалиста такого широкого и инженерного профиля. Это был его коллега по Ленинградскому физико-техническому институту Юлий Борисович Харитон. И когда Курчатов приехал из Казани в Москву, он разыскал Харитона и предложил ему возглавить конструкторский отдел лаборатории.

Харитон согласился не сразу. Через 45 лет, в своем ежегодном выступлении в саровском Доме ученых, он вспоминает: «Как-то летом 1943 года Игорь Васильевич пришел ко мне и стал говорить, что нужно возвращаться к прерванной работе над урановой проблемой. Его слова показались мне совершенным бредом. Немцы еще глубоко на нашей территории, надо всем, чем возможно, помогать армии. А тут – урановая проблема. Ведь ясно, что война закончится раньше, чем мы сделаем атомное оружие. Вот кончим войну – другое дело. Игорь Васильевич не торопил. Пригласил ходить на семинары в его лабораторию. Я начал ходить на семинары, сначала изредка, потом чаще. Мысли стали постепенно смещаться от тротила к урану. Вспомнилась наша третья (неопубликованная) статья с Зельдовичем и Гуревичем, где мы рассчитали критическую массу изотопа урана-235. Вспомнилась и моя статья 1937 года о ценрифугировании газовых смесей для разделения газов. Этот метод может пригодиться для получения нужного изотопа урана. И как раз приехал Зельдович вместе с Институтом химической физики, которому определено было с тех тор находиться не в Ленинграде, а в Москве. И пошли длинные разговоры. И Игорю Васильевичу уже не потребовалось больших усилий, чтобы я присоединился к собираемой им команде».

Но Харитон не говорит о том, что по просьбе Курчатова он написал и 7 июля 1943 года представил отчет «К вопросу о возможности возникновения взрыва в окиси урана», в котором изложил те результаты, которые он, Зельдович и Гуревич получили еще в 1941 году. Этот отчет содержал и некоторые новые результаты вычислений, которые впервые позволили говорить о создании атомной бомбы. Он сейчас существует в единственном рукописном (рукой Харитона) экземпляре с пометкой *совершенно секретно*.

С осени 1943 года Ю.Б.Харитон начал заниматься вплотную подготовкой к своей новой работе. Через год он уже ясно представлял все основные направления работы и принял участие в подготовке решающего постановления Государственного комитета обороны «О неотложных мерах по обеспечению развертывания работ, проводимых Лабораторией №2 Академии наук СССР». В этом постановлении наряду с подробным перечнем мероприятий по строительству лабораторных корпусов отдельным пунктом устанавливается «...Организовать при Лаборатории №2 конструкторское бюро с опытным механическим заводом и через месяц представить план работ на 1945 год». В этом Постановлении фамилия Харитона еще не звучит, хотя есть свидетельства о принципиальном согласии ГКО по вопросу о его руководстве создаваемым конструкторским бюро. И Харитон завершает свои работы в оборонном НИИ-6 и вплотную начинает заниматься созданием атомной бомбы В апреле 1945 года ему разрешают наравне с Курчатовым знакомиться с данными, получаемыми разведкой об американских работах.

16 июля 1945 года в пустынной местности штата Нью-Мексико впервые в мире произошло испытание атомной бомбы – чудовищный взрыв с почти мгновенным выделением энергии сто триллионов (10^{14}) джоулей, что эквивалентно по механическому действию взрыва (разрушениям и ударной волне) 21 тысяче тонн тротила. Но кроме механического действия ядерный взрыв сопровождается сильнейшим тепловым действием (пожары и ожоги) и радиационным облучением. Сама вспышка взрыва имела яркость, в тысячи раз большую яркости Солнца, и была видна на расстоянии до 300 километров. «Ярче ты-

сячи солнц» – этим образным выражением из древнеиндийского религиозного эпоса назвал взрыв атомной бомбы присутствующий на этом испытании научный руководитель работ по ее созданию Роберт Оппенгеймер. Но несмотря на ужасное впечатление от силы ядерного оружия, его американские создатели в лице своего руководителя через несколько дней после успешного испытания дали согласие на сброс ядерных бомб на японские города Хиросиму и Нагасаки. Это произошло 6 и 9 августа 1945 года. Одна из бомб была урановая, другая – плутониевая. Последствия были ужасны – погибло больше 150 тысяч человек. Мир был поставлен перед фактом монопольного обладания США новым беспрецедентным по мощности и невиданным по своим поражающим факторам оружием.

Советское правительство рассматривало эти события как угрозу самому существованию социалистического государства со стороны остального капиталистического мира. Единственной мерой от возможной государственной гибели было создание собственного ядерного оружия и обеспечение стратегического равновесия в обладании этим оружием. В США и правительство, и научные круги считали, что СССР, ослабленному войной, понадобится не менее 15-20 лет, чтобы пройти тот путь, который американская наука и промышленность прошли за четыре года. А за это время США будут обладать таким количеством ядерных бомб, что их хватит для уничтожения всей советской промышленности.

Речь шла о самом существовании нашего государства. Ясно отдавая себе в этом отчет, советские руководители круто изменили свое отношение к ядерному проекту. Они окончательно поняли, что это не чисто научный вопрос, а дело первостепенной государственной важности и для форсирования работ необходима мобилизация всех сил страны. А для координации всех работ нужен особый государственный орган, обладающий широкими полномочиями. И такой орган был создан.

20 августа 1945 года постановлением ГКО был создан Специальный комитет при ГКО во главе с заместителем председателя СНК СССР Л.П.Берия. На Специальный комитет была возложена организация всей деятельности по использованию атомной энергии в СССР – научно-исследовательские работы, разведка месторождений и добыча урана в СССР и за его пределами, создание атомной промышленности, атомно-энергетических установок, разработка и изготовление атомных бомб. Последняя задача была ключевой, ей были подчинены все остальные задачи. Состав Специального комитета был определен в девять человек, семь наркомов или их заместителей и два академика – П.Л.Капица и И.В.Курчатов. Этим же постановлением для подготовки всех вопросов создается Технический совет при Специальном комитете под председательством наркома сельскохозяйственного машиностроения Б.Л.Ванникова. В составе Технического совета семь академиков (в том числе Курчатов и Капица) и один профессор – Ю.Б.Харитон.

И еще одно важнейшее решение принимается – создается рабочий орган: Первое главное управление при СНК СССР, будущее атомное министерство, которое потом станет называться Министерством среднего машиностроения. В июне 1953 года Министерство среднего машиностроения становится во главе Атомного проекта. Технический совет переходит в это министерство. А вскоре в нем создается и Инженерно-технический совет для решения практических заводских проблем.

Мозговым центром Проекта по-прежнему является Технический совет. И попрежнему ставший уже академиком Ю.Б.Харитон в составе этого совета два раза в месяц участвует в обсуждении всех основных проблем по атомному оружию и атомной энергии. Но главное событие в жизни Харитона зафиксировано в решении Специального комитета от 16 марта 1946 года. Вот строка из этого решения: «Назначить профессора Юлия Борисовича Харитона главным конструктором КБ-11 по конструированию и изготовлению атомных бомб».

(Продолжение следует)

История криптосистемы RSA

Ю.ШУСТРОВА

Криптография

С древних времен у человека возникала потребность сохранить в тайне важную информацию. Прежде всего с этой задачей сталкивались военные, государственные служащие, врачи, юристы. С течением времени росла необходимость во все более и более надежных методах обеспечения конфиденциальности информации. Для разработки таких методов и возникла наука *криптография*.

Современная криптография основана на глубоких результатах таких разделов математики, как теория сложности вычислений, теория чисел, алгебра, теория информации. Таким образом, для хорошего понимания криптографических алгоритмов и умения оценивать их сильные и слабые стороны необходима уже серьезная математическая подготовка [1]. Частично это будет продемонстрировано в данной статье.

Криптография занимается методами преобразования информации, которые не позволили бы условному противнику извлечь эту информацию при перехвате. Такие методы называются *шифрами*.

Шифрование – это процесс применения шифра к защищаемой информации (*открытому тексту*). *Дешифрование* – это процесс, обратный шифрованию, т.е. преобразование шифрованного сообщения (*шифртекста*) в открытый текст.

Набор алгоритмов, с помощью которых осуществляется шифрование и дешифрование, называется криптографической системой. Криптографическая система состоит из множества P символов открытого текста, множества C символов шифртекста, множества ключей, а также множеств шифрующих и дешифрующих отображений.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20240202

Шифрующее отображение – это взаимно однозначное отображение f из множества P всевозможных элементов открытого текста в множество C всех возможных элементов шифртекста; дешифрующее отображение – функция f^{-1}, восстанавливающая открытый текст по шифртексту:

$$P \xrightarrow{f} C \xrightarrow{f^{-1}} P.$$

Под ключом в криптографии понимают сменный элемент шифра, который применяется для шифрования конкретного сообщения. О том, что такое ключ, будет понятно из дальнейших примеров.

Для более глубокого знакомства с криптографией рекомендуем книгу [2].

Шифр сдвига

Простейший пример криптосистемы – шифр сдвига. Пусть используется N-буквенный алфавит. Буквы заменяются на числа: 1, … …, N. Отправитель и адресат договариваются о величине сдвига b.

Пусть p – номер буквы в открытом тексте, тогда шифрование осуществляется функцией

$$c = f(p) = p + b \pmod N.$$

Шифрование состоит в замене каждой буквы открытого текста на букву с номером c, на b большим по модулю N. Дешифрование осуществляется функцией f^{-1}:

$$p = f^{-1}(c) = c - b \pmod N.$$

В этом примере b – это ключ шифра.

Например, зашифруем сообщение WHO в английском алфавите с ключом $b = 7$:

$$W = 23,\ f(23) = 23 + 7(\mathrm{mod}26) = 4 = D;$$

$$H = 08,\ f(8) = 8 + 7(\mathrm{mod}26) = 15 = O;$$

$$O = 15,\ f(15) = 15 + 7(\mathrm{mod}26) = 22 = D.$$

Таким образом, $WHO \to DOV$.

Шифр сдвига иногда называют шифром Цезаря, поскольку Юлий Цезарь применял такой шифр с $b = 3$.

Шифр сдвига – это пример криптосистемы с закрытым ключом. Такие криптосистемы отличаются тем, что и для шифрования, и для расшифрования используется один и тот же ключ, поэтому такие криптосистемы называются симметричными.

При симметричном шифровании ключ должен знать и отправитель, и получатель. Однако, возникает проблема, как сообщить друг другу секретный ключ, чтобы о нем не узнали посторонние. Эта проблема была решена с помощью методов асимметричной криптографии (шифрования с открытым ключом).

Криптография с открытым ключом

Отличие криптографии с открытым ключом от классической криптографии в том, что при использовании ключей получить ключ расшифрования из ключа шифрования сложно. Это приводит к тому, что ключ шифрования нет нужды держать в секрете. Можно рассказать всему миру, какой нужно использовать ключ шифрования для того, чтобы зашифровать сообщение, при этом ключ расшифрования сохранить в секрете. В результате не потребуется предварительно устанавливать канал связи между отправителем и адресатом для того, чтобы безопасно передать секретный ключ, который нужен для шифрования информации.

Начало криптографии с открытым ключом было положено работой американских криптографов У.Диффи и М.Хеллмана 1976 года.

В схеме шифрования с открытым ключом имеется два ключа – открытый, обозначаемый буквой e, и секретный, обозначаемый буквой d. Шифрующая функция E_e использует открытый ключ, дешифрующая D_d – секретный.

Дешифрование сообщения без знания секретного ключа практически неосуществимо, т.е. функция f необратима с точки зрения практической вычислимости. Такие легко вычислимые функции, для которых обратную функцию вычислить трудно, если не иметь некоторой дополнительной информации, называются *односторонними функциями с секретом*.

Можно привести следующий пример для демонстрации того, что такое шифрование на открытых ключах (см. [3]).

Пусть есть большой телефонный справочник, в котором имеются фамилии на все буквы алфавита, включая «ь», «ъ», «ы». Каждой фамилии поставлена в соответствие тысяча телефонных номеров. Предположим, что никаких компьютеров для работы с этим справочником нет. Будем брать букву открытого текста и шифровать эту букву каким-нибудь телефонным номером, относящимся к фамилии, начинающейся на эту букву. Из открытого текста, состоящего из букв, получится шифртекст, состоящий из телефонных номеров.

Затратив определенное количество усилий, все-таки можно восстановить исходный открытый текст. Для этого нужно найти заданный телефонный номер, посмотреть, какой фамилии он соответствует, восстановить букву и проделать так со всеми буквами.

Также можно предварительно составить другой телефонный справочник, в котором отсортированы номера телефонов. Тогда процедура расшифрования займет гораздо меньше времени. Телефонный справочник, в котором данные отсортированы по фамилии, – это открытый ключ, используемый при шифровании. Телефонный справочник, который отсортирован по номерам, – это закрытый ключ, которым будет пользоваться тот, кто расшифровывает текст.

Главный вопрос шифрования на открытых ключах: как придумать подходящую одностороннюю функцию?

Может показаться удивительным, но, несмотря на все многообразие самых хитроумных способов шифрования и дешифрования, которые на протяжении веков были разработаны самыми изощренными умами, в основе математического описания любого из них лежит всего одно математическое понятие – понятие односторонней функции.

В 1977 году американские математики Р.Ривест, А.Шамир и Л.Адлеман (R.L.Rivest, A.Shamir, L.Adleman) смогли придумать такую функцию, которая стала основой криптосистемы RSA, названной по первым буквам фамилий основателей. RSA – криптографический алгоритм с открытым ключом, основанный на вычислительной сложности задачи факторизации (разложения на простые множители) больших чисел, являющихся произведением двух простых.

Опишем, как происходит шифрование в системе RSA.

Описание криптосистемы RSA

Будем считать, что исходный текст переведен стандартным образом в целое число m. Выберем два достаточно больших простых числа p и q и вычислим произведение $r = pq$. Затем выберем число $e < r$, которое должно быть взаимно простым с $\varphi(r)$. Здесь $\varphi(r)$ – функция Эйлера от r, обозначающая количество натуральных чисел, меньших либо равных r и взаимно простых с ним. Поскольку p и q – простые числа, то $\varphi(r) = (p-1)(q-1)$.

Числа e и r являются открытым ключом, т.е. становятся общедоступными для использования в алгоритме шифрования.

Затем находится число d из условия:

$$de \equiv 1(\operatorname{mod} \varphi(r)), \qquad (*)$$

т.е. число, обратное к e по модулю $\varphi(r)$. Это делается с помощью алгоритма Евклида и может быть вычислено быстро.

Два простых множителя p и q и число d являются закрытым ключом шифрования.

Число $m < r$ шифруется следующей функцией:

$$E_e(m) = m^e (\operatorname{mod} r) = c,$$

т.е для шифрования нужно возвести m в степень e и вычислить остаток от деления на r.

Шифрование может быть выполнено очень эффективно даже для огромных значений r: для этого требуется менее секунды компьютерного времени.

Обратный алгоритм, используемый для дешифрования, состоит в возведении числа зашифрованного текста в степень d по модулю r. Дешифрование сообщения c осуществляется функцией

$$D_d(c) = c^d (\operatorname{mod} r).$$

Дешифрование также занимает меньше секунды компьютерного времени.

Корректность работы метода расшифровки следует из равенств

$$D_d(c) = D_d(E_e(m)) = m^{ed} (\operatorname{mod} r) = \\ = m^{k\varphi(r)} m (\operatorname{mod} r) = m (\operatorname{mod} r) = m$$

для некоторого натурального k. Здесь третье равенство следует из $(*)$, а четвертое – из теоремы Эйлера. (Для чисел m, не взаимно простых с r, необходимо отдельно сделать проверку по модулям p и q.)

Более подробно все сведения по теории чисел, необходимые для понимания алгоритма RSA, излагаются в книге [4].

Возникает вопрос, насколько надежна система RSA?

Чтобы раскодировать сообщение, нужно знать закрытый ключ d. На сегодняшний день единственный эффективный способ найти d основан на применении алгоритма Евклида к e и $\varphi(r)$, а для этого нужно знать разложение r на простые множители.

Задача о факторизации числа

Быстрых алгоритмов для решения задачи факторизации до сих пор не известно. Если же он будет найден, то скорее всего будет засекречен.

По оценкам Ривеста, если бы использовался лучший из известных алгоритмов и самый быстрый из современных компьютеров того времени, требуемое время работы составило бы около 40 квадриллионов лет! Именно эта практическая невозможность разложить на множители произведение двух больших простых чисел делает возможной систему шифрования RSA.

Вскоре Ривест понял, что допустил арифметическую ошибку в оценке времени. Тем не менее, учитывая доступные в то время методы разложения чисел на простые числа, на решение данной задачи все равно должны были уйти тысячи лет.

Как писал Ривест: «Проблема факторизации в то время была малоизвестной формой искусства. Литературы по этому поводу было мало. Было сложно получить хорошие оценки времени, которое потребовали бы уже предложенные алгоритмы».

Знаменитый математик и популяризатор математики Мартин Гарднер опубликовал статью об RSA в своей регулярной колонке в журнале Scientific American. Статья называлась «Новый тип шифра, на взлом которого ушли бы миллионы лет». В этой статье содержится фраза: «Ривест и его сподвижники не обладают доказательством того, что никто в будущем не найдет быстрый алгоритм, позволяющий разложить на множители такое большое число, как используемое ими r, или взломает шифр другим методом, о котором они не догадываются. Они считают обе возможности весьма отдаленными».

В качестве вызова читателям Scientific American создатели RSA предложили задачу, в которой предлагалось расшифровать сообщение, показанное на рисунке:

9686	9613	7546	2206
1477	1409	2225	4355
8829	0575	9991	1245
7431	9874	6951	2093
0816	2982	2514	5708
3569	3147	6622	6839
8962	8013	3919	9055
1829	9451	5781	5154

Таким образом, создатели RSA предложили взломать их систему.

Исходный текст представляет собой предложение на английском языке. Сначала оно было изменено на число стандартным методом, затем к нему была применена процедура шифрования с $e = 9007$ и 129-значным числом

$r = 114381625757888867669325779976146612010218296721242362562561842935706935245733897830597123563958705058989075147599290026879543541.$

Позднее данная задача получила название RSA-129. За ее решение была обещана награда в 100 долларов.

Итак, метод RSA надежен настолько, насколько сложно разложение на простые множители числа, являющего произведением двух простых. В связи с этим стали развиваться методы разложения чисел на простые множители. Прорыв в задаче факторизации составных чисел произошел не столько благодаря разработке более быстрых компьютеров, сколько благодаря теоретическим достижениям. Одним из математиков, которых привлекла эта тема, был К.Померанц.

Квадратичное решето Померанца

Факторизация чисел увлекала Померанца с тех пор, как его школьный учитель попросил разложить на множители число 8051, дав на эту задачу пять минут. Хотя Померанц хорошо считал в уме, он решил сначала найти быстрый путь к решению, а не просто проверять одно число за другим. «Я потратил пару минут на поиски хитрого способа, но забеспокоился, что трачу слишком много времени. Затем я с опозданием начал искать делители, но так и не справился с задачей».

В конце концов Померанц узнал об уловке, которую задумал его учитель. До 1977 года самым быстрым способом факторизации был метод факторизации Ферма и его обобщения. Метод Ферма основан на поиске таких целых чисел x и y, которые удовлетворяют соотношению $x^2 - y^2 = r$, что ведет к разложению на множители

$$r = (x - y)(x + y).$$

Используя метод Ферма, Померанцу потребовалось всего несколько секунд, чтобы разложить 8051 на 83 и 97.

На основе метода Ферма Померанц разработал новый метод, который превосходил другие методы факторизации более 10 лет. Это новое открытие, названное *квадратичным решетом*, имело очень серьезные последствия для развивающегося мира интернет-безопасности. Именно благодаря данному методу задача RSA-129 была решена.

Мы изложим базовую версию этого метода. Подробнее о методе квадратичного решета читайте в статье [5].

В методе факторизации, обобщающем метод Ферма, подбирается такое число x, что $x^2 \pmod r$ является квадратом. Однако такое число подобрать тяжело. Ключевым для дальнейшего продвижения явилось наблюдение, что если взять несколько значений $x^2 \pmod r$ для различных x, ни одно из которых не является квадратом, то их произведение уже может являться квадратом.

Например, разложим число 1411. Рассмотрим квадраты по модулю 1411:

$$38^2 \pmod{1411} = 33,$$

$$39^2 \pmod{1411} = 110,$$

$$40^2 \pmod{1411} = 189,$$

$$41^2 \pmod{1411} = 270,$$

$$44^2 \pmod{1411} = 525,$$

$$49^2 \pmod{1411} = 990.$$

Ни один из полученных результатов не является квадратом, однако результат произведения $33 \times 189 \times 270$ равен $980110 = 990^2$. Значит, $(33 \times 189 \times 270)^2 = 990^2$, отсюда следует, что

$$(33 \times 189 \times 270 - 990)(33 \times 189 \times 270 + 990)$$

– разложение на множители некоторого кратного 1411 числа. Тогда

$$1411 = \text{НОД}(1411, 33 \times 189 \times 270 - 990) \times \\ \times \text{НОД}(1411, 33 \times 189 \times 270 + 990).$$

Упражнение. Докажите, что если r делит $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, то

$$r = \text{НОД}(r, x - y) \cdot \text{НОД}(r, x + y).$$

Как проверить, есть ли среди данных чисел несколько, произведение которых дает квадрат? Перебирать всевозможные произведения даже в нашем примере слишком трудоемко. Используем метод, основанный на разложении на простые множители:

$$33 = 3^1 \cdot 11^1,$$

$$110 = 2^1 \cdot 5^1 \cdot 11^1,$$

$$189 = 3^3 \cdot 7^1,$$

$$270 = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1,$$

$$525 = 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1,$$

$$990 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 11^1.$$

Заметим, что при умножении чисел складываются показатели степеней простых чисел, входящих в их разложение. Поэтому удобно рассматривать *вектор показателей степеней* – это вектор, координаты которого суть степени вхождений простых чисел. Умножение чисел соответствует сложению векторов показателей. В нашем случае векторы имеют вид

$$\vec{a}_1 = \{0, 1, 0, 0, 1\};$$

$$\vec{a}_2 = \{1, 0, 1, 0, 1\};$$

$$\vec{a}_3 = \{0, 3, 0, 1, 0\};$$

$$\vec{a}_4 = \{1, 3, 1, 0, 0\};$$

$$\vec{a}_5 = \{0, 1, 2, 1, 0\};$$

$$\vec{a}_6 = \{1, 2, 1, 0, 1\}.$$

Произведение чисел будет квадратом тогда и только тогда, когда все степени будут четными. Поскольку нас интересует только четность, будем рассматривать координаты по модулю 2:

$$\vec{a}_1 = \{0, 1, 0, 0, 1\};$$

$$\vec{a}_2 = \{1, 0, 1, 0, 1\};$$

$$\vec{a}_3 = \{0, 1, 0, 1, 0\};$$

$$\vec{a}_4 = \{1, 1, 1, 0, 0\};$$

$$\vec{a}_5 = \{0, 1, 0, 1, 0\};$$

$$\vec{a}_6 = \{1, 0, 1, 0, 1\}.$$

Наша задача – найти линейную комбинацию этих векторов, дающую нулевой вектор $\{0,0,0,0,0\}$, т.е. такие ненулевые α_1, … …, α_6, что

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha_6 \vec{a}_6 = \{0, 0, 0, 0, 0\}. \qquad (**)$$

Из линейной алгебры известно, что если количество векторов больше, чем количество координат в каждом векторе, то такая зависимость существует. (Вспомните, что на плоскости любые три и более векторов линейно зависимы, в трехмерном пространстве – четыре и более.) В нашем случае 6 векторов в 5-мерном пространстве. Найти искомое разложение можно, решив систему линейных уравнений, получаемую из (∗∗):

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 = 0, \\ \alpha_3 + \alpha_5 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_6 = 0. \end{cases} \qquad (***)$$

В нашем случае решением является, например, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 1$, $\alpha_5 = 0$, $\alpha_6 = 0$, и мы снова получаем, что $33 \times 189 \times 270$ является квадратом.

В реальных задачах число векторов $\vec{a}_i$ достигает миллионов. Для решения таких систем разрабатываются специальные алгоритмы, позволяющие делать это достаточно быстро. Как только будут найдены линейно зависимые векторы, достаточно просто перемножить числа, соответствующие этим векторам, и получить искомый квадрат. Этот этап квадратичного решета Померанца называется *матричным*.

Однако может возникнуть проблема: в разложении чисел $x^2 \pmod r$ могут появиться большие простые множители. Тогда система будет большого размера и метод будет медленным. Поэтому перед матричным этапом делают *просеивающий* этап.

Поступим следующим образом: отбросим все достаточно большие множители. А именно, договоримся рассматривать только простые числа меньшие некоторого B, обозначим их число через $\pi(B)$. Заранее не известно, какие множители могут появляться в разложениях. Чтобы, не раскладывая числа, выявить те, которые по модулю r в разложении содержат простые не больше B, применяют просеивание, похожее на просеивание в методе решета Эратосфена.

А именно, для всех чисел $x^2 \pmod r$ по очереди проверяют, делятся они на очередное p или нет. Если делятся, то их не вычеркивают (как в методе решета Эратосфена), а делят на это p. Так делают до тех пор, пока не переберут все простые числа, меньшие B. Те числа, которые после этой операции перейдут в 1, нам подходят: они раскладываются на простые множители, меньшие B. Просеивание завершается, когда суммарное число найденных чисел будет больше числа $\pi(B)$. Тогда в системе (∗∗∗) неизвестных будет больше, чем уравнений, и она будет иметь решение.

В рассматриваемом нами примере $B = 11$, $\pi(B) = 5$. Просеивание также было выполнено: мы не рассматривали квадраты 42^2, 43^2, 45^2, 46^2, 47^2, 48^2. Их остатки содержат в разложении простые множители, большие B.

Просеивание – наиболее трудоемкий процесс, после него переходят к матричному этапу.

Вернемся к решению задачи RSA-129.

Разгадка RSA–129

Проект по взлому RSA-129 стартовал 3 сентября 1993 года под руководством математиков А.Ленстра и Д.Аткинса. Они объединили около 600 человек в 24 странах, 1600 персональных компьютеров. Координация осуществлялась через интернет и была одним из первых подобных проектов.

Для взлома RSA-129 была выбрана граница $B = 16333609$, а размер факторной базы составил $\pi(B) = 524339$. Основываясь на опыте работы со многими другими факторизациями, был сделан вывод, что необходимо собрать более 8 миллионов чисел таких, что $y = x^2 \pmod r$. К 21 марта 1994 года было собрано около 8,25 миллионов чисел. Это заняло около 220 дней просеивания.

Затем перешли к матричному этапу поиска линейно зависимых векторов. Напомним, что нужно было решать систему из 524339 линейных уравнений с 8,25 миллионами неизвестных.

Было найдено 205 зависимостей. Этот процесс занял 45 часов. Одна из этих зависимостей и дала искомое разложение r.

(Продолжение см. на с. 27)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2782–М2785, Ф2789–Ф2792

М2782. В стране некоторые города соединены (двусторонними) авиалиниями, причем из любого города в любой другой город можно попасть не более чем за n перелетов. Докажите, что все авиалинии можно распределить между n авиакомпаниями так, чтобы между любыми двумя городами можно было построить маршрут, в котором бы встретилось не более двух перелетов каждой авиакомпании.

Фольклор

М2783. Сумма цифр натурального числа равна s. Какова наибольшая возможная сумма цифр: а) у квадрата этого числа; б) у четвертой степени этого числа, если $s \geq 4$?

Фольклор

М2784. В треугольнике ABC провели биссектрисы AD и BE, они пересеклись в точке I. Затем все стерли, оставив только точки D и E. Найдите множество возможных положений точки I.

М.Дидин

М2785*. На плоскости дано конечное множество S из $n > 2$ точек общего положения (т.е. никакие три точки не лежат на одной прямой). Количество несамопересекающихся замкнутых n-звенных ломаных с вершинами в этих точках будем обозначать $f(S)$. Докажите, что

а) $f(S) > 0$ для любого S;

б) $f(S) = 1$ тогда и только тогда, когда все точки S лежат на выпуклой оболочке множества S;

в) если $f(S) > 1$, то $f(S) \geq n-1$; это значение достигается, когда внутри выпуклой оболочки множества S лежит ровно одна его точка;

г) если внутри выпуклой оболочки множества S лежат ровно две его точки, то

$$f(S) \geq \frac{(n-2)(n-3)}{2}.$$

Пусть $n > 2$. Будем обозначать $F(n)$ наибольшее возможное значение функции $f(S)$ по всем множествам S из n точек общего положения.

д) Докажите, что $F(n) \geq 3 \cdot 2^{\frac{n-8}{3}}$.

Е.Бакаев, Д.Магжанов

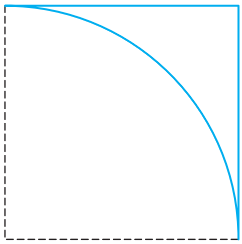
Ф2789. Длинная гладкая однородная и гибкая веревка массой $M = 3{,}2$ кг переброшена через тонкую перекладину с круглым поперечным сечением и находится в равновесии. Веревку немного смещают, и она начинает соскальзывать с перекладины. С какой по величине силой F веревка действует на перекладину в тот момент, когда длина веревки L с одной стороны в три раза больше, чем с другой? Какой угол α с вертикалью образует эта сила, если отношение диаметра D перекладины к длине L веревки равно 10^{-2}?

С.Варламов, В.Плис

Ф2790. Вода на международной космической станции (МКС) находилась в пластиковой упаковке с тонкими стенками в форме небольшого кубика. Стенки упаковки порвались, и вода достаточно быстро (поколебавшись немного) приняла форму шарика. Теплообменом воды с окружающим воздухом можно пренебречь, однако температура воды в шарике стала выше начальной температуры +20 °С (в кубике) на $\Delta t = 0{,}001°$ (на пределе экспериментальных возможностей такую величину еще можно измерить). Из какого количества молекул состоит эта порция воды? Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3, молярная масса $\mathrm{M} = 18$ г/моль, молярная теплоемкость $C = 9R \approx 75$ Дж/(моль · К), где R – универсальная газовая постоянная, коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 0{,}07$ Дж/м^2.

С.Варламов

Ф2791. Тонкую проволоку, замкнутую в кольцо, уложили на плоскую непроводящую и не намагничивающуюся поверхность так, что два участка проволоки лежат на смежных сторонах квадрата со стороной b, а третий, изогнутый, участок образует четверть дуги окружности, радиус которой тоже равен b (см. рисунок). В



разрыв проволоки вставили маленькую по размерам батарейку, и по проволоке пошел ток I. Какое по величине магнитное поле создано этим током в углу квадрата, к которому не подходит проволока (пунктирные линии на рисунке сходятся в этом углу)?

С.Варламов

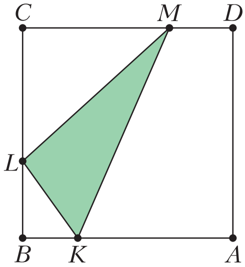
Ф2792. На гладкой горизонтальной поверхности вплотную к вертикальной стенке стоит массивный брусок массой M с выемкой в нем. Стенки выемки гладкие, а в сечении выемки любой плоскостью, перпендикулярной и стенке, и горизонтальной поверхности, вертикальная y и горизонтальная x координаты точек линии сечения выемки вертикальной плоскостью связаны зависимостью $y = (x-a)^2/(10a)$, где a – некоторая константа. Координата x отсчитывается от стенки, а координата y – от нижней точки выемки. На самом краю выемки возле стенки поместили маленькую шайбу массой $m \ll M$ и отпустили ее, не придав ей никакой скорости. В дальнейшем при движении брусок периодически останавливается. Какое расстояние проходит брусок между двумя последовательными остановками?

С.Варламов

Решения задач М2770–М2773, Ф2777–Ф2780

М2770. *В квадратном листе бумаги площади* 1 *проделали дыру в форме треугольника (вершины дыры не выходят на границу листа). Докажите, что из оставшейся бумаги можно вырезать треугольник площади* 1/6.

Возьмем точку внутри треугольника, спроектируем из нее вершины треугольника на контур квадрата $ABCD$ и соединим проекции друг с другом. Получится новый треугольник, содержащий исходный. Если при этом две вершины нового треугольника окажутся на одной стороне квадрата, увеличим эту сторону треугольника так, чтобы она совпала со стороной квадрата (возможно, эту операцию придется повторить для двух сторон квадрата). Достаточно доказать утверждение для последнего треугольника. Заметим, что внутри одной стороны квадрата (пусть это сторона AD) вершин треугольника нет. Поэтому можно считать, что вершины K, L, M треугольника лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD (см. рисунок), возможно, некоторые из них совпадают с вершинами квадрата.



Один из отрезков BL, CL не меньше 1/2. Пусть, для определенности, это отрезок CL. Если при этом $CM \geq 2/3$, то $S_{LCM} \geq 1/6$. Если же $CM < 2/3$, то $S_{ADM} \geq 1/6$.

А.Юран

М2771. *Для какого наибольшего N существует N-значное число со следующим свойством: в его десятичной записи среди любых нескольких подряд идущих цифр какая-то цифра встречается ровно один раз?*

Ответ: 1023.

Будем называть числа, обладающее свойством из условия, *хорошими*.

Оценка. Докажем по индукции, что в хорошем числе, содержащем не более k различных цифр $(1 \leq k \leq 10)$, не более $2^k - 1$ знаков. Отсюда для $k = 10$ будет следовать нужная нам оценка. (Далее в оценке будем считать, что запись числа может начинаться с любой цифры, включая 0.)

База $(k = 1)$ очевидна – используется лишь одна цифра, и она не может повторяться.

Выполним шаг индукции. Пусть $2 \leq k \leq 10$ и X – хорошее число, содержащее не более k различных цифр. По условию, одна из цифр встречается в нем ровно один раз. Заметим, что слева и справа от этой цифры записаны хорошие числа, в каждом из них используется не более $k-1$ различных цифр, поэтому в каждом из них (согласно предположению индукции) не более $2^{k-1} - 1$ знаков, а суммарно в нашем числе X тогда не более $\left(2^{k-1} - 1\right) + 1 + \left(2^{k-1} - 1\right) = 2^k - 1$ знаков, что и требовалось.

Пример. Пример хорошего числа, содержащего k различных цифр $(2 \leq k \leq 10)$, в записи которого ровно $2^k - 1$ знаков, также построим по индукции.

База $(k = 2)$: подходит число 101.

Шаг индукции. Пусть $3 \leq k \leq 10$ и X – хорошее число, в котором $k-1$ различных цифр и $2^{k-1} - 1$ знаков. Возьмем цифру a, которая не встречается в этом числе, и припишем к ней слева и справа число X, получим XaX. В полученном числе $2^k - 1$ знаков, и оно хорошее: ведь любая его часть из несколько подряд идущих цифр либо включает единственную в числе цифру a, либо является частью хорошего числа X.

А.Глебов

М2772. *В белых клетках шахматной доски* 100×100 *стоят* 100 *слонов, среди которых есть белые и черные. Они могут делать ходы в любом порядке и бить слонов противоположного цвета. Какого наименьшего числа ходов заведомо достаточно, чтобы на доске остался один слон?*

Ответ: 197 ходов.

Алгоритм. Все ходы будем делать так, чтобы на доске оставались слоны обоих цветов, пока слонов хотя бы два. Если есть возможность сделать *экономичное* взятие (так назовем ход, в котором слон за один ход бьет слона другого цвета, стоящего с ним на одной диагонали), делаем его. В противном случае сделаем неэкономичное взятие за два хода: выберем двух слонов разного цвета и рассмотрим путь, по которому первый слон мог бы пройти ко второму за два хода (такой путь всегда есть). Если на этом пути есть еще слоны, найдем среди них двух ближайших друг к другу слонов разного цвета, и пусть один из них побьет другого за два хода.

Изначально все слоны стоят на 99 белых диагоналях, параллельных главной белой диагонали. Тогда на одной из них стоит не меньше двух слонов. Назовем двух из этих слонов *особыми*. Если особые слоны разного цвета, экономичное взятие возможно уже на первом ходу вдоль этой диагонали; сделаем его. Пусть эти особые слоны одного цвета, скажем белые. Тогда при взятиях будем бить черными слонами белых. После того как будет взят первый особый слон, это ограничение снимается. Заметим, что сразу после этого возможно экономичное взятие. Поскольку всего взятий 99 и хотя бы одно из них экономичное, потребуется не больше $2 \cdot 99 - 1 = 197$ ходов.

Оценка. Расставим по 50 слонов на нижней и верхней строке доски, цвета слонов не важны. Рассмотрим все 199 белых диагоналей обоих направлений (в частности, угловые белые клетки доски мы тоже считаем диагоналями). При этом на всех 199 белых диагоналях изначально будут стоять слоны. За ход количество диагоналей, содержащих хотя бы одного слона, может уменьшиться не более чем на 1. Действительно, за ход «исчезнуть» может только та диагональ, с которой уходит слон для взятия другого слона. В конце, когда останется один слон, занятых диагоналей будет 2. Итого, в данной начальной расстановке понадобится не менее $199 - 2 = 197$ ходов.

А.Грибалко

M2773. *Окружность ω лежит внутри окружности Ω и касается ее внутренним образом в точке T (рис. 1). Пусть XY –*

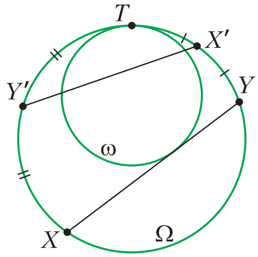


Рис. 1

переменная хорда окружности Ω, касающаяся ω. Обозначим X′ и Y′ середины дуг TY и TX, не содержащих точек X и Y соответственно. Докажите, что всевозможные прямые X′Y′ проходят через фиксированную точку.

Мы докажем, что прямые $X'Y'$ пересекают диаметр TS окружности Ω в фиксированной точке K (рис.2).

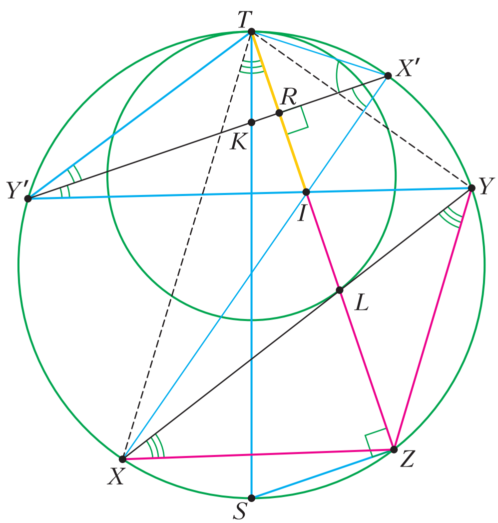


Рис. 2

Пусть L – точка касания XY и ω. Тогда, как известно, TL пересекает вторично Ω в середине Z дуги XY (это, например, следует из рассмотрения гомотетии с центром T, переводящей ω в Ω: при этой гомотетии XY переходит в касательную к Ω, проходящую через Z, поэтому эта касательная параллельна XY). Следовательно, TZ – биссектриса угла XTY, значит, XX', YY' и TZ пересекаются в одной точке I – центре вписанной окружности треугольника XYT. Пусть $X'Y'$ пересекает TZ в точке R. Из равенств углов $\angle Y'X'X = \angle TX'Y'$ и $\angle X'Y'Y = \angle TY'X'$ понимаем, что треугольники $X'Y'I$ и $X'Y'T$ симметричны относительно $X'Y'$. Отсюда $TI = 2TR$ и $TZ \perp X'Y'$, значит, $\angle TRK = \angle TZS = 90°$.

Нам достаточно доказать, что TK/TS постоянно. Но $TK/TS = TR/TZ = TI/(2TZ)$. Тогда достаточно понять, что TI/TZ постоянно или что ZI/ZT постоянно. По лемме о трезубце $ZX = ZI$. Значит, достаточно понять, что $ZX/ZT = \text{const}$.

Но из гомотетии с центром T следует, что $TL/TZ = r/R$ (где r и R – радиусы ω и Ω соответственно), а из подобия $ZXL \sim ZTX$ следует, что $ZL \cdot ZT = ZX^2$, откуда $\frac{R-r}{R} ZT \cdot ZT = ZX^2$. Видим, что отношение $ZX/ZT = \sqrt{\frac{R-r}{R}}$ – постоянно, это и завершает решение задачи.

Отметим, что в данной конструкции есть много интересных инвариантов. Например, из последних рассуждений и теоремы синусов несложно обнаружить, что радиус окружности (XZL) постоянен. Задача с такой постановкой предлагалась на Всероссийской олимпиаде 2001 года (автор – Т.Емельянова).

П.Кожевников, Ф.Петров

Ф2777.[1] *Белка, сидящая на ветке дерева, кидает орешек мышонку, находящемуся на горизонтальной поверхности. Через некоторое время орешек падает на*

[1] Автор решений задач Ф2777–Ф2780 – В.Плис.

поверхность у лап мышонка. Направление «от белки на мышонка» составляет угол β с вертикалью. Начальная скорость орешка наименьшая в таком полете. Какой угол α вектор начальной скорости орешка образует с горизонтом? Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

Дальность полета по горизонтали мяча, брошенного со скоростью v_0 с высоты h под углом α к горизонту (рис. 1), равна

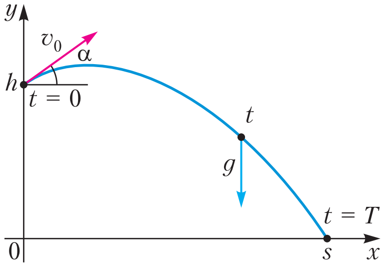


Рис. 1

$s = x(T) = v_0 \cos\alpha \cdot T$. Скорость v в момент падения не зависит от угла α и равна $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$. Это следует из закона сохранения полной механической энергии. Далее, в процессе полета скорость мяча изменяется со временем по закону $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t$. В момент падения $\vec{v}(T) = \vec{v}_0 + \vec{g}T$. Обратимся к треугольнику скоростей (рис. 2) и вычислим его площадь, которая равна половине произведения основания на высоту, или же половине произведения длин боковых сторон на синус угла между ними:

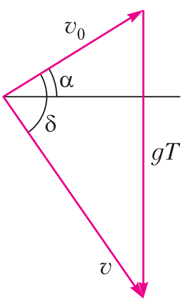


Рис. 2

$$\frac{1}{2} gTv_0 \cos\alpha = \frac{1}{2} v_0 v \sin\delta,$$

где δ – угол поворота вектора скорости за время полета. Отсюда получаем дальность полета по горизонтали:

$$s = \frac{1}{g} v_0 v \sin\delta.$$

В этом выражении только угол δ зависит от α. Следовательно, максимальная дальность достигается в том случае, когда вектор скорости за время полета поворачивается на угол $\delta = \frac{\pi}{2}$. Эта дальность равна

$$s = \frac{v_0\sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}.$$

Следовательно, минимальная скорость, с которой следует бросить мяч с высоты h на максимальную дальность s по горизонтали, а значит, и на максимальное расстояние $l = \sqrt{s^2 + h^2}$ от точки старта, равна

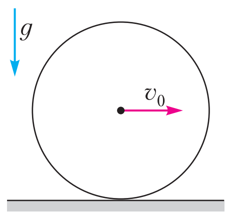
$$v_{0\,\min} = \sqrt{g(l - h)}.$$

При таком броске

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_{0\,\min}}{\sqrt{v_{0\,\min}^2 + 2gh}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{h}{l}}{1 + \frac{h}{l}}} = \sqrt{\frac{1 - \cos\beta}{1 + \cos\beta}} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2},$$

т.е. $\alpha = \frac{\beta}{2}$. Угол бросания равен половине угла, который направление на цель составляет с вертикалью.

Ф2778. *Из жесткой однородной проволоки длиной L изготовлен обруч. В первом опыте обруч кладут плашмя на шероховатую горизонтальную поверхность и ударом приводят в поступательное движение с некоторой горизонтальной скоростью. В процессе торможения перемещение каждой точки обруча равно s. Во втором опыте (см. рисунок) обруч устанавливают на ту же поверхность, удерживая его в вертикальной плоскости, и ударом приводят в поступательное движение; в начальный момент все точки обруча движутся с той же горизонтальной скоростью, что и в первом опыте. Известно, что в процессе скольжения угловое ускорение постоянно и равно* $\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{a}{R}$*, где a – модуль ускорения центра масс обруча. Какое число оборотов в системе центра масс совершит обруч к тому моменту времени, когда*



движение обруча перейдет в качение без проскальзывания? Коэффициент трения скольжения обруча по горизонтальной поверхности одинаков во всех точках этой поверхности.

В первом опыте $s = \frac{v_0^2}{2\mu g}$, где v_0 – начальная скорость обруча, μ – коэффициент трения. Во втором опыте в процессе движения скорость изменения импульса обруча равна сумме внешних сил (тяготения, реакции опоры и трения):

$$\frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Переходим к проекциям сил и ускорения на вертикальное и горизонтальное направления:

$$N = mg,\ F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg,$$

$$\frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = -\mu mg, \quad \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\mu g.$$

Отсюда с учетом равенства $R\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \mu g$ следует

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} + R\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = 0.$$

В процессе качения с проскальзыванием сумма $v + \omega R$ остается постоянной, равной своему начальному значению v_0. В момент перехода в качение без проскальзывания $v = \omega R = 0,5v_0$. Это произойдет через время $t = \frac{0,5v_0}{\mu g}$ после старта. К этому моменту угол поворота обруча

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right)t^2,$$

число оборотов

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{v_0^2}{16\pi\mu g R} = \frac{s}{4L}.$$

Ф2779. *В вертикальном цилиндре под легким подвижным поршнем содержится некоторое количество одноатомного идеального газа. Газ медленно нагревают. В процессе расширения газ совершает работу $A = 10U_0$, где U_0 – внутренняя энергия газа в начальном состоянии. Найдите отношение средних чисел соударений атомов газа со стенками в расчете на единицу площади за единицу времени в начальном и конечном состояниях. Трение считайте пренебрежимо малым.*

Среднее число соударений в расчете на единицу площади за единицу времени пропорционально концентрации молекул (или обратно пропорционально объему цилиндра) и средней скорости теплового движения молекул, которая пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры:

$$z = \frac{1}{4}nv_{\text{ср}} = \frac{1}{4}n\sqrt{\frac{3kT}{m}} \sim n\sqrt{T} \sim \frac{1}{V}\sqrt{T}.$$

Искомое отношение

$$\alpha = \frac{z_0}{z_1} = \frac{v_1}{v_0}\sqrt{\frac{T_0}{T_1}}.$$

В изобарическом процессе

$$A = p_0(V_1 - V_0) = \nu R(T_1 - T_0),\ \nu = \frac{p_0 V_0}{RT_0},$$

далее

$$\frac{p_0V_1}{p_0V_0} = \frac{T_1}{T_0} = \frac{V_1}{V_0} = 1 + \frac{A}{p_0V_0},$$

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{3}{2}\frac{A}{U_0}} = 4.$$

Ф2780. *В процессе нагревания газообразного гелия в количестве $\nu = 1$ моль молярная теплоемкость газа C растет с абсолютной температурой T по закону $C = R\frac{T}{T_1}$, где $R = 8,31$ Дж/(моль · К) – универсальная газовая постоянная, $T_1 = 400$ К – начальная температура. Найдите работу газа к тому моменту, когда объем газа станет минимальным.*

Зависимость $p(V)$ эскизно представлена на рисунке 1. По условию в малой окрестности состояния *2* молярная теплоемкость в процессе нагревания гелия равна $C = \frac{3}{2}R$, в этой окрестности происходит изохорное нагревание до температуры

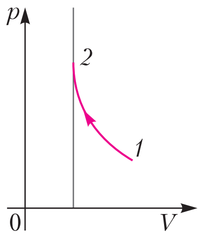


Рис. 1

$T_2 = \frac{3}{2} T_1$. По первому началу термодинамики,

$$Q_{12} = U_2 - U_1 + A_{12},$$

отсюда

$$A_{12} = \sum C(T) \Delta T - \frac{3}{2} R (T_2 - T_1),$$

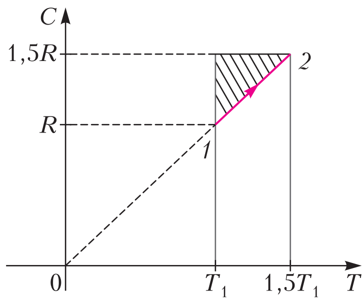


Рис. 2

т.е. работа газа численно равна площади заштрихованного треугольника на рисунке 2, взятой с отрицательным знаком:

$$A_{12} = -R \frac{T_1}{8} \approx -416 \text{ Дж.}$$

(Начало см. на с. 15)

Значения p и q оказались равными следующим числам:

$p = 3490529510847650949147849619903898$
$133417764638493387843990820577$,

$q = 32769132993266709549961988190834461413177642967992942539798288533$,

откуда секретный показатель степени d равен

$d = 1066986143685780244428687713289201$
$5478070990663393786280122622449663106312591177447087334016859746230655396854451327710905360609$5.

Возведя зашифрованное сообщение в степень d и взяв остаток от деления на r, получили

2008050013010709030023151804190001180500191721050113091908001519190906180 10705,

что в буквенном эквиваленте выглядит так:

THE MAGIC WORDS ARE SQUEAM ISHOSSIF RAGE.

Судя по всему, авторы RSA не заботились о смысле шифруемого теста.

После восьми месяцев работы 2 апреля 1994 года было объявлено о распаде RSA-129. Это случилось 16 лет спустя после публикации задачи в Scientific American. Честно заработанные 100 долларов участники проекта передали в фонд развития программного обеспечения.

Начиная с 1991 года компания предлагала премии гораздо большего размера за разложение на множители различных чисел, содержащих от 100 десятичных цифр до 607 десятичных цифр. В настоящее время остались нефакторизованными числа, содержащие 260 и более цифр.

Литература

1. *А.И.Музыкантский, В.В.Фурин*. Лекции по криптографии. – М.: МЦНМО, 2013.
2. *В.В.Ященко*. Введение в криптографию. – М.: МЦНМО, 2012.
3. Криптография с открытым ключом. – Лекции МФТИ.
4. *С.Коутинхо.* Введение в теорию чисел. Алгоритм RSA. – М.: Постмаркет, 2001.
5. *И.В.Агафонова.* Факторизация больших целых чисел и криптография. – 2006.

Задачи

1. У фокусника есть 10 цилиндров, в одном из которых сидит кролик. За один вопрос можно указать на 1 или 2 цилиндра и спросить, сидит ли там кролик (нам ответят «да» или «нет»).

Можно ли за 5 вопросов гарантированно найти цилиндр с кроликом?

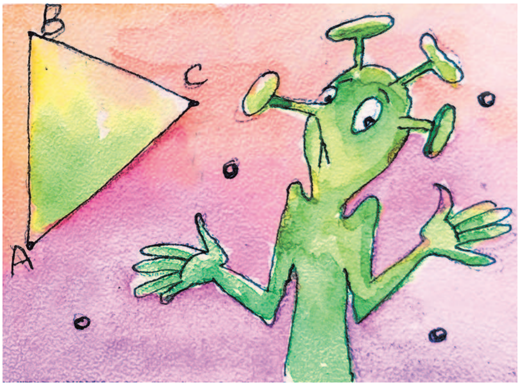
О.Подлипский

2. В кошельке лежали 100 рублей монетами по 1 рублю. Каждый из 50 человек подходил к кошельку и либо брал монету достоинством 1 рубль, либо клал в кошелек монету достоинством 2 или 5 рублей. Мог ли в кошельке в итоге оказаться ровно 201 рубль?

О.Подлипский

Эти задачи предлагались на муниципальном этапе Всероссийской олимпиады по математике в Московской области.

3. Пусть I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC. На продолжении AI за точку I и на продолжении AB за точку B выбраны соответственно точки N и M так, что $BCNM$ – паралле-



лограмм. Аналогично, на продолжении CI за точку I и на продолжении CB за точку B выбраны соответственно точки K и L так, что $BAKL$ – параллелограмм. Докажите, что прямые BI и LM перпендикулярны.

Н.Агаханов

4. На доске написаны числа 1, 2, 3, 4, ..., 99, 100 и 102. За одну операцию можно выбрать несколько чисел, среднее арифметическое которых – целое число, стереть эти числа и вместо них записать на доску их среднее арифметическое. За какое наименьшее число операций можно оставить на доске только одно число?

Н.Агаханов

Иллюстрации Д.Гришуковой

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся начиная с 8–9 класса, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, по адресу: savin.contest@gmail.com. Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором учитесь.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest

Желаем успеха!

21. Гонщик Петя тренируется на кольцевой трассе, длина которой – целое число километров. Он едет 1 км, минуту стоит, едет еще 2 км, минуту стоит, едет еще 3 км, минуту стоит и так далее, пока остановка не совпадет с начальной точкой, и тогда заканчивает тренировку.

а) Может ли случиться, что Петя не сможет закончить тренировку?

б) Вася тренируется по аналогичной схеме на более короткой кольцевой трассе, длина которой – тоже целое число километров. Могло ли случиться, что гонщики ехали с одинаковой скоростью, но у Пети ушло меньше времени на тренировку, чем у Васи?

Б.Френкин

22. Индийский школьник Радж закрасил центральную часть таблицы умножения от 1×1 до 19×19 так, как показано на рисунке 1, и перемножил числа в закрашенных клетках. Квантик выписал на доску по одному разу числа 1 и 19, по 3 раза – числа 2 и 18, по 5 раз – числа 3 и 17, по 7 раз – числа 4 и 16, …, по 17 раз – числа 9 и 11, а число 10 выписал 19 раз, после чего все числа на доске перемножил и возвел результат в квадрат. У кого получилось большее число – у Раджа или у Квантика?

Н.Авилов

23. Четыре квадрата с площадями a, b, c, d расположены в круге, как показано на рисунке 2. Докажите, что $ac = bd$.

Е.Бакаев

24. Дан 100-угольник, любые две соседние стороны которого перпендикулярны. На какое наименьшее количество прямоугольников его гарантированно можно разрезать?

Е.Бакаев

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285
16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304
17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323
18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342
19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361

Рис. 1

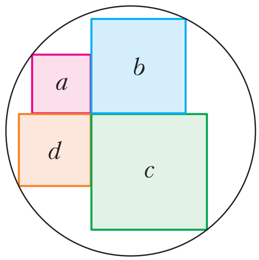


Рис. 2

Из Антарктики в Арктику – самолетом

А.СТАСЕНКО

– Надо их всех передружить между собой.
– А как их передружить? – спросил Чебурашка.

Каких только подвигов не демонстрировала авиация! Кто-то облетел вокруг земного шара, чтобы проверить деформацию времени, кто-то посадил лайнер на воду Невы, кто-то … А вот Общество дружбы животных предложило грант на доставку пары черных пингвинов из Антарктики в Арктику для их дружеских встреч с белыми медведями.

По условиям конкурса, доставка по кратчайшему расстоянию должна занять ровно сутки. Возник юридический вопрос: как будет выглядеть траектория полета в системе вращающейся Земли? – для своевременного оформления разрешений государств «под крылом самолета». Для этого пришлось ввести сферическую систему координат: широту $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, долготу $0 \le \varphi \le 360° = 2\pi$, расстояние от центра Земли $r = R + h$, где h – высота полета, $R \gg h$ – радиус Земли.

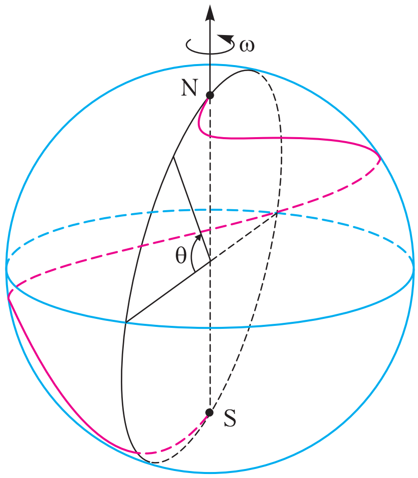
Кратчайшее расстояние между полюсами в системе «неподвижных звезд» равно πR, сутки составляют $T = 3600$ с/час $\cdot$ 24 часа $= 8{,}6 \cdot 10^4$ с. Значит, средняя меридиональная скорость самолета равна

$$v_\theta = \frac{\pi R}{2T} = \frac{\pi \cdot 6{,}2 \cdot 10^6 \text{ м}}{2 \cdot 8{,}6 \cdot 10^4 \text{ с}} \approx 113 \text{ м/с}.$$

Но Земля вращается под плоской траекторией самолета, так что локальное значение скорости ее поверхности равно (см. рисунок)

$$v_\varphi = \omega R \cos\theta = \frac{R \cdot 2\pi}{T} \cos\theta = 4 v_\theta \cos\theta.$$

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20240103



Следовательно, модуль скорости самолета над вращающейся Землей составит

$$v = v_\theta \sqrt{1 + 16\cos^2\theta}.$$

Получается, что при пересечении экватора $(\theta = 0)$ скорость самолета в атмосфере, которая вращается вместе с Землей, равна $v_{\max} = \sqrt{17} v_\theta \approx 460$ м/с. А параметры траектории самолета в рассматриваемом примере имеют вид

$$\varphi = 2\theta + \pi, \quad r = R + h.$$

Тут уж окончательно стало ясно, что нужен сверхзвуковой самолет, ибо максимальное значение числа Маха, т.е. отношения скоростей полета и звука в воздухе, равно

$$\text{M} = \frac{v_{\max}}{v_{\text{зв}}} = \frac{460 \text{ м/с}}{300 \text{ м/с}} \approx 1{,}5.$$

По сравнению с максимальной скоростью самолета дуновение пассатов и муссонов (встречное или попутное) выглядит незначительным.

Конечно, тут возможны всякие уточнения: ведь Земля – не совсем шар и за сутки слегка изменит положение относительно звезд, и вместо R можно взять $R + h$, и пингвинов незачем для начала транспортировать на южный полюс, и …

Но и без этих уточнений – разве не любопытно изобразить на глобусе проекцию траектории такого самолета на мелькающие под ним страны? Например, стартуя с Южного полюса S вдоль нулевого меридиана $(\varphi = 0)$ строго на север N со скоростью v_θ?

«На круги свои...»

А.БЕЛОВ, М.САПИР

Идет ветер к югу, и переходит к северу,
кружится, кружится на ходу своем,
и возвращается ветер на круги свои.

Екклесиаст

Периодичность в математике

Быть может, наибольшая привлекательность математики состоит в том, что одни и те же идеи возникают при решении самых разнообразных задач, казалось бы не имеющих ничего общего. В этой статье мы постараемся проследить за одной из общематематических идей – идеей повторяемости, цикличности, возвращаемости.

Многие идеи, сформулированные «в чистом виде», выглядят тривиальными, например принцип Дирихле. Но – удивительный факт – зачастую одно упоминание о такой «тривиальности» делает трудную до того задачу прозрачной. В чем здесь дело? Вы, наверное, встречали рисунки для детей, где надо найти, скажем, зайца в лесных зарослях. Мы хорошо знаем, как выглядит заяц, но где он сидит, сразу не видно. А если не сказать, что сидит именно заяц, то увидеть его очень трудно. Так и в математике полезно знать заранее, какие простые, но важные идеи часто скрываются в дебрях возможных рассуждений. В дальнейшем ваш опыт будет подсказывать вам, какие «звери» могут водиться в том или ином лесу. А теперь вернемся «на круги свои».

Цикличность в природе встречается повсюду: карусели и планеты, времена года и цифры в десятичной записи дробей – практически все сущее участвует в каком-то циклическом движении, «хороводе». Оказывается, есть общая причина, вызывающая периодичность.

В чем секрет периодичности? Так же, как при изучении живой ткани рассматривают под микроскопом одну ее клетку, рассмотрим вначале простую «одноклеточную» задачу.

Задача 1. *Найдите последнюю цифру числа* 2^{1000}.

Решение. Давайте поставим более общий вопрос: как выглядит последовательность окончаний степеней двойки? Для начала выпишем несколько членов:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 6,\ 2,\ 4,\ 8,\ 6,\ 2,\ 4,\ \ldots$$

Первой повторилась двойка, затем начали повторяться цифры 4,8,6 и, почти очевидно, что так будет до бесконечности. Но все же почему? Да потому, что только последняя цифра каждой степени определяет последнюю цифру следующей степени, а остальные цифры не влияют, так что повторение одной цифры вызывает повторение следующей, а значит, и всех последующих. Так возникает период. Теперь уже легко определить, что последняя цифра числа 2^{1000} равна 6 (проверьте).

Следующая задача является уже «двуклеточной»: ее решение аналогично решению задачи 1, если суметь сначала доказать, что произойдет повторение.

Задача 2. *Докажите, что последовательность остатков от деления на* 1990 *степеней числа 7 периодическая, причем длина периода не больше* 1990.

Упражнение 1. Найдите сотую цифру после запятой чисел 1/7 и 1/31.

Вам хорошо известно, что рациональное число разлагается в периодическую десятичную дробь. Рассмотрим последовательность цифр этой периодической или условно периодической дроби. Предположим, что само рациональное число нам неизвестно. Но есть автомат, который выписывает цифры десятичной дроби по порядку. Можем ли мы определить, какую очередную цифру напишет автомат, если знаем только одну предыдущую? Нет, не можем. А если мы знаем все предыдущие цифры? Все равно не можем, и вот почему: период и предпериод могут быть произвольно длинными и содержать произвольные наборы цифр, в том числе повторяющиеся куски, например:

$$\frac{1000}{3001} = 0{,}33322225924\ldots$$

Поэтому мы никогда не будем знать, где мы находимся: в периоде или в предпериоде.

(Продолжение см. на с. 34)

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20240204

...ни по чему-либо, что станет происходить с вами самими, вы не сможете удостовериться, движется ли корабль или стоит неподвижно, ...если только движение будет равномерным...

Галилео Галилей

...кажется, будто лодка стоит в воде неподвижно; а если мелькнет мимо коряга, то...думаешь: вот здорово летит коряга! А что сам летишь, это и в голову не приходит.

Гекльберри Финн

Отныне пространство по себе и время по себе должны стать тенями, и только особого рода их сочетание сохранит самостоятельность.

Герман Минковский

...когда слепой жук ползет по поверхности шара, он не замечает, что пройденный им путь изогнут, мне же посчастливилось заметить это.

Альберт Эйнштейн

...с математической мощью,...с безошибочным пониманием физической действительности ...Эйнштейн в течение десяти лет воздвигал здание своей теории...

Арнольд Зоммерфельд

В мир с сокрушительной силой ворвалась теория относительности. О ней неожиданно заговорили все...

Поль Дирак

Пространство воздействует на материю, «указывая» ей, как двигаться. Материя, в свою очередь, оказывает обратное действие на пространство, «указывая» ему, как искривляться.

Джон Уилер

...по теории относительности Эйнштейна все, любой объект, обладающий энергией, обладает и массой в том смысле, что он должен тяготеть к другим объектам.

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакома вам ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ?

Четверть века назад журналом «Физический мир», издаваемым Британским обществом физиков, среди ученых был проведен массовый опрос. Согласно нему, первенство среди величайших физиков в истории завоевал Альберт Эйнштейн, а важнейшим из физических открытий была признана его теория относительности. Создание и становление заключенной в теории новой физической картины мира сродни захватывающему детективу или приключенческому роману. Однако лишь несколько, возможно, не самых увлекательных страничек этого огромного труда оказались в школьных учебниках. Хотя с термином «относительность», вспомните, вам приходилось сталкиваться еще до начала изучения физики.

Попробуем перекинуть пусть узенький, но, надеемся, крепкий мостик от первичных представлений об этом глубоком понятии до его современного обличия.

Вопросы и задачи

1. В какой системе отсчета расстояние между событиями «выстрел пушки» и «разрыв ее снаряда» (при попадании его в цель) равно нулю?

2. Зависит ли скорость истечения воды из отверстия в стенке сосуда, находящегося в вагоне поезда, от того, стоит поезд на месте или движется равномерно и прямолинейно?

3. Почему у колеса велосипеда при его движении спицы в нижней части видны довольно отчетливо, а в верхней их не разглядеть? Пропадет ли этот эффект, если смотреть на велосипедиста из окна движущегося с той же скоростью автобуса?

4. Легковой автомобиль движется по шоссе навстречу автобусу со скоростью, в два раза превышающей скорость автобуса. С какой скоростью и в каком направлении движется фура, относительно которой скорости легкового автомобиля и автобуса одинаковы?

5. Несколько футболистов бегут по полю прямолинейно со скоростью 10 км/ч в разных направлениях. Известно, что каждый встретился с каждым. Могли ли они все встретиться в одном месте поля?

6. Тело обладает электрическим зарядом q в одной инерциальной системе отсчета. Каков его заряд в другой инерциальной системе отсчета?

7. Допустим, что бегун побежал со скоростью, близкой к скорости света. Увидит ли он себя в зеркале, которое держит перед собой в вытянутой руке?

8. Расстояние от Земли до Сириуса – 10 световых лет. Как же объяснят астронавты (со своей собственной точки зрения) свой прилет к Сириусу через два года после вылета «Звездолета» с Земли?

9. Длина стержня, движущегося относительно наблюдателя, меньше его собственной длины. Означает ли это, что стержень деформирован?

10. Прямоугольный брусок перемещается в направлении одного из своих ребер. Как сказывается быстрое движение на его объеме? А на его плотности?

11. Возможно ли понятие безмассовой частицы в ньютоновой механике?

12. Какой закон теории относительности подтверждают явления аннигиляции покоящихся электрона и позитрона и образования гамма-квантом пары частиц?

13. Когда энергия гамма-квантов, образуемых при аннигиляции электрона и позитрона, будет одинакова, а сами они будут двигаться в противоположных направлениях?

14. При наблюдении спектра водорода далекой галактики оказалось, что зеленая линия его спектра сместилась в красную область. Почему это произошло?

Микроопыт

Понаблюдайте за бегущим по дорожке тренажера спортсменом. Почему кажется, что он бежит «на месте»? Как определить скорость его бега?

Любопытно, что...

... эксперимент по описанной Галилеем схеме (см.эпиграф) был впервые поставлен французским ученым Пьером Гассенди в 1651 году. С верхушки мачты галеры, плывшей в марсельской гавани со скоростью примерно 3,5 м/с, бросали камни, которые неизменно падали параллельно мачте.

... ответ на вопрос, какая из двух компонент взаимодействия – электрическая или магнитная – проявляется при движении свободных носителей заряда, целиком зависит лишь от системы отсчета.

... уравнения Максвелла предсказывали распространение электромагнитного излучения со вполне определенной скоростью – скоростью света. Однако они ничего не говорили о том, в какой системе отсчета скорость будет именно такой. Эта проблема и озаботила Альберта Эйнштейна.

... в представленной Эйнштейном в Бернский университет работе по теории относительности никто ничего не понял. Позднее французский ученый Поль Ланжевен шутил, что эту теорию понимают только 12 человек в мире.

... идеи Лоренца, Эйнштейна и Пуанкаре подытожил немецкий математик и физик Герман Минковский, введя понятие пространственно-временно́го мира. Тем самым он завершил построение специальной теории относительности, придав ей адекватную математическую форму.

... в ускорителях на встречных пучках как в классическом, так и в релятивистском случае вся кинетическая энергия сталкивающихся частиц может перейти в энергию покоя рождающихся частиц.

... несколько лет назад перестал быть видимым один из пульсаров, т.е. сверхплотных нейтронных звезд. Как считают ученые, это произошло из-за сильных гравитационных полей, изменивших геометрию пространства-времени вблизи пульсара.

... главным достижением Нобелевского лауреата Поля Дирака, предсказавшего существование позитрона, стал гармонический синтез теории относительности и квантовой механики.

Что читать в «Кванте» о теории относительности

(публикации последних лет)

1. «Рождение гравитационно-волновой астрономии» – 2018, №3, с.14;

2. «От пузырька до черных дыр» – 2019, №6, с.21;

3. «Черные дыры существуют» – 2021, №3, с.2;

4. «Кто искривил пространство-время?» – 2021, №10, с.26;

5. «Следы невидимого...» – 2022, №8, с.2.

Материал подготовил А. Леонович

Как же мы устанавливаем периодичность? А дело в том, что при делении «уголком» мы работаем с последовательностью остатков (умножаем, вычитаем, берем остаток; сносим цифру, находим неполное частное, умножаем, вычитаем, берем остаток и т.д.). Итак, каждый остаток однозначно определяет неполное частное (цифру десятичной дроби) и следующий остаток. Остатки зацикливаются, значит, зацикливаются и десятичные знаки. Это замечательная идея – рассмотреть другую последовательность, которая порождает исходную последовательность, а каждый ее член однозначно определяет следующий. Теперь можно приступить к «многоклеточной» задаче.

Задача 3. *Жители Гавайских островов гордятся тем, что у них с незапамятных времен существует президенская форма правления. Каждые 4 года президентом избирается либо республиканец, либо демократ. Местные социологи обнаружили строгий закон, по которому определяется партийность очередного президента. Хотя этот закон засекречен, в печать просочились сведения, что партийность очередного президента полностью определяется партийностью предыдущих десяти. Последние три срока на Гаваях правит республиканец. Докажите, что всегда будут периоды правления трех республиканцев подряд.*

Решение. Нам достаточно показать, что партийности президентов периодически повторяются. Назовем «предвыборным состоянием» или просто «состоянием» последовательность партий, к которым принадлежали последние 10 президентов. Каждое состояние определяет партийность следующего президента, а значит, и следующее предвыборное состояние. Состояний конечное число (не больше чем 2^{10}), следовательно, по принципу Дирихле, какое-то из них повторится. Повторение одного состояния вызовет повторение следующих состояний, и с этого момента состояния начнут периодически повторяться, а значит, и последовательность правящих партий будет периодической. Но поскольку президентская форма правления на Гаваях существует с незапамятных времен, повторение двух состояний уже произошло, и состояния давно повторяются.

Как видите, во всех разобранных задачах присутствует одно и то же рассуждение, устанавливающее периодичность. Сформулируем его в общем виде.

Рассуждение 1. *Если нечто может находиться только в конечном числе состояний и состояние в данный момент времени однозначно определяет состояние в следующий момент времени, то, начиная с некоторого момента, состояния начнут периодически повторяться.*

Однако в задаче про президентов надо было проверить, что в данный момент мы находимся в периоде – только тогда можно утверждать, что всегда будут моменты правления трех республиканцев подряд. Для этого и потребовались «незапамятные времена». Это важный момент: рассуждение 1 утверждает только периодичность, начиная с некоторого места, но при этом вовсе не обязательно, чтобы повторилось первое состояние. (Это видно уже на примере задачи 1. Другой пример – условно периодические дроби.) Если период начинается не сразу, то последовательность состояний, предшествующая периоду, называется предпериодом. Чтобы доказать, что начальное состояние когда-нибудь встретится, надо еще показать, что предпериода нет. Для этого часто используется несколько другая идея, чем в задаче о президентах, – идея «обратного хода».

Рассуждение 2. *Если число состояний конечно и каждое состояние однозначно определяет как последующее состояние, так и предыдущее, то в последовательности состояний предпериод отсутствует.*

Это простое рассуждение не сразу становится понятным. Попробуем его пояснить. С какого-то момента появится период (рассуждение 1). Выберем состояние, например из третьего периода. Оно однозначно определяет предыдущее состояние. Во втором периоде это состояние повторится, и повторение вызовет дальнейшее повторение (рассуждение 1 при «обратном ходе»). Период «перенесется в прошлое», а значит, все состояния периодически повторяются.

Вот типичный пример (см. статью А.Орлова «Принцип Дирихле» в «Кванте» №7 за 1971 г.).

Задача 4. *Докажите, что найдется член последовательности Фибоначчи, делящийся на* 1990. *(Напомним, что последовательность Фибоначчи начинается с двух еди-*

ниц, а каждый следующий член равен сумме двух предыдущих.)

Решение. Запишем формулу для определения очередного числа Фибоначчи:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

Прежде всего изучим остатки чисел Фибоначчи при делении на 1990. Хотелось бы найти остаток, равный нулю. Как же его искать? В том-то и задача. Однако обратимся к прошлому. (Задача о президентах показала полезность изучения истории.) Заметим, что последовательность можно «продолжить в прошлое» с помощью формулы

$$u_{n-2} = u_n - u_{n-1}.$$

Тогда получим, что $u_0 = 0$. Прекрасно! Ноль делится на 1990.

Осталось установить периодичность остатков, начиная с нулевого члена. Заметим: нам не нужно находить член последовательности Фибоначчи с нулевым остатком – достаточно установить его существование. Нетрудно понять, что по остатку одного числа Фибоначчи ничего нельзя сказать об остатке следующего. Тут на помощь приходит задача о президентах: ведь и там, чтобы предсказать результат выборов, недостаточно знать партийность предыдущего президента – нужны результаты последних 10 выборов. Потому-то «предвыборным состоянием» мы назвали партийность последних 10 президентов. Теперь ясно, что в качестве состояния члена u_n надо взять пару остатков от деления на 1990 членов u_{n-1} и u_{n-2}. Два предыдущих остатка уже определяют следующий. Здесь ключ к решению: во-первых, «состояние» определяет остаток числа, а во-вторых, каждое «состояние» определяет следующее состояние. Теперь все ясно: состояний конечное число (оцените, сколько), они начнут повторяться, а значит, повторятся остатки чисел Фибоначчи. Впрочем, радоваться рано. Почему период начинается с нулевого члена? Тут нам поможет идея «обратного хода»: состояние каждого остатка определяет состояние не только следующего, но и предыдущего (в этом нас убеждает формула $u_{n-2} = u_n - u_{n-1}$), а отсюда вытекает отсутствие предпериода.

Упражнение 2. Могут ли два соседних числа Фибоначчи делиться на 1990?

Задача 5 (обобщение задач 1, 2, 4). *Последовательность u_n такова, что при некоторых $a_1, a_2, \ldots, a_k$ справедливо равенство $u_n = a_1u_{n-1} + a_2u_{n-2} + \ldots + a_ku_{n-k}$. (Такая последовательность называется возвратной или рекуррентной. Примеры – последовательность Фибоначчи или последовательность степеней целого числа m: если $u_n = m^n$, то $u_n = mu_{n-1}$). Пусть все a_i и u_n целые. Докажите, что остатки чисел u_n при делении на заданное целое l периодически повторяются. В каких случаях в этой последовательности остатков будет отсутствовать предпериод? Оцените длину периода. Приведите пример, когда предпериод будет.*

До сих пор мы включали в понятие «состояние» как можно больше характеристик, чтобы каждое состояние однозначно определяло следующее. Однако бывают случаи, когда состояние надо «разукрупнять».

Задача 6. *Докажите, что если при переводе обыкновенной дроби P/Q $(P < Q)$ в десятичную один из неполных остатков от деления P на Q равен $Q - P$, то сумма двух цифр ее десятичного разложения, отличающихся на полупериод, равна 9.*

Набросок доказательства. Назовем состоянием процесса деления не сам неполный остаток, а остаток с точностью до знака, т.е. его квадрат. Период последовательности состояний равен полупериоду исходной дроби (почему?).

С другой стороны, дробь $(Q - P)/Q$ в сумме с дробью P/Q равна 1 или 0,999… Так что сумма соответствующих цифр дробей P/Q и $(Q - P)/Q$ равна 9. Процесс же деления дроби $(Q - P)/Q$ начинается с неполного остатка $Q - P$, т.е. получается из процесса деления исходной дроби P/Q сдвигом на полупериод.

Одно и то же рассуждение может появляться в различной «упаковке». Например, рассуждение 2 может выглядеть так.

Рассуждение 2′. *Несколько точек соединены стрелками, причем из каждой точки исходит одна стрелка и входит тоже одна. Тогда все стрелки (и точки) образуют несколько циклов.*

Упражнение 3. Сформулируйте рассуждение 1 в терминах точек и стрелочек.

Идею цикличности можно формализовать не только на языке точек и стрелок. Другой способ – на языке функций.

Теорема о периодичности. *Пусть M – конечное множество (множество состоя-*

ний). Пусть f – функция из M в M. Тогда при всех x из M последовательность состояний

$$x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots$$

начиная с некоторого момента станет периодичной. Кроме того, если при различных x и y состояния $f(x)$ и $f(y)$ также различны (это условие «обратного хода»), то период начинается с первого члена.

Упражнения

4. Докажите теорему о периодичности.

5. а) Докажите, что сумма длин периода и предпериода в последовательности из теоремы о периодичности не превосходит числа элементов множества состояний.

б) Каждому натуральному числу $K<100$ поставлено в соответствие некоторое натуральное число $F(K)$, также меньшее 100. Строится последовательность $A(1)=1$, $A(K+1)=F(A(K))$. Докажите, что найдется номер $N<100$, для которого $A(N)=A(2N)$.

Возникает вопрос. Рассуждения 1 и 2 выглядят достаточно убедительными. Зачем же еще их формализовывать, да еще двумя способами? Зачем гнаться за строгостью, когда и так все ясно? Ведь даже в школьном курсе нет полной строгости. Например, такие важные понятия, как «теорема» и «доказательство», не имеют строго определения.

Дело в том, что в математике могут моделироваться не только объекты природы, но и сами рассуждения. Формализация – это и есть такое моделирование. Только она делает из рассуждения математический объект. Это часто нужно в доказательствах невозможности чего-либо. Например, чтобы доказать разрешимость кубического уравнения в радикалах, достаточно вывести формулу, но чтобы доказать неразрешимость общего уравнения пятой степени в радикалах, потребовалось формализовать само понятие разрешимости (что и сделал Абель в начале позапрошлого века). Чтобы построить теорему, из которой вытекала бы ее собственная недоказуемость, а тем самым – пример недоказуемого и неопровержимого утверждения, понадобилась формализация понятий «теорема», «доказательство». (Удивительно, до какой степени она оказалась непростой!)

В нашем случае дело не в строгости: различные формализации дают возможность посмотреть на рассуждение с разных сторон, что позволяет увидеть его и применить в разных ситуациях. Оба способа формализации идеи цикличности часто встречаются: стрелки – в теории конечных автоматов, функции – в теории динамических систем. Приведем примеры.

Упражнение 6. В некоторой компании каждый человек имеет ровно двух друзей. Докажите, что если все друзья возьмутся за руки, то они образуют один или несколько хороводов.

Задача 7. *Некоторая комбинация поворотов граней вывела кубик Рубика из правильного положения. Докажите, что кубик можно снова собрать, повторив эту комбинацию еще несколько раз.*

Для решения этой задачи достаточно посмотреть на комбинацию поворотов кубика как на функцию, переводящую одно его состояние в другое. Поскольку каждый поворот обратим, сама эта функция обратима и, значит, взаимно однозначна. Под действием такой функции элементы конечного множества «водят хороводы».

А что будет в случае бесконечного множества состояний? Появится ли там что-то новое, кроме «хороводов»? Примером одной из возможных ситуаций служит следующая задача.

Задача 8. *Барон Мюнхгаузен заявил Георгу Кантору, что он может выписать в ряд натуральные числа без единицы так, что все числа, кроме нескольких, будут не больше своего номера в ряду. Не хвастает ли барон?*

Решение. Попробуем представить себе соответствие между числами и их номерами. Например, так:

$$f_1(1) f_2(2) \ldots f_k(k) \ldots$$

Идея состоит в том, что наши числа – это те же номера, только переставленные. Пусть в начальный момент числа равны своим номерам, а на месте единицы стоит «дырка»:

$$\begin{array}{cccccc} \langle\ \rangle & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots \end{array}$$

Попробуем построить последовательность барона, переставляя числа. Поставим на место единицы $f(1)$, тогда на месте $f(1)$ появится «дырка»:

$$\begin{array}{ccccccc} f(1) & 2 & \ldots & \langle\ \rangle & \ldots & k & \ldots \\ 1 & 2 & \ldots & f(1) & \ldots & k & \ldots \end{array}$$

Затем на место $f(1)$ поставим соответствующее число $f(f(1))$ и т.д. (вспомните из физики электронную и дырочную проводимости). Поскольку дырка перебегает на новое место и не может исчезнуть, процесс будет бесконечным. Интуитивно ясно, что дырка убежит сколь угодно далеко от начала. Это и есть ключевая идея. Осталось ее оформить. Попробуйте!

Каждый прыжок дырки вправо означает переход числа с большего номера на меньший. А если прыжков вправо будет бесконечно много, то и чисел, больших своего номера, будет бесконечно много. Бедный барон!

Однако как доказать, что прыжков дырки вправо будет бесконечно много? Допустим, что с некоторого момента все прыжки будут влево. Но слева лишь конечное число мест, а дырка прыгает бесконечно! Что ответит барон? А он спросит, почему дырка не может повторять уже пройденные места? Почему процесс не зациклится?

Дело в том, что на место дырки прыгает число, которое еще не стоит на своем месте в последовательности барона, значит, это число не «прыгало» и дырка на его месте не бывала, т.е. повторений быть не может. Итак, при попытке построить последовательность мы нашли в ней бесконечно много чисел, больших своего номера, вопреки утверждению барона.

Как видите, в бесконечном случае зацикливания может и не быть. А как вообще может быть устроено однозначное отображение бесконечного множества в себя? Мы видели, что, в отличие от конечного случая, не каждый элемент имеет прообраз.

Задача 9. *Пусть M – бесконечное множество, f – взаимно однозначная функция из M в M (т.е. если x и y различны, то $f(x)$, $f(y)$ тоже различны). Докажите, что множество M под действием функции f распадается на части следующего вида:*

1) «хороводы» – конечные наборы элементов, которые f переставляет «по кругу»;

2) «бесконечные хороводы» – бесконечная в обе стороны цепочка элементов, которую f «сдвигает»;

3) «ряды Мюнхгаузена» – последовательности вида

$$x, f(x), f(f(x)), \ldots, f(f(\ldots x)), \ldots$$

где первый элемент x не имеет прообраза.

Отсутствие «рядов Мюнхгаузена» равносильно обратимости f, а отсутствие еще и «бесконечных хороводов» означает, что f устроена так же, как и на конечном множестве: множество M разбивается на конечные части, элементы которых f не смешивает.

Задача 10 (Турнир городов, 1983/84). *На всех клетках бесконечной во все стороны шахматной доски, кроме клеток выделенного множества клеток A, стоят солдаты. Все они по команде маршируют одновременно – каждый делает шаг на месте либо в соседнее поле, но так, чтобы никто не столкнулся, на поле не могут находиться два солдата сразу. Существует ли такое K и такой способ движения солдат, что после K команд вся доска будет заполнена ими? Например, если A – одна клетка, то $K = 1$, а способ такой: все солдаты, стоящие справа от нее, делают один шаг по направлению к ней. Рассмотрите случаи:*

а) A – множество всех клеток, у которых обе координаты кратны 100*;*

б) A – множество клеток, которые бьются 100 *ферзями (хотя бы одним), расположенными каким-то фиксированным образом.*

Упражнения

7. Множество G с операцией $*$ называется полугруппой, если для всех $a, b, c \in G$ выполняется равенство $a*(b*c) = (a*b)*c$. Полугруппа называется группой, если существует элемент $e \in G$ такой, что $e*a = a*e$ для любого $a \in G$ и для каждого элемента $x \in G$ найдется такой $y \in G$, что $x*y = e$, элемент y называется обратным к x. Опишите все однопорожденные полугруппы и группы, т.е. такие полугруппы и группы, все элементы которых выражаются через один из них с помощью операции $*$.

8. В ориентированном графе G имеется «корень» – единственный узел, в который стрелки не входят. В остальные узлы входит ровно по одной стрелке. Докажите, что G есть объединение дерева и нескольких циклов.

* * *

Ниже мы приводим олимпиадные задачи, в которых так или иначе присутствует периодичность или близкие идеи. Каждый сюжет, связанный с цикличностью, начинается с «чистых» задач, а оканчивается такими, в которых цикличность – только одна из идей. Большинство задач взяты, иногда с переделкой, из олимпиад школьников: Турнира городов (ТГ), Всесоюзной олимпиады (ВО), Московской математической олимпиады (ММО), Ленинградской математической олимпиады (ЛМО), Ленинградских отборов (ЛО), Турнира имени М.В. Ломоносова (ТЛ). Часть задач оригинальна.

Визуализация цикла

1 (ТЛ, 1989). На конкурсе по математике в институте МИМИНО предлагалось 20 задач. На закрытие пришло 20 школьников. Каждый из них решил две задачи, причем оказалось, что среди пришедших каждую задачу решили два школьника. Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал одну из решенных им задач и все задачи были бы разобраны.

2 (ММО, 1966). а*) Сколькими различными способами можно отметить 22 клетки на клетчатой доске 11×11 так, чтобы на каждой вертикали и на каждой горизонтали было отмечено ровно две клетки? (Два способа считаются одинаковыми, если один можно получить из другого перестановкой строк и столбцов.)

б) Тот же вопрос про таблицу 5×5, только переставлять строки и столбцы нельзя.

3 (ТГ, 1985/86). 20 футбольных команд проводят первенство. В первый день все команды сыграли по одной игре. Во второй день также все команды сыграли по одной игре. Докажите, что после второго дня можно указать такие 10 команд, что никакие две из них не играли друг с другом.

4 (ТГ, 1986/87). В некотором городе разрешаются только парные обмены квартир. Докажите, что любой сложный обмен квартирами можно осуществить за два дня.

5 (ММО, 1970). В городе X имеется 1000 коттеджей, в каждом из которых живет по одному человеку. В один прекрасный день каждый переезжает из своего дома в какой-то другой. После переезда в каждом доме по-прежнему живет ровно один жилец. Докажите, что можно так раскрасить все коттеджи в три цвета, чтобы у каждого хозяина цвет нового дома отличался от цвета старого.

6* (ЛО, 1990). На полке стоит в беспорядке 100-томное собрание сочинений Л.Н.Толстого. Разрешается взять любые два тома с номерами разной четности и поменять их местами. За какое минимальное число таких перестановок все тома заведомо можно расставить по порядку?

7. Каждый ключ подходит только к своей копилке. Ключи от 30 копилок перемешали и каждый положили в копилку. Какова вероятность того, что после того, как две взломали, все копилки удастся открыть?

8 (ММО, 1963). Завод выпускает погремушки в виде кольца с надетыми на него 3 красными и 7 синими шарами. Сколько различных погремушек может быть выпущено? (Две погремушки одинаковы, если одна получается из другой движением шариков по кольцу.)

9. а) Сколькими способами можно раскрасить n разными красками круг, разбитый на p секторов, где p – простое число? Что если p – составное? (Каждый сектор окрашивается одной краской, использовать все краски не обязательно.)

б) Докажите, что $n^p - n$ при простом p всегда делится на p.

10 (ММО, 1962). В окружность вписан неправильный n-угольник, который при повороте окружности на ненулевой угол совмещается сам с собой. Докажите, что n – число составное.

11. На плоскости проведено $n>2$ прямых, причем никакие 2 не параллельны и никакие 3 не пересекаются в одной точке. Известно, что можно повернуть плоскость вокруг некоторой точки O на некоторый угол, меньший 180°, так, что каждая из проведенных прямых совместится с какой-нибудь другой проведенной прямой. При каких n это возможно?

12 (ТГ). На шахматной доске расставлено несколько фишек. Фишка за один ход сдвигается на соседнее (по вертикали или горизонтали) поле. После нескольких ходов оказалось, что каждая фишка побывала на всех полях по разу и вернулась на исходное поле. Докажите, что был момент, когда ни одна из фишек не стояла на своем исходном поле.

Идея циклической группы

13 (А.Ковальджи). Можно ли придумать последовательность поворотов граней кубика Рубика, повторяя которую можно получить все возможные расположения кубиков?

14. Каждый следующий член последовательности есть сумма квадратов цифр предыдущего. Докажите, что последовательность периодична и что в ней наверняка встретятся либо 1, либо 89. Как ведут себя последовательности, в которых следующий член есть соответственно квадрат суммы или сумма квадратов цифр предыдущего?

15. Числа x_0 и x_1 отличны от нуля. При всех n $x_{n+1} = kx_n - x_{n-1}$. При каких k эта последовательность может иметь период?

16. Известно, что при всех n

$$a_{n+1} = a_n + b_n,\ b_{n+1} = b_n + c_n,$$
$$c_{n+1} = c_n + d_n,\ d_{n+1} = d_n + a_n.$$

Докажите, что если все эти последовательности периодичны, то они – нулевые.

17*. Обозначим через $S(y)$ сумму цифр числа y. Докажите, что существует бесконечно много номеров n таких, что $S(2^n) > S(2^{n+1})$.

18. Последовательность $a_1, \ldots, a_n$ задается правилами: $a_{2n} = a_n$ и $a_{4n+1} = 1$, $a_{4n+3} = 0$ при $n > 0$. Докажите, что она непериодична.

19. Последовательность a_n состоит из +1 и –1. Известно, что $a_k = a_{k-n}a_{k-m}$ при $k > n > m$.

а) Докажите отсутствие предпериода.

б) Пусть $T(n,m)$ – наименьшее общее кратное всех периодов при всевозможных последовательностях a_k. Докажите, что $T(n,m) = T(n,n-m)$.

20 (ВО). Периодичны ли последовательности, состоящие соответственно из последних цифр целых частей степеней корня из двух и корня из десяти?

21*. а) К числу приписывают справа по одной цифре, кроме 9. Докажите, что рано или поздно получится составное число.

б) Найдите все многочлены f с натуральными коэффициентами, обладающие свойством: $f(p)$ – простое при всяком простом p.

22* (ЛО). В последовательности 101010... ненулевой член, начинающийся с седьмого, равен последней цифре суммы шести предыдущих. Докажите, что шестерка 010101 никогда не встретится.

23. Дана последовательность чисел a_k с периодом 100. При этом сумма первых n ее членов неотрицательна при нечетном n и неположительна при четном n. Докажите, что $|a_{99}|$ не меньше, чем $|a_{100}|$.

24. Известно, что $a_1 + \ldots + a_n = 0$ и при всех k $a_{n+k} = a_k$. Тогда найдется i такое, что любая частная сумма этой последовательности, начиная с i-го члена, неотрицательна.

25. а) Докажите, что последовательность остатков степеней числа q при делении на k имеет период меньше k, а последовательность остатков чисел вида q^{l^n} (q и l фиксированы) имеет период меньше $k-1$.

б*) Последовательность целых чисел a_n такова, что $a_{n+1} = m^{a_n}$. Докажите, что последовательность остатков чисел a_n при делении на k начиная с некоторого n становится постоянной.

26. Последовательность a_n, все члены которой равны 0 или 1, такова, что если $k \le 2^n$, то a_k не равно $a(k+2^n)$. Докажите, что она непериодична.

27 (ММО, 1980). Последовательность натуральных чисел a_n такова, что a_{n+1} не больше a_n. Докажите, что бесконечная десятичная дробь $0,a_1a_2\ldots$, полученная приписыванием этих чисел друг к другу, непериодическая.

28. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ состоит из натуральных чисел, меньших 1988. При этом для любых n и m число $a_n + a_m$ делится на a_{n+m}. Докажите, что эта последовательность периодическая.

29* (ММО). Докажите, что существует бесконечно много m таких, что 2^n оканчивается на m.

30. Дана последовательность x_n вещественных чисел и натуральное число n. Докажите, что если среди упорядоченных наборов из n элементов $(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+n})$ имеется не более n различных, то последовательность x_n периодична.

Периодичность в словах

31 (А.Канель). На бесконечной в обе стороны ленте записан текст на русском языке. Известно, что в этом тексте число различных кусков из 15 символов равно числу различных кусков из 16 символов. Докажите, что на ленте записан «периодический» текст, например:

...мама мыла раму мама мыла раму ...

(а если бы лента была ограничена слева, то мог бы наблюдаться и предпериод).

б*) Если этим свойством обладают только куски, встречающиеся бесконечное число раз, то лента периодична за исключением, быть может, конечного куска. Например:

...амамамамамрррррррр...

32 (ВО). В бесконечном десятичном разложении числа q встречаются все цифры. Пусть $V(n)$ – количество различных цифровых отрезков длины n, встречающихся в этом разложении. Докажите, что если при некотором n верно неравенство $V(n) < n + 9$, то число q – рационально.

33. а) Буквой назовем русскую букву, а словом – любую конечную последовательность букв. Назовем произведением слов u и v слово uv, которое получается, если слова u и v написать подряд. Докажите, что если $pq = qp$, то существует слово s такое, что оба слова p и q являются его степенями.

б) Решите уравнение в словах: $wu = vw$.

34. Докажите, что каждое слово длины n^2 либо содержит n подслов, ни одно из которых не начало другого, либо содержит n-ю степень какого-то слова. (На самом деле в последнем случае оно начало бесконечного слова, сумма длин периода и предпериода в котором меньше n.)

35* (ЛО). В каждой вершине правильного k-угольника стоит буква русского алфавита. Известно, что для любой его вершины можно указать такое число $p < k$, что слово из p букв, идущее из этой вершины, совпадает со словом из p букв, заканчивающимся непосредственно перед этой вершиной. Докажите, что k-угольник можно нетождественно повернуть так, чтобы этого не было заметно.

36*. На ленте записана бесконечная последовательность цифр. Докажите, что либо из нее можно вырезать 10 стозначных чисел, идущих в порядке убывания, либо какая-нибудь комбинация цифр повторяется 10 раз подряд.

37* (А.Канель). Дано бесконечное слово z (в русском алфавите), u и v – его различные подслова. Докажите, что можно найти такие слова s и t, что svt – подслово z и при этом в слове z найдутся сколь угодно длинные периодические подслова (длина периода не больше $\max(|u|,|v|)$) либо сколь угодно длинные подслова без вхождений sut.

38 (ТГ, 1987/88). Рассматривается последовательность слов из букв «A» и «B». Первое слово – «A», второе – «B», k-е слово получается приписыванием к $(k-2)$-му слову справа $(k-1)$-го (так что начало последовательности имеет вид «A», «B», «AB», «BAB», «$ABBAB$», ...). Может ли в последовательности встретиться «периодическое» слово, т.е. слово, состоящее из нескольких (по меньшей мере двух) одинаковых кусков, идущих друг за другом, и только из них?

39*. Существует ли бесконечная последовательность из трех букв такая, что никакая комбинация из букв не повторится два раза подряд?

40.** а) В языке племени МБУ-МБЫ только 4 звука: M, $Б$, $У$, $Ы$. Синонимами являются любые два слова $UXXV$ и UXV, где U, X, V – произвольные последовательности звуков. Докажите, что число понятий племени конечно.

б) А что если синонимами являются только слова $UXXXV$ и UXV?

Бильярды

41*. а) К квадрату из внешней точки проводится касательная. Точка отражается относительно точки касания. Через нее проводится другая касательная и процедура повторяется. Может ли точка убежать на бесконечность?

б) Из точки вне правильного пятиугольника, не лежащей на продолжении сторон, проводят к нему касательную и точку симметрично отражают относительно точки касания. С новой точкой происходит то же, только выбирается другая касательная, и т.д. Если мы выйдем на продолжение стороны, то процесс остановится. Докажите, что найдется бесконечно много точек периода 10.

в) Что можно сказать в общем случае?

42 (ММО, 1965). В прямоугольном бильярде размером $p \times 2q$, где p и q – целые нечетные числа, сделаны лузы в каждом углу и в середине каждой стороны длиной $2q$. Из угла выпущен шарик под углом 45° к стороне. Докажите, что шарик обязательно попадет в одну из средних луз.

43* (ЛМО). В квадратном зале с зеркальными стенами стоит профессор Смит. Он хочет расставить в зале несколько студентов так, чтобы со своего места он не мог увидеть собственного отражения. Удастся ли профессору это сделать?

44. На кольцо нанизаны одинаковые шарики, которые абсолютно упруго соударяются. Докажите, что их расположение периодически повторяется.

Разные задачи

45*. Из каждого города выходит нечетное число дорог. На центральной площади города поднят черный или белый флаг. Каждое утро в каждом городе меняется цвет флага, если соседей с флагом другого цвета больше. Докажите, что цвет каждого флага либо стабилизируется, либо мигает с периодом 2.

46* (из книги «Математический аквариум»). Имеется неограниченное число черных и белых кубиков. Надо построить из них сплошную башню в форме параллелепипеда так, чтобы каждый черный кубик граничил с четным числом белых, а каждый белый – с нечетным числом черных. При любом ли заданном нижнем слое кубиков такую башню (конечной высоты) можно построить?

47* (п.б), в) – А.Канель). Бесконечная в обе стороны полоса клетчатой бумаги состоит из черных и белых клеток. Каждую секунду клетка, имеющая четное число черных соседей, становится белой, а имеющая нечетное число черных соседей – черной. Докажите, что:

а) если через 2^n секунд исходная раскраска повторится, то она периодична с периодом $3 \cdot 2^n$;

б) исходная раскраска периодически повторяется тогда и только тогда, когда она сама периодична (периодичность во времени равносильна периодичности в пространстве).

в) Что можно сказать о полосе произвольной ширины? Или о всей клетчатой плоскости?

48 (А.Канель, В.Уфнаровский). Дан прямоугольник с отношением сторон $\sqrt{1991}$. От него отрезают квадрат, а с оставшимся прямоугольником производят ту же процедуру. Докажите, что последовательность отношений сторон у построенных прямоугольников периодична (решив эту задачу, вы сможете доказать, что каждую квадратичную иррациональность можно разложить в периодическую цепную дробь, возможно, с предпериодом). Верно и обратное утверждение: число, разлагающееся в периодическую цепную дробь, – квадратичная иррациональность (см. книгу А.Я.Хинчина «Цепные дроби»).

49*. На книжной полке стоит в беспорядке полное собрание сочинений неизвестного классика. Библиотекарь выбирает наугад том, стоящий не на своем месте, и ставит его на место (при этом часть томов сдвигается). Всегда ли он может за конечное число операций поставить тома по порядку?

(Продолжение следует)

Поток импульса

П.КРЮКОВ

Основное уравнение

Рассмотрим *систему переменного состава*, другими словами, такой набор материальных точек, что со временем какие-то точки этого набора покидают систему, а другие (исходно не принадлежащие системе) могут присоединиться к ней. Например, катер с водометным двигателем, забирающий воду из водоема и выбрасывающий ее с большой скоростью, является системой переменного состава в том случае, если под системой понимается непосредственно катер и движущаяся внутри него вода.

Пусть за бесконечно малое время dt проекция импульса системы на ось x изменяется на dp_x, при этом к системе присоединяется масса $dM^{(+)}$, проекция скорости которой на ось x равна $u_x^{(+)}$, а масса $dM^{(-)}$, имеющая проекцию скорости $u_x^{(-)}$, покидает систему. Тогда справедливо соотношение

$$\frac{dp_x}{dt} = \sum F_x - \left(\frac{dM^{(-)}}{dt}u_x^{(-)} - \frac{dM^{(+)}}{dt}u_x^{(+)}\right), \quad (1)$$

где $\sum F_x$ – проекция равнодействующей внешних сил, действующих на систему (рис. 1).

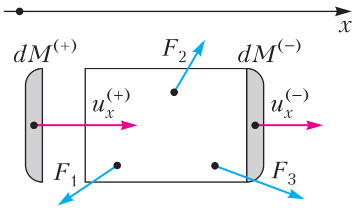


Рис. 1

Выражение в скобках в правой части уравнения (1) назовем проекцией вектора *потока импульса* Π_x и перепишем уравнение в виде

$$\frac{dp_x}{dt} = \sum F_x - \Pi_x. \quad (2)$$

Последнее соотношение является уравнением движения системы переменного состава. Его можно строго вывести из законов Ньютона (чего мы здесь не делаем). Заметим, что в случае сплошной среды, в которой распределение массы по объему описывается функцией плотности $\rho(\vec{r},t)$, а распределение проекции скорости – функцией $v_x(\vec{r},t)$, справедливо соотношение

$$\frac{\partial\left(\int \rho v_x dV\right)}{\partial t} = \sum F_x - \Pi_x, \quad (3)$$

аналогичное уравнению (2), в котором проекция потока импульса на ось x дается формулой

$$\Pi_x = \oint \rho v_x \vec{v} \cdot d\vec{S}. \quad (4)$$

Отметим, что в левой части соотношения (3) интегрирование ведется по объему некоторой области A (не изменяющейся со временем), выделенной в движущейся сплошной среде, а интегрирование в формуле (4) для потока ведется по поверхности ∂A, ограничивающей область A. При этом направление вектора $d\vec{S}$ в каждой точке границы совпадает с направлением положительной нормали к поверхности ∂A (проще говоря, вектор $d\vec{S}$ в каждой точке направлен наружу).

Покажем, как можно использовать соотношение (2) или соотношение (3) при решении задач.

Катер с водометным двигателем

Эту известную задачу даем в такой формулировке.

Задача 1. *Реактивное судно (рис. 2) приводится в движение насосом, который всасывает воду через входное отверстие горизонтального канала и выбрасывает ее в противоположном направлении. Относительная скорость воды на входе равна u, площади входного и выходного отверстий равны S и* $\frac{S}{n}$ *соответственно. Масса судна с находящей в нем водой равна M. Найдите установившуюся скорость судна, а также время его разгона от скорости* v_0 *до скорости* v_1*, считая, что на судно действует*

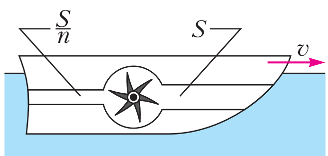


Рис. 2

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20240205

сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости: $F_x = -kv_x^2$ (где k – известная константа).

Пусть направление оси x системы отсчета, связанной с Землей, совпадает с направлением скорости судна. В качестве системы будем рассматривать катер с ускоряющейся внутри него водой. Тогда за бесконечно малое время dt к системе присоединяется масса $dM^{(+)} = \rho Sudt$, проекция скорости которой на ось x равна $u_x^{(+)} = v - u$. За то же время dt систему покидает такая же масса $dM^{(-)} = dM^{(+)}$, поскольку в противном случае суммарная масса судна с водой менялась бы со временем, что (судя по всему) не удовлетворяет условию задачи. Поскольку площадь выходного отверстия в n раз меньше площади входного, скорость воды относительно катера на выходе в n раз больше скорости на входе (это следует из уравнения неразрывности $\rho S_i u_i = \text{const}$), поэтому проекция на ось x скорости массы, покидающей систему, равна $u_x^{(-)} = v - un$. Таким образом, проекция потока импульса дается формулой

$$\Pi_x = -\rho S u^2 (n-1). \qquad (5)$$

Масса системы остается постоянной, поэтому производная проекции импульса в уравнении движения (2) определяется только изменением скорости судна: $\frac{dp_x}{dt} = M\frac{dv}{dt}$. Учитывая, что единственная сила, имеющая ненулевую проекцию на ось x, это сила сопротивления, из формул (2) и (5) получаем уравнение движения судна:

$$M\frac{du}{dt} = -kv^2 + \rho S u^2 (n-1). \qquad (6)$$

Установившаяся скорость v_∞ движения судна равна

$$v_\infty = u\sqrt{\frac{\rho S(n-1)}{k}}. \qquad (7)$$

Она определяется просто, достаточно положить в соотношении (6) производную скорости равной нулю. Нахождение времени разгона сводится к интегрированию дифференциального уравнения движения (6), которое с учетом равенства (7) может быть записано так:

$$\frac{k}{M}dt = \frac{dv}{v_\infty^2 - v^2}.$$

Возникающий при решении этого уравнения интеграл легко вычисляется, поскольку дробь в подынтегральном выражении преобразуется стандартным образом:

$$\frac{1}{v_\infty^2 - v^2} = \frac{1}{2v_\infty}\left(\frac{1}{v_\infty - v} + \frac{1}{v_\infty + 1}\right).$$

После интегрирования и преобразований получаем искомое время:

$$t = \frac{M}{2kv_\infty}\ln\frac{(v_\infty + v_1)(v_\infty - v_0)}{(v_\infty + v_0)(v_\infty - v_1)}. \qquad (8)$$

Схематичный график зависимости $t(v_1)$ изображен на рисунке 3.

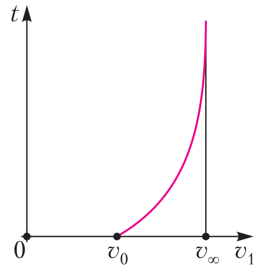


Рис. 3

Иногда последнее слагаемое в правой части уравнения (6) называют реактивной силой или силой динамического давления, а рассмотрение динамики системы переменного состава сводят к анализу движения материальной точки, на которую (кроме прочих) действует фиктивная реактивная сила.

Если начальная скорость судна v_0 равна нулю, то для скорости в момент времени t из соотношения (8) получается формула

$$v(t) = v_\infty \operatorname{th}\left(\frac{kv_\infty t}{M}\right),$$

где функция $\operatorname{th} x$ – гиперболический тангенс x.

Максимальный импульс ракеты

Задача 2. *Ракета, оснащенная реактивным двигателем, движется прямолинейно. В начальный момент ракета покоилась и ее масса равнялась m_0. Относительная скорость истечения газов из сопла ракеты постоянна и равна u, действием внешних сил предлагается пренебречь. При каком значении массы ракеты следует выключить ее двигатель, чтобы импульс, приобретенный ракетой, оказался максимальным? Чему равен этот максимальный импульс?*

Системой переменного состава будем считать ракету и оставшееся в ней к моменту времени t топливо. Направление оси x совпадает с направлением скорости ракеты $v(t)$. В процессе движения относительная скорость истечения газов из сопла ракеты остается постоянной, следовательно, массовый расход топлива μ тоже не меняется со временем. Для проекции потока импульса имеем

$$\Pi_x = \mu(v-u),$$

откуда получается уравнение движения (внешние силы не действуют, $p(t)$ – импульс ракеты)

$$\frac{dp}{dt} = \mu(u-v). \tag{9}$$

Из анализа этого уравнения следует, что максимального импульса ракета достигает в тот момент времени, обозначим его t_1, когда ее скорость $v(t_1)$ становится равной относительной скорости истекающих газов u. Для того чтобы найти массу ракеты в момент t_1, следует получить из уравнения (9) уравнение Мещерского и проинтегрировать его. Производная массы системы по времени равна $-\mu$, поэтому соотношение (9) приводит к равенству

$$m\frac{dv}{dt} - \mu v = \mu(u-v),$$

из которого следует дифференциальное уравнение

$$\frac{dv}{u} = -\frac{dm}{m}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем хорошо известную зависимость массы системы от скорости:

$$m(v) = m_0 e^{-\left(\frac{v}{u}\right)}. \tag{10}$$

Из этой формулы следует, что к моменту времени t_1, когда скорость v становится равной u, масса ракеты с оставшимся в ней топливом уменьшается в e раз по сравнению с массой m_0. Следовательно, искомый максимальный импульс равен

$$p_{\max} = \frac{m_0 u}{e}. \tag{11}$$

Отметим, что полученный ответ не зависит от массового расхода топлива μ. Казалось бы, отсюда следует, что масса топлива $m_0\left(1-\frac{1}{e}\right)$, покидающая ракету за время достижения максимального импульса, может быть выброшена из покоившейся ракеты практически мгновенно, а приобретенный ею импульс может быть рассчитан на основе закона сохранения импульса по формуле

$$p'_{\max} = \frac{m_0 u}{e}(e-1). \tag{12}$$

Почему же соотношения (11) и (12) дают разные ответы? Какой из них следует признать правильным?

Верным является ответ (11). Дело в том, что в лабораторной системе отсчета, в которой ракета изначально покоилась, скорость покидающих ракету газов нельзя считать равной u, пусть даже газы выбрасываются ракетой за очень маленькое время. В любой момент в процессе разгона скорость газов относительно лабораторной системы равна $w(t) = u - v(t)$. Поэтому в правой части формулы (12) вместо скорости u должна стоять средняя скорость газов относительно лабораторной системы за время разгона $\langle w\rangle_{t_1}$. Рассчитать эту среднюю скорость, не интегрируя уравнение Мешерского, не представляется возможным, а интегрирование этого уравнения дает ответ (11).

Давление на стенки изогнутой трубы

Задача 3. *Представим себе, что два прямолинейных перпендикулярных друг другу участка трубы с площадью сечения S соединены уголком. Конструкция располагается в горизонтальной плоскости. По трубам со скоростью v движется жидкость плотностью ρ (рис. 4). Считая давление*

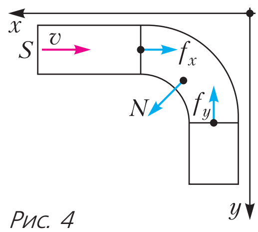


Рис. 4

жидкости в прямолинейных участках труб постоянным и равным p и пренебрегая силами вязкого трения, найдите суммарную силу, с которой жидкость действует на уголок. Диаметр трубы значительно меньше радиуса закругления уголка.

Рассмотрим в качестве системы переменного состава часть жидкости, движущуюся в уголке. В этом случае следует записать уравнения типа (2) или (3) для двух координатных осей. Пусть оси x и y направлены вдоль осей труб от уголка. Легко видеть, что проекции потока импульса на эти оси равны:

$$\Pi_x = \rho S v^2 \text{ и } \Pi_y = \rho S v^2.$$

На жидкость, движущуюся в уголке, действуют силы давления со стороны жидкости в прямолинейных участках труб, а также силы давления со стороны стенок уголка (на рисунке обозначены буквой N). Проекции сил давления, действующих со стороны жидкости в прямолинейных участках труб, равны

$$f_x = f_y = -pS.$$

Поскольку импульс жидкости, движущейся в уголке, со временем не меняется, получаем

$$0 = N_x - pS - \rho S v^2,$$

где N_x – проекция силы, действующей на воду в уголке со стороны его стенок. Проекция силы давления N_y удовлетворяет аналогичному уравнению. Таким образом, на уголок со стороны жидкости (по третьему закону Ньютона) действует сила, равная

$$F = N_x\sqrt{2} = \left(p + \rho v^2\right) S\sqrt{2}$$

и направленная под углом 45° к оси любого из прямолинейных участков трубы.

Соскальзывающая со стола цепочка

В следующей задаче важно четко определить физическую модель движущегося тела. Мы будем говорить о цепочке, имея в виду модель, схематично изображенную на рисунке 5. В этой модели считается, что точечные массы m соединены невесомыми и нерастяжимыми нитями длиной d, при этом длина L и масса M всей цепочки удовлетворяют сильным неравенствам: $m \ll M$, $d \ll L$.

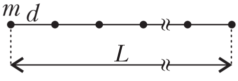


Рис. 5

Задача 4. *На гладком столе удерживается за один из концов цепочка длиной L и массой M, причем участок длиной l, пропущенный через направляющую трубку, закрепленную на краю стола, висит вертикально (рис. 6). Размер звена цепочки значительно меньше радиуса закругления трубки, который, в свою очередь, значительно меньше длины цепочки. В нулевой момент*

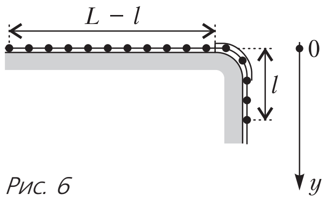


Рис. 6

времени цепочку освобождают. Определите: а) скорость цепочки в момент, когда она соскользнет со стола полностью; б) зависимость длины вертикальной части цепочки от времени $y(t)$; в) значения горизонтальной N_x и вертикальной N_y составляющих сил реакции, действующих на участок цепочки, находящийся внутри направляющей трубки, в момент, когда длина вертикальной части цепочки равна y. Потери энергии при взаимодействии звеньев цепочки друг с другом и со стенками трубки считайте пренебрежимо малыми.

Для того чтобы ответить на первые два вопроса задачи, достаточно записать закон сохранения энергии. Действительно, пусть ноль оси y располагается на уровне стола. Тогда в момент, когда координата нижнего конца цепочки равна y, координата центра масс c оказывается равной

$$y_c = \frac{\frac{M}{L}(L-y)\cdot 0 + \frac{M}{L}y\cdot\frac{y}{2}}{M} = \frac{y^2}{2L},$$

поскольку длина и масса части цепочки, движущейся внутри трубки, пренебрежимо малы. В рассматриваемой модели все точки цепочки движутся с одинаковой по модулю скоростью, равной $v = y'$, поэтому закон сохранения энергии можно записать в виде

$$\frac{My'^2}{2} - Mg\frac{y^2}{2L} = -Mg\frac{l^2}{2L},$$

из которого следуют зависимость скорости от координаты:

$$v(y) = \sqrt{\frac{g}{L}\left(y^2 - l^2\right)}$$

и ответ на первый вопрос:

$$v(L) = \sqrt{\frac{g}{L}\left(L^2 - l^2\right)}.$$

Дифференцируя закон сохранения энергии по времени, получаем уравнение для функции $y(t)$:

$$y'' - \frac{g}{L}y = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y(t) = A\,\mathrm{ch}(kt) + B\,\mathrm{sh}(kt),$$

где $\mathrm{ch}\,x$ и $\mathrm{sh}\,x$ – гиперболический косинус x и гиперболический синус x, $k = \sqrt{\frac{g}{L}}$, а B и A – константы, определяемые из начальных условий $y(0) = l$, $y'(0) = 0$. Легко видеть, что $A = l$ и $B = 0$. Таким образом,

$$y(t) = l\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t\right).$$

Для того чтобы в дальнейшем можно было найти проекции силы реакции, действующей на закругленный участок цепочки, сначала определим силу натяжения T_x, действующую на горизонтальный участок цепочки вблизи трубки, и силу натяжения T_y, действующую на вертикальный ее участок около трубки (рис. 7; цепочка изображается в виде полосы).

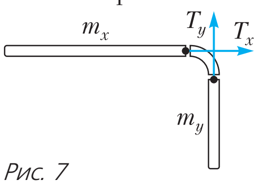


Рис. 7

Рассматривая в качестве системы переменного состава вертикальный участок цепочки, находим проекцию потока импульса:

$$\Pi_y = -\frac{My'^2}{L}.$$

Для производной импульса справедливо соотношение

$$\frac{dp_y}{dt} = m_y y'' + \frac{dm_y}{dt}y' = \frac{M}{L}yy'' + \frac{My'^2}{L}.$$

Поскольку на вертикальный участок действуют сила тяжести, равная $m_y g = Mg\frac{y}{L}$, в положительном направлении оси y и сила натяжения T_y в отрицательном направлении, получаем соотношение

$$\frac{M}{L}yy'' = Mg\frac{y}{L} - T_y,$$

откуда находим

$$T_y = Mg\frac{y}{L}\left(1 - \frac{y}{L}\right).$$

Пусть направление горизонтальной оси x совпадает с направлением скорости горизонтального участка цепочки. Рассматривая в качестве системы переменного состава горизонтальный участок цепочки и действуя так же, как при определении силы натяжения T_y, получаем для проекции потока импульса выражение

$$\Pi_x = \frac{My'^2}{L},$$

а для производной импульса соотношение

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{M}{L}(L - y)y'' - \frac{My'^2}{L}.$$

На горизонтальный участок действует только одна сила T_x, поэтому

$$T_x = Mg\frac{y}{L}\left(1 - \frac{y}{L}\right).$$

Иначе говоря, справедливо равенство $T_x = T_y$.

Теперь рассмотрим в качестве системы переменного состава участок цепочки, движущийся внутри трубки (рис. 8). На него

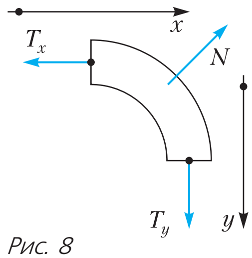


Рис. 8

действуют три силы: две силы натяжения, равные по величине T_x и T_y, а также сила реакции, горизонтальную N_x и вертикальную N_y составляющие которой требуется найти. Обозначим массу участка, лежащего внутри трубки, m_1. Из условия следует, что $m_1 \ll M$. Задача определения составляющих N_x и N_y очень похожа на предыдущую задачу о силе давления в изгибе трубы. Опуская подробные вычисления, получим ответ на третий вопрос задачи:

$$N_x = Mg\left(-2\frac{y^2}{L^2} + \frac{y}{L} + \frac{l^2}{L^2}\right),$$

$$N_y = Mg\left(2\frac{y^2}{L^2} - \frac{y}{L} - \frac{l^2}{L^2}\right).$$

Проанализируем полученные соотношения. Легко видеть, что при координате нижнего конца цепочки

$$y_1 = L\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{8l^2}{L^2}}}{4} \approx \frac{L}{2} + L\cdot\frac{l^2}{L^2}$$

обе проекции силы реакции обращаются в ноль, а при дальнейшем увеличении координаты y меняют знак. Это означает, что если бы трубки не было, то режим движения нарушился бы. Свисающий участок мог бы потерять форму отрезка прямой.

Соскальзывающая с турника веревка

Идеи, на основе которых строилось решение предыдущей задачи, можно проиллюстрировать на примере еще одной известной задачи.

Задача 5. *На турнике, представляющем собой тонкий гладкий, горизонтально расположенный стержень небольшого радиуса, висит однородная тяжелая веревка длиной L. В начальный момент длины свисающих с турника концов веревки равны и она покоится. От небольшого толчка веревка приходит в движение. На какое расстояние переместится любой из концов веревки к тому моменту времени, когда веревка перестанет взаимодействовать с турником? Как зависит сила натяжения веревки вблизи турника (на уровне его оси) от расстояния x, пройденного любым из концов веревки в процессе соскальзывания?*

Может показаться, что ответ на первый вопрос: $\frac{L}{2}$ (иначе говоря, веревка перестает взаимодействовать с турником, когда соскальзывает с него полностью), однако это не так. Как мы увидим далее, в некоторый момент в процессе соскальзывания веревки сила ее давления на турник оказывается равна нулю, хотя длина свисающих концов в этот момент нулю не равна.

Естественно, предполагаем, что механическая энергия веревки сохраняется при соскальзывании. Пусть правый конец веревки движется вниз. Обозначим x координату этого конца в некоторый момент времени (ось x направлена вниз, ноль оси совпадает с начальным положением концов веревки; рис. 9). Центр масс веревки к рассматриваемому моменту времени опускается относительно положения равновесия на расстояние

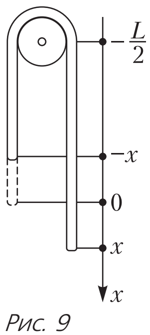


Рис. 9

$$x_c = \frac{1}{M}\left(\frac{Mx}{L}\cdot\frac{x}{2} + \frac{(-Mx)}{L}\cdot\frac{(-x)}{2}\right) = \frac{x^2}{L},$$

где M – масса веревки. Эта формула получена на основе следующего рассуждения. В момент, когда нижний конец веревки проходит координату x, веревку можно представить в виде суперпозиции исходного равновесного состояния и двух участков с нулевой суммарной массой: участка с отрицательной массой $\frac{-Mx}{L}$, центр масс которого располагается в точке с координатой $\frac{-x}{2}$, и участка с положительной массой $\frac{Mx}{L}$, центр масс которого находится в точке с координатой $\frac{x}{2}$. Таким образом, закон сохранения энергии принимает вид

$$\frac{x'^2}{2} = \frac{gx^2}{L}, \text{ откуда } x' = \sqrt{\frac{2g}{L}}x.$$

Дифференцируя последнее равенство, получаем формулы для ускорения:

$$x'' = \sqrt{\frac{2g}{L}}x',\ x'' = \frac{2g}{L}x.$$

Рассмотрим правый вертикальный участок веревки как систему переменного состава, тогда для силы натяжения $T_\text{п}$, действующей на этот участок вблизи турника, имеем уравнение

$$\frac{M}{L}\left(\frac{L}{2}+x\right)x'' + \frac{M}{L}x'^2 =$$

$$= \frac{M}{L}\left(\frac{L}{2}+x\right)g - T_\text{п} + \frac{M}{L}x'^2.$$

Решая это уравнение, получаем формулу для силы натяжения:

$$T_\text{п} = 2Mg\left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{L^2}\right).$$

Совершенно аналогично, рассматривая левый вертикальный участок веревки, можно получить формулу для силы натяжения $T_\text{л}$ левого участка веревки вблизи турника:

$$T_\text{л} = 2Mg\left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{L^2}\right).$$

Как и в предыдущей задаче, силы натяжения слева и справа от перегиба оказались одинаковыми.

Наконец, рассмотрим в качестве системы переменного состава участок веревки, касающийся турника. Масса этого участка пренебрежимо мала, поэтому производную импульса $\frac{dp}{dt}$ можно считать равной нулю. На рассматриваемый участок действуют три силы: силы натяжения $T_п$ и $T_л$ в положительном направлении оси x и сила реакции N в отрицательном. Поток импульса равен

$$\Pi_x = \frac{2M}{L}x'^2 = Mg\frac{4x^2}{L^2},$$

поэтому из уравнения движения

$$0 = T_л + T_п - N - \Pi_x$$

получаем формулу для силы реакции:

$$N = Mg\left(1 - \frac{8x^2}{L^2}\right).$$

Из этой формулы следует, что в момент, когда координата нижнего конца станет равна $x_1 = \frac{L}{2\sqrt{2}}$, веревка перестанет взаимодействовать с турником.

Поднимающаяся кобра и падающая цепочка

Разберем в заключение две задачи, которые обычно решают без использования понятия потока импульса, но на их примере можно проиллюстрировать ряд нюансов, возникающих при рассмотрении систем переменного состава. Первая задача – о кобре, поднимающей вертикально вверх голову, вторая – о падающей цепочке.

Задача 6. *С какой силой давит на землю кобра, когда она, готовясь к прыжку, поднимается вертикально вверх с постоянной скоростью v? Масса змеи M, ее длина L.*

Наиболее просто эта задача решается с использованием теоремы о движении центра масс. Покажем это решение. Пусть ось x направлена вертикально вверх и ноль оси находится на уровне земли. Тогда координата центра масс кобры, поднимающей голову, дается формулой

$$x_c = \frac{x\cdot\frac{x}{2} + (L-x)\cdot 0}{L} = \frac{x^2}{2L},$$

где x – длина вертикальной части змеи. Поскольку кобра поднимает голову с постоянной скоростью $x' = v = \text{const}$, дважды дифференцируя соотношение для x_c, находим ускорение центра масс:

$$a_c = \frac{v^2}{L}.$$

Можно считать, что на кобру действуют две внешние силы: сила тяжести Mg и сила реакции N. Уравнение, отражающее теорему о движении центра масс, имеет вид

$$Ma_c = N - Mg\ .$$

Подставляя в это уравнение ускорение центра масс, получаем формулу

$$N = Mg\left(1 + \frac{v^2}{gL}\right),$$

дающую ответ к задаче – ведь сила давления кобры на землю численно равна силе реакции N.

Получим теперь ответ иначе, рассмотрев две системы переменного состава: часть туловища змеи, остающуюся на земле, и часть, движущуюся вертикально вверх. Будем считать, что на движущуюся часть со стороны неподвижной действует сила F, направленная вертикально вверх. Масса движущейся части равна $\frac{Mx}{L}$, а для производной ее импульса справедлива формула

$$\frac{dp}{dt} = \frac{M}{L}x'^2 + \frac{M}{L}xx'' = \frac{M}{L}v^2,$$

при выводе которой учитывается, что змея поднимается с постоянной скоростью v, так что вторая производная координаты равна нулю. Пусть за малое время dt к движущейся части присоединяется небольшая масса dM с нулевой скоростью. Тогда поток импульса равен нулю. (Позже будет показано, что если положить скорость присоединяющейся массы dM равной v, то ответ для силы N не изменится, а вот выражение для силы F взаимодействия частей – изменится.) Таким образом, уравнение движения будет иметь вид

$$\frac{M}{L}v^2 = F - \frac{Mx}{L}g.$$

Для части, лежащей на земле, получаем аналогичное уравнение:

$$0 = -F + N - \frac{M(L-x)}{L}g,$$

поскольку и для этой части поток импульса будет равен нулю (мы считаем, что масса dM покидает неподвижную часть с нулевой скоростью). Из двух последних уравнений получаем выражения для сил N и F:

$$N = Mg\left(1+\frac{v^2}{gL}\right),\ F = \frac{M}{L}v^2 + \frac{Mx}{L}g.$$

Если бы при вычислении потока мы считали, что масса dM присоединяется к движущейся части, уже разогнавшись до скорости v, то поток импульса для этой части был бы равен $-\frac{M}{L}v^2$, а поток импульса для неподвижной части оказался бы равным $\frac{M}{L}v^2$. Тогда получались бы такие соотношения:

$$0 = F - \frac{Mx}{L}g,$$

$$0 = -F + N - \frac{M(L-x)}{L}g - \frac{M}{L}v^2,$$

из которых следует, что ответ для силы реакции N не изменился бы, а для силы взаимодействия частей получалось бы выражение $F = \frac{Mx}{L}g$, отличное от полученного ранее выражения.

Задача 7. *Однородная цепочка одним своим концом подвешена на нити так, что другим концом она касается поверхности стола. Нить пережигают. Определите зависимость силы давления цепочки на стол от длины еще не упавшей ее части. Удар звеньев о стол неупругий, масса цепочки M, ее длина L.*

Так же, как в случае задачи о кобре, сначала дадим решение на основе теоремы о движении центра масс, а затем рассмотрим уравнение движения системы переменного состава.

Пусть ось x направлена вертикально вверх, а ее ноль находится на уровне пола. Тогда в момент, когда координата верхнего конца цепочки равна x, координата центра масс цепочки определяется по формуле

$$x_c = \frac{x^2}{2L},$$

которая идентична соответствующей формуле в задаче о кобре. Дважды дифференцируя, получаем соотношение для ускорения центра масс:

$$a_c = x_c'' = \frac{x'^2}{L} + \frac{x \cdot x''}{L}.$$

Далее следует понять, выбрав адекватную физическую модель, как меняется координата x верхнего конца цепочки. Ничего лучше модели, предложенной при рассмотрении задачи о соскальзывающей со стола цепочке, в голову не приходит. Итак, будем считать, что цепочка представляет собой набор одинаковых точечных масс, связанных невесомыми и нерастяжимыми нитками одинаковой длины. Тогда верхняя точка цепочки движется только под действием силы тяжести с ускорением свободного падения g, следовательно, справедливы равенства

$$x = L - \frac{gt^2}{2},\ x' = -gt = -\sqrt{2g(L-x)}.$$

Подставляя эти равенства в соотношение для ускорения центра масс, получаем

$$a_c = \frac{2g(L-x)}{L} - \frac{gx}{L}.$$

Далее, применяя теорему о движении центра масс, получим выражение для силы реакции:

$$N = Mg + Ma_c = 3Mg\left(1-\frac{x}{L}\right).$$

Теперь найдем силу реакции другим способом. Рассмотрим в качестве системы переменного состава ту часть цепочки, которая уже находится на столе. Зависимость ее массы от координаты x верхнего конца цепочки дается формулой $m(x) = \frac{M(L-x)}{L}$. Производная импульса этой части цепочки, очевидно, равна нулю, а проекция потока импульса на ось x равна $\Pi_x = \frac{M}{L}x'^2$. В итоге имеем уравнение движения

$$0 = N - \frac{Mg(L-x)}{L} - \frac{M}{L}x'^2$$

и приходим к уже известному ответу для N:

$$N = 3Mg\left(1-\frac{x}{L}\right).$$

XLV Турнир городов

ЗАДАЧИ ОСЕННЕГО ТУРА

Базовый вариант

8–9 классы

1 (4)[1]. На асфальте нарисована полоса 1×10 для игры в «классики». Из центра первого квадрата надо сделать 9 прыжков по центрам квадратов (иногда вперед, иногда назад) так, чтобы побывать в каждом квадрате по одному разу и закончить маршрут в последнем квадрате. Аня и Варя обе прошли полосу, и каждый очередной прыжок Ани был на то же расстояние, что и очередной прыжок Вари. Обязательно ли они пропрыгали квадраты в одном и том же порядке?

А.Толпыго

2 (4). Четырехугольник $ABCD$ выпуклый, его стороны AB и CD параллельны. Известно, что углы DAC и ABD равны, а также углы CAB и DBC равны. Обязательно ли $ABCD$ – квадрат?

А.Тертерян

3 (5). У восьми фермеров есть клетчатое поле 8×8, огороженное по периметру забором и сплошь заросшее ягодами (в каждой точке поля, кроме точек забора, растет ягода). Фермеры поделили поле между собой по линиям сетки на 8 участков равной площади (каждый участок – многоугольник), но границы отмечать не стали. Каждый фермер следит только за ягодами внутри (не на границе) своего участка, а пропажу замечает, только если у него пропали хотя бы две ягоды. Все это известно вороне, но где проходят границы между участками, она не знает. Может ли ворона утащить с поля 9 ягод так, чтобы ни один фермер гарантированно не заметил пропажу?

Т.Казицына

4 (5). По кругу записано несколько положительных целых чисел (не менее двух). Среди любых двух соседних чисел какое-то одно больше другого в 2 раза или в 5 раз. Может ли сумма всех этих чисел равняться 2023?

С.Дворянинов

5 (5). Петя и Вася нашли 100 кубиков одинакового размера, 50 из них были белого цвета и 50 – черного. Они придумали игру. Назовем башенкой один или несколько кубиков, стоящих друг на друге. В начале игры все кубики лежат по одному, т.е. имеется 100 башенок. За один ход игрок должен одну из башенок поставить на другую (переворачивать башенки нельзя), при этом в новой башенке не должно быть подряд двух одинаковых по цвету кубиков. Ходят по очереди, начинает Петя. Кто не может сделать ход – проиграл. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

Н.Чернятьев

10–11 классы

1 (3). Барону Мюнхгаузену сообщили о многочлене $P(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ лишь то, что многочлен $P(x) + P(-x)$ имеет ровно 45 различных действительных корней. Барон, не зная даже, чему равно n, утверждает, что может определить один из коэффициентов $a_n, \ldots, a_1, a_0$ (готов указать его номер и значение). Не ошибается ли барон?

Б.Френкин

2 (4). На часах три стрелки, каждая вращается в ту же сторону, что и обычно, с постоянной ненулевой, но, возможно, неправильной скоростью. Утром длинная и короткая стрелки совпали. Ровно через 3 часа совпали длинная и средняя стрелки. Еще ровно через 4 часа совпали короткая и средняя стрелки. Обязательно ли когда-нибудь совпадут все три стрелки?

А.Юран

3 (4). Взяли все 100-значные натуральные числа, в десятичной записи которых каждая цифра – какая-то из цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7. Сколько из этих чисел делятся на 2^{100}?

П.Кожевников

[1] В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждающихся за ее полное решение. Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты (баллы за разные пункты одной задачи суммируются).

4 (5). Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Пусть P – произвольная точка внутри (и не на сторонах) треугольника ABC, лежащая на описанной окружности треугольника ABH, и A', B', C' – проекции точки P на прямые BC, CA, AB. Докажите, что описанная окружность треугольника $A'B'C'$ проходит через середину отрезка CP.

А.Заславский

5 (6). У девяти фермеров есть клетчатое поле 9×9, огороженное по периметру забором и сплошь заросшее ягодами (в каждой точке поля, кроме точек забора, растет ягода). Фермеры поделили поле между собой по линиям сетки на 9 участков равной площади (каждый участок – многоугольник), но границы отмечать не стали. Каждый фермер следит только за ягодами внутри (не на границе) своего участка, а пропажу замечает, только если у него пропали хотя бы две ягоды. Все это известно вороне, но где проходят границы между участками, она не знает. Может ли ворона утащить с поля 8 ягод так, чтобы ни один фермер гарантированно не заметил пропажу?

Т.Казицына

Сложный вариант

8 – 9 классы

1 (4). В каждую клетку доски 8×8 вписано натуральное число так, что выполнено условие: если из одной клетки в другую можно перейти одним ходом коня, то отношение чисел в этих двух клетках является простым числом. Могло ли оказаться, что в какую-то клетку вписано число 5, а в какую-то другую – число 6?

Е.Бакаев

2 (6). См. задачу М2770 «Задачника «Кванта».

3 (7). Назовем двуклетчатую карточку 2×1 *правильной*, если в ней записаны два натуральных числа, причем число в верхней клетке меньше числа в нижней клетке. За ход разрешается изменить оба числа на карточке: либо прибавить к каждому одно и то же целое число (возможно, отрицательное), либо умножить каждое на одно и то же натуральное число, либо разделить каждое на одно и то же натуральное число; при этом карточка должна остаться правильной. За какое наименьшее количество таких ходов из любой правильной карточки можно получить любую другую правильную карточку?

А.Глебов

4 (7). Дан треугольник ABC с углом A, равным 60°. Его вписанная окружность касается стороны AB в точке D, а вневписанная окружность, касающаяся стороны AC, касается продолжения стороны AB в точке E. Докажите, что перпендикуляр к стороне AC, проходящий через точку D, вторично пересекает вписанную окружность в точке, равноудаленной от точек E и C. (Вневписанной называется окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон.)

А.Марданов

5 (9). У Васи есть 13 одинаковых на вид гирь, но 12 из них весят одинаково, а одна, фальшивая, весит больше остальных. Также у него есть двое чашечных весов – одни правильные, а другие показывают верный результат (какая чаша тяжелее), если массы на чашах различаются, а в случае равенства могут показать что угодно (какие именно весы правильные, Вася не знает). Перед каждым взвешиванием Вася может сам выбирать весы. Докажите, что Вася может гарантированно найти фальшивую гирю за 3 взвешивания.

А.Аржанцев

6 (10). Пекарь испек прямоугольный лаваш и разрезал его на n^2 прямоугольников, сделав $n-1$ горизонтальных разрезов и $n-1$ вертикальных. Оказалось, что округленные до целого числа площади получившихся прямоугольников равны всем натуральным числам от 1 до n^2 в некотором порядке. Для какого наибольшего n это могло произойти? (Полуцелые числа округляются вверх.)

Г.Караваев

7 (12). См. задачу М2772 «Задачника «Кванта».

10–11 классы

1 (4). Для каждого многочлена степени 45 с коэффициентами 1, 2, 3, …, 46 (в каком-то порядке) Вася выписал на доску все его различные действительные корни. Затем он увеличил все числа на доске на 1. Каких чисел на доске оказалось больше: положительных или отрицательных?

А.Глебов

2 (5). См. задачу М2771 «Задачника «Кванта».

3. Квадрат разбили на несколько прямоугольников так, что центры прямоугольников образуют выпуклый многоугольник.

а) (3) Обязательно ли каждый прямоугольник примыкает к стороне квадрата?

б) (6) Может ли количество прямоугольников равняться 23?

А.Шаповалов

4 (9). Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ площади S. Внутри каждой его стороны отмечено по точке и эти точки последовательно соединены отрезками, так что $ABCD$ разбивается на меньший четырехугольник и 4 треугольника. Докажите, что хотя бы у одного из этих треугольников площадь не превосходит $S/8$.

М.Малкин

5 (10). Хорда DE описанной около треугольника ABC окружности пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно, точка P лежит между D и Q. В треугольниках ADP и QEC провели биссектрисы DF и EG. Оказалось, что точки D, F, G, E лежат на одной окружности. Докажите, что точки A, P, Q, C лежат на одной окружности.

А.Марданов

6 (12). Таблица 2×2024 заполнена целыми числами, причем в первой строке стоят числа из набора $\{1, \ldots, 2023\}$. Оказалось, что какие бы два столбца мы ни выбрали, разность их чисел из первой строки делится на разность их чисел из второй строки. Известно, что все числа во второй строке попарно различны. Обязательно ли тогда все числа в первой строке равны между собой?

И.Кухарчук

7 (14). На столе лежат $2n$ неразличимых на вид монет. Известно, что n из них имеют массу по 9 г, а остальные n – по 10 г. Требуется разбить их на n пар так, чтобы общая масса каждой пары равнялась 19 г. Докажите, что это можно сделать менее чем за n взвешиваний на чашечных весах без гирь (показывающих, равны ли чаши, а если нет, то какая тяжелее).

А.Грибалко

Материал подготовили Е.Веретенников, А.Глебов, А.Грибалко, С.Дориченко, А.Заславский, П.Кожевников, М.Малкин, Л.Медников, А.Тертерян, А.Толпыго, Б.Френкин, А.Шаповалов, А.Юран

20-я Международная естественно-научная олимпиада юниоров

В этой олимпиаде принимают участие школьники, чей возраст не превышает 15 лет. Отбор кандидатов в команду России производится из числа участников региональных этапов Всероссийской олимпиады школьников по физике или/и химии, набравших более 30% баллов от максимума. В июне 30–35 наиболее успешных школьников приглашаются на сборы в МФТИ, где проводится подготовка по программе олимпиады, формируются экспериментальные навыки. Затем в августе ребята участвуют в естественно-научной смене в образовательном центре «Сириус», а в конце сентября–начале октября проходят очередные сборы в МФТИ – по окончании которых

Во время тура

и определяется команда в составе 6 человек, которые в декабре принимают участие в олимпиаде.

В декабре прошлого 2023 года Международная естественно-научная олимпиада юниоров проходила в Бангкоке, столице Королевства Таиланд. В олимпиаде приняли участие команды из 55 стран. Команду Российской Федерации представляли

Авдеев Федор (Москва, лицей «Вторая школа»),

Беленький Владимир (Москва, школа 179),

Битлев Роберт (Санкт-Петербург, лицей 533),

Кожевников Роман (Долгопрудный Московской области, лицей 5),

Мягкова Мария (Москва, лицей «Вторая школа»),

Торкановская Мария (Долгопрудный Московской области, ФТЛ).

Сразу после церемонии награждения. Слева направо: Р.Битлев, Ф.Авдеев, М.Торкановская, М.Мягкова, В.Беленький, Р.Кожевников

Тренерами команды были М.А.Каркешкин (химия), И.А.Киселев (биология), Л.М.Колдунов (физика). Руководителем делегации был В.П.Слободянин.

На церемонии открытия присутствовала принцесса Таиланда Маха Чакри Сириндхорн. Организация олимпиады и условия проживания в Бангкоке оказались на высоком уровне. Ребят разместили в гостинице в центре города. Между турами их ожидали интересные экскурсии, квесты, разнообразная культурно-развлекательная программа.

По мнению большинства руководителей команд, уровень сложности заданий был выше среднего. Наши юниоры выступили на редкость ровно. На экспериментальном туре все участники делились на команды по 3 человека. И вот настала церемония закрытия: на сцену вызывают бронзовых медалистов, серебряных... – наших среди вызываемых нет.

Ура! Все шесть членов нашей сборной стали золотыми медалистами. А первая российская тройка получила еще и бронзовую медаль за эксперимент. Заметим, что экспериментальных медалей было всего три: одна золотая, одна серебряная и одна бронзовая.

Тестовый тур олимпиады состоял из 30 задач – 10 по физике, 10 по химии и 10 по биологии. Ниже приводятся задачи тестового тура по физике.

Тестовый тур

Физика

1. Брусок весом 100 Н покоится на горизонтальной поверхности. Коэффициенты трения скольжения и покоя равны $\mu_1 = 0,400$ и $\mu_2 = 0,500$ соответственно. К бруску прикладывают силу $F = 42,0$ Н, как показано на рисунке 1. Каковы величина и направление силы трения, действующей на брусок?

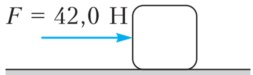


Рис. 1

A) 40,0 Н налево; B) 42,0 Н налево; C) 50,0 Н налево; D) 50,0 Н направо.

2. У какого из нижеперечисленных объектов наибольшее абсолютное значение ускорения? Считайте, что все объекты движутся с постоянным ускорением по прямой.

A) Автомобиль, разгоняющийся от 0 км/ч до 100 км/ч за 4,00 секунды.

B) Камень во время свободного падения вблизи поверхности Земли.

C) Автомобиль с начальной скоростью 60,0 км/ч и полностью останавливающийся за 3,20 секунды.

D) Автомобиль, который проходит 250 м за 6,50 с, стартуя из состояния покоя.

3. Пуля массой m попадает в покоящийся груз массой M и застревает в нем. Груз

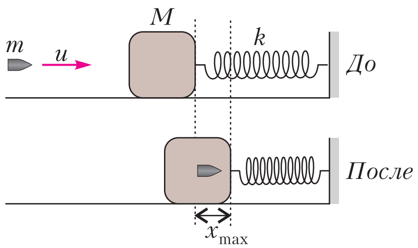


Рис. 2

находится на горизонтальном гладком полу и прикреплен к стене невесомой пружиной жесткостью k (рис. 2). Груз с пулей внутри сжимает пружину так, что ее максимальная деформация равна x_{max}. Выразите начальную скорость u пули через m, M, k и x_{max}.

A) $\dfrac{x_{max}}{m}\sqrt{k(m+M)}$;

B) $x_{max}\dfrac{(m+M)}{m}\sqrt{k}$;

C) $x_{max}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$;

D) $x_{max}\sqrt{\dfrac{k}{m+M}}$.

4. Если в жидкость плотностью ρ_A поместить шар, то он утонет и вытеснит жидкость объемом V (рис. 3). Если тот же шар

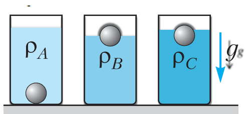


Рис. 3

поместить в жидкость плотностью ρ_B, то он будет в ней плавать, погруженным ровно наполовину. Когда шар помещают в жидкость плотностью ρ_C, то он тоже в ней плавает. Определите величину выталкивающей силы действующей со стороны жидкости на шар.

A) $\rho_C g V_A$;

B) $\dfrac{1}{2}\rho_A g V_A$;

C) $\dfrac{1}{2}\rho_B g V_A$;

D) недостаточно информации, чтобы дать верный ответ.

5. Два одинаковых светодиода соединены так, как показано на рисунке 4. Для их нормальной работы необходимо, чтобы сила

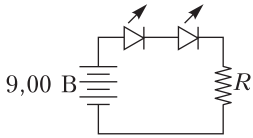


Рис. 4

тока, протекающего через них, была 10,0 мА, а падение напряжения было 1,20 В. Вычислите сопротивление резистора R для данной цепи, чтобы режим работы светодиодов был нормальным.

A) 330 Ом; B) 390 Ом; C) 660 Ом; D) 780 Ом.

6. На каком из рисунков (рис. 5) показано **неправильное** направление индуцированного

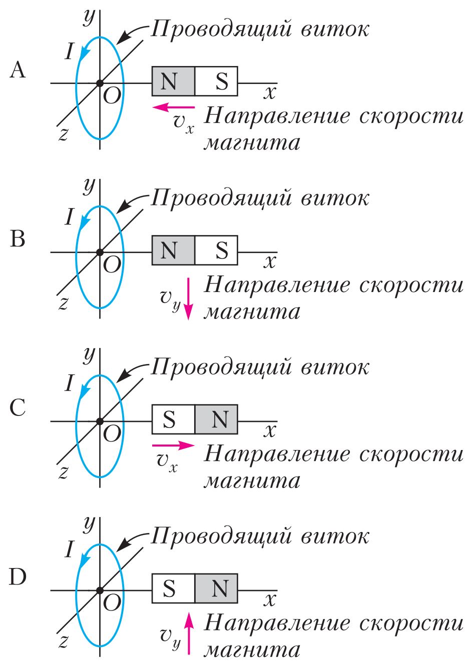


Рис. 5

го тока I в проводящем витке? На всех рисунках виток расположен в плоскости yz и ток течет против часовой стрелки, если наблюдатель располагается на положительной части оси x.

7. Бассейн прямоугольной формы шириной 4,30 м и глубиной 5,00 м полностью заполнен водой (рис. 6). Сторона в 4,30 м ориентирована с востока на запад. Бассейн находится на экваторе, так что Солнце в полдень находится в зените. Оцените, в какое время дно бассейна окажется полнос-

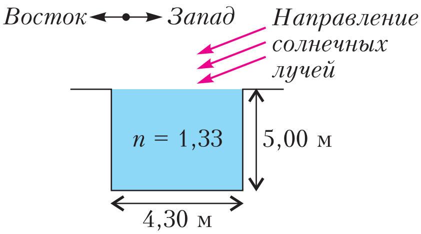


Рис. 6

тью в тени. Считайте, что показатель преломления воды равен 1,33.

A) 15:00; B) 15:30; C) 16:00; D) 16:30.

8. Теплоизолированный сосуд содержит 200 г твердого термопластика, к которому подводится тепло со скорость 400 Дж/с в течение 180 с. Зависимость температуры термопластика от времени представлена на рисунке 7. Рассмотрите следующие утверждения.

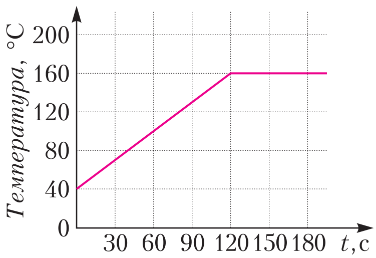


Рис. 7

I. Удельная теплоемкость термопластика равна 2,00 кДж/(кг · К).

II. Температура плавления термопластика 160 °С.

III. Через 120 с в сосуде останется только термопластик в жидком состоянии.

IV. Удельная теплота плавления термопластика 12,0 кДж/кг.

Какие из этих утверждений верные?

A) Только I и II;

B) только II и III;

C) только I, II и IV;

D) только I, II и III.

9. На графике (рис. 8) представлена зависимость высоты волны D в точке с координатой $x = 0{,}0$ см от времени t. Волна распространяется в направлении $+x$ со скоростью 5,0 см/с. Определите длину волны.

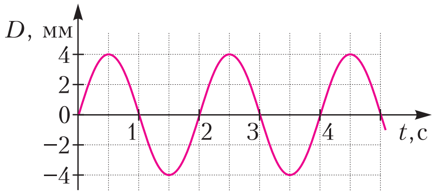


Рис. 8

A) 2,0 см; B) 5,0 см; C) 8,0 см; D) 10,0 см.

10. Смартфон используют в качестве акустического секундомера так, что он измеряет интервал времени между двумя последовательными звуковыми сигналами, зафиксированными его микрофоном. Отсчет времени начинается, когда первый звуковой импульс регистрируется микрофоном, и прекращается, когда регистрируется второй звуковой сигнал. В эксперименте, целью которого является измерение скорости звука в воздухе (v = 340 м/с), два смартфона в режиме акустического секундомера помещают так, что они находятся на расстоянии $l = 5{,}00$ м друг от друга (рис. 9). Во время

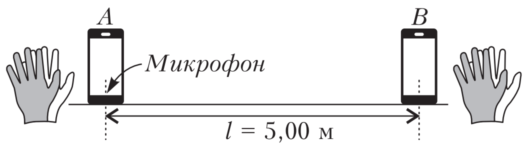


Рис. 9

измерения один студент хлопает в ладоши рядом с микрофоном A, а несколько секунд спустя другой студент хлопает в ладоши рядом с микрофоном B. Каждый хлопок приводит в действие оба телефона, но в разные моменты времени из-за конечной скорости распространения звука. Среди вариантов, представленных ниже, выберите тот вариант, который могли показать смартфоны A и B.

A) Смартфон A: 0,0147 с; смартфон B: 0,0147 с.

B) Смартфон A: 2,0147 с; смартфон B: 2,0000 с.

C) Смартфон A: 3,1000 с; смартфон B: 3,1294 с.

D) Смартфон A: 2,1294 с; смартфон B: 2,1000 с.

Публикацию подготовил В.Слободянин

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №1)

1. 9.

Если мальчиков в кружке хотя бы 10, то найдется мальчик, который послал не меньше 10 открыток (так как любые два мальчика послали разное число открыток и каждый – хотя бы одну). Значит, девочек в кружке не меньше 10. Тем самым, всего в кружке не меньше 20 школьников. Получили противоречие. Следовательно, мальчиков не больше 9. В кружке может быть ровно 9 мальчиков и 10 девочек. Мальчики могут послать 1,2, 3 ..., 9 открыток.

2. 14.

Суммарно в первой и второй коробках либо 5 конфет (если у конфеты A из первой коробки 4 соседних), либо 9 конфет (если у этой конфеты 8 соседних). Второе невозможно, так как тогда у конфеты B из второй коробки больше 8 соседних: все 7 соседних для A (без B), сама конфета A и еще хотя бы одна конфета из третьей коробки. Тогда у конфеты B будет 4 соседних конфеты из первой и второй коробок, а значит, 4 конфеты из третьей коробки. Аналогично первому рассуждению, суммарно в четвертой и пятой коробках – 5 конфет. Общее число конфет равно $5 + 4 + 5 = 14$.

3. 5.

Докажем, что все 6 произведений не могут быть целыми. Заметим, что произведение всех 18 чисел равно 1. Поэтому, если все 6 произведений будут целыми, то каждое из них равно 1. Рассмотрим тройку чисел, содержащих число 1/7. Чтобы их произведение было целым, необходимо, чтобы в эту тройку входило число 7. А чтобы это произведение равнялось 1, оставшееся число должно равняться 1. Аналогично, в тройку с числом 1/5 войдут числа 5 и 1. Осталось заметить, что теперь для числа 1/9 невозможно подобрать два числа из оставшихся, чтобы их произведение равнялось 1. Поэтому целых произведений не больше 5.

Пять целых произведений может получиться, например, при таком разбиении на тройки: (1/7;7;1), (1/5;5;1), (2;4;1/8), (1/2;1/4;8), (1/9;9;3), (1/3;6;1/6). Целыми будут 5 произведений в первых 5 тройках.

4. 300.

Заметим, что «да» ответили рыцари, стоящие между людьми разного типа, и лжецы, стоящие между людьми одинакового типа, а остальные ответили «нет». Поэтому если оба соседа любого жителя сменят тип, то его ответ останется прежним. Также если житель сменит тип вместе с одним своим соседом, то и он не поменяет свой ответ. Пронумеруем всех стоящих в круге следующим образом: 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... Если все жители с номерами 1 и 2 сменят свой тип, то из сказанного выше следует, что никто не поменяет свой ответ. Поскольку путешественник смог определить, сколько в круге рыцарей, то такое изменение типов не меняет их количество, значит, среди жителей с номерами 1 и 2 по 200 рыцарей и лжецов. Аналогично, по 200 рыцарей среди жителей с номерами 2 и 3, а также среди жителей с номерами 3 и 1. Просуммировав эти количества, получим 600 рыцарей, при этом каждого жителя мы посчитаем дважды, поэтому всего в круге 300 рыцарей.

Конкурс имени А.П.Савина

(см. «Квант» №11-12 за 2023 г.)

9. Первым.

Скорости Гриши и Бори одинаковы (ведь они одновременно выехали и одновременно доехали до места встречи); скорости Алеши и Васи тоже одинаковы. Если бы Вася поехал после встречи обратно в А вместе с Алешей, они бы вернулись одновременно, но Вася приехал позже всех. Значит, Вася после встречи поехал в Б, и проехать ему пришлось большее расстояние, чем Алеше. Тогда место встречи ближе к А, чем к Б. Алеша и Боря вернутся в А и Б одновременно, ведь после встречи оба они проедут то же расстояние, что и до встречи, с той же скоростью. Гриша же сначала проедет то же расстояние, что и Боря, а потом проедет меньшее расстояние, чем Боря, – от места встречи до А. Значит, Гриша приедет быстрее Алеши и Васи.

10. 14400.

В строке 4 стоит не больше двух ладей, а в остальных строках – не больше одной, итого можно поставить не больше 9 не бьющих друг друга ладей. Раз всего ладей 9, то в строке 4 должно стоять ровно две ладьи, а в остальных строках – ровно по одной. Аналогично со столбцами.

Выберем сначала, куда поставить такие четыре ладьи:

1) в строку 4 левее фишки,
2) в строку 4 правее фишки,
3) в столбец с ниже фишки,
4) в столбец с выше фишки.

Посчитав количества клеток в соответствующих областях (они показаны синим цветом на рисунке 1), получим, что это можно сделать $2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 = 5!$ способами.

Осталось 5 свободных строк и 5 свободных столбцов, куда нужно поставить 5 оставшихся ладей. Это делается 5! способами: сначала выбираем,

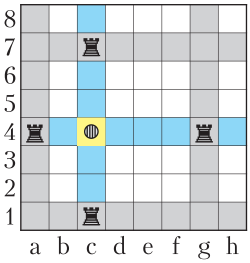


Рис. 1

куда поставить ладью в верхнюю из этих строк – 5 способов; осталось 4 свободных строки и 4 свободных столбца, и мы снова выбираем, куда поставить ладью в верхнюю из оставшихся строк – 4 способа и т.д.

Осталось перемножить эти числа: $(5!)^2 = 120^2 = 14400$.

11. а) Да. Это следует из решения пункта б).

б) Взвешивание можно сделать при всех N, кроме $N \geq 13$, дающих остаток 1 при делении на 3. Пусть у нас a двоек (монет по 2 г) и b троек (монет по 3 г), тогда $N = 2a + 3b$.

В первой таблице описаны взвешивания четырех типов. Позже мы покажем, как в зависимости от N выбрать, взвешивание какого типа надо сделать. Во взвешиваниях типов (A) и (B) на левой чаше только двойки, на правой только тройки, и весы находятся в равновесии. Тогда количество двоек на левой чаше делится на 3. Пусть оно равно $3k$, тогда количество троек равно $2k$. Суммарный вес на левой чаше при фиксированном количестве монет является наименьшим возможным, а на правой – наибольшим возможным. Поэтому зрители узнают, какие монеты лежат на весах. Вне весов все монеты одинаковые, в типе (A) это тройки, в (B) – двойки. Значит, зрители узнают и оставшиеся монеты.

Во взвешиваниях типов (C) и (D) на левой чаше только двойки, на правой только тройки, и левая чаша на 1 г легче, чем правая. Аналогично предыдущему рассуждению можно понять, что эти взвешивания подходят.

Покажем, что при N, дающих остатки 0, 2, 3 или 5 при делении на 6, можно провести требуемое взвешивание. Все варианты рассмотрены во вто-

Таблица 1

	На левой чаше	На правой чаше	Вне весов	Всего двоек	Всего троек
(A)	$3k$ двоек	$2k$ троек	тройки	$a = 3k$	$b \geq 2k$
(B)	$3k$ двоек	$2k$ троек	двойки	$a \geq 3k$	$b = 2k$
(C)	$3k + 1$ двоек	$2k + 1$ троек	тройки	$a = 3k + 1$	$b \geq 2k + 1$
(D)	$3k + 1$ двоек	$2k + 1$ троек	двойки	$a \geq 3k + 1$	$b = 2k + 1$

Таблица 2

N mod 6	a	b	Какое взвешивание используем
0	$a = 3p$	$b = 2q$	при $p \geq q$ — (B), при $p \leq q$ — (A)
2	$a = 3p + 1$	$b = 2q$	при $p \geq q$ — (B), при $p < q$ — (C)
3	$a = 3p$	$b = 2q + 1$	при $p > q$ — (D), при $p \leq q$ — (A)
5	$a = 3p + 1$	$b = 2q + 1$	при $p \geq q$ — (D), при $p \leq q$ — (C)

Таблица 3

Левая чаша	Правая чаша	Вне весов	
2	2	хотя бы три тройки	нельзя различать эту ситуацию $2 = 2$ с ситуацией $3 = 3$
2	хотя бы три тройки	2	нельзя различать эту ситуацию $2 < 3 + 3 + \ldots$ с ситуацией $2 < 2 + 3 + \ldots$
2, 2	3	хотя бы две тройки	нельзя различать эту ситуацию $2 + 2 > 3$ с ситуацией $2 + 3 > 2$
2,2	3,3	хотя бы одна тройка	нельзя различать эту ситуацию $2 + 2 < 3 + 3$ с ситуацией $2 + 3 < 3 + 3$
2,2	хотя бы три тройки	тройки (возможно, ни одной)	нельзя различать эту ситуацию $2 + 2 < 3 + 3 + \ldots$ с ситуацией $2 + 3 < 2 + 3 + \ldots$
хотя бы одна тройка	хотя бы одна тройка	2, 2	нельзя различать эту ситуацию $3 + 3 + \ldots < 3 + 3 + \ldots$ с ситуацией $2 + 3 + \ldots < 2 + 3 + \ldots$; аналогично для случая равенства $3 + 3 + \ldots = 3 + 3 + \ldots$

рой таблице. Если мы знаем остаток N при делении на 6, то из равенства $N = 2a + 3b$ однозначно находится остаток a при делении на 3 и остаток b при делении на 2 (см. первые три столбца второй таблицы).

Осталось рассмотреть случай, когда N дает остаток 1 при делении на 3.

Случай $N = 1$ невозможен. При $N = 4$ возможен только набор монет 2, 2, поэтому зрителям все монеты известны заранее. При $N = 7$ возможен только набор монет 2, 2, 3, тогда сделаем взвешивание $2 < 3$ – зрители поймут, где какая монета. При $N = 10$ возможен только набор монет 2, 2, 3, 3, тогда сделаем взвешивание $2 + 2 < 3 + 3$.

При $N \geq 13$ возможен вариант, что есть ровно две двойки, а все остальные – тройки, и их хотя бы три. Покажем, что тогда искомое взвешивание невозможно. Предположим, что оно возможно. Монеты делятся на три группы – левая чаша, правая чаша и оставшиеся монеты. Внутри одной группы все монеты должны быть одинаковыми – ведь если там есть две различные монеты, то эти две монеты зрители не смогут различить. Поэтому либо две двойки образуют одну группу, либо каждая из них образует отдельную группу. Все возможные варианты разобраны в третьей таблице.

12. а) Нет; б) да.

а) Если мы поставим шесть плюсов, то полученное в результате число будет заканчиваться на цифру 7. А квадрат числа заканчиваться на цифру 7 не может.

б) Будем обозначать число, состоящее из n единиц, через R_n (такие числа называются репьюнитами). Имеют место равенства

$$R_n = \underbrace{111\ldots11}_{n \text{ цифр } 1} = \frac{1}{9} \cdot \underbrace{999\ldots99}_{n \text{ цифр } 9} = \frac{10^n - 1}{9}.$$

Рассмотрим число

$$b_n = \underbrace{333\ldots33}_{n \text{ цифр } 3}4 = 3R_{n+1} + 1 = \frac{10^{n+1} + 2}{3}.$$

Возведем в квадрат:

$$(b_n)^2 = \left(\frac{10^{n+1} + 2}{3}\right)^2 = \frac{10^{2n+2} + 4 \cdot 10^{n+1} + 4}{9} =$$

$$= \frac{\left(10^{2n+2} - 1\right) + 4\left(10^{n+1} - 1\right) + 9}{9} = R_{2n+2} + 4R_{n+1} + R_1.$$

Получили сумму шести чисел, каждое из которых состоит из одних единиц. Общее количество единиц равно

$$(2n + 2) + 4(n + 1) + 1 = 6n + 7.$$

Это число будет равно 2023 при $n = 336$. Следовательно, в строке из 2023 единиц можно поставить пять плюсов так, чтобы полученное в результате число было полным квадратом, а именно:

$$R_{674} + R_{337} + R_{337} + R_{337} + R_{337} + R_1 = (b_{336})^2.$$

13. Такая прогрессия существует.

Это арифметическая прогрессия из 17 членов с первым членом (-17) и разностью 17. Последний член прогрессии равен $17 \cdot 15$. Сумму прогрессии можно найти как полусумму первого и последнего членов, умноженную на количество членов:

$$\frac{-17 + 17 \cdot 15}{2} \cdot 17 = 7 \cdot 17 \cdot 17 = 2023.$$

14. 48.

Самый высокий человек точно соврал (выше него никого нет), и, аналогично, соврал самый низкий. Значит, больше 48 человек сказать правду не могли. Приведем пример, когда сказали правду 48 человек. Возьмем 50 человек разного роста и пронумеруем их числами от 1 до 50 по возрастанию роста. Посадим на один из диванов людей с номерами 1 и 50, а дальше на каждый предыдущий по часовой стрелке диван будем сажать поровну самых высоких и самых низких из оставшихся (например, как на рисунке 2). Тогда для всех, кроме 1-го и 50-го, ровно половина людей на следующем диване будет ниже и ровно половина – выше.

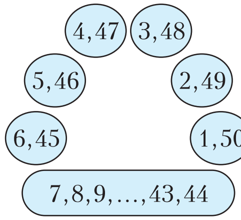


Рис. 2

15. 180°.

Разделим синий и зеленый углы на части вертикальными линиями сетки и переложим части, как показано на рисунке 3.

Красный угол и левая часть зеленого вместе дадут прямой угол; левая часть синего угла вместе с правой частью зеленого, как и правая часть синего угла, образуют углы между сторонами и диагоналями пунктирных квадратов и поэтому

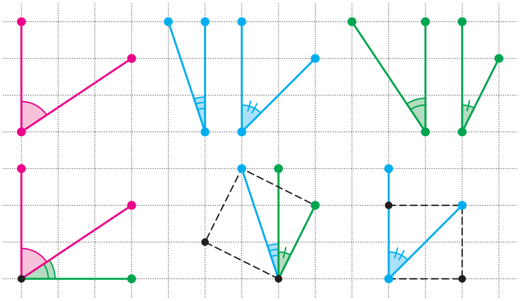


Рис. 3

равны по 45°. Значит, сумма отмеченных углов равна $90° + 45° + 45° = 180°$.

16. Выигрышная стратегия есть у второго игрока.

Пусть при своем первом ходе второй игрок красит в желтый цвет букву L, расположенную вблизи одного из углов квадрата так, как показано на рисунке 4. Он сможет это сделать, так как первым ходом его противник смог «испортить» не больше чем один из четырех углов квадрата. Клетки, выделенные на рисунке зеленым цветом, назовем их *заповедником*, недоступны для первого игрока. Далее второй игрок ходит так, чтобы при своих ходах не затрагивать заповедник. И только в случае, когда никаких других ходов не остается, он перекрашивает в желтый цвет клетки заповедника (это можно сделать, поскольку клетки заповедника образуют букву L) и выигрывает.

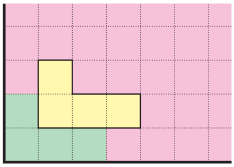


Рис. 4

Объясним, почему второй игрок выигрывает.

Если после хода второго игрока в заповедник у первого игрока остается возможность сделать ответный ход, то это означает, что какая-то фигура в виде буквы T или в виде буквы Z до сих пор имеет красный цвет. Но внутри каждой из этих фигур помещается фигура L. Следовательно, у второго игрока была возможность не ходить в заповедник. Это противоречит правилу для второго игрока, которое мы сформулировали.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. В системе отсчета «снаряд».

2. Скорость истечения воды одинакова, если измеряется в системе отсчета, связанной с вагоном. Иначе можно было бы обнаружить факт равномерного движения поезда, не выглядывая в окно, что противоречит принципу относительности.

3. Каждая точка катящегося колеса участвует в двух движениях: вращательном и поступательном. В верхней части колеса скорости этих движений складываются, в нижней – вычитаются так, что соприкасающаяся с дорогой точка неподвижна. Из автобуса же наблюдается лишь «чистое» вращение колеса.

4. В направлении движения легкового автомобиля со скоростью, равной по модулю половине скорости автобуса.

5. В системе отсчета, связанной с любым из футболистов (в которой он неподвижен), все спортсмены будут двигаться равномерно и прямолинейно, и поэтому их пути должны пересечься в месте расположения неподвижного футболиста. Именно в этом месте они и могут встретиться, причем – одновременно.

6. Такой же – это следует из принципа относительности Эйнштейна.

7. В системе отсчета бегуна, как и в любой другой инерциальной системе, свет обладает одной и той же скоростью. Свое изображение бегун увидит точно таким же, как и при любой другой постоянной скорости бега.

8. В системе отсчета «Звездолет» расстояние от Земли до Сириуса только два световых года.

9. Нет – это эффект релятивистского сокращения длины.

10. Поперечные размеры бруска остаются неизменными, длина же сокращается, допустим, в k раз. Поэтому объем уменьшится в k раз. Поскольку при этом масса бруска увеличивается в k раз, то его плотность возрастет в k^2 раз.

11. Невозможно, так как в этом случае у частицы нет ни импульса, ни кинетической энергии.

12. Закон, связывающий массу тела с его энергией: $E_0 = mc^2$.

13. Когда скорости электрона и позитрона равны по модулю и противоположно направлены.

14. «Красное смещение» объясняется удалением галактики от Земли.

Микроопыт

Скорость спортсмена относительно дорожки равна и противоположна скорости дорожки относительно земли.

XLV Турнир городов

Задачи осеннего тура

Базовый вариант

8–9 классы

1. Не обязательно. Пример см. на рисунке 5: проход Ани указан над полосой, а проход Вари – под полосой.

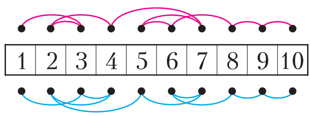


Рис. 5

2. Не обязательно.

Пусть A, D, C, B – последовательные вершины правильного шестиугольника. Тогда $ABCD$ (рис. 6) – равнобедренная трапеция (полови-

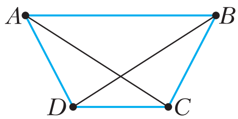


Рис. 6

на правильного шестиугольника), и все упомянутые в условии углы равны 30°.

3. Может.

Пусть ворона утащит ягоды, отмеченные точками на рисунке 7 слева. Участок, содержащий одну из этих ягод внутри себя, должен содержать и квадрат 2×2 с центром в этой точке. Поэтому никакие две утащенные вороной ягоды не могут лежать внутри одного участка – ведь участок имеет площадь 8 клеток и состоял бы тогда ровно из двух таких квадратов, а они не образуют многоугольник.

Замечание. Возможен и пример, аналогичный примеру из решения задачи 5 старших классов (рис. 8).

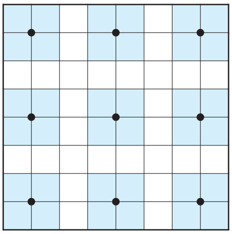


Рис. 7

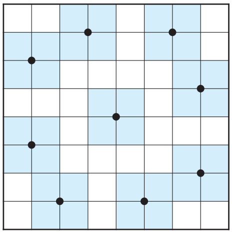


Рис. 8

4. Не может.

Рассмотрим любые два соседних числа, пусть a – меньшее из них. Тогда большее равно либо $2a$, либо $5a$, и вместе с меньшим оно дает либо $3a$, либо $6a$. Значит, сумма любых двух соседних чисел кратна 3. Найдем для каждого числа сумму его и следующего за ним по часовой стрелке и все эти суммы сложим. Получим, что удвоенная сумма всех чисел кратна 3. Значит, она не может равняться 4046.

5. Вася.

Назовем башенку *белой*, если ее нижний и верхний кубики белые, и *бело-черной*, если ее нижний кубик белый, а верхний черный. Аналогично определяются черная и черно-белая башенки. В начале игры имеется 50 белых и 50 черных башенок. Петя из белой и черной башенок соберет *разноцветную* (черно-белую или бело-черную). В любом случае Вася, присоединяя к ней с нужной стороны белую башенку, склеивает белую башенку. В результате остаются по 49 белых и черных башенок. Далее Вася продолжает действовать так же, пока не оставит после своего хода две белые и две черные башенки. Петя своим ходом снова соберет разноцветную башенку. Теперь Вася из оставшихся белой и черной башенок соберет противоположную башенку (черно-белую, если Петя собрал бело-черную), и у Пети не будет хода.

10–11 классы

1. Не ошибается.

Отметим действительные корни многочлена $P(x)+P(-x)$ на координатной прямой. Поскольку $P(x)+P(-x)$ – четная функция, отмеченные корни симметричны относительно нуля. Так как их нечетное количество, один из этих корней равен нулю. Тогда $2a_0 = P(0)+P(-0) = 0$, откуда $a_0 = 0$.

2. Не обязательно.

Контрпример. Пусть длинная стрелка за час делает один оборот, средняя – $\frac{1}{8}$ оборота, короткая – половину оборота, «утром» длинная и короткая стрелки были направлены «вверх», а средняя отстояла от них на $\frac{3}{8}$ оборота против часовой стрелки. Тогда через 3 часа длинная и средняя стрелки встретятся «в верхней точке» циферблата, так как обе будут направлены «вверх», а еще через 4 часа короткая и средняя стрелки встретятся в «нижней точке» циферблата, так как обе будут направлены вниз (т.е. условия выполнены). Поскольку длинная стрелка быстрее короткой на половину оборота в час, они встречаются в точности через каждые два часа, т.е. все их встречи происходят через *четное* число часов после «утра», и, значит, происходят «в верхней точке» циферблата. Но средняя стрелка проходит через «верхнюю точку» только через *нечетное* число часов после «утра», поэтому все три стрелки никогда не совпадут.

3. 3^{100} чисел.

Докажем по индукции, что есть ровно 3^n *хороших* n-значных чисел (кратных 2^n и составленных из указанных цифр). *База* ($n=1$) очевидна. *Шаг индукции.* Если у хорошего $(n+1)$-значного числа стереть первую цифру, получится хорошее n-значное число (поскольку, стирая цифру x, мы вычитаем из числа, кратного 2^{n+1}, число $x\cdot 10^n$, кратное 2^n).

С другой стороны, хорошее n-значное число имеет вид $y\cdot 2^n$. Приписывая к нему слева цифру x, мы добавляем число $\left(x\cdot 5^n\right)2^n$, и сумма будет делиться на 2^{n+1} тогда и только тогда, когда число $y + x\cdot 5^n$ четно, т.е. когда $x+y$ четно. Видно, что для четных y в качестве x подходят в точности четные цифры 2, 4, 6, а для нечетного y – в точности нечетные цифры 3, 5, 7. Значит, хороших $(n+1)$-значных чисел в 3 раза больше, чем хороших n-значных.

4. Пусть M – середина CP (рис. 9). Точки A' и B' лежат на окружности с диаметром CP и центром в M, а вписанный в эту окружность угол $A'CB'$ острый, поэтому $\angle A'MB' = 2\angle BCA$ и

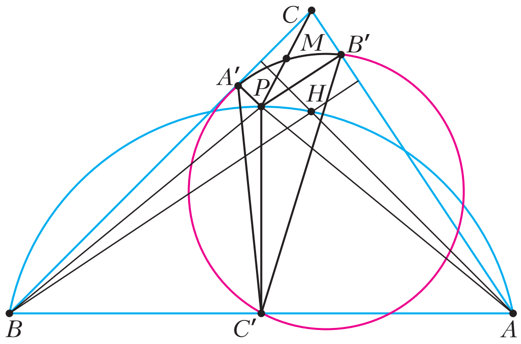


Рис. 9

M лежит от прямой $A'B'$ по ту же сторону, что и C. Так как P лежит внутри остроугольного треугольника, ее проекции A', B', C' лежат внутри сторон, тогда четырехугольники $AB'PC'$ и $BA'PC'$ вписанные. Используя равенства вписанных углов, имеем:

$$180° - \angle A'C'B' = \angle AC'B' + \angle BC'A' = \angle BPA' + \angle APB' =$$
$$= 360° - \angle APB - \angle A'PB' =$$
$$= (180° - \angle AHB) + (180° - \angle A'PB') =$$
$$= \angle BCA + \angle BCA = 2\angle BCA,$$

откуда $\angle A'MB' + \angle A'C'B' = 180°$, т.е. точки A', M, B', C' лежат на одной окружности, что и требовалось.

5. Может.

Пусть ворона утащит ягоды, отмеченные точками на рисунке 10. Участок, содержащий одну из этих ягод внутри себя, должен содержать и квадрат 2×2 с центром в этой точке. Если участок содержит две утащенные вороной ягоды, он, кроме соответствующих квадратов 2×2, содержит тогда еще ровно одну клетку (так как площадь участка равна 9). Но тогда эти квадраты 2×2 соприкасаются (иначе одной клетки не хватит, чтобы получить связный участок). В этом случае образуется примыкающий к углу поля изолированный участок, «отсеченный» этими двумя квадратами, в котором будет одна или две клетки, что невозможно (площади всех участков равны 9).

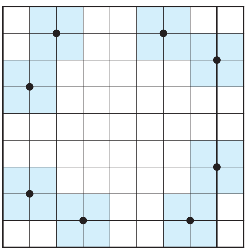


Рис. 10

Сложный вариант

8–9 классы

1. Могло.

Пример. Раскрасив доску в черный и белый цвета в шахматном порядке, сначала во все черные клетки впишем единицы, а во все белые – двойки. Затем заменим угловую единицу на 6, а соседнюю с ней двойку – на 5 (рис. 11).

1	2	1
2	1	2
6	5	1

Рис. 11

3. За 3 хода.

Будем изображать карточку в виде пары (a, b), где $a < b$. Пусть надо из (a, b) получить (c, d). Умножим первую карточку на разность $(d - c)$ чисел на второй карточке, получим карточку $(a(d-c), b(d-c))$. Вторым ходом получим из нее карточку $(c(b-a), d(b-a))$. Это можно сделать с помощью сложения, так как разность между нижним и верхним числами на каждой из этих карточек равна $(b-a)(d-c)$. Третьим ходом делим на разность $b - a$.

Докажем, что из карточки $(1, 3)$ нельзя получить карточку $(1, 4)$ меньше чем за три хода. Для нашей карточки первый ход – прибавление натурального числа или умножение (так как на ней есть 1).

В первом случае разность чисел на карточке останется равной 2, и за одно деление или умножение получить разность 3 нельзя (разность умножится или разделится на целое число); сложение разность вообще не изменит.

Во втором случае, чтобы изменить отношение чисел на карточке с 3 на 4, придется вторым ходом использовать вычитание, тогда разность уже должна была равняться 3, но она кратна 2.

4. Пусть вписанная окружность ω с центром I касается стороны AC в точке H, вневписанная окружность из условия касается стороны AC в точке K, перпендикуляр DF из условия пересекает ω в точке X (рис. 12). Поскольку $AD = AH$, $\angle A = 60°$, то треугольник ADH равносторонний, а DF – его высота. Так как $\angle XIH = 2\angle XDH = 60° = \angle AIH$, точка X лежит на прямой AI, т.е. является центром треугольника ADH. По свойствам касательных к вписанной и вне-

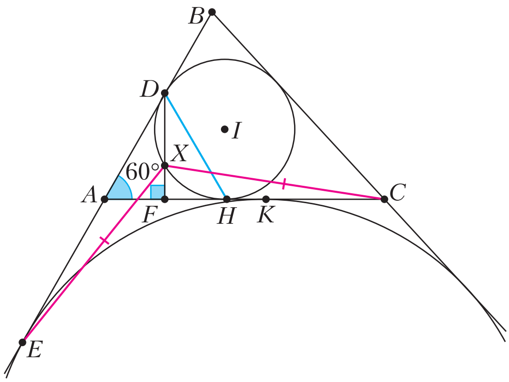


Рис. 12

вписанной окружностям, $AE = AK = CH$. Кроме того, $AX = HX$, $\angle EAX = 150° = \angle CHX$. Следовательно, треугольники AXE и HXC равны, откуда $XE = XC$.

5. Будем всегда класть на чаши весов поровну гирь. Заметим, что тогда заведомо нефальшива гиря, оказавшаяся на «легкой» чаше, а в случае равенства – на любой из чаш. Обозначим весы X и Y. Первым взвешиванием положим на чаши весов X по 4 гири.

1) Весы в равновесии. Тогда фальшива одна из 5 невзвешенных гирь. Вторым взвешиванием положим по 2 подозрительные гири на чаши весов X. При равновесии фальшива невзвешенная гиря A.

В противном случае фальшива либо гиря A (если весы X неправильные), либо одна из гирь B, C на «тяжелой» чаше. Третьим взвешиванием сравним B с C на весах Y. При равновесии фальшива гиря A. В противном случае фальшива более тяжелая гиря (если бы фальшива была A, весы Y показали бы равновесие).

2) Одна из чаш опустилась. Тогда фальшива либо одна из 4 гирь на «тяжелой» чаше, либо одна из 5 невзвешенных гирь. Вторым взвешиванием положим на чаши весов Y по 2 «тяжелые» гири и по одной из невзвешенных – A и B. При равновесии фальшива одна из 3 еще не взвешенных гирь, причем весы Y правильные (раз они показали равенство, все гири на них настоящие – в том числе, четыре гири, «тяжелые» по мнению весов X, т.е. весы X соврали). С их помощью найдем за одно взвешивание одну фальшивую гирю из 3 подозрительных.

Если одна из чаш (пусть с гирей A) опустилась, то фальшива одна из гирь на этой чаше (если бы фальшивая гиря была среди 3 невзвешенных, то как весы X, так и весы Y были бы неправильны, что не так). Более того, A фальшива, только если весы Y правильные. Третьим взвешиванием сравним на весах Y две отличные от A гири с ее чаши. При равновесии фальшива A, в противном случае – более тяжелая гиря.

6. Для $n = 4$. Пример пирога представлен в виде таблицы, указаны ширина столбцов, высота строк и площадь клеток.

	2	3	4	5
0,7	$1{,}4 \approx 1$	$2{,}1 \approx 2$	$2{,}8 \approx 3$	$3{,}5 \approx 4$
2,7	$5{,}4 \approx 5$	$8{,}1 \approx 8$	$10{,}8 \approx 11$	$13{,}5 \approx 14$
3	6	9	12	15
3,25	$6{,}5 \approx 7$	$9{,}75 \approx 10$	13	$16{,}25 \approx 16$

Докажем, что $n \le 4$. Переставим строки и столбцы таблицы так, чтобы высоты строк росли сверху вниз, а ширины столбцов росли слева направо. Пусть числа в угловых клетках равны $a < b < c < d$. Ясно, что a – левое верхнее, d – правое нижнее, причем $ad = bc$. Пусть b – правое верхнее. Округленные числа будем обозначать теми же буквами со штрихами. Тогда $a' = 1$, $d' = n^2$, $b' \ge n$ (оно не меньше всех чисел верхней строки), $c' \ge 2n - 1$ (оно не меньше всех чисел первого столбца и верхней строки). Значит, $a < 1{,}5$, $d < n^2 + 0{,}5$, $b \ge n - 0{,}5$, $c \ge 2n - 1{,}5$. Поэтому $1{,}5\left(n^2 + 0{,}5\right) > ad = bc > (n - 0{,}5)(2n - 1{,}5)$, откуда $1{,}5n^2 + 0{,}75 > 2n^2 - 2{,}5n + 0{,}75$, т.е. $2{,}5n > 0{,}5n^2$, откуда $n < 5$.

10–11 классы

1. Поровну.

Заметим, что корни многочленов из условия могут быть только отрицательными. К каждому многочлену P из условия есть парный P^*, коэффициенты которого записаны в обратном порядке. Заметим, что корни P^* обратны корням P. Следовательно, исходные числа на доске разбиваются на пары взаимно обратных отрицательных чисел. После прибавления единицы числа из интервала $(-1; 0)$ станут положительными, а числа, меньшие -1, останутся отрицательными.

3. а) Не обязательно. См. рис. 13.

б) Может.

Приведем пример для произвольного нечетного $m = 2n - 1$, $n > 1$. Разобьем квадрат на n «вертикальных» прямоугольников A_1, …, A_n и $n - 1$ «горизонтальных» прямоугольников $B_1, \ldots, B_{n-1}$, расположенных так, как показано на рисунке 14. Центры прямоугольников будем обозначать теми же буквами, что и сами прямоугольники. Пусть ширина (горизонтальная сторона) прямоугольника A_i равна a_i, высота (вертикальная сторона) прямоугольника B_i равна b_i. Тогда тангенс угла наклона прямой $A_{i+1}A_i$ к горизонтальной оси равен $\dfrac{b_i}{a_{i+1} + a_i}$, а тангенс угла наклона прямой $B_{i+1}B_i$ к вертикальной оси равен $\dfrac{a_{i+1}}{b_{i+1} + b_i}$. Для выпуклости доста-

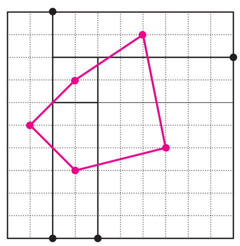


Рис. 13

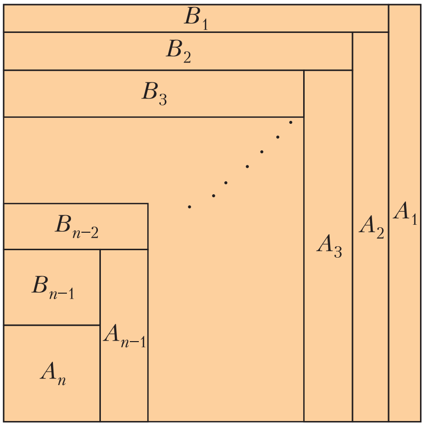


Рис. 14

точно подобрать значения a_i и b_i так, чтобы обе последовательности тангенсов возрастали с уменьшением i и сумма ширин $a_n + \ldots + a_1$ была больше суммы высот $b_{n-1} + \ldots + b_1$ (тогда мы сможем подобрать высоту прямоугольника A_n так, чтобы получился квадрат, а высоты остальных прямоугольников A_i и ширины прямоугольников B_i подберутся автоматически). Сделаем, например, $a_i = (2i-1)!$ и $b_i = (2i)!$. Тогда получим $\operatorname{ctg}(A_{i+1}A_i) = 2i + 1 + \frac{1}{2i}$, $\operatorname{ctg}(B_{i+1}B_i) = 2i + 2 + \frac{1}{2i+1}$. Нетрудно проверить, что обе последовательности котангенсов убывают с уменьшением i, а значит, последовательности тангенсов возрастают.

4. Пусть K, L, M и N – точки деления, лежащие на сторонах AB, BC, CD и DA, причем $AK = aAB$, $BL = bBC$, $CM = cCD$, $DN = dDA$. Тогда

$$S_{KBL}S_{LCM}S_{MDN}S_{NAB} =$$

$$= (1-a)bS_{ABC}(1-b)cS_{BCD}(1-c)dS_{CDA}(1-d)aS_{DAB} \le$$

$$\le \left(\frac{a+1-a}{2}\right)^2\left(\frac{b+1-b}{2}\right)^2\left(\frac{c+1-c}{2}\right)^2\left(\frac{d+1-d}{2}\right)^2 \times$$

$$\times \left(\frac{S_{ABC}+S_{CDA}}{2}\right)^2\left(\frac{S_{BCD}+S_{DAB}}{2}\right)^2 \le \left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{S}{2}\right)^4.$$

Следовательно, одно из чисел S_{KBL}, S_{LCM}, S_{MDN}, S_{NAB} не превосходит $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{S}{2} = \frac{S}{8}$.

5. Пусть α – окружность, описанная около треугольника ABC, β – окружность, на которой лежат точки D, F, G, E (рис. 15). Заметим, что эти точки лежат на β именно в таком порядке. Пусть B' – центр окружности β. Докажем, что точки B и B' совпадают.

Углы ADE и ABE равны, так как опираются на дугу ACE, откуда $2\angle FDE = \angle FBE$ (поскольку DF – биссектриса угла ADE). С другой стороны, $\angle FB'E = 2\angle FDE$ (как центральный и вписанный углы), поэтому $\angle FBE = \angle FB'E$. Тогда точка B' лежит на дуге FBE описанной окружности треугольника FBE. Аналогично, точка B' лежит на дуге DBG описанной окружности треугольника DBG.

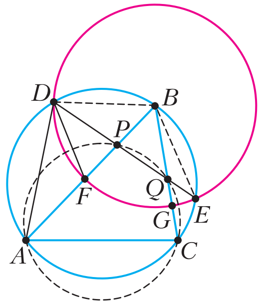


Рис. 15

Но дуга $DFGE$ лежит внутри окружности α, откуда дуга DBE лежит внутри окружности β. Тогда дуги FBE и DBG также лежат внутри β и пересекаются в единственной точке, поскольку дуга FBE делит окружность β на две части, причем точки D и G попадают в разные части (D лежит на дуге FDE, а G – на дуге FGE). Значит, точки B и B' совпадают, поэтому B – середина дуги DBE (поскольку $BD = BE$).

Но тогда равны углы EAB и DAB, и для угла $\angle BPQ$, как для угла между хордами DE и AB, мы получаем равенство

$$\angle BPQ = \angle EAB + \angle DBA = \angle DAB + \angle DBA =$$

$$= 180° - \angle ADB = \angle ACB,$$

откуда четырехугольник $APQC$ вписанный.

6. Обязательно.

Лемма. Пусть k и l – натуральные числа, причем $\text{НОК}(k, l) < k + l$. Тогда $k + l$ делится на k или на l.

Доказательство. Пусть $d = \text{НОД}(k, l)$. По условию, $kl < d(k+l)$, т.е. $(k-d)(l-d) < d^2$. Один из множителей меньше d и делится на d, т.е. равен нулю. А $k + l$ делится на d.

Условие делимости не изменится, если все числа строки уменьшить на одно и то же целое число. Поэтому можно считать, что верхние числа находятся в пределах от 0 до 2022, а нижние – в пределах от 0 до M (причем и 0, и M присутствуют). Ясно, что $M > 2022$. Разность чисел над 0 и M делится на M, поэтому эти числа равны, пусть это число b.

Предположим, есть столбец вида $\begin{pmatrix} b+d \\ k \end{pmatrix}$, где $d \ne 0$. Ясно, что $|d| \le 2022$. Сравнивая этот столбец со столбцами $\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} b \\ M \end{pmatrix}$, видим, что d делится как на k, так и на $M - k$. Поэтому d делится на $\text{НОК}(k, M-k)$; по лемме M делится на k или на $M-k$. Как известно, у числа M не более $2\sqrt{M}$ делителей, столько же дополнений этих делителей до M, значит, всего в верхней строке не более $4\sqrt{M}$ чисел, отличных от b. С другой стороны, и k, и $M-k$ не больше 2022, поэтому $M \le 4044$. Итак, в верхней строке не более $4\sqrt{4044} < 300$ чисел, отличных от b. Зафиксируем один столбец вида $\begin{pmatrix} b+d \\ k \end{pmatrix}$ и рассмотрим произвольный столбец вида $\begin{pmatrix} b \\ k+q \end{pmatrix}$. По условию, d делится на q. Значит, в первой строке не более $4\sqrt{d} \le 4\sqrt{2022} < 180$ чисел b (q может быть как положительным, так и отрицательным). Но $300+180<2024$. Противоречие.

Замечание. Для малых размеров таблицы утверждение неверно. Пример приведен в таблице:

1	1	1	1	7	1	1	1
1	4	5	6	7	8	10	13

7. Рассмотрим отдельно случай $n=3$. Пронумеруем монеты числами от 1 до 6. Первым взвешиванием сравним монеты 1 и 2, вторым – монеты 3 и 4. Если получим два равенства, то в одной из этих пар массы монет равны по 9 г, а в другой – по 10 г. Тогда массы пар {1, 3}, {2, 4}, {5, 6} – по 19 г. Если в одном взвешивании, например в первом, будет неравенство, а во втором – равенство, то можно разбить монеты на пары {1, 2}, {3, 5}, {4, 6}. Если же оба взвешивания дадут неравенства, то искомые пары – {1, 2}, {3, 4}, {5, 6}.

Если $n \ne 3$, разобьем монеты на *пары* произвольным образом. Каждая пара имеет массу 18 г, 19 г или 20 г, причем пар массой 18 г и 20 г поровну. Если для каждой пары мы определим ее массу, то сможем получить требуемое разбиение монет. Действительно, пары массой 19 г можно оставить без изменений, а объединив по одной монете из пар массами 18 г и 20 г, также получим искомые пары.

Сравним первую пару со второй, потом с третьей и так далее, пока не получим неравенство или не закончатся пары. Если неравенство получено, то из всех пар, которые мы сравнили, сформируем первую *кучку*. Если остались пары, то будем действовать с ними аналогично и создавать новые кучки. В итоге получим несколько кучек, в каждой из которых пары имеют две различные массы. Возможно, несколько последних пар не образуют кучку, если они равны между собой. В каждой кучке выделим одну легкую и одну тяжелую пары и объединим их в *группу*. Пронумеруем группы в соответствии с номерами кучек, которым они принадлежат.

Начнем сравнивать группы: первую группу сравним со второй, затем с третьей и так далее, пока не получим неравенство или не закончатся группы. Если неравенство получено, например первая группа оказалась легче k-й (если наоборот, дальнейшие рассуждения аналогичны), то в первой группе масса легкой пары 18 г, а в k-й группе масса тяжелой пары 20 г. Объединим эти две пары в новую группу X массой 38 г. Если k меньше числа групп, то сравним X со всеми группами, номера которых больше k, – так мы узнаем массы пар во всех кучках, начиная с $(k+1)$-й. Если какие-то пары не попали в кучки, то сравним одну из них с половиной группы X (в которую входит по одной монете из составляющих ее пар). Результат сравнения позволит узнать массы всех пар, не попавших в кучки.

Заметим, что если массы двух групп равны, то в этих группах легкие пары имеют одинаковую массу и тяжелые пары тоже. Поэтому все легкие пары в кучках с первой по $(k-1)$-ю имеют массу по 18 г, а все тяжелые пары в k-й кучке – по 20 г. Таким образом, пока мы не узнали только массы тяжелых пар в первых $k-1$ кучках и легких пар в k-й кучке. Они могут быть либо 19 г и 18 г, либо 19 г и 19 г, либо 20 г и 19 г соответственно. Учитывая, что общее число пар массой 18 г и 20 г одинаковое, мы однозначно можем определить, какой из случаев имеет место.

Если при сравнении групп мы дошли до последней группы и не получили ни одного неравенства (в частности, если число кучек равно 0 или 1), то во всех кучках легкие пары имеют одинаковую массу и тяжелые пары тоже. Тогда мы имеем три *набора*, состоящие из равных пар: легкие пары в кучках, тяжелые пары в кучках и пары, не попавшие в кучки (какие-то наборы могут оказаться пустыми). Обозначим число пар в этих наборах через a, b, c соответственно. Можем считать, что все эти числа ненулевые, ибо в противном случае тип каждой пары определяется тривиально. Так как пар массой 18 г и 20 г поровну, то в большинстве случаев можно сразу понять, какова масса пар в каждой группе: либо есть два набора, состоящие из одинакового числа пар, либо два набора содержат в сумме столько же пар, сколько и третий. Нельзя это понять, только когда одновременно выполняется более одного равенства, т.е. в следующих четырех случаях.

1) $a=c$ и $a+c=b$. Тогда легкие пары имеют массу по 18 г. Сравним тяжелую пару с парой не из кучек. Если тяжелая пара окажется легче, то их масса 19 г и 20 г, а если тяжелей – 20 г и 18 г соответственно.

2) $b = c$ и $b + c = a$. Этот случай рассматривается аналогично предыдущему.
3) $a = b$, $c = a + b$. Нетрудно понять, что этот случай реализуется, только если тяжелые пары имеют массу 20 г, легкие – 18 г, а остальные – 19 г.
4) $a = b = c$. Такое возможно, если n делится на 3. Так как $n \neq 3$, то в каждом наборе есть хотя бы по две пары. Объединим в группу одну легкую пару с одной тяжелой и сравним ее с двумя парами, не попавшими в кучки. Результат такого взвешивания однозначно определит массы всех пар.

Построим граф, в котором вершины соответствуют составленным в самом начале n парам. Ребрами соединим две вершины, если соответствующие пары участвовали во взвешивании. Если взвешивались группы, то ребром будем соединять по одной паре из групп. Когда одна из пар сравнивалась с половиной группы X, соединим ребром эту пару с одной из пар, которая использовалась в формировании группы X. Тогда во всех рассмотренных случаях полученный граф не содержит циклов, поэтому число сделанных взвешиваний не превышает $n - 1$.

20-я Международная естественно-научная олимпиада юниоров

Физика

1. 42,0 Н налево.
2. У автомобиля, который проходит 250 м за 6,50 с, стартуя из состояния покоя.
3. $u = \frac{x_{\max}}{m}\sqrt{k(m+M)}$.
4. $F_{\text{выт}} = \frac{1}{2}\rho_B g V_A$.
5. $R = 660$ Ом.
6. На рисунке В.
7. В 16:00.
8. Верны только утверждения I и II.
9. Длина волны равна 10,0 см.
10. Смартфон A показывает 2,1294 с; смартфон B показывает 2,1000 с.

Португальские слова

Замечаем, что все слова правого столбца начинаются с *pl*, а португальские слова распадаются в этом отношении на три класса:
1) plátano, plebe (класс «pl»);
2) praino, prancha (класс «pr»);
3) chegar, chão, cheio (класс «ch»).

Очевидно, что слова класса «pr» и класса «ch» в какие-то моменты истории португальского языка образовались из класса «pl». Слова класса «pl» не подвергались изменениям. Это можно объяснить только тем, что они появились в языке уже после осуществления обоих изменений. Следовательно, класс «pl» состоит из поздних заимствований.

Замечаем, что в классе «pr» (так же, как и в классе «pl») сохраняется исконный звук *n*, тогда как в классе «ch» звук *n* исчезает (ср. chão и planum, cheio и plenum). Это значит, что слова класса «pr» появились в языке после того, как закончился процесс выпадения *n* (иначе *n* выпало бы и в этих словах). Таким образом, класс «ch» самый древний, а класс «pr» относится к ранним заимствованиям.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
М.Н.Грицук

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: +7 916 168-64-74
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8
Тел.: (831) 218-40-40

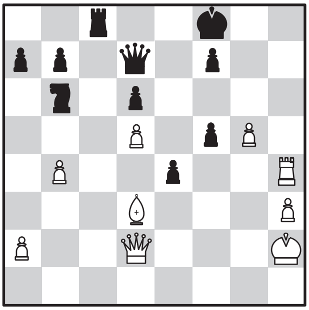
Дорогу МОЛОДЫМ

В 2024 году были установлены два необычных рекорда: в январе сербский юниор Леонид Иванович стал первым в истории шахматистом моложе 9 лет, обыгравшим гроссмейстера в турнирной партии с классическим контролем времени, а в феврале его достижение превзошел Ашват Каушик из Сингапура.

М. Попчев – Л. Иванович
Белград, 2024

1. c4 ♞f6 2. ♘c3 g6 3. g3 c5 4. ♗g2 ♝g7 5. e3 0-0 6. ♘ge2 ♞c6 7. 0-0 d6 8. d4 cd 9. ed ♝f5 10. h3 h5 11. ♗e3 ♛d7 12. ♔h2 ♜ac8 13. b3 ♜fd8?! Точнее 13…d5, чтобы помешать следующему ходу белых. **14. d5! ♞e5 15. ♘d4 ♞d3 16. ♕d2 ♞c5 17. ♘f5 ♛f5 18. ♖ad1 ♚h7 19. ♖fe1 ♜e8 20. ♗d4 ♞fd7 21. ♗g7 ♚g7 22. b4 ♞a6 23. ♘e4 ♞f6 24. ♕b2?** (24. ♖c1) **♚f8?** (необходима жертва качества: 24…♜c4 25. ♘d6 ed 26. ♖e8 ♜c2 с достаточной компенсацией за счет активности фигур) **25. ♗f1?** Серьезная ошибка, ослабляющая поле f3 и выпускающая преимущество. Оба соперника не заметили 25. c5! с подавляющей позицией у белых, так как нельзя 25…dc из-за 26. d6! **25…♚g8 26. ♘f6+ ♛f6 27. ♕d2 ♞b8 28. ♖e4 ♞d7 29. ♖de1 ♞e5 30. ♗g2 ♜c4 31. f4 ♜e4 32. ♖e4 ♞d7 33. ♕c2 h4 34. g4 ♞b6 35. ♕d2 ♚f8 36. g5 ♛f5 37. ♖d4 ♜c8 38. ♗e4 ♛d7 39. f5 gf 40. ♗d3 e5 41. ♖h4 e4??** Решающий момент партии. Пешку брать можно: 41…♞d5! 42. ♗b5 ♛b5 43. ♖h8+ ♚e7 44. ♖c8 f4, и, несмотря на лишнее качество, позиция белых хуже из-за проходных пешек черных.

42. ♗e4?? Ответная ошибка. После точного 42. g6! ♞d5 43. ♗e4 ♞f6 44. ♗d5 ♞d5 45. ♖h8+ ♚e7 46. ♕d5 ♚f6 наиболее вероятным исходом стал бы вечный шах. **42…fe 43. g6 ♛f5 44. g7+ ♚e7 45. ♖g4 ♜g8 46. ♖g5 ♛f6 47. ♕g2**

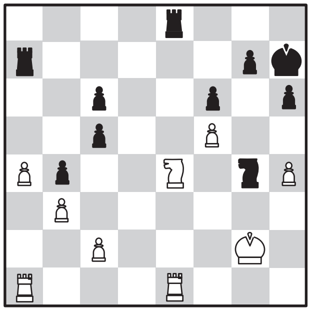


♛f4+ 48. ♔g1 e3 49. ♔h1 f5 50. ♖g6 ♚d7 51. ♖e6 ♛d4 52. ♖d6+ ♚d6 53. ♕g6+ ♚c7 54. ♕f7+ ♞d7 55. ♕g8 ♛e4+ 56. ♔h2 ♛e5+ 57. ♔g2 e2 58. ♕e6 ♛g7+ 59. ♔f2 ♛e5 60. d6+ ♛d6 61. ♕c4+ ♛c6 62. ♕f4+ ♛d6 63. ♕c4+ ♚b6 64. ♔e2 ♛e5+ 65. ♔f1 ♛b5, белые сдались.

А. Каушик – Я. Стопа
Бургдорф, 2024

1. e4 d6 2. d4 ♞f6 3. ♘c3 e5 4. ♘f3 ♞bd7 5. ♗c4 ♝e7 6. 0-0 0-0 7. h3 c6 8. a4 a5 9. ♖e1 h6 10. ♗a2 ♜e8 11. ♗e3 ♝f8?! (точнее 11…ed, сохраняя возможность отступить на f8 и слоном, и конем) **12. ♕d2 ♛c7 13. ♘h4 ♞h7 14. ♘g6!** Размен слона на f8 неприятен для черных, так как он защищает пешку d6. **14…ed 15. ♗d4 ♞c5 16. f4?!** Сильнее 16. ♕e3! ♞e6 17. ♘f8 ♞hf8 18. ♗b6! ♛e7 19. ♖ad1 с давлением на пешку d6. **16…♝e6 17. ♘f8 ♞f8 18. f5 ♝a2 19. ♖a2 f6 20. ♕f4 ♞fd7 21. ♘d1 ♞e5 22. ♖a3 ♚h7 23. ♘f2 ♛f7 24. g4 ♛c4! 25. ♕d2 b6?** Необходимо продолжать активные действия: 25…♛b4! 26. ♕d1 ♞ed3! 27. cd ♛d4, и за счет активности фигур позиция черных предпочтительнее. **26. ♔g2 ♜a7 27. h4 d5 28. b3 ♛b4?** Размен ферзей невыгоден черным, сильнее 28…♛a6! **29. ♕b4 ab 30. ♖aa1 de 31. ♗c5 bc 32. ♘e4 ♞g4??** Решающий зевок, но и после более упорного 32…c4 33. g5 у белых явное преимущество.

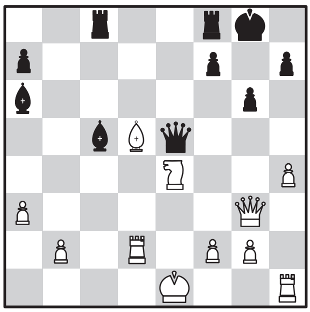
33. ♘g5+! fg 34. ♖e8. Белые выигрывают качество, что вкупе с проходной на линии a не оставляет черным шансов. **34…♞f6 35. ♖c8 g4 36. ♖c6 ♜d7**



37. a5 ♜d2+ 38. ♔g3 ♜d4 39. ♖f6 gf 40. a6 ♜d8 41. a7 ♜a8 42. ♔g4 ♚g7 43. ♔f4, и король забирает пешки на c5 и b4, поэтому **черные сдались.**

Заметный след оставили юниоры и на чемпионате мира по рапиду и блицу, проходившем в конце 2023 году в Самарканде. Настоящий фурор произвел 8-летний Роман Шогджиев из Москвы, который суммарно в двух турнирах смог обыграть пятерых гроссмейстеров. А 10-летний аргентинец Фаустино Оро – самый юный шахматист, покоривший отметку в 2300 пунктов рейтинга ФИДЕ, стал автором одного из самых красивых ходов на турнире.

Р. Макарян – Ф. Оро
Самарканд, 2023



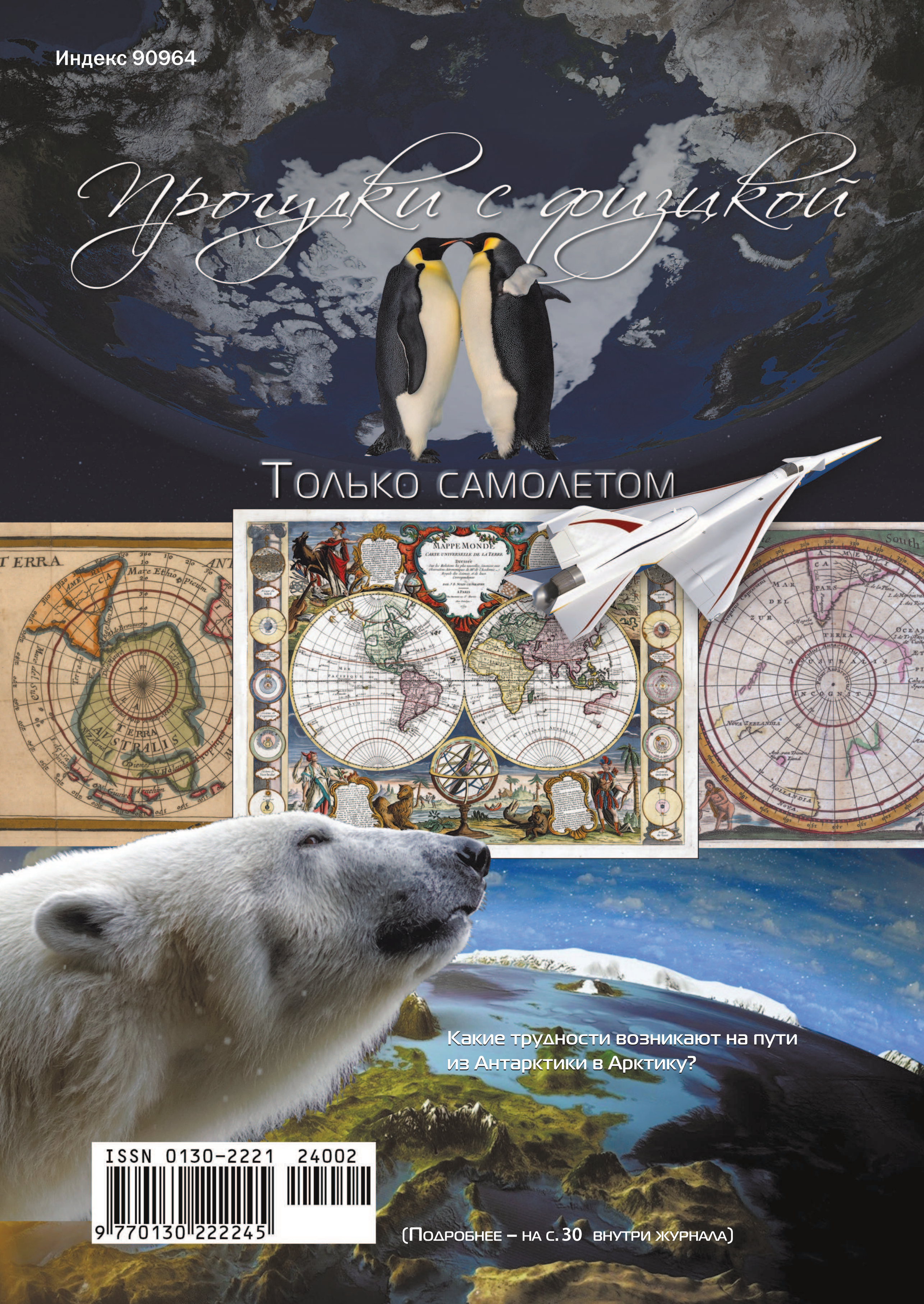
24…♝b4!! Ферзя нельзя брать из-за мата в один ход: 25. ♕e5 ♜c1x!, поэтому позиция белых мгновенно разрушается. **25. ab ♜c1+ 26. ♖d1 ♜d1+ 27. ♔d1 ♛d5+ 28. ♘d2 ♜d8 29. ♕c3 ♛g2 30. ♖e1 ♛f2 31. h5 ♛f4 32. ♕e3 ♛g4+ 33. ♔c1 ♝d3 34. b3 ♛h5 35. ♔b2 ♛d5 36. ♕a7 ♝f5 37. ♖e2 ♛d3 38. ♖f2 ♛c2+ 39. ♔a3 ♛c1+ 40. ♔a2 ♜d2+, белые сдались.**

А. Русанов

Индекс 90964

Прогулки с физикой

Только самолетом



Какие трудности возникают на пути из Антарктики в Арктику?

ISSN 0130-2221 24002

(Подробнее – на с. 30 внутри журнала)