№ 12 | декабрь 2016
Издаётся Московским центром непрерывного математического образования

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№12
декабрь 2016

ХИТРЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК

ПРИВЕТ С ПЛАНЕТЫ ДЗЕТА

НАСЕКОМЫЕ НА СНЕГУ

Enter

e-mail: kvantik@mccme.ru

ДОРОГИЕ ДРУЗЬЯ!

Подписаться на журнал «КВАНТИК»
вы можете в любом отделении связи
Почты России и через интернет!

КАТАЛОГ «ГАЗЕТЫ. ЖУРНАЛЫ»
АГЕНТСТВА «РОСПЕЧАТЬ»

Индекс 84252 для подписки на полгода или на несколько месяцев полугодия

Самая низкая цена на журнал!

«КАТАЛОГ РОССИЙСКОЙ ПРЕССЫ» МАП

Индекс 11346 для подписки на полгода или на несколько месяцев полугодия

По этому каталогу также можно подписаться на сайте **vipishi.ru**

Жители дальнего зарубежья могут подписаться на сайте **nasha-pressa.de**

Подписка на электронную версию журнала по ссылке:
http://pressa.ru/magazines/kvantik#

Подробнее обо всех способах подписки читайте на сайте **kvantik.com/podpiska.html**

По традиции в преддверии Нового года мы выпустили календарь с интересными задачами-картинками

Приобрести календарь можно в интернет-магазине «Квантик» **www.kvantik.ru** и других магазинах – подробнее по ссылке **kvantik.com/kupit.html**

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

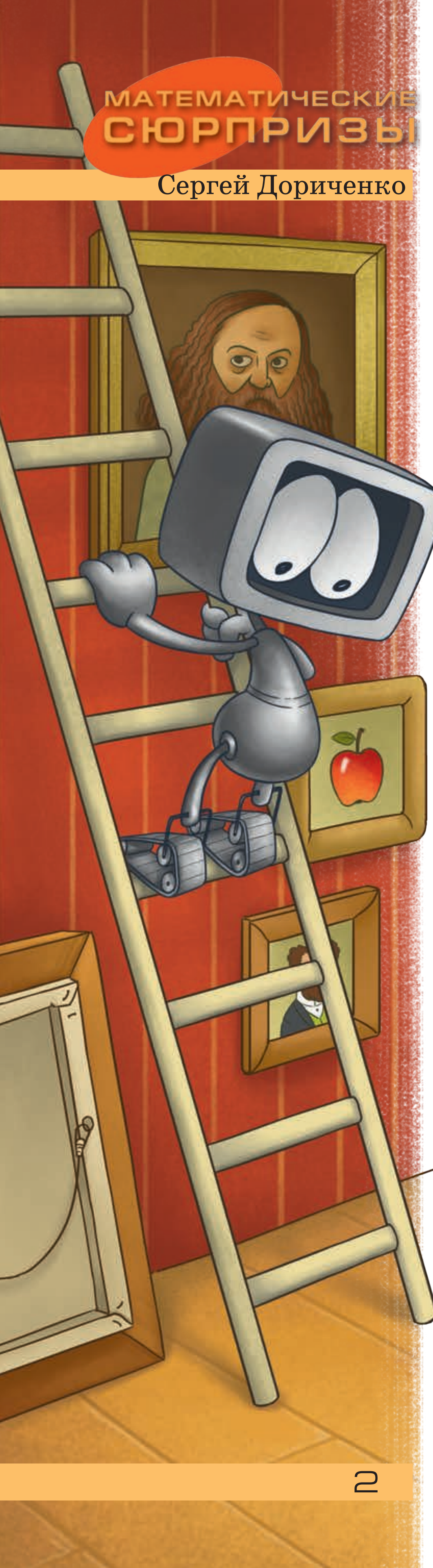
Журнал «Квантик» № 12, декабрь 2016 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор: С.А.Дориченко
Редакция: В.Г.Асташкина, В.А.Дрёмов, Д.М.Кожемякина, Е.А. Котко, И.А.Маховая, А.Б.Меньщиков, М.В.Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas-07
Вёрстка: Р.К.Шагеева, И.Х.Гумерова
Обложка: художник Yustas-07

Учредитель и издатель:
Негосударственное образовательное учреждение «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 241-08-04, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях связи Почты России:
▪ Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)
▪ «Каталог Российской прессы» МАП (индексы **11346** и **11348**)
Онлайн-подписка по «Каталогу Российской прессы» на сайте **vipishi.ru**

По вопросам распространения обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 7000 экз.
Подписано в печать: 14.11.2016
Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «ИПК Парето-Принт»,
Адрес типографии: 170546, Тверская обл., Калининский р-н, с/п Бурашевское, ТПЗ Боровлево-1, 3«А»
www.pareto-print.ru
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

СОДЕРЖАНИЕ

Сергей Дориченко



ТЕОРЕМА КОПЕРНИКА, или РОБОТ-ПЫЛЕСОС

В «Квантике» № 5/2016 была опубликована задача:

Робот-пылесос, имеющий форму круга, проехал по плоскому полу. Для каждой точки граничной окружности робота можно указать прямую, на которой эта точка оставалась в течение всего времени движения. Обязательно ли и центр робота оставался на некоторой прямой в течение всего времени движения?

Удивительно, но ответ отрицателен – центр мог двигаться не по прямой! Мы дадим несколько решений, начнём издалека, зато узнаем по дороге много интересного. Решение в движении смотрите в мультфильме «Котёнок на лестнице» (адрес в интернете: http://www.mccme.ru/~merzon/mirror/mp-cat/).

КВАНТИК НА ЛЕСТНИЦЕ

Пусть к стене вертикально приставлена лестница, на середине которой неподвижно сидит Квантик (вид сбоку показан на рисунке 1). Лестница съезжает – нижний конец движется по полу вправо, а верхний движется по стене вниз (рис. 2), – пока не ляжет на пол (рис. 3). По какой линии движется Квантик?

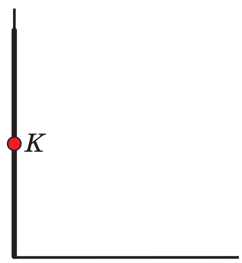


Рис. 1

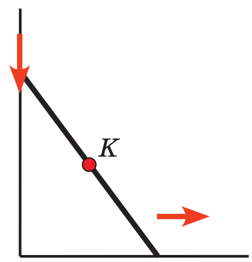


Рис. 2

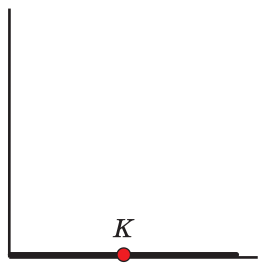


Рис. 3

Пусть O – точка под лестницей, в которой стыкуются стена и пол. Заметим, что и в начале, и в конце пути Квантик находится от точки O на одном и том же расстоянии, равном половине длины лестницы.

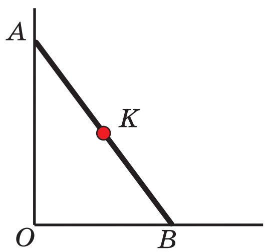


Рис. 4

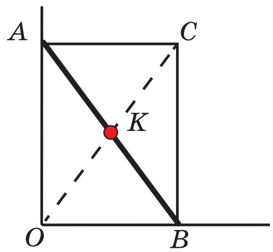


Рис. 5

А что будет в любом промежуточном положении (рис. 4)? Достроим треугольник AOB до прямоугольника $OACB$. Квантик находится в точке пересечения диагоналей этого прямоугольника (рис. 5). Так как диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам, OK – это половина AB. Получается, что расстояние от Квантика до точки O всегда одно и то же.

Значит, Квантик всё время находится на окружности с центром в точке O и радиусом длиной в половину лестницы, более точно – на четверти этой окружности (синяя линия на рисунке 6).

В каждой ли точке этой линии Квантик побывает? Очевидно, что да: Квантик движется «непрерывно» и не может «пропустить» какую-то точку синей дуги. Можно даже для каждой точки K на дуге нарисовать соответствующее положение лестницы: продлеваем OK до OC (удваивая) и достраиваем до прямоугольника.

Итак, путь Квантика – четверть окружности (рис. 6).

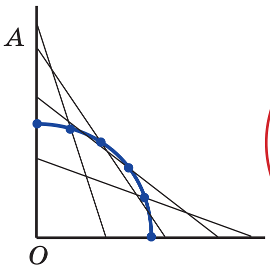


Рис. 6

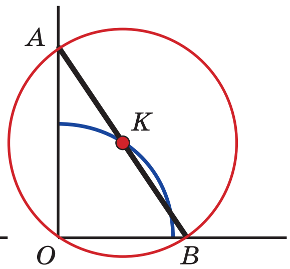
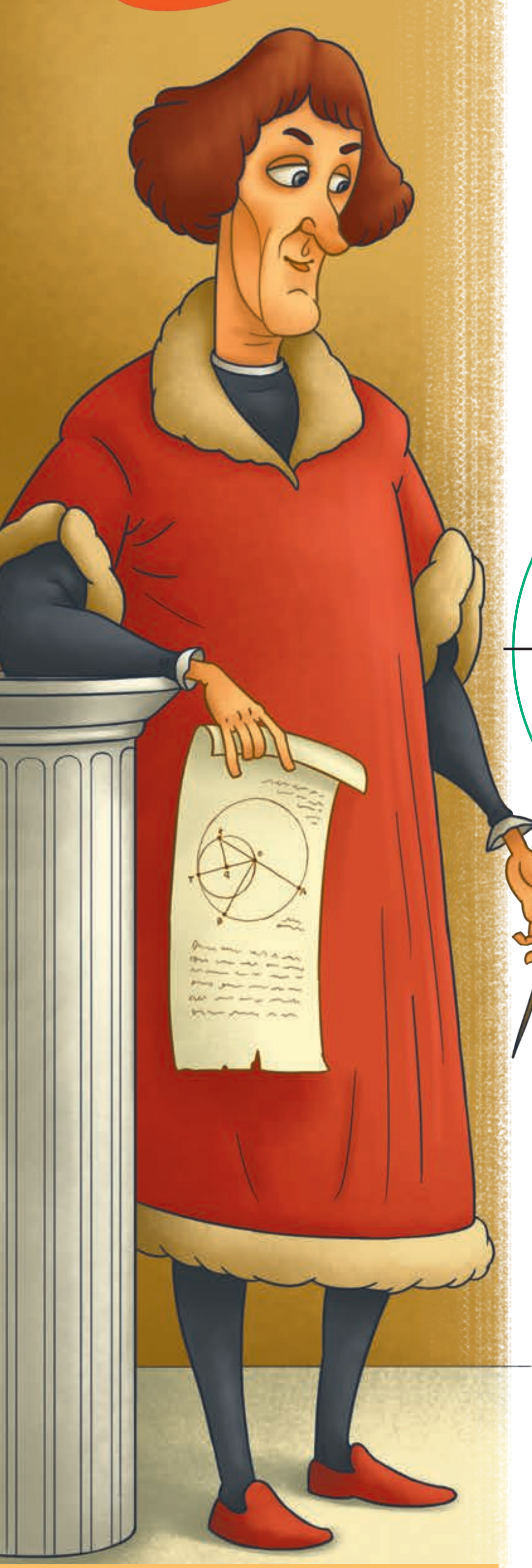


Рис. 7

Но при чём здесь задача о круглом пылесосе? Прикрепим к лестнице пылесос, ограниченный красной окружностью (рис. 7) так, чтобы лестница была диаметром этой окружности (Квантик тогда сидит в её центре). Вместе со съезжающей лестницей-диаметром будет двигаться и окружность. При этом две точки окружности – концы лестницы, – будут перемещаться по прямым (стене и полу), а центр окружности (Квантик) – не по прямой, а по дуге!

ОДНА ОКРУЖНОСТЬ КАТИТСЯ ПО ДРУГОЙ

Оказывается, и остальные точки красной окружности будут двигаться по прямым. Чтобы доказать это, нам понадобится ещё одна окружность – с центром в точке O и радиусом, равным длине лестницы (она отмечена зелёным на рисунке 8). Сейчас мы докажем, что красная окружность будет просто катиться по



зелёной (без проскальзывания). Рассмотрим, например, положение красной окружности, изображённое на рисунке 9: лестница NO переехала в положение AB, Квантик сидит в точке K (заметьте, что красная окружность всегда проходит через O). Удвоим отрезок OK, продлив его до OC. Точка C окажется одновременно и на красной, и на зелёной окружностях. Отметим середину L дуги AC (рис. 10). Ясно, что углы LKC и NOC равны (так как NO и LK параллельны). Поскольку радиус красной окружности в два раза меньше радиуса зелёной, красная дуга LC в два раза короче зелёной дуги NC (рис. 11). Но тогда вдвое большая, чем LC, красная дуга AC равна зелёной дуге NC.

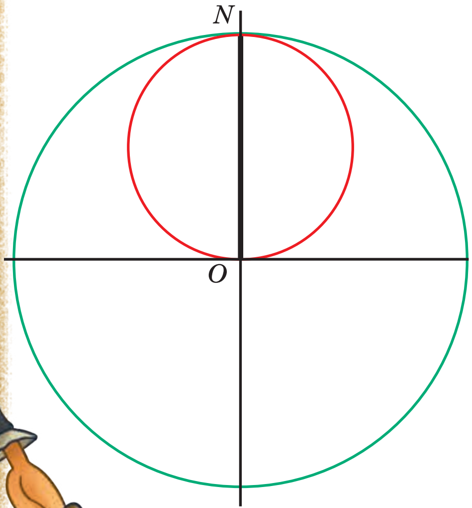


Рис. 8

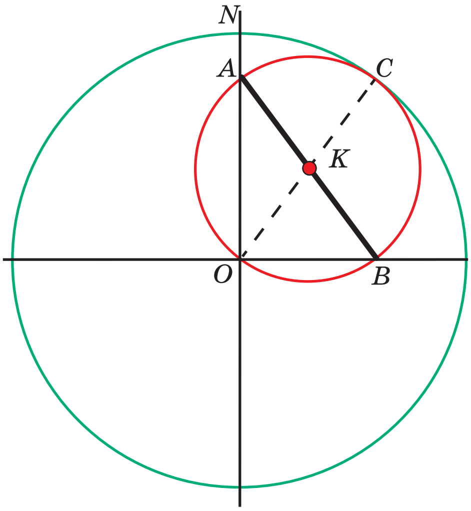


Рис. 9

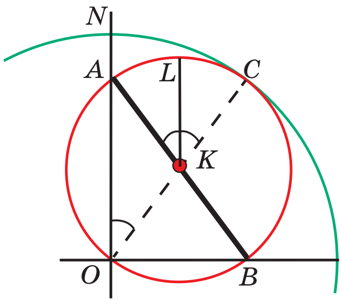


Рис. 10

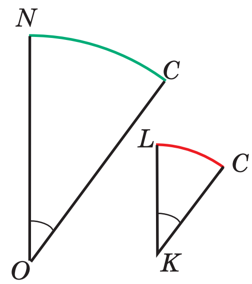


Рис. 11

Это и значит, что красная окружность катится по зелёной, не проскальзывая: зелёное расстояние от точки N до точки касания окружностей всегда равно красному расстоянию от A до точки касания. Но если какая-то точка красной окружности движется по прямой, то и остальные тоже – ведь красная окружность равномерно катится по зелёной, и все точки красной окружности равноправны. Чтобы узнать, по какой именно прямой движется конкретная точка X красной окружности, можно дождаться, когда X попадёт на зелёную окружность, и в этот момент соединить прямой O и X.

Мы доказали **теорему Коперника**: *если окружность катится по внутренней стороне вдвое большей окружности, то каждая точка катящейся окружности всё время остаётся на некоторой прямой.*

ПЫЛЕСОС ЕДЕТ И ВРАЩАЕТСЯ

Приведём более короткое решение исходной задачи – опишем другим способом, как должен двигаться пылесос (ограниченный красной окружностью).

Нарисуем на столе синюю окружность с центром в точке O и такого же радиуса, как у пылесоса. Запустим пылесос так, чтобы его центр K двигался равномерно по синей окружности, а сам пылесос при этом вращался: если центр пылесоса поворачивается вокруг O на некий угол, то сам пылесос поворачивается вокруг своего центра на тот же самый угол в обратную сторону.

При таком движении все точки красной окружности равноправны – достаточно про любую из них доказать, что она движется вдоль некоторой прямой. Пусть пылесос стартовал из положения, показанного на рисунке 12. Докажем, что точка C пылесоса (его верхняя точка в стартовом положении) движется по прямой, проходящей через O.

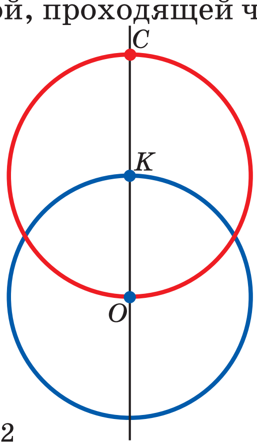


Рис. 12

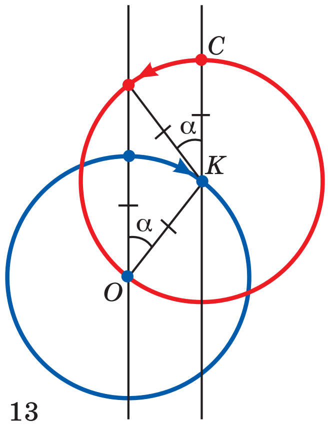
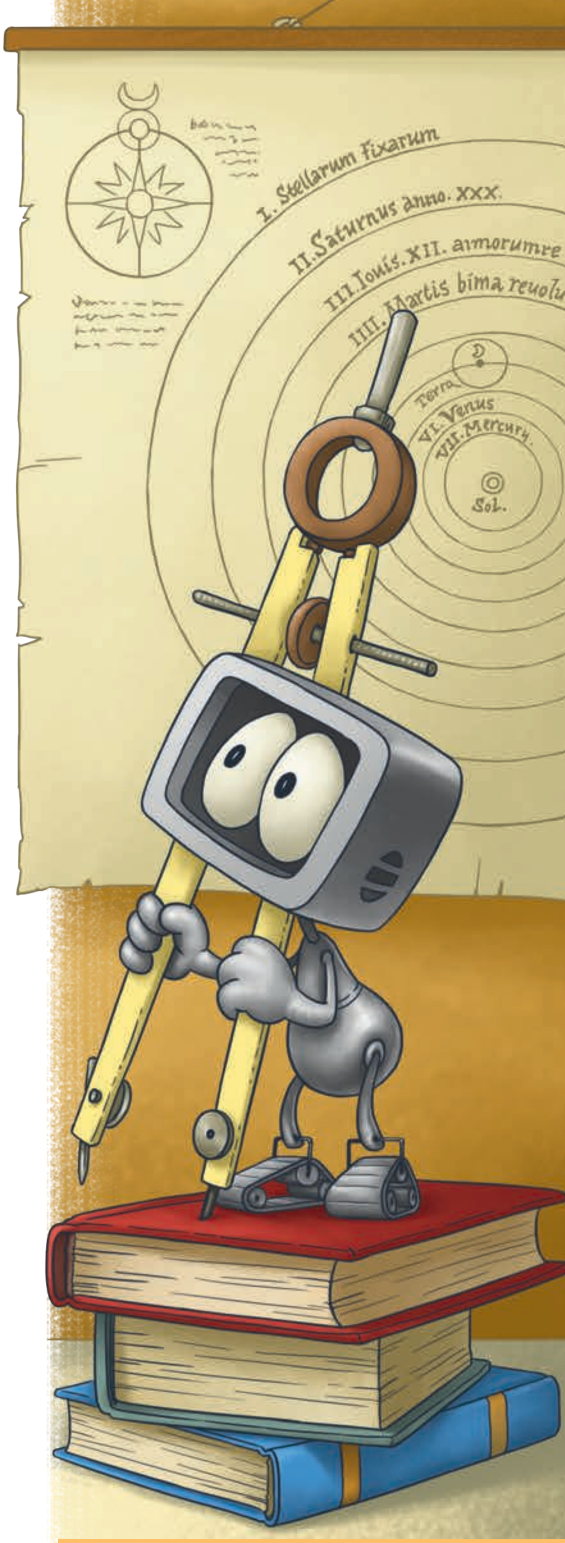


Рис. 13

Пусть центр пылесоса (K) повернулся на угол α вокруг O (по часовой стрелке). Если бы пылесос не вращался вокруг своего центра, точка C по-прежнему



находилась бы над K, то есть на вертикальной прямой, проходящей через K (эта воображаемая ситуация показана на рисунке 13). Но надо ещё повернуть точку C на угол α в обратную сторону. Где окажется C после этого?

Поскольку точка K синей окружности, лежавшая над её центром, повернувшись на угол α по часовой стрелке, переехала с левой вертикальной прямой на правую, то точка C, лежащая над центром точно такой же красной окружности, повернувшись на тот же самый угол α против часовой стрелки, переедет с правой вертикальной прямой на левую! Задача решена.

ИНТЕРЕСНЫЙ ФАКТ

Вернёмся к задаче про Квантика. А что, если он будет сидеть не на середине лестницы, а в какой-то другой её точке (не на концах)? Тогда траектория Квантика будет четвертью эллипса (рис. 14). Много других интересных фактов можно найти в книге Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Прямые и кривые», М.: МЦНМО, 2016, по мотивам введения к которой и написана эта статья.

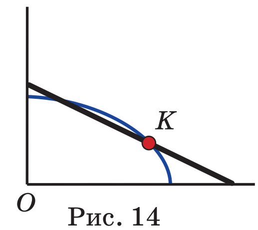


Рис. 14

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

В задачах 1 – 3 красная окружность катится изнутри по зелёной окружности вдвое большего радиуса.

1. Пусть в начальный момент времени наши окружности касались друг друга в точке N красной окружности. Где будет находиться точка N, когда красная окружность «проедет»

а) четверть зелёной окружности; б) две её четверти;

в) три её четверти; г) всю зелёную окружность?

2. Сколько оборотов сделает красная окружность вокруг своего центра, прокатившись один раз по всей зелёной окружности?

3. Пусть в задаче 2 по красной окружности бежит муравей так, что он всё время находится у точки касания окружностей. Сколько раз он обежит красную окружность по периметру?

4. Прикрепим к съезжающей лестнице на рисунке 1 произвольный прямоугольный треугольник так, чтобы лестница была его гипотенузой. Как будет двигаться вершина прямого угла?

5. а) На столе лежит пятак (монета достоинством 5 рублей). Ещё один пятак прокатывается по внешней стороне этого пятака (без проскальзывания). Сколько оборотов он сделает относительно своего центра, вернувшись в исходное положение?

б) Решите ту же задачу, если на столе лежат два пятака, касаясь друг друга, а третий пятак прокатывается по их внешней стороне, касаясь их по очереди.

в) А сколько оборотов сделает пятак, прокатываясь по внешней стороне трёх пятаков, касающихся друг друга?

Михаил Евдокимов

Эффект бабочки

Выражение «эффект бабочки» придумал американский математик и метеоролог Эдвард Лоренц. Оно относится к ситуации, когда маленькое изменение начальных условий приводит к огромным различиям в конечном результате. Часто это кажется невероятным и поражает воображение. Недаром писатели-фантасты так любят подобные приёмы. Один из самых известных примеров – рассказ Рэя Брэдбери «И грянул гром». Герой рассказа, путешествуя во времени, случайно наступает на бабочку, а вернувшись, обнаруживает, что произошли невероятные изменения в настоящем.

Иногда и в жизни приходится вспоминать про «эффект бабочки». Бывает, что мы игнорируем какое-то незначительное событие, которое, на первый взгляд, никак не может повлиять на другое, важное событие. Однако влияет, да ещё как! Попробуйте, например, разобраться с такой задачей.

В чемпионате по футболу, проходившем в один круг, участвовало 16 команд. Команда «Лидер» набрала больше всех очков и заняла первое место. Однако две команды, разделившие последнее место, были уличены в договорном матче, дисквалифицированы, а результаты всех матчей с их участием аннулированы. Могло ли случиться, что после пересчёта очков «Лидер» занял последнее место (набрал меньше всех очков)? (За победу дают 3 очка, за ничью – 1 очко.)

Казалось бы, какое дело победителю до того, как сыграли две самые слабые команды? И всё-таки ответ на вопрос задачи положительный: такое могло произойти! Можете ли вы ответить, как?

Художник Наталья Гаврилова

Сергей Лысенков

НАСЕКОМЫЕ НА СНЕГУ

Насекомые и зима кажутся несовместимыми. Некоторые мои товарищи, узнав, что я люблю и этих существ, и этот сезон, удивляются: «Как же так? Ведь зимой нет насекомых!» Но так ли это?

Конечно, насекомые никуда не пропадают, не перелетают в тёплые края (за редчайшим исключением) – большинство из них прячутся, часто в стадии личинки или куколки, чтобы пережить холодный сезон в относительной безопасности. Таких зимующих насекомых можно найти под корой деревьев, в почве, дуплах. Однако некоторые насекомые остаются активными всю зиму. Правда, бóльшую часть времени они проводят под снегом, где температура и влажность всегда выше и стабильнее, чем на поверхности. Но иногда они вылезают на воздух, где их можно встретить активными на снегу. Так что прогулки по заснеженным лесам и полям могут приносить и энтомологические впечатления (*энтомологией* называется наука о насекомых).

Когда же и где лучше всего искать зимних насекомых? Прежде всего, конечно же, надо учитывать погоду – если холод ещё терпим для них, то мороз обычно смертелен. Поэтому выходить на поиски стоит в оттепель, когда температура выше –5°С, хотя некоторые виды могут выдерживать и температуру до –10°С. Помните, что зимние насекомые часто предпочитают места с более тёплым и влажным микроклиматом – возле незамерзающих ручьёв, корней деревьев, в лощинах. Кроме того, найти насекомых больше шансов ближе к весне, когда многие из них начинают просыпаться от зимней спячки ещё до того, как сойдёт снег.

Жизнь насекомых на снегу зимой нелегка. Будучи маленькими, они легко остывают и могут замерзнуть в прямом смысле слова – жидкости в их теле затвердеют, и образовавшиеся кристаллы льда разорвут клетки. Эта опасность грозит и тем насекомым, кто зимой неактивен и не может перебраться в более тёплые места – да зимой часто и нельзя найти участки с плюсовой температурой. К счастью, даже понижение температуры ниже точки замерзания не гарантирует затвердевания жидкости. Если в жидкости отсутствуют центры кристаллизации – например, пылинки – то она ещё долго не твердеет,

становясь так называемой *переохлаждённой жидкостью*. Чтобы избавиться от возможных центров кристаллизации, многие насекомые с наступлением холодов перестают питаться и опорожняют кишечник. Другой способ пережить холода – это специальные вещества, например, глицерин или сахара, которые понижают температуру замерзания жидкостей в теле, а также позволяют сохранить часть воды, необходимой для жизни, от дальнейшего намораживания на образующиеся кристаллы льда.

Но выдержать холод – это ещё не всё. Зимой гораздо сложнее найти пищу. Чаще всего насекомые кормятся водорослями, растущими на снегу или на деревьях, гифами грибов, мхами, а также трупами других насекомых. Но и сами они могут стать добычей – в оттепели на зимнюю охоту выходят многие пауки.

Кого же можно найти энтомологу на снегу? Зимних насекомых можно разделить на две большие группы – *хионобионты* и *хионофилы*. Эти слова можно перевести с греческого как «жители снега» и «любители снега» Первые встречаются только в снежный сезон, вторые же могут быть встречены и в более тёплые времена, хотя предпочитают именно зимы.

Наверное, самые известные из хионобионтов – это *ледничник* и *хионея*. Оба они лишены крыльев, чтобы не тратить на полёт энергию, которую они вынуждены экономить (отсутствие крыльев свойственно и бабочкам арктических пустынь). Ледничники (рис. 1) – родственники скорпионниц (рис. 2), о чём говорит их характерный хоботок (впрочем, по последним данным, ледничники оказываются

Рис. 1. Ледничник

Рис. 2. Скорпионница

более близкими родственниками блох), а хионеи (рис. 3) – комаров-долгоножек (рис. 4), которых многие ошибочно принимают за малярийных комаров.

Среди хионофилов прежде всего стоит упомянуть зимних комариков (рис. 5), внешне также похожих на долгоножек, но мельче размером. В отличие от хионей, у них есть крылья и они могут летать. В конце осени и в начале весны можно даже увидеть их рои. Если ледничники и хионеи представлены всего несколькими видами, то зимних комариков известно более сотни, из них около половины могут обитать и в России.

Другие характерные зимние насекомые – комары-звонцы, или хирономиды, личинки которых известны как «мотыль» (красные червячки, используемые как корм для животных и наживка для рыбы). Комаров-звонцов проще всего обнаружить возле незамерзающих ручьёв, где они могут быть весьма многочисленны. Весной можно видеть их массовый выплод на только-только освободившейся ото льда поверхности озёр и прудов.

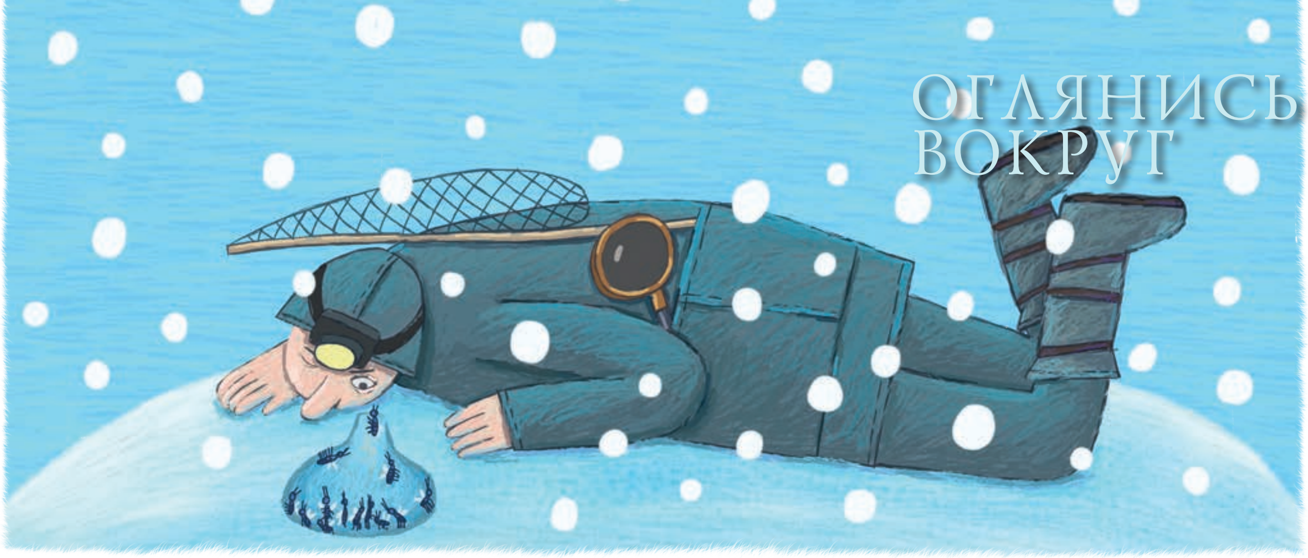
Также на снегу можно найти и некоторых жуков – чаще всего *стафилинид*. У этих хищных насекомых надкрылья укорочены, поэтому они напоминают червячков и скорее похожи на личинок.

Активны зимой и некоторые ногохвостки, или *коллемболы* – маленькие примитивные бескрылые насекомые, замечательные своею способностью далеко прыгать, отчего по-английски их иногда называют «снежными блохами». В отличие от других шестиногих любителей снегов, обычно немного-

Рис. 3. Хионея

Рис. 4. Комар-долгоножка

Рис. 5. Зимний комарик



численных, они могут образовывать очень плотные скопления. Часто они даже мигрируют в таких скоплениях, прыгая в одном направлении и преодолевая по 200–300 метров в день. В феврале 2016 года скопления ногохвосток в Тульской области напугали местных жителей. И их можно понять: придорожные канавы, сугробы и лужи оттаявшего снега словно покрылись чёрной плёнкой, на поверку оказавшейся массой маленьких прыгающих существ (рис. 6).

Бабочки тоже могут вылететь на снег в оттепель, хотя специальных зимних видов среди них нет – они относятся к *хионоксенам* («чуждым снегу»), то есть появляются на снегу лишь от случая к случаю, так что называть их зимними насекомыми не очень правильно. Вообще, ближе к весне на снегу можно увидеть много хионоксенов – для энтомолога зима заканчивается раньше, чем растаял снег.

Рис. 6. Скопление ногохвосток в оттаявшем снеге

Зимние насекомые, хотя и немногочисленны, всё ещё во многом не изучены. Мало что известно об их жизни, особенно той, что проходит под снегом. Многое известно только в общих чертах и ещё ждёт подробного исследования – пищевые сети (кто чем питается), поведение, механизмы устойчивости к холоду. Да и сам по себе список видов насекомых, обнаруживаемых на снегу, регулярно пополняется.

Зима – совсем не мёртвый сезон для энтомологов. Если вы интересуетесь этой наукой, ваши прогулки по заснеженным лесам могут превратиться в увлекательные поиски зимних насекомых. Но это дело требует терпения – надо понимать, что далеко не каждая попытка, даже в оттепель, обязательно закончится удачей – тем больше будет радость от новой встречи. А ближе к весне могут быть дни, когда вы встретите насекомых во множестве. Удачи вам в поисках насекомых на снегу и наблюдениях за их жизнью!

Александр Просвиров (рис. 1, 3, 5),
Юлия Сычёва (рис. 2), Сергей Лысенков (рис. 4, 6)

Художник Инга Коржнева

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

Игорь Акулич

Федя, Даня и Кэрролл

– Даня, положа руку на сердце, скажи: тебе не стыдно?

– С чего бы это?

– Столько времени прошло, а мы с тобой ни одной новой задачи про часы не решили!

– Так где же их взять?

– Искать надо. Ибо сказано: ищите – и обрящете, толцыте – и отверзется...

– И много ты, это... натолцевал?

– Кое-что есть! Вот – сфоткал на мобильник из книги:

1 июля, когда на моих карманных часах было 8 ч утра, стенные часы показывали 8 ч 4 мин. Взяв с собой карманные часы, я отправился в Гринвич и обнаружил, что, когда они показывают полдень, точное время в действительности равно 12 ч 5 мин. Вечером того же дня, когда на моих карманных часах было ровно 6 ч, стенные часы показывали 5 ч 59 мин.

30 июля в 9 ч утра по моим карманным часам стенные часы показывали 8 ч 57 мин. В Гринвиче, когда мои карманные часы показывали 12 ч 10 мин, точное время было 12 ч 5 мин. Вечером того же дня карманные часы уже показывали 7 ч, когда на стенных ещё было 6 ч 58 мин.

Карманные часы я завожу лишь при поездке в Гринвич. В течение суток они идут равномерно. Стенные часы идут всегда, причём идут равномерно.

Каким образом мне узнать, когда наступает полдень (по точному времени) 31 июля?[1]

– Ужасно. Такие супергромоздкие задачи нам, кажется, ещё не попадались. Ещё этот Гринвич... Подозрительно как-то. А кто её придумал?

– Сам Льюис Кэрролл! Он ведь не только про Алису сказки сочинял.

– Это я и сам знаю. Но мне когда-то сказали, что если автор задачи – Льюис Кэрролл, то и решить её может только Льюис Кэрролл.

[1] Задача цитируется по книге: Льюис Кэрролл. История с узелками. Полуночные задачи, № 31. М.: Мир, 1973.

– Не надо заранее сомневаться в своих силах. Ибо сказано: дорогу осилит идущий…

– Хорошо. С чего начнём?

– У нас есть два показания и карманных, и настенных часов. Значит, мы можем посчитать, во сколько раз одни часы идут быстрее, чем другие. Карманные часы (по их показаниям) 1 июля прошли с 8 ч утра до 6 ч вечера ровно 10 «своих» часов, а стенные – 9 часов 55 минут. Получается, что карманные часы идут быстрее стенных!

– Рано радуешься, Федя. 30 июля, пока карманные часы шли 10 своих часов, стенные успели пройти 10 часов 1 минуту. Теперь получается наоборот, стенные идут быстрее карманных. Ошибка в условии?

– Нет, смотри: «*Карманные часы я завожу лишь при поездке в Гринвич*». То есть они не идут непрерывно весь этот месяц!

– Ну и что? Оттого, что часы стояли, а потом их снова завели, скорость-то не поменяется.

– Уверен?

– Хочешь сказать, что скорость хода часов может отличаться в разные сутки?

– А почему бы и нет? Погляди опять в условии про карманные часы: «*…В течение суток они идут равномерно. Стенные часы идут всегда, причём идут равномерно*».

– Ура, противоречия нет! Значит, 1 июля стенные часы отставали от карманных за каждый «карманный» час на полминуты. И что дальше?

– А мы можем узнать, что показывали стенные часы, когда он сверял время с Гринвичским?

– Конечно! За 4 часа (от 8 до 12 «карманных» часов) стенные часы продвинулись на 2 минуты меньше, чем карманные, то есть на 3 ч 58 мин, и показывали 8 ч 4 мин + 3 ч 58 мин = 12 ч 2 мин. А точное время в тот момент было 12 ч 5 мин! То есть 1 июля в 12 ч 5 мин точного времени стенные часы отставали от него на 3 минуты.

– Отлично! Теперь проделаем то же самое для 30 июля. Там карманные часы тоже продвинулись на «свои» 10 часов, а стенные – на 10 часов и 1 минуту. Значит, здесь имело место уже опережение за каждый «карманный» час на $\frac{1}{10}$ минуты. С 9 ч до 12 ч 10 мин прошло 3 ч 10 мин или $3\frac{1}{6}$ часа («карманных»). За это время стенные часы прошли больше карманных на $\frac{1}{10} \times 3\frac{1}{6} = \frac{19}{60}$ минуты, или, проще, на 19 секунд. Итого, стенные часы за этот промежуток времени продвинулись на 3 ч 10 мин 19 с. Поэтому, когда карманные часы показывали те самые 12 ч 10 мин, на стенных было 8 ч 57 мин + 3 ч 10 мин 19 с = 12 ч 7 мин 19 с. Поэтому 30-го июля в такое же точное время (12 ч 5 мин) стенные часы уже опережали его на 2 минуты 19 секунд. Таким образом, ровно за 29 суток стенные часы уходят вперёд по сравнению с точным временем на 5 минут 19 секунд. В сутки это получается... ага, ровнёшенько 11 секунд. Как бы теперь определить, что же они покажут в полдень 31-го июля?

– А ну-ка я попробую. Итак, 30-го числа в 12 ч 5 мин они показывали 12 ч 7 мин 19 с. Полдень 31-го июля наступит через 23 часа 55 минут. За сутки (то есть 24 часа) часы уходят вперёд на 11 секунд. Поскольку 24 часа – это 1440 минут, а 23 часа 55 минут – это 1435 минут, опережение составит $11 \times \frac{1435}{1440} = 10\frac{277}{288}$ секунд. Окончательно, показания стенных часов в полдень 31 июля составят 12 ч 7 мин 19 с $+ 10\frac{277}{288}$ с $=$ 12 ч 7 мин $29\frac{277}{288}$ с.

– А какие, интересно, будут в этот момент показания карманных часов?

– Какие угодно! Они же к тому времени остановятся. Ведь хозяин заводит их только перед поездкой в Гринвич, и завода хватает лишь на сутки.

– А знаешь, мне внезапно пришло в голову ещё одно решение задачи – намного проще.

– Какое?

– Не скажу, сам догадайся! Условие внимательно надо читать!

– Ладно, подумаю. Но тогда и к тебе претензия: задачу-то ты нашёл, но... *не такую*, как всегда!

– Это как?

– А вспомни, какие задачи мы решали раньше? Про *стрелки часов*! А эта – просто про *часы*!

– Хочешь именно про стрелки? Пожалуйста! Очень простая, кстати. В уме решить можно:

В некоторый момент времени относительная скорость движения концов часовой и минутной стрелок (то есть скорость, с которой меняется расстояние между концами стрелок) оказалась равной 6 мм/с. Может ли она в какой-то другой момент оказаться равной 5 мм/с?

– Конечно, может! Или... ну, нет, не может, конечно! Или может? Нет! Или...

Давайте на этом прервём беседу. А читателям предлагаем:

1) ещё раз ознакомиться с условием задачи Кэрролла и решить её с меньшими трудозатратами;

2) отбросить шутки в сторону и определить, в какой момент стенные часы показывали точное время;

3) решить *в уме*, без карандаша и бумаги, задачу об относительных скоростях стрелок.

Если не получится – посмотрите на с. 30.

Художник Мария Усеинова

КАБЛУКОВ, ШОПЕН, УАЙЛЬД

Сергей Федин

Две из этих историй известны, а одна полностью придумана. Надо догадаться, какая именно. Вычислить её можно по какой-нибудь нелепости, несуразности, спрятанной в тексте. Попробуйте!

КАБЛУКОВ

Ты, конечно же, помнишь знаменитое стихотворение Маршака «Вот какой рассеянный». Оказывается, у главного героя этого стихотворения был реальный прототип – учёный-химик, академик Иван Каблуков (1857 – 1942).

Не менее чем своими научными заслугами, он был знаменит своей рассеянностью, о которой слагались легенды. В пожилом возрасте у Каблукова появилась странная особенность – он стал путать слоги в словах. Например, вместо «химия и физика» он говорил: «химика и физия», – а когда подписывал какую-нибудь бумагу, то вместо «Иван Каблуков» писал: «Каблук Иванов». Примерно так потом путался в словах рассеянный с улицы Бассейной. Помнишь?

Во что бы то ни стало, мне надо выходить,
Нельзя ли у трамвала вокзай остановить?

А вот как сам «Каблук Иванов» рассказывал студентам одну из своих историй:

«Пошёл я вчера прогуляться по бульвару. Взял с собой трость с набалдым золоташником. Зашёл в лавку к Абрикосову, купил пастилы. Потом

зашёл к Петрову, купил халвы. Пошёл к Шульцу, купил изюма. Иду домой. Вдруг, вижу, нет моей трости с набалдым золоташником!

Возвращаюсь к Абрикосову, говорю:

– Отдавай мою трость с набалдым золоташником!

А он говорит:

– Нет у нас вашей трости с набалдым золоташником.

Тогда я иду к Петрову:

– Отдай мою трость с набалдым золоташником!

А он мне в ответ:

– Нет у меня вашей трости с набалдым золоташником!

Делать нечего, иду к Шульцу:

– Отдай, – говорю ему, – мою трость с набалдым золоташником!

А он мне:

– Вот ваша трость!

Так вот ведь обидно – немец честнее русских оказался!»

ШОПЕН

У великого польского композитора Фредерика Шопена (1810 – 1849) способности к музыке проявились очень рано. Ещё ребенком он впервые участвовал в концерте, в котором исполнил на рояле свои произведения. Перед концертом маленького Фредерика долго и тщательно одевали в специально сшитый по этому поводу красивый костюмчик.

Когда после успешного выступления родные стали расспрашивать мальчика, что больше всего понравилось публике, он гордо ответил:

– Мои белые кружевные перчатки!

УАЙЛЬД

Если ты не читал сказку «Кентервильское привидение», то обязательно прочитай или хотя бы посмотри одноимённый мультик. А написал эту замечательную и остроумную сказку знаменитый английский писатель Оскар Уайльд (1854 – 1900). Про него рассказывают такую историю.

Однажды под окнами Оскара Уайльда уселся нищий в отвратительных лохмотьях. Это очень не понравилось писателю. И что же ты думаешь, он сделал? Подал ему милостыню? – Нет. Купил ему новый костюм? – Тоже нет.

Он приказал слугам взять лохмотья нищего и пошить точно такие же, но из дорогих и красивых материалов: бархата, шёлка, атласа и так далее. Когда новые, шикарные, лохмотья были готовы, нищего переодели, и он снова уселся на том же месте. Уайльд был очень доволен.

Художник Капыч

Валерия Сирота

ПРИВЕТ С ПЛАНЕТЫ ДЗЕТА

Здравствуйте, читатели «Квантика»!

Мы – жители планеты Дзета, о которой, как мы надеемся, вы уже читали[1]*. Нам удалось войти в ментальный контакт с вашим роботом Квантиком (что такое ментальный контакт, мы не знаем, и Квантик тоже – и тем не менее нам это удалось).*

Мы особенно рады приветствовать тех, кто пробрался сквозь ураганы Юпитера, затяжные штили Урана и дебри нашей планеты Дзета. Мы тоже любим путешествовать, хотя на Земле ещё не были. Поэтому просим вас помочь нам подготовиться к визиту и разобрать несколько затруднительных для нас ситуаций. Ведь вам, наверно, будет интересно ещё раз применить в деле полученные в ваших путешествиях умения и знания. А нам это поможет заранее предусмотреть возможные сложности: ведь воображаемые путешествия чреваты неожиданностями, особенно если вы и сами, как и вся ваша планета – воображаемые...

[1]См. статью: В. Сирота «Времена года на Земле и других планетах», «Квантик» №6, 7 за 2016 год.

Напомним – земная ось наклонена к оси её обращения вокруг Солнца на угол 23°, а у Дзеты этот угол равен 45°.

1. Допустим, что путешественник с Дзеты оказался на Земле 20 марта и видит солнце в зените. Можно ли определить по этим данным, где он находится? Как ему определить стороны света? (Компаса у него нет.)

2. С какой стороны и на какой высоте видят солнце в полдень в день летнего солнцестояния (21 июня) жители экватора вашей планеты? А нашей? А вы сами?

3. Какой день на земном экваторе самый длинный?

4. Один житель Дзеты как-то попытался (моментально) перенестись на Землю, но по ошибке попал всего лишь в другое место на Дзете. Однако не прошло и суток (и даже полусуток!), как он понял свою ошибку. Как он догадался? В какое время года это могло быть? И где он, скорее всего, очутился? (Определить можно по солнцу – растительность, животные и т.д. у нас очень похожи. Продолжительность суток на Земле и Дзете тоже одинаковая. Никаких приборов у этого жителя с собой не было.)[2]

5. В какой из дней солнце в Петербурге (широта 60°) поднимается на максимальную высоту: в день летнего солнцестояния 21 июня, в день зимнего солнцестояния 21 декабря или в день весеннего равноденствия 20 марта?

6. На северном полюсе некоторой планеты некто измерил угол между положениями солнца с интервалом в 12 часов (то есть заметил место, где оно было, и через 12 часов секстантом – таким большим транспортиром – измерил угол между старым и новым положениями солнца). Этот угол оказался 100°. Можно ли определить, на какой планете – на Земле или на Дзете – это происходило? Какой получился бы угол, если бы те же измерения в то же время проводили на широте 60°? Повторится ли такой же угол ещё когда-нибудь в течение года?

[2] В каком месте Дзеты и в какое время года солнце на Дзете ведёт себя так, как нигде и никогда на Земле?

Художник Анна Горлач

Художник Максим Калякин

Пётр Волцит

КОФЕ КАК ПОГНУТЫЙ КЛЮЧ

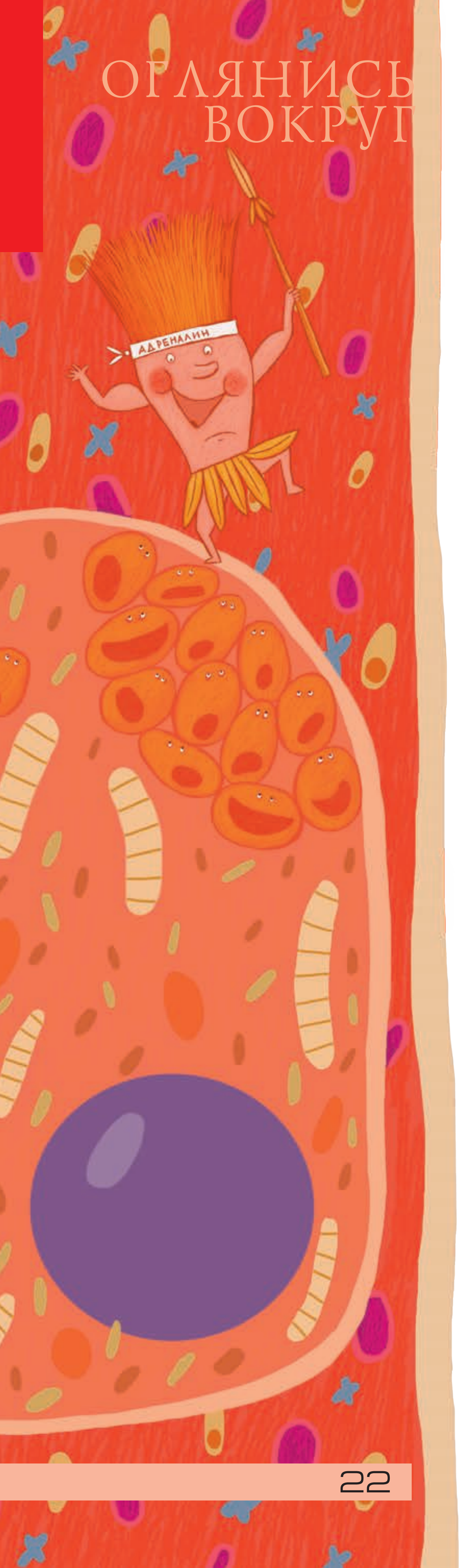
Всем известно, что чай и кофе обладают возбуждающим действием на нервную систему. И наверняка вы знаете, что главное действующее вещество кофе и чая вызывается *кофеином*. Да-да, и кофе, и чай действуют на нас одним и тем же веществом. Его открыли ещё в 1819 году, выделив из кофе, и назвали соответственно. Активное вещество чая выделили чуть позже и независимо, так что первое время называли его *теином* (от научного названия чайного куста – *Thea*), пока химики не установили, что молекулы теина и кофеина устроены одинаково – это одно и то же вещество.

Кстати, кроме чая и кофе, кофеин содержится и во многих других растениях: какао, мате́ («парагвайском чае»), коле – той самой, из которой делают кока-колу. Поэтому напитки из этих растений обладают сходным бодрящим действием.

Итак, кофе и чай содержат кофеин, который возбуждает нервную систему. Но как он действует? Начнём… с середины. Вы наверняка слышали про гормон *адреналин* – биологически активное вещество, возбуждающее нервную систему. Как все гормоны, адреналин вырабатывается в самом организме, конкретно – в надпочечниках.

Адреналин – гормон стресса. Он выделяется в ситуации опасности (вот почему про любителей опасных приключений говорят, что они «жить не могут без адреналина»), подготавливая организм к борьбе: активирует нервные клетки, снимает сонливость, усиливает сокращения сердца, стимулирует мышцы (на случай, если придётся убегать или драться), повышает кровяное давление (тогда к мышцам и мозгу притекает больше крови – полезно и при бегстве, и в бою).

Не правда ли, кофеин оказывает сходное действие? Может быть, его молекула похожа на молекулу адреналина? Нет, но «тепло». Особенность адреналина в том, что плавать в крови он может, но попасть внутрь клетки – нет, мембрана его не пропускает. Тогда гормон вызывает «привратника» и просит его передать сообщение «хозяину» внутри «дома». Этими «привратниками» оказываются молекулы *циклической аденозинмонофосфорной кислоты*. Чтобы не сломать



язык, мы лучше так и будем называть эти молекулы *привратниками*. И вот на привратника молекула кофеина действительно похожа!

Ага, значит, кофеин проникает в клетку и под видом привратников передаёт сигнал якобы «от имени» адреналина? И снова нет, хотя ещё «теплее».

Одна молекула адреналина, прикрепившись к мембране клетки, вызывает образование сотни привратников. По сто молекул кофеина на одну молекулу адреналина в крови быть не может (а если окажется, то это будет смертельная доза). Значит, воздействовать на клетку вместо привратников кофеин не в состоянии – его концентрация во много раз меньше, клетка просто не почувствует разницы.

Подумаем вот о чём. Допустим, опасность миновала, враг повержен или замаялся за нами гоняться (для воинской славы это важно, а для организма – нет). Пора успокоиться и отдохнуть. Но как тут отдохнёшь, если в каждой нервной клетке полно привратников, «кричащих» на химическом языке: «Тревога! Тревога!»? Значит, должно быть некое вещество, которое бы разрушало эти молекулы, ставшие ненужными. Такое вещество есть – это фермент *фосфодиэстераза*.

Ферменты – это биологически активные вещества, осуществляющие биохимические реакции, но сами в ходе этих реакций остающиеся неизменными. Ферменты могут разрушать сложные молекулы на простые (пищеварительные ферменты), соединять простые в сложные (в процессе фотосинтеза, например), превращать одни вещества в другие (делать жиры из углеводов) и т.д. Фактически все процессы в нашем организме управляются ферментами, причём почти каждая биохимическая реакция – своим.

Но вернёмся к фосфодиэстеразе. Как все ферменты, она захватывает привратника и превращает его в другое вещество, перерабатывает. Что значит «захватывает»? Это значит, что между ферментом и превращаемой им молекулой на короткое время устанавливается тесная связь. Для этого молекулы вещества-реагента и фермента должны подходить друг к другу, как ключ к замку. Или как рука к перчатке. Именно так подходят друг к другу привратник и фосфодиэстераза.

А теперь представьте, что будет, если в замок всунуть ключ, похожий на правильный, но чуточку другой или просто погнутый. Или неподходящую по размеру перчатку с силой натянуть на слишком широкую руку. Ключ и рука в таком случае могут надолго застрять в «чужих» замке или перчатке! Именно это и происходит с кофеином: его молекула достаточно похожа на привратника, чтобы войти в контакт с ферментом, но не настолько похожа, чтобы фермент мог её обработать и «выплюнуть».

В результате кофеин попросту блокирует фермент фосфодиэстеразу, и та не может разрушить привратника, и привратники всё накапливаются и накапливаются, отчего клеткам нервной системы и других органов «кажется», что на них воздействует адреналин. Вот они и возбуждаются, настраиваясь на активную работу.

Любопытно, что разница в действии кофе и чая тоже основана на эффекте «застрявшего ключа». В чае молекула кофеина связывается с молекулами *танинов* (это растительные яды, придающие листьям горький вкус, – ими растения пытаются защититься от травоядных животных). Как кофеин слипается с ферментом, не давая ему работать, так и танины в чае мешают работать кофеину. Заодно, правда, отчасти защищают его от других ферментов (представьте, что на ключ налепили жвачку!) и вывода из организма через почки. В результате кофеин чая действует на нервную систему мягче, но дольше.

Задача. По тому же механизму «застревающего ключа» развивается отравление угарным газом. Молекула угарного газа соединяется с гемоглобином подобно молекуле кислорода. Но если кислород, присоединившийся в лёгких, легко отрывается от гемоглобина в тканях-потребителях, то угарный газ связывается намного прочнее: «застревает». Естественно, заблокированная молекула гемоглобина переносить кислород уже не способна – и человек, надышавшийся угарным газом, задыхается.

Исходя из того, что молекулы угарного газа связываются с гемоглобином в 200 раз прочнее, чем молекулы кислорода (иными словами, молекула угарного газа отцепляется от гемоглобина в 200 реже, чем молекула кислорода, при том, что соединяются они с одинаковой скоростью), рассчитайте концентрацию угарного газа (по объёму) в воздухе, при которой половина гемоглобина окажется заблокированной (это уже смертельно опасно).

Напомним, что объёмная концентрация кислорода в воздухе – 21%, а также то, что при одинаковых условиях в равном объёме любых газов содержится примерно равное число молекул.

Художник Инга Коржнева

ПРИКЛЮЧЕНИЯ МАЙОРА ПРОНЬКИНА

У того, кто будет читать эти страницы, должны быть крепкие нервы, отменное чувство юмора и голова на плечах. Как у легендарного сыщика Пронькина (вот он сбоку на фото из его личного дела) из города Никакусинска. Не сомневаюсь, всё это у тебя есть – иначе ведь и быть не может, если ты любишь (а ведь признайся, любишь!) разгадывать невероятные детективные истории, охотясь за кровожадными гангстерами и хитроумными мошенниками. Здесь ты найдёшь всё, что нужно настоящему сыщику: погони, улики, похищенные сокровища, запутанные следы и необычные шифры. Вместе с майором Пронькиным ты попробуешь раскрыть несколько самых удивительных преступлений за всю историю.

И ты знаешь, я тебе даже завидую. Ещё бы! Ведь тебе придётся пережить столько удивительных приключений в поисках особо опасных и необычных преступников: ты найдёшь похищенных кисломолочных коров в Фигляндии, раскроешь дерзкое преступление на птицеферме «Синяя птица» и вернёшь уникальную кар-птицу... А ещё... Стоп! Зачем же я тебе всё это рассказываю? Ты же сам скоро всё узнаешь. К тому же мне не терпится выяснить, как ты справишься с ролью Шерлока Холмса. Поэтому не трать больше время на чтение никому не нужных предисловий и берись за дело! Да, и не забудь показать эти страницы приятелю или подружке – вдвоём распутывать загадочные преступления гораздо интереснее!

Дело №1

КИСЛОМОЛОЧНЫЕ КОРОВЫ

На ранчо «Красное вымя», что в Фигляндии, разводят удивительных коров. Они покрыты тонкой шерстью, вместо «Му-у» говорят «Ого!» и дают не молоко, а настоящий кефир. Фигляндцы очень гордились своими коровами и собирались отправить их на всемирный коровий фестиваль. И вдруг за день до этого события в полицию позвонил неизвестный и сообщил что коровы украдены.

Печатается по изданию: С. Федин. Приключения майора Пронькина. – М.: Вита-пресс, 2017.

Прибыв на ранчо, полиция обнаружила лишь связанного шкафбоя Мухлюндера, сторожившего стадо. Он сидел за столом, на котором стоял стакан Пупсиколы с кусочками льда. Когда беднягу развязали, он тут же начал рассказывать, как было дело.

– Это случилось час назад, – начал Мухлюндер. – Я только налил себе Пупси-колы, чтобы освежиться, как вдруг кто-то сзади оглушил меня ударом по голове. Когда я очнулся, руки у меня были связаны, а коров и след простыл.

– Лучше расскажите, как вы помогли преступникам угнать коров, – вмешался в эту историю майор Пронькин.

Почему гениальный сыщик не поверил Мухлюндеру?

Дело №2

ДЕЛО О КАР-ПТИЦЕ

На птицеферме «Синяя птица», что в деревне Промокашкино, очень много редких экземпляров пернатых. Среди них есть даже совсем новые виды, выведенные местным учёным, дедом Стоеросовым. Например, саблезубый воробей, сумчатая ворона, двугорбый гусь, карликовый орёл, реактивный петух и другие.

Каждая из этих диковинных птичек сто́ит больших денег. Поэтому они хорошо охраняются. И всё-таки как-то ночью неизвестный злодей прокрался на ферму и выкрал уникальную кар-птицу. К счастью, говорящий попугай из соседней клетки смог описать некоторые приметы похитителя. Судя по всему, это был известный преступник Петро Стибрилли по кличке Бульдозер. Оперативная группа во главе с майором Пронькиным сразу направилась к дому Бульдозера.

– Час назад была похищена редкая птица, – с порога сказал заспанному преступнику сыщик. – Мы подозреваем, что это сделали вы.

– Я?! – удивился Бульдозер. – Да у меня на эту вашу кар-птицу с детства аллергия!

– Теперь я не сомневаюсь, что её украли именно вы! – заявил Пронькин.

Почему он так сказал?

Художник Ольга Демидова

XXXVIII ТУРНИР ГОРОДОВ, ОСЕННИЙ ТУР

9 и 23 октября 2016 года состоялся осенний тур XXXVIII Турнира Городов – международного математического соревнования для школьников. Приводим все задачи базового варианта и избранные задачи сложного варианта для 8–9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов.

Базовый вариант, 8–9 классы

1 (4 балла). Взяли 5 натуральных чисел и для каждых двух записали их сумму. Могут ли все 10 полученных сумм оканчиваться разными цифрами?

Михаил Евдокимов

2 (4 балла). На прямой отмечено 4 точки и ещё одна точка отмечена вне прямой. Всего существует 6 треугольников с вершинами в этих точках. Какое наибольшее количество из них могут быть равнобедренными?

Егор Бакаев

3. На окружности отмечено 100 точек. Эти точки нумеруются числами от 1 до 100 в некотором порядке.

а) **(2 балла).** Докажите, что при любой нумерации точки можно разбить на пары так, чтобы отрезки, соединяющие точки в парах, не пересекались, а все суммы в парах были нечётными.

б) **(2 балла).** Верно ли, что при любой нумерации можно разбить точки на пары так, чтобы отрезки, соединяющие точки в парах, не пересекались, а все суммы в парах были чётными?

Павел Кожевников

4 (5 баллов). Даны параллелограмм $ABCD$ и точка K такая, что $AK=BD$. Точка M – середина CK. Докажите, что $\angle BMD=90°$.

Егор Бакаев

5 (5 баллов). Сто медвежат нашли в лесу ягоды: самый младший успел схватить 1 ягоду, медвежонок постарше – 2 ягоды, следующий – 4 ягоды, и так далее, самому старшему досталось 2^{99} ягод. Лиса предложила им поделить ягоды «по справедливости». Она может подойти к двум медвежатам и распределить их ягоды поровну между ними, а если при этом возникает лишняя ягода, то лиса её съедает. Такие действия она продолжает до тех пор, пока у всех медвежат не станет ягод поровну. Какое наименьшее количество ягод может оставить медвежатам лиса?

Егор Бакаев

XXXVIII ТУРНИР ГОРОДОВ
ОСЕННИЙ ТУР

Избранные задачи сложного варианта, 8–9 классы

1 (5 баллов). Десяти ребятам положили в тарелки по 100 макаронин. Есть ребята не хотели и стали играть. Одним действием кто-то из детей перекладывает из своей тарелки по одной макаронине всем другим детям. После какого наименьшего количества действий у всех в тарелках может оказаться разное количество макаронин?

Николай Чернятьев

2 (5 баллов). В каждой клетке доски 8×8 написали по одному натуральному числу. Оказалось, что при любом разрезании доски на доминошки суммы чисел во всех доминошках будут разные. Может ли оказаться, что наибольшее записанное на доске число не больше 32? (Доминошкой называется прямоугольник, состоящий из двух клеток.)

Николай Чернятьев

3 (6 баллов). Произвольный треугольник разрезали на равные треугольники прямыми, параллельными сторонам (как показано на рисунке). Докажите, что ортоцентры шести закрашенных треугольников лежат на одной окружности. (Ортоцентр треугольника – точка пересечения его высот.)

Егор Бакаев

4 (8 баллов). Квадратная коробка конфет разбита на 49 равных квадратных ячеек. В каждой ячейке лежит шоколадная конфета – либо чёрная, либо белая. Саша может съесть две конфеты, если они одного цвета и лежат в соседних по стороне или по углу ячейках. Какое наибольшее количество конфет гарантированно может съесть Саша, как бы ни лежали конфеты в коробке?

Александр Кузнецов

5 (8 баллов). На трёх красных и трёх синих карточках написаны шесть положительных чисел, все они различны. Известно, что на карточках какого-то одного цвета написаны попарные суммы каких-то трёх чисел, а на карточках другого цвета – попарные произведения тех же трёх чисел. Всегда ли можно гарантированно определить эти три числа?

Борис Френкин

Художник Сергей Чуб

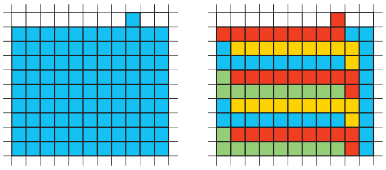
НАШ КОНКУРС («Квантик» № 10)

6. *Семеро девочек стоят в ряд, как показано на рисунке, и держат в руках конфеты. У девочек, которых вы видите справа от Тани – 13 конфет, справа от Ксюши – 33, справа от Ани – 23, справа от Иры – 8, справа от Вали – 27, справа от Нади – 16. Сколько конфет у Кати?*

Ответ: 8.

Справа от каждой девочки, кроме Кати, есть кто-то с конфетами. Поэтому Катя – крайняя справа. Чем правее девочка, тем меньше общее число конфет у тех, кого мы видим ещё правее. Значит, второй справа стоит Ира, а 8 конфет справа от неё – это конфеты Кати.

7. *Разрежьте синюю фигуру, изображённую на рисунке слева, на 10 равных частей.*



Ответ приведён на рисунке справа.

8. *Можно ли разложить несколько яблок по 10 тарелкам так, чтобы на любых двух тарелках было вместе либо 5, либо 8, либо 11 яблок и все три варианта встречались? Если да, то сколько всего могло быть яблок? Укажите все возможности.*

Ответ: 40 яблок.

Условия выполняются, если на тарелках лежит 1, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 7 яблок. Покажем, что других возможностей нет.

Среди десяти чисел (количеств яблок на тарелках) всегда найдутся минимум пять чисел одной чётности. Сумма любых двух из них чётна, и значит, равна 8 (варианты 5 и 11 не подходят). То есть сумма любых двух из них одна и та же. Значит, все эти числа равны (иначе сумма двух наибольших не равнялась бы сумме двух наименьших), и равны 4. Остальные числа нечётные, и это должны быть 1 и 7, чтобы мы получили в сумме 5 и 11. И 1, и 7 встречаются ровно один раз, иначе сумма каких-то двух из них будет 2 или 14. Значит, четвёрок всего 8.

9. *Вася знает, что если в треугольнике провести три средние линии, то получатся четыре одинаковых треугольника. Он решил, что если в тетраэдре (треугольной пирамиде) провести через середины рёбер четыре «средние плоскости», то получатся пять одинаковых тетраэдров поменьше. А что получится на самом деле? Сколько вершин и граней будет у этих многогранников?*

Ответ: четыре тетраэдра и октаэдр.

От каждого «угла» мы отрежем вдвое меньший тетраэдр. Что останется? У этого тела будет 8 треугольных граней: 4 грани – это разрезы, а ещё 4 – это остатки граней исходного тетраэдра, ведь от каждой грани мы отрезали 3 угловых вдвое меньших треугольника, и один посередине остался. Полученная фигура называется октаэдр. У октаэдра 6 вершин и в каждой вершине сходится 4 треугольные грани.

10. *Трое рабочих вырыли яму. Они работали по очереди, причём каждый проработал столько времени, сколько нужно было бы двум другим, чтобы вместе вырыть половину ямы. Во сколько раз быстрее они вырыли бы яму, работая все вместе?*

Ответ: 2,5.

Представим, что рабочие рыли две ямы: «настоящую» (ту, что в условии) и «запасную». А именно: пока очередной рабочий рыл настоящую яму, другие два в это время рыли запасную. Тогда каждая пара рабочих углубит запасную яму на половину настоящей ямы. В итоге запасная яма окажется в полтора раза глубже настоящей. Получается, что трое рабочих, непрерывно работая, вырыли суммарно в 2,5 раза больше, чем если бы они работали поочерёдно, потратив суммарно то же время и вырыв настоящую яму. Поэтому на то, чтобы вырыть настоящую яму вместе, у них уйдёт в 2,5 раза меньше времени.

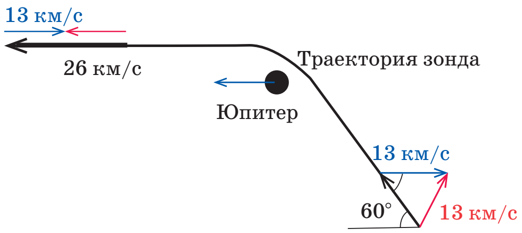
ПРИГЛАШЕНИЕ К ПУТЕШЕСТВИЮ («Квантик» № 11)

2. Ответ: 30 км/час ≈ 9 м/с.

3. При сближении с планетой космический корабль набирает большую скорость, поскольку он «почти что падает» на неё – ведь планета притягивает его чем ближе, тем сильнее. А потом, улетая от неё, он эту скорость теряет – она тратится на преодоление притяжения. Так же лыжник, съехав в овражек, с разгона въезжает на противоположный склон. (Так и говорят – космический аппарат падает в потенциальную яму планеты, а потом из неё выбирается.) В масштабе рисунка этот резкий пик скорости сливается в палочку. Если бы планета стояла на месте, конечная скорость после встречи с ней совпала бы со скоростью до встречи, и был бы просто пик, а дальше – продолжение той же кривой, что раньше. А из-за движения планеты получается «ступенька» – гравитационный разгон.

Массы Урана и Нептуна (и, значит, их потенциальные ямы) примерно одинаковы, но пик скорости возле Урана ниже – значит, «Вояджер-1» пролетал от Урана на гораздо бо́льшем расстоянии. Он только «чиркнул» по краешку потенциальной ямы. Кстати, заметили – при встрече с Нептуном он не только не разогнался, а даже потерял скорость?

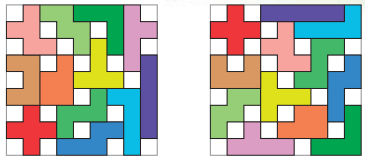
4. а) После манёвра зонд летит в ту же сторону, что и Юпитер. Значит, скорость зонда относительно Юпитера (то, что в истории с муравьём называлось $v+u$) равна $26-13=13$ км/с. Такой же она была и до встречи с планетой, но куда она была направлена – мы пока не знаем. Когда скорости не параллельны, их нужно складывать не просто так, а «как векторы»: пририсовать скорость Юпитера, взятую с обратным знаком (синяя стрелка), к скорости зонда относительно Солнца (чёрная стрелка). Получится скорость зонда относительно Юпитера – красная стрелка. (Проверьте, что при таком способе для параллельных скоростей получаются правильные ответы!) Теперь посмотрим на получившийся «до встречи с Юпитером» треугольник из скоростей: он равнобедренный, потому что красная и синяя стрелки одинаковой длины (13 км/с), и один из его углов равен 60°. Значит, он равносторонний, и чёрная стрелка – скорость зонда до манёвра – тоже 13 км/с. Так что выигрыш в скорости составил 13 км/с, зонд ускорился в 2 раза.



б) В этом случае угол 45°, так что равнобедренный треугольник оказался прямоугольным: относительно Юпитера зонд повернулся ровно на 90°. По теореме Пифагора длина чёрной стрелки – начальная скорость зонда – равна $\sqrt{2}\cdot 13$ км/с ≈ 18 км/с.

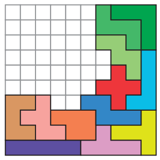
ПЕНТАМИНО – НОВЫЕ ЗАДАЧИ
(«Квантик» № 11)

Изолированные квадраты, примеры:

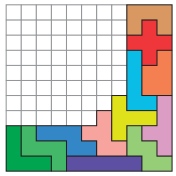


Поле 9 × 9, 21 квадрат

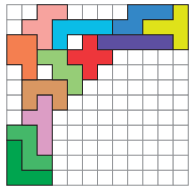
Симметричные антислайды, примеры:



Поле 10×10



Поле 11×11



Поле 12×12

КУРИНАЯ ЭПОПЕЯ («Квантик» № 11)

1. Снесённых яиц было, с одной стороны, mx (где x – количество кур), а с другой – каждая курица, кроме самой первой, вылупилась из яйца, снесённого курами же, да ещё добавим n петухов, поэтому яиц было $x-1+n$. Получаем уравнение: $mx=x-1+n$, и потому $x=\frac{n-1}{m-1}$.

2. В уравнении из ответа на первый вопрос $mx=x-1+n$ будем считать, что значение x нам *задано*, а величину n мы не знаем. Тогда однозначно получаем, что $n=(m-1)x+1$.

ШАРИК И СТАКАНЧИКИ («Квантик» № 11)

Стаканчики присасываются к шарику так же, как это делают обычные присоски на лобовое стекло машины (например, для держателей телефона). Присоска крепится к стеклу своей маленькой полостью, в которой воздух более разреженный, чем в атмосфере. Придавливает присоску атмосферный воздух. Почему он это делает? Любой газ стремится занять весь доступный объём, и у более плотного газа это стремление сильнее. Вот и воздух внутри и снаружи присоски давит на её стенку, но тот, что снаружи, давит сильнее.

Почему же в стаканчиках воздух разреженный? А вот почему. Когда мы прижали стаканчики к слабо надутому шарику, воздух в стаканчиках оказался заперт резиновой плёнкой. Пока шарик надувается, кривизна его поверхности уменьшается – он становится «менее выпуклым» и «более плоским», а значит, объём воздуха в стаканчике увеличивается – воздух разрежается.

ЭФФЕКТ БАБОЧКИ

Предположим, что «Лидер» одержал всего две победы, и как раз в матчах с двумя самыми слабыми командами, но проиграл команде, занявшей второе место, а все остальные матчи в турнире закончились вничью (в частности, «Лидер» сыграл вничью 12 из 15 матчей). Тогда до дисквалификации «Лидер» набрал $3+3+0+12=18$ очков, а все остальные команды – не более, чем $3+14=$ $=17$ очков (в частности, ровно 17 очков набрала команда, занявшая второе место). В результате дисквалификации «Лидер» потерял больше всех, ведь у него отобрали две победы. В итоге «Лидер» набрал лишь 12 очков, а каждая из остальных 13 команд (без «Лидера» и двух дисквалифицированных команд) – по крайней мере 13 очков. В результате «Лидер» занял последнее место!

ФЕДЯ, ДАНЯ И КЭРРОЛЛ

1) Так как часы в Гринвиче как раз и показывают точное время, чтобы узнать, когда наступает полдень, достаточно съездить 31 июля в Гринвич и посмотреть, когда тамошние часы покажут время 12.00. Это и будет нужный момент.

2) Определим момент, когда стенные часы показывали точное время. Как мы уже знаем, 1 июля в 12 ч 5 мин стенные часы отставали от точного времени на 3 минуты, или 180 секунд. Но затем они компенсировали отставание – по 11 секунд за каждые сутки. Поэтому для достижения точного времени им потребуется $(180:11)$ суток, или же 16 суток 8 часов 43 минуты $38\frac{2}{11}$ секунды. Добавив эту величину к 12 ч 5 мин 1 июля, получаем, что искомый момент наступил 17 июля в 20 ч 48 мин $38\frac{2}{11}$ с.

3) Решение основывается на двух всем известных фактах:

– угловая скорость вращения часовой стрелки в 12 раз меньше, чем минутной;

– минутная стрелка всегда *длиннее* часовой.

Следовательно, если скорость движения конца минутной стрелки равна v, то скорость движения конца часовой стрелки заведомо *меньше* $\frac{1}{12}v$. Поэтому относительная скорость концов стрелок лежит в пределах от $\frac{11}{12}v$ до $\frac{13}{12}v$, и отношение относительных скоростей в любые два момента времени больше $\frac{11}{13}$, но меньше $\frac{13}{11}$. А так как $\frac{5}{6}<\frac{11}{13}$, то относительная скорость не может составить 5 мм/с.

КАБЛУКОВ, ШОПЕН, УАЙЛЬД

Придумана история про Шопена. Пианисты не выступают в перчатках, пусть и очень красивых.

КОФЕ КАК ПОГНУТЫЙ КЛЮЧ

Поскольку угарный газ связывается в 200 раз прочнее, то равное количество гемоглобина, связанного с кислородом и с угарным газом, достигается при концентрации последнего в 200 раз меньшей. (Примем, что в норме весь гемоглобин, проходя через лёгкие, связывается с кислородом.) 1/200 от 21% – это 0,105%. При такой концентрации угарного газа наступает тяжёлое отравление.

ПРИКЛЮЧЕНИЯ МАЙОРА ПРОНЬКИНА

Кисломолочные коровы. Мухлюндер солгал – лёд в стакане за час должен был растаять.

Дело о кар-птице. Сыщик не сказал, какую именно птицу украли, и поэтому Бульдозер не мог знать её название. Сказав про кар-птицу, он выдал себя.

XXXVIII ТУРНИР ГОРОДОВ

ОСЕННИЙ ТУР

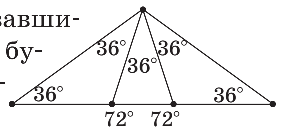
БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ, 8–9 КЛАССЫ

1. Ответ: не могло.

Рассмотрим сумму S полученных десяти сумм. Если эти суммы оканчиваются на десять разных цифр, то число S нечётно. Но каждое из исходных пяти чисел входит в четыре суммы, поэтому число S чётно. Противоречие.

2. Ответ: все шесть.

Возьмём равнобедренный треугольник с углом 108°. Поделим этот угол на три равных (как на рисунке). Образовавшиеся шесть треугольников будут, очевидно, равнобедренными.

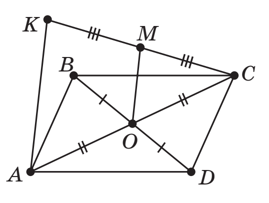


3. а) Найдутся две соседние точки с номерами разной чётности. Соединим их и мысленно удалим. Из оставшихся точек снова можно выбрать две соседние и так далее. В итоге все точки разобьются на нужные пары.

б) **Ответ:** не верно.

Занумеруем точки подряд по возрастанию. Пусть их можно разбить. Рассмотрим любой отрезок, соединяющий два числа одной чётности. Он разобьёт оставшиеся точки на две группы с нечётным числом точек в каждой, и ни в одной группе точки на пары уже разбить не удастся.

4. Пусть O – центр параллелограмма. Тогда OM – средняя линия треугольника CAK ($OM=$ $=\frac{1}{2}AK$ и в случае, когда K лежит на прямой CA). Поэтому в треугольнике BMD медиана MO равна половине противоположной стороны: $BD=$ $=AK$. Но тогда угол BMD прямой.



Замечание. Если $AK \parallel BD$, то треугольник BMD вырождается и угол BMD не имеет смысла.

5. Ответ: 100 ягод.

У каждого медвежонка останется хотя бы одна ягода, потому что в каждой делёжке участвуют хотя бы две ягоды. Поэтому меньше 100 ягод у медвежат остаться не может.

Как лисе оставить каждого с одной ягодой?

Пусть к лисе сначала подойдут два младших медвежонка. У самого младшего уже одна ягода. Лиса уравняет их ягоды (у них в сумме 3 ягоды), и будет уже два медвежонка с одной ягодой.

Имея двух медвежат с одной ягодой и следующего с 4 ягодами, лиса сможет каждого оставить с одной ягодой: $(1,1,4) \to (1,2,2) \to (1,1,2) \to (1,1,1)$.

Затем лиса зовёт медвежонка с 8 ягодами и сначала делает так: $(1,1,1,8) \to (1,1,4,4)$. Лиса уже умеет оставлять каждого медвежонка с одной ягодой, если у двух было по 1 ягоде, а у одного 4. Лиса так и сделает: $(1,1,4,4) \to (1,1,1,4)$. А потом ещё раз: $(1,1,1,4) \to (1,1,1,1)$. Итак, уже четыре младших медвежонка с одной ягодой.

Дальше лиса будет действовать аналогично. Почему это у неё получится? Докажем, что лиса сможет оставить ровно одну ягоду медвежонку с 2^n ягодами, если есть ещё $n-1$ медвежат с одной ягодой. Будем предполагать, что на предыдущих шагах этого алгоритма она уже научилась делать аналогичную процедуру для всех меньших n.

Лиса уравняет медвежат с 1 и с 2^n ягодами, от этого у них станет по 2^{n-1} ягод. Кроме них осталось $n-2$ медвежонка с 1 ягодой. А лиса уже умеет с их помощью добиваться того, чтобы у медвежонка с 2^{n-1} ягодами осталась только одна. После этого она так же добьётся того, чтобы и у другого медвежонка стала только 1 ягода.

Так лиса может увеличивать число медвежат с одной ягодой, пока других не останется.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ СЛОЖНОГО ВАРИАНТА, 8 – 9 КЛАССЫ

1. Ответ: после 45 действий.

Рассмотрим любых двух детей, например, Петю и Васю. Ходы других детей одинаково изменяют количества макаронин у Пети и Васи. Поэтому если Петя и Вася сделали поровну действий, то и макаронин у них будет поровну, а если они сделали разное число действий, то и макаронин у них будет разное число.

Значит, чтобы у всех стало разное количество макаронин, все должны сделать разное число действий, то есть всего хотя бы $0+1+2+$ $+\ldots+9=45$.

Отсюда получаем и пример на 45 действий: первый делает одно действие, затем второй – 2, третий – 3, и т. д. до девятого включительно (десятый не делает ничего). Каждый при этом отдал не более $9 \cdot 9 = 81$ макаронины, то есть его исходных 100 макаронин на это хватило.

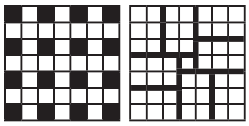
2. Ответ: может.

Запишем в чёрных клетках единицы, а в белых клетках – все числа от 1 до 32. При любом разбиении на доминошки в каждой будет ровно одна белая и одна чёрная клетка. Поэтому суммы в доминошках будут 2, 3, ..., 33.

Замечание. Существует пример, когда наибольшее число равно 21, а также известно, что оно не может быть меньше 20.

3. Рассмотрим два закрашенных треугольника с общей вершиной A. Они симметричны относительно A. Их высоты, выходящие из A, перпендикулярны TA, где T – центр большого треугольника. Значит, их ортоцентры симметричны относительно TA. Поэтому расстояние от T до этих ортоцентров одно и то же. Поскольку это верно для любой пары соседних закрашенных треугольников, то ортоцентры всех этих треугольников равноудалены от T.

4. Ответ: 32 конфеты.



При раскладке, указанной на левом рисунке, ни одну из 16 чёрных конфет съесть нельзя, а из 33 белых можно съесть не больше 32 в силу чётности.

Покажем, что 32 конфеты можно съесть при любой раскладке. В трёхклеточном уголке всегда можно съесть пару конфет. Значит, в прямоугольнике 2×3 можно съесть 4 конфеты. В квадрате 7×7 можно разместить 8 таких прямоугольников (рис. справа).

5. Ответ: всегда.

Все искомые числа различны, иначе на карточках некоторые числа были бы равны. Так как их попарные произведения положительны, то все числа одного знака, а так как их попарные суммы положительны, то этот знак плюс. Обозначим искомые числа $x<y<z$. Для карточек каждого цвета рассмотрим отношение наибольшего числа к наименьшему. В одном случае это $\frac{y+z}{x+y}$, в другом $\frac{z}{x}$. Так как $x<z$ и $y>0$, то первое отношение меньше второго. Отсюда понятно, на каких карточках написаны суммы и на каких произведения. Знание попарных сумм трёх чисел определяет эти числа, например, $x=\frac{1}{2}((x+y)+(x+z)-(y+z))$.

наш КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, не позднее 1 января электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com** или обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик»**.

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

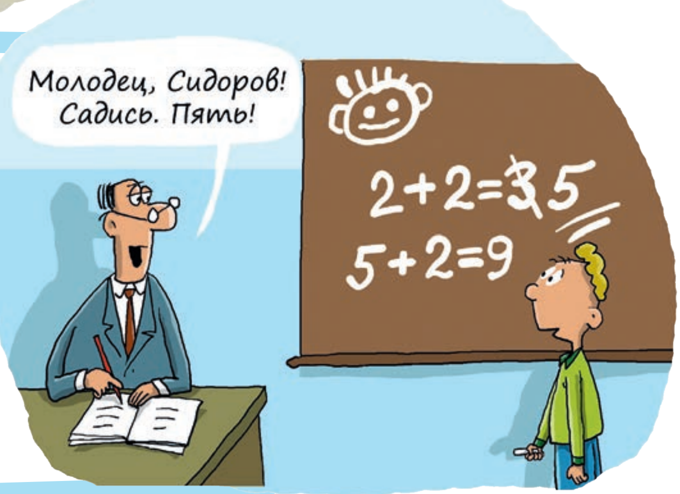
Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте www.kvantik.com. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы.

Желаем успеха!

IV ТУР

16. Можно ли из одинаковых кирпичей-уголков, каждый из которых склеен из трёх кубиков $1 \times 1 \times 1$, сложить куб $3 \times 3 \times 3$?

17. Ради равноправия полов учитель, когда ставит пятёрку девочке, ставит пятёрку и какому-нибудь мальчику. А когда ставит пятёрку мальчику, ставит пятёрку ещё какой-нибудь девочке. Также ради справедливости учитель хочет, чтобы к концу года у всех детей было поровну пятёрок. Получится ли у него этого добиться, если в классе 23 ребёнка, и хотя бы одну пятёрку за год он всё-таки хочет поставить?



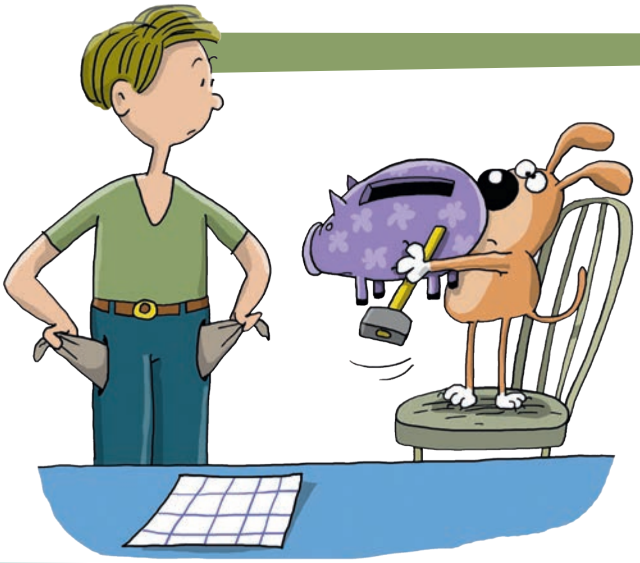
наш КОНКУРС ОЛИМПИАДЫ

Авторы: Егор Бакаев (17, 18), Михаил Евдокимов (16, 19), Сергей Костин (20)

18. На каждой из 6 карточек написана цифра от 1 до 6 (каждая по одному разу). На листке написана «заготовка» арифметического выражения:

$$(* + *) \cdot (* + *) \cdot (* + *).$$

Петя выбирает одну из звёздочек и кладёт на неё одну из карточек, затем то же самое делает Вася, затем снова Петя, и так далее по очереди. Вася хочет, чтобы, когда все карточки будут выложены, результат выражения равнялся 240. Сможет ли Петя ему помешать?



19. Можно ли круглую монету диаметра 2 см положить на лист клетчатой бумаги (сторона клетки 0,5 см) так, чтобы она покрыла ровно 10 узлов сетки? (Узел, попавший на границу монеты, тоже считается покрытым.)

20. В лифте 16-этажного дома работают только две кнопки. При нажатии на первую кнопку лифт поднимается на 5 этажей, а при нажатии на вторую опускается на 7 этажей (если это невозможно, лифт никуда не едет). Человек зашёл в лифт на первом этаже. На каком этаже он может оказаться после 99 переездов лифта? (Найдите все варианты и докажите, что других нет.)

Художник Николай Крутиков

ПРОВОД БЕЗ ТЕНИ

Через улицу протянут тонкий провод, на котором висит дорожный знак. Почему в яркий солнечный день тень от знака хорошо видна, а тень от провода не видна или видна очень слабо? Почему мы видим тень от листвы, но не видим тени от тонких веток?

По задаче Якова Перельмана

Художник Евгения Константинова

ISSN 2227-7986
16012