№ 9 | сентябрь 2021

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 9
сентябрь 2021

БЕНДЖАМИН ТОМПСОН, ГРАФ РУМФОРД

ЛИНЕЙЧАТЫЕ, НО НЕ ПЛОСКИЕ

ТЕНЬ РАСЧЁСКИ

Enter

ОТКРЫЛАСЬ ПОДПИСКА на 2022 год!

Подписаться на журнал можно

- **на почте (у оператора) по электронной версии Каталога Почты России:**
  – индекс **ПМ068** – подписка по месяцам полугодия
  – индекс **ПМ989** – годовая подписка
- **онлайн-подписка на сайтах:**
  – агентства АРЗИ **akc.ru/itm/kvantik**
  – Почты России **podpiska.pochta.ru**

На 2 полугодие 2021 года также можно подписаться на почте по **ОБЪЕДИНЁННОМУ КАТАЛОГУ «ПРЕССА РОССИИ»** (индекс **11346**)

На «Квантик» теперь можно подписаться в КАЗАХСТАНЕ и УКРАИНЕ!

УКРАИНА

Подписное агентство «ПРЕСЦЕНТР КИЕВ» **www.prescentr.kiev.ua**

Чтобы подписаться, нужно позвонить по тел.: **044-451-51-61**
или написать на e-mail: **podpiska1@prescentr.kiev.ua**

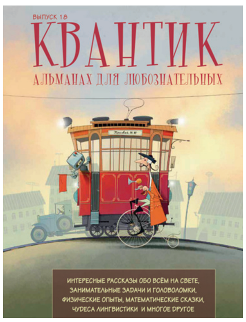
КАЗАХСТАН

1) Подписное агентство «ЭКСПРЕСС-ПРЕСС» (ТОО «Express Press Astana»)
телефоны: **+7 7172-25-24-35**
+7 747-266-05-77
+7 7172-49-39-29
e-mail: **express-press-astana@mail.ru**

2) Подписное агентство «ЕВРАЗИЯ ПРЕСС»
телефон: **(727) 382-25-11**; факс: **(727) 382-34-87**
e-mail: **evrasia_press@mail.kz**

3) КАЗПОЧТА
Узнавайте о возможностях подписки на «Квантик» на **Казпочте**

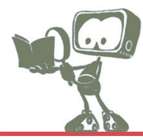
СКОРО В ПРОДАЖЕ



АЛЬМАНАХ ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ «КВАНТИК», выпуск 18

В него вошли материалы журнала **«КВАНТИК»** за второе полугодие 2020 года

Купить этот и предыдущие альманахи можно в магазине «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КНИГА» (адрес: г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11), в интернет-магазинах **biblio.mccme.ru** и **kvantik.ru** и других (см. список на сайте **kvantik.com/buy**)



www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 9, сентябрь 2021 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Е. А. Котко, Р. В. Крутовский, Г. А. Мерзон, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Фил Дунский

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**
Подписка на журнал в отделениях Почты России:
- бумажный каталог – Объединённый каталог «Пресса России» (индекс **11346**)
- электронная версия Каталога Почты России (индекс **ПМ068**)

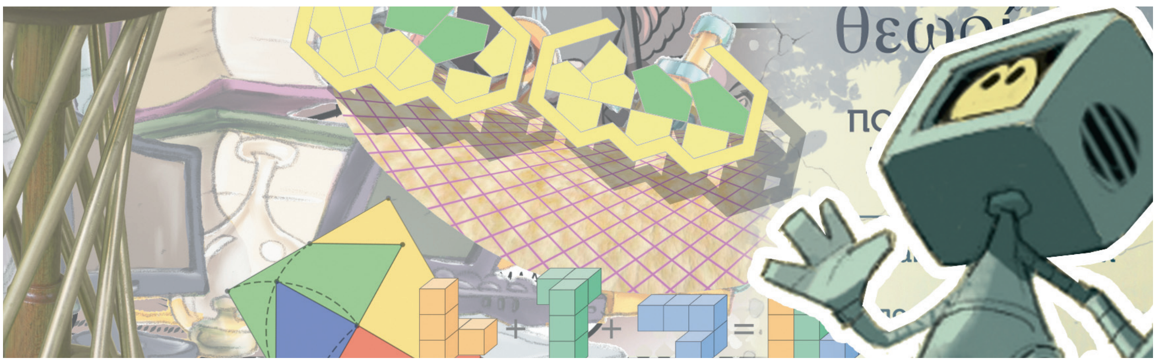
Онлайн-подписка на сайте:
- агентства АРЗИ **akc.ru/itm/kvantik**
- Почты России **podpiska.pochta.ru/press/ПМ068**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84x108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 12.08.2021
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831)216-40-40

Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

СОДЕРЖАНИЕ

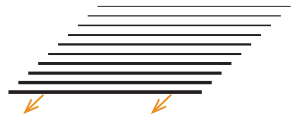


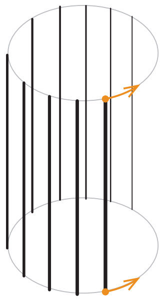
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СЮРПРИЗЫ

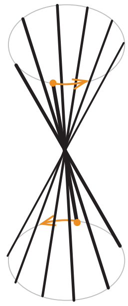
Николай Андреев,
Максим Прасолов

ЛИНЕЙЧАТЫЕ, НО НЕ ПЛОСКИЕ

Представьте себе, что вы держите в руке палку и перемещаете её в пространстве. А потом «закрашиваете» все точки, по которым «проехала» палка. Так можно «нарисовать», например, обычный стол. То есть поверхность стола – плоскость – может быть получена движением прямой. Цилиндр – это поверхность, образованная движением прямой по окружности. Конус – поверхность, образованная вращением прямой вокруг пересекающейся с ней осью. И кажется неудивительным, что и цилиндр, и конус можно получить сворачиванием плоского листа бумаги.

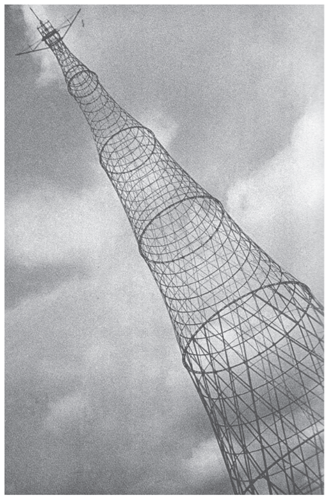






Поверхности, образованные движением прямой, называют *линейчатыми*, а саму эту прямую – *образующей*. А так ли неудивительно, что линейчатую поверхность конуса и цилиндра можно свернуть из листа? Любую ли линейчатую поверхность можно получить сворачиванием листа бумаги? Оказывается – нет.

Один пример такой поверхности Квантик и его друзья уже знают – однополостный гиперболоид вращения – его форму имеют секции башни Шухова[1].



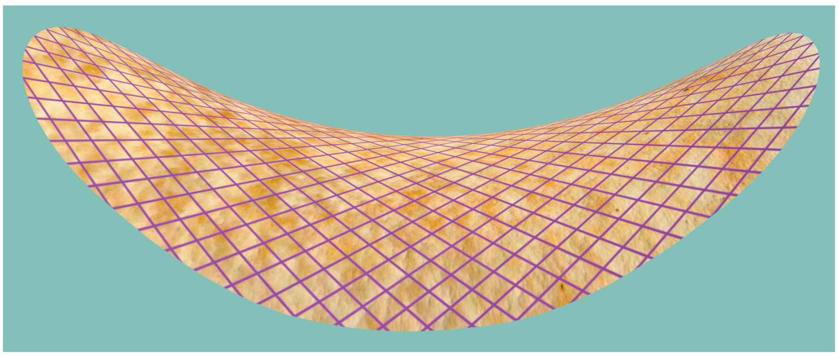
Шуховская башня
(фото А. Родченко, 1929)
kvan.tk/shukhov

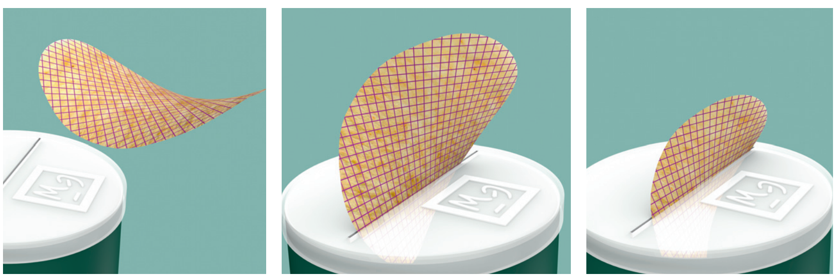
Чтобы сделать эту поверхность, возьмите две одинаковые крышки для банок, заполните их пластилином. По ободку одной из крышек воткните много одинаковых шпажек на одинаковом расстоянии друг от друга перпендикулярно плоскости крышки. Аккуратно накройте конструкцию второй

[1] См. статью «Шухов и его башня», «Квантик» № 8 за 2012 год.

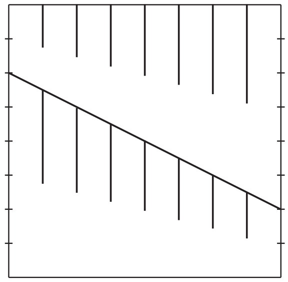
крышкой, чтобы шпажки воткнулись и в неё (по ободку, на таком же расстоянии друг от друга). Получился цилиндр. Теперь слегка поверните одну крышку, держа другую неподвижной: получится гиперболоид! Он симметричный: в зеркале получится такая же поверхность, но шпажки будут закручены в другую сторону. Поэтому настоящие и зеркальные шпажки образуют сетку. Поверхностей, на которых есть сетка из прямых (через каждую точку проходит более одной прямой), отличных от плоскости, всего две – обе их вы найдёте в этой статье.

Ещё одна поверхность – *гиперболический параболоид*. Не пугайтесь названия: вы наверняка встречались с этой поверхностью, если видели чипсы. Она похожа на седло: именно такую форму имеют чипсы, упакованные в тубусы.

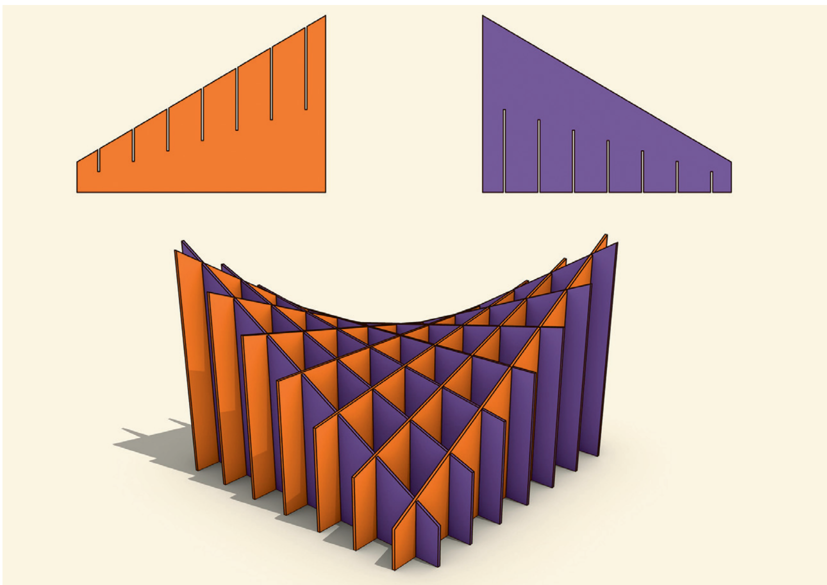




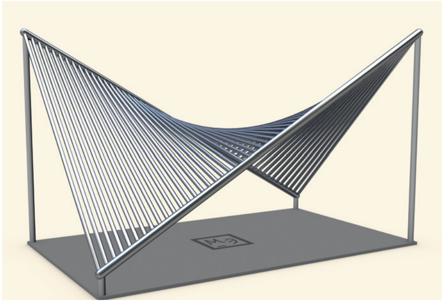
Оказывается, что эта поверхность линейчатая. Убедитесь в этом, проделав такой эксперимент: прорежьте узкую щель в крышке от тубуса и аккуратно просуньте чипс через эту щель. Чипс пролезет!



Желающие могут изготовить модель гиперболического параболоида из картона. Предлагаем способ, в котором понадобится 7 одинаковых квадратов. Боковые стороны разделим метками на 8 равных частей. Разрежем квадрат по отрезку, соединяющему метку с противоположной, так сделаем по одному разу с каждой меткой. Получим 7 одинаковых пар деталей. Сделаем вертикальные прорези на половину высоты, отстоящие друг от друга и от вертикальных краёв на одно и то же расстояние. Соединим детали, как на картинке. Получилась поверхность сетки из прямых (см. похожие картинки в журнале «Квант» № 3 за 1990 год, на 1-й и 4-й страницах обложки).



Ту же самую поверхность можно получить по-другому. Возьмём две прямые, отметим на каждой прямой одинаковое количество точек на равных расстояниях, пронумеруем их по порядку. Соединим отрезком каждую точку с точкой на другой прямой с тем же номером. Отрезки заметут поверхность. Если прямые были параллельны или пересекались, то получится плоскость. А если нет, то гиперболический параболоид.



Попробуйте приложить листочек бумаги поверх изготовленной модели, и вы увидите, что это невозможно без складок и разрезов. То есть эта поверхность «неплоская». Однополостный гиперболоид – тоже. Покажем это. Представим, что удалось приложить листок к поверхности. Обведём карандашом четырёхугольник со сторонами вдоль прямых на поверхности. На листе получится четырёхугольник с теми же углами, что и на поверхности. Однако сумма углов четырёхугольника на плоскости[2] всегда равна 360°, а наш четырёхугольник на поверхности пространственный – он не лежит целиком ни в какой плоскости, потому что его противоположные стороны и не пересекаются, и не параллельны, при этом сумма углов пространственного четырёхугольника всегда меньше 360°. Попробуйте это доказать, разрезав четырёхугольник на два треугольника и сравнив сумму их углов с суммой углов четырёхугольника.

Что бывают «неплоские» поверхности, вы наверняка уже знаете, если пробовали обернуть мячик листочком бумаги. А вот что не всякая линейчатая поверхность – плоская, надеемся, кого-то удивило.

Проект «Математические этюды» **etudes.ru**, по материалам которого подготовлена эта статья, высылает свою иллюстрированную книгу «Математическая составляющая» тем, кто сделает какую-либо модель и подарит её школьному кабинету математики (см. kvan.tk/etudes-vk). Если вы сделаете модель гиперболического параболоида или однополостного гиперболоида не только для себя, но и для учителя, пишите по адресу **gift@etudes.ru** и получите книгу!

[2] См. статью «Чему равна сумма углов?» Льва Емельянова в «Квантике» №3 за 2020 год.

Художник Мария Усеинова

Андрей Щетников

ПОЧЕМУ ТЕОРЕМА НАЗЫВАЕТСЯ ТЕОРЕМОЙ?

Слово «теорема» известно нам из школьного учебника геометрии: так называется утверждение, истинность которого следует доказать. Однокоренное с ним и слово «теория». Как и многие другие слова, связанные с наукой, они пришли к нам из Древней Греции. Полюбопытствуем, что эти слова означали в древности, и откроем словарь древнегреческого языка.

θεωρία – 1) *смотрение на зрелище; зрелище, празднество;* 2) *посольство или депутация, посылаемая греческими государствами для присутствия на играх Олимпийских, Истмийских, Пифейских и Немейских; священное посольство, посылаемое афинянами в Делос;* 3) *наблюдение, рассмотрение, исследование, научное познание, наука, учение, теория.*

θεώρημα – 1) *зрелище, увеселение;* 2) *позд. исследованное и доказанное положение, правило, учение.*

Удивительно, правда?! Особенно странным кажется упоминание об Олимпийских играх; разве есть что-то общее между ними и геометрией? Но такая связь есть, и чтобы понять, почему древнегреческие математики стали называть открытые ими геометрические факты теоремами, к истории Олимпийских игр надо обратиться в первую очередь.

Сегодня Олимпийские игры – это большие соревнования по многим видам спорта, проводимые раз в четыре года. Но раньше этим дело не ограничивалось.

Древние Олимпийские игры были общегреческим религиозным праздником в честь одного из олимпийских богов – Зевса Олимпийского. Святилище Зевса находилось, конечно же, не на Олимпе, но в Олимпии – небольшом греческом государстве на западе Пелопоннеса. Здесь росла священная роща. В роще стоял храм, когда-то деревянный, а впоследствии каменный, и его мраморные колонны сами были похожи на стволы деревьев. Рядом с храмом росла древняя олива. Когда-то предки греков жили в лесах и поклонялись деревьям, и эта олива была сама предметом такого поклонения. Считалось, что божество любит втайне от людей посещать свой храм и свою рощу; а олива была если и не воплощением божества, то чем-то очень близко с ним связанным.

Праздник Зевса Олимпийского проводился раз в четыре года. Летом этого года все греческие города-государства объявляли священное перемирие. Всякая война прекращалась на время, чтобы все путники могли добраться в Олимпию беспрепятственно. Уже в самом начале лета на олимпийских тренировочных площадках собирались молодые люди, готовившиеся принять участие в состязаниях. Ближе к празднику в Олимпию приезжали торговцы с товарами из самых дальних краёв греческого мира, от Геркулесовых столбов до Чёрного моря. Конечно же, торговля велась не в храмовой округе, но за её пределами; и этот рынок был самым большим и шумным из всех греческих рынков. И наконец, в Олимпию прибывали официальные посольства из всех греческих городов. Понятно, что в их состав входили самые уважаемые в своём городе люди. А назывались эти посольства, как мы помним из словаря, теориями.

Основу Олимпийского праздника составляло – и тут история делает неожиданный для неспециалистов поворот! – принесение божеству даров и жертв. У каждого города в Олимпии была своя дарохранительница и свой алтарь. На алтаре сжигались части жертвенных животных, и дым поднимался к небу; а послы принимали участие в священной трапезе, становясь тем самым сотрапезниками божества.

А дальше начинается самое интересное. Грекам очень хотелось узнать, насколько благосклонно божество отнеслось к их дарам, приняло их или отвергло. Выяснить это и помогали Олимпийские игры!

Я думаю, греки представляли это так. Вообразим себе первый старт – в беге на один стадий. Первая четвёрка бегунов замерла на стартовой черте. Звучит команда – и бегуны устремляются вперёд. Все они – молодые, сильные, красивые, и они бегут грудь в грудь.

Но в это время где-то в священной роще находится невидимое божество, привлечённое вчерашними дарами. Греки были любознательным народом, и такими же любознательными и любопытными были и их боги. И вот, привлечённый красотой состязания, на стадионе незримо появляется сам Зевс. Он глядит на бегунов и думает: кто ему больше по душе? Вот он делает свой выбор и простирает над головой бегуна

свою незримую длань. И тут – о чудо! – этот бегун вырывается вперёд так, как будто остальные его соперники стоят на месте, а ведь они тоже бегут изо всей силы. Финишная черта, победа!

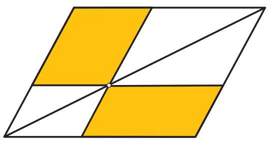
А за победой приходит слава, которую так ценили древние греки. После бегуну поставят памятник, будут кормить целый год за общественный счёт. Ведь на нём остановился выбор божества, и его сограждане тоже были отмечены этим выбором. Но сначала победителя награждают венком из ветвей той самой оливы, которая растёт рядом с храмом. Венок на голове символизирует руку божества, распростёртую над головой атлета, и поэтому выше этой награды нет ничего на свете.

А что же зрители, сидящие на трибунах олимпийского стадиона? Они, конечно, болеют за своих, кричат изо всей силы – но и участвуют в священнодействии: ведь они наблюдают за знаками, которые подаёт божество. Бегуны и открывающееся через них божество – это и есть теорема в исходном смысле этого слова; а зрители на трибунах – это теоретики, созерцатели божественных знаков. Впрочем, это высокое занятие не мешает им кричать и махать руками – разве мы сумеем постичь красоту состязаний, сидя на трибуне в молчании?

Но причём здесь геометрическая теорема? Чтобы ответить на этот вопрос, расскажем немного о Пифагоре и пифагорейцах, ведь, возможно, о геометрических теоремах впервые заговорили именно в их сообществе. До нас дошла легенда о том, что сам Пифагор в молодости был победителем олимпийских состязаний; а в зрелом возрасте он почти наверняка, и не раз, побывал в Олимпии зрителем. А ещё Пифагор первый назвал себя философом, о чём имеется вот такой рассказ:

«Говорят, что Пифагор первый стал называть себя философом, не только придумав новое слово, но и прекрасно разъясняя, что оно обозначает. Он говорил, что приход людей в жизнь подобен толпе на игрищах. Там суетятся разные люди, пришедшие каждый со своей целью (один стремится продать товар подороже, другой – добиться славы и показать телесную силу; но есть и третий вид людей, причём самый свободный, которые собираются ради зрелищ, прекрасных творений, благих деяний и речей, обычно представляемых на праздниках). Так и в жизни всевозможные люди собираются в одном месте, движимые различными интересами: одних обуревает жажда денег и роскоши, других привлекает власть, первенство, соперничество и честолюбие. Но самый чистый образ жизни у того, кто занимается созерцанием (θεωρία) прекрасного, и он называется философским».

Будучи философом, Пифагор учит правильной, достойной жизни. Но какую роль в этой жизни играет геометрия? Почему именно пифагорейцы стали заниматься теоретической геометрией и сделали в ней ряд первых крупных открытий? И почему они удостоили свои открытия высокого звания теорем? Чтобы ответить на этот вопрос, давайте рассмотрим какую-нибудь из теорем, открытых пифагорейцами. Можно взять знаменитую теорему Пифагора; но я предпочитаю свой любимый пример.



Для начала начертим произвольный параллелограмм и проведём в нём диагональ. Далее, поставим точку в произвольном месте на этой диагонали. Затем проведём через эту точку два отрезка, соединяющие противоположные стороны параллелограмма: один отрезок параллельно одной паре сторон параллелограмма, другой – параллельно другой паре сторон. Наконец, закрасим два внутренних параллелограмма, лежащих по разные стороны от диагонали. Доказанная пифагорейцами теорема утверждает, что эти параллелограммы имеют равную площадь.

Чтобы установить истинность теоремы, простого взгляда на чертёж отнюдь не достаточно! Один параллелограмм у нас более широкий, зато менее высокий; возможно, эта разница в размерах и приводит к равенству площадей, но само это равенство не очевидно; оно скрывается от нашего глаза.

Но посмотрим на чертёж, подключив ещё и свой ум. Мы видим большой параллелограмм, разделённый диагональю на два треугольника. Эти треугольники очевидно одинаковы, а значит, равны и по площади. Далее, есть два меньших незакрашенных параллелограмма, также разделённые диагональю пополам; и их частями опять будут равные треугольники. А теперь

Художник Алексей Вайнер

смотрите: мы берём большие треугольники и отнимаем от них малые треугольники, сначала из одной пары, а потом из другой. Но если от равных величин отнять равные, то и остатки будут равны. А остатки у нас – это закрашенные параллелограммы; вот мы и доказали, что они равны по площади.

Равенство площадей сперва было скрыто от нас, а потом на помощь зрению пришёл ум, они соединились в умозрении, и равенство стало явным, теперь мы отчётливо видим его и понимаем, откуда оно возникает. Надо думать, именно эта аналогия с подающим знаки скрытым божеством заставила Пифагора считать свои открытия божественными; ведь по преданию, за открытие одной из своих теорем он принёс в жертву богам сто быков (хотя другое предание говорит, что Пифагор проповедовал отказ от животной пищи и приносил в жертву фигурки быков, изготовленные из медового теста).

Удивительное свойство открытых Пифагором теорем состоит ещё и в другом. Мы рассматривали на чертеже конкретный параллелограмм, но полученное знание относится не только к нему, но и ко всем параллелограммам сразу. Выходит, наш ум способен охватить в единой теории бесконечное множество размеров и пропорций, подведя их под общее понятие, а такая способность ума несомненно является даром богов. Прокл, один из последних античных философов, живший через тысячу лет после Пифагора, сказал об этом так: «Пифагор преобразовал занятия геометрией в форму свободного образования, изучая сами её начала отвлечённо от материи и умозрительно». Такую свободу надо ценить в себе и развивать, и поэтому изучение геометрии со времён Пифагора навсегда стало важнейшей частью образования, и люди ценят её в первую очередь не за «пользу», которую геометрические знания приносят, а за то совершенствование человеческой души, к которому приводит геометрия, если ей заниматься правильно.

Всякому, кто хочет больше узнать о древних Олимпийских играх и о Пифагоре, я рекомендую несколько книг: Ян Парандовский «Олимпийский диск»; А. В. Волошинов «Пифагор. Союз истины, добра и красоты»; М. Л. Гаспаров «Занимательная Греция».

ТЕНЬ РАСЧЁСКИ

В солнечный день тень от расчёски упала под углом на плоскую поверхность. Почему слева и справа у тени легко различить отдельные зубья, а посередине есть участок, где тень почти однородна?

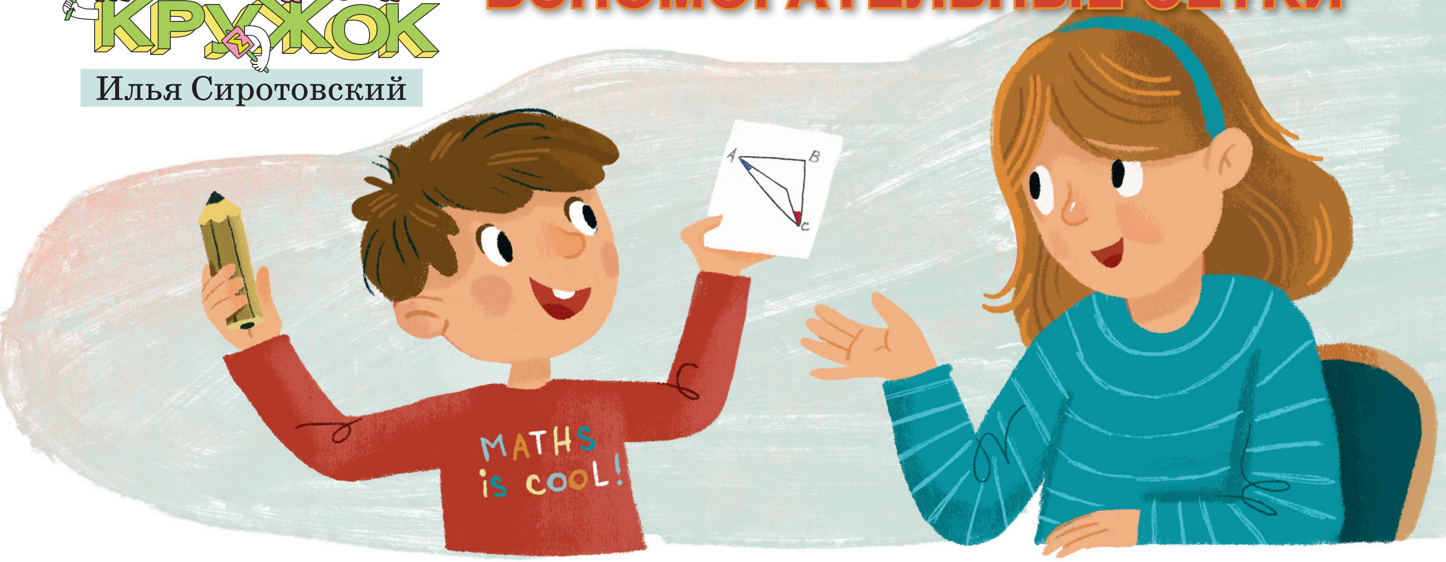
Автор Александр Бердников
Фото автора

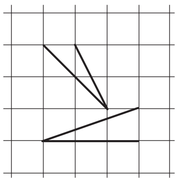
Художник Мария Усеинова

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СЕТКИ

Математический кружок

Илья Сиротовский





Вечером трудно найти более приятное занятие, чем не спеша порешать геометрическую задачку.

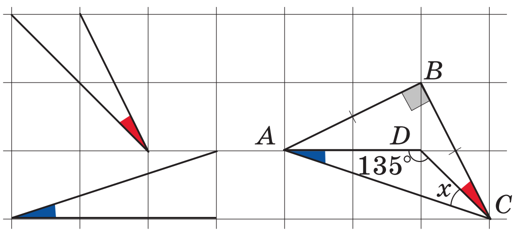
– Попробуй вот такую решить. – Полина нарисовала на клетчатом листке два уголка.

– Нужно доказать, что эти уголки равны.

Упражнение 1. Попробуйте сами решить эту задачу, прежде чем читать дальше. Есть очень много разных решений.

Стёпа начал думать и что-то рисовать. Прошло около получаса, прежде чем он показал сестре изрисованный листок.

– Я их вот так приложил.



– Здесь треугольник ABC прямоугольный и равнобедренный, значит, угол ACB равен 45°. А отсюда понятно, что красный уголок равен $45° - x$, а синий равен $180° - 135° - x$. Значит, они равны!

– Похоже на правду. – Полина изучала листок. – Интересное решение! Совсем не похоже на авторское.

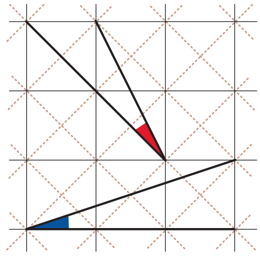
– А какое авторское? И кто автор?

– Автор задачи В.В. Произволов, а авторское решение – через подобие.

– Я не знаю, что это, – сказал Стёпа.

– Ну смотри, синий уголок – это угол, который образуется, если сдвинуться на три клетки вправо и на одну вверх. И нам на самом деле не важно, какого эти клетки размера.

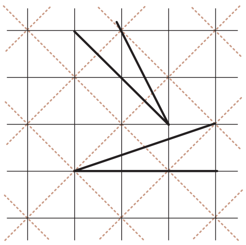
– То есть нам надо понять, что красный угол – это тоже сдвиг 3 на 1. Но нам нужны какие-то другие клеточки...



– Вот именно! Надо их нарисовать. – Полина дочертила несколько новых линий.

– Да. Теперь видно, что это тоже угол напротив мень-

шего катета в прямоугольном треугольнике с катетами 1 и 3.

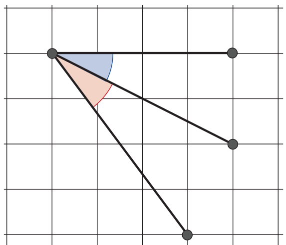


– Можно было ещё и на такой сетке увидеть. – Степан нарисовал картинку.

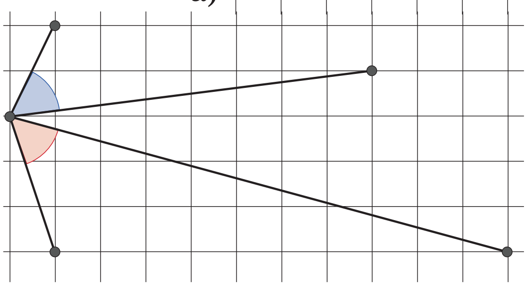
Но тогда уже синий угол – это угол между диагональю новой клетки и диагональю прямоугольника 1×2.

Так можно же кучу равных углов нарисовать. Вообще можно любой угол отложить, просто на новой сетке – и задачка готова!

Упражнение 2. Докажите равенство углов на рисунках.



а)



б)

– А вот интересно. – Полина задумалась. – Можно ли построить угол, равный данному, но только на клетчатой бумаге.

– Конечно, можно, я же только что построил кучу равных.

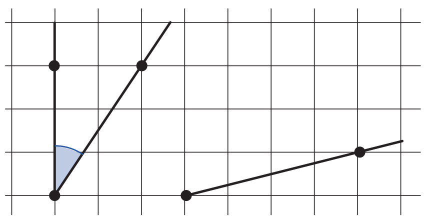
– Я имею в виду, что угол нужно отложить от заданного луча в заданную полуплоскость.

– А, это как на уроках.

– Почти, только циркуля у нас нет, а все линии проведены через какие-то два узла сетки.

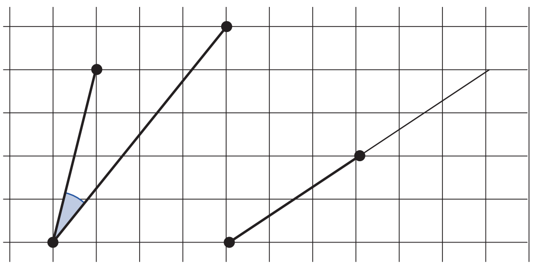
– Давай попробуем, только начнём с простого варианта – одна из сторон угла пусть идёт по линии сетки.

Задача 1. Отложите углы, равные данному, от данного луча в обе полуплоскости.



Подсказка. Удобно взять *вспомогательную* сетку так, чтобы линия новой сетки совпадала бы с линией луча.

Задача 2. Отложите угол, равный данному, от данного луча в нижнюю полуплоскость.



Подсказка. Попробуйте свести задачу к предыдущей.

На следующий день Степан вернулся к идее вспомогательных сеток.

– Получается, что если мы на новой сетке построим треугольник с такими же параметрами, то углы у него будут такими же, а все стороны увеличатся или уменьшатся в одинаковое число раз.

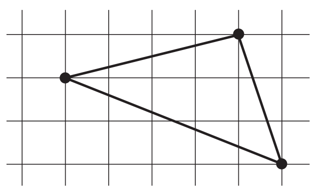
– Ровно во столько раз, во сколько изменится сторона клетки, – добавила Полина. – А как ты думаешь, во сколько раз изменится площадь фигуры?

Стёпа задумался.

– Ну если сторону квадрата увеличить, например, в 2 раза, то его площадь увеличится в 4 раза. Наверное, если увеличить сторону в n раз, то площадь увеличится в n^2 раз. По крайней мере для квадратов это верно.

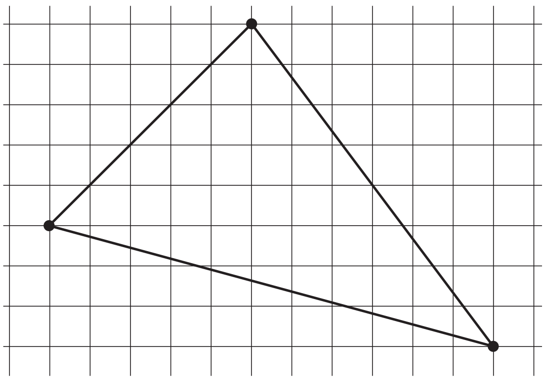
– Действительно, так. Если говорить не очень строго, то это следует из того, что любую фигурку можно почти полностью разбить на пиксели – очень маленькие квадратики.

Задача 3. Постройте треугольник, подобный данному, с вершинами в узлах сетки, но площадью а) в 2 раза больше, б) в 5 раз больше, в) в 10 раз больше.



Подсказка. Какую нужно выбрать вспомогательную сетку, чтобы площадь увеличилась в нужное число раз?

Задача 4. Постройте треугольник, подобный данному, с вершинами в узлах сетки, но площадью а) в 1,3 раза больше; б) в 1,7 раз больше; в) в 2 раза меньше.



Подсказка. Кажется, что, когда строили этот треугольник, воспользовались какой-то другой сеткой, а потом её стёрли. Попробуйте восстановить эту сетку.

Задача 5. (*«Квантик» № 1, 2021, «Наш конкурс», задача 24*). Нарисуйте на клетчатой бумаге прямоугольный треугольник с целыми сторонами так, чтобы его вершины лежали в узлах сетки, но ни одна из его сторон не проходила по линиям сетки.

Подсказка. Вспомните про египетский треугольник, причём два раза: один раз, когда будете строить вспомогательную сетку, а второй раз – когда будете строить искомый треугольник.

Задача 6. (*М. Евдокимов, ММО 2015, 10 класс*). Клетки бесконечного клетчатого листа бумаги раскрасили в чёрный и белый цвета в шахматном порядке. Пусть X – треугольник площади S с вершинами в узлах сетки. Покажите, что есть такой подобный X треугольник с вершинами в узлах сетки, что площадь его белой части равна площади чёрной части и равна S.

Определение. Если площадь клетки вспомогательной сетки равна a, назовём такую сетку *a-сеткой*.

Упражнение 3. Постройте на клетчатой бумаге 0,5-сетку; 0,2-сетку.

Задача 7. Пусть на клетчатой бумаге можно построить a-сетку и b-сетку. Докажите, что в этом случае на клетчатой бумаге можно построить также ab-сетку и a/b-сетку.

Ответы в следующем номере

Художник Екатерина Ладатко

выпуск 36 2/3 ПРАВ/ДЫ

Сергей Дориченко

КРЫЛОВ, ВИТТЕ, ЦИЦЕРОН

Две из этих историй известны, а одна полностью придумана. Надо догадаться, какая именно. Вычислить её можно по какой-нибудь нелепости, несуразности, спрятанной в тексте. Попробуйте!

КРЫЛОВ

Морской министр Воеводский, мало подходивший к своей должности, как-то переслал председателю Морского технического комитета, будущему академику Алексею Николаевичу Крылову (1863–1945), вздорную анонимную жалобу на этот комитет, требуя «рассмотреть и доложить». Разозлившийся Крылов быстро отыскал в многотомном Своде законов Российской империи две статьи. Одна указывала не заниматься пустыми делами, проистекающими только от кляузы. В другой говорилось, что получивший безымянное письмо отдаёт его в местную полицию, чтобы та нашла сочинителя, а если не отыщет, сочинитель объявляется бесчестным, письмо же предаётся сожжению через палача.

Так Крылов и ответил министру. С тех пор анонимки Крылову не пересылали. Только друзья изредка спрашивали его: «А ты правда писал министру, чтобы по поводу анонимных доносов он обращался не к тебе, а к санкт-петербургскому палачу»?

ВИТТЕ

Председатель Комитета министров Сергей Юльевич Витте (1849 – 1915) летом 1905 года приехал в Портсмут (США) заключать мир с японцами. Всё жильё уже было занято, и главного уполномоченного от русского императора поселили в двух малюсеньких комнатах. Рабочий кабинет был и вовсе почти стеклянным и весь просматривался даже с дороги.

Ещё больше Витте удивился тому, что большинство официантов в гостинице были... студентами – летом на эту работу был спрос и платили по тем временам хорошо (до 100 долларов в месяц, то есть около 200 р. на всём готовом). Студенты прислуживали за завтраком, а после уборки столов переодевались и становились отдыхающими: ухаживали за барышнями, гуляли в парках, играли... но к обеду снова превращались в официантов, нисколько этого не смущаясь.

В России, пишет Витте, ничего подобного быть не может – хоть там студенты и голодают, живя на 10–20 р. в месяц, никто не пойдёт служить, как лакей, даже в самый лучший ресторан.

Впрочем, всё это не повлияло на дипломатические способности Витте, и мир был заключён.

ЦИЦЕРОН

В конце жизни политик и оратор Марк Туллий Цицерон (106–43 г. до н. э.), преследуемый наёмниками, пытался сбежать в Грецию. Утром на его виллу влетел почтовый голубь с запиской на клочке папируса: «Подплываем к условленному месту. Враги коварны, не медли». Цицерон быстро покинул убежище. Вскоре убийцы вломились в опустевший дом, но нашли злосчастную записку у клетки с тем самым голубем. Не зная точно, куда ушёл Цицерон, преследователи пустились на хитрость, отправив птицу обратно с ответом: «Они уже ломают двери, отплывайте без меня». Голубь, летящий по прямой со скоростью 60 км/ч, вернулся на корабль, легко опередив Цицерона, пробиравшегося к морю крутыми тропинками. Когда беглец появился на берегу, корабль был уже далеко. Тут Цицерон, твёрдо веривший, что друзья никогда не предают, и произнёс свою знаменитую фразу: «Исключение подтверждает правило».

Художник Капыч

БЕНДЖАМИН ТОМПСОН, ГРАФ РУМФОРД

Марина Молчанова

Бенджамин Томпсон, граф Румфорд (Benjamin Thompson, Count Rumford) 1753–1814, портрет работы Томаса Гейнсборо

Дом, где родился Бенджамин Томпсон. Фото: Daderot, Википедия.

Когда в 1814 году этот человек умер в парижском предместье Отёй, французский естествоиспытатель Жорж Кювье сказал в надгробном слове: «Он оказал людям множество услуг, но не любил их и был о них невысокого мнения». Куда жёстче в XX веке написал фантаст и историк науки Айзек Азимов: «Он служил любому правительству, готовому платить, и попадал из беды в беду, потому что брал взятки, продавал секреты и вообще проявил себя безнравственным и бесчестным человеком».

Всё так. Шпион, карьерист, интриган. И в то же время надпись на мемориале Румфорда в Мюнхене гласит: «Иди, прохожий, и стремись сравниться с ним по величию духа и деяний».

Фраза о величии духа пусть останется на совести её автора. Но Бенджамин Томпсон, он же граф Румфорд, был обладателем исключительно живого и изобретательного ума. Вещи, которые он придумал, изменили к лучшему жизнь тысяч людей. А его наблюдения и эксперименты сыграли важнейшую роль в развитии физики.

* * *

Жизнь Бенджамина Томпсона могла бы стать сюжетом для приключенческого романа. Упомянем лишь об основных вехах. Он родился в городке Уоберн (ныне – штат Массачусетс) в семье фермера, получил кое-какое образование и очень рано стал интересоваться наукой. В 19 лет он женился на вдове, которая была намного старше его, но имела деньги и знакомства, полезные для его карьеры. Томпсон стал майором местного ополчения, но вскоре американская война за независимость (1775–1783) изменила его судьбу: он остался лояльным Британии и, как выяснилось, передавал британцам секреты американцев. Поняв, что ему грозит опасность, он бежал в Лондон, без сожалений покинув жену и новорождённую дочь. Через какое-то время (возникли подозрения, что в Лондоне он шпионит на французов) снова поехал в Америку – уже как британский офицер и вербовщик солдат. Его подчинённые оставили по себе недобрую память – так, на Лонг-Айленде они разрушили церковь и кладбище, чтобы построить форт. Как бы то ни было, война кончилась поражением Англии, и Томпсон вернулся в Лондон.

Следующая важная страница его жизни связана с Баварией. При поддержке британского правительства Томпсон смог укрепиться при дворе в Мюнхене и сделал блестящую карьеру – прослужил там одиннадцать лет и фактически стал вторым человеком в государстве. Он полностью реорганизовал местную армию, от военной формы до быта солдат. Что ещё важнее – он провёл то, что сейчас мы бы назвали социальными реформами: все нищие и бродяги Мюнхена были собраны в работные дома со строгим распорядком дня, где их заставляли работать, но кормили и даже давали детям какое-никакое образование. Томпсон вообще считал, что «простой народ» не способен устроить свою жизнь самостоятельно: им надо сурово, но разумно управлять. «Дабы сделать порочных и обездоленных счастливыми, надо, по общему разумению, сделать их сначала добродетельными, но отчего бы не переменить порядок? Отчего бы не сделать их сначала счастливыми, а потом добродетельными?»

В Мюнхене сохранился Английский сад – огромный парк, основанный Томпсоном в 1789 году. А в 1791 году нашему герою за особые заслуги был пожалован титул графа Священной Римской империи (в ту пору в Европе было такое надгосударственное образование), и именно тогда он стал Румфордом – в честь старого названия городка, где когда-то, уже почти в прошлой жизни, состоялась его женитьба. Ну и, конечно, параллельно со своей службой в Баварии он немножко шпионил на Англию.

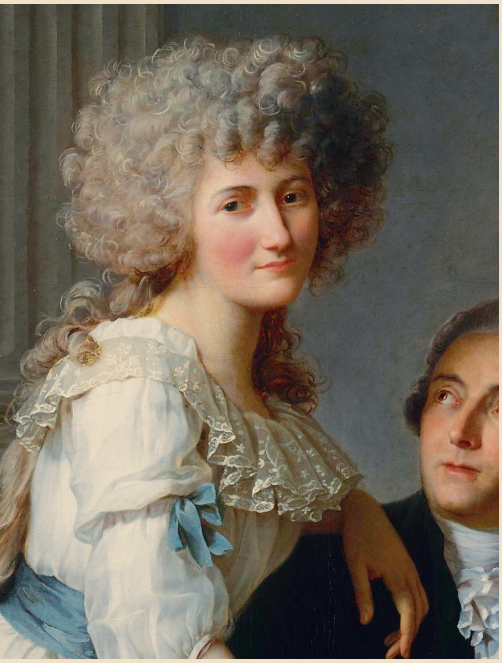
После Баварии Румфорд ненадолго вернулся в Лондон. Там он основал Королевский институт (это до сих пор одно из главных научных учрежде-

Английский сад в Мюнхене

Садовый архитектор Шкелль представляет свои планы Английского сада курфюрсту Карлу Теодору и графу Румфорду

Медаль Румфорда

БЕНДЖАМИН ТОМПСОН, ГРАФ РУМФОРД



Мадам Лавуазье, фрагмент картины Ж.-Л. Давида

Камин Румфорда

ний в Англии, одних нобелевских лауреатов полтора десятка!) и финансировал награждение лучших исследователей тепла и света – первым награждённым, как легко догадаться, был он сам, но традиция продолжается и до сих пор, медаль Румфорда присуждается раз в два года и считается очень престижной среди физиков.

Через некоторое время, рассорившись со своим лондонским окружением, Томпсон-Румфорд навсегда уехал жить во Францию. Его первая жена уже давно умерла, и в 1804 году он женился на Анне-Марии Лавуазье – вдове гениального химика, погибшего на гильотине во время Французской революции. Но брак оказался неудачным, и через три года, во время тягостного развода, Румфорд произнёс: «Как же повезло Лавуазье с гильотиной!». После этого он продолжал жить в парижском предместье до своей скоропостижной смерти в 1814 г.

Казалось бы, как в столь насыщенную жизнь можно было втиснуть ещё и науку, и инженерные изыскания? Но, однако, с юных лет и до конца жизни Бенджамин Томпсон, впоследствии Румфорд, что-то изобретал и придумывал – и почти всегда удачно.

Так, он изобрёл усовершенствованную конструкцию камина. Косые внутренние стенки вместо прямых, специальный уступ в дымовой трубе – всё это позволило повысить эффективность, улучшить тягу и избавить жилища от дыма. Конструкция и сейчас используется – интернет полон рекламы «каминов Румфорда». А для фабрик и заводов он тоже существенно улучшил конструкцию печи – для обжига известняка.

Этого мало. Румфорд изобрёл «бабушку» всем нам знакомой кухонной плиты – с несколькими конфорками и с возможностью регулировать нагрев. Он придумал конструкции пароварки и кофеварки-перколятора – насколько он презирал чай и алкоголь, настолько восхищался кофе. Ему принадлежит идея медленного приготовления пищи при сравнительно низкой температуре – сейчас она широко используется в кулинарии как часть метода, который называется «сувид».

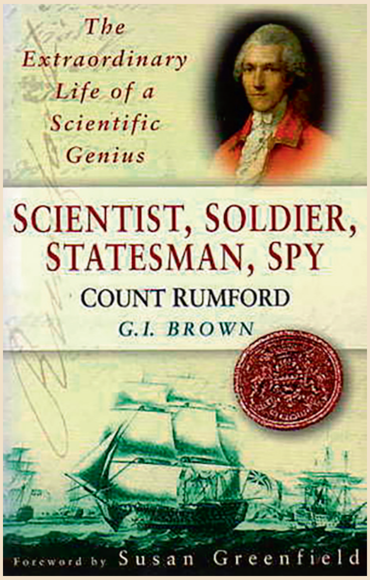
Громкую, но двусмысленную славу приобрёл «суп Румфорда». Этот рецепт был разработан нашим героем из соображений «чтоб сытно, но как можно дешевле» – ведь супчик предназначался для обитателей работных домов. Перловка, горох, уксус или прокисшее пиво, иногда копчёная селёдка, иногда немного мяса, белые сухари, чуть позже ещё и картошка... С одной стороны, вроде бы нехорошо экономить гроши на бедняках, и Румфорду за это досталось от позднейших авторов, включая Маркса. С другой – густое варево действительно оказалось очень питательным, и до середины XX века оно использовалось в самых разных странах для кормления бедноты и солдат. Румфорд вообще приложил много усилий к популяризации в Европе сытной и дешёвой пищи: картофеля, макарон, кукурузной каши. И многие даже считают его основателем диетологии – науки о питании.

Румфорду приписывается и множество других идей: от центрального отопления до термобелья. А также изучение взрывной силы пороха, исследования по измерению силы света, конструирование разнообразных физических приборов... Но главный след, который он оставил в науке, связан с попыткой разобраться, что же такое теплота.

* * *

Как можно объяснить свойства теплоты? Почему, например, при соприкосновении горячего и холодного предмета горячий охлаждается, а холодный нагревается? Почему одни вещества нагреваются легче, чем другие, – скажем, чтобы нагреть воду на один градус, нужно больше тепла, чем чтобы нагреть такую же массу ртути?

Ближе к концу XVIII века господствующей была теория *теплорода*. Одним из её главных сторонников был великий Антуан Лоран Лавуазье, как раз недавно расправившийся с устаревшей теорией



Биография Румфорда

Мемориал Румфорда
в Английском саду.
Фото: N p holmes, Википедия.

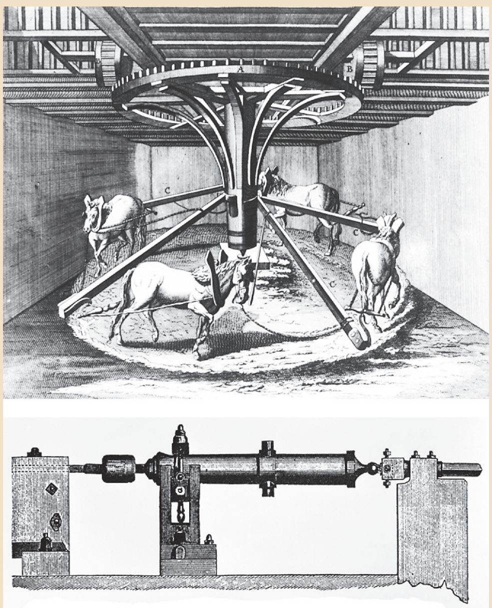
Карикатура.
Румфорд и его коллега, великий английский химик и физик Гемфри Дэви, демонстрируют действие веселящего газа, как раз недавно открытое Дэви

флогистона[1]. Будем считать, что теплота связана с особой легчайшей жидкостью – теплородом, который заполняет промежутки между частицами вещества. Чем больше теплорода содержится в веществе, тем оно горячée. У теплорода разное сродство к разным веществам, поэтому одни нагреть проще, а другие труднее. Внутри теплорода существует отталкивание, поэтому «жидкость» перетекает оттуда, где её больше, туда, где её меньше. Количество теплорода в мире постоянно, он может только передаваться от одних предметов к другим.

Эта элегантная теория как будто бы объясняла всё – но была не единственной. Одновременно существовала и *кинетическая* (механическая) теория теплоты: согласно ей, теплота связана с движением частиц вещества. Но как сделать выбор между двумя теориями? И тут пригодилась наблюдательность Румфорда.

Во время своей службы в Баварии он наблюдал за высверливанием пушечных стволов в мюнхенском арсенале. Пушка и сверло сильно нагревались, их приходилось охлаждать водой. Само по себе нагревание предметов при трении ни для кого не новость, это явление было известно ещё первобытным людям. Но поразительным было количество выделяющейся теплоты: ведь если её источником является теплород, а его количество в веществе ограничено, должен же он когда-нибудь закончиться?

Опыт Румфорда состоял в следующем. Ствол пушки и тупое сверло были заключены в водонепроницаемый чехол и погружены в чан с водой. Сверло приводили во вращение, и... через два с половиной часа вода нагревалась до кипения. И пока продолжалось вращение сверла, вода кипела – без всякого огня!



Работа и тепло

[1] О флогистоне см. «Квантик», 2020, № 3, с. 20.

АВАНТЮРИСТ И БЛАГОДЕТЕЛЬ

В своём сообщении Королевскому обществу в Лондоне (1798 г.) Румфорд говорил: «Источник тепла, возникающего при трении в этих опытах, представляется, по-видимому, неисчерпаемым. Было бы излишним добавлять, что то, что может непрерывно поставляться в неограниченном количестве изолированным телом или системой тел, не может быть материальной субстанцией». А значит, приходится признать, что источник теплоты – в движении частиц.

Но, может быть, выделение теплорода связано с тем, что железо, превращаясь из цельного куска в стружку, как-то меняет свою природу? Значит, нужно сравнить свойства стружки и железа как такового. Они оказались одинаковыми. Ура!

Да, конечно, защитники теории теплорода могли предъявить (и предъявляли) убедительные возражения. Например, что при разрушении твёрдого вещества и его превращении в порошок возможно частичное высвобождение связанного с ним теплорода – ведь Румфорд строго не доказал, что это не так. И даже то, что масса стружек равна массе высверленного железа, тоже ничего не доказывает – теплород вполне может быть невесомым.

И, несмотря на заявление Румфорда «Я доживу до того, что буду иметь удовольствие видеть теплород, похороненный вместе с флогистоном в одном гробу», окончательная гибель теории теплорода произошла нескоро. Но всё же сдвиг в сознании многих учёных произошёл, и теплород начал сходить со сцены. Через много лет опыт Румфорда вдохновил Джеймса Прескотта Джоуля (1818–1889) на количественные эксперименты. Удалось доказать, что благодаря механической работе выделяется количество теплоты, в точности эквивалентное этой работе. Постепенно стало ясно, что теплота – просто одна из многочисленных форм энергии, и к середине XIX века это было учтено в формулировке закона сохранения энергии. А этот закон – один из тех столпов, на которых и сейчас стоит физика.

Джеймс Прескотт Джоуль

Памятник Румфорду в Мюнхене

XXVI турнир математических боёв имени А.П. Савина

Избранные задачи

Материал подготовили
Александр Блинков, Александр Грибалко,
Алексей Заславский, Инесса Раскина,
Сергей Токарев, Александр Хачатурян,
Игорь Эльман

Ежегодно в конце июня школьники из многих городов съезжаются на летний турнир имени А. П. Савина. Приводим избранные задачи турнира 2021 года. После номера задачи указаны её автор и классы, в которых она предлагалась.

1. (*О. Медведь*, 5) Барон Мюнхгаузен утверждает, что расставил цифры 0, 1 и 2 в клетках таблицы 7×7 так, что число 2021 можно прочесть (по горизонтали, вертикали или диагонали, причём в любом направлении) более чем 30 способами. Могут ли слова барона быть правдой?

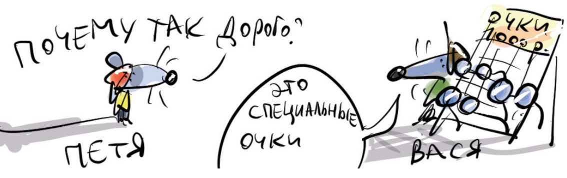
2. (*А. Шаповалов*, 6) В 20 пакетах лежит по 26 слив, масса слив в каждом пакете не больше 1 кг. Докажите, что можно переложить сливы в 26 пакетов по 20 слив так, чтобы масса слив в каждом пакете была меньше 1 кг.

3. (*А. Грибалко*, 5–6) В каждом раунде игры «Что? Где? Когда?» разыгрывается 1 очко, которое достаётся либо знатокам, либо телезрителям. Игра идёт до 6 очков. Олег захотел посмотреть игру в записи, но случайно увидел в комментариях финальный счёт. Всё же он не успел прочитать, кто победил, поэтому начал просмотр. По окончании восьмого раунда Олег сказал: «До этого было интересно смотреть: я не знал, чем закончится каждый раунд, а вот дальше я знаю исходы всех оставшихся раундов». С каким счётом завершилась игра?

4. (*С. Токарев*, 6–7) Буквами В, Д, Е, И, Р, С, Т, Ь, Я зашифрованы разные цифры так, что число, зашифрованное словом ТРИДЕВЯТЬ, делится на 27, а число, зашифрованное словом ТРИДЕСЯТЬ, делится на 30. Какую цифру обозначает буква С, если буква В обозначает тройку?

5. (*А. Шаповалов*, 5–6) Имеется 100 карточек с номерами 1, 2, ..., 100. Номера напечатаны так, что для Пети они невидимы, а для Васи видимы сквозь специальные очки. За одну попытку Петя разбивает карточки на пары, а Вася указывает все пары с нечётной суммой номеров. За какое наименьшее число попыток Петя сможет наверняка разложить все карточки на пары с нечётной суммой?

6. (*А. Грибалко*, 5–7) На острове живут 100 аборигенов разного возраста. Каждый из них всегда го-



ворит правду или всегда лжёт. Однажды все жители острова встали в круг, и каждый сказал, что оба его соседа старше него. Ночью нескольких аборигенов съели, а на следующий день оставшиеся снова встали в круг, и каждый заявил, что оба его соседа младше него. Какое наименьшее число аборигенов могло быть съедено?

7. (*А. Грибалко*, 5) У Коли есть шесть карточек, на которых написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Он разложил их на столе в ряд числами вниз. Саша может указать любые два набора карточек и спросить у Коли, равны ли произведения чисел на карточках в этих наборах. Как ему за два вопроса узнать, лежат ли карточки в порядке возрастания написанных на них чисел?

8. (*М. Волчкевич*, 7–8) Федя согнул листок бумаги по прямой линии, затем полученную фигуру согнул по другой прямой ещё один раз, а потом проткнул её иголкой. Когда он развернул листок обратно, у него получилось четыре дырки. Докажите, что через все эти дырки Федя может провести либо одну прямую, либо одну окружность.

9. (*А. Шаповалов*, 6–8) В клетки таблицы 6×8 нужно вписать числа 1, 2, ..., 48. Каких способов больше: тех, где в крайних клетках ровно семь простых чисел, или тех, где простых чисел на краю ровно восемь?

10. (*А. Шаповалов*, 6–8) Суду предъявлено 100 одинаковых с виду монет, среди которых есть фальшивые. Суд знает, что все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые – тоже одинаково, но легче настоящих. Адвокат знает, какие монеты на самом деле фальшивые. Он отвечает на вопросы суда и доказывает свои ответы, проводя взвешивания на чашечных весах без гирь. Однако адвокат связан обязательством не разглашать ни про какую монету, фальшивая она или настоящая: он не имеет права делать взвешивания, из которых такую информацию можно логически вывести.

XXVI турнир математических боёв имени А.П. Савина

Избранные задачи

а) Суду стало известно, что число фальшивых монет равно 22, 66 или 88. Как адвокату доказать, что их 66, не нарушая обязательств?

б) Суду стало известно, что число фальшивых монет равно 20 или 80. Как адвокату доказать, что их 20, не нарушая обязательств?

11. (*М. Евдокимов*, 5–8) На каждой грани куба красными чернилами провели одну или обе диагонали. Оказалось, что при этом не образовалось ни одного треугольника с красными сторонами. Какое наибольшее число диагоналей могло быть проведено?

12. (*Д. Шноль*, 5–8) Петя написал на доске 100 раз в строку номер своей квартиры через пробел. Маша должна поставить между каждыми двумя числами знаки арифметических действий, а там, где захочет, – скобки. Она утверждает, ещё не зная номера Петиной квартиры, что сможет получить в ответе любое натуральное число от 1 до 2021. Права ли она?

13. (*А. Пешнин*, 7–8) В прямоугольнике $ABCD$, отличном от квадрата, на биссектрису угла A опущен перпендикуляр CH. Докажите, что BH больше четверти периметра прямоугольника.

14. (*А. Доледенок*, 7–8) Точки P и Q лежат на диагонали AC квадрата $ABCD$. Точки X и Y на сторонах CD и AD соответственно таковы, что $\angle BPX = \angle BQY = 90°$. Точка Z – середина отрезка XY. Найдите угол PZQ.

15. (*А. Грибалко*, 7–8) У Знайки есть бумажный равносторонний треугольник, а у Незнайки – квадрат, причём длины сторон их фигур равны. Знайка вырезает из своей фигуры одинаковые равносторонние треугольники, а Незнайка из своей – квадраты с такой же стороной (оба делают разрезы параллельно сторонам своей фигуры). Незнайка утверждает, что всегда сможет вырезать столько же квадратов, сколько Знайка вырежет треугольников. Прав ли он?

Игры и Головоломки

Владимир Красноухов

АНТИСЛАЙД с КИРПИЧАМИ

При возведении архитектурных сооружений строительные кирпичи подаются мастерам наверх в специальных поддонах. Допустим, профиль поддона таков, как на рисунке 1, а профили кирпичей – как на рисунках 2 («большой кирпич») и 3 («малый кирпич»).

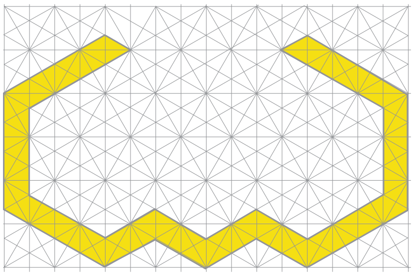


Рис. 1

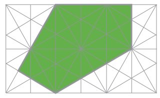


Рис. 2

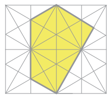


Рис. 3

Пусть в нашем распоряжении имеются некоторое количество больших (Б) и малых (М) кирпичей. Поместим последовательно в поддон 8 малых и 2 больших кирпича (8М + 2Б), рис. 4. В другом случае в поддон поместим 6 малых и 2 больших кирпича (6М + 2Б), рис. 5.

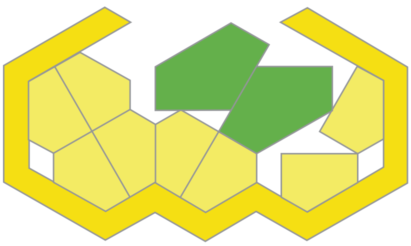


Рис. 4 8М+2Б

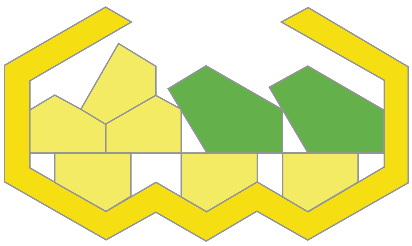


Рис. 5 6М+2Б

Задачи. Переложите кирпичи на рисунках 4 и 5 так, чтобы они не высыпались из поддонов, даже если произойдёт землетрясение и поддоны перевернутся вверх тормашками. Короче, разместите кирпичи в поддонах в режиме антислайд: когда ни один кирпич не может быть сдвинут ни в каком направлении (*anti* – против, *slide* – скользить).

Автор этой головоломки В. Красноухов утверждает, что решения обеих задач, возможно, не единственные, и, чем меньше элементов, тем труднее найти эти решения – попросту строительного материала может не хватить. Подсказка – решения будут красивыми.

Желаем успехов!

Ответы в следующем номере

Художник Алексей Вайнер

НАШ КОНКУРС, XI тур
(«Квантик» № 7, 2021)

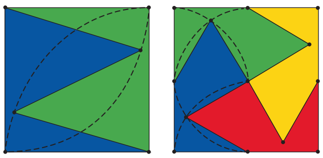
51. *Можно ли неверное равенство* $1+2+3+$ $+\ldots+100=1000$ *сделать верным, а) удалив некоторые из* 100 *его слагаемых; б) заменив некоторые из* 99 *плюсов на минусы?*

Ответы: а) да; б) да. В пункте а) можно удалить 35 и все числа с 46 до 100 (складываем подряд 1, 2, 3, ... пока не получим число, большее 1000, и удаляем число, равное «избытку»). В пункте б) можно заменить плюсы на минусы перед 56 и всеми числами от 79 до 100.

52. *В классе поровну мальчиков и девочек. Каждый мальчик дружит хотя бы с одной девочкой. При этом, каких бы двух мальчиков мы ни взяли, у них будет разное количество подруг. Докажите, что всегда удастся разбить класс на дружащие пары «мальчик-девочка».*

Расположим мальчиков по возрастанию числа подруг. Тогда у первого – хотя бы одна подруга, у второго – хотя бы две, и так далее. Будем выбирать мальчикам пары в том же порядке. Для каждого мальчика число его подруг будет больше, чем число занятых девочек. Значит, для каждого найдётся свободная подруга.

53. *Можно ли квадрат разрезать на несколько равносторонних а) пятиугольников; б) шестиугольников? (Многоугольник называется равносторонним, если все его стороны равны. Его углы не обязательно равны, и он даже может быть невыпуклым.)*

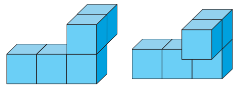


Ответ: а) да; б) да (см. рисунки справа).

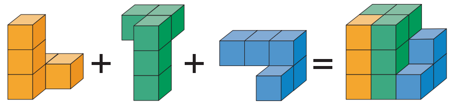
54. *Квантик выписал десятизначное натуральное число, содержащее все цифры от* 0 *до* 9, *в котором любые две соседние цифры различаются хотя бы на* 5. *а) Какие у этого числа могут быть первая и последняя цифры? Приведите все варианты и докажите, что других нет. б) Приведите пример такого числа.*

Ответ: а) 4 и 5, либо наоборот; б) 5061728394. Рядом с цифрой 4 может стоять только 9, а с цифрой 5 – только 0. Но у каждой цифры, кроме крайних, есть две соседних. Значит, цифры 4 и 5 – крайние. Поставив их на концы числа, остальные цифры восстанавливаем однозначно.

55. *Назовём «змейкой» фигуру, склеенную из пяти одинаковых кубиков так, как показано на рисунке (змейка может «смотреть» направо или налево). Можно ли из некоторого количества таких змеек сложить куб без дырок?*



Ответ: можно. Из трёх копий составляем половинку параллелепипеда $5\times3\times2$ (см. рисунок).



Из двух половинок складываем параллелепипед, а из нескольких параллелепипедов – куб.

РУССКИЙ МЕДВЕЖОНОК. Избранные задачи 2020 года («Квантик» № 8, 2021)

1. Поскольку в условии речь идёт о значении некоторого глагола, попробуем подобрать глаголы, однокоренные предложенным существительным: *перец – перчить, наперчить, поперчить*; *мука* – нет глаголов (существует глагол *мучить*, но он является однокоренным не слову *мукá*, а его омографу *мýка*); *горох – огорошить*; *сахар – сахарить, насахарить, подсахарить, пересахарить, засахариться*; *соль – солить, засолить, посолить, насолить, подсолить, пересолить*. Только один из этих глаголов имеет значение «причинить неприятность, навредить, досадить», то есть значение, близкое к «навести порчу», – это глагол *насолить*.

Академик В. В. Виноградов по этому поводу писал: «Вероятнее всего это переносное значение глагола *насолить* возникло на основе некогда существовавших представлений о колдовстве. По суеверным представлениям прошлого, болезнь и порчу могло вызывать разбрасывание с наговором различных предметов. Лица, переходящие через заколдованные предметы или прикасавшиеся к ним, подвергались „порче“; с целью нанести вред и употреблялась часто „наговорная“ соль». Таким образом, **ответ: (Д)**.

2. Если поменять букву *я* на букву *к*, получится *Мы отсекли всё ненужное*, и смысл фразы останется почти тем же. **Ответ:** (В).

3. Выступая с совместными статьями, Николай Фёдорович Анненский (родной брат знаменитого поэта Иннокентия Анненского) и Владимир Галактионович Короленко использовали коллективный псевдоним «О. Б. А.» (т. е. *оба*), самим своим звучанием сообщавший читателям, что авторов двое. **Ответ:** (Б).

4. Из условия задачи видно, что *ahage* означает 2, а *tokale* – 1. Чтобы образовать числительное, набирается наибольшее возможное число двоек, а затем прибавляется единица, если число нечётное. Таким образом, $7 = 2 + 2 + 2 + 1 =$ ahage ahage ahage tokale. **Ответ:** (Г).

ХИТРЫЙ МОСТ («Квантик» № 8, 2021)

Подобные мосты строили на пути буксировки барж. Если лошади, буксирующей баржу, надо перейти по обычному мосту, её нужно отвязывать от баржи, а после перехода по мосту привязывать снова. А с мостом на картинке это не требуется. Вот фотография одного из таких мостов.

ТЕНЬ РАСЧЁСКИ

Один край тени заметно дальше от расчёски, чем другой, а чем дальше тень от объекта, тем она более размытая (потому что Солнце — не точка и светит не строго в одном направлении). Поэтому к середине тени зубцов сливаются в единое полотно. А ещё дальше тени соседних зубцов начинают налезать друг на друга. В результате в промежутках между зубцами тень оказывается гуще, чем за самими зубцами, и мы снова видим чёткие полосы.

КРЫЛОВ, ВИТТЕ, ЦИЦЕРОН

Выдумана история о Цицероне. Почтовый голубь не летает обратно, тем более на плывущий корабль – он из любого места возвращается туда, где его вырастили (в нашем случае это вилла Цицерона). На самом деле никакого голубя не было. Цицерон, объявленный вне закона, уже плыл на корабле, но никак не мог решить, куда направиться. Он высадился отдохнуть в одном из своих имений, потом снова отправился на корабль, а в это время в дом вломились убийцы. Все в доме твердили, что не знают, где Цицерон, но всё же нашёлся один предатель, и Цицерона настигли по пути к морю.

Фраза «исключение подтверждает правило» – искажение фразы «exceptio firmat regulam in casibus non exceptis», «исключение подтверждает правило в неисключённых случаях». Смысл её такой: раз имеются исключения, то имеется и правило, из которого они сделаны, и правило выполнено всегда, кроме исключений. Это положение применялось в средневековом праве. Сама мысль встречается в речи Цицерона на судебном процессе в защиту Луция Корнелия Бальба, обвинявшегося в незаконном получении прав римского гражданина (по рождению тот был гадитанцем). Одним из аргументов Цицерона был такой. У римлян существуют договоры с некоторыми народами, в которых сделана оговорка, что приём лиц из этих народов в число римских граждан исключён. Поскольку в договоре с гадитанцами такой оговорки нет, это безусловно разрешено.

XXVI ТУРНИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ БОЁВ им. А. П. САВИНА

Избранные задачи

1. Ответ: могут. На рисунке показан пример расстановки цифр, в котором число 2021 можно прочесть 34 способами.

2	1	2	0	2	1	2
0	1	2	0	2	1	0
2	1	2	0	2	1	2
1	1	2	0	2	1	1
2	1	2	0	2	1	2
0	1	2	0	2	1	0
2	1	2	0	2	1	2

2. Выберем из каждого пакета самую лёгкую сливу и сложим их в 21-й пакет. Так как масса каждой выбранной сливы не превышает $\frac{1}{26}$ кг, их общая масса не больше $\frac{20}{26} < 1$ кг. При этом масса каждого исходного пакета стала меньше 1 кг, и в них осталось по 25 слив. Повторим операцию: переложим самую лёгкую сливу из каждого исходного пакета в 22-й пакет, общая масса слив там будет меньше $\frac{20}{25}$ кг. Продолжая такую операцию, доведём число пакетов до 26.

3. Ответ: 6 : 4. Так как игра идёт до 6 очков и ещё не завершилась, возможны два исхода восьмого раунда: счёт 4 : 4 или 5 : 3. Из первого узнать исход следующего раунда нельзя, остаётся вариант 5 : 3. Тогда возможны три финальных счёта: 6 : 3, 6 : 4 или 6 : 5.

Перед счётом 5 : 3 счёт был либо 5 : 2, либо 4 : 3. Если бы игра завершилась со счётом 6 : 3, в каждом из этих двух случаев можно было бы однозначно определить исходы оставшихся раундов, и Олег знал бы их раньше восьмого раунда.

Если бы игра завершилась со счётом 6 : 5, то перед последним раундом был бы счёт 5 : 5, из которого не ясно, кто победит.

А вот знание финального счёта 6 : 4 позволяет при счёте 5 : 3 определить исходы последних двух раундов. При этом если после седьмого раунда был счёт 4 : 3, ситуация была неопределённой: дальше могло быть как 4 : 4, так и 5 : 3.

4. Ответ: 6. Так как каждая из сумм $Т + Р + И + Д + Е + В + Я + Т + Ь$ и $Т + Р + И + Д + Е + С + Я + Т + Ь$ кратна 3, то этим же свойством обладает и их разность, равная $В - С$. Значит, искомая цифра – это 0, 6 или 9. Но нуль, как легко видеть, зашифрован мягким знаком. Покажем, что буквой С зашифрована не девятка. Обозначив через Х не зашифрованную ещё цифру, воспользуемся тем, что сумма $Т + Р + И + Д + Е + В + Я + Т + Ь = 45 + Т - С - Х$ делится на 9. Равенство С = 9 означало бы, что Т – Х кратно 9, что невозможно. Остаётся лишь один вариант: С = 6.

5. Ответ: за три попытки.

Оценка. При первой попытке может оказаться, что во всех парах суммы чётны. Тогда Петя будет знать только, что в каждой паре номера одной чётности. Объединяя при второй попытке карточки из разных пар, он не сможет гарантировать, что номера у них будут разной чётности.

Пример. Петя выкладывает карточки по кругу и мысленно отмечает половину из них через одну. Для первой проверки он объединяет в пару каждую отмеченную карточку с соседней справа, а для второй – с соседней слева. Так про каждую пару соседних карточек Петя узнает, одной чётности их номера или нет. Тогда он будет знать это и про каждую пару карточек. Так как карточек с нечётными и чётными номерами поровну, при третьей попытке Петя сможет разбить их на пары с номерами разной чётности.

6. Ответ: 3 аборигена.

Оценка. Два самых старых аборигена – лжецы, ведь никто из них не младше обоих своих соседей. Значит, во второй день самый старый абориген не мог сказать, что оба его соседа младше него, поэтому его съели. По аналогичным соображениям съели и второго по старшинству.

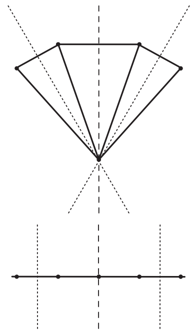
А вот самый молодой абориген младше обоих своих соседей, поэтому он всегда говорит правду. Во второй раз он снова сказал бы про своих соседей, что они старше него. Значит, и его съели. Итого съели не менее трёх аборигенов.

Пример. Пронумеруем аборигенов числами от 1 до 100 в порядке увеличения возрастов. Расставим их в таком же порядке по кругу, поменяв местами аборигенов 98 и 99. Если аборигены 1 и 98 всегда говорят правду, а все остальные – лжецы, то каждый может сказать, что оба его соседа старше него. Далее съедают аборигенов 1, 99 и 100, после чего оставшиеся встают в том же порядке, как и раньше. Тогда каждый может сказать, что оба его соседа младше него.

7. Будем далее использовать номера карточек, а не числа на них (которые Саша пока не знает). Если хоть одно из сравнений даст неравенство, Саша сразу определит, что карточки лежат не по возрастанию написанных на них чисел.

Сначала Саша сравнит наборы (1, 2, 3) и (6). Минимальное произведение трёх написанных на карточках чисел равно 6, поэтому в случае равенства Саша поймёт, что на карточках первого набора написаны числа 1, 2, 3, во втором наборе – карточка с числом 6, а на отложенных карточках – числа 4 и 5. Обозначим наборы, в которых пока не определено, в каком порядке лежат карточки: $A_1 = (1, 2, 3)$, $A_2 = (4, 5)$.

Далее Саша сравнит наборы (2, 6) и (3, 4). Равенство произведений возможно только в случае, если во второй набор из A_1 попало число 3, иначе не будет обеспечена делимость на 3. Значит, в проверке также участвуют по одному числу из A_1 и A_2, причём первое в 2 раза меньше второго, то есть это могут быть только числа 2 и 4. Тогда карточки с числами 1 и 5 из наборов A_1 и A_2 в проверке не участвовали. Так Саша однозначно определит числа на всех карточках и убедится, что они лежат по возрастанию.



8. Сгибание листа совмещает точки, симметричные относительно линии сгиба. Поэтому и сгибы, и проколы, сделанные на согнутом листе, появятся парами симметричных друг другу. На развёрнутом листке будут две линии второго сгиба, симметричные относительно линии первого сгиба. Проколов будет две пары, и в каждой паре проколы симметричны относительно «своей» линии второго сгиба. А ещё сами пары симметричны друг другу относительно линии первого сгиба.

Если сгибы не параллельны, все проколы равноудалены от точки пересечения сгибов, то есть лежат на окружности с центром в этой точке. Если сгибы параллельны, все проколы лежат на прямой, перпендикулярной линиям сгибов.

9. Ответ: поровну. Заметим, что в таблице 24 крайние клетки и столько же не крайних. Кроме того, среди чисел от 1 до 48 ровно 15 простых: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Раскрасим крайние клетки в 24 цвета (каждую клетку – в свой цвет) и так же поступим с внутренними клетками, используя тот же набор цветов. Пусть имеется расстановка чисел в таблице с семью простыми числами на краю. Поменяем местами все числа в парах одноцветных клеток. Все семь простых чисел с края уйдут внутрь, а на край из внутренних клеток попадут оставшиеся восемь простых чисел, и мы получим расстановку с восемью простыми числами на краю. Таким же образом из способа с восемью простыми числами на краю получается способ с семью простыми на краю. Значит, можно разбить указанные способы расстановки чисел на пары, поэтому их одинаковое количество.

10. а) Адвокат может разбить монеты на 25 четвёрок, в 20 из них поместить по три фальшивые монеты, в одну – две фальшивые, а в оставшиеся четыре – по одной. Для каждой четвёрки он сравнит две пары монет так, чтобы они оказались неравными. Неравновесие покажет, что в каждой четвёрке есть хоть одна настоящая монета и хотя бы одна фальшивая. Так как фальшивых монет не менее 25, то вариант «22 фальшивых» не подходит. Так как настоящих монет не менее 25, то и вариант «88 фальшивых» не подходит.

Докажем, что условие неразглашения выполнено. В лёгкой паре любая из монет может быть настоящей или фальшивой в случае, когда в четвёрке ровно одна фальшивая монета. В тяжёлой паре любая из монет может быть настоящей или фальшивой в случае, когда в четвёрке ровно одна настоящая монета.

б) Адвокат может выделить 22 группы по четыре монеты и сравнить одну из них со всеми остальными. Если эта группа окажется легче остальных, то суд будет знать, что в каждой более тяжёлой группе есть хотя бы одна настоящая монета. Следовательно, настоящих монет не менее 21, поэтому вариант «80 фальшивых» не подходит. При этом в более лёгкой группе может быть три фальшивых монеты, а в остальных – по одной или ни одной, но суд не будет знать, в каких именно группах фальшивых монет нет, а значит, не получит запрещённой информации.

11. Ответ: 8 диагоналей.

Оценка. Грани куба имеют 12 диагоналей. Если раскрасить вершины куба в шахматном порядке, то 6 диагоналей будут соединять белые вершины и 6 – чёрные. «Белые» диагонали образуют 4 треугольника, и чтобы их разрушить, нужно оставить не более четырёх таких диагоналей. То же верно и для «чёрных» диагоналей. Значит, провели не более восьми диагоналей.

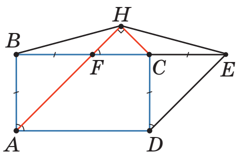
Пример. На нижней и верхней гранях проведём обе диагонали, а на боковых – по одной так, чтобы у них не было общих точек.

12. Ответ: права. Обозначим номер квартиры Пети через N. Любое число x от 1 до 9 можно получить, используя не более $x+1$ чисел N: $x=(N+N+\ldots+N):N$. Число 10 можно получить, используя девять чисел N:

$$10=((N+N):N)\cdot((N+N+N+N+N):N).$$

Представим любое число от 1 до 2021 как $\overline{abcd}=10\cdot10\cdot10\cdot a+10\cdot10\cdot b+10\cdot c+d$. Цифра a не больше 2, остальные цифры любые. Значит, опираясь на разложение, такое число можно получить, используя не более $9\cdot6+3+10\cdot3=87$ чисел N. «Лишние» числа N превращаем в 0 так: $(N-N)\cdot(N+\ldots+N)$.

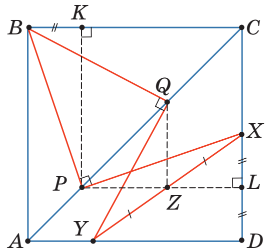
13. Пусть биссектриса угла A пересекает прямую BC в точке F. Проведём через вершину D прямую, параллельную этой биссектрисе, которая пересечёт прямую BC в точке E (см. рисунок). Поскольку $\angle CDE=\angle BAF=45°$, то $CE=CD=BA=BF$, поэтому длина отрезка BE равна полупериметру прямоугольника.



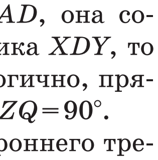
Так как $\angle CFH=45°$, то $FH=CH$ и $\angle BFH=$ $=\angle ECH$. Тогда треугольники BFH и ECH равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $BH=EH$. По неравенству треугольника $BH+$ $+EH>BE$, то есть $BH>\frac{1}{2}BE$, что и требовалось.

Замечание. Если $AB>BC$, то точка H лежит в другой полуплоскости относительно прямой BC, но рассуждения аналогичны.

14. Ответ: 90°. Опустим из точки P перпендикуляры PK и PL на стороны BC и CD соответственно. Так как $PKCL$ – квадрат, то $PK=PL$. Также $\angle BPK = 90° - \angle KPX =$ $=\angle XPL$, поэтому прямоугольные треугольники PKB и PLX равны по катету и острому углу. Значит, $LX=KB=BC-KC=CD-CL=LD$. Поскольку прямая PL параллельна AD, она содержит среднюю линию треугольника XDY, то есть проходит через точку Z. Аналогично, прямая QZ параллельна CD, откуда $\angle PZQ=90°$.



15. Ответ: не прав. Из равностороннего треугольника со стороной 7 можно вырезать десять равносторонних треугольников со стороной 2 (см. рисунок). А из квадрата со стороной 7 нельзя вырезать более девяти квадратов со стороной 2. Действительно, при любом расположении квадрата со стороной 2 площадь его пересечения с закрашенной на рисунке областью равна 1, а площадь всей закрашенной области равна 9.



наш КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Итоги прошлого конкурса будут опубликованы в 12-м номере.

А мы начинаем новый конкурс! Он пройдёт в три этапа: с сентября по декабрь, с января по апрель и с мая по август. Дипломы и призы получат не только победители за весь год, но и победители каждого этапа.

Высылайте решения задач I тура, с которыми справитесь, не позднее 5 октября в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

I ТУР

1. На склад, пол которого имеет вид прямоугольника 3×7 клеток, привезли кубический холодильник, он занимает одну клетку. Холодильник можно перекатывать через ребро, ставя на бок, но нельзя переворачивать вверх ногами. Нарисуйте пример пути, по которому можно перекатить холодильник из нижней левой клетки в правую верхнюю, чтобы и в начале, и в конце он стоял дном вниз, если изначально

а) склад пустой (рис. 1);

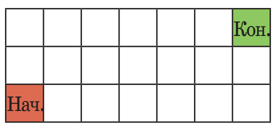


Рис. 1

б) на складе уже заняты две клетки (рис. 2).

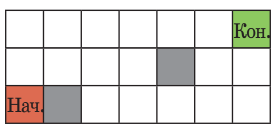


Рис. 2

Авторы: Сергей Шашков (1), Татьяна Корчемкина (2), Кирилл Банков (3), Сергей Костин (4), Александр Перепечко (5)

2. Полина, Лена и Ирина впервые пришли на кружок и решили познакомиться.

– Меня зовут Лена, – сказала одна из них.

– А меня зовут Ирина, – сказала вторая.

Третья девочка промолчала.

Известно, что Полина всегда говорит правду, Лена всегда лжёт, а Ирина иногда говорит правду, а иногда – неправду. Как на самом деле зовут каждую из девочек?

3. а) Можно ли разрезать какой-нибудь прямоугольник на несколько равнобедренных прямоугольных треугольников, среди которых нет одинаковых?

б) Можно ли так разрезать квадрат?

4. Расставьте в клетках квадрата 3×3 различные натуральные числа, в записи каждого из которых могут присутствовать лишь цифры 1 и 2, так чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце была одна и та же.

5. Есть проволочный каркас прямоугольного ящика и верёвка. Разрешается выбрать любые несколько точек на каркасе, соединить их подряд натянутой верёвкой и измерить её длину, от первой точки до последней. Предложите способ за два таких измерения найти суммарную площадь всех шести граней ящика.

Художник Николай Крутиков

КАК ПЕРЕКАЧАТЬ ГАЗ?

Имеется баллон объёмом 100 литров с газом под давлением 10 атмосфер и два пустых баллона по 50 литров. Как с помощью простых домашних средств (без помощи насосов, сверхнизких температур и т. п.) перекачать газ из первого баллона в два других, почти не потеряв давления?

ISSN 2227-7986 21009
9 772227 798213

Автор Николай Константинов
Художник Алексей Вайнер