№ 3 | март 2022

ЖУРНАЛ КВАНТИК ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

№ 3
март 2022

КАК РАБОТАЕТ ЗВЕЗДА

РАЗРЕЗАНИЯ КРУГА НА РАВНЫЕ ЧАСТИ

ПОХИЩЕНИЕ В АДВОКАТСКОЙ КОНТОРЕ

Enter

e-mail: kvantik@mccme.ru

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
t.me/kvantik12
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 3, март 2022 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С.А. Дориченко
Редакция: В.Г. Асташкина, Т.А. Корчемкина, Е.А. Котко, Г.А. Мерзон, Н.М. Нетрусова, А.Ю. Перепечко, М.В. Прасолов, Н.А. Солодовников
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р.К. Шагеева, И.Х. Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**
Подписка на журнал в отделениях Почты России (у оператора) по электронной версии Каталога Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)
Онлайн-подписка на сайтах:
- агентства АРЗИ: **akc.ru/itm/kvantik**
- Почты России: **podpiska.pochta.ru/press/ПМ068**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 03.02.2022
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831) 218-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

СОДЕРЖАНИЕ

Валерия Сирота

Как работает звезда

Звёзды – это огромные светящиеся газовые шары далеко в космосе. Точнее, даже не газовые, а плазменные: там такая высокая температура, что многие электроны не крутятся вокруг своих ядер, как в обычном веществе, а отрываются от них и летают сами по себе – электроны отдельно, ионы отдельно.

Но почему звёзды светятся? И что с ними происходит потом? В статье «Две звезды» в «Квантике» №1 за 2022 год мы обсудили некоторые детали из жизни звезды Бетельгейзе. Сейчас попробуем подробнее разобраться, что же происходит в ней и в других звёздах. При этом сами реакции термоядерного синтеза, который идёт в центре звезды и даёт ей энергию для жизни, мы обсуждать почти не будем. Узнать, что это такое, можно из статьи «Ядра атомов: вынужденное деление и термоядерный синтез» в «Квантике» № 9 за 2019 год. А если не очень представляете, чем протон отличается от электрона, поможет статья «Что у атома внутри» в «Квантике» № 11 за 2018 год.

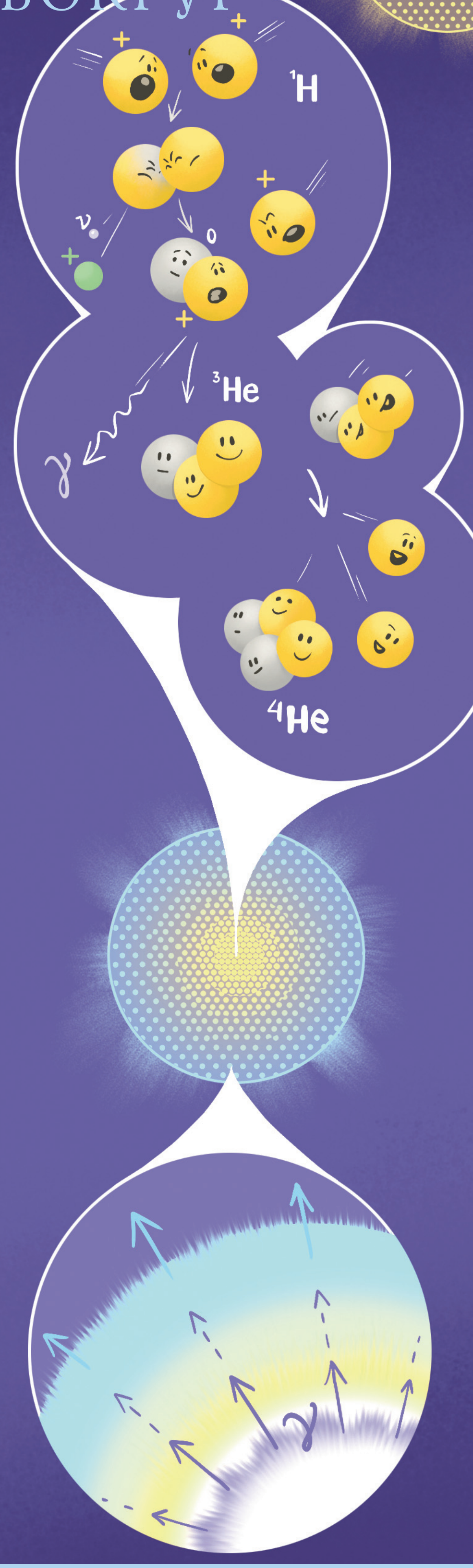
Почему наши дома, вещи, да и мы сами не улетаем от Земли? Каждый знает – потому что Земля нас притягивает. По закону всемирного тяготения, любая тяжёлая вещь притягивает к себе всё вокруг. И чем она тяжелее, тем сильнее притягивает. А Земля очень тяжёлая. Но почему же мы все тогда не падаем в центр Земли, не проваливаемся «сквозь землю»? Тоже ясно – нас пол не пускает! Ну или там асфальт, грунт... то, на чём мы стоим, отталкивает нас, и две эти силы – притяжение и отталкивание – компенсируют друг друга, так что мы спокойно остаёмся на месте и никуда не падаем, ни вверх, ни вниз.

Сила, которая отталкивает нас от Земли, создаётся давлением вещества. Пол, почва, камень и т.д. сопротивляются сжатию, причиняемому нашими ногами, и немножко «пружинят», отказываются сжаться ещё сильнее. А там, внизу, в десятках и сотнях километров у нас под ногами, вещество сжато до ещё больших плотностей и ещё сильнее «пружинит» – держит на себе всё, что над ним. И чем глубже внутрь Земли, тем больше давление; это давление и держит все верхние слои. Ведь если где-то оно оказывалось недостаточным, вещество «проседало» и уплотнялось до тех пор, пока давление не выросло настолько, чтобы остановить этот процесс. При этом «проседании», пока планета Земля формировалась, выделилось много энергии. Деваться ей было некуда, и она потратилась на нагревание: Земля внутри очень горячая. Теперь она потихоньку остывает, и будет остывать ещё несколько миллиардов лет...

Звезда – даже такая захудалая, как наше Солнце – в миллионы раз тяжелее Земли. Вещество в ней находится под ужасным давлением. И внутренние слои так же вынуждены «держать» верхние, не давать им провалиться вниз.

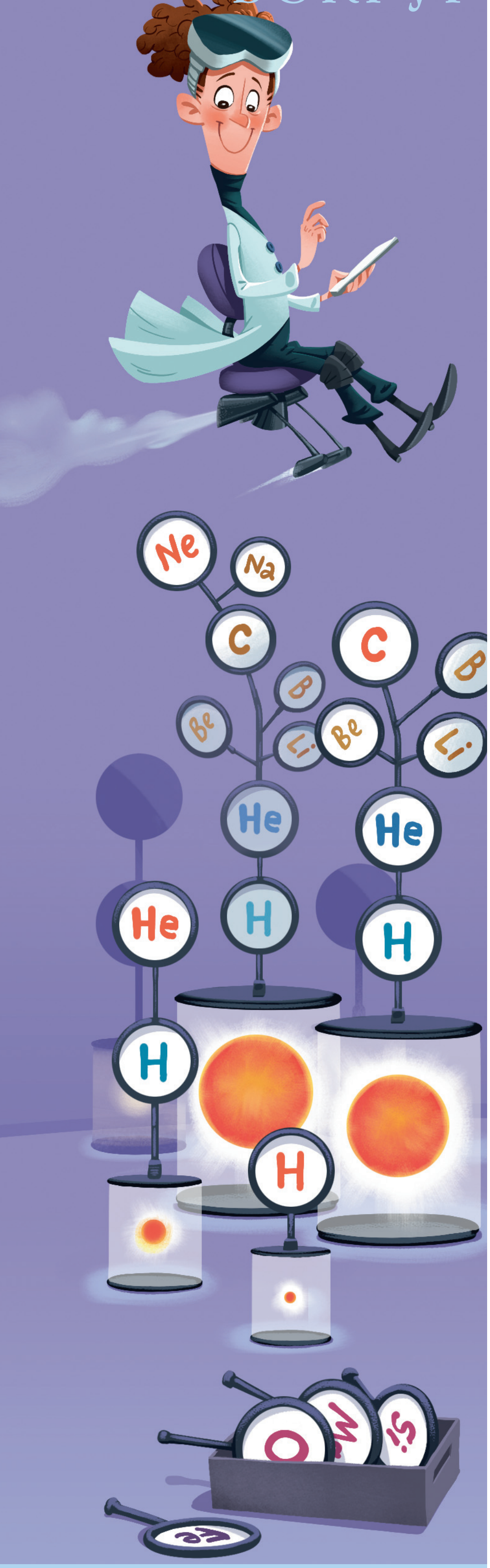
Этим давлением вещество в центре сжато до огромных плотностей и нагрето до гигантских температур – десятки миллионов градусов. При таких условиях в ядре звезды происходят термоядерные реакции: ядра водорода, то есть протоны, слипаются между собой (часть протонов ещё успевает превратиться в нейтроны) и образуют ядра гелия.[1] При этом выделяется куча энергии, то есть попросту излучается свет. Правда, не совсем привычный нам свет, а рентгеновские и гамма-лучи[2]. Эти лучи разлетаются из ядра во все стороны, унося энергию наружу. По дороге они натыкаются на вещество звезды, поглощаются им, нагревая остальную часть звезды, и переизлучаются снова – пока не доберутся до края звезды, где уже относительно холодное вещество с температурой в несколько тысяч градусов переизлучит их в видимом диапазоне – голубым, жёлтым или красным светом.

Но вернёмся пока в ядро. Чем тяжелее звезда, тем больше температура и плотность у неё внутри, тем быстрее водород там перерабатывается в гелий. Поэтому массивные звёзды живут недолго, всего не-



[1] Подробнее про ядерные реакции и «слабые» реакции (превращения) см. «Квантик» № 9 за 2019 год.

[2] Это «очень-очень фиолетовый» свет, в радуге он был бы далеко за фиолетовым. Глаз его не видит, зато он может, например, пройти через человека насквозь. Так светила бы чудовищно горячая печка.



сколько миллионов лет. А маленькие, лёгкие – светят еле-еле, зато живут в тысячи и даже в сотни тысяч раз дольше.

Через несколько миллионов или миллиардов лет наступает момент, когда водород в ядре подходит к концу, а гелия становится много. В отсутствие топлива ядро начинает остывать, давление в нём норовит уменьшиться, и – поскольку снаружи давят по-прежнему – ядро и области вокруг него ещё немного сжимаются. Сжимаясь, они снова нагреваются[3], причём теперь температуры хватает на то, чтобы «поджечь» водород в окружающем ядро слое. А «загоревшись», этот водород нагревается ещё больше – это как с костром или печкой: чтобы зажечь дрова, нужно их нагреть спичкой, но уж как разгорятся – столько тепла от них! И вот этот «горящий» водородный слой вокруг нагревает ядро до такой высокой температуры, что в нём «загорается» уже гелий – ядра гелия сливаются, образуя углерод.[4] Итак, теперь водород «горит» уже по краешку ядра, в слое вокруг него (хотя всё равно глубоко внутри звезды), а в центре «горит» гелий. При этом энергии выделяется ещё больше, «печка» внутри звезды работает на полную мощность!

Для звёзд вроде нашего Солнца это уже почти конец, потому что для того, чтобы загорелся ещё и углерод, температуры в ядре не хватит. Хорошо, что водород в центре Солнца кончится только ещё через несколько миллиардов лет. А вот в ядре Ригеля – даром что он в сотни раз моложе Солнца – уже, возможно, горит гелий. Но в массивном Ригеле давления достаточно, чтобы, когда гелий тоже «прогорит», углерод мог «слипаться» дальше, образуя ядра неона, магния, кремния… и, наконец, железа.

Вот это и происходит с Бетельгейзе. Гелий там, видимо, уже выгорел, и звезда дожигает свои последние запасы – уже горит углерод, а может, и неон.

[3] Потенциальная (гравитационная) энергия звезды переходит в тепловую.

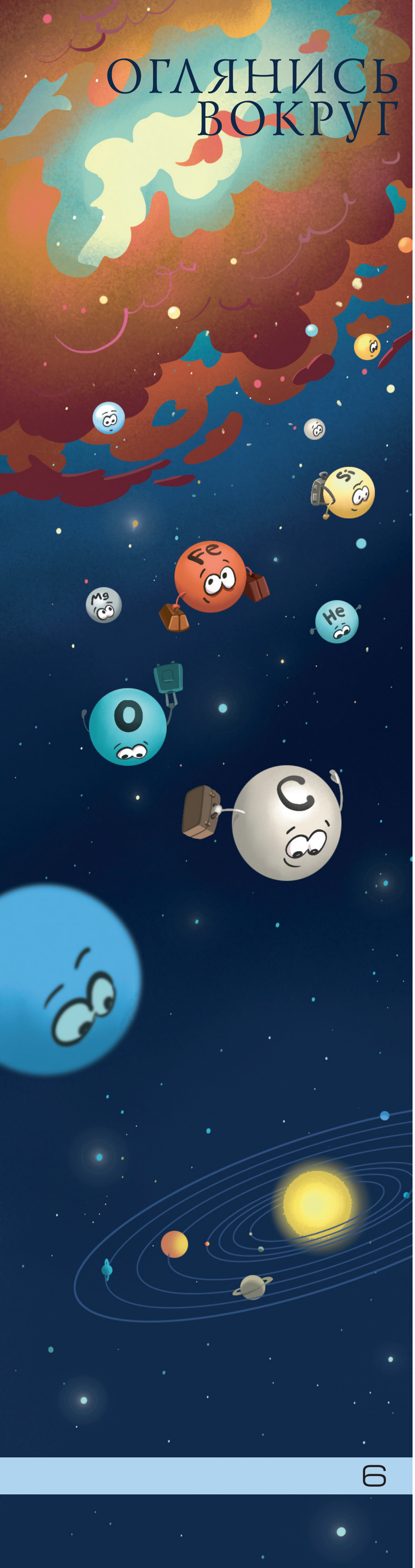
[4] В очень тяжёлых звёздах с массой больше 10 масс Солнца всё происходит немного в другом порядке: там и так очень горячо, и сначала «загорается» гелий в ядре, а потом уж водород в окружающем слое.

А когда неон догорит и образуется железное ядро, гореть там станет нечему, потому что железо уже не может выделять энергию, «слепляясь» с другими ядрами – ядра железа самые устойчивые, дальнейшее их «укрупнение» уже не даст энергию, а только заберёт её.

Как выглядит снаружи этот последний период жизни звезды, «звёздная старость»? Когда горение водорода переходит из ядра в окружающий слой, температура этого слоя повышается. Увеличивается и давление, с которым вещество распихивает всё вокруг. А масса-то у звезды не изменилась, и давление снаружи (как и вес внешних слоёв звезды) осталось прежним. В итоге равновесие смещается, горячий газ в слое вокруг ядра отвоёвывает себе больше места, отодвигая от центра внешние слои. Для звёзд вроде Солнца это приводит к поистине катастрофическим последствиям. Наше Солнце, когда это произойдёт, разбухнет в 250 раз и «проглотит» Меркурий, Венеру и Землю! При этом внешние слои, которые оказались очень далеко от центра, остынут и станут светить уже не жёлтым, а красным светом – Солнце станет красным гигантом. Мы и сейчас видим на небе такие звёзды: например, очень яркие Арктур в созвездии Волопаса (рядом с Большой Медведицей) и Альдебаран в созвездии Тельца (справа от Ориона).

В огромных звёздах, массой 8–10 масс Солнца и больше, переход от горения водорода к горению гелия не столь заметен снаружи: там и так было чудовищное давление внутри, эти звёзды как были, так и остаются голубыми, большими и очень горячими. Они только чуть-чуть увеличиваются. Но уж когда и гелий выгорит, а загорается углерод – с ними происходит то же самое, они разбухают и становятся красными сверхгигантами.

В этом разбухшем состоянии звезда оказывается неустойчивой: внешняя её оболочка то сжимается слегка, то расширяется больше прежнего и ещё пуще остывает. Она еле держится: случайное колебание температуры или давления, какая-нибудь вспышка в ядре – и оболочка вообще может оторваться и разлететься прочь от звезды. Возле некоторых звёзд-сверх-



гигантов видны следы нескольких таких сброшенных оболочек. Кстати, если красный сверхгигант сбрасывает оболочку, он может на время снова стать голубым.

Чем же всё это закончится? Скорее всего, взрывом. Если только звезда не очень маленькая – совсем мелкие звёзды, заметно меньше Солнца, просто спокойно догорят и потихоньку потухнут, но и это случится очень нескоро, – она живёт так долго, что за всё время существования Вселенной ещё не успела состариться. Звёзды вроде Солнца тоже избегнут сильного взрыва, но сбросят свою оболочку (а с ней – и бóльшую часть всего своего вещества, так что останется одно ядро). В более массивных звёздах, когда топливо в ядре кончится, произойдёт то же, что с прогоревшими поленьями в костре: всё обрушится вниз, к центру звезды. Ведь давление, которое поддерживалось ядерной реакцией и столько лет держало ядро и всю звезду, исчезло. От этого падения выделится куча энергии: вся гравитационная энергия огромной звезды переходит в тепло. Опять – напоследок! – на недолгий миг очень сильно поднимутся давление и температура, возобновятся ядерные реакции – причём в общем беспорядке будут иногда слепляться даже «невыгодные» элементы, более тяжёлые, чем железо, которые в нормальных условиях в звезде не образуются. Чудовищное давление создаёт взрыв. Чудовищная энергия наконец вырывается наружу. И как в костре от обрушения прогоревших дров взвивается целый сноп искр и облако золы, так и здесь ударной волной взрыва вещество звезды разметается по всей окрестности. Человечеству случалось наблюдать такое много раз – звезда вспыхивает вдруг очень ярко, а потом в течение месяца или двух тускнеет и исчезает из виду. В телескоп и через много веков можно увидеть в этом месте газовую туманность – разлетающиеся остатки звёздного вещества.

Жалко звезду? Жалко. Но именно так появились в межзвёздном пространстве, потом в Солнечной системе, а потом и на Земле углерод, кислород, железо...

А в центре что же, ничего не остаётся? Остаётся. Но остаются невидимые глазом и очень странные и удивительные объекты. О них мы поговорим в другой раз.

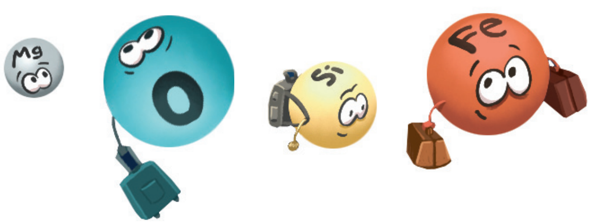
ЗАДАЧИ

1. При превращении Солнца в красный гигант его радиус увеличится в 200 раз. Во сколько раз упадёт при этом его средняя плотность? Во сколько раз (и в какую сторону) изменится его светимость, если температура поверхности уменьшится в 2 раза?

2. Мы видим на небе довольно много красных звёзд, сравнимых с Солнцем по массе – Арктур, Альдебаран... Но их радиусы в 20–50 раз больше солнечного. Как же это сочетается с «предсказанием» из предыдущей задачи, что Солнце увеличится в размере в 200 раз? Почему же мы не видим таких больших звёзд с массой порядка солнечной?

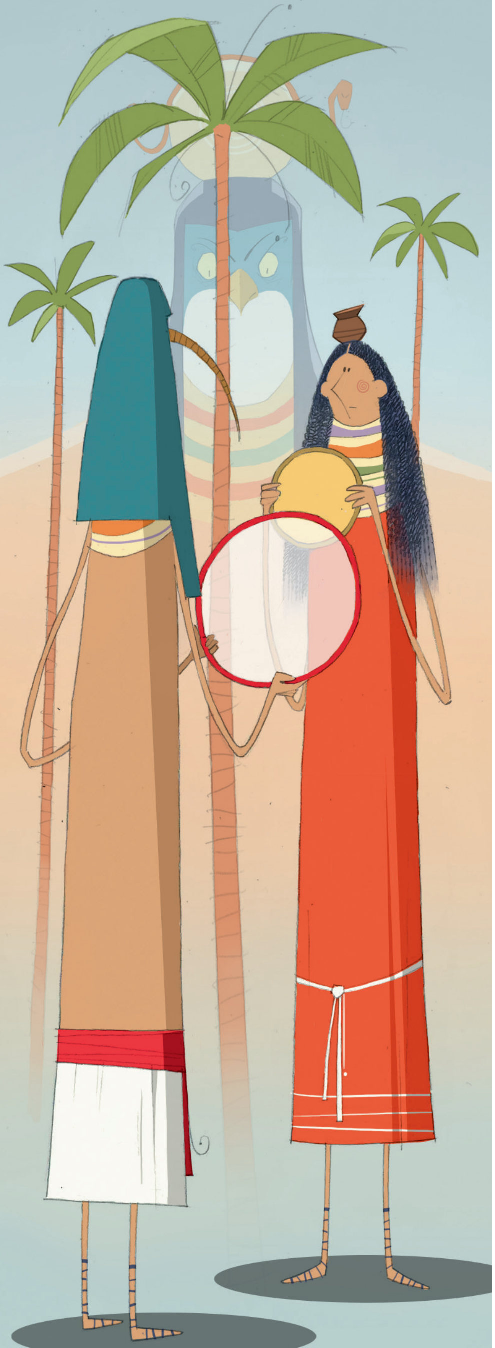
3. Когда вокруг ядра загорается слой водорода, давление в нём увеличивается; сила, с которой он «отпихивает» внешние слои звезды, становится больше веса этих внешних слоёв, и звезда расширяется. Почему же она не разлетается совсем? Почему возникает новое равновесие?

Что горит	Что образуется	Ограничение на массу звезды (в массах Солнца)	Температура в ядре	Время горения
Водород	Гелий	Во всех звёздах > 0,1	> 10 млн градусов	Зависит от массы звезды, от 10 млн до 10 млрд лет. Чем больше масса, тем короче жизнь!
Гелий	Углерод	> 0,5	> 100 млн градусов	В 10 раз быстрее, чем водород
Углерод	Неон, кислород, магний, кремний, железо	> 8 > 10	> 10 млрд градусов	Несколько тысяч лет



Художник Мария Усеинова

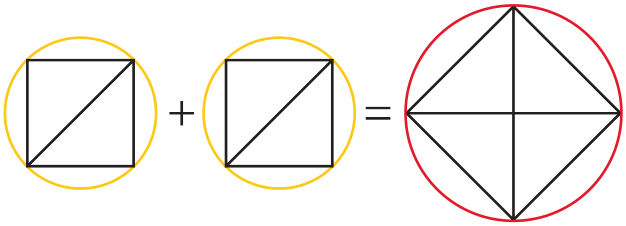
Валентина Кириченко,
Владлен Тиморин



КВАДРАТУРА ЛУНОЧКИ

Окончание. Начало в «Квантике» № 2, 2022

Когда Гор показал Тоту и Нут, как удвоить квадрат, Нут сразу сообразила, как удвоить круг. Она очертила круги около квадратов Гора.

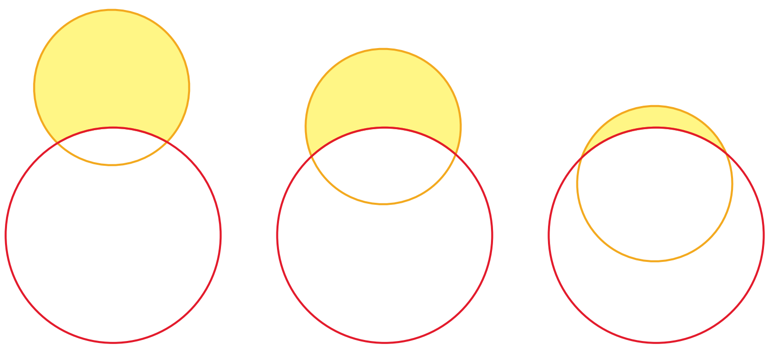


– Так, круг мы удвоили, – удовлетворённо заметил Тот, рассматривая рисунок. – Площадь красного круга в два раза больше площади жёлтого круга.

– Не напомнишь, что нужно было сделать дальше? – попросила Нут. – Гору наверняка будет интересно подумать над головоломкой богини Луны.

– Теперь нам нужно расположить красный круг так, чтобы он высек из жёлтого круга луночку, – начал Тот. – Причём площадь луночки должна равняться площади квадрата со стороной 1 схена. Напомню, что у жёлтого круга радиус тоже равен одной схене. Таковы точные условия богини Луны.

– А это вообще возможно? – усомнился Гор и стал рисовать луночки, по-разному сдвигая красный круг относительно жёлтого. Его луночки были очень похожи на разные образы богини Луны Хонсу во время лунного затмения.



Задача 3. Может ли лунное затмение произойти не в полнолуние, а во время какой-нибудь другой фазы Луны?

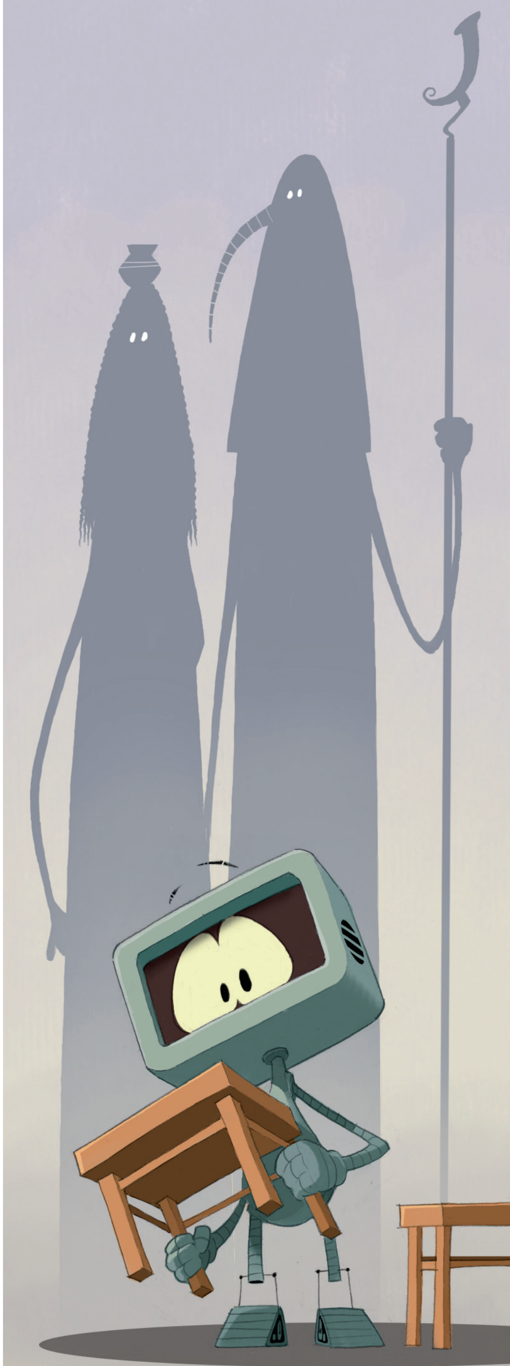
Неудивительно, что богине Хонсу так нравилась её головоломка – ведь лунные затмения были очень яркими, хотя и редкими событиями в её довольно одинокой жизни. Бог Солнца Ра строго следил за тем, чтобы Хонсу не слишком часто устраивала затмения. Ему было жалко людей на Земле, которые страшно пугались медленно краснеющего лунного диска и верили, что он предвещает им ужасные несчастья.

– Кажется, должно получиться, – сказала Нут, внимательно посмотрев на рисунки Гора. – Если мы будем постепенно надвигать красный круг на жёлтый, то сначала луночка почти не будет отличаться от жёлтого круга. А его площадь явно больше, чем площадь квадрата со стороной 1 схена. В конце, когда красный круг почти полностью закроет жёлтый, площадь луночки станет явно меньше, чем площадь квадрата. Поэтому где-то посредине между этими двумя моментами площадь луночки должна в точности совпасть с площадью квадрата.

– Да, Квантик упоминал похожее рассуждение, – согласился Тот. – Он называл это *теоремой о промежуточном значении*. Если какая-то величина с течением времени меняется непрерывно от одного числа до другого, то она обязательно проходит и через все числа между ними. С помощью этой теоремы Квантик обычно устанавливает табуреты для гостей так, чтобы все четыре ножки стояли на полу – у этих северных варваров на редкость неровные полы.[1]

– Теорема очевидная, но не думаю, что Хонсу засчитает такое решение, – скептически протянул Гор. – Геометрия – точная наука. Решение нужно честно построить с первого раза, а не просто сказать, что оно существует или что его можно приблизительно найти методом тыка. Поэтому у северных варваров и полы неровные. Чего ещё можно ждать при их отношении к геометрии!

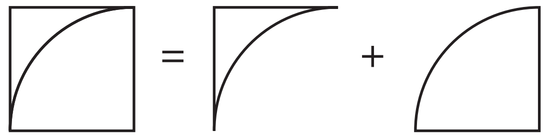
– Вообще-то, Квантик очень любит геометрию! – вступился за друга Тот. – Но если ответ нельзя найти точно, то что же, его и вовсе не надо искать?



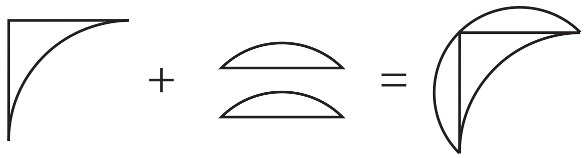
[1] О других применениях варварской теоремы можно узнать в мультфильмах на портале «Математические этюды» в разделе «Непрерывность»: etudes.ru/etudes/@continuity

– Не будем ссориться, – вмешалась Нут. – Мы пока даже не попробовали построить луночку точно. Может это не так и сложно, если как следует подумать.

– Ладно, давайте попробуем, – согласился Гор. С этими словами он разрезал квадрат на две части по дуге окружности. Получились две фигуры: четверть круга и что-то вроде треугольника, но с вогнутой внутрь кривой стороной.



– Интересная фигура, – сказала Нут. – Но на луночку не похожа. Хотя если приделать к ней сверху и сбоку по букве «Т», получится луночка. Смотри!

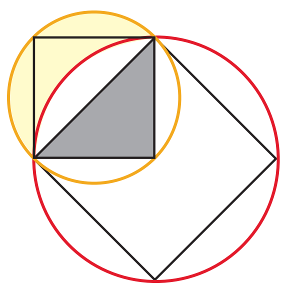


– Под буквой «Т» ты имеешь в виду букву из моей новой азбуки? Ту, которая похожа на кусок хлеба и с которой начинается моё имя? – спросил польщённый Тот. Он и не думал, что кто-то из богов уже успел выучить недавно изобретённый им алфавит.

– Да-да, ту самую, – ответила Нут. – Хотя в геометрии для этой фигуры, наверно, есть своё название. Не куском же хлеба её называют и не буквой «Т».

– Квантик называл такие фигуры сегментами круга, – вспомнил Тот. – Например, когда ты описала круг около квадрата, получилось разбиение круга на квадрат и четыре равных сегмента.

– Великий Ра! – воскликнул Гор. – Луночка, которую построила Нут – это же и есть решение головоломки Хонсу! Площадь луночки равна половине площади квадрата, с которого мы начали.



Задача 4. Убедитесь в том, что Гор прав: площадь светло-жёлтой луночки на рисунке равна площади тёмно-серого треугольника (половины квадрата).

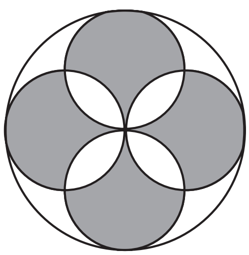
Итак, полученная луночка образована жёлтым диском, часть которого закрывает («затмевает») красный диск – как требовалось в задаче. Площадь луночки равна площади тёмно-серого треугольника, а та, в свою очередь, равна площади квадрата, построенного на радиусе жёлтого диска (убедитесь в этом!). Хонсу должна остаться довольной.

Эта история началась много тысяч лет назад, поэтому не все последующие события удалось восстановить. Но нет сомнений в том, что богиня Луны согласилась с решением, найденным Гором, Нут и Тотом, и вручила им обещанный приз – 5 дополнительных дней в году. Ведь теперь в году 365 дней, а не 360, как было в те времена. Выходит, и нам достался этот приз.

Нут, должно быть, очень удивилась, когда узнала впоследствии, что Гор – её собственный внук! Впрочем, мы не должны этому удивляться, ведь боги живут вне времени. Гору не понадобилась даже никакая чудо-машина, чтобы перенестись в прошлое и встретить свою бабушку ещё до того, как у той появились дети. А с другой стороны, если бы Гор ей не помог, то как знать...

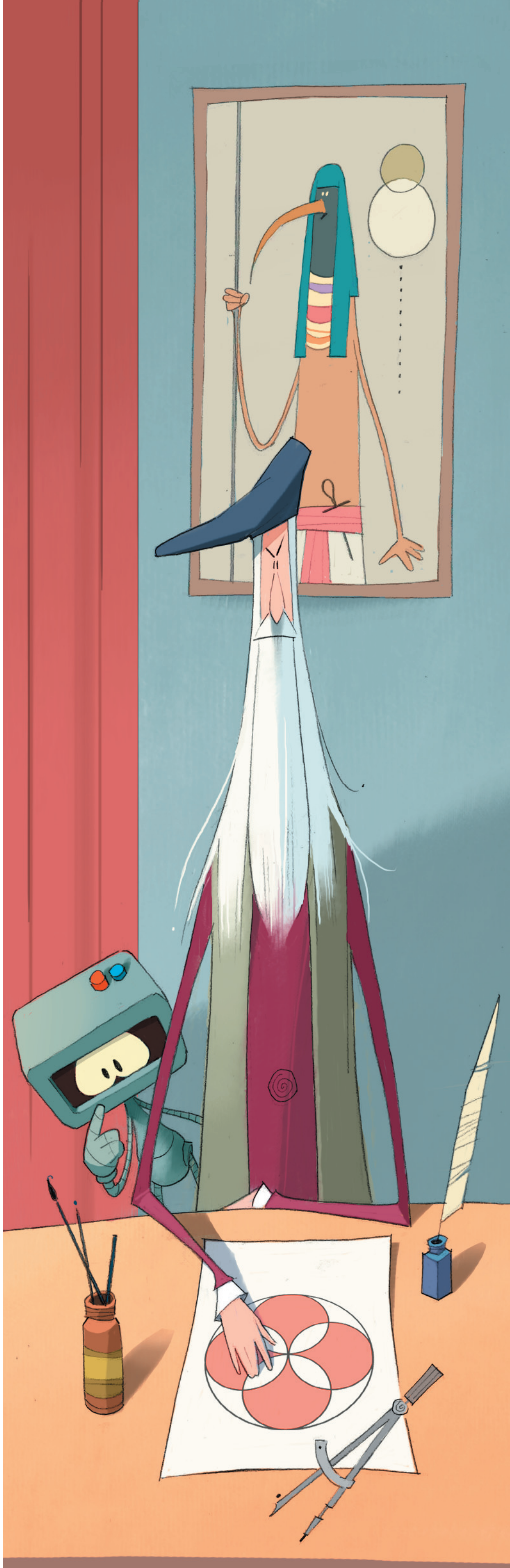
Задачи о луночках стали популярны не только среди богов, но и среди простых смертных. Наверно, Тот рассказал о луночках Квантику, он – своим друзьям, и процесс пошёл. Знание скрыть невозможно. Поэтому у нашей истории много продолжений. О тех из них, что подтверждаются письменными источниками, можно прочитать в статье «Что такое луночки Гиппократа. Невероятная математическая история длиной в 2500 лет» на портале «Мел».

Напоследок вот ещё одна задача – её мы нашли в дневниках Леонардо да Винчи.[2] Он пытался квадрировать круг, то есть построить (точно, а не методом тыка) квадрат и круг равной площади. Хотя с кругом у него ничего не вышло, он придумал множество других неожиданных фигур, которые можно квадрировать. Справа одна из них.



Задача 5. Постройте квадрат, площадь которого равна площади, закрашенной серым на рисунке.

[2] См. оборот с. 471 дневника, известного как «Атлантический кодекс». Дневник оцифрован, и его можно найти на сайте codex-atlanticus.it/



Художник Алексей Вайнер

Нам пишут

Фёдор Нилов

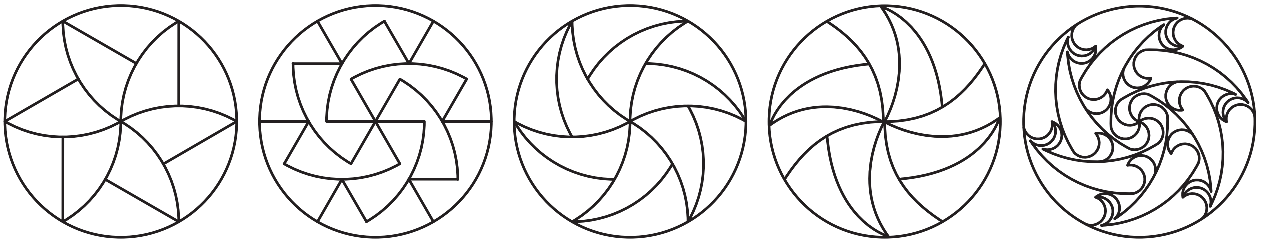
Разрезания круга на равные части

В «Квантике» №1, за 2022 год была задача о разрезании правильного многоугольника на равные части, при котором центр многоугольника лежит строго внутри одной из частей. В 2005 году на Московской математической олимпиаде школьникам 8 класса предлагалась задача С. В. Маркелова:

Разрежьте круг на несколько равных частей так, чтобы центр круга не лежал на границе хотя бы одной из них.

На олимпиаде из 638 участников задачу решили 8 человек. Одно из решений (четвёртое на рисунке) так всем понравилось, что иногда использовалось как эмблема МЦНМО. В 2015 году британские математики Джоэл Хэддли и Стивен Уорсли написали статью (arxiv.org/abs/1512.03794), в которой предложили способ получать целые серии подобных разрезаний.

А можно ли разрезать круг на равные части так, чтобы центр лежал строго внутри одной из них? Эта задача остаётся до сих пор открытой. Известно лишь, что если круг разрезан на две равные части, то его центр обязательно лежит на границе обеих частей (см. решение задачи А. Я. Каненя, Математическое просвещение, выпуск 6, 2002, с. 139 – 140).



Художник Ольга Демидова

ИЗОБРЕТАЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКУЮ ЛИНЕЙКУ

Виктор Клепцын

Окончание. Начало в № 2, 2022

В прошлом номере напротив отметки 1 см на логарифмической шкале мы поставили число 10. А что если поставить другое число, скажем c? Обозначим расстояние, на котором нужно поставить число a для построения логарифмической шкалы, как $\log_c a$. Должно выполняться аналогичное (1) тождество

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b.$$

Такую шкалу легко получить из шкалы десятичного логарифма: её нужно сжать или растянуть в соответствующее число раз. Функция $\log_c x$ называется *логарифмом по основанию* c. Можно получить тождество, аналогичное тождеству (3):

$$\log_c c^n = n.$$

Оно означает, что логарифм и возведение в степень – это обратные друг другу операции: если взять число n, возвести число c в степень n, а потом применить логарифм по основанию c, то снова получится n. Кстати, это правило позволяет с помощью логарифма определить любую степень, даже нецелую: число c^x – это такое число, логарифм которого равен x.

А теперь построим логарифм. Причём мы расскажем, как это сделать *геометрически*.

А именно, давайте нарисуем график функции $y = \dfrac{1}{x}$ – иными словами, *гиперболу* $xy = 1$. И для каждого числа $a > 1$ найдём площадь криволинейного четырёхугольника, ограниченного осью абсцисс, нашей гиперболой и вертикальными прямыми $x = 1$ и $x = a$ (рис. 9). Обозначим эту площадь через $S(a)$.

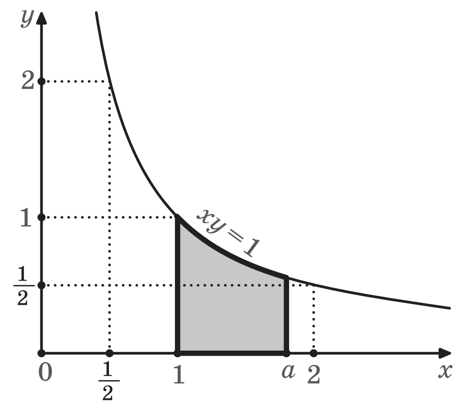
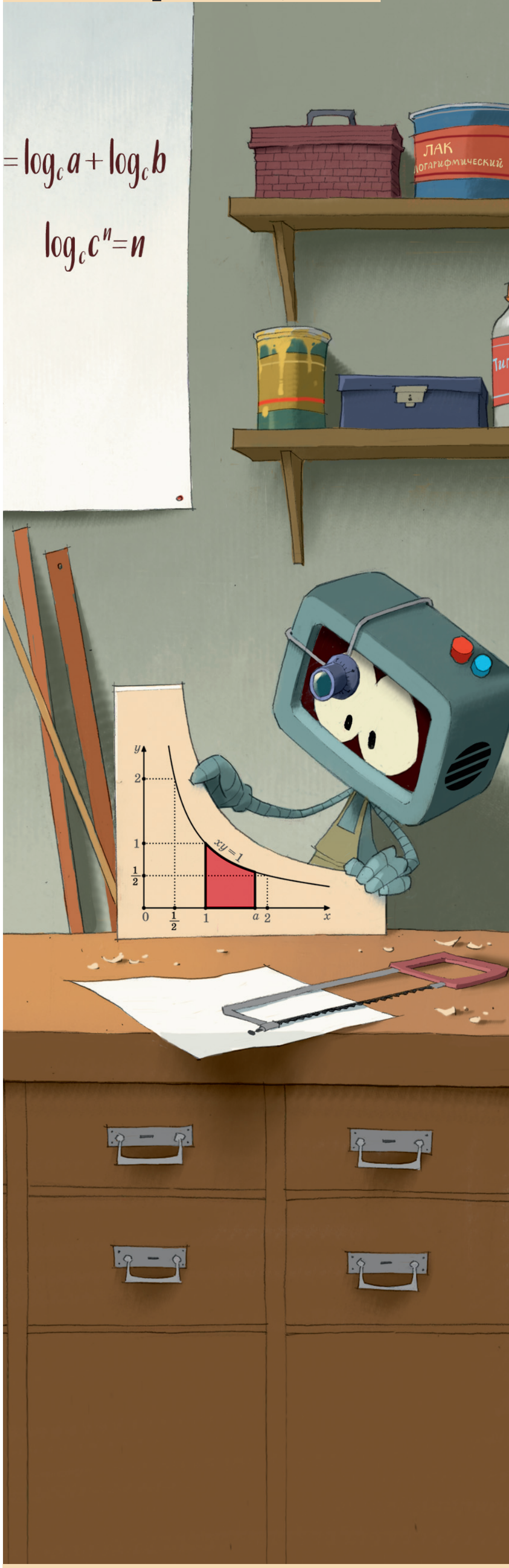
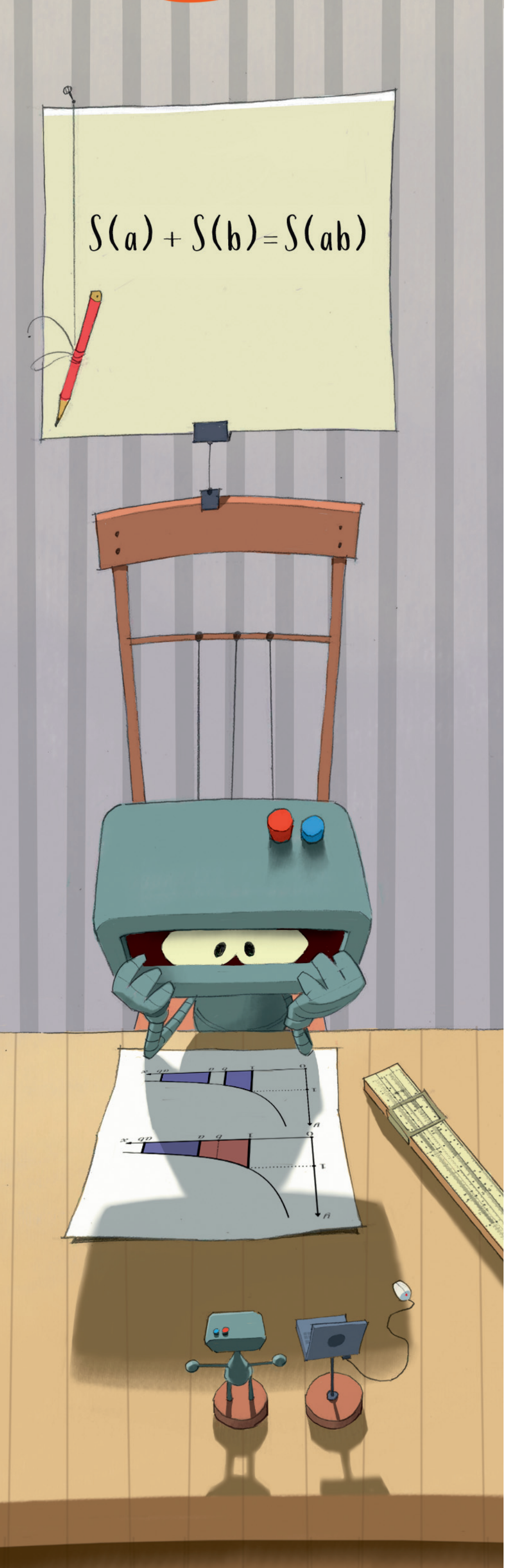


Рис. 9. Гипербола и площадь участка





Мы, конечно, применили сейчас понятие «площадь» к не совсем школьному объекту – криволинейному четырёхугольнику. Но с житейской точки зрения понятно, что какая-то площадь у этой фигуры есть.[1]

Так вот – давайте каждое число a поставим на расстоянии в $S(a)$ сантиметров от «начала отсчёта» (в котором стоит число 1). Оказывается, что при такой расстановке мы тоже сможем умножать числа простым сдвигом линейки, как на рисунке 10. Для этого нам нужно проверить аналогичное (5) тождество

$$S(a)+S(b)=S(ab). \qquad (6)$$

И это можно доказать чисто геометрически!

Действительно, пусть $a,\ b>1$. Тогда $S(ab)$ – это площадь криволинейного четырёхугольника, ограниченного осью абсцисс, гиперболой, прямой $x=1$ и прямой $x=ab$. Прямая $x=a$ разбивает эту фигуру на две части, площадь одной из которых равна $S(a)$ (эта часть на рисунке 10, слева, красного цвета). Значит, нужно проверить, что площадь оставшейся (синей) фигуры равна $S(b)$. Иными словами (если вспомнить, как мы логарифм b определяли), что площади двух фигур, высекаемых из области под гиперболой неравенствами $1\leqslant x\leqslant b$ и $a\leqslant x\leqslant ab$ (они показаны синим на рисунке 10, справа), равны.

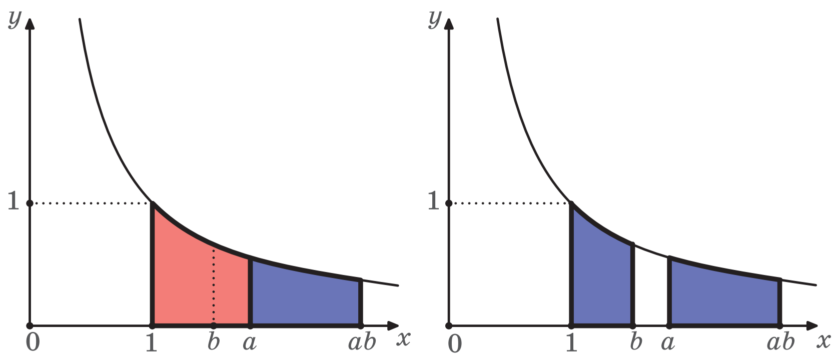


Рис. 10. Проверка тождества

Чтобы это проверить, сожмём всё по горизонтали в a раз – и во столько же раз растянем по вертикали.

Заметим, что вторая из двух синих фигур при этом переходит в первую. Действительно: гипербола

[1] Автор пользуется случаем порекомендовать читателям мультфильм «Площади фигур» на том же сайте «Математические этюды», посвящённый как раз рассказу об определении площади криволинейных фигур: kvan.tk/etudes-area

$xy = 1$ переходит в себя: ведь $\frac{x}{a} \cdot (ay) = xy$. Ось Ox – тоже. И наконец, полоса $a \leqslant x \leqslant ab$ переходит как раз в полосу $1 \leqslant x \leqslant b$.

Но при таком преобразовании сохраняются и площади. Действительно, очень естественно ожидать, что при сжатии по горизонтали в a раз площади всех фигур в a раз и уменьшатся. И это действительно так; можно в это просто поверить, а можно сказать, что это точно правда для любого прямоугольника с горизонтальными и вертикальными сторонами. А если наложить на фигуру мелкую-мелкую сетку, то можно её объединением таких прямоугольников приблизить. Точно так же растяжение по вертикали в a раз площади в a раз увеличивает. А вместе они площади умножают на $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, то есть не изменяют.

Итак, наше преобразование сохраняет площади и переводит вторую из синих фигур на рисунке 10, справа, в первую. Значит, площади этих фигур равны! Вот мы и проверили тождество (6). И тем самым научились (хотя бы теоретически!) создавать логарифмическую линейку.

Площадь $S(a)$, которую мы построили, удовлетворяет такому же соотношению, как и логарифмы, – она превращает произведение в сумму. На самом деле она и есть логарифм по некоторому основанию (потому что все функции, превращающие произведение в сумму, – это функции вида $\log_c$ для некоторого c) и $S(a)$ на самом деле называют *натуральным логарифмом* и обозначают $\ln a$.

Несложно понять, каким условием задаётся основание этого логарифма – его обозначают буквой e. Действительно, раз $\ln e = \log_e e = 1$, то $e > 1$ – это такая абсцисса, что площадь под гиперболой $xy = 1$ от $x = 1$ до $x = e$ равна 1 (рис. 11). И число e = 2,718281828459045... – одно из самых замечательных чисел в математике, столь же важное, как всем известное число π.

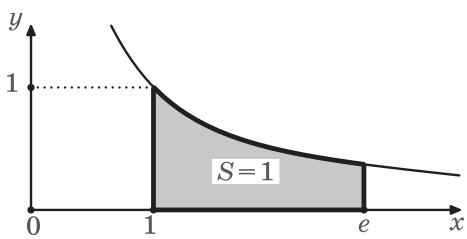
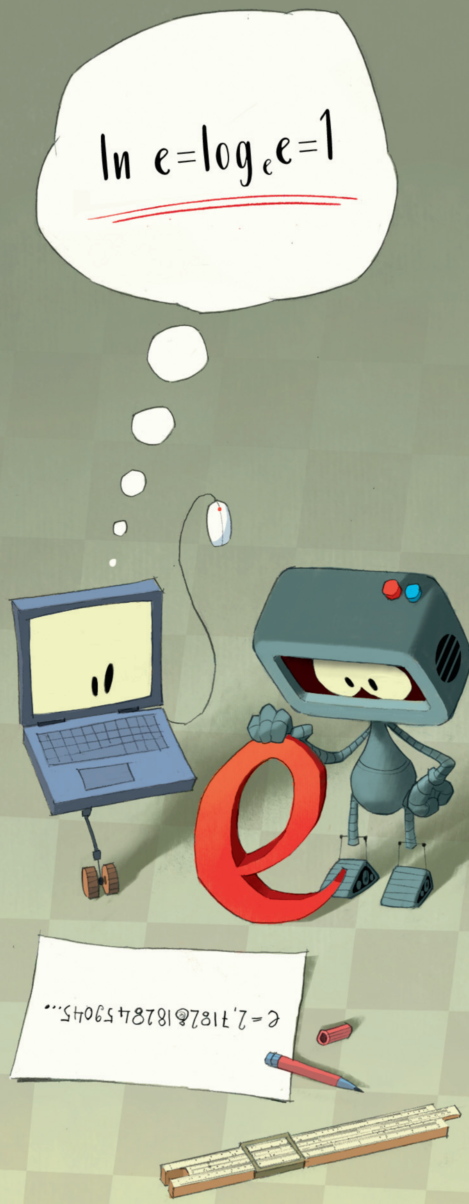


Рис. 11. Определение e: единичная площадь



Художник Алексей Вайнер

Николай Авилов

Раскраска квадрата $N \times N$

Выпускники сдают единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике. Среди его задач есть доступные читателям «Квантика» – например, такая:

Клетки таблицы 7×13 *раскрашены в чёрный и белый цвета. Пар соседних клеток разного цвета всего* 60, *пар соседних клеток белого цвета всего* 78. *Сколько пар соседних клеток чёрного цвета*?

Сначала попробуйте справиться самостоятельно. А вот решение. Любая пара соседних клеток определяется их общей стороной – перегородкой между ними. Всего перегородок $7 \cdot (13-1) + 13 \cdot (7-1) = 162$, поэтому число пар чёрного цвета $162 - (60 + 78) = 24$.

На рисунке 1 дан пример подходящей раскраски. Попробуйте зашифровать так другое слово или число!

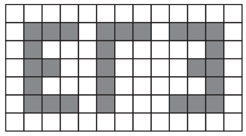


Рис. 1

На этой идее основана задача 24 «Нашего конкурса» («Квантик» №1, 2022). Вот её условие в общем виде:

В белом клетчатом квадрате $N \times N$ *закрашено чёрным несколько клеток. Может ли оказаться, что число пар бело-белых соседних клеток равно числу пар бело-чёрных соседних клеток и равно числу пар чёрно-чёрных соседних клеток? (Соседними считаются клетки с общей стороной.)*

Вот нужные раскраски для $N = 3$, 4, 6, 7, 9 и 10 (рис. 2).

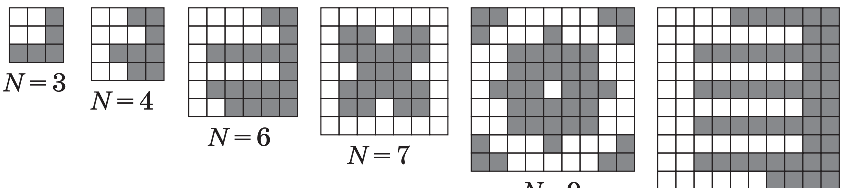


Рис. 2

Для чисел 2, 5, 8, ..., $3k-1$, ... задача не имеет решения. Покажем это. Любая пара соседних клеток определяется их общей перегородкой. Горизонтальных перегородок всего $N(N-1)$: они образуют $N-1$ рядов по N штук (рис. 3), столько же и вертикальных. Всего перегородок $2N(N-1)$, что не делится на 3 при $N = 3k-1$.

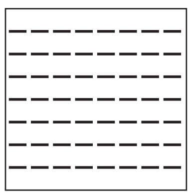


Рис. 3

Математический КРУЖОК

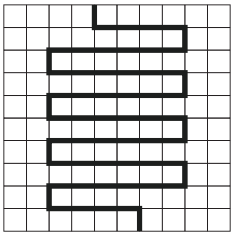


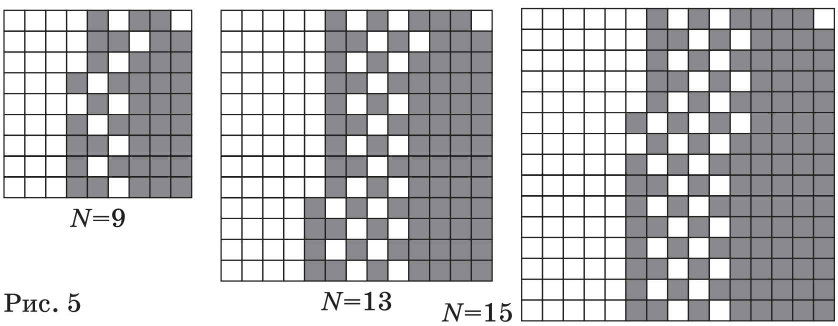
Рис. 4

Для чётных $N \neq 3k-1$ есть общее решение. Поделим квадрат на две равные части ломаной из перегородок, симметричной относительно его центра (рис. 4). Если длина ломаной равна трети всех перегородок, то есть $2N(N-1)/3$, остаётся закрасить одну из половинок квадрата. Так получены раскраски при $N=4$, 6 и 10 (рис. 2).

Этим способом можно раскрасить и бо́льшие квадраты. Например, для $N=100$ длина разделительной ломаной равна $2 \cdot 100 \cdot 99/3 = 6600$. Ломаная состоит из 100 вертикальных перегородок и 99 горизонтальных (в помощь – рисунок 4 для $N=10$). Общая длина горизонтальных отрезков равна $6600-100=6500$, среди них 97 отрезков одной, обязательно чётной длины, меньшей 100, и 2 отрезка другой длины. Их нетрудно подобрать, например, 97 отрезков по 66 единиц и 2 отрезка по 49, получится $97 \cdot 66 + 2 \cdot 49 = 6500$, поэтому общая длина нашей ломаной равна 6600 – как раз треть всех перегородок, что и требовалось.

Впрочем, длина разделительных линий между закрашенными и незакрашенными клетками при любом $N \neq 3k-1$ равна трети всех перегородок. Это облегчает поиск решения и для нечётных квадратов.

Для нечётных $N \neq 3k-1$ решение есть, но красивого общего решения не найдено. С помощью компьютера удалось разобраться с квадратами от 3×3 до 69×69. Найденные решения интересны тем, что квадрат примерно разбивается на три части: белую, «шахматную» и чёрную, плавно перетекающие одна в другую (см. примеры на рисунке 5).



$N=9$ $N=13$ $N=15$

Рис. 5

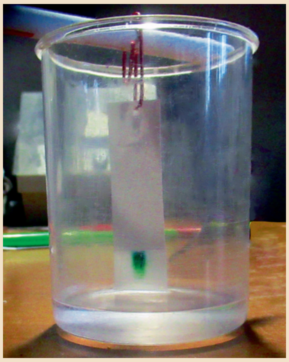
Возможно, вам удастся заметить закономерности и на их основе найти раскраску для квадрата 19×19.

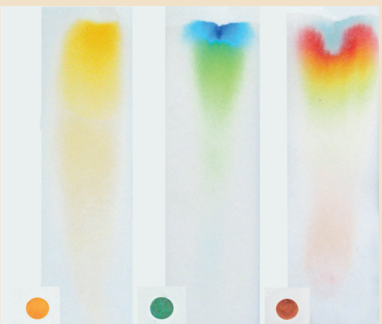
Художник Мария Усеинова

МИХАИЛ ЦВЕТ

Марина Молчанова

Михаил Семёнович Цвет
1872–1919





Бумажные хроматограммы
(фото автора)

Очень легко провести опыт, похожий на тот, который прославил героя этой статьи. Единственная проблема – подобрать подходящую бумагу: легко впитывающую воду, но при этом достаточно плотную и без тиснения. Фильтровальная (из наборов типа «Юный химик») или промокательная (из старых тетрадей) должна подойти.

Вырезаем из бумаги полоску. Рядом с её нижним краем наносим пятно с помощью водорастворимого фломастера. Помещаем полоску в стакан, содержащий немного воды – так, чтобы поверхность жидкости чуть-чуть не доходила до пятна. Садимся и ждём.

Вода начинает двигаться снизу вверх по полоске, увлекая с собой красящие вещества. И мы внезапно видим, что некоторые цветовые пятна постепенно разделяются! Посмотрите на иллюстрацию: в моём наборе фломастеров оранжевый даёт одно размытое пятно, а вот зелёный и коричневый разделяются на зоны – и нам сразу ясно, что в этих фломастерах не один краситель, а смесь!

Что произошло? Красители, двигаясь вместе с водой, по дороге взаимодействуют с бумагой. Цепляются за неё благодаря физико-химическим эффектам – одни сильнее, другие слабее. И молекулы, которые сильнее цепляются, постепенно отстают (представьте себе, как неудобно идти в шерстяном пальто через кусты репейника!). А значит, разные компоненты смеси отделяются один от другого – с помощью метода, который называется *бумажной хроматографией*.

Вместо бумаги можно использовать колонки, набитые подходящим веществом. Вместо воды – другие жидкости или даже газы. Вместо фломастеров... да почти что угодно. И всё равно это будет *хроматографией*. А мы поговорим о человеке, который заслуженно считается её изобретателем.

* * *

Михаил Семёнович Цвет, сын итальянки и русского, родился в итальянском городе Асти. Мать умерла вскоре после его рождения, отец уехал в Россию, а Михаил, оставленный в Швейцарии, там же и получил образование: окончил колледж, поступил в Женевский университет, увлёкся ботаникой, защитил диссертацию. И... в 1896 году решил переехать в Россию, на родину предков. Это решение оказалось для него источником многих бед. Но и открытие, которое прославило его имя, он совершил именно здесь.

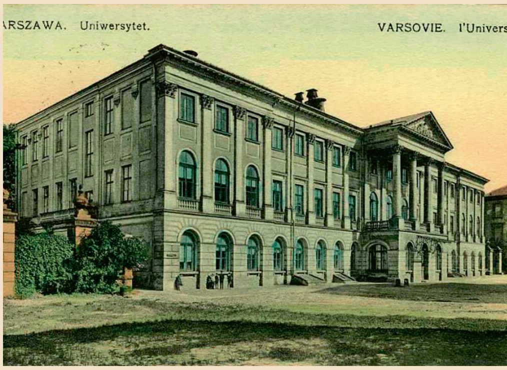
По приезде выяснилось, что ни степень доктора естествознания, ни даже степень магистра, полученная в Женевском университете, в России не признаётся. Пришлось пересдавать экзамены, а потом и «перезащищать» диссертацию. Но было в этом и хорошее: Цвет стал общаться с выдающимися петербургскими химиками и биологами. Он начал работать в лаборатории, которую возглавлял учёный и просветитель Пётр Лесгафт, но потом с этой работой пришлось расстаться: Лесгафта выслали из столицы за выступления в защиту участников студенческих демонстраций 1901 года. Найти следующую должность Цвету удалось только в Варшаве, которая, напомним, тогда была под властью Российской империи.

Именно в Варшаве он, продолжая изучать красящие вещества в листьях растений, впервые подробно описал своё открытие – сперва почти незамеченное и вскоре забытое, много позже прославившееся на весь мир.

Процедуру, открытую им, Цвет назвал хроматографией – от греческих слов «χρωμα» (цвет) и «γράφειν» (писать), то есть «цветопись». Может быть, Цвет имел в виду самое очевидное – получившиеся разноцветные полосы разных веществ. А может быть, он нарочно оставил в названии метода свою подпись, как в старину делали художники на картинах и композиторы в мелодиях.

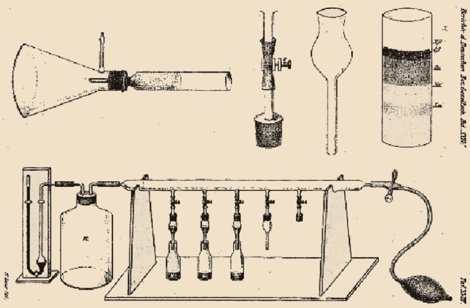
Днём рождения хроматографии обычно называют 21 марта 1903 года. В этот день на заседании Варшавского общества естествоиспытателей прозвучал доклад Цвета «О новой категории адсорбционных явлений и о применении их к биохимическому анализу».

Памятник П. Ф. Лесгафту возле Университета физической культуры (Санкт-Петербург)



Императорский Варшавский университет, открытка 1890 года

Деревья осенью. Фото автора



Хроматографические приборы Цвета

Тартуский университет

* * *

Двести с лишним лет назад был открыт зелёный пигмент растений – хлорофилл. Тот самый, благодаря которому растения превращают углекислый газ в кислород. Но осенью хлорофилл разрушается, листья меняют цвет. Значит, помимо хлорофилла, в них должны быть ещё какие-то цветные вещества – и химики сейчас знают, какие именно. Жёлтые ксантофиллы, оранжевые каротины, а иногда ещё и красные антоцианы.

Но к началу XX века не было ответа на один из основных вопросов: как отделить одни пигменты растений от других, особенно если эти вещества похожи друг на друга?

Цвет решал эту задачу так. Сперва переводил все пигменты в раствор – для этого измельчённые листья заливались петролейным эфиром с примесью спирта. Затем брал стеклянную трубку, набитую порошком мела, и наносил получившийся буро-зелёный раствор в её верхнюю часть. Жидкость начинала двигаться вниз по трубке. И... постепенно разделялась на разные цветные зоны! Напомним: чем сильнее вещество «цепляется» за поверхность частиц мела (адсорбируется), тем медленнее оно движется. Если же затем добавлять сверху чистый растворитель, зоны постепенно сдвигаются ниже и разделяются чётче.

Постепенно во всех опытах у Цвета стала получаться одна и та же череда зон, среди которых были сине-зелёная, желтовато-зелёная и несколько жёлтых. Две зелёные полосы – два чуть-чуть различающихся хлорофилла (сейчас мы называем их a и b). Жёлтые – разные ксантофиллы. А оранжевые каротины проскакивали через колонку, не задерживаясь.

Это так просто – пропустить вещества через колонку. Удобно и для анализа, и для разделения смесей – гораздо удобнее, чем традиционные методы. Но... учёный мир не обратил на это открытие особого внимания.

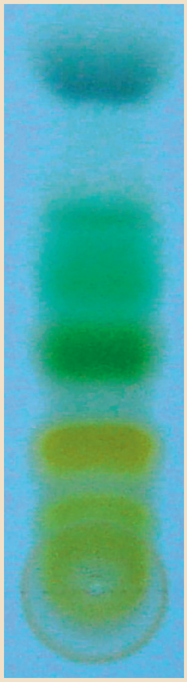
Есть разные объяснения. Иногда ссылаются на то, что Цвет якобы описал свои опыты только на русском языке. Но это не так: в 1906 году Цвет опубликовал две статьи в немецком журнале, позже выступал с докладами в том числе и за рубежом – и специалисты знали о его работах.

Роковую роль отчасти сыграла и случайность. Великий немецкий химик Рихард Вильштеттер, много работавший именно с хлорофиллом (и получивший за эти работы Нобелевскую премию за 1915 год), вполне мог бы оценить значимость сделанного открытия. Но его попытка воспроизвести опыт Цвета не была успешной: в условиях, которые он использовал, производные хлорофилла разрушались. Поэтому Вильштеттер сделал ошибочный вывод: для анализа небольших количеств веществ метод Цвета, может, и годится, а для разделения смесей и получения компонентов в чистом виде – уже нет... Однако эта история имела продолжение, о котором чуть позже.

Но, скорее всего, в самом начале XX века в научном мире просто пока ещё не было понимания того, зачем вообще нужен новый метод.

* * *

Последний этап жизни Цвета был совсем печальным. Первая мировая война сделала невозможной работу в Варшаве: в 1915 году город был занят немецкими войсками. Политехнический институт, где работал Цвет, эвакуировали в Москву, затем в Нижний Новгород. Большинство бумаг погибло, условий для работы в лаборатории не было, здоровье ухудшалось, попытка получить должность в Одессе провалилась. В 1917 году Цвет наконец стал профессором в университете города Юрьев (ныне Тарту, Эстония), но вскоре и Юрьев был занят немцами, и произошёл последний переезд – в Воронеж. Несмотря на тяжёлую болезнь, бедность и голод, Цвет пытался работать и там, но его дни были уже сочтены. Он умер 26 июня 1919 года. Через несколько лет не стало и его верной помощ-



Современная хроматограмма растительных пигментов

Рихард Вильштеттер

Памятник на предполагаемой могиле Цвета

Рихард Кун

Эдгар Ледерер

ницы – жены Елены. Почти все бумаги семьи были утрачены уже во время следующей войны.

Предполагаемая могила Цвета находится в некрополе на территории воронежского Акатова монастыря. В 1992 году на ней был установлен памятник с надписью: «Ему дано открыть хроматографию, разделяющую молекулы, объединяющую людей».

* * *

В научном фольклоре[1] известен список этапов в истории многих научных открытий: (1) могли бы открыть, но не открыли, (2) открыли, но не заметили, (3) заметили, но не поверили, (4) поверили, но не заинтересовались, (5) у-у-у-У!!!

Да, некоторые учёные заметили работу Цвета и поверили ему: в 1918 году его даже пытались выдвинуть на Нобелевскую премию по химии. Но большинство заинтересовалось гораздо позже: спустя десять с лишним лет после его смерти.

В это время европейские химики активно изучали многие природные соединения, в том числе витамины, гормоны и опять-таки пигменты. Так, в немецком Гейдельберге Рихард Кун и Эдгар Ледерер занимались каротинами и ксантофиллами (помните, мы говорили про них – оранжевые и жёлтые вещества в листьях?). Но опять-таки возникла проблема: как отличить чистые вещества от смесей? И тут Ледерер, изучая литературу, наткнулся на упоминания о работах Цвета и заинтересовался. Удалось найти немецкий перевод книги Цвета, когда-то сделанный для Вильштеттера, учителя Куна. Того самого Вильштеттера, который когда-то счёл метод Цвета неподходящим для разделения смесей.

А вот у Ледерера и Куна получилось блестяще воспроизвести и развить этот метод: даже вещества, очень близкие по составу и строению, разделялись именно так, как надо! В 1931 году полученные результаты были опубликованы, и это было второе рождение

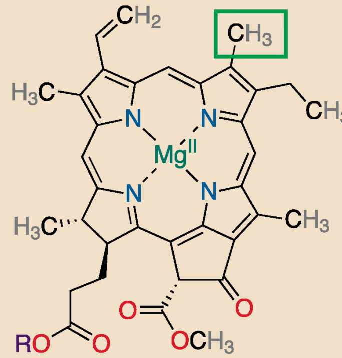
[1] «Физики продолжают шутить». М.: «Мир», 1968, с. 20.

хроматографии. Учёные один за другим стали применять её в работе. Все три Нобелевские премии по химии, полученные в самом конце 30-х годов, так или иначе связаны с применением хроматографии – и прежде всего премия самого Куна (1938).

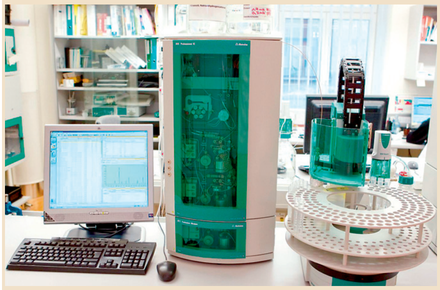
Но для господства нового метода в химических лабораториях нужен был ещё один шаг, и его сделали Арчер Мартин и Ричард Синг (опять Нобелевская премия, уже 1952 год). Мартин и Синг не просто придумали несколько полезных приёмов для решения конкретных задач – после их работ окончательно стало ясно, что хроматография годится для эффективного разделения практически любых смесей практически любых веществ. Надо только подобрать правильные условия.

И совсем скоро хроматография оказалась буквально везде. Колоночная (как у Цвета) и плоскостная (как у нас на бумаге), адсорбционная и распределительная, жидкостная и газовая. Ионообменная, гель-фильтрационная, аффинная. Десятки вариантов метода, тысячи приборов – и в каждом вещества разделяются благодаря тому, что их молекулы движутся с разной скоростью. Везде, где нужны анализ и разделение сложных смесей, от нефтедобычи до парфюмерии, сейчас обязательно есть хроматография. Производство лекарств и пищевых продуктов, экология, криминалистика... Даже мы с вами, делая в наше непростое время экспресс-тест на коронавирус, пользуемся кассетами, где используется принцип тонкослойной хроматографии.

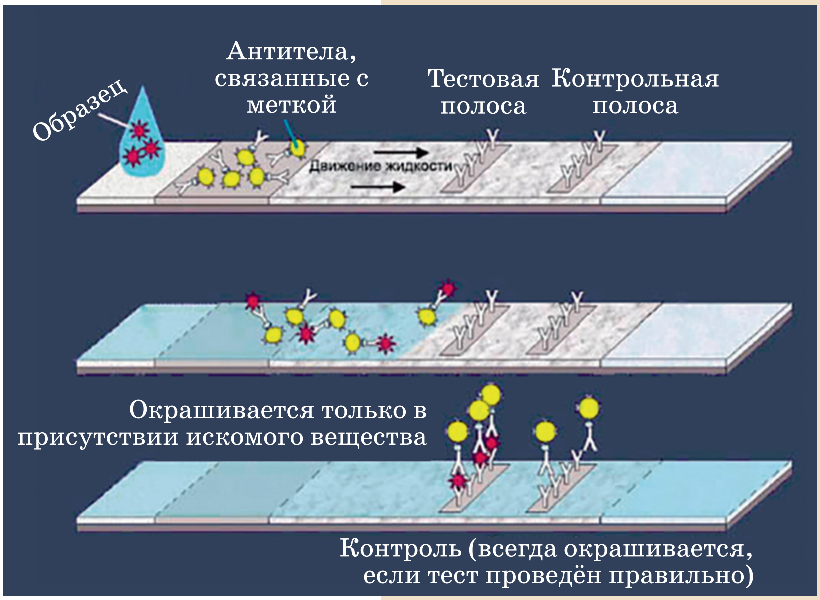
Ну и на осенние листья теперь мы уже будем смотреть не просто так, а со значением.



Хлорофилл *a*. У хлорофилла *b* отличается группа, обведённая зелёным прямоугольником



Современный хроматограф



Диагностический тест

Владимир Красноухов

Карандашики в коробочке

Печальна участь рабочего карандаша – со временем он превращается в никому не нужный огрызок. Его ждёт мусорное ведро, в лучшем случае он станет героем анекдота (наверняка ваши дедушки помнят анекдот о рационализации на карандашной фабрике).

Нас же образ отработанного карандаша вдохновил на создание оригинальной головоломки. Состоит она из коробочки и плоских деталей, похожих на силуэты карандашей (форма и относительные размеры – на рисунке 1).

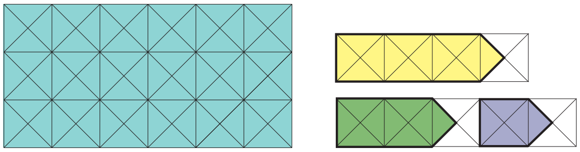


Рис. 1

Дно коробочки 3×6 покрасим в чёрный цвет. Будем считать, что имеются бортики, не позволяющие карандашам выходить за контуры дна.

В наборе 11 карандашей (рис. 2): один большой карандаш (Б), один средний (С) и 9 маленьких (М) (не будем называть их обидным словом «огрызки», тем более, что наши читатели не грызут ни карандаши, ни ногти).

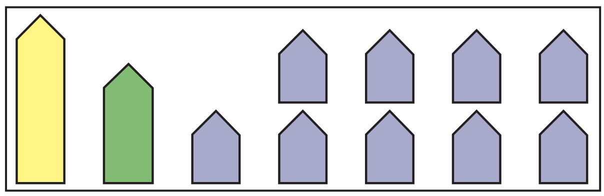
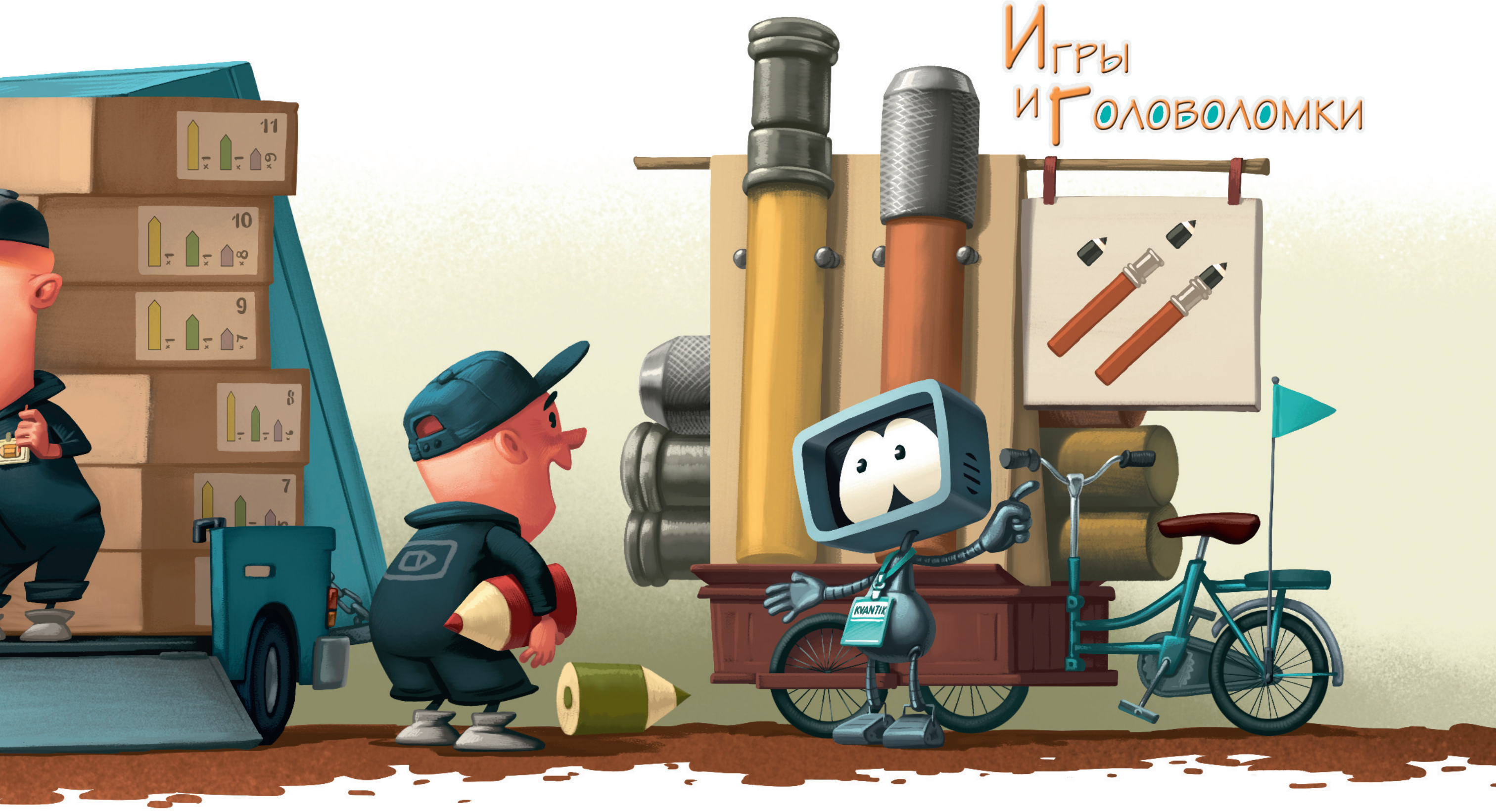


Рис. 2

А теперь – задачи.

1. Разместите в коробочке все карандаши (1Б + 1С + 9М) в один слой. Похоже, существует единственное решение.



2. Разместите карандаши в коробочке в режиме «антислайд», то есть так, чтобы ни один из них не мог быть сдвинут ни в каком направлении (чтобы они не гремели при транспортировке). Сделайте это для таких наборов:

а) 1Б + 1С + 8М (постарайтесь найти симметричный вариант);

б) 1Б + 1С + 7М;

в) 1Б + 1С + 6М (найдите симметричный вариант);

г) 1Б + 1С + 5М (известно 11 решений);

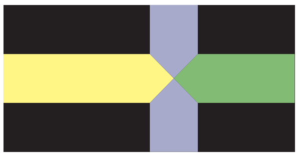
д) 1Б + 1С + 4М (известно 6 решений);

е) 1Б + 1С + 3М (известно 4 решения).

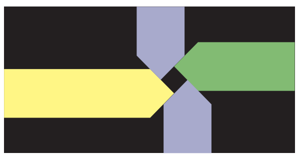
Похоже, чем меньше карандашей в коробочке, тем задача сложнее.

3. А можно ли разместить в режиме «антислайд» набор 1Б + 1С + 2М?

На первый взгляд, вот решение:



Но… попробуем (мысленно) переместить один из элементов *М* по горизонтали, и курьёзность такого псевдо-антислайда станет очевидной:



По ссылке kvan.tk/kar-v-kor можно распечатать детали головоломки.

Желаем успехов!

Художник Мария Усеинова

ДЕТЕКТИВНЫЕ ИСТОРИИ

Иван Высоцкий

ПОХИЩЕНИЕ
в адвокатской конторе

Из кабинета известного адвоката украдены важные документы. Адвокат в отчаянии. Расследованием резонансного преступления занимается знаменитый следователь Башковицкий.

– Господин адвокат, припомните, пожалуйста, в котором часу вы вчера ушли с работы. Хотя бы примерно.

– Скажу определённо: было без двадцати пять. Откуда такая точность? Видите ли, каждую пятницу перед уходом я завожу эти стенные часы, доставшиеся мне от бабушки. Они очень точные.

Адвокат с любовью взглянул на антикварные часы, украшающие стену над рабочим столом, и продолжил:

– Понимаете, двигать стрелки очень вредно для механизма, поэтому я не могу допустить, чтобы часы остановились. Видите отверстия для ключа в циферблате? Через одно заводится пружина боя, а через другое – главная пружина. Так вот, когда я вчера заводил часы, обратил внимание, что они показывают 16:37. Ну а минуты через три после этого я вышел из офиса.

– Господин адвокат, мне очень жаль, что вы неискренни. Думаю, что смогу доказать, что вы инсценировали похищение.

Каким образом Башковицкий понял, что адвокат лжёт?

Художник Алексей Вайнер

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ

Решения II тура отправляйте по адресу ruskonkurs@kvantik.org **не позднее 20 апреля**. В письме укажите ваши имя, фамилию, город, школу и класс, где вы учитесь. Победителей ждут призы, предусмотрены премии за лучшее решение отдельных туров. Предлагайте задачи собственного сочинения. Желаем успеха!

II ТУР

6. Прочитайте стихотворение Владимира Маяковского «Рассказ литейщика Ивана Козырева о вселении в новую квартиру». По наблюдению одного преподавателя, это стихотворение доказывает, что гласная в корне одного русского слова, которая обычно считается непроверяемой, на самом деле является проверяемой. Напишите это слово.

И. Ф. Акулич

7. Удивительным образом, это отглагольное существительное имеет значение «конец», а образованное от него прилагательное, наоборот, значение «начальный». Напишите эти существительное и прилагательное.

Е. Г. Жидкова

8. Отгадайте загадку маленького Лёвы:

Перецветает раз миллион –
Это, конечно, ______.

Л. И. Иткин

9. Хорошо известно, что в русском языке время может представляться как жидкость. Об этом свидетельствует, например, выражение *время течёт*. А какое выражение позволяет сделать вывод, что время в русском языке может представляться как ткань?

И. Б. Иткин

10. Найдите самое короткое слово (любой части речи, необязательно в словарной форме), в котором есть три буквы «я».

С. И. Переверзева

Художник Николай Крутиков

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ, I тур («Квантик» № 1, 2022)

1. *...Семья готовит домашний спектакль. «Кого назначим на главную роль?» – спросил папа.*

– «МЯУ, ГАВ!» – крикнул Вовочка.

...Марь Иванна склонилась над журналом, выбирая, кто пойдёт к доске.

«МЯУ ГАВ...», – прошептал Вовочка.

Какие слова мы заменили на МЯУ и ГАВ?

Словами МЯУ и ГАВ мы заменили слова ***чур*** и ***меня***. Когда речь шла о главной роли в спектакле, Вовочка, разумеется, закричал «Чур, меня!», то есть «Обязательно меня!». А когда Марь Иванна собралась вызвать кого-то к доске, храброму Вовочке оставалось только прошептать «Чур меня...», то есть, наоборот, «Лишь бы только не меня...».

2. *Только в одном случае можно просто добавить «на». На сколько тогда уменьшится исходная величина?*

(Кратко поясните свой ответ.)

Рассмотрим пары числительных вида «$X \cdot 10$» и «$X+10$»: *двадцать* и *двенадцать*, *пятьдесят* и *пятнадцать*, *девяносто* и *девятнадцать*... Оказывается, получить второе числительное из первого, просто добавив буквосочетание «на», действительно можно только в одном случае: *тридцать ~ тринадцать*. Соответственно, исходная величина уменьшится **на 17**.

3. *Поменяв местами две первые буквы в Глаголе 1, мы получаем Глагол 2 и тем самым переходим от создания оригинального произведения к подражанию. Напишите Глагол 1 и Глагол 2 в правильном порядке.*

Речь идёт о глаголах **творить** «создавать что-то новое, оригинальное» и **вторить** «подражать, следовать чему-то, уже существующему».

4. Г...здь *и* **г...здь** *похожи: у них есть АЛЬФА. Найдите АЛЬФУ.*

И правда: похожи не только слова *гвоздь* и *груздь* (хотя исторически они никак между собой не связаны), но и сами соответствующие объекты. Так что АЛЬФА – это, конечно, **шляпка**.

5. *ЭТО точно есть у огурца, кабачка и свёклы, ЭТОГО точно нет у арбуза, дыни и капусты. Что ЭТО?*

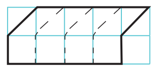
ЭТО – **беглая гласная**: *огурец – огурца*, *кабачок – кабачка*, *свёкла – свёкол*... В словах *арбуз*, *дыня* и *капуста* беглых гласных нет.

НАШ КОНКУРС, V тур («Квантик» № 1, 2022)

21. *На острове живут правдолюбы, лжецы и хитрецы (которые могут и сказать правду, и солгать). Всем задали вопрос: «Ты хитрец?» Утвердительно ответили ровно 20 человек. После этого всех спросили: «Ты лжец?» На этот раз сказал «да» ровно 21 человек. Кого на острове больше – хитрецов или лжецов?*

Ответ: больше хитрецов. Заметим, что на вопрос «ты хитрец» все лжецы ответили утвердительно, а на вопрос «ты лжец» утвердительно отвечали только хитрецы. Значит, хитрецов не менее 21, а лжецов – не более 20.

22. *И круг, и прямоугольник легко разрезать на любое количество одинаковых частей. Существует ли фигура с тем же свойством, у которой нет ни центра симметрии, ни оси симметрии? (Части должны быть равны и по форме, и по площади.)*



Ответ: да, см. пример на рисунке. Докажем, что фигура не имеет ни центра, ни оси симметрии. При симметрии единственный острый угол фигуры должен перейти в такой же острый угол, то есть сам в себя. Соседние с ним углы разные, поэтому тоже переходят сами в себя. Значит, вся фигура остаётся на месте при симметрии. Противоречие.

23. *Последовательностью Фибоначчи называется последовательность чисел, в которой первые два числа равны 1, а каждое последующее число равно сумме двух предыдущих:* 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... *Можно ли первые 2022 числа последовательности Фибоначчи разделить на две группы, содержащие поровну чисел, чтобы суммы чисел в этих группах были равны между собой?*

Ответ: можно. Разобьём числа на шестёрки в порядке их возрастания (то есть первая шестёрка – 1, 1, 2, 3, 5, 8, вторая – 13, 21, 34, 55, 89, 144 и т.д.). Всего будет $2022 : 6 = 337$ шестёрок. В каждой шестёрке, по свойствам последовательности Фибоначчи, третье число равно сумме первых двух, а шестое – сумме четвёртого и пятого.

Добавим в первую группу первое, второе и шестое числа из каждой шестёрки, а во вторую – третье, четвёртое и пятое. Тогда в группах будет по $337 \times 3 = 1011$ чисел, и суммы чисел совпадут.

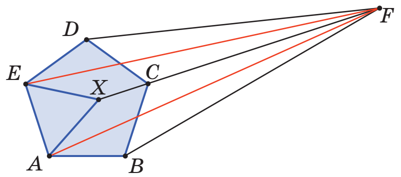
24. *а) Можно ли в белом клетчатом квадрате 10×10 закрасить чёрным несколько клеток так, чтобы число пар бело-белых соседних клеток равнялось числу пар бело-чёрных соседних клеток и равнялось числу пар чёрно-чёр-*

ных соседних клеток? (Соседними считаются клетки с общей стороной.) б) Тот же вопрос про квадрат 9×9.

Ответ: можно, см. статью Н. Авилова «Раскраска квадрата $N\times N$» в этом номере журнала.

25. *Точка F снаружи правильного пятиугольника $ABCDE$ такова, что отрезки ED, EC, AC и AB видны из F под одним и тем же углом (см. рис.). Под каким? (Говорят, что отрезок MN виден из точки X под углом α, если угол MXN равен α).*

Ответ: 6°. Мы будем пользоваться тем, что отрезки FD, FC и FB не пересекают пятиугольник, как на рисунке. Рассмотрим треугольники FCD и FCB. В них FC – общая, $CD=CB$ и равны углы при вершине F, следовательно, либо углы FDC и FBC в сумме дают 180° (что невозможно: в четырёхугольнике $FBCD$ угол C больше 180° поэтому сумма остальных углов меньше 180°), либо треугольники FCD и FCB равны. Значит, $FB = FD$.

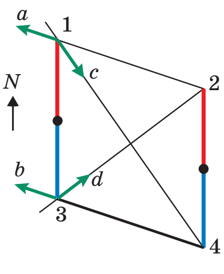


Отразим теперь точку B относительно AF – она перейдёт в точку X на луче FC, для которой $AX=AB$ и $FB=FX$. Аналогично, отразим точку D относительно EF – она перейдёт в точку Y на луче FC, для которой $AY=ED$ и $FD=FY$. Значит, $FX = FY$, откуда $X = Y$, причём треугольник AXE равносторонний. Так как в правильном пятиугольнике углы равны 108°, а в равностороннем треугольнике – 60°, получаем: $\angle XAB = 108° - 60° = 48°$, откуда $\angle XAF = 24°$, и аналогично $\angle XEF = 24°$. Тогда углы при основании равнобедренного треугольника AFE равны по 84°, поэтому $\angle AFE = 180° - 168° = 12°$ и $\alpha = 6°$.

ТРИ КОМПАСА («Квантик» № 1, 2022)

Стрелка компаса – это магнит с двумя полюсами, северным и южным: северный полюс магнита указывает на южный полюс Земли и наоборот.

Для упрощения у каждой стрелки компасов будем рассматривать только её концы. Два разноимённых конца притягиваются друг к другу, а одноимённые – отталкиваются.

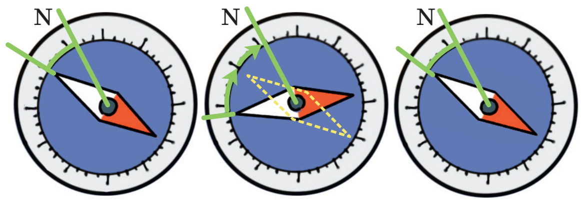


Пусть два компаса лежат рядом, на рисунке дано их исходное положение, когда стрелки указывают на север.

Конец 1 отталкивается от конца 2 ровно с той же силой и в том же направлении (стрелочка a), что и конец 3 от конца 4 (стрелочка b). Поэтому если бы магниты только отталкивались, их стрелки бы не повернулись. Но ещё есть притяжение, и конец 1 притягивается к концу 4 слабее (стрелочка c), чем конец 3 к концу 2 (стрелочка d), так как 2 и 3 ближе друг к другу, чем 1 и 4. Кроме того, стрелочка d не только длиннее стрелочки c, но и составляет больший угол со стрелкой компаса, поэтому d разворачивает стрелку компаса сильнее, чем c. В итоге конец 3 немного поворачивается к правой стрелке (а конец 1 – от правой), а конец 2 – к левой стрелке.

Когда три компаса лежат рядом, на центральный крайние действуют сильнее, чем друг на друга, и стрелка на нём отклоняется сильнее от севера. Поэтому истинное направление на север ближе к показаниям крайних компасов.

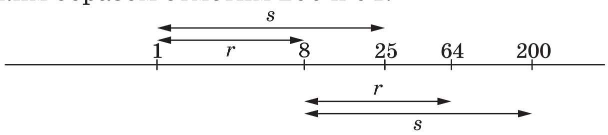
Чтобы найти это направление, нужно мысленно повернуть среднюю стрелку до положения крайней стрелки, а потом ещё раз повернуть на столько же. Тогда средняя стрелка будет показывать примерно на север, см. рисунок ниже.



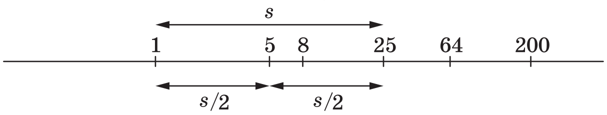
Вы можете сами поэкспериментировать с компасами по ссылке kvan.tk/3-kompasa

ИЗОБРЕТАЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКУЮ ЛИНЕЙКУ («Квантик» № 2, 2022)

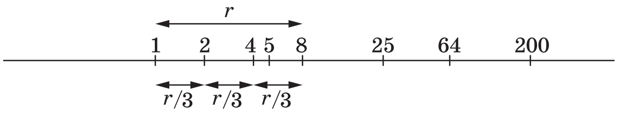
В статье прошлого номера на рисунке 4 показано, как отметить произведение ab, если на логарифмической шкале уже отмечены числа 1, a, b. Нужно измерить обычной линейкой расстояние от 1 до a, расстояние от 1 до b, сложить их, а полученный результат отложить от 1. Таким образом отметим 200 и 64:



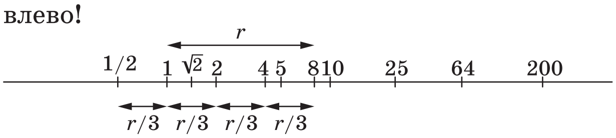
Чтобы отметить число 5, обозначим расстояние от него до 1 через t. Если дважды отмерить расстояние t, мы попадём в отметку $5\cdot5=25$, которая уже есть. Поэтому $2t = s$ и $t = s/2$. Значит, 5 стоит посередине между 1 и 25:



Заметим, что 8 – это 2 в кубе. Рассуждая, как в случае с 5, поставим 2 в три раза ближе к 1, чем 8:



Теперь можем отметить $10 = 2 \cdot 5$, так как 2 и 5 уже отмечены, и $\sqrt{2}$ посередине между 1 и 2. И самое сложное – куда поставить $\frac{1}{2}$? Заметим, что на логарифмической шкале умножение на 2 соответствует сдвигу на расстояние $\frac{r}{3}$ вправо. Это видно на рисунке выше, обратите внимание на числа 1, 2, 4, 8. Докажем это в общем случае: $\log_{10} 2a = \log_{10} 2 + \log_{10} a = \frac{r}{3} + \log_{10} a$. Значит, деление на 2 соответствует сдвигу на $\frac{r}{3}$ влево!



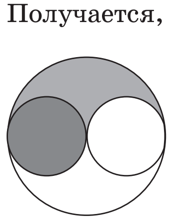
Указанным способом можно отметить только те целые числа, которые раскладываются в произведение двоек и пятёрок, а 15 не раскладывается. Возведём 15 в квадрат, а числа 8 и 25 перемножим, $225 > 200$. Значит, сумма расстояний от 8 и 25 до 1 меньше, чем удвоенное расстояние от 15 до 1. Поэтому на логарифмической шкале число 15 ближе к 25, чем к 8.

Подумайте, что можно сказать о двух дробях, у которых расстояние между числителем и знаменателем на логарифмической шкале одинаковое. И что будет, если продолжать логарифмическую шкалу влево: встретятся ли там отрицательные числа, или есть некая граница, до которой мы не дойдём? Как связан десятичный логарифм натурального числа с количеством цифр этого числа?

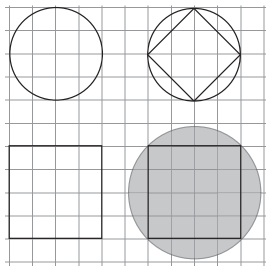
КВАДРАТУРА ЛУНОЧКИ

(«Квантик» № 2, 2022)

1. Как выяснили Нут и Тот, площадь круга радиуса 2 равна площади четырёх кругов радиуса 1. Круг радиуса 2 на рисунке разбит на два круга радиуса 1 и ещё две равные фигуры (арбелосы). Поэтому площадь двух арбелосов получается из площади четырёх кругов радиуса 1 вычитанием площади двух кругов радиуса 1 (как учил Евклид, «если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны»). Получается, что площадь двух арбелосов равна площади двух кругов радиуса 1. Поэтому площадь светло-серого арбелоса равна площади тёмно-серого круга («и половины одного и того же равны между собой»).



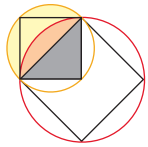
2. Сначала впишем квадрат в данный круг (белый круг на рисунке). Затем удвоим вписанный квадрат, например так, как это сделал Гор. Опишем около удвоенного квадрата круг (серый круг на рисунке). Он будет в два раза больше белого круга по площади.



Ведь серый круг получается из белого изменением масштаба, при котором площадь квадрата увеличивается в 2 раза. Поэтому и все остальные площади увеличиваются в 2 раза.

3. Как известно, Луна светится не своим собственным светом, а светом Солнца, который отражается от лунной поверхности. Луна перестаёт светиться (затмевается), когда Земля заслоняет Луну от солнечного света. Для этого Земля, Солнце и Луна должны «лежать на одной прямой», причём Земля должна «лежать между» Солнцем и Луной (конечно, Земля, Луна и Солнце – это скорее шары, чем точки, поэтому геометрические понятия используются в приблизительном смысле). Земля может оказаться между Солнцем и Луной только во время полнолуния [1]. Поэтому лунные затмения случаются только во время полнолуния.

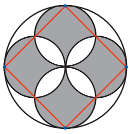
4. По построению площадь красного круга в два раза больше площади жёлтого круга. Поэтому четверть красного круга равна по площади половине жёлтого круга («и половины одного и того же равны между собой»). Если вырезать из левой верхней четверти красного круга оранжевый сегмент, то останет-

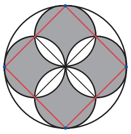


[1] Как взаимное расположение Земли, Солнца и Луны связано с лунными фазами, читайте в статье В. Сурдина «Космический театр теней» («Квантик» №5 за 2018 год).

ся тёмно-серый треугольник. А если вырезать тот же самый сегмент из половины жёлтого круга, то останется светло-жёлтая луночка. Поэтому светло-жёлтая луночка и тёмно-серый треугольник равны по площади («если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны»).

5. Соединим отрезками четыре точки касания, в которых большая окружность касается меньших окружностей. Получим квадрат (на рисунке он красный). Разрежем каждый из четырёх белых «лепестков» внутри квадрата на два сегмента круга (как на следующем рисунке). Площадь, закрашенная серым, получается из площади красного квадрата вырезанием восьми равных белых сегментов и приклеиванием восьми равных серых сегментов. Поскольку серые сегменты равны белым, площадь, закрашенная серым, равна площади красного квадрата.





ЛЁД НА РЕКЕ И СНЕГ НА БЕРЕГУ

(«Квантик» № 2, 2022)

Земля укрывается снегом, как только температура воздуха падает ниже нуля (конечно, если есть осадки). Это связано с тем, что земля очень плохо проводит тепло. В результате температура поверхности земли всегда примерно равна температуре воздуха (нижние слои её почти не греют) и снег не тает (мы не учитываем случаи, когда в земле есть что-то горячее, например, трубы, источники).

Вода в реке перемешивается, поэтому требуется много дней холодной погоды, прежде чем вся толща воды успеет остынуть. Плюс к этому, река питается водами из-под земли, температура которых не меняется в течение года. Поэтому осенью берега укрываются снегом быстрее, чем река.

Хочется сказать, что весной аналогично: земля греется быстрее, чем вода, но это не имеет никакого отношения к вопросу, потому что всё укрыто снегом! Казалось бы, воздух и солнце одинаково греют снег что на берегах, что на реке. К тому же температура воды в реке никак не меньше нуля (если, конечно, она не сильно солёная), а поверхность земли за зиму промёрзла. Вроде лёд на реке должен быстрее сойти?

Солнце гораздо слабее греет снег, чем деревья, кусты и траву. Лучи отражаются от снега и хорошо поглощаются тёмными стволами и ветками (на фото хорошо видно, что заснеженный лес темнее заснеженной реки). Поэтому первым снег оттаивает вокруг деревьев, потом в кустах и траве. Оголённая земля тоже быстро нагревается. Таких преимуществ у реки нет: посреди реки ничего не растёт, и даже если где-то лёд протаял, солнце в этом месте греет уплывающую толщу воды, не усиливая таяние окружающего льда.

Итак, есть два фактора: положительная температура воды в реке и растения на берегу. Где снег растает быстрее, на реке или на берегу, зависит от того, какой фактор сильнее. Чем быстрее течение, тем быстрее растает река (а весной реки поднимаются и ускоряются). Река может оттаять зимой в отепель из-за течения (когда солнце ещё слишком слабое, чтобы растопить снег на берегу), или не замерзать зимой вовсе, если сильных морозов нет. Растения на берегу могут оказаться в тени, например, если берег крутой и это южная сторона реки. На спокойной реке солнечный берег оттает быстрее, чем сама река. Человеческий фактор мы не учитывали: судоходная ли река, чистят ли берега и т. д.

КАК РАБОТАЕТ ЗВЕЗДА

1. $\rho' = \rho : (200^3) = \rho : (8 \cdot 10^6)$; на самом деле плотность будет ещё меньше, потому что к тому времени Солнце «растратит» на звёздный ветер почти треть своей массы. $L' = S'T'^4 = 200^2 \times (½)^4 ST^4 = 2500L$.

2. Размер красного гиганта растёт плавно, и стадия максимального его «разбухания» продолжается очень недолго, по космическим меркам – почти мгновение. Поэтому такие звёзды – большая редкость. Было бы огромным везением, если бы такая нашлась среди наших ближайших соседей. Вот Бетельгейзе не так уж и близко, и то нам с ней повезло.

3. Новое равновесие возникнет, когда вес внешних слоёв снова окажется равен силе давления изнутри. При расширении звезды горящему слою водорода достаётся больше места, и от этого давление в нём уменьшается – пока не станет снова равно весу внешних слоёв.

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Второй этап состоит из четырёх туров (с V по VIII) и идёт с января по апрель.

Высылайте решения задач VII тура, с которыми справитесь, не позднее 5 апреля в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик»**.

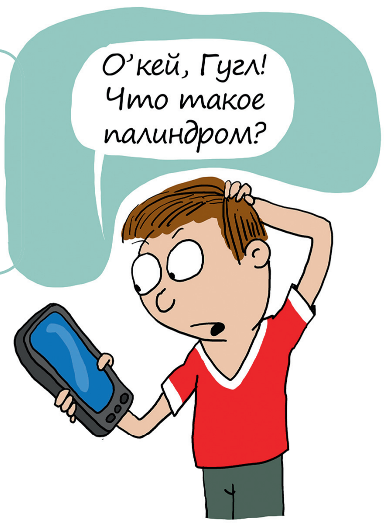
В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

VII ТУР

31. В этом году в феврале встретилась дата-палиндром: 22.02.2022 (цифры слева направо идут в том же порядке, что и справа налево). Найдите следующую ближайшую дату-палиндром (и докажите, что она действительно ближайшая).

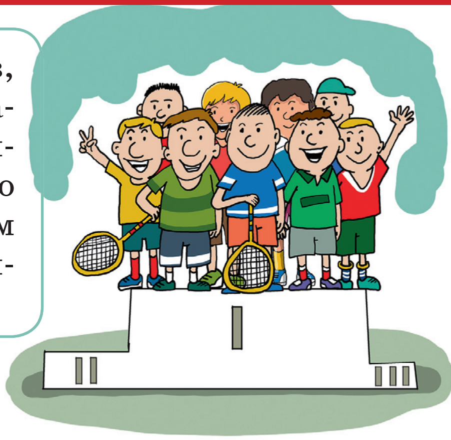


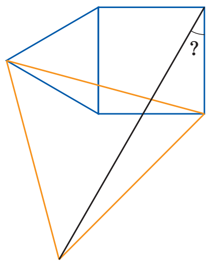
32. а) Нарисуйте на клетчатой бумаге выпуклый шестиугольник, вершины которого лежат в вершинах клеток, а стороны идут не обязательно по сторонам клеток, который можно двумя прямыми разрезать на четыре равные части. (Не забудьте указать разрезы.)

б) Решите ту же задачу для выпуклого семиугольника.

Авторы: Татьяна Корчёмкина (31), Александр Перепечко (32), Борис Френкин (33), Максим Прасолов (34)

33. В турнире по теннису участвовало N теннисистов, каждый сыграл с каждым один матч. В итоге оказалось, что все выиграли поровну матчей (ничьих в теннисе не бывает). В следующем году теннисистов стало на одного больше, и снова каждый сыграл с каждым один матч. Могло ли и теперь оказаться, что все выиграли поровну матчей?





34. Квадрат и два равносторонних треугольника расположены так, как на рисунке. Найдите угол, отмеченный знаком вопроса.

35. У Квантика есть белая клетчатая полоска размером 1×33 клеток. Квантик окунул полоску левым концом в чёрную краску, и несколько первых клеток (не менее одной, но и не все 33) стали чёрными, а остальные остались белыми. Ноутик не видит полоску, но может за один вопрос узнать цвет любой клетки (назвав, какая она по счёту слева). Как ему за 5 вопросов узнать номер самой правой чёрной клетки?

Художник Николай Крутиков

ПОЗДРАВЛЯЕМ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ ПЕРВОГО ЭТАПА НАШЕГО КОНКУРСА!

Победители: Карина Амиршадян, Ульяна Ануфриева, Артём Барков, Филипп Ганичев, Егор Гаценко, Елена Гришина, Дарья Дайловская, Алиса Елисеева, Анна Зотова, Матвей Кистин, Варвара Ковалева, Елена Куцук, Алеся Львова, Ольга Метляхина, Егор Мокеев, Тамара Приходько, Лев Салдаев, Екатерина Соловьева, Иван Часовских, а также команды «Умники и умницы в математике» и «Математический кружок "Сигма"».

Призёры: Дмитрий Бедорев, Иван Бирюков, Елизар Ботев, Андрей Вараксин, Ярослав Воропаев, Глеб Вылегжанин, Иван Загоскин, Артур Илаев, Михаил Николаев, Ксения Петриченко, Александр Погадаев, Михаил Савин, Иван Саначев, Севастьян Ушаков, Дарья Федотова, Аюши Цоктоев, Зарина Шарипова, Мирослава Шахова, Мария Шишова.

УДАЧИ ВСЕМ В СЛЕДУЮЩИХ ЭТАПАХ И В ОБЩЕМ ГОДОВОМ ЗАЧЁТЕ!

Художник Yustas

ISSN 2227-7986