№ 9 | сентябрь 2022

ЖУРНАЛ КВАНТИК ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

№ 9
сентябрь
2022

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЧЕРЕПАХА И ЧИСЛА СОЧЕТАНИЙ

БЕЗЗАКОНИЕ НА ЦВЕТКАХ

ЦИКЛОНЫ И АНТИЦИКЛОНЫ

Enter

e-mail: kvantik@mccme.ru

Открылась ПОДПИСКА НА 2023 ГОД

продолжается подписка на оставшиеся месяцы 2-го полугодия 2022 года

подписаться на журнал «КВАНТИК» вы можете в почтовых отделениях и через интернет

ОНЛАЙН-ПОДПИСКА НА САЙТАХ

Почта России:
podpiska.pochta.ru/press/ПМ068

Агентство АРЗИ:
akc.ru/itm/kvantik

БЕЛПОЧТА:
kvan.tk/belpost

по этим ссылкам вы можете оформить подписку и для своих друзей, знакомых, родственников

ПОДПИСКА В ПОЧТОВЫХ ОТДЕЛЕНИЯХ

Почта России:
Каталог Почты России
индекс **ПМ989** – годовая
индекс **ПМ068** –
по месяцам полугодия

Почта Крыма:
Каталог периодических изданий Республики Крым и г. Севастополя
индекс **22923**

БЕЛПОЧТА:
Каталог «Печатные СМИ. Российская Федерация. Казахстан»
индекс **14109** – для физических лиц
индекс **141092** – для юридических лиц

Подробно обо всех способах подписки, в том числе о подписке в некоторых странах СНГ и других странах, читайте на нашем сайте **kvantik.com/podpiska**

НАШИ НОВИНКИ



Уже поступил в продажу
Календарь загадок
от журнала «Квантик» на 2023 год
Ищите календарь в интернет-магазинах:
biblio.mccme.ru, kvantik.ru, my-shop.ru, ozon.ru, WILDBERRIES, Яндекс.маркет
и других (полный список магазинов на **kvantik.com/buy**)

www.kvantik.com

kvantik@mccme.ru
t.me/kvantik12
vk.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com

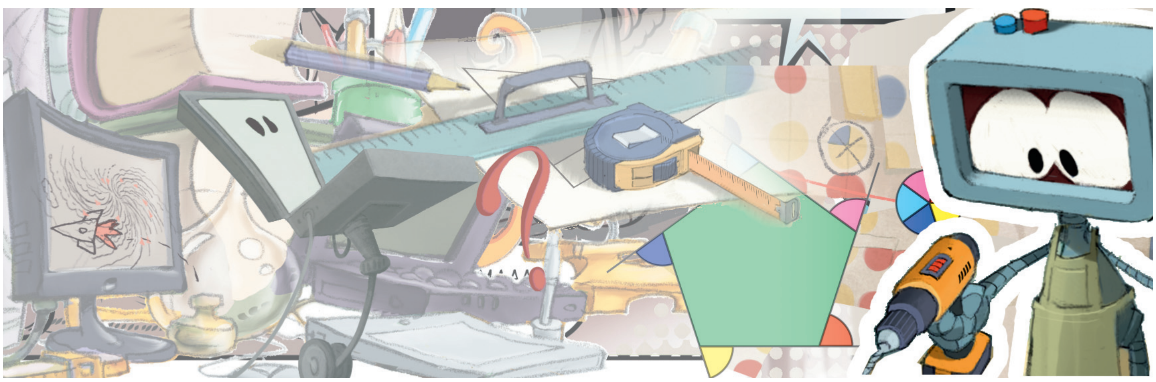
Журнал «Квантик» № 9, сентябрь 2022 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С.А. Дориченко
Редакция: В.Г. Асташкина, Т.А. Корчемкина, Е.А. Котко, Г.А. Мерзон, Н.М. Нетрусова, А.Ю. Перепечко, М.В. Прасолов, Н.А. Солодовников
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р.К. Шагеева, И.Х. Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**
Подписка на журнал в отделениях почтовой связи
- **Почта России:** Каталог Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)
- **Почта Крыма:** Каталог периодических изданий Республики Крым и г. Севастополя (индекс **22923**)
- **Белпочта:** Каталог «Печатные СМИ. Российская Федерация. Казахстан» (индексы **14109** и **141092**)

Онлайн-подписка на сайтах
- Почта России: **podpiska.pochta.ru/press/ПМ068**
- агентство АРЗИ: **akc.ru/itm/kvantik**
- Белпочта: **kvan.tk/belpost**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 29.07.2022
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831) 218-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

СОДЕРЖАНИЕ



ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

Иван Высоцкий

СТАС И ЗАДАЧА КОЛЛЕКЦИОНЕРА

Часть 1

ВОСКРЕСЕНЬЕ, 20:30

– ...И как теперь?.. – Теперь Стасу позарез нужно было протащить отставшую белую фишку в *дом*[1]. О выигрыше речь уже не шла. Можно лишь спастись от позорного разгрома, но только если злополучную фишку, которую Стас упустил из виду, удастся загнать в дом одним броском двух костей. Нужно выбросить сумму 10 или больше!

– Дерзай! – на губах у папы Лёши играла лёгкая улыбка. Ещё бы – ему-то до победы оставался один бросок, причём с любым результатом. И если будет *марс*[2], то преимущество Стаса 2:1 сразу преобразуется в безобразный проигрыш со счётом 2:3, поскольку игра идёт до 3 очков у победителя.

Стас покрепче сжал *зары*[3] в кулаке, согрел их немного, мысленно бросил и представил, как они катятся по инкрустированной доске и как радостно ёкает сердце и как расстраивается папа, когда на костях выпадает *шеш-беш* или даже *ду-шеш*[4]. Правда, больше расстроится Патрик, у которого вечерняя прогулка задержится минут на двадцать.

– Один к шести – не такие уж плохие шансы, – оптимистично заявил Стас.

– Ну-у, не то чтоб очень, – протянул папа...

Зары с приятным рокотом побежали по узорчатому буковому полю. Одна остановилась шестёркой кверху, а вторая подкатилась к бортику доски, лениво перевалилась через него, соскочила с края стола и устремилась вниз – туда, где в ожидании прогулки терпеливо лежал Патрик. Эрдельтерьер испуганно вскинулся, инстинктивно клацнул зубами, вскочил и понёсся в прихожую. Стас ринулся за ним, соображая на бегу: «Выпала шестёрка. Значит, если у Патрика в пасти 4, 5 или 6 очков, то ура. Вероятность этого 1/2. А если заново бросать обе кости, то снова 1/6. Нет, лучше допрошу Патрика».

– Патрик, что там? Давай хотя бы четвёрку! Бросай!

Патрик удивительно быстро согласился выплюнуть добычу, так что Стас на секунду усомнился в том, что зары из натуральной кости, а не из натурального пластика. Кубик сделал пару ленивых прыжков по ламинату и замер, издевательски уставившись в потолок крупным красным глазом.

– Одно очко! – крикнул Стас в кухню и услышал в ответ добродушный папин смешок.

Патрик заплясал около ошейника, пытаясь одновременно немного его пожевать, сорвать его с крючка и засунуть в него башку.

– Ладно, чудище, пошли гулять. – Стас положил зару на полочку около зеркала и стал натягивать куртку и ботинки.

Мартовский вечер больше напоминал февральский. Спрятавшись в капюшон, Стас неохотно тащился на поводке за псом, который деловито

[1] В нардах *домом* называется четверть доски, куда игрок ведёт свои фишки, чтобы потом вывести их из игры. Пока все фишки не попали в дом, выводить фишки нельзя.

[2] *Марсом* называется победа, при которой победитель вывел все свои фишки с поля, а проигравший не успел вывести ни одной. Если случился марс, то победителю начисляется два очка, а не одно.

[3] Игральные кости в нардах называются арабским словом *зары*. От этого слова произошло русское слово «азарт» и английское hazard, которое, в свою очередь, переводится на русский как «опасность», «угроза» или «вред».

[4] *Шеш-беш*, *ду-шеш* – названия комбинаций 6 – 5 и 6 – 6 на двух игральных кубиках.

рыскал вдоль тропы, читая на снегу собачьи новости и комментарии с той же лёгкостью, с какой люди делают это в интернете. Некоторые новости особенно нравились Патрику, и тогда он на свой собачий лад ставил им лайк.

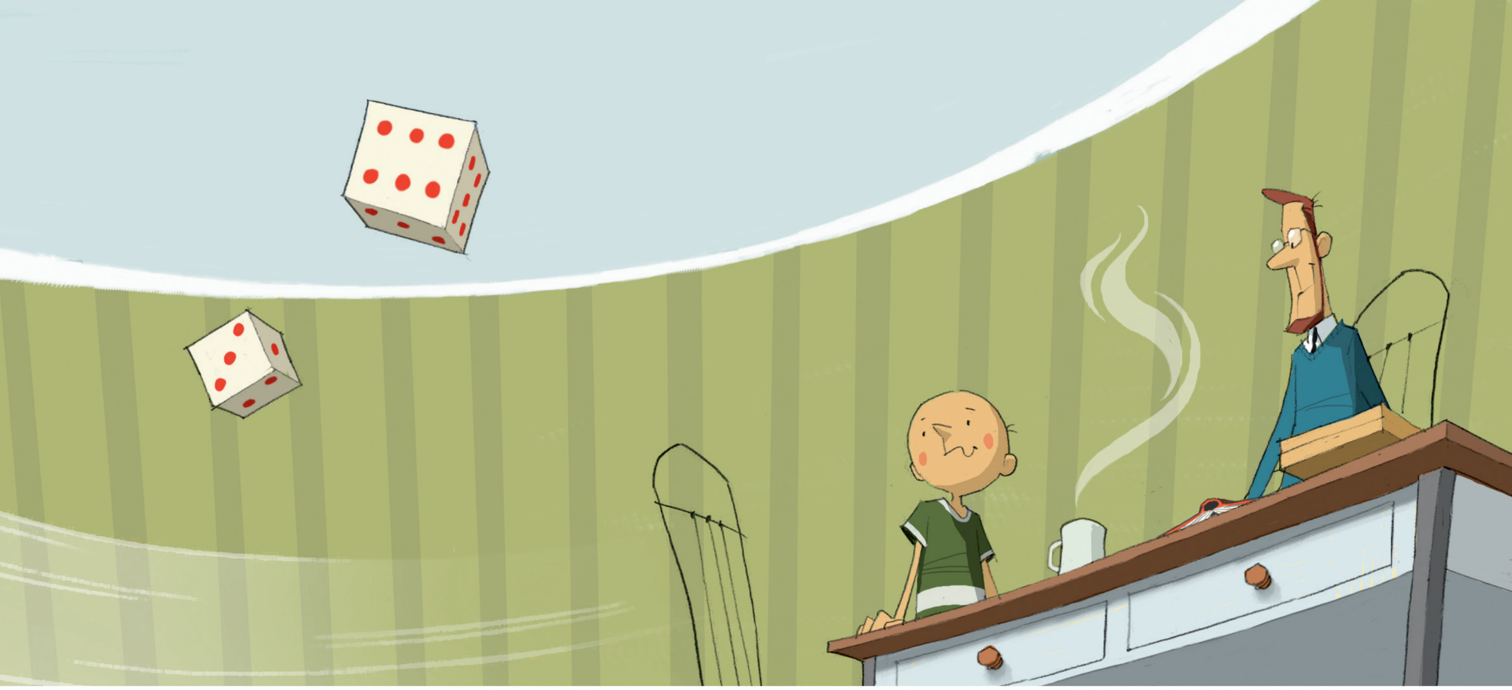
Мысленно Стас уже перенёсся в волнующее завтра, а именно в тот момент, когда они с Наташкой Смирновой после уроков поедут покупать ей подарок ко дню рождения. Стас подарит ей нарды. Конечно, вряд ли удастся найти такие, какие они привезли с Кипра.

О, это были волшебные нарды, из настоящей турецкой антикварной лавки, где продавалась всякая всячина от верблюжьих сёдел до дисковых телефонов середины прошлого века. Доска из бука с перламутровыми и черепаховыми врезками, тончайшей резьбой по краям и арабской вязью в чёрных кругах с наружной стороны. Фишки в виде средневековых воинов были искусно вырезаны из кости.

Перескочив на нарды, мысли сами собой вернулись к драматической концовке последней партии. Вероятность выигрыша была 1/6. Неудивительно, что он проиграл. А если бы он всё же бросил кости ещё раз, сославшись на сбежавшую зару? А если бы и при второй попытке вмешался Патрик? Интересно, сколько раз пришлось бы бросать пару костей, чтобы добиться нужной суммы? Вероятность 1/6, думал Стас. Ну хорошо, пусть проще. Пусть не две, пусть всего одна кость, и нужно выбросить число 6. Вероятность этого как раз 1/6. Сколько раз придётся бросать? Шестёрка может выпасть сразу, а может со второго раза, или с третьего, или с восемнадцатого. Так что вопрос даже не имеет смысла. Но ведь я же этот вопрос задаю: как долго ждать шестёрку? Нет, вопрос осмысленный и ясный. Только не очень ясный.

ВОСКРЕСЕНЬЕ, 21:30

После мытья лап Патрик, чуть не опрокинув тазик, с дробным топотом



поскакал в кухню к миске гречки с мясом и усердно взялся за дело. Папа тоже был на кухне – читал очередной шведский детектив.

– Кхе-кхе, – вежливо объявил своё присутствие Стас.

– Мгм?

– Вот смотри, если одну кость бросать много раз, пока не выпадет шестёрка, и тогда уже не бросать, то сколько раз придётся бросать?

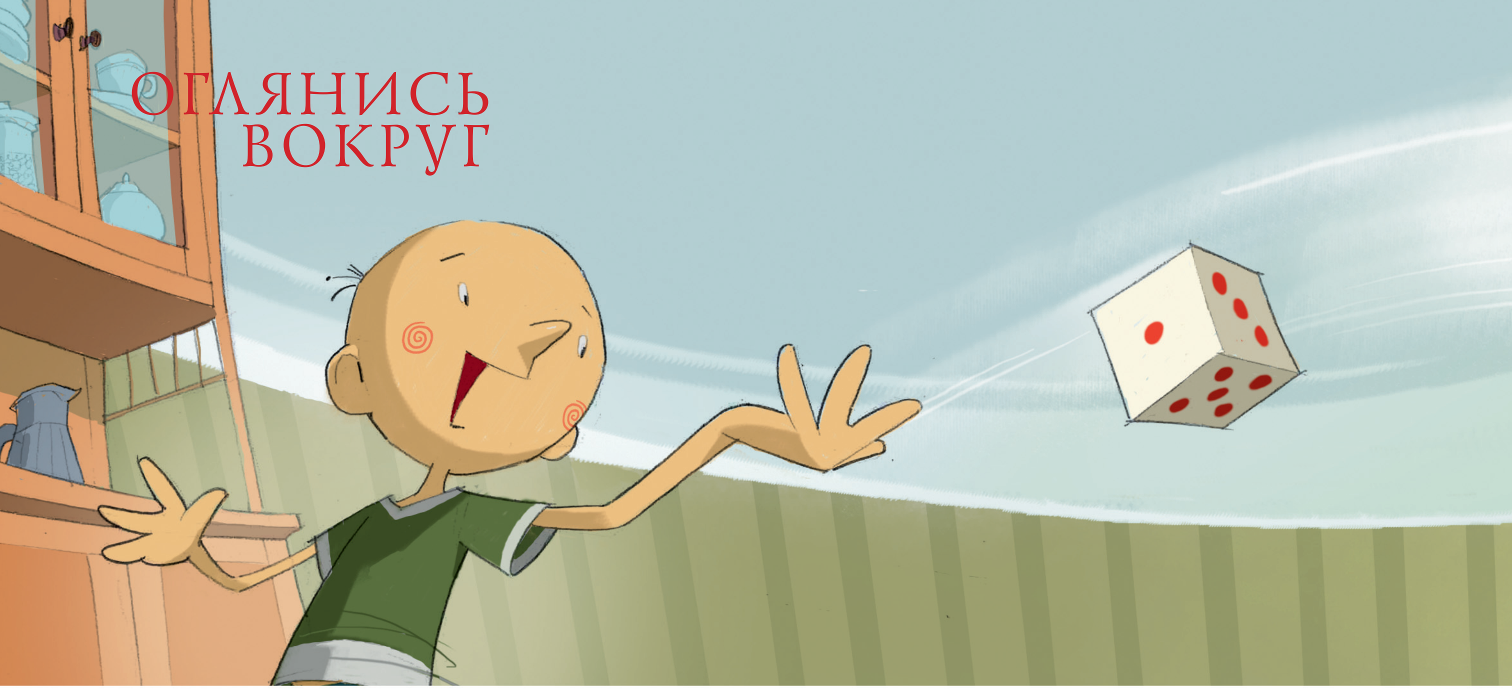
– М-м. Как это – много бросать... и не бросать?

– А вот как шестёрка выпадет, так больше и не бросать.

Папа Лёша положил раскрытую книгу на стол корешком вверх, в точности так, как мама много раз просила не класть книги (хорошо, что она в командировке). Затем обратил на Стаса невидящие глаза. Стас терпеливо ждал – ритуал был хорошо знаком. Наконец папин взгляд сфокусировался где-то в пяти сантиметрах над правым ухом Стаса:

– Я верно понял, что мы бросаем кубик и ищем математическое ожидание числа бросков до выпадения первой шестёрки?

Если бы папа сказал: «Ты бросаешь», или «Кто-то бросает», или – ещё хуже – «Кубик бросают», то Стас не дал бы и тухлого яйца за то, что дело выгорит. Но уж если «мы бросаем», то – бинго! Стас давно заметил, что математики готовы что-то по-настоящему обсуждать только во множественном числе и при личной, так сказать, вовлеченности. Недавно на папином столе Стас (случайно) заметил раскрытую книгу, которая лежала страницами вниз (как нельзя). Разумеется, Стас перевернул её и нечаянно выхватил глазами начало абзаца: *«Настоятельно советуем читателю на досуге самостоятельно убедиться в этом свойстве частичных сумм гармонического ряда, рассмотрев экспоненциальную производящую функцию чисел Стирлинга первого рода как...»* или что-то похожее. Поражённый Стас



был согласен рассмотреть что угодно, но прежде решил узнать имена тех людей, кто считает, что досуг следует проводить именно таким образом. Просто из любопытства. Автор у книги был один, и к тому же это был папа Лёша.

Стас как-то спросил, почему математик, даже один, всегда пишет во множественном числе. Папа подумал и сказал, что это потому, что автор не просто сообщает свои мысли, а рассчитывает на участие читателя и что математическая книга или даже статья – это не газета, а приглашение к совместным размышлениям.

– То есть мы ищем математическое ожидание числа бросков кости до выпадения первой шестёрки. Ты про геометрическую прогрессию что знаешь?

– Всё знаю! – уверенно заявил Стас. – Только ничего не помню.

– Да, проблема. Хорошо, обойдёмся без прогрессий. Представь, что ты много раз бросаешь кубик.

– До шестёрки.

– Нет, просто бросаешь и бросаешь. – Папа открыл нарды, до сих пор лежавшие на кухонном столе, и нахмурился. – Кстати, где вторая зара?

Стас рванул в прихожую и тут же вернулся, держа беглянку на раскрытой ладони. Уф-ф, никуда не делась.

– Бросай.

– Сколько раз?

– Просто бросай, и будем подсчитывать шестёрки.

Некоторое время Стас сосредоточенно бросал зары. Для ускорения взял и вторую. Папа считал шестёрки. Дело двигалось быстро, но после двухсотого броска Стас взмолился.

– Пап, ну хватит. Двести раз уже. Дальше-то что?

– Ладно, достаточно. Ты бросил две кости двести раз, то есть всего 400 раз. Сколько раз выпала шестёрка?

– Не знаю. Ты же считал!

– А, ну да. Так вот, Стас, шестёрка выпала 64 раза. Как думаешь, это нормально?

– Что ж тут ненормального? Ведь все шесть граней должны примерно поровну... Делим 400 на 6. Будет... будет примерно 67. А на самом деле 64. Всё нормально.

– Вот и ответ на твой вопрос. – И папа демонстративно потянулся к детективу. Он явно давал понять, что вся нужная информация у Стаса есть и нужно ещё одно мыслительное движение. Но какое? Стас попытался по-разному сформулировать одну и ту же мысль. Иногда помогает.

1. Шестёрка должна выпасть примерно 67 раз из 400.

2. Все грани выпадают примерно одинаковое число раз.

3. Шестёрка выпадает примерно при каждом шестом броске.

4. Бросаем-бросаем и вдруг шестёрка, потом ещё бросаем – и снова шестёрка. И так много раз...

Стоп! Вот оно! Броски разбиваются на группы, и в конце каждой группы шестёрка. А средняя длина каждой группы шесть. Значит, чтобы получить шестёрку, кость придётся в среднем бросить шесть раз.

Впрочем, почему только шестёрку? Вероятность выпадения одного очка тоже имеет вероятность 1/6, значит, и единицу нужно ждать в среднем при шестом броске. И двойку. И вообще, если вероятность события 1/6, то оно в среднем наступает с шестой попытки.

– Математическое ожидание шесть, – выдавил Стас и сполз со стула.

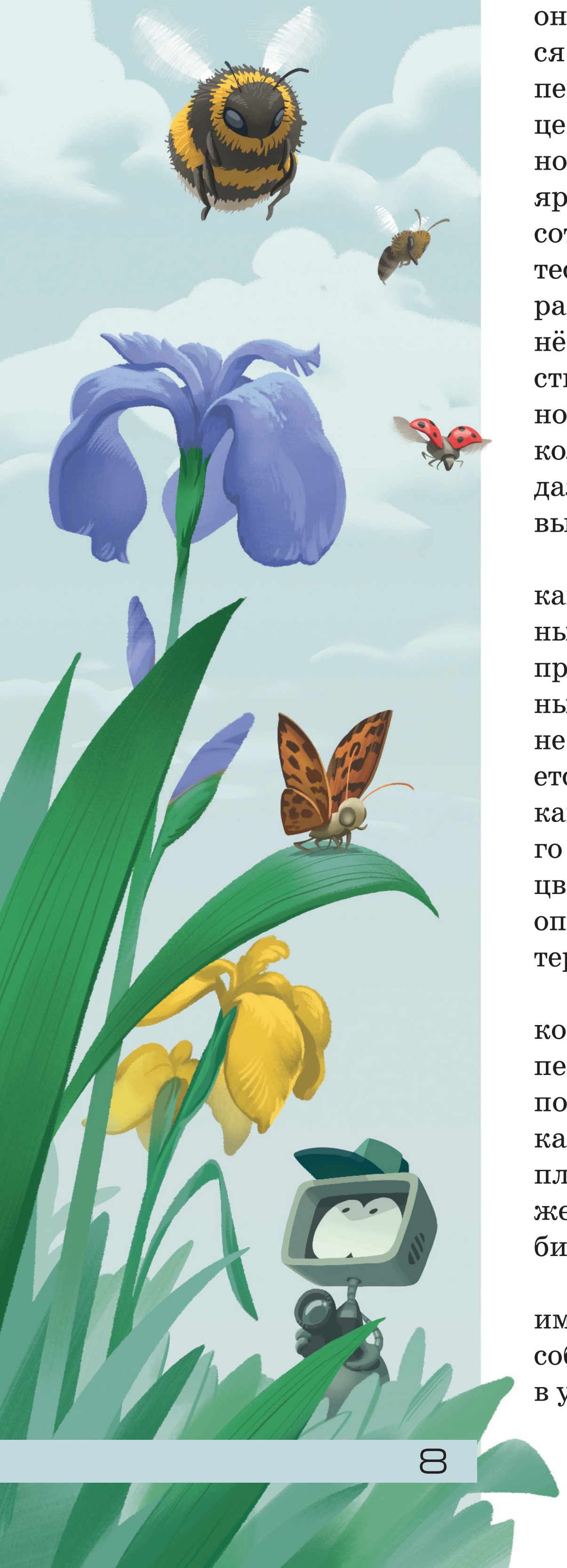
– Угу... – папино мычание определённо было утвердительным.

Прошлёпав из кухни в свою комнату, Стас уселся за стол и подумал, что решение, конечно, найдено, но оно какое-то не очень математическое. Должны же быть какие-нибудь формулы, уравнения, преобразования там разные... Размышляя над этим, Стас рассеянно наблюдал за Патриком, который загнал мячик в щель между диваном и стеной.

Продолжение в следующем номере

Художник Алексей Вайнер

Сергей Лысенков



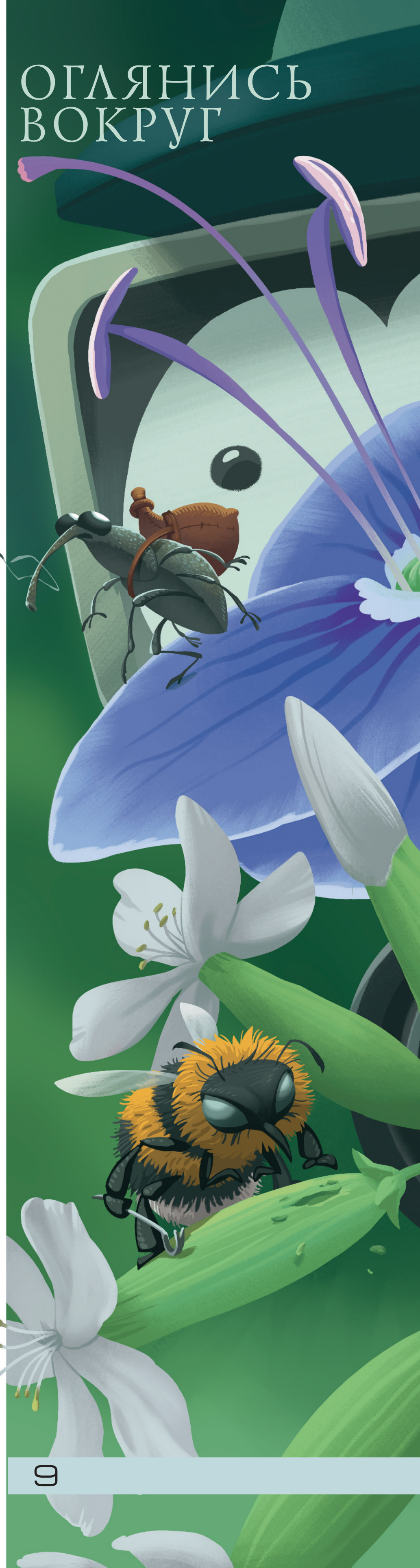
БЕЗЗАКОНИЕ НА ЦВЕТКАХ

Насекомые, кружащиеся вокруг цветущих растений, – привычная картина тёплых времён года. Что они там делают? Ответ вроде бы известен – кормятся нектаром и пыльцой и опыляют растения, то есть переносят пыльцу с тычинок одного цветка на рыльце пестика другого цветка, благодаря чему, в конечном итоге, образуются семена. Это один из самых ярких примеров *мутуализма* – взаимовыгодного сотрудничества между разными видами. Но вдумайтесь – опыляемые животными растения доверили своё размножение другим организмам! Однако распространённость этого явления свидетельствует о его успешности. Самые частые опылители – насекомые, но в переносе пыльцы могут участвовать и птицы (прежде всего колибри), летучие мыши, а в крайне редких случаях – даже нелетающие млекопитающие (например, медовые поссумы опыляют австралийскую банксию).

Зачем опыление нужно растениям – понятно. А вот какая от него выгода насекомым (и другим животным)? Вообще говоря, никакая – это лишь побочный продукт их пищевого поведения, умело использованный растениями! И потому неудивительно, что далеко не всегда посещение насекомым цветка сопровождается опылением. Поэтому в биологии опыления (или, как её ещё называют, *антэкологии*, от древнегреческого *anthos* – цветок) принято говорить о *посетителях* цветков какого-либо вида растений, которые могут быть опылителями, а могут и не быть. И тут биологическая терминология начинает перекликаться с юридической.

Тех насекомых, которые, посещая цветок, не только пачкаются в пыльце, но ещё и пачкают ею рыльце пестика, называют *законными опылителями*. А тех посетителей, которые пользуются ресурсами цветка, не опыляя его, антэкологи «обвиняют» в преступлениях против собственности – воровстве и грабеже! Впрочем, юристы, скорее всего, отметили бы, что биологи употребляют эти термины некорректно.

Воровством называется тайное хищение чужого имущества, а грабежом – открытое, когда законный собственник или кто-то ещё видит, что происходит. Есть в уголовном кодексе и более тяжкое преступление – раз-



бой, когда присвоение происходит с применением (или угрозой применения) опасного для жизни и здоровья насилия. То есть незаметно вытащить кошелёк из кармана – это кража, выхватить его из рук – грабёж, а если при этом ещё и угрожать ножом – то разбой.

Что же делают незаконопослушные насекомые? *Нектарными грабителями* называют тех, кто добывает нектар, повреждая цветок, прокалывая или прогрызая венчик (юридически корректнее было бы называть их разбойниками, но в русском языке закрепился термин «грабители»). Нектар у многих растений труднодоступен, спрятан в глубине цветка, и чтобы добраться до него, насекомым приходится прямо-таки протискиваться, пачкаясь в пыльце – поэтому некоторые выбирают такой обходной путь, как шмель на мыльнянке (рис. 1). А вот *нектарные воры* – так называют насекомых, которые потребляют нектар, не повреждая цветок, но и не перенося пыльцу, – могут быть и на лёгких в обращении цветках. Воровство нектара очень распространено, часто меньше половины всех посетителей оказываются законными опылителями! Обычно это поведение в каком-то смысле непреднамеренно – например, из-за мелких размеров насекомое может добраться до нектара, не испачкавшись в пыльце, как жук-долгоносик на веронике дубравной (рис. 2).

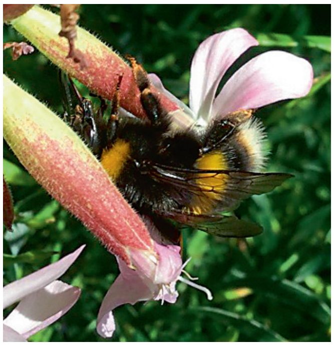


Рис. 1

Рис. 2

А вот нектарные грабители вполне намеренно добывают нектар не так, как это надо растению. В этом замечены лишь некоторые пчёлы, прежде всего шмели. Интересно, что такое поведение – не видовая особенность и даже не индивидуальная. Одна и та же особь может то залезать в цветок как законный опылитель, то прогрызать венчик как грабитель. Понаблюдайте за шмелями, посещающими иван-да-марью: насекомые то залезают в цветок, то садятся на него сверху.

Медоносные пчёлы (их разводят на пасеках) сами не прогрызают цветки, но могут, добывая нектар, пользоваться чужими дырками – таких насекомых называют *вторичными нектарными грабителями*.

Интересный пример воровства нектара, отчасти близкого к грабительству, можно наблюдать на жёлтых ирисах. Шмели добывают нектар, расположенный в основании цветка, двумя способами. Чаще всего они честно протискиваются вглубь венчика (рис. 3), а пыльца пачкает им спину. Но иногда они подбираются к цветку сбоку, засовывая хоботок в нектарник (рис. 4) – не прогрызая венчик (то есть это не «грабёж»), но и не соприкасаясь с пыльцой (то есть всё-таки «воровство»). Такое поведение чаще можно видеть у более крупных шмелей, которым, видимо, труднее залезать в цветок.

Рис. 3

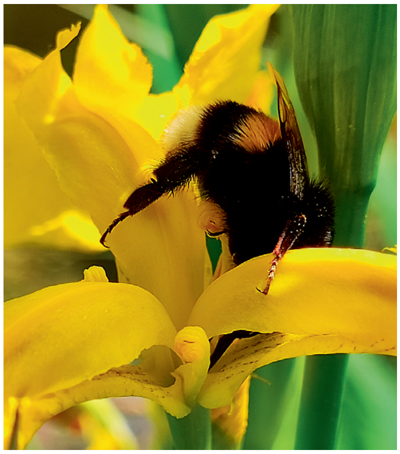


Рис. 4

Для защиты от нектарных грабителей растения могут использовать несколько приспособлений: густые соцветия (в этом случае насекомое не может подлезть к цветку сбоку), плотный венчик (его сложнее прогрызть), большой объём нектара (чтобы его хватало и для привлечения настоящих опылителей). Впрочем, исследования показывают, что как нектарные грабители, так и нектарные воры довольно часто не очень вредят растениям: число семян в плодах, завязавшихся из посещённых ими цветков, не отличается от такового в плодах, завязавшихся из цветков, посещённых только настоящими опылителями.

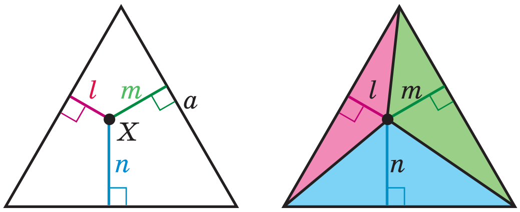
Присмотритесь к цветкам с длинными венчиками (иван-да-марья, мыльнянка, жимолость) – вдруг и вам доведётся увидеть грабёж нектара?

Авторы фото:
1 – Елена Устинова,
2 – Сергей Лысенков,
3 и 4 – Наталья Рятова
Художник Мария Усеинова

ТЕОРЕМА ВИВИАНИ

Материал подготовил
Григорий Мерзон

Возьмём точку X внутри равностороннего треугольника. Оказывается, сумма расстояний от точки X до сторон треугольника не зависит от выбора точки!



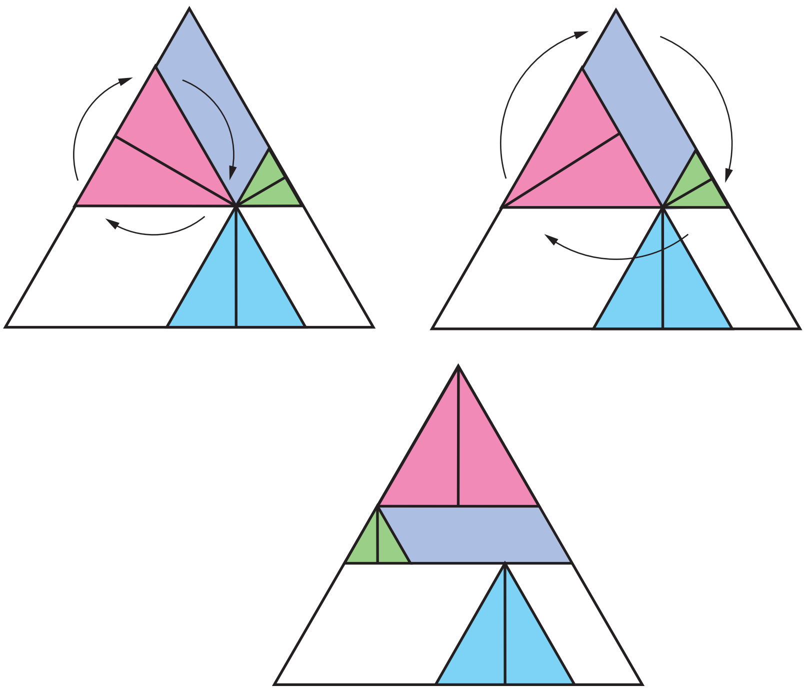
$l + m + n$ постоянно

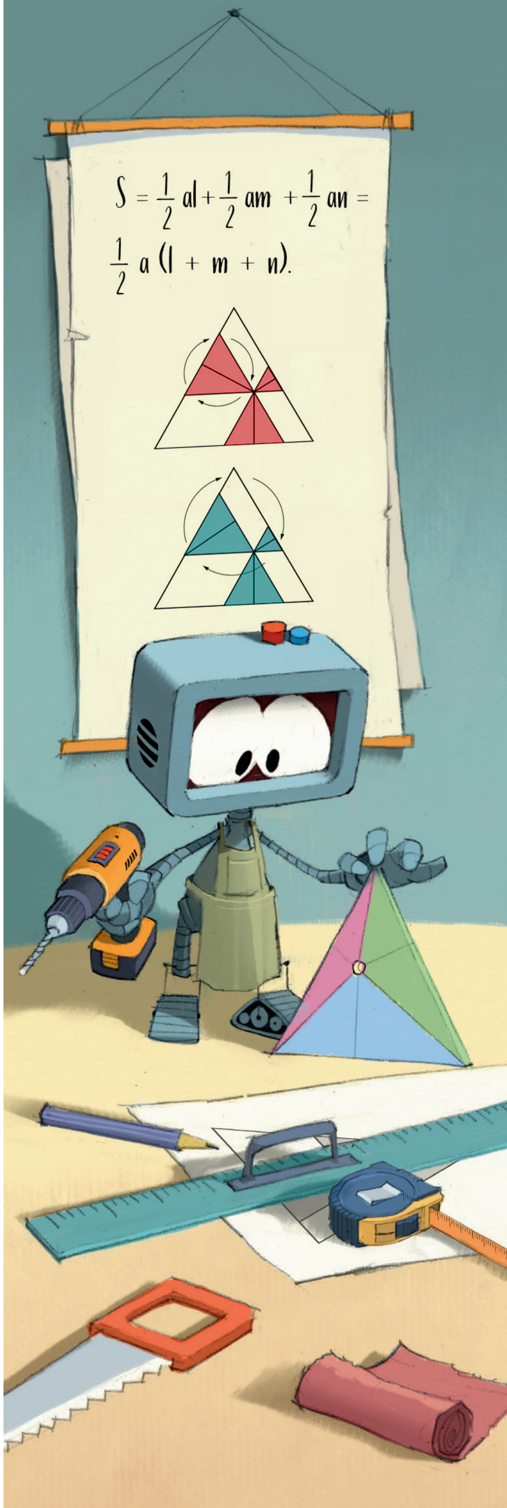
Можно доказать это так. Соединим X с вершинами треугольника. Тогда площадь S исходного треугольника – это сумма площадей трёх образовавшихся треугольников:

$$S = \frac{1}{2}\,al + \frac{1}{2}am + \frac{1}{2}\,an = \frac{1}{2}\,a\,(l + m + n).$$

Вот и получается, что сумма $l + m + n$ равна $2S/a$ и не зависит от выбора точки.

А можно никаких формул не писать, а посмотреть на картинки ниже.





Художник Алексей Вайнер

Математический кружок

Григорий Мерзон

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЧЕРЕПАХА и ЧИСЛА СОЧЕТАНИЙ

Таблица математической черепахи

В нижней левой клетке доски сидит математическая черепаха. Каждым ходом она умеет сдвигаться на клетку вправо или на клетку вверх (рис. 1). Запишем в каждой клетке таблицы, сколькими способами до неё может добраться черепаха.

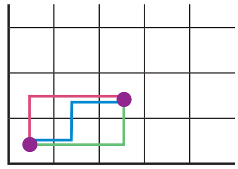


Рис. 1. Все пути черепахи в третью клетку второй строки

1	3	?	?	?
1	2	3	4	5
1	1	1	1	1

Рис. 2. Начинаем заполнять «таблицу математической черепахи»

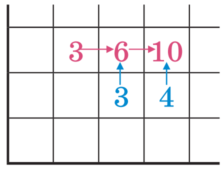


Рис. 3. Число 6 получается как сумма чисел под ним и слева от него; далее аналогично получается число 10...

Ясно, что в любой клетке первой строки стоит число 1 (в неё можно попасть, только двигаясь всё время вправо). Догадались, какие числа стоят во второй строке? Правильно – последовательные натуральные: 1, 2, 3, ... (рис. 2).

Удобно заполнять клетки числами одну за другой: в каждую клетку черепаха может прийти либо слева, либо снизу – поэтому число в каждой клетке равно сумме чисел в её «соседях» слева и снизу (рис. 3).

Например, в третьей строке стоят числа 1, $1+2$, $1+2+3$, $1+2+3+4$, ... – их ещё называют *треугольными* (рис. 4, *а*). А в четвёртой строке стоят суммы последовательных треугольных чисел – это количества шариков в пирамидках (рис. 4, *б*).

а) 4-е треугольное число $1+2+3+4=10$

б) 4-е «тетраэдральное число» $1+3+6+10=20$

Рис. 4.

Задача 1. Найдите формулу для N-го треугольного числа.

Задача 2. Докажите, что в черепашьей таблице все числа на диагонали (кроме левого нижнего) – чётные.

Кодируем пути

Каждый путь черепахи можно закодировать «программой» (последовательностью) из букв П («вправо») и В («вверх»). Если конец пути расположен на X клеток правее и на Y клеток выше начала, то в программе будет X букв «П» и Y букв «В», всего $X+Y$ (рис. 5).

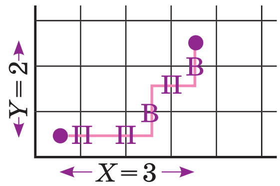


Рис. 5. Путь черепахи в 4-ю клетку 3-й строки («в клетку (3,2)»), соответствующий «программе» ППВПВ

Так значит, каждой клетке можно дать своё имя! Оно состоит из двух чисел: первое – сколько на пути черепахи в эту клетку будет ходов вправо, а второе – сколько ходов будет вверх. Числа будем записывать в скобках через запятую. Например, (0, 0) – это левый угол (никуда идти не надо).

Итак, в клетке (X, Y) черепашьей таблицы стоит количество программ из X букв «П» и Y букв «В». Чтобы задать такую программу, нужно выбрать, на каких позициях будет стоять буква «В». У нас Y букв «В», а мест для них имеется $X+Y$. Значит, программ столько же, сколько есть способов выбрать Y предметов из $X+Y$.

Например, в N-й клетке второй строки («клетке ($N-1$, 1)») стоит число N: выбрать, какой из N ходов будет ходом вверх, можно как раз N способами.

Задача 3. Заменим в программе, ведущей в клетку (X, Y), все «П» на «В», а все «В» на «П». В какую клетку приведёт новая программа?

Треугольник Паскаля

Количество способов выбрать k предметов из n обозначают $\binom{n}{k}$ или C_n^k (в двух обозначениях k и n действительно в разных местах, это не опечатка). А «таблицу математической черепахи» обычно поворачивают и рисуют в виде треугольника из чисел, который называют *треугольником Паскаля* (рис. 6). Будем нумеровать и его строки, и числа в строках, причём счёт начинаем с нуля. Например, самое верхнее число треугольника – это нулевое число нулевой строки (а, скажем, 2-е число 5-й строки равно 10). Тогда k-е число в n-й строке треугольника Паскаля – это как раз число $\binom{n}{k}$.

Мы уже умеем вычислять эти числа последовательно, строка за строкой: на левой и правой сторонах треугольника Паскаля стоят единицы, а каждое число внутри – сумма двух чисел над ним. Другими словами, $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ (на рисунке 6 эти числа соединены стрелочками для $n = 4$, $k = 2$).

1	4	10	20
1	3	6	10
1	2	3	4
1	1	1	1

→

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Рис. 6. Таблица математической черепахи и треугольник Паскаля

Задача 4. Как связаны числа $\binom{n}{k}$ и $\binom{n}{n-k}$? Как эту связь объяснить?

Задача 5. Найдите суммы чисел в первых нескольких строках треугольника Паскаля. Что получается? Почему?

Задача 6. Выпишите первые 10 строк треугольника Паскаля и обведите в них все нечётные числа. Разберитесь, в каких строках будут обведены все числа.

Если внимательно посмотреть на треугольник Паскаля, можно обнаружить ещё массу замечательных закономерностей (попробуйте!).

Строки треугольника Паскаля

Решим такую задачу: сколькими способами можно выбрать в классе из n человек команду из k обычных игроков и одного капитана?

Можно сначала выбрать обычных игроков – одним из $\binom{n}{k}$ способов, а потом назначить одного из оставшихся $n - k$ людей капитаном. Получаем ответ $\binom{n}{k} \cdot (n-k)$.

Но можно рассуждать иначе! Сначала выберем всю команду из $k + 1$ игроков – одним из $\binom{n}{k+1}$ способов, а потом пусть они выберут среди себя капитана – одним из $k + 1$ способов. Получаем ответ $\binom{n}{k+1} \cdot (k+1)$.

Какое из этих рассуждений правильное? Оба правильные! На самом деле, мы доказали тождество

$$\binom{n}{k} \cdot (n-k) = \binom{n}{k+1} \cdot (k+1).$$

Задача 7. Докажите похожим образом, что
$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}\cdot\frac{n}{k}.$$

Возможно, вы уже заметили, что числа в строках треугольника Паскаля сначала возрастают (до середины), а потом убывают – такое свойство называется *унимодальность*. Можно объяснить это так: по только что доказанному, $(k+1)$-е число в n-й строке получается из k-го умножением на $(n-k)/(k+1)$; пока $k<(n+1)/2$, числитель больше знаменателя и следующее число больше предыдущего (а потом наоборот).

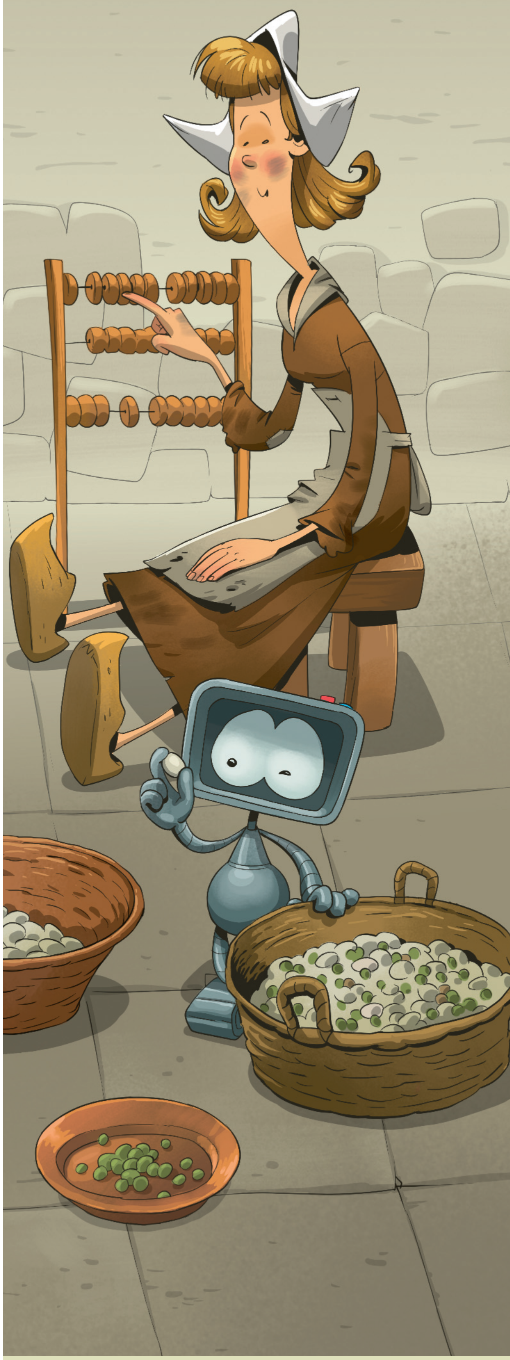
Задача 8. Докажите, что при $1<k<n-1$ число $\binom{n}{k}$ не может быть простым.

Формула для числа сочетаний

Те, кто решили задачу 6, доказали фактически и явную формулу для чисел сочетаний:
$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}=\frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\binom{n-2}{k-2}=\ldots=$$
$$=\frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+2}{2}\cdot\binom{n-k+1}{1}=\frac{n\,(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$$
(где $k!$ – обозначение для произведения $1\cdot2\cdot\ldots\cdot k$).

Можно объяснить эту формулу и по-другому. Будем выбирать k предметов из n последовательно всевозможными способами и записывать каждый выбор на бумажку. Первый предмет можно выбрать одним из n способов; после того как первый выбран, второй можно выбрать $n-1$ способами (любой из оставшихся) и так далее. То есть мы запишем на бумажке всего $n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ строк. Но в них каждый из $\binom{n}{k}$ наборов предметов будет встречаться $k!$ раз: переставленный всевозможными способами. Вот и получается, что
$$\binom{n}{k}=\frac{n\,(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Эта явная формула не всегда удобна. Так, если мы хотим найти число способов выбрать 99 предметов из 100, вряд ли разумно сначала вычислять 100! и 99!, а потом делить одно на другое... Для вычислений (в том числе компьютерных) обычно удобнее рекуррентное задание (последовательное вычисление строки за строкой). А для доказательства разных фактов про числа сочетаний полезно помнить про их комбинаторный смысл (выбор k предметов из n, количество путей...).

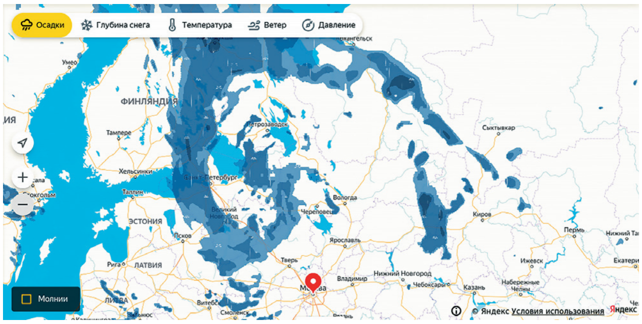


Художник Мария Усеинова

КАРТА ОСАДКОВ: ОТВЕТ

Максим Прасолов

В «Квантике» №8 за 2022 год был вопрос про карту осадков. На ней можно увидеть, где идёт дождь. Москва отмечена красной точкой. Куда дует ветер в Москве?



На первый взгляд здесь ничего не дано, но посмотрим на длинную тучу, закрученную в спираль. Чем ближе к центру, тем у́же туча. Подобную картинку можно увидеть в водовороте! Если капнуть краской на воду, пятно будет плыть вокруг водоворота, медленно приближаясь к нему. Чем ближе к водовороту, тем быстрее крутится вода, поэтому пятно будет менять свою форму (рис. 1). Ближние к водовороту слои будут обгонять дальние, и вскоре пятно превратится в спираль! Она продолжит крутиться и вытягиваться. По форме спирали можно восстановить направление течения: оно не сильно отличается от направления, в котором надо двигаться вдоль спирали, если стремиться к её центру (рис. 1).

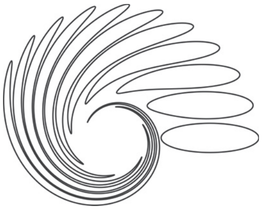


Рис. 1

«Воздуховороты» называются *циклонами*: в них вращается не вода, а воздух. В центре циклона – область пониженного давления. Это то самое давление, о котором говорят в прогнозе погоды. Воздух вращается и немного приближается к центру, поэтому облако, независимо от первоначальной формы, постепенно превращается в спираль. Чтобы определить направление ветра в Москве, посмотрим на направление участка спирали между Москвой и центром циклона: ветер дует примерно на северо-восток; такой ветер называется юго-западным. Это и есть ответ к задаче.

Мы нашли направление ветра, предполагая, что центр циклона неподвижен. Но если вращающийся циклон ещё и перемещается как единое целое – его сдувает какой-то ветер, – нужно сделать поправку на этот ветер.

Куда исчезает воздух в центре циклона? Есть два варианта: вниз и вверх. Но в задаче речь идёт о небольших дождевых облаках. Это самые низкие облака, поэтому вниз уходить воздуху мешает Земля. Значит, в центре нашего циклона воздух поднимается. Это как водоворот, только вверх ногами! Если он сильный, то может поднять вверх даже дом, это называется *смерч*.

А может, мы всё перепутали, и на самом деле эту тучу на картинке не затягивает, а выбрасывает? Действительно, бывает так, что над каким-то участком земли воздух движется вниз, а дальше воздух расходится во все стороны вне этого участка. Это называется *антициклон*. Но при этом дождевые облака возникнуть не могут! Дело в том, что в тёплое время года чем ниже воздух, тем он теплее, а значит, он может удерживать больше воды в виде пара. Если при понижении возникло облако, которое вот-вот прольётся, отчего же оно раньше не пролилось? По этой причине антициклон летом несёт ясную погоду. О том, как всё-таки образуются дождевые облака, можно прочитать в «Квантике» №2 за 2013 год в статье «Почему облака снизу плоские?».

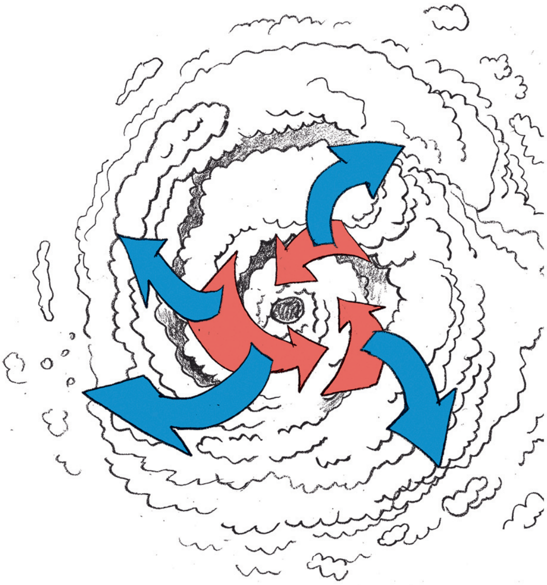
Хорошо, в центре циклона воздух поднимается, а дальше? В космос воздух улететь не может, его притягивает Земля, поэтому он расходится в разные стороны. Это как антициклон, только вверх ногами. Наверху образуются новые облака, которые вылетают из центра в направлении, которое вращается вместе с циклоном. Представьте, что в разбрызгиватель для газона снизу подаётся вода, а дальше она вылетает через носик, который быстро крутится, – получается спираль. Новые облака тоже образуют спираль. При удалении от центра они испаряются. Посмотрите ускоренное видео урагана в интернете по ссылке kvan.tk/hurricane и найдите, какие облака в него засасываются, а какие из него разбрызгиваются.

Получается, что более низкие облака приближаются к центру циклона, а более высокие – удаляются. И действительно, на небе иногда можно найти два облака, которые летят в разные стороны, и даже в противоположные.

Художник Екатерина Жиркова

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

Александр Бердников



ЦИКЛОНЫ И АНТИЦИКЛОНЫ

В статье «Карта осадков: ответ» мы познакомились с циклонами и антициклонами. Но что заставляет их вращаться? Среди циклонов особенно выделяются тропические ураганы; разберёмся на их примере.

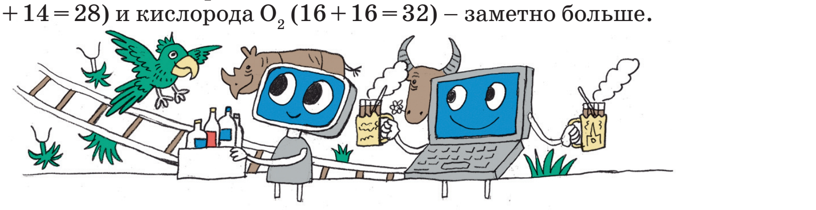
Откуда ураганы вообще берутся? Из тёплого океана испаряется вода. Водяной пар легче воздуха[1], поэтому влажный воздух начинает всплывать в атмосфере. На место всплывшего водуха стекается соседний, собирая по пути ещё больше влаги с окрестного океана. Получается похоже на кастрюлю с кипящей водой, в которой вода поднимается со дна, образуя на поверхности небольшой фонтан. Только вода там всплывает оттого, что её греет дно и этим уменьшает её плотность, а воздух в толще будущего урагана всплывает оттого, что его увлажнил океан и этим понизил его плотность.

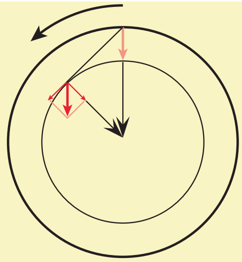
Теперь представим для наглядности, что наш ураган зародился на Северном полюсе (скажем, кто-то стал кипятить Арктику). Если бы Земля была неподвижна, то (изначально неподвижный) воздух окрестностей, разгоняясь к центру урагана, так бы к нему и дул по прямой. Но Земля вращается, и это всё меняет.

Представим, например, полярный круг этаким кольцевым поездом, который едет вокруг полюса и везёт на себе пассажира-атмосферу. Когда воздух с полярного круга идёт к неподвижному полюсу, он будто пытается спрыгнуть с поезда на неподвижный перрон: конечно, он не останавливается как вкопанный, а летит по перрону кубарем, по инерции. Наш полярный поезд делает оборот за 24 часа, проехать ему нужно полярный круг длиной ~16 000 км, так что он делает почти 200 м в секунду – неудивительно, что соскочивший воздух несётся с ураганной скоростью.

В действительности воздух, конечно, не мгновенно оказывается в центре циклона, а движется туда постепенно, будто перескакивая на всё более медленные соседние поезда-широты. С одной стороны, это даёт ему время потормозить на них о землю. С другой стороны, в таком плавном движении можно увидеть ещё один

[1] У молекулы воды H_2O масса $1+1+16=18$ атомных единиц, а у азота N_2 $(14+14=28)$ и кислорода O_2 $(16+16=32)$ – заметно больше.





источник ускорения. Стоя на полюсе, посмотрим на воздух вдали прямо перед собой. Чтобы он приблизился, надо его притянуть, дать импульс («пинок») в направлении центра (розовая стрелка). Но Земля крутится, смещает воздух вбок, и когда он усядется на новую широту, полученный им в начале импульс будет направлен уже мимо центра (красная стрелка). То есть «пинок» помог не только приближению, но и вращению вокруг полюса (мелкие красные стрелки).

Если же воздух идёт от полюса в стороны, ситуация обратная: воздух будто пытается запрыгнуть на поезд, и его уносит в конец вагона. Такова ситуация около экватора – самого длинного и быстрого поезда. Там тёплый воздух поднимается, замена приходит с более медленных широт, не поспевая за вращением Земли, – и в районе экватора дует стойкий ветер на запад.

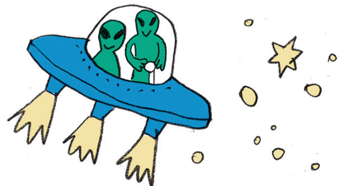
Все эти закручивания – частные случаи общего *эффекта Кориолиса*: с точки зрения вращающегося наблюдателя, движущееся в какую-то сторону тело поворачивает в направлении, обратном вращению наблюдателя.

Этот эффект, можно сказать, складывается из двух частей равной величины. Первая часть: одна и та же «настоящая» скорость тела выглядит для крутящегося наблюдателя по-разному в зависимости от того, как далеко он находится от тела. Например, если тело удаляется от наблюдателя, оно больше отстаёт от вращения и как будто заворачивает в сторону. Вторая часть – постоянное направление скорости выглядит для крутящегося наблюдателя крутящимся в противоположную сторону. Первую часть мы обсуждали, когда прыгали с поезда на перрон, а вторую – когда импульс переходил во вращение.

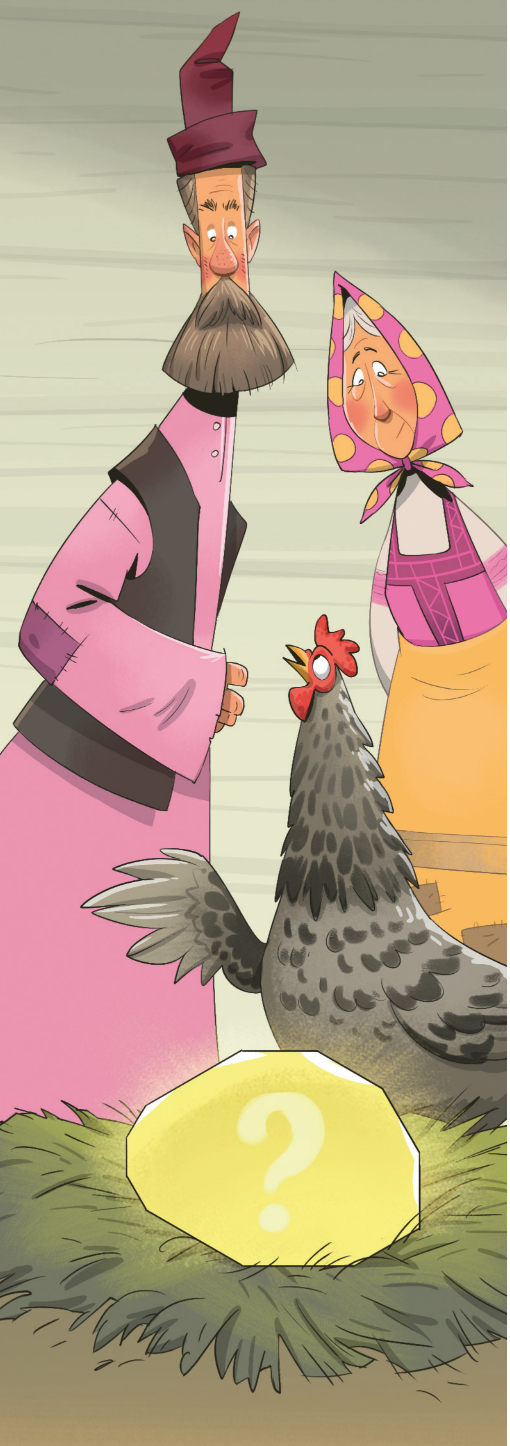
Художник Артём Костюкевич

Итого, великан, стоя на крутящейся Земле и глядя на облака сверху, видит, что сходящийся к месту с низким давлением воздух закручивается по направлению вращения Земли (против часовой стрелки в Северном полушарии и по часовой в Южном), это циклон; а расходящийся от высокого давления воздух закручивается в противоположном направлении, это антициклон.

На видео kvan.tk/hurricane видно, что ураган будто вращается сразу в обе стороны. Почему?



Алексей Доледенок



РАЗБИЕНИЯ МНОГОУГОЛЬНИКА

В «Квантике» № 6 за 2022 год была опубликована задача Николая Белухова:

На плоскости нарисован выпуклый многоугольник M, и дано простое число p. Оказалось, что существует ровно p разбиений многоугольника M на равносторонние треугольники со стороной 1 и квадраты со стороной 1. Докажите, что длина одной из сторон многоугольника M равна $p-1$.

Какие многоугольники хоть как-то можно разбить на правильные треугольники и квадраты с единичными сторонами? Как получается, что разбиений может быть несколько, и как их тогда подсчитывать? При чём здесь вообще простое число? Давайте постепенно отвечать на эти вопросы. Для удобства будем называть квадраты и правильные треугольники *плитками* (по условию все стороны плиток равны 1). Все встречающиеся далее многоугольники сложены из таких плиток.

Сколько вершин?

Сначала поймём, что у многоугольника M не может быть слишком много вершин. Каждый угол многоугольника M либо совпадает с углом какой-то плитки, либо нет – тогда в нём стыкуется несколько плиток, то есть он составлен из углов 60° и 90°. Так как M выпуклый, его возможные углы – это 60°, 90°, 120° и 150°.

Но тогда внешние углы у M могут принимать значения лишь 120°, 90°, 60° или 30°. А сумма внешних углов любого выпуклого многоугольника равна 360° – это видно из рисунка 1 на примере пятиугольника.

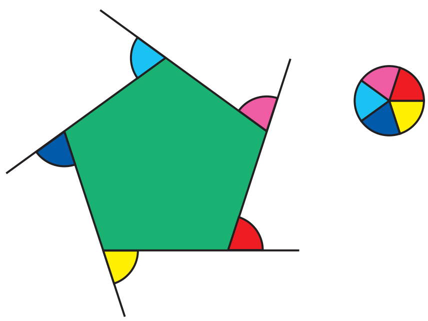


Рис. 1

Даже если все внешние углы у M равны 30°, то у него будет $360°/30° = 12$ вершин, а если какие-то внешние углы больше, то вершин у M будет меньше 12.

Перейдём теперь к разбиениям многоугольника. Назовём *каёмкой* разбиения все плитки, которые имеют хотя бы одну общую точку с границей многоугольника (рис. 2).

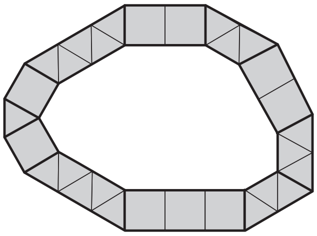


Рис. 2

Как устроена каёмка?

Посмотрим на плитку, которая примыкает своей стороной к стороне многоугольника – например, к AB. Если плитка квадратная, на стороне AB образуется угол 90°, который можно покрыть только квадратной плиткой. Поэтому все оставшиеся плитки, которые примыкают стороной к AB, – тоже квадраты (рис. 3).

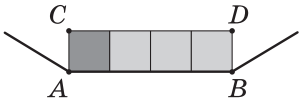


Рис. 3

Если же плитка треугольная, на стороне AB образуется угол 120°, который можно покрыть только двумя треугольными плитками. Поэтому все оставшиеся плитки, которые примыкают стороной к AB, – тоже треугольники (рис. 4).

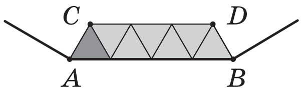
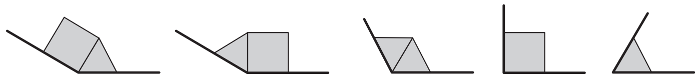


Рис. 4

Если каёмка многоугольника – это не весь многоугольник, то отбросим её. Останется многоугольник поменьше. Что про него можно сказать? Если к стороне AB старого многоугольника примыкали квадраты, то соответствующая сторона CD нового многоугольника параллельна AB и имеет ту же длину (рис. 3). Если к стороне AB примыкали треугольники, то соответствующая сторона CD параллельна AB и короче неё на 1 (рис. 4).

Отдельно отметим случай, когда к стороне примыкал один треугольник. Сторона тогда просто исчезнет, но нам будет удобнее думать, что она есть, но имеет длину 0. Таким образом, стороны нового многоугольника будут параллельны сторонам исходного, а их длины будут либо такими же, либо меньше на 1. В частности, количество ненулевых сторон у нового многоугольника не больше, чем у старого, и он выпуклый.

Теперь представим, что от разбитого на плитки многоугольника оставили только контур, а границы всех плиток стёрли. Можно ли восстановить каёмку разбиения? Для ответа на этот вопрос посмотрим на какой-нибудь угол многоугольника. Если он равен 150°, плитки могут примыкать к углу двумя способами, иначе – единственным образом (рис. 5).



150° 150° 120° 90° 60°

Рис. 5

Когда мы определимся с тем, как плитки примыкают к выбранному углу, вся остальная каёмка восстановится однозначно! И правда, сначала восстанавливается часть каёмки, примыкающая к сторонам угла, затем разбиения двух соседних углов и т. д.

Если имеется угол, отличный от 150°, начнём восстанавливать каёмку с него. Получим, что она определяется единственным образом. Отбросим каёмку. У оставшегося многоугольника количество ненулевых сторон будет не больше. Вспомним, что если у многоугольника, разбитого на плитки, меньше 12 ненулевых сторон, то у него найдётся угол, отличный от 150°. Поэтому каёмка этого многоугольника тоже определяется однозначно. Отбросим её, снова выделим каёмку и т. д. Получаем, что разбиение всего многоугольника восстанавливается однозначно!

Если же все углы многоугольника равны 150°, каёмку можно выбрать двумя разными способами (рис. 6).

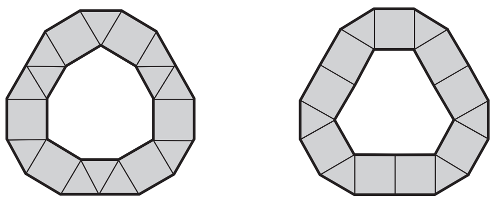


Рис. 6

Здесь и кроется причина, почему бывают многоугольники с несколькими разбиениями на плитки! Поскольку исходный многоугольник в задаче можно разбить на плитки больше чем одним способом, все его углы равны 150°, то есть M – обязательно 12-угольник.

Упражнение 1. Сколькими способами можно разбить на плитки 12-угольник со всеми углами по 150° и сторонами 1, 2, 1, 2, …, 1, 2?

Снимаем каёмки

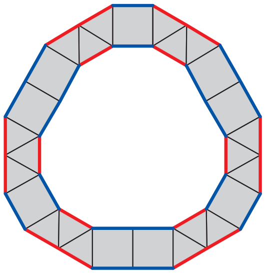


Рис. 7

Покрасим стороны M в красный и синий цвет через одну (рис. 7). Будем «раздевать» многоугольник, постепенно снимая с него каёмки, как «одёжки» с лука. Если каёмку можно выбрать двумя способами, будем выбирать один из них. Скоро мы докажем, что многоугольник, к которому мы в итоге придём, не зависит от нашего выбора!

Поскольку все углы у M равны 150°, в каёмке будут чередоваться стороны, к которым примыкают квадраты и треугольники. Значит, ко всем красным сторонам примыкают треугольники, а ко всем синим – квадраты, либо наоборот. У внутреннего многоугольника тоже покрасим стороны: если сторона CD получается из стороны AB, покрасим CD в тот же цвет, что и AB.

В итоге получим, что по сравнению с исходным многоугольником у внутреннего многоугольника длины сторон одного цвета на 1 меньше, а длины сторон другого цвета такие же.

Продолжим снимать каёмки. В какой-то момент одна из сторон исчезнет (пусть синяя, к ней тогда в последней каёмке примыкали треугольники), то есть её длина станет равна 0. Количество ненулевых сторон уменьшится, поэтому появится угол, меньший 150°. Следовательно, дальше каёмка будет определяться однозначно: к красным сторонам будут примыкать треугольники, а к синим – квадраты. Но мы и дальше будем снимать каёмки, пока возможно – то есть до тех пор, пока длина и какой-нибудь красной стороны не станет равна 0. Обозначим полученный многоугольник через N.

Чему равны длины сторон у N? Пусть r – длина наименьшей красной стороны в исходном многоугольнике M, а b – наименьшей синей. Синие стороны перестали уменьшаться в момент, когда одна из них стала равна нулю, поэтому длина каждой синей стороны уменьшилась на b. Аналогично, длина каждой красной стороны уменьшилась на r. То есть вне зависимости от того, какие каёмки мы снимали, у мно-

Художник Мария Усеинова

гоугольника N длины сторон будут одними и теми же. Кроме того, ненулевые стороны сохранили своё направление (они параллельны соответствующим сторонам исходного многоугольника M). Выходит, многоугольник N – один и тот же для разного выбора каёмок! Ведь по длинам сторон и их направлениям многоугольник можно однозначно восстановить, последовательно откладывая стороны известной длины под известными углами.

Кстати, N может оказаться просто точкой или отрезком, если последняя каёмка совпадает с последним многоугольником – это нам ничего не испортит, так как разбиение тогда уже построено полностью.

Упражнение 2. Пусть три последовательных угла многоугольника равны 120°, 150°, 120° (остальные – какие-то). Докажите, что выделить каёмку не удастся. Почему такой проблемы не будет в нашем случае?

А при чём тут простое число p?

Итак, вне зависимости от того, какие мы выбираем каёмки, в итоге придём к многоугольнику N. Тогда N можно разбить на плитки (ведь мы придём к N, взяв любое исходное разбиение M). И разбивается N единственным образом (так у него уже меньше 12 сторон). Давайте ещё раз пройдём путь от M к N, снимая каёмки. Мы снимем r каёмок, уменьшающих красные стороны, и b каёмок, уменьшающих синие. Закодируем выбор каёмок: если уменьшаем красную сторону, пишем букву $К$, а если синюю – букву $С$. Получим последовательность из r букв $К$ и b букв $С$. Каждой последовательности букв соответствует своя последовательность выбора каёмок, то есть своё разбиение на плитки. Поэтому всего разбиений у M столько же, сколько и таких последовательностей.

А теперь заглянем в статью «Математическая черепаха и числа сочетаний» (с. 12–15). В ней объясняется, что количество таких последовательностей равно

$$\binom{b+r}{r} = \frac{(b+r)!}{b!\cdot r!}.$$

Оно равно простому числу p, только если $b+r=p$, а $r=1$ или $r=p-1$ (см. задачу 8 из той же статьи).

Но если $r=1$, то $b=p-1$, и наоборот. Таким образом, либо самая короткая синяя, либо самая короткая красная сторона равна $p-1$. Задача решена!

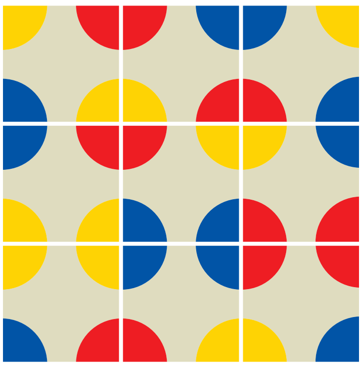
Владимир Красноухов

СКЛАДУШКИ – «НЕСКЛАДУШКИ»

«Складушки» – вид головоломок, состоящих из набора квадратных фишек с нанесёнными на них фрагментами рисунка или символами. За рубежом их называют Card Matching Puzzles. Фишки нужно расположить так, чтобы их углы или стороны подходили друг к другу, в этом цель игры. Первую такую головоломку запатентовал в 1893 году Тёрстон (E. L. Thurston). Начиная с 1920 года, складушки широко выпускаются промышленностью на Западе для рекламы автомобилей, банков, различных товаров.

В 1996 году Жак Хаубрих (Jacques Haubrich) из нидерландского города Эйндховена издал сборник «Compendium of Card Matching Puzzles», где описал более тысячи образцов складушек со всего мира. Он разработал стройную систему классификации складушек, разделив их на 6 типов и 136 групп.

Со складушкой «Морское путешествие» В. Красноухова вы уже знакомы (см. «Квантик» № 6, 2022). В этом номере – ещё одна головоломка этого автора, «Складушки 3×3».



Изготовить её просто. Аккуратно вырежьте из фанеры или плотного картона 9 квадратиков и раскрасьте тремя красками по схеме справа. Рекомендуемый размер квадратиков: 80×80 мм.

А теперь задача и для детей, и для взрослых.

Используя все девять фишек, соберите квадрат 3×3 так, чтобы все части разноцветных кружков совпадали по цвету.

Задача эта достаточно сложна. Из миллиардов вариантов возможного расположения фишек в квадрате 3×3 лишь несколько вариантов дают решение. Даже захотелось переименовать эти складушки в «нескладушки»... Так что берите в помощь и логику, и усидчивость.

Желаем успехов!

Художник Екатерина Жиркова

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ

Решения V тура отправляйте по адресу ruskonkurs@kvantik.org **не позднее 20 октября**. В письме укажите ваши имя, фамилию, город, школу и класс, где вы учитесь. Победителей ждут призы, предусмотрены премии за лучшее решение отдельных туров. Желаем успеха!

Предлагайте задачи собственного сочинения – лучшие будут опубликованы. Нынешний тур в этом отношении уникален: все задачи в нём составлены самими участниками конкурса.

V ТУР

21. Однажды маленькая Катя ехала с мамой в такси. Водитель беспрерывно жаловался: на плохие дороги, на постоянные поломки, на дорогие запчасти... Мама охотно с ним соглашалась. Когда Катя с мамой вышли из машины, Катя спросила у мамы: «Почему ты всё время просила дядю водителя, чтобы он замолчал?» Какую фразу произносила Катина мама в ответ на жалобы водителя?

Т. А. Амбарцумова

22. Быть ... кому-то – очень хорошо и достойно; быть ... кем-то – очень грустно и больно. Какое слово мы пропустили?

О. Н. Башкирцева

23. Во время урока по теме «Чередования согласных» учитель написал на доске глагол (в словарной форме).

– Корень этого глагола заканчивается на *ш*, которое в однокоренных словах чередуется с *с*, – сразу же подняла руку хозяйственная отличница Машенька.

– Не с *с*, а с *х*! – перебил Машу Вовочка.

– Не спорьте: вы оба правы, – улыбнулся учитель.

Какой глагол был написан на доске?

С. А. Ушаков

24. – ИКС, – уверенно прочитал на листочке 5-летний Ваня. – Ой, а что такое ИКС?

– Не знаю, – смутилась Ванина старшая сестра, 9-летняя Маша. – Так иногда по телевизору говорят: «Новости нашего ИКСа». Но вообще-то это не ИКС, это я тебе нарисовала геометрическую фигуру и написала её название.

Найдите ИКС.

В. Р. Фильцова

25. В одном романе «из старинной жизни» описываются изящные ГРОЗЫ героини, сидевшей за ГРЁЗАМИ.

Какие слова мы заменили на ГРОЗЫ и ГРЁЗЫ?

К. С. Хорошева

Художник Николай Крутиков

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ, IV тур («Квантик» № 7, 2022)

16. *Дима насмотрелся страшилок, выпросил себе мягкую игрушку-зомби и теперь с ней не расстаётся. Только дедушка ворчит: «Что за мода ПРОПУСК?» Заполните пропуск двумя одинаково выглядящими словами.*

Дедушка, привыкший к совсем другим игрушкам, ворчит: «Что за мода **нежить нежить?**» Где здесь глагол, а где существительное – решайте сами.

17. *– Взрослые обычно лучше знают, что надо делать, – строго сказал папа. – Ведь у взрослых ИКС есть.*

– ИГРЕК? – с иронией переспросила маленькая Маша. – Откуда это у взрослых ИГРЕК? ИГРЕК же у...

У кого есть ИГРЕК?

Папа сказал: «Ведь у взрослых опыт есть». Слово *взрослых* заканчивается звуком [х], поэтому Маша услышала «...у взрослых хобот есть». Но у взрослых (если это люди) хобота действительно нет; хобот есть **у слона**.

18. *Для гласных максимум равен 3 и достигается в конце. Чему равен максимум для согласных?*

Речь в задаче идёт о максимальных по длине последовательностях гласных и согласных букв в русском алфавите. Для гласных это последовательность из трёх элементов – Э Ю Я, – стоящая в самом конце. А для согласных это последовательность Ф Х Ц Ч Ш Щ (интересно, что, как и в случае с гласными, правее неё никаких согласных в алфавите нет). Элементов в ней **шесть**.

19. *Если в прилагательное, характеризующее бережливого человека, хорошего хозяина, добавить* сто, *получится прилагательное, имеющее практически противоположное значение. Напишите оба прилагательных.*

Это прилагательные ***рачительный*** (немножко устаревшее слово, означающее «усердный в ведении хозяйства, разумно бережливый») и ***расточительный*** (с ним всё понятно).

20. *Если в Прилагательное 1 добавить* сто, *получится Прилагательное 2. В Прилагательном 2 корней в два раза больше, зато суффикс в три раза короче. Прилагательное 1 часто сочетается со словом* том, *Прилагательное 2 – со словом* дом.

Напишите Прилагательное 1 и Прилагательное 2.

А это – прилагательные ***толстенный*** и ***толстостенный***. Проверяем: *толст-енн-ый* (например, том с лучшими задачами по лингвистике) – один корень, в суффиксе три буквы; *толст-о-стен-н-ый* (например, дом, защищённый от любых бурь и ураганов) – два корня, буква в суффиксе одна.

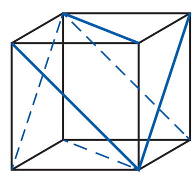
НАШ КОНКУРС, XI тур («Квантик» № 7, 2022)

51. *Из пунктов А и Б навстречу друг другу одновременно выехали с постоянными скоростями велосипедисты Алёша и Боря. В момент их встречи автомобилист Андрей выехал из пункта А в пункт Б. В момент встречи Андрея с Борей Алёша доехал до пункта Б. Кто ехал быстрее – Алёша или Боря?*

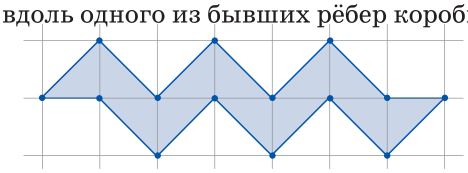
Ответ: Алёша. В момент встречи с Андреем Боря ещё не доехал от Б до А, а Алёша уже преодолел расстояние от А до Б, то есть проехал больше. Выехали Алёша и Боря одновременно, а значит, Алёша ехал быстрее.

52. *У Квантика была пустая, закрытая со всех сторон картонная кубическая коробка. Он разрезал каждую из шести граней этой коробки по какой-то из диагоналей. Могла ли коробка после этого не развалиться на отдельные части?*

Ответ: могла, см. пример на рисунке справа (линии разреза синие).



Получится что-то вроде зубчатого «кольца». Его можно уложить на плоскость, разрезав вдоль одного из бывших рёбер коробки:



53. *Найдите какие-нибудь* 12 *натуральных чисел (не обязательно различных), произведение которых равно их сумме.*

Ответ: например, $2+2+2+2+1+1+1+1+1+1+1+1=16=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1$.

54. *В воздухе неподвижно висит кубик. Второй такой же кубик прикладывают к неподвижному так, чтобы какие-то две их квадратные грани в точности наложились друг на друга. Далее второй кубик перекатывают через любое общее ребро кубиков до нового соприкосновения по квадратной грани. После нескольких таких перекатываний второй кубик* *вернулся в исходное положение. Докажите, что он коснётся первого кубика той же самой гранью, что и вначале.*

Прислоним большое зеркало к грани первого кубика. Отражение кубика в зеркале – это кубик, опирающийся на грань исходного кубика. Перекатим зеркало через ребро до соприкосновения с соседней гранью. Тогда отражение куба тоже перекатится. Значит, можно заменить второй кубик в условии задачи на отражение первого кубика в зеркале. Когда зеркало вернётся на исходную грань, отражение этой грани тоже вернётся на своё прежнее место.

55. *В волшебном кошельке лежат N золотых монет. Квантик знает это и за ход добавляет в кошелёк монету или забирает из него монету себе. После каждого хода Квантика число монет в кошельке уменьшается в два раза, если оно было чётным, а иначе утраивается. При любом ли N Квантик сможет на каком-то ходу опустошить кошелёк, если исходно у Квантика*

а) сколько угодно монет;

б) совсем нет монет?

Ответ: при любом. Покажем, как действовать Квантику в зависимости от числа монет n в кошельке.

При $N=0$ делать нечего.

Если N нечётно (и равно $2k+1$), Квантик забирает одну монету, и в кошельке оказывается k монет, что меньше N.

Если $N = 4k + 2$ для неотрицательного k, Квантик сначала забирает монету (в кошельке их теперь $12k+3$), потом забирает ещё монету (в кошельке $6k+1$) и в третий раз забирает монету – в итоге в кошельке $3k$ монет, что снова меньше N.

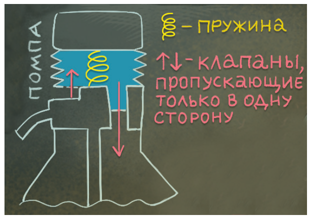
Остался случай $N=4k$ для натурального k. Тогда Квантик сперва забирает монету (в кошельке $12k-3$), потом добавляет её обратно (в кошельке $6k-1$) и забирает снова – в кошельке $3k-1$ монет, что меньше N.

Итак, в любом случае Квантик может уменьшить количество монет в кошельке, не используя своих монет. При этом отрицательное число монет возникнуть не может. Значит, для любого N Квантик рано или поздно опустошит кошелёк.

ВЫДАВИТЬ ВОДУ («Квантик» № 8, 2022)

1. Чтобы втянуть воду через трубочку, мы увеличиваем объём рта, закрыв выход из него к носу и горлу, и воздух во рту разрежается. У воды получается два разных соседа: атмосферный воздух и воздух во рту. Оба хотят расширяться, но атмосферный воздух хочет сильнее, он переталкивает воду в рот.

2. Помпа работает точно так же, как велосипедный насос. Только насос закачивает воздух внутрь камеры в колесе, а помпа – внутрь бутыли. Как это происходит? Когда мы нажимаем на помпу, пружина сжимается и воздух выталкивается из синей полости. Выйти он может только через клапан, который ведёт в бутыль. Когда мы отпускаем помпу, пружина разжимается и синяя полость всасывает воздух через клапан, который ведёт наружу. В итоге в бутыли становится больше воздуха, точнее он становится более сжатым.

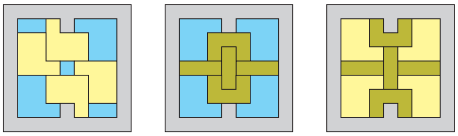


Как и в предыдущей задаче, у воды – два соседа, которые играют в переталкивания: воздух в бутыли и воздух снаружи. Здесь выигрывает воздух в бутыли. Кстати, когда воды в бутыли много, а воздуха мало, набрать воды гораздо легче по двум причинам: когда воздуха меньше, то, чтобы сжать его в заданное число раз, нужно и добавить меньше воздуха, а ещё воде нужно подняться вверх на меньшую высоту.

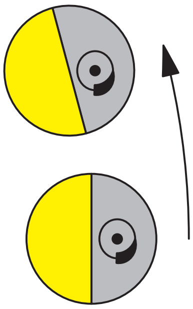
3. Это водонапорная башня. Внутри – вода. Обычно башню ставят на холме, так что вода оказывается высоко. Башня подключена к водопроводу. Когда в доме открывают кран, вода в башне получает возможность понизить свою высоту. Более высокие слои воды своей тяжестью давят на нижние слои, это давление передаётся по трубам, в доме получаем напор. А откуда вода в башне? Её туда закачивают с помощью насосов. А почему нельзя с помощью насосов воду прямо в дома закачивать без башни? Потому что в утренние часы всем жителям одновременно нужна вода. И мощности насоса может не хватить. Башня сглаживает нагрузку на насос. Башня успевает наполниться за ночь и дневные часы, когда воды нужно меньше. А почему в крупных городах почти нет таких башен? Их заменяют подземными герметичными резервуарами, где вода хранится под давлением, как будто на неё давит сверху водяной столб.

4. Пока бак наполняется, воздух в баке сжимается, потому что бак закрыт плотно. Воздух это делает, пока его давление не сравняется с давлением в водопроводе. Когда мы открываем кран, в точности как в задаче про бутыль с помпой, воздух в баке переталкивает воду наружу.

ПАРА АНТИСЛАЙДОВ («Квантик» № 8, 2022)



ДЕНЬ ИЛИ НОЧЬ? («Квантик» № 8, 2022)



Ошибка здесь: «За сутки Земля делает оборот вокруг своей оси...». Нет, немного больше! Земле нужно ещё немного довернуться, чтобы она снова была обращена к Солнцу «той же стороной» (см. рисунок). Если сложить все такие дополнительные довороты за полгода, получится как раз пол-оборота!

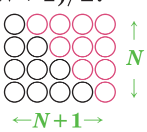
Кажется, разобрались? Не совсем! Мы считаем, что сутки – это время, за которое Земля поворачивается к Солнцу «той же стороной». Но, оказывается, Земля не сможет повернуться к Солнцу ровно тем же полушарием. Например, в каких-то точках Земли могла начаться полярная ночь, и если вчера эти точки ещё появлялись на солнечной стороне, то сегодня уже не выйдут из тени. А что же тогда такое сутки?

Создадим копию Земли, которая крутится вокруг Солнца и вокруг своей оси с той же скоростью, что и обычная Земля, но ось вращения копии не наклонена, то есть полюса копии всегда лежат на границе дня и ночи. Тогда сутки – это время, за которое копия делает один оборот и ещё немного, чтобы обратиться к Солнцу той же стороной.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЧЕРЕПАХА И ЧИСЛА СОЧЕТАНИЙ

1. Удвоенное треугольное число равно $N(N+1)$, поэтому само оно равно $N(N+1)/2$:

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{l} 1 \quad + \quad 2 \quad + \ldots + (n-1) + \quad n \\ n \quad + (n-1) + \ldots + \quad 2 \quad + \quad 1 \end{array} \\
\hline
(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)
\end{array}
$$



2. Каждое число на диагонали (кроме числа в углу) – сумма двух чисел: числа L слева от него и числа D под ним, а эти числа равны из симметрии таблицы (см. также задачу 3).

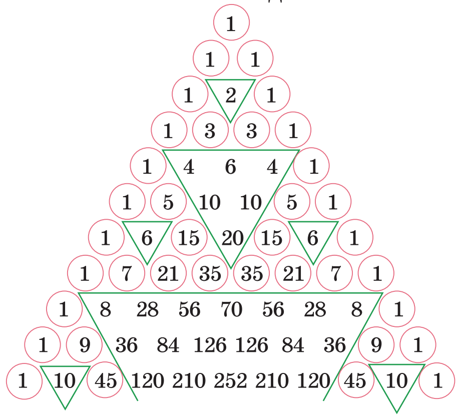
3. В клетку (Y, X). Эта клетка симметрична исходной относительно диагонали.

4. Они равны. Пусть Петя ищет число способов выбрать k предметов из n, а Вася – число способов выбрать $n-k$ предметов из n. Ясно, что число способов у каждого равно числу способов разделить n предметов на две части, в одной из которых – k штук (их отдаём Пете), а во второй – оставшиеся $n-k$ штук (их отдаём Васе).

5. Сумма чисел в n-й строке треугольника Паскаля – это общее количество программ длины n, то есть 2^n. (Для каждой буквы в программе у нас две возможности: П или В, поэтому при увеличении длины программы на 1 количество вариантов увеличивается в 2 раза.)

Или по-другому. Каждое число в $(n+1)$-й строке получается сложением чисел в n-й строке (чтобы это было верно и для крайних чисел, удобно считать, что вне треугольника везде стоят нули), причём каждое число в n-й строке вносит вклад в два числа ниже. Поэтому при переходе к следующей строке сумма всех чисел увеличивается вдвое.

6. См. рисунок ниже. Возникающая картинка напоминает треугольник Серпинского из «Квантика» № 7 за 2020 год.



Все числа обведены в строках 1, 3, 7, ... – строках с номерами вида 2^n-1. Докажем это. Раз мы интересуемся только чётностью чисел, можно писать вместо чётных чисел нули, а вместо нечётных – единицы.

Если какая-то строка с номером 2^n-1 состоит из единиц, то в следующей строке единицы будут только по краям, а все остальные числа будут нулями (так как сумма двух нечётных чисел – чётное число). В следующей строке (с номером 2^n+1) будет по две единицы по краям и нули между ними, и если продолжать алгоритм, то под треугольником из 2^n строк мы увидим слева и справа два *точно таких же* треугольника из нулей и единиц! Между этими треугольниками будет перевёрнутый треугольник, заполненный нулями, состоящий из 2^n-1 строк – на одну меньше, чем в одинаковых треугольниках. Значит, строка из одних единиц появится только внизу этих треугольников, то есть будет иметь номер $(2^n-1)+2^n=2^{n+1}-1$.

7. Выбрать из n человек команду из k человек и назначить одного из них капитаном – это то же самое, что выбрать капитана, а потом выбрать остальных $k-1$ членов команды из оставшихся $n-1$ человек.

8. Пусть для определённости число сочетаний находится в левой половине строки, то есть $1<k<(n+1)/2$. Перед задачей 7 мы поняли, что

$$\binom{n}{k}\cdot k=\binom{n}{k-1}\cdot(n-k+1),$$

поэтому $1<\binom{n}{k-1}<\binom{n}{k}$. Если $\binom{n}{k}$ простое, то на него делится одно из чисел в правой части равенства. Из унимодальности $\binom{n}{k}>\binom{n}{1}$, но $\binom{n}{1}=n>n-k+1$. То есть в правой части равенства оба числа меньше $\binom{n}{k}$, противоречие.

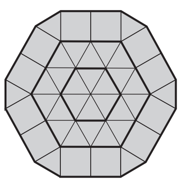
Можно и по-другому: из явной формулы $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ видно, что любой простой делитель этого числа не больше n. А из унимодальности при $1<k<n-1$ получается, что $\binom{n}{k}>n$.

ЦИКЛОНЫ И АНТИЦИКЛОНЫ

В статье было разобрано, как сходящийся к центру урагана воздух закручивается по вращению земли (в Северном полушарии это против часовой стрелки). Но всплывающий в его центре воздух не исчезает, а (как и в фонтанчике в супе на плите) растекается сверху в стороны. А значит, от вращения Земли он начнёт отставать, закручиваясь в противоположном направлении.

РАЗБИЕНИЯ МНОГОУГОЛЬНИКА

1. Выделим каёмку, тут есть два варианта. Первый: треугольники примыкают к сторонам длины 1, а квадраты – к сторонам длины 2. Тогда внутри останется правильный шестиугольник со стороной 2.

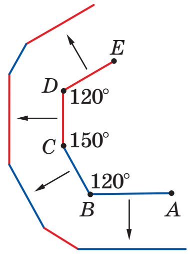


Как мы знаем, он разбивается однозначно – на правильные треугольники (см. рисунок).

Второй вариант: треугольники примыкают к сторонам длины 2, а квадраты – к сторонам длины 1. Тогда внутри остаётся правильный 12-угольник со стороной 1. У него каёмку можно опять выделить двумя способами, в обоих случаях внутри останется правильный шестиугольник со стороной 1, который однозначно разбивается на треугольники.

2. К одной стороне угла в $150°$ будут примыкать квадраты, а к другой – треугольники. Рассмотрим сторону, к которой примыкают квадраты. Один из них примыкает к углу в $120°$. Оставшийся угол в $30°$ никак не покрыть плитками.

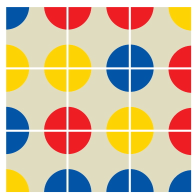
Почему же, снимая каёмки, мы не можем получить такую ситуацию? Вспомним про раскраску сторон в красный и синий цвета. Посмотрим на стороны AB и BC угла в $120°$. Соответствующие им стороны исходного многоугольника (показаны на рисунке стрелками) будут идти через одну (для угла в $90°$ они бы шли через две, а для угла $60°$ – через три). Тогда они покрашены в один и тот же цвет, пусть в синий. Сторона между ними – красная.



Аналогично, у другого угла в $120°$ стороны CD и DE будут одноцветные. Но поскольку угол BCD равен $150°$, стороны BC и CD будут разного цвета, поэтому CD и DE – красные. Но тогда между соответствующими им сторонами в исходном многоугольнике находится синяя сторона. Значит, уже обнулились и красная, и синяя стороны, то есть мы пришли к многоугольнику N, который точно можно разбить на плитки. Поэтому описанный случай не мог возникнуть.

СКЛАДУШКИ – «НЕСКЛАДУШКИ»

Одно из решений приведено на рисунке. Остальные легко найти способом замены цветов, например, синий – жёлтый – красный – синий.



Кстати, в городе Пскове в Областной универсальной научной библиотеке имени В.Я. Курбатова с 1 по 11 апреля 2022 года проводилась выставка механических головоломок из частной коллекции Алексея Костюкова: их было более сотни, разного уровня сложности и разных лет выпуска.

В рамках выставки были проведены соревнования среди школьников по решению головоломок (в том числе и этой). Первыми с задачами справились псковские школьники Хасан Гайрабеков и Кирилл Костюков (оба из 4 «В» класса школы № 22) и Екатерина Юдина (6 «Г» класс школы № 21). Поздравляем победителей!

наш КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Итоги прошлого конкурса будут опубликованы в 12-м номере.

А мы начинаем новый конкурс! Он пройдёт в три этапа: с сентября по декабрь, с января по апрель и с мая по август. Дипломы и призы получат не только победители за весь год, но и победители каждого этапа.

Высылайте решения задач I тура, с которыми справитесь, не позднее 5 октября в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, г. Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

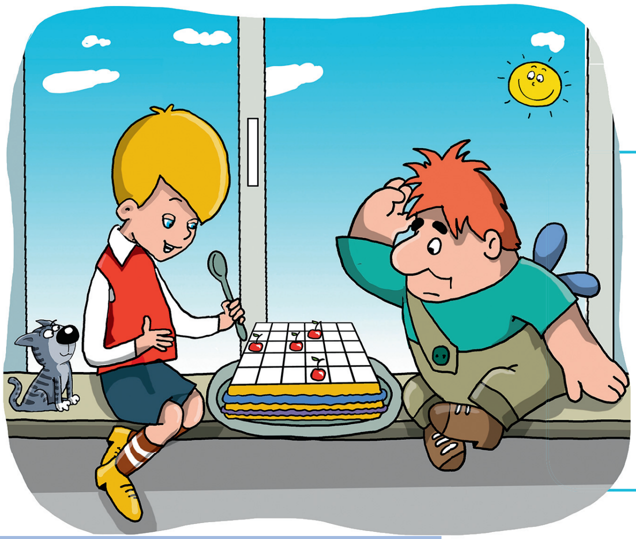
В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

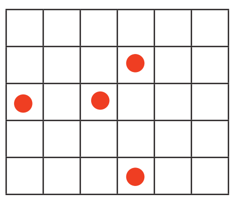
Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

I ТУР

1. На чаепитии всех угощали конфетами. И Петя, и Вася взяли себе по две конфеты каждого вида, но съели только по 10 конфет каждый, а остатки принесли домой. Сколько всего видов конфет было на чаепитии, если Петя принёс домой конфеты только трёх видов, а Вася – шести?

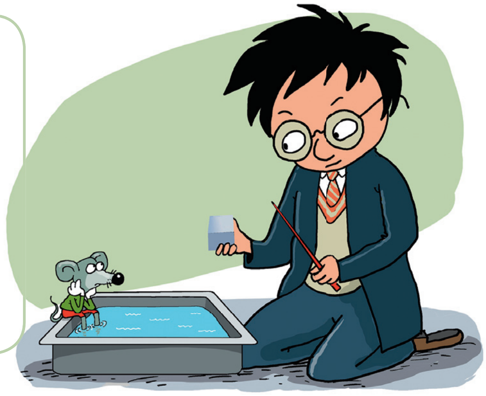


2. Малыш и Карлсон делят торт 5×6, украшенный вишенками (см. рисунок). Может ли Карлсон так разрезать торт на две одинаковые по форме и размеру части, что все вишенки достанутся ему?



Авторы: Сергей Дориченко (1), Михаил Евдокимов (2), Алексей Канель-Белов (3), Борис Френкин (4), Фёдор Нилов (5)

3. Гарри Поттер поместил в толщу воды неподвижный ледяной кубик со стороной 1 см, после чего вся вода, находящаяся не дальше, чем на 1 см хоть от какой-то точки кубика, тоже замёрзла. Докажите, что получившийся кусок льда можно разрезать на части и сложить из них всех несколько фигур, каждая из которых – кубик, цилиндр или шарик.



4. На острове 99 жителей, и каждый – либо спорщик, либо подпевала. Всех по очереди спросили, кого на острове больше – спорщиков или подпевал. Каждый, кроме первого, отвечал так: если он подпевала, повторял ответ предыдущего, а если спорщик – отвечал наоборот. В результате 75 островитян ответили неправильно. Можно ли только по этим данным определить, кого на острове больше: спорщиков или подпевал?

5. В вершинах куба расставили 8 чисел так, что на любых двух параллельных рёбрах общая сумма чисел одна и та же. Сколько среди этих 8 чисел может быть различных? (Укажите все варианты, сколько различных чисел может быть, и докажите, что других вариантов нет.)

Художник Николай Крутиков

Дидона и треугольник

По легенде, беглая царица Дидона, приплыв в чужие края, попросила у местного племени участок земли – хотя бы столько, сколько можно охватить воловьей шкурой. Получив согласие, Дидона разрезала шкуру на тонкие ремешки и огородила ими целый холм! Так начинался Карфаген…

А древнюю задачу – *какая фигура с данным периметром имеет наибольшую площадь* – называют задачей Дидоны. Ответ простой – круг (доказательство, правда, сложное).

Опираясь на этот факт, попробуйте разобраться в совсем другом, на первый взгляд, вопросе.

Дан равносторонний треугольник. Какая линия, делящая его площадь пополам, имеет наименьшую длину?

Художник Елена Цветаева

ISSN 2227-7986 22009

9 772227 798220