№ 11 | ноябрь 2022

ЖУРНАЛ КВАНТИК
ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

№ 11
ноябрь
2022

ЭТЮД О СПИРАЛЯХ

ФОТОГРАФИИ ГАЗИРОВАННЫХ НАПИТКОВ

ЗВЁЗДЧАТЫЙ ОКТАЭДР

e-mail: kvantik@mccme.ru

ПРОДОЛЖАЕТСЯ ПОДПИСКА НА ЖУРНАЛ «КВАНТИК» НА 2023 ГОД

- **в почтовых отделениях по электронной и бумажной версии Каталога Почты России:**

индекс **ПМ989** – годовая подписка
индекс **ПМ068** – по месяцам полугодия

- **онлайн-подписка на сайтах:**

Почты России:
podpiska.pochta.ru/ПМ068

агентства АРЗИ:
akc.ru/itm/kvantik

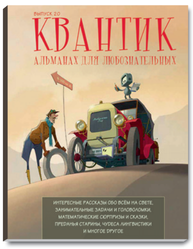
онлайн вы можете оформить подписку и для своих друзей, знакомых, родственников; подписку можно подарить им на Новый год.

Подробнее обо всех вариантах подписки см. **kvantik.com/podpiska**

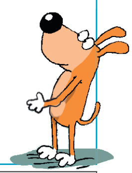
НАШИ НОВИНКИ

КАЛЕНДАРЬ ЗАГАДОК
от журнала «КВАНТИК» **на 2023 год –**
настенный перекидной календарь
с интересными задачами-картинками

АЛЬМАНАХ ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ «КВАНТИК», выпуск 20
включает в себя
все материалы журналов «Квантик»
за II полугодие 2021 года



Приобрести продукцию «Квантика» можно в магазине «Математическая книга» (г. Москва, Большой Власьевский пер., д.11), **в интернет-магазинах:**
biblio.mccme.ru, kvantik.ru, my-shop.ru, ozon.ru, WILDBERRIES, Яндекс.маркет и других (полный список магазинов на kvantik.com/buy)



www.kvantik.com

kvantik@mccme.ru
t.me/kvantik12
vk.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com

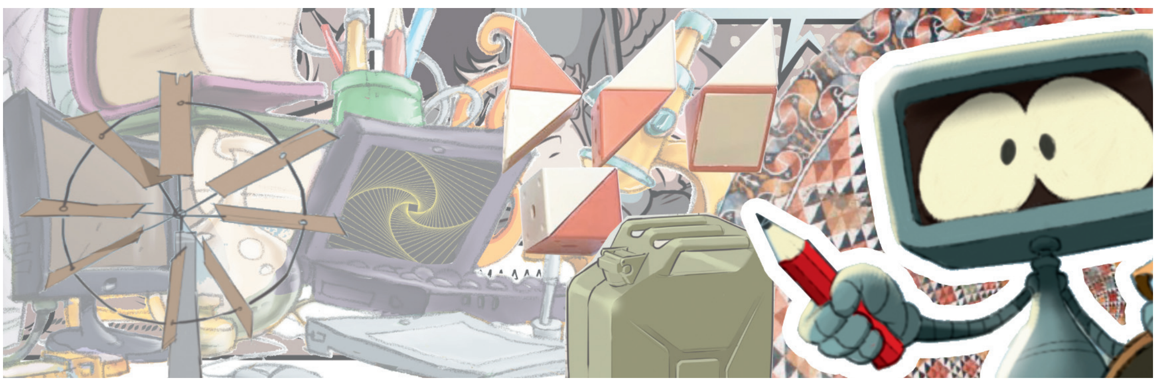
Журнал «Квантик» № 11, ноябрь 2022 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С.А. Дориченко
Редакция: В.Г. Асташкина, Т.А. Корчемкина, Е.А. Котко, Г.А. Мерзон, Н.М. Нетрусова, А.Ю. Перепечко, М.В. Прасолов, Н.А. Солодовников
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р.К. Шагеева, И.Х. Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**
Подписка на журнал в отделениях почтовой связи
- **Почта России:** Каталог Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)
- **Почта Крыма:** Каталог периодических изданий Республики Крым и г. Севастополя (индекс **22923**)

Онлайн-подписка на сайтах
- Почта России: **podpiska.pochta.ru/press/ПМ068**
- агентство АРЗИ: **akc.ru/itm/kvantik**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 29.09.2022
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831) 218-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+ ЕАС

СОДЕРЖАНИЕ

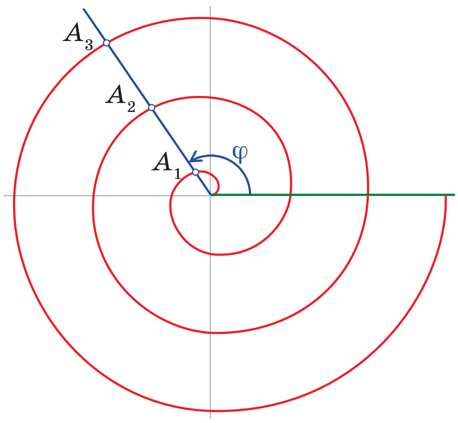


Андрей Щетников

ЭТЮД О СПИРАЛЯХ

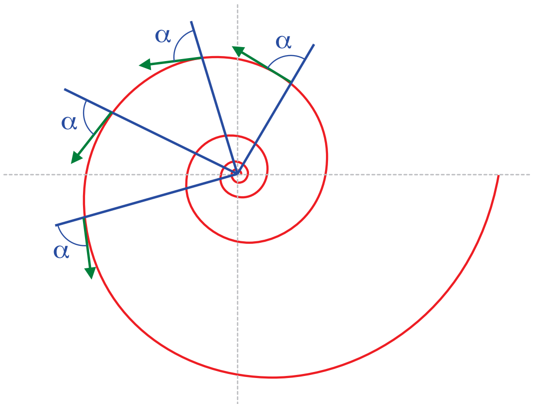
Со спиральными линиями люди познакомились, наблюдая их в природе. Спиральную форму имеют раковины улиток. По спирали закручиваются молодые побеги папоротника и листья алоэ. Подражают этим природным спиралям и волю́ты – завитки на капители древнегреческой колонны ионического ордера.

Математическое исследование спиралей тоже началось в Древней Греции. Первую книгу о спиралях написал великий Архимед. В ней он рассмотрел свойства спирали, которую и сегодня называют *архимедовой*, а определил он такую линию следующим образом. *Пусть некий луч на плоскости сохраняет своё начало неподвижным и вращается вокруг этого начала с постоянной скоростью; и пусть одновременно с вращением этого луча какая-нибудь точка перемещается вдоль него с постоянной скоростью, стартуя из неподвижного конца луча; тогда эта точка описывает на плоскости спираль.*

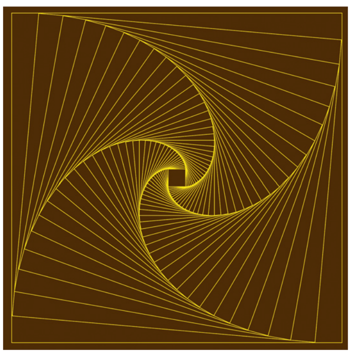


На рисунке зелёным цветом показано начальное положение луча, синим цветом – положение луча после поворота на угол φ, а также на угол $\varphi + 360°$, $\varphi + 720°$ и т. д. За каждый полный оборот луча точка проходит вдоль него одно и то же расстояние, поэтому отрезки A_1A_2, A_2A_3 и т.д. при любом положении луча имеют одну и ту же длину.

Сам Архимед сформулировал и доказал о своей спирали ряд теорем, относящихся к площадям, длинам дуг и касательным. Никаких других спиралей Архимед не рассматривал; однако, если мы посмотрим на спирали раковины улитки и листьев алоэ, мы увидим, что они заметно отличаются от архимедовой спирали, как бы уширяясь при удалении от центра. Самая характерная из такого рода спиралей носит название *логарифмической*. Первым эту спираль рассмотрел в XVII веке Рене Декарт, а подробно исследовал её свойства Якоб Бернулли. Определить эту спираль можно следующим образом. *Когда вдоль логарифмической спирали движется точка, угол между направлением движения этой точки и лучом, проведённым к этой точке из центра спирали, остаётся постоянным.*



С логарифмической спиралью связана одна красивая задача. В вершинах квадрата сидят четыре черепахи. Они одновременно начинают двигаться с одинаковой постоянной скоростью так, что каждая черепаха всё время ползёт в направлении соседней с ней черепахи: первая ко второй, вторая к третьей, третья к четвёртой, четвёртая к первой. Начало такого спирального закручивания исходного квадрата показано на рисунке.

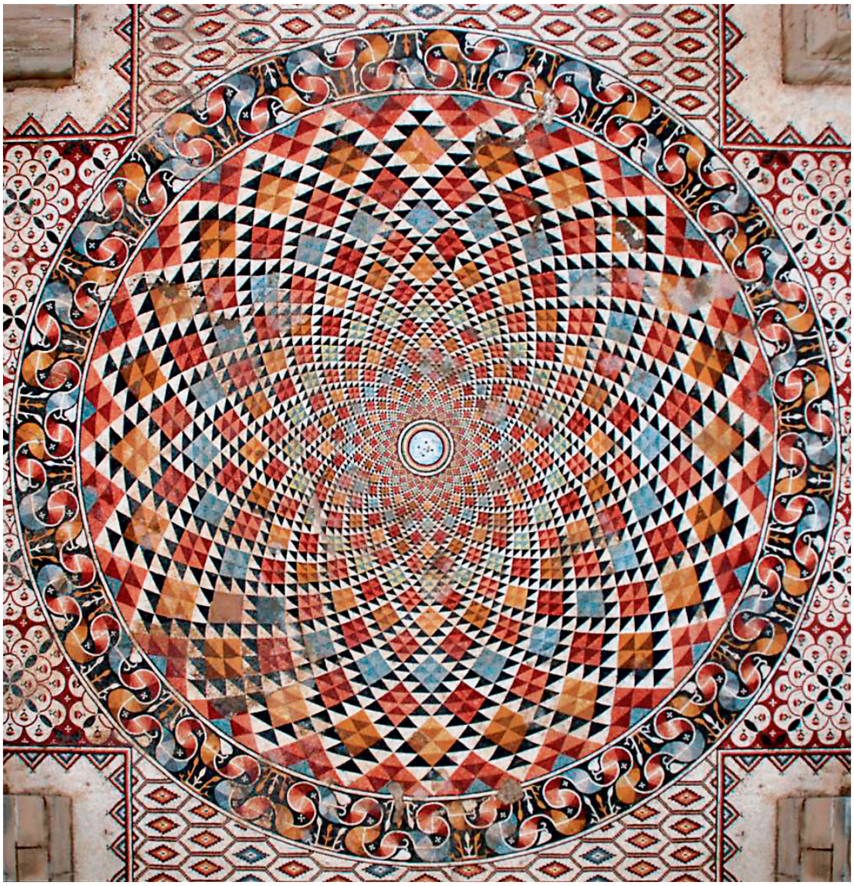


Траекторией каждой черепахи будет логарифмическая спираль, в которой угол между направлениями на центр квадрата и на соседнюю черепаху составляет 45°.

Будем считать, что черепахи – это геометрические точки, не имеющие размера. Ясно, что до своей встречи черепахи сделают бесконечное число оборотов вокруг центра: ведь при любом положении квадрата он может быть повёрнут на тот же угол и уменьшен в той же пропорции. Но какой путь пройдут при этом черепахи вдоль своих траекторий до момента встречи? Попробуйте решить эту задачу самостоятельно.

Спирали, похожие на логарифмическую, встречаются и в природе. К примеру, так выглядит раковина моллюска под названием *наутилус помпилиус*. Каждая следующая воздушная камера в этой раковине геометрически подобна предыдущей, что и порождает нужную форму спирали. Однако эта похожесть в любом случае приближённая, а не математически выверенная. А математическим рассмотрением логарифмическойспирали,какя уже сказал, впервые занялся Рене Декарт в XVII веке.

Каково же было моё удивление, когда в альбоме фотографий дворца халифа Хишама, построенного к северу от Иерихона в первой половине VIII века, я увидел мозаику, выполненную в виде сетки изящных логарифмических спиралей. Получается, что древние всё-таки знали о логарифмической спирали, хотя никаких трудов об этой изящной линии до наших дней не дошло?! Но не будем спешить с выводами. Ведь черепахи из предыдущей задачи строят логарифмическую спираль своим движением, ничего не зная о её математических свойствах. Наверное, в каком-то смысле так же поступили и древние мастера мозаики. Они провели внешнюю окружность и разделили её на 72 равные части. На этих частях как на основаниях были выложены равнобедренные прямоугольные треугольники, направленные прямым углом к центру окружности. Эти треугольники и задали всю конфигурацию дальнейших спиралей: между ними надо расположить квадраты (ну, не совсем квадраты, но поскольку они невелики, от квадратов они мало отличаются), между ними – следующие квадраты и так далее. Для контроля желательно через несколько шагов проводить окружности, на которых должны лежать вершины этих квадратов. При приближении к центру квадраты будут уменьшаться всё сильнее и сильнее: внутренняя окружность в этой мозаике в 12,5 раз меньше внешней, а значит, и элементы узора на ней в 12,5 раз меньше, чем снаружи.



Кстати, в этой мозаике из дворца халифа Хишама скрывается и картинка ползущих по своим спиралям черепах – попробуйте её увидеть.

Фото алоэ: altmanplants.com

Художник Мария Усеинова

Иван Высоцкий

СТАС И ЗАДАЧА КОЛЛЕКЦИОНЕРА

Часть 3

Окончание. Начало в №№ 9–10

ВТОРНИК, 8:10

По дороге в школу Стас обычно думал две мысли. Первая – подлинне́е – думалась от дома до перехода через улицу, а вторая, покороче, – от перехода до школы. Думать на переходе нужно о переходе. Сегодня Стас размышлял о том, что раз не получается упростить эту противную сумму (про себя он её назвал числом Вики), то нужно посчитать её на калькуляторе. Вторая половина дороги принесла идею получше: сегодня на втором уроке информатика. Стас улучит пару минут и посчитает в Excel. Это удобнее, чем на калькуляторе.

	A	B	C
1			
2		1	1
3		2	0,5
4		3	0,333333
5		4	0,25
6		5	0,2
7		6	0,166667
8		7	0,142857
9		8	0,125
10			**2,717857**

Всё заняло не более двух минут, так что учительница информатики даже не заметила, что Стас занят посторонними делами. Вышло, что число Вики равно

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=2{,}718$$

с округлением до тысячных. Ещё нужно умножить на 8. Получилось 21,743. Вот сколько шоколадных яиц требуется на коллекцию из восьми принцесс. В среднем.

На перемене Стас подошёл к Смирновой:

– Наташ, слушай, я знаю, сколько нужно киндер-сюрпризов, чтобы собрать Вике всю коллекцию вместе с Авророй.

– Я тоже знаю.

Поражённый Стас секунду молчал. Затем неуверенно спросил:

– Сколько у тебя получилось?

– 24.

– А вот и нет! Меньше! Если точно, то 21,743.

Наталья посмотрела на друга с тревогой.

– Ты вообще здоров? Во-первых, мама вчера купила двадцать четвёртый киндер, и там была Аврора. Вика счастлива. Так что ровно 24. А во-вторых, кто тебе продаст тысячную часть киндер-сюрприза? Это как полтора землекопа.

В детстве Стас тоже смотрел мультик про двоечника Николая Перестукина, у которого в ответе получились полтора землекопа. Тогда Стас ещё подумал, что над бедным Колей зря насмехаются. В сущности, почему не может быть полутора землекопов? Ведь если один землекоп за день роет траншею длиной 20 метров, то сколько землекопов нужно, чтобы вырыть 30 метров? Разумеется, полтора. Просто в учебнике математики числа подобраны так, чтобы землекопов было целое число. Это нечестно. Можно подумать, что в жизни все траншеи всегда нужной длины. Бывает полтора землекопа! И 7/3 попытки бывает – спросите Патрика. И в среднем 21,743 киндер-сюрприза тоже бывает.

– Понимаешь, это вам пришлось купить 24 яйца. А кому-то потребуется 21, или 30, или даже больше. Зато кому-то хватит и восьми. А в среднем – как раз 21,743. Это просто. Я тебе покажу. Смотри, с каждой новой принцессой вероятность…

Но тут Стас осёкся: по выражению лица Наташки он понял, что его математический гений никто не оценит и что пора изящно выйти из разговора какой-нибудь завершающей фразой.

– В общем, это в среднем, понятно?

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

– Понятно. А хочешь, я тебе про музыку что-нибудь расскажу? – Наталья точно знала, что Стас не хочет. – Там тоже дроби. Тебе понравится. Вот, например, гармонические обертоны. Это очень увлекательно. – Она удержала Стаса за пуговицу на рукаве.

– Гармонический оберто́н, или гармо́ника – это тон с длиной звуковой волны, равной половине, трети или четверти длины волны основной извлекаемой ноты, – пользуясь своим отменным слухом, Наташка искусно копировала интонации своей учительницы музыки.

– А если длина равна 1/5 этой основной – это уже не гармоника? – Стас очень хотел сбежать и съехидничал в тщетной надежде освободиться.

– Тоже гармоника. Гармоник много, но слышим мы не все, а только первые, например с $\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{10}$ длины основной волны, остальные слишком тихие.

Наталья сделала круглые глаза и завершила лекцию фразой, которую считала верхом мудрости, какая только может быть в учебнике музыки: *«При колебании струны́ образуются обертоны, длины звуковых волн которых вместе с длиной основной волны формируют гармонический ряд, состоящий из долей* 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 *и так далее»*.

В голове у Стаса зазвенел колокол. Внезапно осипшим голосом он спросил:

– А как вы их складываете?

Наталья отшатнулась и даже отпустила Стасов рукав:

– Нет, ты точно спятил! Зачем их складывать? Они сами получаются, когда ударяешь по клавише пианино. Сами получаются и сами складываются в звучание.

– Да не в звучание, а в сумму! Дроби эти складываются? Ну, этим... знаком «плюс» они складываются?

Видимо, Стас спросил что-то такое, что не складывалось, точнее не укладывалось в картину мира начинающей, но перспективной пианистки Смирновой. Она молча повернулась и пошла в класс, показывая Стасу, как правильно произвести изящный выход из разговора, который свернул не туда.

ВТОРНИК, 14:50

По дороге домой Стас думал ещё напряжённее. Голова кружилась от сведений, которые определённо нужно было упорядочить. Цепочка таинственным образом связанных между собой объектов выглядела так.

1. Принцессы в количестве 21,743 штуки.

2. Гармоники, которые не складывают музыканты, но которые образуют гармонический ряд.

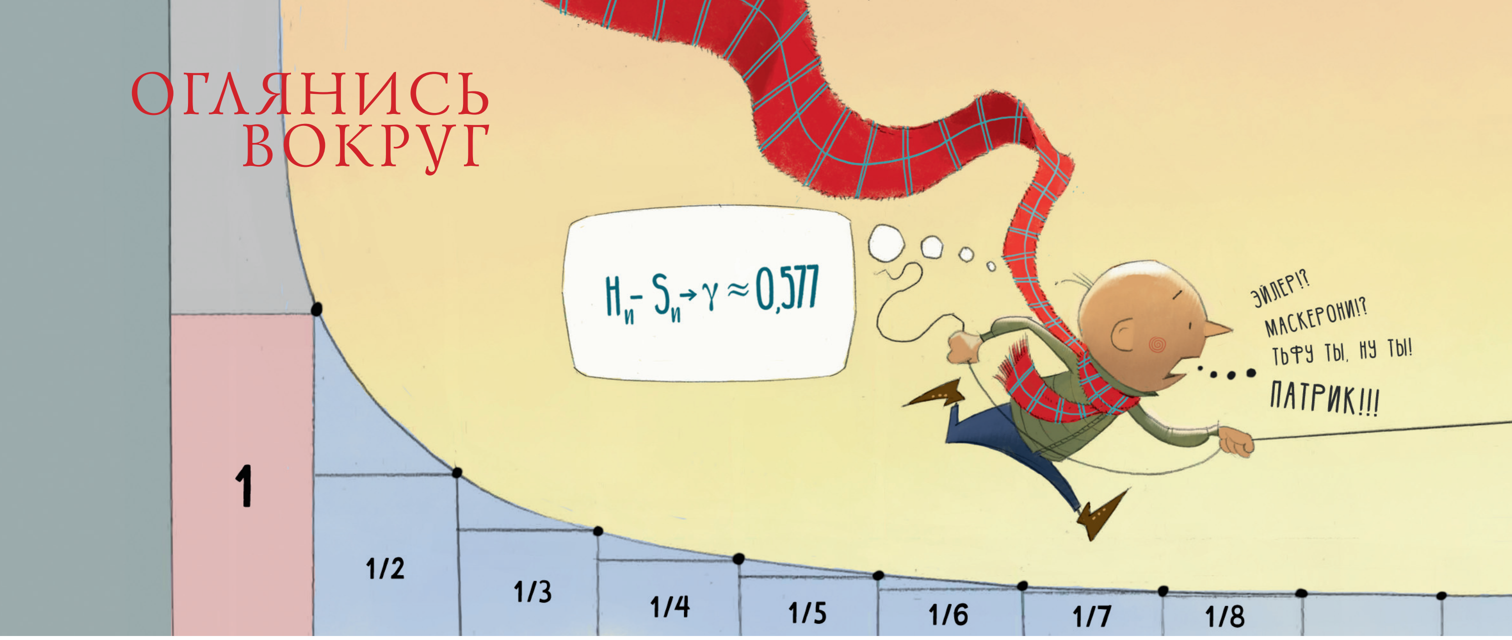
3. Гармонический ряд, которым папа советует развлечься на досуге.

«Итак... Что общего между принцессами, гармониками и папиным гармоническим рядом? Между принцессами и гармоническими обертонами общее очевидно – дроби от $\frac{1}{1}$ до $\frac{1}{8}$. Только я эти дроби пытаюсь сложить, а Наташка – нет. Папа их, кажется, складывает, но только вряд ли ради коллекции принцесс и уж точно не в музыкальных целях».

Добравшись до папиного кабинета, Стас начал искать книгу, которую он тогда видел на столе. Бесполезно. Он даже не помнит, какого она цвета. Немного подумав, Стас пошёл в свою комнату, включил компьютер и в поисковой строке браузера написал «гармонический ряд». Результат последовал тут же. Оказалось, гармонический ряд – это сумма чисел 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и так далее без конца, причём название действительно пришло из музыки, где такие дроби называют гармониками.

Краткое расследование показало, что если гармонический ряд в каком-то месте обрубить, получается число, которое тоже называют гармоническим. Например, 1 – это первое гармоническое число, $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ – это второе гармоническое число, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$ – третье и так далее. Кроме того, выяснилось, что для этих чисел есть обозначение – буква H с номером. Например, число Вики, то есть восьмое гармоническое число

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$$



обозначают H_8. Значит, решение задачи про восемь принцесс коротко можно записать $8H_8$. Стас уже знал, сколько это будет, но всё же – как считать гармонические числа без компьютера?

Довольно скоро Стас нашёл в интернете приближённую формулу, но она ему не понравилась: во-первых, в ней были непонятные значки, а во-вторых, она приближённая, то есть не совсем полноценная. А нужна полноценная!

Стас рассудил, что раз люди пишут приближённую формулу, то настоящей никто не знает. Значит, если он, Стас, откроет точную формулу для гармонических чисел, то её назовут его именем, а сам он станет великим математиком! Какое-то время Стас предавался мечтаниям на эту тему и, чтобы приблизить сладкий момент славы, снова принялся экспериментировать с Викиным числом H_8. Нелёгок хлеб математика! Исписав два листочка (опять пострадала тетрадь по истории), Стас почувствовал, что хорошо поработал, устал и должен переключиться на что-то другое. Это другое сейчас же явилось, мотая хвостом, и предъявило поводок: гулять!

– Пойдём, Патрик. Я на пороге великого открытия, но оно подождёт.

Патрик изо всех сил поддержал эту идею.

***

Неизвестно, куда завели Стаса и Патрика эксперименты с гармоническими числами. Не исключено, что Стас обнаружил много интересных фактов, и, скорее всего, среди них оказались следующие.

1. Гармонический ряд *расходится*, то есть

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots=\infty.$$

Вероятно, впервые это доказал в XIV веке учёный Николай Орем. Он нашёл очень простое рассуждение, показывающее, что эта сумма бесконечно большая. Попробуйте найти своё собственное доказательство (возможно, оно совпадёт с тем, что предложил Орем).

2. Известно великое множество равенств, которые связывают гармонические числа друг с другом и с другими специальными числами. Беда только в

том, что все эти равенства не дают простого и быстрого способа вычислений.

3. Приближённая формула, которая не понравилась Стасу, основана на том, что гармоническое число H_n немного больше площади S_n фигуры, заключённой под графиком функции обратной пропорциональности $y=\frac{1}{x}$ на отрезке от 1 до n (см. рисунок). С ростом n разность между H_n и S_n приближается к постоянному числу:

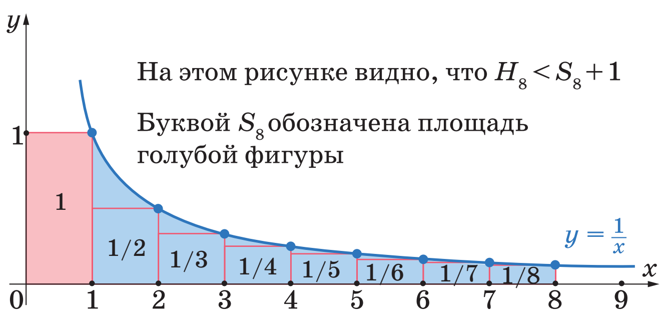
$$H_n - S_n \to \gamma \approx 0{,}577.$$

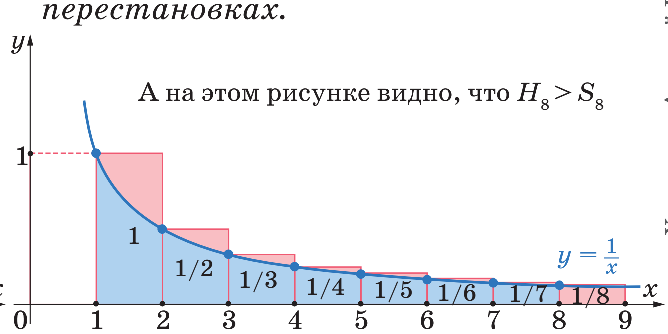
Это число γ называется *константой Эйлера–Маскерони*. Ах, если бы Стас прочитал статью «Изобретая логарифмическую линейку» из «Квантика» № 2 за 2022 год, он знал бы, как найти эту площадь и получить приближённое значение любого другого гармонического числа. Впрочем, как мы помним, приближённые равенства Стас не считает полноценными.

4. Гармонические числа появляются не только в задаче о коллекционировании. Попробуйте решить следующую не очень простую задачу.

***Перестановкой** чисел от* 1 *до n называют последовательность этих чисел, записанных в произвольном порядке. Рассмотрим все возможные перестановки чисел от* 1 *до* 10. *Таких перестановок ровно* $10! = 3\,628\,800$.

*Назовём число в перестановке **заметным**, если оно больше всех чисел, стоящих перед ним. Найдите сумму всех заметных чисел во всех перестановках.*





Художник Алексей Вайнер

Леонид Свистов

ФОТОГРАФИИ ГАЗИРОВАННЫХ НАПИТКОВ

Был жаркий летний день. Я возвращался из отпуска на поезде и смотрел в окно. На станции Великие Луки поезд остановился так, что моё окно оказалось напротив ларька «Прохладительные напитки». У ларька стояли двое молодых мужчин и с удовольствием пили напитки прямо из бутылок. Поезд стоял довольно долго, так что я могу с уверенностью утверждать, что процесс был хорошо отлажен и никаких неожиданностей не предвиделось. Но на очередной паре открытых бутылок мужчина в кепке поднял свою бутылку повыше и ловко ударил её донышком по горлышку бутылки приятеля. Эффект был ошеломляющим. Напиток в бутылке мужчины без кепки не выдержал такого унижения и вырвался фонтаном над приятелями, в то время как газировка мужчины в кепке вела себя спокойно. Конечно, сделать фотографии этого явления я не успел, поэтому предъявляю ход событий, зарисованный по памяти.

Чтобы разобраться с причиной такого поведения напитка, мы запаслись

1

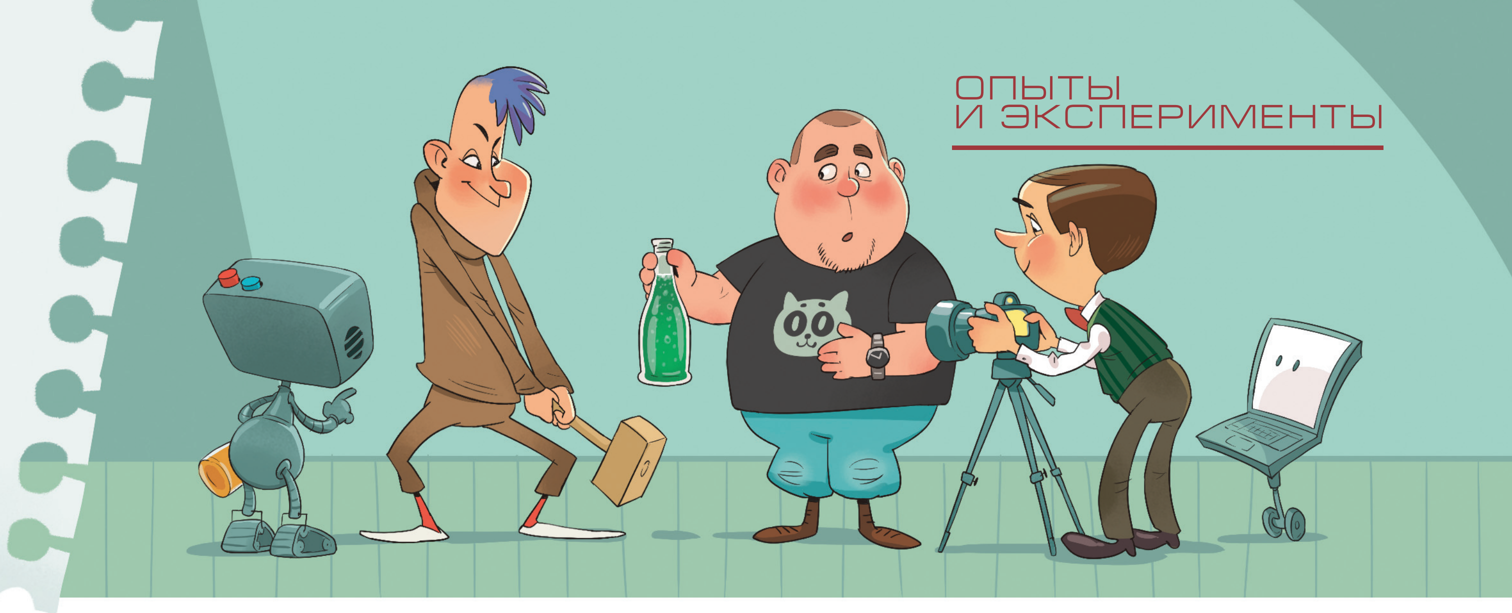
2

3

4

5

6

бутылками с разными газированными лимонадами, камерой, которая может делать фотографии каждую десятую долю секунды, а также деревянным молотком, которым не так опасно ударять открытые бутылки. Чтобы можно было наблюдать за происходящим внутри бутылки, все этикетки мы отмыли.

Вот серия фотографий содержимого одной из бутылок до (1) и после удара (2–8).

Сразу после удара в объёме бутылки возникают несколько небольших областей, где образуются пузырьки газа. На фотографиях эти области тёмные. Со временем облака пузырьков расширяются и всплывают наверх, образуя на поверхности слой пены, который растёт и в итоге выплёскивается из бутылки (фото 8). Высота столба вырывающейся пены зависит от сорта напитка. Рекордный подъём струи в наших экспериментах наблюдался после удара по бутылке с газированным лимонадом фирмы Лагидзе (фото 9–11),

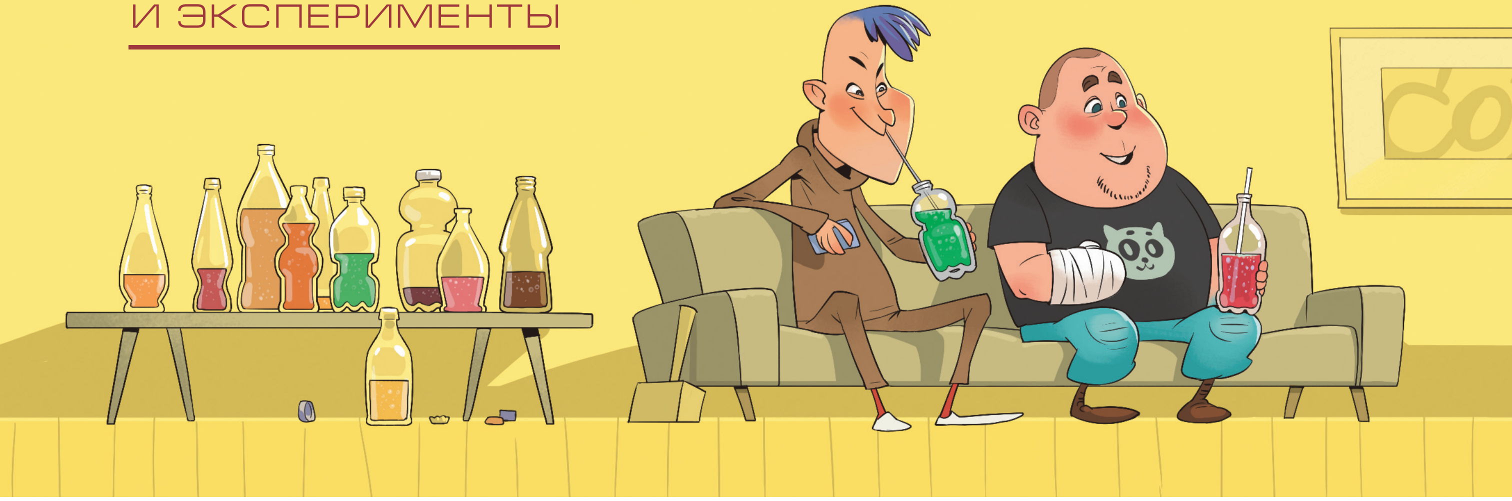

7


8

9


10


11



в котором пузырьки, образующие пену, наиболее долгоживущие.

Попробуем объяснить поведение газировки. Прежде всего вспомним, что после открытия бутылки обычно раздаётся характерный звук вырывающегося газа. Дело в том, что над напитком в закрытой бутылке находится углекислый газ под давлением, большим атмосферного. Это необходимо для того, чтобы напиток в закрытой бутылке оставался газированным, то есть чтобы в жидкости был растворён углекислый газ CO_2. В закрытой бутылке газ, растворённый в жидкости, находится в равновесии с газом над жидкостью. Это значит, что число молекул CO_2, входящих в жидкость из газа, равно числу молекул, выходящих за то же время из жидкости. Чем больше давление газа над жидкостью, тем чаще молекулы заходят в жидкость, а значит, и количество растворённого в жидкости газа растёт с увеличением давления. Этот закон открыл Джон Дальтон в начале XIX века.

Когда бутылку открывают, в воздухе над поверхностью газировки углекислого газа сразу становится значительно меньше, чем было. Поэтому молекул CO_2, выходящих из раствора, гораздо больше, чем молекул CO_2, возвращающихся в раствор. Концентрация молекул CO_2 в растворе начинает уменьшаться. Конечно, мы все замечали, что вкус газировки в открытой бутылке со временем меняется. Газировка перестаёт быть газировкой. К нашему удовольствию, газ выходит достаточно медленно. Это можно понять. Ведь молекулам газа, чтобы выйти из жидкости, надо пробраться (*продиффундировать*) сквозь воду до самого верха бутылки. Совсем по-другому происходит выход газа, если в жидкости есть пузырьки. В этом случае молекулы CO_2 могут выходить внутрь пузырьков, которые начинают расти и под действием силы Архимеда подниматься наверх. Если пузырьки при выходе из жидкости не лопаются сразу, на поверхности бутылки образуется слой пены, который может занимать большой объём и выливаться из бутылки. Выход газа из жидкости в пузырьки обычно называют *кипением*. Выход CO_2 из воды с поверхности газировки и внутрь пузырьков в

жидкости во многом схож с процессами испарения и кипения самой жидкости.

Заметим, что и при привычном нам кипении часто присутствуют явления, похожие на наблюдаемые в газировке. Так убегающее из кастрюли закипающее молоко способно залить плиту.

Осталось понять, почему для закипания газировки необходим удар по горлышку бутылки. Вот наша версия происходящего. Удар по горлышку приводит к быстрому сдвигу бутылки. Вода – это массивная, почти несжимаемая жидкость, которая не успевает за движением бутылки. Поэтому вблизи дна бутылки сразу после удара можно ожидать возникновение областей с пониженным давлением. В эти области в соответствии с законом Дальтона будут интенсивно выходить растворённые в газировке газы: кислород, азот и, конечно, углекислый газ. Вскоре после удара вода в бутылке приходит в равновесие и давления выравниваются. Но маленькие пузырьки вышедшего за это время из газировки газа остаются. Эти пузырьки разрастаются, и газировка закипает!

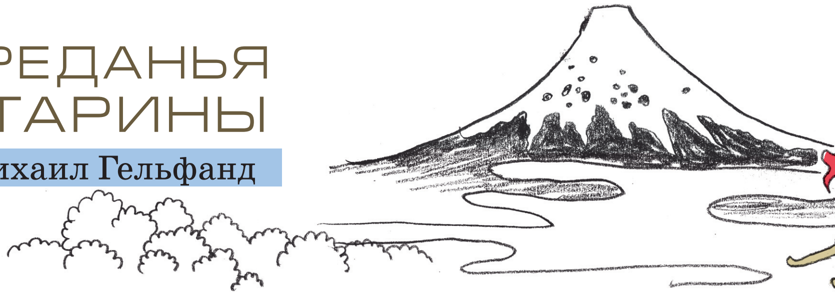
В случае удара по дну бутылки можно ожидать возникновения областей с повышенным давлением, в которых выход газа будет подавлен. В наших экспериментах такой удар к закипанию не приводил.

В конце нашего рассказа заметим, что удар по горлышку бутылки – совсем не единственный способ создания начальных пузырьков, необходимых для закипания. Так, автогонщики на церемонии награждения перед открытием бутылки с шампанским как следует её взбалтывают. А учёные-физики создают начальные пузырьки с помощью движущихся через газировку электрически заряженных элементарных частиц. Растущие со временем пузырьки становятся видимыми, что позволяет исследовать траектории этих частиц. Такой прибор называется *пузырьковой камерой*. Если верить Википедии, её изобретатель Дональд А. Глейзер рассказывал, что в ранних экспериментах по обнаружению частиц он использовал камеры, заполненные газированными жидкостями.

Художник Мария Усеинова

ПРЕДАНЬЯ СТАРИНЫ

Михаил Гельфанд



Раньше в Китае монеты не чеканили, а отливали; получалась круглая монета с квадратным отверстием, на лицевой стороне традиционно помещались четыре иероглифа, по которым монету и называли. В Японии и Вьетнаме часто использовались подражания китайским монетам с такими же иероглифами, но уже с собственными названиями. Приведены схематичные изображения таких монет и их названия. Заполните пробелы (синие клетки заполнять не надо – таких монет не было).

«КИТАЙСКИЕ МОНЕТЫ»

ЯПОНИИ И ВЬЕТНАМА

		КИТАЙ	ЯПОНИЯ	ВЬЕТНАМ
1	治 平 元 寶		Jihei Genpō	Trị Bình Nguyên Bảo
2	祥 符 元 寶		Shofu Genpō	Tường Phù Nguyên Bảo
3	嘉 通 祐 寶		Kayū Tsūhō	Gia Hựu Thông Bảo
4	乾 統 元 寶	Qián Tǒng Yuán Bǎo		Càn Thông Nguyên Bảo
5	治 通 平 寶	Zhì Píng Tōng Bǎo		Trị Bình Thông Bảo

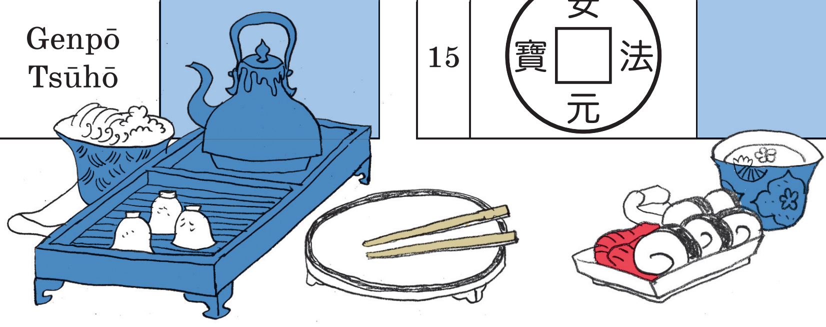
		КИТАЙ
6	乾 通 隆 寶	
7	正 隆 元 寶	Zèng Lóng Yuán Bǎo
8	平 通 安 寶	
9	嘉 通 靖 寶	Jiā Jìng Tōng Bǎo
10	元 豊 通 寶	Yuán Fēng Tōng Bǎo

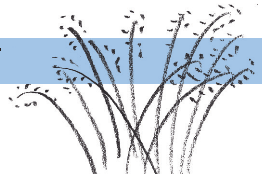
ЯПОНИЯ	ВЬЕТНАМ
	Chính Long Nguyên Bảo
Heian Tsūhō	
Katei Tsūhō	
Genpō Tsūhō	

		КИТАЙ	ЯПОНИЯ	ВЬЕТНАМ
11	元 寶 符 通			
12	元 寶 祐 通	Yuán You Tōng Bǎo		
13	祥 寶 符 通	Xiáng Fú Tōng Bǎo		
14	元 寶 通 豊			Nguyên Phong Thông Bảo
15	安 寶 法 元			An Pháp Nguyên Bảo

Ответы в следующем номере

Художник Артём Костюкевич





СВОИМИ РУКАМИ

Наталья Нетрусова

ЗВЁЗДЧАТЫЙ ОКТАЭДР

Таня заглянула в гости к Квантику, но тот явно был чем-то занят.

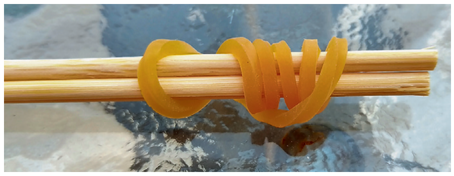
– Привет, Квантик!

Квантик молча прошёл на балкон, Таня последовала за ним. Там повсюду были разбросаны деревянные шпажки и резиночки. Квантик сосредоточенно собирал какую-то модель.

– Что ты делаешь?

– Звёздчатые формы правильных многогранников.

– А как это?

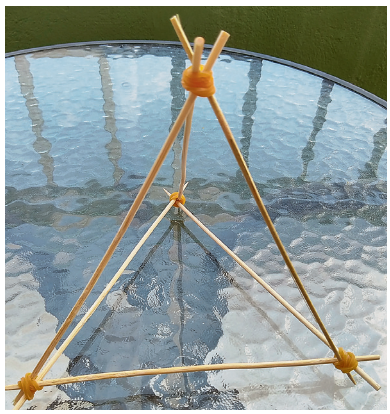


– Начнём с простого. Вот смотри: берёшь две шпажки и скрепляешь их резиночкой примерно в 1 см от края. Сильно резиночку не растягивай, мы ещё будем деформировать конструкцию и добавлять новые шпажки, пусть будет довольно свободной.

Теперь давай возьмём третью шпажку и сделаем треугольник.

Теперь просунем в каждую резиночку ещё по шпажке, это удобно делать острым концом, и скрепим свободные концы этих трёх шпажек.

– Получится тетраэдр, – догадалась Таня.



– Верно, получится тетраэдр.

– У него 4 вершины-резиночки, 6 рёбер-шпажек и 4 грани в виде правильных треугольников. – Правильные многогранники Тане были уже знакомы.

– Да, конечно, и в каждой вершине сходятся три ребра, – добавил Квантик.

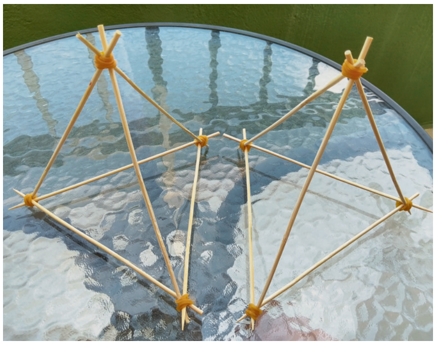
– Получается, если собирать шпажки так, что в каждой вершине сходятся 4 ребра, а грани по-прежнему треугольные, мы соберём октаэдр, – догадалась Таня.

– Верно, а если в каждой вершине сходятся 5 рёбер, а грани треугольные, мы соберём икосаэдр.

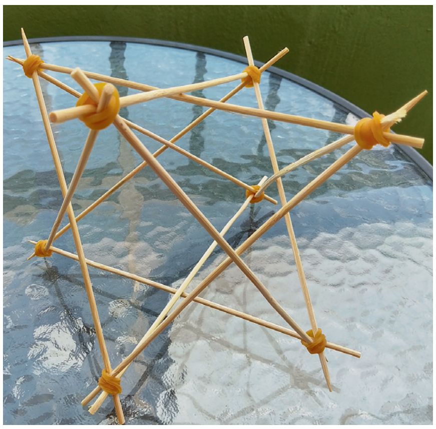
Упражнение 1. Соберите тетраэдр, октаэдр и икосаэдр из шпажек и резиночек.

– Но мы бы могли сначала собрать квадрат из шпажек, а потом из таких квадратов собрать кубик.

– Увы, кубик по такой технологии у нас не получится. Это связано с тем, что квадрат – не жёсткая фигура. Попробуй собрать его из шпажек, он будет гнуться, стремиться стать ромбом, а то и вовсе сложиться. Кубик и додекаэдр мы сделаем по-другому, не торопись. Попробуй сначала сама собрать тетраэдр.



Таня ловко собрала второй тетраэдр – неужели Квантик думал, что она не справится? Но у Квантика были совсем другие планы.

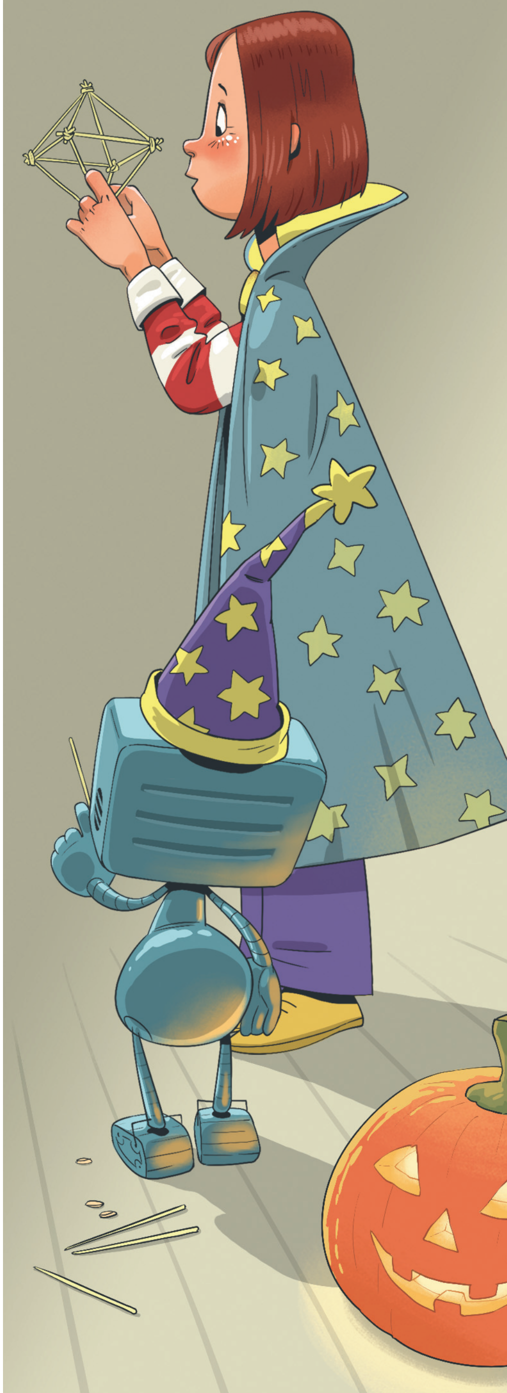


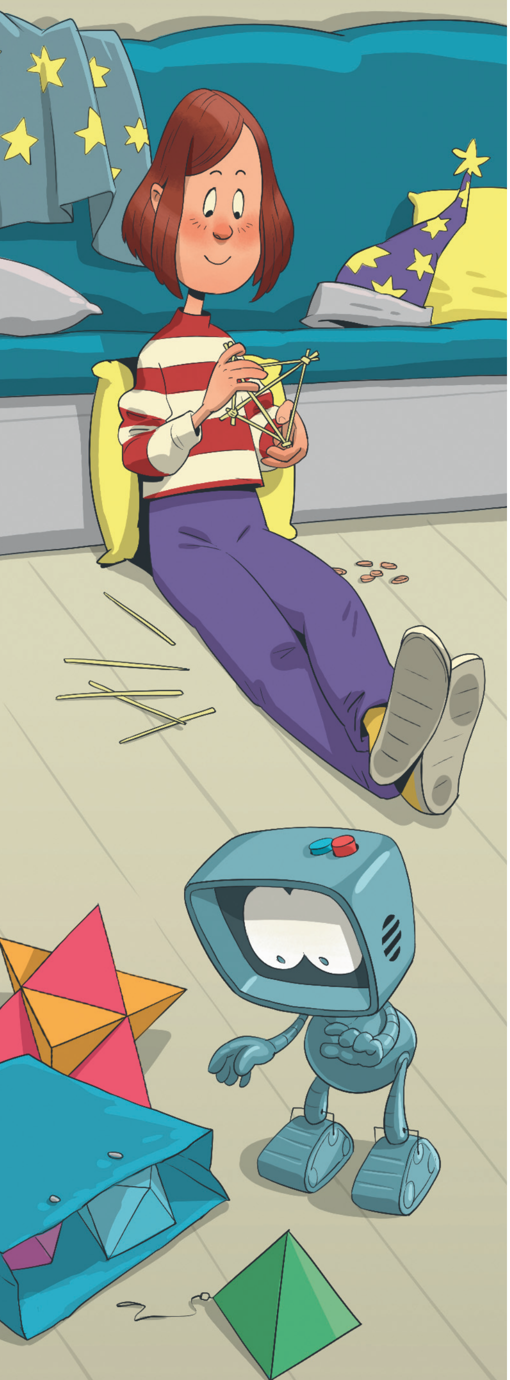
– Теперь мы эти два тетраэдра совместим так, чтобы напротив центра каждой грани первого тетраэдра лежала вершина второго. Для этого нам придётся одну вершину одного тетраэдра разобрать. Снимем резинку, просунем один тетраэдр внутрь другого, и снова восстановим разобранную вершину.

Таня возразила:

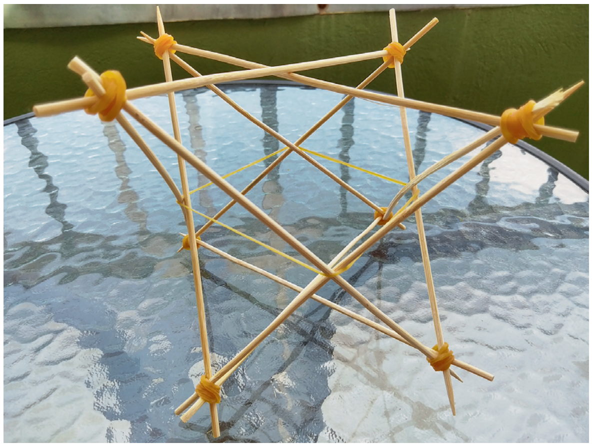
– Но это же очень хрупкая конструкция. Чуть тронешь, один тетраэдр смещается относительно другого.

– Это так, но мы сейчас сделаем её крепче. Поставим нашу конструкцию на 4 вершины, сверху оста-



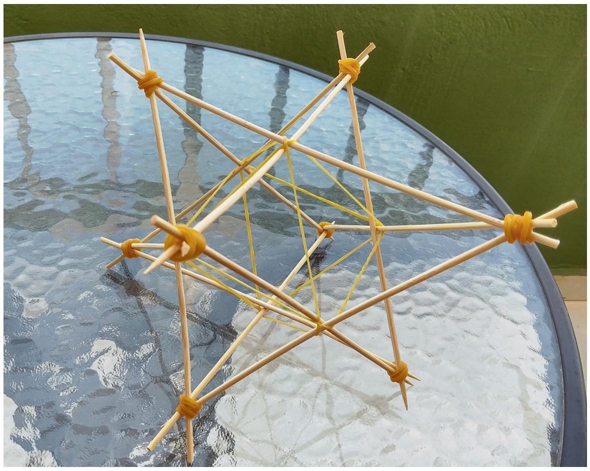


нутся ещё 4 вершины, и мы наденем на эти 4 верхние вершины ещё резинку, вот так:



– Резинка приняла форму квадрата.

– Ты наблюдательна. Но это ещё не всё: поставим модель на другие 4 вершины, снова наденем резинку на 4 верхние. И ещё раз сделаем так же в ещё одном направлении.

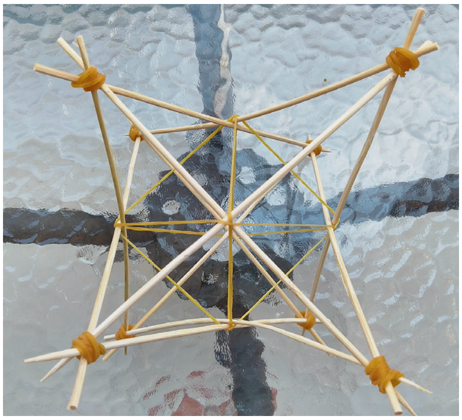


– Надо же, у нас в серединке получился октаэдр из резиночек! У него 8 треугольных граней и в каждой вершине сходятся ровно 4.

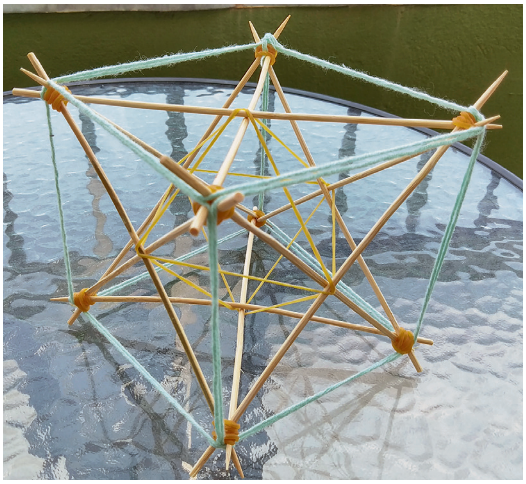
– Ты права, а то, что у нас получилось целиком – это *звёздчатый октаэдр*. У него тоже 8 треугольных граней – это грани двух наших тетраэдров, только они пересекаются между собой.

– А если посмотреть на него сверху, октаэдр в центре будет выглядеть как квадрат с диагоналями.

– Да, а ещё можно заметить, что вершины звёздчатого октаэдра образуют куб.



– Теперь возьмёмся за изготовление куба – продолжил Квантик. – Возьмём нитку и пустим её через все вершины звёздчатого октаэдра.



Упражнение 2. Сделайте модель звёздчатого октаэдра, как её делали Таня и Квантик.

Задача. Проведите нитку по всем рёбрам куба и вернитесь в исходную точку так, чтобы на каждом ребре было ровно 2 слоя нитки. (Задачу удобно решать на модели звёздчатого октаэдра.)

Перед уходом Таня, внимательно всматриваясь в то, что получилось, сказала:

– Получается, если соединить центры граней куба, получится октаэдр?

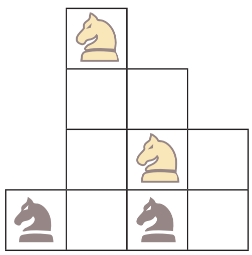
– Да, а все диагонали граней куба образуют звёздчатый октаэдр, или объединение двух пересекающихся правильных тетраэдров, – добавил Квантик. – Заходи ещё, мы с тобой малый звёздчатый додекаэдр сделаем.

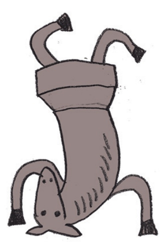
Художник Мария Усеинова

ПОНЯТЬ ФОРМУ ДОСКИ

Раз в четыре года на Международном математическом конгрессе вручают самую престижную математическую премию – Филдсовскую. Одним из лауреатов этого года стал американско-корейский учёный Джун Ха (June Huh). Он серьёзно увлёкся математикой лишь на последних курсах университета, но ещё в школьную пору следующая задача произвела на него сильное впечатление:

Можно ли поменять местами чёрных и белых коней на доске на картинке справа (на каждой клетке может стоять только один конь)?

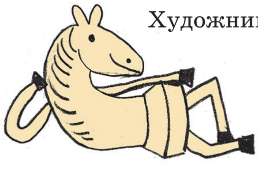




Джун Ха думал над этой головоломкой больше недели, но в конце концов решил. А вы сможете? Если понадобится подсказка – прочитайте статью Виктора Уфнаровского «Их сиятельство граф» в «Квантике» № 8 за 2021 год.

Ответы в следующем номере

Художник Артём Костюкевич



ДОЩЕЧКА ПОД КРАНОМ

Когда я мою под струёй горячей воды тонкую пластиковую дощечку для резки овощей и хлеба, она довольно сильно выгибается. Почему? Куда она выгибается – в сторону струи или от струи?

Автор Григорий Гальперин

Ответы в следующем номере

Художник Елена Цветаева

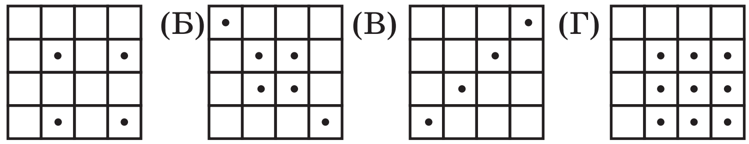
Смарт КЕНГУРУ 2022
Избранные задачи

Материал подготовил
Дмитрий Максимов

«Смарт Кенгуру» – массовый всероссийский математический конкурс-игра под девизом «Математика для каждого». Приводим избранные задачи 2022 года. Новый конкурс пройдёт в январе 2023 года, подробности см. на сайте mathkang.ru

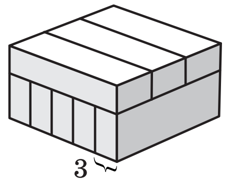
1. (2 класс, 5 баллов) Квадратный лист в клеточку 4×4 несколько раз согнули по линиям сетки. Сложенный лист проткнули один раз и разогнули обратно. Какая картинка могла получиться?

(А) (Б) (В) (Г)



(Д) ни одна картинка не могла получиться.

2. (5–6 класс, 4 балла) Из восьми одинаковых брусков сложили параллелепипед, один из размеров бруска равен 3 (см. рисунок). Чему равен объём одного бруска?

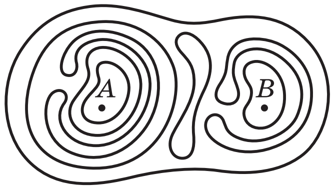


(А) 45 (Б) 75 (В) 135 (Г) 225 (Д) 375

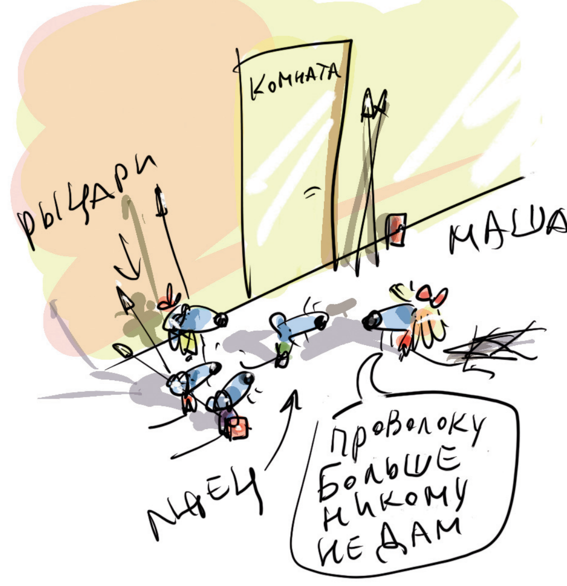
3. (5–6 класс, 5 баллов) В комнате 10 человек, каждый из которых рыцарь или лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы – всегда лгут. Более половины из этих десяти людей сказали: «Среди нас рыцарей менее трети». Сколько в комнате рыцарей?

(А) 0 (Б) 3 (В) 4 (Г) 5 (Д) 6

4. (7–8 класс, 3 балла) На рисунке изображено несколько замкнутых линий. Смартик хочет соединить точку A с точкой B. Какое наименьшее число линий ему придётся пересечь?



(А) 3 (Б) 4 (В) 5 (Г) 6 (Д) 7



5. (7–8 класс, 3 балла) Между какими двумя числами расположена дробь $\frac{2023}{2022}$?

(А) 1 и 1,00001 (Б) 1,00001 и 1,0001
(В) 1,0001 и 1,001 (Г) 1,001 и 1,01 (Д) 1,01 и 1,1

6. (7–8 класс, 4 балла) У Маши есть 10 проволочных уголков (рис. 1). Какое наименьшее число уголков нужно разогнуть, чтобы сложить контур, изображённый на рисунке 2?


Рис. 1

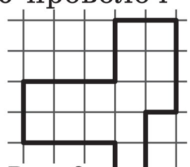
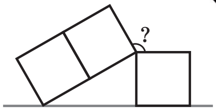


Рис. 2

(А) 2 (Б) 3 (В) 4 (Г) 5 (Д) 6

7. (7 – 8 класс, 4 балла) На рисунке изображены три одинаковых квадрата. Чему равен отмеченный угол?

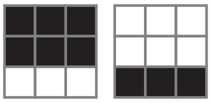


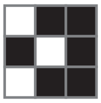
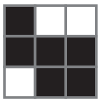
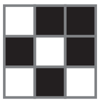
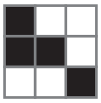
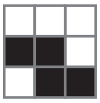
(А) 100° (Б) 105° (В) 120° (Г) 135° (Д) 150°

8. (7 – 8 класс, 4 балла) Каждое трёхзначное число Смартик записал словами, а потом оставил только первые буквы слов. Сколько разных чисел превратилось в СД?

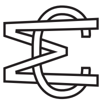
(А) 6 (Б) 8 (В) 10 (Г) 12 (Д) 14

9. (7 – 8 класс, 5 баллов) Из закрашенных и белых кубиков одинакового размера Смартик сложил куб $3 \times 3 \times 3$. Оказалось, что у него есть две грани, изображённые на рисунке справа. Какой грани у него **не** может быть?



(А)  (Б)  (В)  (Г)  (Д) 

10. (9 – 10 класс, 3 балла) В день конкурса Смартик склеил бумажные буквы *С* и *М* (см. рисунок). Как может выглядеть его конструкция с другой стороны?

(А)  (Б)  (В)  (Г)  (Д) 

11. (9 – 10 класс, 5 баллов) В классе 15 человек, каждый из них увлекается шашками или шахматами (некоторые и тем, и другим). Всего шашками увлекаются 10 человек, шахматами – тоже 10 человек. В классе прошла контрольная работа по математике, которую оценивали по пятибалльной системе. Оказалось, что средний балл любителей шахмат – 3,7, а любителей шашек – 3,5. Какое наибольшее значение может принимать средний балл во всём классе?

(А) 3,6 (Б) 3,8 (В) 3,9 (Г) 4 (Д) 4,1

12. (9 – 10 класс, 5 баллов) В таблице 5×5 расставлены цифры так, что в каждой строке и каждом столбце получается пятизначное число, и все десять этих чисел различны. Какое наименьшее значение может принимать сумма цифр в таблице?

(А) 13 (Б) 14 (В) 15 (Г) 16 (Д) 17

Художник Сергей Чуб

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ

Решения VI тура отправляйте по адресу ruskonkurs@kvantik.org **не позднее 20 декабря**. В письме укажите ваши имя, фамилию, город, школу и класс, где вы учитесь. Победителей ждут призы, предусмотрены премии за лучшее решение отдельных туров. Желаем успеха!

Предлагайте задачи собственного сочинения – лучшие будут опубликованы. Так, автор задачи 27 – пятиклассник Андрей Зизевских.

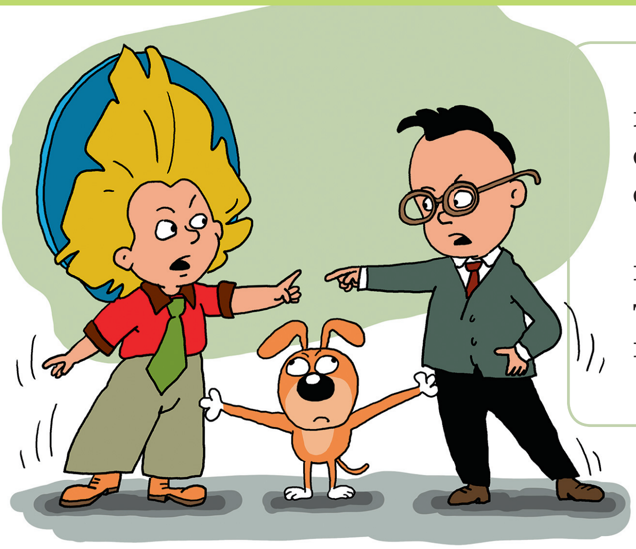
VI ТУР

26. Как-то прошлой осенью Игорь зашёл в магазин кое-что купить. На прилавке он увидел нужный ему товар, упакованный в целлофановую обёртку, через которую просвечивало написанное крупными буквами «слово» **гогг**. «Интересно, – подумал Игорь, – что я увижу, если зайду сюда следующей осенью?» А действительно: что?

И. Ф. Акулич

27. ЭТО может соль или сахар, а ещё ЭТО может дверь или окно. Какое слово мы заменили на ЭТО?

А. Е. Зизевских



28. Незнайка утверждает, что во 2 лице мн. ч. повелительного наклонения все русские глаголы заканчиваются на *-те*. Знайка с этим не согласен.

Кто прав? Если Вы считаете, что Незнайка, кратко поясните почему. Если Вы считаете, что Знайка, приведите хотя бы один пример, подтверждающий его мнение.

И. Б. Иткин

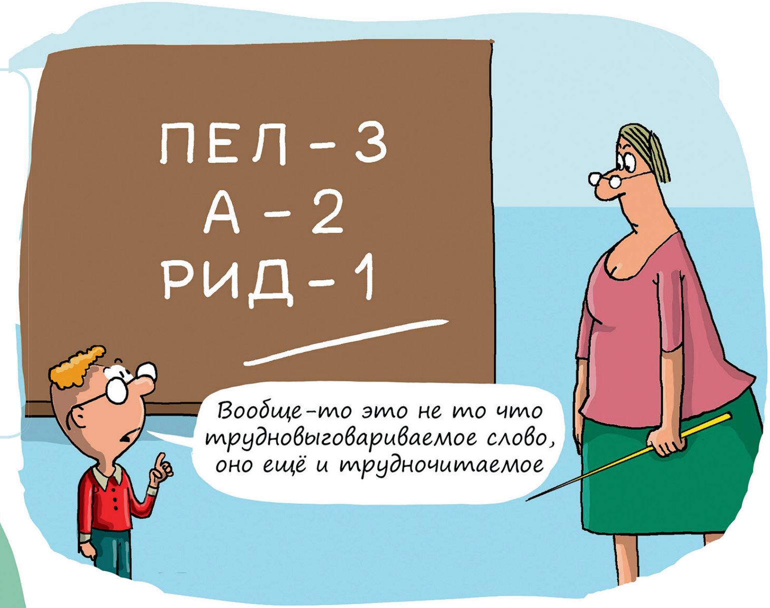
29.

ПЕЛ – 3
А – 2
РИД – 1

Итого 14.

Напишите это трудновыговариваемое слово.

Л. И. Иткин,
С. И. Переверзева



30. Олимпиада по русскому языку, задача № 30. От какого женского имени является уменьшительным имя _____? Определите, какое 4-буквенное имя мы пропустили, и ответьте на вопрос.

С. Н. Федин

Художник Николай Крутиков

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ, V тур

(«Квантик» № 9, 2022)

21. *Однажды маленькая Катя ехала с мамой в такси. Водитель беспрерывно жаловался: на плохие дороги, на постоянные поломки, на дорогие запчасти... Мама охотно с ним соглашалась. Когда Катя с мамой вышли из машины, Катя спросила у мамы: «Почему ты всё время просила дядю водителя, чтобы он замолчал?» Какую фразу произносила Катина мама в ответ на жалобы водителя?*

Мама отвечала водителю «И не говорите!» Исходный смысл этой фразы – «То, что вы утверждаете, настолько несомненно, что об этом можно даже не упоминать». А маленькая Катя восприняла слова мамы как просьбу замолчать.

22. *Быть ... кому-то – очень хорошо и достойно; быть ... кем-то – очень грустно и больно. Какое слово мы пропустили?*

Мы пропустили слово ***преданным***. *Преданный* может означать и «верный кому-то», и «вероломно обманутый кем-то».

23. *Во время урока по теме «Чередования согласных» учитель написал на доске глагол (в словарной форме).*

– Корень этого глагола заканчивается на ш, *которое в однокоренных словах чередуется с* с, *– сразу же подняла руку хозяйственная отличница Машенька.*

– Не с с, *а с* х*! – перебил Машу Вовочка.*

– Не спорьте: вы оба правы, – улыбнулся учитель.

Какой глагол был написан на доске?

На доске был написан глагол ***мешать***. Хозяйственная Машенька восприняла его в значении «перемешивать» и вспомнила такие однокоренные слова, как *месить* и *смесь*, а непоседливый Вовочка – в значении «препятствовать» и подумал про слово *помеха*. По поводу того, что перед нами – два омонима или многозначное слово, – мнения лингвистов расходятся.

24. *– ИКС, – уверенно прочитал на листочке 5-летний Ваня. – Ой, а что такое ИКС?*

– Не знаю, – смутилась Ванина старшая сестра, 9-летняя Маша. – Так иногда по телевизору говорят: «Новости нашего ИКСа». Но вообще-то это не ИКС, это я тебе нарисовала геометрическую фигуру и написала её название.

Найдите ИКС.

Листочек выглядел примерно так:

Маша нарисовала круг и подписала рядом его название, а Ваня принял круг за букву О и прочитал надпись как ***округ*** – слово, которое Маша слышала в новостях, но значения его ещё и сама не знала.

25. *В одном романе «из старинной жизни» описываются изящные ГРОЗЫ героини, сидевшей за ГРЁЗАМИ. Какие слова мы заменили на ГРОЗЫ и ГРЁЗЫ?*

На ГРОЗЫ и ГРЁЗЫ мы заменили тоже отличающиеся только твёрдостью-мягкостью одного согласного слова ***пальцы*** и ***пяльцы*** «рама для натягивания ткани при вышивании». Роман, упомянутый в условии, – самый настоящий, «Гроза на Москве» (его автор – М.В. Ямщикова, писавшая под псевдонимом «Ал. Алтаев»). Вот цитата: *Она села за пяльцы, и низала жемчуг тонкими бледными пальцами и старалась не думать о том, что её ждёт впереди...*

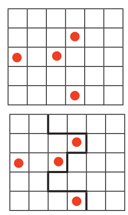
НАШ КОНКУРС, I ТУР

(«Квантик» № 9, 2022)

1. *На чаепитии всех угощали конфетами. И Петя, и Вася взяли себе по две конфеты каждого вида, но съели только по 10 конфет каждый, а остатки принесли домой. Сколько всего видов конфет было на чаепитии, если Петя принёс домой конфеты только трёх видов, а Вася – шести?*

Ответ: 8. Петя и Вася взяли поровну конфет и съели поровну, значит, принесли домой поровну. Вася принёс как минимум 6. Значит, Петя тоже, но он принёс конфеты лишь трёх видов и каждого вида не больше двух конфет. Значит, Петя принёс ровно 6 конфет. На чаепитии он взял на 10 конфет больше, то есть 16. Значит, видов было 8.

2. *Малыш и Карлсон делят торт 5×6, украшенный вишенками (см. рисунок). Может ли Карлсон так разрезать торт на две одинаковые по форме и размеру части, что все вишенки достанутся ему?*



Ответ: может, см. рисунок.

3. *Гарри Поттер поместил в толщу воды неподвижный ледяной кубик со стороной 1 см, после чего вся вода, находящаяся не дальше, чем на 1 см хоть от какой-то точки кубика, тоже замёрзла. Докажите, что получившийся кусок льда можно разрезать на части и сложить из них всех несколько фигур, каждая из которых – кубик, цилиндр или шарик.*

Разрежем этот кусок льда на части шестью разрезами вдоль граней исходного кубика, не разъединяя части. Каждая часть имеет с исходным кубиком либо общую грань, либо только ребро, либо только вершину. Части первого типа – кубики со стороной 1 см (их 6, сколько у куба граней). Части второго типа – четвертинки цилиндров, их 12 (сколько у куба рёбер), из них можно сложить 3 цилиндра высоты 1 см и радиусом основания 1 см. Части третьего типа – восьмушки шарика радиуса 1 см, их 8 (сколько у куба вершин), из них можно сложить шарик.

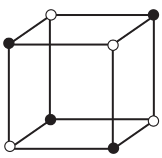
4. *На острове 99 жителей, и каждый – либо спорщик, либо подпевала. Всех по очереди спросили, кого на острове больше – спорщиков или подпевал. Каждый, кроме первого, отвечал так: если он подпевала, повторял ответ предыдущего, а если спорщик – отвечал наоборот. В результате 75 островитян ответили неправильно. Можно ли только по этим данным определить, кого на острове больше: спорщиков или подпевал?*

Ответ: подпевал больше. Каждый следующий спорщик отвечал не так, как предыдущий. Если спорщиков хотя бы 50, то хотя бы 25 ответили правильно. Но тогда неправильно ответили не больше чем $99-25=74$ жителя острова.

Описанная ситуация возможна. Пусть в очереди стоят 49 спорщиков, за ними 50 подпевал, первый спорщик отвечает неверно. Тогда неверно ответят 25 спорщиков и 50 подпевал.

5. *В вершинах куба расставили 8 чисел так, что на любых двух параллельных рёбрах общая сумма чисел одна и та же. Сколько среди этих 8 чисел может быть различных? (Укажите все варианты, сколько различных чисел может быть, и докажите, что других вариантов нет.)*

Ответ: 1 или 2. Пусть в вершинах какой-то грани стоят по часовой стрелке числа a, b, c и d. Тогда $a+b=c+d$ и $a+d=c+b$. Это возможно лишь при $a=c$ и $b=d$ (сложив первое и второе равенства, получим $2a=2c$, так как $b+d$ сократится). Значит, в противоположных вершинах любой грани куба числа равны, а тогда при «шахматной» раскраске его вершин (см. рисунок) числа в вершинах одного и того же цвета равны. Поэтому больше двух различных чисел быть не может. Два числа получится, если в чёрных вершинах нули, а в белых – единицы, одно – если все числа одинаковы.



ПЕРЕПРАВЫ ОТ ШАПОВАЛОВА

(«Квантик» № 10, 2022)

1. Обозначим китайца К, индуса И, малайца М, англичанина А, рейс задаём списком пассажиров и направлением (с левого берега на правый – стрелка →, обратно – стрелка ←). Сработает последовательность: КК → К ← КК → К ← МИ → КМ ← МА → К ← КК → К ← КК→.

2. Пусть каждый передаёт лодку человеку, стоящему на пристани через одну против часовой стрелки. Лодка поплывёт по звёздочке из диагоналей. Когда она сделает 2 круга, все сдвинутся на одну пристань по часовой стрелке.

3. Обозначим лямзиков цифрами согласно их весу, гребущего подчёркиваем. Алгоритм:

$1+2+\underline{3}\rightarrow$, $\underline{1}\leftarrow$, $\underline{6}\rightarrow$, $\underline{2}\leftarrow$, $1+\underline{5}\rightarrow$, $\underline{3}\leftarrow$, $2+\underline{4}\rightarrow$, $2+\underline{1}\leftarrow$, $1+\underline{2}+3\rightarrow$.

4. Пусть П – простак, Ч – читер, → – рейс на правый берег, ← – обратный рейс. Вот алгоритм:

ПП → П← Ч → П ← (ПП → П ← ЧЧ → П ←)^4 ПП → (ЧЧ← ПП →)^4 (П ← ЧЧ → П ← ПП →)^4.

Действия в скобках повторяются 4 раза.

5. Пусть Ах и Ох не знакомы. По условию никто из остальных не знаком с Ах и Ох одновременно. Ах и его знакомые образуют одну компанию, Ох и его знакомые – другую. В каждой компании не менее чем по 4 задиры, всего не менее 8 задир. Значит, все задиры входят в эти компании, и каждый из остальных знаком либо с Ахом, либо с Охом.

Заметим, что за пару рейсов туда-обратно число задир на любом берегу меняется не более чем на 1. Поэтому в какой-то момент на правом берегу *впервые* окажется не менее 4 задир. Значит, туда приплыло двое задир, а там их ожидало не менее двоих. Но тогда в лодке приплыла пара знакомых, и среди ожидающих была пара знакомых. Эти две пары не пересекаются. В одну пару входит Ох, в другую – Ах. Но тогда оставшиеся на левом берегу (их, как минимум, трое) между собою незнакомы. Противоречие.

6. Ответ: 23 ботинка.

Алгоритм. Обозначим многоножек М22, М24, …, М44, число их ботинок пишем в скобках, ↑ – подъём, ↓ – спуск. Делаем 41 операцию:

(М22(11)+М24(12)↑, М24(23)↓, М26(13)↑, М22(13)↓)
(М22(11)+М24(12)↑, М24(23)↓, М28(14)↑, М22(14)↓),
…, (М22(11)+М24(12)↑, М24(23)↓,
М44(22)↑, М22(22)↓), М22(11)+М24(12)↑.

Группы в скобках подымают по очереди многоножек М26, …, М44, оставляя 23 ботинка внизу.

Оценка. Рассмотрим самый первый момент, когда на горе окажутся не менее двух многоножек. У той из них, кто поднялась раньше, ботинок никто не унёс – иначе момент «вдвоём» не первый. Тем более в ботинках вторая, только что пришедшая многоножка. Значит, у них вместе не менее $(22 + 24) : 2 = 23$ ботинок.

7. Ответ: 18 эльфов.

Каждый переход туда (в Тайное место) или обратно назовём *проходом*. Проход туда обозначим стрелкой →, проход обратно – стрелкой ←.

Алгоритм. Пусть отец сходит туда-обратно с эльфом. Тогда в доме гномов будет такая ситуация: есть двое *проводников*, то есть знающих дорогу и не исчерпавших лимит проходов – эльф A (у которого ещё три прохода) и гном G (у которого ещё формально три, но на деле – всего два прохода, из третьего он не смог бы вернуться домой). Покажем, что если в доме есть ещё не знающий дороги гном H, то ситуацию можно воспроизвести, доставив в Тайное место ещё двух эльфов. Обозначим никуда не ходивших эльфов буквами B и C и выполним такие переправы: GH →, G ←, AB →, A ←, AC →, HB ←. Теперь проводниками стали гном H и эльф B, а эльфы A и C – в Тайном месте. Когда не знающих дороги гномов не останется, двое проводников (обозначим их эльф E и гном J) смогут переправить в тайное место E и ещё трёх эльфов K, L и M: JK →, J ←, EL →, E ←, EM →. Итого 7 первых пар переправили по два эльфа, а последняя пара – 4 эльфа, всего 18 эльфов.

Оценка. Дадим гномам по 2 монеты. Если проводник идёт с эльфом-непроводником из Тайного места домой, он отдаёт эльфу монету (и эльф становится проводником). Если проводник идёт назад один – он выкидывает монету. Гном идёт назад не более 2 раз, поэтому монет ему хватит. Эльф, став проводником, получит монету, и пойдёт назад не более одного раза – ему монет тоже хватит. Проходов назад в одиночку не больше числа монет, то есть не более 16. После первого прохода в Тайном месте не более двух существ. После каждой пары проходов «обратно-туда» число существ в Тайном месте увеличивается на 1, только если туда шли двое, а обратно – один. Итого в Тайное место прибудет не более $2+16=18$ существ.

Замечание. У каждого есть *ресурс* – число разрешённых проходов. Без подсчёта ресурса оценку сделать трудно. Деньги помогают сделать ресурс наглядным и тратить его с толком.

ПОЛ ИЛИ СТОЛИК (**«Квантик» № 10, 2022**)

Пусть столик качается, отрываясь от пола попеременно ножками A и B. Повернём столик на 90° вокруг его центра. Если ножки были равной длины, теперь он должен отрываться от пола другими двумя ножками (оказавшимися на местах ножек A и B), и в этом случае неровный пол. Если же пол был ровным, столик по-прежнему будет отрываться от пола то ножкой A, то ножкой B, как и в начале.

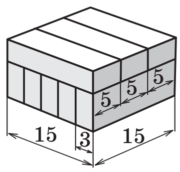
Кстати, если пол неровный, но гладкий (без дыр, торчащих гвоздей и т. п.), то столик с одинаковыми ножками можно прокрутить вокруг его центра и найти устойчивое положение. Это следует из того, что после поворотана 180° качающиеся ножки поменяются местами, а значит, в какой-то момент обе станут на пол.

Об этом сюжете любил рассказывать замечательный математик В. И. Арнольд.

СМАРТ КЕНГУРУ 2022. Избранные задачи

1. Если в каком-то ряду мы можем проткнуть две или более клетки, то между соседними проткнутыми клетками либо 0 клеток, либо 2 – поэтому вариант А не подходит.

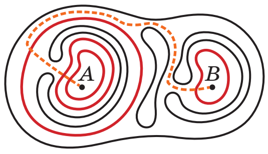
Чтобы проткнуть одним проколом две клетки, лежащие в разных строках и столбцах, нужно сложить лист хотя бы раз по вертикали и раз по горизонтали. Получится не менее, чем 4 слоя, и после прокола появится минимум 4 дырки, являющиеся вершинами прямоугольника – поэтому не подходят варианты Б и В. Ответ Г получить можно: сложим трёхслойную «гармошку», сгибая лист по горизонтали, и результат сложим так же в 3 слоя, делая вертикальные сгибы. Получится квадрат 2×2, у него одна клетка сложена в 9 слоёв (её и проколем), две – в 3 слоя и одна – в один слой. **Ответ:** Г.



2. Длинная сторона бруска составлена из 5 маленьких сторон длины 3, и она же – из трёх «средних» сторон бруска. Значит, размеры бруска – $3\times5\times15$, и его объём – 225. **Ответ:** Г.

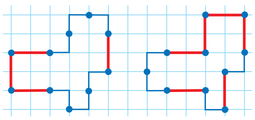
3. Высказывание «Среди нас рыцарей менее трети» не может быть правдой: иначе больше половины людей будут рыцарями, но их меньше трети. Значит, рыцарей не менее трети, но больше половины людей – лжецы. Тогда рыцарей больше 3, но меньше 5, то есть, 4. **Ответ:** В.

4. Справа красным отмечены 3 замкнутые линии, окружающие точку A, и одна – окружающая точку B. Путь из A в B должен пересечь эти 4 линии; оранжевым показан путь, пересекающий только их. **Ответ:** Б.

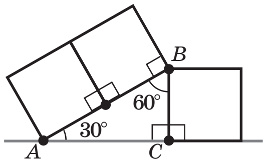


5. $\frac{2023}{2022}=1+\frac{1}{2022}$, а $\frac{1}{10000}<\frac{1}{2022}<\frac{1}{1000}$. Добавляя по 1 ко всем трём числам в неравенстве, получаем, что $1{,}0001<\frac{2023}{2022}<1{,}001$. **Ответ:** В.

6. Маша сложила контур из частей длины 2 – из уголков и разогнутых уголков. Но контур разбивается на части длины 2 всего двумя способами. В одном случае получается 4 прямые части, а в другом – 6, поэтому придётся разогнуть минимум 4 уголка. **Ответ:** В.



7. Ясно, что AB в 2 раза больше BC (см. рисунок). Тогда треугольник ABC – половина равностороннего треугольника с высотой AC. Значит, $\angle ABC=60°$, а $\angle B=360°-60°-$ $-90°-90°=120°$. **Ответ:** В.



8. На C должно начинаться название сотен, поэтому вариантов для первого слова два – СТО и СЕМЬСОТ. Вторая буква может отвечать как за единицы, так и за десятки. Для неё получаются такие варианты: ДВА, ДЕВЯТЬ, ДЕСЯТЬ, ДВЕНАДЦАТЬ, ДЕВЯТНАДЦАТЬ, ДВАДЦАТЬ, ДЕВЯНОСТО. Всего их 7, и, так как каждое первое слово можно брать в пару с каждым вторым, получаем 14 вариантов. **Ответ:** Д.

9. Обозначим данные в условии грани цифрами 1 и 2 (1 – с шестью чёрными клетками, 2 – с шестью белыми). Заметим, что ни на одной из сторон грани В нет двух подряд идущих белых клеток, и нет трёх подряд идущих чёрных. Значит, она не может быть соседом грани 2, поэтому грани 2 и В противоположны. Но тогда грань 1 обязана быть соседом В, а к ней она может прилегать только стороной с двумя чёрными и одной белой клеткой. Значит, и к грани 2, лежащей напротив В, грань 1 примыкает по двум чёрными и одной белой клетке, что невозможно. Значит, вариант В не подходит.

Остальные грани могут сочетаться с гранями 1 и 2 (к граням Б, Г, Д обе грани 1 и 2 могут быть соседними, для грани А грань 1 может быть соседней, 2 – противоположной). **Ответ:** В.

10. Двигаясь вдоль буквы M, будем смотреть на перекрёстках, проходит буква C над M или под M. При перевороте «над» и «под» поменяются местами. **Ответ:** Г.

11. И шашки, и шахматы в классе любят $10+10-15=5$ человек, значит, только шахматы любят $10-5=5$, и только шашки – тоже 5 человек. Поскольку средний балл 10 шахматистов равен 3,7, вместе они набрали 37 баллов; аналогично, 10 любителей шашек вместе набрали 35 баллов. Пусть те 5 ребят, которые любят и шашки, и шахматы, набрали вместе x баллов. Тогда те пятеро, кто любит только шахматы, набрали $37-x$ баллов, а те пятеро, кто любит только шашки, набрали $35-x$ баллов. Весь класс вместе набрал $(37-x)+(35-x)+x=$ $=72-x$ баллов. Значит, средний балл равен $(72-x):15$. Чтобы он был как можно больше, значение x нужно взять как можно меньше. Но при этом $37-x$ баллов набрали 5 человек, каждый из которых получил не более 5 баллов. Значит, $37-x\leqslant 25$, откуда $x\geqslant 12$. Тогда $(72-x):15\leqslant(72-12):15=4$. Средний балл 4 получить можно: любители только шахмат получат 25 баллов (5 пятёрок), любители только шашек – 23 балла (2 четвёрки и 3 пятёрки), а любители обеих игр – 12 баллов (например, 2 тройки и 3 двойки). Тогда весь класс наберёт как раз 60 баллов на 15 человек. **Ответ:** Г.

12. Оценим удвоенную сумму цифр в таблице, сложив сумму цифр во всех строках и сумму цифр во всех столбцах. Так как все 10 чисел пятизначные, в первой строке и в первом столбце таблицы все цифры ненулевые, причём не все из них – единицы (иначе в первой строке и в первом столбце одинаковые числа 11111). Тогда сумма цифр первой строки плюс сумма цифр первого столбца не меньше 11. Далее, сумма цифр может равняться 1 только у 10000; может равняться 2 у пяти чисел (11000, 10100, 10010, 10001, 20000) – итого у 8 из 10 чисел таблицы сумма цифр не меньше $11+1+5\cdot 2=22$, и у оставшихся двух чисел сумма цифр не меньше $2\cdot 3=6$, поэтому сумма цифр всех 10 чисел не меньше 28. Значит, сумма цифр в таблице не меньше 14. Пример с суммой цифр 14 дан справа. **Ответ:** Б.

1	1	1	1	2
1	0	0	0	0
1	0	0	2	0
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0

олимпиады НАШ КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Первый этап состоит из четырёх туров (с I по IV) и идёт с сентября по декабрь.

Высылайте решения задач III тура, с которыми справитесь, не позднее 5 декабря в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик»**.

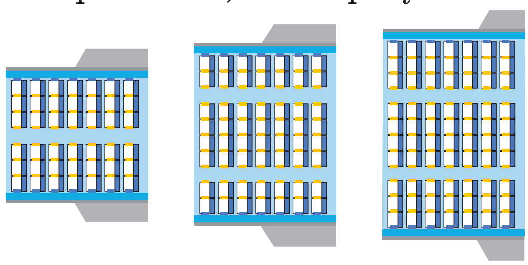
В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

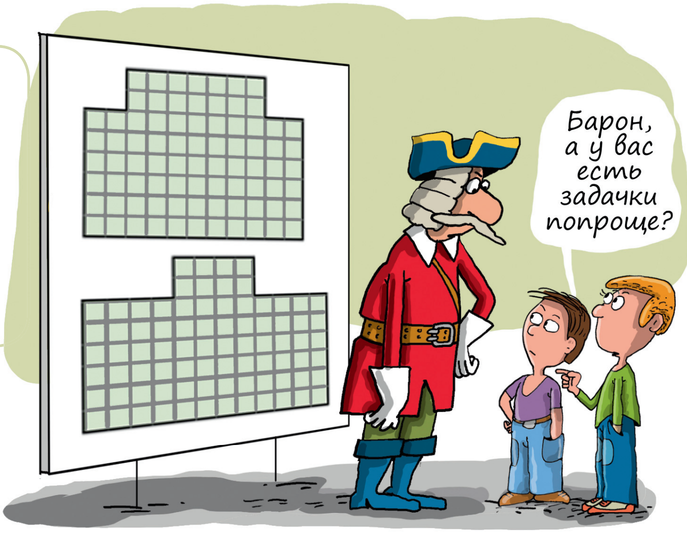
III ТУР

11. Серёжа считает место в самолёте удобным, если оно у окна или у прохода. Каждый раз место ему выбирает компьютер случайным образом. Самолёты бывают трёх типов, как на рисунке.



В самолёте какого типа вероятность попасть на удобное место больше всего? А в каком – меньше всего?

12. Барон Мюнхгаузен утверждает, что по его чертежам печь, изображённую на рисунке сверху, разрезали на 10 равных частей и из этих частей сложили печь, изображённую на рисунке снизу. Не ошибается ли барон?



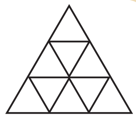
наш КОНКУРС

олимпиады

Авторы: Сергей Дориченко (11), Сергей Костин (12), Борис Френкин (13), Александр Толмачев (14), Николай Авилов (15)

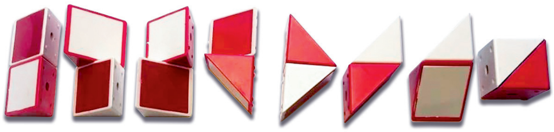
13. На блюде лежат пирожки с капустой, картошкой и яблоками: больше всего – с капустой, а меньше всего – с яблоками. Школьники по одному подходят и берут по одному пирожку, причём того сорта, которого в этот момент больше всего, а если такой сорт не один – любого из таких сортов. Вскоре оказалось, что пирожков с яблоками столько, сколько всех остальных, причём все три сорта ещё есть. Можно ли определить, сколько в этот момент на блюде пирожков каждого сорта?

14. Равносторонний треугольник со стороной 3 разбит на 9 равносторонних треугольников со стороной 1 (см. рисунок). Расставьте в них числа от 1 до 9 (по одному числу в треугольник) так, чтобы сумма чисел в любом равностороннем треугольнике со стороной 2 была квадратом целого числа.



Художник Николай Крутиков

15. У Васи сломалась головоломка «Змейка Рубика», состоящая из 24 одинаковых треугольных призм. Каждая призма – это половинка кубика $1\times1\times1$. Из 16 таких полукубиков он склеил 8 различных фигурок так, как на фото. Сможет ли Вася из этих восьми фигурок сложить куб $2\times2\times2$?



ПОЗДРАВЛЯЕМ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ ТРЕТЬЕГО ЭТАПА НАШЕГО КОНКУРСА!

Победители: Карина Амиршадян, Артём Барков, Иван Бирюков, Андрей Вараксин, Филипп Ганичев, Дарья Дайловская, Алиса Елисеева, Артур Илаев, Ахсартаг Илаев, Елена Куцук, Алеся Львова, Михаил Николаев, Тамара Приходько, Михаил Савин, Лев Салдаев, Степан Селютин, Тимур Скивко, Дарина Токарева, Иван Трофимов, Мираслава Шахова, команда «Умники и умницы в математике».

Призёры: Владимир Афанасьев, Ярослав Воропаев, Анна Джаошвили, Андрей Иванов, Лиана Козадаева, Марк Масловатый, Сергей Немилов, София Пастухова, Игорь Порунов, Наталия Савина, Екатерина Спирина, Керим Тагиров, Эмилия Тасоева, Севастьян Ушаков, Дарья Федотова, Василий Филимонов, Мелек Ханмагомедова, Максим Хугаев, Зарина Шарипова, Светлана Шашина, Игорь Шувалов, а также кружок «Озарчата».

КАНИСТРА С ТРЕМЯ РУЧКАМИ

На картинке вы видите стандартную двадцатилитровую канистру, используемую уже больше 80 лет. Зачем у неё три одинаковые ручки?

ISSN 2227-7986 22011
9 772227 798220

Автор Евгений Смирнов
Художник Алексей Вайнер