№ 10 | октябрь 2023

ЖУРНАЛ КВАНТИК ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 10
октябрь
2023

БИТУМ МЁРТВОГО МОРЯ

ЧЁТНЫЙ ПЕРИМЕТР

ПРИЗРАК НА ВОЛНАХ

Enter

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

НАГРАДЫ ЖУРНАЛА

2017 Минобрнауки России
ПРЕМИЯ «ЗА ВЕРНОСТЬ НАУКЕ»
за лучший детский проект о науке

2021 **БЕЛЯЕВСКАЯ ПРЕМИЯ**
за плодотворную работу
и просветительскую деятельность

2022 Российская академия наук
ПРЕМИЯ ХУДОЖНИКАМ ЖУРНАЛА
за лучшие работы в области
популяризации науки

Журнал «Квантик» № 10, октябрь 2023 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере связи, информационных технологий
и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Т. А. Корчемкина,
Е. А. Котко, Г. А. Мерзон, М. В. Прасолов,
Н. А. Солодовников
Художественный редактор
и главный художник Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Мария Усеинова

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»

Подписка на журнал в отделениях почтовой связи
- **Почта России:** Каталог Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)
- **Почта Крыма:** Каталог периодических изданий Республики Крым и г. Севастополя (индекс **22923**)
- **Белпочта:** Каталог «Печатные СМИ. Российская Федерация. Казахстан» (индексы **14109** и **141092**)

Онлайн-подписка на сайтах
- Почта России: **podpiska.pochta.ru/press/ПМ068**
- агентство АРЗИ: **akc.ru/itm/kvantik**
- Белпочта: **kvan.tk/belpost**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31**
и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**
Формат 84x108/16 Тираж: 4500 экз.
Подписано в печать: 31.08.2023
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8. Тел.: (831) 218-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

www.kvantik.com **kvantik@mccme.ru** **vk.com/kvantik12** **t.me/kvantik12**

СОДЕРЖАНИЕ

Вера Винниченко

ПРИЗРАК НА ВОЛНАХ

Подошёл к концу первый день в Греции. Накупавшись в море, наевшись оливок с апельсинами, уставший папа давно уже спал. А Лёлик и Тоха сидели на балконе четвёртого этажа отеля, нависавшего над берегом Ионического моря. Над чёрными горбами волн лежала лёгкая белая пена. Она образовывала узор, похожий на старика с огромной бородой. Волны шли под пеной с рёвом, переваливаясь и разбиваясь вдребезги о скалистый берег. Но пена лежала на них – лёгкая, живая и невредимая. Волны проходили, а причудливый рисунок оставался нетронутым.

– Тоха, посмотри, там внизу на воде призрак, и он смотрит на нас, – сказал Лёлик. Лёлик ходил в первый класс и больше всего на свете любил мистические истории.

– Лёлик, это морская пена! – засмеялся Тоха. Он был старшим братом, учился на одни пятёрки, обожал физику и поэтому его было очень трудно удивить.

– Как пена? – не поверил Лёлик. – Нет! Пена лёгкая, а волны большие. Они бы унесли пену к берегу и разбили её о скалы.

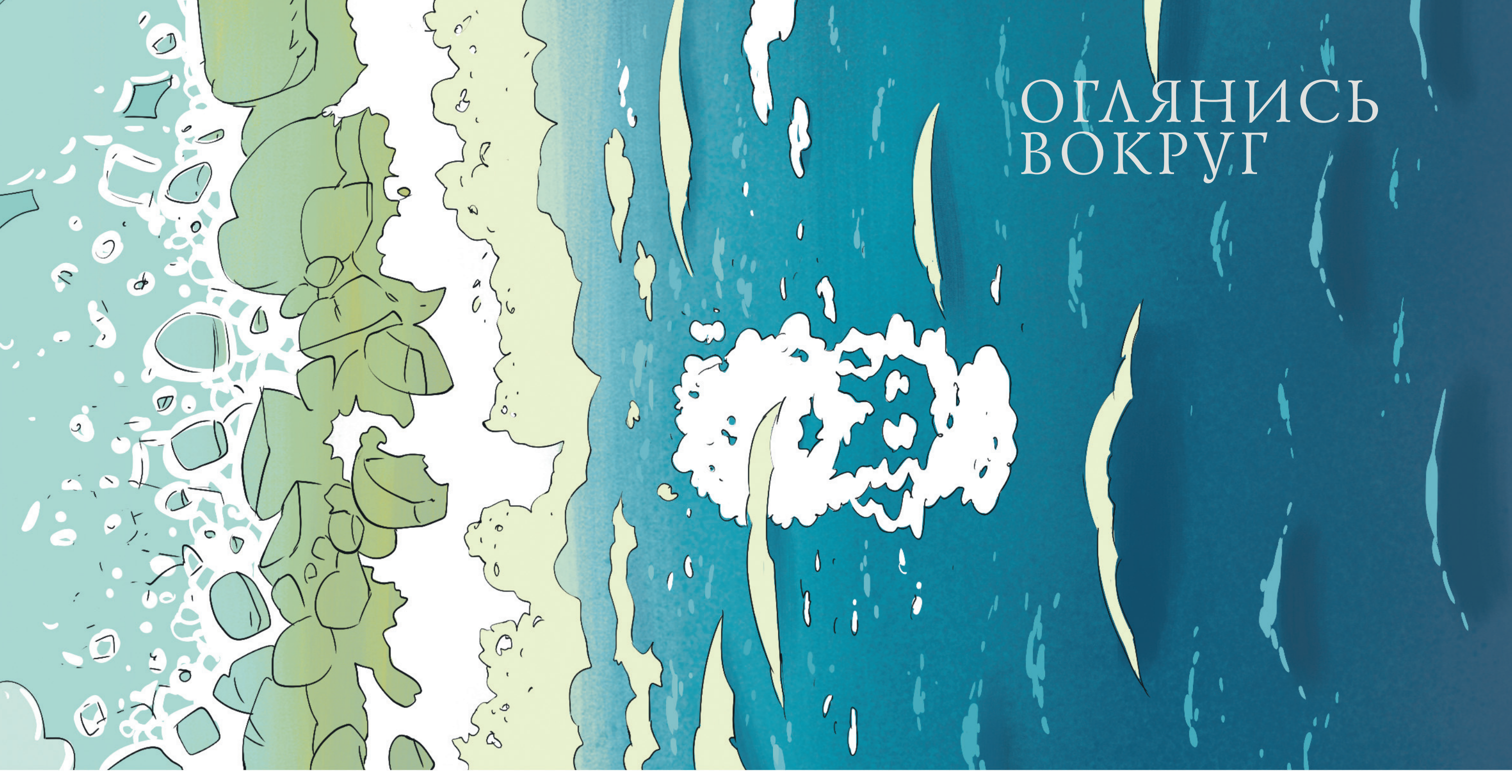
– Лёлик, ты вообще понимаешь, что такое волна? – на всякий случай спросил Тоха.

– Конечно! Волна – это холмик воды, который бежит по морю, – ответил Лёлик.

– И ты, наверное, думаешь, что вода перемещается вместе с холмиком? И что если сесть на этот холмик, то ты на нём доедешь до берега, да?

– Ну да, – кивнул Лёлик.

– На самом деле вода не бежит вместе с холмиком. Холмик идёт к берегу, а вода то поднимается вверх, то опускается вниз, – стал рассказывать Тоха.



– Ничего не понятно, – обиделся Лёлик. – Как это вода идёт вверх и вниз? Я же вижу сейчас, как вода идёт к берегу. То есть вперёд.

– Смотри, – терпеливо объяснял Тоха, – если бы ты сел на волну, то не поплыл бы вместе с ней к берегу, а провалился бы вниз.

– Да, я тяжёлый, я не призрак, и даже не пена, – грустно кивнул Лёлик.

– А если вместо тебя посадить на волну поплавок? – поинтересовался Тоха.

– А поплавок доедет на волне до берега! Волна его подхватит и дальше они уже будут плыть вместе, – радостно ответил Лёлик.

– А вот и нет! Поплавок поднимется наверх, потом опустится вниз. – Тоха достал карандаш, блокнот и стал рисовать.

– Как же это может быть – поплавок на месте качается, а холмик бежит? – удивился Лёлик.

– А ты представь, что поплавков много, вся поверхность моря ими усеяна. И все они вот так качаются. Смотри: вот левый поплавок на вершине «поплавковой волны», он сейчас начнёт проваливаться. Но следующий поплавок справа поднимется, он станет новой вершиной, и так далее, – говорил Тоха.

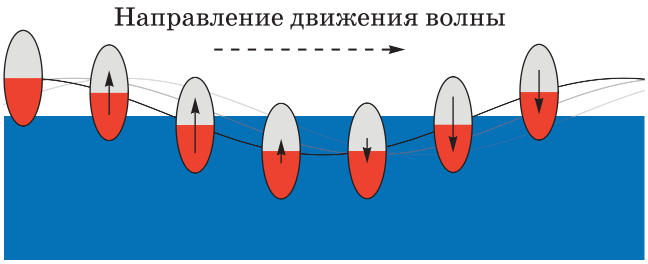


Рис. 1. Колебания на поверхности воды при прохождении волны

– Волна проходит вбок. А поплавки движутся вверх и вниз.

– Да.

– С поплавками понятно, – сказал Лёлик, – но с водой непонятно. Ты говоришь, что холмик бежит, а вода ни-

куда не бежит. Куда она тогда девается?

– Частички воды как бы делают кувырок вперёд. Посмотри на призрака своего: когда по нему волна проходит, он на ней вперёд прокатывается, а в промежутках обратно откатывается.

– И правда, – согласился Лёлик. – По-твоему выходит, что вода на месте крутится?

– Правильно, – похвалил брата Тоха.

– Тогда понятно, почему большие волны не уносят с собой моего призрака, хоть ты и говоришь, что он всего лишь пена. Но если ты прав, как же тогда остатки разбившегося пиратского корабля прибивает к берегу? Я такое в кино видел.

– Ну, это только в кино, – ответил Тоха.

– Такое бывает, – вдруг проснулся папа. Он вышел на балкон, сладко потягиваясь.

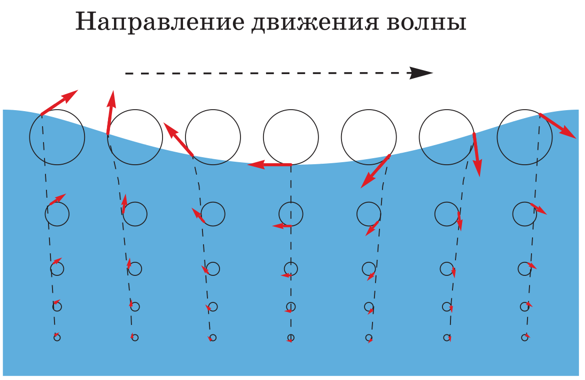


Рис. 2. Круговые движения воды

– Папа, папа! – сказал Тоха. – Лёлик опять видел привидение. Но я сказал ему, что это не привидение, а морская пена. А ещё Лёлик думал, что морская вода бежит вместе с волной. А я рассказал, что она кувыркается и откатывается туда, где была.

– Ты прав, Тоха, – похвалил папа старшего сына, – ты всё очень хорошо рассказал.

– Ура!!! – обрадовался Тоха.

– Но и Лёлик тоже немного прав, – заступился папа за младшего сына.

– Я же говорил! Привидения существуют, – обрадовался Лёлик.

– Привидение твое всё же немного будет плыть к берегу. И остатки разбившегося корабля может прибить к берегу, – кивнул папа.

– Но как? – не понимал Тоха.

– Во-первых, ветер может дуть к берегу. Тогда обломки постепенно будет сносить к берегу. Во-вторых – течение может быть в сторону берега. В-третьих, сами волны потихоньку несут поверхность воды к берегу! – ответил папа.

– Я был прав! – воскликнул Лёлик.

– Ты был прав только чуть-чуть, – уточнил Тоха, – папа, как же так? Если каждая точка воды кувыркается и возвращается на место, как же она может при этом перемещаться к берегу?

– Идея в том, что она может по своей окружности гулять, а может залезть на соседнюю. Вот так постепенно, шаг за шагом, круг за кругом, она и переместится к берегу, – сказал папа.

– Но если волны несут воду к берегу, то куда она там девается? – настаивал Тоха.

– А сами вы как думаете?

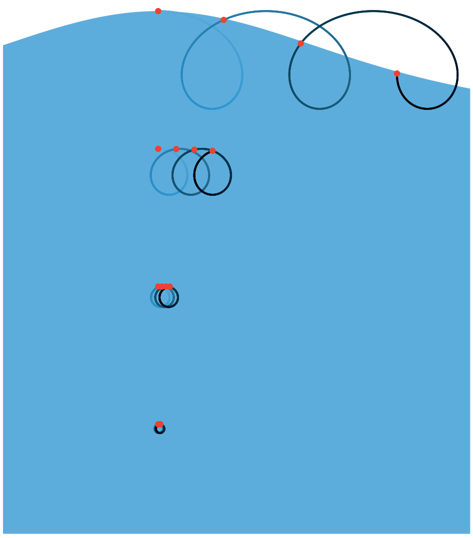
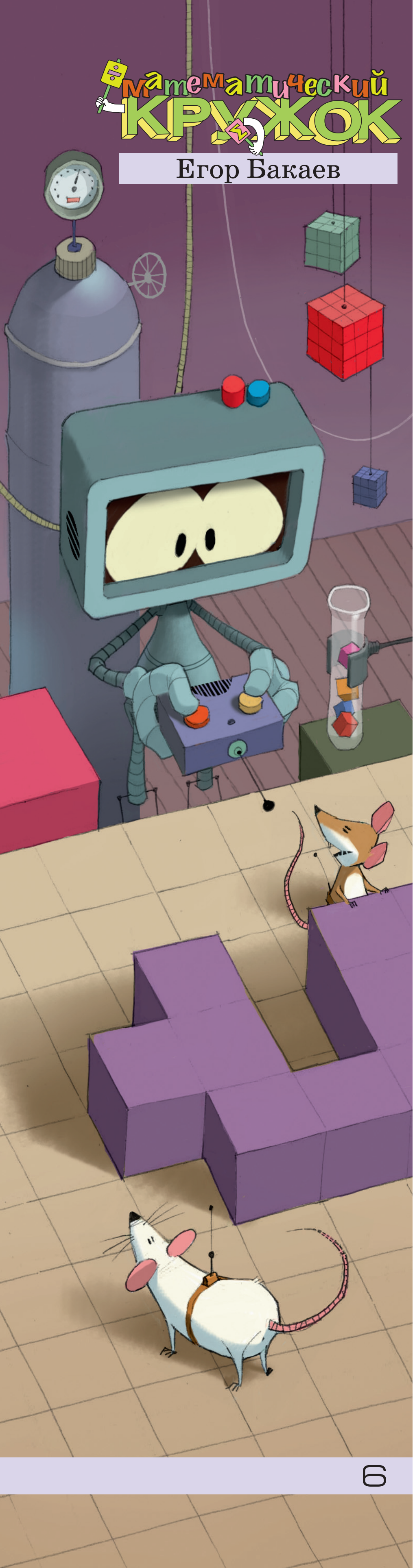


Рис. 3

Комментарий – на с. 30.

Художник Мария Усеинова



Егор Бакаев

ЧЁТНЫЙ ПЕРИМЕТР

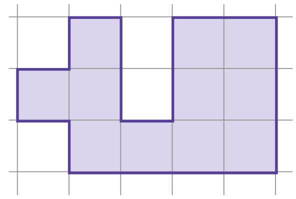


Рис. 1

Нарисуем многоугольник по линиям сетки, клетки которой – квадраты со стороной 1. Каким может быть его периметр? Оказывается, он всегда чётный. (Например, периметр многоугольника на рисунке 1 равен 20.) Мы приведём пять способов это доказать.

Клеточным многоугольником мы называем многоугольник, состоящий из нескольких целых клеток сетки. Фигура называется *многоугольником*, если её граница – одна замкнутая ломаная, которая себя не пересекает. Граница делит плоскость на две части – то, что внутри многоугольника, и то, что снаружи.

Способ 1. Обход границы + координаты

Будем обходить границу фигуры: начнём с некоторого узла (то есть с вершины какой-то клетки), и, обойдя всю границу, закончим в этом же узле. Ходы бывают четырёх видов: на 1 вверх, вниз, влево или вправо.

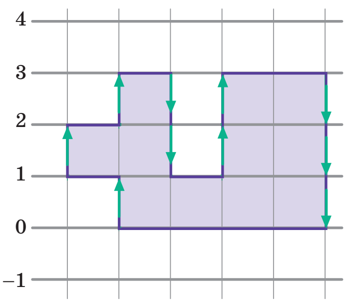


Рис. 2

Пронумеруем все горизонтальные линии сетки подряд идущими целыми числами снизу вверх (то есть введём координаты, рис. 2).

Тогда при ходе вверх номер горизонтальной линии (координата по оси y) увеличивается на 1, при ходе вниз – уменьшается на 1, а при сдвигах влево и вправо – не меняется. Так как мы закончили на той же линии, на которой начали, то номер линии увеличивался столько же раз, сколько уменьшался, поэтому ходов вниз и вверх было поровну. Значит, вертикальных ходов чётное количество.

Аналогично доказывается, что чётно и количество горизонтальных ходов. Получается, что чётно и общее количество ходов, а это и есть периметр.

Способ 2. Обход границы + шахматная раскраска

Участники математических кружков знают, что бывает полезна шахматная раскраска, особенно если

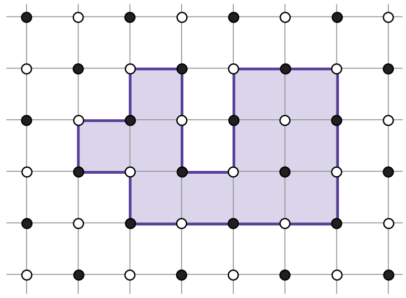


Рис. 3

в задаче говорится и про клеточки, и про чётность.

Раскрасим узлы сетки в чёрный и белый цвета так, чтобы соседние узлы были разного цвета, то есть в шахматном порядке (рис. 3). Выберем любой узел на границе многоугольника и начнём её обходить. При таком обходе чёрные и белые узлы чередуются. Начали обход мы с узла того же цвета, каким закончили (ведь это один и тот же узел). Отсюда следует, что мы чётное число раз меняли цвет, то есть чётное число раз переходили от одного узла к другому. Значит, периметр фигуры чётный.

Способ 3. Формула

Выведем формулу, связывающую S – площадь фигурки, P – её периметр и ещё некоторую величину.

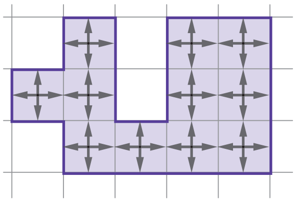


Рис. 4

Нарисуем в каждой клетке фигуры четыре стрелочки к сторонам клетки (рис. 4). Всего клеток S, поэтому мы нарисуем $4 \cdot S$ стрелочек. Часть этих стрелочек ведёт наружу, к границе многоугольника, и их будет ровно P. Остальные стрелочки ведут к внутренним перегородкам между клетками, к каждой такой перегородке ведёт по две стрелочки. Обозначим количество внутренних перегородок как I. Мы получили формулу: $4 \cdot S = P + 2 \cdot I$. (Например, для фигуры на рисунке 4 имеем: $S = 11$, $P = 20$, $I = 12$.)

Отсюда видно, что периметр P – это разность двух чётных чисел $4 \cdot S$ и $2 \cdot I$, поэтому он чётный.

Способ 4. Протыкаем «шампурами»

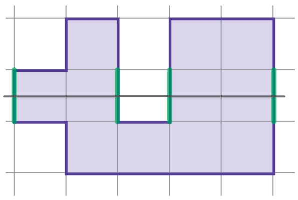
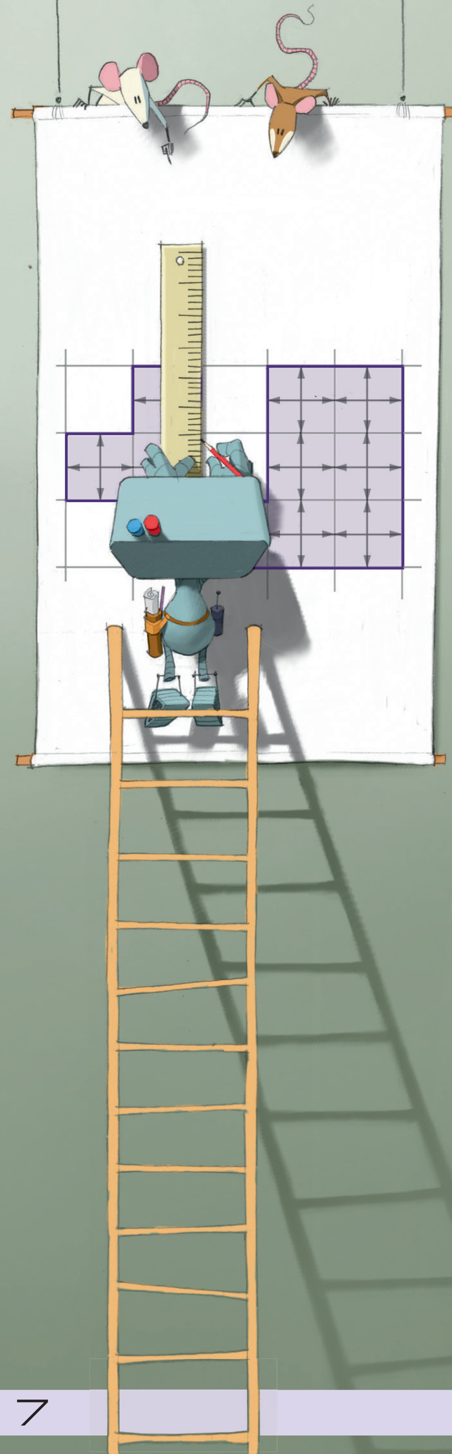
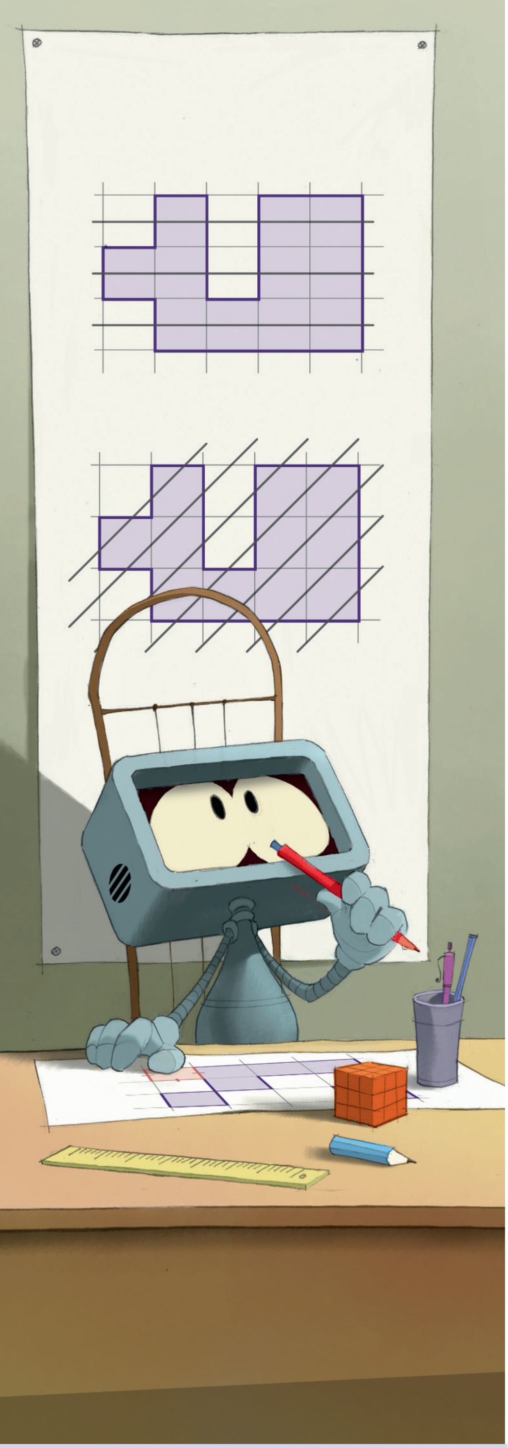


Рис. 5

Проведём прямую, проходящую параллельно линиям сетки, как на рисунке 5. Можно себе представить, что мы проткнули фигуру шампуром: он поочерёдно проходит снаружи и внутри фигуры. Поэтому шампур пересекает границу фигуры чётное число раз. Поставим теперь по шампуру в





каждой горизонтальной линии (рис. 6), эти шампуры проткнут все вертикальные отрезки границы фигуры. Поэтому их чётное количество! Аналогично, и горизонтальных отрезков на границе фигуры тоже чётное количество. А значит, и в сумме их чётное количество, то есть периметр фигуры чётный.

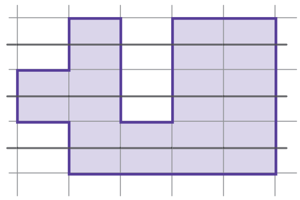


Рис. 6

Можно располагать шампуры и по-другому, например, вдоль диагонали (рис. 7).

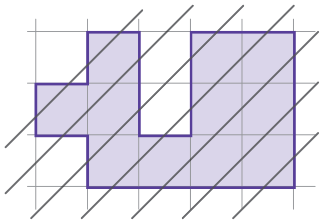


Рис. 7

Способ 5. Прибавляем по одной клетке

Будем строить фигурку пошагово: добавлять клетки по одной и показывать, что при этом сохраняется чётность периметра. Сначала была одна клетка и периметр был равен 4. На каждом шаге добавляем любую клетку. Посмотрим, как она примыкает к уже нарисованным ранее клеткам.

Возможны следующие случаи:

1) Она примыкает к ним по одной стороне (в примере на рисунке 8 новая клетка красная). Тогда из периметра фигурки вычитается одна старая сторона и добавляется три новых, то есть периметр увеличивается на 2.

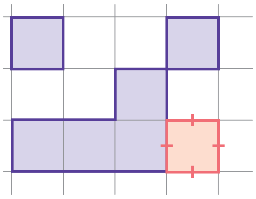


Рис. 8

2) Клетка примыкает к ним по двум сторонам. Убирается две старых стороны и добавляется две новых, то есть периметр не меняется.

3) Она примыкает к ним по трём сторонам. Периметр уменьшается на $3 - 1 = 2$.

4) Она примыкает к ним по четырём сторонам (то есть закрывает собой дырку). Периметр уменьшается на 4.

5) Также клетка может и не примыкать к ранее нарисованным. Тогда периметр увеличится на 4.

Эти случаи можно было не рассматривать отдельно, а охватить их все следующим рассуждением. У новой клетки 4 стороны. Если она примыкает к старым клеткам по x сторонам, то добавляется $4-x$ новых сторон. Числа x и $4-x$ одинаковой чётности, то есть чётность количества пропавших сторон равна чётности количества новых сторон. А значит, чётность периметра не изменилась.

Отметим, что на промежуточных шагах фигурка (множество уже добавленных клеток) может и не быть многоугольником. Поэтому, в частности, этот способ решает задачу не только для многоугольников, но и для любых клеточных фигурок. (Можете подумать, использовали ли мы в изложенных способах, что фигурка является многоугольником.)

На эту тему рекомендуем также статью «Периметр и площадь на клеточках» в «Кванте» № 12 за 2019 год (сайт kvant.ras.ru). В ней обсуждается, например, такая задача: *какой наибольший периметр может быть у клетчатого многоугольника площади* S?

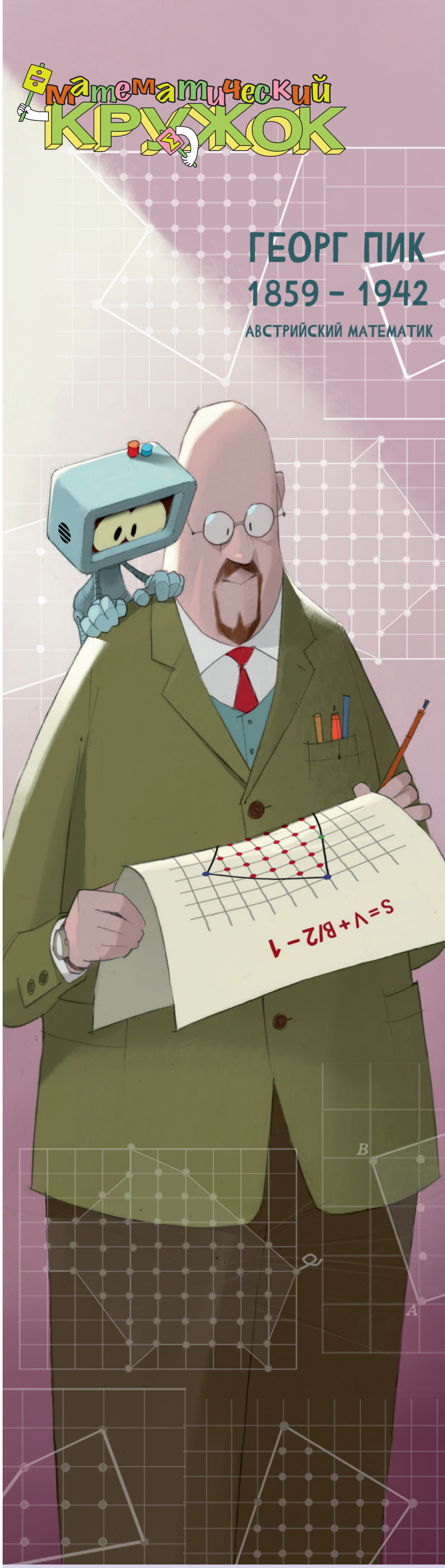
Отметим ещё, что чётность периметра клеточного многоугольника легко следует из формулы Пика (которую можно применить для любого многоугольника с вершинами в узлах сетки, причём его стороны могут идти и не по сетке). Согласно формуле, площадь равна $V+B/2-1$, где V – количество узлов сетки внутри многоугольника, а B – на границе. В случае клеточного многоугольника площадь целая, а число B – это периметр, и, как видно из формулы, B будет чётным числом. Формуле Пика была посвящена статья «Площади многоугольников и тающий лёд» Григория Мерзона в «Квантике» № 9 за 2018 год.

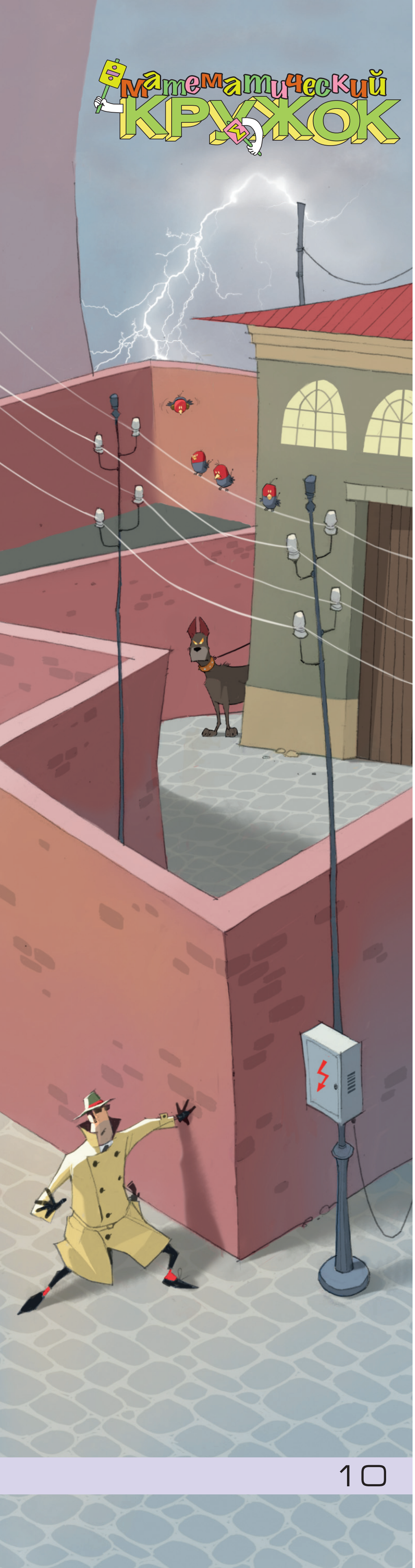
ЗАДАЧИ

В следующих задачах помогают идеи рассмотренных нами доказательств. Подумайте, в какой задаче какой подход применить. Советуем также подумать над задачами 3 и 17 из статьи «Чётность» Сергея Дориченко в «Квантике» №10 за 2013 год.

1. Прямая пересекает все стороны многоугольника и не проходит через его вершины. Может ли в этом многоугольнике быть а) 8; б) 9 сторон?

2. Найдите все клеточные многоугольники, у которых периметр больше площади а) в 4 раза; б) в 3 раза.





3. Многоугольник нарисован по линиям шестиугольной сетки, где каждая ячейка – правильный шестиугольник со стороной 1 (рис. 9). Докажите, что у него чётный периметр.

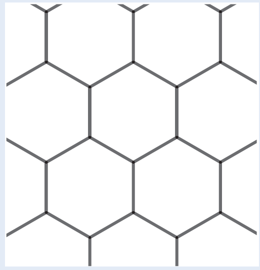


Рис. 9

4. Многоугольник нарисован по линиям треугольной сетки, где каждая ячейка – равносторонний треугольник со стороной 1 (рис. 10). Докажите, что его периметр той же чётности, что и количество клеток, из которых он состоит.

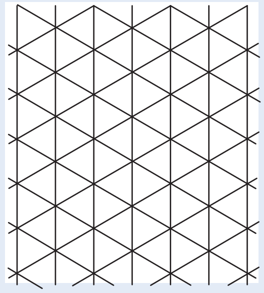


Рис. 10

5*. (Турнир городов, 2015) Секретная база окружена прозрачным извилистым забором в форме невыпуклого многоугольника, снаружи – болото. Через болото проложена прямая линия электропередач из 36 столбов, часть из которых стоят снаружи базы, а часть – внутри. (На рисунке 11 показан пример, с 8 столбами вместо 36.) Линия электропередач не проходит через вершины забора. Шпион обходит базу снаружи вдоль забора так, что забор всё время по левую руку от него. Каждый раз, оказавшись на линии электропередач, он считает, сколько всего столбов находится по правую руку от него (он их все видит). К моменту, когда шпион обошёл весь забор, он насчитал в сумме 2015 столбов. Сколько столбов находится внутри базы?

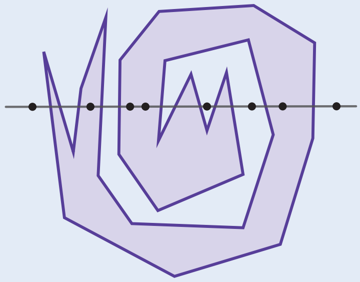


Рис. 11

6*. («Задачник «Кванта», М1953) Клеточный многоугольник сложен из доминошек 1×2. Докажите, что хотя бы одна его сторона имеет чётную длину.

Художник Алексей Вайнер

ПРЕДАНЬЯ СТАРИНЫ

Илья Гимон

Боги, элементы, планеты

Пять планет Солнечной системы видны невооружённым глазом: Меркурий, Венера, Марс, Юпитер и Сатурн. Правда, увидеть Меркурий непросто (особенно находясь далеко от экватора). Привычные нам названия планет пришли к нам из Древнего Рима. Наверное, многие из вас знают, что это имена римских богов. Римляне не были первыми, кто назвал планеты в честь богов, – они заимствовали эту идею у греков (а те у вавилонян). Римляне просто заменили греческих богов подходящими своими.

Задача 1. Если вы знакомы с греческой и римской мифологией, догадайтесь, как по-гречески называются эти пять планет.

А вот по-китайски планеты называются совсем по-другому. В Древнем Китае пять планет связали не с богами, а с пятью первоэлементами в китайской философии: Землёй, Огнём, Водой, Деревом и Металлом.

Задача 2. Придумайте своё соответствие, а потом сравните с ответом, как было у китайцев. Помните, что древним астрономам были известны лишь те свойства планет, которые можно увидеть невооружённым глазом: видимая яркость, цвет, движение по небесной сфере.

Задача 3. В первом предложении этой заметки есть неточность. Возможно, вы её уже заметили. Если нет, найдите её.

Художник Елена Цветаева

БИТУМ МЁРТВОГО МОРЯ

Для нас Мёртвое море в первую очередь интересно тем, что это насыщенный раствор соли, и тем, что оно находится в самой глубокой на Земле впадине. Уровень его воды на 430 м ниже уровня Мирового океана.

В Библии и на современном иврите Мёртвое море называется *Соляны́м*, по-арабски *Мёртвым* или *морем Лота*. У античных авторов иногда тоже встречается название «Мёртвое море». Но гораздо чаще они обращают внимание на другую его особенность. Они называют его не Мёртвым и не Соляным, а *Асфальтовым*.

В повседневной речи мы называем асфальтом покрытие дорог, хотя на профессиональном языке оно называется асфальтобетоном, а асфальт – это разновидность битума: самой тяжёлой и тугоплавкой фракции нефти. Асфальтобетон – это смесь асфальта с наполнителем: песком, щебнем или иногда цементом.

Вот, например, как описывает Мёртвое море греческий географ Страбон (I век до н. э. – I век н. э.):

От времени до времени асфальт извергается на поверхность из самой глубины с пузырьками, как будто происходит кипение воды. Поверхность воды, вздуваясь, получает вид холма. Вместе с асфальтом поднимается на поверхность

Битум Мёртвого моря

большое количество похожей на дым копоти, но незаметной для глаза. От этой копоти ржавеет медь, серебро, все блестящие предметы и даже золото. Окрестные жители, как только их сосуды покрываются ржавчиной, знают, что начинается извержение асфальта; затем они приготовляются к добыванию его с помощью плотов, сооружаемых из камыша. Асфальт представляет собой глыбу земли, которая сначала под влиянием тепла становится жидкой, а затем извергается наружу, разливаясь по поверхности. Потом от действия холодной воды (ибо такова и есть вода в озере) земля эта снова переходит в твёрдое состояние, так что её нужно резать и рубить. Асфальт плавает на поверхности благодаря тому естественному свойству воды, в силу которого, как я уже сказал, здесь не нужно умения плавать. Никто, погрузившись в озеро, не может утонуть, но поднимается водой на поверхность. Жители подплывают на плотах, вырубают асфальт и увозят такое количество, сколько каждый может взять. Таково свойство этого явления.

Таким образом, Страбон и другие авторы рассказывают, что иногда из глубин Мёртвого моря всплывает огромная масса расплавленного битума. Этому предшествует выделение газов, от которых покрываются налётом медные, серебряные и даже золотые вещи. Судя по всему, газ – это сероводород H_2S, который может реагировать с медью и серебром. Правда,

сероводород не реагирует с золотом. Возможно, дело в том, что в те времена золото редко бывало чистым и содержало значительную примесь серебра.

Битума много в Месопотамии, и он широко использовался там, где нужно было хорошо защитить строения от воды. Но битум Мёртвого моря использовался главным образом в Египте: он был необходимым ингредиентом для приготовления мумий. Само слово «мумия» появилось в европейских языках в Средние века. Оно происходит от арабского слова «мумия», которое означает как забальзамированное тело, так и битум, который использовался для бальзамирования.

В древности, видимо, массы битума всплывали нередко, но позже это стало происходить всё реже и реже. В 1834 году на восточном берегу Мёртвого моря всплыли большие массы битума, местные бедуины продали более 3000 кг в Дамаск. Ещё раз большая масса битума, на которой могло стоять 70 человек, всплыла в 1837 году. Оба раза это сопровождалось землетрясением. Местный шейх говорил английским путешественникам, что никогда не слышал о таком явлении раньше.

Последний раз относительно небольшая масса битума всплыла в 1969 году.

На фотографии 1969 года изображён один из авторов статьи (Oron, A. et al. (2015). Early Maritime Activity on the Dead Sea: Bitumen Harvesting and the Possible Use of Reed Watercraft. *Journal of Maritime Archaeology*. 10: 65–88), сидящий на всплывшей массе битума.

Природа этого явления была не очень понятна, пока в 2003 году не открыли новое явление, называемое *асфальтовый вулкан*. Первый такой вулкан открыли в Мексиканском заливе, но с тех пор их нашли ещё много. Это подводный вулкан, где извергается не лава, а горячий битум. Но поскольку битум тяжелее воды, он не всплывает, а остывает и остаётся под водой, создавая структуру, похожую на вулкан.

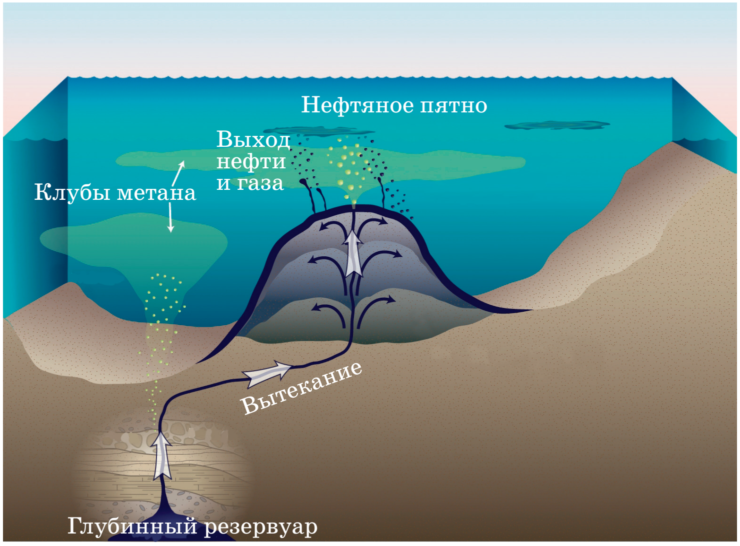
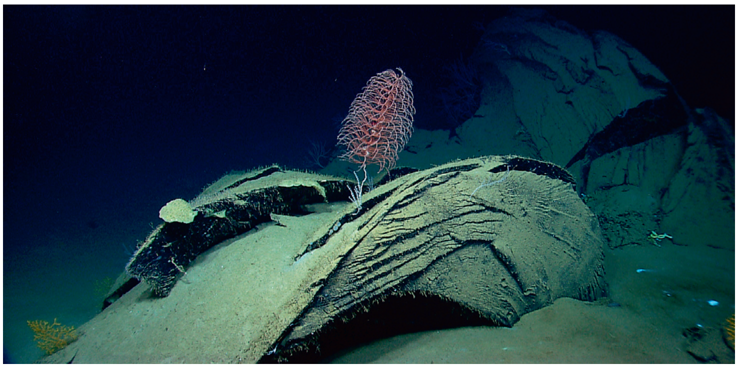


Схема подводного битумного вулкана.



Остывший битумный вулкан, на котором уже выросли коралл и морская анемона.

Похоже, что нечто подобное находится (или находилось) на дне Мёртвого моря. В любом обычном водоёме битум тяжелее воды и остаётся на дне. Но плотность воды Мёртвого моря существенно больше, чем у воды в обычном море, поэтому в Мёртвом море битум может всплывать.

Художник Алексей Вайнер

Сергей Федин

КАНТОРОВИЧ, БОРАЧИНСКИЙ, РАССЕЛ

Две из этих историй известны, а одна частично придумана. Надо догадаться, какая именно. Вычислить её можно по какой-нибудь нелепости, несуразности или ошибке, спрятанной в тексте. Попробуйте!

КАНТОРОВИЧ

Выдающийся советский математик Леонид Канторович (1912–1986), лауреат Нобелевской премии по экономике, в годы войны преподавал высшую математику в Военном инженерно-техническом училище Ленинграда. При этом его, как и многих преподавателей, мобилизовали в армию, присвоив звание лейтенанта.

Молодому профессору пришлось жить в казарме вместе с курсантами и младшими офицерами. Там оторванному от жизни учёному пришлось несладко. Но особенно издевался над Канторовичем один майор. Нутром чуя классово чуждый ему элемент, этот солдафон не упускал случая досадить «прохвессору».

Канторовича спас случай. Один из курсантов, искренне сочувствующий талантливому учёному, рассказал своему деду, академику и генералу, про издевательства, которым подвергался Канторович. Последствия были самые неожиданные. Через два месяца в училище объявили общее построение и зачитали приказ командования. Из него следовало, что Канторовичу присваивается звание... генерал-майора. Не забыт был и зловредный мучитель будущего Нобелевского лауреата – ему (видимо, чтобы не обижался) присвоили звание генерал-лейтенанта.

Мучения Канторовича прекратились, а злокозненный майор, хотя и стал генералом, должен был теперь первым отдавать честь бывшей жертве.

БОРАЧИНСКИЙ

Выпускники Физтеха старшего поколения наверняка с дрожью вспоминают преподавателя кафедры высшей математики Игоря Агафоновича Борачинского, известного в студенческой среде как Гога. О его строгости на семинарах и экзаменах рассказывали легенды. Вот лишь одна из них.

У Гоги Борачинского было очень слабое зрение, и он обычно читал, поднося написанное близко к глазам. Как-то раз он принимал задания по математическому анализу у группы студентов. Берёт первую тетрадку, подносит к лицу, читает, через пять секунд откладывает: «Два!» Берёт вторую, опять подносит, читает, через пять секунд: «Два!» И так несколько раз подряд. Наконец, берёт очередную тетрадку и долго изучает её.

Проходит пять минут, десять. «Да, в этом что-то есть», – задумчиво бормочет Гога, продолжая изучать тетрадь. «Игорь Агафонович, – доносится робкий студенческий голос, – вы тетрадку вверх ногами держите». Гога тут же переворачивает её, смотрит пять секунд: «Та же чушь! Два!»

РАССЕЛ

Рассказывают, что однажды философ и математик Бертран Рассел (1872 – 1970) читал лекцию по астрономии, в которой сказал, что Земля вращается вокруг Солнца, а оно, в свою очередь, движется относительно звёзд нашей галактики. В конце лекции некая пожилая дама поднялась со своего места в заднем ряду и сказала: «Всё, что вы нам рассказали, – сущий вздор. На самом деле Земля – плоский диск, лежащий на панцире огромной черепахи».

Рассел улыбнулся и спросил: «А на чём тогда стоит черепаха?» Дама ответила: «Юноша, ваша острота не удалась. Черепах бесконечно много!»

Художник Капыч

ФРИДРИХ АВГУСТ КЕКУЛЕ

Марина Молчанова

Фридрих Август Кекуле
(Friedrich August Kekulé
von Stradonitz)
1829 – 1896

В статье про Джона Дальтона «Сделано из атомов» («Квантик» № 7 за 2021 год) мы уже рассказывали об атомной теории строения вещества. Она была создана в начале XIX века и быстро распространилась: к середине века весь учёный мир знал, что химические соединения построены из атомов. Оставалось понять – а как именно построены? Особенно загадочными были те соединения, которые изучает органическая химия.

В XVIII веке считалось, что между веществами неживой и живой природы есть непреодолимая граница: как писали в ту пору, «ни животные, ни растительные тела, ни их части не могут быть воспроизведены химическим искусством». А значит, должны быть две разные химии. Неорганическая изучает всё, что можно получить из минералов, воды, воздуха. А органическая – то, что можно выделить из организмов, обладающих «жизненной силой». Что называется, природные дары.

Правда, уже в начале XIX века выяснилось, что резкой границы нет. Тогда молодой химик Фридрих Вёлер впервые синтезировал в лаборатории соединения, которые явно относились к органической химии: мочевину и щавелевую кислоту. Но всё же у органических веществ есть свои особенности. Например, такая: их молекулы часто состоят из большого или очень большого числа атомов. Как так может получаться? По каким правилам строятся эти сложные структуры?

Подробно ответить на эти вопросы удалось только в XX веке. Но первые важные шаги были сделаны именно в XIX – и связаны с именем Августа Кекуле.

* * *

Кекуле родился в немецком городе Дармштадте. При рождении он получил два имени: Фридрих Август. Но с первым именем у него не сложились отношения, и всю жизнь он именовался именно Августом. А ближе к концу жизни он был удостоен дворянского титула и стал Август Кекуле фон Штрадониц.

Итак, Август Кекуле жил в семье чиновника и сперва даже не думал, что будет заниматься наукой.

Фридрих Вёлер (1800 – 1882)

В восемнадцать лет он поступил в университет в городе Гисене, чтобы изучать архитектуру. Но вмешалась судьба: химию там преподавал профессор Либих.

Юстус фон Либих (1803–1873) был великим учёным, создавшим основы науки об удобрениях (и не только), и замечательным педагогом. И Кекуле, увидев и услышав Либиха в первый же свой студенческий год, поменял планы: теперь уже он связывал своё будущее только с химическими исследованиями.

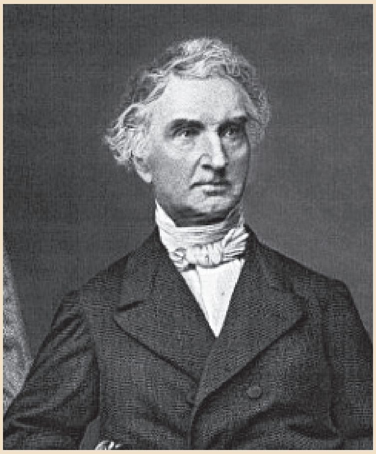
Так и вышло: после студенчества и краткой военной службы он занимался именно химией. Сперва за границей (Кекуле свободно владел английским и французским языками), потом в разных городах Германии. И уже в 1857–1858 годах, в неполные тридцать лет, опубликовал статьи, впервые изложив основы своей *теории химического строения*. Её сейчас изучают в любом начальном курсе химии, да и сам Кекуле вскоре описал её в своём учебнике органической химии.

Идеи Кекуле состоят в следующем. Во-первых, каждый атом может образовывать строго определённое число связей с соседними атомами – мы это называем *валентностью*. Для углерода валентность 4, для водорода 1, для кислорода 2 и так далее[1].

Во-вторых, у атомов углерода есть уникальное свойство: они отлично связываются между собой, образуя длинные или разветвлённые цепочки. А к этому «углеродному скелету», каркасу молекулы, можно присоединять и атомы других типов: водород, кислород, азот, хлор... Таким образом природа способна создавать сколь угодно большие и сложные конструкции, а ведь именно это и нужно для органической химии. То есть основа органической химии – именно углерод.

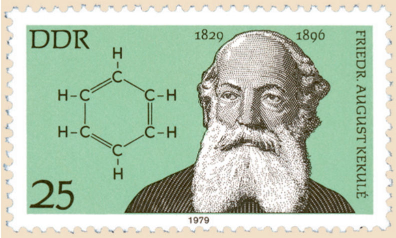
Кстати, если у каждой молекулы есть своя чётко известная структура, то отсюда один шаг до наглядных представлений. Можно нарисовать картинку, соединяя кружочки-атомы линиями – это структурная

[1] Сейчас мы знаем, что это не совсем так: многие атомы могут иметь разные валентности в разных ситуациях. Так что потом теорию Кекуле пришлось подправить.



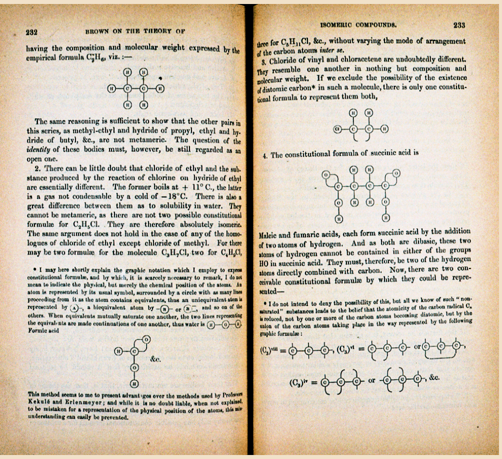
Юстус фон Либих
(1803–1873)

Университет в Гисене ныне носит имя Юстуса фон Либиха



Марка к 150-летию со дня рождения Кекуле

ФРИДРИХ АВГУСТ КЕКУЛЕ



232 BROWN ON THE THEORY OF

having the composition and molecular weight expressed by the empirical formula C_2H_6, viz. :—

The same reasoning is sufficient to show that the other pairs in this series, as methyl-ethyl and hydride of propyl, ethyl and hydride of butyl, &c., are not metameric. The question of the *identity* of these bodies must, however, be still regarded as an open one.

2. There can be little doubt that chloride of ethyl and the substance produced by the reaction of chlorine on hydride of ethyl are essentially different. The former boils at + 11° C., the latter is a gas not condensable by a cold of −18°C. There is also a great difference between them as to solubility in water. They cannot be metameric, as there are not two possible constitutional formulæ for C_2H_5Cl. They are therefore absolutely isomeric. The same argument does not hold in the case of any of the homologues of chloride of ethyl except chloride of methyl. For there may be two formulæ for the molecule C_3H_7Cl, two for C_4H_9Cl,

* I may here shortly explain the graphic notation which I employ to express constitutional formulæ, and by which, it is scarcely necessary to remark, I do not mean to indicate the physical, but merely the chemical position of the atoms. An atom is represented by its usual symbol, surrounded by a circle with as many lines proceeding from it as the atom contains equivalents, thus an uniequivalent atom is represented by (A)–, a biequivalent atom by –(B)– or (B), and so on of the others. When equivalents mutually saturate one another, the two lines representing the equivalents are made continuations of one another, thus water is (H)–(O)–(H). Formic acid

&c.

This method seems to me to present advantages over the methods used by Professors Kekulé and Erlenmeyer; and while it is no doubt liable, when not explained, to be mistaken for a representation of the physical position of the atoms, this misunderstanding can easily be prevented.

ISOMERIC COMPOUNDS. 233

three for $C_5H_{11}Cl$, &c., without varying the mode of arrangement of the carbon atoms *inter se*.

3. Chloride of vinyl and chloracetene are undoubtedly different. They resemble one another in nothing but composition and molecular weight. If we exclude the possibility of the existence of diatomic carbon* in such a molecule, there is only one constitutional formula to represent them both,

4. The constitutional formula of succinic acid is

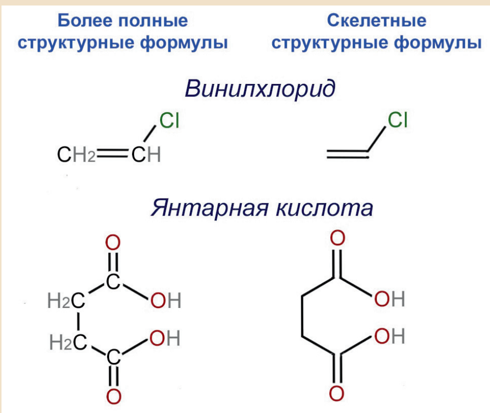
Maleic and fumaric acids, each form succinic acid by the addition of two atoms of hydrogen. And as both are dibasic, these two atoms of hydrogen cannot be contained in either of the groups HO in succinic acid. They must, therefore, be two of the hydrogen atoms directly combined with carbon. Now, there are two conceivable constitutional formulæ by which they could be represented—

* I do not intend to deny the possibility of this, but all we know of such "non-saturated" substances leads to the belief that the atomicity of the carbon radical C_n is reduced, not by one or more of the carbon atoms becoming diatomic, but by the union of the carbon atoms taking place in the way represented by the following graphic formulæ:

$(C_3)^{viii}$ = ..., $(C_3)^{vi}$ = ... or ...,

$(C_3)^{iv}$ = ... or ..., &c.

Статья
Александра Крума Брауна
(1838 – 1922) с первыми
структурными формулами



Так мы сейчас рисуем структурные формулы из статьи Александра Крума Брауна

формула, именно их используют химики для изображения молекул. Число линий, отходящих от каждого атома, и есть его валентность. Первые такие картинки нарисовал в 1864 году шотландский химик Александр Крум Браун, сейчас мы обычно рисуем их чуть более упрощённо. А можно составить и пространственную модель из шариков и стержней – в 1865 году Август фон Гофман впервые показал студентам такие модели из разноцветных крокетных шариков и латунных трубок...

Одна только трудность: в XIX веке не было методов, позволяющих получить прямую информацию о строении тех или иных молекул. Поэтому некоторые химики критиковали использование структурных формул – что это за модели, если их правильность невозможно доказать? Но Кекуле был убеждён – и убедил других, – что эту информацию можно получить, хотя бы для относительно простых веществ.

Теория Кекуле довольно быстро стала общепринятой. Ведь фактически она позволила создать общий язык для химиков-органиков: вот вещество, а вот чёткая и понятная картинка, которая показывает, как оно устроено. Другие химики подхватили и развили идеи Кекуле – так, среди наших соотечественников особенно прославился профессор Казанского университета Александр Бутлеров. А физическое объяснение и понятия химической связи, и понятия валентности появилось уже в XX веке.

Александр Бутлеров (1828 – 1886), памятник в Казани. Фото автора

Но в этой истории есть и печальная деталь. Почти одновременно с Кекуле сходные идеи выдвинул другой молодой химик – шотландец Арчибальд Скотт Купер. В истории науки такое бывает: уж если условия для какого-то открытия созрели, то иной раз вопрос «кто первый» решается случайно... И Куперу не повезло: его идеи стали достоянием публики чуточку позже, чем идеи Кекуле. Причём по случайности: Шарль Адольф Вюрц, знаменитый французский химик, у которого Купер тогда работал (каждый, кто бывал в химической лаборатории, видел колбу Вюрца!), промедлил с представлением статьи Купера французским академикам, и эта задержка оказалась роковой. Произошла ссора, но было уже поздно. У Купера случился нервный срыв, и больше он наукой не занимался.

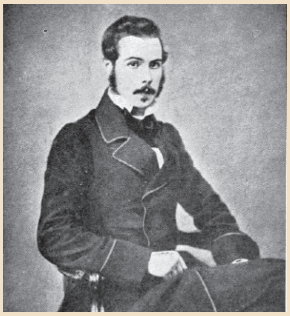
* * *

Среди достижений Кекуле – а он был плодовитым учёным и великолепным педагогом – одно особенно широко известно. Рассмотрим его подробней: оно показывает, как можно попытаться судить о том, чего мы не видим, – в данном случае о структуре молекулы.

Одно из самых известных веществ в органической химии – бензол. Само по себе это вещество, впервые описанное Майклом Фарадеем в 1825 году, не так уж часто встречается в нашей жизни: это ядовитый растворитель с характерным запахом. Но одновременно это важнейшее сырьё для химической промышленности, и в огромном количестве веществ, которые химики называют «ароматическими» (ароматы у них, впрочем, не всегда приятные...), встречается та же структура, что и в молекуле бензола. А вот что это за структура, до Кекуле было неясно.

Сейчас известно, что в молекуле бензола 6 атомов углерода и 6 атомов водорода, это записывается как C_6H_6. Ещё мы знаем, что валентность углерода равна 4 (то есть из каждого атома углерода «выходит» по четыре палочки-связи), а валентность водорода – 1. Наконец, мы знаем (во времена Кекуле это тоже было известно), что между двумя соседними атомами углерода может быть не одинарная, а двойная или тройная связь – сразу две или три палочки.

Получится у вас что-нибудь нарисовать, соблюдая эти условия? Только не заглядывайте сразу на следующую страницу, там приведено несколько вариантов.

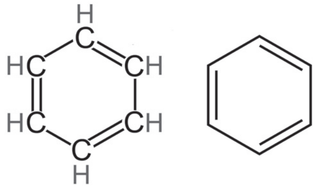


Арчибальд Скотт Купер (1831 – 1892)

Шарль Адольф Вюрц (1817 – 1884)

Майкл Фарадей (1791 – 1867)

ФРИДРИХ АВГУСТ КЕКУЛЕ



Бензол Кекуле. Обычная структурная формула и скелетная формула

Задача не такая уж простая, если не знать нужный ответ заранее.[2] И Кекуле позднее утверждал, что ответ к нему пришёл во сне, точнее, в состоянии полудрёмы. Сначала на втором этаже омнибуса в Лондоне. Потом во время работы в городе Генте. Перед его закрытыми глазами (так рассказывал сам Кекуле) проносились атомы, образуя ряды. Эти длинные ряды атомов извивались как змеи. И вдруг одна змея ухватила себя за хвост, образовав кольцо!

Иногда эту историю рассказывают и по-другому, хотя эта версия уже точно выдуманная – и даже не самим Кекуле. Якобы он увидел, как обезьян в клетке везут в зоопарк. Они сцеплялись лапами и хвостами, образуя… правильно, живые кольца.

Так или иначе, Кекуле пришла в голову формула, которую вы видите сверху: кольцо из атомов углерода, чередующиеся одинарные и двойные связи, к каждому атому углерода присоединён водород.

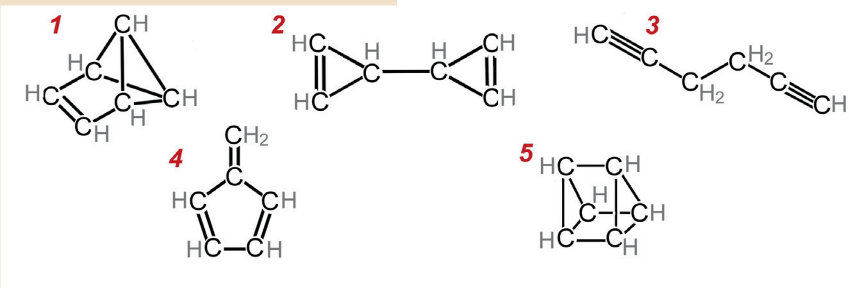
Но придумать формулу мало, тем более что похожие идеи возникали и у других химиков. Надо ещё показать, почему она лучше других.

Почему, например, не годятся формулы 1–4 на рисунке внизу страницы? Поставим химический эксперимент. Давайте заменим один из атомов водорода, например, на хлор (получится C_6H_5Cl, хлорбензол). Если водороды в исходной структуре «неравноправны», различимы между собой, то после этой процедуры могут получиться разные молекулы, а значит, разные вещества. А вот если

[2] Компьютерным перебором можно показать, что таких структур есть целых 217, хотя, понятное дело, не все они химически реализуемы.

Уроборос – древний символ, использовавшийся и алхимиками (рисунок из трактата 1478 года)

Обезьяны и бензол (сатирическая картинка, 1886)



Ещё пять возможных структур для C_6H_6

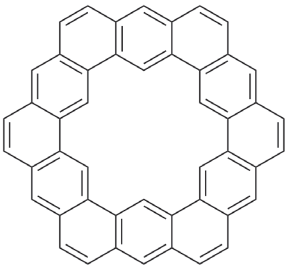
молекула симметрична и все водороды полностью эквивалентны, то вещество будет одно. И действительно, известен только один-единственный хлорбензол! Значит, молекула симметрична, все водороды одинаковы – вот и аргумент в копилку «за».

Теперь попробуем заместить два водорода. Если заменить их опять же на хлор, получится $C_6H_4Cl_2$, это называется *дихлорбензол* (сам Кекуле использовал чуть более сложные структуры, но тот же принцип). Таких веществ – с отчасти различающимися свойствами – известно три. И это тоже сочетается с формулой Кекуле: атомы хлора могут стоять либо при соседних атомах, либо через один, либо через два атома.

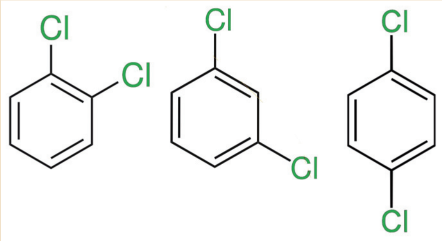
Хотя... позвольте! Ведь дихлорбензолов должно быть не три, а четыре! Потому что когда хлор стоит при соседних атомах, то между этими атомами может быть одинарная связь, а может быть и двойная!

Неувязка. И Кекуле про неё знал. Поэтому позже он выдвинул идею: на самом деле в кольце бензола все связи одинаковы, потому что одинарные и двойные связи постоянно меняются местами. Таким образом, каждая связь частично одинарная, а частично и двойная. Это объясняет и другие химические особенности бензола. И хотя сейчас мы уже знаем, что фактически такого мелькания не происходит (см. статью «Лайнус Полинг. Среди химических связей» в «Квантике» № 1 и 2 за 2020 год), как модель это очень даже неплохо. Даже сейчас мы, понимая всю условность модели, рисуем химические формулы бензола и родственных ему соединений именно с чередующимися связями – так, как делал это Кекуле.

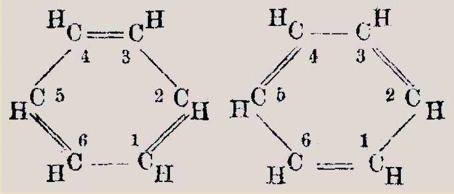
В том числе так мы рисуем и вещество с формулой $C_{48}H_{24}$ под названием кекулен. Оно было синтезировано в 1978 году и названо в честь нашего героя. Вряд ли возможен лучший памятник для химика.



Кекулен



Три разных дихлорбензола. Есть ли четвертый?



«Чередующиеся» формулы бензола, рисунок из статьи Кекуле

Памятник Кекуле в Бонне

Математический КРУЖОК

Артём Болотин

МЕТОД «МЭТРА», или
ЗАЧЕМ СЛЕДИТЬ ЗА РАЗМЕРНОСТЬЮ?

– Чем занимаешься, Витя?

– Да вот над задачкой думаю.

Задача 1. *На листе нарисован прямоугольник со сторонами меньше* 1. *Петя измерил одну из его сторон, а Вася измерил площадь. У кого число получилось больше?*

Решение совсем простое. Пусть a и b – стороны прямоугольника, тогда Петино число – либо a, либо b, а Васино – ab. По условию $a<1$ и $b<1$, откуда $ab<a$ и $ab<b$. Таким образом, Петя получил большее число. Только я не могу понять, зачем Петя с Васей решили сравнивать свои числа? Они же имеют совершенно разный смысл, Петя измерял длину – условные метры, а Вася – площадь – квадратные метры! Это всё равно, что сравнить секунду и килограмм!

– Недаром у тебя по физике пятёрка, – улыбаясь, сказал Иван Андреевич, отец Вити, – но в математике нередко приходится сравнивать объекты, у которых, казалось бы, разная размерность. Даже есть метод, называемый методом «мэтра». Метод заключается в том, чтобы как раз свести всё к одной размерности.

– Метод «мэтра»? Откуда такое странное название?

– Мэтр – это учитель, мастер, а данный метод учит мастерскому подходу к единицам измерения. Да и слово созвучно с «метром», а мы как раз говорили о метрах, квадратных метрах... В общем, происхождение такого названия имеет несколько шуточный оттенок. Кстати, попробуй решить вот такую задачку.

Задача 2. *Квадрат со стороной* 1 *разрезан на прямоугольники. В каждом прямоугольнике выбрали одну из «кратчайших» сторон. Нужно доказать, что сумма длин всех выбранных сторон не меньше* 1.

– Так... Раз квадрат на прямоугольники разрезан, их стороны параллельны сторонам квадрата. А тогда они все не больше сторон квадрата, то есть не больше 1. Погоди, это же очень похоже на первую задачу. Только там стороны строго меньше 1 были, а тут – не больше. Поэтому теперь площадь каждого прямоугольника будет не больше, чем длина любой его стороны, в том числе и кратчайшей. Значит, если мы все кратчайшие стороны сложим – получим не меньше, чем сумму площадей всех прямоугольников. Но сумма-то как раз равна 1 – площади всего квадрата!

– Всё верно. Заметь, для решения снова понадобилось сравнить площадь и сторону, у которых «разные размерности». Вот ещё задачка с похожим сюжетом.

Задача 3. *Из квадрата со стороной 1 вырезали параллельно сторонам n прямоугольников. Нужно доказать, что их суммарный периметр не больше $2n+2$.*

– Что же, начнём переводить задачу на математический язык. Обозначим стороны прямоугольников a_i, b_i. По условию $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leqslant 1$. И теперь нужно показать, что

$$2(a_1+b_1) + 2(a_2+b_2) + \ldots + 2(a_n+b_n) \leqslant 2n+2,$$

или $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n) \leqslant n+1$.

Витя призадумался, как лучше подступиться к задаче. Спустя некоторое время Иван Андреевич дал подсказку:

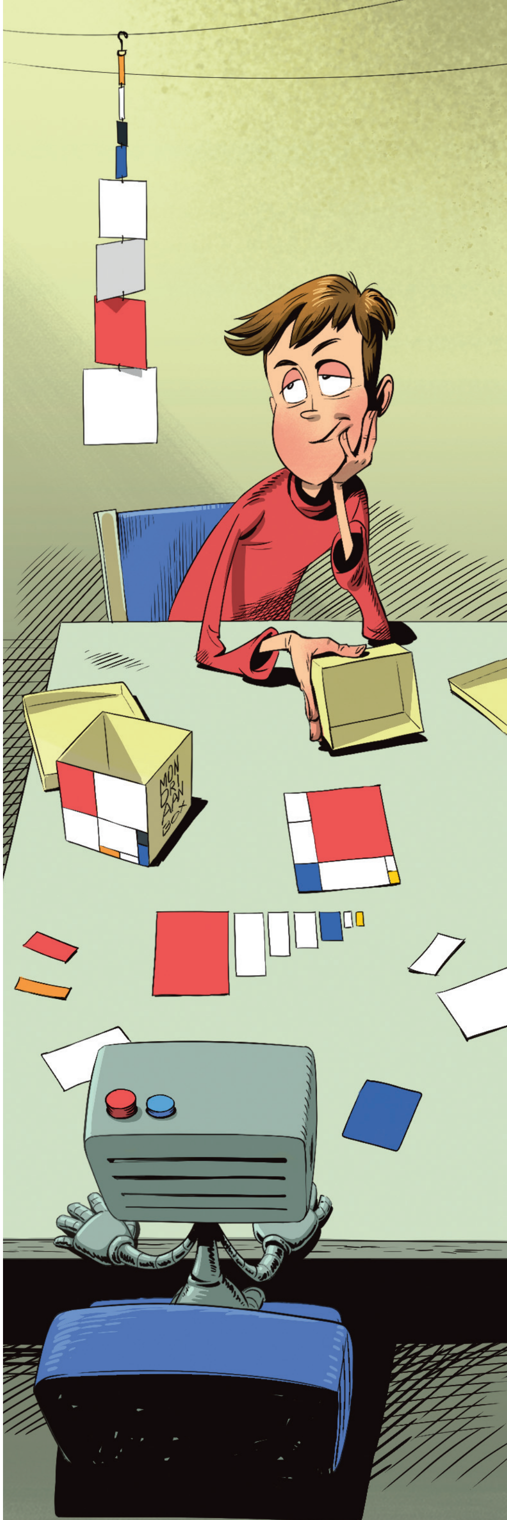
– Не кажется ли тебе, что единичка в правой части как-то выделяется? Подумай, откуда она взялась.

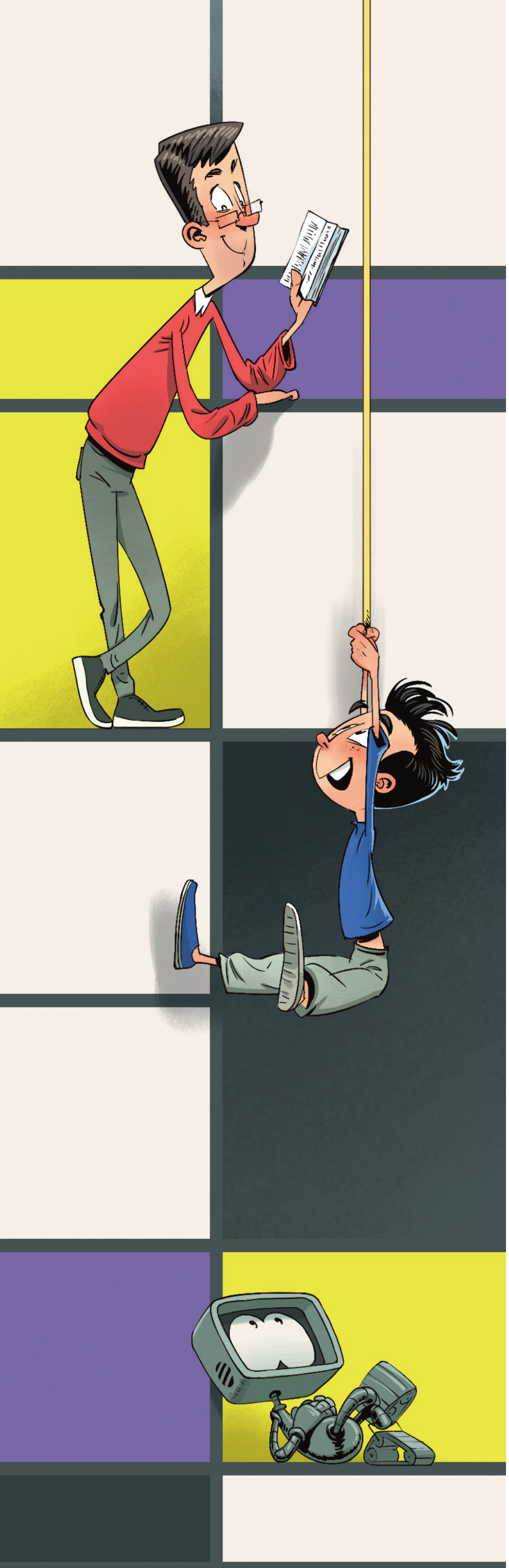
– Единице равна площадь нашего квадрата... И мы записали как раз $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leqslant 1$... Кажется, понял! Выходит, достаточно доказать, что $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n) \leqslant n + a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$. Ну и логично предположить, что выполнены неравенства $a_i + b_i \leqslant 1 + a_ib_i$, а нужное неравенство – их сумма. Осталось доказать это... Действительно, неравенство $a_i + b_i \leqslant 1 + a_ib_i$ равносильно неравенству $(1-a_i)(1-b_i) \geqslant 0$, а оно верно, поскольку $a_i \leqslant 1$, $b_i \leqslant 1$, как следует из условия.

– Отлично! А теперь хочу предложить тебе свою любимую и, на мой взгляд, одну из самых показательных задач на метод «мэтра».

Задача 4. *Сумма нескольких положительных чисел равна 1. Надо доказать, что среди них найдётся число, не меньшее суммы квадратов всех этих чисел.*

– Пусть a_1, a_2, ..., a_n – наши числа. Логично, что если какое-то из этих чисел не меньше суммы квадратов всех чисел, то и наибольшее из чисел не меньше этой суммы квадратов. Итак, считаем, что a_1 – наибольшее, нужно доказать, что $a_1 \geqslant a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$.

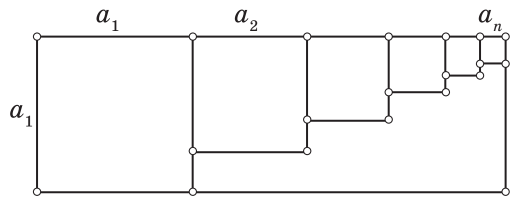




– Всё так. Заметь, в этом неравенстве слева стоят «метры», а справа «метры квадратные». Надо попытаться всё привести к одной размерности.

– Хм-м... Нам же дано, что $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$. Тогда $a_1=a_1\cdot 1=a_1\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_n)=a_1^2+a_1a_2+\ldots+a_1a_n$. А такое выражение не меньше чем $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$, так как $a_1a_i\geqslant a_i^2$ в силу максимальности a_1. Здорово!

– Рад, что ты оценил! А ведь когда мы сравниваем квадратные метры с квадратными метрами, мы на самом деле сравниваем какие-то участки площади, – Иван Андреевич нарисовал в тетради сына картинку, – в нашем случае площадь внешнего прямоугольника равна $a_1\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_n)=a_1\cdot 1=a_1$, а внутрь него мы поместили квадратики площадью a_1^2, a_2^2, ..., a_n^2. Из этого рисунка сразу очевидно необходимое нам неравенство! Пока ты решал задачки, я вспомнил ещё несколько. Их тоже можно решить с помощью метода «мэтра». Иногда, правда, не удаётся нарисовать геометрическую картинку, помогающую решению, но выручает приведение неравенства к одной размерности – его становится проще решить алгебраически. Задачи немножко посложнее, порешай на досуге!



УПРАЖНЕНИЯ

1. Дано n положительных чисел с суммой, равной 1. Докажите, что квадрат одного из чисел не меньше суммы кубов остальных.

2. Дано n положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n с суммой, равной 1. Известно, что $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_n$. Докажите, что $1\geqslant a_1^2+3a_2^2+\ldots+(2n-1)a_n^2$.

3. Дано n положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n с суммой 1. Пусть $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_n$. Докажите, что одно из данных чисел не меньше, чем $a_1^3+3a_2^3+\ldots+(2n-1)a_n^3$.

4. Сумма положительных чисел a, b, c равна 1. Докажите, что $a^2+b^2+c^2+1\geqslant 4(ab+bc+ca)$.

5. Неотрицательные x и y таковы, что $x+y\leqslant 1$. Докажите, что а) $25xy\leqslant 4x+9y$; б) $(a+b)^2xy\leqslant a^2x+b^2y$.

6. Положительные a, b, c таковы, что $a+b+c=3$. Докажите, что $a^2+b^2+c^2\geqslant 3$.

Решения в следующем номере

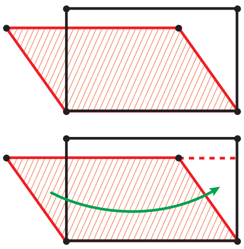
Художник Мария Усеинова

Материал подготовил
Григорий Мерзон

ИЗГИБАЕМЫЙ МНОГОГРАННИК

Треугольник определяется длинами трёх сторон. Поэтому он жёсткий: если стороны – жёсткие палочки, он не изгибается, даже если в вершинах шарниры.

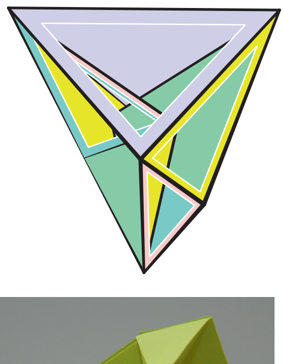
Для треугольника (жёсткой фигуры) есть формула, выражающая площадь через длины сторон («формула Герона»). А для четырёхугольников такой формулы нет: на рисунке видно, что параллелограмм можно изгибать так, что длины сторон сохраняются, а площадь меняется.

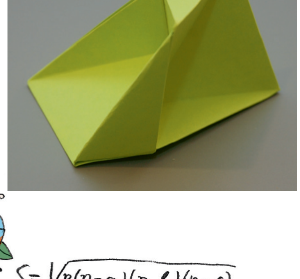


И вообще, любой многоугольник, у которого не менее 4 сторон, не будет жёстким – конструкцию из палочек получается изгибать.

А что для многогранников? Пусть каждая грань многогранника сделана из жёсткого материала, а на каждом ребре имеется дверная петля. Бывают ли многогранники, которые при этом могут изгибаться?

Ещё в начале XIX века Коши доказал, что выпуклый многогранник изгибаемым быть не может. И только во второй половине XX века Роберт Коннелли (Robert Connelly) нашёл пример (невыпуклого) изгибаемого многогранника. С тех пор были построено несколько примеров, по ссылке kvan.tk/flexible можно скачать развёртку одного из них. Этот многогранник построил Клаус Штеффен (Klaus Steffen), у него всего 9 вершин.

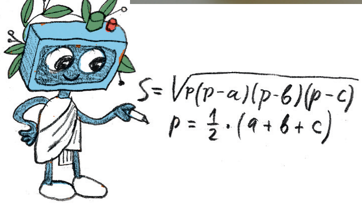




Интересно, что хотя некоторые многогранники можно изгибать, их объём при этом не изменяется. Это доказал в конце XX века И. Х. Сабитов, а многомерную версию – А. А. Гайфуллин (уже в XXI веке). И доказательство связано с некоторым аналогом формулы Герона для объёмов многогранников.

Больше о многогранниках можно прочитать в брошюре kvan.tk/dolbilin «Жемчужины теории многогранников» Н. П. Долбилина.

Фото: Laszlo C Bardos, cutoutfoldup.com
Художник Артём Костюкевич



Головоломка «ВЗАПЕРТИ»

Николай Авилов в своей статье «Изобретаем головоломку сами» (в Альманахе журнала «Квантик», выпуск 10) предложил читателям придумывать свои головоломки.

Семиклассник Бронислав Качесов откликнулся на призыв и прислал в редакцию свою головоломку «Взаперти». Почему она так называется? Автор пишет: «Когда я пытался разрезать квадрат на эти фигуры (рис. 1), у меня долго не получалось. Это выглядело как попытка выбраться из запертой комнаты. Но когда я вырезал набор, мне удалось сложить квадрат».

Рис. 1

Художник Алексей Вайнер

Вот задачи, которые предлагает для решения Бронислав:

1. На рисунке 2 из фигур сложен ступенчатый треугольник двумя способами. Найдите ещё.

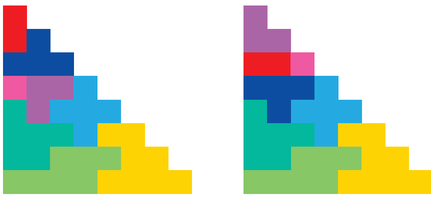


Рис. 2

2. Сложите из фигур квадрат.

Фигуры можно как угодно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.

Задача 1 допускает ещё 86 решений, а задача 2 имеет 6 решений.

Ответы в следующем номере

ПРОГУЛКИ ПО КЛАВИАТУРЕ
(«Квантик» № 8, 2023)

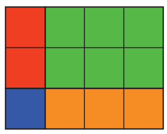
Слова из 7 букв: ГРИМАСА, ЛОГОТИП; из 8 букв: ПРОТОТИП.

НАШ КОНКУРС, XII ТУР
(«Квантик» № 8, 2023)

56. *Вася решил разнообразить свой досуг. Каждое утро он смотрит в календарь. Если сегодняшнее число делится на 2, то в этот день Вася читает книги, если делится на 3 – решает задачи, а если делится на 4 – играет в футбол. Но делать все три дела в один день у Васи не получается – в такие дни он выбирает любые два занятия из трёх. В результате за август Вася играл в футбол 5 раз. А сколько раз он читал книги и сколько раз решал задачи?*

Ответ: 15 раз читал книги, 10 раз решал задачи. Найдём, в какие дни Вася отказывался от одного из занятий. Среди чисел от 1 до 31 на 2, 3 и 4 одновременно делятся только два числа: 12 и 24. Чисел, делящихся на 4, семь, но Вася играл в футбол только 5 раз, значит, 12 и 24 августа он отказался именно от футбола, а читал книги или решал задачи во все подходящие дни.

57. *Можно ли разрезать прямоугольник 3×4 клетки на а) четыре; б) пять клетчатых прямоугольников, среди которых нет одинаковых?*



Ответ: а) да, см. рисунок; б) нет. Клетчатых прямоугольников площади 1, 2 или 3 клетки ровно по одному, а клетчатых прямоугольников площади 4 – только два: 1×4 и 2×2. Значит, пять различных клетчатых прямоугольников занимают площадь не меньше $1+2+3+2\cdot4=14$, что больше площади прямоугольника 3×4.

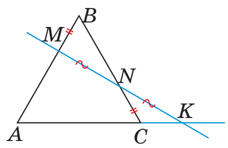
58. *В каждой клетке доски 8×8 стоит единица или минус единица. В каждом кресте, состоящем из строки и столбца, произведение всех 15 чисел равно числу, стоящему на их пересечении. Может ли произведение всех чисел на доске равняться минус единице?*

Ответ: нет. Возьмём любой крест. По условию, если перемножить все числа в строке, и домножить на произведение чисел в столбце, то получится 1, так как число, стоящее на пересечении, дважды входит в произведение. Значит, произведение чисел в любой строке и в любом столбце одинаковое. Значит, произведение чисел во всех строках одно и то же. А произведение восьми таких чисел равно 1.

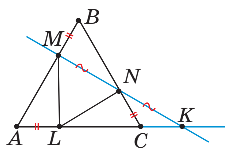
59. *У Квантика есть 11 шестерёнок диаметра 10, 11, 12, ..., 20 см. Он хочет соединить их все последовательно в каком-то порядке, и к первой шестерёнке присоединить моторчик, который будет вращать её со скоростью 1 оборот в минуту. Какая наибольшая достижимая скорость вращения последней шестерёнки? (Также укажите какой-то порядок расположения шестерёнок, при котором эта скорость достигается, и докажите, что она действительно наибольшая возможная.)*

Ответ: 2 оборота в минуту; первая шестерёнка – диаметра 20 см, последняя – 10 см, порядок остальных не важен. Рассмотрим две соседние шестерёнки. Если у первой из них N зубчиков, а у второй M, то пока первая делает один оборот, вторая делает N/M оборота, поскольку первая зацепляет ровно N из M её зубчиков. Добавим третью шестерёнку с K зубчиками. Пока вторая делает один оборот, третья сделает M/K оборота, значит, пока первая делает оборот, третья сделает $N/M \cdot M/K = N/K$ оборота. То есть неважно, сколько шестерёнок и в каком порядке стоят между первой и последней – отношение скоростей вращения первой и последней шестерёнки зависит только от их размеров! Остаётся заметить, что число зубчиков пропорционально диаметру, а наибольшее возможное отношение диаметров равно $20:10=2$. Значит, наибольшая скорость вращения последней шестерёнки – 2 оборота в минуту: когда первая шестерёнка самая большая, а последняя самая маленькая.

60. *Прямая пересекает стороны AB, BC и продолжение стороны AC равностороннего треугольника ABC в точках M, N и K соответственно (см. рисунок). Оказалось, что $MB=NC$ и $MN=NK$. Докажите, что прямые MN и AB перпендикулярны.*



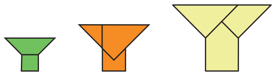
Отметим на стороне AC точку L так, что $AL=MB=$ $=NC$. Так как ABC равносторонний, треугольник MNL тоже равносторонний! (Например, потому, что треугольники AML, BNM и CLN равны по второму признаку.) Тогда в треугольнике LMK медиана LN равна половине стороны MK, к которой проведена. Значит, $\angle MLK=90°$, $\angle MLA=90°$, а так как треугольники AML и BMN равны, то и $\angle BMN=90°$.



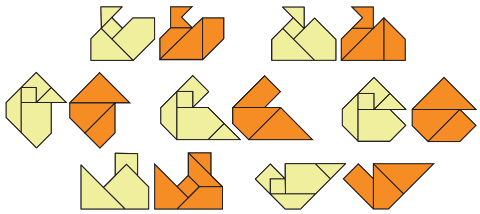
ДВА ЛЕБЕДЯ, ИЛИ ТРИ ВАЗЫ

(«Квантик» № 9, 2023)

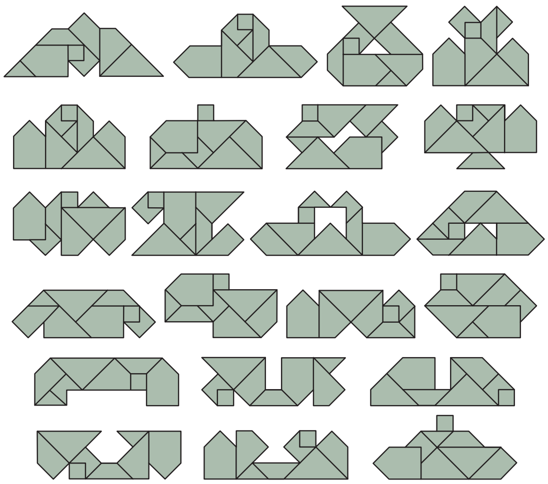
1. Три подобные фигуры:



2. Пары одинаковых фигур:



3. Фигуры, собранные по заданным силуэтам:



КОЛОСС РОДОССКИЙ

(«Квантик» № 9, 2023)

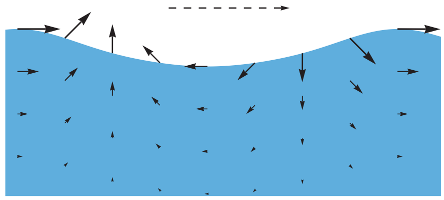
Чтобы фигура осталась пропорциональной, её придётся увеличить вдвое по всем трём измерениям, и расходы возрастут в 8 раз, а не в 2.

ПРИЗРАК НА ВОЛНАХ

Сначала нарисуем, в каких направлениях движутся частички воды. Считаем, что сама волна движется «вперёд» (на рисунке далее – слева направо). Чем сильнее движение воды – тем длиннее будем рисовать стрелку.

Когда вода опускается, ей мешает вода под ней, упирающаяся в дно. Поэтому тонущая вода раздвигает окружающую воду, «расступается» в стороны. А когда вода поднимается, окружающая вода смыкается за всплывающей, занимая освобождающееся место. Это вынуждает частички воды колебаться не только по вертикали, но и по горизонтали. Мы также считаем, что чем глубже, тем сильнее движущаяся вода затормаживается, поэтому чем глубже – тем стрелки короче (а на одной горизонтали все стрелки равны, но повёрнуты в разные стороны).

Тогда что же происходит с водой в волне? Вот наш водяной поплавок тонет. Потом он перестаёт тонуть, но теперь участок спереди тонет, раздвигая воду, а участок сзади – всплывает, вода за ним смыкается, и поплавку приходится подвинуться назад! Поэтому в самой нижней точке волны поплавок движется назад (см. рисунок ниже).



Потом наш поплавок всплывает. Когда он находится в самой верхней точке волны, участок впереди него всплывает, «притягивая воду», а участок позади него тонет, расталкивая воду, поэтому поплавку приходится подвинуться вперёд. Значит, вода на гребне едет вперёд. По ссылке kvan.tk/waves1 смотрите видео-модель!

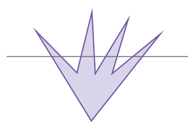
Итак, вода колеблется вперёд-назад. Но что её вынуждает в целом немного сдвигаться вперёд?

Во-первых, каждая частичка воды идёт вперёд тогда, когда она в верхней части своего пути, а назад идёт в нижней части. Но вспомним, что с глубиной размах колебаний воды становится меньше, так что откат оказывается немного меньше. Во-вторых, вперёд частица движется немного дольше: ведь она при этом идёт за волной, а когда откатывается, она, наоборот, движется навстречу волне и проскакивает эту фазу чуть быстрее. В итоге верхний путь вперёд имеет чуть больший размах, чем дуга назад, и окружности, по которым точки движутся, разматываются в такие спирали, как на рисунке 3 в статье. По ссылке kvan.tk/waves2 смотрите эту модель.

При этом морская толща сползает всё время немного назад по дну, наталкиваясь на берег.

ЧЁТНЫЙ ПЕРИМЕТР

1. а) **Ответ:** да, см. рисунок.



б) **Ответ:** нет. Если идти вдоль прямой, пересекающей многоугольник, то с каждым пересечением многоугольника будет меняться то, находимся мы внутри него или снаружи. Поэтому количество пересечений чётно.

2. а) **Ответ:** только 1×1. Подставим $P=4\cdot S$ в формулу, получим $I=0$, поэтому в фигуре нет соседних клеток.

б) **Ответ:** только 1×2. Нарисуем стрелочки, как в доказательстве формулы. Среднее количество стрелочек в клетке, выходящих на границу фигуры, равно 3. Если в какой-то клетке больше трёх стрелок выходит на границу, то их 4, и поэтому это фигура из одной клетки, которая не подходит. Поэтому в каждой клетке ровно по 3 стрелочки выходит на границу. Возьмём две соседние клетки – они тогда больше ни с кем не могут граничить, и, значит, всего в фигуре 2 клетки.

3. Узлы шестиугольной сетки можно покрасить в шахматном порядке. Решение аналогично второму способу.

4. Для треугольной сетки таким же образом, как для квадратной, можно вывести формулу, которая теперь примет вид $3\cdot S=P+2\cdot I$. У каждой клетки было по четыре стороны, а теперь по три, поэтому четвёрка превратилась в тройку. Число S теперь нельзя назвать площадью фигурки (так как площадь одной треугольной клетки со стороной 1 не равна 1), S – это количество клеток, из которых состоит фигурка. Из этой формулы видно, что S и P одной чётности.

5. Ответ: 1. Прямая ЛЭП пересекается с территорией базы по нескольким отрезкам. Шпион считает столбы, когда оказывается в конце одного из этих отрезков. Рассмотрим один из них – AB. Когда шпион находится в точке A, он считает столбы по одну сторону от AB, а когда находится в точке B, считает столбы по другую сторону от AB. Если к этим столбам добавить столбы внутри AB, получится 36 столбов. Складывая эти равенства для всех отрезков, получим, что 2015 плюс n столбов внутри базы делится на 36. Так как $n\leqslant36$ и 2016 кратно 36, то $n=1$.

6. Раскрасим клетки в шахматном порядке. Каждая доминошка состоит из белой и чёрной клетки, значит, всего в многоугольнике поровну чёрных и белых клеток. Посчитаем суммарные периметры чёрных и белых клеток, входящих в многоугольник. Для чёрных клеток это та часть периметра, к которой изнутри прилегают чёрные клетки (назовём эту часть чёрными отрезками периметра), и вся сетка, лежащая внутри многоугольника. Для белых – белые отрезки периметра и вся сетка, лежащая внутри многоугольника. Тогда белых отрезков периметра столько же, сколько чёрных. Но если все стороны нечётной длины и граница состоит из одного куска (мы пользуемся тем, что многоугольник без дыр), то все стороны начинаются и заканчиваются отрезком одного и того же цвета. Но тогда такого цвета будет больше.

БОГИ, ЭЛЕМЕНТЫ, ПЛАНЕТЫ

1. Меркурий – Гермес (бог торговли), Венера – Афродита (богиня любви), Марс – Арес (бог войны), Юпитер – Зевс (верховный бог), Сатурн – Кронос (бог времени). Впрочем, по-гречески почти все эти имена сейчас звучат не совсем так, как мы привыкли их произносить по-русски: Ερμής (Эрми́с), Αφροδίτη (Афроди́ти), Άρης (А́рис), Δίας (Ди́ас), Κρόνος (Кро́нос).

2. Самое простое: красноватый Марс, естественно, связали с Огнём. Сатурн имеет заметный коричневый оттенок и к тому же медленнее всех движется по звёздному небу. Земля – коричневая и твёрдая, поэтому Сатурн связали с Землёй. Наоборот, Меркурий движется быстрее всех, и его связали с текучей Водой. Кстати, и в западной алхимии семь планет (к которым относили также Солнце и Луну) связывались с семью металлами, и Меркурию соответствовала ртуть (тоже жидкость!). Это соответствие сохранилось в английском названии ртути – mercury. Венеру, вероятно, как самую яркую планету древние китайцы связали с блестящим Металлом. А на долю Юпитера остаётся Дерево.

Меркурий – 水星 (Шуйсин), Венера – 金星 (Цзиньсин), Марс – 火星 (Хосин), Юпитер – 木星 (Мусин), Сатурн – 土星 (Тусин).

3. Разумеется, невооружённым глазом можно видеть и Землю. Но окончательно её признали планетой только в Новое время, хотя идея, что Земля и другие планеты движутся вокруг Солнца, выдвигалась намного раньше. Но для нас здесь важно, что те, кто в древности давали имена планетам, Землю к ним не относили.

А ещё Уран в принципе можно наблюдать невооружённым глазом (звёздная величина $5{,}4^m$ – на пределе видимости). Но нет свидетельств, что кто-то в древности выделил его из числа звёзд.

КАНТОРОВИЧ, БОРАЧИНСКИЙ, РАССЕЛ

Ответ: выдумана история про Канторовича. У генералов всё не так, как у простых людей, даже звания. Хотя майор старше по званию лейтенанта, у генералов всё наоборот; генерал-майор младше (!) по званию генерал-лейтенанта. Поэтому вознёсшийся до звания генерал-лейтенанта майор никак не мог первым отдавать честь младшему по званию генералу Канторовичу.

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Первый этап состоит из четырёх туров (с I по IV) и идёт с сентября по декабрь.

Высылайте решения задач II тура, с которыми справитесь, не позднее 5 ноября в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, г. Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте www.kvantik.com. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

II ТУР

6. Вася заметил, что если записать даты рождения в формате ДД.ММ.ГГГГ, то все цифры на соответствующих местах у него и у его двоюродного брата отличаются. Какова наименьшая возможная разница в возрасте между ними?

7. Пятнадцать бочек поставили в виде треугольника (рис. 1) и обтянули кольцевым обручем. Шестнадцать бочек поставили в виде квадрата 4×4 (рис. 2) и тоже обтянули кольцевым обручем. Сравните длины этих обручей.

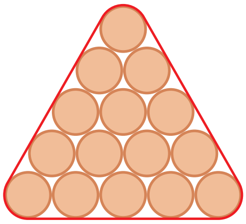


Рис. 1

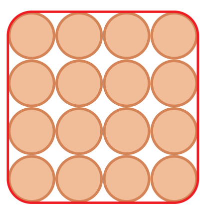
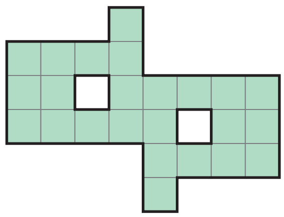


Рис. 2

Авторы задач: Михаил Евдокимов (6), Павел Кожевников (7), Евгений Смирнов (8), Татьяна Казицына (9), Сергей Шамсутдинов (10)

8. Имеются стакан кофе, наполненный на 2/3, и такой же стакан молока, наполненный на 2/3. Разрешается переливать любое количество жидкости туда и обратно, тщательно её перемешивая, но нельзя ничего выливать. Можно ли получить в одном из стаканов напиток, составленный из молока и кофе в пропорции 1:1?

9. Сделайте на фигуре надрезы так, чтобы полученная фигура не распалась на части и ей можно было обернуть какой-нибудь куб в один слой. (Надрезы нарисуйте сплошными линиями, а сгибы – пунктирными.)



10. На прямоугольнике 4×8 клеток (половине шахматной доски) разместите трёх ферзей так, чтобы каждое пустое поле бил хотя бы один из ферзей. (Ферзь бьёт по горизонтали, вертикали и диагонали на любое число клеток.)

Художник Николай Крутиков

Художник Yustas

Воздушный шарик в аквариуме

На весах стоит аквариум, в котором утоплен воздушный шарик, прикреплённый ко дну. Как будут меняться показания весов, когда шарик открепится и начнёт всплывать? А когда всплывёт?

Автор Александр Бердников

ISSN 2227-7986 23010
9 772227 798237