ЖУРНАЛ

КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 12
декабрь
2023

ТАКИЕ РАЗНЫЕ СНЕЖИНКИ...

ЛЁД, ВОДА И ПАР

КАК ТРЕСКАЮТСЯ ДЕРЕВЬЯ

№ 12 | декабрь 2023
Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования
e-mail: kvantik@mccme.ru

ПОДПИСКА на 2024 год

в почтовых отделениях
по электронной и бумажной версии
Каталога Почты России:

индекс **ПМ989** –
годовая подписка

индекс **ПМ068** –
по месяцам полугодия

онлайн
на сайте Почты России
podpiska.pochta.ru/press/ПМ068

*По этой ссылке вы можете
оформить подписку
и для своих друзей, знакомых, родственников*

Подробнее обо всех вариантах подписки см. **kvantik.com/podpiska**

ПОДПИСЫВАЙТЕСЬ
на ЖУРНАЛ «КВАНТИК»

НАШИ НОВИНКИ

Настенный перекидной
календарь с интересными
задачами-картинками
от журнала "Квантик" –
хороший подарок друзьям,
близким и коллегам!

Приобрести календарь
и другую продукцию «Квантика»
можно в магазине «Математическая книга»
(г. Москва, Большой Власьевский пер., д.11),
в интернет-магазинах:
biblio.mccme.ru, ozon.ru, WILDBERRIES,
Яндекс.маркет и других
(полный список магазинов на kvantik.com/buy)

НАГРАДЫ ЖУРНАЛА

2017 — Минобрнауки России
ПРЕМИЯ «ЗА ВЕРНОСТЬ НАУКЕ»
за лучший детский проект о науке

2021 — **БЕЛЯЕВСКАЯ ПРЕМИЯ**
за плодотворную работу
и просветительскую деятельность

2022 — Российская академия наук
ПРЕМИЯ ХУДОЖНИКАМ ЖУРНАЛА
за лучшие работы в области
популяризации науки

Журнал «Квантик» № 12, декабрь 2023 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере связи, информационных технологий
и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Т. А. Корчемкина,
Е. А. Котко, Г. А. Мерзон, М. В. Прасолов,
Н. А. Солодовников
Художественный редактор
и главный художник Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Мария Усеинова

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»

Подписка на журнал в отделениях почтовой связи
- **Почта России:** Каталог Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)
- **Почта Крыма:** Каталог периодических изданий Республики Крым и г. Севастополя (индекс **22923**)
- **Белпочта:** Каталог «Печатные СМИ. Российская Федерация. Казахстан» (индексы **14109** и **141092**)

Онлайн-подписка на сайтах
- Почта России: **podpiska.pochta.ru/press/ПМ068**
- агентство АРЗИ: **akc.ru/itm/kvantik**
- Белпочта: **kvan.tk/belpost**

По вопросам оптовых и розничных продаж
обращаться по телефону **(495) 745-80-31**
и e-mail: **biblio@mccme.ru**

Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва,
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**

Формат 84х108/16 Тираж: 4500 экз.

Подписано в печать: 09.11.2023
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная,
д. 100, корп. 8. Тел.: (831) 218-40-40

Заказ №

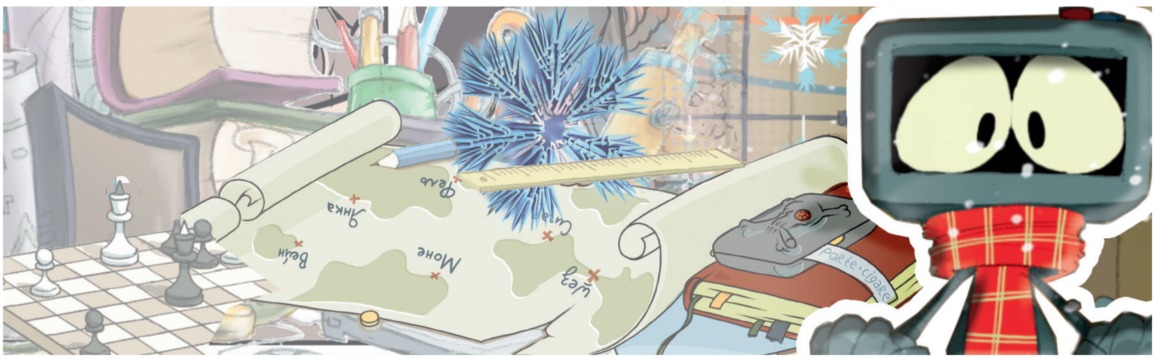
Цена свободная

ISSN 2227-7986

6+

www.kvantik.com **kvantik@mccme.ru** **vk.com/kvantik12** **t.me/kvantik12**

СОДЕРЖАНИЕ



Валентина Кириченко,
Владлен Тиморин

Справедливый делёж, последовательность Туэ-Морса и снежинка Коха

Как разлить чай из чайника по двум чашкам, чтобы в итоге получить две порции чая примерно одной и той же крепости? Обычно в заварочном чайнике (если не перемешивать содержимое) более крепкий чай образуется на дне, а более водянистый – на поверхности. Если налить доверху сначала первую чашку, а потом – вторую, в первой чашке чай будет не таким крепким, как во второй. Это не очень-то справедливо, если вы хотите угостить чаем друга, а тот любит такой же крепкий чай, как и вы. Мы расскажем о более справедливом способе и его далеко идущих обобщениях.

Нужно сначала налить чай в первую чашку, но не доверху, а до середины. Затем целиком заполнить вторую чашку. Наконец вернуться к первой чашке и заполнить её. Схематически церемонию справедливого розлива чая можно изобразить такой последовательностью:

АББА

Буквы А и Б указывают на то, в какую именно чашку нужно налить полчашки чая. Можно договориться, что если А, то наливаем другу, если Б – себе. После этой нехитрой процедуры чай в обеих чашках будет примерно одной крепости, в чём легко убедиться по его цвету.

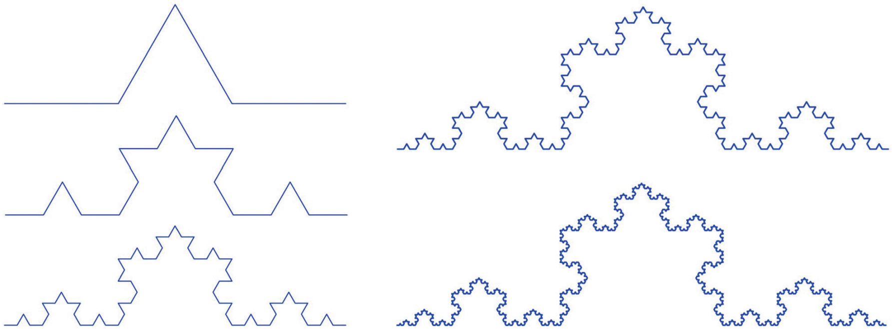
Педанты могут попытаться улучшить процедуру АББА. Для чая это уже не столь актуально, но в футбольных соревнованиях может пригодиться. Если две команды сыграли вничью, то для определения победителя обычно используется серия из десяти пенальти (пять раундов по два пенальти), после чего побеждает команда, набравшая больше очков по пенальти. Если же и здесь получилась ничья, то раунды добавляются по одному до первого раунда с результатом 0:1 или 1:0. Именно так выиграла команда ФРГ в знаменитом матче с командой Франции в полуфинале чемпионата мира по футболу в 1982 году. В шестом раунде французский игрок не смог забить пенальти (он бил первым по очереди), а немецкий игрок смог (он бил вторым). При таком способе определения победителя вторая команда часто испытывает большее психологическое давление: если первая команда забивает пенальти в очередном раунде, то второй команде надо непременно сравнять счёт, чтобы не проиграть сразу же. Поэтому футбольные ассоциации серьёзно рассматривают возможность заменить последовательность АБАБАБ... (в каждом раунде первой бьёт команда А) на более справедливую последовательность. Например, на такую:

АББАБААБ

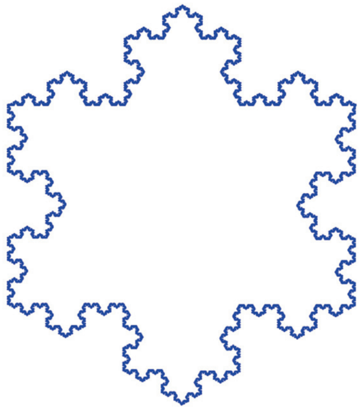
Это начальный фрагмент длины 8 *последовательности Туэ–Морса,* о которой мы теперь расскажем поподробнее. Она формируется из двух букв (или из цифр 0 и 1) по следующему принципу. Первая буква А. Начальный фрагмент длины 2 получается приписыванием другой буквы (не А), в нашем варианте это Б (хотя часто используют латинское В). Начальный фрагмент длины 4 получается приписыванием «зеркального варианта» фрагмента длины 2: каждая А меняется на Б, а каждая Б – на А. Получается уже знакомая нам последовательность для справедливого розлива чая: АББА. Начальный фрагмент длины 8 получается приписыванием зеркального варианта фрагмента длины 4. Получается справедливая последовательность пенальти. Можно пойти дальше и выписать фрагмент длины 16:

АББАБААББААБАББА

Последовательность Туэ–Морса можно продолжать таким образом сколько угодно, каждый раз длина фрагмента будет удваиваться. За 10 удвоений получится фрагмент приличной длины – 1024 буквы. В футболе такое вряд ли пригодится – самая длинная на сегодняшний день серия пенальти состояла из 54 попыток (то есть из 27 раундов). Однако даже очень длинным фрагментам последовательности Туэ–Морса можно найти красивое применение. С их помощью легко нарисовать хорошие приближения *кривой Коха* (см. рисунки вверху следующей страницы) – изящной самоподобной кривой (такие геометрические объекты часто называют *фракталами*). Доказательство мы приводить не будем, но сейчас объясним, как провести подтверждающие эксперименты.



Несколько начальных приближений к кривой Коха. Начать построение следует с ломаной, показанной слева вверху. Каждое звено этой ломаной нужно заменить уменьшенной копией той же ломаной и продолжать этот процесс до бесконечности. Кривая Коха получается в пределе



Снежинка Коха. Эта фрактальная фигура получается из трёх кривых Коха, построенных на сторонах правильного треугольника

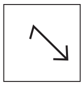
Заметим, что выше мы использовали последовательность Туэ–Морса, точнее её начальные фрагменты, как программу действий, или алгоритм. То есть как нечто вроде компьютерной программы, только не для компьютера, а для хозяина, разливающего чай по чашкам, или для судьи, определяющего очерёдность пенальти. Эту аналогию можно развить и превратить последовательность Туэ–Морса в настоящую компьютерную программу для черепашки из языка Лого[1].

Задача 1. Могут ли в последовательности Туэ–Морса встретиться три одинаковых буквы подряд (то есть фрагмент ААА или БББ)?

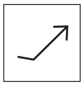
Задача 2. Какая буква стоит на тысячном месте в последовательности Туэ–Морса? Дайте ответ, не выписывая все 1000 букв и не используя компьютер.

Представим себе черепашку, которая за один ход может исполнить одну из двух команд.

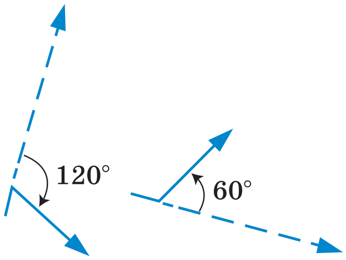
[1] Старый язык программирования, изначально разработанный для обучения детей компьютерным наукам. Об очень похожем на Лого языке программирования Малыш можно прочесть в увлекательной книжке А. К. Звонкина «Малыши и математика», МЦНМО, 2022, с. 85 – 89.



Первая команда – повернуть на 120° по часовой стрелке и проползти один шаг. Эту команду мы схематически изобразим символом «острый угол + стрелка».

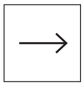


Вторая команда – повернуть на 60° против часовой стрелки и проползти один шаг. Изобразим её символом «тупой угол + стрелка».



Почему символы выбраны именно так? Рядом нарисован маршрут черепашки, выполняющей первую команду (слева) и вторую (справа). Пунктиром обозначено исходное направление движения (куда черепашка ползла бы дальше, если бы не повернула). Видно, что маршруты похожи на выбранные нами символы.

Теперь проинтерпретируем последовательность Туэ–Морса как последовательность команд для черепашки. Каждая буква задаёт один ход черепашки. Первый ход особенный, поскольку тут не очень важно, как черепашка повёрнута. Для определённости договоримся, что за первый ход она проползает один шаг на восток. Эту особую команду изобразим символом «просто стрелка».

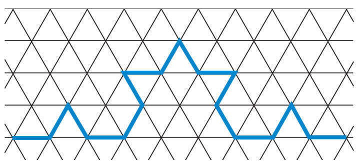


Символ «просто стрелка» встретится ровно один раз, в самом начале программы. Он соответствует первой букве А. Дальше будем двигаться вдоль последовательности Туэ–Морса и заменять каждую букву на команду по следующему правилу. Если перед текущей буквой стоит такая же буква, то приписываем к программе команду «острый угол + стрелка». Если нет, то приписываем команду «тупой угол + стрелка».

Например, начальный фрагмент длины 16 превратится в такую последовательность команд:

→	↗	↘	↗	↗	↗	↘	↗	↘	↗	↘	↗	↗	↗	↘	↗
А	Б	Б	А	Б	А	А	Б	Б	А	А	Б	А	Б	Б	А

Если черепашка будет ползти в соответствии с заданной программой из 16 команд, то она оставит след, уже немного напоминающий кривую Коха.



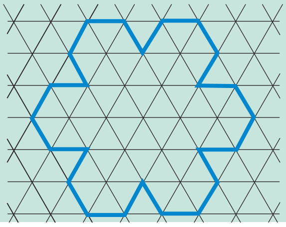
Художник Мария Усеинова

Вы можете сами поработать черепашкой, для этого вам понадобятся только карандаш и бумага, расчерченная на треугольники[2]. Можно рисовать и на обычной бумаге, если у вас хороший глазомер.

Задача 3. Изобразите путь черепашки, выполняющей программы:

а) ААА; б) АБАБАБ; в) ААББААББААББ.

Задача 4. Напишите программу, которая позволит черепашке проползти вдоль нарисованной справа снежинки (не Коха).



Выполнить программу из 64 или 256 команд с помощью карандаша и бумаги уже не так легко, хотя и существенно легче, чем забить такое же количество пенальти. Для ускорения процесса можно воспользоваться компьютером. По ссылке kvan.tk/turtle расположен код (на языке Python), результаты выполнения которого можно сразу увидеть в правом окне, нажав на зелёную кнопку (с изображенным на ней белым треугольником) под текстом программы. Содержательно экспериментировать с траекториями черепашки можно даже не разбираясь в основном коде, а меняя только последнюю строчку. Там сейчас написано move(thue(8),4). А смысл этой строчки состоит в следующем: move – это процедура, запускающая черепашку, thue(8) – это строчка, представляющая программу движения черепашки (в настоящий момент это начальный фрагмент последовательности Туэ–Морса длины 256, но можно вместо thue(8) вписать любую строчку, заключённую в одинарные или двойные кавычки, например, 'AAA' или 'ABABAB'); наконец, 4 – это длина каждого шага черепашки (если шагов мало, то эту длину стоит увеличить). Для начала впишите вместо thue(8) какую-нибудь короткую строчку и поставьте вместо 4 какое-нибудь число побольше (скажем, 100). Например, попробуйте написать move('AABAB', 100) и посмотрите, как будет двигаться черепашка. Удачных экспериментов!

[2] Треугольную сетку можно скачать или распечатать с мышематического сайта Евгении Кац: kvan.tk/mouse-paper

МОДЕЛИ СНЕЖИНОК ИЗ ОРИГАМИ

Татьяна Бонч-Осмоловская

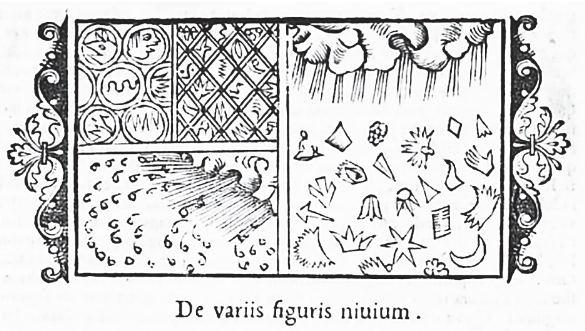
А снежинки
всё несут и несут на землю
иероглифы бога...

Геннадий Айги

Краткая история изучения форм снежинок

Все мы в детстве любовались снежинками. Не только дети, но и взрослые во все времена восхищались их узорами: художники зарисовывали, а учёные пытались объяснить, как такая красота образуется из воды в морозном воздухе.

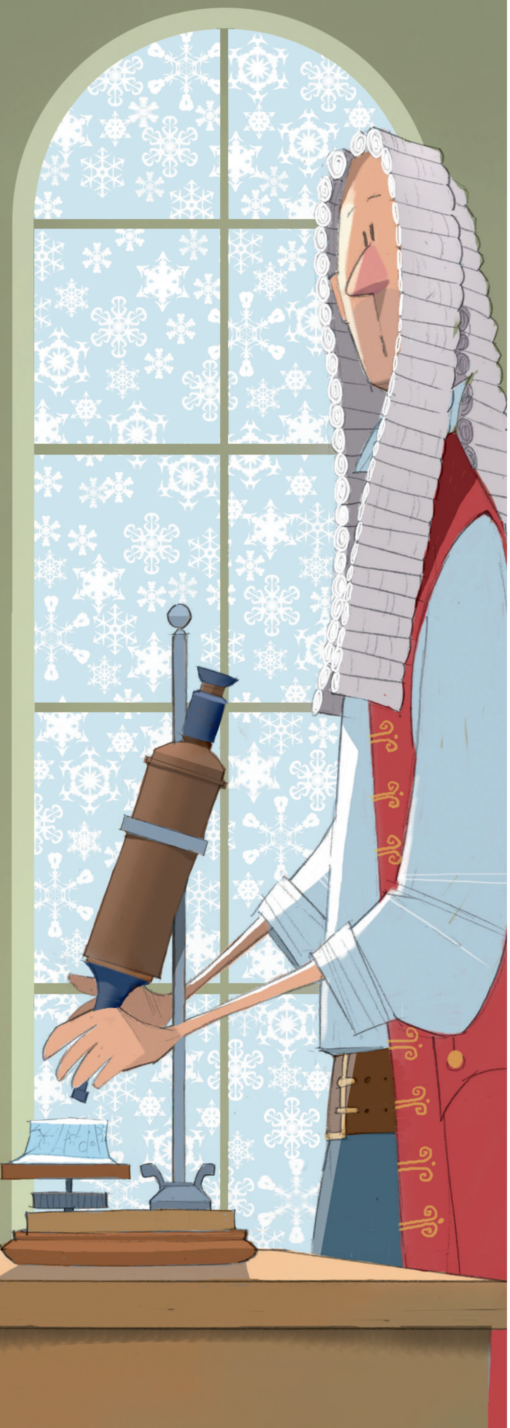
Изображения разнообразных форм снежинок приводятся уже в древней энциклопедии шведского историка, картографа и католического священника Олафа Магнуса «История северных народов».



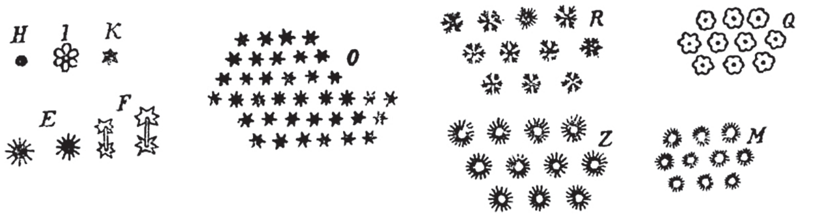
Различные формы снежинок по Олафу Магнусу (1555)

Немецкий астроном и математик Иоганн Кеплер в 1611 году опубликовал письмо своему другу, немецкому учёному и императорскому советнику Йоханну Маттеусу Вакеру фон Вакенфельсу, которое он назвал «Новогодний подарок, или О шестиугольных снежинках». Переходя однажды Карлов мост в Праге, Кеплер заметил, что падающие на его одежду снежинки «все, как одна, шестиугольные, с пушистыми лучами». Если «снежинки имеют форму шестиугольной звезды, – пишет он, – то на то должна быть определённая причина». Пытаясь её разгадать, Кеплер попутно пишет о пчелиных сотах, правильных ромбических телах, гранатовых зёрнышках, минералах с шестиугольными кристаллами... Академик В. И. Вернадский назвал размышления Кеплера о снежинках «первой научной работой в кристаллографии».

Спустя четверть века изучение снежинок продолжил французский математик и философ Рене Декарт. В своём эссе по метеорологии «Метеоры» (Les Météores, 1637) он предлагает механизм образования



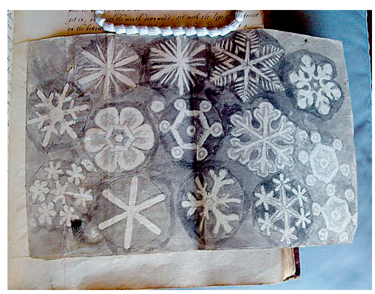
снежинок: «Вокруг каждого узелка образуется шесть концов, или лучей, которые могут иметь различные формы, смотря по тому, будут ли узелки более или менее крупными и сжатыми, а их волоски – более или менее жёсткими и длинными, и будет ли тепло, сливающее их, более или менее умеренным, и будет ли ветер, сопровождающий это тепло (если оно вообще сопровождается ветром), слабее или сильнее».



Различные формы снежинок по Рене Декарту (1637)

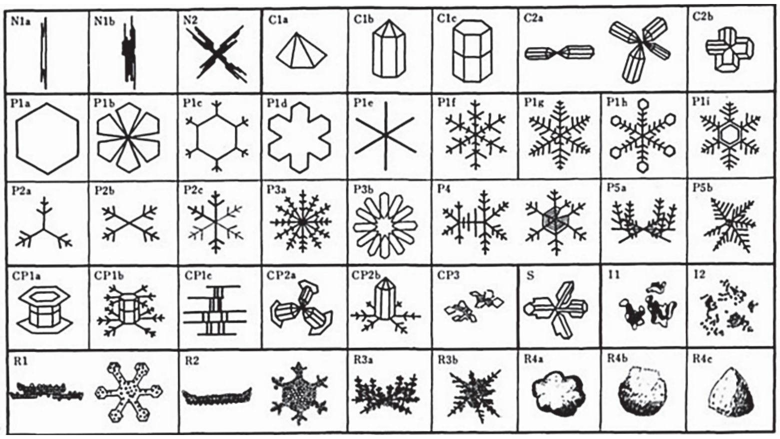
А вот его описание увиденного однажды необычного снега: «Это были мелкие ледяные пластинки, совершенно плоские, очень гладкие, очень прозрачные, толщиной примерно с лист довольно толстой бумаги, но они имели столь совершенную шестиугольную форму, их шесть сторон были столь прямы, а шесть углов столь точно равны, что ничего подобного по точности не может сделать человек».

Спустя три десятилетия Роберт Гук изучал снежинки под микроскопом. В своей книге «Микрография» он пишет: «Подставляя кусок чёрной ткани или чёрную шапку навстречу падающему снегу, я часто с большим удовольствием наблюдал такое бесконечное разнообразие причудливо оформленных снежинок, что было бы невозможно как изобразить фигуру и форму, так и точно воспроизвести любопытный геометрический механизм образования каждой из них».

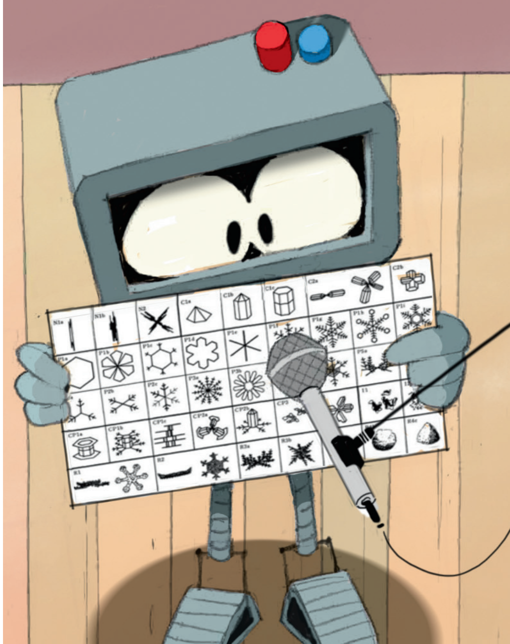


Различные формы снежинок по Роберту Гуку (1666)

В XX веке японский физик Укихиро Накайя систематизировал знания о формах снежинок. Десятилетиями он изучал их в своей лаборатории, в том числе создавал искусственные снежинки, по-разному выбирая температуру и влажность. Результатом стала книга «Снежные кристаллы: природные и искусственные», в которой Накайя систематизировал снежинки, выделив 41 вид – в зависимости от температуры и влажности воздуха. Многие из них обладают шестилучевой симметрией, хотя у некоторых лучи вырождены до трёх или четырёх, а у других умножены до двенадцати. Используя классификацию Накайи, мы изготовим из бумаги модели некоторых снежинок.



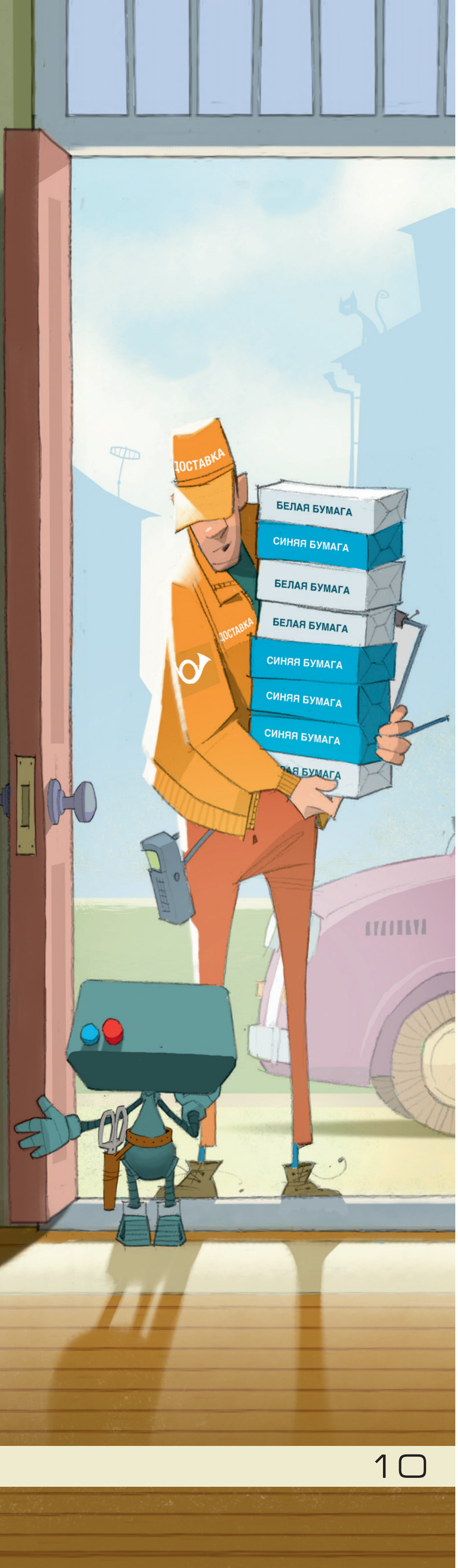
Различные формы снежинок по Укихиро Накайе (1954)



Делаем модуль оригами

Сначала приготовим модули оригами в количестве, необходимом для каждой снежинки. Будем изготавливать модули из прямоугольного листа бумаги. Для белых модулей можно использовать обычную офисную бумагу формата A4, а для цветных – канцелярскую цветную бумагу. Каждый модуль можно изготовить из листа размера A9, то есть 1/32 бумаги формата A4 (примерно 37×52 мм), или A8, то есть 1/16 часть A4 (примерно 52×74 мм).

Сначала сложите этот листок бумаги пополам по длинной стороне, как показано на схеме на с. 10. Получившийся листок сложите пополам по короткой стороне и разверните, затем сложите половинки его верхнего края к срединной линии, переверните, загните нижние края вверх и загните уголки над большим треугольником, потом разверните края и загните уголки к нижним краям, а края к большому треугольнику и, наконец, сложите модуль пополам по вертикальной срединной линии.



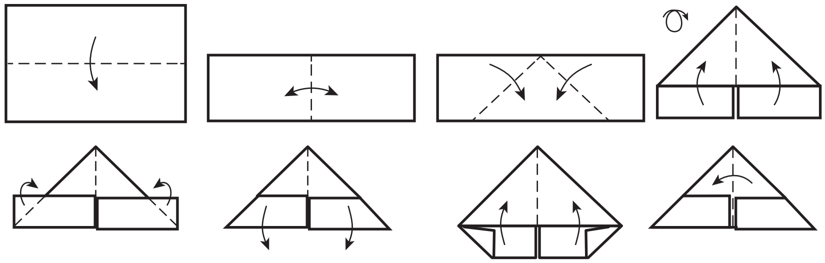
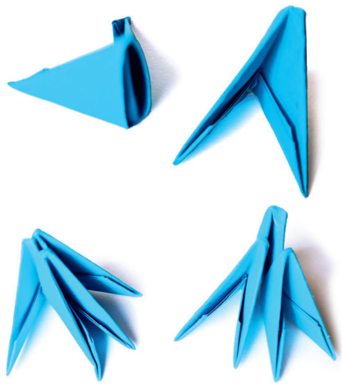


Схема изготовления модуля оригами

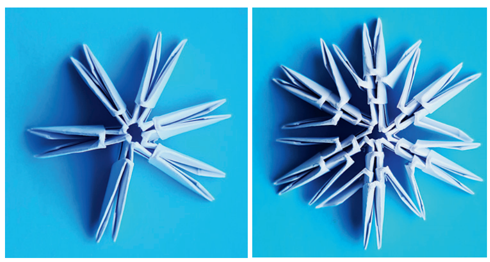
У вас получится модуль оригами с двумя «кармашками» и двумя «ручками», которые можно помещать в эти кармашки, соединяя блоки один к одному, один к двум, два к одному и в других комбинациях.

Изготавливаем базовое кольцо и наращиваем снежинки

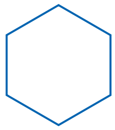
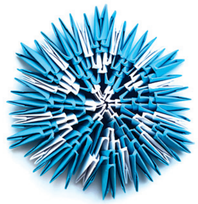
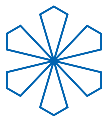
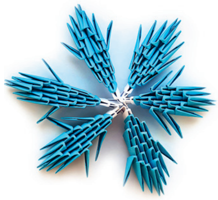
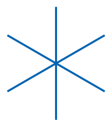
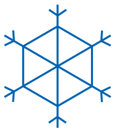
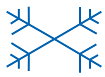
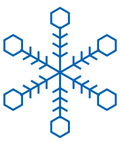
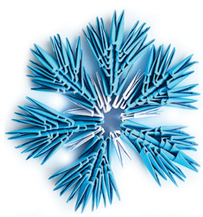
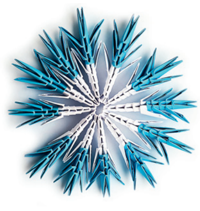
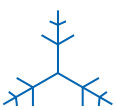
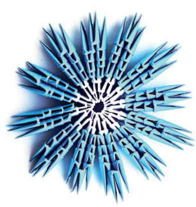


Изготовим сначала базовую форму снежинки. Для этого соединим вместе 12 модулей, шесть во внутреннем кольце и шесть во внешнем, продевая правую и левую «руки» соседних внутренних модулей в «кармашки» одного внешнего модуля.

Далее добавим в каждом луче по два и одному модулю, чтобы получилась базовая снежинка (30 модулей), и продолжим добавлять их, следуя всякий раз одной из схем Накайи. Для создания снежинок с 12-кратной симметрией исходное кольцо должно состоять из 12 внутренних и 12 внешних модулей. Получившиеся снежинки оригами в соответствии с классификацией Накайи показаны на с. 11. Попробуйте придумать свои варианты, не забывая о шестилучевой симметрии.



Центральное кольцо
(12 модулей) и базовая снежинка (30 модулей)

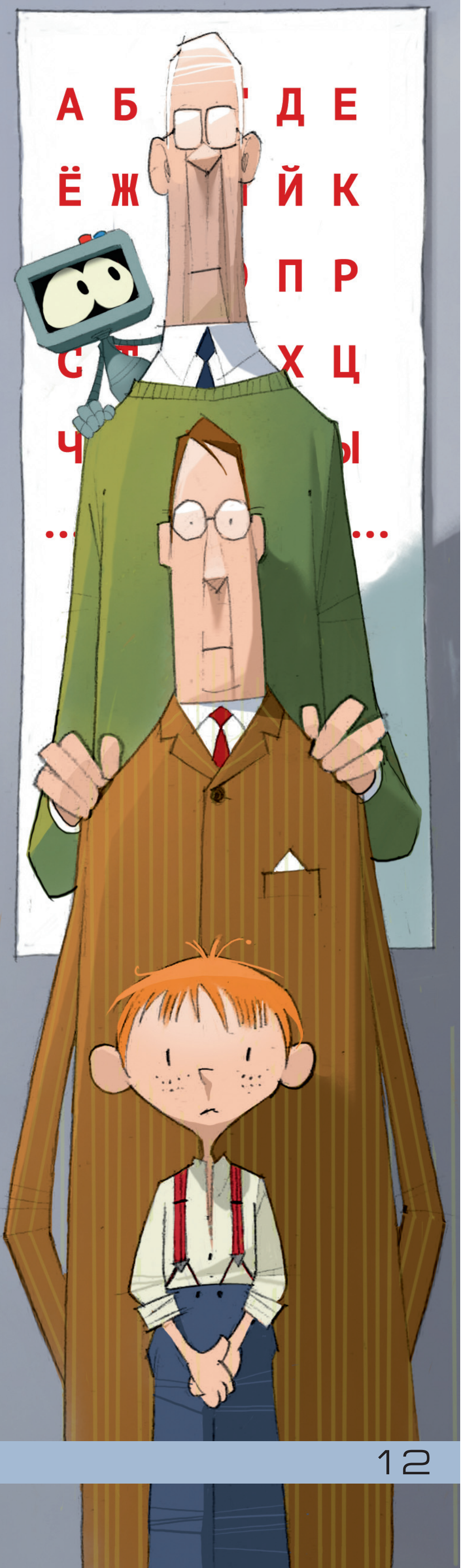
 114 модулей		 114 модулей	
 132 модуля		 54 модуля	
 84 модуля		 132 модуля	
 150 модулей		 68 модулей	
 126 модулей		 96 модулей	
 156 модулей		 168 модулей	
 54 модуля		 144 модуля	

Модели снежинок – работа и фото автора

Художник Алексей Вайнер

Григорий Идельсон

РЕЧЬ и *FoxP2*



В 1990 году английские генетики описали разветвлённую семью К., у многих членов которой был странный генетический дефект. Несмотря на нормальный интеллект и нормальный слух, они испытывали трудности в каких-то тонких вещах, связанных с обучением и воспроизведением речи. В школе они обычно отставали, и их записывали в аутисты. Прошло много лет, пока поняли, что их дефект к аутизму отношения не имеет. Генетики смогли исследовать три поколения и убедиться, что дефект, судя по всему, связан с одним определённым геном.

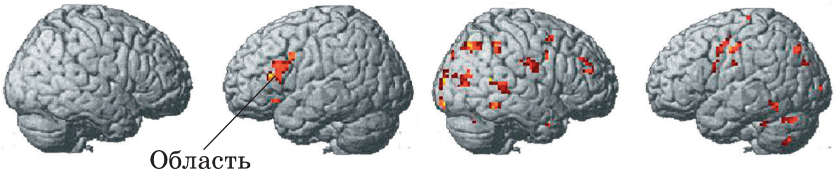
В 2001 году этот ген идентифицировали. Им оказался ген *фактора транскрипции* под названием *FoxP2*. Название это мало о чём говорит. Факторы транскрипции – это белки, которые садятся на определённый участок ДНК и управляют работой генов. Вскоре выяснилось, что *FoxP2* не связан с аутизмом и что из 270 детей с дефектами развития речи из других семей ни у кого не было мутации в этом гене. Семейство К. оказалось уникальным.

Но их дефект действительно связан с обучением речи и способностью её воспроизвести.

Когда у человека работает тот или иной участок мозга, этот участок нуждается в большом количестве кислорода и туда приливает больше крови. Белок, который переносит кислород, – гемоглобин. Он находится в красных кровяных клетках – эритроцитах. Когда гемоглобин нагружен кислородом, у него есть некоторые магнитные свойства, как и у самого кислорода.

Поэтому, если есть возможность рассмотреть магнитные свойства разных участков мозга с помощью метода функциональной магнитно-резонансной томографии (фМРТ), можно увидеть участки, к которым в данный момент приливает больше крови. Можно задать человеку задачу и посмотреть, как изменилась эта картинка при решении задачи. Те участки, куда при решении задачи стало поступать больше крови, и есть участки мозга, занятые решением задачи.

Способность грамматически понимать речь связана у здоровых людей с областью в коре головного мозга под названием *область Брока́*. А у членов семейства К., у которых был дефект, были задействованы многие другие участки мозга, но не область Брока.



Отделы мозга, работающие при решении языковых задач у человека без дефекта *FoxP2* (слева) и у членов семейства К. (справа). Показаны правое и левое полушария мозга. Иллюстрация из статьи Liégeois F., Baldeweg T. et al. (2003)

Белок *FoxP2* очень консервативен: его последовательность из 715 аминокислот почти одинакова у разных животных. Она полностью совпадает у макаки, гориллы и шимпанзе. Белок мыши отличается от белка шимпанзе только на одну аминокислоту. Но у человека, гены которого совпадают с генами шимпанзе на 98,8%, белок *FoxP2* отличается от белка шимпанзе на целых две аминокислоты. Причём обе замены приходятся на аминокислоты, которые одинаковы у всех животных.

Итак, ген *FoxP2*:

1) как-то связан со способностью обучаться речи;

2) отличается у человека и шимпанзе.

В начале 2000-х годов учёные предполагали, что именно способность к развитой речи помогла современным людям вытеснить неандертальцев, хотя размер мозга у неандертальцев был немного больше. Но когда научились выделять ДНК из неандертальских костей, учёных постигло разочарование: белок *FoxP2* устроен у неандертальцев в точности так же, как у современных людей. Сейчас принято считать, что неандертальцы могли говорить не хуже современных людей.

А что делает *FoxP2* у животных?

Есть такие популярные домашние певчие птички – зебровые амадины. Они замечательны вот чем: в период полового созревания их самцы начинают учиться петь. Как правило, у каждой птицы своя уникальная мелодия, которой она обучается от отца, с небольшими вариациями. Есть короткий период, в течение ко-

торого они способны к обучению. Затем песня фиксируется, и взрослый самец уже больше не способен к обучению и перемене песни. Так вот, *FoxP2* появляется у амадин в отделе мозга, отвечающем за обучение, только на период созревания, когда они легко обучаются. А когда обучаемость пропадает – снижается и количество *FoxP2*. Если избирательно выключить появление *FoxP2*, птички будут неполно или неточно воспроизводить мелодию.

Зебровая амадина

Другая группа животных, которой важно обучаться какой-то обработке звуковой информации, – летучие мыши. Оказывается, что *FoxP2*, очень консервативный у всех остальных, у летучих мышей очень разнообразен, причём именно в том участке белка, где находятся две замены у человека.

Многие летучие мыши ориентируются при помощи эхолокации. Они издают очень высокий ультразвук, не слышный или почти не слышный нам, и слышат его отражение от окружающих предметов. Благодаря этому они могут летать в темноте, ни на что не натыкаясь.

У некоторых летучих мышей во внутреннем ухе есть специальная акустическая ямка, обеспечивающая высокую чувствительность к ультразвуку определённой частоты.

Но при таком способе ориентации есть одна проблема. Частота звука меняется в зависимости от того, насколько быстро движется источник этого звука. Если мы стоим около железной дороги и мимо проходит и гудит локомотив, то, пока он к нам приближается, мы слышим высокий звук, а когда удаля-

Летучая мышь гималайский листонос, на ней изучалась роль *FoxP2* ется – низкий. Это так называемый *эффект Доплера*. Он касается не только звука, но и света, хотя и совсем при других скоростях. Астрономы видят его, наблюдая движение дальних галактик. Но в случае звука этот эффект касается реальных скоростей, доступных для летучих мышей.

Эффект Доплера: частота и длина волны звука зависит от скорости источника

Чтобы ориентироваться при движении, нужно вводить специальную поправку на эффект Доплера (чтобы возвращающийся звук при эхолокации был той частоты, к которой мышь особо чувствительна). Летучие мыши умеют это делать. Чем быстрее они движутся, тем ниже звук, который они издают – так, чтобы возвращающийся звук был одинаковым.

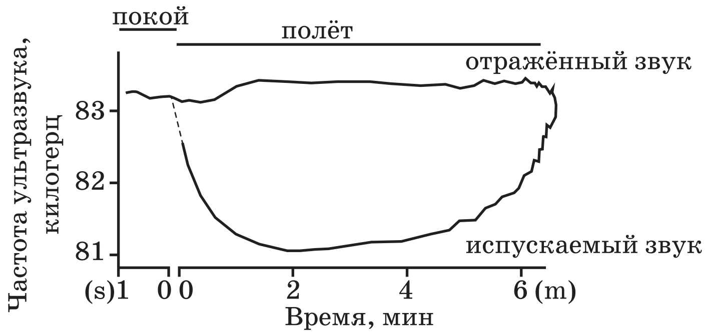


Рисунок из статьи Schnitzler H.-U., Denzinger A. (2011)

Это умение не врождённое, летучие мыши ему учатся, когда учатся летать. Так вот, и здесь оказывается необходим *FoxP2*. Если избирательно выключить появление *FoxP2*, летучая мышь теряет способность подстраивать частоту ультразвука.

Исследование *FoxP2* ещё далеко не закончено, но, судя по всему, у многих млекопитающих и птиц *FoxP2* имеет отношение к обучению обработке сложной звуковой информации, а у людей – к обучению речи.

Художник Алексей Вайнер

Сергей Полозков

ФИШЕР, СМЫСЛОВ, ТАЛЬ

Две из этих историй известны, а одна частично придумана. Надо догадаться, какая именно. Вычислить её можно по какой-нибудь нелепости, несуразности или ошибке, спрятанной в тексте. Попробуйте!

ФИШЕР

На турнире в Буэнос-Айресе аргентинский гроссмейстер Мигель Найдорф каждый день менял костюмы. Будущий 11-й чемпион мира по шахматам (в период 1972–1975), юный Роберт Джеймс Фишер спросил:

– Сколько же у вас костюмов?

– 150, – ответил Найдорф.

На Фишера это количество произвело впечатление, и он тоже стал собирать костюмы. При новой встрече Фишер похвастал:

– Ваш рекорд побит, в моём гардеробе 157 костюмов!

– Браво, но вы перестарались. Тогда я пошутил, у меня было всего-то 15 костюмов.

СМЫСЛОВ

В чемпионате СССР 1962 года Василий Васильевич Смыслов (седьмой чемпион мира по шахматам в период 1957–1958) отложил партию с мастером Львом Соломоновичем Арониным и в домашнем анализе убедился в безнадёжности своей позиции. Смыслов хотел позвонить судье и сдаться. Но его жена запротестовала:

– Ни в коем случае, ты должен бороться! Я сказала: иди и играй.

Смыслов пошёл на доигрывание, сыграл вничью и позвонил жене:

– Поздравляю, ты лучше меня оценила эндшпиль!

ТАЛЬ

Михаил Нехемьевич Таль (восьмой чемпион мира по шахматам в период 1960–1961) работал учителем литературы в школе. На его 36-летие ученики подарили Талю торт с двумя свечками в виде числа 36, но по рассеянности купили вместо свечки с цифрой 6 свечку с цифрой 9. Увидев на торте число «39», Таль не растерялся, тут же перевернул свечку с цифрой «9», зажёг её от второй свечи и под общий смех торжественно задул правильное число «36», обратив ошибку учеников в шутку.

Художник Капыч


Чудеса лингвистики
Евгений Смирнов
Какой порт лишний?
cache·pot
casse·tête
porte·monnaie
porte·feuille
pince·nez
portwein
porte·cigare
Фель
Янка
Вейн
Моне
Сигар
Шез

Задача. Вот несколько слов: *портвейн*, *портмоне*, *портсигар*, *портфель*, *портшез*, *портянка*.

1. Найдите два лишних слова.

2. Среди оставшихся четырёх слов попробуйте найти ещё одно, кое-чем отличающееся от остальных.

Прежде чем читать дальше, попробуйте найти ответ самостоятельно!

***

Очевидно, что самое непохожее на остальные слова – это «портянка». Так называется кусок ткани, которым обматывали ноги, прежде чем надеть сапоги или ботинки – вместо носков или чулок. Во-первых, это слово единственное из списка, которое не состоит из двух корней. Во-вторых, оно единственное из перечисленных имеет русское происхождение – остальные слова заимствованные (сейчас разберёмся, из каких языков). Оно, по-видимому, происходит от древнерусского слова «порть», которое значило «кусок или отрез ткани» – отсюда же и слово «портной».

Среди оставшихся слов из списка выпадает слово «портвейн». Так называется креплёное вино, которое производится в Португалии, в окрестностях города Порту. Оно получило распространение в XVIII веке, когда французы запретили экспортировать вино в Англию, в результате чего англичане стали закупать большие партии португальского вина. Чтобы оно перенесло длительную перевозку по морю, в вино стали добавлять немного бренди. Название «портвейн» как раз и значит «вино из Порту».

Остальные слова – французского происхождения, и корень «порт-» в них происходит от французского слова porter, означающего «носить». Вторая основа относится к тому, что именно предлагается носить: деньги или монеты (monnaie) – отсюда «портмоне», сигары – «портсигар», листы бумаги (лист по-французски feuille, читается примерно как «фёй») – «портфель». Кстати, ту же структуру имеет и слово «портфолио» («папка для ношения листов бумаги») – только слово folio пришло из латыни. Слово «портшез» тоже устроено таким же образом – chaise по-французски стул, то есть «портшез» дословно значит «носи стул». Но разница в том, что портшез, в отличие от трёх остальных слов – это не устройство для переноски стульев, а кресло-паланкин, которое носили слуги, то есть по существу переносной стул. Так что это слово и будет лишним.

Кстати, такая модель словообразования – глагол в повелительном наклонении плюс существительное – очень характерна для французского языка. Некоторые из этих слов были заимствованы русским языком. Помимо уже перечисленных, можно назвать кашпо (cache-pot, «прячь горшок»), кашне (род шарфа, от слова cache-nez, «прячь нос»), пенсне – очки без дужек, от pince-nez, «прищеми нос», и даже кастет (casse-tête, «ломай голову») – так называется тяжёлая накладка на руку, используемая как холодное оружие. Забавно, что по-французски слово casse-tête имеет и второе, более мирное значение – а именно... головоломка!

Художник Мария Цветаева

Игорь Акулич

ЛЁД, ВОДА и ПАР

Студентам, изучающим теплотехнику, чтобы они лучше «прочувствовали» некоторые особенности обыкновенной воды, нередко предлагают такую задачу.

Имеется при нормальном давлении:

– 1 кг льда при температуре −100 °C;

– 1 кг воды при температуре 0 °C;

– 1 кг пара при температуре +100 °C.

Всё это смешали в одной ёмкости (в которой тоже поддерживается нормальное давление), пока не установилось тепловое равновесие. Какова окажется температура получившейся смеси?

При поиске ответа на вопрос полезно взглянуть в таблицу, где приведены некоторые справочные данные (их легко найти в интернете). Вот чему равно количество тепла (в килоджоулях), необходимое, чтобы при нормальном давлении:

– нагреть 1 кг льда от −100 °C до 0 °C	170
– растопить 1 кг льда	330
– нагреть 1 кг воды от 0 °C до 100 °C	420
– испарить 1 кг воды	2300

Взглянув на эти числа, постарайтесь сначала угадать ответ с ошибкой хотя бы не более 5 градусов. А потом проверьте свою догадку, выполнив расчёт или читая дальше. Возможно, будет повод удивиться!

***

Въедливый читатель может спросить: а возможно ли в такой «пёстрой» смеси поддерживать постоянное нормальное давление? В самом деле, при нагревании льда объём его хоть немного, но растёт, зато при таянии он существенно снижается (почти на 10%). С водой ничуть не проще: при нагревании от 0 до 4 °C её объём опять-таки уменьшается, но после этого, наоборот, увеличивается (и чем дальше, тем сильней). А с паром вообще катастрофа: при его конденсации объём резко падает – в сотни раз. Но изменение объёма мгновенно влечёт изменение давления (как правило, в обратную сторону). Вот и попробуй поддерживать постоянное давление после смешивания всех компонентов! К счастью, есть испытанные способы добиться практически постоянного давления – например, поместить смесь в цилиндрический сосуд, верхняя часть которого ограничена подвижным поршнем. Вес поршня вкупе с наружным атмосферным давлением и создают нужное постоянное давление в сосуде (поршень «ходит» по необходимости вверх-вниз).

Впрочем, мы отвлеклись от сути задачи. Вернёмся к делу.

Возьмём 1 кг льда и будем постепенно нагревать его, пока он весь не превратится в пар. Этот процесс разобьётся на четыре этапа. Вот они:

1) нагревание льда от $-100\,^\circ$C до $0\,^\circ$C;

2) плавление льда (превращение его в воду) – при этом температура будет постоянной и равной $0\,^\circ$C, пока весь лёд не растает;

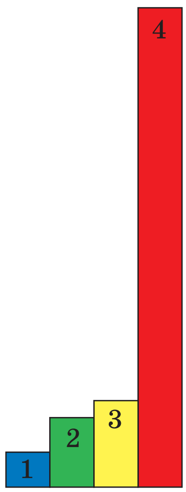
3) нагревание воды от $0\,^\circ$C до $100\,^\circ$C;

4) кипение воды – при этом температура будет постоянной и равной $100\,^\circ$C, пока вся вода не выкипит.

Если продолжать подводить тепло дальше, пар начнёт перегреваться и температура его станет подниматься выше $100\,^\circ$C, но это уже выходит за пределы нашей задачи, так что здесь притормозим.

Величины затрат тепла на все этапы были указаны как справочные в условии. Давайте теперь изобразим всё это схематично в виде диаграммы, причём *в масштабе*. Четыре разноцветных (и соответственно пронумерованных) столбика как раз соответствуют четырём этапам.

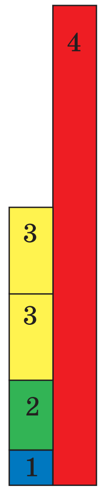
Что сразу бросается в глаза? Конечно, подавляющее превосходство высоты четвёртого столбика над первыми тремя. Она, очевидно, больше не только высоты каждого из трёх остальных столбиков, но и их суммы, притом в несколько раз! То есть, чтобы лишь испарить воду, требуется затратить во много раз больше тепла, нежели для нагревания льда, его плавления и последующего нагревания воды до ста градусов.



Но как это относится к нашей задаче? Самым непосредственным образом! Если такое огромное количество тепла надо затратить на испарение, то в точности

такое же количество будет выделено, если сконденсировать пар, превращая его обратно в воду. А ведь у нас как раз такое явление имеет место.

В самом деле, попавший в сосуд пар начнёт постепенно конденсироваться, выделяя тепло, которое пойдёт на нагревание льда, его плавление и последующее доведение образовавшейся воды до температуры 100 °C – и этого с избытком хватит. Более того, его же хватит и на нагревание до 100 °C второй компоненты нашей смеси – воды при изначально нулевой температуре.



А чтобы это утверждение не выглядело голословным, изобразим всё это опять же на диаграмме, поставив друг на друга первые три столбика (что соответствует количеству тепла, потребному для доведения до 100 градусов исходного льда) и дополнительно ещё раз третий столбик (что соответствует подогреву до той же температуры исходной воды) и приложив слева к четвёртому столбику.

Что мы видим? Суммарная высота синего, зелёного и двух жёлтых столбиков составляет где-то 60% от высоты красного (точную величину можете подсчитать сами – числа возьмите из таблицы). А это как раз означает, что примерно 0,6 кг попавшего в сосуд пара сконденсируется, причём выделившегося при этом тепла будет достаточно, чтобы преобразовать остальные два компонента смеси в воду при температуре 100 °C. А оставшаяся часть пара (около 0,4 кг) так паром и останется.

Вот и ответ: температура получившейся смеси составит ровнёшенько 100 °C – и ни градусом меньше! А получившаяся смесь будет содержать 2,6 кг воды и 0,4 кг пара.

Обычно эта задача предлагается, чтобы решающий хорошенько прочувствовал, насколько велика теплота парообразования воды. Это очень важный фактор для многих технологических процессов, в частности – при работе тепловых и атомных электростанций, вырабатывающих основную часть электроэнергии в мире (ведь вода в большинстве из них – главное «рабочее тело»).

Художник Мария Усеинова

XVIII ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР

Избранные задачи

Турнир проводится Кавказским математическим центром Адыгейского госуниверситета и Республиканской естественно-математической школой (Адыгея) каждый сентябрь во Всероссийском детском центре «Орлёнок». В XVIII Турнире участвовали более 200 школьников с 7 по 11 класс. Приводим избранные задачи лиги «Старт» (полный отчёт тут: adygmath.ru).

АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА

1. (*Ярославские дистанционные игры*) Используя цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 (в любом порядке) по одному разу, при помощи скобок и знаков арифметических действий получите выражение, равное 2023.

2. (*С. Токарев*) Любой отрезок, длина которого больше 9 см, но меньше 11 см, будем называть *практически дециметровым*. Какую наибольшую длину может иметь отрезок, который нельзя разбить на практически дециметровые?

3. (*С. Волчёнков*) В последовательности из 2023 чисел первое число равно 1, а последнее равно 2. Каждое из остальных чисел на 1 меньше произведения двух соседних с ним чисел. Чему равна сумма всех чисел последовательности?

4. (*Д. Кузнецов*) Натуральные числа a и b таковы, что $a^2+b^2+1=2(ab+a+b)$. Докажите, что a и b – точные квадраты натуральных чисел.

5. (*С. Волчёнков*) В записи 101-значного числа есть только две цифры: 1 и 2. Докажите, что можно вычеркнуть одну цифру так, чтобы получившееся 100-значное число делилось на 11.

6. (*Задача из Хорватии*) На столе лежат 2023 кучки камешков, в каждой из которых изначально находится по одному камешку. Можно выполнять ходы следующего вида: выбрать любые две кучки, взять из каждой кучки равное количество камешков и сформировать из них новую кучку. Найдите наименьшее число кучек, которые можно получить за конечное число ходов.

XVIII ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР
Избранные задачи

Материал подготовили: Д. Мамий и составители лиги «Старт» Е. Бакаев, К. Бондаренко, С. Дориченко, С. Волчёнков, Ю. Карпенко, Д. Кузнецов, Н. Лопес Косме, А. Скоркин.

ЛОГИКА, ИГРЫ, КОМБИНАТОРИКА

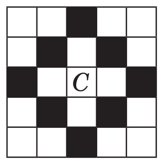
7. (*Задача из Китая*) Клетчатая полоска $1 \times n$ составлена из палочек длиной в сторону клетки. Какое наименьшее количество палочек нужно убрать, чтобы оставшиеся не образовывали ни одного прямоугольника?

8. (*По задаче С. Токарева*) Перед присяжными лежат 40 гирек, на 20 из них написано «10 г», на 20 остальных – «11 г». Присяжным известно лишь то, что каждая гирька весит либо 10 г, либо 11 г, а адвокат знает, что все надписи верные. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь адвокат может доказать присяжным, что все надписи верны?

9. (*Задача из США*) Музей в виде квадрата 6×6 состоит из 36 залов 1×1. Каждые два зала, соседствующие по стороне, соединены дверью. В каждом зале висит несколько картин. При любой прогулке по 11 залам из левого нижнего угла в правый верхний угол посетитель увидит одно и то же количество картин. Аналогично, при любой прогулке по 11 залам из левого верхнего угла в правый нижний угол посетитель увидит одно и то же количество картин. Могло ли в музее оказаться ровно 1000 картин?

10. (*В. Дольников)* В стране несколько городов, между любыми двумя либо нет дороги, либо есть одна дорога с односторонним движением. Оказалось, что для любых двух городов найдётся третий, из которого можно добраться до каждого из этих двух городов. Король хочет выбрать столицу так, чтобы из неё можно было попасть в любой другой город. Сможет ли он это гарантированно сделать?

11. (*Д. Кузнецов*) Фигура *снежинка* бьёт клетки таким образом, как показано на рисунке. Какое максимальное количество не бьющих друг друга снежинок можно разместить на доске 8×8?

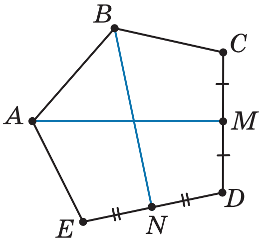


XVIII ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР

Избранные задачи

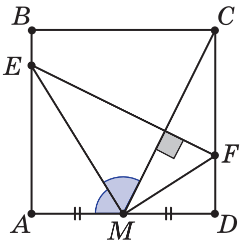
ГЕОМЕТРИЯ ОБЫЧНАЯ И КОМБИНАТОРНАЯ

12. (*Задача из Украины*) Медианой выпуклого пятиугольника $ABCDE$ назовём отрезок, соединяющий вершину с серединой противоположной стороны, то есть вершину A с серединой стороны CD, вершину B с серединой стороны DE и т. д. Известно, что 4 из 5 таких медиан перпендикулярны соответствующим сторонам, к которым проведены. Обязательно ли и пятая медиана перпендикулярна стороне, к которой проведена?



13. (*С. Волчёнков*) Равносторонний треугольник разбит на три треугольника. Докажите, что хотя бы одну из этих трёх частей можно покрыть двумя другими.

14. (*Д. Кузнецов*) На сторонах AB и CD квадрата $ABCD$ взяты такие точки E и F, что отрезки EF и CM перпендикулярны, где M – середина AD. Оказалось, что ME – биссектриса угла AMC. Докажите, что MF – биссектриса угла CMD.



15. (*Задача из США*) Назовём набор точек на плоскости *интересным*, если для любой раскраски этих точек в чёрный и белый цвета (допустимы раскраски, где все точки одного цвета) можно провести две прямые так, что они проходят через все чёрные точки и ни через одну белую. Какое наибольшее количество точек может быть в интересном наборе?

16. (*Л. Емельянов, Д. Кузнецов*) Дан треугольник ABC. Известно, что для любой точки P строго внутри ABC из отрезков PA, PB, PC можно составить треугольник. Докажите, что ABC равносторонний.

17*. (*Задача из Израиля*) Каждая точка плоскости окрашена в один из двух цветов. Для каждого равностороннего треугольника существует равный ему, все вершины которого одного цвета. Докажите, что для каждого треугольника существует равный ему треугольник, все вершины которого одного цвета.

Художник Сергей Чуб

НАШ КОНКУРС, II ТУР

(«Квантик» № 10, 2023)

6. *Вася заметил, что если записать даты рождения в формате ДД.ММ.ГГГГ, то все цифры на соответствующих местах у него и у его двоюродного брата отличаются. Какова наименьшая возможная разница в возрасте между ними?*

Ответ: 2 дня. Так как все цифры года, включая первую, поменялись, один из ребят родился в 1999 г., а другой – в 2000. Разница их возрастов будет меньше месяца, только если старший родился в декабре, а младший – в январе. С разницей в 1 день они родиться не могли (у 31 и 01 совпадает вторая цифра), а с разницей в 2 дня могли: например, 31.12.1999 и 02.01.2000.

7. *Пятнадцать бочек поставили в виде треугольника (рис. 1) и обтянули кольцевым обручем. Шестнадцать бочек поставили в виде квадрата 4×4 (рис. 2) и тоже обтянули кольцевым обручем. Сравните длины этих обручей.*

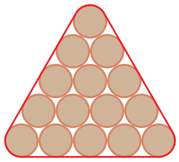


Рис. 1

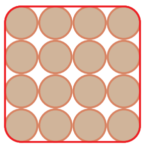
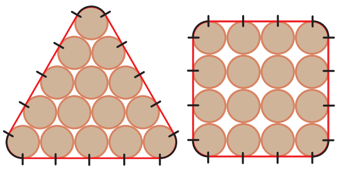


Рис. 2

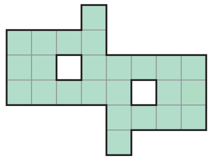
Ответ: они равны. Обруч состоит из частей, плотно прилегающих к угловым бочкам, и частей между точками, где соседние бочки касаются обруча. Части второго вида равны (расстоянию между центрами соседних бочек), и в треугольнике их по 4 на трёх сторонах, а в квадрате по 3 на четырёх сторонах – поровну. Части первого вида, если их соединить, и в случае треугольника, и в случае квадрата образуют кольцо вокруг одной бочки.

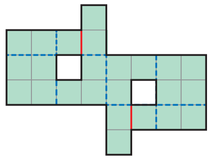


8. *Имеются стакан кофе, наполненный на 2/3, и такой же стакан молока, наполненный на 2/3. Разрешается переливать любое количество жидкости туда и обратно, тщательно её перемешивая, но нельзя ничего выливать. Можно ли получить в одном из стаканов напиток, составленный из молока и кофе в пропорции 1:1?*

Ответ: нельзя. Предположим противное и рассмотрим первый момент, когда в одном из стаканов стало поровну молока и кофе. Так как всего напитков поровну, то и во втором стакане их поровну. Всего молока и кофе 4/3 стакана, поэтому оба стакана не пустые. Но тогда до переливания во втором стакане также было поровну кофе и молока, – раньше первого такого момента!

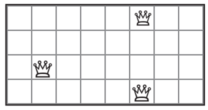
9. *Сделайте на фигуре надрезы так, чтобы полученная фигура не распалась на части и ей можно было обернуть какой-нибудь куб в один слой. (Надрезы нарисуйте сплошными линиями, а сгибы – пунктирными.)*





Ответ: см. рисунок (можно обернуть куб $2\times2\times2$).

10. *На прямоугольнике 4×8 клеток (половине шахматной доски) разместите трёх ферзей так, чтобы каждое пустое поле бил хотя бы один из ферзей. (Ферзь бьёт по горизонтали, вертикали и диагонали на любое число клеток.)*



Ответ: см. рисунок.

НОВАЯ РОМБИЧЕСКАЯ ФЛЕКСОТРУБКА

(«Квантик» № 11, 2023)

См. видео по ссылке kvan.tk/flextube

КАК ВАРИТЬ КАРТОШКУ

(«Квантик» № 11, 2023)

Квантик прав. После того как вода закипела, больше чем до 100° её (а значит, и картошку внутри) не нагреешь. Так что и вариться картошка будет с той же скоростью. А если включить плиту посильнее, дополнительное тепло уйдет просто на более быстрое испарение воды.

Так будет с открытой кастрюлей. В скороварке с плотно закрытой крышкой, включив плиту посильнее, можно добиться повышенного давления, при котором вода кипит при большей температуре – и еда готовится быстрее.

СПРАВЕДЛИВЫЙ ДЕЛЁЖ, ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ТУЭ – МОРСА И СНЕЖИНКА КОХА

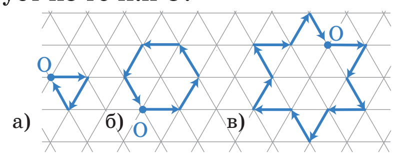
1. Нет. Когда мы последовательно удваиваем фрагменты последовательности Туэ–Морса, то начиная с АБ, получаем либо фрагменты, которые тоже заканчиваются на АБ (это фрагменты длин 2, $8=2\cdot4$, $32=2\cdot4^2$ и т. д.), либо фрагменты, которые заканчиваются на БА (это фрагменты длин 4, $16=4^2$, $64=4^3$ и т. д.), поэтому ни АА, ни ББ не могут стоять в конце фрагмента.

Отсюда следует, что три одинаковых буквы подряд встретиться не могут. В самом деле, если в исходном фрагменте не было трёх идущих подряд одинаковых букв, то и в его «зеркальном варианте» три идущие подряд одинаковые буквы не появятся. Осталось проверить тройки, пересекающие границу склейки между фрагментом и его зеркальным вариантом. Около границы (её мы для наглядности обозначим вертикальной чертой) стоит либо АБ|БА либо БА|БА, то есть снова нет троек из одинаковых букв.

2. Ответ: А. Из построения последовательности Туэ–Морса следует, что фрагменты длин 4, $4^2=16$, $4^3=64$, $4^4=256$, $4^5=1024$ и т. д. центрально симметричны относительно середины.

Поэтому буква, которая стоит на 25 месте от конца фрагмента длины $1024=4^5$ (то есть на тысячном месте от начала) совпадает с буквой, которая стоит на 25 месте от начала. Чтобы найти эту букву, заметим, что $25=16+9$, поэтому согласно определению нужно взять букву на 9 месте от начала фрагмента длины 16 (это будет Б) и взять её «зеркальный вариант» (это будет А).

3. Ответы показаны на картинке. Черепашка стартует из точки О.



4. Например, подойдёт программа АББАБААБАББАБААБАББАБААБ.

ФИШЕР, СМЫСЛОВ, ТАЛЬ

Выдумана третья история. Фитиль у свечки выступает с верхнего конца – там, где свечу зажигают, а снизу он спрятан внутри. Перевернув свечку, Таль не смог бы её зажечь.

Истории про Фишера и Смыслова взяты из книги Евгения Гика «Шахматные байки».

XVIII ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР. Избранные задачи

1. Ответ: $(342-5)\cdot 6+1$ или $31\cdot 65+2\cdot 4$.

2. Ответ: 45 см. Разбить отрезок длины 45 см на 4 практически дециметровых нельзя – их суммарная длина меньше $4\cdot 11=44$ см. А 5 практически дециметровых отрезков слишком много – их суммарная длина больше $5\cdot 9=45$ см.

Но на 5 практически дециметровых отрезков можно разбить любой отрезок длиной больше $5\cdot 9=45$ см и меньше $5\cdot 11=55$ см; на 6 – любой отрезок длиной больше $6\cdot 9=54$ см и меньше $6\cdot 11=66$ см; и т.д. Мы покрываем последующие длины без пропусков: ведь очередной интервал $(9k,\ 11k)$ пересекается со следующим $(9(k+1),\ 11(k+1))$, так как $9(k+1)<11k$ при $9<2k$, то есть при $k\geqslant 5$.

3. Ответ: 3640. Обозначим третье число в ряду через a. Тогда ряд начинается так: $1,\ a-1,\ a,\ \frac{a+1}{a-1},\ \frac{2}{a-1},\ 1,\ \ldots$ Далее числа в ряду повторяются: первая пятёрка чисел такая же, как следующая пятёрка, и т.д. Тогда 2023-е число равно третьему: $2=a$. Значит, ряд выглядит так: 1, 1, 2, 3, 2, ..., 1, 1, 2, 3, 2, 1, 1, 2. Сумма всех чисел равна $(1+1+2+3+2)\cdot 2020/5+1+1+2$.

4. Заметим, что $0=a^2+b^2+1-2(ab+a+b)=$ $=(a-b+1)^2-4a$, откуда $4a=(a-b+1)^2$. Тогда и само a – квадрат. Аналогично, и b – квадрат.

5. Число делится на 11 тогда и только тогда, когда цифры его записи, стоящие на нечётных позициях, в сумме дают такой же остаток при делении на 11, что и цифры, стоящие на чётных позициях. Тогда, если мысленно удалить в нашем 101-значном числе любые две одинаковые соседние цифры, на делимость на 11 это не повлияет. Будем делать так, пока одинаковые соседи есть. В какой-то момент останется число, в котором цифры 1 и 2 чередуются, а всего их нечётное количество. Цифра, которую надо удалить по-настоящему – средняя цифра этого числа.

6. Ответ: 2 кучки. Одну кучку получить нельзя: последним ходом мы объединили бы две равные кучки, получив чётное число камней.

Покажем, как получить две кучки. Вместо кучек будем иногда называть число камней в них. Сначала объединяем единицы в пары, пока возможно. Затем объединяем в пары двойки, потом – четвёрки, и т. д. Так мы получим различные степени двойки, задающие двоичное разложение числа 2023. Заметим, что любая кучка больше суммы всех меньших.

Далее действуем так. Упорядочим кучки по возрастанию. Берём наименьшую кучу, отнимаем столько же камней у наибольшей и создаём новую кучу. Новая куча не больше следующей из оставшихся. Если появляются равные кучи, объединяем их, пока кучи не станут разными. Далее повторяем этот алгоритм.

Исходная наибольшая кучка остаётся наибольшей, пока куч хотя бы три – она изначально больше предыдущей хотя бы в 2 раза, а вычли из неё суммарно меньше, чем в предыдущей. Остальные кучки будут степенями двойки.

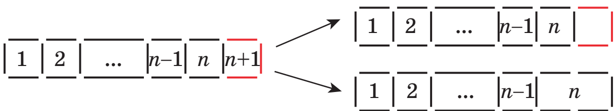
Каждым шагом наименьшая куча удваивается, в какой-то момент она сравняется со следующей по величине и объединится, число куч уменьшится на 1. Алгоритм работает, пока куч хотя бы 3, поэтому когда-то мы получим 2 кучки.

Замечание. Мы показали, как получить не более чем две кучи для любого начального числа кучек (по 1 камню). Ровно одну кучу можно получить в точности тогда, когда исходное число куч равно степени двойки, – попробуйте доказать!

7. Ответ: n. Пусть полоска горизонтальна.

Пример: достаточно убрать все вертикальные палочки, кроме одной.

Оценка: докажем, что необходимо убрать n палочек. Для $n = 1$ это очевидно. Пусть для какого-то n доказали. Возьмём полоску, в которой на 1 клетку больше, и рассмотрим её самую правую клетку. В ней надо что-то убрать. Если это верхняя, нижняя или правая палочки, останется целой полоска из n клеток, из неё надо убрать ещё n палочек. Если же это левая палочка, мы получим полоску, в которой сначала идут $n-1$ клеток, а потом – прямоугольник 1×2, который можно мысленно сжать, превратив в клетку, и мы получим полоску из n клеток: в ней надо убрать ещё n палочек.



Так мы шаг за шагом докажем утверждение для полоски из любого числа клеток.

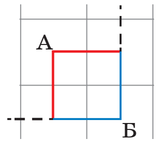
8. Ответ: за 2 взвешивания.

Пример. Положим на левую чашу 11 гирь с надписью «10 г», а на правую – 10 гирь с надписью «11 г». Присяжные понимают, что на первой чаше суммарный вес не меньше $11 \cdot 10$ г, а на второй – не больше $10 \cdot 11$ г. Равенство, которое они видят, возможно только в случае, когда вес обеих чаш равен 110 г, а тогда все надписи на взвешиваемых гирях верны. Вторым взвешиванием кладём на левую чашу 9 оставшихся гирь с надписью «10 г» и две проверенные гири весом 10 г, а на правую – оставшиеся 10 гирь с надписью «11 г». Так мы проверим все 40 гирь.

Оценка. Пусть удалось проверить все 40 гирь за одно взвешивание. Ни на какую из чаш не могут попасть две гири с разными надписями: ведь если поменять их надписи друг с другом, результат взвешивания не изменится, а отличить исходную ситуацию от новой невозможно. Заметим также, что если хоть одна гиря не взвешивается, присяжные не знают, весит она 10 г или 11 г.

Значит, на одной из чаш лежат 20 гирь с надписью «10 г», а на другой – 20 гирь с надписью «11 г». Присяжные видят, что первая чаша легче. Но она будет легче и когда все надписи правдивы, и когда мы поменяем местами любую гирю веса 10 г с любой гирей веса 11 г. Поэтому присяжные ни про одну гирю ничего не узнают.

9. Ответ: нет. Допустим, могло. Рассмотрим любые две клетки А и Б, соседние по диагонали. Найдутся пути, отличающиеся только клетками А и Б (см. рисунок).



Значит, в А и Б поровну картин. Раскрасив клетки в шахматном порядке, получаем, что во всех 18 белых клетках поровну картин и во всех 18 чёрных тоже. Значит, общее число картин делится на 18, но 1000 на 18 не делится!

10. Ответ: сможет. Рассмотрим город C, из которого можно попасть в наибольшее число городов. Пусть в какой-то город A попасть не удалось. Тогда найдётся такой город $Б$, из которого можно попасть и в A, и в C, а значит, и в те города, в которые можно попасть из C. Противоречие – из $Б$ можно попасть в большее число городов, чем из C. Значит, из C можно попасть куда угодно.

11. Ответ: 20 снежинок. Заметим, что каждая снежинка бьёт только клетки того цвета, на котором она стоит. Значит, можно рассматривать две части доски отдельно – белые клетки и чёрные. Начнём с чёрных. Обозначим их разными буквами и цифрами, как на рисунке 1. Изобразим эти же клетки, повернув их, как это показано на рисунке 2. Теперь снежинка бьёт одну клетку и все соседние с ней по вершине.

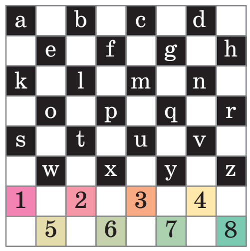


Рис. 1

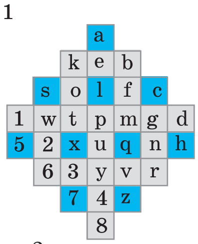


Рис. 2

Пример. На рисунке 2 синим отмечены 10 снежинок, стоящие на чёрных клетках и не бьющие друг друга. Расставим аналогично 10 снежинок на белых клетках, всего будет 20.

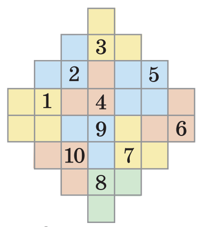
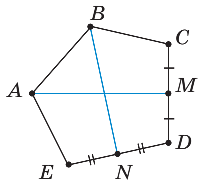


Рис. 3

Оценка. Разобьём новую доску на 10 областей, как показано на рисунке 3. В каждой области может стоять не более одной снежинки. Значит, снежинок на чёрных клетках не более 10. Аналогично, снежинок на белых клетках не более 10.

12. В треугольнике медиана перпендикулярна основанию, если и только если он равнобедренный. Тогда если медиана AM перпендикулярна CD, то диагонали AD и AC равны, если медиана BN перпендикулярна ED, то диагонали BE и BD равны, и т. д. Если условие выполнится для четырёх медиан, все диагонали пятиугольника будут равны, а тогда и последняя медиана будет медианой равнобедренного треугольника!



13. Пусть ABC – исходный треугольник. Если внутри каждой его стороны есть вершина какой-то части, частей будет хотя бы 4 (к углам ABC примыкают разные части, и если к каждому углу – ровно одна, то ещё будет часть внутри). Поэтому одна из сторон треугольника ABC целиком попадёт в одну из частей – пусть это AC.

Если она попала в треугольник разбиения вместе с отрезком AX стороны AB (рис. 1), то CX делит ABC на две половины, одна из которых накрывает другую – нужно выбрать части в соответствии с этим. Иначе каждая сторона у ABC – это сторона треугольника разбиения (рис. 2).

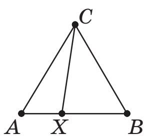


Рис. 1

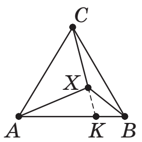
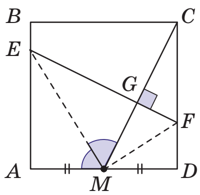


Рис. 2

В этом случае продлим CX до пересечения с AB в точке K. Пусть ACK не меньше BCK. Тогда части ACX и ABX накрывают CXB.

14. Так как ME – биссектриса угла AMG, прямоугольные треугольники AEM и GEM равны по гипотенузе и острому углу. Значит, $AM = GM$. Так как M – середина AD, то $GM = MD$. Прямоугольные треугольники GMF и DMF равны по катету и гипотенузе, откуда $\angle GMF = \angle DMF$.



15. Ответ: 5 точек.

Пример: вершины квадрата и точка пересечения его диагоналей.

Оценка. Докажем, что 6 точек быть не может.

Во-первых, все точки должны лежать на двух прямых (так как они могут быть все чёрные). Во-вторых, на одной прямой не может быть больше 3 точек (иначе 3 из них сделаем чёрными, а остальные белыми – тогда на каждую из этих трёх точек понадобится своя прямая).

Значит, на одной прямой лежат 3 точки, и на другой прямой – 3 другие точки. Покрасим 5 точек в чёрный цвет, а шестую – в белый. Чтобы вычеркнуть чёрные, понадобятся 3 прямые.

16. Пусть у ABC есть неравные стороны – скажем, $AB < BC$. Выберем такое число k, что $AB < k < BC$. Возьмём внутри треугольника точку P, настолько близкую к B, что $PA + PB < k$, а $PC > k$. Тогда для отрезков PA, PB, PC не выполняется неравенство треугольника.

17. Пусть цвета – синий и красный. Треугольник с одноцветными вершинами будем называть *одноцветным*. Надо найти одноцветный треугольник, равный некоторому исходному. Возьмём равносторонний одноцветный треугольник ABC (пусть он синий), сторона которого равна наибольшей стороне исходного, и отметим внутри точку X так, что треугольник AXC равен исходному (рис. 1). Если X синяя, задача решена, пусть X красная.

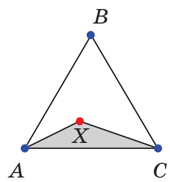


Рис. 1

Повернув AXC на $60°$ вокруг A против часовой стрелки, получим равный ему треугольник AYB, а повернув AXC на $60°$ вокруг C по часовой стрелке, получим равный ему треугольник BZC (рис. 2). Если хоть одна из точек Y и Z синяя, задача решена, пусть они красные.

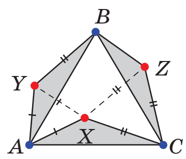


Рис. 2

Заметим, что треугольники AXY и CXZ равносторонние. Повернём треугольник AYB вокруг точки Y против часовой стрелки на $60°$, получим равный исходному треугольник XYM. Аналогично, повернём BZC вокруг Z по часовой стрелке на $60°$, получим равный исходному треугольник NZX (рис. 3).

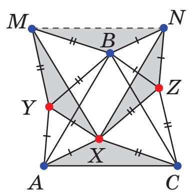


Рис. 3

Если хоть одна из точек M и N красная, задача решена, пусть они синие. Тогда треугольник NBM одноцветный (синий). Но он равен исходному – ведь MYB и NZB равносторонние, откуда $BM = XC$, $BN = XA$, а $\angle MBN = 360 - \angle MBY - \angle YBA - \angle ABC - \angle CBZ - \angle ZBN = 360° - 60° - \angle XCA - 60° - \angle XAC - 60° = \angle AXC$.

ИТОГИ НАШЕГО КОНКУРСА

ПОЗДРАВЛЯЕМ!

Подведены итоги математического конкурса, проходившего с сентября 2022 года по август 2023 года. В нём участвовали более 750 школьников из разных стран. Новый конкурс уже идёт (см. с. 32).

ПОЗДРАВЛЯЕМ НАШИХ ПОБЕДИТЕЛЕЙ! ИМИ СТАЛИ:

Амиршадян Карина	Донецк	Школа № 17	8 кл.
Бирюков Иван	Мурманск	Филиал НВМУ	8 кл.
Босенко Иван	Бергама (Турция)	Лицей Аль-Хорезми	5 кл.
Ганичев Филипп	Киров	Вятская гуманитарная гимназия	6 кл.
Голенищева Мария	Санкт-Петербург	Школа № 5	3 кл.
Елисеева Алиса	Екатеринбург	Школа № 94	4 кл.
Илаев Артур	Владикавказ	Гимназия № 5	6 кл.
Илаев Ахсартаг	Владикавказ	Гимназия № 5	5 кл.
Мелиханов Назар	Красноярск	Школа № 10	6 кл.
Мишин Мишель	Челябинск	Гимназия № 10	7 кл.
Нестеренко Елизавета	Москва	Школа № 1287	8 кл.
Николаев Михаил	Москва	Школа № 1788	5 кл.
Селютин Степан	Москва	Школа № 1440	5 кл.
Скабелин Мишель	Нью-Йорк (США)	PS 33 Chelsea Prep	4 кл.
Скивко Тимур	Магнитогорск	Школа № 5	6 кл.
Ступник Мария	Донецк	Лицей «Коллеж»	6 кл.
Терехова Наталья	Зеленоград	Школа № 1557	5 кл.
Токарева Дарина	Балаково, Саратовская область	Лицей № 1	6 кл.
Трофимов Иван	деревня Яныши, Чебоксарский р-н, Чувашия	Янышская школа	7 кл.
Ушаков Севастьян	Санкт-Петербург	ЦОДИВ	7 кл.
Ханмагомедова Мелек	Москва	Школа № 1571	5 кл.

Кружок «Озарчата», Магнитогорск, школа №5, руководитель Алёна Валерьевна Христева;
кружок «М-6 Профи», Киров, ЦДООШ, руководитель Ирина Александровна Семенова;
кружок «Умники и умницы в математике», Тула, центр образования №4, руководитель Надежда Николаевна Заковыркина.

ПОЗДРАВЛЯЕМ НАШИХ ПРИЗЁРОВ! ИМИ СТАЛИ:

Алтайская Антонина	Москва	Школа №1590	5 кл.
Бацазов Валерий	Владикавказ	РФМЛИ	6 кл.
Башкиров Александр	Ижевск	Лицей №29	6 кл.
Васильева Александра	Волгоград	Лицей №8	6 кл.
Воронцов Валерий	Саранск	Республиканский лицей	8 кл.
Габышев Матвей	Москва	Школа №2101	6 кл.
Дорошев Николай	Москва	Школа №1360	8 кл.
Игнатьева Елизавета	Москва	Школа №1589	5 кл.
Ланцов Егор	Чита	Забайкальский краевой лицей-интернат	5 кл.
Луканина Софья	Мытищи	Школа №6	6 кл.
Мешков Иван	Москва	Школа №1636	8 кл.
Миловская Николь	Москва	Школа №1589	6 кл.
Мирошников Валерий	Владикавказ	Лицей	5 кл.

Мукминова Эмилия	Ноябрьск, ЯНАО	Школа №6	5 кл.
Мухина Полина	Санкт-Петербург	Лицей №126	6 кл.
Пастухова София	Балашиха	Школа №15	6 кл.
Погадаев Александр	Новосибирск	Школа №195	6 кл.
Федотова Дарья	Иваново	Лицей №21	6 кл.
Шахова Мирослава	Санкт-Петербург	Школа №621	6 кл.

Кружок «Школа юных математиков», Кострома, лицей № 32, руководитель Татьяна Алексеевна Чебунькина;
кружок «Фракталы1554», Москва, руководитель Татьяна Ваниковна Сендерович;
кружок «Математическая лаборатория», команда «Python», Тюмень, гимназия № 49, руководитель Наталья Владимировна Крамарчук;
кружок МурНВМУ, Мурманск, руководитель Татьяна Сергеевна Абашкина.

Победителям и призёрам будут высланы дипломы журнала «Квантик», а также призы – научно-популярные книги издательства МЦНМО, фонда «Математические этюды» и фонда «Траектория»

ТАКЖЕ ОТМЕЧАЕМ УСПЕШНОЕ ВЫСТУПЛЕНИЕ РЕБЯТ:

Вараксина Наталия	Магнитогорск	Школа № 5	8 кл.
Говарухин Александр	Бердск	Школа № 2	7 кл.
Гришина Елена	Москва	Школа № 1158	6 кл.
Джаошвили Михаил	Москва	Курчатовская школа	5 кл.
Заклязьминская Софья	Москва	Школа «Путь к успеху»	6 кл.
Иванов Андрей	Балашиха	Школа № 3	7 кл.
Казанский Родион	Владикавказ	РФМЛИ	6 кл.
Кичатов Дмитрий	Москва	Школа «Летово»	8 кл.
Кутель Артём	Владикавказ	Лицей	5 кл.
Лизогубов Яромир	Саратов	Медико-биологический лицей	6 кл.
Луканина Софья	Мытищи	Школа № 6	6 кл.
Медведев Дмитрий	Санкт-Петербург	Школа № 777	6 кл.
Медоев Владимир	Владикавказ	Лицей	8 кл.
Мельников Виктор	Москва	Школа № 1554	8 кл.
Митузов Владислав	Саратов	Лицей № 1	8 кл.
Немилов Сергей	Иваново	Лицей № 33	8 кл.
Николаев Михаил	Санкт-Петербург	Лицей № 239	6 кл.
Порунов Игорь	Москва	Лицей «Вторая школа»	6 кл.
Савина Наталия	Протвино	Лицей	5 кл.
Сивков Глеб	Санкт-Петербург		
		Школа во имя св. бл. А. Невского	6 кл.
Сидорова Варвара	Москва		
Слясская Диана	Петрозаводск	Университетский лицей	5 кл.
Соболева Анастасия	Москва	Школа № 1576	5 кл.
Фиалковский Максим	Москва	Школа № 2007	5 кл.
Филимонов Василий	Самара	Самарский медико-технический лицей	6 кл.
Ханмагомедова Зумруд	Москва	Школа № 883	4 кл.
Черепанов Пётр	Долгопрудный	Физтех-лицей	3 кл.
Чернецкая Елизавета	Санкт-Петербург	Школа № 525	8 кл.

Кружок «Математика, творчество, интеллект», Магнитогорск, Академический лицей, руководитель Виталий Станиславович Мошкин;
кружок «Аудитория», Тбилиси (Грузия), руководитель Наталья Михайловна Нетрусова;
кружок Красноткацкой школы, деревня Ноготино, Ярославский район, руководитель Елена Ермолова.

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем
заочном математическом конкурсе.

Первый этап состоит из четырёх туров (с I по IV) и идёт с сентября по декабрь.

Высылайте решения задач IV тура, с которыми справитесь, не позднее 5 января в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, г. Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте www.kvantik.com. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

IV ТУР

16. Можно ли записать подряд по возрастанию три последовательных натуральных числа и поставить между ними два знака арифметических действий так, чтобы итог равнялся 2023, если

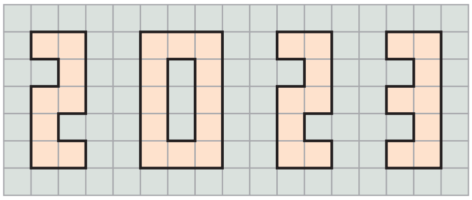
а) оба раза разрешается использовать любой знак;

б) надо использовать один знак сложения и один знак умножения?

17. У Пети была кубическая коробка и много кусочков сахара размером $1 \times 2 \times 2$. Он смог поместить весь сахар в коробку в несколько слоёв, располагая кусочки параллельно сторонам коробки гранью 2×2 вниз. Потом он решил переложить все кусочки в такую же коробку, располагая их параллельно сторонам коробки гранью 1×2 вниз, но задумался – точно ли это возможно? Помогите Пете ответить на вопрос.

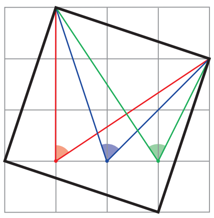
Авторы задач: Дмитрий Калинин (16), Татьяна Казицына (17, 19), Сергей Костин (18), Константин Кноп (20)

18. Разрежьте квадрат 6×6 на семь частей и сложите из них изображённую на рисунке фигуру в виде числа 2023.



19. По кругу стоят 7 диванов, на них сидит всего 50 человек, на каждом диване – хотя бы один человек. Каждый сказал: «На следующем по часовой стрелке диване ровно половина людей выше меня ростом, а ровно половина – ниже». Какое наибольшее число людей могло сказать правду?

20. Внутри квадрата со стороной, равной диагонали прямоугольника 1×3 клеточки, отметили три угла – красный, синий и зелёный, – как показано на рисунке. Чему равна их сумма?



Художник Николай Крутиков

Как трескаются деревья

Зимой ствол дерева может треснуть, как показано на картинке ниже. Трещины идут вдоль ствола и бывают двух типов: слева – разрывают годовые кольца поперёк, справа – отделяют годовые кольца друг от друга.

Известно, что трещины одного типа образуются чаще при потеплении, а другого – при похолодании. Какие когда?

Автор Никита Солодовников

Художник Елена Цветаева

ISSN 2227-7986 23012
9 772227 798237

Автор Никита Солодовников