№ 1 | январь 2024

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 1
январь
2024

ТРАНСНЕРАВЕНСТВО,
ИЛИ КАК РАЗЛИТЬ МЁД ПО ГОРШОЧКАМ

ИНЕЙ И ТЕНЬ

СКОЛЬКО БУДЕТ СОВПАДЕНИЙ?

Enter

НАГРАДЫ ЖУРНАЛА

2017 — Минобрнауки России **ПРЕМИЯ «ЗА ВЕРНОСТЬ НАУКЕ»** за лучший детский проект о науке

2021 — **БЕЛЯЕВСКАЯ ПРЕМИЯ** за плодотворную работу и просветительскую деятельность

2022 — Российская академия наук **ПРЕМИЯ ХУДОЖНИКАМ ЖУРНАЛА** за лучшие работы в области популяризации науки

Журнал «Квантик» № 1, январь 2024 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С.А. Дориченко
Редакция: В.Г. Асташкина, Т.А. Корчемкина, Е.А. Котко, Г.А. Мерзон, М.В. Прасолов, Н.А. Солодовников
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р.К. Шагеева, И.Х. Гумерова
Обложка: художник Анна Горлач

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»

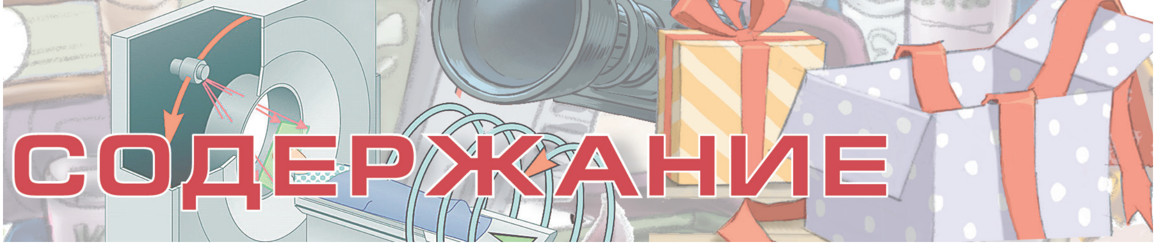
Адрес редакции и издателя:
119002, г. Москва,
Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**

Подписка на журнал в отделениях почтовой связи Почты России:
Каталог Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)

Онлайн-подписка на сайте Почты России:
podpiska.pochta.ru/press/ПМ068

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 4500 экз.
Подписано в печать: 30.11.2023
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831) 218-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+



СОДЕРЖАНИЕ

Егор Бакаев

ТРАНСНЕРАВЕНСТВО, или как разлить мёд по горшочкам

Винни-Пух выпросил у Кролика три горшка мёда.

– Пустые горшочки бери вот с этой полки, а мёд набирай из этих бочонков, – уточнил Кролик.

– Мёд я бы взял трёх разных сортов, так вкуснее.

– Пожалуйста, но тогда вычисляй, какой мёд в какой горшочек набрать.

Винни-Пух крепко задумался.

– И что же тут вычислять?

– Винни, тебе надо определить, какого мёда сколько набрать. Мёд ты ведь по-разному оцениваешь?

– Да, горный мне нравится больше всего, луговой тоже хороший, но и лесного хочу попробовать.

– Тогда давай оценим горный мёд в 5 баллов, луговой – в 4 балла, а лесной – в 3 балла:

$$\textit{горный } (5) > \textit{луговой } (4) > \textit{лесной } (3).$$

– А дальше что?

– Надо найти объёмы горшков, они разные. – Кролик подал Пуху горшки. Ими давно не пользовались.

– А как найти объём?

– Объём (в миллилитрах) был написан на каждом горшочке, но теперь надписи не видны. Придётся, Винни, тебе их почистить и отскрести надписи!

Винни-Пух нехотя принялся очищать горшки.

– Две цифры уже видны. Может, хватит? Уже понятно, какой горшочек самый большой и какой самый маленький:

$$\boxed{1}\boxed{}\boxed{}\qquad \boxed{2}\boxed{}\boxed{}\qquad \boxed{}\boxed{}.$$

– Нет, для вычислений нужны точные значения!

Наконец все цифры стали известны:

$$\boxed{1}\boxed{9}\boxed{5}\qquad \boxed{2}\boxed{0}\boxed{5}\qquad \boxed{8}\boxed{0}.$$

Уставший Винни спросил:

– Ну вот. И что теперь надо вычислять?

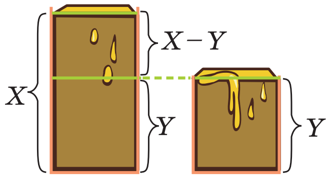
– Допустим, ты захотел налить в первый горшочек пятибалльный мёд, во второй – четырёхбалльный, а в третий – трёхбалльный. Тогда сумма «миллилитробаллов» получится такая... Подожди, сейчас подсчитаем: $5 \cdot 195 + 4 \cdot 205 + 3 \cdot 80 = 2035$. А если в первый горшочек – четырёхбалльный мёд, во второй – пятибалльный, в третий – трёхбалльный, получится $5 \cdot 205 + 4 \cdot 195 + 3 \cdot 80 = 2045$. Так надо перебрать все 6 вариантов. И выбрать вариант с наибольшей суммой.

– Кролик! Да очевидно же, что надо в самый большой горшок положить самый вкусный мёд! В средний горшок – средний, а в самый маленький горшок – тот, который похуже! Зачем же ты мне голову морочил!

– Не знаю, не знаю… – задумчиво протянул Кролик. – А как ты это будешь доказывать? По-моему, проще моим способом всё посчитать.

– Ничего тут не надо считать и доказывать! Ясно, что больше нужно взять того, что лучше, и так далее.

С этим спором друзья пришли к Кристоферу Робину, чтобы тот их рассудил.



– Винни предлагает верный способ, – сказал Кристофер. – Но давайте всё-таки докажем его правильность, благо это нетрудно! Пусть мёд разлит оптимально. Возьмём любые два горшочка: пусть у одного объём X мл, а у другого Y мл, причём $X > Y$. В них налиты разные сорта мёда. Что произойдёт, если поменять сорта мёда между горшочками? Одного мёда станет на $X - Y$ меньше, а другого – на столько же больше. Значит, нужно, чтобы эта разность состояла из того мёда, который больше нравится, для этого он должен быть налит в бо́льший горшок (из этих двух). А раз это выполняется для любых двух горшков, то и получается, что чем горшок больше, тем лучший мёд в нём должен быть. И это рассуждение верно для любого количества горшков, не только для трёх!

– Теперь понял, что всё доказано, – согласился Кролик. – А мой способ всё-таки работает или нет?

– Работает, но в нём непонятно, почему можно давать сортам мёда именно такие баллы – 5, 4, 3. А вдруг, если дать баллы 5, 4, 2, результат изменится? И почему вообще то, насколько Пуху нравится сорт мёда, выражается числом? Хватит того, чтобы Винни их упорядочил по тому, насколько они ему нравятся.

– Если заменить баллы 5, 4, 3 на 5, 4, 2, результаты вычислений, конечно, изменятся… Но, видимо, ответ – какой мёд куда наливать – останется прежним…

– Да, и это как раз понятно из рассуждения, которое я вам рассказал. Важно только, как упорядочены сорта мёда и как упорядочены объёмы горшков.

– И в способе Кролика пришлось отчищать горшки, чтобы найти все цифры! – проворчал Винни-Пух. – А в способе Кристофера Робина это не нужно.

– Да! – подтвердил Кристофер. – Давайте применим этот подход в разных задачах. Я их решал когда-то на математическом кружке.

Задача 1. Расставьте в клетках цифры от 0 до 9 по одному разу так, чтобы у этих двух сумм была как можно большая а) сумма; б) разность. Сколькими способами можно это сделать?

$$\square \cdot 1 + \square \cdot 2 + \square \cdot 3 + \square \cdot 4 + \square \cdot 5$$

$$\square \cdot 1 + \square \cdot 2 + \square \cdot 3 + \square \cdot 4 + \square \cdot 5$$

Винни-Пух тут же бросился решать задачу.

– В пункте а) мы эти две суммы складываем. На 5 умножатся две цифры – берём самые большие, 9 и 8, на 4 умножатся тоже две – берём 7 и 6, и так далее.

– И каждый раз у нас два способа, как их поставить: 9 в первую строку, а 8 во вторую, или наоборот. Тогда ответ – это $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$, – подсчитал Кролик.

– Верно! А в пункте б)? – спросил Кристофер Робин.

– Если мы вычтем одну сумму из другой, коэффициенты у 10 чисел получатся такие: 5, 4, 3, 2, 1, –1, –2, –3, –4, –5, – заметил Кролик. – Я вот их как раз по убыванию перечислил, поэтому так и умножаем: 5 на 9, 4 на 8, 3 на 7 и так далее! А способов будет...

– ... ровно один, и ты его назвал, – сказал Винни.

– Да, получается, что один, – согласился Кролик.

Задача 2. Цифры 1, 2, 3, ..., 7 выписаны в некотором порядке (так что получилось семизначное число). Рассмотрим все тройки цифр, идущих подряд, и найдём сумму соответствующих пяти трёхзначных чисел. Каково наибольшее возможное значение этой суммы?

– А здесь что на что умножается? – удивился Винни. – Вроде бы в условии никакого умножения нет.

– Но тут говорится про десятичную запись, – подсказал Кристофер Робин.

– В ней есть умножение! – понял Кролик. – Пусть цифры – это A, B, C, D, E, F, G, тогда мы складываем

$$\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}+\boxed{B}\boxed{C}\boxed{D}+\boxed{C}\boxed{D}\boxed{E}+\boxed{D}\boxed{E}\boxed{F}+\boxed{E}\boxed{F}\boxed{G}.$$

Каждое число можно расписать так:

$$\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}=100\cdot\boxed{A}+10\cdot\boxed{B}+1\cdot\boxed{C}$$

и всё сложить. Осталось посчитать коэффициенты:

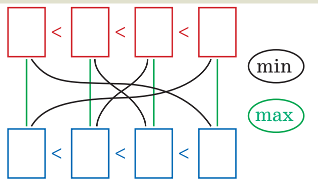
$$100\cdot\boxed{A}+110\cdot\boxed{B}+111\cdot\boxed{C}+111\cdot\boxed{D}+111\cdot\boxed{E}+$$
$$+11\cdot\boxed{F}+1\cdot\boxed{G}.$$

– Понятно, теперь надо к бóльшим числам ставить бóльшие цифры, тогда и сумма будет наибольшей, – сообразил Винни-Пух. – Осталось подсчитать:

$$100\cdot\boxed{3}+110\cdot\boxed{4}+111\cdot\boxed{7}+111\cdot\boxed{6}+111\cdot\boxed{5}+$$
$$+11\cdot\boxed{2}+1\cdot\boxed{1}.$$

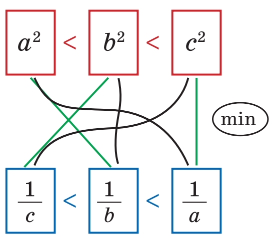
– Верно, – похвалил друзей Кристофер Робин. – Давайте сформулируем наше утверждение в общем виде, «с буквами». Называется оно *транснеравенство*.

Пусть есть набор из n чисел на красных карточках и набор из n чисел на синих. Карточки разбиваются на пары синяя-красная, в каждой паре числа перемножаются, и все эти n произведений складываются. Тогда чтобы сумма была наибольшей, нужно, чтобы красные и синие числа были одинаково упорядочены: если красные идут по возрастанию, то и синие должны идти также по возрастанию. А чтобы сумма была наименьшей, они должны быть упорядочены противоположным образом.



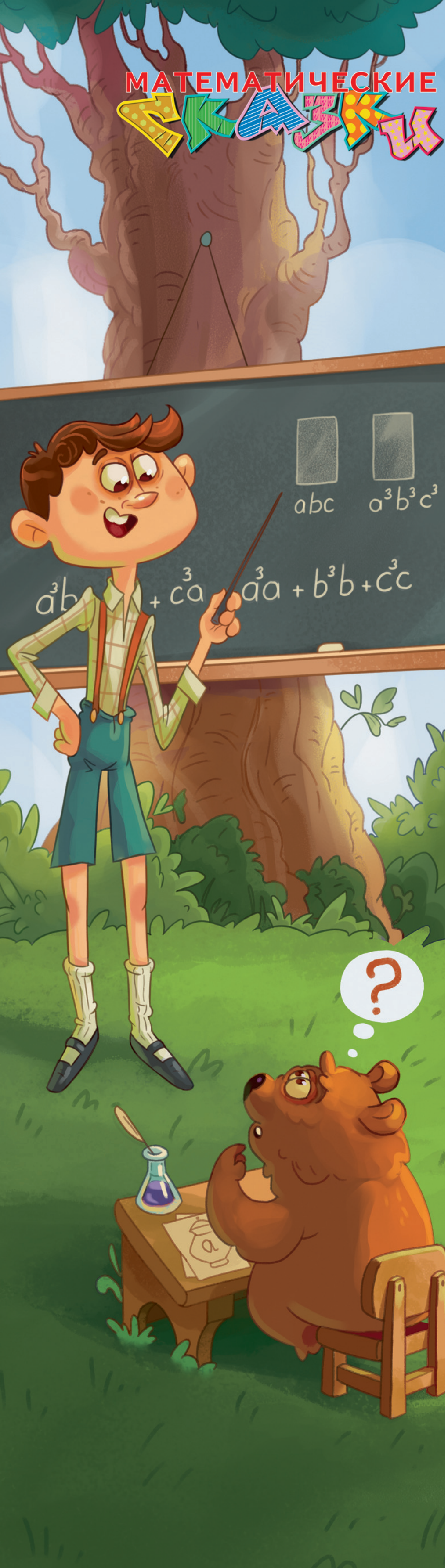
Пример для $n=4$. Чёрными линиями изображён способ, дающий наименьшую сумму произведений, а зелёными – наибольшую.

– Например, – продолжал Кристофер, – есть различные положительные числа a, b, c, причём $a<b<c$. Тогда $a^2<b^2<c^2$ и $\frac{1}{c}<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$. Поставим в пары числа так, чтобы наборы были упорядочены противоположным образом, перемножим числа в парах и сложим (чёрные линии на рисунке):



$$a^2\frac{1}{a}+b^2\frac{1}{b}+c^2\frac{1}{c}.$$

Мы знаем, что если наборы упорядочены противоположным образом, получается минимальная сумма



Художник Анна Горлач

произведений. Это выражение равно, конечно, $a+b+$ $+c$. Теперь поставим пары в каком-то другом порядке, перемножим и сложим (зелёные линии на рисунке):

$$a^2\frac{1}{b}+b^2\frac{1}{c}+c^2\frac{1}{a}.$$

А значит, мы доказали неравенство:

$$a^2\frac{1}{b}+b^2\frac{1}{c}+c^2\frac{1}{a}>a+b+c.$$

Подобным образом можно доказать много неравенств! Сложность лишь в том, что нам не дано, что написано на карточках, – до этого надо догадаться.

Задача 3. Пусть a, b, c – различные положительные числа. Докажите, что $a^3b+b^3c+c^3a<a^4+b^4+c^4$.

– Четвёртые степени, наверное, получились при перемножении первых и третьих, – сказал Кролик:

$$a^3b+b^3c+c^3a<a^3a+b^3b+c^3c.$$

То есть на красных карточках числа a, b, c, а на синих – a^3, b^3, c^3.

– А мы знаем, как упорядочены эти наборы? – заволновался Винни-Пух.

– Да! Если $a<b<c$, то $a^3<b^3<c^3$. Тогда правое выражение получили, перемножив одинаково упорядоченные наборы, поэтому сумма максимальна, а левое получили, перемножив наборы, упорядоченные по-разному, там сумма меньше. Если числа a, b, c упорядочены по-другому, ситуация аналогична.

– Я понял! Справа наборы упорядочены одинаково. А слева – нет. Поэтому сумма справа больше!

Упражнения для самостоятельного решения

Пусть n – некоторое натуральное число, большее 1. Устно выясните, что больше:

1) $999\cdot888+777\cdot666+555\cdot444$ или $777\cdot888+555\cdot666+999\cdot444$;

2) $7^n\cdot401+5^n\cdot301+9^n\cdot201$ или $7^n\cdot301+9^n\cdot401+5^n\cdot201$;

3) $19^n\cdot\frac{1}{11}+17^n\cdot\frac{1}{12}+15^n\cdot\frac{1}{13}$ или $17^n\cdot\frac{1}{11}+15^n\cdot\frac{1}{12}+19^n\cdot\frac{1}{13}$;

4) $\frac{n^2}{2^n}+\frac{n^3}{3^n}+\frac{n^4}{4^n}$ или $\frac{n^2}{3^n}+\frac{n^3}{4^n}+\frac{n^4}{2^n}$;

5) $\frac{12}{4^n}+\frac{13}{5^n}+\frac{14}{6^n}+\frac{15}{3^n}+\frac{16}{2^n}$ или $\frac{12}{2^n}+\frac{13}{3^n}+\frac{14}{4^n}+\frac{15}{5^n}+\frac{16}{6^n}$.

Более сложные задачи на применение транснеравенства можно найти, например, в статье Л. Пинтера и Й. Хегедыша «Упорядоченные наборы чисел и неравенства», «Квант» № 12 за 1985 год (см. сайт kvant.ras.ru).

Владимир Красноухов

НОВОГОДНЯЯ ГОЛОВОЛОМКА – 2024

Как же быстро летит время... И вот опять пора готовить новогодние подарки! А вы про ёлочку не забыли?

Из фанеры, пластика или плотного картона вырежем по приведённой схеме 5 деталей (рис. 1).

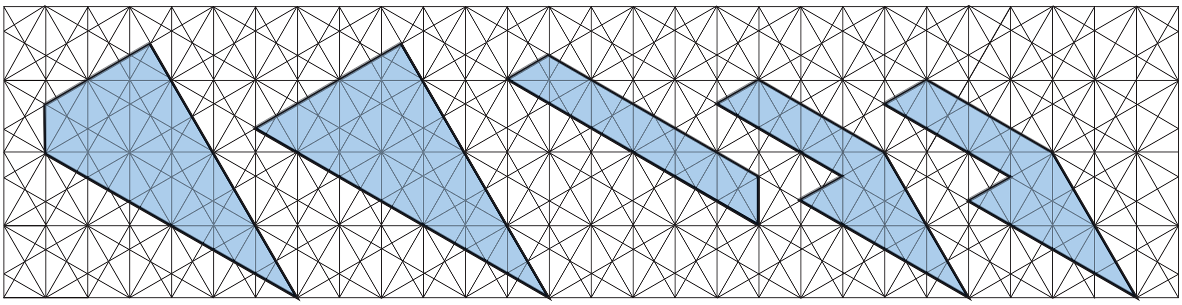


Рис. 1

Используя их, можно собрать целый ряд фигур, напоминающих предметы быта (чайник, утюг и другие вещи). Некоторые образцы приведены на рисунке 2.

Ваша задача – составить из этих деталей «более новогоднюю» фигуру. Как принято в такого рода задачах, детали можно как угодно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.

Желаем успеха!

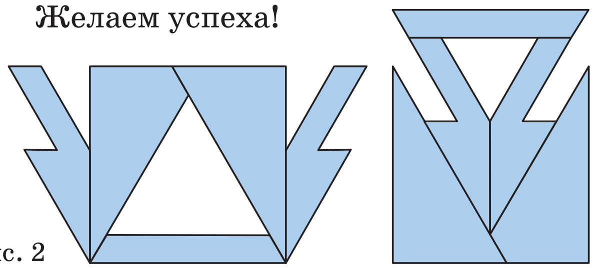


Рис. 2

Художник Алексей Вайнер

Ответ в следующем номере

КАК ЭТО УСТРОЕНО

Игорь Акулич

СКОЛЬКО БУДЕТ СОВПАДЕНИЙ?

– Марь-Иванна[1], а можно вас спросить?

– Что поделать, спрашивай.

– Мне тут попалась старая фантастическая книга...

– Какого автора?

– Э... забыл, как фамилия... Похоже на «Брэд»... Брэд Питт, что ли?

– Может, Брэдбери?

– Точно, Брэдбери! Так у него там в заглавии температура указана в каких-то градусах *по Фаренгейту*! Это сколько по-нормальному-то будет?

– Что значит «по-нормальному»?

– Ну, в *наших* градусах, которыми все нормальные люди пользуются.

– Не будем делить людей на нормальных и ненормальных по термометрам, которыми они пользуются. Да, сейчас в большинстве стран в быту применяется шкала *Цельсия* – по фамилии шведского учёного, предложившего её в середине XVIII в. Он взял две «опорные точки» – температуры плавления льда и кипения воды при так называемом нормальном давлении – и «расстояние» между ними поделил на 100 равных частей. Каждая часть и есть привычный нам *градус Цельсия* (обозначается так: °C). Кстати, поначалу Цельсий принял за 0 температуру кипения, а температуру плавления – за 100. Пришлось потом переворачивать. А вот немецкий учёный Фаренгейт предложил свою шкалу несколько раньше, и, по-видимому, ставил другую цель – сделать её максимально «бытовой».

– Это как?

– Чтобы в пределах от 0 до 100 градусов лежали температуры, которые нам чаще всего встречаются в жизни, и чтобы отрицательными приходилось пользоваться пореже. Потому он принял за 0 температуру плавления смеси снега и нашатыря (хлорида аммония). Это примерно −18 °C – приличный мороз, холоднее бывает нечасто! А нормальная температура человеческого тела соответствует 98 градусам по Фаренгейту.

[1] Это, разумеется, учительница. У кого же ещё может быть такое имя-отчество?

– Ну и число! Почему именно столько?

– Есть разные версии. Возможно, он просто ошибся при измерениях, а потом решил уже ничего не менять. Поначалу вроде бы планировалось, чтобы нормальная температура тела соответствовала 100 градусам, но... что вышло, то вышло[2]. Во всяком случае, шкала Фаренгейта оказалась довольно живучей и по сей день используется в некоторых странах – скажем, в США. Градус Фаренгейта обозначается так: °F. Соотношение же между двумя шкалами таково: 0 и 100 °C – это соответственно 32 и 212 °F. Зная эти значения, легко переведёшь любую температуру из одной шкалы в другую. Составишь соответствующую формулу?

– Ну-ка, попробую! Диапазон от плавления до кипения по Цельсию – 100 градусов, а по Фаренгейту получается $212-32=180$ градусов. Значит, один градус Цельсия – это $\frac{180}{100}=1{,}8$ градуса Фаренгейта. Ну, и ещё сдвиг на 32 градуса. Выходит, если температуры по Цельсию и Фаренгейту обозначить через T_{C} и T_{F}, то они связаны между собой так:

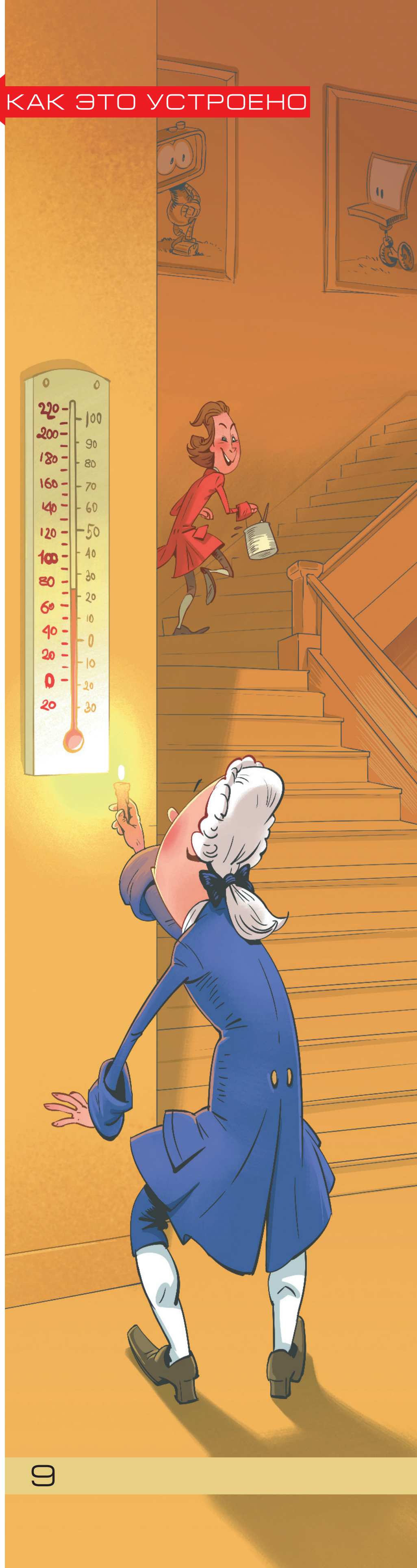
$$T_{\mathrm{F}}=32+1{,}8T_{\mathrm{C}}.$$

– Верно! Между прочим, в своё время было предложено немало иных температурных шкал. Например, несколько раньше свою температурную шкалу разработал великий Исаак Ньютон. За ноль он принял опять-таки температуру плавления льда, а нормальную температуру человеческого тела (подобно Фаренгейту) приравнял к 12 градусам. Почему именно к двенадцати? Видимо, потому что это – *дюжина*, вовсю тогда применявшаяся при счёте. Например, в шиллинге было 12 пенсов. Опять же, имеет много удобных делителей: 2, 3, 4... Градус Ньютона, естественно, обозначают так: °N. И температура кипения воды равна 33 °N. Напиши-ка по-быстрому формулу связи между температурами Ньютона и Цельсия.

– Легко! Тут $\frac{33}{100}=0{,}33$ и $T_{\mathrm{N}}=0{,}33T_{C}$. Сдвига-то нет!

– Хорошо. Были и другие забытые ныне шкалы: Реомюра, Рёмера, Делиля и так далее. Но гораздо актуальней ещё две применяемые по сей день шкалы:

[2] Поэтому нынешние 100 градусов по Фаренгейту – это примерно 37,8 градусов по Цельсию. Изрядная простуда!



Кельвина и Ранкина (иногда говорят «Ренкина»). Это уже знакомые тебе шкалы Цельсия и Фаренгейта, но начало их сдвинуто к *абсолютному нулю*. Кстати, в отличие от других шкал, понятие «градус Кельвина» (и сам значок градуса) не применяют – вместо него говорят просто «Кельвин», а в формулах используют лишь букву «К». Например, температура кипения воды есть 100 °С или 373 К. Ну, а градус Ранкина обозначается °Ra – двумя буквами.

– Что за абсолютный нуль такой?

– Поясню. Температура отображает тепловое движение молекул. Чем быстрее молекулы движутся относительно соседних молекул (а в твёрдых веществах – чем сильнее колеблются вблизи положения равновесия), тем выше температура. Как следствие – теоретически возможна такая температура, при которой *всякое* тепловое движение отсутствует. Она и называется абсолютным нулём. Ниже её спуститься просто невозможно (да и её-то саму достичь практически нереально). Поэтому температуры по Кельвину и Ранкину никогда не могут принимать отрицательных значений. Исследования показали, что абсолютный нуль соответствует –273,15 °С, поэтому связь между шкалами Кельвина и Цельсия можно записать так:

$$T_{\text{К}} = 273{,}15 + T_{\text{C}}.$$

А связь шкал Ранкина и Цельсия запишешь?

– Попробую. Если температура абсолютного нуля по Цельсию равна –273,15 °С, то по Фаренгейту это $32 + 1{,}8 \cdot (-273{,}15) = -459{,}67$ °F. Значит, шкала Ранкина есть шкала Фаренгейта, сдвинутая на 459,67:

$$T_{\text{Ra}} = 459{,}67 + T_{\text{F}} = 459{,}67 + 32 + 1{,}8 T_{\text{C}} = 491{,}67 + 1{,}8\, T_{\text{C}}.$$

– Вот, пожалуй, и всё. Надеюсь, я ответила на твой вопрос? Впрочем, не до конца. Ты ведь имел в виду роман Брэдбери «451 градус по Фаренгейту»? И спрашивал, сколько это будет *по-нормальному*, то есть по Цельсию. Сам найдёшь теперь ответ?

– Конечно! Если в формулу, связывающую T_{F} и T_{C}, подставить $T_{\text{F}} = 451$, получим $451 = 32 + 1{,}8\, T_{\text{C}}$, откуда $T_{\text{C}} = 232{,}8$ °С.

– Правильно. Как отмечает сам Брэдбери, это температура воспламенения бумаги, хотя разные справочники приводят разные значения. Но позволь и мне задать тебе вопрос. Мы более-менее подробно рассмотрели пять температурных шкал: Цельсия, Фаренгейта, Ньютона, Кельвина и Ранкина. А бывает ли такая температура, что в каких-то двух различных шкалах она принимает одно и то же числовое значение? И если да, то сколько всего таких «точек совпадения»?

– А что тут считать? Всего шкал пять. Первую можно выбрать пятью способами. Вторую – одну из оставшихся – четырьмя. Всего получается $5 \cdot 4 = 20$ пар. Но... здесь, по-моему, надо ещё поделить на 2.

– Почему?

– Ну, если мы выбрали шкалу Цельсия, а к ней в пару шкалу Фаренгейта, а потом в пару к шкале Фаренгейта шкалу Цельсия – это та же пара! И для других пар то же самое. Поэтому всего получается не 20, а 10 пар. Каждой паре – своя «точка совпадения».

– Думаю, всё-таки меньше.

– Это почему?

– Рассмотри, скажем, пару «Цельсий – Кельвин». Температура по Кельвину *всегда* выше температуры по Цельсию на 273,15. Потому совпадение температур здесь невозможно.

– Верно... Но ведь то же самое будет и для пары «Фаренгейт – Ранкин»! Так что остаётся восемь пар.

– Ещё меньше.

– Но почему? А, понял: наверно, есть точка, в которой совпадают сразу *три* шкалы! Да?

– Нет, дело в другом. Подумай, в чём именно. Кстати, два совпадения из твоих предполагаемых восьми ты назовёшь «с ходу», ничего не вычисляя.

– Э... это как?

– Рассмотри шкалы Цельсия и Ньютона.

– А, у них ноль совпадает! В смысле, за ноль принята одна и та же точка – температура плавления льда.

– Вот именно. А для пары «Кельвин – Ранкин» совпадение имеет место в абсолютном нуле. Насчёт остальных пар – поразмыслить надо...

Дорогие читатели! Поразмыслите и вы: наберётся ли 8 точек попарного совпадения или их вправду меньше, как утверждает Марь-Иванна?

Ответ в следующем номере

Художник Мария Усеинова

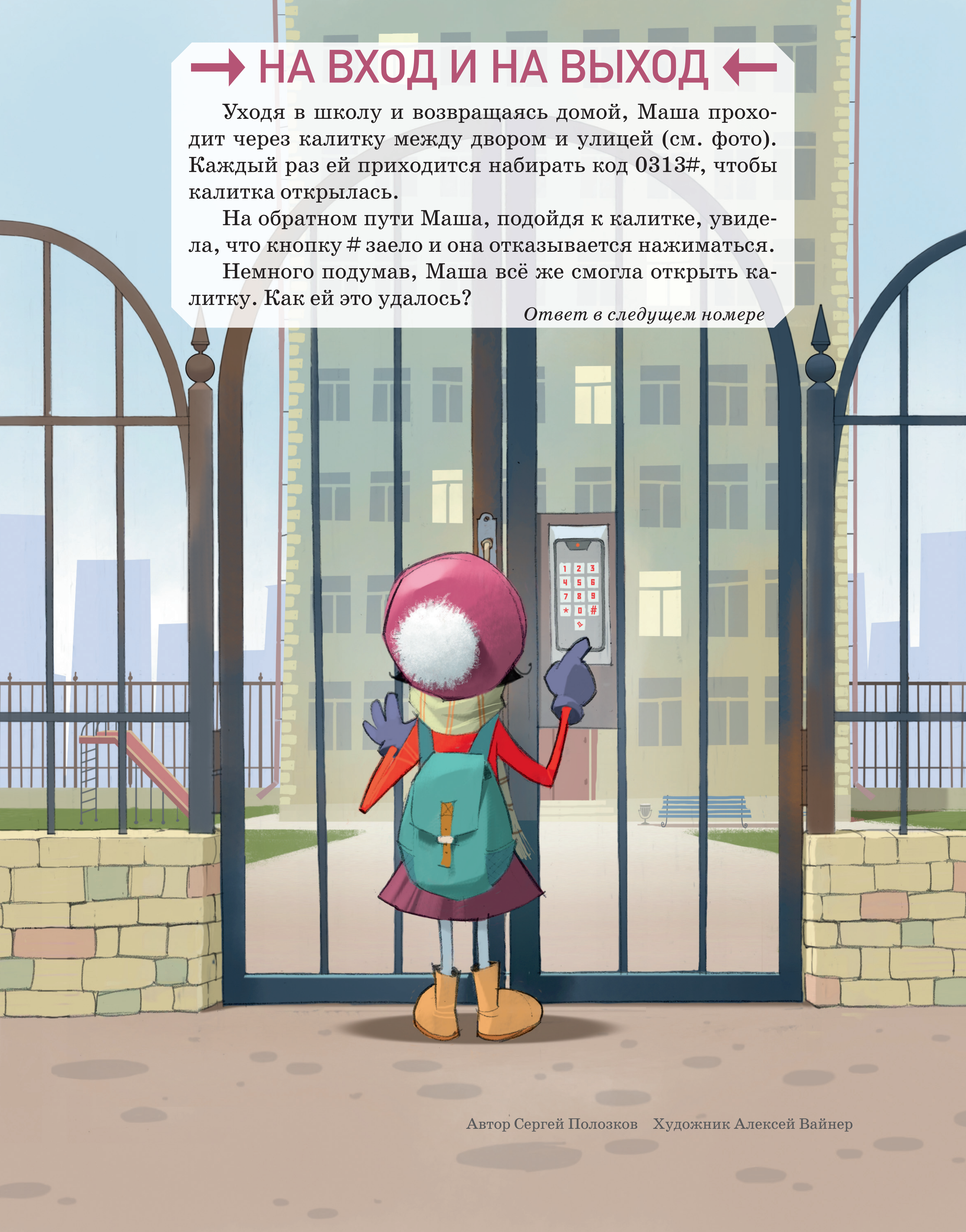
НА ВХОД И НА ВЫХОД

Уходя в школу и возвращаясь домой, Маша проходит через калитку между двором и улицей (см. фото). Каждый раз ей приходится набирать код 0313#, чтобы калитка открылась.

На обратном пути Маша, подойдя к калитке, увидела, что кнопку # заело и она отказывается нажиматься.

Немного подумав, Маша всё же смогла открыть калитку. Как ей это удалось?

Ответ в следущем номере



Автор Сергей Полозков Художник Алексей Вайнер

ОЦЕНИМ КОЛИЧЕСТВО УЗЛОВ И НЕ ТОЛЬКО

Александр Блинков

Мы решим несколько задач про размещение фигур на клетчатой доске.

Задача 1. Какое наибольшее количество прямоугольников 1×3 клетки можно закрасить на доске 9×9 клеток так, чтобы никакие два прямоугольника не имели общих точек?

Попробуем закрасить как можно больше прямоугольников, располагая их потеснее. Легко закрасить 12 (рис. 1). А почему нельзя больше? Вроде понятно: «зазоров» мы не оставляли, а ещё закрасить можно лишь одну клетку, не противореча условию. Но сомнения всё же остаются: вдруг, расположив прямоугольники по-другому, мы сумеем втиснуть ещё один?

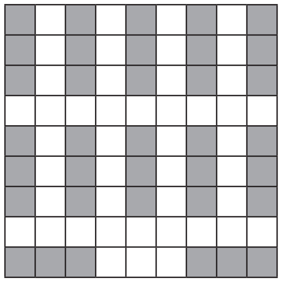


Рис. 1

Существует эффективный способ строго доказать, что больше 12 прямоугольников закрасить не получится. Любую вершину клетки назовём *узлом*. Доска 9×9 содержит $10 \times 10 = 100$ узлов (включая узлы на границе). Так как прямоугольники не имеют общих точек, каждый узел используется не более одного раза. Каждый прямоугольник 1×3 содержит 8 узлов. Чтобы закрасить 13 прямоугольников, потребуется $13 \cdot 8 = 104$ узла, а их на доске только 100. **Ответ:** 12.

Следующая задача родилась во время игры в «морской бой».

Напомним, что перед началом игры на доске 10×10 клеток расставляют один корабль из четырёх клеток, два – из трёх клеток, три – из двух и четыре одноклеточных (рис. 2). По правилам, корабли не должны касаться друг друга, даже углами.

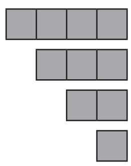


Рис. 2

Задача 2. До какого наименьшего размера можно уменьшить поле для игры в «морской бой», оставив его квадратным и сохранив правило расстановки кораблей?

Решение. Прежде чем строить пример, хорошо бы понять ответ. Для этого имеет смысл как-то оце-

нить возможные размеры поля. Подсчитаем количество узлов, которые в сумме должны занять все корабли: $10 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 60$. Какое же поле взять? Квадрат 6×6 ещё не подойдёт – в нём $7 \cdot 7 = 49$ узлов, не хватает.

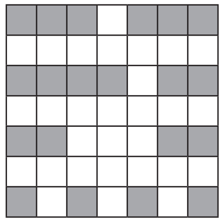


Рис. 3

А квадрат 7×7 уже мог бы подойти – в нём $8 \cdot 8 = 64$ узла. И действительно, пример расстановки приведён на рисунке 3. **Ответ:** до квадрата 7×7.

В этой задаче есть и другой способ оценки. Чтобы доказать, что квадрат 6×6 не подходит, разобьём его на 9 квадратов 2×2 (рис. 4). В каждом таком квадрате может находиться (даже частично) не более одного корабля, но всего кораблей 10. Значит, расставить их не удастся (даже если они все будут одноклеточными!).

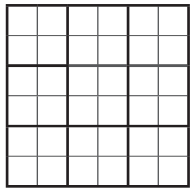


Рис. 4

Кстати, в квадрате 7×7 можно расставить и расширенный комплект с ещё одним одноклеточным кораблём.

Оценка количества узлов применима не только для стандартной клетчатой доски.

Задача 3. Треугольная доска разбита на маленькие равносторонние треугольники со стороной 1 (рис. 5). Можно ли на неё положить по линиям сетки один ромб со стороной 1 и 11 треугольников со стороной 1 так, чтобы они не соприкасались даже углами?

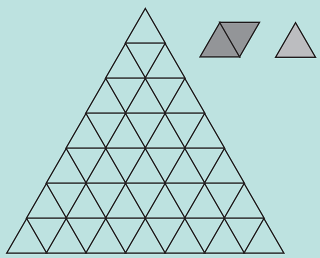


Рис. 5

Решение. На такой доске $1 + 2 + \ldots + 7 + 8 = 36$ узлов сетки. Указанные фигуры занимают $4 + 11 \cdot 3 = 37$ узлов и общих узлов у фигур быть не может, значит, разместить эти фигуры не удастся. **Ответ:** нельзя.

Метод подсчёта узлов не универсален: при решении очень похожей задачи он может не сработать.

Задача 4. Какое наибольшее количество прямоугольников размером 1×3 клетки можно закрасить на доске 10×10 клеток так, чтобы никакие два прямоугольника не имели общих точек?

По сравнению с задачей 1 увеличены размеры доски. Легко закрасить 12 прямоугольников – например, так же, как на рисунке 1, оставив свободными две добавившиеся полосы шириной в одну клетку. А хотя бы 13 никак не получается. Подсчёт узлов этого не объясняет – ведь теперь на доске $11 \cdot 11 = 121$ узел, а каждый прямоугольник содержит по-прежнему 8 узлов, и $121 : 8 > 15$.

Попробуем тогда оценить количество прямоугольников аналогично второму способу решения задачи 2. Любой прямоугольник 1×3 занимает какие-то клетки в двух соседних квадратах 2×2. Так как закрашенные прямоугольники не касаются, в этих двух квадратах нет клеток других прямоугольников 1×3. Доска 10×10 разбивается на 25 квадратов 2×2 (рис. 6). Так как $25 : 2 = 12{,}5 < 13$, то больше чем 12 прямоугольников 1×3 расположить на этой доске невозможно.

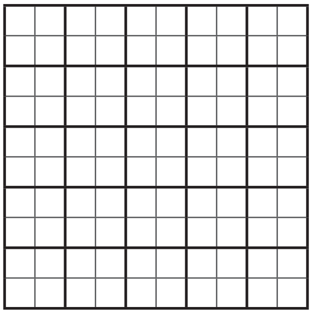


Рис. 6

Ответ: 12.

О многих методах оценки в «клетчатых» задачах можно прочитать в книжке И. Я. Сиротовского «Клетки и таблицы» (серия «Школьные математические кружки»), недавно вышедшей в издательстве МЦНМО.

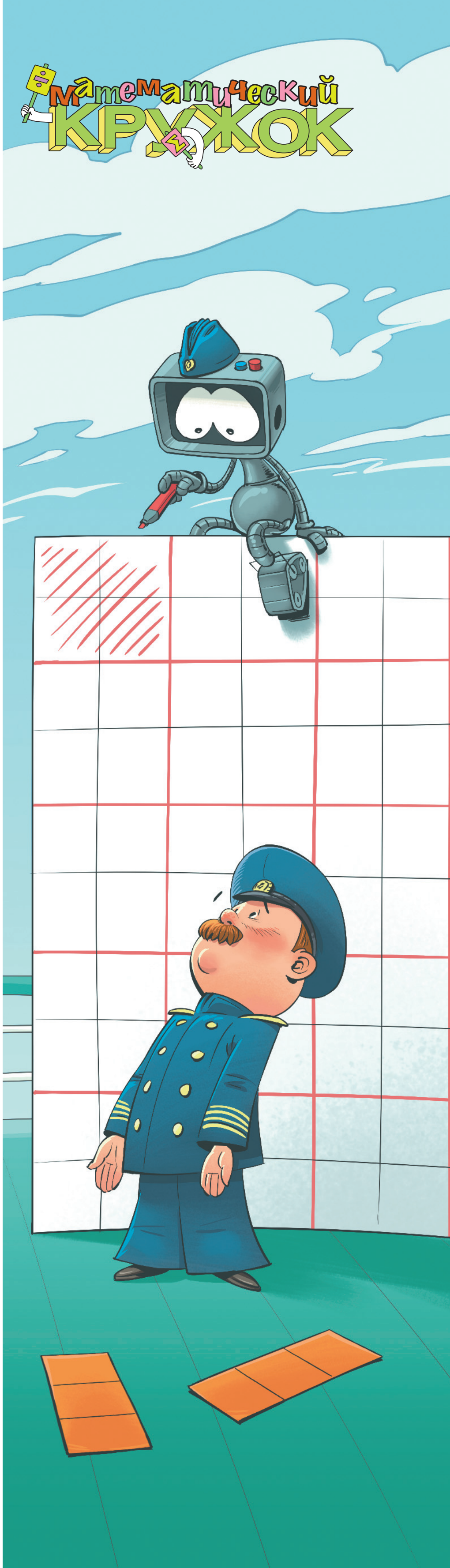
Задачи для самостоятельного решения

Задача 5. Какое наибольшее количество прямоугольников 1×4 можно закрасить на доске 10×10 так, чтобы никакие два прямоугольника не имели общих точек?

Задача 6. На треугольной доске, разбитой на одинаковые равносторонние треугольники со стороной 1, по линиям сетки расположили 7 таких же треугольников и 4 ромба со стороной 1 (рис. 5) так, чтобы они не соприкасались даже углами. Из какого наименьшего количества треугольников могла состоять доска?

Задача 7. Какое наибольшее количество королей можно поставить на клетки шахматной доски 8×8 так, чтобы они не били друг друга? (Король бьёт любую соседнюю клетку по стороне или углу.)

Решения в следующем номере



Художник Мария Усеинова

ГОДФРИ НЬЮБОЛД ХАУНСФИЛД

Марина Молчанова

Годфри Ньюболд Хаунсфилд (1919–2004)

Автор одного из самых замечательных изобретений в современной медицине был не медиком и даже, строго говоря, не учёным. Годфри Хаунсфилд был инженером. Но очень любознательным инженером.

* * *

Будущий лауреат Нобелевской премии родился в английской деревне Саттон-он-Трент, был пятым ребёнком у местного фермера и в школе учился неважно. Сам Годфри считал, впрочем, что дело не в нём, а в школе – там неинтересно. С физикой и математикой дела обстояли лучше, чем с остальными уроками, но даже в этих предметах он не особо блистал и позже говорил: «Нужно использовать абсолютный минимум математики, но иметь много, очень много интуиции».

А единственное, что ему действительно было интересно, – так это разбираться, как работают механические и электрические машины. Ещё в пять лет он сумел пересобрать остановившиеся старые часы так, что те снова пошли. А позже, как потом писал Хаунсфилд в автобиографии, он собирал электрические машинки для звукозаписи, прыгал со стогов на самодельном планёре и чудом сам не взлетел на воздух, запуская вверх бочки из-под дёгтя на ацетиленовом двигателе.

Электротехнический колледж Фарадея

Затем была служба в военно-воздушных силах, где Хаунсфилд имел дело с электроникой и радарами, и обучение в электротехническом колледже Фарадея в Лондоне. И, наконец, в 1949 году он поступил на работу в компанию EMI (Electric and Musical Industries).

Реклама компании EMI, 1951 год

Когда-то название EMI было знакомо всем любителям музыки. Здесь производились записи всемирно известных исполнителей – и самыми знаменитыми клиентами EMI были The Beatles. Есть даже красивая легенда, но всё-таки именно легенда, что (забегая вперёд) прославленная работа Хаунсфилда финансировалась именно на деньги, которые EMI получила от записей «битлов».

Как бы то ни было, звукозаписью работа EMI не ограничивалась. Здесь велись серьёзные военно-технические разработки и исследования в области электроники. Так, в 1958 году именно здесь был произведён транзисторный компьютер EMIDEC 1100 – и именно под руководством Хаунсфилда. Но звёздный час нашего героя был впереди.

* * *

Одна из идей, волновавших Хаунсфилда в течение многих лет, – это вопрос, как можно увидеть невидимое. Как мы можем заглянуть в коробку, не открывая её? Как мы можем узнать, что находится, скажем, внутри египетских пирамид – вдруг мы сможем «поймать» космические лучи, проходящие через них, и узнать, нет ли внутри пирамид неизвестных пустот? А самая интересная «коробка», внутрь которой надо бы заглянуть, – это человеческое тело.

Да, конечно, первым шагом ещё в конце XIX века стало открытие рентгеновских лучей. Но один рентгеновский снимок или даже два снимка (прямой и боковой) содержат недостаточно информации. Внутри человека много органов и тканей, они по-разному пропускают лучи, имеют разные формы и размеры, загораживают друг друга. Вот если бы у нас было много-много снимков, сделанных под разными углами... то что тогда?

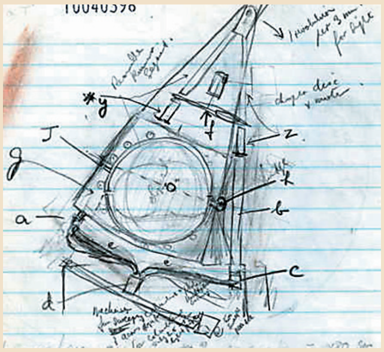
И однажды, когда Хаунсфилд гулял по окрестностям (он очень любил пешие и лыжные прогулки), ему пришла в голову мысль заняться именно этим: получением трёхмерных изображений внутренних структур человеческого тела.

Кое-какая база для этой работы уже существовала. Теоретические основы были заложены ещё в 1917 году австрийским математиком Иоганном Радоном: из его результатов следовало, что «много-много» (бесконечное число) снимков, сделанных под разными углами, действительно позволяют реконструировать трёхмерный объект. Более того, физик Аллан Маклауд Кормак в 1963–1964 годах факти-

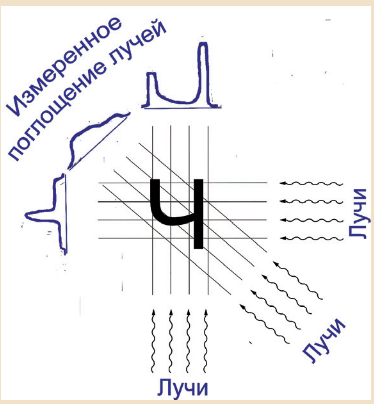
Редкий кадр... четвёрка The Beatles идёт финансировать работу Хаунсфилда

Иоганн Радон (1887–1956)

Аллан Кормак (1924 – 1998)



Набросок будущего томографа, выполненный Хаунсфилдом



Проекции и поглощение

чески придумал, как именно это можно сделать. Но статьи Кормака сразу после публикации не вызвали большого интереса – материя сложная, алгоритм сыроват, а от теории до практики путь долгий.

Однако в конце 60-х годов очень похожие идеи стал разрабатывать Хаунсфилд – и не только разрабатывать, но и реализовывать.

* * *

Почему вообще рентгеновские лучи позволяют нам получать информацию о происходящем внутри нас? Потому что они частично поглощаются в теле, а частично проходят через него, при этом разные ткани организма поглощают их по-разному. Какие-то ткани плотнее (скажем, кости), и они задерживают бóльшую часть излучения. Какие-то менее плотные, но всё-таки плотнее воды. Какие-то практически как вода. Какие-то пропускают бóльшую часть излучения – например, жир. Какие-то пропускают рентгеновские лучи почти полностью, а поглощают очень мало – например, лёгкие, заполненные воздухом. Кроме того, чем толще слой вещества, тем (естественно) бóльшую часть лучей этот слой поглощает.

Значит, изучая поглощение рентгеновских лучей в разных местах и под разными углами (а ведь это фактически набор чисел), мы получаем информацию о том, через что прошли эти лучи, а значит, узнаём, что находится внутри тела. Надо только обработать числа – а для этого есть компьютер.

Посмотрите, например, на картинку «Проекции и поглощение» – иллюстрацию того, как три пучка лучей под разными углами проходят через плотный объект в форме буквы «Ч» (первой буквы заголовка этой статьи). Чем толще слой, через который они проходят, тем сильнее лучи поглощаются. И для каждого угла получаем свою картину поглощения. Если их будет достаточно много, мы сможем при помощи компьютерных алгоритмов восстановить не только букву «Ч», но и куда более сложные объекты!

Кроме того, одна из главных идей Хаунсфилда состоит в послойном получении изображения. Представим себе, что всё тело человека, с головы до пят, разделено на тонкие слои. В каждый момент времени делается рентгеновский снимок только одного тонкого слоя, причём лучи направляются на него сбоку под разными углами.

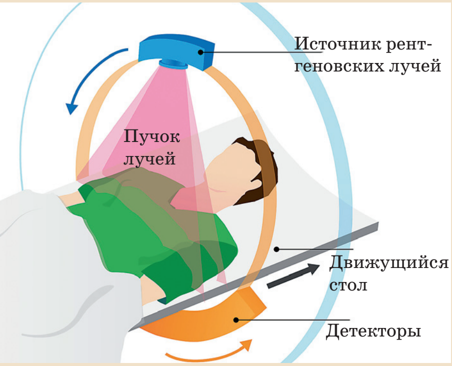
Посмотрите на рисунок «Как получают послойное изображение»: там выделен слой в области груди пациента – только, конечно, фактически слои при томографии гораздо тоньше, чем на этой картинке. С одной стороны от тела – источник рентгеновских лучей, с другой – приёмники (детекторы), которые как раз и измеряют, какая часть излучения прошла, а какая поглотилась. Человек лежит на столе, а вокруг него крутится вся эта система: источник излучения и детекторы. Повернулась система на небольшой угол – детекторы получили сигнал, как лучи прошли через слой, подставленный им, и сколько где поглотилось. Снова повернулась система – снова принимается сигнал. Система перебрала все нужные углы – работа с нынешним слоем закончилась, стол с человеком продвигается на небольшое расстояние, и рентгеновскому пучку «подставляется» следующий тонкий слой*.

Эта идея стала основой рентгеновской компьютерной томографии, которую мы сейчас зовём просто КТ. Собственно, «томография» именно и означает послойное получение изображения.

Хаунсфилд начал работать над этой темой в 1967 году. Причём занимался сразу всем: и компьютерными алгоритмами, и разработкой механизмов, и совершенствованием рентгеновской трубки, и образцами для испытаний. Уже в 1968–1969 годах были построены первые прототипы будущего томографа; их опробовали на муляжах, на препаратах из

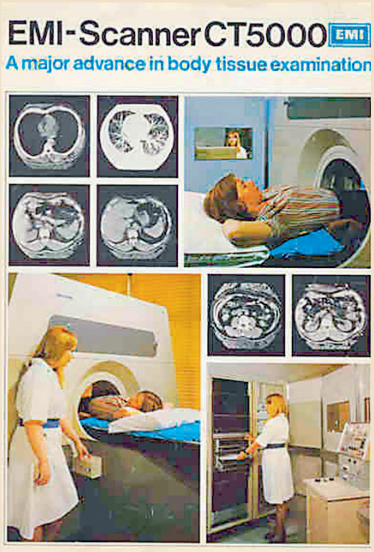
Вильгельм Конрад Рентген (1845–1923)

Рентгеновский снимок, 1896 год

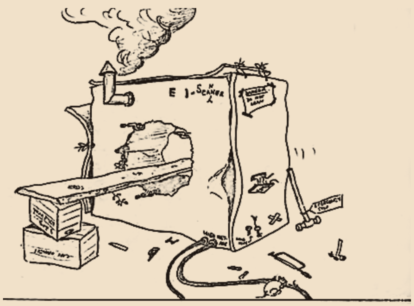


Как получают послойное изображение

* На заре развития компьютерной томографии именно так и было: оборот «рабочей части» томографа, потом передвижение стола с пациентом на небольшое расстояние, снова оборот, снова передвижение... Это, конечно, долго и не слишком удобно, и сейчас оба движения происходят одновременно и непрерывно — в результате получается, что источник излучения движется относительно человека по спирали.



Первые компьютерные томографы были установлены в больницах в 1975 году



Карикатура 1977 года «Удивительно, что можно сделать при помощи ножовки и микрометра»

Саттон-он-Трент, поле. Фото H.A.W.C 101, wikimedia.org

анатомического музея и – чуть позже – на самом Хаунсфилде и его коллегах.

Но вопрос о том, может ли это изобретение быть полезным для медиков, оставался открытым: скептиков было немало. Так что самое главное произошло 1 октября 1971 года, когда было показано, что новый метод действительно позволяет отличить норму от болезни. Ведь и при воспалениях, и при кровоизлияниях, и при опухолях плотность тканей меняется – а значит, это должно быть «видно» на КТ! И действительно, у пациентки лондонской больницы новый метод позволил обнаружить внутричерепную кисту – и это было буквально чудом.

Хаунсфилд продолжал совершенствовать томограф – так, в 1975 году был впервые сконструирован прибор, на котором за разумное время можно было провести исследование всего тела. Опять-таки, одним из первых «клиентов» нового томографа оказался сам Хаунсфилд – и говорил, что он даже опознал в содержимом своего желудка недавно съеденные чипсы и выпитое пиво. Фразу про пиво оставим на совести рассказчика, а вот что известно – когда Хаунсфилд на конференции в марте 1975 года показал аудитории изображения брюшной полости, полученные с помощью томографа, зрители восхищённо ахнули, после чего встали и устроили ему овацию.

Потом, конечно, была слава, была закупка томографов всё новыми и новыми больницами, было членство в Королевском обществе, был рыцарский титул, была Нобелевская премия. Её Годфри Хаунсфилд разделил с Алланом Кормаком, первым разработчиком математического аппарата для нового метода – и это, конечно, справедливо.

* * *

Несколько замечаний. Прежде всего надо сказать, что получилась некоторая путаница в терминах. Метод, о котором мы здесь говорим, получил название «компьютерной томографии», сокращенно КТ (слово «рентгеновская» часто опускают). Однако с тех пор

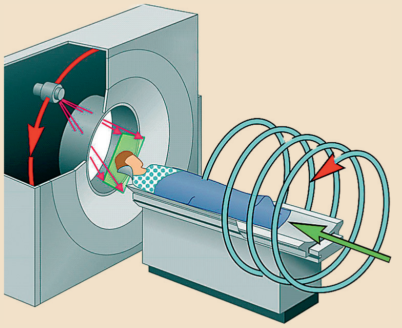
«Каждое новое открытие приносит с собой семена других, будущих изобретений. Есть много открытий буквально за углом, и они ждут, чтобы кто-нибудь их совершил. Может быть, это будете вы?»

Годфри Хаунсфилд

были разработаны и другие виды томографии, где уже не используются рентгеновские лучи. Так, в магнитно-резонансной томографии (МРТ) для получения изображений используются магнитные поля и радиоволны, в позитронно-эмиссионной томографии (ПЭТ) – излучение от радиоактивного вещества, введённого прямо в организм. При этом, конечно, любая томография является компьютерной, ведь без компьютера эти сложные расчёты не произведёшь. Но исторически сложилось так, что когда говорят о компьютерной томографии, имеется в виду именно самый первый метод – с рентгеновскими лучами.

Ещё упомянем, что имя Хаунсфилда постоянно встречается в медицинских документах – хотя даже среди врачей не все об этом знают. Дело в том, что для характеристики того, как разные ткани поглощают рентгеновские лучи, используется шкала Хаунсфилда. И практически в любом описании КТ можно встретить сокращения «ед. Х.» (по-русски) или «HU» (по-английски) – то есть единицы Хаунсфилда.

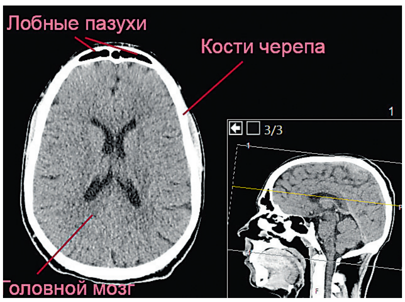
Сейчас компьютерный томограф есть чуть ли не в каждой крупной больнице, и ежегодно миллионы людей проходят обследования методом КТ. Современные томографы работают всё быстрее, изображения получаются всё чётче, а доза радиации, которую получает человек в томографе, – всё меньше. Но принципиально это тот же аппарат, который когда-то разработал любознательный инженер Хаунсфилд.



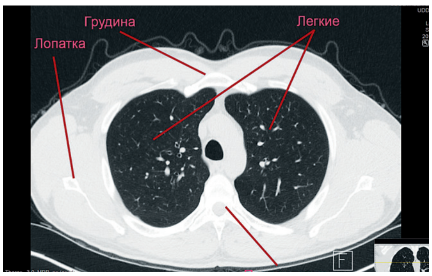
Спиральная компьютерная томография

Современный компьютерный томограф. Фото Tomáš Vendiš, wikimedia.org

А вот что внутри современного томографа



Одно из изображений при КТ головного мозга



Одно из изображений при КТ лёгких («сечение» перпендикулярно позвоночнику)

Иней и тень

Перед вами фотография, сделанная около полудня в солнечный морозный день в средних широтах.

1. Почему иней повторяет форму тени, но их границы немного не совпадают?

2. В северном или южном полушарии сделана фотография?

Автор Татьяна Корчемкина

Ответ в следующем номере

Художник Мария Усеинова

XLV ТУРНИР ГОРОДОВ
ОСЕННИЙ ТУР, 8 – 9 КЛАССЫ

15 и 29 октября 2023 года состоялся осенний тур XLV Турнира Городов – международного математического соревнования для школьников. Приводим базовый и сложный варианты для 8 – 9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов (баллы за пункты одной задачи суммируются).

Базовый вариант

1 [4]. На асфальте нарисована полоса 1×10 для игры в «классики». Из центра первого квадрата надо сделать 9 прыжков по центрам квадратов (иногда вперёд, иногда назад) так, чтобы побывать в каждом квадрате по одному разу и закончить маршрут в последнем квадрате. Аня и Варя обе прошли полосу, и каждый очередной прыжок Ани был на то же расстояние, что и очередной прыжок Вари. Обязательно ли они пропрыгали квадраты в одном и том же порядке?

Алексей Толпыго

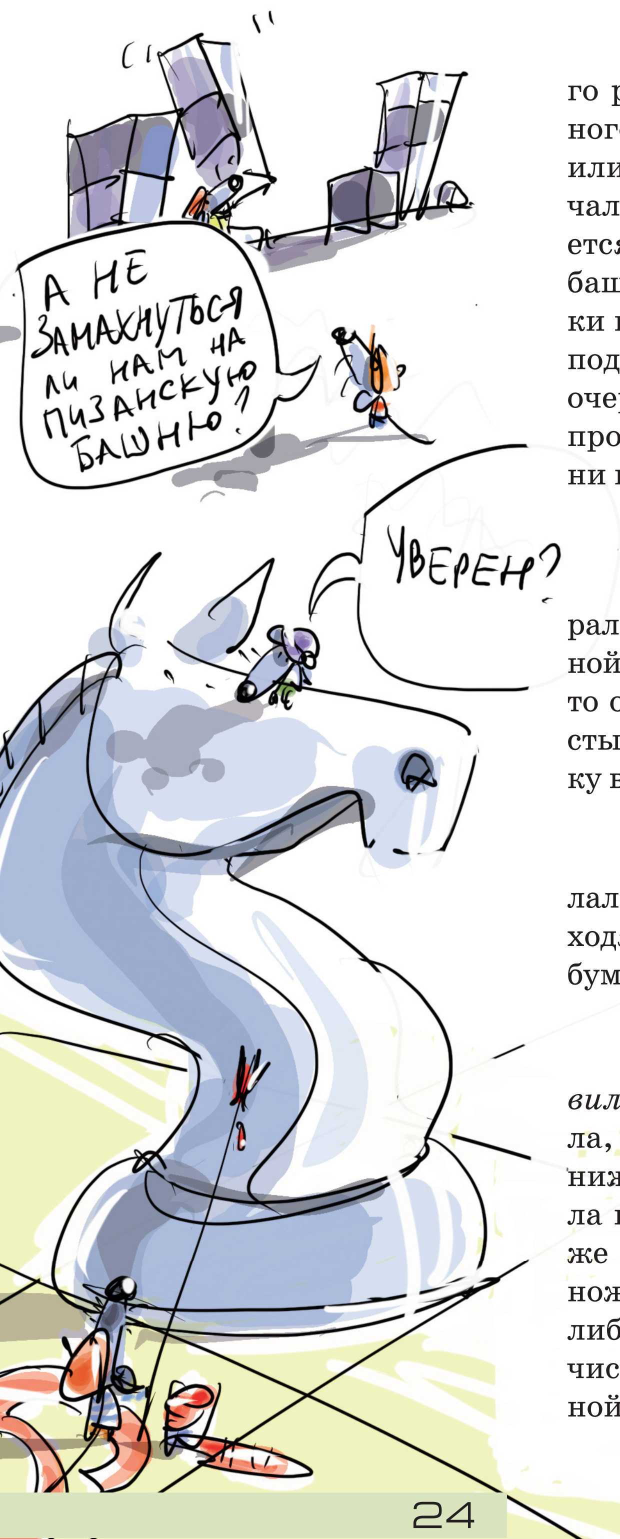
2 [4]. Четырёхугольник $ABCD$ выпуклый, его стороны AB и CD параллельны. Известно, что углы DAC и ABD равны, а также углы CAB и DBC равны. Обязательно ли $ABCD$ – квадрат?

Александр Тертерян

3 [5]. У восьми фермеров есть клетчатое поле 8×8, огороженное по периметру забором и сплошь заросшее ягодами (в каждой точке поля, кроме точек забора, растёт ягода). Фермеры поделили поле между собой по линиям сетки на 8 участков равной площади (каждый участок – многоугольник), но границы отмечать не стали. Каждый фермер следит только за ягодами внутри (не на границе) своего участка, а пропажу замечает, только если у него пропали хотя бы две ягоды. Всё это известно вороне, но где проходят границы между участками, она не знает. Может ли ворона утащить с поля 9 ягод так, чтобы пропажу гарантированно ни один фермер не заметил?

Татьяна Казицына

4 [5]. По кругу записано несколько положительных целых чисел (не менее двух). Среди любых двух сосед-



них чисел какое-то одно больше другого в 2 раза или в 5 раз. Может ли сумма всех этих чисел равняться 2023?

Сергей Дворянинов

5 [5]. Петя и Вася нашли 100 кубиков одинакового размера, 50 из них были белого цвета и 50 – чёрного. Они придумали игру. Назовём башенкой один или несколько кубиков, стоящих друг на друге. В начале игры все кубики лежат по одному, то есть имеется 100 башенок. За один ход игрок должен одну из башенок поставить на другую (переворачивать башенки нельзя), при этом в новой башенке не должно быть подряд двух одинаковых по цвету кубиков. Ходят по очереди, начинает Петя. Кто не может сделать ход – проиграл. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

Николай Чернятьев

Сложный вариант

1 [4]. В каждую клетку доски 8×8 вписано натуральное число так, что выполнено условие: если из одной клетки в другую можно перейти одним ходом коня, то отношение чисел в этих двух клетках является простым числом. Могло ли оказаться, что в какую-то клетку вписано число 5, а в какую-то другую – число 6?

Егор Бакаев

2. [6] В квадратном листе бумаги площади 1 проделали дыру в форме треугольника (вершины дыры не выходят на границу листа). Докажите, что из оставшейся бумаги можно вырезать треугольник площади $1/6$.

Александр Юран

3 [7]. Назовём двуклетчатую карточку 2×1 *правильной*, если в ней записаны два натуральных числа, причём число в верхней клетке меньше числа в нижней клетке. За ход разрешается изменить оба числа на карточке: либо прибавить к каждому одно и то же целое число (возможно, отрицательное), либо умножить каждое на одно и то же натуральное число, либо разделить каждое на одно и то же натуральное число; при этом карточка должна остаться правильной. За какое наименьшее количество таких ходов из любой правильной карточки можно получить любую другую правильную карточку?

Алексей Глебов

4 [7]. Дан треугольник ABC с углом A, равным $60°$. Его вписанная окружность касается стороны AB в точке D, а вневписанная окружность, касающаяся стороны AC, касается продолжения стороны AB в точке E. Докажите, что перпендикуляр к стороне AC, проходящий через точку D, вторично пересекает вписанную окружность в точке, равноудаленной от точек E и C. (Вневписанной называется окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон.)

Азамат Марданов

5 [9]. У Васи есть 13 одинаковых на вид гирь, но 12 из них весят одинаково, а одна фальшивая – весит больше остальных. Также у него есть двое чашечных весов – одни правильные, а другие показывают верный результат (какая чаша тяжелее), если массы на чашах различаются, а в случае равенства могут показать что угодно (какие именно весы правильные, Вася не знает). Перед каждым взвешиванием Вася может сам выбирать весы. Докажите, что Вася может гарантированно найти фальшивую гирю за 3 взвешивания.

Андрей Аржанцев

6 [10]. Пекарь испёк прямоугольный лаваш и разрезал его на n^2 прямоугольников, сделав $n-1$ горизонтальных разрезов и $n-1$ вертикальных. Оказалось, что округлённые до целого числа площади получившихся прямоугольников равны всем натуральным числам от 1 до n^2 в некотором порядке. Для какого наибольшего n это могло произойти? (Полуцелые числа округляются вверх.)

Георгий Караваев

7. [12] В белых клетках шахматной доски 100×100 стоят 100 слонов, среди которых есть белые и чёрные. Они могут делать ходы в любом порядке и бить слонов противоположного цвета. Какого наименьшего числа ходов заведомо достаточно, чтобы на доске остался один слон?

Александр Грибалко

Художник Сергей Чуб

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ

Приглашаем всех желающих принять участие в конкурсе по русскому языку. Он состоит из 6 туров; задания будут опубликованы в №№ 1, 3, 5, 7, 9 и 11. Победителей ждут призы. Для победы вовсе не обязательно решить всё – присылайте то, что получится. За лучшее решение отдельных туров предусмотрены специальные премии. Желаем успеха!

Решения I тура отправляйте по адресу **ruskonkurs@kvantik.org** не позднее 20 февраля. Укажите в письме ваши имя, фамилию, город, школу и класс, где вы учитесь.

Предлагайте задачи собственного сочинения: лучшие будут опубликованы. Так, задачу 5 составила наш постоянный автор, шестиклассница Мелек Ханмагомедова.

Итоги прошлогоднего конкурса будут опубликованы в номере 3.

I ТУР

1. – Что значит «пятиться»? – спросил меня 4-летний Алёша.

– Это значит «двигаться назад», потому что пятки у человека сзади, – попытался объяснить я.

– Ага, значит «***иться» – это двигаться вперёд, потому что *** у человека спереди, – заявил он.

Какие буквы заменены звёздочками?

И. Ф. Акулич

2. Буквальное значение этого глагола – «избавить от необходимости о чём-то заботиться». Напишите этот глагол.

И. Б. Иткин

3. В какой сказке слово, называющее главного героя, в начале употребляется как неодушевлённое, а в конце – как одушевлённое?

С. И. Переверзева

4. *Барабан, фонарь, параллельный*... Какой цвет можно добавить в этот ряд?

Д. А. Руденко

5. У этой полезной кухонной утвари очень прыгучее ударение. Когда она одна и большая, оно стоит на 4-м слоге, когда их много – на 1-м, а когда она маленькая – на 3-м. Назовите эту кухонную утварь.

М. Р. Ханмагомедова

Художник Николай Крутиков

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ, VI тур
(«Квантик» № 11, 2023)

26. *Вы думали, что УЧЕНИЦА – это девушка, которая следит за чистотой кораблей? А вот и нет: УЧЕНИЦА – это совершенно то же самое, что ВЫУЧЕНИЦА. Какие слова мы заменили на УЧЕНИЦА и ВЫУЧЕНИЦА?*

Эти слова – ***судомойка*** и ***посудомойка***. Если не знать слова *судомойка*, действительно можно подумать, что оно обозначает девушку, которая следит за чистотой кораблей, то есть судов. Так получилось потому, что слова *посуда* и *судно* имеют общее происхождение: корабль, которым мы недовольны, мы вполне можем обозвать «лоханкой», «корытом» или (вот именно) «посудиной». В современном мире мытьём посуды часто занимаются специальные машины, но такую машину тоже называют и *судомойкой*, и *посудомойкой*: синонимия сохраняется.

27. *Тохарский А – один из древних индоевропейских языков. В одном тохарском А тексте встретилась фраза* ***Это отцами и праотцами установленное правило не нарушай****. Тохарский глагол, использованный в этой фразе, буквально значит «переходить». Какое русское существительное приводят исследователи, комментируя этот факт?*

Буквальный смысл приведённого предостережения – «не переходи, не пересекай (установленную границу)». Комментируя этот факт, исследователи приводят русское слово ***преступление*** «нарушение закона»: это существительное образовано от глагола *преступить*, буквально означающего «перейти, перешагнуть».

28. *Во время зарубежной экскурсионной поездки в автобусе по-русски предлагалось купить напитки: колу, чай, яблочный сок... А в названии одного напитка, к удивлению русских туристов, упоминался цвет. Что это за напиток и как выглядело его название?*

Это ***апельсиновый сок***. Английское слово *orange* означает и «апельсин, апельсиновый», и «оранжевый». Название *orange juice* неудачно перевели с английского, и получился изумивший российских туристов ***«оранжевый сок»***.

29. *...Мяч пролетел совсем рядом со штангой. «УВАЖАЕМЫЙ гол...» – огорчённо вздохнул маленький Лёва. Какое слово мы заменили на УВАЖАЕМЫЙ? Кратко поясните свой ответ.*

Словом УВАЖАЕМЫЙ мы заменили слово ***почтенный***. Эти слова – синонимы, но Лёва, конечно, не употребил слово *почтенный* в его обычном значении, а, как свойственно детям, произвёл его заново от наречия *почти*: ведь мяч почти попал в ворота... Слова *почти* и *почтенный* и в самом деле происходят от одного корня, но в современном языке связь между ними ощутима с большим трудом.

30. *Знаменитый биолог Фан Фаронов утверждает, что в результате экспериментов у него появились необычные существа: возики, доксы, зиты, ллели и шюты, – причём ровно по два животных каждого вида. Самое удивительное, что про всех животных, кроме одного, Фан Фаронов говорит правду. Про какое животное гениальный исследователь всё-таки приврал? Кратко поясните свой ответ.*

Фан Фаронов – на то он и гений – каким-то образом научился воплощать в реальность библейское выражение «каждой твари по паре». Скажем, есть в русском языке слово *параллели* (род. п. мн. ч. *параллелей*, то есть как бы «пара ллелей») – получаются *ллели*. Есть слово *парашюты* (род. п. мн. ч. *парашютов*) – появляются *шюты*. Но насчёт ***возиков*** Фан Фаронов приврал: ведь *паровозики* пишутся через «о».

НАШ КОНКУРС, III ТУР
(«Квантик» № 11, 2023)

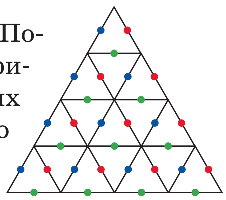
11. *Число называется палиндромом, если оно одинаково читается слева направо и справа налево (примеры: 7, 77, 787). Представьте число 2023 в виде суммы как можно меньшего количества слагаемых-палиндромов.*

Ответ: $2023 = 1771 + 252$. Так как 2023 – не палиндром, одного слагаемого не хватит.

12. *В полдень из пункта А в пункт Б выехали велосипедисты Алёша и Вася, а навстречу им из пункта Б в пункт А – велосипедисты Боря и Гриша. Каждый ехал с какой-то постоянной скоростью. Спустя какое-то время все четверо одновременно встретились, после чего Алёша и Гриша поехали в пункт А, Боря – в пункт Б, а Вася – в один из этих пунктов, причём он приехал четвёртым (позже всех). Каким по счёту приехал Гриша?*

Ответ: первым. Скорости Гриши и Бори одинаковы (ведь они одновременно выехали и одновременно доехали до места встречи); скорости Алёши и Васи тоже одинаковы. Если бы Вася поехал после встречи обратно в *А* вместе с Алёшей, они бы вернулись одновременно, но Вася приехал позже всех. Значит, Вася после встречи поехал в $Б$, и проехать ему пришлось большее расстояние, чем Алёше. Тогда место встречи ближе к $А$, чем к $Б$. Алёша и Боря вернутся в $А$ и $Б$ одновременно, ведь после встречи оба они проедут то же расстояние, что и до встречи, с той же скоростью. Гриша же сначала проедет то же расстояние, что и Боря, а потом проедет меньшее расстояние, чем Боря – от места встречи до $А$. Значит, Гриша приедет быстрее Алёши и Васи.

13. *Набор состоит из 16 одинаковых фишек в форме равностороннего треугольника. Саша нарисовал на каждой фишке среднюю линию (то есть отрезок, соединяющий середины сторон) и хочет сложить из всех фишек равносторонний треугольник так, чтобы никакие две из этих средних линий не имели общих концов. Сможет ли он это сделать?*



Ответ: нет. Пусть сможет. Посчитаем все середины сторон фишек: на сторонах, параллельных одной и той же стороне большого треугольника, их по $4+3+2+1$ (на рисунке отмечены одним цветом), значит, всего середин $3 \cdot 10 = 30$. Но если у средних линий на фишках нет общих концов, то всего занято $16 \cdot 2 = 32$ середины сторон, что больше 30 – противоречие.

14. *Перед вами и зрителями выложат несколько монет. Вам по секрету скажут про каждую монету, сколько она весит, а зрителям откроют лишь, что каждая монета весит 2 г или 3 г, а вместе они весят 23 г. Всегда ли вы сможете сделать перед зрителями всего одно взвешивание на чашечных весах без гирь, после которого они тоже поймут про все монеты, какая сколько весит?*

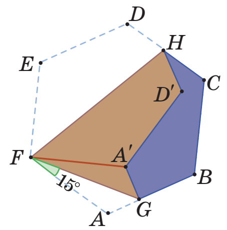
Ответ: да. Вес 23 г можно набрать так:
1) 7 монет по 3 г, 1 монета 2 г – всего 8 монет;
2) 5 монет по 3 г, 4 монеты по 2 г – всего 9 монет;
3) 3 монеты по 3 г, 7 монет по 2 г – всего 10 монет;
4) 1 монета 3 г, 10 монет по 2 г – всего 11 монет.

Значит, по числу выложенных монет зрители поймут, сколько среди них весят по 2 г, а сколько – по 3 г. Осталось понять, где какие.

В случаях 1 и 4 ровно одна монета отличается по весу от остальных. Взвесим её и любую другую, и зрители всё поймут про все монеты.

В случаях 2 и 3 на одну чашу положим четыре монеты по 2 г, на другую – три монеты по 3 г. Зрители увидят, что три монеты перевесили четыре, а это может быть только если все три монеты с тяжёлой чаши весят по 3 г, а четыре монеты с лёгкой чаши – по 2 г. Так зрители поймут, где находятся все четыре лёгкие монеты в случае 2 или все три тяжёлые в случае 3, а веса остальных монет определяются однозначно.

15. *Бумажный шестиугольник $ABCDEF$, все стороны которого равны 1, а все углы равны $120°$, согнули, как показано на рисунке, совместив вершины A и E в точке A'. Угол AFG равен $15°$.*



а) Найдите периметр шестиугольника $HCBGA'D'$. б) Докажите, что точки F, D', C лежат на одной прямой.

Ответ: а) 4. Поскольку бумагу согнули, $DH = HD'$, $A'G = AG$, $A'D' = ED$, а это значит, что периметр шестиугольника $HCBGA'D'$ складывается из длин 4 сторон исходного шестиугольника: AB, BC, CD и DE.

б) Покажем, что углы GFC и GFD' равны: так как точки D' и C лежат по одну сторону от FG, это и будет означать, что точки F, D' и C лежат на одной прямой. Угол правильного шестиугольника равен $120°$, а диагональ FC делит шестиугольник $ABCDEF$ на две равные части, значит, $\angle GFC = \angle AFC - \angle AFG = ½\ \angle AFE - \angle AFG = 60° - 15° = 45°$. В свою очередь, $\angle GFD' = \angle GFA' + \angle A'FD'$. До того, как исходный шестиугольник согнули, угол GFA' был углом GFA, а угол $A'FD'$ был углом EFD. Угол EFD – это угол при основании равнобедренного треугольника EFD с углом при вершине $E = 120°$, значит, $\angle EFD = (180° - 120°) : 2 = 30°$. Значит, $\angle GFD' = \angle GFA + \angle EFD = 15° + 30° = 45° = \angle GFC$.

КАК ТРЕСКАЮТСЯ ДЕРЕВЬЯ?

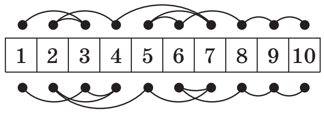
(«Квантик» № 12, 2023)

Древесина от холода сжимается, а от тепла расширяется. И холод, и тепло приходят со стороны коры и лишь затем доходят до сердцевины ствола. Когда дерево начинает охлаждаться, сердцевина не успевает сузиться, а внешняя часть стремится сжаться. Внешний кольцевой слой дерева разрывается, как на рисунке выше.

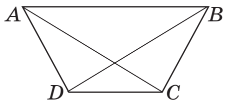
При нагревании, напротив, внешний слой стремится расшириться – отделяется от сердцевины трещиной вдоль одного из колец, как на рисунке справа.

XLV ТУРНИР ГОРОДОВ. ОСЕННИЙ ТУР, 8–9 КЛАССЫ.

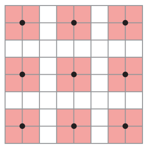
Базовый вариант



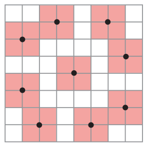
1. Ответ: нет. См. пример двух маршрутов на рисунке, над и под полосой.



2. Ответ: нет. Пусть A, D, C, B – последовательные вершины правильного шестиугольника. Тогда $ABCD$ – равнобедренная трапеция (половина шестиугольника), и все упомянутые в условии углы равны $30°$.



3. Ответ: да. Пусть ворона утащит ягоды, отмеченные точками на верхнем рисунке. Участок, содержащий одну из этих ягод внутри себя, содержит и квадрат 2×2 с центром в ней. Поэтому никакие две из этих ягод не лежат внутри одного участка площади 8 клеток – он состоял бы тогда ровно из двух таких квадратов, а они не образуют многоугольник. Другой пример см. на нижнем рисунке.



Решите задачу для поля 9×9 и девяти фермеров – как вороне незаметно утащить 8 ягод?

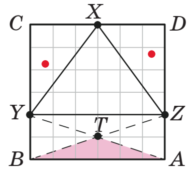
4. Ответ: не может. Рассмотрим любые два соседних числа, пусть a – меньшее из них. Тогда большее равно либо $2a$, либо $5a$, и вместе с меньшим оно даёт либо $3a$, либо $6a$. Значит, сумма любых двух соседних чисел кратна 3. Найдём для каждого числа сумму его и следующего за ним по часовой стрелке, и все эти суммы сложим. Получим, что удвоенная сумма всех чисел кратна 3. Значит, она не может равняться 4046.

5. Ответ: Вася. Назовём башенку *белой*, если её нижний и верхний кубики *белые,* и *бело-чёрной*, если её нижний кубик *белый*, а верхний *чёрный* (аналогично определяются *чёрная* и *чёрно-белая* башенки). В начале имеется 50 белых и 50 чёрных башенок. Петя из белой и чёрной башенок соберёт *разноцветную* (*чёрно-белую* или *бело-чёрную*). Вася, присоединяя к ней с нужной стороны белую башенку, склеит белую башенку. В результате остаются по 49 белых и чёрных башенок. Вася продолжает действовать так же, пока не оставит после себя две белые и две чёрные башенки. Петя своим ходом снова соберёт разноцветную башенку. Вася из оставшихся белой и чёрной башенок соберёт «противоположную», и у Пети не будет хода.

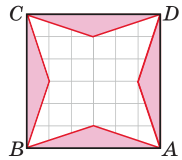
Сложный вариант

1	2	1
2	1	2
6	**5**	1

1. Ответ: да. В шахматной раскраске во все чёрные клетки впишем 1, а во все белые – 2. Затем заменим угловую 1 на **6**, а соседнюю 2 на **5**.



2. Отрежем от квадрата нижнюю треть отрезком YZ и соединим Y и Z с серединой X стороны CD (рисунок справа). Площади треугольников CXY и DXZ равны по $1/6$, поэтому внутри каждого из них есть вершина дыры (иначе эти треугольники можно отрезать). Площади треугольников BYA и BZA также равны по $1/6$, поэтому оставшаяся вершина дыры лежит в каждом из них, то есть, лежит внутри треугольника BTA. Построив на каждой стороне квадрата такой треугольник (рисунок справа), аналогично докажем, что внутри каждого из них лежит вершина дыры, что невозможно, так как треугольников четыре, а вершин у дыры три.



3. Ответ: за 3 хода. Будем изображать карточку в виде пары (a, b), где $a < b$. Пусть надо из (a, b) получить (c, d). Умножим первую карточку на $d - c$, получим $(a(d - c), b(d - c))$. Вторым ходом можно сложением получить из неё карточку $(c(b - a), d(b - a))$, так как разность между числами на каждой из этих карточек равна $(b - a)(d - c)$. Третьим ходом делим на $b - a$.

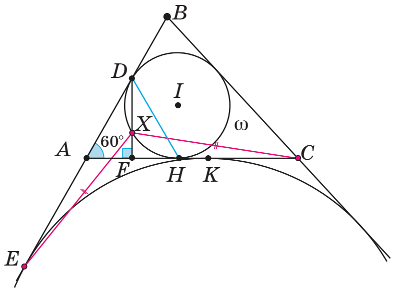
Докажем, что из $(1, 3)$ нельзя получить $(1, 4)$ меньше, чем за три хода. Для нашей карточки первый ход – прибавление натурального числа или умножение (так как на ней есть 1).

В первом случае разность чисел на карточке останется равной 2, и за одно деление или умножение получить разность 3 нельзя (разность умножится или разделится на целое число); сложение разность вообще не изменит.

Во втором случае, чтобы изменить отношение чисел на карточке с 3 на 4, придётся вторым ходом использовать вычитание, тогда разность уже должна была равняться 3, но она кратна 2.

4. Пусть вписанная окружность ω с центром I касается стороны AC в точке H, вневписанная окружность из условия касается стороны AC в точке K, перпендикуляр DF из условия пересекает ω в точке X. Поскольку $AD = AH$, $\angle A = 60°$, то треугольник ADH равносторонний, а DF – его высота. Так как $\angle XIH = 2\angle XDH =$

$=60^\circ=\angle AIH$, точка X лежит на прямой AI, то есть, является центром треугольника ADH.



Как известно, $AE=AK=CH$. Кроме того, $AX=HX$, $\angle EAX=150^\circ=\angle CHX$. Значит, треугольники AXE и HXC равны, откуда $XE=XC$.

5. Будем всегда класть на чаши поровну гирь. Заметим, что заведомо нефальшива гиря, лежащая на лёгкой чаше, а в случае равенства – на любой. Обозначим весы X и Y. Первым взвешиванием положим на чаши весов X по 4 гири.

1) Равновесие. Тогда фальшива одна из 5 оставшихся гирь. Вторым взвешиванием кладём по 2 подозрительные гири на чаши весов X. При равновесии фальшива невзвешенная гиря A.

В противном случае фальшива либо гиря A (если весы X неправильные), либо одна из гирь B, C на «тяжёлой» чаше. Третьим взвешиванием сравним B с C на весах Y. При равновесии фальшива гиря A. В противном случае фальшива более тяжёлая гиря (если бы фальшива была A, весы Y показали бы равновесие).

2) Одна из чаш опустилась. Тогда фальшива либо одна из 4 гирь на «тяжёлой» чаше, либо одна из 5 невзвешенных гирь. Вторым взвешиванием положим на чаши весов Y по 2 «тяжёлые» гири и по одной из невзвешенных – A и B. При равновесии фальшива одна из 3 ещё не взвешенных гирь, причём весы X соврали. С помощью верных весов Y найдём за одно взвешивание одну фальшивую гирю из 3 подозрительных.

Если одна из чаш (пусть с гирей A) опустилась, то фальшива одна из гирь на этой чаше (если бы фальшивая гиря была среди 3 невзвешенных, то как весы X, так и весы Y были бы неправильны, что не так). Более того, A фальшива только если весы Y правильные. Третьим взвешиванием сравним на весах Y две отличные от A гири с её чаши. При равновесии фальшива A, в противном случае – более тяжёлая гиря.

6. Ответ: для $n=4$. Вот пример, указаны ширина столбцов, высота строк и площадь клеток:

	2	3	4	5
0,7	$1{,}4\approx1$	$2{,}1\approx2$	$2{,}8\approx3$	$3{,}5\approx4$
2,7	$5{,}4\approx5$	$8{,}1\approx8$	$10{,}8\approx11$	$13{,}5\approx14$
3	6	9	12	15
3,25	$6{,}5\approx7$	$9{,}75\approx10$	13	$16{,}25\approx16$

Докажем, что $n\leqslant4$. Переставим строки и столбцы таблицы так, чтобы высоты строк росли сверху вниз, а ширины столбцов – слева направо. Пусть числа в угловых клетках равны $a<b<c<d$. Ясно, что a – левое верхнее, d – правое нижнее, причём $ad=bc$. Пусть b – правое верхнее. Округлённые числа будем обозначать штрихами. Тогда $a'=1$, $d'=n^2$, $b'\geqslant n$ (оно не меньше всех чисел верхней строки), $c'\geqslant 2n-1$ (оно не меньше всех чисел левого столбца и верхней строки). Значит, $a<1{,}5$, $d<n^2+0{,}5$, $b\geqslant n-0{,}5$, $c\geqslant 2n-1{,}5$. Тогда $1{,}5(n^2+0{,}5)>ad=bc>(n-0{,}5)(2n-1{,}5)$ и $1{,}5n^2+0{,}75>2n^2-2{,}5n+0{,}75$, то есть $2{,}5n>0{,}5n^2$, откуда $n<5$.

7. Ответ: 197 ходов. *Алгоритм*. Все ходы будем делать так, чтобы на доске оставались слоны обоих цветов, пока слонов хотя бы два.

Если возможно сделать *экономичное* взятие (слон за один ход бьёт слона другого цвета, стоящего с ним на одной диагонали), делаем его.

Если нет, делаем *неэкономичное* взятие (за два хода). Выберем двух слонов разного цвета и найдём путь, по которому один слон мог бы пройти к другому за два хода (такой путь всегда есть). Если на этом пути есть ещё слоны, найдём среди них двух ближайших друг к другу слонов разного цвета, и пусть один из них собьёт другого за два хода.

Сначала все слоны стоят на 99 белых диагоналях, параллельных главной белой диагонали. Тогда на одной из них стоят хотя бы два слона. Назовём двух из этих слонов *особыми*. Если они разного цвета, сразу делаем экономичное взятие.

Пусть особые слоны белые. Тогда при взятиях будем бить чёрными слонами белых. Как только взят первый особый слон, снимаем это ограничение и делаем экономичное взятие.

Так как всего взятий 99 и среди них есть экономичное, хватит $2\cdot99-1=197$ ходов.

Оценка. Расставим по 50 слонов на нижней и верхней строках доски. На всех 199 белых диагоналях обоих направлений будут стоять слоны (угловые белые клетки доски мы считаем «одноклеточными» диагоналями). За ход число диагоналей, на которых есть слон, может уменьшиться не более, чем на 1. Когда останется один слон, занятых диагоналей будет 2. Итого, понадобится хотя бы $199-2=197$ ходов.

наш КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Второй этап состоит из четырёх туров (с V по VIII) и идёт с января по апрель.

Высылайте решения задач V тура, с которыми справитесь, не позднее 5 февраля в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, г. Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте www.kvantik.com. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

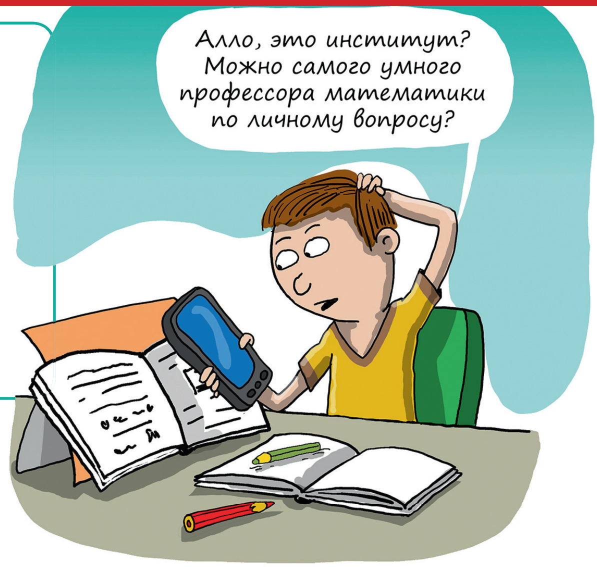
V ТУР

21. У Квантика на часах две кнопки: одна выводит на табло дату в формате ДД:ММ, а другая – время в формате ЧЧ:ММ (количество часов принимает значения от 00 до 23). Сколько раз в году Квантик увидит правильное время, даже если перепутает кнопки?

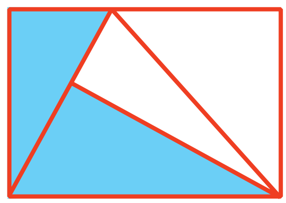
22. Можно ли какой-нибудь пятиугольник разрезать на три равносторонних треугольника (не обязательно равных)?

Авторы задач: Михаил Евдокимов (21), Егор Бакаев (22, 24), Игорь Акулич (23), Сергей Шамсутдинов (25)

23. Десятизначное число не содержит нулей и обладает такими свойствами: между любыми двумя единицами (если таковые имеются) расположено не менее одной другой цифры, между любыми двумя двойками (если таковые имеются) расположено не менее двух других цифр, и так далее, вплоть до девяток. Найдите наибольшее и наименьшее числа, удовлетворяющие этим условиям (ответ объясните).



24. Прямоугольник разрезали на четыре треугольника, как схематично показано на рисунке. Оказалось, что закрашенные треугольники равны. Докажите, что тогда и незакрашенные треугольники равны.



25. а) Расставьте 12 пешек на доске 6×6, по две на каждой вертикали и на каждой горизонтали так, чтобы никакие две пешки не били друг друга (то есть не стояли на соседних по диагонали клетках).

б) Расставьте 27 пешек на доске 9×9, по три на каждой вертикали и на каждой горизонтали, с выполнением того же условия.

Художник Николай Крутиков

СТРАННАЯ ЛЕСТНИЦА

Зачем у этой лестницы ступеньки такой формы? На первый взгляд, подниматься по ней сложнее, чем по обычной, – ведь каждая ступенька подходит либо только под левую, либо только под правую ногу.

Авторы Татьяна Корчемкина, Григорий Мерзон

Художник Алексей Вайнер

ISSN 2227-7986