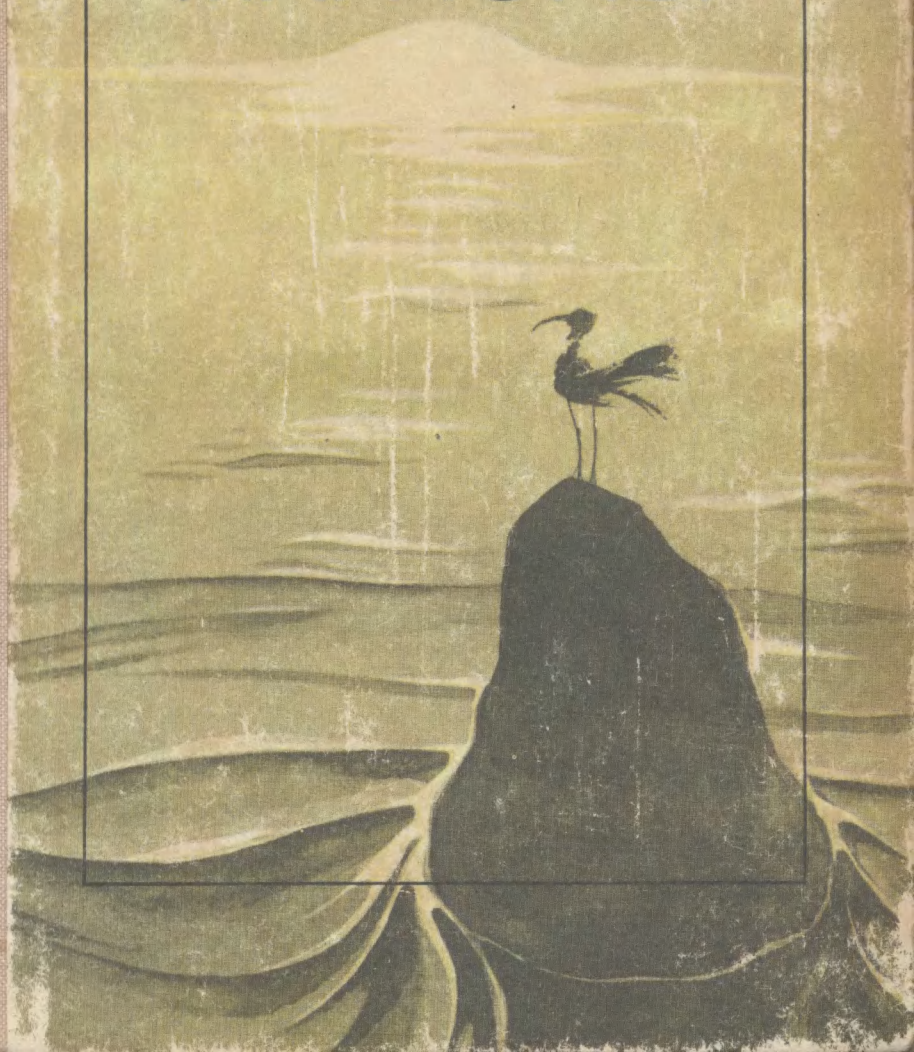


| М.И. Каганов | ЭЛЕКТРОНЫ ФОНОНЫ МАГНОНЫ |

| М.И. Каганов |

М.И. Каганов

# ЭЛЕКТРОНЫ ФОНОНЫ МАГНОНЫ



М.И.Каганов

---

# ЭЛЕКТРОНЫ ФОНОНЫ МАГНОНЫ



Москва «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической литературы  
1979



Scan AAW

22.37

К 12

УДК 539.2

## АННОТАЦИЯ

Почему металлы проводят электрический ток, а диэлектрики нет? Почему металлы лучше проводят тепло, чем диэлектрики? Почему вообще в природе существуют проводники — металлы и изоляторы — диэлектрики? Почему одни тела магниты, а другие нет? На эти и многие другие вопросы отвечает квантовая теория твердого тела, популярное изложение которой содержится в книге М. И. Каганова «Электроны, фононы, магноны».

В книге почти нет формул. При этом автор не ограничивается констатацией свойств и описанием явлений, а объясняет их природу, оперируя общефизическими понятиями. Уделяя много внимания изложению классических результатов квантовой теории твердого тела, автор подводит читателя к пониманию современных проблем науки о кристаллах.

Моисей Исаакович Каганов

ЭЛЕКТРОНЫ, ФОНОНЫ, МАГНОНЫ

М., 1979, 192 стр. с илл.

Редактор Т. Г. Коришева

Техн. редактор Е. В. Морозова

Корректор О. М. Кривенко

ИБ № 11411

Сдано в набор 25.01.79. Подписано к печати 31.05.79. Т-11232. Бумага 84×108<sup>1/32</sup>, тип. № 3. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 10,08. Уч.-изд. л. 9,53. Тираж 90 000 экз. Заказ № 412. Цена книги 45 коп.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука», 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

К 20403 — 099  
053(02)-79 139-79. 1704060000

© «Наука», Главная редакция  
физико-математической  
литературы, 1979

До свидания, камень!  
И да будет волна!

Д. Самойлов

## ВМЕСТО ПРЕДИСЛОВИЯ

### О языках науки

Наука в процессе познания окружающего мира, превращения «вещей в себе в вещи для нас», освоения непознанных областей и передачи своих достижений в человеческую практику выполняет еще одну функцию — *создает картину мира*, которая, меняясь из поколения в поколение, служит одной из важнейших характеристик цивилизации. Картина мира, т. е. совокупность знаний человечества о природе, содержится в сотнях томов специальных монографий и в десятках тысяч статей.

Строго говоря, картина мира, известная человечеству, не известна ни одному человеку. Каждый, даже самый образованный человек знает в деталях лишь небольшую часть картины, довольствуясь приблизительным знанием во всем, что выходит за пределы его специальности.

Трудность познания картины мира упирается не только в бесконечное разнообразие подробностей, но и в существование специализированных языков — средств общения и логических построений внутри научных областей, языков совершенно непонятных\* работающим в далеких областях и лишь приблизительно понятных работающим в соседних. Обобщение научных результатов, создание картины мира требует перевода описания научных результатов со специализированного языка на общечеловеческий. Но беда заключается в том, что специализированные языки гораздо более формализованы, чем любой общечеловеческий.

Всякий перевод труден. Тем более труден перевод с языка науки на язык, в котором каждое понятие имеет расплывчатый смысл и бесконтрольно обрастает опытом того, кто им пользуется. Картина мира в умах разных людей различна не только потому, что разные люди овладели разным объемом знаний, но и потому, что зафиксирована она на разных языках. Мир биолога не похож на мир физика. Мир инженера более механичен, чем мир гуманитария.

Научно-популярная литература — попытка перевода со строгого научного языка не менее формальный.

Не нужно думать, что ученый даже в процессе своей непосредственной деятельности всегда оперирует только формализованными строгими научными терминами. Это не так. Прислушиваясь к научным дискуссиям, к словесному оформлению докладов на семинарах и конференциях, к разговорам в кулуарах этих конференций, легко убедиться, что каждая научная профессия создает два языка. Строгий и точный. И значительно менее строгий.

Он состоит из смеси специальных терминов и общежитских слов. Последние приобретают в результате многократного использования своеобразный смысл, который не удастся найти ни в одном из самых полных толковых словарей. Но, приобретая научный смысл, они не теряют своей эмоциональной окраски.

Слова человеческого языка, несомненно, обладают магической силой вызывать цепи ассоциаций и представлений, будят мысль, включают эмоциональную сферу. И в этом их сила. Именно поэтому ученые в поисках точных решений, в спорах и в попытках убедить своих оппонентов прибегают к живому разговорному языку, не ограничиваются точными, но сухими словами научного языка.

Научно-популярная литература знакомит читателя с разговорным языком науки.

Общепотребительные слова часто навязывают представления, не обязательные для данного понятия и мешающие уразуметь смысл утверждений. Перевод с языка науки на разговорный связан с потерями. Теряется точность утверждений. Это, конечно, необходимая плата за простоту. Но можно стараться преодо-

левать груз необязательных представлений, наслоившихся на каждое общеупотребительное слово.

Слова „распад, распасться“. Любой нефизик вслед за «Толковым словарем русского языка» под редакцией Д. Н. Ушакова скажет: «Слово „распасться“ означает: 1. Рассыпаться на *куски*, разрушиться, развалиться, разделиться на *составные части* (научн!). 2. Разъединиться на части, утратив целостность, разбиться на *отдельные части*» (т. 3, стр. 1231). А физик постарается объяснить, что *распад* нейтрона на протон, электрон и антинейтрино не означает, что до распада нейтрон состоял (из кусков, из отдельных частей) из протона, электрона и антинейтрино. И слово „распад“ означает „превращение“, хотя все говорят... распад.

Другой пример: термин „столкновение“. Ушаков: «Катастрофа, происходящая, когда сталкиваются друг с другом двигающиеся с разных сторон предметы (примеры: столкновение поездов, аэропланов)» (т. 4, стр. 529). А в физике твердого тела *столкновение* электрона с фононом означает, что электрон „поглотил“ фонон.

Шутливая аналогия: столкновение волка с зайцем. После столкновения по полю бежит один волк.

Наука каждый день рождает новые понятия. Они требуют создания новых терминов. Для их создания часто используют слова разговорного общечеловеческого языка. При этом стало модным брать слова из далекого от науки ряда. „Странность“, „очарование“, „цвет“, „запах“ вошли в физику элементарных частиц.

Возможно, мода связана не столько с раскованностью создателей новой физики, сколько с попыткой избежать привнесения сопутствующих представлений. Назвав субнуклонную частицу кварком, автор (Гелл-Манн) прекрасно осознавал (или бессознательно ощущал), что все, что «тянется» за джойсовскими кварками, не может повлиять на представления о свойствах гипотетической составной частицы нуклонов.

Научно-популярная литература помогает осознать научный смысл слов, взятых из разговорного языка и перенесенных в новую для них область.

Но, конечно, главная задача научно-популярной литературы — ознакомление широкого круга читателей с научными результатами.

У вас в руках научно-популярная книга по квантовой физике твердого тела. По физике твердого тела популярные книги есть. Эта книга отличается от многих из них попыткой рассказать *собственно* о квантовой физике твердого тела, а не о ее применениях. О методах объяснения макроскопических эффектов, о связи физики твердого тела с квантовой механикой, о том, как создаются и используются новые понятия... И еще одним отличается — желанием «приоткрыть» завесу, объяснив, *как* получаются те или иные результаты, не ограничиваясь их констатацией. Успешной ли оказалась попытка, удалось ли исполнить желание, скажет читатель.

\* \* \*

Желание рассказывать многим то, что мне кажется необычайно интересным, делиться радостью понимания — это чувство владеет мною давно. Оно нашло выражение в написании нескольких брошюр, выпущенных издательством «Знание». В прошлом году я провел два месяца по приглашению проф. Е. Червонко из Вроцлавского политехнического института в Польше.

В это время мои друзья Я. Ковальский и Т. Пашкевич решили перевести несколько моих популярных книжечек, объединив их под одним переплетом. В перерывах между лекциями и семинарами я помогал переводчикам из разрозненных брошюр сделать книгу. Книга эта в 1978 г. вышла в Варшаве. Я ее люблю: она напоминает мне о днях, проведенных среди гостеприимных польских физиков. Во Вроцлаве я понял, что мне хочется иметь подобную книгу на русском языке. И понял, что объединение написанных в разное время брошюр меня не удовлетворит. Книгу надо *делать* заново. Именно *делать*. Кое-что можно взять из старых публикаций, кое-что переделать, а кое-что написать заново.

Работа над книгой мне доставляла удовольствие, и я «мучил» близких чтением отрывков, прежде всего свою жену. Я всегда находил в ней терпеливого слушателя, за что искренне ей благодарен.

$$\begin{aligned}
 e &\approx 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ сГСЭ} \\
 m_e &\approx 9,1 \cdot 10^{-28} \text{ з} \\
 h &\approx 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек.} \\
 c &= 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек.} \\
 M_p &= 1840 m_e
 \end{aligned}$$

## ГЛАВА

# 1

### о физике вообще и о квантовой механике в частности

#### ПОНЯТЬ — ЭТО ЗНАЧИТ УПРОСТИТЬ

В процессе бесконечного приспособления окружающего мира к своим потребностям человек познает мир. Результатом этой деятельности являются не только вещи, созданные человеком, но и представление об окружающем мире. Это представление, с одной стороны, все более детализируется (мы узнаем мир все в больших подробностях), а с другой — создается все более общий взгляд на мир. Остановимся на второй стороне процесса познания.

Обычно кажется, что создание новой теории, формулировка новых представлений усложняют картину мира. Очень часто приходится слышать, что современная физика необычайно сложна, а вот раньше якобы все было просто. Эта точка зрения даже получила поэтическую формулировку<sup>1)</sup>:

«Был этот мир глубокой тьмой окутан.  
Да будет свет! И вот явился Ньютон».

Эпиграмма XVIII века.

<sup>1)</sup> С. Маршак. Соч. в 4-х т. — М.: Гослитиздат, 1959, т. 3, с. 601.

«Но Сатана не долго ждал реванша.  
Пришел Эйнштейн — и стало все, как раньше».

Эпиграмма XX века.

Действительно, современные физические теории используют сложный (иногда очень сложный) математический аппарат. Кроме того, физика делается все менее наглядной, все более оторванной от житейского опыта. Сегодня, чтобы открыть новое явление, физикам-теоретикам нужны вычурные математические методы, а физикам-экспериментаторам — гигантские ускорители, либо огромные магнитные поля, либо сверхнизкие температуры, либо и то, и другое, и третье. Выводы из физических теорий могут показаться фантастичнее любых выдумок писателей-фантастов (одна зависимость течения времени от системы отсчета чего стоит!). И все же все эти сложности, по сути дела, творят более простую картину мира.

Создаваемое деятельностью тысяч рядовых ученых и нескольких гениев представление о мире поражает в законченном варианте (или в том виде, который кажется сегодня законченным вариантом) своей стройностью и простотой: тысячи явлений, на первый взгляд ничем не связанные друг с другом, являются следствием — логическим или, что то же самое, математическим следствием — небольшого числа утверждений. Само разнообразие (и, следовательно, сложность всей картины в целом) находит свое объяснение. Причем, как правило, для объяснения разнообразия явлений не приходится привлекать новых фундаментальных идей. Разнообразие — следствие этих идей.

Кеплер, изучая движение планет Солнечной системы, сформулировал свои знаменитые простые законы. Простые потому, что все многообразие движений всех планет свелось к трем арифметическим соотношениям. Но здесь же возникла и новая сложность. Уже идейная. Откуда взялись эти соотношения? Божественная мудрость природы или что-либо более определенное? Ответ на этот вопрос, как известно, дал Ньютон созданием ньютоновской механики и формулировкой закона всемирного тяготения. Если бы результатом деятельности Ньютона было только объяснение законов Кеплера, то, по существу, никакого упрощения не произошло бы. Три закона заменились бы одним, из

которого они весьма сложно выводятся. Но механика Ньютона объяснила огромное количество явлений, свойств, наблюдений, что создало предпосылку для построения механической картины Вселенной.

Другой пример — создание теории электромагнетизма, объединившей такие явления, как распространение света и работа динамо-машины. Излучение радиоволн, прием их радиоприемником, распространение тока по проводам, работа электромоторов и трансформаторов — все это строго математически можно вывести из уравнений Максвелла. Не стоит удивляться, что при этом приходится использовать весьма сложный математический аппарат. Но это только аппарат. Вся физика электромагнетизма содержится, правда глубоко, в уравнениях Максвелла, которые весьма просты. Особенно просты они, если записать их не в наглядных трехмерных обозначениях, а в более абстрактных, но зато более простых четырехмерных, в которых время и пространственные координаты объединены понятием «мировая точка».

А многообразие веществ в природе? Выделение из этого многообразия около ста атомов химических элементов, из которых все вещества состоят,— первое упоминание.

«Если в результате какой-то мировой катастрофы все накопленные научные знания оказались бы уничтоженными и к грядущим поколениям живых существ перешла бы только одна фраза, то какое утверждение составленное из наименьшего количества слов, принесло бы наибольшую информацию? Я считаю, что это — атомная гипотеза (можете называть ее не гипотезой, а фактом, но это ничего не меняет): *все тела состоят из атомов — маленьких телец, которые находятся в непрерывном движении и притягиваются на небольшом расстоянии, но отталкиваются, если одно из них плотнее прижать к другому*. В одной этой фразе... содержится невероятное количество информации о мире, стоит лишь приложить к ней немного воображения и чуть соображения»<sup>1)</sup>.

Но ведь и атомы не элементарны. Строительных кирпичей у природы не сто, а всего три. Атомы состо-

---

<sup>1)</sup> Р. Фейнман и др. Лекции по физике.— М.: Мир, 1965, вып. 1, с. 23.

ят из электронов, протонов и нейтронов, которые сегодня принято считать элементарными. Пожалуй, это наиболее впечатляющее упрощение картины мира...

Самая совершенная теория, теория, описывающая огромный круг явлений природы, не совершенна в том смысле, что сама она не содержит границ своей применимости. Границы применимости теории становятся ясны только тогда, когда создана более общая теория.

Это обстоятельство приводит иногда к переоценке теорией своих возможностей. Так, «триумфальное шествие» ньютоновской механики привело к попыткам все объяснить с ее позиций и лишь создание квантовой механики привело к пониманию того, что такие попытки безуспешны. Кроме того, выяснилось, что законы Ньютона применимы до тех пор, пока тела движутся со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света. Это ограничение было осознано после создания А. Эйнштейном релятивистской механики...

Обычно говорят, что абсолютно правильных теорий нет, что теории сменяют друг друга. Это и правильно и неправильно. Построение новой теории приводит не к отмене старой<sup>1)</sup>, а к тому, что старая теория оказывается частным (предельным) случаем новой (как мы только что говорили, ньютоновская механика — это эйнштейновская механика при движении со скоростью, значительно меньшей скорости света).

## ЧТО ЗНАЧИТ ПОЗНАТЬ ЗАКОНЫ ПРИРОДЫ?

Попытаемся ответить на вопрос: познаны ли человеком законы природы? Вопрос очень труден, так как недостаточно точно сформулирован. Начнем издалека. Пусть открыто какое-то новое явление. Подчеркиваем — именно явление. Не наблюдается нечто, в данную минуту непонятное, а установлено неизвестное ранее свойство материи (материи, а не измерительного прибора). Например, обнаружено, что некоторые металлы, охлажденные почти до абсолютного нуля, без сопротивления пропускают электрический ток (сверхпроводимость).

---

<sup>1)</sup> Надо только напомнить, что не все, что называется теорией, в действительности есть теория.

Как правило, при этом ясно (или кажется, что ясно), какой из теорий явление должно быть «подведомственно».

Бывает, что открытое явление уже было предсказано теоретически, т. е. выведено с помощью математических методов из основных уравнений. Раньше совпадение эксперимента с теорией казалось чем-то необычным. Такие ситуации описывали громкими фразами: «триумф человеческой мысли», «открытие на кончике пера» и т. д. Сегодня эксперимент чаще подтверждает предсказания теории, но до сих пор это приносит острую радость — во всяком случае физикам-теоретикам (может быть, ожидание такого совпадения — один из наиболее сильно действующих стимулов работы теоретика).

Но иногда явление не только не было ранее предсказано теоретиками, но и после его экспериментального открытия не поддается осмыслению. Так было, например, со сверхпроводимостью. Что тогда? Пытаются отменить общую теорию? Нет! В худшем случае начинают сомневаться в принадлежности явления той общей теории, к которой его относили. Но главное, стремятся хотя бы правильно *описать* новое явление. «Описать» — это значит установить математические соотношения между измеряемыми величинами. Естественно, при этом добиваются того, чтобы исходных соотношений было поменьше, а выводов из них побольше. Однако всегда на таком предварительном этапе в общую теорию вносят какие-то дополнительные предположения, специально для описания нового явления. Так возникает *феноменологическая теория* (в примере со сверхпроводимостью это теория братьев Ф. и Г. Лондонов). Кроме стимулирования новых работ и систематизации ранее накопленных данных, феноменологическая теория конкретизирует, что надо объяснить с общих позиций, т. е. какое соотношение должно быть выведено математически из исходных фундаментальных уравнений, чтобы можно было понять всю совокупность экспериментов, относящихся к новому явлению. Когда это соотношение выведено, то явление, наконец, понято, т. е. построена законченная теория нового явления. Теорию сверхпроводимости создали Бардин, Купер и Шриффер — три американских уче-

ных (1957 г.) — через 45 лет после экспериментального открытия явления. Таким образом, понимание (познание, выражаясь высоким стилем) означает в данном случае вывод необходимого соотношения из основных положений общей теории.

Вернемся к вопросу о познаваемости законов природы. В том смысле, в каком познаны отдельные явления, законы природы не познаны.

Нет единой (общей) теории, по отношению к которой все физические теории (механика, электродинамика, теория тяготения и т. д.) являются частными (предельными) случаями.

Кроме того, элемент описания (феноменологии) должен остаться всегда. Изначальная (всеобщая) теория по самому своему определению может быть сформулирована только на основании опыта, без ссылок на более общую теорию. Но об изначальной, общей теории рано говорить. Такой теории пока нет, однако есть надежда (хотелось бы сказать, «вера»), что всеобщая теория будет построена. Ее поискам посвятил большую часть своей жизни Альберт Эйнштейн. Он называл ее «единая теория поля». Отсутствие «единой теории поля» не означает, что в физике творятся разброд и неупорядоченность. Физика — наиболее логичная из всех естественных наук. В том смысле, что существуют глубокие физические теории, охватывающие огромное количество свойств и явлений природы, законченные по своей внутренней непротиворечивости и логической замкнутости, прекрасно объясняющие все к ним относящиеся эксперименты. Поэтому, если поставить вопрос иначе, не «познаны ли законы природы?», а «поняты ли наблюдаемые явления природы?», то тогда для огромного числа явлений надо дать положительный ответ: «Да, поняты!» — и это — величайшая победа человеческой мысли.

## ГДЕ ГРАНИЦА ПОЗНАННОЙ ОБЛАСТИ?

Границы познанной области раздвинуты необычайно широко. Все наблюдаемые явления неорганического мира, относящиеся к миру атомов и их ядер, молекул, макроскопических объектов, т. е. совокупностей из  $10^{23}$ — $10^{24}$  частиц, явления в Солнечной системе, дви-

жение звездных скоплений и физические процессы, происходящие в недрах звезд,— все это познанная область. «Тerra incognita» лежит вне ее. Она в свойствах элементарных частиц и на расстояниях порядка  $10^{10}$  световых лет от нас.

Подобное утверждение, конечно, не означает, что понято каждое явление. Нам уже знакомы примеры, когда от открытия явления до его понимания прошло около 50 лет. И сейчас есть еще необъясненные явления. Но есть уверенность, что они будут объяснены. И объяснение придет в рамках уже известных основных (фундаментальных) законов. Нет никаких оснований (пока мы не выходим за пределы этой баснословно огромной области) пересматривать фундаментальные законы, делать ревизию основ. Но отсутствие общей платформы для всей физики, что на сегодняшнем языке означает неумение объединить теорию гравитации и квантовую механику, построить последовательную релятивистскую квантовую механику (которая включила бы в себя теорию элементарных частиц), очень остро ощущается физиками. Поэтому наиболее модная (в хорошем смысле слова) область — это физика высоких энергий и физика элементарных частиц, физика, пытающаяся проникнуть за границы познанной области и тем самым подобраться к созданию «основы основ физики». По-видимому, такая «игра стоит свеч», хотя связана она не только с миллиардными затратами, но и — главное — с концентрацией человеческого интеллекта.

## МИКРО- И МАКРОТЕОРИИ

Давайте пока оставим науку будущего и попытаемся охарактеризовать состояние физики сегодня. Вернемся назад и разъясним кое-что из уже сказанного.

Открытие атомного строения вещества, а потом сложного строения атомов и атомных ядер дало возможность понять свойства макроскопических или, более общо, сложных объектов на основании свойств микроскопических объектов. Так родились молекулярно-кинетическая теория газов, теория твердого тела и другие аналогичные дисциплины, для конструкции которых очень существенно именно то, что их объектами яв-

ляются макроскопические тела, т. е. огромные совокупности микроскопических частиц. При этом второе, не менее важное, обстоятельство таково. При изучении макроскопических тел нас не интересует движение (или состояние) всех входящих в тело частиц, а только некоторые средние характеристики тела: температура, теплоемкость, электропроводность, магнитный момент и т. п. Отказ (добровольное ограничение) от слишком подробного, не всегда нужного описания и введение статистической (вероятностной) терминологии продиктованы, с одной стороны, принципиальной невозможностью другого подхода, а с другой — неадекватностью последнего в смысле правильного описания макроскопических явлений. Изучая поведение газа, мы интересуемся зависимостью давления от температуры, а не следим за ударом каждой молекулы о стенку сосуда.

Подобный подход, при котором «следят» за каждой частицей, не отменяет понятие «давление», а разъясняет его с микроскопической точки зрения, расширяя это понятие, показывает, что термины, вводимые в макроскопической дисциплине, могут быть сведены к более элементарным.

Может показаться, что сведение макроскопических теорий к микроскопическим лишает первые их специфики. Или, лучше сказать, лишает специфичности макроскопическое движение. Конечно, это не так. Например, каждое микроскопическое движение обратимо, но реальные макроскопические движения необратимы<sup>1)</sup>. И хотя макроскопические движения сводятся к совокупности микроскопических, из самой процедуры «сведения» выясняется природа необратимости. Обычно макроскопические уравнения получаются путем определенного усреднения микроскопических. В результате такого усреднения и появляется необратимость макроскопических движений, качественно отличающая их от движений микроскопических.

---

<sup>1)</sup> Обратимость означает вот что: если все частицы, принимающие участие в каком-либо движении, вдруг изменят свои скорости на обратные, то они повторят движение в обратном порядке. Но санкам на середине горы не хватит скорости, чтобы подняться на гору, с которой они съехали (они растратили часть энергии на трение).

Эти рассуждения о сводимости и специфичности очень важны: часто возникают по этому поводу споры, в частности о сводимости биологических процессов к физическим и химическим. Главным аргументом против такой сводимости служит специфичность биологических процессов. Следует помнить, что если вести не терминологические споры (бессмысленное занятие!), то специфичность ничуть не противоречит сводимости. Напротив, специфичность понимается в процессе сведения.

## ИЕРАРХИЯ СОВРЕМЕННОЙ НАУКИ

Мы остановились на соотношении между макро- и микротеориями. Подчеркнем одну весьма общую черту сегодняшней физики — ее *иерархичность*.

Строгое деление науки на области не противоречит тому, что часто интереснейшие результаты возникают на стыках областей и даже наук.

Хотя мы знаем микроскопическую структуру вещества, нет никакой необходимости даже помнить о ней, решая, скажем, технические задачи теплопередачи или изучая строительную механику. Инженер-конструктор тепловозов, сталкивающийся с разнообразными свойствами металлов (электрическими, механическими, тепловыми), не должен думать о носителях заряда в металле — электронах проводимости. Ему достаточно знать табличные характеристики металла.

Специальные области физики возникают, естественно, не только при переходе от микро- к макрообъектам. Весьма часто происходит выделение в специальную область, по сути дела, частного случая общей теории. Очень наглядным примером служит выделение из общей теории электромагнетизма квазистатики (электро- и магнитостатики), с одной стороны, и радиофизики или оптики — с другой. Здесь разделение связано с различными экспериментальными и математическими (т. е. теоретическими) методами исследования в каждой из областей. Из-за различия в методах возникает не только различная терминология, но и различная система представлений, образов. Людям, специализирующимся в одной области, трудно понять «смежников». Поэтому часто нарочно используют терминологию

из смежной области. Например, свойства волноводов «разъясняют» с помощью теории длинных линий (т. е., по существу, типичную радиофизическую задачу пытаются свести к квазистатической). Иерархичность «работает» и здесь.

Физик, занимающийся какой-либо узкой областью, может (мы не будем обсуждать, хорошо ли это) не обращаться к той общей теории, частным случаем которой является его область. Иначе говоря, после соответствующего предельного перехода возникает логически замкнутая наука со своими уравнениями, а следовательно, решениями и выводами. Если при решении любой задачи приходилось бы каждый раз «танцевать от печки», то продвинуться вперед было бы просто невозможно.

## АБСТРАКЦИЯ И МОДЕЛЬ

К описываемым свойствам физики (и, наверное, любой науки) принадлежит еще одно свойство, которое редко акцентируют, но оно естественным путем входит в плоть и кровь каждого научного работника. Это свойство — необходимость абстракции, т. е. выделение из огромного количества связей, зависимостей только тех, которые наиболее сильно влияют на изучаемое явление.

Материализованная абстракция — модель. По сути дела, наука всегда имеет дело с моделями. Не следует думать, что имеется в виду только теоретическая физика. Экспериментатор, изучающий столкновение частиц в газе, старается «отделаться» от сотен мешающих обстоятельств, которые всегда сопровождают столкновения в действительности. В результате он имеет дело с моделью газа, которая тем лучше, чем газ менее похож на содержимое, скажем, баллона, установленного для отопления помещений.

Фундаментальные теории (механика, электродинамика) тоже используют модели. До самого последнего времени казалось, что моделью основных «кирпичей» природы могут служить элементарные частицы (электроны, протоны, нейтроны, нейтрино), однако в последние годы их оказалось так много, они так сложно взаимодействуют друг с другом, превращаются друг в

друга, что их свойства никак не укладываются в понятие *элементарные* частицы. Ощущается: должно произойти еще одно «сведѣние» — углубление в природу элементарных частиц, которое может означать отнюдь не выяснение того, из чего «состоят» элементарные частицы (в этом смысле они могут оказаться действительно элементарными), а чего-то совсем иного, сегодня даже неназванного.

## ОТ ЧЕГО ПРИШЛОСЬ ОТКАЗАТЬСЯ ПРИ СОЗДАНИИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ?

Построение квантовой механики (а лучше сказать, создание квантового мировоззрения) означало ломку, разрушение классических представлений. Что же было разрушено? Имеет смысл очень кратко сформулировать основные представления классической механики (конечно, ни о какой полноте не может быть и речи), чтобы ответить на этот вопрос.

Исходным образом классической механики является материальная точка, которая движется по определенной траектории. Последняя задается начальными условиями и силой, действующей на материальную точку. Открытие атомной структуры вещества, казалось бы, материализовало этот основной образ классической механики. Материальные точки — это атомы, электроны, протоны — словом, те частицы, которые следует считать элементарными, при рассмотрении того или другого движения. Исходя из такой концепции, свойства макроскопических тел должны быть поняты как свойства совокупностей частиц (материальных точек), взаимодействующих между собой и движущихся по определенным траекториям. Механика материальных точек не может быть построена, если не известны силы взаимодействия между ними. О силах речь пойдет ниже. Заметим только, что квантовая механика не подвергает ревизии представление о силах.

Итак, основой классического механического мировоззрения является материальная точка, частица, о которой можно точно сказать, где она находится в данный момент времени и с какой скоростью она движется. Однако классические представления этим не ограничиваются.

Открытие радиоволн, выяснение волновой природы света показали, что материя существует не только в форме частиц вещества (корпускул), но и в виде волн. Привычно думать, что после слова «волна» должно следовать разъяснение, что «волнуется». Действительно, когда речь идет об обычных механических колебаниях (звуковых волнах в газе, например), то всегда ясно, что колебательное движение совершают частицы (газа, жидкости, твердого тела). Когда же речь идет об электромагнитных колебаниях, то привычные модельные представления отказывают. Ничто (если под «чем-то» понимать только частицы!) не колеблется. Волна в этом смысле — первичный, «несводимый» образ. Электромагнитная волна, точнее, ее простейшая форма — плоская волна определенной частоты — есть элементарная форма существования особого вида материи, именуемого электромагнитным полем. Любопытно отметить, что элементарной формой, т. е. формой, из которой конструируются всевозможные электромагнитные поля, является бесконечно протяженная в пространстве и во времени волна.

Не только на первый взгляд, но и, казалось бы, при сколь угодно углубленном подходе волна и частица — понятия несовместимые, взаимно исключающие друг друга. Перед нами либо частица — нечто очень маленькое, находящееся в каждый момент времени в определенном месте и движущееся с определенной скоростью, либо волна — нечто распространенное, заполняющее все пространство. Правда, с волной также связана некоторая скорость. Даже две. Во-первых, скорость перемещения фазы волны — фазовая скорость  $v_\phi = \omega/k$ , где  $\omega$  — круговая частота волны, а  $k$  — волновое число<sup>1)</sup>, связанное с длиной волны  $\lambda$  соотношением  $k = 2\pi/\lambda$ . Фазовая скорость характеризует структуру волны, но не определяет непосредственно скорость переноса энергии волны. Вторая скорость — скорость переноса энергии. Она называется групповой скоростью, так как с этой скоростью распространяется волновой пакет (группа волн). Групповая скорость  $v_{гр} = \partial\omega/\partial k$ . Если  $v_{гр} = v_\phi$ , то говорят об отсутствии

---

<sup>1)</sup> Волновое число — длина волнового вектора  $\vec{k}$ , направленного в сторону распространения волны.

дисперсии. Для электромагнитных волн в вакууме  $v_{гр} = v_{ф} = c = 3 \cdot 10^{10}$  см/с.

Особенно отчетливо различие между частицей и волной проявляется при изучении двух частиц или двух волн. Характерное свойство волн — интерференция — возможность уменьшения интенсивности при сложении двух (или нескольких) волн. Подобный результат представляется совершенно невозможным для корпускул. Две частицы всегда больше, чем одна. Другими словами, если две частицы попадают в одну точку, то реакция должна быть удвоенная (для простоты предполагаем, что частицы совершенно одинаковы).

Не останавливаясь больше на очевидных различиях между волнами и корпускулами, заметим, что иногда различие это проявляется не столь очевидно. Наблюдая луч света, довольно трудно себе представить, что тонкий, «как бритва», луч — совокупность бесконечно протяженных волн. Скорее хочется согласиться, что это поток частиц, летящих по прямолинейной траектории. Известно, что волновая оптика сравнительно легко справилась с этой трудностью и согласовала прямолинейное распространение света с его волновой природой путем учета интерференции волн.

Резюмируя, можем сказать, что классическая картина мира строится из двух сущностей: частиц и волн.

Лучше сказать иначе. Как-то непривычно к волнам относить такой «увесистый» глагол, как «строится». Согласно классической физике мир построен из частиц. Они, взаимодействуя друг с другом, движутся по определенным траекториям. Некоторые из них заряжены. Эти частицы, двигаясь с ускорением, излучают электромагнитные волны. Так как это движение происходит всегда и везде, то мир, состоящий из частиц, наполнен электромагнитными волнами. Некоторые из этих волн мы ощущаем (видимый свет), по большинство волн пронизывает окружающее пространство, оставаясь недоступными нашим органам чувств. Некоторые волны легко регистрируются радиоприемниками или другими приборами, служащими человеку для расширения диапазона его органов чувств.

Если не вдаваться в подробности, то сказанное выше — довольно полная классическая картина окружающего нас мира. Верна ли она?

## КЛАССИЧЕСКАЯ ФИЗИКА НЕ МОЖЕТ ОБЪЯСНИТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ АТОМОВ

Ответ на вопрос, поставленный в конце предыдущего раздела, ясен. Если бы классическая картина была верна, не было бы необходимости говорить о революции в естествознании, не было бы необходимости в самой революции. Но когда говорят, что что-то неправильно, что какая-то теория не согласуется с экспериментом, то очень важно представлять себе, в чем заключается несогласие: расходятся ли опыт и теория чуть-чуть или теория совершенно не описывает имеющийся опыт?

В какой мере нарисованная выше классическая картина изображает истинную природу? Ответ носит двояственный характер. Пока мы интересуемся макроскопическими движениями (попросту говоря, движением вещей, предметов), то классическая механика прекрасно описывает результаты опытов. Нет никаких оснований сомневаться в ее правильности. До тех пор, пока мы не вышли за рамки ее применимости (эти рамки мы скоро сможем обозначить), нет никаких оснований что-либо пересматривать в ее основах. Но, когда мы входим в мир атомных частиц, благополучие оказывается иллюзорным. Само существование стабильных атомов и молекул нельзя понять, оставаясь на позициях классической механики. Таким образом, речь идет не о количественном несогласии, о несогласии «чуть-чуть» (типа «опыт дает 1,7, а теория 1,6»), а о принципиальной невозможности объяснить самые фундаментальные факты. Важность этого утверждения столь велика, что мы, даже рискуя «ломиться в открытую дверь», посвятим этому вопросу несколько фраз, аргументируя цифрами.

Размеры атома сегодня хорошо известны. Радиус «среднего» атома примерно равен  $a \approx 3 \cdot 10^{-8}$  см. Мы сможем скоро понять, почему именно  $10^{-8}$  см, а не, скажем,  $10^{-13}$  см.

На этот вопрос мы умеем отвечать, хотя не имеем понятия, почему протон в 1840 раз тяжелее электрона. Правда, мы не столько *объясним*, почему  $a \approx 10^{-8}$  см, сколько запишем  $a$  в виде комбинации других букв, численное значение которых нам известно

(из экспериментов, конечно). Но ведь это и есть объяснение! А вот 1840 мы не умеем записать с помощью других величин.

Положительно заряженное ядро «держит» отрицательно заряженный электрон с помощью силы кулоновского притяжения <sup>1)</sup>:

$$F_{\text{кул}} = e^2/a^2 \quad (1)$$

( $e$  — заряд электрона и протона; для простоты мы рассматриваем простейший атом — атом водорода). Чтобы атом был устойчив, сил притяжения недостаточно (электрон упал бы на ядро). Нужны уравновешивающие силы отталкивания. Такой силой, как хорошо известно, является центробежная сила:

$$F_{\text{цб}} = mv^2/a. \quad (2)$$

Здесь  $m$  — масса электрона,  $v$  — его скорость. Равенство сил (в системе координат, связанной с движущимся электроном) позволяет определить скорость электрона на круговой орбите <sup>2)</sup>:

$$v = (e^2/ma)^{1/2}. \quad (3)$$

Подставляя сюда численные значения для заряда, массы электрона и радиуса «среднего» атома, находим  $v \approx 10^8$  см/с. Это — огромная скорость по земным (и даже космическим) масштабам, но для нас важно, что скорость эта в триста раз меньше скорости света в вакууме. Следовательно, пока можно не думать о релятивистских эффектах. Это очень важное заключение: на атомных расстояниях господствуют законы классической (в смысле — нерелятивистской) механики. Если бы атом был величиной с атомное ядро ( $10^{-13}$  см), то скорость частицы была бы близка к скорости света.

<sup>1)</sup> Непосредственным опытным доказательством действия закона Кулона на атомных расстояниях служат известные опыты Резерфорда по рассеянию  $\alpha$ -частиц на ядрах, которые показали, что сила, действующая между  $\alpha$ -частицей и ядром, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Закон Кулона перестает «работать», только если  $\alpha$ -частица приближается к ядру на расстояние порядка или меньше  $10^{-13}$  см.

<sup>2)</sup> Мы для простоты не решаем точно задачу о движении частицы в кулоновском поле сил, а ограничиваемся только рассмотрением движения по круговой орбите.

Тогда атомная механика с самого начала была бы релятивистской.

Нам понадобятся еще две формулы. Первая — для полной энергии электрона в поле ядра:

$$E = -e^2/2a. \quad (4)$$

Это выражение легко получить, сложив кинетическую и потенциальную энергии электрона. Знак минус означает, что мы выбрали за нуль энергию электрона на бесконечном расстоянии от ядра. Заметим, что при уменьшении расстояния  $a$  энергия уменьшается. Вторая формула — для интенсивности излучения заряда  $e$ , движущегося с ускорением  $w$  (в нашем случае  $w = v^2/a$ ):

$$I = \frac{2e^2w^2}{3c^3} = \frac{2e^2v^4}{3c^3a^2} \left( \frac{\text{эрг}}{c} \right). \quad (5)$$

Если каждую секунду электрон излучает  $I$  эргов, то за время

$$\tau \approx \frac{a}{v} \left( \frac{c}{v} \right)^3 \quad (6)$$

он растеряет всю свою энергию и упадет на ядро;  $\tau$  — классическое время жизни электрона на орбите. Хотя оно значительно больше периода обращения электрона по орбите  $a/v$  (так как  $c/v$  значительно больше единицы), но все же чудовищно мало:

$$\tau \approx 10^{-10} \text{ с.} \quad (7)$$

Это число — лучшая демонстрация бессилия классической физики. Мы пользовались только совершенно очевидными выводами (невозможностью существования стационарной структуры из заряженных частиц без движения и тем, что частица, движущаяся с ускорением, излучает), а получили, что атомы вовсе не могут существовать! Пожалуй, это главное противоречие между выводами классической физики и опытом. Именно для того, чтобы ликвидировать это противоречие, и была создана новая механика — квантовая (или волновая), основанная на совершенно новых представлениях, выработка которых потребовала коренной ломки наших старых наглядных представлений.

Квантовая механика (в отличие от классической — ньютоновской и релятивистской — эйнштейновской) создана не одним человеком, а целой плеядой замечательных физиков нашего времени: Максом Планком, Нильсом Бором, Луи де Бройлем, Вернером Гейзенбергом, Эрвином Шредингером, Вольфгангом Паули, Полем Дираком, Максом Борном.

## ПРИНЦИП НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Мы не будем проследивать, как постепенно трудами великих физиков создавалась непротиворечивая, логически совершенная квантовая механика. Возьмем «быка за рога» и попытаемся сформулировать основные принципы, позволяющие правильно представлять себе движение атомных частиц (электронов, например).

При описании микромира приходится отказаться от наиболее наглядного представления классической механики. Движение микрочастицы нельзя представлять себе как перемещение по определенной траектории. Дело в том, что понятие «траектория» неразрывно связано с необходимостью точно задать координату частицы и ее скорость в один и тот же момент времени. Но один из основных принципов квантовой механики утверждает: *частица не может иметь одновременно определенную координату и скорость или координату и импульс<sup>1)</sup>*. Это утверждение может быть записано в виде неравенства — знаменитого соотношения Гейзенберга:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{1}{2} \hbar. \quad (8)$$

Как надо понимать это соотношение, часто возводимое в ранг принципа? Символ  $\Delta x$  (или  $\Delta p_x$ ) означает неопределенность координаты  $x$  (или проекции импульса  $p_x$ ). Термин «неопределенность физической величины» означает следующее. Пусть атомная частица находится в определенном состоянии (надо было бы уточнить еще и понятие «состояние», но мы надеемся на интуицию читателя; слова «частица находится в определенном состоянии» достаточно понимать так:

---

<sup>1)</sup> В квантовой механике принято пользоваться не понятием скорости  $\vec{v}$ , а понятием импульса  $\vec{p}$ .

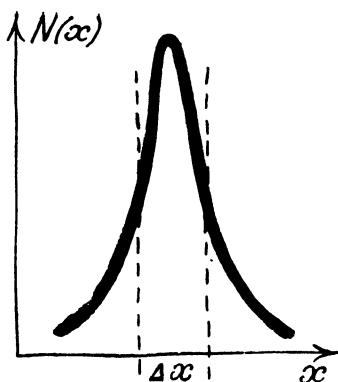


Рис. 1.

«частица совершает определенное движение»). Итак, частица находится в определенном состоянии. Мы производим измерение координаты частицы. Записываем полученный результат. Потом повторяем опыт. Опять записываем, и так много раз. Каждому значению координаты  $x$  припишем число  $N(x)$ , показывающее, сколько раз было получено именно значение  $x$ , и построим график (рис. 1),

из которого ясно видно, что принято обозначать символом  $\Delta x$ . Соотношение неопределенности содержит новый параметр, новую букву  $\hbar$  — так называемую постоянную Планка, величина которой приблизительно равна  $10^{-27}$  эрг·с. Мы пишем  $\hbar$ , следуя исторической традиции. Во многих книгах предпочитают использовать  $h = 2\pi\hbar$ .

Постоянная Планка — новая мировая константа. Она вошла в физику вместе с квантовой механикой только при отказе от классических представлений. Формально переход к классической механике всегда может быть выполнен, если положить  $\hbar = 0$ . (Не всегда, правда, его легко совершить, особенно если пытаться это сделать в окончательной формуле.) Действительно, согласно принципу Гейзенберга при этом неопределенности координаты и импульса ( $\Delta x$  и  $\Delta p_x$ ) одновременно могут быть равны нулю, частице, следовательно, дозволено перемещаться по траектории.

Не углубляясь в обсуждение принципа неопределенности, выясним, накладывает ли он ограничения на движение макроскопических тел. Пусть движется шарик с массой  $m = 1$  г, траекторию которого мы можем измерять с точностью до  $\Delta x = 10^{-4}$  см. Какая неопределенность скорости гарантируется принципом неопределенности Гейзенберга? Из соотношения неопределенности получаем  $\Delta v_x \geq \frac{\hbar}{2m\Delta x} \approx 10^{-23}$  см/с.

Этот пример убедительно показывает, что «бояться» квантовой неопределенности при рассмотрении движения паровоза, или автомобиля, или даже мельчайшей детали в этих машинах нет никаких оснований. Изменение скорости тела массой в 1 г, вызванное ударом молекулы воздуха, и то во много раз больше:  $\Delta v \approx 3 \cdot 10^{-19}$  см/с (мы считаем, что с телом сталкивается молекула водорода со средней энергией при температуре газа, равной 300 К).

Соотношение неопределенности многие годы подвергалось бесчисленным нападкам с самых разных позиций. Мало кто знает, что создатель теории относительности А. Эйнштейн является одним из создателей квантовой теории и одновременно одним из наиболее упорных ее противников (парадоксально, что Нобелевскую премию Эйнштейн получил за работы по квантовой теории). Так как в числе противников квантовой теории находился Эйнштейн, то трудно себе представить, что нападки на квантовую теорию связаны просто с косностью человеческой природы, с заторможенностью в восприятии нового, хотя, несомненно, и это тоже имеет место.

Существование принципа неопределенности означает, что атомная частица по своей природе требует для описания своего поведения статистического (вероятностного) подхода. Именно отказ от строгой определенности, присущей классической механике, труднее всего воспринимался физиками (даже Эйнштейном!).

Действительно, очень трудно себе представить (неспециалисту и сегодня), что поведение одного электрона, движущегося под воздействием строго определенной силы, нельзя полностью описать, не прибегая к таким понятиям, как вероятность, неопределенность, среднее значение, казалось неразрывно связанным с большим числом частиц. Однако это так. Самый строгий анализ показывает, что принятое в квантовой механике описание микрообъектов логически совершенно и в принципе не может вступить в противоречие с экспериментом. Точнее, нельзя, используя какие угодно явления, приборы, приспособления, расчеты, определить импульс и координату частицы точнее, чем это допускается соотношением неопределенности.

На первый взгляд кажется, что соотношение неопределенности означает предел человеческих возможностей: *мы не можем точнее узнать* одновременно импульс и координату частицы. Но это неправильно! Частица не имеет одновременно и импульса и координаты. Разнообразные попытки приписать частице уточняющие, как принято говорить, внутренние параметры кончаются неудачей. Более того, строго показано, что такие попытки несовместимы с современной квантовой механикой — наукой, описывающей мир атомов и молекул без каких-либо противоречий. Это удивительно, конечно, особенно если учесть, что попытки снабдить электрон размерами, ввести радиус электрона также безуспешны. Подчеркнем, что неопределенность координаты — это неопределенность в *положении* частицы, ни в коем случае не связанная с размерами частицы<sup>1)</sup>. Другими словами, электрон следует считать точкой, где-то находящейся в атоме,

Соотношение неопределенности имеет неожиданное следствие, особенно важное в физике твердого тела: движение квантовой частицы (электрона, иона, атома), локализованное в ограниченной области пространства, не может затормозиться — остановка ( $p_x = 0$ , а значит, и  $\Delta p_x = 0$ ) противоречит неравенству Гейзенберга, так как требует полной делокализации частицы ( $\Delta x = \infty$ ). Это неустранимое движение часто называют нулевым. Мы еще встретимся с ним.

## РАЗМЕРЫ АТОМА. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ УРОВНИ

Вернемся к атомным частицам. Электрон в атоме движется со скоростью  $v \approx 10^8$  см/с по окружности, т. е. его вектор скорости все время меняет направление. Это дает основание считать, что  $\Delta v_x \approx v$ . Действительно, если спроектировать движение электрона на плоскость, перпендикулярную траектории, то проекция скорости  $v_x$  изменяется от  $-v$  до  $+v$ , причем в точках остановки  $v_x = 0$ . Это и означает, что неопределенность скорости  $\Delta v_x$  порядка самой скорости. Поэтому неоп-

---

<sup>1)</sup> В некоторых случаях говорят о радиусе электрона. Он оказывается равным  $\approx 10^{-13}$  см, т. е. в  $10^5$  раз меньше, чем неопределенность положения электрона в атоме (см. ниже).

ределенность координаты электрона  $\Delta x$  не меньше  $\hbar/2mv$ . Поскольку масса электрона  $m \approx 10^{-27}$  г, то  $\Delta x \gtrsim 10^{-8}$  см, что совпадает с радиусом атома. Это означает, что сфера радиуса  $a$  содержит тот объем, в котором заведомо находится электрон, но об уточнении его положения в этом объеме не может быть и речи. Учитывая, что

$$a \approx \hbar/mv,$$

и подставляя сюда вместо  $v$  его значение, найденное раньше, получаем

$$a = a_0 = \hbar^2/me^2. \quad (9)$$

Мы сделали то, что обещали: выразили размер атома  $a$  через другие буквы — постоянную Планка  $\hbar$ , массу электрона  $m$  и его заряд  $e$ . Эта величина, примерно равная  $0,5 \cdot 10^{-8}$  см, носит название боровского радиуса и совпадает с радиусом атома водорода в основном состоянии. Радиус атома водорода был впервые вычислен Н. Бором, с именем которого связаны не только многие успехи квантовой физики, но и формулировка нового мировоззрения в современной физике, основанного на квантовой механике.

При таком поспешном изложении основ квантовой механики могут возникнуть недоразумения. От одного мы попытаемся предостеречь читателя.

В классической физике частица, притягиваемая к «кулоновскому» центру, если она не излучает, может двигаться вокруг этого центра по различным траекториям, размеры и формы которых определяются интегралами движения (энергия — один из них). Радиус круговой траектории зависит только от энергии электрона, а уравнение (4) описывает эту зависимость. Сказанное в этом разделе может заставить думать, что согласно квантовой механике электрон в атоме водорода может находиться только в одном-единственном состоянии, классической моделью которого служит орбита с боровским радиусом  $a = a_0$ . Этому состоянию (об орбите лучше не говорить, конечно!) соответствует энергия  $E = E_0 = -\frac{me^4}{2\hbar^2} = -13,53$  эВ (в атомной физике часто энергию измеряют в электронвольтах  $1 \text{ эВ} \approx 1,6 \cdot 10^{-12}$  эрг). Но это не единственное возмож-

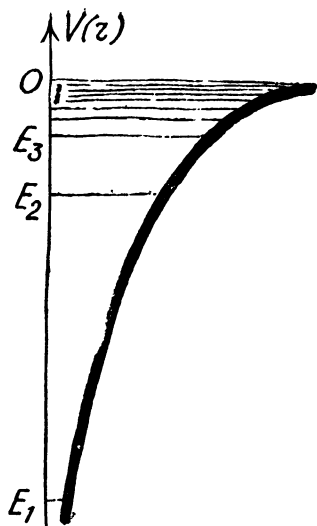


Рис. 2.

ное состояние электрона в атоме водорода. Это — *основное* состояние (с наименьшей энергией).

Кроме основного возможны возбужденные состояния — с большими энергиями. Однако отнюдь не любые, как в классической механике, а только избранные. Энергия электрона в атоме водорода может иметь значения, равные  $E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$ ,

где  $n = 1, 2, \dots$  (рис. 2). И если бы электрон не излучал, то находился бы в любом из этих состояний вечно. Тут нетерпеливый читатель, имея возможность, прервал бы автора: «Но ведь если бы

электрон *не излучал*, он и в классическом атоме „жил“ бы вечно на расстоянии  $a$  от ядра! И тут и там просто действует закон сохранения энергии...» Правильно, конечно. Но согласно квантовой механике разрешены не все состояния, а только с энергиями  $E_n$  и есть одно состояние (основное), находясь в котором электрон *не излучает вовсе*. Это первое. Второе. Излучение квантового электрона существенно отличается от излучения классической заряженной частицы: электрон «перескакивает» с одного уровня на другой (из  $n$  в  $m$ ), причем разность энергий уходит из атома в виде света. Закон сохранения при этом, конечно, выполняется, но в виде, странном для физика-классика:

$$E_n - E_m = \hbar \omega. \quad (10)$$

Здесь  $\omega$  — частота излученного света, а  $\hbar$  — все та же знаменитая постоянная Планка, входящая в соотношение неопределенности. Эта формула (она тоже принадлежит Н. Бору) объясняет структуру спектров атомов, многие десятилетия казавшихся совершенно загадочными. Когда энергия электрона сравнительно велика (большие  $n$ ), расстояние между близкими уров-

ниями очень малы и «перескоки» похожи на непрерывное приближение электрона к ядру. Расчет показывает, что частота излученного света равна частоте классического вращения электрона вокруг ядра. Свет именно такой частоты и должен излучать «классический электрон». Это один из примеров *принципа соответствия* — подтверждение квантовой механикой классического закона. Одновременно, правда, этому закону указано его место — его область применимости.

## ПРИНЦИП ПАУЛИ

Занимаясь структурой атома, мы попутно разрешили проблему, волновавшую еще Максвелла: объяснили, почему все атомы водорода одинаковы — потому, что все они находятся в одинаковом — основном — состоянии.

Одно из наиболее существенных достижений квантовой механики — объяснение периодического закона Менделеева, т. е. объяснение сходства и различия атомов химических элементов. Маловразумительное объяснение звучит так: потому, что у разных атомов разное число электронов<sup>1)</sup>. Мы не имеем возможности остановиться на этом вопросе подробно, но все же приостановимся. На первый взгляд кажется: ядро вместе с электронами создает некоторое электрическое поле, каждый электрон в нем и движется. В этом поле есть «разрешенные» состояния, а среди них — наинизшее. В нем и «сидят» все электроны. Добавление еще одного электрона мало что меняет, особенно если  $Z$  не очень мало. Но такая картина совершенно непохожа на действительность: сравните свойства Ag и K. Инертный газ и щелочной металл, а числа электронов (атомные номера) отличаются на единицу.

Структуру атома нельзя понять без учета своеобразного принципа запрета<sup>2)</sup>, сформулированного

---

<sup>1)</sup> Число электронов в атоме (обозначим его буквой  $Z$ ) совпадает с числом протонов в ядре (см. ниже) и носит название атомного номера.

<sup>2)</sup> Вы, конечно, замечали, что слово «закон» применяется и в естествознании и в юриспруденции. Это не случайный омоним. Закон природы, как и человеческий закон, всегда что-то запрещает. Например, классической частице запрещено двигаться не по траектории, задаваемой уравнениями Ньютона.

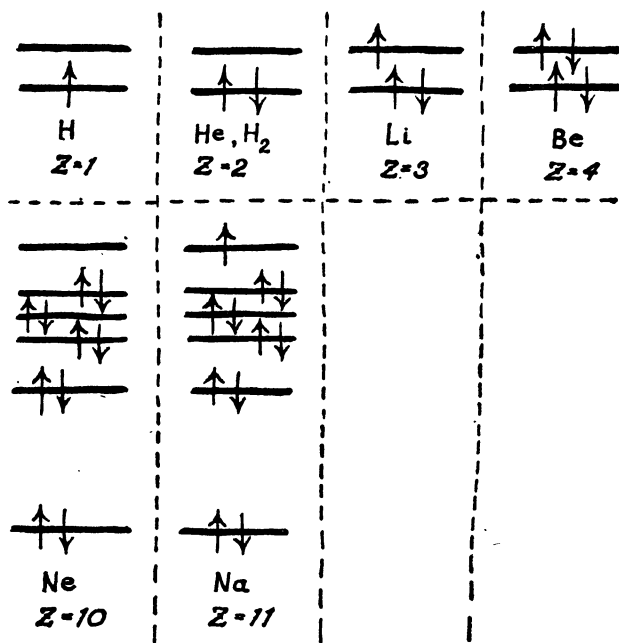


Рис. 3.

В. Паули (1925 г.). Его так и называют — принципом Паули. Принцип Паули запрещает двум (и более) электронам находиться в одинаковых состояниях. Пропусту так: каждому электрону — свое состояние (природа напоминает гостиницу, в которой только одноместные номера). Правда, придется еще уточнить, что такое «состояние». Иногда два состояния объединяют в одно и соответственно изменяют формулировку принципа Паули: одно состояние на два электрона (гостиница с двухместными номерами). И, кроме того, не все частицы в природе подчиняются принципу Паули.

Запрет настолько строг, что его не может «победить» даже естественное для всякой физической системы стремление «скатиться вниз» — занять состояние с наиболее низкой энергией. Периодический закон находит свое объяснение в размещении электронов атомов по состояниям с учетом принципа Паули (рис. 3). Так квантовая механика оказывается основой химии.

## СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И ВОЛНЫ

Вдумываясь в соотношение неопределенности, можно прийти к выводу, что оно имеет волновое происхождение. Действительно, соотношение такого типа имеет место в волновой оптике. Как мы уже говорили, плоская волна заполняет все пространство. Однако хорошо известно: можно сконцентрировать электромагнитное поле в конечной (если желательно, и в весьма малой) области пространства. Однако для этого приходится пользоваться большим числом волн. Одни из них усиливают друг друга, другие, интерферируя, погашают друг друга. Такая «конструкция» из волн носит название *волнового пакета*. Волновой пакет характеризуется интервалом  $\Delta k_x$  волновых чисел, которые необходимы для концентрации электромагнитного поля в области пространства  $\Delta x$ . Набор волновых векторов тем более разнообразен, чем меньше размеры  $\Delta x$  пакета в пространстве. Существует чисто волновое соотношение

$$\Delta x \Delta k_x \geq 1. \quad (11)$$

Напомним: здесь  $\Delta x$  — размер пакета в пространстве («неопределенность» координаты), а  $\Delta k_x$  — «неопределенность» волнового вектора в волновом пакете. Сравнивая последнее неравенство с соотношением неопределенности, мы видим, что они эквивалентны, если считать

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}. \quad (12)$$

Это равенство впервые написал французский физик Луи де Бройль в 1925 г. Оно носит его имя. Можно сказать: существование принципа неопределенности означает признание за частицами волновых свойств.

Как мы уже отметили, соотношение неопределенности — строгое следствие квантовой механики. Не менее строго квантовая механика показала, что волны обладают корпускулярными свойствами, а частицы — волновыми. Корпускулярные свойства волнового движения проявляются в том, что энергия  $E$  волн с частотой  $\omega$  равна целому числу квантов энергии  $\hbar\omega$  ( $E = n\hbar\omega$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ), а импульс  $\vec{P}$  волны равен  $n\hbar\vec{k}$ .

Противоречие между волной и частицей (точнее, альтернативность понятий «волна» и «частица»: *либо волна, либо частица!*) разрушилось с двух сторон. И со стороны частиц — они приобрели волновые свойства, и со стороны волн — они приобрели корпускулярные свойства. И волновые свойства частиц, и корпускулярные свойства волн нашли многократное экспериментальное подтверждение, причем в одних случаях электрон ведет себя как частица, а в других — как волна. То же — электромагнитные волны: в одних явлениях это типичные волны, в других — несомненно частицы. Та картина мира, которая была нарисована в предыдущем разделе, совершенно не соответствует сегодняшним представлениям. Подверглись ревизии основные понятия, из которых мы пытались строить мир,— частицы и волны.

## МЕСТО АТОМНОЙ ФИЗИКИ В СОВРЕМЕННОЙ НАУКЕ

Мы обсуждали соотношения между различными науками в их описании природы. Хотя нет единой науки — основы основ, все же ясно, что первичными (для физики) должны быть те науки, которые имеют дело с наиболее элементарными объектами — отдельными частицами или волнами. Таких наук две: механика и электродинамика (теория поля). Займемся механикой — наукой об элементарных движениях частиц. Эта изоляция от электродинамики, конечно, условна, если вспомнить, что движущаяся с ускорением заряженная частица излучает электромагнитные волны. Во всяком случае так обстоит дело, если исследовать движение заряженной частицы, исходя из принципов классической физики.

Сейчас известны четыре механики:

- 1) классическая (ньютоновская) механика;
- 2) релятивистская (эйнштейновская);
- 3) нерелятивистская квантовая механика;
- 4) релятивистская квантовая механика.

Первые три механики — логически завершенные науки. Четвертая находится в стадии развития, причем не столько в смысле получения новых результа-

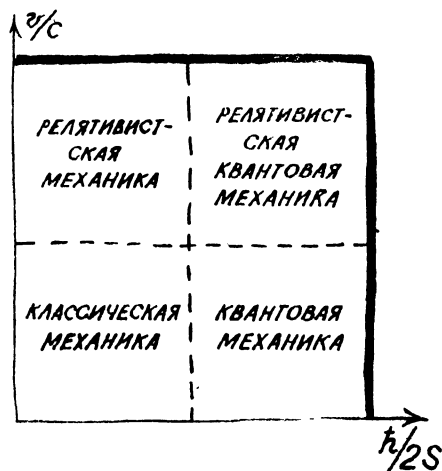


Рис. 4.

тов, сколько в создании основ, непротиворечивой логики самой науки.

Каждая из механик имеет свою область применимости, которую удобно изобразить в виде диаграммы (рис. 4). На этой диаграмме по горизонтали откладывается отношение постоянной Планка  $\hbar$  к удвоенному действию частицы  $S$ . «Действие» — некоторая величина размерности  $\text{г} \cdot \text{см}^2/\text{с}$ . Эту размерность имеет постоянная Планка. Действием можно (а иногда и весьма удобно) характеризовать движение частицы. Существуют строгие правила вычисления действия. Нам достаточно знать, что оценить действие  $S$  можно, перемножив характерный путь, проходимый частицей при заданном движении, и характерный импульс частицы. По вертикали откладывается отношение скорости частицы к скорости света в вакууме. Пунктирные линии — условные границы между механиками.

Строго говоря, при движении любого тела можно пользоваться релятивистскими или квантовыми законами. Но нужно ли это? Мы уже вычисляли неопределенность скорости шарика с массой 1 г. Получившаяся величина меньше, чем изменение скорости этого шарика, обусловленное ударом одной молекулы.

Конечно, в таких случаях вводить квантовые поправки нет никакой необходимости. Таким образом, с изменением точности расчета пунктирные линии на рис. 4 передвигаются. Есть еще минимум две причины, из-за которых положения пунктирных линий условны.

Существуют явления, которые кажутся на первый взгляд классическими. Например, магнетизм — способность магнита притягивать железные опилки и т. п. — интуитивно хочется отнести к левому нижнему углу. Но анализ показывает, что этого сделать нельзя, даже если разместить в этом углу все «настройки» — макроскопические дисциплины, создающиеся путем применения классической механики к ансамблю из огромного числа частиц. Классическая механика, дополненная статистикой, принципиально не может объяснить магнетизм. Это по своей природе квантовое явление. И даже, хотя оно обусловлено атомными частицами, в некотором смысле релятивистское явление, т. е. разместить его следует на границе между правыми квадратами. С такой условностью в положениях пунктирных линий на диаграмме легко бороться. Необходимо раньше понять явление, а потом отнести его к той или иной клетке схемы.

Вторая причина гораздо сложнее. Мы уже отмечали, что три из выделенных квадратов — познанная область. Эти квадраты изображают логически завершенные науки. Но четвертый квадрат содержит непознанную область. И здесь нас ожидают сюрпризы. Не только в смысле новых открытий, что очевидно, но и в смысле принципов построения схемы. Мы исходили из двух фундаментальных констант —  $\hbar$  и  $c$ . Но существуют другие параметры, роль которых, возможно, еще недостаточно понята. И карту, точнее, верхний правый угол, возможно, придется дробить на более мелкие участки. Например, из заряда электрона  $e$ , скорости света  $c$  и постоянной Планка  $\hbar$  можно составить знаменитую безразмерную комбинацию:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} \quad (13)$$

которая так и называется — «одна сто тридцать седьмая». Более редкое название этой величины — посто-

янная тонкой структуры. Неравенство  $\alpha \ll 1$  означает слабую связь между частицами и электромагнитным полем<sup>1)</sup>. Кроме заряда электрона есть и другие заряды, например константа, описывающая взаимодействие нуклонов (ядерных частиц — протонов и нейтронов). Соответствующая безразмерная комбинация не мала. Это в современном варианте теории приводит к математическим трудностям, усложнению аппарата теоретической физики, призванного описать взаимодействие нуклонов, но не затрагивает основ науки. А может быть, надо будет пересмотреть основы? И в результате пересмотра выяснится, что ядерным взаимодействиям надо выделить специальную область? Тогда появится третья ось на диаграмме. Пока не завершено здание, можно его мысленно достраивать самым фантастическим путем. И, как высказывался Нильс Бор, чем фантастичнее путь, тем больше шансов на успех.

Одна из попыток ликвидировать трудности<sup>2)</sup>, попытка, к которой возвращаются многократно, основана на введении в теорию фундаментальной длины  $\lambda_0$  или фундаментального временного интервала  $\tau_0 = \lambda_0/c$ . Трудно объяснить, что значит «ввести в теорию» величину  $\lambda_0$ . Совсем популярно: это означает, что должна быть подвергнута пересмотру структура пространства и времени. Во всех общепризнанных теориях и пространство и время пока непрерывны. Наличие  $\lambda_0$  означает отказ от этой непрерывности в пользу дискретности пространства-времени.

Из всей совокупности экспериментальных данных следует, что если есть фундаментальная длина, то она порядка (или меньше)  $10^{-13}$  см. Но это — классический радиус электрона! Чтобы получить эту величину,

<sup>1)</sup> Это позволяет на определенном этапе считать частицы и электромагнитные волны независимыми «кирпичиками», из которых строится картина мира. Заметим, что возможность построения нерелятивистской квантовой механики, применение ее к электронам в атоме, по существу, обусловлены малостью  $1/137$ -й. Иначе нельзя было бы говорить о разрешенных состояниях в атоме. Только благодаря малости  $1/137$ -й электрон сравнительно долго «живет» в возбужденном состоянии, а «потом» перепрыгивает в более низкое. О роли  $1/137$ -й см. специальный раздел.

<sup>2)</sup> Под трудностями понимается неумение теории последовательно описать наблюдаемые явления.

необходимо приравнять электростатическую энергию электрона радиуса  $r_0$ , равную  $\sim e^2/r_0$ , энергии покоя электрона  $mc^2$ . В результате получаем

$$r_0 = e^2/mc^2 \approx 2,5 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Приравнивание электростатической энергии к энергии, заключенной в массе электрона, означает, что вся масса электрона электростатического происхождения. Так ли это, пока неизвестно. Но вполне возможно, что многие трудности современной физики связаны с тем, что мы считаем частицы точечными. А это означает, что их электростатическая энергия (и масса) при этом должна быть равна бесконечности. Формально с этой трудностью научились бороться, но, к сожалению, соответствующие рецепты логически не связаны с основами теории.

## ИЗ ЧЕГО СОСТОИТ ОКРУЖАЮЩИЙ НАС МИР?

Мы попытаемся ответить на два вопроса:

- 1) Из чего состоит окружающий нас мир?
- 2) Какие силы действуют между...? Между чем, станет ясно позже, когда мы ответим на первый вопрос.

Как ни странно, правильный ответ на первый вопрос (точнее, начало правильного ответа) должен звучать неожиданно: «А ты кто такой?!» Дело в том, что людей разной специальности интересует разная степень углубленности при ответе на вопрос: «Из чего состоит...?»

Долгое время биологов полностью устраивал ответ: живое вещество состоит из клеток. Позже часто можно было услышать: живое вещество состоит из белков, а белки — из аминокислот, аминокислоты — из атомов и молекул. Молекулярные биологи интересуются, из каких атомов и молекул построены те или иные белки. Химика, как правило, интересует, из каких молекул состоит вещество, реже — из каких атомов. Для химика кислород — это молекула  $O_2$ . Физика не всегда интересуется, из чего и как построены атомы или молекулы. Например, физика, занятого изучением конденсированного состояния вещества, больше волнуют вопросы, связанные с поведением целых молекул и

атомов, чем углубление в структуру последних. Можно ли избежать субъективизма при ответе на вопрос «Из чего состоит?» или он всегда носит специализированный характер?

Вопрос «Из чего?», по сути дела, означает: как собрано, соединено, а следовательно, на что можно разложить?.. Чтобы разложить целое на составные части, необходимо приложить энергию. Что делает химик? Он, как правило, растворяет, иногда при этом нагревает. Энергия, которую он расходует в расчете на одну частицу, сравнительно мала. Поэтому он может разъединить только наиболее слабые связи. Это связи между молекулами. Поэтому-то для химика тела состоят из молекул. Иногда, правда, и на «уровне химии» это не так. Если погрузить поваренную соль ( $\text{NaCl}$ ) в воду, то растворение сопровождается электролитической диссоциацией — распадом молекулы  $\text{NaCl}$  на ионы  $\text{Na}^+$  и  $\text{Cl}^-$ . Это значит, что поваренная соль состоит из положительных ионов  $\text{Na}^+$  и отрицательных  $\text{Cl}^-$ . Чтобы подчеркнуть физичность процесса диссоциации, напомним, что его причина — ослабление электростатического (кулоновского) взаимодействия зарядов в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Сила притяжения (и отталкивания) обратно пропорциональна не только квадрату расстояния, но и диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ . Поскольку диэлектрическая проницаемость воды сравнительно велика. ( $\epsilon \approx 80$ ), это ослабление настолько значительно, что молекула «разваливается» на отдельные ионы.

Физик имеет возможность приложить к отдельной частице больше сил, скажем, ускорив другую частицу — «снаряд» и попав ею в изучаемый атом — «мишень». При таком попадании от атома может отделяться электрон. Мы заключаем, что атом состоит из электронов и положительно заряженных ядер. Используя более энергичные снаряды (например, ускоренные протоны), мы имеем возможность изучить структуру ядра. По существу, эту процедуру следует назвать «методом осколков». Мы разбили объект на части и уверены, что если сложить осколки, то получится правильное представление о том, из чего состоит целое. Так ли очевиден метод осколков?

Попадание частицы-снаряда может привести не к ионизации атома — отрыву электрона, а к его возбуждению. Частица-снаряд может при столкновении передать атому энергию  $E_1 - E_0$  или  $E_2 - E_0$  и т. д. и перевести его в возбужденное состояние (см. стр. 28). Такое столкновение называется *неупругим* в отличие от *упругого* столкновения, при котором частица-снаряд меняет только направление движения, а мишень остается в прежнем состоянии. Открытие ступенчатого возбуждения атомов сыграло важнейшую роль в построении физики атома.

Итак, возник возбужденный атом, который стремится перейти в состояние с меньшей энергией. Как правило, он достигнет этого, испустив лишнюю энергию в виде света. Значит ли это, что возбужденный атом состоит из световой волны и всего остального? Конечно, нет! Световая волна была создана в момент превращения возбужденного атома в атом, находящийся в основном состоянии. Оказалось, что атом может распадаться на то, из чего он не состоит. Может быть, это относится только к световым волнам? Действительно, как может волна, длина которой, скажем, сантиметр, «поместиться» в атоме, размер которого только  $10^{-8}$  см?

Иногда после попадания частицы-снаряда непосредственно в ядро (его радиус в 100 000 раз меньше радиуса атома, так что это — очень редкое событие) последнее возбуждается, т. е. поглощает энергию попавшей в него частицы (происходит неупругое рассеяние на ядре). После этого ядро излучает. Характер излучения различен. Иногда это протоны, иногда — нейтроны, иногда это просто свет, только очень коротковолновый (далеко за границей видимой области — так называемые  $\gamma$ -кванты). А иногда это электроны или их антиподы — позитроны, отличающиеся от электронов только знаком заряда. Это явление — излучение под воздействием ядерной бомбардировки — получило название искусственной радиоактивности. Оно было открыто Фредериком Жолио-Кюри.

Слово «искусственная» подчеркивает то обстоятельство, что в природе бывает и естественная радиоактивность — самопроизвольное излучение ядрами тяжелых атомов (тяжелее свинца):  $\alpha$ -частиц — ядер ато-

мов гелия,  $\gamma$ -частиц — квантов света,  $\beta$ -частиц — электронов или позитронов. Анализ  $\beta$ -распада показал, что, кроме электрона или позитрона, из ядра вылетает еще одна частица — нейтрино — нейтральная частица с нулевой массой покоя. Все эти частицы прекрасно идентифицированы:  $\beta$ -частицы — действительно электроны или позитроны. Означает ли это, что в ядре есть электроны? Сравнительно долго так и считали: ядро состоит из протонов и электронов. Если атомный вес ядра  $A$ , то это означало бы, что в ядре  $A$  протонов,  $A - Z$  электронов ( $Z$  — атомный номер<sup>1)</sup>), а всего частиц в ядре  $2A - Z$ . С развитием последовательной квантовой механики эта гипотеза делалась все менее удовлетворительной. Но только с открытием нейтрона — нейтральной частицы, масса которой примерно равна массе протона, стало все на свои места: в ядре  $Z$  протонов и  $A - Z$  нейтронов, т. е. всего  $A$  частиц.  $A$  электроны и нейтрино рождаются в момент перехода ядра из одного состояния в другое. Поэтому  $\beta$ -распад можно трактовать как одну из двух реакций:  $p \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$  или  $p \rightarrow p + e^+ + \nu$ , где  $\bar{\nu}$  — символ антинейтрино. Заметим, что только первую реакцию можно наблюдать в «чистом» виде — вне ядра, так как протон немного легче нейтрона.

Теперь мы можем окончательно ответить на вопрос: «Из чего состоит...?» Конденсированное вещество состоит из молекул, атомов или из ионов и электронов (металл). Молекулы состоят из атомов или ионов, атомы — из электронов и ядер, ядра — из протонов и нейтронов.

Эта простая схема не отменяется последними открытиями по физике элементарных частиц. Основными строительными «кирпичиками» вещества остаются протоны  $p$ , нейтроны  $n$  и электроны  $e$ . Остальные частицы, которых «развелось» очень много, рождаются и гибнут в ядерных реакциях (как электроны и нейтрино при  $\beta$ -распаде). Без них нарисованная выше картина мира не полна, но, несомненно, имеет право на

---

<sup>1)</sup> Атомный номер, как мы говорили, совпадает с числом электронов в нейтральном атоме. Электроны настолько легче протонов, что при подсчете веса ядра их можно не учитывать.

существование, так как правильно отражает объективную реальность.

Испытывая огромное уважение к «кирпичам» мироздания, выпишем их индивидуальные характеристики в виде таблицы.

	Заряд	Масса	Магнитный момент	Спин	Статистика
p	+1	1838	2,89/1838	1/2	Ф
n	0	1838+2,4	1,9/1838	1/2	Ф
e	-1	1	-1	1/2	Ф

В таблице заряд частицы дан в единицах заряда позитрона, масса — в единицах электронной массы.

## СПИН И СТАТИСТИКА ЧАСТИЦЫ И АНТИЧАСТИЦЫ

Таблица требует дальнейших объяснений. Почему в таких странных единицах выписано значение магнитного момента? Что такое спин и что означает «Ф» в колонке «Статистика»? Начнем со спина.

По-английски «spin» — веретено, волчок. Было установлено, что все перечисленные выше частицы (электрон, протон, нейтрон) нельзя представлять себе просто точками или шариками. Если уж представлять, то вращающимися шариками, причем вращающимися всегда. Вращение это нельзя ни затормозить, ни ускорить. Оно — внутреннее свойство частиц. С этим вращением связан строго определенный момент количества движения (говорят просто — момент), равный  $\sqrt{1/2(1+1/2)}\hbar$ . Величина  $\sqrt{3/4}$  написана специально в таком виде, чтобы подчеркнуть существование формулы  $\sqrt{s(s+1)}\hbar$ . Величиной спина принято называть значение  $s$ . Частица со спином  $s$  — это частица с моментом количества движения  $\sqrt{s(s+1)}\hbar$ . Все перечисленные выше фундаментальные частицы имеют спин, равный половине (у нейтрино спин равен тоже половине).

Поль Дирак построил квантовую механику частиц по спинам «половина» и показал, что такая частица

с электрическим зарядом  $e$  обладает магнитным моментом

$$\mu = e\hbar/2mc. \quad (14)$$

Эта величина, примерно равная  $10^{-20}$  эрг/Гс, носит название магнетона Бора. В таблице значение магнитного момента электрона принято за единицу. Обладать магнитным моментом означает являться источником *магнитного поля*. Существование заряда у электрона означает, что он — источник *электрического поля*. Вывод Дираком выражения для величины магнетона Бора означает установление единства источников электрических и магнитных полей. Электронный магнитный момент — вектор. Но весьма странный — он может ориентироваться в пространстве только двумя способами: либо по..., либо против... . Но относительно чего — безразлично (пока нет вокруг электрона магнитного поля). Момент количества движения всегда ориентируется  $g \doteq 2s + 1$  способами, при  $s = 1/2$  — двумя.

Каждая частица, обладающая зарядом, порождает магнитный момент, если движется с моментом количества движения  $\mathcal{L} \neq 0$ . «Классический» магнитный момент равен  $\mathcal{L} g_{\text{кл.}}$ ,  $g_{\text{кл.}} = e/2mc$ . Выражение, полученное Дираком для магнитного момента, показывает, что  $g_{\text{кв}}$  — коэффициент пропорциональности между моментами: спиновым  $1/2\hbar$  и магнитным  $\mu$  — вдвое больше классического:  $g_{\text{кв}} = e/mc$ . Величина  $g$  носит название *гиромагнитного отношения*.

Электрон демонстрирует практически идеальное согласие теории Дирака с экспериментом, а вот у протона магнитный момент в 2,89 раза больше, чем следует из приведенной формулы для магнитного момента. Магнитный момент нейтрона только для однообразия выписан в магнетонах Бора, так как, если верить формуле, он должен был бы просто равняться нулю — ведь нейтрон нейтрален.

Подчеркнем: хорошее совпадение магнитного момента электрона с магнетоном Бора — еще одно следствие малости постоянной тонкой структуры  $\alpha$ . Магнитный момент протона аномально велик, а у нейтрона не равен нулю из-за большого взаимодействия нуклонов с мезонами (см. ниже).

Неожиданным следствием теории Дирака, в свое время потрясшим умы, был вывод о существовании античастиц. Все частицы должны обладать «антиподами», т. е. должны существовать (и существуют) частицы, тождественные во всех отношениях, кроме заряда (он обратный) и магнитного момента (он тоже обратный). Но главное — это возможность аннигиляции. Частица и античастица, столкнувшись, исчезают (аннигилируют), порождая кванты света... И наоборот, квант света может родить две частицы — электрон и позитрон, например...

Все упоминавшиеся до сих пор частицы имеют свои анти... :

электрон — позитрон,

протон — антипротон,

нейтрон — антинейтрон,

и даже нейтрино — антинейтрино. .

Теперь, когда изучаются свойства атомов и всерьез обсуждаются проекты двигателей, основанных на превращении

вещество + антивещество  $\rightarrow$  фотоны,

уже не принято удивляться существованию античастиц, но, когда в 1932 г. впервые был обнаружен на фотопластинке след «положительного электрона», это воспринималось как триумф теоретической физики: ведь Дирак предсказал его существование.

Наконец, несколько слов о последнем столбце таблицы. Буква  $\Phi$  — первая буква фамилии одного из крупнейших физиков XX века — Эрико Ферми. Электроны, протоны и нейтроны часто называют *фермионами*. К этому классу относятся все частицы с полуцелым спином. Частицы с целочисленным или нулевым спином (спин может быть целым либо полуцелым) называются *бозонами* (по имени индийского физика Бозе). Такое, казалось, бы несущественное различие между частицами (целый или полуцелый спин у них) приводит к радикальному отличию в поведении системы большого числа фермионов от системы бозонов. Принципу Паули подчиняются только фермионы. На бозоны запрет не распространяется. Более того, бозоны как бы стремятся коллективизироваться — собраться (сконденсироваться).

роваться) в одном состоянии. Это их свойство — основа квантовых генераторов света — лазеров и причина таких явлений, как сверхтекучесть и сверхпроводимость.

## ФОТОН

Один из заданных ранее вопросов пока остался без ответа: «Какие силы действуют между ...?» Пока мы не можем ответить на него. Прежде надо познакомиться с еще одним членом семейства элементарных частиц — *фотоном*.

Кроме перечисленных в таблице фундаментальных частиц, в мире в достаточном количестве имеются электромагнитные волны. Мы уже говорили: благодаря принципу неопределенности различие между частицей и волной не столь разительно, как это может вначале показаться. Мы даже установили правило перехода от частиц к волнам и обратно. Характеристикой корпускулярных свойств объекта является импульс, волновых — волновой вектор. Они связаны соотношением де Бройля, причем это соотношение можно читать как слева направо, так и справа налево.

Продвинемся дальше по пути объединения корпускулярных и волновых свойств частиц. Выпишем для этого корпускулярные и волновые формулы рядом, вспомнив, что движение частицы характеризуется не только импульсом  $\vec{p}$ , но и энергией  $E$ , а волны — не только волновым вектором  $\vec{k}$ , но и частотой  $\omega$  ( $m$  — масса частицы,  $c$  — скорость света).

Свободная частица	Волна в вакууме
$E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4$	$\omega^2 - c^2 k^2 = 0$

Вглядываясь в эти соотношения, видим, что их различие (во всяком случае после умножения на квадрат постоянной Планка второго из них) стирается, если положить  $E = \hbar\omega$  и считать, что для электромагнитной волны  $m = 0$ .

Строгое правило квантовой механики гласит, что каждой частице с энергией  $E$  можно сопоставить волновой процесс с частотой  $\omega$ . И, как всегда, наоборот: если есть волна с частотой  $\omega$ , то можно считать, что движется частица с энергией  $\hbar\omega$ . Другими словами, корпускула проявляет свои волновые свойства, а волна — корпускулярные. В чем эти свойства могут проявиться? Например, в том, что не может волна с частотой  $\omega$  иметь энергию, меньшую чем  $\hbar\omega$ . Это очень похоже на частицу — ведь не может быть полчастицы! Согласно же классическим представлениям энергия волны пропорциональна квадрату ее амплитуды и может быть сколь угодно мала.

Итак, электромагнитной волне можно поставить в соответствие частицу. Она получила название *фотон*. Это, конечно, с житейской точки зрения странная частица. Ее масса равна нулю, а скорость всегда одинакова и равна  $c$ . Энергия, правда, у нее отнюдь не всегда одинакова: она тем больше, чем больше импульс фотона (или чем меньше длина электромагнитной волны). Действительно, из приведенных выше формул получаем связь между энергией и импульсом фотона:

$$E = cp. \quad (15)$$

Не следует думать, что это соотношение разительно отличает фотон от частицы. Пожалуй, в этом смысле он скорее похож на частицу, только не на обычную — *медленную*, а на ультрарелятивистскую. Из формулы  $E = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}$  видно, что при очень больших импульсах ( $p \gg mc$ ) энергия частицы приблизительно равна  $cp$ . Заметим, что обычное соотношение

$$E = p^2/2m \quad (16)$$

тоже получается из формулы  $E = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}$ , если считать, что  $p \ll mc$ . Тогда

$$E \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m}.$$

Естественно, мы получили обычное выражение для кинетической энергии свободной частицы, а слагаемое  $mc^2$  — энергия покоя частицы. Последняя в ньютонов-

ской механике вообще не играет никакой роли, так как энергия определена с точностью до аддитивной константы (энергию можно отсчитывать от любого значения).

Мы дополнили картину мира: кроме частиц, проявляющих волновые свойства, — электрона, протона, нейтрона, в мире есть фотоны — кванты электромагнитного поля — частицы с нулевой массой покоя.

Заметим также, что в мире, несомненно, много нейтрино<sup>1)</sup>. Они рождаются в ядерных реакциях и живут очень долго, так как плохо поглощаются веществом. Их роль в структуре мира еще плохо выяснена.

Соотношение  $\omega = ck$  между частотой и волновым числом электромагнитной волны не придумано, не постулировано. Оно может быть выведено из уравнений Максвелла для напряженностей электрического и магнитного полей. Уравнения Максвелла играют в электродинамике такую же роль, какую играют уравнения Ньютона в механике. В вакууме уравнения Максвелла описывают распространение электромагнитных волн, причем они имеют решение лишь в том случае, если частота волны и ее волновое число связаны соотношением  $\omega = ck$ .

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЧАСТИЦ

Теперь мы можем перейти к вопросу о силах, действующих между частицами, образующими мир.

Раньше мы убедились, что структурной единицей вещества следует считать то или иное сочетание частиц в зависимости от того, сколько энергии мы готовы приложить, чтобы произошла диссоциация, распад. Но количество энергии, требуемое на диссоциацию, однозначно связано с силой взаимодействия между составными частями системы. Значит, вопросы о структуре и о силах тесно связаны. На каждом этапе дробления вещества мы должны выяснить одновременно и силы взаимодействия между осколками. Естественно, что взаимодействие сложных частиц (атомов, молекул)

---

<sup>1)</sup> У нейтрино связь между энергией и импульсом такая же, как у фотона, ведь масса нейтрино равна нулю.

должно быть понято на основании знания взаимодействия между их составными частями.

Анализ сил взаимодействия мы начнем с привычного электростатического кулоновского взаимодействия заряженных частиц.

Чтобы внушить уважение к кулоновским силам взаимодействия, приведем один, правда надуманный, но очень впечатляющий пример. Выясним, с какой силой взаимодействовали бы два шарика размером около  $1 \text{ см}^3$ , если бы равенство зарядов в них рассогласовывалось на одну миллиардную. Другими словами, пусть в каждом из шариков есть  $10^{-9} \cdot 10^{23} = 10^{14}$  нескомпенсированных электронов или протонов. Тогда сила взаимодействия шариков, находящихся на расстоянии  $1 \text{ см}$  друг от друга, была бы равна около  $10 \text{ т!}$  Легко себе представить, что весь наш мир выглядел бы совершенно иначе, если бы равенство зарядов выполнялось не так строго, как это имеет место в действительности. Заметим, что регулирующим механизмом, запрещающим рассогласование зарядов, служат подвижные электроны, легко переходящие от тела к телу.

Проанализируем несколько подробнее взаимодействие между двумя заряженными частицами. Пусть их заряды равны  $e_1$  и  $e_2$  соответственно. Уберем одну из частиц (отнесем ее на бесконечность!). Первая частица создаст вокруг себя электрическое поле, потенциал которого  $\phi$  равен  $e_1/r$ . Что это значит? Это означает, что если на расстоянии  $r$  от заряда  $e_1$  поместить вторую частицу с зарядом  $e_2$ , то на заряд  $e_2$  будет действовать сила, равная  $e_1 e_2 / r^2$ , направленная от заряда  $e_1$ , если заряды одного знака, и к заряду  $e_1$ , если заряды разных знаков. Конечно, можно было бы начинать с  $e_2$  и «вносить» заряд  $e_1 \dots$

Зачем же понадобилось вводить поле и его потенциал  $\phi$ ? Чтобы подчеркнуть: в точке, где находится заряд, что-то есть, какая-то реальность, действующая на заряд. Более научно: поле введено для того, чтобы избавиться от дальнего действия (от действия на расстоянии).

Однако вводи поле или не вводи, а сила, действующая между зарядами, равна

$$F = \frac{e_1 e_2}{r^2}.$$

Написанная формула должна вызывать недоумение у читателя, который привык к мысли, что скорость света  $c$  — максимальная скорость, с которой что-либо может быть передано. Действительно, что это значит: сила зависит от расстояния между частицами? А если одна частица немного сдвинется, другая в то же мгновение это почувствует? Это противоречит фундаментальному принципу эйнштейновской механики — конечности скорости распространения сигнала. Хорошо известно, почему возникло недоразумение: мы абсолютизировали приближенный закон, а закон Кулона именно таков. Он правильно описывает взаимодействие между частицами отнюдь не всегда. Как же правильно описать взаимодействие между частицами, чтобы не вступить в противоречие с теорией относительности? Для этой цели и служит электрическое, а точнее, электромагнитное поле. На частицу, находящуюся в данной точке пространства, действует сила, соответствующая напряженности электрического и магнитного полей именно в этой точке. Если один из зарядов, которые создают поле, передвинется, то поле вблизи него изменится, от него побежит волна возмущения, которая через время  $r/c$  дойдет до второго заряда, находящегося на расстоянии  $r$ . Таким путем электромагнитное поле, как мы уже говорили, обеспечивает близкодействие. Эта картина несколько усложняется из-за самодействия, т. е. из-за действия собственного поля на частицу, порождающую это поле. При соответствующих расчетах необходимо проявлять осторожность,

На классическом языке взаимодействие заряженных частиц осуществляется по такой схеме:

частица  $\longrightarrow$  электромагнитное поле  $\longrightarrow$  частица,

которой, как это ясно из предыдущего, соответствует квантовая схема:

частица  $\longrightarrow$  фотон  $\longrightarrow$  частица.

Более пространно это можно сформулировать так: заряженная частица рождает фотон, который поглощается другой частицей. Это и обуславливает силу взаимодействия частиц. Придется поверить, что закон Кулона (сила обратно пропорциональна квадрату рас-

стояния между частицами) — следствие того факта, что масса фотона равна нулю.

Естественно возникает вопрос: а что бы было, если бы частицы — переносчики взаимодействия имели конечную массу? Оказывается, в этом случае силы взаимодействия убывали бы быстрее кулоновских. Можно даже указать закон спадаения силы  $F$  на больших расстояниях:

$$F \sim e^{-r/r_0}.$$

Величину  $r_0$  называют радиусом действия силы  $F$ . Она простым соотношением связана с массой частицы-переносчика  $m$ :  $r_0 = \hbar/mc$ .

Силы, быстро убывающие с расстоянием, в природе известны. Это — ядерные силы, которые удерживают нуклоны (протоны и нейтроны) в ядре. Они очень велики (примерно в сто раз мощнее кулоновских сил), но действуют только на малых расстояниях. Радиус действия ядерных сил примерно равен  $10^{-13}$  см.

Японский физик Юкава предположил, что ядерные силы обеспечиваются частицами, которые он назвал мезонами (т. е. промежуточными). Почему промежуточными? Используя последнюю формулу, убеждаемся, что при  $r_0 \approx 10^{-13}$  см масса частицы-переносчика должна примерно равняться тремстам электронным массам. Масса мезона располагается между массой электрона и массой протона. Поэтому частица и названа мезоном.

Самое удивительное то, что мезоны, отвечающие за ядерные взаимодействия, действительно были обнаружены после предсказания Юкавы. Они получили название  $\pi$ -мезонов. В природе есть три типа  $\pi$ -мезонов:  $\pi^-$ ,  $\pi^+$ ,  $\pi^0$ . Индекс соответствует знаку электрического заряда мезона. Таким образом, носитель сил связи между нуклонами электрически заряжен. Заряженные мезоны ( $\pi^-$  и  $\pi^+$ ) могут испускать и поглощать фотоны. Картина взаимодействия даже элементарных частиц значительно усложняется.

Спин  $\pi$ -мезонов равен нулю. Мезоны являются бозе-частицами. Это — информация, чтобы оградить читателя от поспешных выводов. Таблица элементарных частиц на стр. 48 могла внушить подозрение, что все элементарные частицы — фермионы. Фотон, о ко-

тором уже шла речь, тоже бозон; не подумайте только, что частицы — переносчики взаимодействия обязательно бозоны. Это не так. Между нуклонами есть слабое взаимодействие, носителями которого являются электроны и нейтрино (фермионы).

Итак, на расстояниях порядка  $10^{-13}$  см и меньше действуют ядерные силы. Они связывают между собой нуклоны (протоны и нейтроны). В смысле ядерных сил нейтрон «заряжен», а электрон «нейтрален», т. е. не взаимодействует с нуклоном с помощью ядерных сил, даже если приблизится к нему на расстояние  $10^{-13}$  см.

Отметим еще одну особенность ядерных сил — их зависимость от спинов нуклонов. Точнее, от взаимной ориентации спинов. Ведь спины — это как бы «стрелки», которые могут различным образом ориентироваться друг относительно друга.

Следующая после ядра структурная единица вещества — атом. Электроны в атоме взаимодействуют друг с другом и с ядром. Главная сила в атоме — кулоновская. Мы уже оценивали скорость электрона в атоме и убедились, что она значительно меньше (более чем в сто раз) скорости света. Это позволяет в первом приближении не учитывать эффекты запаздывания и использовать далекодействующий закон Кулона.

Электроны, протоны, нейтроны обладают магнитными моментами, которые тоже должны взаимодействовать друг с другом (одноименные магнитные полюса отталкиваются, разноименные — притягиваются). Должны ли мы учитывать эти силы? Может быть, на атомном уровне их нет вовсе? Конечно же, это не так. Эти силы не только есть в атоме, но и закон взаимодействия двух микроскопических магнетиков тот же, что и обычных магнитных стрелок (если последние удалены на расстояние, большое по сравнению с размером стрелки). Сила, действующая между двумя магнетиками  $F_m$ , обратно пропорциональна четвертой степени расстояния между моментами и прямо пропорциональна произведению магнитных моментов:

$$F_m \approx \mu^2/r^4,$$

где  $\mu$  — магнетон Бора. (Мы для простоты рассматриваем взаимодействие двух электронов, магнитный мо-

мент ядра значительно меньше; знак приблизительно-го равенства вместо знака точного равенства написан потому, что сила  $F_m$  зависит не только от расстояния, но и от взаимной ориентации магнитных «стрелок».) Так как расстояние между электронами в атоме по порядку величины равно размеру атома  $a$ , то  $F_m \approx \mu^2/a^4$ , а сила кулоновского взаимодействия частиц  $F_{кул} = e^2/a^2$  (см. (1)).

Если учесть выражение для магнетона Бора  $\mu$  (см. (14)), а также для размера атома  $a$  (см. (9)), то убедимся, что магнитные силы значительно меньше электростатических:

$$F_m/F_{кул} \approx (e^2/\hbar c)^2 = (1/137)^2 \ll 1. \quad (17)$$

Это неравенство — принципа пренебрежения магнитными взаимодействиями при грубом описании атома<sup>1)</sup>. Во многих тонких, но вполне наблюдаемых явлениях эти силы играют все же существенную роль — о них забывать нельзя.

Продвижемся дальше на пути усложнения конструкций из микроскопических частиц. Силы, действующие между атомами, по сути дела, электростатического происхождения. Хотя атом как целое нейтрален, но заряды в нем находятся не в одной точке — они несколько разнесены. Очень грубо можно себе представить так: когда атомы приближаются друг к другу, разноименные заряды притягиваются, а одноименные — отталкиваются. Сила, действующая между атомами, есть разность сил притяжения и отталкивания. Влияние, которое оказывает один атом на движение электронов в другом, такое, что результирующая сила — всегда притяжение. Так происходит до тех пор, пока атомы не сдвинутся так близко, что почти соприкасаются. Тогда «включается» отталкивание. Если есть такое расстояние, на котором сила притяжения равна силе отталкивания, то образуется молекула.

Какова же природа силы отталкивания? Ведь после того, как мы выяснили, что размеры электрона в сто тысяч раз меньше размеров атома, появилось (или должно было появиться) ощущение, что атом в основ-

---

<sup>1)</sup> Обратите внимание на еще одно проявление малости  $1/137$ -я!

ном состоит из «пустоты» — электроны и ядро в нем занимают удивительно мало места. Что же заставляет атом вести себя как некий твердый шарик? Даже в серьезные книги вошло такое понятие, как атомный радиус. Кристалл можно и нужно представить себе как набор правильно уложенных шаров (вроде бильярдных в угольнике на бильярдном столе).

Когда атомы сближаются, уменьшается «жизненное пространство» электронов и неопределенность координаты уменьшается, что приводит к увеличению неопределенности импульса (вспомните соотношение Гейзенберга), а тем самым к увеличению самого импульса. Это означает, что возрастает кинетическая энергия движения электронов, а с ней и полная энергия. Но, когда при сближении частиц их энергия увеличивается, это означает, что они отталкиваются: им выгодно — энергия при этом меньше — находиться далеко друг от друга... Как видите, сила отталкивания имеет специфически квантовую природу.

Мы не будем двигаться дальше, рассматривая взаимодействие между молекулами. В принципе оно имеет ту же природу, что и взаимодействие между атомами.

## ЕЩЕ РАЗ О 1/137-И

Несколько раз на протяжении этой части книги мы обращали внимание на величину постоянной тонкой структуры 1/137, являющейся, по существу, *мерой* заряда электрона, правда, если считать квант действия — постоянную Планка —  $\hbar$  и скорость света  $c$  более «основными» величинами, чем заряд:  $e^2/\hbar c = 1/137$ .

Приведем еще раз две уже написанные формулы: для размера атома водорода  $a_0 = \hbar^2/mc^2$  и для характерной энергии электрона в атоме  $|E_0| = e^4 m/2\hbar^2$ . Их можно записать так:

$$a_0 = (137)^2 r_0, \quad |E_0| = \frac{mc^2}{2(137)^2},$$

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2,5 \cdot 10^{-13} \text{ см.} \quad (18)$$

Первое равенство вскрывает причину «пустоты» атома, а второе объясняет нерелятивистский характер

атомной механики. Интересно отметить, что малость  $1/137$  проявляется иногда совсем неожиданно. Например, в природе нет «сильных» диамагнетиков. Диамагнитная восприимчивость  $\chi$  всегда мала. Оказывается потому, что значение ее выражается через  $1/137$ -ю:  $\chi \approx (1/137)^2$ . Число таких примеров можно множить. А этот раздел написан, чтобы обратить внимание на принципиально важное обстоятельство. Существование безразмерной комбинации, связывающей разнородные (по смыслу) величины, — есть важный факт, делающий наш мир таким, каким он есть. В «Занимательной физике» Л. М. Перельмана я читал очерк о том, как выглядел бы Мир, будь он откровенно релятивистским, т. е. что было бы, если бы скорость света была поменьше, а все остальное в Мире осталось бы прежним (в частности, наше восприятие Мира). А каким был бы Мир, если бы  $e^2/\hbar c = 1$ ? Или отношение масс протона и электрона не равнялось бы 1840?

## ЧАСТИЦЫ ИЛИ ВОЛНЫ?

Корпускулярно-волновой дуализм, или корпускулярно-волновая двойственность атомных частиц, — столь важное для понимания окружающего нас мира свойство, что необходимо подробно остановиться на непосредственных экспериментальных доказательствах этой удивительной особенности микроскопических объектов.

Доказательство двойственной природы атомных частиц и света, по существу, просто и требует понимания только основных представлений физики. И в какой-то мере ощущения того, как должна в соответствующих условиях вести себя волна, а как частица.

Двойственность света была доказана раньше, чем были открыты волновые свойства электрона. И, наверное, первые высказывания о квантовой природе именно света (о его зернистой, дискретной структуре) были сформулированы не только потому, что этого потребовали экспериментальные факты (часто многие годы отделяют наблюдение от объяснения), но и потому, что на протяжении нескольких веков среди физиков шла борьба между сторонниками корпускулярной тео-

рии света и адептами волновой. Правда, победила волновая теория.

В конце XIX века в этом никто не мог сомневаться. Волновая теория не только справилась с объяснением прямолинейного распространения света, законов преломления и отражения (при нескольких произвольных допущениях с объяснением этих явлений справлялась и корпускулярная теория), но были поставлены специально задуманные опыты, которые должны были совершенно однозначно ответить на вопрос: частицы или волны? И ответ был абсолютно однозначным — волны. Речь идет об опытах по интерференции и дифракции. Более того, была измерена длина световых волн и установлено соответствие между цветом и длиной волны. И наконец, после создания теории электромагнетизма всякие сомнения совершенно отпали. Однозначно была установлена электромагнитная природа волн света, и получила замечательное толкование скорость его распространения. Объединение Максвеллом электричества, магнетизма и оптики в одну стройную, логически непротиворечивую теорию было замечательным достижением человеческого разума. Одним из тех достижений, о которых человечество не забывает даже тогда, когда более совершенная теория устанавливает границы применимости старой теории, казавшейся всеобъемлющей.

«В истории человечества (если посмотреть на нее, скажем, через десять тысяч лет) самым значительным событием XIX столетия, — как считает крупнейший физик-теоретик Ричард Фейнман, — несомненно, будет открытие Максвеллом законов электродинамики. На фоне этого важного научного открытия гражданская война в Америке в том же десятилетии будет выглядеть мелким провинциальным происшествием»<sup>1)</sup>.

Итак, совершенно однозначно установлена волновая природа света. Но...

*Тепловое излучение абсолютно черного тела* — излучение тела, которое поглощает падающий на него свет, но не отражает — совсем или почти совсем. Со-

---

<sup>1)</sup> Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике: Электричество и магнетизм. — М.: Мир, 1966, с. 27.

вдать такое тело просто. Надо маленьким отверстием связать полость в теле с внешним миром. Отверстие и есть абсолютно черное тело. Попавший на него луч света войдет в полость, запутается в ней и раньше поглотится, чем выйдет обратно. Но если стенки полости достаточно нагреть, то, конечно, из нее будет излучаться свет, световые волны, как все думали. Исследованием излучения абсолютно черного тела в начале века занимался М. Планк.

Физиков очень интересовали законы излучения абсолютно черного тела (некоторые из них были открыты до того, как начал свои исследования М. Планк). Дело в том, что из самых общих соображений было ясно, что законы излучения абсолютно черного тела связаны только с природой самого излучения, не зависят от того, что происходит в стенках. Исследование излучения абсолютно черного тела дает возможность изучать свет (электромагнитные волны?) в чистом виде. Важно подчеркнуть простоту объекта исследования — только свет, ничего более. И теория излучения абсолютно черного тела была. Она исходила, казалось, из совершенно естественных для волновой теории представлений: электромагнитные волны находятся внутри полости. Стенки полости имеют определенную температуру. Волны должны прийти в равновесие со стенками и, следовательно, иметь ту же температуру  $T$  (как два тела, находящихся в контакте).

Может возникнуть вопрос: как можно говорить о температуре волн? Можно: такое расширение понятия температуры, чтобы ею можно было охарактеризовать электромагнитные волны, производится совершенно естественно (мы, к сожалению, не можем на этом здесь остановиться). Подсчет плотности энергии электромагнитного излучения  $E_\omega$ , приходящейся на узкий интервал частот, показывает:

$$E_\omega = V\omega^2 k_B T / \pi^2 c^3$$

( $V$  — объем полости,  $\omega$  — частота света,  $c$  — скорость света, а  $T$  — температура в градусах Кельвина,  $k_B$  — постоянная Больцмана  $1,4 \cdot 10^{-16}$  эрг/°C она «переводит» градусы в эрги — выражает температуру в энергетических единицах). Эту формулу называют законом

Рэлея — Джинса. Она неплохо описывает экспериментально наблюдаемое излучение, пока мы интересуемся малыми частотами, но совершенно не может справиться с описанием всего излучения (всех частот).

Легко видеть, что если пытаться подсчитать энергию, излучаемую на всех частотах, то мы получим просто абсурдный результат. Полная энергия излучения равна бесконечности. Ситуация получила прозвище ультрафиолетовой катастрофы. Правда, эксперименты показали, что излучение на больших частотах не удовлетворяет закону Рэлея — Джинса, а описывается странной формулой (ее вывели, пытаясь свести концы с концами), явно противоречащей классическим представлениям: плотность энергии экспоненциально спадает с ростом частоты. М. Планк тщательно проанализировал все, что легло в основу вывода формулы Рэлея — Джинса, и понял: изменить в этой формуле ничего нельзя, оставаясь на привычных классических позициях; ее нельзя подправить. И с ней нельзя согласовать экспериментальные результаты. Он высказал совершенно невероятное предположение: энергия волны с частотой  $\omega$  не может быть любой, а принимает дискретные значения  $\hbar\omega$ ,  $2\hbar\omega$ ,  $3\hbar\omega$  и т. д. Постоянная  $\hbar$  потом получила название постоянной Планка. Ее значение мы уже выписали. Как только это странное предположение было сделано, все стало на место. Введенная формула — формула Планка

$$E_{\omega} = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega^3}{e^{\hbar \omega / k_B T} - 1} \quad (19)$$

прекрасно описывает результаты эксперимента. Когда значение  $\hbar\omega$  (количество энергии, равное  $\hbar\omega$ , получило название *кванта энергии* или попросту кванта) значительно меньше температуры (в эргах), то формула Планка переходит в формулу Рэлея — Джинса. Имеет ли физический смысл порция энергии  $\hbar\omega$ , квант? Трудно поверить в это, так как совершенно невозможно (оставаясь на классических позициях, конечно) понять, почему электромагнитная волна обладает нормированными порциями энергии. А ведь иначе не объяснишь излучение абсолютного черного тела. Путаница да и только. Мы-то, конечно, уже знаем, что

«дикое» предположение Планка — начало революции в физике, первое «наступление квантов».

Прежде чем перейти к другому явлению, заметим, что формулу Планка можно записать так:

$$E_{\omega} = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / k_B T} - 1}. \quad (20)$$

Видно: дробь  $\hbar \omega / (e^{\hbar \omega / k_B T} - 1)$  заменила множитель  $k_B T$  — температуру. Такая запись нам в дальнейшем будет полезна.

**Фотоэффект** — сравнительно простое явление. Освещая металлическую поверхность, можно вырвать из металла электроны. Подробные исследования электронов, вылетевших из металла, показали, что они как-то странно себя ведут. Энергия электронов почему-то зависит от частоты падающего света, а интенсивность света только увеличивает число вылетающих электронов. Легко понять: если свет — электромагнитная волна, то именно от интенсивности, определяющей амплитуду волны, должна зависеть энергия вылетающих электронов, а частота просто ни при чем.

Истинную природу фотоэффекта понял А. Эйнштейн. Свет — набор квантов — фотонов. Взаимодействие электронов металла со светом заключается в том, что электроны поглощают кванты света (порции электромагнитной энергии) и потому вырываются из металла. Энергия кванта тем больше, чем больше частота. Поэтому, чем больше частота, тем больше энергия вылетевшего электрона. А увеличение интенсивности означает, что на металл падает больше фотонов, следовательно, больше поглощается, и потому больше вылетает электронов. Признание за светом дискретной, квантовой структуры опять (как и в излучении абсолютно черного тела) прекрасно объяснило экспериментальные факты.

А для нашей цели лучше сказать иначе (как бы сформулировать обратную теорему): излучение черного тела и эксперименты по фотоэффекту показывают, что свет имеет дискретную, квантовую структуру, он состоит из фотонов.

**Комптон-эффект.** Но, пожалуй, самым наглядным экспериментом служит эксперимент по рассеянию жест-

ких рентгеновских лучей. В том, что рентгеновские лучи — волны, сомневаться не приходится. С их помощью (сравнением с их *длиной волны*) измеряют расстояния между атомами в кристаллической решетке. Что предсказывает классическая теория? Прежде всего, что рассеянные лучи будут иметь ту же частоту (длину волны), что и падающие. Действительно, электромагнитная волна раскачивает электроны, они начинают колебаться с частотой волны и излучать, естественно, волны той же частоты. А квантовая? Согласно квантовой теории свет — набор квантов — фотонов — частиц с энергией  $\hbar\omega$  и импульсом  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$  ( $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  — длина световой волны). Столкнувшись с электроном, фотон часть энергии и импульса отдает электрону. Уменьшение его энергии проявится в изменении его частоты или длины волны ( $\omega = 2\pi c/\lambda$  или  $\epsilon = cp$ ). При расчете изменения длины волны  $\Delta\lambda$  можно воспользоваться просто законами сохранения энергии и импульса — больше ничего привлекать не нужно. Окончательный результат тоже поразительно прост:

$$\Delta\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc} (1 - \cos \varphi), \quad (21)$$

где  $\varphi$  — угол рассеяния, угол между направлениями движения падающего и рассеянного фотонов; величина  $2\pi\hbar/mc$  имеет размерность длины, равна  $\approx 0,024 \text{ \AA}$  и называется комptonовской длиной волны, по имени А. Комптона, в 1922—1923 гг. измерившего сдвиг длины волны рентгеновского излучения и обнаружившего прекрасное согласие эксперимента с квантовой теорией.

Доказывая дискретный, квантовый характер света, мы не пересматриваем результаты старых классических экспериментов, например, по дифракции или по интерференции. Их нельзя пересмотреть — они правильны. Мы описали другие эксперименты. Удивительно то, что есть эксперименты, которые нельзя объяснить с позиций волновой теории, а есть эксперименты, которые нельзя объяснить с позиций корпускулярной теории. Иногда свет ведет себя как частица, иногда — как волна. Не надо думать, что свет проявляет «свободу воли»: ведет себя как хочет. Современная квантовая теория позволяет точно предсказать, в каком эксперименте

проявятся корпускулярные свойства света и в каком — волновые.

Привыкнув к волновой трактовке оптических явлений, трудно привыкнуть к квантовой. Но нельзя (ни в коем случае) ее игнорировать. Оказалось, что зернистую структуру света можно даже увидеть. Как показали опыты С. И. Вавилова, человеческий глаз, хорошо адаптированный к темноте, может воспринять несколько отдельных квантов.

В том, что электрон — частица, по-видимому, убеждать нет необходимости. После открытия дискретности электрического заряда, измерения заряда и массы электрона, определения следов электронов в камере Вильсона, измерения пути электрона в фотоэмульсии, постройки гигантских приборов для ускорения электронов, после использования электронов как снарядов для бомбардировки атомных ядер сомневаться в корпускулярной природе электричества нет возможности. К электрону мы уже привыкли, почти не замечаем, как он вошел в наш быт. Включив телевизор и наблюдая за приключениями очередного киногероя, мы не думаем о том, что движущиеся картинки нарисованы электронным лучом.

И все же электрон с такой же несомненностью проявляет свои волновые свойства. Гениальная догадка о том, что у частиц должны быть волновые свойства, как мы говорили, впервые была высказана Луи де Бройлем. Он не ставил никаких опытов, результаты которых натолкнули бы его на это. Луи де Бройль размышлял над тем странным обстоятельством, что уравнения механики можно записать в форме, которая тождественна уравнениям оптики. Сходство делается полным, если энергии частиц сопоставить частоту, а импульсу — волновой вектор какого-то волнового процесса. Ученые не сразу поняли, что формулировка странных равенств

$$\varepsilon = \hbar\omega, \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad (22)$$

приведет к перевороту в физике.

Но в 1955 г. А. Эйнштейн в предисловии к книге Л. де Бройля «Физика и микрофизика» скажет: «Именно де Бройль был первым, кто осознал тесную физическую и формальную взаимосвязь между квантовыми состояниями материи и явлениями резонанса еще

в те времена, когда волновая природа материи не была открыта экспериментально»<sup>1)</sup>).

К счастью, о работе Луи де Бройля знал физик Дэвиссон, который вместе с Джермером изучал рассеяние электронов поверхностью металлов. Как часто бывает, случайный инцидент толкнул экспериментаторов на крупное открытие. Разбился сосуд, в котором хранилась никелевая пластинка (изучали отражение электронов от поверхности никеля). Пластинка окислилась, и, чтобы продолжать исследование, ее пришлось долго прокаливаться. После прокаливания результаты оказались резко отличными от тех, которые были до прокаливания<sup>2)</sup>: зависимость числа рассеянных электронов от угла оказалась резко анизотропной. Экспериментаторы потратили несколько лет, пытаясь понять, что происходит. И поняли, когда привлекли к объяснению идею де Бройля.

Дело вот в чем: при прокаливании пластинка испытала рекристаллизацию — в ней образовались крупные кристаллиты. Они и были ответственны за анизотропию рассеяния. Но сама анизотропия рассеяния допускала расшифровку, только если считать, что электроны отражаются от кристалла так, как это положено волнам. При этом надо было предположить, что длина волны электрона удовлетворяет соотношению де Бройля ( $\lambda = 2\pi\hbar/p$ ). Электроны испытывали дифракцию в результате отражения электронных волн от кристаллических плоскостей. Совсем как рентгеновские лучи.

Дифракция электронов (противоестественное словосочетание, если считать, что электрон — частица) — один из основных методов исследования структуры кристаллов наряду с рентгеноструктурным анализом и (это уже не должно удивить) дифракцией нейтронов.

Открытие дифракции электронов не отменило корпускулярные свойства электронов. Их нельзя отменить. Они есть. Но есть и волновые свойства. Электрон — и частица, и волна. Такова природа микроскопических частиц.

---

<sup>1)</sup> А. Эйнштейн. Собрание научных трудов. — М.: Наука, 1967, т. IV, с. 349.

<sup>2)</sup> Многие авторы любят подчеркивать случайность сделанных открытий. То, что случайности происходят у тех, кто оказывается способным понять их значение, — совсем не случайность.

Иногда двойственная природа микроскопических частиц проявляется в одном опыте (говоря более строго, это означает, что одновременно происходит два опыта). Нейтрон рассеивается кристаллом. При этом может произойти одно из двух событий. Либо нейтрон не изменит своей энергии вовсе, либо несколько замедлится<sup>1)</sup>. Рассеяние без изменения энергии (упругое рассеяние) четко проявляет черты дифракции и, как мы уже говорили, служит надежным методом исследования структуры кристаллов (особенно магнитных, когда речь идет об упругом рассеянии нейтронов), а, описывая неупругое рассеяние, необходимо считать нейтрон частицей.

## УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА. $\psi$ -ФУНКЦИЯ

Когда мы говорим о фотонах, нам ясно, что речь идет о порциях световой (электромагнитной) энергии. Не приходит в голову задать вопрос: «Из чего состоит фотон?» Об электроне тоже такой вопрос задать нельзя (во всяком случае сегодня). Это противоречит понятию элементарности электрона.

А что собой представляет волновой процесс, который сопутствует движению микроскопических частиц согласно соотношению Луи де Бройля? Мы многократно утверждали и доказывали, что частицы обладают волновыми свойствами. Хорошо, электрон — волна. Но ведь волна — нечто протяженное в пространстве и во времени. Чем отличается точка пространства, в которой в данный момент времени волна есть, от точки, в которой волны нет? Лучше даже в последней фразе слово «волна» заменить местоимением «нечто»: чем отличается точка пространства, в которой в данный момент времени «нечто» есть, то точки, в которой ничего нет?

Величину, которая колеблется в волпе, принято обозначать буквой  $\psi$ . Если  $\psi$  в какой-то точке равно нулю, то в этой точке нет ничего; если  $\psi$  отлична от нуля, то что-то есть. Конечно, обозначив это «что-то»

---

<sup>1)</sup>При отличной от нуля температуре кристалла нейтрон может даже немного ускориться — отобрать энергию от кристалла.

буквой  $\psi$ , мы ничего не объяснили. Просто есть возможность кратко сформулировать вопрос: каков физический смысл  $\psi$ -функции?

Интересно, что до того, как это было выяснено, было сформулировано дифференциальное уравнение, которому  $\psi$ -функция должна удовлетворять, научились его решать и извлекать физические результаты. Например, вычислять уровни энергии атома водорода (они изображены на рис. 2). Легко представить себе, как смущала и волновала эта ситуация физиков. Решать задачи, причем фундаментальные задачи, относящиеся к самым основам наших представлений о веществе, и не знать, с какой величиной ты оперируешь, подозревать, что из нее можно извлечь еще много сведений о свойствах электронов и атомов, и не, уметь это сделать.

Прежде всего выскажем отрицательное суждение:  $\psi$ -функция не поле. Это означает следующее: если  $\psi$ -функция отлична от нуля в какой-то точке, то это не означает, что в этой точке на какую-то другую частицу действует какая-то сила. Простого непосредственного смысла  $\psi$ -функция не имеет, например, как потенциал электрического поля  $\phi$ , градиент которого с обратным знаком есть напряженность электрического поля, а произведение напряженности электрического поля на заряд частицы равно силе, действующей на частицу (это и означает, что  $\phi$  — поле). То, что  $\psi$ -функция не поле (во всяком случае в указанном выше смысле), видно из того, что по математическому смыслу  $\psi$  — комплексная величина, а все физические величины, конечно, действительные величины<sup>1)</sup>.

Физический смысл  $\psi$ -функции был понят М. Борном (1926 г.). Оказалось, что квадрат модуля  $\psi$ -функции определяет вероятность обнаружить частицу в той или другой точке пространства. Таким образом,

---

<sup>1)</sup> Это не означает, что в физике нельзя пользоваться комплексными величинами. Можно, и иногда значительно удобнее, чем действительными. Но физический смысл всегда имеет действительная величина, и, если не заботиться об удобстве, то всегда можно так построить расчет, чтобы манипулировать только с действительными величинами. С  $\psi$ -функцией так поступить нельзя. Нельзя исключить ее мнимую часть из математического аппарата теории.

волновой процесс, о котором мы много говорили, описывает волну вероятности. Точнее, волну, из которой известным приемом можно сконструировать вероятность обнаружить частицу.

Вероятностный смысл волновой функции (так принято называть  $\psi$ -функцию) совершенно кардинально изменил манеру описания событий в механике. Пришлось пересмотреть понятие причинности.

В классической механике задание начальных условий и сил, действующих между частицами, гарантирует возможность точного расчета эволюции системы. В квантовой механике знание начального состояния системы тоже позволяет однозначно проследить эволюцию состояния системы. Но состояние системы описывается совершенно в других терминах. Из-за соотношения неопределенности или, что то же самое, из-за волновых свойств частиц состояние системы нельзя описать с той степенью подробности, которая принята в классической механике. Максимальная подробность описания механической системы — это задание волновой функции. Зная ее, можно сделать вывод о результатах физического эксперимента. Однако результаты эти формулируются в вероятностных терминах. Мы не можем сказать, что нечто произойдет, а можем только сказать, что вероятность этого события такая-то. Это означает, что проверка квантовых законов возможна только при многократном осуществлении эксперимента (на практике так всегда и бывает).

Сказанное не означает, что квантовая механика не делает однозначных предсказаний. Это не так. Например, электрон в атоме имеет вполне определенную энергию. Измерение энергии электрона, скажем, путем измерения потенциала ионизации дает вполне однозначный результат, сколько ни повторяй опыт. Но если мы захотим измерить координату или импульс электрона в атоме, то будем получать различные результаты, вероятность которых определяется волновой функцией.

Несколько слов о математическом аппарате квантовой механики. Знание сил, действующих между частицами, позволяет перейти к изучению их движения. Мы знаем, как это сделать в классической физике. Для этого служат уравнения Ньютона. Записав их

(силы-то мы знаем!), задав начальные условия, мы можем — во всяком случае в принципе — определить положение частиц в любой последующий момент времени. Все, что говорилось нами ранее (о соотношении неопределенности, о волновых свойствах частиц), служит убедительным доказательством тому, что так поступать, изучая движение атомных частиц, нельзя. Нужен принципиально новый подход.

Формулировка основных уравнений всегда несет в себе черты феноменологии (описания). Основные уравнения нельзя вывести (во всяком случае до тех пор, пока нет более общей теории). Они — наиболее компактная формулировка опытных данных. Конечно, при их создании у авторов были и паводящие теоретические соображения, но именно *наводящие*, ни в коем случае не строгая-логическая схема...

Квантовая механика имеет свою строго разработанную логически непротиворечивую математическую схему расчетов физических величин, схему, дающую возможность предсказать результаты самых разнообразных экспериментов. Движение атомных частиц со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света, описывается знаменитым уравнением Шредингера, играющим роль уравнений Ньютона классической механики.  $\psi$ -функция — решение этого уравнения. Другой (по форме совершенно непохожий) математический аппарат создал В. Гейзенберг. Потом было показано, что оба метода тождественны в смысле получающихся физических результатов.

Мы не имеем возможности сколько-нибудь подробно рассказать о том, *как* следует описывать движение атомных частиц и к каким удивительным выводам можно прийти. Самое удивительное в них то, что они соответствуют реально наблюдаемым явлениям. Действительность зачастую фантастичнее любой фантазии.

Квантовая механика сегодня пронизывает всю физику. Она объясняет структуру и свойства твердых тел, излучение и поглощение света атомами, сверхтекучесть гелия и сверхпроводимость металлов. Квантовая механика пытается понять процессы, происходящие в недрах звезд, и вторгается в объяснение феномена жизни.

$$k_B = 1,4 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/град.}$$

$$a \approx 10^{-8} \text{ см, } 1 \text{ эв} = 11606 \text{ К}$$

$$R_0 = 1,99 \text{ кал/град. моль}$$

## ВВЕДЕНИЕ <sup>1)</sup>

### о физике твердого тела и четырьмя главами и приложением

В оценке познания явлений природы неспециалистами (да и не только ими) даже в самом понимании слова «явление» существуют разные точки зрения, из которых мы приведем две — прямо противоположные. «Все познано в нашем мире». Особенно когда речь идет о свойствах макроскопических объектов, которые во всех подробностях могут быть описаны с помощью квантовой механики. Силы, действующие между микроскопическими частицами — атомами, ионами, электронами, — нам известны, уравнения, описывающие движение частиц, не внушают сомнений. Дело *только* за математикой. Вложите в достаточно мощную вычислительную машину состав тела, научите машину решать уравнения квантовой механики и получите ответы на все *интересующие* вас вопросы. Но *интересоваться*, по сути, нечем.

---

<sup>1)</sup> Есть люди, которые читают предисловие, прочитав книгу. Я принадлежу к их числу. Боюсь, что при написании этого введения подсознательно я обращался к тем, кто уже прочитал четыре главы и приложение. Все, кого введение отпугнет сложностью, пропустите его, дочитайте книгу, а потом прочтите введение. Надеюсь, оно покажется вам менее сложным и менее схоластичным.

«Интересное, истинно новое там, где проходит граница наших знаний — в теории элементарных частиц, в свойствах черных дыр, в таинственной периодичности пульсаров». Так думают, а иногда с большей или меньшей откровенностью говорят и пишут одни.

«Конечно, уравнения квантовой механики известны, можно решить простенькие задачи, но ведь следует признать, что ни одной сколько-нибудь сложной задачи решить точно не удастся. Чего уже проще — твердый водород. Состоит из самых простых атомов. А сколько лет бьются и не могут установить его фазовую диаграмму. При каком давлении водород станет металлом? Будет он нормальным металлом или сверхпроводником? А если сверхпроводником, то какова будет его критическая температура? Только точно, пожалуйста, так как создавать давления в миллионы атмосфер трудно, надо знать, чего следует добиваться и стоит ли игра свеч. Бесконечное число *по-настоящему интересных* вопросов остаются без ответа, а теоретики занимаются улавливанием нейтрино, от которого уже заведомо никакого проку». Так думают, говорят и пишут другие.

Кто прав? По-моему, и те и другие неправы. Интересное, важное, новое, принципиальное есть в разных физиках: и в физике элементарных частиц, и в физике твердого тела. А иногда они совершенно неожиданным образом переплетаются, и специалист по теории сверхпроводимости оказывается в гуще событий, происходящих в физике элементарных частиц. Физика, как и материальный мир, едина. Она естественным образом делится на области, можно искусственно развивать одни в ущерб другим, но при этом неожиданно проигрывают все области, и забытые, и развиваемые...

Хотя, действительно, физика конденсированного состояния вещества зиждется на *познанных* законах природы (в этом, по-видимому, нет оснований сомневаться!) и ее место на карте науки — правый нижний квадрат — нерелятивистская квантовая механика (см. стр. 33), она остается источником новых представлений. Именно *представлений*, а не только фактов и результатов, которые более или менее непрерывным по-

током «передаются» в технику<sup>1)</sup>). Новых представлений так много, они иногда столь необычны, что возникает или может возникнуть вопрос: какова природа возникновения качественно новых представлений? «Откуда они берутся?» — говоря простыми словами. Думаю, из *бесконечности*. Из бесконечности числа частиц, составляющих конденсированное тело, из бесконечного разнообразия сочетаний частиц, из бесконечного числа способов воздействий на конденсированное тело.

Следующие за этим введением четыре главы и приложение посвящены нескольким вопросам квантовой теории твердого тела в его кристаллической фазе. Нам кажется, что выбраны важные вопросы. Теплоемкость, тепло- и электропроводность, способность самопроизвольно намагничиваться — свойства тел, несомненно, важные. Кроме того, мы выбрали такие вопросы, которые дают возможность продемонстрировать важнейший гносеологический принцип современной макроскопической физики, о котором мы вскользь упоминали в первой главе: объяснить явления означает описать движение элементарных «сущностей», которые, как оказывается, отнюдь не всегда совпадают со *структурными единицами* тел — молекулами, атомами, ионами.

Твердое тело — традиционный объект изучения квантовомеханическими методами. Почти одновременно с формулировкой основных принципов квантовой механики, написанием основных уравнений и созданием приемов расчета начались попытки (и весьма успешные) построения теории твердого тела. Квантовая механика объяснила существование диэлектриков, полупроводников и металлов; выяснила причину резкой зависимости теплоемкости и сопротивления металлов от температуры, установила природу магнетизма и разрешила долго не поддававшуюся отгадке загадку сверхпроводимости. Достижения квантовой механики в физике твердого тела и вообще в физике конденсированного состояния вещества нельзя даже перечислить. Вся современная физика твердого тела — это, по сути дела, квантовая физика.

---

<sup>1)</sup> О, если бы и в жизни, а не на бумаге можно было передавать, а не *внедрять*. Задумывались ли вы, каким иногда точным бывает слово, его звучание? В слове «внедрять» слышится сопротивление...

Последние десятилетия характеризуются глубоким проникновением в динамику атомных частиц в твердых телах. Движение электронов и ионов в кристаллах нам известно сейчас не хуже, чем движение электронов в атомах.

Квантовые представления в физике твердого тела, в ее современном понимании, начали формироваться в начале XX века. Одним из основных результатов квантового подхода к исследованию свойств кристаллов явилась концепция *квазичастиц*. Оказалось, что энергию возбужденного состояния кристалла (правда, вблизи основного состояния) можно представить в виде суммы:

$$\text{Энергия возбужденного состояния} = \text{энергия основного состояния} + \text{сумма энергий элементарных возбуждений},$$

а каждое элементарное *возбуждение* (всего кристалла!) похоже по своим свойствам на квантовую частицу. Поэтому элементарное возбуждение кристалла называют *квазичастицей*, а совокупность элементарных возбуждений называют *газом квазичастиц*. Формула, взятая в рамку, приобретает вид:

$$\text{энергия возбужденного состояния} = \text{энергия основного состояния} + \text{энергия газа квазичастиц}.$$

Первая из формул не совсем точна: она не учитывает взаимодействия между элементарными возбуждениями. Вторая — оставляет возможность считать газ квазичастиц *почти* идеальным, т. е. учитывать взаимодействие между квазичастицами. Как и настоящие частицы, квазичастицы бывают фермионами и бозонами. В последующих главах вы найдете примеры и тех и других, а в приложении — описание «законов общежития» фермионов и бозонов.

Величины, описывающие макроскопические свойства твердых тел, выражаются в терминах, характеризующих *отдельные* квазичастицы: их скорость, длину свободного пробега и т. п. В то время как функцио-

нальные зависимости энергии от импульса для всех частиц одинаковы <sup>1)</sup>:  $\epsilon = p^2/2m$ , отличаясь только массами, у квазичастиц они сложны и многообразны. Причина этого в том, что частицы «живут» в однородном и изотропном пространстве, а квазичастицы «живут» в периодической структуре — в кристалле, находящемся в основном состоянии.

Рискуя повториться, сформулируем несколько характерных черт твердых тел как физических объектов, состоящих из огромного числа частиц, движение которых подчиняется законам квантовой механики.

1) Атомы, молекулы, ионы — структурные единицы твердых тел. Эта расплывчатая по смыслу фраза означает, что энергия взаимодействия между ними мала по сравнению с энергией, которую надо затратить на разрушение самой структурной частицы: молекулу разложить на атомы или ионы, от атома или иона оторвать электрон. В то же время энергия взаимодействия *между* частицами не мала по сравнению с энергией их теплового движения. Твердое тело — система сильно взаимодействующих частиц. Поэтому и представляет принципиальный интерес возможность введения квазичастиц, т. е. сведение задачи о системе сильно взаимодействующих частиц к задаче о системе слабо взаимодействующих квазичастиц.

2) Согласно классическим законам средняя энергия теплового движения частицы порядка  $k_B T$ , а внутренняя тепловая энергия тела порядка  $Nk_B T$ , где  $N$  — число частиц в теле. Уменьшение внутренней энергии твердого тела с понижением температуры стремится к нулю быстрее, чем по линейному закону. Этот факт объясняется дискретным квантовым характером энергетического спектра твердых тел. При падении температуры отдельные движения «вымораживаются». Чем больше разность энергий между уровнями, тем при более высокой температуре «вымерзает» соответствующее движение. Из-за этого разные движения в твердых телах могут наблюдаться при разных температурах.

3) В реальных кристаллах частицы располагаются не всегда так, как им «положено» из соображений

---

<sup>1)</sup> Мы уже окончательно перешли в сферу влияния *нерелятивистской* теории.

минимальности энергии. Неправильное расположение атома или группы атомов (атом в междоузлии, вакансия, дислокация, граница между отдельными кристаллами — все, что называют обобщающим понятием «дефект кристаллической решетки») увеличивает энергию кристалла. В принципе атомы, составляющие данный дефектный кристалл, могли бы перестроиться и создать энергетически более выгодную конфигурацию. Но для этого атомам пришлось бы преодолеть большие, по сравнению с  $k_B T$ , потенциальные барьеры. Поэтому дефектные кристаллы существуют, и только специально принятые меры позволяют создать бездефектные или почти бездефектные кристаллы.

4) Когда мы берем в руки кусок металла, у нас не возникает сомнений в его агрегатном состоянии — твердое тело *твердо*. Но в любом твердом теле много разных частиц, по-разному взаимодействующих друг с другом и с другими частицами. И оказывается, что под «личиной» твердого тела часто «скрываются» и газы (квазичастицы<sup>1)</sup>), и жидкости (электроны металла, омывающие ионный остов кристаллической решетки). А электроны и «дырки» полупроводника под воздействием высокочастотного поля имитируют свойства электрон-позитронной плазмы.

5) Движения разных атомных частиц в твердом теле столь различны, что часто можно «не замечать» одни, изучая другие. Например, скорость движения ионов в твердом теле столь мала по сравнению со скоростью электронов, что существует специальный метод расчета (его называют адиабатическим приближением), при котором, рассматривая движение электронов, ионы считают неподвижными, а движение ионов определяют, используя характеристики электронов, усредненные по их быстрому движению. Мерой точности адиабатического приближения служит корень из отношения масс электрона и иона.  $\sqrt{m/M}$ , казалось бы не такая маленькая величина, но достаточно малая, чтобы нулевое приближение правильно передавало картину движения ионов и электронов.

---

<sup>1)</sup> А иногда и частиц: спины атомов парамагнетика при  $T \gg T_c$  ( $T_c$  — температура Кюри) — газ магнитных стрелок (см. гл. 5).

Движения атомных частиц в твердых телах можно разбить на четыре типа.

а) *Диффузия* собственных или чужеродных атомов. Иногда в результате флуктуаций кинетическая энергия частиц может оказаться столь большой, что превысит потенциальный барьер, отделяющий одну ячейку от другой, и частица, «собравшись с силами», «перевалится» в соседнее положение равновесия. Обычно вероятность такого процесса  $w$  при комнатных температурах крайне мала. Она возрастает с приближением к температуре плавления. Время «оседлой» жизни атома значительно больше, чем время его перемещения, — атом совершает редкие случайные скачки. Коэффициент диффузии пропорционален  $w$ . Диффузия — редкий пример классического движения атомов в твердых телах.

б) Но еще более редка *квантовая диффузия*. Она обнаружена в растворах изотопов гелия, существующих в твердом состоянии только под давлением при температурах вблизи абсолютного нуля. В исключительных случаях возможно туннельное «просачивание» атомов из одного положения равновесия в другое. Возможность туннелирования делокализует примесные частицы или вакансии, превращая их в своеобразные квазичастицы — примесоны, вакансионны. Это превращение дает о себе знать отличным от нуля коэффициентом диффузии при абсолютном нуле температуры.

в) Квазичастицы — *коллективные движения* частиц твердого тела *атомного масштаба*, например колебания атомов кристаллической решетки. Хотя в каждом колебании принимают участие все атомы, оно, несомненно, атомного масштаба, так как при высоких температурах средняя энергия каждого колебания (фонона) приблизительно равна  $k_B T$ , а при низких и того меньше. Другой пример коллективного движения — электронное возбуждение атома или молекулы, например, за счет поглощения кванта света. Оно не локализуется в определенной ячейке кристалла, а «бежит» из ячейки в ячейку в виде экситона<sup>1)</sup> Френкеля. Средняя

---

<sup>1)</sup> Точный перевод слова «экситон» — возбужден. Благодаря взаимодействию атомов твердого тела друг с другом *возбужденное* состояние отдельного атома превратилось в квазичастицу.

энергия экситона того же порядка, что энергия возбужденного состояния отдельного атома.

Весь окружающий нас мир состоит из трех частиц: электронов, протонов и нейтронов. Все многообразие мира связано с многообразием конструкций, из них возникающих. Типов квазичастиц неизмеримо больше, так как неизмеримо разнообразны движения атомных частиц в твердых телах. Многообразие типов квазичастиц часто заслоняет тот факт, что квазичастицы, как и обычные частицы, могут быть элементом конструкции — строительным материалом для более сложных образований. Электроны проводимости могут колебаться. По электронной жидкости пробегают волны:

волна $\rightarrow$ квазичастица
----------------------------------

В данном случае это — плазмон.

Хотя все электроны обладают одинаковым зарядом и потому отталкиваются друг от друга, в ряде металлов им удастся создать нечто вроде молекулы — «электронную пару». Осознание этого обстоятельства позволило объяснить *сверхпроводимость* — явление, которое сорок пять лет было дразнящей загадкой физики твердого тела.

В последнее время в научных статьях и в монографиях по физике твердого тела все чаще и чаще появляется описание конструкций из квазичастиц: биэкситоны, бифононы, светоэкситоны, даже экситонные капли.

г) *Сверхпроводимость*. При низких температурах (вблизи абсолютного нуля) электроны во многих металлах могут совершать движение, квантовое по своей природе, но макроскопическое по масштабу. Это — сверхпроводящий ток.

Характерная черта сверхпроводящего тока — строгая согласованность в движении отдельных электронов, обусловленная их взаимодействием через фононы. Это движение не затухает. Оно действительно может продолжаться вечно, конечно, если поддерживать температуру металла достаточно низкой. Знание квантовой механики может лишить способности удивляться: ведь не затухает движение электронов в атомах. Но, должен сказать, природа устойчивости сверхпро-

водящего тока не похожа на устойчивость движения электронов в атоме.

По сверхпроводнику может и *не течь* ток. Сверхпроводник прекрасно будет существовать. И энергия его будет ниже, чем сверхпроводника с током. Так что сверхпроводник, по которому течет ток, находится в метастабильном состоянии, а его устойчивость обеспечивается тем, что электрону для «выхода из коллектива» движущихся согласованно, надо прежде всего вырваться из «пары» — преодолеть некоторую энергию (энергетическую щель), а это запрещено законами сохранения энергии и импульса, правда, до тех пор, пока сверхпроводящий ток не слишком велик. Большой ток может разрушить сверхпроводимость. К сожалению, подробный рассказ о сверхпроводимости — об одном из наиболее интересных квантовых явлений — не попал в эту книжку. Оправданием автору служит только то, что сверхпроводимость заслуживает отдельной книги.

6) Характерным свойством уровня нашего понимания энергетической структуры твердых тел служит знание того, какие квазичастицы за что отвечают. Редко эксперимент приводит к недоумению. Не в том смысле, что каждый эксперимент может быть сразу объяснен. Это совсем не так. Часто проходит много лет, прежде чем результаты эксперимента найдут свое полное и окончательное объяснение. Но редко физики не знают, с кого спрашивать ответ. Есть явления, за которые «отвечают» все квазичастицы. Например, тепло переносят и фононы, и электроны, и магноны, а вот электрический заряд — только электроны; за температурный ход магнитного момента ответственны магноны — кванты колебания атомных спинов.

7) В большинстве случаев при определенной температуре все степени свободы атомных частиц в твердом теле можно разделить на две группы. Несмотря на свое название, степени *свободы* связаны друг с другом силами взаимодействия (например, спин одного атома с другим). Для одних степеней свободы энергия их взаимодействия  $U_{вз}$  мала по сравнению с  $k_B T$ , для других — велика. Здесь, как всегда,  $k_B T$  выступает как мера энергии теплового движения. Если

$U_{\text{вз}} \ll k_B T$ , то соответствующие степени свободы ведут себя как совокупность *частиц* слабо неидеального газа, а если  $U_{\text{вз}} \gg k_B T$ , то соответствующие степени свободы, как правило, упорядочиваются, а их движение, тоже как правило, может быть описано введением *квазичастиц*.

Этот абзац очень важен. Он показывает, что в подавляющем числе случаев свойства твердого тела — системы сильно взаимодействующих частиц — могут быть описаны как свойства *газов* — частиц или квазичастиц. Подчеркнем, это не просто удобный прием; постановка задачи: объяснение макроскопических свойств с помощью чего-то *элементарного* — требует, чтобы это «что-то» было микроскопическим, — иначе возникает порочный круг...

И все же иногда бывает все гораздо сложнее. Дело в том, что почти во всех телах вблизи определенных температур свойства тел изменяются не плавно, а скачком. Такое скачкообразное изменение свойств тела носит название *фазового перехода*. Фазовые переходы бывают не только в твердых телах. Переход жидкость — пар — кипение — пример фазового перехода. Или жидкость — твердое тело — кристаллизация. Но и в рамках одного агрегатного состояния возможны фазовые переходы.

Железо при  $T = 910^\circ\text{C}$  переходит из  $\alpha$ -фазы в  $\gamma$ -фазу, а при  $T = 1400^\circ\text{C}$  — в  $\delta$ -фазу (фазы отличаются друг от друга расположением атомов в кристаллической ячейке и ее размерами). Пожалуй, особенно интересны фазовые переходы, при которых появляется какое-то особое свойство: спонтанный магнитный момент при переходе из парамагнитного состояния в ферромагнитное, способность проводить ток без сопротивления в сверхпроводящем состоянии и т. п.

Теория фазовых переходов — одна из глав термодинамики и статистической физики, глава, содержащая много интересных результатов и много нерешенных проблем. Сформулирована четкая и всеобъемлющая классификация фазовых переходов. Отличают фазовые переходы I рода и фазовые переходы II рода. Кипение, кристаллизация относятся к фазовым переходам I рода; переход в ферромагнитное или сверхпроводящее состояние — к фазовым переходам II ро-

да. Переходы из одной кристаллической фазы в другую иногда суть переходы I рода, иногда II.

При переходе I рода фазы, расположенные слева и справа от точки перехода, мало похожи одна на другую. Одна фаза сменяет другую просто потому, что она энергетически более выгодна. Чтобы переход произошел, надо преодолеть потенциальный барьер, разделяющий фазы. Поэтому возможно переохлаждение и перегрев.

При переходе II рода дело обстоит не так: в точке перехода (при  $T = T_c$ ) одна из фаз перестает существовать, ее сменяет другая. При  $T = T_c$  фазы неотличимы, но если сдвинуться из точки перехода, то различие фаз нарастает. Так, с понижением температуры ниже температуры Кюри  $T_c$  растет магнитный момент ферромагнетика, при  $T = T_c$  и выше он равен нулю<sup>1)</sup>. С удалением в сторону низких температур от температуры сверхпроводящего перехода растет число «спаренных» электронов — электронов, движущихся без сопротивления.

Нет возможности подробно рассказать о поведении тел при фазовых переходах II рода, хотя это тема волнует многих ученых. Отметим только: вблизи точки фазового перехода II рода твердое тело ведет себя так, что никаким искусственным приемом не удастся описать его поведение в терминах газа (ни частиц, ни квазичастиц!). Атомные частицы, находящиеся на далеком расстоянии друг от друга, оказываются взаимодействующими, причем это взаимодействие носит особый, несиловой характер: вероятность коллективных движений столь же велика, как и индивидуальных<sup>2)</sup>. Аномальное возрастание роли коллективных движений фиксируется экспериментом: возрастает теплоемкость, обращается в бесконечность магнитная

---

<sup>1)</sup> Об этом чуть подробнее вы прочтете в пятой главе.

<sup>2)</sup> Вполне понимаю, как трудно неспециалисту понять последние фразы. Они действительно трудны для понимания. Пожалуй, я могу сделать только вот что: одно непонятное сравнить с другим непонятным. Несиловое взаимодействие вблизи точек фазового перехода напоминает квантовое несиловое взаимодействие, которое приводит к принципу запрета Паули. Но в данном случае оно не носит специфического квантового характера, в классических системах тоже могут быть фазовые переходы II рода.

восприимчивость. И еще одно замечание: твердое тело вблизи фазового перехода II рода выступает в роли модели *сгустка вещества* — системы, которая не делится на составные части. Отсюда интерес к этой области у физиков из другого мира — специалистов, пытающихся разобраться в «устройстве» *элементарных частиц*. Интерес этот подстегивается вдруг появляющимся сходством математических аппаратов обеих теорий.

Теория фазовых переходов II рода не единственная точка соприкосновения физики макромира и физики субмикромра — физики элементарных частиц. В физике элементарных частиц существуют попытки создать теорию элементарных частиц, исходя из свойств пространства-времени. Пространство-время — вакуум относительно частиц, основное состояние материального мира. Частицы при таком подходе — элементарные возбуждения «вакуума».

Эта точка зрения близка подходу, широко используемому в физике твердого тела при введении и исследовании свойств квазичастиц. «Вакуум» относительно квазичастиц — это кристалл в основном, невозбужденном состоянии. Квазичастицы — возбужденные состояния кристалла. Накоплен огромный опыт, позволяющий связать свойства основного состояния кристаллов различного типа («вакуум») и элементарных возбуждений (квазичастиц) в этих кристаллах. Возможно, этот опыт окажется полезным для понимания связи между свойствами пространства-времени и частицами. Ведь многие выводы теории твердого тела получены без излишней конкретизации — только из самых общих соображений. Эта надежда не столь фантастична, как может показаться, — первые работы, «перебрасывающие мосты» между столь далекими «физиками», начинают появляться.

\*\*\*

Впереди — основные главы книги. Главы, в которых сделана попытка почти без формул рассказать о конкретных свойствах твердых тел. Для некоторых конкретизация покажется скучнее общих разговоров. Ничего не поделаешь: без конкретизации невозможно познание.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \hbar\omega, \quad \vec{p} = \hbar\vec{k} \\ \omega &= sk, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \\ \theta &\approx \frac{\pi s \hbar}{a}, \quad s \approx 10^5 \text{ см/сек.} \end{aligned}$$

## ГЛАВА 2

### о фононах

#### СТРОЕНИЕ КРИСТАЛЛОВ

Этот небольшой раздел играет роль описания местности в приключенческом романе или пейзажа в лирической повести. «Жизнь» квазичастиц, о которых пойдет речь, проходит в кристалле в сравнительно просто упорядоченной системе атомов или ионов. Достаточно знать расположение нескольких атомов, составляющих *элементарную ячейку*, чтобы простым повторением «построить» весь кристалл.

Кристаллизация атомов, т. е. превращение неупорядоченной совокупности (жидкости или газа) в кристалл, не есть, конечно, божественное предначертание, а стремление системы понизить свою энергию при понижении температуры. Поэтому, естественно, структура кристалла определяется силами, действующими между атомными частицами. Так как природу этих сил объяснила квантовая механика, то тем самым она объяснила и структуру твердых тел. Объяснила, конечно, принципиально. Показала возможность объяснения, т. е., в частности, установила, почему размеры кристаллической ячейки приблизительно равны нескольким ангстремам, а не нескольким микронам, например.

Фактическое определение кристаллических структур — сложная экспериментальная задача, часто (если ячейка сложна) требующая применения разнообразных приемов (из них самый распространенный — дифракция рентгеновских лучей) и довольно вычурных математических методов. И все же большинство кристаллических структур нам хорошо известны. Достаточно заглянуть в справочник, и мы узнаем, как устроена кристаллическая ячейка поваренной соли, чему равно ребро куба, на каком расстоянии находятся ионы  $\text{Na}^+$  и  $\text{Cl}^-$  (рис. 5, а).

Периодическое расположение атомов в пространстве допускает строгую классификацию, основанную на перечислении типов симметрии кристалла. Симметрия кристалла — это набор операций, после проведения которых (мысленно, конечно) кристалл перейдет сам в себя. Это — повороты вокруг осей, отражения в плоскостях, винтовые оси, плоскости зеркального скольжения и трансляции. Интересно отметить, что сочетание «поворотных» элементов симметрии (осей, отражений) с трансляциями — обязательным атрибутом периодической структуры — приводит к своеобразным ограничениям.

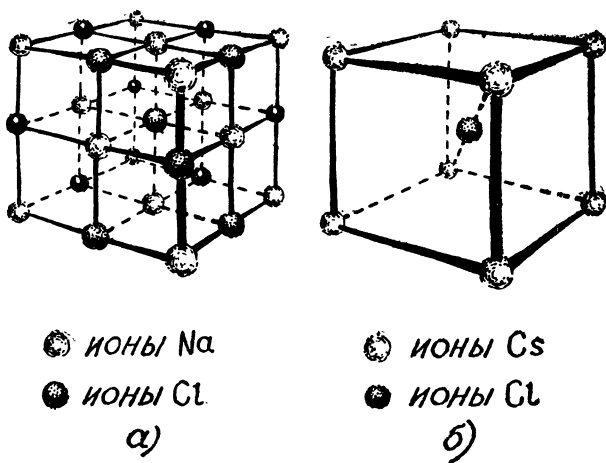


Рис. 5.

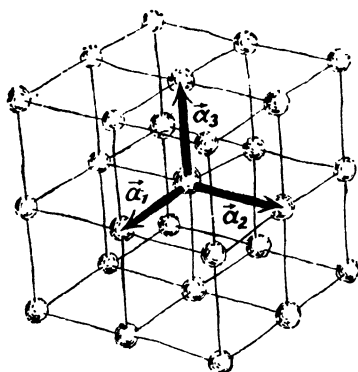


Рис. 6.

Например, в кристаллах могут быть только оси симметрии 2-го, 3-го, 4-го и 6-го рангов. А вот кристалла, атомы которого можно было бы повернуть на  $360^\circ/5 = 72^\circ$ , совместив его атомы, в природе нет. Все возможные типы симметрии структур кристаллических решеток<sup>1)</sup> были определены в конце XIX века. Их, как установил русский кристаллограф Е. С. Федоров, оказалось немало — 230.

Из кристаллографии нам для дальнейшего понадобятся только несколько терминов: *элементарная ячейка*, периодическим повторением которой строится весь кристалл. Она задается тремя векторами (их часто называют базисными):  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ ,  $\vec{a}_3$  (рис. 6). Объем элементарной ячейки равен

$$v_0 = \vec{a}_1 [\vec{a}_2 \vec{a}_3].$$

Если все три вектора взаимно перпендикулярны, то  $v_0 = a_1 a_2 a_3$ , а если еще и равны друг другу,  $a_1 = a_2 = a_3 = a$ , то  $v_0 = a^3$ . Для оценок мы всегда будем пользоваться последней формулой. Плотность кристалла  $\rho = M/v_0$ , где  $M$  — масса атомов, находящихся в одной ячейке кристалла. Очень важно запомнить, что линейный размер ячейки близок размеру атома: самая простая модель кристалла — шарики, плотно уложенные в ящик — дает очень неплохое представление о структуре кристалла. Есть решетки, которые так и называются — плотноупакованными. В физике твердого тела часто используют понятие — условное, но удобное — атомный радиус.

*Обратное пространство.* С помощью векторов  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ ,  $\vec{a}_3$  формальным приемом можно построить новую

<sup>1)</sup> Кристаллическая решетка — воображаемая конструкция — система прямых линий, связывающих атомы кристалла.

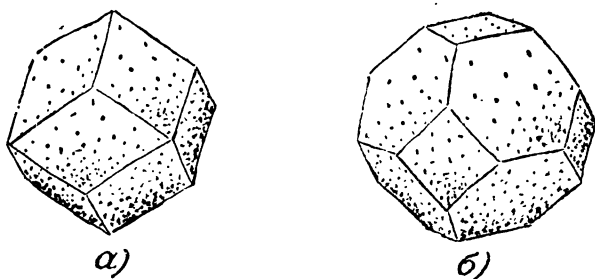


Рис. 7.

кристаллическую решетку, называемую обратной, если за базисные векторы принять

$$\vec{b}_1 = \frac{[\vec{a}_2 \vec{a}_3]}{v_0}, \quad \vec{b}_2 = \frac{[\vec{a}_3 \vec{a}_1]}{v_0}, \quad \vec{b}_3 = \frac{[\vec{a}_1 \vec{a}_2]}{v_0}. \quad (23)$$

Объем ее элементарной ячейки есть  $\vec{b}_1[\vec{b}_2 \vec{b}_3] = 1/v_0$ . Доказательство этого равенства — хорошее упражнение по векторной алгебре. «Расстояние» между узлами обратной решетки измеряется в обратных сантиметрах. Поэтому она и называется обратной. Используя все элементы симметрии кристалла, из элементарной ячейки обратной решетки можно построить равновеликую ей ячейку, как бы впитавшую в себя все элементы симметрии кристалла. Она носит название *первой зоны Бриллюэна*. На рис. 7 изображена первая зона Бриллюэна объемноцентрированной (а) и гранецентрированной (б) решеток. Первой зоной Бриллюэна, как и элементарной ячейкой, можно «без просветов» заполнить все обратное пространство. Границы зон Бриллюэна создают пейзаж, на фоне которого «живут» квазичастицы.

## АТОМЫ — МИКРОСКОПИЧЕСКИЕ МАЯТНИКИ

Атомы и ионы совершают малые колебания вокруг своих положений равновесия, напоминая маятники. Следует, однако, помнить в виду, что это не совсем точное утверждение. Изредка атомы раскачиваются столь сильно, что покидают свое положение равновесия и перепрыгивают либо в пространство между атомами

(в этом случае говорят об атомах в междоузлиях), либо в случайно свободное соседнее положение равновесия. Такие перескоки при комнатных температурах (или при более низких) случаются весьма редко, учащаясь с приближением температуры к температуре плавления кристалла.

Атомы движутся всегда, причем чем выше температура, тем больше размах (или, как говорят физики, амплитуда) их колебаний. Но, пожалуй, наиболее существенное отличие атома, колеблющегося вокруг положения равновесия, от обычного «классического» маятника в том, что атом — «квантовый» маятник, а квантовый маятник нельзя успокоить.

Даже при абсолютном нуле температуры атомы движутся. Это специфическое квантовое движение атомов (о нем шла речь в 1-й главе, см. стр. 26) носит название *нулевых колебаний*. Обычно размах нулевых колебаний очень мал — значительно меньше, чем расстояние между атомами, но у одного тела — у гелия размах нулевых колебаний больше, чем среднее расстояние между атомами. Это приводит к тому, что гелий никогда не замерзает; даже при абсолютном нуле температуры гелий — жидкость. Чтобы гелий превратить в кристалл, его надо сжать, приложив к нему давление около 26 атмосфер.

Гелий — квантовая жидкость. Классическую жидкость она напоминает, пожалуй, только тем, что способна течь, как обычная жидкость. Гелий — не единственная квантовая жидкость, существующая в природе. Как мы убедимся в следующей части, электроны в металле — квантовая жидкость. Есть большая уверенность в том, что внутризвездное вещество многих космических объектов, открытых в последние годы, находится в состоянии, напоминающем квантовую жидкость. Если это так, то квантовая жидкость — не редкость в природе.

Неспособность закристаллизоваться при нулевой температуре — как бы *предельное* проявление квантовых свойств, полностью разрушающих требуемый классической физикой порядок в расположении атомов при  $T = 0$ . Возможно менее кардинальное, но тем не менее поразительное нарушение классического порядка, обнаруженное в настоящее время. В каждом



Рис. 8.

кристалле есть случайные дефекты в «упаковке» атомов: на том месте, где атом должен был находиться, пусто.

Вакантный узел кристаллической решетки называют вакансией. Если на вакантный узел перескочил соседний атом, вакансия передвинулась на освободившееся место. Роль вакансий очень велика в диффузии и самодиффузии атомов в твердых телах. Для того чтобы вакансия переместилась, атом должен преодолеть потенциальный барьер (рис. 8). Поэтому-то эти процессы редки при низких температурах, а коэффициент диффузии быстро стремится к нулю с понижением температуры. Но так происходит не во всех кристаллах. В кристаллах, состоящих из легких атомов, атомы могут «пролезть» из одного положения равновесия в другое под барьером — *туннельным образом*<sup>1)</sup>, как принято говорить. В таких кристаллах диффузия и самодиффузия не прекращаются и при  $T = 0$ , а кристалл приобретает удивительное свойство: узлы кристаллической решетки выделены (средняя периодичность в расположении атомов существует), но атомы не полностью локализованы каждый в своей элементарной ячейке — они (и при  $T = 0$ !) «блуждают» по кристаллу. Такие кристаллы получили название *квантовых кристаллов*. Итак, оказывается, кроме кристаллов, жидкости, газа и плазмы, есть еще два агрегатных состояния вещества: квантовая жидкость и квантовый кристалл.

## НЕ МАЯТНИК, А ВОЛНЫ

Хотя аналогия с маятниками условна, вернемся еще раз к ней. Представим себе систему маятников или,

<sup>1)</sup> Туннельное прохождение квантовых частиц через области, где классическая кинетическая энергия частицы *меньше*, чем ее полная энергия, — непосредственное следствие волновых свойств частиц. Оно аналогично частичному прохождению света через полупрозрачную пластину.

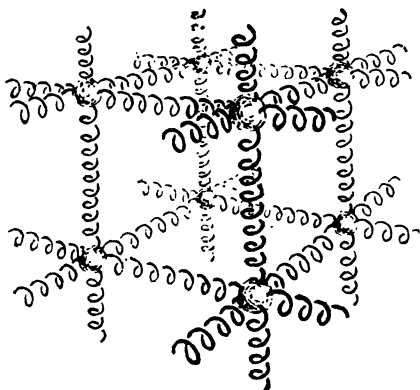


Рис. 9.

лучше, систему шариков, связанных между собой пружинками (рис. 9). Как только мы качнем один шарик, он сразу сдвинет с места соседний, тот столкнет своего соседа и т. д. По системе шариков и пружинок побежит волна. Эти волны колебаний шариков очень хорошо иллюстрируют движение атомов в твердом теле. Такие волны в твердом теле есть не что иное, как звуковые волны.

Звуковые волны, как всякие волны, характеризуются длиной волны  $\lambda$  и частотой  $\omega$ . В кристалле могут распространяться волны отнюдь не с любыми  $\lambda$  и  $\omega$ , а только волны с определенным соотношением между частотой и длиной волны (или частотой и волновым вектором):

$$\omega = \omega(\vec{k}). \quad (24)$$

Это соотношение называется законом дисперсии.

Если известны силы, действующие между атомами, то закон дисперсии звуковых волн может быть рассчитан. Однако такой расчет довольно трудоемкая задача, которую можно решить только на электронных вычислительных машинах. Но даже при использовании быстродействующих вычислительных машин ее приходится максимально упрощать. Например, считать, что атомы, которые расположены относительно далеко друг от друга, совсем не взаимодействуют друг с другом.

Закон дисперсии звуковых колебаний (24) — основная характеристика движения атомов кристалла. Знание закона дисперсии позволяет рассчитывать многие свойства кристалла (теплоемкость, коэффициент теплового расширения, теплопроводность и т. д.). Не удивительно, что определением закона дисперсии звуковых волн в кристаллах занимаются и теоретики и экспериментаторы...

К счастью, многие свойства закона дисперсии можно установить из общих соображений, не занимаясь непосредственным вычислением. «К счастью» — потому, что эти свойства не зависят от тех приближений, которые используются при конкретном счете. Наоборот, они могут служить и служат контролем при численном решении задачи о колебаниях атомов того или другого кристалла.

Мы, естественно, лишены возможности вывести общие свойства закона дисперсии. Придется ограничиться констатацией.

1. В кристалле могут распространяться  $3r$  типов волн, где  $r$  — число различных атомов (или ионов) в элементарной ячейке кристалла. В поваренной соли может распространяться шесть типов волн, а в твердом аргоне — три, так как в ячейке NaCl два иона, а в ячейке Ar один атом аргона.

2. Из  $3r$  типов волн три называются *акустическими*. Они отличаются тем, что при малых волновых векторах (т. е. при больших длинах волн) их частоты малы, а при длине волнового вектора  $\vec{k}$ , стремящейся к нулю, также обращаются в нуль. Остальные  $3r - 3$  типа волн называют *оптическими*. Название «оптические» довольно случайно. Дело в том, что они были впервые обнаружены оптическими методами.

3. Каждая из  $3r$  функций  $\omega_j(\vec{k})$  (индекс  $j$  нумерует тип волны:  $j = 1, 2, \dots, 3r$ ) — периодическая функция своего аргумента:

$$\omega_j(\vec{k} + 2\pi\vec{b}) = \omega_j(\vec{k}), \quad \vec{b} = n_1\vec{b}_1 + n_2\vec{b}_2 + n_3\vec{b}_3; \quad (25)$$

$n_1, n_2, n_3$  — целые числа, а векторы  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$  — базисные векторы «обратного» пространства, о которых мы рассказали в начале этой главы (см. (23)). Периодичность частот колебаний — проявление общего свойст-

ва кристаллов: периодическое расположение атомов в реальном пространстве порождает периодическое «обратное»  $\vec{k}$ -пространство (заметим, что размерность  $[k] = 1/\text{см}$ ) и позволяет все рассмотрение ограничить элементарной ячейкой в «обратном» пространстве или — так удобнее — первой зоной Бриллюэна.

Прочитав эти три пункта, читатель может удивиться. Почему звуковые волны (ведь мы рассматриваем звуковые волны) столь сложны? Ведь привычно думать, что звук — нечто простое. В газе (в воздухе, например) или в жидкости звуковые волны — колебания плотности или давления. В твердых телах, правда, кроме колебаний плотности, могут еще распространяться сдвиговые колебания. В волнах плотности атомы колеблются вдоль волнового вектора  $\vec{k}$  (продольные волны), а в волнах сдвига — в плоскости, перпендикулярной волновому вектору (поперечные волны). Поперечных волн может быть две.

Итак, в твердом теле могут распространяться три звуковые волны: одна продольная и две поперечные. Закон дисперсии звуковых волн прост. Для продольных волн

$$\omega = s_l k, \quad (26)$$

а для поперечных

$$\omega = s_t k, \quad (27)$$

причем скорость  $s_l$  продольных звуковых волн всегда больше скорости  $s_t$  поперечных волн.

Какое же отношение эти «простые» звуковые волны имеют к колебаниям атомов в кристаллической решетке, описанным выше? Простота закона дисперсии «простых» звуковых волн (26), (27) и всей картины распространения звука обусловлена тем, что при описании мы игнорировали атомную (дискретную) структуру кристалла, считали его сплошной средой<sup>1)</sup>... Это приближение (естественно, такой подход — приближенное, а не точное рассмотрение, ведь твердое

---

<sup>1)</sup> Специальный раздел механики, изучающий те динамические и статические свойства твердых тел и жидкостей, в которых можно не учитывать их атомной структуры, носит название механики сплошных сред. Гидродинамика и теория упругости — главы механики сплошных сред.

тело в действительности состоит из атомов и молекул) справедливо тогда, когда длины волн колебаний велики по сравнению с межатомными расстояниями,  $\lambda \gg a$ , и мы имеем право игнорировать атомную структуру. Но так как  $\lambda = 2\pi/k$ , то условие применимости приближенного (макроскопического) подхода выглядит так:

$$ak \ll 1. \quad (28)$$

Микроскопический подход более точен. Выводы макроскопического рассмотрения должны следовать, конечно, из более точного микроскопического. Перечитайте второй пункт. Акустические ветви колебаний атомов при условии (28) переходят в обычные звуковые волны. При распространении «простой» звуковой волны ячейки кристалла перемещаются (колеблются) как нечто целое. Оптические  $3r - 3$  колебания (если таковые есть, см. пункт первый) описывают колебания атомов относительно друг друга внутри каждой ячейки кристалла. Частоты этих колебаний обычно велики — порядка инфракрасных оптических частот.

Теперь вернемся к нашей первоначальной модели. Мы сравнивали движение атомов в кристалле с колебаниями маятников и как будто принуждены были отказаться от этого сравнения. Атомы не изолированы друг от друга, и потому каждый атом не колеблется самостоятельно, а по кристаллу бегут волны. Но каждая волна (с определенным волновым вектором  $\vec{k}$ ) обладает определенной частотой  $\omega$ . А что, если всю волну рассматривать как «маятник», осциллятор, колеблющийся с частотой  $\omega(\vec{k})$ ? Математический анализ проблемы показывает, что это весьма плодотворная аналогия.

Осциллятор с частотой  $\omega_j(\vec{k})$  — элементарная форма движения атомов в кристалле, структурная единица колебательного движения атомов кристалла. И хотя движение каждого осциллятора элементарно, т. е. неразложимо, в нем принимают участие все атомы твердого тела. Каждый осциллятор движется независимо от остальных. Поэтому энергия колебательного движения атомов есть сумма энергий отдельных осцилляторов.

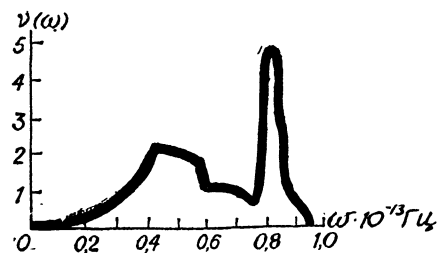


Рис. 10.

Это — важнейший результат. Энергия *взаимодействующих* друг с другом атомов (ионов, молекул) оказалась равной сумме *энергий не взаимодействующих* друг с другом осцилляторов. Видно, что осциллятор играет роль структурной единицы движения в кристалле. А структурная единица вещества кристалла, конечно, атом, молекула или ион (см. раздел «Из чего состоит...?» в 1-й главе).

Для тех, кто не боится слишком смелых аналогий, можно сказать

твердое тело — «газ» осцилляторов

— конечно, только «с точки зрения» колебательной энергии кристалла, так как именно в газе энергия — сумма энергий отдельных частиц.

Законы дисперсии очень полно характеризуют динамические свойства кристалла. Но иногда, пожалуй, слишком полно. Часто достаточно знать, сколько колебаний приходится на интервал частот  $\Delta\omega$ . Для определения этой функции (ее называют плотностью состояний, мы обозначим ее  $\nu(\omega)$ ) надо подсчитать, сколько волновых векторов  $\vec{k}$  находится между двумя изочастотными поверхностями:

$$\omega_j(\vec{k}) = \omega \quad \text{и} \quad \omega_j(\vec{k}) = \omega + \Delta\omega,$$

и просуммировать по всем  $j$  (от 1 до  $3r$ ). Функция  $\nu(\omega)$  весьма сложна (рис. 10, например). Ее определение — одна из практических задач современной динамической теории кристаллов. Для ее решения используют электронные вычислительные машины,

Нас, однако, не будут интересовать важные подробности зависимости числа колебаний от частоты, а только самые грубые черты зависимости  $\nu(\omega)$ . Для выяснения их можно ограничиться так называемым приближением Дебая — считать, что при  $k < k_D$  звуковые волны такие же, как в сплошной среде (см. (26) и (27)), а волн с  $k > k_D$  нет совсем. Граничный волновой вектор  $k_D$  можно найти из естественного требования: полное число колебаний в грубой теории и в точной равны. Результат получается тоже естественный:  $k_D \approx \pi/a$ , т. е. в кристалле не могут распространяться волны, длина которых меньше расстояния между соседними атомами.

В дебаевском приближении плотность состояний имеет очень простой вид. От самых низких частот до некоторой максимальной  $\nu(\omega) \propto \omega^2$ , а выше максимальной, естественно, равна нулю:

$$\nu(\omega) = \begin{cases} \frac{3V}{2\pi^2 \tilde{s}^3} \omega^2, & \omega < \omega_{\max}, \\ 0 & \omega > \omega_{\max}. \end{cases} \quad (29)$$

Здесь  $V$  — объем кристалла, а  $\tilde{s}$  — «средняя» скорость звука:  $\frac{3}{\tilde{s}^3} = \frac{2}{s_3^3} + \frac{1}{s_l^3}$ . Максимальная частота (ее

называют дебаевской) равна  $\omega_D = (6\pi^2)^{1/3} \tilde{s}/a$ , если объем элементарной ячейки принять равным  $a^3$ . Надо, чтобы полное число осцилляторов равнялось  $3N$ , где  $N$  — число ячеек кристалла, т. е.  $V = Na^3$ . Так как скорость звука в твердом теле порядка  $10^5$  см/с, а параметр решетки  $\approx 3 \cdot 10^{-8}$  см, то  $\omega_D \approx 10^{13}$  1/с. Хотя истинная плотность состояний очень далека от дебаевской (см. рис. 10), оценка максимальной частоты правильна во всяком случае по порядку величины.

Замена истинной плотности состояний  $\nu(\omega)$  дебаевской вполне допустима, если кристалл сравнительно прост и в элементарной ячейке один атом. Если же кристалл сложнее, то для согласия с экспериментальными данными приходится считать, что, кроме осцилляторов с частотами  $0 < \omega < \omega_D$ , есть еще осцилляторы с дискретными частотами. Число этих осцилляторов равно  $(3r-3)N$ , где  $r$  — по-прежнему число атомов в ячейке, а  $N$  — число ячеек кристалла.

Заканчивая этот раздел, подчеркнем: то, о чем рассказано,— следствие применения классической (ньютоновской) механики к системе, состоящей из большого числа атомов. Строго говоря, бесконечного, так как мы не учитывали границ кристалла.

## КВАНТОВЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Энергия осциллятора, если оставаться на позициях классической механики, может быть любой: чем больше размах колебания (амплитуда), тем больше энергия. Если обозначить максимальное отклонение осциллятора от положения равновесия буквой  $u$ , а энергию буквой  $E$ , то

$$E = m\omega^2 u^2/2, \quad (30)$$

где  $m$  — масса осциллятора,  $\omega$  — его частота.

Квантовая механика утверждает: энергия осциллятора может принимать только дискретные значения:

$$E = E_n = \hbar\omega(n + 1/2), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (31)$$

Они отмечены на рис. 11.

Всегда ли нужно учитывать квантовые свойства осциллятора? Начнем с обычного маятника, колеблющегося с частотой маятника часов ( $\omega = 2\pi$  1/с). Разрешенные уровни энергии разделены при этом интер-

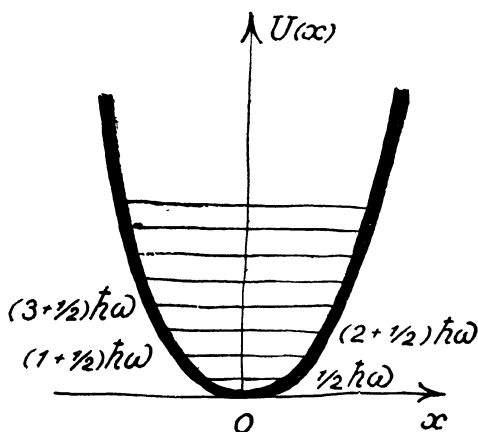


Рис. 11.

валами, приблизительно равными  $6 \cdot 10^{-27}$  эрг. Для тех, кто не чувствует, много это или мало, вычислим, какова амплитуда колебаний маятника, согласно формуле (30), если энергия равна  $6 \cdot 10^{-27}$  эрг.

Даже при массе, равной одному грамму ( $m = 1$  г), амплитуда чудовищно мала — меньше  $10^{-13}$  см (т. е. меньше размеров электрона, в сто тысяч раз меньше размеров атома). Ясно, что при изучении движения макроскопических тел учитывать дискретность уровней энергии бессмысленно: разрешенные уровни энергии расположены столь близко друг к другу, что их дискретностью можно попросту пренебречь.

В газе классических частиц<sup>1)</sup> средняя энергия каждой частицы равна  $\frac{1}{2} k_B T$ , где  $T$  — температура газа. Твердое тело — «газ» осцилляторов. Но энергия осциллятора равна сумме кинетической энергии и потенциальной. В среднем они равны друг другу. Средняя энергия каждого осциллятора, во всяком случае по законам классической физики, равна  $k_B T$ . Это дает нам возможность определить, когда можно пользоваться формулами классической механики, а когда необходимо привлекать квантовую. Для этого надо сравнить расстояние между энергетическими уровнями осциллятора  $\hbar\omega$  с энергией  $k_B T$ .

Во-первых, при любой температуре найдутся осцилляторы, для которых  $\hbar\omega \ll k_B T$  и к которым, следовательно, применима классическая механика. Во-вторых, только при  $k_B T \gg \hbar\omega$  классическая механика применима ко всем осцилляторам и, следовательно ее можно применять без боязни ошибиться к исследованию свойств твердого тела.

Величину  $\hbar\omega$  называют энергией Дебая, а после деления на постоянную Больцмана  $k_B$  — температурой Дебая и обозначают чаще всего буквой  $\theta$ :

$$\theta = \hbar\omega_D / k_B. \quad (32)$$

Для большинства твердых тел  $\theta \approx 100$  К, т. е. в несколько раз меньше комнатной температуры ( $20^\circ\text{C} = 293$  К). Поэтому почти все твердые тела в обычных условиях не проявляют квантовых особенностей. Но

---

<sup>1)</sup> О газах квантовых частиц см. «Приложение о двух статистиках между двумя главами».

есть вещества, например бериллий, у которых температура Дебая аномально высока ( $\theta_{\text{Д}} \approx 1000 \text{ К}$ ). Температура Дебая — одна из важнейших характеристик кристалла. В каждом сколько-нибудь подробном справочнике физических констант приведены температуры Дебая различных твердых тел.

## КЛАССИЧЕСКАЯ И КВАНТОВАЯ ТЕПЛОЕМКОСТИ КРИСТАЛЛОВ

Вычисление теплоемкости удобно начинать с расчета внутренней тепловой энергии тела <sup>1)</sup>  $\mathcal{E}_{\text{кол}}$ , так как теплоемкость  $C$  есть не что иное, как изменение тепловой энергии тела при изменении его температуры на один градус:  $C = \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{кол}}}{\partial T}$ . Так как колебательная энергия «заключена» в газе осцилляторов, то, естественно, надо вычислить среднюю энергию этого газа, для чего надо знать среднюю энергию одного осциллятора. Как мы только что убедились, при температурах ниже дебаевских необходимо квантовое рассмотрение. Его можно, конечно, использовать и при высоких температурах — ведь оно точное! Еще Макс Планк показал, что из формулы (31) однозначно следует: средняя энергия осциллятора равна

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \hbar \omega + \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / k_B T} - 1}. \quad (33)$$

В классическом пределе  $k_B T \gg \hbar \omega$  мы, как и должно быть, получаем правильный результат  $\bar{E} = k_B T$ . Еще один пример справедливости принципа соответствия.

Чтобы найти внутреннюю тепловую энергию кристалла, нужно сложить энергии всех осцилляторов. Это означает умножить  $\bar{E}$  на плотность состояний  $\nu(\omega)$  и проинтегрировать по всем частотам осцилляторов. В результате получим

$$\mathcal{E}_{\text{кол}} = \mathcal{E}_0 + \int_0^{\infty} \frac{\nu(\omega) \hbar \omega d\omega}{e^{\hbar \omega / k_B T} - 1}. \quad (34)$$

---

<sup>1)</sup> Назвав искомую величину  $\mathcal{E}_{\text{кол}}$ , мы подчеркиваем, что речь идет о колебательной энергии атомов твердого тела.

Прежде чем двигаться дальше, сделаем небольшое замечание о  $\hbar\omega/2$  в формулах (31) и (33). Мы уже отмечали, что квантовый маятник нельзя успокоить. Действительно, наименьшая энергия осциллятора, энергия его нулевого колебания (при  $n=0$ ) равна  $1/2\hbar\omega$ . Суммарная энергия нулевых колебаний атомов кристалла обозначена  $\mathcal{E}_0$ . Это — колебательная энергия кристалла при абсолютном нуле температуры. Но для того, чтобы обнаружить нулевые колебания, не обязательно охлаждать кристалл до абсолютного нуля. Есть явления, в которых нулевые колебания проявляются и при конечной температуре. Например, основная причина несходства свойств кристаллов различных изотопов одного и того же элемента связана с несовпадением энергий нулевых колебаний.

Выражение (34), позволяющее вычислить внутреннюю колебательную энергию твердого тела, показывает, что для этого нужно знать только плотность состояний осцилляторов... и все. Именно поэтому такое значение придается функции  $\nu(\omega)$ . Надо еще напомнить, что знание  $\mathcal{E}_{\text{кол}}(T)$  позволяет определить, по существу, все равновесные (термодинамические) характеристики кристалла<sup>1)</sup>: теплоемкость, сжимаемость, коэффициент теплового расширения и т. д., и т. п. — определить, не добавляя каких-нибудь новых предположений о характере движения атомных частиц. Для этого существует специальная безмодельная наука — термодинамика, основанная на столь общих принципах, как закон сохранения энергии...

Квантовый характер газа осцилляторов проявляется во всех тепловых свойствах твердого тела при низких температурах. Наиболее отчетливо — в зависимости теплоемкости от температуры. При высоких температурах (теперь мы знаем, что это означает при  $T \gg \theta$ ) квантование не играет существенной роли, и мы приходим к классическому результату:

$$\mathcal{E}_{\text{кол}} = 3Nrk_B T, \quad (35)$$

---

<sup>1)</sup> Чтобы быть совсем точным, отметим: надо еще знать зависимость всех величин от давления. Она тоже определяется силами взаимодействия между атомами и входит в плотность состояний (например, в виде зависимости температуры Дебая от давления).

а теплоемкость  $C$  не зависит от температуры и в расчете на моль вещества равна  $3R$  (где  $R$  — газовая постоянная,  $R = 1,9858 \frac{\text{кал}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ ). Равенство  $C = 3R$  носит название закона Дюлонга и Пти. Высокое наименование (закон) не спасает его от ограничений. При  $T \ll \theta$ , в согласии с формулой (34), колебательная энергия стремится к нулю вместе с температурой, а теплоемкость (опять в расчете на моль вещества) равна

$$C = \frac{4\pi^4}{15} 3R \left( \frac{T}{\theta} \right)^3. \quad (36)$$

Этот результат, полученный Дебаем и находящийся в прекрасном согласии с экспериментальными фактами, — один из триумфов применения квантовой механики к изучению свойств макроскопических тел.

Главный вклад в колебательную энергию кристалла при низких температурах вносят акустические волны. Энергия соответствующих им осцилляторов мала, и потому они легко возбуждаются. Оптические волны (даже если таковые могут быть) не возбуждаются при низкой температуре: на их возбуждение при  $T \ll \theta$  не хватает тепловой энергии.

## ФОНОНЫ

Теперь нам предстоит осознать одно из основных представлений квантовой теории твердого тела. Мы попытаемся показать, как корпускулярно-волновой дуализм, сравнительно подробно описанный в первой главе, позволяет создать удобный, наглядный язык для описания поведения атомов твердого тела, язык, особенно пригодный при низких температурах.

Построим сначала схему того, что описано в предыдущих разделах этой главы.

Кристалл — совокупность правильно расположенных, взаимодействующих друг с другом атомов. Колебания атомов распространяются по кристаллу в виде слабо взаимодействующих волн с волновыми векторами  $\vec{k}$  и частотами  $\omega_j(\vec{k})$ . Каждой волне ставится в соответствие осциллятор с частотой  $\omega_j(\vec{k})$ .

Но ведь каждой волне, следуя идеям Луи де Бройля, можно сопоставить *частицу* с энергией  $\epsilon$ , равной  $\hbar\omega_j(\vec{k})$ , и с импульсом  $\vec{p}$ , равным  $\hbar\vec{k}$ . Эта частица (чаще говорят *квазичастица*, см. «Введение о физике твердого тела...») носит название *фонона*. Фонон — элементарная порция звуковой энергии с частотой  $\omega$ , подобно тому как фотон — элементарная порция световой (электромагнитной) энергии.

Сопоставление:

волна $\longrightarrow$ квантовый осциллятор $\longrightarrow$ фонон.
---

Сопоставление обосновывается тем, что энергия возбужденного состояния каждого *квантового осциллятора*  $\epsilon_n$  равна целому числу  $\hbar\omega_j(\vec{k})$ :

$$\epsilon_n = n \hbar\omega_j(\vec{k}), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (37)$$

Число  $n$  приобретает простой наглядный смысл: это число фононов данного сорта — с импульсом  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$  и энергией  $\epsilon = \hbar\omega_j$ , а  $1/(e^{\hbar\omega_j/k_B T} - 1)$  в формуле (33) есть не что иное, как *среднее* число фононов с импульсом  $\vec{p}$  и энергией  $\epsilon$  при данной температуре. Мы так и будем обозначать:

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}. \quad (38)$$

Заметим: среднее число фононов  $N(\epsilon)$  с заданной энергией получается после умножения  $\bar{n}$  на плотность состояний  $\nu(\epsilon)$ :

$$N(\epsilon) = \nu(\epsilon)/(e^{\epsilon/k_B T} - 1). \quad (39)$$

Введение фононов позволяет во многих случаях рассматривать любое твердое тело как ящик с заключенным в нем газом фононов. Фононы, как частицы обычного газа, движутся от стенки к стенке, сталкиваются друг с другом.

Газ фононов — основной тепловой резервуар твердого тела. Тепловые свойства твердого тела можно понять, только изучив свойства этого своеобразного газа. Газ фононов, конечно, весьма необычный газ.

Вот наиболее бросающееся в глаза отличие от обычного газа: число фононов в твердом теле не постоянно. Фононов тем больше, чем интенсивнее тепловое движение атомов, т. е. чем выше температура. При высоких температурах число фононов пропорционально температуре, а с приближением к абсолютному нулю их число также стремится к нулю пропорционально третьей степени температуры. Оба эти утверждения легко проверить, если воспользоваться только что выписанным выражением для  $N(\varepsilon)$  — числа фононов с заданной энергией.

Как и волны, фононы бывают акустические и оптические. Однако при низких температурах, когда квантовый подход необходим, оптических фононов экспоненциально мало; как мы уже говорили, тепловой энергии на «рождение» оптического фонона не хватает. Акустические фононы при низких температурах тоже возбуждены не все. Больше всего таких фононов, энергия которых близка к  $k_B T$ . Возбудить более энергичные нет сил (температура низка), а очень низкоэнергичных вообще мало: плотность состояний пропорциональна  $\varepsilon^2$  (см. формулу (29)).

Вычислим импульс этих наиболее распространенных фононов при  $T \ll \theta$ . Когда возбуждены главным образом акустические длинноволновые фононы с законом дисперсии  $\omega = sk$  ( $s$  — одна из скоростей, либо поперечная, либо продольная), при переходе от  $k$  и  $\omega$  к импульсу и энергии имеем  $\varepsilon = sp$ . Из условия  $\varepsilon \approx k_B T$  легко получить, что импульс этих фононов примерно равен  $\frac{\pi \hbar T}{a \theta}$ , так как  $k_B \theta \approx \pi \hbar s/a$ .

Переход от волн (с волновыми векторами  $\vec{k}$ ) к квазичастицам (с импульсами  $\vec{p}$ ) заставляет перейти от «обратного» пространства (см. стр. 79) к *импульсному* пространству. В этом «пространстве» (удобно говорить « $p$ -пространство») характерный размер  $\pi \hbar/a$ . Большие импульсы попросту не имеют смысла — им можно найти эквивалентные в первой зоне Бриллюэна, воспользовавшись периодичностью  $\vec{p}$ -пространства.

Итак, мы видим, что при  $T \ll \theta$  тепловые фононы занимают малую область вблизи центра первой зоны

Бриллюэна. С повышением температуры их число растет, и чем температура выше, тем более однородно заполняют фононы  $\vec{p}$ -пространство.

## ОТСТУПЛЕНИЕ О ФОТОНАХ

После того, как мы столь подробно рассказали о фононах, можно вернуться к первой главе и несколько уточнить утверждения, которыми мы старались пояснить переход от электромагнитных волн к частицам — фотонам.

Формальная схема рассуждения аналогична только что описанной. Электромагнитной волне с волновым вектором  $\vec{k}$  и частотой  $\omega$  ставится в соответствие квантовый осциллятор с частотой  $ck$  или частица — фотон с импульсом  $\hbar\vec{k}$  и энергией  $\hbar\omega$ ;  $\frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$  — среднее число фотонов с импульсом  $\vec{p}$ ;  $\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$  — средняя энергия фотона. Плотность электромагнитной энергии в полости (формула (19)) расшифровывается так:

$E_{\omega} = \text{плотность состояний фотонов} \times \text{средняя энергия фотона.}$
---

Отличие плотности состояний фотонов от  $\nu(\omega)$  (сравните (19) и (29)) связано, во-первых, с отличием скорости звука от скорости света, а во-вторых, с различием в числе типов волн: звуковая волна имеет одну из трех поляризаций, а световая — одну из двух.

## ФОНОНЫ ПЕРЕНОСЯТ ТЕПЛО

Хорошо известно, что каждое твердое тело является проводником тепла. Особенно легко понять теплопроводность, если рассматривать кристалл как ящик с фононами. Пусть на одном конце твердого тела поддерживается температура  $T_1$ , а на другом  $T_2$ , причем  $T_2$  больше  $T_1$ . Это означает, что на левом конце (там, где температура равна  $T_1$ ) плотность фононов меньше, чем на правом конце (там, где температура  $T_2$ ).

Ясно, что фононы с правого конца будут «перетекать» в левый конец, пытаясь выравнять плотность фононов по всему телу (если бы мы собрали какой-либо газ в одной части сосуда, то он постепенно занял бы весь его объем). При своем перемещении от теплого конца к холодному фононы переносят тепло, которое отводится от холодного конца, если его поддерживают при постоянной температуре. Пришедшие фононы при этом просто исчезают, так как их число, как мы говорили, определяется температурой. На горячем конце фононы «зарождаются» — поддерживать постоянную температуру можно, только подводя тепло к телу.

Представление о тепловом движении в твердом теле как о газе фононов удобно не только для словесного описания явлений (в данном случае теплопроводности), но и при расчетах. Согласно молекулярно-кинетической теории газов коэффициент теплопроводности  $\kappa$  равен произведению  $\frac{1}{3} C l \bar{v}$ , где  $C$  — теплоемкость единицы объема газа,  $l$  — средняя длина свободного пробега молекул газа, а  $\bar{v}$  — их средняя тепловая скорость. У нас газ фононов. Скорость фононов, если для простоты ограничиться дебаевским приближением, равна скорости звука ( $\bar{v} = s$ ). Теплоемкость газа фононов нам уже известна (см. формулы (35) и (36)). Для определения температурной зависимости коэффициента теплопроводности необходимо «только» определить длину свободного пробега фононов  $l_{ph}$ . Длина свободного пробега частиц определяется столкновениями — тем, что ограничивает их свободный полет.

Постараемся разобраться в столкновениях фононов. Можно ли вообще говорить о столкновениях, когда речь идет не о настоящих частицах, а о фононах, о квазичастицах (якобы частицах, мнимых частицах)? В кристалле есть всегда какие-нибудь неоднородности: атомы примеси, границы кристаллитов, дислокации<sup>1)</sup>, границы образца, наконец. Столкновения с не-

---

<sup>1)</sup> Кристаллит — маленький участок строго периодического расположения атомов. Монокристалл состоит из одного кристаллита. В технике, в быту обычно используются поликристаллы, состоящие из огромного числа кристаллитов. Дислокация — след обрывающейся (недостроенной) атомной плоскости в кристалле — часто встречающийся дефект упаковки атомов в кристалле.

однородностями кристалла, конечно, ограничивают длину свободного пробега фононов. Пожалуй, здесь удобно вспомнить, что фонон — волна, которая рассеивается, как подобает волне, и, следовательно, может рассеяться на встречном препятствии. Волновыми свойствами фононов объясняется тот факт, что ограничивающая роль примесей для длины свободного пробега не очень велика, особенно при низких температурах. Волна с длиной значительно больше размеров неоднородности<sup>1)</sup> почти не ощущает ее (это обстоятельство легко установить, наблюдая за набегаящими волнами на морском берегу).

С уменьшением количества неоднородностей, т. е. с улучшением качества кристалла, длина свободного пробега будет возрастать. До каких пор? В идеальном «бесконечном» кристалле длина свободного пробега равна бесконечности? Или есть какие-то, присущие идеальному кристаллу, причины, ограничивающие длину свободного пробега фононов?

Оказывается, есть! Фононы, как молекулы обычного газа, сталкиваются друг с другом, причем законы взаимодействия фононов могут быть поняты при исследовании движения атомных частиц кристалла.

Прежде всего разберемся в том, что вообще означает «сталкиваться». Если бы частицы (или квазичастицы) вообще не взаимодействовали друг с другом, то никаких «столкновений» бы не было. Например, фотоны в пустоте практически (с огромной точностью) не замечают присутствия друг друга. Слово «взаимодействуют» при переводе с научного жаргона на строгий язык означает, это энергия двух частиц не равна сумме энергий этих частиц, а имеет дополнительное слагаемое или даже слагаемые. Эти дополнительные слагаемые так и называются — энергия *взаимодействия*.

Вероятность столкновения и другие характеристики процесса столкновения выражаются через энергию взаимодействия. Но ведь мы как будто показали, что

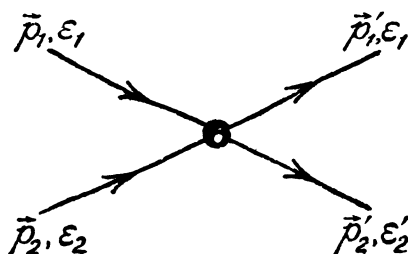
---

<sup>1)</sup> Размеры неоднородности приблизительно равны размерам ячейки кристалла  $a$ , а длина волны фонона  $\lambda_{ph}$  при  $T \ll \theta$  значительно больше  $a$ : из  $p \approx \frac{\pi \hbar T}{a \theta}$  следует, что  $\lambda_{ph} \approx a \frac{\theta}{T}$ .

энергия газа фононов есть сумма энергий отдельных фононов. И еще подчеркивали важность этого обстоятельства... Показали. Но из чего мы исходили при этом? Из представления движения атомов в виде *малых* колебаний (аналогия с движением маятника). Действительно, если считать, что отклонение атома из положения равновесия вызывает возвращающую силу, пропорциональную величине отклонения, то все сказанное выше — абсолютная истина. Но утверждение о линейной зависимости между силой и отклонением не точно! Оно так и называется — гармоническое *приближение*.

Так как амплитуда колебаний атомов мала, то во многих случаях гармонического приближения совершенно достаточно. Но не для расчета длины свободного пробега фононов. *Взаимодействие между фононами определяется следующими* (после линейных) членами разложения силы по степеням отклонений. Их называют *ангармонизмами*. Ангармонизмы важны, конечно, не только при расчете длины пробега фононов. Без их учета, например, нельзя понять тепловое расширение твердых тел. Но на этом вопросе мы вовсе не будем задерживаться.

Столкновения фононов очень непохожи на столкновения обычных частиц. Давайте изображать частицу стрелкой, а факт столкновения — кружком. Тогда столкновение двух частиц можно изобразить так:

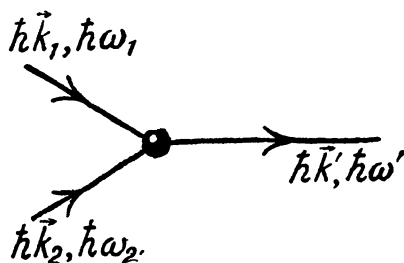


$$\begin{aligned}\vec{p}_1 + \vec{p}_2 &= \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 &= \epsilon_1' + \epsilon_2'\end{aligned}$$

Внизу мы выписали законы сохранения импульса и

энергии, которые, естественно, выполняются при столкновении частиц газа.

А следующая схема изображает один из возможных типов столкновений фононов:



$$\begin{aligned}\hbar \vec{k}_1 + \hbar \vec{k}_2 &= \hbar \vec{k}' + \hbar \vec{K}, \\ \hbar \omega_1 + \hbar \omega_2 &= \hbar \omega'.\end{aligned}$$

Бросается в глаза: число частиц при столкновении сохраняется, а число фононов не сохраняется. Но, пожалуй, главное отличие столкновений фононов от столкновения обычных частиц в том, что при столкновении фононов не сохраняется импульс. Кристаллическая решетка, по которой движутся фононы, тоже принимает участие в столкновении, забирая «часть» импульса. Правда, «забрать» она может только весьма определенную «порцию» импульса:  $\hbar \vec{K} = 2\pi \hbar \vec{b}$ . Кристаллическая решетка не всегда принимает участие в столкновениях фононов. Когда импульс сохраняется, то столкновения называют *нормальными*. Столкновения, при которых импульс не сохраняется, называют *процессами переброса*. Причина процессов переброса, конечно, в периодичности  $p$ -пространства.

Когда импульс столкнувшихся частиц выходит за пределы первой зоны Бриллюэна, его надо «вернуть на место». В этом и заключается «переброс». Процессы переброса открывают дополнительные каналы рассеяния: в кристалле могут происходить столкновения, запрещенные законом сохранения в вакууме.

Легко понять, что только те столкновения, которые сопровождаются перебросами, ограничивают дли-

ну пробега. Действительно, если выполняются законы сохранения импульса и энергии, то при столкновениях происходит только перераспределение энергии и импульса, а не торможение. Газ фононов при этом не тормозится, а течет как нечто целое. Он может перенести любое количество тепла, тем больше, чем больше скорость течения газа.

Для того чтобы мог произойти переброс, в процессе столкновения должен принимать участие хотя бы один фонон с большим импульсом, близким к  $\pi\hbar/a$ . При высоких температурах таких фононов много, и длина свободного пробега, входящая в выражение для теплопроводности, очень невелика ( $l_{ph} \approx 10^{-6}$  см).

Но при понижении температуры фононов с большими импульсами делается все меньше и меньше. Помните? При  $T \ll \theta$  почти все фононы располагаются вблизи центра первой зоны Бриллюэна. Фононы с импульсом, близким к  $\pi\hbar/a$ , имеют энергию порядка  $\hbar\omega_{\max} = k_B\theta$ . А это означает, что их число при  $T \ll \theta$  экспоненциально мало, т. е. пропорционально  $e^{-\theta/T}$ . Естественно, уменьшается и вероятность столкновения с такими фононами, в результате чего возрастает (экспоненциально) длина пробега  $l_{ph}$ . Комбинируя зависимости теплоемкости и длины пробега от температуры, получаем

$$\kappa \sim T^3 e^{\theta/T}. \quad (40)$$

При приближении к абсолютному нулю длина свободного пробега делается столь большой, что нельзя игнорировать конечность образца: границы кристалла препятствуют свободному пробегу фононов, и  $l_{ph} \approx L$ , где  $L$  — наименьший из размеров кристалла (толщина пластины, диаметр проволоки). Поэтому при стремлении температуры к нулю коэффициент теплопроводности также стремится к нулю пропорционально третьей степени температуры. Изучая теплопроводность при различных температурах, обнаруживают своеобразный максимум в зависимости  $\kappa(T)$ , который свидетельствует о смене механизма ограничения свободного пробега: «перебросы» уступили место рассеянию на границах (рис. 12).

Мы описали теплопроводность в кристаллах, считая, что никаких других квазичастиц в кристалле нет.

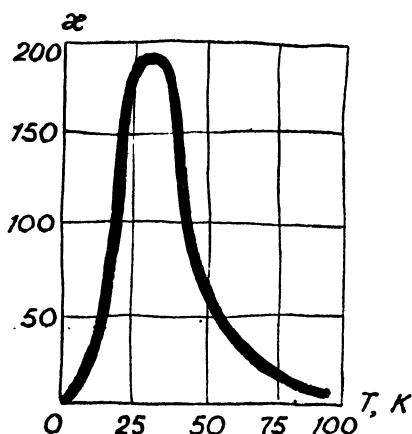


Рис. 12.

Это справедливо, если речь идет об обычных диэлектриках. В металлах тепло переносят электроны, в магнетиках — специфичные квазичастицы — магноны. Фононы сталкиваются и с электронами, и с магнонами, те в свою очередь — с фононами. Процесс переноса тепла усложняется, что проявляется в усложнении зависимости коэффициента теплопроводности от температуры. О некоторых из этих механизмов теплопереноса будет рассказано в других главах.

### МОЖНО ЛИ «УВИДЕТЬ» ОТДЕЛЬНЫЙ ФОНОН?

Даже при сверхнизких температурах фононов в кристаллах невообразимо много. При температуре, равной одной десятой температуры Дебая, на один кубический сантиметр твердого тела приходится приблизительно  $10^{20}$  фононов. Так как фононы определяют большинство тепловых свойств твердых тел, то, изучая последние, физики тем самым изучают свойства фононов. Но, конечно, желательно иметь возможность «потрогать», «разглядеть» отдельный фонон. Можно ли это сделать в принципе? Конечно, «выпустить» фонон из кристалла нельзя, ведь фонон — это движение атомов кристалла. Поэтому надо довольствоваться изучением свойств самого кристалла.

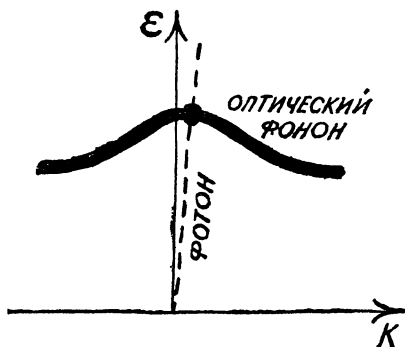


Рис. 13.

Для изучения фононов с малыми импульсами не нужны особые ухищрения, так как фононы с малыми импульсами — это обычные звуковые волны. Так что, изучая распространение звука в кристаллах, мы тем самым исследуем свойства отдельных фононов.

Пожалуй, самый старый способ изучения оптических фононов — исследование резонансного поглощения света кристаллами. На «языке фононов» это явление означает: фотон превращается в фонон. Изображается оно простейшим рисунком:



$$\vec{p} = \hbar \vec{k}, \quad \varepsilon = \hbar \omega.$$

Волнистая линия — фотон с импульсом  $\vec{p}$  и энергией  $\varepsilon = c p$ , где  $c$  — скорость света; внизу, как всегда, выписаны законы сохранения. Так как скорость света очень велика, то рождается оптический фонон<sup>1)</sup> с очень малым импульсом (рис. 13). С помощью оптических исследований можно «увидеть» только избранные фононы.

Очень существенную информацию о фононах дает неупругое рассеяние нейтронов в кристаллах. Преле-

<sup>1)</sup> Акустические фононы вовсе не рождаются при этом процессе, да и оптические отнюдь не все — некоторые колебания атомов вовсе не связаны с электромагнитными волнами.

тая через кристалл, нейтрон «раскачивает» атомы, т. е. возбуждает в нем звуковые волны, и тем самым несколько уменьшает свою энергию. На «фононном языке» это звучит так: нейтрон «рождает» фононы. Чем больше путь, проходимый нейтроном в кристалле, тем больше вероятность рождения фононов. Как правило, этот путь невелик и нейтрон либо вовсе не успевает «родить» фононы (упругое рассеяние), либо рождает один. Но это значит, что, изучая неупругое рассеяние нейтронов, *можно непосредственно измерить закон дисперсии фононов.*

Действительно, из законов сохранения импульса и энергии следует, что изменение импульса рассеянного нейтрона равно импульсу фонона, а изменение энергии нейтрона равно энергии фонона. Измерь то и другое и будешь знать закон дисперсии фононов. Конечно, это просто на бумаге. В действительности изучение неупругого рассеяния нейтронов требует сложной современной техники эксперимента, мощного источника нейтронов, тонкой регистрирующей аппаратуры, механизированной обработки результатов. Но «овчпка стоит выделки». Знание фононных энергетических спектров — глубокое проникновение в «устройство» твердых тел.

$$n_{\text{Б}} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \zeta}{k_{\text{Б}} T} - 1}}$$

$$n_{\text{Ф}} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \zeta}{k_{\text{Б}} T} + 1}}$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### О ДВУХ СТАТИСТИКАХ МЕЖДУ ДВУМЯ ГЛАВАМИ

#### СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА — НАУКА О КОЛЛЕКТИВАХ АТОМНЫХ ЧАСТИЦ

Зная законы движения отдельной частицы; совсем не просто установить законы, управляющие поведением коллектива — макроскопической совокупности частиц... Это как в жизни: зная, как ведут себя отдельные люди, трудно предположить, что будет делать толпа.

Поведение коллектива нельзя описать в тех же терминах, что и поведение отдельной частицы. Нельзя, например, проследить путь, проходимый каждой частицей. Их для этого слишком много. Приходится довольствоваться статистическими приемами — вычислять среднюю скорость, среднюю энергию и тому подобное. Этим уже более ста лет занимается специальная область физики — статистическая физика, или попросту статистика. Но сравнительно недавно, лет тридцать назад, в эту область вторглись идеи квантовой механики и родилась новая наука о коллективах частиц — *квантовая статистика*. Квантовая статистика не отменила классическую. Она указала последней ее место. На этом нам придется еще остановиться, но, забегая вперед, отметим, что, как правило, классиче-

ская статистика — предельный случай квантовой — справедлива при высоких температурах. Низкие температуры безраздельно принадлежат квантовой статистике<sup>1)</sup>). Правда, слово «низкие» надо понимать очень условно. Если интересоваться, например, свойствами звездного вещества, то «низкой» придется считать температуру в сотни тысяч градусов...

Простейший объект исследования физической статистики — газ — совокупность слабо взаимодействующих, редко сталкивающихся друг с другом частиц. Правда, если мы захотим изучать с помощью газа законы квантовой статистики, то это удастся отнюдь не всегда; как правило, раньше, чем проявятся квантовые эффекты, газ превратится в жидкость, а потом и вовсе затвердеет.

Газы квазичастиц составляют примечательное исключение. Они существуют в широком диапазоне температур, и, как правило, их квантовые свойства проявляются в обычных (человеческих) условиях.

## ИМПУЛЬСНОЕ ПРОСТРАНСТВО. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Молекулы газа находятся в непрерывном движении. Мерой их движения, как известно, является абсолютная температура — температура, отсчитываемая от абсолютного нуля. Средняя скорость молекулы тем больше, чем выше температура, а средняя кинетическая энергия молекулы газа попросту пропорциональна температуре. Представим себе, что мы хотим проверить это хорошо известное обстоятельство. Для этого надо знать, как движутся все молекулы газа. Измеряя скорость отдельной молекулы и произведя огромное количество замеров, мы, вычислив среднюю скорость,

---

<sup>1)</sup> Поясним: классическая статистика — менее точная наука, чем квантовая. Однако при достаточно высоких температурах, как правило, ошибка пренебрежимо мала. С понижением температуры ошибка при пользовании законами классической статистики возрастает и приходится пользоваться квантовой статистикой. Может возникнуть естественный вопрос: зачем пользоваться неточной классической статистикой, если есть более точная — квантовая? Классическая существенно проще, а ошибка очень часто несущественна.

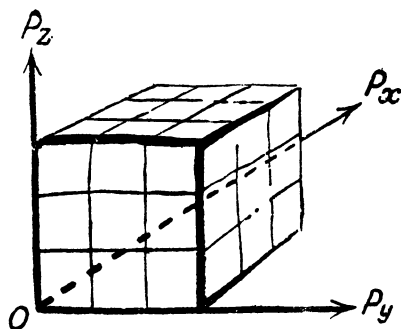


Рис. 14.

легко установили бы этот факт. Но как записать результаты замеров скоростей молекул? Пожалуй, удобно поступить следующим образом.

Введем систему координат, изображенную на рис. 14. На осях отложим значения проекций импульса  $\vec{p}$ . Любая точка в этом трехмерном пространстве изображает определенное значение импульса не только по величине, но и по направлению. В частности, начало координат изображает импульс, равный нулю, — импульс неподвижной частицы. Получившееся импульсное пространство<sup>1)</sup> разобьем на маленькие параллелепипеды, каждая грань каждого из которых соответствует, скажем, точности измерения импульса. Теперь, измерив значение импульса, поставим точку в соответствующую трехмерную клеточку. Чем чаще встречаются частицы с тем или иным импульсом, тем больше точек будет в соответствующей клеточке импульсного пространства.

Производя замеры достаточно долго и используя возможно более точный прибор, мы пришли бы к картине, изображенной на рис. 15, и установили бы:

— распределение точек в импульсном пространстве обладает сферической симметрией;

---

<sup>1)</sup> Мы уже вводили такой термин. Надеемся, он не может вызвать недоразумений. Заметим: импульсное пространство столь же объективно, как и обычное пространство, в котором мы движемся и живем, хотя расстояния в нем измеряются в г·см/с.

— вблизи начала координат, пока расстояние от начала координат меньше  $\sqrt{2Mk_B T}$  ( $M$  — масса частицы), газ точек наиболее плотен;

— дальнейшее разрежение идет очень быстро.

Число точек в клеточке импульсного пространства, если сделать клеточки достаточно маленькими, изображает число частиц с определенным значением импульса. Это число, конечно, является функцией импульса и носит название *функции распределения*, так как характеризует распределение частиц газа по импульсу. Функция распределения показывает, какая часть всех частиц газа имеет тот или другой импульс. Итак, рис. 15 есть своеобразное изображение функции распределения.

Производя «эксперименты» (измерение импульсов и нанесение точек в импульсном пространстве) при различных температурах, мы убедимся, что распределение частиц зависит от температуры. С повышением температуры «облако» расширяется, а его плотность падает; с понижением температуры, наоборот, облако стягивается к началу координат, плотность его повышается. Другими словами, с увеличением температуры увеличивается количество быстрых частиц, а с понижением — медленных.

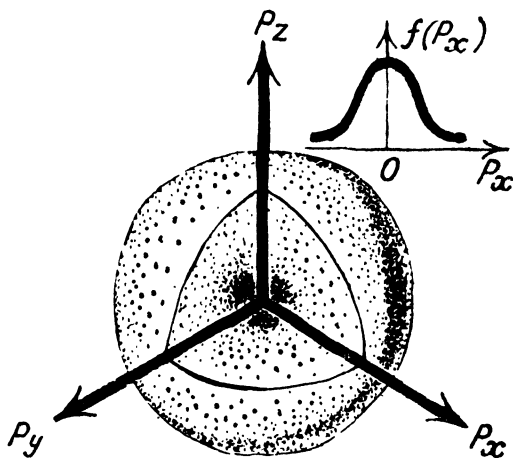


Рис. 15.

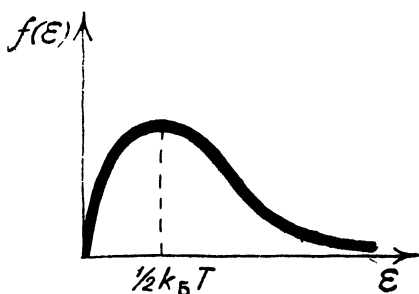


Рис. 16.

Может показаться, что рис. 15, на котором облако наиболее плотно вблизи начала координат, противоречит правильному убеждению в том, что большинство частиц имеет энергию, близкую к  $k_B T$  (их импульс порядка  $\sqrt{2Mk_B T}$ ). Чтобы выпутаться из противоречия, надо вспомнить: наш рисунок изображает распределение частиц не только по величине импульса, но и по его направлению.

Подсчитав число частиц с одинаковой энергией, движущихся в различных направлениях, и построив соответствующий график; мы убедимся, что функция распределения (как функция энергии  $\epsilon$ ) имеет максимум при  $\epsilon = \frac{1}{2} k_B T$  в соответствии с нашими представлениями (рис. 16).

Функция распределения — одна из важнейших характеристик системы частиц. Ее знание, т. е. знание зависимости функции распределения от импульса, позволяет рассчитать самые разнообразные свойства газа — давление, теплоемкость, среднюю скорость — и, в частности, вывести, а не постулировать знаменитое уравнение состояния идеального газа ( $PV = RT$ ).

Для классической статистики все идеальные газы элементарных частиц одинаковы. Различие между газами, наблюдаемое в природе, объясняется только различием в структуре их молекул.

Мы не будем на этом останавливаться, так как нас интересуют газы квазичастиц, а квазичастицы по определению элементарны.

## ИЗОТОПЫ ГЕЛИЯ ПОМОГАЮТ ПОНЯТЬ КВАНТОВУЮ СТАТИСТИКУ

Для того чтобы продвинуться дальше, опишем результаты такого мысленного эксперимента. В двух одинаковых сосудах объемом  $V$  поместим одинаковое количество  $N$  атомов He. Но один сосуд будет наполнен атомами  $\text{He}^4$ , а другой  $\text{He}^3$ .

Символом  $\text{He}^4$  обозначается обычный тяжелый изотоп гелия, а символом  $\text{He}^3$  — легкий. Оба изотопа гелия химически совершенно тождественны, как и подобает изотопам, а отличаются только тем, что в ядре  $\text{He}^3$  не хватает одного нейтрона по сравнению с ядром  $\text{He}^4$ . Это делает его на 25% легче. Есть еще одно важное отличие между атомами  $\text{He}^4$  и  $\text{He}^3$ , но о нем позже.

Построим функцию распределения атомов гелия при разных температурах. Казалось бы, результаты измерений в обоих сосудах должны быть тождественны, во всяком случае именно это утверждает классическая статистика. Однако с понижением температуры мы заметим систематически нарастающее различие функций распределений атомов  $\text{He}^4$  и  $\text{He}^3$ . Правда, различие в свойствах изотопов гелия станет ощутимым при очень-очень низкой температуре — при температуре в несколько сотых градуса (по шкале Кельвина). Эта цифра показывает условность описываемого эксперимента. Значительно раньше, чем мы достигаем температур порядка  $10^{-2}$  К, гелий превратится в жидкость, и нам придется прекратить эксперимент. Но ведь это *мысленный* эксперимент!

Мы назвали температуру, при которой различие в свойствах  $\text{He}^4$  и  $\text{He}^3$  делается заметным. Откуда мы ее взяли? Приведем формулу, происхождение которой поясним ниже.

Квантовые явления (а, конечно, все различие в поведении  $\text{He}^4$  и  $\text{He}^3$  объясняется квантовыми эффектами) существенны тогда, когда температура газа порядка или ниже величины

$$T_0 = \frac{1}{k_B} \frac{\hbar^2}{2M} \left( \frac{N}{V} \right)^{2/3}.$$

Температура  $T_0$  имеет несколько странное наименование. Ее называют *температурой вырождения*.

А газ при температуре, которая ниже температуры вырождения, — *вырожденным*. Если вместо  $N/V$  подставить величину  $2,7 \cdot 10^{19} \text{ 1/см}^3$ , а вместо  $M$  — массу атома гелия, то получим указанную выше температуру ( $T_0 \approx 10^{-2} \text{ К}$ ). Для  $N/V$  мы выбрали значение, соответствующее атмосферному давлению при комнатной температуре. Другими словами, начиная эксперимент при комнатной температуре, мы заполнили сосуды гелием при атмосферном давлении.

Откуда же взялась приведенная здесь формула? Чтобы понять ее происхождение, придется обратиться к соотношению неопределенности (см. формулу (11)).

Среднее расстояние между частицами в газе равно  $(N/V)^{-1/3}$ , это и есть неопределенность координаты ( $\Delta x \approx (N/V)^{-1/3}$ ). Следовательно, неопределенность импульса  $\Delta p_x \gtrsim \hbar (N/V)^{1/3}$ . В классическом газе, т. е. в газе при высокой температуре, средняя энергия частицы равна  $\frac{3}{2} k_B T$ , а значит, средний импульс порядка  $\sqrt{M k_B T}$ . С понижением температуры средний импульс уменьшается, а минимальная неопределенность импульса  $(\Delta p_x)_{\min} \approx \hbar \left( \frac{N}{V} \right)^{1/3}$  не зависит от температуры. Найдется такая температура, начиная с которой неопределенность импульса будет больше среднего импульса. Температура, при которой средний импульс равен  $(\Delta p_x)_{\min}$ , и есть температура вырождения  $T_0$ . Естественно, что если температура близка к  $T_0$ , а тем более если меньше ее, то квантовыми эффектами пренебрегать нельзя.

## БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКАЯ КОНДЕНСАЦИЯ

Продолжим наши наблюдения над изотопами гелия. При понижении температуры функция распределения атомов  $\text{He}^3$  по импульсам будет непрерывно деформироваться, все существеннее отличаясь от классической. Ее вид при абсолютном нуле температуры и при температурах значительно ниже  $T_0$  мы рассмотрим чуть позже.

Займемся пока тяжелым изотопом гелия. Производя эксперименты при низких температурах (а низкими мы теперь будем называть температуры ниже температуры вырождения), мы обнаружим удивительное

обстоятельство, которое заставит нас десятки раз повторять опыт. Из замкнутого сосуда исчезают молекулы! Молекулы исчезают *внутри* сосуда! Прежде чем пытаться найти разгадку этого явления — явления, которое может подвергнуть сомнению нашу уверенность в неисчезаемости материи, опишем его чуть-чуть подробнее.

Начиная с температуры  $T_{БЭ} \approx 4,4 T_0$ , число молекул газа в сосуде (которое мы определяем, пересчитывая все движущиеся молекулы) начинает уменьшаться, причем можно установить закон изменения этого числа с температурой:  $N_T = N \left( \frac{T}{T_{БЭ}} \right)^{3/2}$ . При аб-

солютном нуле частицы не обнаруживаются вовсе... В чем дело? Наблюдательный читатель, может быть, обратил внимание на слова в скобках: «которое мы определяем, пересчитывая все движущиеся молекулы». Это и есть разгадка. Мы наблюдаем только движущиеся частицы. При высоких температурах неподвижных частиц нет совсем (точнее, их *бесконечно мало*), но, начиная с температуры, равной  $T_{БЭ}$ , *конечное число* частиц имеет импульс, равный нулю<sup>1)</sup>. При абсолютном нуле температуры все частицы газа находятся в этом состоянии. Не надо думать, что частицы с импульсом, равным нулю, *лежат* на дне сосуда. Вспомните соотношение неопределенности. Раз они имеют определенный импульс (равный нулю), то, следовательно, их координата (т. е. их положение в сосуде) вовсе не определена. Они находятся где-то в сосуде, но где... не только нельзя сказать, но и нельзя задать такой вопрос — он не имеет смысла.

Описанное здесь явление носит название *бозе-эйнштейновской конденсации*. С обычной конденсацией, например газа в жидкость, это явление имеет весьма мало общего.

Может показаться, что мысленный эксперимент на-  
рочно поставлен так, чтобы обнаружить кажущееся  
исчезновение частиц. Конечно, можно было бы каж-

---

<sup>1)</sup> Согласно классической статистике при сколь угодно низкой температуре число покоящихся частиц бесконечно мало и только при  $T = 0$  все частицы неподвижны.

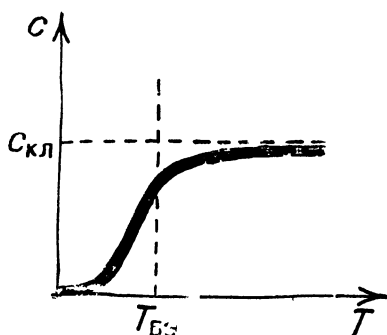


Рис. 17.

денсации частиц — перехода их в состояние с импульсом, равным нулю (рис. 17).

дый раз взвешивать сосуд и убеждаться, что все частицы на месте. Но все иные способы исследования газа, кроме взвешивания, действительно показали бы «исчезновение» частиц. В этом смысле особенно наглядно измерение теплоемкости. Резкое уменьшение теплоемкости  $C$  ниже температуры  $T_{БЭ}$  — следствие кон-

## ФЕРМИ-ДИРАКОВСКОЕ ВЫРОЖДЕНИЕ

Функция распределения атомов  $\text{He}^3$  по импульсам при низких температурах столь разительно отличается от функции распределения атомов тяжелого изотопа, что просто поражаешься: неужели это атомы одного химического элемента?! Особенно разительно отличие при абсолютном нуле температуры. Действительно, при  $T = 0$  атомы  $\text{He}^3$  заполняют в импульсном пространстве сферу (рис. 18). По имени Энрико Ферми ее

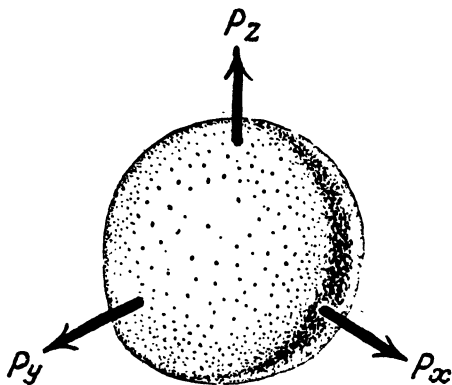


Рис. 18.

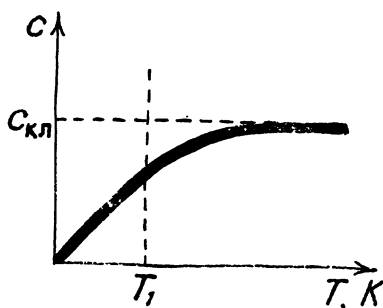


Рис. 19.

называют ферми-сферой. Радиус ферми-сферы тем больше, чем больше плотность частиц. Энергия частиц, расположенных на поверхности ферми-сферы,  $\epsilon_F$  (ее называют энергией Ферми) приблизительно равна температуре вырождения, умноженной на постоянную Больцмана, а средняя энергия частицы газа равна  $3/5 \epsilon_F$  — по атомным масштабам большая величина. Температуру  $T_F = \epsilon_F/k_B$  часто называют фермиевской температурой.

Своеобразное распределение частиц по импульсам приводит, естественно, к своеобразным свойствам газа как целого. Если измерить (мысленно — мы по-прежнему не учитываем ожижения) теплоемкость  $\text{He}^3$  в широком интервале температур, то получим результат, изображенный на рис. 19. Следует обратить внимание

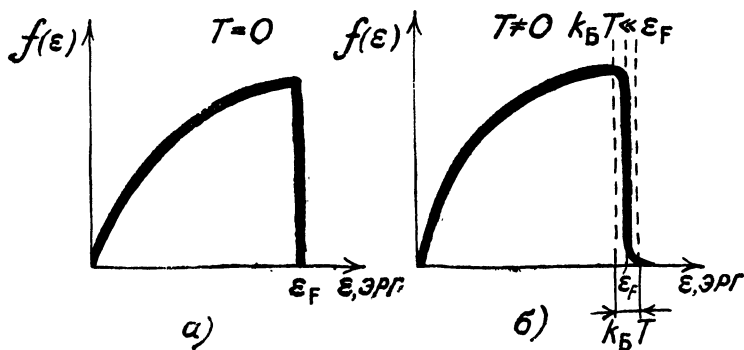


Рис. 20.

на характерный линейный ход теплоемкости с температурой при приближении к абсолютному нулю. Рис. 20 содержит *распределение* атомов  $\text{He}^3$  по энергиям при абсолютном нуле температуры и при температуре, отличной от нуля, но малой по сравнению с фермиевской температурой ( $k_B T \ll \epsilon_F$ ).

Описанное здесь поведение легкого изотопа гелия, как мы увидим ниже, является общим свойством некоторых газов и носит название ферми-дираковского вырождения. Подчеркнем также, что все сказанное имеет непосредственное отношение к газу электронов.

## ФЕРМИОНЫ И БОЗОНЫ

Различие между двумя изотопами гелия так существенно, что не может не возникнуть естественный вопрос о его причине. В чем дело? Неужели причина только в различии масс? Это не так. Существуют только *две* манеры вести себя, или, выражаясь официально, существуют только две статистики. Они по имени ученых, их открывших, получили название: *статистика Бозе — Эйнштейна* (ее законам подчиняются, в частности, атомы  $\text{He}^4$ ) и *статистика Ферми — Дирака* (атомы  $\text{He}^3$  подчинены ей). Газ частиц, подчиняющихся статистике Бозе — Эйнштейна, называют бозе-газом, а его частицы — *бозонами*. Газ частиц, подчиняющихся статистике Ферми — Дирака, — ферми-газом, а частицы его — *фермионами*<sup>1)</sup>.

Сколь различно ведут себя бозе- и ферми-газы, мы пытались проиллюстрировать выше. Надо, однако, помнить, что различие это проявляется только при низкой температуре. При высокой температуре, т. е. при температуре выше температуры вырождения, все газы элементарных частиц ведут себя одинаково.

Какое же микроскопическое свойство, т. е. свойство, относящееся к отдельной частице, определяет поведение коллектива частиц? Как мы уже упоминали, это — *спин частицы*, ее внутренний (собственный) момент количества движения.

---

<sup>1)</sup> Вспомните таблицу на стр. 40 и комментарии к ее последнему столбцу.

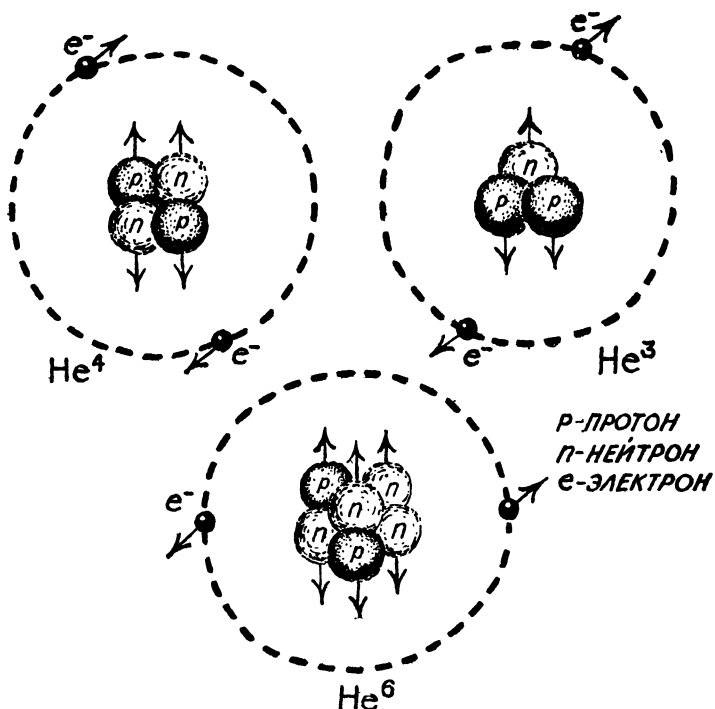


Рис. 21.

Можно сформулировать четкое правило:

Все частицы с полуцелым спином подчиняются статистике Ферми — Дирака, а с нулевым и целым — статистике Бозе — Эйнштейна.

Другими словами, частицы с целым или нулевым спином — бозоны, а с полуцелым — фермионы.

Причина различия в поведении фермионов и бозонов объясняется тем, что первые подчиняются принципу запрета Паули (см. 30), а вторые нет.

Запрет, не позволяющий скапливаться фермионам в одном состоянии, особенно ярко проявляется в их функции распределения при температуре, близкой к абсолютному нулю. При  $T = 0$  он мешает всем части-

цам перейти в состояние с нулевым импульсом, которое так «охотно» занимают бозоны.

Глядя на схематическую структуру атомов He (рис. 21), можно понять различие в поведении He<sup>4</sup> и He<sup>3</sup>. Спин атома He<sup>4</sup> равен нулю, а спин He<sup>3</sup> — половине. Разница в величине спина целиком связана с отсутствием у He<sup>3</sup> нейтрона. Нетрудно предсказать поведение газа, состоящего из атомов He<sup>6</sup>. Такой, правда, нестабильный изотоп есть. Так как спин атома He<sup>6</sup> равен нулю, то система из этих атомов подчиняется статистике Бозе — Эйнштейна.

## НЕСКОЛЬКО ФОРМУЛ

Это приложение между главами столь существенно для понимания всей книги, что мы, рискуя вызвать недовольство читателя, не любящего математику, решили привести несколько формул, физическое содержание которых, по существу дела, составляет содержание предыдущих разделов. Формулы требуют большей четкости, чем слова. Поэтому нам придется уточнить ряд понятий, о которых мы уже говорили выше.

В квантовой статистике принято использовать не импульсное пространство, а более абстрактное — *шестимерное фазовое пространство*. Осей координат в этом пространстве шесть:  $x, y, z, p_x, p_y, p_z$ . Соотношение неопределенности однозначно определяет объем ячейки этого пространства. Он равен  $(2\pi\hbar)^3$ .

*Функцией распределения называется среднее число частиц в ячейке фазового пространства.* Мы будем обозначать ее буквой  $n$ , придавая внизу индекс: «БЭ» — для бозонов и «ФД» — для фермионов. Хотя, как мы говорили, свойства функций распределения бозонов и фермионов существенно различаются, формулы, их выражающие, очень похожи. Равновесная функция распределения бозонов — функция Бозе — Эйнштейна:

$$n_{\text{БЭ}}(\vec{p}) = \frac{1}{e^{[\varepsilon(\vec{p}) - \varepsilon]/k_B T} - 1}. \quad (41)$$

Равновесная функция распределения фермионов —

функция Ферми — Дирака:

$$n_{\Phi D}(\vec{p}) = \frac{1}{e^{[\varepsilon(\vec{p}) - \zeta]/k_B T} + 1} \quad (42)$$

Они отличаются только знаком перед единицей в знаменателе! Кроме уже известных нам величин (энергии  $\varepsilon(\vec{p}) = p^2/2M$  и температуры  $T$ ) в формулы (41) и (42) входит *химический потенциал*  $\zeta$ . Его физический смысл станет ясным чуть ниже. Сначала познакомимся с тем, как, зная функцию распределения, вычислять интересующие нас макроскопические величины, например, число частиц  $N$  в сосуде объема  $V$  или их энергию  $\mathcal{E}$ :

$$N = \frac{gV}{(2\pi\hbar)^3} \iiint \frac{dp_x dp_y dp_z}{e^{[\varepsilon(\vec{p}) - \zeta]/k_B T} \pm 1}, \quad (43)$$

$$\mathcal{E} = \frac{gV}{(2\pi\hbar)^3} \iiint \frac{\varepsilon(\vec{p}) dp_x dp_y dp_z}{e^{[\varepsilon(\vec{p}) - \zeta]/k_B T} \pm 1}; \quad (44)$$

интегрирование ведется по всему импульсному пространству,  $g = 2s + 1$ , где  $s$  — спин частицы (напомним: у бозонов спин целый или нуль, а у фермионов полуцелый, у электронов  $s = 1/2$  и  $g = 2$ ). Если вы присмотритесь к формулам (43) и (44), то поймете их «конструкцию»: вычисление макроскопических величин означает суммирование вкладов в данную величину от каждой частицы, только суммирование ведется не по частицам, а по ячейкам фазового пространства. Появление множителей  $g$  и  $V$  обусловлено независимостью энергии частицы от ориентации спина и от координаты<sup>1)</sup>.

Число частиц в сосуде задано (вспомните, с чего мы начинали мысленные эксперименты, описанные в этом приложении). Температура тоже считается заданной. Правда, ее можно менять, нагревая или охлаждая стенки сосуда. Следовательно, равенство (43)

---

<sup>1)</sup> Подчеркнем (это будет важно в следующей главе): в области  $\vec{p}$ -пространства с объемом  $\Delta$  помещается  $\frac{gV}{(2\pi\hbar)^3} \Delta$  фермионов.

можно считать уравнением для определения химического потенциала  $\zeta$ . Сказанное и определяет физический смысл химического потенциала. Он обеспечивает *нормировку функции распределения*<sup>1)</sup>. Если бы существовал такой «фантастический» газ, число частиц в котором не сохраняется в замкнутом сосуде при изменении температуры, то химический потенциал у такого газа отсутствовал бы...

Придадим формулам (43) и (44) несколько более простой вид, перейдя в интегралах к сферической системе координат и проинтегрировав по углам:

$$N = \int_0^\infty \frac{\varepsilon v(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{(\varepsilon - \zeta)/k_B T} \pm 1}, \quad \mathcal{E} = \int_0^\infty \frac{\varepsilon v(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{(\varepsilon - \zeta)/k_B T} \pm 1}. \quad (45)$$

Величина

$$v(\varepsilon) = \frac{gVM^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3 \sqrt{2}} \varepsilon^{1/2} \quad (46)$$

— плотность состояния на интервал энергии  $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$ ,

$$n(\varepsilon) = \frac{v(\varepsilon)}{e^{(\varepsilon - \zeta)/k_B T} \pm 1} \quad (47)$$

— *функция распределения частиц по энергиям*. Мы многократно упоминали, что при высоких температурах господствуют законы классической статистики. Как же совершается предельный переход к высоким температурам в выписанных выше формулах? На первый взгляд — самым невероятным образом: надо пренебречь единицей в знаменателе. Дело в том, что согласно (43) при  $T \gg T_0$ , где  $T_0$  — та самая температура вырождения, формулу для которой мы обсуждали раньше,

$$\zeta \approx \zeta_{\text{кл}} = -\frac{3}{2} T \ln \frac{T}{T_0},$$

т. е., во-первых,  $\zeta < 0$ , а, во-вторых,  $|\zeta| \gg T$ , что и дает право отбросить единицу.

---

<sup>1)</sup> Этим не исчерпывается физический смысл химического потенциала. К сожалению, здесь нет возможности обсудить другие его роли.

Итак,

$$n_{\text{кл}}(\vec{p}) = e^{[\zeta - \varepsilon(\vec{p})]/k_B T}. \quad (48)$$

При высоких температурах среднее число частиц в ячейке фазового пространства мало, они «не мешают» друг другу, их квантовое взаимодействие (принцип Паули и т. п.) не проявляется, и именно поэтому справедлива классическая статистика.

Несколько слов о бозе-эйнштейновской конденсации и ферми-дираковском вырождении. Из формулы видно, что химический потенциал бозе-газа не может быть положительным. При  $\zeta > 0$  число частиц  $n_{\text{БЭ}}$  в ячейках фазового пространства, для которых  $\varepsilon(\vec{p}) < \zeta \neq 0$ , сделалось бы отрицательным и  $n_{\text{БЭ}} = \infty$  при  $\varepsilon(\vec{p}) = \zeta \neq 0$ ! Но согласно (43) или (45)  $\zeta$  может обратиться в нуль. Температуру  $T_{\text{БЭ}}$ , при которой это происходит, легко вычислить, положив  $\zeta = 0$  в выражении для  $N$ :

$$N = \int_0^\infty \frac{v(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\varepsilon/k_B T_{\text{БЭ}}} - 1}. \quad (49)$$

Значение  $T_{\text{БЭ}}$  мы уже приводили (см. стр. 111). Но что же будет при  $T < T_{\text{БЭ}}$ ? Число движущихся частиц, как мы знаем, при этом не сохраняется. Их с понижением температуры делается все меньше, а значит,  $\zeta = 0$  (рис. 22). Оказалось, что фантастический газ

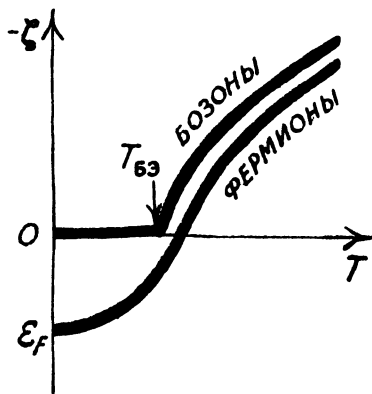


Рис. 22.

существует. Понимание явления, по-моему, не делает его менее фантастическим.

Понимание бозе-эйнштейновской конденсации помогает понять природу сверхтекучести и сверхпроводимости.

Для ферми-газа нет запрета на знак химического потенциала: при температуре, близкой  $T_0$ , он спокойно меняет знак и... что с ним происходит при  $T \rightarrow 0$ ?

Давайте аккуратно вычислим  $\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{e^{(\varepsilon - \zeta)/k_B T} + 1}$ , считая, что  $\zeta$  при  $T = 0$  не равняется ни нулю, ни бесконечности (пусть  $\zeta_{T \rightarrow 0} = \zeta_0$ ). Тогда

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{e^{(\varepsilon - \zeta)/k_B T} + 1} = \begin{cases} 1 & \text{при } \varepsilon < \zeta_0, \\ 0 & \text{при } \varepsilon > \zeta_0. \end{cases} \quad (50)$$

Эту разрывную функцию называют *фермиевой ступенькой*. Отсюда видно, что химический потенциал при нуле температуры есть энергия Ферми ( $\zeta_0 = \varepsilon_F$ ). Рис. 20 изображает функцию Ферми — Дирака, умноженную на плотность состояний при  $T = 0$  и при  $T \ll T_F$ . Используя первую из формул (45) (со знаком плюс конечно), а также формулу (46), легко найдем, что

$$\varepsilon_F = \left( \frac{6\pi^2 N}{gV} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2M}. \quad (51)$$

В заключение вернемся к фотонам и фононам и сравним формулы (19) и (34) с формулами этого раздела. Мы видим: *фотоны и фононы — бозоны*. Естественно, их химический потенциал равен нулю, так как число фотонов тем больше, чем выше температура стенок полости, излучающих их, а число фононов тем больше, чем выше температура кристалла. Числа фотонов и фононов не сохраняются.

$$\begin{aligned} \varepsilon(\vec{p} + 2\pi\hbar\vec{b}) &= \varepsilon(\vec{p}) \\ \varepsilon_F &= (3\pi^2 n_e)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_e} \\ p_F &\approx \hbar/a = v_F m_e, \quad n_e \approx Z/a^3 \\ v_F &\approx 10^8 \text{ см/сек.} \end{aligned}$$

ГЛАВА

**3**

об электронах

## ЭЛЕКТРОННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР КРИСТАЛЛОВ

В сочетании слов «энергетический спектр» уже ощущается влияние квантовой механики. «Спектр» — из волновой картины, а «энергетический» — из корпускулярной. Приступая к изучению электронных свойств твердых тел, мы ставим перед собой несколько задач:

- понять, почему одни кристаллы — проводники — хорошо проводят ток, а другие — изоляторы — плохо;
- объяснить существование тел с промежуточными свойствами: полупроводников, полуметаллов;

- на нескольких примерах разобрать, как квантовая механика и квантовая статистика объясняют наблюдающиеся на эксперименте закономерности.

Проследивать историю развития представлений об электронных свойствах твердых тел мы не будем (мы не придерживались историчности и в предыдущих главах). Постараемся рассказать об электронных свойствах, оперируя сегодняшними представлениями и понятиями. Не имея возможности сколько-нибудь полно использовать математический аппарат квантовой теории, мы будем обращаться к аналогии — помощнице

интуиции. Надо признаться, что этот раздел потребует от читателя несколько больше усилий, чем предыдущие.

Электрон в кристалле находится в поле сил ионов, расположенных периодически в пространстве. Уже эта фраза сугубо «квантовая». Классический электрон находится *или* в поле одного иона, *или* в поле другого. Но квантовому электрону «не страшны» потенциальные барьеры — он относительно свободно может передвигаться от иона к иону. Этим (делокализацией, говоря научным языком) электрон в кристалле напоминает свободный электрон. У свободного электрона энергия  $\epsilon$  — функция импульса<sup>1)</sup>  $\vec{p}$ . Теперь, чтобы избежать математического аппарата квантовой механики, воспользуемся соотношением де Бройля в его первоначальной форме:  $\hbar \vec{k} = \vec{p}$ , где  $\vec{k}$ , как и раньше, волновой вектор. В начале предыдущей главы, говоря о строении кристаллов, мы обратили внимание: периодический кристалл «создает» обратное пространство ( $\vec{k}$ -пространство), которое тоже периодически. В главе о фононах (стр. 94) мы превратили его в периодическое  $\vec{p}$ -пространство. Все величны, зависящие от импульса, — периодические функции  $\vec{p}$ . Значит, энергия электрона в кристалле  $\epsilon$  — периодическая функция  $\vec{p}$ .

Теперь подойдем к проблеме «с другой стороны». Электрон в изолированном атоме находится во вполне определенном состоянии. Энергию этого состояния изобразим горизонтальной линией, на которую можно «усадить» электрон (рис. 23). Теперь сблизим два атома — каждый со своей горизонтальной линией. Что с этими линиями произойдет, когда атомы сблизятся? Квантовомеханический расчет показывает, что линии немного раздвинутся. Они изображены одна *над* другой, так как в обоих состояниях (каждая линия — изображение энергии состояния) электрон «находится в обоих атомах сразу».

---

<sup>1)</sup> Для свободного электрона  $\epsilon = p^2/2m = mv^2/2$ ,  $m$  — масса электрона;  $\vec{p} = m\vec{v}$ ,  $v$  — скорость электрона.

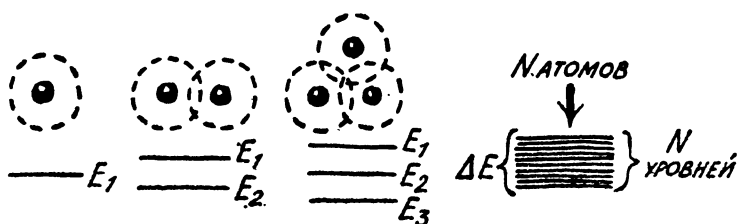


Рис. 23.

Теперь время сказать: «п так далее». Сближение  $N$  атомов приводит к тому, что каждое состояние расщепляется в  $N$  состояний. При этом нет необходимости, чтобы все атомы были близки друг другу: благодаря туннелированию электрон доберется до любого, переходя от атома к атому. Максимальное расщепление определяется ближайшими соседями. В кристалле объединено огромное количество атомов: в  $1 \text{ см}^3$  около  $10^{23}$ . Поэтому каждое атомное состояние в кристалле расщепляется в полосу или зону разрешенных значений энергии. Перенумеруем зоны: 1-я, 2-я, ...,  $j$ -я, ... Итак, задавая состояние электрона в кристалле, мы должны указать *номер зоны*, которой он принадлежит. Но ведь этого явно недостаточно. Как можно уточнить положение электрона в зоне? Так как появление зон вызвано способностью электрона перемещаться от атома к атому, то нет ничего удивительного в том, что его состояние в зоне зависит от импульса  $\vec{p}$ , причем, как мы говорили, зависит периодически. Чтобы быть точным, надо еще, задавая состояние электрона, указать направление его спина: по... ( $s_z = 1/2$ ) или против... ( $s_z = -1/2$ ). Часто для записи состояния электрона в кристалле пользуются такими обозначениями:  $|\vec{p}, s_z\rangle$  — мы теперь знаем, что это значит.

Электрон в кристалле напоминает и электрон в атоме, и электрон в свободном от сил (эквипотенциальном) пространстве. Сходство со свободным электроном для нас здесь более существенно. Поэтому мы приведем таблицу, которая, конечно, требовала бы пояснений, но мы, понимая, что она — результат точной теории, будем ею пользоваться, «не рассуждая».

Свободный электрон	Электрон в кристалле
Состояние $ \vec{p}, s_z\rangle$	$ j, \vec{p}, s_z\rangle$
Энергия $p^2/2m$	$\epsilon_j(\vec{p}) = \epsilon_j(\vec{p} + 2\pi\hbar\vec{b})$
Скорость $\vec{v} = \vec{p}/m$	$\vec{v}_j = \partial\epsilon_j(\vec{p})/\partial\vec{p}$
Уравнение движения $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$	$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{вн}}$
Закон сохранения импульса при столкновении двух электронов $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$	$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 + 2\pi\hbar\vec{b}$

<sup>1)</sup> Индекс «вн» указывает, что изменение импульса электрона в кристалле определяется внешней силой, а не всей. Силы, действующие со стороны ионов, создав состояние электрона  $|j, \vec{p}, s_z\rangle$  как бы выключались. Это — важное обстоятельство:  $\epsilon_j(\vec{p})$  часто можно считать *кинетической* энергией электрона в кристалле. Но в действительности это — *полная энергия* в отсутствие внешних сил.

## ПРОВОДНИК ИЛИ ИЗОЛЯТОР?

Итак, электрон в состоянии  $|j, \vec{p}, s_z\rangle$  обладает энергией  $\epsilon_{j,s_z}(\vec{p})$ . Аргументы  $j, s_z$  и  $\vec{p}$  написаны по-разному, чтобы подчеркнуть, что  $j, s_z$  дискретны, а вектор  $\vec{p}$  принимает любое значение. Если ограничиваться физически неэквивалентными состояниями, достаточно использовать  $\vec{p}$  из первой зоны Бриллюэна (см. гл. 2, стр. 79). Функции  $|j, \vec{p}, s_z\rangle$  и энергии  $\epsilon_{j,s_z}(\vec{p})$  можно вычислить, используя какие-либо определенные предположения о взаимодействии электронов с ионами. Мы об этом немного расскажем, правда, совсем немного... Даже если  $\epsilon_{j,s_z}(\vec{p})$  — известные функции, то о свойствах кристалла мы знаем еще очень мало... Как о каком-либо учреждении, познакомившись со списком должностей в нем, но не зная людей, занимающих штатные должности... Надо знать, как занимают состояния  $|j, \vec{p}, s_z\rangle$  электроны.

Рассмотрим кристалл объема  $V$ , состоящий из  $\mathfrak{N}$  ячеек, т. е.  $\mathfrak{N} = V/a^3$ . Пусть в каждой ячейке кристалла  $Z$  электронов (для простых кристаллов  $Z$  — атомный

номер составляющих его атомов). Всего в кристалле  $NZ$  электронов. Будем распределять их по зонам, считая, что энергия электрона не зависит от проекции его спина ( $\epsilon_{j, \frac{1}{2}}(\vec{p}) \equiv \epsilon_{j, -\frac{1}{2}}(\vec{p})$ ). Тогда в каждом состоянии может находиться *два* электрона. Будем заполнять зоны, исходя из метода, использованного при заполнении атомных состояний: так, чтобы энергия была поменьше и чтобы не нарушался принцип Паули. Так как объем первой зоны Бриллюэна равен  $(2\pi\hbar)^3/a^3$ , то полностью заполняют *все* состояния в зоне  $2V/a^3 = 2N$  электронов (см. стр. 79 и примечание на стр. 117). Таким образом, если  $Z$  — четное число, то может быть заполнено целое число зон, а если  $Z$  — нечетное, то обязательно одна зона останется полупустой (или окажется полуполной?).

Наличие или отсутствие частично заполненных зон имеет фундаментальное значение при ответе на вопрос, поставленный в заглавии этого раздела.

Допустим, что к кристаллу приложено электрическое поле. Ускоряясь под его действием, электрон увеличивает свою энергию, т. е. переходит на более высокий энергетический уровень. Однако процесс может происходить только в том случае, если *такой уровень имеется и если он свободен*. У кристаллов с частично заполненными зонами это осуществляется, а у кристаллов, у которых зоны либо полностью заполнены, либо пусты, — нет: свободные разрешенные уровни энергии отделены промежутком от занятых (рис. 24).

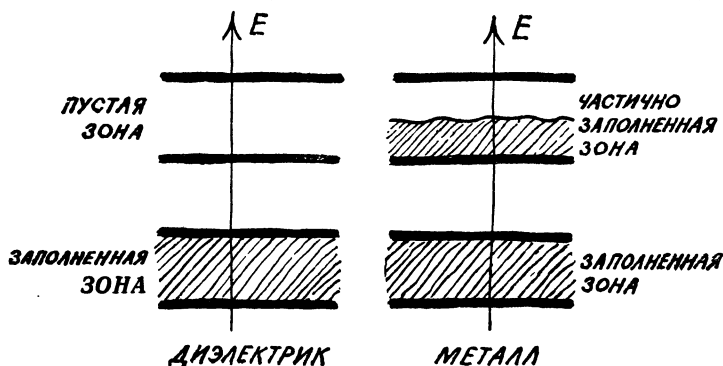


Рис. 24.

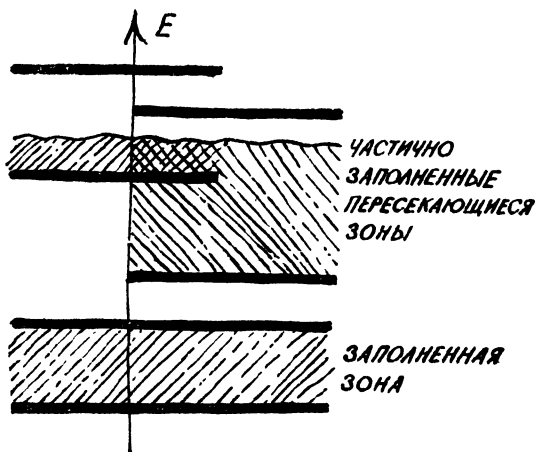


Рис. 25.

Казалось бы, можно сформулировать простое правило: четное  $Z$  — изолятор — диэлектрик, нечетное  $Z$  — проводник — металл.

Проверим теорию практикой: взглянем на первые клеточки таблицы Менделеева. Водород — диэлектрик, он состоит из молекул  $H_2$ , два электрона на ячейку, одна заполненная зона; гелий — аналогичная ситуация: моноатомный кристалл (под давлением), два электрона на ячейку — диэлектрик; литий — три электрона на ячейку — металл! Пока эксперимент подтверждает теорию. Но бериллий разрушает «красивую» картину: у него четыре электрона на ячейку, а он — хороший проводник — металл. Дело в том, что мы переупростили схему: разрешенные энергетические полосы могут перекрываться (рис. 25). Поэтому простой критерий по четности числа  $Z$  отсутствует. Остается только сказать так:

— если у кристалла есть частично заполненные электронами зоны, то он — проводник — металл; если нет, то изолятор — диэлектрик. Перекрывание зон — частое явление. Проводники-металлы среди элементов встречаются чаще, чем изоляторы.

## ПОЛУПРОВОДНИКИ, ПОЛУМЕТАЛЛЫ

Из предыдущего раздела ясно, что металлы могут проводить ток при абсолютном нуле температуры, и, как мы убедимся, эта их способность ухудшается с повышением температуры — сопротивление растет.

Кроме металлов, существует еще один класс кристаллических электронных проводников, к которому принадлежат элементы кремний, германий, селен, целый ряд соединений, например такие, как закись меди и т. д. Все они проводят электричество гораздо хуже, чем металлы, и называются поэтому *полупроводниками*. Кроме того, при абсолютном нуле температуры они совсем не могут проводить и являются диэлектриками. Их проводимость, в отличие от металлов, имеет тепловой характер. Это означает следующее.

Допустим, что в кристалле нижний край незаполненной энергетической полосы (ее называют зоной проводимости) очень близок к верхнему краю заполненной (ее называют валентной). Тогда достаточно сравнительно небольшой энергии теплового возбуждения, чтобы электрон перескочил из целиком заполненной нижней полосы в свободную верхнюю. Очевидно, что при абсолютном нуле, когда теплового возбуждения нет, в верхнюю полосу совсем не попадут электроны, и кристалл будет диэлектриком. С повышением температуры все больше электронов оказывается в верхней полосе. Естественно, что при этом проводящие свойства улучшаются, т. е. сопротивление падает.

Но не следует думать, что в полупроводнике только электроны в зоне проводимости переносят электрический заряд. Уходя из валентной зоны, электроны оставляют в ней свободные места. Следовательно, теперь уже оставшиеся электроны нижней полосы могут, ускоряясь, переходить на эти места. Ясно, что если при этом электрон переходит на свободное место, скажем, слева направо, само свободное место (дырка) перемещается справа налево, подобно тому как пузырь в воде подымается вверх, тогда как на самом деле центр тяжести всей воды понижается. Электрон, как мы знаем, движется к аноду, т. е. к положительному полюсу. Следовательно, дырка движется к катоду, т. е. ведет себя как положительный заряд.

Дырки отличаются от электронов не только знаком заряда. Вклад электронов и дырок в общую электропроводность различен, потому что во внешнем поле они с разной скоростью переносят заряд, и ток от электронов не равен просто половине общего тока. Можно фактически отличить вклад электронов от вклада дырок. Для этого достаточно поместить полупроводник, по которому течет ток, в магнитное поле, перпендикулярное току. Тогда электроны будут отклоняться в одну сторону, а дырки — в другую. Отклонение зарядов в магнитном поле создает дополнительную разность потенциалов в направлении, перпендикулярном и к току и к полю (эффект Холла<sup>1)</sup>). Эту разность потенциалов можно обнаружить гальванометром. Отклонение гальванометра в ту или другую сторону характеризует преобладание электронов или дырок. Различный знак эффекта Холла наблюдается и у металлов. Это показывает, что и у металлов дырки могут принимать участие в электропроводности.

До сих пор говорилось о полупроводниках, у которых есть и дырки и электроны. Однако оказывается, что большинство полупроводников обладает либо электронной, либо дырочной электропроводностью. Опыт показывает, что все подобные полупроводники содержат примеси других элементов. Какова же роль примесей?

Кристалл, содержащий примеси, уже не является идеальным. В неидеальных кристаллах, как следует из теории, имеются и полосы дозволенных значений энергий электронов, и отдельные уровни, расположенные между полосами (рис. 26). Эти уровни могут быть как занятыми, так и свободными. Допустим, что занятые уровни лежат очень близко от нижнего края свободной полосы. Тогда тепловое движение заставит часть электронов перейти в свободную полосу (зону проводимости) и получится полупроводник с чисто электронной проводимостью.

Так как в этом случае дырочные уровни соответствуют состояниям, связанным с ядром, то дырочная проводимость могла бы осуществляться путем переско-

---

<sup>1)</sup> Об эффекте Холла мы еще подробно расскажем (см. гл. 4).

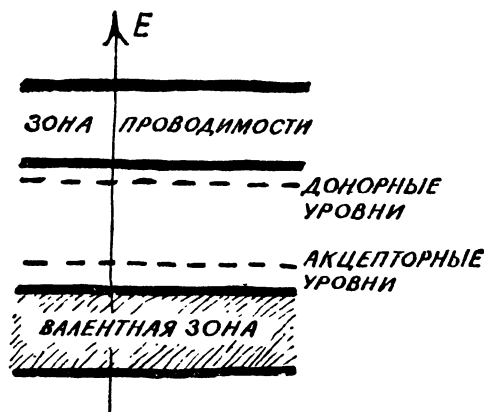


Рис. 26.

ков электронов с соседних атомов. Иногда так и бывает, и такую проводимость называют *скачковой*. Но чаще всего либо все примеси лишаются своих легко перемещающихся электронов, либо расстояния между атомами примеси велики: скачки маловероятны.

Если свободные уровни находятся вблизи верхнего края заполненной полосы, то тепловое движение перебросит часть электронов на эти уровни, а в заполненной полосе появятся дырки и получится дырочный полупроводник. Связанными с ядром атома окажутся электроны.

При освещении полупроводников видимым или ультрафиолетовым светом электроны могут, поглощая световую энергию, переходить в зону проводимости или уходить из заполненной полосы, оставляя подвижные дырки. Тогда во время освещения, даже и при низкой температуре, полупроводник обладает способностью проводить электрический ток. Это явление называется *фотопроводимостью*.

Освещая полупроводник *монохроматическим* светом, можно по фотопроводимости измерить расстояние (по шкале энергий) между занятыми и свободными состояниями. Используя формулу Бора, легко получим  $\hbar\omega = \Delta\varepsilon$ , где  $\Delta\varepsilon$  — изменение энергии электрона. Это — один из основных методов исследования энергетической структуры полупроводников.

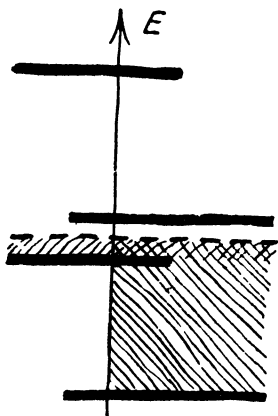


Рис. 27.

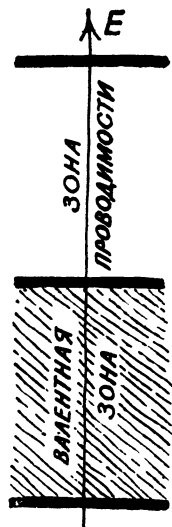


Рис. 28.

В последние годы выделяют еще один класс электронных проводников — *полуметаллы*. Полуметаллы — металлы, но такие, которые чуть не оказались диэлектриками или, точнее, полупроводниками. Характерный пример полуметалла —  $\text{Bi}$ . У него два атома на ячейку. Он мог бы быть диэлектриком, но валентная зона и зона проводимости чуть-чуть пересеклись (рис. 27). «Чуть-чуть» буквально! Числа электронов и дырок в  $\text{Bi}$ , конечно равные друг другу, в  $10^5$  раз меньше, чем в обычном хорошем металле.

Полупроводники и полуметаллы располагаются у границы между металлами и диэлектриками, но истинная граница проходит по *бесщелевым полупроводникам*, валентная зона и зона проводимости которых соприкасаются (рис. 28). Такие вещества сейчас открыты и активно изучаются.

## ПОВЕРХНОСТЬ ФЕРМИ

В дальнейшем в этой главе будет идти речь только о металлах и их свойствах. Следовательно, о кристаллах с частично заполненной одной или несколькими

зонами. Постараемся представить себе импульсное пространство такого металла. Оно частично заполнено электронами. Поверхность, которая отделяет область, занятую электронами, от области, свободной от электронов, называют *поверхностью Ферми* — аналог ферми-сферы свободного газа фермионов. Поверхность Ферми — одна из изоэнергетических поверхностей<sup>1)</sup>

$\epsilon_j(\vec{p}) = \epsilon$ . Так как  $\epsilon_j(\vec{p})$  — периодическая функция импульса, то поверхности Ферми, как и другие изоэнергетические поверхности, могут быть простыми (например, у Na, K), могут быть и очень сложными.

Примеры поверхностей Ферми изображены на рис. 29. Для наглядности мы ограничимся первой зоной Бриллюэна, изображение должно помочь периодически ее продолжить. Один раз мы окажем содействие: сравните рис. 29 и 31 — на них изображена поверхность Ферми меди.

Так как внутри поверхности Ферми, вернее, той ее части, которая располагается в первой зоне Бриллюэна, помещаются все электроны из частично заполненной зоны — их называют электронами проводимости (пусть их  $n_e$  в 1 см<sup>3</sup>), — то существует простое соотношение

$$n_e = 2\Delta_F / (2\pi\hbar)^3. \quad (52)$$

Здесь  $\Delta_F$  — объем поверхности Ферми, приходящийся на первую зону Бриллюэна (см. примечание на стр. 117). Бывают ситуации, когда поверхность Ферми как бы вывернута наизнанку. В этом случае удобней и более принято связывать объем поверхности Ферми с числом пустых мест в зоне. Их, как и в полупроводниках, называют дырками, а поверхность Ферми — дырочной. Дырки металла, как и дырки полупроводника, вносят в эффект Холла вклад, противоположный вкладу электронов проводимости.

Поверхность Ферми — очень важная характеристика электронов металла. Многие тонкие свойства металлов, особенно в магнитном поле, зависят от деталей ее строения.

---

<sup>1)</sup> Изоэнергетическая поверхность — это поверхность равной энергии. Для свободных частиц изоэнергетическая поверхность — сфера радиуса  $p = \sqrt{2m\epsilon}$ .

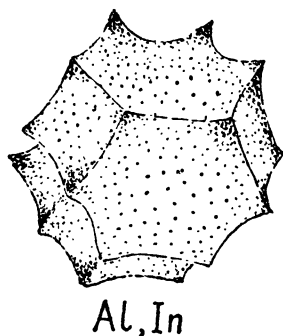
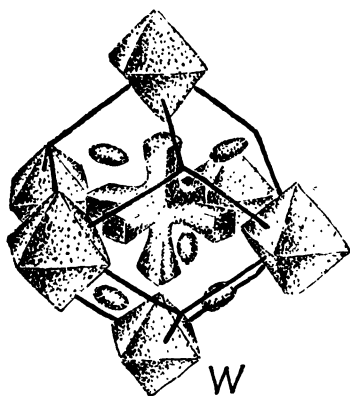
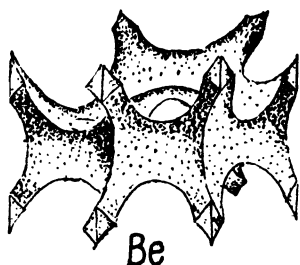
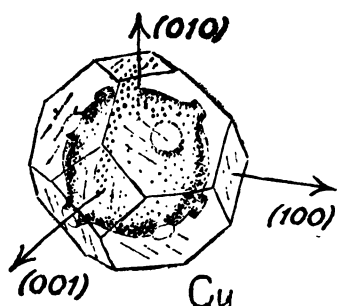


Рис. 29.

Рис. 30.

Чтобы воссоздать ферми-поверхности различных металлов, ученые измеряли сопротивление металлов в магнитном поле, изучали поглощение радиоволн сантиметрового и миллиметрового диапазонов металлическими поверхностями, пропускали через металл ультразвук, вычерчивали сложную зависимость магнитного момента металла от магнитного поля. Эксперименты производились в самых сложных условиях: при температурах вблизи абсолютного нуля, в огромных магнитных полях, в труднодоступном частотном диапазоне. Созданы справочники поверхностей Ферми, продолжается уточнение деталей, расширяется, а по пути завершается, диапазон изученных металлов.

В процессе изучения электронного энергетического спектра была понята (во всяком случае в принципе)

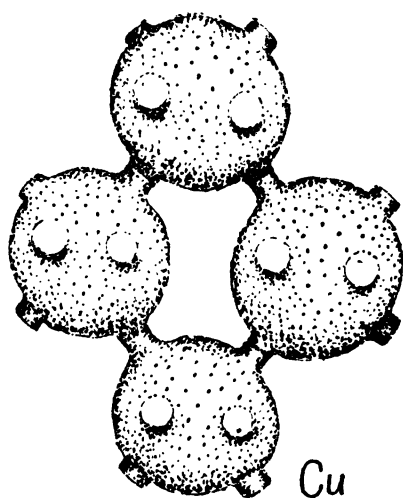


Рис. 31.

причина того, почему одни поверхности так просты (Na, K), а другие сложны.

Забудем на минуту об ионах. Тогда электрон проводимости движется в пустом пространстве, а движение свободного электрона особенно напоминает распространение волны. Чтобы «включить» воображение, будем представлять себе волну в океане. Ионы промоделируем сваями, вбитыми в дно океана. От каждого ряда свай волна немного отражается. Если отражение происходит каждый раз в одной и той же фазе, то отраженные волны взаимно усиливаются. Очень скоро амплитуда волны, отраженной от решетки свай, становится равной амплитуде падающей волны. Ясно, что после этого отдельная волна уже не распространяется, так как ей навстречу бежит волна той же амплитуды. Фактически уже нельзя отличить падающую бегущую волну от отраженной, а получается одна результирующая волна, которая называется стоячей. Чтобы получилась стоячая волна, отражение от последовательных рядов свай должно происходить всегда в одной и той же фазе, а для этого нужно, чтобы полудлина

волны либо совпадала с расстоянием между сваями, либо была в два, три, четыре и т. д. раза меньше.

Итак, мы видим, если происходит интерференция волн, то волновая картина существенно трансформируется по сравнению со свободной частицей, а если интерференция не происходит, то влияние ионов (свай) не слишком велико. Сформулируем на корпускулярном языке, но не условие возможности интерференции, а условие ее невозможности. Интерференция невозможна, если импульс электрона меньше  $\pi\hbar/a$ . Здесь  $a$  — наименьшее расстояние между «плоскостями обратной решетки».

Максимальный импульс имеют фермиевские электроны. Их импульс равен <sup>1)</sup>  $p_F = \hbar(3\pi^2 n_e)^{1/3}$ . Условие невозможности интерференции, а вместе с этим условие простоты поверхности Ферми в кубических кристаллах выглядит так:

$$n_e a^3 < \pi/3.$$

Для щелочных металлов (кроме лития) это условие выполнено. Их поверхности Ферми — сферы.

Остается понять (прежде чем закончить раздел), почему ионы можно рассматривать как малое возмущение (на этом построено вышеприведенное рассуждение). Главным образом потому, что их совокупное действие нейтрализуется электронами — в целом заряд металла равен нулю.

## ЭЛЕКТРОНЫ ПРОВОДИМОСТИ — ВЫРОЖДЕННЫЙ ФЕРМИ-ГАЗ

Сказанное в конце предыдущего раздела о сравнительно слабом влиянии ионов на движение электронов позволяет с ними обращаться, как с частицами, движущимися в свободном пространстве <sup>2)</sup>. Роль ионов сво-

---

<sup>1)</sup> Это выражение получено из формулы (52). Для свободных электронов  $\Delta_F = \frac{4\pi}{3} p_F^3$  (см. также (51)).

<sup>2)</sup> Конечно, такой подход — грубая модель. Многие свойства металлов, особенно, как мы говорили, под воздействием магнитного поля, не могут быть объяснены в рамках этой модели. Но те, о которых речь пойдет ниже, не слишком чувствительны к тонкостям. Главное для них — *квантовые свойства газа электронов*.

дится к удерживанию электронов в кристалле. Чтобы удалить электрон из металла, надо добавить ему энергии. Если это делается путем поглощения фотона, то наблюдается фотоэффект — мы об этом упоминали в первой главе.

Итак, для нас здесь и в следующей главе электроны — обыкновенные частицы. Энергия  $\epsilon$  есть  $p^2/2m$ , где  $m \approx 10^{-27}$  г. Электроны подчиняются статистике Ферми — Дирака. Мы можем воспользоваться формулой (51) и подсчитать их энергию Ферми ( $g = 2$ ,  $N/V = Z/a^3 = n_e$ ):

$$\epsilon_F = (3\pi^2 Z)^{2/3} \hbar^2 / 2a^2 m. \quad (53)$$

Так как *размеры* ячейки кристалла приблизительно совпадают с размерами атома, то удобно  $a$  выразить в боровских радиусах:  $a = (\hbar^2/me^2)\beta$  ( $\beta$  — безразмерный параметр, равный нескольким единицам). Таким образом,

$$\epsilon_F = \frac{(3\pi^2 Z)^{2/3}}{\beta^2} \frac{me^4}{2\hbar^2}, \quad (54)$$

$me^4/2\hbar^2 \approx 13,53$  эВ (см. гл. 1), и мы видим, что энергия Ферми — атомного масштаба. Обычно <sup>1)</sup> эпитет «атомный» используется вместо «микроскопический», «маленький». Здесь, скорее наоборот, мы — написали выражение для  $\epsilon_F$  в такой форме, чтобы подчеркнуть: энергия Ферми очень велика. Если с помощью (54) вычислять температуру Ферми  $T_F = \epsilon_F/k_B$ , то мы получим результат, который, несомненно, заставит нас насторожиться: температура вырождения электронного газа в металле порядка  $10^5$  К. Это означает, что электронный газ в металле уже при обычной комнатной температуре, да и вплоть до температуры плавления, всегда сильно вырожден, т. е. любой кусок металла — естественный «хранитель» вырожденного, «квантового» газа со всеми его особенностями и свойствами.

Представление об электронном газе как о вырожденном газе, подчиняющемся статистике Ферми — Дирака, — основа наших знаний о физике металлического состояния. Исходя из того, что электронный газ — вы-

---

<sup>1)</sup> Только не в словосочетании «атомный взрыв».

рожденный ферми-газ, удалось объяснить разнообразные свойства металлов (температурную зависимость сопротивления, термоэлектрические, магнитные и гальвано-магнитные явления и т. д.).

Уже с конца XIX века было известно, что в металле (в отличие от диэлектриков) есть свободные электроны. Было ясно, что их много: один-два на кристаллическую ячейку. Иначе нельзя было бы объяснить большую электропроводность металла, его блеск, т. е. способность отражать свет.

Но был один простой экспериментальный факт, который не укладывался в стройную картину. Теплоемкость. Теплоемкость металла, казалось бы, если верить формулам классической статистики, должна быть больше, чем теплоемкость диэлектриков (изоляторов). Причем не на проценты, а, как показали расчеты, более чем в полтора раза <sup>1)</sup>. Не заметить этого нельзя. Но измеренная теплоемкость металлов упорно совпадала с теплоемкостью диэлектриков. Свободные электроны не обнаруживались. Вся эта проблема благодаря своей простоте имела фундаментальное значение. Она получила название *парадокса о теплоемкости*. Если учесть свойства вырожденного ферми-газа, то все становится ясным, и парадокс естественно разрешается. Температура, при которой производились эксперименты, значительно ниже фермиевской температуры  $T_F$ , а электронная теплоемкость в этих условиях просто значительно меньше классической теплоемкости остальной «части» металла — его решетки.

Можно ли вообще измерить электронную часть теплоемкости металла и тем самым непосредственно убедиться в существовании вырожденного газа электронов? Производить эксперименты при температуре, значительно превышающей температуру вырождения, бессмысленно: почти всякий металл в этом случае не только расплавится, но и испарится. Есть другой способ: «опуститься» в область очень низких температур.

Вначале это может показаться глупым. Электронная теплоемкость при этом катастрофически мала. Но

---

<sup>1)</sup> Теплоемкость решетки  $3R$ , а классических электронов, если их по одному на атом,  $\frac{3}{2}R$  (см. 2-ю главу и «Приложение... между двумя главами»).

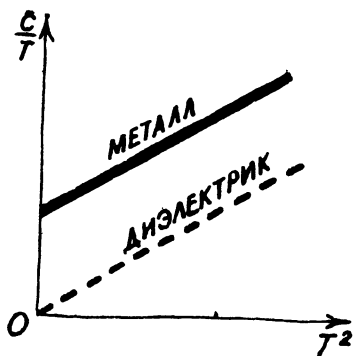


Рис. 32.

по сравнению с чем? По сравнению с ее классическим значением. А какая нам разница, во сколько раз электронная теплоемкость меньше своего классического значения! Нам важно, чтобы она превышала теплоемкость кристаллической решетки, ведь измеряем мы теплоемкость металла как целого, т. е. сумму: теплоемкость ионной решетки и теплоемкость электронного газа. Но теплоемкость решетки за счет квантовых эффектов (о которых мы рассказали выше) уменьшается с приближением к абсолютному нулю быстрее ( $\sim T^3$ ), чем электронная теплоемкость ( $\sim T$ ). При температуре в несколько абсолютных градусов они сравниваются. На рис. 32 изображена зависимость теплоемкости при  $T \ll \theta$ , деленной на абсолютную температуру, от квадрата абсолютной температуры. Пунктирная линия соответствует диэлектрику, сплошная — металлу.

Это не мысленный эксперимент. Электронная теплоемкость металлов измерена. Соответствующие данные приведены в современных справочниках. Они очень существенны для понимания природы металлического состояния...

Для того чтобы подчеркнуть удивительные свойства вырожденного электронного газа, приведем следующий факт, который противоречит нашей интуиции, основанной на классических представлениях: *вырожденный электронный газ тем идеальнее, чем плотнее*, т. е. чем меньше расстояние между электронами. Хотя это утверждение может показаться абсолютно бессмыслен-

ным, проанализируем его и убедимся, что оно справедливо.

Действительно, газ тем идеальнее, чем меньше энергия взаимодействия между частицами  $U_{вз}$  по сравнению с их кинетической энергией <sup>1)</sup>  $E$ . Последняя, как мы указывали, равна  $\frac{3}{5} \epsilon_F$  и, следовательно, растет пропорционально плотности электронов  $n_e$  в степени  $2/3$  ( $E$  пропорциональна  $n_e^{2/3}$ ). Электроны взаимодействуют друг с другом по закону Кулона. Энергия взаимодействия двух электронов обратно пропорциональна расстоянию между ними, т. е. растет пропорционально плотности в степени  $1/3$  ( $U_{вз}$  пропорциональна  $n_e^{1/3}$ ). Естественно, с ростом плотности кинетическая энергия «перегонит» потенциальную, что и требовалось доказать... Это свойство вырожденного газа дает в руки физиков-теоретиков надежный способ анализа свойств электронов (приближение большой плотности).

---

<sup>1)</sup> И та и другая энергии оцениваются в расчете на одну частицу.

$$\sigma = ne^2 \ell / p_F = ne^2 \kappa$$

$$R = \frac{1}{ne^2 \kappa}$$

$$\frac{\alpha}{\sigma T} = \frac{\pi^2 k_B^2}{3e^2}$$

ГЛАВА

4

об электронах и фононах

## СВОБОДНЫ ЛИ ЭЛЕКТРОНЫ МЕТАЛЛА?

Есть старая шутка о журналисте, любящем пышные фразы. Пуск электростанции он описывает так: «Такой-то (лицо начальственное) включил рубильник, и ток медленно потек по проводам...» «Медленно» здесь для торжественности. Торжественно-то торжественно, но грубо неверно. Первый токовый сигнал дойдет по потребителя с огромной скоростью, близкой к скорости света. Но постепенно (тоже очень быстро) установится определенный токовый режим. И если потребности в токе не меняются, то по проводам будет течь постоянный ток<sup>1)</sup>. Но ведь ток — это поток электронов. С какой же скоростью движутся в этом потоке электроны?

Вопрос не совсем корректен, так как известно, что даже в отсутствие тока электроны в металле движутся. Они не успокаиваются и при абсолютном нуле температуры. Об этом было подробно рассказано в предыдущих главах. Напомним все же: разные электроны в металле движутся с разными скоростями, но больше всего электронов, скорость которых (обозначим ее  $v_F$ )

<sup>1)</sup> Для простоты будем считать, что электростанция производит постоянный ток, а не переменный.

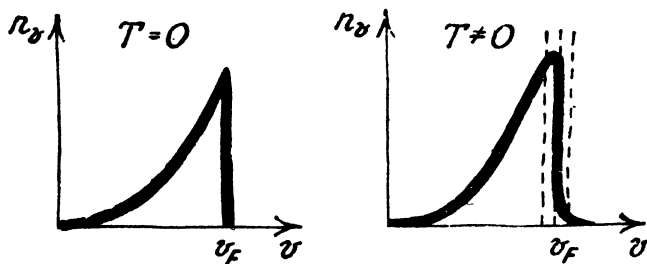


Рис. 33.

около  $10^8$  см/с. Число это можно получить, воспользо-  
вавшись соотношением  $\frac{mv_F^2}{2} = \epsilon_F$  (см. (53) и (54)). На  
рис. 33 схематически изображено распределение элек-  
тронов по скоростям при абсолютном нуле температу-  
ры и при температуре, отличной от нуля.

Итак, даже в отсутствие тока электроны движутся. Но это движение совершенно хаотическое, напоминающее беспорядочную беготню людей в толпе на улице. А когда по металлу течет ток, то движение электронов напоминает беспорядочную беготню людей в толпе, которая медленно движется по улице. Здесь «медленно» уже не для торжественности, а для того, чтобы подчеркнуть: скорость толпы — скорость упорядоченного движения — значительно меньше скорости, с которой бегают люди в толпе, т. е. скорости хаотического движения. Давайте раньше всего убедимся, что наша модель соответствует действительности. Для этого необходимо оценить среднюю скорость электронов (скорость хаотического движения мы знаем). Так как плотность тока есть количество электричества, проходящее за одну секунду через квадратный сантиметр проводника, то согласно определению

$$j = en\bar{v}; \quad (55)$$

$e = 4,6 \cdot 10^{-10}$  ед. СГСЭ,  $n_e \approx Z/a^3 \approx 10^{22} \div 10^{23}$  1/см.  
Пусть по металлу проходит ток плотностью в 1 А/см<sup>2</sup>. К сожалению, нельзя просто разделить единицу на произведение  $en_e$ ; надо раньше амперы перевести в нужные нам электростатические единицы; 1А =

$\approx 3 \cdot 10^9$  ед. СГСЭ. Подставляем выписанные здесь числа и с удивлением обнаруживаем:  $\bar{v} \leq 10^{-3}$  см/с. Как видите, электроны действительно движутся медленно не только по сравнению со скоростью их беспорядочного движения, но даже по нашим человеческим масштабам (может быть, не так уж не прав был тот журналист, с литературных красот стиля которого мы начали эту главу?).

Скорость упорядоченного движения электронов так мала, что закрадывается подозрение: имеем ли мы право считать электроны металла свободными? А если да, то в какой степени?

Как должен себя вести истинно свободный электрон? По металлу течет ток, только если к концам проводника приложена некоторая разность потенциалов, которая создает в металле электрическое поле. Предположим, это поле  $E$  равно 1 В/см. Следовательно, на каждый электрон действует сила  $eE$  и ускорение электрона  $w = eE/m$ . Легко убедиться, что электрон, пройдя расстояние 1 см, приобретает скорость около  $10^8$  см/с. Ничего похожего на переползание электронов со скоростью  $\bar{v}$ . И впрямь электроны не вполне свободны. Слишком разительно отличается поведение электронов металла от того, как должны были бы вести себя истинно свободные частицы.

## ЗАКОН ОМА

Способность металла проводить электрический ток привлекала физиков давно. Уже к началу XIX века было установлено, что между приложенной к металлу разностью потенциалов и протекающим за счет этого током существует простая пропорциональность (закон Ома), которую мы запишем в дифференциальной форме:

$$j = \sigma E. \quad (56)$$

Последнее соотношение так и называют *законом Ома в дифференциальной форме*.

Коэффициент пропорциональности между плотностью тока  $j$  и напряженностью электрического поля  $E$  — удельная электропроводность  $\sigma$ , величина  $\rho = 1/\sigma$  — удельное сопротивление. Сопротивление об-

разца, как известно,  $R = \rho L/S$ , где  $L$  и  $S$  — длина и площадь поперечного сечения проводника.

Используя выражение для плотности тока (56), легко устанавливаем, что средняя скорость электронов в проводнике пропорциональна действующей на них силе:

$$\bar{v} = \frac{\sigma}{e^2 n_e} eE. \quad (57)$$

Величина  $u = \sigma/e^2 n_e$  — скорость частицы под воздействием единичной силы — имеет специальное название. Она называется *подвижностью*. Подвижность характеризует силу сопротивления среды, через которую движутся электроны. Ведь не будь этой силы, электроны ускорялись бы электрическим полем, а не двигались бы с постоянной средней скоростью. *Подвижность — мера несвободы электронов*.

Соотношение (57) сближает прохождение тока по проводнику с перетеканием жидкости по трубке. Течение жидкости надо поддерживать (обычно разностью давлений на концах трубки) из-за того, что существует трение жидкости о стенки сосуда. Тормозятся не только те молекулы жидкости, которые непосредственно ударяются о стенки трубки. Существует механизм передачи импульса от быстро движущихся участков жидкости к медленным. Это — вязкость — свойство, объясненное на основании молекулярно-кинетических представлений о жидкости.

Электроны в проводнике также движутся с трением. Однако электроны трутся не только о стенки. Лучше сказать даже «не столько о стенки», так как торможение о стенки играет роль лишь у очень тонких проводников (об этом будет сказано дальше). Внутри металла существуют причины, тормозящие движение электронов. Рассказ о них — главное содержание этой главы.

Приято выражать не подвижность через удельную электропроводность, а электропроводность через подвижность:

$$\sigma = n_e e^2 u. \quad (58)$$

Может возникнуть недоуменный вопрос: зачем одну характеристику металла (электропроводность  $\sigma$ )

выражать через две другие  $n_e$  и  $u$ ? Каждая из них определяет существенно различные, можно сказать, независимые характеристики металлического состояния. Число свободных электронов в единице объема  $n_e$  практически не изменяется с температурой, мало зависит от состояния образца данного металла (монокристалл или поликристалл, очень чистый или с небольшим количеством примеси). Подвижность  $u$  может изменяться в сотни, тысячи раз с изменением температуры; очистка металла от примесей увеличивает подвижность. Обе характеристики — и число электронов в единице объема  $n_e$ , и подвижность  $u$  — допускают независимое измерение.

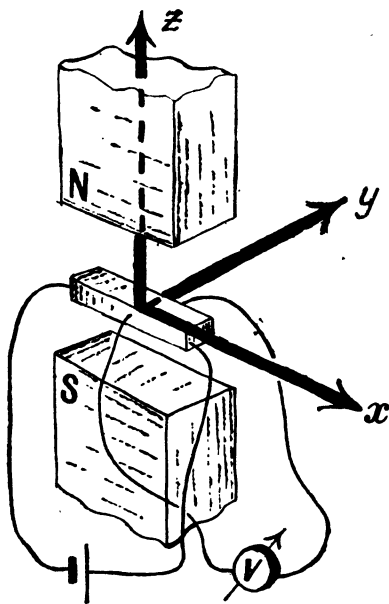


Рис. 34.

## ЭФФЕКТ ХОЛЛА. ОЦЕНКА ВЕЛИЧИНЫ ПОДВИЖНОСТИ

Одним из наиболее принятых методов измерения числа электронов в проводнике есть метод, использующий эффект Холла — возникновение разности потенциалов в пластине, помещенной в магнитное поле, когда по ней течет ток (рис. 34).

Причина эффекта Холла проста. Со стороны электрического и магнитного полей на электрон действует сила Лоренца  $e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{H}]\right)$ , под воздействием которой электрон стремится двигаться в направлении, перпендикулярном векторам  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Так как в этом направлении проводник разомкнут, то перераспреде-

дые зарядов приводит к появлению тормозящей силы — напряженности поля в направлении оси  $y$  (оси координат обозначены на рис. 34).

После несложных преобразований легко получить

$$E_y = \frac{1}{n_e e c} j H. \quad (59)$$

Так как заряд электрона и скорость света известны, а  $j$ ,  $H$  и  $E_y$  измеряются непосредственно, то последняя формула позволяет определить число электронов в единице объема проводника. Подобные измерения показывают, что у хороших металлов  $n_e \approx 10^{23} \text{ см}^{-3}$ . Это подтверждает наши оценки: от каждого атома металла оторвался и свободно движется по кристаллу один или даже несколько электронов. Казалось бы, еще одно доказательство справедливости наших представлений о свободе электронов. Особенно если учесть, что эта цифра согласуется и с другими измерениями — электронной теплоемкости, например.

Зная число электронов в единице объема, легко вычислить подвижность электронов в металле по формуле (58). Удельное сопротивление  $\rho$  металлов можно взять из справочника. Как правило, в справочнике приведено значение  $\rho$  при комнатной температуре. Вычислим и получим некое число. Для меди, например,  $u = 2 \cdot 10^{13} \text{ с/г}$  при комнатной температуре. Много это или мало? Если сравнивать с подвижностью электронов той же меди при очень низких температурах, то очень мало. Вблизи абсолютного нуля подвижность в сотни, тысячи раз больше. Если сравнивать с подвижностью электронов других проводников, то, пожалуй, много. Электроны меди — одни из наиболее подвижных.

## ВРЕМЯ СВОБОДНОГО ПРОБЕГА.

### ДЛИНА СВОБОДНОГО ПРОБЕГА

Зная подвижность, можно оценить две очень важные характеристики электронов металла, давшие название этому разделу. Размерность подвижности  $u$  с/г. Поэтому величина  $\tau = mu$ , где  $m$  — масса электрона, имеет размерность секунды. Величину  $\tau$ , как это часто бывает, называют по-разному. Чаще других употребляют

ются названия «постоянная времени» и «время свободного пробега». Названия взяты из разных областей физики. Первое — из механики, второе — из молекулярно-кинетической теории газов.

Анализ движения частицы с трением показывает, что сразу после включения внешней силы (скажем, электрического поля) частица движется с ускорением, ее скорость возрастает, одновременно растет сила трения, пропорциональная скорости. Через время, приблизительно равное  $\tau = m\eta$ , сила торможения полностью скомпенсирует внешнюю, ускоряющую силу, и частица будет двигаться с постоянной скоростью. Таким образом, постоянная времени характеризует время установления стационарного режима движения, движения с постоянной скоростью.

Оценим постоянную времени. В нашем примере  $\tau \approx 2 \cdot 10^{-14}$  с. Она фантастически мала. В постоянном поле заметить период свободного движения невозможно. После включения проводника в цепь в проводнике практически немедленно начинает действовать закон Ома<sup>1)</sup>.

Несмотря на фантастическую малость постоянной времени  $\tau$  электронов, период свободного движения электронов можно, однако, наблюдать и даже измерить  $\tau$ . Для этого надо изучить поведение металлов в высокочастотных полях.

С микроскопической точки зрения движение электронов с трением — чередование полета под действием ускоряющей силы и столкновений, во время которых частица отдает энергию, приобретенную под действием силы. При таком подходе  $\tau$  — среднее время между двумя столкновениями, а произведение  $v_F \tau = l$  — длина свободного пробега — среднее расстояние, которое проходит частица между столкновениями.

Таким образом, для того чтобы понять природу сопротивления проводников, надо понять, почему электрон в кристалле имеет конечную длину свободного пробега, и каково ее численное значение.

---

<sup>1)</sup> Фактически при включении проводника в цепь стационарный режим наступает не сразу. Время установления стационарного режима значительно больше  $\tau$  и определяется инерционными свойствами всей цепи, а не электронов металла.

Квантовая механика объяснила причину «освобождения» электрона из недр отдельного атома, привела к выводу, что в идеальном кристалле, т. е. в бесконечном кристалле без дефектов, в котором каждый ион неподвижно стоит на своем месте, электрон будет двигаться совершенно беспрепятственно, игнорируя окружающие его ионы. Ускоряясь под воздействием приложенного поля, он будет увеличивать свою энергию до тех пор, пока не столкнется с границей образца.

Чтобы заключить этот маленький раздел, выпишем несколько формул, определяющих удельную электропроводность через микроскопические величины: заряд электрона  $e$ , его массу  $m$ , длину свободного пробега  $l$  и т. д. Из формулы (58) и определения постоянной времени  $\tau$  имеем

$$\sigma = n_e e^2 \tau / m. \quad (60)$$

Если и числитель и знаменатель умножить на  $v_F$ , то выражение для удельной электропроводности примет несколько другой вид:

$$\sigma = n_e e^2 l / m v_F. \quad (61)$$

Так как  $m v_F = p_F$ , то последней формуле можно придать и такой вид:

$$\sigma = n_e e^2 l / p_F; \quad (62)$$

$4\pi p_F^2 = S_F$  — площадь поверхности сферы радиуса  $p_F$ . Поэтому формулу (62) можно переписать так:

$$\sigma = e^2 S_F l / 12\pi^3 \hbar^3, \quad S_F = 4\pi (3\pi^2 n_e)^{2/3} \hbar^2. \quad (63)$$

Значение этой формулы в том, что она с очевидностью показывает: перенос заряда в металле осуществляют электроны, расположенные на поверхности Ферми, — только они могут воспринимать от электрического поля его энергию: непосредственно над состояниями, в которых они находятся, есть разрешенные состояния, свободные от других электронов. Кроме того, это — современная формула; она не изменится, если учесть сложную динамику электронов проводимости,двигающихся в периодическом поле ионов кристаллической решетки, когда поверхность Ферми не сфера. При этом, правда, нельзя выразить  $S_F$  через число электронов в единице объема  $n_e$  (см. (63)).

Мы видели, что поверхности Ферми у многих металлов очень сложны: они могут быть разветвлены,

иметь множество «рукавов», «карманов», «перемычек» (эти образные наименования вошли в серьезные статьи по физике металлов). При вычислении коэффициента электропроводности сложность поверхности Ферми необходимо учитывать, так как расчет с помощью привычных формул, справедливых для металлов со сферическими поверхностями Ферми, может привести к ошибкам<sup>1)</sup>.

## ЭЛЕКТРОНЫ ПЕРЕНОСЯТ ТЕПЛО. ЗАКОН ВИДЕМАНА — ФРАНЦА

Краткое отступление. Представим себе соревнование по бегу с очень необычными правилами, суть которых в том, что соревнующийся должен как можно дальше от старта пронести шляпу на голове и флажок в руке. Все это осложняется тем, что бегуны не знают маршрута и выбирают его по случайным признакам. Кроме того, на трассе полно людей, которым разрешается сбивать с бегуна шляпу и вырывать из его рук флажок. Достоинство каждого участника соревнования будем оценивать по тому, как далеко от старта он пронесет шляпу и (или) флажок по правильной трассе. Ясно, что если бегун сбивается с дороги, то не имеет значения, удержал ли он флажок и шляпу или нет. В некоторых случаях бегуны, бегущие в правильном направлении, дальше донесут флажок, в некоторых случаях — шляпу. Это зависит от поведения людей на трассе и от свойств бегуна.

А теперь — определение, которое поможет нам приблизиться к теме нашего рассказа. Среднее расстояние, на которое бегунам удастся пронести шляпу, назовем длиной свободного пробега относительно потери шляпы, а среднее расстояние, на которое удастся пронести флажок, — длиной свободного пробега относительно потери флажка. Ясно, что, вообще говоря, эти длины пробега разные. Только если бегуны просто сбиваются с дороги, длины пробега одинаковы.

---

<sup>1)</sup> Чтобы излагаемое здесь не казалось совсем абстрактным, не относящимся к реальному металлу, можно все время помнить, что у всех щелочных металлов (кроме Li) поверхности Ферми — сферы.

Из этого рассказа следует усвоить, что длины пробега бывают разные. Чтобы быть точным, после слов «длина свободного пробега» надо добавлять «относительно потери...» и указывать, что при столкновениях теряет..., конечно, не бегун, а электрон.

Ток — это перенос заряда. Заряд электроны потратить не могут. Не донести заряд электроны могут только в том случае, если сойдутся с пути.

Двигаясь, электроны могут переносить не только заряд, но и тепло, если перемещаются от более горячего конца образца к более холодному. Электроны принимают участие в теплопроводности. Как правило, теплопроводность металлов больше, чем теплопроводность диэлектрика. Причина тому — именно участие электронов в переносе тепла.

Удивительного в этом ничего нет. В любом газе его частицы переносят тепло от горячей стенки к холодной. Металл — это сосуд, наполненный «газами» — фононами и электронами. Расчет электронного коэффициента теплопроводности  $\kappa$ , выполненный при столь же общих предположениях, что и вывод формулы (63), приводит к следующему результату:

$$\kappa = \frac{2\pi^2 k_B^2}{9(2\pi\hbar)^3} T S_F l_T. \quad (64)$$

Длину свободного пробега  $l_T$  мы снабдили индексом, чтобы подчеркнуть: это — длина свободного пробега относительно потери электроном тепла. При расчете  $l_T$  надо учитывать, сколько энергии теряет электрон при каждом столкновении. Длина свободного пробега (без индекса), входящая в выражение для электропроводности, есть длина свободного пробега относительно потери направления движения. Чтобы не удлинять обозначений, мы ее будем называть просто длиной свободного пробега. Вообще говоря,  $l$  и  $l_T$  различны и отношение

$$\frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{\pi^2 k_B^2}{3e^2} \frac{l_T}{l} \quad (65)$$

зависит от сорта металла и от температуры. Но при обычных температурах (комнатных и более высоких)  $l_T$  с большой точностью равна  $l$ , а отношение  $\kappa/\sigma T$  ока-

зывается постоянной величиной, не зависящей ни от температуры, ни от сорта металла. Оно равно  $\pi^2 k_B^2 / 3e^2 = 2,45 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{Ом} / \text{К}$ .

Вывод о постоянстве отношения  $\kappa/\sigma T$  для разных металлов был получен экспериментально и получил название закона Видемана — Франца. Закон Видемана — Франца — прекрасное доказательство правильности наших воззрений на «устройство» металла. Более того, точное значение постоянной в законе Видемана — Франца — непосредственное доказательство того, что электронный газ вырожден. Если бы электроны описывались классической статистикой, то постоянная была бы другой...

Исследования электропроводности и теплопроводности металлов при низких температурах показали, что закон Видемана — Франца отнюдь не универсален. Это, конечно, ни в какой мере не уменьшает доверия к нашим основным представлениям об «устройстве» металлов. Обнаружение отклонений от закона Видемана — Франца — еще одно свидетельство правильности теории, ведь  $l_T$  не есть  $l$ . Эксперимент показывает, когда это различие наиболее существенно, а теория выясняет причину различия... Рассказано об этом будет в одном из следующих разделов.

## ОБО ЧТО ТРУТСЯ ЭЛЕКТРОНЫ?

Когда говорилось о средней длине свободного пробега или о среднем времени свободного пробега, то термины «средняя», «среднее» понимались в двух смыслах: во-первых, «усредняются» все электроны (один рассеивается так, другой несколько иначе), а во-вторых, усредняются препятствия, на которых электроны рассеиваются.

В природе не бывает идеальных кристаллов. Каждое нарушение строгой периодичности воспринимается электроном как препятствие. Таким препятствием может быть случайно попавший в кристалл атом примеси, граница кристаллита, вакансия — место в кристалле, где при строгом порядке должен был бы находиться ион, — и т. п.<sup>1)</sup> В реальном кристалле множество са-

---

<sup>1)</sup> Ощутить, что всякое нарушение периодичности — препятствие, лучше на «волновом языке». См. стр. 122.

мых разнообразных дефектов. При обычной (комнатной) температуре главная причина рассеяния электронов, а значит сопротивления металлов, — все же не дефекты кристаллической решетки, а тепловое движение ионов. При очень низкой температуре — вблизи абсолютного нуля — тепловое движение почти отсутствует и «проявляются» дефекты, о которых шла речь.

Давайте разделим все столкновения электронов на два класса. Отдельно рассмотрим те столкновения, которые происходят на нарушениях периодичности кристалла, а отдельно те, что связаны с тепловым движением. Ко второму классу присоединим столкновения электронов друг с другом.

Если можно было бы создать идеальный бесконечный кристалл, то и в нем у электронов была бы конечная длина пробега (за счет теплового движения), правда, она неограниченно возрастала бы при понижении температуры. Длину пробега, которая была бы в идеальном кристалле, назовем идеальной длиной пробега  $l_{ид}$ , а сопротивление идеального кристалла — идеальным сопротивлением  $\rho_{ид}$ .

При абсолютном нуле температуры в реальном кристалле электроны сталкиваются только с нарушениями периодичности. Длина пробега, связанная с этими столкновениями, называется остаточной длиной пробега  $l_{ост}$ , а сопротивление — остаточным сопротивлением  $\rho_{ост}$ . Сопротивление названо остаточным, так как оно *остается* даже при абсолютном нуле температуры.

Существует простое правило, согласно которому сопротивление  $\rho$  реального металла есть сумма идеального и остаточного сопротивлений (правило Матиссена):

$$\rho = \rho_{ид} + \rho_{ост}. \quad (66)$$

На опыте получаем вот что: у двух образцов одного и того же металла очень похожие зависимости сопротивления от температуры (рис. 35), одна кривая сдвинута относительно другой на величину  $\rho_{ост}^{(1)} - \rho_{ост}^{(2)}$  (цифра обозначает номер образца). Сформулировать правило (66) помог анализ экспериментальных кривых.

Согласно правилу Матиссена, для того чтобы выяснить, каково идеальное сопротивление данного ме-

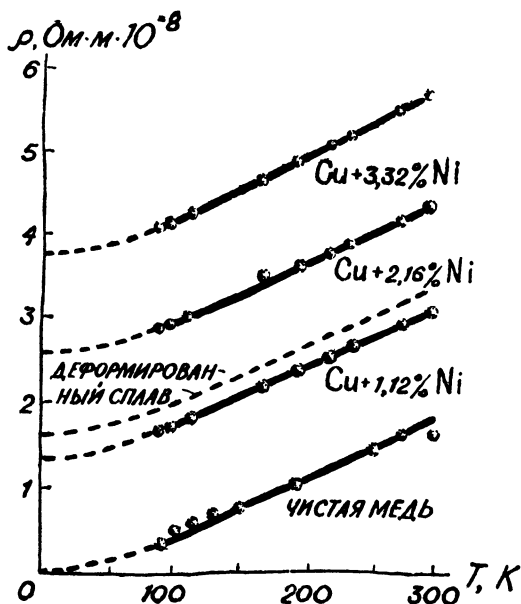


Рис. 35.

талла, нет необходимости создавать идеальный образец (да это и невозможно, хотя бы потому, что его нельзя сделать бесконечно большим). Надо построить кривую, изображающую зависимость сопротивления от температуры реального образца  $\rho(T)$ , и экстраполировать ее до абсолютного нуля. Так будет найдено  $\rho_{\text{ост}}$  для данного образца ( $\rho_{\text{ост}} = \rho(T \rightarrow 0)$ ), а вычтя  $\rho_{\text{ост}}$  из  $\rho(T)$ , получим  $\rho_{\text{ид}}(T)$  данного металла. Обычно экспериментаторы проределывают эту процедуру на нескольких образцах и удовлетворяются, если результат в пределах точности эксперимента не зависит от того, какой образец использован. Заметим, что процедура обработки экспериментальных данных, описанная выше, предполагает, что  $\rho_{\text{ост}}$  не зависит от температуры, а  $\rho_{\text{ид}}(T)$  не зависит от состояния образца. Эксперимент подтверждает это предположение не слишком точно. Обнаруживаются отклонения, которые называют отклонениями от правила Матиссена. Их изучению

посвящены в последние годы многие экспериментальные и теоретические работы.

Какова же природа правила Матиссена? Почему сопротивления, обзятые разными механизмам рассеяния, складываются?

Длина свободного пробега и время свободного пробега имеют простой вероятностный смысл:  $w = 1/\tau$  есть вероятность столкновения (рассеяния) «среднего» электрона в единице времени, а  $1/l$  — вероятность столкновения на единицу пути. Если в кристалле несколько возможных причин рассеяния, то вероятность столкновения есть сумма вероятностей столкнуться с каждым из препятствий<sup>1)</sup>:

$$w = \sum_j w_j. \quad (67)$$

Индекс  $j$  нумерует механизмы рассеяния. Если отделить все причины рассеяния, отвечающие идеальному кристаллу, то получим

$$w = w_{\text{ост}} + w_{\text{ид}}.$$

Сопоставляя  $w_{\text{ост}}$  — остаточную длину пробега и  $w_{\text{ид}}$  — идеальную, имеем

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_{\text{ост}}} + \frac{1}{l_{\text{ид}}}. \quad (68)$$

Последнее соотношение эквивалентно правилу Матиссена, так как сопротивление  $\rho = 1/\sigma$ , а коэффициент пропорциональности между  $\rho$  и  $1/l$  не зависит от механизма рассеяния (см. формулы (60) — (63)). Выписанные формулы (66) и (68) очень важны, так как дают возможность обособлять различные механизмы сопротивления, изучая каждый в отдельности.

Наиболее существенный вклад (это фигуральное выражение означает: наибольшее слагаемое в сумме вероятностей) в остаточное сопротивление дает рассеяние на различных примесях, которые есть в любом кристалле. Длину свободного пробега  $l_{\text{пр}}$ , обусловленную рассеянием на примесях, легко оценить, считая

---

<sup>1)</sup> В математике эту формулу «величают» теоремой о сложении вероятностей. Для ее выполнения необходимо, чтобы события были независимы.

примесный атом шариком с радиусом, близким размеру ячейки кристалла. Тогда, естественно,

$$1/l_{\text{пр}} \approx N_{\text{пр}} a^2, \quad (69)$$

где  $N_{\text{пр}}$  — число примесных атомов. Для того чтобы приближенное равенство заменить точным, надо, используя знание сил, действующих между атомами примеси и электроном, а также знание законов движения электрона (квантовую механику), вычислить величину, которую называют эффективным поперечником рассеяния. В формуле (69) он заменит множитель  $a^2$ . Точный расчет не слишком изменяет значение  $l_{\text{пр}}$  по сравнению с формулой (69), но дает возможность выяснить, как какая примесь влияет на сопротивление металла...

При столкновении с примесью, как, впрочем, и при столкновении с другими нарушениями периодического расположения атомов в кристалле, электроны практически не изменяют своей энергии, но изменяют направление своего движения — сбиваются с пути. Примесь тяжела, электрон легок. Поэтому, если примеси — главная причина рассеяния, то длина свободного пробега относительно потери тепла  $l_{\text{т}}$  не отличима от длины свободного пробега относительно потери направления, просто длины пробега  $l$ . Сбившись с пути, не донесешь ни заряда, ни избытка тепла. Таким образом, если длина пробега равна  $l_{\text{пр}}$ , то закон Видемана — Франца выполняется. Из сказанного раньше ясно, что так должно быть при очень низких температурах.

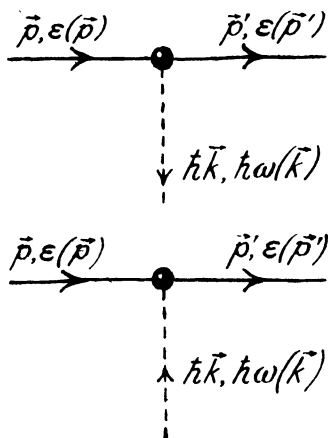
А как обстоит дело при более высоких температурах — комнатных, например? Для того чтобы ответить на этот вопрос, надо выяснить, как влияет тепловое движение ионов металла на сопротивление. Но тема эта столь существенна, что требует специального раздела.

## ЭЛЕКТРОНЫ СТАЛКИВАЮТСЯ С ФОНОНАМИ

Обычно описание роли теплового движения ионов в сопротивлении металлов начинают словами: «Электроны сталкиваются с фононами...»

Термин «столкновение» надо, однако, уточнить. Мы привыкли, что при столкновении надо на что-то

натолкнуться, а в случае электрон-фононного взаимодействия основные процессы столкновения таковы<sup>1)</sup>:



Сплошные линии изображают электроны, пунктирные — фононы; у линий стоят импульсы и энергии электрона и фонона (со штрихами — после столкновения). Во втором процессе действительно сталкиваются электрон и фонон. Правда, при этом фонон гибнет. В первом случае буквально столкновения нет вовсе, а электрон «рождает» фонон. Проверим прежде всего, возможны ли изображенные процессы с точки зрения законов сохранения импульса и энергии. Легко убедиться, что с точностью до обозначений в обоих случаях они записываются одинаково:

$$\varepsilon(\vec{p}) + \hbar\omega = \varepsilon(\vec{p} + \hbar\vec{k}). \quad (70)$$

Нас интересуют электроны, энергия которых равна фермиевской, но  $\varepsilon_F \gg \hbar\omega_{\max} = k_B\theta$ . Действительно,  $\theta \approx 10^2$  К,  $T_F \approx 10^5$  К. Это дает нам право попросту пренебречь  $\hbar\omega$  по сравнению с  $\varepsilon_F$  и условия рождения (гибели) фонона с импульсом  $\hbar\vec{k}$  переписать:

$$\varepsilon_F(\vec{p}) = \varepsilon_F(\vec{p} + \hbar\vec{k}). \quad (71)$$

<sup>1)</sup> Есть и обычные процессы столкновения, но они значительно менее вероятны, чем изображенные здесь.

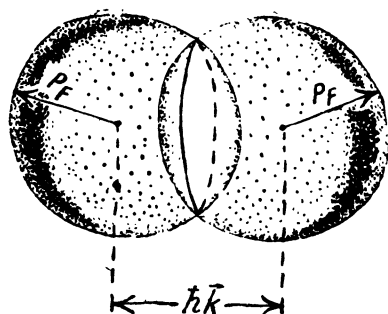


Рис. 36.

Отсюда видно, что процесс «разрешен», если поверхность Ферми  $\epsilon(\vec{p}) = \epsilon_F$  и ее сдвинутый на  $-\hbar\vec{k}$  аналог  $\epsilon(\vec{p} + \hbar\vec{k}) = \epsilon_F$  пересекаются (рис. 36). При  $\hbar k < 2p_F$  условие (71) выполнено — рождение и гибель фонона возможны<sup>1)</sup>. Фононов с  $\hbar k < 2p_F$  может быть сколько угодно: поверхность Ферми занимает большую часть первой зоны Бриллюэна.

Столкновение электрона с акустическим фононом может служить интересным примером принципа соответствия. Давайте формально в формуле (71) устремим  $\hbar$  к нулю. Тогда из (71) имеем  $\vec{v}_F k = 0$ , т. е. в процессе рождения (гибели) фононов принимают участие электроны, скорости которых перпендикулярны волновому вектору. Правда, раз мы переходим к классическому описанию, то лучше говорить не о рождении (гибели) фонона, а об излучении (поглощении) звуковой волны. Это во-первых. А во-вторых, так как большая энергия Ферми сократилась, то лучше не выбрасывать  $\hbar\omega$ . В результате получим

$$\hbar \vec{v}_F k = \omega \quad \text{или} \quad \cos \theta = s/v_F; \quad (72)$$

$\theta$  — угол между направлением скорости электрона и волновым вектором. Излучение (поглощение) звуко-

<sup>1)</sup> То, что при  $\hbar k \geq 2p_F$  процесс рождения и поглощения фононов электронами невозможен, приводит к любопытной особенности в фоновом спектре металлов (особенности Мигдала — Кона).

вых волн возможно, если  $v_F > s$ . Но это всегда выполнено:  $v_F \approx 10^3$  см/с,  $s \approx 10^5$  см/с. Сравнивая условия (70) и (72), мы видим: рождение (гибель) фонона — квантовый аналог черенковского получения звука.

Чтобы столкновения происходили, мало разрешения законами сохранения. Должно существовать *реальное* взаимодействие между сталкивающимися частицами (вспомните рассуждение об ангармонизмах, обеспечивающих взаимодействие между фононами). Какова природа электрон-фононного взаимодействия? Фонон — квант колебаний ионов металла. Электрон движется в поле ионов. Когда ионы сдвигаются из своих положений равновесия, энергия взаимодействия электронов с ионами меняется. Изменение энергии электронов за счет «сдвижки» ионов и есть энергия электрон-фононного взаимодействия.

Фононы, как все бозоны, обладают удивительным свойством: интенсивность их рождения в определенном состоянии тем больше, чем в этом состоянии их больше<sup>1)</sup>. Бозоны руководствуются стадным инстинктом: «Туда, куда все!» Однако рождаться бозоны могут и в пустоту.

При абсолютном нуле температуры в металле нет фононов. Можно подумать, что сопротивление, обязанное своим происхождением столкновениям с фононами, не должно при стремлении температуры к нулю исчезать. Подгоняемый электрическим полем электрон действительно не может *поглотить* фонон — их нет, но ведь, казалось бы, родить фонон электрон может, а значит, может затормозиться. Пока мы имеем дело с одним электроном, наше рассуждение безукоризненно, но, когда переходим к огромному коллективу электронов, ситуация усложняется.

Расчет показывает, что та часть сопротивления, которая обязана своим происхождением столкновениям с фононами, обращается в нуль вместе с абсолютной температурой. Это противоречие может поколебать веру в правильность приведенного здесь качественного рассмотрения механизма сопротивления. Однако если проследить все вычисления, которые есть в учеб-

---

<sup>1)</sup> Это свойство бозонов, открытое А. Эйнштейном. — основа устройства квантовых генераторов — лазеров, мазеров.

никах по электронной теории металлов, то легко убедиться, что механизм сопротивления описан совершенно правильно: в каждом акте столкновения электрон излучает или поглощает фонон<sup>1)</sup>. В чем же все-таки дело?

Читателю уже известно, что движение коллектива электронов описывается средней скоростью, которая очень мала. «Средний» электрон не может ни излучать звуковые волны, ни рождать фононы. Но он может рассеиваться на колеблющихся ионах. «Средний» электрон — понятие очень сложное. Действительно, одни электроны, движущиеся вдоль электрического поля, ускоряются полем, другие, те, которые движутся против поля, замедляются. Первые тормозятся, рождая фононы, вторые, поглощая, ускоряются. Иначе они отстанут от своих собратьев. Существует хорошо разработанный математический аппарат, позволяющий понять все эти действительно сложные процессы и дающий возможность последовательно перейти от описания индивидуального акта излучения и поглощения звуковой волны электроном к таким макроскопическим понятиям, как подвижность, средняя скорость и удельная электропроводность. Этими вопросами занимается особая глава теоретической физики — *физическая кинетика*.

То, что наши представления о средней скорости имеют глубокий физический смысл, видно из следующего: когда удастся создать условия, при которых средняя скорость направленного движения электронов делается больше скорости звука, сопротивление проводника резко возрастает — «средний» электрон начинает рождать фононы.

Вернемся к механизму идеального сопротивления.

Рассеяние «среднего» электрона удобнее описать, не используя представления о фононах, хотя в конце этого раздела придется вернуться к фононам, чтобы объяснить природу отклонений от закона Видемана —

---

<sup>1)</sup> Линейная зависимость между током и полем (56), которую мы изучаем, — первый член разложения  $j$  по степеням  $E$ . Рождение электронами фононов при  $T = 0$  приводит к зависимости проводимости от поля и в законе Ома не учитывается. Строго говоря,  $\sigma = \lim_{E \rightarrow 0} (j/E)$ .

Франца. Выбранный подход позволит не только понять природу сопротивления, но и оценить идеальную длину свободного пробега.

Тепловое движение нарушает строгую периодичность, поэтому беспорядочно колеблющиеся ионы являются причиной рассеяния, а вероятность рассеяться  $w$  (напомним, эта величина обратно пропорциональна длине свободного пробега:  $w = v_F/l_\phi$ ) тем больше, чем больше средний квадрат амплитуды колебаний иона  $\overline{x^2}$ .

Средняя длина свободного пробега  $l_\phi$  определяется простой формулой:

$$1/l_\phi = N_a \overline{x^2}, \quad (73)$$

где  $N_a$  — число ионов в единице объема. Эта формула означает, что вероятность рассеяния пропорциональна площади, которую «занимает» колеблющийся ион в плоскости, перпендикулярной скорости электрона<sup>1)</sup>.

Здесь и в дальнейшем численные множители опущены. Они в некоторых случаях могут довольно значительно изменить оценку величин. Температурная зависимость указана правильно. Длину пробега отметим индексом «ф», так как, по существу, речь идет о длине свободного пробега электронов, обусловленной рассеянием на фононах.

Расчет показывает, что

$$\overline{x^2}/a^2 = \begin{cases} k_B T / M s^2, & T \gg \theta, \\ k_B T^3 / M s^2 \theta^2, & T \ll \theta. \end{cases} \quad (74)$$

Последнее соотношение показывает, что при всех температурах  $\overline{x^2} \ll a^2$ . Если бы электрон рассеивался

---

<sup>1)</sup> Используемая формула (73) несколько вуалирует парадокс о сопротивлении при  $T = 0$ , но не снимает. При  $T = 0$  амплитуда колебаний ионов отлична от нуля, и снова приходится задавать вопрос: рассеиваются ли электроны на нулевых колебаниях? Ответ: нет. Дело в том, что нулевые колебания скоррелированы, или, грубо говоря, однородны. Вот если нарушить эту однородность, то нулевые колебания проявятся в сопротивлении при  $T = 0$ . Однородность нарушается автоматически, если образец не моноизотопен. Действительно, неоднородность нулевых колебаний служит причиной существования сопротивления при  $T = 0$  (И. Я. Померанчук). Считать изотопы обычными примесями нельзя, так как у всех изотопов одинаковые электронные оболочки и, следовательно, они одинаково рассеивают электроны.

на неупорядоченно расположенных атомах, то его длина свободного пробега была бы равна<sup>1)</sup>  $(N_a a^2)^{-1}$  (ср. с формулой (69)), а так она значительно больше. Используя формулу (62) и выписанные здесь соотношения, легко находим значение фоновой части сопротивления:

$$\rho_{\Phi} \approx \begin{cases} \frac{a}{v_F} \frac{k_B \theta}{M s^2} \frac{T}{\theta} & \text{— правил: по!} \\ \frac{a}{v_F} \frac{k_B \theta}{M s^2} \left(\frac{T}{\theta}\right)^3 & \text{— неправильно!} \end{cases} \quad (75)$$

Для простоты мы приняли:  $n_e = N_a$ ,  $m v_F^2 = e^2/a$  — оба равенства, как правило, выполняются по порядку величины.

Первая строка — классическое выражение для удельного сопротивления — соответствует строгой теории, а вторая — квантовое выражение для  $\rho_{\Phi}$  *неправильно*. Его надо домножить на  $(T/\theta)^2$ . Дело в том, что с понижением температуры уменьшается не только амплитуда колебаний иона, но и его скорость. Поэтому каждое столкновение с колеблющимся ионом лишь незначительно изменяет движение электрона — столкновения неэффективны. Необходимо  $(\theta/T)^2$  столкновений, чтобы электрон «заметил», что ему что-то мешает на его пути (при  $T > \theta$  достаточно одного столкновения). Итак,

$$\rho_{\Phi} \approx \frac{a}{v_F} \frac{k_B \theta}{M s^2} \left(\frac{T}{\theta}\right)^5, \quad T \ll \theta, \text{ — правильно!} \quad (76)$$

Эту формулу вывел Ф. Блох в 1929 г.

Неэффективность столкновений электронов с колеблющимися ионами — важное явление. Оно — главная причина отклонений от закона Видемана — Франца. Обсудим его «на языке фононов». При столкновении электрон изменяет свою энергию на величину энергии фонона, а импульс — на величину импульса фонона. Если изменение энергии электрона обозначить

---

<sup>1)</sup> В жидкости длина свободного пробега частицы  $l_{\text{ж}} \approx a$ , где  $a$  — межатомное расстояние:  $l_{\text{ж}} = (N_a a^2)^{-1} = \left(\frac{1}{a^3} a^2\right)^{-1} = a$ .

$\Delta\varepsilon$ , а изменение импульса  $\Delta\vec{p}$ , то, согласно сказанному,

$$\Delta\varepsilon = \hbar\omega, \quad \Delta\vec{p} = \hbar\vec{k},$$

где  $\omega$  и  $\vec{k}$  — частота и волновой вектор поглощенного фонона. При низких температурах ( $T \ll \theta$ ) в твердом теле больше всего фононов с энергией, близкой к  $k_B T$ , и с импульсом  $\sim \frac{\hbar}{a} \frac{T}{\theta}$  (см. гл. 2). Следовательно, их с подавляющей вероятностью и поглощают электроны. Поэтому  $\Delta\varepsilon \sim T$ , а  $\Delta p \approx \frac{\hbar}{a} \frac{T}{\theta} \approx p_F \frac{T}{\theta}$ , так как  $p_F \approx \frac{\hbar}{a}$ . Существенное изменение направления полета электрона означает изменение импульса на величину порядка  $p_F$ . Оценка  $\Delta\vec{p}$  показывает, что изменение импульса за счет поглощения фонона очень мало по сравнению с импульсом Ферми, и подтверждает наше утверждение, что для заметного отклонения требуется большое число столкновений. Точный расчет показывает, что их необходимо  $(\theta/T)^2$ .

При изучении теплопроводности надо знать, как электроны теряют тепло. Как мы видели, при каждом столкновении электрон изменяет свою энергию на величину, близкую  $k_B T$ . Хотя электроны почти не сбиваются с пути, зато они легко теряют тепловую энергию.

Другими словами, при столкновениях с фононами длина свободного пробега  $l_\tau$  относительно потери тепла значительно меньше длины свободного пробега  $l$  относительно потери направления. Отношение их  $l_\tau/l \approx (T/\theta)^2$  — мера неэффективности столкновений электронов с фононами при низких температурах.

Наверное, нет необходимости подчеркивать, что в тех случаях, когда при низких температурах ( $T \ll \theta$ ) рассеяние на фононах — главная причина рассеяния, закон Видемана — Франца не должен выполняться. Этот вывод находит экспериментальное подтверждение.

При высоких температурах ( $T \gg \theta$ ) большинство фононов имеют энергию, равную  $\theta$ , а импульс — порядка фермиевского. Поэтому каждое столкновение полностью сбивает электроны с «правильного пути». Естественно,  $l_\tau \approx l$ , и закон Видемана — Франца выполняется.

## ЭЛЕКТРОНЫ СТАЛКИВАЮТСЯ ДРУГ С ДРУГОМ

Слово «газ» вызывает представление о миллиардах частиц, движущихся в разных направлениях с различными скоростями, сталкивающихся друг с другом и при столкновениях изменяющих направление движения, обменивающихся энергией и импульсом.

Электроны в металле тоже сталкиваются друг с другом. Играют ли роль межэлектронные столкновения в сопротивлении металлов?

Похожий вопрос мы задавали, когда изучали фононную теплопроводность (см. главу вторую). И ответ аналогичен: играют, если сопровождаются перебросами. Но отличие есть, и весьма существенное. Процессы переброса в межэлектронных столкновениях — частое событие, так как поверхность Ферми, как правило, расположена недалеко от границ первой зоны Брюллиэна. Поэтому длина свободного пробега не содержит характерного (для фононов) экспоненциального множителя и пропорциональна  $T^2$ :

$$\frac{1}{l_e} \approx \frac{p_F}{\hbar} \left( \frac{e^2}{\hbar v_F} \right)^2 \left( \frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2. \quad (77)$$

Эта формула (ее вывод принадлежит Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчуку) приведена не для того, чтобы оценивать электрон-электронную длину пробега. Если воспользоваться формулой (77), то получится величина, не слишком точно совпадающая с экспериментом. Мы хотим только обратить внимание, что при стремлении температуры к абсолютному нулю межэлектронная длина свободного пробега стремится к бесконечности.

Это обстоятельство может вызвать удивление. Ведь число электронов не изменяется с понижением температуры. Почему же электроны перестают сталкиваться? Они не перестают сталкиваться, но результат столкновений нельзя обнаружить. И до столкновения и после все состояния с энергией, меньшей чем энергия Ферми, заняты. А тем электроном или другим — определить все равно нельзя: все электроны *неразличимы*. Неразличимость электронов — один из основных принципов квантовой механики. А бесконечная межэлектронная длина пробега при абсолютном нуле температуры — его следствие.

Так как сопротивление пропорционально  $1/l$ , то часть сопротивления, обязанная столкновениям электронов друг с другом, пропорциональна квадрату температуры ( $\rho_e \sim T^2$ ). Правда, это слагаемое (имеется в виду правило Матиссена) удастся сравнительно надежно наблюдать только у переходных металлов (Pt, Fe), у других оно теряется на фоне более значительных.

## ПОДВЕДЕНИЕ ИТОГОВ

При высоких температурах ( $T \gg \theta$ ) главная причина сопротивления металлов — рассеяние на тепловых колебаниях ионов; поэтому полное сопротивление определяется формулой (75), закон Видемана — Франца выполняется. При низких температурах ( $T \ll \theta$ ) сопротивление — сумма трех слагаемых:

$$\rho = \rho_{np} + \rho_{\phi} + \rho_e. \quad (78)$$

Первое слагаемое не зависит от температуры, второе пропорционально  $T^5$ , а третье пропорционально  $T^2$ .

Истинные свойства металлов, не связанные с приготовлением данного (случайного) образца, конечно, могут быть определены путем исследования идеальной части сопротивления:  $\rho_{ид} = \rho_{\phi} + \rho_e + \dots$ . Многоточием мы хотим подчеркнуть тот факт, что в принципе могут быть и другие причины сопротивления.

Так как  $\rho_{ид}$  уменьшается с понижением температуры, то естественно желание сделать  $\rho_{np}$  поменьше. Искусство создания чистых образцов металлов сейчас так велико, что длина свободного пробега перестает, по сути дела, быть микроскопическим параметром. У наиболее чистых металлов вблизи абсолютного нуля она достигает нескольких миллиметров. А ведь при комнатных температурах длина пробега очень мала. Она приблизительно равна  $10^{-6}$  см. Одна миллионная сантиметра — маленькое расстояние по человеческим, житейским масштабам. В мире атомов  $10^{-6}$  см не такая малая величина — приблизительно сто атомных расстояний. Как видим, столкновения не слишком ограничивают свободу электрона, если под свободой понимать свободу передвижения и вспомнить, что в атоме электрон не удаляется от ядра на расстояние, больше нескольких ангстрем.

$$\mu = \frac{eh}{2mc} = 0,9 \cdot 10^{-20} \frac{\text{эрг}}{\text{гаусс}}$$

$$\omega = gH, \quad g = \frac{e}{mc}$$

$$\Delta M(T) \sim T^{3/2}$$

## ГЛАВА 5

### О магнонах

Паверное, каждый в детстве почувствовал удивление, впервые увидев магнит. Не для всех это событие послужило толчком к размышлению о явлениях в окружающем нас мире, как это было с Альбертом Эйнштейном, но, по-видимому, у каждого ощущение чуда сохранилось надолго. «Чудо такого рода,— писал Эйнштейн,—я испытал ребенком четырех или пяти лет, когда мой отец показал мне компас. То, что эта стрелка вела себя так определенно, совершенно никак не подходило к тому роду явлений, которые могли найти себе место в моем неосознанном мире понятий (действие через прикосновение)»<sup>1)</sup>.

К сожалению, «развитие... умственного мира представляет собой в известном смысле преодоление чувства удивления—непрерывное бегство от „удивительного“, от „чуда“»<sup>2)</sup>.

Поразившее пятилетнего Альберта действие на расстоянии, как хорошо известно, объясняется существованием вокруг магнита магнитного поля (на стрелку компаса действует магнитное поле Земли), все харак-

<sup>1)</sup> А. Эйнштейн. Собрание научных трудов.— М.: Наука, 1967, т. IV, с. 261.

<sup>2)</sup> Там же.

теристики которого могут быть полностью рассчитаны, если известна мощность и форма магнита. Но что такое магнит? Почему одни тела — магниты, а другие нет? Человечество открыло магнитные свойства так давно, что даже забыло, откуда происходит слово «магнит». И хотя пользоваться магнитом тоже научились давно (компас — основа навигации), только сравнительно недавно (в 30-х годах нашего века) была принципиально понята природа магнетизма.

При объяснении, почему одни тела — магниты, а другие нет, мы будем исходить из того, что основные кирпичики вещества (электроны, протоны, нейтроны) — магнетики. Так как магнитные моменты протонов и нейтронов примерно в тысячу раз меньше, чем магнитный момент электрона, то при изучении магнитных свойств, во всяком случае на первых порах, магнетизмом ядер вовсе можно пренебречь — то обстоятельство, что железо — магнит, целиком определяется поведением электронов железа.

## АТОМЫ ДВУХ СОРТОВ

Для того чтобы понять магнитные свойства макроскопических тел — кристаллов, очень важно разобраться в том, как устроен атом того или другого вещества. Квантовая теория атома однозначно отвечает на вопрос, какие атомы имеют отличный от нуля магнитный момент и чему он равен, а какие нет. Зависит это от того, как электроны распределяются по энергетическим уровням атома. Из рис. 3 видно: на нижних уровнях электроны сидят попарно — так, что их суммарный спин равен нулю, а на верхних располагаются неспаренные электроны — их суммарный спин отличен от нуля. А значит, отличен от нуля и магнитный момент. Изменение магнитного момента атома всегда связано с затратой большой (по атомным масштабам) энергии. Например, чтобы превратить атом гелия в частицу с магнитным моментом, надо «поднять» один электрон на энергетический уровень, который расположен над основным на «расстоянии» 19,77 эВ. Естественно, в нашем дальнейшем рассказе будут играть роль те из атомов, у которых магнитный момент отличен от нуля.

Два усложняющих замечания. Первое: магнитный момент атома может быть отличен от нуля не только за счет спина электрона, но благодаря обычному пространственному (чаще говорят — орбитальному) движению электронов<sup>1)</sup>. Второе: атомы, магнитный момент которых равен нулю (их называют диамагнитными), также обладают магнитными свойствами. Магнитное поле индуцирует в них маленький магнитный момент, направленный против магнитного поля. Он так мал, что тела, состоящие из диамагнитных атомов, именуют слабыми магнетиками в отличие от тел, состоящих из атомов, обладающих магнитными моментами. Правда, для этого необходимо, чтобы при образовании твердого тела из атомов атомы «раньше» не соединились в диамагнитные молекулы. Но об этом — дальше.

## ОБМЕННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Магнитные свойства кристаллов существенно зависят от того, обладает ли магнитным моментом одна ячейка или нет. Если обладает, то такой кристалл называют *парамагнитным*, если нет — *диамагнитным*. В природе много тех и других.

Если в ячейке кристалла расположен один атом, то все, конечно, определяется тем, парамагнитный ли это атом или диамагнитный. Твердый неон — диамагнетик, а кристалл железа или хрома — парамагнетик. Если же кристалл состоит из правильно уложенных молекул, то наличие или отсутствие магнитного момента у ячейки определяется тем, что собой представляет молекула — парамагнитна она или диамагнитна.

Постараемся разобраться в этом отнюдь не простом вопросе. Итак, выясним, как из отдельных атомов создается более сложная конструкция — молекула.

О природе сил взаимодействия между атомными частицами мы рассказывали в первой главе (стр. 50). Главное, что надо вспомнить: существует и притяже-

---

<sup>1)</sup> Магнитный момент в данном случае имеет классическую природу: электрон, вращающийся по орбите, создает токовый лепесток, который ведет себя как микроскопический магнетик. Квантовые законы проявляются в том, что проекция момента количества движения равна целому числу постоянных Планка.

ние и отталкивание; природа этих сил различна, но обе силы электростатического происхождения, магнитное взаимодействие между частицами очень мало (одна из ролей  $1/137$ -й!). Есть расстояние — оно того же порядка, что размер атома, — на котором достигается равновесие между отталкиванием и притяжением — суммарная сила равна нулю. Так строятся молекулы... И при этом оказывается, что некоторые (например, молекулы водорода) имеют нулевой магнитный момент, а некоторые — отличный от нуля (молекулы кислорода, например). От чего это зависит? Правильный, но недостаточно конкретный ответ таков: осуществляется то состояние, которое энергетически выгодно. Другими словами: если парамагнитное состояние обладает меньшей энергией, то молекула парамагнитна; если диамагнитное состояние имеет меньшую энергию — диамагнитна. Это-то так, конечно. Но почему энергия молекулы вообще зависит от ее магнитного момента, даже тогда, когда молекула находится вне магнитного поля?

Напрашивается такой ответ: все же каждый электрон — магнетик. Энергия взаимодействия магнитов зависит от их относительной ориентации (одноименные полюсы отталкиваются, разноименные полюсы притягиваются). Поэтому, построив из атомов молекулу, т. е. зная движение электронов в пространстве, надо вычислить энергию одной конфигурации — магнитные моменты параллельны — и сравнить с энергией другой конфигурации — магнитные моменты антипараллельны (если электронов два, как в молекуле водорода). Все правильно, однако так не удастся объяснить экспериментальные факты. Различие энергий парамагнитной и диамагнитной конфигураций — фактически порядка энергий электростатического взаимодействия электронов, находящихся на атомных расстояниях друг от друга, а эта энергия, конечно, не зависит от того, куда направлены магнитные стрелки, а магнитная энергия в десятки тысяч раз меньше электростатической. Так что объяснение «не проходит».

Правильное объяснение значительно сложнее. Последовательное квантовомеханическое рассмотрение показывает, что состояние электронов зависит не только от характера их движения в электрическом поле

ядер, но и от относительного положения спинов, даже если пренебречь непосредственным магнитным взаимодействием. Это явление получило название *обменного взаимодействия*, а ту часть энергии электронов, которая зависит от относительного расположения спинов, называют *обменной энергией*. В молекуле водорода обменная энергия парамагнитного состояния больше обменной энергии диамагнитного состояния. Молекула водорода диамагнитна. А у кислорода энергетически выгодно (опять-таки из-за обменной энергии) парамагнитное состояние...

Природу обменного взаимодействия трудно объяснить достаточно популярно, так как это взаимодействие не имеет классического аналога. Его возникновение — следствие неразличимости частиц и принципа Паули — целиком обязано квантовым свойствам электронов. Рассмотрим для примера два атома. В каждом атоме по одному электрону. Анализ состояния электронов показывает: нельзя утверждать, что один электрон находится в первом атоме, а другой — во втором. Оба электрона все время как бы меняются местами, как бы перепрыгивают из одного атома в другой (неразличимость). С их скачками связана определенная энергия (*обменная энергия*), которая существенно зависит от расположения их спинов (параллельны или антипараллельны). Отбор разрешенных состояний происходит в согласии с принципом Паули. В некоторых случаях обменная энергия при параллельном расположении спинов больше, чем при антипараллельном, а в других — наоборот.

Обменные силы очень быстро спадают с расстоянием: электрону издали трудно «допрыгнуть» до соседнего атома. Важно еще раз подчеркнуть, что обменные силы не связаны с обычным взаимодействием спиновых магнитных моментов, которое, как мы говорили, очень мало. Отметим важное свойство обменной энергии. Так как обменная энергия зависит от *относительного* расположения спинов электронов, то она безразлична к тому, куда направлен магнитный момент молекулы, если на нее не действует магнитное поле.

Мы продвинулись на одну ступень в понимании магнитных свойств. В природе существуют атомы и

молекулы, обладающие магнитным моментом. Энергии, которые ответственны за существование магнитных моментов, велики. Они определяются электростатическим взаимодействием между зарядами.

## ПАРАМАГНЕТИКИ, ФЕРРОМАГНЕТИКИ

Итак, нам известен строительный материал, из которого сложены магнитные тела. Это — атомы или молекулы с магнитными моментами, отличными от нуля.

Физическая причина, приводящая к конденсации атомов и молекул в твердое тело, в кристалл, та же, что и при образовании молекул из атомов. Мы не будем на этом останавливаться. Задумаемся только, играет ли какую-нибудь роль в этом процессе то, что интересующие нас молекулы парамагнитны — обладают (каждая) магнитным моментом? Если быть скрупулезно точным, то играет. Обменная энергия не мала, и поэтому ее вклад в энергию связи кристалла заметен. Однако обменная энергия все же существенно меньше, чем энергия связи, и поэтому вначале мы можем о ней попросту не думать: считать, что магнитные моменты не взаимодействуют друг с другом (мы очень скоро откажемся от этого предположения). Поэтому парамагнетик (вещество, которое получилось после конденсации парамагнитных молекул или атомов) следует себе представить так. Это — правильно расположенные, но свободно болтающиеся, незакрепленные магнитные стрелки. Они направлены во все стороны. Правда, согласно квантовой механике не все направления «разрешены», но если «данное» направление разрешено, то разрешено и обратное. Поэтому суммарный магнитный момент равен нулю.

Есть простой способ «призвать магнитные моменты в порядок». Поместим парамагнетик в магнитное поле. Энергия взаимодействия магнитного момента  $\vec{\mu}$  с магнитным полем  $\vec{H}$  равна  $-\vec{\mu}\vec{H}$ . Если магнитный момент может только двумя способами ориентироваться относительно поля (так обстоит дело у электрона), то выигрыш энергии (разность между энергией параллельного и антипараллельного полю состояний) равен  $2\mu H$ . Полному упорядочению магнитных моментов

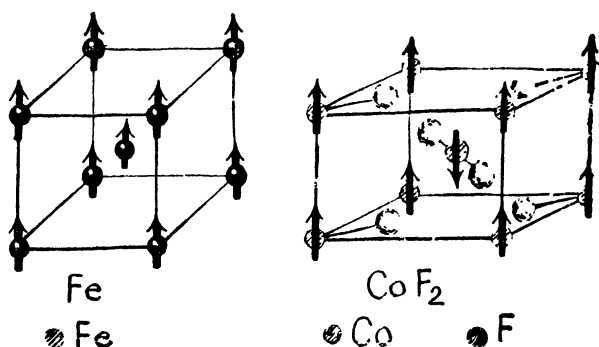


Рис. 37.

вдоль поля препятствует тепловое движение. Поэтому величину  $2\mu H$  надо прежде всего сравнить с температурой в ее энергетическом выражении, т. е. с  $k_B T$ . Так как  $\mu \approx 10^{-20}$  эрг/Гс, то мы видим, что равенство  $2\mu H = k_B T$  возможно либо при сверхнизкой температуре, либо при грандиозных магнитных полях (если  $T = 1$  К, то  $H$ , при котором  $2\mu H = k_B T$ , приблизительно равно 10 000 Гс). При обычных<sup>1)</sup> и высоких температурах величина  $2\mu H$  значительно меньше  $k_B T$ . Из-за этого магнитное поле лишь незначительно упорядочивает магнитные моменты.

Однако существует внутренняя причина, выстраивающая магнитные моменты, — обменное взаимодействие, о котором мы столь подробно говорили выше.

Обменное взаимодействие может выстроить магнитные моменты параллельно друг другу либо антипараллельно. В первом случае «получается» ферромагнетик, а во втором — антиферромагнетик<sup>2)</sup>. Это схематически изображено на рис. 37.

<sup>1)</sup> К слову «обычный» надо относиться осторожно. Что сегодня следует считать обычным? Во многих лабораториях обычные температуры ниже 1 К и магнитные поля с напряженностью более 100 000 Э.

<sup>2)</sup> В природе много тел (их называют *ферримагнетиками*), которые в этой классификации занимают промежуточное положение. Магнитные моменты направлены в разные стороны. Но число «левых» и «правых» не совпадает.

Если сравнивать упорядочивающее действие обменных сил с действием магнитного поля, то придется признать, что на атомные магниты действует огромное магнитное поле — в десятки миллионов эрстед.

Отложим разговор об антиферромагнетиках до специального раздела, а сначала поговорим о веществах, в которых магнитные моменты в кристалле взаимодействуют друг с другом так, что им энергетически «выгодно» выстроиться параллельно друг другу, а тепловое движение препятствует этому выстраиванию. Пока температура высока, тепловое движение столь активно, что в положении магнитных моментов нет никакого порядка (суммарный магнитный момент равен нулю). Однако при некоторой температуре (ее называют температурой Кюри, и мы обозначаем ее  $\theta_c$ ) взаимодействие начинает сказываться весьма существенно: появляется отличный от нуля магнитный момент тела. Магнитные моменты самопроизвольно (не под воздействием внешнего магнитного поля, а благодаря внутренним причинам) выстраиваются<sup>1)</sup>. Чем ниже температура, тем самопроизвольный (спонтанный, как принято говорить) момент больше. Состояние тела при температуре ниже температуры Кюри  $\theta_c$  называется *ферромагнитным*, а сами тела — *ферромагнетиками*. При абсолютном нуле температуры все магнитные моменты смотрят в одну сторону (полный порядок). Магнитный момент единицы объема при этом равен числу магнетиков в единице объема  $N$ , умноженному на  $\mu$ . Типичные представители ферромагнетиков: железо Fe, от него и появилось название «ферромагнетик», кобальт Co и никель Ni. Их спонтанные моменты  $M_s$  при абсолютном нуле температуры таковы:

	$M_s$ , эрг/Гс	$\theta_c$ , К
Fe	1735	1043
Co	1445	1403
Ni	509	631

---

<sup>1)</sup> На роль обменного взаимодействия в магнитных свойствах вещества впервые обратили внимание В. Гейзенберг и Я. И. Френкель (1928 г.).

## ОТ ЧЕГО МЫ АБСТРАГИРОВАЛИСЬ. ДОМЕНЫ

В действительности все происходит совсем не так. Если охлаждать парамагнетик, не поместив его во внешнее магнитное поле, он не намагнитится даже тогда, когда температура его опустится ниже температуры Кюри  $\theta_c$ . Чтобы его намагнитить, обязательно нужно поместить его во внешнее поле, лишь увеличивая которое можно добиться полного намагничивания. Кривая намагничивания (зависимость магнитного момента тела от магнитного поля) зависит и от формы образца, и от его состояния: с примесями ли он или очень чистый, имеет ли внутренние напряжения или хорошо отожжен.

Очень важным свойством магнитов для использования их в технике, в науке, в быту является способность не размагничиваться после снятия (выключения) внешнего магнитного поля, благодаря которой магниты могут служить источником магнитного поля. Магнит как бы аккумулирует магнитную энергию, которую можно использовать самым различным образом.

И хотя все эти вопросы очень важны и интересны, они весьма далеки от темы нашего рассказа... Дело вот в чем. Если бы парамагнетик был бесконечным<sup>1)</sup>, то все происходило бы точно так, как мы описали в предыдущем разделе: при понижении температуры ниже точки Кюри тело приобрело бы (спонтанно!) магнитный момент, который возрастал бы с понижением температуры. Но в образце конечных размеров все осложняется концевыми эффектами. Граница намагниченного тела служит источником (или стоком) магнитных силовых линий (они ведь не обрываются!). Поэтому вокруг магнита всегда имеется магнитное поле, сравнительно медленно спадающее с расстоянием. Магнитное поле содержит энергию. Таким образом, энергия ферромагнетика несколько больше, чем мы думали раньше: она включает в себя энергию магнитного поля, созданного магнитом.

Всякое тело стремится понизить свою энергию, если есть для этого возможность, конечно. У магне-

---

<sup>1)</sup> Моделью бесконечного магнита может служить достаточно большое кольцо (бублик), из которого не выходят магнитные силовые линии.

тика такая возможность есть. Обменная энергия (главная причина намагничивания) не зависит от того, куда направлен суммарный магнитный момент. Благодаря этому возникает следующая возможность. Магнетик разбивается на области (домены). В каждой области магнитный момент однороден, но (в простейшем случае) в соседних областях магнитные моменты направлены в противоположные стороны<sup>1)</sup>. В целом тело вообще не обладает магнитным моментом, следовательно, вокруг нет магнитного поля. Точнее, есть, но только на расстояниях, близких к величине домена.

Таким образом, «с точки зрения магнитного поля» выгодно разбиение магнетика на возможно большее число областей — доменов. Правда, существование границ между доменами невыгодно, так как магнитные моменты по обе стороны границы направлены в противоположные стороны. Поэтому для уменьшения обменной энергии число границ, а значит, и доменов должно быть поменьше. Одна энергия уменьшается с увеличением числа доменов, другая — растет. При некотором промежуточном числе доменов сумма обеих энергий имеет минимум. На такое число доменов и разбивается магнетик. Расчет показывает (Л. Ландау и Е. Лифшиц, 1935 г.), что размеры домена растут пропорционально корню квадратному из размеров тела.

Существование доменов давно не является гипотезой. Они хорошо изучены и теоретически и экспериментально. Есть много способов, позволяющих видеть домены... даже невооруженным глазом.

Таким образом, появление доменов — вторичный эффект. Внутренние силы намагничивают образец, упорядочивают магнитные моменты атомов и молекул, а «желание» уменьшить энергию системы приводит к разбиению тела на домены. Это обстоятельство в дальнейшем мы будем игнорировать. Либо можно считать, что мы имеем дело с бесконечным магнетиком, либо что мы находимся в пределах одного домена. Хотя, повторяю, структура магнетиков — вопрос интересный и важный. Но ведь наша задача — понять *микроскопическую* природу магнетизма...

---

<sup>1)</sup> Понятие о доменах было впервые введено П. Вейссом (1907 г.).

## АНТИФЕРРОМАГНЕТИКИ

В 30-х годах в Харькове группа молодых ученых под руководством Л. В. Шубникова обнаружила удивительные аномалии в поведении ряда веществ — хлоридов переходных элементов. Их теплоемкость при некоторой температуре претерпевала скачок, а магнитная восприимчивость имела при той же температуре максимум. За несколько лет до этого Л. Ландау теоретически исследовал поведение системы магнитных моментов, обменное взаимодействие между которыми таково, что им выгодно располагаться антипараллельно, и показал, что при определенной температуре  $\theta_N$  (она потом получила название температуры Нееля<sup>1)</sup>) в расположении магнитных моментов возникает некоторый порядок. Чем температура ниже, тем порядок больше. При абсолютном нуле температуры расположение полностью упорядочено. Но не так, как в ферромагнетике. Каждый магнитный момент окружен антипараллельными соседями (см. рис. 37). Поэтому вещества с подобным типом упорядочения получили название *антиферромагнетиков*. Вблизи температуры Нееля, согласно теории Ландау, должны были наблюдаться и наблюдались аномалии, о которых речь шла выше...

Антиферромагнетиков в природе немало. Вот несколько примеров (они взяты из работы А. С. Боровика-Романова<sup>2)</sup>):

Соединение	$\theta_N, K$	Соединение	$\theta_N, K$
NiSO <sub>4</sub>	37	FeO	188
FeSO <sub>4</sub>	21	NiF <sub>2</sub>	73,2
NiO	520	FeF <sub>2</sub>	78,3

Антиферромагнетиками бывают не только соединения. Хром, многие редкоземельные металлы — антиферромагнетики.

<sup>1)</sup> Неель — французский физик-теоретик, сыгравший выдающуюся роль в изучении антиферромагнетиков. Неель — лауреат Нобелевской премии, которую он получил за работы по магнетизму.

<sup>2)</sup> Антиферромагнетизм/В сб.: Антиферромагнетизм и ферриты. — М.: Изд-во АН СССР, 1962.

Появление магнитного порядка в ферромагнетике обнаружить легко. О нем сообщает магнитное поле, создаваемое ферромагнетиком, или (без литературных красок): спонтанный магнитный момент ферромагнетика можно измерить непосредственно. А как непосредственно обнаружить порядок в расположении магнитных моментов? Это можно сделать, исследуя рассеяние нейтронов антиферромагнетиком.

Почему нейтроны, а не привычные рентгеновские лучи или электроны, столь успешно применяющиеся для исследования кристаллов? И для рентгеновского кванта, и для электрона атом с магнитным моментом вверх и атом с магнитным моментом вниз — практически одно и то же. Они взаимодействуют только (точнее, главным образом) с зарядами в атоме. А у нейтрона заряда нет, но есть магнитный момент. Поэтому различным образом ориентированные атомы будут рассеивать различно — для нейтронов атомы с различными направлениями магнитных моментов неэквивалентны.

## МАГНОНЫ В ФЕРРОМАГНЕТИКЕ

Знать, как расположены магнитные моменты, — полдела. Для понимания свойств магнетика очень важно представлять себе, как движутся магнитные моменты.

Изучая движение магнитных моментов, нельзя рассматривать движение одного магнитного момента, необходимо учитывать его коллективный характер (мы в этом еще убедимся).

Рассмотрим свойства магнетиков вблизи 0 К. Движение почти полностью заторможено. Оно выступает в своей простейшей форме. В частности, можно не учитывать изменение величины магнитного момента атома, так как это изменение связано с существенным увеличением энергии атомных электронов, что при низкой температуре крайне маловероятно. Поэтому несколько туманное выражение «простейшая форма движения» уточняется: магнитные моменты атомов могут «вращаться» вокруг неподвижных центров... и все. Правда, глагол «вращаться» нам пришлось заключить в кавычки: трудно понимать его буквально, если момент может занимать только два положения в про-

страпстве. А мы начнем именно с такого случая, выбрав для простоты рассмотрения ферромагнетик, состоящий из частиц со спином  $1/2$ .

Рассмотрим слабо возбужденные состояния ферромагнетика, у которого в основном, наименьшем состоянии ( $0\text{ K}$ ) все магнитные моменты направлены в одну сторону. Возбужденные состояния ферромагнетика удобно классифицировать по величине отклонения магнитной системы от полностью упорядоченного состояния. Сделаем мысленный эксперимент. Перевернем магнитный момент одного атома и предоставим ферромагнетику «действовать самостоятельно». Из-за обменного взаимодействия состояние с перевернутым магнитным моментом невыгодно: соседние магнитные моменты будут стремиться «призвать товарища к порядку». Но... пожалуй, это одно из самых важных обстоятельств: пока мы учитываем только обменные силы, ферромагнетик не может изменить суммарную величину магнитного момента<sup>1)</sup>. Поэтому стремление упорядочить соседа приводит к тому, что вместо него переворачивается другой, смежный магнитный момент. По кристаллу побежит волна переворотов магнитных моментов, или спинов. Эти волны — их существование установил Ф. Блох в 1930 г. — названы спиновыми волнами.

Анализ распространения волн переворотов спинов показывает, что между частотой спиновой волны  $\omega$  и ее длиной  $\lambda = 2\pi/k$  существует определенная связь — закон дисперсии, выражающий зависимость частоты от волнового вектора  $\vec{k}$ . Таким образом, состояние с одним перевернутым магнитным моментом есть волна с определенным волновым вектором  $\vec{k}$  и соответствующей ему частотой  $\omega(\vec{k})$ .

А теперь, как обычно, воспользуемся соотношениями Луи де Бройля и перейдем от волны к квазичастице. Ее называют *магноном*. Итак, кристалл с одним перевернутым спином — это кристалл с одним магноном.

---

<sup>1)</sup> Строгая формулировка сказанного в последней фразе: спин системы — интеграл движений, если действуют только электростатические силы.

Обратим внимание, что мы, говоря об одном перевернутом магнитном моменте, не можем уточнить положение этого недисциплинированного момента. Спиновая волна «затрагивает» все магнитные моменты.

При большой длине волны, т. е. при малом волновом векторе, закон дисперсии очень прост:  $\omega \sim k^2$ .

Коэффициент пропорциональности удобно оценить, записав не частоту спиновой волны, а энергию магнона  $\varepsilon = I(ak)^2$ , где  $a$  — расстояние между соседними атомами. Эта запись показывает, что постоянная  $I$  (по порядку величины, конечно) совпадает с энергией обменного взаимодействия соседних магнитных моментов<sup>1)</sup>. А эта энергия численно близка температуре Кюри ферромагнетика, выраженной в энергетических единицах ( $I \approx k_B \theta_c$ ). Таким образом, мы имеем надежный критерий для оценки наиболее существенной величины в законе дисперсии. Правда, критерий весьма приблизительный:  $I$  от  $k_B \theta_c$  может отличаться в 2—3 раза.

Формулу для энергии магнона удобно переписать в другом виде, заменив волновой вектор  $k$  импульсом  $p$  и введя новую постоянную с размерностью массы:

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m^*}, \quad m^* = \frac{\hbar^2}{2a^2 I}. \quad (79)$$

Новую постоянную  $m^*$  называют *эффективной массой*. Последнее выражение особенно отчетливо показывает, что магнон очень похож на частицу.

Если в ферромагнетике перевернуть не один магнитный момент, а больше, это означает, что по нему распространяется не одна спиновая волна, а несколько. Или на корпускулярном языке: в ферромагнитном кристалле существует несколько магнонов. При повышении температуры число магнонов возрастает, а общий магнитный момент ферромагнетика соответственно уменьшается. Пока спиновых волн (магнонов) мало, можно не учитывать взаимодействие магнонов друг с другом и, следовательно, считать магноны идеальным газом. Число частиц в нем тем больше, чем выше температура. Методы квантовой статистической

---

<sup>1)</sup> Если  $k \approx 1/a$ , то спины соседних атомов антипараллельны.

физики позволяют изучить свойства этого газа и установить, что газ магновов подчиняется статистике Бозе — Эйнштейна.

Магноны — бозоны. Химический потенциал их, конечно, равен нулю. Знание статистических свойств дает в руки метод расчета макроскопических характеристик. Так установлено, что число магновов растет пропорционально  $T^{3/2}$ . Это значит, что при низких температурах спонтанный магнитный момент ферромагнетика  $M$  убывает пропорционально  $T^{3/2}$  — ведь каждый магнон — это не что иное, как движущийся по ферромагнетику один перевернутый магнитный момент:

$$M(T) = M_0 \left[ 1 - \beta \left( \frac{T}{\theta_c} \right)^{3/2} \right], \quad (80)$$

$$T \ll \theta_c, \quad \beta \approx 1, \quad M_0 = N\mu.$$

Газ магновов вносит вклад в тепловые свойства ферромагнетика. Благодаря магномам теплоемкость при низких температурах ( $T \ll \theta_c$ ) содержит слагаемое, также пропорциональное  $\sim T^{3/2}$ , т. е. опять-таки пропорциональное среднему числу магновов. Линейную зависимость термодинамических величин от температуры в степени  $3/2$  часто называют «законом  $3/2$ ». Следует подчеркнуть, что при низких температурах вклад магновов в теплоемкость больше, чем вклад фононов, так как теплоемкость газа фононов убывает с понижением температуры быстрее — пропорционально  $T^3$ .

И фононы и магноны — бозоны, у обоих газов химический потенциал  $\xi = 0$ . Различие в температурной зависимости теплоемкости — следствие различия в законах дисперсии фононов и магновов (у фононов  $\varepsilon = sp$ , у магновов  $\varepsilon = p^2/2m^*$ ).

Магноны — полноправные квазичастицы. Они переносят тепло, принимают участие в поглощении энергии звуковых колебаний, на них рассеиваются электроны в ферромагнитных металлах. Описанные здесь свойства магновов отнюдь не гипотезы. Вклад магновов в разнообразные свойства ферромагнетиков обнаруживается в эксперименте. В частности, температурная зависимость магнитного момента и вклад магновов в теплоемкость нашли свое уверенное эксперименталь-

ное подтверждение. Идентифицирован вклад магнонов в механизм рассеяния электронов в металлических ферромагнетиках. Мы умеем наблюдать один магнон. Но об этом — дальше.

## МАГНОНЫ В АНТИФЕРРОМАГНЕТИКЕ

В антиферромагнетике при  $T = 0$  К все магнитные моменты атомов тоже строго упорядочены, только порядок этот сложнее. Поворот любого магнитного момента есть нарушение, которое в виде волны бежит по кристаллу. Однако существование двух типов атомов (у одних спины по ..., а у других против...) приводит к тому, что в антиферромагнетике могут распространяться спиновые волны двух сортов — могут возникнуть два сорта магнонов. Пока мы учитываем только обменное взаимодействие между атомами, свойства этих магнонов почти неразличимы: у них совпадающие законы дисперсии, существенно отличающиеся от закона дисперсии магнонов в ферромагнетиках. Магноны в антиферромагнетике похожи на фононы. Для малых значений импульсов  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$

$$\varepsilon_{1,2} \approx \theta_N a k, \quad a k \ll 1. \quad (81)$$

Индексы 1 и 2 подчеркивают: магнонов два сорта. Напомним:  $\theta_N$  — температура Нееля, а  $a$  — расстояние между атомами. И в антиферромагнетиках магноны — бозоны.

С ростом температуры их число растет ( $\xi = 0$ ), постепенно разрушая строгий порядок в расположении магнитных моментов. Возрастание числа магнонов с ростом температуры проявляется в тепловых и магнитных свойствах антиферромагнетиков.

Различие в законах дисперсии магнонов в ферро- и антиферромагнетиках имеет своим следствием различие температурных зависимостей. Так, магнитная часть теплоемкости антиферромагнетика пропорциональна  $T^3$ , как у фононов, а не  $T^{3/2}$ , как у ферромагнетиков.

Изучение свойств магнонов антиферромагнетика показывает, что они весьма чувствительны к структуре основного состояния. Изменение в расположе-

нии магнитных моментов приводит к изменению закона дисперсии магнонов. Наиболее естественным способом воздействия на структуру магнитных моментов служит магнитное поле, которое «пытается» установить магнитные моменты вдоль себя. Поэтому исследование свойств магнетиков в достаточно сильных магнитных полях — один из методов изучения свойств магнонов.

## МАГНОНЫ С НЕСКОЛЬКО ДРУГОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

Теперь, когда мы поняли микроскопическую природу спиновой волны как волны переворотов спинов, можно попытаться описать ее более упрощенно, используя макроскопические термины.

Рассмотрим однородные вращения магнитных моментов, т. е. длину спиновой волны примем равной бесконечности. Это значит, что все атомы находятся в совершенно одинаковых условиях — обменные силы как бы отключены. Если бы никакие другие силы не действовали на магнитные моменты тела, то поворот магнитных моментов не требовал бы затраты энергии. Это значит (опять «работает» соотношение Луи де Бройля), что при учете только обменных сил частота однородного вращения магнитных моментов равна нулю. Но, кроме обменных сил, есть еще силы, уже не безразличные к направлению магнитного момента. Они получили название анизотропных сил (чаще говорят об *энергии анизотропии*). Анизотропную силу легко представить, заменив ее фиктивным магнитным полем  $H_a$ , приложенным вдоль избранной оси ферромагнетика. Избранная ось всегда направлена вдоль одной из кристаллографических осей ферромагнетика. Спонтанно магнитный момент располагается вдоль нее. У кобальта эта ось шестого порядка гексагональной решетки, у железа — три оси вдоль ребер куба кубической решетки.

Что произойдет с магнитным моментом в магнитном поле, если его отклонить на некоторый угол? Так как на магнитный момент действует момент силы, направленный перпендикулярно плоскости, проходящей через вектор магнитного поля и магнитный

момент, то магнитный момент будет вращаться вокруг магнитного поля. Частота  $\omega$  его вращения вокруг поля  $H_a$  для частиц со спином  $1/2$  равна  $\omega = gH_a$ , где  $g = e/mc$  — квантовое гиромагнитное отношение (см. стр. 41).

Настоящее магнитное поле  $H$ , приложенное вдоль избранной оси, увеличивает частоту вращения, так как оно добавляется к полю анизотропии  $H_a$ , т. е.  $\omega = g(H_a + H)$ .

Если отклонение магнитных моментов неоднородно (скажем, мы заставим вертеться моменты на границе образца), то включаются обменные силы — по ферромагнетику побежит волна, частота которой есть сумма частот однородного и неоднородного вращения:

$$\omega = g(H_a + H) + \frac{I}{\hbar}(ak)^2. \quad (82)$$

Существование энергии анизотропии или энергии внешнего магнитного поля приводит к тому, что частота спиновой волны при  $k=0$  отлична от нуля. Или на квантовом языке: магнон с импульсом, равным нулю, имеет отличную от нуля энергию — «энергию покоя», равную

$$\epsilon_0 = \hbar g(H_a + H) = 2\mu(H_a + H).$$

У обычных частиц энергия покоя равна  $mc^2$ , где  $m$  — масса частицы, а  $c$  — скорость света. Можно вычислить массу покоя магнона  $m_0 = \epsilon_0/c^2$ . Эта величина баснословно мала: при  $H = 10\,000$  Э ( $H$  при этом чаще всего больше  $H_a$ )  $m_0 \approx 10^{-37}$  г, т. е. в  $10^{10}$  раз меньше массы самой легкой частицы — электрона. И все же есть эксперименты, когда энергия покоя обнаруживается. Во-первых, это эксперименты по изучению высокочастотных свойств ферромагнетиков (но о них позже), а во-вторых, эксперименты, исследующие тепловые и магнитные свойства при очень низких температурах.

Если охладить ферромагнетик до ультранизких температур, тепловой энергии не хватит на рождение магнонов. Это проявится в том, что число магнонов будет экспоненциально мало — пропорционально  $e^{-\epsilon_0/\hbar T}$ , и найдет свое отражение в темпера-

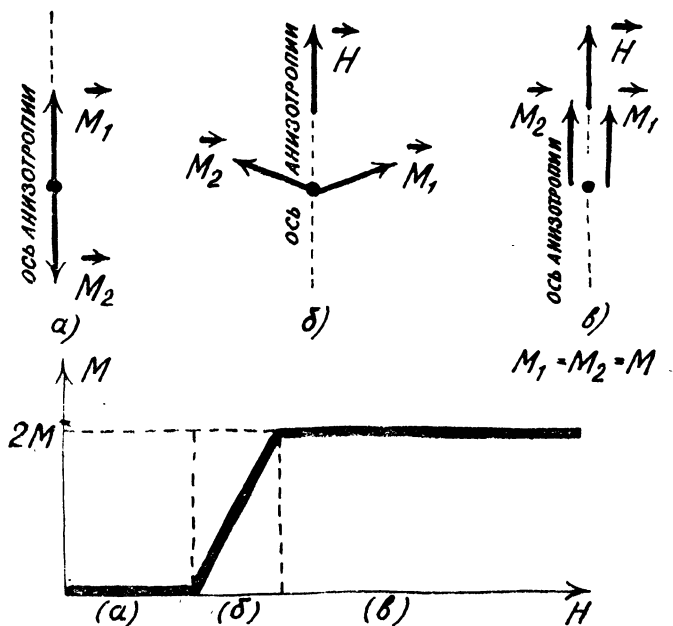


Рис. 38.

турной зависимости спонтанного момента и магнетонной части теплоемкости: «закон 3/2» справедлив не до абсолютного нуля, он сменится экспоненциальной зависимостью от температуры. Показатель экспоненты содержит энергию покоя магнона. Можно «взвесить» частицу, масса которой в  $10^{10}$  раз меньше массы электрона!

Теперь об антиферромагнетиках. Если магнитным моментам выгодно располагаться вдоль оси анизотропии (рис. 38), то при любом отклонении моментов от оси они вращаются. Так как моментов два, то и частот две:

$$\omega_1 = g(\sqrt{H_a H_e} + H), \quad \omega_2 = g(\sqrt{H_a H_e} - H),$$

где  $H_e$  — «обменное» поле, введенное для унификации обозначений:  $\mu H_e = I$ .

Каждая из частот ( $\omega_1$  и  $\omega_2$ ) соответствует сравнительно сложному вращению обоих моментов. Когда магнитное поле равно нулю, обе частоты совпадают и равны  $\omega_{1,2} = g\sqrt{H_a H_e}$ . Поле анизотропии  $H_a$  приблизительно такое же, как в ферромагнетике, а «обменное поле»  $H_e$  значительно больше поля анизотропии. Поэтому при  $H \ll \sqrt{H_a H_e}$  частоты спиновых волн в антиферромагнетиках значительно больше частоты спиновой волны в ферромагнетике. Внешнее магнитное поле увеличивает одну частоту и уменьшает другую. Для одного из вращений оно — союзник энергии анизотропии, для другого — противник. Последние формулы справедливы только в случае, если  $H < \sqrt{H_a H_e}$ . При  $H \approx \sqrt{H_a H_e}$  магнитная система, изображенная на рис. 38, делается неустойчивой и перестраивается. Что получится после перестройки, изображено на рис. 38, б. Дальнейшее увеличение магнитного поля прижимает магнитные моменты к оси. Наконец, при магнитном поле, равном  $H_e$ , магнитные моменты схлопываются (рис. 38, в). Правда, величина поля схлопывания очень велика: энергия  $\mu H$  при этом приблизительно равна обменной энергии  $I \approx k_B \theta_N$ , т. е. увидеть схлопывание можно только у тех антиферромагнетиков, у которых низка температура Нселя. Перестройка магнитной структуры отчетливо проявляется в зависимости суммарного магнитного момента антиферромагнетика (его намагниченности) от магнитного поля, изображенной на тех же рисунках.

Из-за сравнительно большой частоты однородного вращения экспоненциальная зависимость магнитных частей термодинамических величин антиферромагнетиков наблюдается при больших температурах. Масса покоя магнонов антиферромагнетиков больше массы покоя магнонов ферромагнетиков.

Сказанное относится только к тем антиферромагнетикам, магнитным моментам которых выгодно располагаться вдоль оси. Есть и другие (их даже больше, чем тех, о которых мы рассказали сначала), в них магнитным моментам выгодно располагаться в плоскости, перпендикулярной оси (см. рис. 39). Как ориентированы магнитные моменты в плоскости

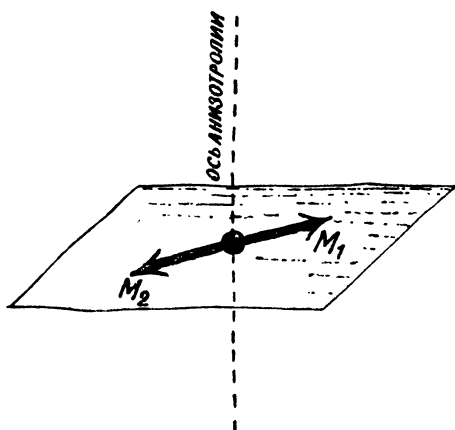


Рис. 39.

— безразлично. Или, другими словами, поворот системы магнитных моментов вокруг оси анизотропии не требует затраты энергии. Как следствие, одна из частот вращения магнитных моментов равна нулю. Другая частота примерно такая же, как и у тех антиферромагнетиков, у которых магнитные моменты параллельны оси.

Мы описали только частоты однородных вращений. Если частоту однородных вращений умножить на постоянную Планка, получится энергия покоя магнона. Неоднородным вращением (с волновым вектором, отличным от нуля, или длиной волны, отличной от бесконечности) соответствуют движущиеся магны, но о них мы уже достаточно рассказали.

Резюмируем сказанное в этом разделе: магны с очень малым импульсом — это волны вращений магнитных моментов; магны с нулевым импульсом — однородное (софазное) вращение всех магнитных моментов ферро- или антиферромагнетиков.

## РЕЗОНАНСЫ

Магнитные моменты ферромагнетика можно искусственно заставить вращаться. Для этого ферромагнетик надо поместить во вращающееся магнитное

поле. Если частота вращения магнитного поля отличается от собственной частоты вращения магнитных моментов, магнитное поле будет то ускорять магнитные моменты (передать им энергию), то тормозить (забирать у них энергию). В среднем магнитные моменты вовсе не воспримут энергии вращающегося магнитного поля, и эксперимент, поставленный с целью измерить поглощенную ферромагнетиком энергию переменного магнитного поля, ничего не покажет. Но если частота переменного магнитного поля совпадает с собственной частотой вращения магнитных моментов, наступает *резонанс* и энергия магнитного поля поглощается.

Этот резонанс называют *ферромагнитным резонансом*. Ферромагнитный резонанс был открыт Дж. Гриффитсом в 1946 г. Частота, при которой наблюдается ферромагнитный резонанс, существенно зависит от энергии анизотропии и от величины приложенного магнитного поля. Для понимания порядков величин отметим: магнитному полю  $H$  в 10 000 Э по формуле  $\omega = gH$  соответствует частота  $\omega \approx 10^{11} \text{ с}^{-1}$  или длина волны  $\lambda \approx 6 \text{ мм}$ .

Ферромагнитный резонанс допускает естественную квантовомеханическую трактовку: фотон с импульсом  $p = \hbar\omega/c$  (где  $\omega$  — частота электромагнитной волны) превращается в магнон, энергия которого  $\epsilon$  — функция  $p$ .

Превращение может произойти, если выполнены законы сохранения энергии и импульса. Их выполнение легко проанализировать на рис. 40, где отложены зависимости энергии фотона и магнона от импульса. Пересечение происходит при том значении импульса, при котором возможно резонансное превращение фотона в магнон. Надо только учесть, что нам пришлось несколько исказить рисунок: скорость света так велика, что прямая, изображающая зависимость энергии фотона от импульса, должна практически совпадать с осью ординат. А это значит: при превращении фотона в магнон «рождается» магнон с почти нулевым импульсом. Другими словами, ферромагнитный резонанс дает возможность непосредственного измерения энергии покоя магнона («взвешивание» его массы покоя).

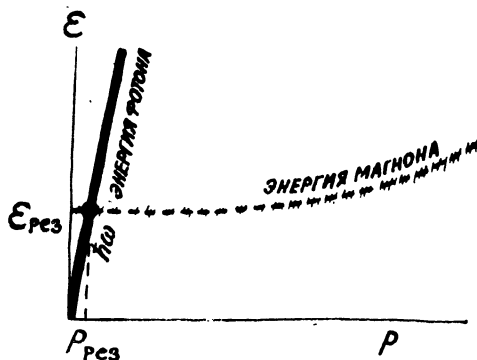


Рис. 40.

Мы нарочно несколько упростили рассказ. В действительности информация, извлекаемая из экспериментов по ферромагнитному резонансу, не ограничивается определением частоты однородных вращений. Поглощенная ферромагнетиком энергия отлична от нуля не только при строгом резонансе, но и вблизи резонансного значения магнитного поля. Причина этого состоит в следующем. Вращение магнитного момента не может продолжаться бесконечно (на квантовом языке: магنون не живет вечно). Всегда есть процессы, приводящие к замедлению вращения магнитного момента. Мы о них не говорили в предыдущем разделе, так как время замедления  $\tau$ , как правило, значительно больше периода вращения момента. Согласно принципу неопределенности время жизни в данном состоянии  $\tau$  и неопределенность энергии этого состояния  $\Delta\epsilon$  связаны друг с другом:

$$\Delta\epsilon \gtrsim \hbar/\tau. \quad (83)$$

Это означает, что энергия магнона определена с точностью, не большей  $\Delta\epsilon = \hbar/\tau$ . Поэтому на рис. 40, линия  $\epsilon = \epsilon(\rho)$  размыта на ширину  $\Delta\epsilon = \hbar/\tau$ . Ясно, что неопределенность энергии приводит к возможности превращения «фотон — магنون» в некотором интервале значений параметров. И другой вывод: исследуя форму резонансной кривой (зависимость поглощенной

мощности от магнитного поля), можно узнать о процессах, ограничивающих время жизни магнона. А это весьма интересно, так как открывает глаза на взаимодействие магнона с себе подобными и с квазичастицами другой «породы» — с фононами, например. К сожалению, мы не имеем возможности остановиться на этом подробнее.

Ферромагнитный резонанс — метод определения энергии покоя магнона. А можно ли непосредственно исследовать свойства *отдельного* подвижного магнона? Мы нарочно подчеркиваем, что речь идет об изучении отдельного магнона. Коллектив магнонов доступен экспериментальному изучению (мы уже об этом говорили), однако, конечно, выводы становятся убедительней, если удастся «изолировать» объект исследования и иметь дело с одним подопытным. Природа предоставила нам такие возможности.

Рассмотрим некоторые из них.

Сначала мы займемся почти покоящимися магнонами, магнонами с очень малым импульсом, т. е. спиновыми волнами с большой длиной волны.

Напомним, что фотон превращается в покоящийся, а не в движущийся магнон из-за того, что у фотона огромная скорость (см. рис. 40). А если заставить превращаться в магнон квант звука — фонон? Скорость звука в 100 тысяч раз меньше скорости света. Анализ законов сохранения показывает: действительно, при *ферроакустическом резонансе* (такое название получило превращение фонона в магнон) образуется магнон с конечным импульсом. Ферроакустический резонанс был предсказан А. И. Ахиезером, В. Г. Барьяхтаром и С. В. Пелетминским в 1956 г. и стал одним из эффективных методов исследования магнетиков. Рассмотрение ферроакустического резонанса подсказывает еще одну возможность изучения магнонов конечным импульсом. Чтобы легче понять идею метода, опишем акт рождения магнона фононом на «волновом языке»: звуковая волна превратилась в спиновую волну той же длины. Длина радиоволн, даже ультракоротких, используемых в опытах по ферромагнитному резонансу, очень велика по атомным масштабам. Поэтому при ферромагнитном резонансе возбуждается

бесконечно длинная спиновая волна (точнее, такая длинная, что мы можем считать ее бесконечной). А нельзя ли сжать электромагнитную волну, укоротить ее? В оптически плотной среде с показателем преломления  $\mathfrak{N}$  длина волны света в  $\mathfrak{N}$  раз меньше, чем в вакууме. Но  $\mathfrak{N}$  в лучшем случае равно нескольким единицам. И свет, и радиоволны — электромагнитные колебания. Поэтому надеяться на такое сжатие за счет показателя преломления особенно не приходится. Исключения составляют металлы. В металлы электромагнитные волны вообще почти не проникают, а та незначительная часть, которая проникает, затухает на очень малом расстоянии. Это расстояние (его называют глубиной скин-слоя) для длин волн порядка 1 см приблизительно равно  $10^{-5}$  см, т. е. электромагнитное поле в металле существенно изменяется на расстояниях, в 100 тысяч раз меньше, чем длина волны этого поля в вакууме. Если бы мы захотели представить электромагнитное поле в виде совокупности плоских волн, то убедились бы, что главный вклад дают волны с длиной  $\approx 10^{-5}$  см, в то время как на поверхность металла падает волна длиной 1 см. Другими словами, металл совершает огромное сжатие электромагнитных волн, правда, несколько «размывая» их: вместо одной плоской волны возникает пакет — совокупность волн, сложение которых создает затухающее в глубину металла поле.

Сжатие электромагнитной волны металлом позволяет использовать исследования высокочастотных свойств металлических ферромагнетиков для изучения подвижных магнонов. Для этого надо измерить зависимость от частоты и от внешнего магнитного поля коэффициента отражения электромагнитной волны. Конечно, измерения надо проводить в условиях, близких к условию ферромагнитного резонанса. То обстоятельство, что электромагнитная волна возбуждает спиновую волну, а не однородное вращение магнитных моментов, проявляется в величине коэффициента отражения и дает возможность определить свойства подвижного магнона. Впервые подобные эксперименты были проведены американскими физиками В. Аментом и Г. Радо в 1955 г.

Мы до сих пор не рассказали о, казалось бы, самой естественной возможности исследования спиновых волн конечной длины — резонансном возбуждении стоячих спиновых волн. Действительно, для спиновой волны ферромагнитный образец — это резонатор, отражение от стенок которого должно приводить к образованию стоячих волн. Чтобы интерференционная картина была заметна, пленку нужно брать потоньше. Подходят весьма тонкие ферромагнитные пленки, толщиной примерно  $10^{-6} \div 10^{-5}$  см. Конечно, трудно сделать хорошие пленки толщиной в несколько сотен атомных слоев. Однако такой эксперимент был осуществлен. Он заключается в исследовании резонансного поглощения энергии переменного магнитного поля тонкой ферромагнитной пленкой. Вместо одного пика, соответствующего возбуждению однородного вращения магнитных моментов, наблюдается несколько пиков, расстояние между которыми позволяет измерить величину, непосредственно связанную с обменным взаимодействием соседних атомов.

Итак, мы видим, что существует несколько методов исследования длинноволновых спиновых волн. Каждый из них обладает своими достоинствами. Все они обогащают физиков многочисленными сведениями, позволяющими глубже проникнуть в природу магнитного состояния. И всем этим методам присущ общий недостаток. С их помощью нельзя (или необычайно трудно) исследовать спиновые волны, длина которых порядка межатомных расстояний (о таких спиновых волнах заведомо лучше говорить как о квазичастицах — магнонах). А ведь тепловые и магнитные свойства магнетиков определяются всеми магнонами. Наши знания будут неполны, если мы ограничимся почти неподвижными магнонами. Добраться до магнонов с большими импульсами нам помогает исследование неупругого рассеяния нейтронов.

Принципиальные основы восстановления закона дисперсии магнонов по неупругому рассеянию нейтронов магнонами те же, что и в случае рассеяния фононами. Мы их описали в главе второй.

Однородное вращение магнитных моментов, как мы знаем, возможно не только в ферромагнетиках,

о которых речь шла в этом разделе, но и в антиферромагнетиках. Значит, возможно и резонансное поглощение энергией переменного магнитного поля. Особенно убедительно это утверждение звучит, если сформулировать его на квантовом языке: фотон при взаимодействии с антиферромагнетиком может превратиться в магнон. Физическая природа антиферромагнитного резонанса, по существу, не отличается от природы ферромагнитного резонанса. Поэтому нет необходимости повторять сказанное. Интересно, однако, подчеркнуть различия, обусловленные антиферромагнитным упорядочением магнитных моментов.

Спектр антиферромагнетика сложнее, чем спектр ферромагнетика. У большинства антиферромагнетиков энергия покоящегося магнона / значительно больше энергии покоящегося магнона ферромагнетика. Для антиферромагнетика резонанс либо находится в недоступной или труднодоступной области частот, либо надо использовать огромные магнитные поля, так как одна из частот неоднородного вращения уменьшается с ростом внешнего магнитного поля. И наконец, магнитная структура антиферромагнетика перестраивается под воздействием магнитного поля (мы об этом уже говорили), а это приводит к перестройке магнитного спектра, что, естественно, проявляется в антиферромагнитном резонансе.

Антиферромагнитный резонанс впервые наблюдался группой голландских физиков в 1951 г. и после этого стал одним из распространенных методов исследования антиферромагнетиков.

\* \* \*

Мы начали с выяснения природы магнетизма, и логика рассказа привела нас к описанию высокочастотных свойств магнетиков. Это не случайно. Исследование высокочастотных свойств — один из наиболее эффективных методов выяснения энергетической структуры.

По необходимости мы ограничились свой рассказ самыми простыми, наглядными явлениями и свойствами магнетиков. Их высокочастотным свойствам посвящены объемистые монографии; буквально каждый день на эту тему появляются десятки статей,

часто устраиваются международные конференции и узкие семинары. Многие открытия переданы в технику, освоены ею и «спокойно работают» в радиоприемниках и в радиолокаторах, в вычислительных машинах и в разнообразных релейных устройствах. Одновременно развиваются наши представления о природе магнетизма различных твердых тел. Открываются предположительнейшие особенности. Например, сравнительно недавно было выяснено, что структура основного состояния большого числа магнетиков, сложнее, чем мы думали. Есть кристаллы, у которых магнитным моментам энергетически выгодно располагаться почти антипараллельно. Это — почти антиферромагнетики. В основном состоянии у них есть магнитный момент (даже в отсутствие магнитного поля!), но он очень мал — во много раз меньше, чем у настоящих ферромагнетиков. Явление, открытое А. Боровиком-Романовым, получило название *слабого ферромагнетизма* и нашло свое объяснение в работах И. Дзялошинского (1957 г.). У других кристаллов структура основного состояния особенно вычурная: магнитные моменты соседних ячеек несколько повернуты друг относительно друга так, что образуется спираль, шаг которой не кратен размерам кристаллической ячейки. Выясняется, что в формировании магнитной спирали в металлах важную роль играют электроны проводимости.

Глубокое проникновение в природу магнетизма ни в коей мере не означает решения всех вопросов. Кто-то сравнивал развитие науки с военным наступлением. Как правило, в тылу остаются очаги сопротивления. Но, в отличие от военных действий, мы никогда не знаем, не станет ли в самое ближайшее время оставленный в тылу очаг сопротивления новым фронтом. Наука не имеет средств разведки для выяснения этого. Новое открытие, новая теория могут совершенно перераспределить силы.

## ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ФРАЗЫ

Познакомиться со страной из окна автобуса, останавливаясь в придорожных гостиницах и бегом осматривая разрекламированные туристские достопримечательности, конечно, нельзя, но, если нет другого выхода, приходится ограничиваться туристской поездкой. Вы проехали по нескольким районам огромной страны. Если она вам понравилась, если вы почувствовали, что образ жизни в ней вас не раздражает, и районы, оказавшиеся на вашем пути, понравились, а только упомянутые в путеводителе привлекают, то автор-гид будет считать свою миссию выполненной.

Популярная книга всегда напоминает рекламное описание: скучные подробности скрыты, трудности не выпячиваются. Думаю, все читатели понимают, что прочитанный рассказ о квантовой физике твердого тела — фасад науки, что методы теоретической физики не ограничиваются более или менее убедительными аналогиями и оценками. Теоретическая физика — строгая наука, требующая тонких физических соображений и кропотливых, иногда очень трудных, математических расчетов. Получить новые результаты можно, только овладев всем арсеналом средств, методов и представлений современной физической теории. И, как в любой сфере человеческой деятельности, оказывается, что источником результатов служит труд, к счастью приносящий радость не только своими результатами, но и непосредственно в процессе решения еще не решенных задач.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>ВМЕСТО ПРЕДИСЛОВИЯ</i> о языках науки	3
<i>ГЛАВА 1</i> о физике вообще и о квантовой механике в частности . . . . .	7
<i>ВВЕДЕНИЕ</i> о физике твердого тела к четырём главам и приложению . . . . .	64
<i>ГЛАВА 2</i> о фононах . . . . .	76
<i>ПРИЛОЖЕНИЕ</i> о двух статистиках между двумя главами . . . . .	104
<i>ГЛАВА 3</i> об электронах . . . . .	121
<i>ГЛАВА 4</i> об электронах и фононах . . . . .	139
<i>ГЛАВА 5</i> о магнонах . . . . .	163
<i>ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ФРАЗЫ</i> . . . . .	191

45 коп.

ЭЛЕКТРОНЫ • ФОНОНЫ • МАГНОНЫ

