Р. А. КАЛНИН

АЛГЕБРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

ИЗДАНИЕ СЕДЬМОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для средних специальных учебных заведений

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1973

512
К17
УДК 512

К $\frac{0222-1819}{042(02)\text{-}73}$ 33-73

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке третьего издания некоторые главы книги подверглись значительной переработке. Автором учтены критические замечания и пожелания, высказанные в ходе обсуждения книги, организованного научно-методическим кабинетом по высшему и среднему специальному образованию СССР. Кроме того, приняты во внимание изменения, внесенные в программу по математике для средних специальных учебных заведений.

Наибольшей переработке подверглись главы VI и VII, которые, по существу, написаны заново. В гл. VI более детально рассмотрены основные сведения о функциях и квадратный трехчлен; изучение последнего делает естественным переход к квадратным уравнениям. В главе «Векторы» дано понятие о координатах вектора и о разложении вектора по осям. Способ введения тригонометрических функций остался прежним, с той разницей, что вместо проекций вектора фигурируют координаты вектора; это, на наш взгляд, приводит к более кратким определениям тригонометрических функций.

Усилены логические элементы курса (теорема о равносильности уравнений, общность формул приведения и т. д.).

Везде, где речь идет об уравнениях определенного типа, в скромной дозе говорится и о соответствующих неравенствах. При этом автор повсюду пользуется графическими приемами решения уравнений и неравенств.

В конце книги приведены сводка основных формул и таблица функций e^x, e^{-x}, $\sin x$, $\cos x$, которая используется, например, при переводе комплексных чисел из алгебраической формы в показательную.

По просьбе многих преподавателей автор включил в главу «Логарифмическая линейка» шесть новых параграфов об отыскании значений тригонометрических функций с помощью линейки и обратную задачу.

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту доценту Р. С. Гутеру, внимательно изучившему рукопись и указавшему на ряд существенных пробелов; его ценные советы и рекомендации были учтены при окончательной обработке рукописи.

Все критические замечания, отзывы и пожелания по поводу этой книги автор просит направлять по адресу: Москва, В-71, Ленинский проспект, 15. Издательство «Наука».

Москва, 1967 г.

Автор

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

При подготовке шестого издания в текст книги внесены незначительные исправления и дополнения: исправлены опечатки в тексте и ответах; в некоторых главах увеличено количество упражнений.

Настоящее издание отличается от предыдущего (1971 г.) лишь исправлением замеченных опечаток и неточностей.

ГЛАВА I

ЭЛЕМЕНТЫ ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

§ 1. Источники приближенных чисел. В практической деятельности людей, а также в науке и технике постоянно встречаются как точные, так и приближенные числа, что видно из следующих примеров:

1) Если в каждой пачке содержится 20 книг, то в 100 таких пачках имеется 2000 книг. Ясно, что число 2000 — точное.

2) Согласно последней переписи населения в Москве в начале 1970 г. проживало около 7,1 млн. человек. Число 7,1 млн.— приближенное (все статистические данные обычно округляются).

В данном случае округление произведено с точностью до 0,1 млн. = 100 000, а потому мы можем только утверждать, что точное число людей, проживавших в Москве в начале 1970 г., заключено между 7,05 млн. и 7,15 млн.

3) Во всех сообщениях Центрального статистического управления СССР о выпуске промышленной продукции (автомобилей, мотоциклов, телевизоров и др.) данные приводятся в круглых тысячах, что указывает на их приближенный характер.

Точно так же всякий научный опыт и эксперимент, всякое измерение на местности или в лабораторных условиях порождают приближенные числа, так как показания различных измерительных приборов мы можем определить лишь с некоторой погрешностью. Возникают вопросы:

1) Как оценить точность приближенных чисел?

2) Как производить арифметические действия над приближенными числами?

Ответы на эти вопросы даются в следующих параграфах.

§ 2. Абсолютная погрешность и ее граница. Пусть число a — приближенное значение некоторой величины, число A — истинное, или точное, значение той же величины. Как известно, абсолютная величина неотрицательного числа a есть само число a; абсолютная величина отрицательного числа a есть противоположное ему число $(-a)$. Знак абсолютной величины: $|\ |$ — две вертикальные черточки, между которыми пишется число или буквенное выражение.

Определение. Абсолютная величина разности между точным и приближенным значениями величины называется *абсолютной погрешностью приближенного числа* a:

$$\alpha = |A - a|,$$

где буквой α («альфа») обозначена абсолютная погрешность.

Примеры. 1) В техникум принято 514 человек; если точное число 514 округлить до сотен, получим приближенное число $a = 500$; его абсолютная погрешность $\alpha = |514 - 500| = 14$ (человек).

2) При покупке часов клиент получает гарантийное свидетельство, в котором часовой завод ручается за точность суточного хода часов в пределах ± 45 с, что означает: часы не должны уходить вперед или отставать в сутки более чем на 45 с. Допустим, что при проверке часов с сигналами точного времени, даваемыми по радио, обнаружилось, что часы уходят вперед в сутки на 20 с; тогда $\alpha = 20$ с и есть абсолютная погрешность суточного хода часов. Число 45 (с) есть то, что принято называть *границей* абсолютной погрешности приближенного числа; в данном случае приближенным числом является то время, которое показывают часы. В большинстве случаев точные значения величин нам не известны, а потому нельзя определить и абсолютную погрешность, т. е. число α; однако в каждом конкретном случае можно установить *границу* абсолютной погрешности, подразумевая под этим такое положительное число, что абсолютная погрешность α всегда остается меньше этого числа. Границу абсолютной погрешности приближенного числа a будем обозначать через Δa («дельта a»).

3) Слесарь не может точно изготовить деталь длиной, скажем, в 80 мм. Но с помощью калиброметра он может установить, что отклонился от заданного размера не более чем на 0,02 мм в ту или другую сторону. В данном слу-

чае $\Delta a = 0{,}02$ мм, если за a принять приближенную длину 80 мм.

Из сказанного выше следует, что гораздо практичнее пользоваться понятием границы абсолютной погрешности, чем абсолютной погрешностью, когда речь идет об оценке точности приближенного числа. В дальнейшем границу абсолютной погрешности будем называть просто абсолютной погрешностью, сохраняя обозначение Δa.

§ 3. Относительная погрешность. Для сравнения точности двух или нескольких приближенных чисел недостаточно знать их абсолютные погрешности, что видно из следующего примера.

Произведены два измерения:

1) длины классной доски: $d_1 = 2{,}4$ м с абсолютной погрешностью $\Delta d_1 = 0{,}05$ м;

2) расстояние d_2 между двумя станциями железной дороги: $d_2 = 3{,}48$ км с абсолютной погрешностью $\Delta d_2 = 10$ м. Требуется узнать, какое из этих двух измерений произведено более точно. На первый взгляд может показаться, что более точным является первое измерение, ведь здесь абсолютная погрешность равна только 5 см, тогда как при измерении расстояния между станциями допущена погрешность в 10 м. Такой взгляд ошибочен: надо учесть, что в первом случае абсолютная погрешность в 5 см падает на сравнительно малую длину и составляет $\frac{5\text{ см}}{240\text{ см}} = \frac{1}{48} \approx 0{,}02$ измеряемой длины; во втором случае это отношение

$$\frac{10\text{ м}}{3480\text{ м}} = \frac{1}{348} \approx 0{,}0029.$$

Таким образом, оказалось, что второе измерение примерно в 7 раз точнее первого.

Определение. Отношение абсолютной погрешности приближенного числа к самому числу называется его *относительной погрешностью*:

$$\delta_a = \frac{\Delta a}{a},$$

где δ_a («дельта малая» с индексом a) означает относительную погрешность числа a.

Относительную погрешность часто выражают в процентах. В примере, рассмотренном в данном параграфе, относительная погрешность равна 2% и 0,29% соответственно.

Пример. Найти относительную погрешность приближенного значения числа π, если считать $\pi \approx 3,14$. Так как более точное значение числа π есть 3,141592 ..., то $\alpha \approx 3,141592-3,14=0,001592<0,002$,

$$\Delta 3,14=0,002,$$

а

$$\delta_{3,14}=\frac{0,002}{3,14}=\frac{1}{1570}\approx 0,000637\approx 0,064\%.$$

§ 4. Точные значащие цифры. Определение 1. Если абсолютная погрешность приближенного числа не превышает половины единицы последнего разряда, то все значащие цифры данного числа называются *точными*. Например,

1) число $A=58,3$ имеет три точные значащие цифры, если ΔA не превышает половины десятой доли, т. е.

$$\Delta A \leqslant 0,05.$$

2) Число $B=0,032$ имеет две точные значащие цифры, если $\Delta B \leqslant 0,0005$ (половина тысячной равна пяти десятитысячным). Нули, стоящие перед первой значащей цифрой (3), в счет точных значащих цифр никогда не идут.

3) Число $C=2,007$ имеет 4 точные значащие цифры, если $\Delta C \leqslant 0,0005$. Здесь нули, стоящие между значащими цифрами 2 и 7, также идут в счет точных значащих цифр.

Что касается цифры 0, стоящей в конце записи приближенного числа, то в некоторых случаях нули идут в счет точных цифр, в других — нет.

4) Число 4123, округленное до сотен, будет 4100 (запись: $41 \cdot 10^2$); здесь нули в счет точных значащих цифр не идут, так как они заменяют точные цифры 2 и 3.

5) Точное число 15,003, округленное до сотых долей, дает 15,00; здесь оба нуля идут в счет точных цифр, поскольку в точном числе ни десятых, ни сотых долей не имеется.

Определение 2. Если абсолютная погрешность приближенного числа больше половины единицы последнего разряда этого числа, то последнюю цифру приближенного числа называют *сомнительной* или *ненадежной*.

Примеры. 1. $a=42,3$; $\Delta a=0,2$. Последняя цифра (3) ненадежна.

2. $b = 18{,}32$; если $\Delta b = 0{,}03$, то последняя цифра сомнительна; если же $\Delta b = 0{,}005$, то она надежна.

В приближенном числе, как правило, сохраняют только одну ненадежную цифру, остальные отбрасывают.

Примечание. Надо различать термины «значащие цифры» и «десятичные знаки», что не одно и то же:

1) приближенное число 45,7 имеет три значащие цифры и один десятичный знак;

2) приближенное число 0,0075 имеет две значащие цифры и четыре десятичных знака.

§ 5. Действия над приближенными числами. В предыдущих параграфах были показаны различные способы оценки точности приближенных чисел.

Теперь возникает такой вопрос: как производить арифметические действия над приближенными числами так, чтобы результаты этих действий не содержали лишних сомнительных цифр.

Проще всего производить действия над приближенными числами по правилам подсчета значащих цифр. Частично эти правила даются при изучении арифметики в V классе. Ниже приводятся формулировки этих правил и примеры их применения.

§ 6. Правила подсчета значащих цифр. 1. При сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном числе с наименьшим числом десятичных знаков.

2. При умножении и делении в результате сохраняем столько значащих цифр, сколько их имеет наименее точное из данных чисел. Из нескольких приближенных чисел *наименее точным* считается то, которое имеет наименьшее количество точных значащих цифр.

3. При возведении в квадрат и куб в результате сохраняем столько значащих цифр, сколько их имеет основание степени.

4. При извлечении квадратного и кубического корня в результате надо сохранить столько же значащих цифр, сколько их имеет подкоренное число.

5. При вычислении промежуточных результатов сохраняется одна лишняя запасная цифра, которая в окончательном результате отбрасывается.

§ 7. Применение правил подсчета цифр.

1. Сложение и вычитание. 1) Найти сумму приближенных чисел:

$$1{,}7+4{,}35+5{,}124.$$

Наименьшее число десятичных знаков имеет первое слагаемое (1,7); в остальных двух слагаемых сохраним один лишний десятичный знак, который в окончательном результате будет отброшен:

$$1{,}7+4{,}35+5{,}12=11{,}17\approx 11{,}2.$$

2) Вычесть из 69,3 число 4,856. Здесь вычитаемое имеет два лишних десятичных знака по сравнению с уменьшаемым; надо сохранить лишь один лишний знак:

$$\begin{array}{r} -\,69{,}30 \\ 4{,}86 \\ \hline 64{,}44 \end{array} \approx 64{,}4.$$

2. Умножение и деление. 3) Вычислить площадь земельного участка, имеющего вид прямоугольника со сторонами $a=31{,}5$ м, $b=28{,}4$ м. Так как сомножители имеют по три значащие цифры, то в произведении сохраняем также три значащие цифры:

$$S=31{,}5\cdot 28{,}4=894{,}60\approx 895.$$

4) $52{,}8\cdot 0{,}32=16{,}896\approx 17.$

Наименее точный множитель (0,32) имеет две значащие цифры; столько же цифр сохраняется в произведении.

5) С участка площадью 2,45 га собрано 30,5 т картофеля. Определить средний урожай с одного гектара:

$$30{,}5:2{,}45\approx 12{,}4 \text{ (т)}.$$

3. Возведение в степень и извлечение корня.

6) $(3{,}18)^2\approx 10{,}1.$

Основание имеет три значащие цифры; столько же цифр надо удержать в результате возведения в квадрат.

7) $(0{,}132)^3\approx 0{,}00230.$

8) $\sqrt{12{,}5}\approx 3{,}54.$

9) $\sqrt[3]{3{,}75}\approx 1{,}55.$

10) Вычислить вторую космическую скорость $v=\sqrt{2gR}$, т. е. скорость, при которой снаряд, выпущенный вверх по вертикали, не вернется обратно на Землю.

$g=981$ см/с^2 — ускорение силы тяжести,

$R=63\cdot10^7$ см — радиус Земли,

$$v=\sqrt{2\cdot981\cdot63\cdot10^7}=\sqrt{2\cdot9{,}81\cdot6{,}3\cdot10^{10}}=$$
$$=10^5\cdot\sqrt{2\cdot9{,}81\cdot6{,}3}=11{,}2\cdot10^5 \text{ (см/с)},$$

или

$$v=11{,}2 \text{ км/с}.$$

Примечание. При решении примеров 6, 7, 8, 9 и 10 были использованы «Четырехзначные математические таблицы» Брадиса.

§ 8. Примеры более сложных вычислений по правилу подсчета значащих цифр.

Пример 1. Теплоемкость твердого тела x определяется по формуле

$$x=\frac{(m_2-m_1+m_1n)(t_2-t_1)}{m(T-t_2)},$$

где m_1 — масса внутреннего сосуда без воды, m_2 — масса внутреннего сосуда с водой, t_1 — первоначальная температура воды, t_2 — температура воды после погружения тела, T — температура кипения воды, n — теплоемкость калориметра и мешалки, m — масса тела, теплоемкость которого надо найти.

Из опыта получены следующие данные:

$$m=403{,}7;\quad m_1=119;\quad m_2=673;\quad n=0{,}094;$$
$$t_1=9{,}5;\quad t_2=12{,}8;\quad T=100{,}11.$$

В этом примере величины n и t_1 имеют всего две точные значащие цифры, поэтому более точные данные предварительно округляем, сохраняя в них три значащие цифры: $m=404$; $T\approx100$; промежуточные вычисления производим с тремя значащими цифрами, в окончательном результате сохраняем две значащие цифры.

Подставляем числовые данные в формулу:

$$x=\frac{(673-119+119\cdot 0{,}094)(12{,}8-9{,}5)}{404(100-12{,}8)}=\frac{(554+119\cdot 0{,}094)\cdot 3{,}3}{404\cdot 87{,}2}.$$

Производим вычисления:

$$119\cdot 0{,}094=11{,}186\approx 11{,}2,$$

$$554+11{,}2=565{,}2\approx 565,$$

$$565\cdot 3{,}3=1864{,}5\approx 186\cdot 10,$$

$$404\cdot 87{,}2=35\,228{,}8\approx 35\,200=352\cdot 10^2,$$

$$\frac{186\cdot 10}{352\cdot 10^2}=\frac{186}{352\cdot 10}=\frac{18{,}6}{352}\approx 0{,}0528\approx 0{,}053.$$

Ответ: $x=0{,}053$.

Пример 2. В цепь переменного тока включены конденсатор и катушка. Полное сопротивление такой цепи определяется по формуле

$$Z=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

где R — сопротивление внешней цепи, $\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)$ — реактивное сопротивление.

Вычислить Z, если $R=41{,}4$; $\omega=0{,}75$; $L=18$; $C=0{,}52$.

Наименее точные данные имеют две значащие цифры, поэтому в окончательном результате сохраним только две цифры; промежуточные вычисления будем производить с тремя значащими цифрами:

1) $\omega L-\frac{1}{\omega C}=0{,}75\cdot 18-\frac{1}{0{,}75\cdot 0{,}52}\approx 13{,}5-2{,}56\approx 10{,}9,$

2) $(10{,}9)^2=118{,}81\approx 119,$

3) $41{,}4^2\approx 1714\approx 171\cdot 10,$

4) $119+1710=1829\approx 183\cdot 10,$

5) $\sqrt{1830}\approx 42{,}8\approx 43$ (Ом).

§ 9. Вычисления с наперед заданной точностью. В практических вычислениях часто приходится решать следующую задачу: с какой точностью надо взять исходные данные, чтобы погрешность окончательного результата не превысила заданной наперед границы?

Рассмотрим два примера:

1. Период полного колебания T маятника определяется по формуле: $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l — длина маятника (см), g — ускорение силы тяжести (см/с^2).

С какой точностью надо измерить длину l и со сколькими значащими цифрами нужно взять числа π и g, чтобы относительная погрешность при вычислении периода T не превышала полпроцента (0,5%)?

Длина маятника $l \approx 80$ см. Определяем порядок величины T, т. е. десятичный разряд первой цифры слева (десятки или единицы), для чего принимаем во внимание только первую цифру каждого из округленных чисел π и g ($\pi \approx 3$; $g \approx 1000$):

$$T \approx 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{\frac{80}{1000}} \approx 6 \cdot 0{,}28 \approx 1{,}7;$$

тогда 0,5% от $1{,}7 = 0{,}005 \cdot 1{,}7 = 0{,}0085$.

По относительной погрешности мы нашли границу абсолютной погрешности: $\Delta T = 0{,}0085$. По величине допускаемой абсолютной погрешности можно судить о том, что период должен иметь три точные значащие цифры, а поэтому длина l должна выражаться приближенным числом с тремя значащими цифрами, т. е. должна быть измерена с точностью до десятых долей сантиметра. Число π лучше взять с четырьмя значащими цифрами, т. е. с одной запасной цифрой, число g — с тремя (981), промежуточные вычисления вести с четырьмя цифрами, в окончательном результате сохранить три значащие цифры.

1. С какой точностью надо измерить катеты a и b прямоугольного треугольника, чтобы можно было вычислить гипотенузу $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ с относительной погрешностью δ_c, не превышающей 2%?

Допустим, что $a \approx 50$ см, $b \approx 80$ см. Каждое из приближенных чисел 50 и 80 имеет одну точную значащую цифру. Находим приближенное значение гипотенузы:

$$c = \sqrt{50^2 + 80^2} = \sqrt{100\,(25 + 64)} = 10\sqrt{89} \approx 10 \cdot 9{,}4 = 94;$$

$$2\% \text{ от } 94 = 94 \cdot 0{,}02 = 1{,}88 \approx 2.$$

Таким образом, абсолютная погрешность $\Delta c = 2$ (см). Это значит, что цифра, указывающая число единиц в окончательном результате, сомнительна, а потому следует катеты a и b взять с двумя точными значащими цифрами, т. е. измерить с точностью до 0,5 см. Промежуточные вычисления надо вести с тремя значащими цифрами, а полученное значение гипотенузы c должно быть округлено до двух значащих цифр.

Упражнения

1. Число 2,7182818 округлить до 5, 4, 3 значащих цифр.

2. Расстояние от центра Земли до полюса в километрах равно 6356,909. Округлить это число до 2, 3, 4 значащих цифр.

3. Какая разница между записью температуры 18° и 18,0°?

4. Начертить аккуратно прямоугольник и измерить его стороны с точностью до 1 мм. Записать, пользуясь знаками неравенства, между какими числами заключается длина его сторон.

5. Приближенное значение величины x заключено между 6,85 м и 6,89 м. С какой точностью произведено измерение?

6. Дробь $5\frac{2}{7}$ обратить в десятичную с точностью до 0,001.

7. При взвешивании тела получилась масса 18,7 кг с точностью до 0,1 кг. Указать границы точного значения массы.

8. Найти в процентах относительную погрешность числа 3,14.

9. Какое из двух измерений точнее:

1) 895 м ($\pm 0{,}5$ м); 2) 24,08 м ($\pm 0{,}01$ м)?

10. Какое из двух приближенных значений числа π точнее:

$$3{,}14 \quad \text{или} \quad 3\frac{1}{7}\,?$$

11. Написать число 18,754 без лишних цифр, зная, что относительная погрешность его равна $\frac{1}{2}\%$.

12. Найти сумму $2\frac{3}{7}+\frac{1}{15}+4\frac{1}{3}$ с тремя точными десятичными знаками.

13. Расстояние между двумя городами по карте равно 24,6 см ($\pm 0{,}2$ см). Найти действительное расстояние между городами, если масштаб карты 1:2 500 000; определить погрешность.

14. Кубатура комнаты 127,4 м³. Какова масса воздуха, содержащегося в этой комнате, если масса 1 м³ равна 1,29 кг ($\pm 0{,}01$ кг)?

15. Сколько точных значащих цифр можно определить в произведении приближенных чисел $2{,}18 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}175$? Вычислить эти цифры.

16. Найти объем комнаты, если размеры ее $15{,}4 \times 12{,}6 \times 4{,}5$. Какова относительная погрешность произведения?

17. Для определения плотности тела было установлено, что масса его 117,8 г; при погружении в воду тело вытеснило 54,7 см³. С какой точностью можно определить плотность тела?

18. С какой относительной погрешностью можно вычислить объем цилиндра, если радиус основания $r = 15{,}4$ см, высота $H = 28{,}2$ см?

19. С площади 32,4 га собрано 4530 ц ржи. По скольку центнеров в среднем собрано с 1 га?

20. Грубо приближенное значение радиуса цилиндра — 20 см, высоты — 30 см. С какой точностью надо выполнить измерение, чтобы относительная погрешность при вычислении объема не превышала 1%?

ГЛАВА II

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

§ 10. Общие понятия и определения.

Определение 1. *Уравнением* называется равенство, содержащее одну или несколько букв, под которыми подразумеваются неизвестные числа.

Буквы, обозначающие неизвестные числа, называются просто *неизвестными*.

Примеры. 1) Равенство $3a+7=5a-9$ есть уравнение с одним неизвестным a; оно справедливо только при $a=8$.

2) Равенство $x+2y^2=13$ есть уравнение с двумя неизвестными x и y; оно справедливо, например, если $x=5$, $y=2$.

Неизвестные чаще всего обозначаются последними буквами латинского алфавита x, y, z, u, v, ...

Вместо фразы «уравнение справедливо при $x=1$; $y=2$» чаще принято говорить, что уравнение удовлетворяется значениями неизвестных $x=1$, $y=2$.

Определение 2. Значения неизвестных, удовлетворяющие данному уравнению, называются его *решениями*.

Если уравнение содержит только одно неизвестное, то его решение чаще принято называть *корнем уравнения*.

Примеры. 1) Уравнение $3x^2=2x+1$ имеет корни $x_1=-\frac{1}{3}$ и $x_2=1$, что легко проверить.

2) Одним из решений уравнения $3x+y=5$ является пара чисел $x=1$, $y=2$.

3) Решением уравнения с тремя неизвестными $x+y+2z=10$ является, например, тройка чисел: $x=1$, $y=3$, $z=3$.

Определение 3. *Решить* уравнение или систему уравнений — это значит найти все решения, т. е. все те значения неизвестных, которые удовлетворяют данному уравнению или системе (т. е. каждому уравнению системы), или убедиться в том, что таких значений неизвестных нет.

Пример. Уравнение $x-3=x+1$ не имеет корня, так как при любом значении неизвестного всегда левая часть уравнения не равна правой части.

В зависимости от числа неизвестных, входящих в уравнение, различают уравнения с одним, двумя и бо́льшим числом неизвестных.

Определение 4. Уравнение с одним неизвестным называется *алгебраическим*, если оно может быть приведено к такому виду, что его левая часть — многочлен относительно неизвестного, а правая часть равна нулю. Такой вид уравнения называется *нормальным*. Наивысший показатель степени при неизвестном в левой части нормального уравнения называется *степенью* алгебраического уравнения.

Так, например, уравнения: $3x+5=0$, $5x^2-8x-20=$ $=0$, $x^4-8x^2-29=0$ — алгебраические уравнения соответственно первой, второй и четвертой степени.

В дальнейшем для краткости слово «алгебраическое» будем опускать; это не приведет к недоразумению, поскольку речь будет идти только об алгебраических уравнениях.

Коэффициентами уравнения называются числовые или буквенные множители при неизвестных, а также свободный член, т. е. член, не содержащий неизвестных. Обычно говорят о коэффициентах уравнения, приведенного к нормальной форме.

Примеры. 1) Уравнение $2x^2-5x-10=0$ есть уравнение второй степени с числовыми коэффициентами (коэффициенты: 2, —5 и —10); здесь число —10 — свободный член.

2) Уравнение $\frac{a}{x}=bx^2+1$ есть уравнение третьей степени с коэффициентами b, 0, 1 и $-a$ (проверьте это сами).

Определение 5. Два уравнения с одними и теми же неизвестными называются *равносильными*, если все решения первого уравнения являются решениями второго и, наоборот, все решения второго уравнения служат также решениями первого или если оба уравнения не имеют решения.

Примеры: 1) Уравнения $\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}=14$ и $5x-36=2x$ равносильны, так как оба уравнения удовлетворяются только при $x=12$.

2) Уравнения $2x-3=7$ и $(2x-3)(x+1)=7(x+1)$ неравносильны: первое из них имеет единственный корень $x=5$, а второе кроме корня $x=5$ имеет еще корень $x=-1$, который не служит решением первого уравнения.

3) Уравнения $x+5=x-1$ и $x(x-3)=x^2+8-3x$ равносильны, так как оба не имеют решений.

При решении уравнения нам приходится производить над ним ряд преобразований, пока не получим простейшее уравнение вида $x=a$ или совокупность таких уравнений. Возникает вопрос: не может ли получиться в результате производимых преобразований новое уравнение, которое окажется неравносильным исходному уравнению.

Приведем без доказательства две теоремы о равносильности уравнений *).

Теорема 1. *Если к обеим частям уравнения прибавим одно и то же число или один и тот же многочлен относительно неизвестного, то новое уравнение равносильно первоначальному.*

Теорема 2. *Если обе части уравнения умножим (или разделим) на одно и то же число, отличное от нуля, то новое уравнение равносильно первоначальному.*

Из теоремы 1 вытекает важное следствие: любой член уравнения можно переносить из одной части в другую, изменив его знак на противоположный.

В самом деле, допустим, что в правой части уравнения содержится член A (A может быть числом или многочленом относительно неизвестного). Если прибавим к обеим частям уравнения по величине $-A$, то в правой части члены A и $-A$ уничтожаются, а в левой части появится член $-A$. Следовательно, можно переносить любой член уравнения из правой части в левую, переменив его знак на противоположный.

Таким же образом можно рассуждать и относительно любого члена, стоящего в левой части уравнения.

Приведем примеры решения уравнений первой степени с одним неизвестным.

---

*) Доказательство этих теорем дается в § 79.

Пример 1. $\frac{5(x-2)}{x+2}-\frac{2(x-3)}{x+3}=3.$

Не зная, чему равен корень уравнения, можно утверждать, что искомым корнем заведомо не является ни число -2, ни число -3; в противном случае левая часть уравнения не имела бы смысла (на нуль делить нельзя). Перенесем все члены в левую часть и приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{5(x-2)(x+3)-2(x-3)(x+2)-3(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)}=0.$$

После упрощения числителя левой части получим

$$\frac{-4(2x+9)}{(x+2)(x+3)}=0.$$

Так как дробь равна нулю лишь тогда, когда ее числитель равен нулю (знаменатель не равен нулю), то $4(2x+9)=0$, откуда $x=-\frac{9}{2}$.

Пример 2. $\frac{x}{a^2-b^2}+\frac{2x}{a+b}+\frac{a+b-1}{2(a-b)}=\frac{x}{a-b}+1.$

В этом уравнении x — неизвестное, a и b — известные величины.

Написанное равенство имеет смысл, если ни один из знаменателей дробей не равен нулю; следовательно, $a \neq \pm b$. Будем последовательно упрощать данное уравнение:

$$\left(\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{2}{a+b}-\frac{1}{a-b}\right)x=1-\frac{a+b-1}{2(a-b)},$$

$$\frac{1+2(a-b)-a-b}{a^2-b^2}x=\frac{2(a-b)-a-b+1}{2(a-b)},$$

$$\frac{1+a-3b}{a^2-b^2}x=\frac{a-3b+1}{2(a-b)}.$$

Если $1+a-3b \neq 0$, то, разделив обе части на $1+a-3b$, получаем:

$$\frac{1}{a^2-b^2}x=\frac{1}{2(a-b)}, \quad x=\frac{a+b}{2}.$$

Если же $1+a-3b=0$, то уравнение справедливо при любом значении x.

§ 11. Уравнения первой степени с одним неизвестным и их графическое решение. Всякое уравнение первой степени с одним неизвестным может быть приведено к виду $ax+b=0$. Левая часть такого уравнения есть многочлен первой степени относительно x, называемый также *линейной функцией*, а правая часть равна нулю.

Ясно, что:

1) если $a \neq 0$, то корень уравнения равен $-\frac{b}{a}$;

2) если $a=0$ и $b \neq 0$, то уравнение не имеет корня;

3) если $a=b=0$, то решением уравнения является любое число; в этом случае уравнение называется *неопределенным*.

Пусть дано уравнение $2x-3=\frac{3}{2}x+1$. Левая и правая части этого уравнения являются линейными функциями. Решить это уравнение — значит найти такое значение x, при котором обе функции численно равны.

Исходя из такого взгляда на уравнение (кстати сказать, весьма плодотворного, что будет показано в дальнейшем), сам собой напрашивается следующий способ решения:

1) Строим графики линейных функций $y=2x-3$ и $y=\frac{3}{2}x+1$, являющиеся, как известно, прямыми линиями*).

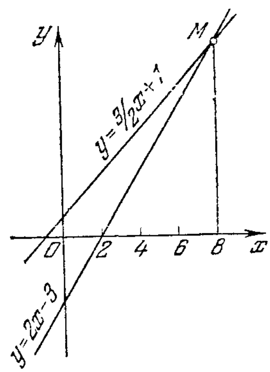

Рис. 1.

2) Абсцисса точки M — точки пересечения прямых (рис. 1) — является корнем данного уравнения, так как этой абсциссе соответствуют одинаковые ординаты точек обеих прямых, т. е. при этом значении абсциссы x обе части уравнения равны. Из рис. 1 видно, что абсцисса точки пересечения прямых, т. е. корень уравнения, $x=8$.

Можно было поступить и по-другому: сначала привести данное уравнение к виду $x-8=0$. Тогда искомый корень представляет собой такое значение аргумента x, при котором функция $y=x-8$ равна нулю.

---

*) Понятия функции и графика будут нами более подробно рассмотрены в гл. VI.

Таким значением аргумента является абсцисса точки пересечения графика с осью абсцисс (рис. 2).

Заметим, что последний способ не столь интересен как самостоятельный способ решения (действительно, приведя исходное уравнение к виду $x-8=0$, мы фактически его решили), однако полезен для исследования уравнений первой степени, заданных в общем (нормальном) виде: $ax+b=0$. Именно, три возможных случая расположения прямой

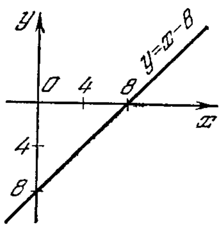

Рис. 2.

$$y=ax+b$$

относительно оси абсцисс (прямая пересекает ось, параллельна ей, совпадает с ней) дают геометрическое истолкование трех возможных случаев решения уравнения $ax+b=0$ (уравнение имеет единственное решение, не имеет ни одного, имеет бесчисленное множество решений).

§ 12. Система линейных уравнений. *Линейным уравнением* (уравнением первой степени) *с двумя неизвестными* называется уравнение вида

$$ax+by=c.$$

Нетрудно видеть, что это уравнение имеет бесчисленное множество решений, так как одному из неизвестных, например x, можно придавать произвольные значения, а соответствующие ему значения неизвестного y найдутся из уравнения.

Например, если неизвестное x уравнения $2x-y=3$ положить равным -1, 0, 2, 5, то соответствующие им значения y будут -5, -3, 1, 7. Каждая пара чисел: $(-1; -5)$, $(0; -3)$, $(2; 1)$, $(5; 7)$ является решением данного уравнения. Таких пар чисел — бесконечное множество. Поэтому говорят, что одно уравнение первой степени с двумя неизвестными является неопределенным.

Эту неопределенность легко истолковать графически. Уравнению $2x-y=3$ в прямоугольной системе координат соответствует прямая. Эта прямая есть график линейной функции $y=2x-3$, изображенной на рис. 1.

Координаты любой точки прямой представляют собой решение уравнения, но так как точек на прямой бесконечное множество, то и решений бесконечное множество.

Совокупность двух уравнений

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

образует *линейную систему уравнений* с двумя неизвестными. Пара чисел x_0, y_0, удовлетворяющих каждому уравнению системы, называется ее *решением*.

Прежде чем решать такую систему в общем виде, вспомним приемы решения линейных систем с числовыми коэффициентами.

§ 13. Способ алгебраического сложения.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} 5x+2y=14, \\ 3x-4y=24. \end{cases}$$

Умножив обе части первого уравнения на 2, получим систему

$$\begin{cases} 10x+4y=28, \\ 3x-4y=24, \end{cases}$$

равносильную данной. Сложив почленно уравнения этой системы, получим $13x=52$, откуда $x=4$.

Подставляем найденное значение x в первое уравнение и находим $y=-3$.

Итак, система имеет единственное решение $x=4$; $y=-3$.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} 7a+3b=8, \\ 5a+2b=5{,}5. \end{cases}$$

Умножив обе части первого уравнения на 2, а второго на —3, получим систему

$$\begin{cases} 14a+6b=16, \\ -15a-6b=-16{,}5, \end{cases}$$

равносильную данной. Сложив почленно уравнения этой системы, получим $-a=-0{,}5$, откуда $a=0{,}5$. Далее, подставляя найденное значение a в одно из уравнений системы, находим $b=1{,}5$.

Из приведенных примеров видно, что всегда можно уравнения данной системы преобразовать так, чтобы коэффициенты при одном из неизвестных отличались лишь знаком, тогда почленным сложением данных уравнений получаем уравнение с одним неизвестным.

§ 14. Способ подстановки. Часто употребляется такой прием решения системы: из одного уравнения выражаем одно неизвестное через другое и подставляем во второе уравнение системы, что приводит к уравнению с одним неизвестным. Такой прием решения системы получил название *способа подстановки*.

Пример 1.

$$\begin{cases} 5x+2y=14, \\ 3x-4y=24. \end{cases}$$

Из первого уравнения выражаем y через x:

$$y=7-\frac{5}{2}x. \qquad (1)$$

Подставляем во второе уравнение системы вместо y выражение $7-\frac{5}{2}x$:

$$3x-4\left(7-\frac{5}{2}x\right)=24.$$

Отсюда $x=4$, а потому из равенства (1) получаем $y=-3$.

Способом подстановки предпочитают решать системы с буквенными коэффициентами.

Пример 2.

$$\begin{cases} ax+y=c, \\ x+by=m \end{cases}$$

(все коэффициенты отличны от нуля и $ab\neq 1$).

Из первого уравнения находим $y=c-ax$. Замена во втором уравнении неизвестного y на $c-ax$ приводит к уравнению с одним неизвестным

$$x+b(c-ax)=m,$$

откуда $x=\frac{m-bc}{1-ab}$.

Знная значение x, из равенства $y=c-ax$ легко найти y.

§ 15. Решение линейной системы при помощи определителей. Пусть дана линейная система с буквенными коэффициентами

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \qquad (b_1\neq 0), \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

Требуется найти ее решение.

Из первого уравнения выражаем y через x:

$$y=\frac{c_1-a_1x}{b_1}. \tag{1}$$

Это значение y подставляем во второе уравнение:

$$a_2x+b_2\frac{c_1-a_1x}{b_1}=c_2.$$

Получим уравнение с одним неизвестным (x), которое приводится к виду

$$a_2b_1x-a_1b_2x=b_1c_2-b_2c_1$$

или

$$(a_2b_1-a_1b_2)\,x=b_1c_2-b_2c_1. \tag{2}$$

Если коэффициент при x, т. е. выражение $a_2b_1-a_1b_2$, отличен от 0, то можно обе части равенства (2) разделить на него; получим:

$$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_2b_1-a_1b_2}=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}. \tag{3}$$

После подстановки в равенство (1) на место x его значения из равенства (3) находим:

$$y=\frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_2b_1-a_1b_2}=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \tag{4}$$

Данная система имеет единственное решение, если $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, причем значения неизвестных вычисляются по формулам (3) и (4).

Обратим внимание на то, что знаменатели дробей, представляющих значения неизвестных, одинаковы. Этот общий знаменатель равен $a_1b_2-a_2b_1$; он составлен только из коэффициентов при неизвестных x, y. Выпишем эти коэффициенты в том порядке, как были заданы уравнения системы, пропуская сами неизвестные, и расположим их в виде квадратной таблицы; получим:

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \tag{5}$$

Если перемножить коэффициенты, расположенные на диагоналях квадрата, и из произведения чисел, расположенных на диагонали, идущей из левого верхнего угла вниз, вычесть произведение чисел другой диагонали, то получим выражение $a_1b_2-a_2b_1$; оно называется *определителем* данной линейной системы уравнений и обозначается:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1. \tag{6}$$

Вообще для таблицы вида (5), составленной из произвольных четырех чисел (не обязательно являющихся коэффициентами системы), выражение, аналогичное (6), называется *определителем 2-го порядка.*

Заметим, что для запоминания правила вычисления определителя удобно следующее схематическое изображение его:

$$\begin{array}{c} + \qquad\quad - \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{array}$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}=3\cdot 8-4\,(-5)=44.$$

Числители дробей, определяющих значения неизвестных в равенствах (3) и (4), также представляют собой определители 2-го порядка:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1b_2-b_1c_2; \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1.$$

Определитель Δ_x получен из определителя системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

заменой чисел первого столбца свободными членами, а определитель Δ_y получен из определителя системы путем замены чисел второго столбца свободными членами.

Теперь можно сокращенно записать решение системы

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

в виде $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$; $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} 3x+5y=4, \\ 7x-3y=24. \end{cases}$$

Составляем определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}=3\cdot(-3)-5\cdot 7=-9-35=-44.$$

Он не равен нулю, а потому система имеет единственное решение. Вычисляем остальные два определителя:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 24 & -3 \end{vmatrix}=4\cdot(-3)-5\cdot 24=-132,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 24 \end{vmatrix}=3\cdot 24-4\cdot 7=44.$$

Теперь находим значения неизвестных

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-132}{-44}=3, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{44}{-44}=-1.$$

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=a+b, \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2a. \end{cases}$$

Составим определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a+b} & \dfrac{1}{a-b} \\ \dfrac{1}{a} & \dfrac{1}{b} \end{vmatrix}=\frac{1}{(a+b)b}-\frac{1}{(a-b)a}=\frac{a^2-b^2-2ab}{ab(a+b)(a-b)}.$$

Для существования Δ необходимо, чтобы знаменатель этой дроби не был равен нулю, т. е. чтобы $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $a \neq \pm b$; при этом $\Delta \neq 0$, если

$$a^2 - b^2 - 2ab \neq 0.$$

Вычислим определители Δ_x и Δ_y:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a+b & \frac{1}{a-b} \\ 2a & \frac{1}{b} \end{vmatrix} = \frac{a+b}{b} - \frac{2a}{a-b} = \frac{a^2-b^2-2ab}{b(a-b)},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & a+b \\ \frac{1}{a} & 2a \end{vmatrix} = \frac{2a}{a+b} - \frac{a+b}{a} = \frac{a^2-b^2-2ab}{a(a+b)}.$$

Находим значения неизвестных:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = a(a+b), \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = b(a-b).$$

Подстановкой найденных значений неизвестных в каждое уравнение данной системы убеждаемся в правильности решения; эту проверку можно произвести в уме.

§ 16. Линейная система, определитель которой равен нулю. Предположим, что определитель системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

равен нулю:

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = 0;$$

тогда $a_1b_2 = a_2b_1$, откуда $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, т. е. если определитель системы равен нулю, то коэффициенты при неизвестных пропорциональны.

Обратно: если коэффициенты при неизвестных пропорциональны, то определитель системы равен нулю. Действительно, из $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ следует, что $a_1b_2 = a_2b_1$ или

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0.$$

Допустим теперь, что хотя бы один из определителей Δ_x или Δ_y также равен нулю, Пусть $\Delta_x = 0$: $c_1b_2 - c_2b_1 = 0$, что влечет пропорцию: $\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Замечание. Мы предполагаем, что коэффициенты a_2, b_2 и c_2 не равны нулю. Иначе предыдущие рассуждения потеряли бы силу, так как на нуль делить нельзя. В случае равенства нулю каких-либо коэффициентов система упрощается. Например, из $a_2 = 0$ следует, что $a_1b_2 = a_2b_1 = 0$. Значит, либо $b_2 = 0$ (пропадает второе уравнение), либо $a_1 = 0$ (пропадают все члены, содержащие x).

Таким образом, из того, что $\Delta = 0$ и $\Delta_x = 0$, следует пропорциональность коэффициентов при одинаковых неизвестных и свободных членов:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \tag{1}$$

(т. е. Δ_y тоже равен нулю).

Обозначим величину каждого из трех равных отношений через k ($k \neq 0$):

$$\frac{a_1}{a_2} = k, \quad \frac{b_1}{b_2} = k, \quad \frac{c_1}{c_2} = k;$$

следовательно,

$$a_1 = ka_2, \quad b_1 = kb_2, \quad c_1 = kc_2. \tag{2}$$

После замены коэффициентов первого уравнения их выражениями из равенств (2) система примет следующий вид:

$$\begin{cases} ka_2x + kb_2y = kc_2, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Если сократим все члены первого уравнения на множитель k, то окажется, что данная система состоит из двух одинаковых уравнений, т. е. одно уравнение есть следствие другого. Иными словами, мы имеем одно уравнение с двумя неизвестными. Как было отмечено ранее, одно уравнение с двумя неизвестными имеет бесчисленное множество решений. В этом случае говорят, что система *неопределенна*.

Пример.

$$\begin{cases} 4x + 6y = 3, \\ 6x + 9y = 4{,}5. \end{cases}$$

Имеем:

$$\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{3}{4,5} \quad \left(k=\frac{2}{3}\right).$$

Здесь коэффициенты при одинаковых неизвестных и свободные члены пропорциональны; если умножить обе части первого уравнения на $\frac{3}{2}$ $\left(\text{или второго уравнения на } \frac{2}{3}\right)$, то оно совпадает со вторым (с первым).

Система имеет те же решения, что и одно из уравнений данной системы.

Рассмотрим теперь случай, когда $\Delta=0$, но $\Delta_x\neq 0$ (тогда и $\Delta_y\neq 0$). Из обращения в нуль определителя системы следует $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$. Если $\Delta_x\neq 0$, то $\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$. По-прежнему обозначим каждое из двух отношений $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ через k $(k\neq 0)$, тогда $a_1=ka_2$, $b_1=kb_2$. Отношение $\frac{c_1}{c_2}$ обозначим через m, где $m\neq k$. Тогда $c_1=mc_2$.

В первом уравнении системы заменим коэффициенты a_1 на ka_2, b_1 на kb_2 и свободный член c_1 на mc_2. Система примет вид

$$\begin{cases} (a_2x+b_2y)\,k=c_2m \quad (k\neq m), \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

Умножая второе уравнение на k, имеем

$$(a_2x+b_2y)\,k=c_2k.$$

Тогда у нас получается, что $c_2m=c_2k$, т. е. $m=k$ (делить на c_2 можно, так как мы предположили, что $c_2\neq 0$). Но на самом деле $m\neq k$. Из полученного противоречия следует, что система не имеет решения.

В данном случае говорят, что система уравнений *несовместна* или *противоречива*.

Пример.

$$\begin{cases} 2x-3y=4, \\ 4x-6y=5. \end{cases}$$

Коэффициенты при неизвестных пропорциональны:

$$\frac{2}{4}=\frac{-3}{-6}\left(=\frac{1}{2}\right).$$

Свободные члены не пропорциональны коэффициентам:

$$\frac{2}{4} \neq \frac{4}{5}.$$

Левая часть второго уравнения получена из левой части первого умножением ее на 2, а правая часть получена из правой части первого уравнения умножением ее на $\frac{5}{4}$. Система несовместима и решений не имеет.

Примечание. Если, не задумываясь над структурой данной системы, решать ее, например, способом алгебраического сложения, то придем к нелепому результату: $0=3$, так как оба неизвестных исключаются сразу.

Подведем итог тому, что было сказано о решении линейной системы

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

а) Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то система определенна, т. е. имеет единственное решение.

б) Если $\Delta=0$ и $\Delta_x=0$, то система неопределенна, т. е. имеет бесчисленное множество решений.

в) Если $\Delta=0$, а $\Delta_x \neq 0$, то система противоречива и решений не имеет.

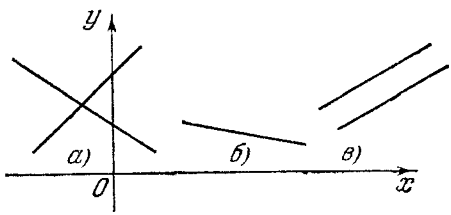

Рис. 3.

Можно дать геометрическое истолкование каждому из трех рассмотренных случаев, исходя из того, что в прямоугольной системе координат всякому уравнению первой степени с двумя неизвестными (лучше сказать, с двумя переменными) соответствует прямая.

а) Если $\Delta \neq 0$, то две прямые, изображаемые уравнениями системы, пересекаются в одной точке; координаты точки пересечения и представляют собой решение системы.

б) Если $\Delta=0$, $\Delta_x=0$, то соответствующие уравнениям две прямые сливаются в одну общую прямую; поскольку у них бесчисленное множество общих точек, то, стало быть, и система имеет бесчисленное множество решений.

в) Если $\Delta=0$, $\Delta_x \neq 0$, то прямые, соответствующие уравнениям системы, параллельны, т. е. не имеют ни одной общей точки, а потому система не имеет решений.

На рис. 3 изображены эти три возможных случая.

§ 17. Особые случаи линейных систем. До сих пор рассматривались линейные системы уравнений, в которых число неизвестных было равно числу уравнений, входящих в систему. Однако в приложениях математики к другим наукам бывают случаи, когда уравнений, входящих в систему, больше, чем неизвестных (такие системы называют *переопределенными*), или, наоборот, число неизвестных превышает число уравнений системы. Приемы решения таких систем рассмотрим на ряде примеров.

Пример 1.

$$\begin{cases} x-y=1, \\ 3x-2y=5, \\ 5x-3y=9. \end{cases}$$

Сначала решаем систему, составленную из первых двух уравнений,

$$\begin{cases} x-y=1, \\ 3x-2y=5; \end{cases}$$

находим $x=3$; $y=2$. Эти значения неизвестных подставляем в третье уравнение и убеждаемся в том, что получается тождество $9=9$. Следовательно, данная система имеет единственное решение.

Пример 2.

$$\begin{cases} x+2y=7, \\ 3x-y=14, \\ 2x+y=12. \end{cases}$$

Эта система уравнений не имеет решений, так как, решая систему

$$\begin{cases} x+2y=7, \\ 3x-y=14, \end{cases}$$

находим $x=5$, $y=1$, но эти значения неизвестных не удовлетворяют третьему уравнению $2x+y=12$.

Пример 3. Какова должна быть зависимость между a и b, чтобы система уравнений

$$\begin{cases} x+y=3, \\ 5x-3y=7, \\ ax+by=5b \end{cases}$$

имела единственное решение?

Решаем сначала систему

$$\begin{cases} x+y=3, \\ 5x-3y=7 \end{cases}$$

и находим $x=2$, $y=1$.

Подстановка этих значений неизвестных в третье уравнение дает:

$$2a+b=5b \quad \text{или} \quad a=2b.$$

Теперь рассмотрим *однородную* систему, т. е. такую систему, у которой свободный член каждого из уравнений равен нулю.

Пример 4.

$$\begin{cases} 2x-y-5z=0, \\ 3x+2y-11z=0. \end{cases}$$

Очевидно, что всякая однородная система (не обязательно линейная) имеет нулевое решение: $x=y=z=0$. Теперь будем искать решения, отличные от нулевого решения.

Предположим, что $z\neq 0$. Тогда можно разделить на z все члены уравнений; получим систему

$$\begin{cases} 2\frac{x}{z}-\frac{y}{z}=5, \\ 3\frac{x}{z}+2\frac{y}{z}=11. \end{cases}$$

Полагая

$$\frac{x}{z}=u, \quad \frac{y}{z}=t,$$

имеем:

$$\begin{cases} 2u-t=5, \\ 3u+2t=11, \end{cases}$$

откуда $u=3$, $t=1$.

Далее,

$$\frac{x}{z}=3, \quad \frac{y}{z}=1,$$

или

$$x=3z, \quad y=z,$$

где z может принимать любое значение. Например, при $z=2$ имеем решение

$$x=6; \quad y=z=2.$$

Таким образом, данная линейная система имеет бесчисленное множество решений, получаемых из равенств

$$x=3z, \quad y=z,$$

если неизвестному z приписать любое значение. В частном случае при $z=0$ имеем нулевое решение.

Пример 5.

$$\begin{cases} x-\ y+3z=0, \\ 2x-2y-5z=0. \end{cases}$$

При отыскании решений, отличных от нулевого, здесь нельзя предположить, что $z \neq 0$, так как после деления на z и введения вспомогательных неизвестных получим систему

$$\begin{cases} u-\ t=-3, \\ 2u-2t=\ \ 5, \end{cases}$$

которая противоречива и решений не имеет. В таком случае будем делить на x (или на y), считая $x \neq 0$, что в новых $\left(\frac{y}{x}=u,\ \frac{z}{x}=t\right)$ неизвестных дает систему

$$\begin{cases} -\ u+3t=-1, \\ -2u-5t=-2. \end{cases}$$

Решая ее, находим:

$$u=1, \quad t=0 \quad \text{или} \quad \frac{y}{x}=1, \quad \frac{z}{x}=0.$$

По предположению, $x \neq 0$, а потому $z=0$ и $y=x$.

Данная однородная система имеет бесчисленное множество решений, отличных от нулевого. Каждое решение есть тройка чисел, в которой первые два числа одинаковы, а третье число есть 0; например, (3; 3; 0) или (—5; —5; 0) и т. д.

Пример 6.

$$\begin{cases} x+2y-\ \ z=0, \\ 2x+4y-2z=0. \end{cases}$$

Сразу видно, что второе уравнение есть следствие первого, так как после деления на 2 всех членов второго уравнения получится система из двух одинаковых уравнений

$$x+2y-z=0, \quad \text{или} \quad x=z-2y. \qquad (1)$$

Два неизвестных y и z могут принимать какие угодно значения; значения x определяются по данным значениям y и z из формулы (1).

§ 18. Примеры решения систем уравнений с буквенными коэффициентами.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{a}{b-c}, \\ \dfrac{x+c}{y+b}=\dfrac{a+b}{a+c}. \end{cases}$$

Из первого уравнения по свойству производных пропорций *) $\left(\text{если } \dfrac{m}{n}=\dfrac{p}{q}, \text{ то } \dfrac{m+n}{m-n}=\dfrac{p+q}{p-q}\right)$ находим $\dfrac{2x}{2y}=\dfrac{a+b-c}{a+c-b}$, откуда

$$x=\frac{a+b-c}{a+c-b}y. \qquad (1)$$

Подстановка значения x во второе уравнение системы дает:

$$\frac{\dfrac{(a+b-c)\,y}{a+c-b}+c}{y+b}=\frac{a+b}{a+c},$$

---

*) Если имеет место пропорция $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, то

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \text{ и } \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1, \quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \text{ и } \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$$

Поделив почленно два последних равенства, получим:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

откуда

$$(a+b)(y+b)=\frac{(a+c)(a+b-c)y}{a+c-b}+c(a+c),$$

$$(a+b)y-\frac{(a+c)(a+b-c)y}{a+c-b}=c(a+c)-b(a+b),$$

$$y\frac{(a+b)(a+c-b)-(a+c)(a+b-c)}{a+c-b}=c(a+c)-b(a+b),$$

$$y\frac{(a+b)(a+c)-b(a+b)-(a+c)(a+b)+c(a+c)}{a+c-b}=$$

$$=c(a+c)-b(a+b).$$

Сокращая обе части уравнения на $c(a+c)-b(a+b)$, получим:

$$\frac{y}{a+c-b}=1, \quad y=a+c-b.$$

Подстановка найденного значения y в равенство (1) дает $x=a+b-c$.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=0, \\ ax+\ by+\ cz=0, \\ bcx+acy+abz=1. \end{cases} \tag{2}$$

Из первого уравнения имеем:

$$z=-(x+y);$$

подставляем это значение z во второе и третье уравнения системы (2), что приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} ax+\ by-\ c(x+y)=0, \\ bcx+acy-ab(x+y)=1. \end{cases} \tag{3}$$

Из первого уравнения системы (3) следует:

$$(a-c)x=(c-b)y;$$

при $a-c\neq 0$ имеем:

$$x=\frac{c-b}{a-c}y. \tag{4}$$

После подстановки найденного выражения x во второе уравнение системы (3) получим уравнение с одним неизвестным:

$$\frac{(bc-ab)(c-b)}{a-c}y+(ac-ab)y=1,$$

или

$$-b(c-b)\,y+a(c-b)\,y=1,$$

$$(c-b)(a-b)\,y=1; \quad y=\frac{1}{(a-b)(c-b)}.$$

Из равенства (4) находим:

$$x=\frac{c-b}{a-c}\,\frac{1}{(a-b)(c-b)}=\frac{1}{(a-b)(a-c)},$$

затем

$$z=-(x+y)=\frac{1}{(a-c)(b-c)}.$$

Упражнения

1. Решить уравнения:

1) $\dfrac{1}{2x-3}-\dfrac{3}{x(2x-3)}=\dfrac{5}{x}.$

2) $\dfrac{x-1}{x-2}+\dfrac{x-6}{x-7}=\dfrac{x-5}{x-6}+\dfrac{x-2}{x-3}.$

3) $\dfrac{2x+a}{b}+\dfrac{x-b}{a}=\dfrac{3ax+(a-b)^2}{ab}.$

2. Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} 7x-3y-8=0, \\ 4x+9y+24=0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x+5y=0, \\ 3x-y=0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x:y=3:4, \\ (x-1):(y+2)=1:2. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x+\dfrac{9}{y}=21, \\ \dfrac{18}{y}=17-3x. \end{cases}$

Указание. $\dfrac{1}{y}=z.$

5) $\begin{cases} \dfrac{5x}{0,7}+\dfrac{0,3}{y}=6, \\ \dfrac{10x}{7}+\dfrac{9}{y}=31. \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{5}{2x+y}+\dfrac{4}{2x-3y}=5, \\ \dfrac{15}{2x+y}+\dfrac{2}{2x-3y}=5. \end{cases}$

Указание. $\dfrac{1}{2x+y}=z, \quad \dfrac{1}{2x-3y}=t.$

7) $\begin{cases} mx-2y=3, \\ 3x+my=4. \end{cases}$

8) $\begin{cases} 4x+my-9=0, \\ 2mx+18y+27=0. \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=2a, \\ x-y=4ab. \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{x}{x-a}+\dfrac{y}{y-b}=2, \\ ax+by=2ab. \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}-1=0, \\ \dfrac{x}{b}-\dfrac{y}{a}-1=0. \end{cases}$

12) $\begin{cases} (a+b)\,x-(a-b)\,y=4ab, \\ \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=2. \end{cases}$

13) $\begin{cases} (a^2+b^2)\,x+(a^2-b^2)\,y=a^2, \\ (a+b)\,x+(a-b)\,y=a. \end{cases}$

14) $\begin{cases} \dfrac{x}{m}=\dfrac{y}{n}=\dfrac{z}{p}, \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases}$

Указание. $\dfrac{x}{m}=t$; $x=mt$, $y=nt$; $z=pt$.

15) $\begin{cases} \dfrac{x-a}{m}=\dfrac{y-b}{n}=\dfrac{z-c}{p}, \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases}$

Указание. Ввести вспомогательное неизвестное t, полагая $\dfrac{x-a}{m}=t$.

16) $\begin{cases} |x+1|+|y-1|=5, \\ |x+1|-4y=-4. \end{cases}$

3. При каких значениях параметра k линейная система уравнений

$$\begin{cases} 3x+ky=5+k, \\ 2x+5y=8 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

4. При каком значении параметра k система

$$\begin{cases} (1+2k)\,x+5y=7, \\ (2+k)\,x+4y=8 \end{cases}$$

не имеет решения?

5. При каком значении параметра k система

$$\begin{cases} (2k-1)\,x+ky=6, \\ 7{,}5x+4y=3 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений? Найти хотя бы одно из этих решений.

ГЛАВА III

НЕРАВЕНСТВА

§ 19. Основные понятия и определения.

Определение 1. Два числа или два алгебраических выражения, соединенные между собой знаком $<$ («меньше»), или знаком $>$ («больше»), или знаком $\neq$ (не равно), образуют *неравенство*.

Примеры. 1) $3 > -5$; 2) $a < 1 + a^2$; 3) $3 \neq 2$.

Определение 2. Два неравенства вида $a < b$, $c < d$ или $a > b$, $c > d$ называются неравенствами *одинакового смысла;* например, $3 > 2$ и $7 > -20$.

Два неравенства вида $a > b$ и $c < d$ называются неравенствами *противоположного смысла;* например, $4 < 5$ и $0 > -3$. Иногда к знакам $>$ или $<$ присоединяется и знак равенства, например, $a \geqslant 0$ (читается: «число a неотрицательно») или $b \leqslant 0$ («число b неположительно»). Такие неравенства называются *нестрогими*, в отличие от *строгих* неравенств $a > b$ или $c < d$.

§ 20. Свойства неравенств.

1) *Если* $a > b$, *то* $b < a$.

2) *Если* $a > b$ *и* $b > c$, *то* $a > c$.

3) *Два неравенства вида:* (1) $a < b$ *и* $b < c$ *или* (2) $a > b$ *и* $b > c$ *могут быть объединены в двойное неравенство:*

$$(1)\ a < b < c \text{ и } (2)\ a > b > c.$$

Пример. Если a — приближенное значение величины x, Δa — граница абсолютной погрешности приближенного числа a, то истинное значение величины $x < a + \Delta a$, но $x > a - \Delta a$, и можно написать двойное неравенство: $a - \Delta a < x < a + \Delta a$.

4) *Если* $a > b$ *и* m *— любое число, то*

$$a+m > b+m.$$

К обеим частям неравенства можно прибавить (или от обеих частей отнять) одно и то же число, в результате получается неравенство того же смысла.

Пример. $5 > 3$; прибавим к обеим частям по 4, получим $9 > 7$.

5) *Если* $a > b$ *и* m *— положительное число, то*

$$am > bm.$$

Обе части неравенства можно умножить на одно и то же положительное число, от чего смысл неравенства не изменится.

При умножении обеих частей неравенства на отрицательное число $m (m < 0)$ смысл неравенства меняется на противоположный, т. е. *если* $a > b$ *и* $m < 0$, *то*

$$am < bm.$$

Пример. $3 > -1$ умножаем на -4; получим $-12 < 4$. То же самое можно сказать и о делении обеих частей неравенства на число $m (m \neq 0)$, поскольку деление сводится к умножению на $\frac{1}{m}$.

§ 21. Действия над неравенствами.

1. Сложение. *Два или несколько неравенств одинакового смысла можно почленно складывать; в результате получается неравенство того же смысла:*

$$\begin{array}{c} a > b, \\ c > d, \\ m > n, \\ \hline a+c+m > b+d+n. \end{array}$$

2. Вычитание. *Неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать; в результате получаем неравенство того же смысла, что и неравенство-уменьшаемое.*

Если $a > b$ и $c < d$ и из первого неравенства вычитаем второе, то

$$a-c > b-d.$$

Пример.

$$\begin{array}{r} -3>-7 \\ 4<\ \ 5 \\ \hline -3-4>-7-5, \end{array}$$

или $-7>-12$.

3. Умножение. *Два или несколько неравенств одинакового смысла можно почленно перемножить между собой, если все их части положительны; в результате получим неравенство того же смысла.*

Если

$$\begin{array}{l} a<b \\ c<d \quad (a>0,\ c>0), \\ \hline \text{то } ac<bd. \end{array}$$

Пример.

$$\begin{array}{r} 3<5 \\ 4<6 \\ \hline 12<30. \end{array}$$

4. Деление. *Два неравенства противоположного смысла можно почленно делить одно на другое, если все части неравенства — положительные числа; в результате получим неравенство того же смысла, что и неравенство-делимое*, т. е. то неравенство, которое делим на другое:

$$\begin{array}{l} a>b \\ c<d \quad (b>0,\ c>0) \\ \hline \frac{a}{c}>\frac{b}{d}. \end{array}$$

Пример.

$$\begin{array}{r} 4>3 \\ 1<2 \\ \hline \frac{4}{1}>\frac{3}{2}. \end{array}$$

§ 22. Решение неравенств первой степени с одним неизвестным.

Определение 1. Неравенство вида

$$ax+b>a_1x+b_1 \quad \text{или} \quad ax+b<a_1x+b_1$$

называется *неравенством первой степени с одним неизвестным.* Таковыми будут, например, неравенства

1) $\frac{3x}{2}-5>\frac{2x}{5}+2$, 2) $4-5x<x+22$.

Решением неравенства называется всякое значение x, которое удовлетворяет данному неравенству.

Например, число 2 является решением неравенства $4-5x < x+22$, так как $4-5\cdot 2 < 2+22$, $-6 < 24$.

Определение 2. *Решить неравенство* — это значит найти все значения неизвестного, удовлетворяющие данному неравенству. Отыскание решения всякого неравенства первой степени с одним неизвестным приводит к простейшим неравенствам вида

1) $x > a$, 2) $x < b$.

В первом случае говорят, что число a есть *нижняя граница* значений неизвестного. Это значит, что любое

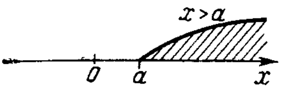

Рис. 4.

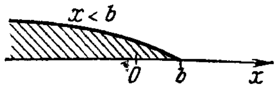

Рис. 5.

число, бо́льшее числа a, является решением данного неравенства. Если на числовой оси построим точку, соответствующую числу a, то значения неизвестного x, удовлетворяющие неравенству $x > a$, изображаются точками, лежащими правее точки $x=a$ (на рис. 4 заштриховано).

В простейшем неравенстве $x < b$ число b называется *верхней границей* неизвестного, что означает: любое число, меньшее числа b, является решением этого неравенства. Графически неравенство $x < b$ иллюстрируется следующим образом: на числовой оси отмечается точка, соответствующая числу b; тогда любая точка, расположенная левее точки b, изображает число, удовлетворяющее данному неравенству (рис. 5).

Неравенства первой степени с одним неизвестным решаются по той же схеме, как и уравнения первой степени. Поясним на примерах.

Пример.

$$\frac{2x-5}{3}-1 > 3-x.$$

Умножаем обе части неравенства на $3 > 0$, чтобы освободиться от дробей:

$$2x-5-3 > 9-3x.$$

Перенесем член с неизвестным из правой части в левую, а свободный член из левой в правую, изменяя у переносимых членов знаки на противоположные:

$$2x+3x>9+8;\ 5x>17.$$

Разделив обе части на $5>0$, получим $x>3{,}4$. Число 3,4—нижняя граница значений неизвестного x.

§ 23. Отрезок. Промежуток. Пусть a и b—два числа, причем $a<b$. К числам a и b приобщим все промежуточные числа, заключенные между ними. Тогда образуется *замкнутое* множество чисел x: $a\leqslant x\leqslant b$. Замкнутость состоит в том, что в этом множестве есть наименьшее число a и наибольшее число b.

Определение 1. Множество всех чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a\leqslant x\leqslant b$, называется *отрезком* (или *сегментом*).

Принято отрезок обозначать $[a, b]$; например, пишут $[0, 2]$ вместо $0\leqslant x\leqslant 2$. Само название—отрезок—указывает на то, что этому числовому множеству соответствует множество точек числовой оси, сплошь заполняющих отрезок с концами в точках $x=a$ и $x=b$.

Удалим крайние (концевые) точки отрезка $[a, b]$, тогда получим открытое множество чисел x: $a<x<b$; в этом множестве нет наименьшего числа и нет наибольшего числа, в силу чего оно и называется *открытым*.

Определение 2. Множество всех чисел x, удовлетворяющих двойному неравенству $a<x<b$, называется *промежутком* (или *интервалом*).

Обозначается промежуток символом (a, b); например, $(1, 5)$ означает $1<x<5$.

Если имеет место $a\leqslant x<b$, то говорят, что x принадлежит полуинтервалу $[a, b)$; если же имеет место $a<x\leqslant b$, то говорят, что x принадлежит полуинтервалу $(a, b]$.

§ 24. Решение систем неравенств первой степени. Определение. Два неравенства вида

$$\begin{cases} ax+b>0, \\ a_1x+b_1<0 \end{cases} \quad\text{или}\quad \begin{cases} ax+b>0, \\ a_1x+b_1>0, \end{cases}$$

относительно которых ставится вопрос об отыскании их общих решений, образуют *систему неравенств первой степени с одним неизвестным.*

Общий прием решения системы двух неравенств заключается в следующем: находим решения каждого неравенства в отдельности и из сопоставления их устанавливаем, какие решения являются общими для обоих неравенств; если общих решений нет, то система несовместна, или противоречива. Выбор общих решений облегчается, если решения каждого неравенства изображать на числовой оси.

Пример 1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2x-3>0, \\ 5x+4>0. \end{cases}$$

1) $2x-3>0,\ x>\frac{3}{2}$; 2) $5x+4>0,\ x>-\frac{4}{5}$.

Для первого неравенства число $\frac{3}{2}$ является нижней границей значений неизвестного. Строим эту точку и покрываем штриховкой сверху часть числовой оси, которая расположена правее точки, соответствующей числу $\frac{3}{2}$ (рис. 6). Аналогично штрихуем снизу числовую ось, начиная от точки $-\frac{4}{5}$ вправо, так как число $-\frac{4}{5}$ является нижней границей значений неизвестного для второго неравенства. Там, где ось окажется заштрихованной как сверху, так и снизу, находятся общие решения. В данном случае общими решениями будут любые числа, бо́льшие $\frac{3}{2}$:

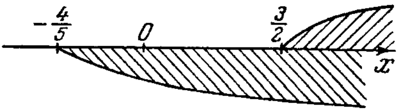

Рис. 6.

$$x>\frac{3}{2}.$$

Пример 2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{7-x}{2}-3<\frac{3+4x}{5}-4, \\ \frac{5}{3}x+5(4-x)>2(4-x). \end{cases}$$

Приведем каждое неравенство к простейшему виду, для чего освободимся от дробей, раскроем скобки, перенесем все члены в левую часть и приведем подобные члены; получим:

$$\begin{cases} -13x+39<0, \\ -4x+36>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -x+3<0, \\ -x+9>0. \end{cases}$$

Решая первое из них, находим $x>3$; из второго находим, что $x<9$.

Оба неравенства удовлетворяются одновременно значениями x, взятыми из промежутка $3<x<9$ (рис. 7).

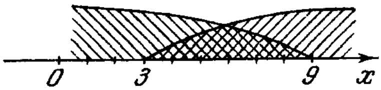

Рис. 7.

Пример 3. Решить неравенство $\frac{x+2}{3-x}>2$.

Имеем $\frac{x+2}{3-x}-2>0$, приводим к общему знаменателю:

$$\frac{x+2-2(3-x)}{3-x}>0, \quad \frac{3x-4}{3-x}>0.$$

Дробь положительна, если знаки у числителя и знаменателя одинаковы, поэтому либо

$$\begin{cases} 3x-4>0, \\ 3-x>0, \end{cases} \qquad (1)$$

либо

$$\begin{cases} 3x-4<0, \\ 3-x<0. \end{cases} \qquad (2)$$

Решая систему (1), находим, что первому неравенству удовлетворяют значения $x>{}^4/_3$, второму — значения $x<3$. Оба неравенства удовлетворяются одновременно, если ${}^4/_3<x<3$.

Система (2) несовместна, т. е. решений не имеет, так как из первого неравенства этой системы следует, что $x<{}^4/_3$, а из второго $x>3$. Всякое число, которое больше 3, не может в то же время оказаться меньше ${}^4/_3$.

§ 25. Неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля. Абсолютную величину действительного числа x, т. е. $|x|$, можно геометрически истолковать как расстояние от точки, изображающей число x, до начала 0 числовой оси. Например, если $|x|=3$, то на числовой оси имеются только две точки: $x_1=-3$ и $x_2=+3$, которые удалены от начала 0 на расстояние, равное трем единицам масштаба.

Простейшее неравенство $|x| < 3$ означает, что ищутся такие значения неизвестного x, которым соответствуют точки, отстоящие от начала 0 меньше чем на три единицы длины (по выбранному масштабу). Ясно, что все такие точки принадлежат промежутку $(-3, 3)$ (рис. 8).

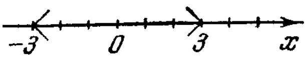

Рис. 8.

Любое число из этого промежутка есть решение неравенства $|x| < 3$. Все решения записываются в виде двойного неравенства

$$-3 < x < 3.$$

Неравенство $|x| \leqslant 3$ отличается от предыдущего неравенства $|x| < 3$ только тем, что добавляется два новых решения $x = \pm 3$; все решения образуют отрезок $[-3, 3]$ или $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

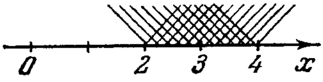

Рис. 9.

Пример 1. Решить неравенство

$$|x-3| < 1.$$

Геометрический способ решения. От точки $x = 3$ отложим единицу масштаба влево, потом вправо; получим две точки: 2 и 4. Любая промежуточная между ними точка удовлетворяет данному неравенству (рис. 9), т. е.

$$2 < x < 4.$$

Алгебраический способ решения. Опускаем знак абсолютной величины и пишем двойное неравенство

$$-1 < x-3 < 1;$$

прибавляем ко всем трем частям неравенства число 3:

$$-1+3 < x-3+3 < 1+3, \quad \text{или} \quad 2 < x < 4.$$

Пример 2. $|2x+3| < 5$. Данное неравенство равносильно двойному неравенству $-5 < 2x+3 < 5$. Прибавим ко всем частям неравенства число -3, получим $-8 < 2x < 2$, разделим все части на 2: $-4 < x < 1$.

Решим этот пример иначе. Имеем:

$$2\left|x+\frac{3}{2}\right| < 5;$$

делим обе части на 2:

$$\left|x+\frac{3}{2}\right|<\frac{5}{2}, \quad \text{или} \quad \left|x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right|<\frac{5}{2};$$

от точки $x=-\frac{3}{2}$ числовой оси откладываем $\frac{5}{2}$ единицы масштаба влево и вправо; получим точки -4 и 1. Теперь ясно, что $-4<x<1$.

Пример 3. $|2x-3|>7$.

При отыскании решения данного неравенства надо рассмотреть два случая:

а) $2x-3>0$, тогда $|2x-3|=2x-3$, $2x-3>7$, $x>5$;

б) $2x-3<0$, тогда $|2x-3|=-(2x-3)$ (абсолютная величина отрицательного числа равна этому числу с противоположным знаком); решаем неравенство

$$-(2x-3)>7;$$
$$2x-3<-7,$$
$$x<-2.$$

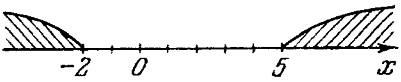

Рис. 10.

Таким образом, любое число, которое больше 5, а также всякое число, меньшее числа -2, являются решениями неравенства $|2x-3|>7$ (рис. 10).

Решим этот пример иначе. Представим его левую часть в форме

$$2\left|x-\frac{3}{2}\right|>7, \quad \text{или} \quad \left|x-\frac{3}{2}\right|>\frac{7}{2}.$$

От точки числовой оси, соответствующей числу $^3/_2$, отложим влево и вправо $^7/_2$ единиц, получим точки -2 и 5. Этим построением выделяется отрезок $[-2;\ 5]$; все числа, не принадлежащие этому отрезку, являются решениями данного неравенства; это будут числа, меньшие -2 и бо́льшие 5: $x<-2$ или $x>5$.

§ 26. Понятие о доказательстве неравенств. Неравенство, справедливое при всех значениях букв, входящих в него (быть может, с некоторыми ограничениями), называется *тождественным* неравенством. Относительно такого неравенства ставится вопрос не о решении его, а о доказательстве.

В чем заключается доказательство и как оно проводится, поясним на примерах.

Пример 1. Доказать, что среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического, т. е. что

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Предположим, что данное неравенство справедливо; тогда после возведения обеих частей в квадрат получим неравенство того же смысла (большему положительному числу соответствует больший квадрат)

$$\frac{(a+b)^2}{4} \geqslant ab, \quad \text{или} \quad a^2+2ab+b^2 \geqslant 4ab;$$

$$a^2-2ab+b^2 \geqslant 0, \quad (a-b)^2 \geqslant 0.$$

Очевидно, что последнее неравенство является тождественным, так как квадрат любого действительного числа неотрицателен ($\geqslant 0$). Но это пока были поиски доказательства, а не само доказательство, так как когда мы данное неравенство начинали преобразовывать — возводить в квадрат обе части, прибавлять к обеим частям по одному и тому же члену и т. д., ставя между частями неравенства все время знак $\geqslant$ (читается «не меньше»), — то мы, в сущности говоря, уже признали, что левая часть неравенства не меньше правой, а тогда и доказывать нечего.

Если мы докажем, что произведенные операции обратимы, то этим будет доказано, что $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

Имеем:

$$(a-b)^2 \geqslant 0, \quad \text{или} \quad a^2+b^2 \geqslant 2ab.$$

Прибавим к обеим частям по $2ab$:

$$(a+b)^2 \geqslant 4ab; \quad \frac{(a+b)^2}{4} \geqslant ab.$$

Извлекаем из обеих частей квадратный корень и берем только арифметические значения корней, когда $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. Очевидно, знак равенства будет иметь место только при $a=b$.

Пример 2. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc.$$

Доказательство. Будем исходить из очевидных неравенств:

$$\left.\begin{array}{lll}(a-b)^2 \geqslant 0, & & a^2+b^2 \geqslant 2ab, \\ (a-c)^2 \geqslant 0, & \text{или} & a^2+c^2 \geqslant 2ac, \\ (b-c)^2 \geqslant 0 & & b^2+c^2 \geqslant 2bc.\end{array}\right\} \qquad (1)$$

Складывая неравенства (1), получим:

$$2(a^2+b^2+c^2) \geqslant 2(ab+ac+bc);$$

после деления на 2 имеем:

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc.$$

Пример 3. Доказать, что если $x+y+z=1$, где $x>0$, $y>0$, $z>0$, то

$$(1-x)(1-y)(1-z) \geqslant 8xyz.$$

Доказательство. За основу берем известные неравенства (пример 1)

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}, \quad \frac{x+z}{2} \geqslant \sqrt{xz}, \quad \frac{y+z}{2} \geqslant \sqrt{yz},$$

откуда

$$x+y \geqslant 2\sqrt{xy}, \quad x+z \geqslant 2\sqrt{xz}, \quad y+z \geqslant 2\sqrt{yz}.$$

Так как из условия следует, что $x+y=1-z$, $x+z=$ $=1-y$, $y+z=1-x$, то выписанные неравенства принимают вид

$$1-z \geqslant 2\sqrt{xy}, \quad 1-y \geqslant 2\sqrt{xz}, \quad 1-x \geqslant 2\sqrt{yz}.$$

После почленного перемножения этих трех неравенств получим: $(1-x)(1-y)(1-z) \geqslant 8xyz$.

§ 27. Графическое решение неравенств.

Пример 1. Решить графически неравенство

$$2x-5>0.$$

Левая часть неравенства, т. е. $2x-5$, есть линейная функция аргумента x; обозначим ее через y:

$$y=2x-5,$$

и построим ее график (рис. 11). Неравенство $2x-5>0$ означает, что ищутся такие значения аргумента x, при которых линейная функция положительна, т. е. ординаты прямой положительны, или точки графика лежат выше оси абсцисс. Этому требованию удовлетворяют

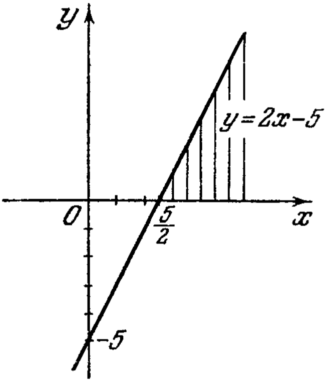

Рис. 11.

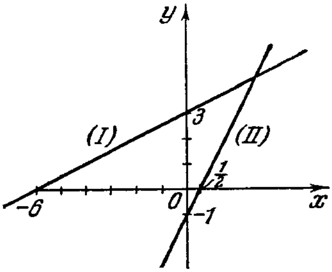

Рис. 12.

все точки, абсциссы которых больше $\frac{5}{2}$; другими словами, эти точки лежат правее точки пересечения графика с осью Ox.

Пример 2. Решить графически систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x+3>0, \\ 2x-1<0. \end{cases}$$

Построим графики двух линейных функций (рис. 12):

$$\text{(I)} \qquad y=\frac{1}{2}x+3$$

и

$$\text{(II)} \qquad y=2x-1.$$

Теперь нам надо указать все такие значения аргумента x, при которых одновременно ординаты первой прямой положительны, а второй прямой — отрицательны. Этому требованию удовлетворяют значения x, заключенные между -6 и $\frac{1}{2}$:

$$-6<x<\frac{1}{2}.$$

Упражнения

1. Решить неравенства:

1) $\frac{2x+1}{5}-\frac{2-x}{3}>1$;

2) $\frac{5x-1}{4}-\frac{3x-13}{10}>\frac{5x+1}{3}$;

3) $\frac{3x-1}{5}-\frac{x+1}{2}<1-\frac{x}{7}$;

4) $m(x-1)>x+2$;

5) $\frac{x}{k}+\frac{1-3x}{2}<\frac{x+2}{4k}\ (k<0)$;

6) $\frac{mx}{m-2}-\frac{x-1}{3}<\frac{2x+3}{4}\ (m\neq 2)$;

7) $|3x-5|<3$;

8) $|4-3x|<0{,}1$;

9) $|3-2x|>5$;

10) $|5x+3|>8$.

2. Решить неравенства и системы неравенств:

1) $\begin{cases} 2x-3>0, \\ 3x+2>0; \end{cases}$

2) $\frac{10-x}{x-6}<1$;

3) $\begin{cases} 0{,}4x+\frac{7}{3}<\frac{2}{3}x-1{,}2, \\ 5x+17>9x-63; \end{cases}$

4) $\frac{2x+1}{3-x}>1$.

3. При каких значениях a имеют место неравенства

$$1<\frac{3a+10}{a+7}<2?$$

4. При каких значениях m система уравнений

$$\begin{cases} 2x+7y=m, \\ 3x+5y=13 \end{cases}$$

имеет положительные решения?

5. При каких значениях числа a система уравнений

$$\begin{cases} 3x-6y=1, \\ 5x-ay=2 \end{cases}$$

имеет отрицательные решения?

6. Определить число m таким образом, чтобы корень уравнения $\frac{3}{x}=\frac{2m-1}{x+m}$ был больше 1.

7. При каких целых значениях n решение системы

$$\begin{cases} nx-\ \ y=5, \\ 2x+3ny=7 \end{cases}$$

удовлетворяет условию $x>0$ и $y<0$.

8. Доказать неравенство $\sqrt{ab}\geqslant\frac{2ab}{a+b}$ при $a>0,\ b>0$.

9. Доказать, что при любом действительном значении x имеет место неравенство $\frac{x^2}{1+x^4}\leqslant\frac{1}{2}$.

10. Доказать, что сумма двух положительных чисел не меньше 2, если их произведение равно 1.

ГЛАВА IV

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 28. Вводное замечание. В тексте этой главы часто упоминается слово «множество». Поясним смысл этого понятия на конкретных примерах.

1) Все учащиеся города Москвы образуют *множество* учащихся Москвы. Это множество состоит из конечного числа элементов; элементом множества является каждый отдельный учащийся города Москвы; всякий учащийся другого города или области не принадлежит этому множеству.

2) Все прямоугольники с площадью, равной одному квадратному метру, образуют множество прямоугольников данной площади 1 м^2; это множество бесконечно. Элементами множества являются отдельные прямоугольники, например прямоугольник со сторонами 2 м и $\frac{1}{2}$ м.

3) Все целые положительные числа образуют множество натуральных чисел: 1, 2, 3, 4, ... Это множество бесконечно.

В дальнейшем речь будет идти только о числовых множествах.

§ 29. Рациональные числа. Целые и дробные числа, как положительные, так и отрицательные, и число 0 образуют множество *рациональных* чисел. Всякое рациональное число можно рассматривать как отношение двух целых чисел: $r=\frac{m}{n}$ $(n \neq 0)$.

Пример.

$$3=\frac{3}{1}; \quad -4{,}5=-\frac{9}{2}.$$

Отметим, что рациональные числа можно представить в виде бесконечных периодических десятичных дробей:

$$\frac{1}{3}=0,333\ \ldots$$

$$\frac{2}{5}=0,4000\ \ldots\ =0,3999\ldots$$

$$-1\frac{2}{7}=-1,(285714).$$

Обратно: всякая бесконечная периодическая дробь есть рациональное число, так как ее можно обратить в обыкновенную дробь, например:

$$0,3666\ \ldots=\frac{36-3}{90}=\frac{33}{90}=\frac{11}{30}$$

(подробнее в гл. XVI, § 243).

Выполняя четыре арифметических действия над рациональными числами (кроме деления на 0), в результате получим также рациональные числа, т. е. эти действия не выводят нас из множества рациональных чисел и не требуют введения новых чисел.

Точно так же можно решать уравнения первой степени с одним неизвестным и системы уравнения первой степени с несколькими неизвестными; значения неизвестных всегда будут рациональными числами, если коэффициенты при неизвестных и свободные члены рациональны. Однако уже при решении простейших квадратных уравнений мы сталкиваемся с необходимостью расширения понятия числа. Например, уравнение $x^2-3=0$, или $x^2=3$, не имеет целого корня, так как нет такого целого числа, квадрат которого равен 3. Докажем, что корень этого уравнения не может быть и дробным числом.

Допустим противное: $x=\frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь. Тогда $\left(\frac{m}{n}\right)^2=3$, что невозможно, так как квадрат несократимой дроби есть также несократимая дробь, и она не может равняться целому числу (3). Следовательно, корень уравнения не является рациональным числом.

Чтобы можно было говорить о корнях подобных уравнений, необходимо ввести новые числа, так называемые *иррациональные* числа.

Без иррациональных чисел нельзя обойтись и в геометрии, когда ставится вопрос об измерении отрезков.

§ 30. Измерение отрезков. В этом параграфе будем опираться на следующее утверждение, известное под названием аксиомы Архимеда: *если AB и CD — два произвольных отрезка, причем $AB > CD$, то найдется такое целое положительное число n, что $CD \cdot n > AB$.* Другими словами, всегда можно отложить меньший отрезок CD на большем отрезке AB столько раз, чтобы получился отрезок AM, превосходящий по длине отрезок AB. На рис. 13 показано, что после того, как на

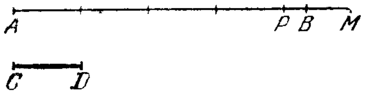

Рис. 13.

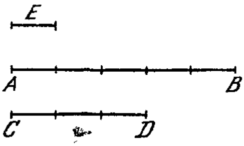

Рис. 14.

отрезке AB четыре раза отложили отрезок CD, получился остаток PB, меньший чем CD; откладывая пятый раз отрезок CD, получаем отрезок AM, бо́льший чем AB, что можно записать следующим образом:

$$CD \cdot 4 < AB < CD \cdot 5.$$

В данном случае число $n = 5$.

Определение 1. *Общей мерой* двух отрезков AB и CD называется такой третий отрезок E, который укладывается целое число раз в каждом из данных отрезков. На рис. 14 показано, что отрезок E укладывается в отрезке AB пять раз, в отрезке CD — три раза.

Определение 2. Два отрезка, имеющие общую меру, называются *соизмеримыми*.

Определение 3. *Отношением* двух соизмеримых отрезков называется отношение чисел, выражающих их длину принятой единицей длины E.

Таким образом, для отрезков из рис. 14

$$\frac{AB}{CD} = \frac{5}{3}.$$

Если общая мера E в некотором отрезке укладывается m раз, а в другом отрезке n раз, то их отношение равно рациональному числу $r = \frac{m}{n}$.

Справедливо и обратное утверждение: если отношение двух отрезков есть число рациональное, то такие два отрезка соизмеримы, т. е. имеют общую меру.

В самом деле, пусть $\frac{AB}{CD}=\frac{m}{n}$; тогда за общую меру можно принять отрезок, равный $\frac{1}{n}$-й части отрезка CD:

$$E=\frac{1}{n}CD.$$

Отсюда

$$CD=nE,\quad AB=mE,\quad \text{и}\quad \frac{AB}{CD}=\frac{mE}{nE}=\frac{m}{n}.$$

Определение 4. Два отрезка, не имеющие общей меры, называются *несоизмеримыми*.

Теорема. *Диагональ квадрата несоизмерима с его стороной.*

Доказательство проведем методом от противного. Допустим, что диагональ квадрата соизмерима с его стороной; тогда их отношение есть рациональное число: $\frac{d}{a}=r$, причем $1<r<2$, так как диагональ d больше стороны квадрата a, но меньше удвоенной стороны $2a$ (гипотенуза меньше суммы катетов); следовательно, число r есть неправильная дробь $\frac{m}{n}$, которую можно считать несократимой:

$$\frac{d}{a}=\frac{m}{n};\qquad d=\frac{m}{n}a.$$

По теореме Пифагора имеем: $d^2=2a^2$, $\left(\frac{m}{n}a\right)^2=2a^2$, или

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2=2,$$

что невозможно, так как квадрат несократимой дроби не может быть целым числом. Мы пришли к противоречию или абсурду, допустив соизмеримость диагонали квадрата с его стороной. Этим теорема доказана.

§ 31. Десятичное измерение отрезков. Убедившись в том, что существуют несоизмеримые отрезки, выясним, что следует подразумевать под отношением двух несоизмеримых отрезков или, другими словами, что принимается за длину отрезка, несоизмеримого с отрезком, принятым за единицу измерения.

Пусть AB и CD—два произвольных отрезка (рис. 15). Откладываем меньший отрезок CD на большем столько раз, пока не получится остаток PB, меньший отрезка CD.

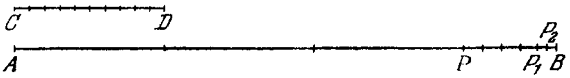

Рис. 15.

На рисунке изображен случай, когда такой момент наступит после трех откладываний. Делим CD на 10 равных частей и одну десятую часть его откладываем на остатке PB до тех пор, пока не получится новый остаток P_1B, меньший $\frac{1}{10}$ части отрезка CD. По нашему рисунку это произойдет после четырехкратного откладывания $\frac{1}{10}$ доли CD. Новый остаток P_1B измеряем $\frac{1}{100}$ частью отрезка CD, пока не получится остаток P_2B, меньший $\frac{1}{100}$ части CD, и т. д.

Возможны следующие три исхода только что описанного процесса измерения.

Случай 1. Измерение оканчивается на каком-то шаге; например, если $\frac{1}{100}$ часть отрезка CD содержится в остатке P_1B ровно шесть раз, то на этом измерение отрезка AB заканчивается и в результате получаем рациональное число 3,46.

Случай 2. Измерение продолжается неограниченно и в результате получается бесконечная периодическая десятичная дробь.

Случай 3. Измерение продолжается неограниченно и в процессе его получается бесконечная непериодическая десятичная дробь, например: 2,451451145111...

Первые два случая могут возникнуть только тогда, когда отрезки AB и CD соизмеримы, так как тогда их отношение представляет собой рациональное число.

Третий случай может иметь место только тогда, когда отрезок AB несоизмерим с отрезком CD. Получаемая в неограниченном процессе измерения бесконечная непериодическая десятичная дробь есть новое число, отличающееся от рационального числа, и оно называется *иррациональным* числом.

Определение 1. Всякая бесконечная непериодическая десятичная дробь называется *иррациональным* числом.

Простейшими примерами иррациональных чисел могут служить: 1) число $\sqrt{2}$, выражающее длину диагонали квадрата, если длина стороны квадрата принята за 1; 2) число $\sqrt{3}$, т. е. один из корней квадратного уравнения $x^2-3=0$, и вообще корень из любого положительного числа, не являющегося точной степенью корня, например $\sqrt[5]{7}$, $\sqrt[3]{2}$ и т. д.

Однако множество иррациональных чисел не исчерпывается этими корнями. Вот еще примеры иррациональных чисел:

1) число π, выражающее отношение длины любой окружности к своему диаметру; это также иррациональное число, но оно не может быть выражено через радикалы;

2) иррациональным будет также число x, удовлетворяющее соотношению $3^x=5$, и число $\sin 7°$.

Определение 2. Все рациональные и иррациональные числа образуют *множество действительных*, или *вещественных, чисел*.

Таким образом, фразу «x есть действительное число» надо понимать так: x есть или рациональное, или иррациональное число.

§ 32. Рациональные приближения действительных чисел. Предположим, что дано какое-нибудь иррациональное число α:

$$\alpha=0,345345534555\ldots$$

Сохраним у этой бесконечной непериодической дроби только первый десятичный знак, а остальные отбросим. Получим дробь 0,3, которую будем называть *рациональным приближением числа* α *с точностью до* 0,1 *по недостатку*; подобным же образом дробь 0,34 будем называть рациональным приближением числа α с точностью до 0,01 по недостатку; дробь 0,345 есть рациональное приближение числа α с точностью до 0,001 по недостатку и т. д.

Можно получить рациональные приближения того же числа α *по избытку* с точностью до 0,1, до 0,01, до

0,001 и т. д.; это будут дроби: 0,4; 0,35, 0,346 и т. д. Действительное число α больше любого его рационального приближения по недостатку, но меньше любого его рационального приближения по избытку.

Когда производятся арифметические действия над действительными числами, то обычно эти числа заменяют их рациональными приближениями, взятыми с определенной степенью точности, и производят указанные действия над полученными рациональными числами.

Определение 1. *Суммой двух действительных чисел* называется такое действительное число, которое больше суммы рациональных приближений слагаемых, взятых по недостатку с любой степенью точности, но меньше суммы рациональных приближений слагаемых, взятых по избытку с любой степенью точности.

Пример 1. Найти сумму $\frac{1}{3}+\sqrt{2}$ с точностью до 0,001.

Исходя из определения суммы, можно написать следующие неравенства:

$$0,3+1,4<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<0,4+1,5,$$

$$0,33+1,41<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<0,34+1,42,$$

$$0,333+1,414<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<0,334+1,415,$$

$$0,3333+1,4142<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<0,3334+1,4143,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Так как нам нужно вычислить сумму с точностью до 0,001, то приближенные значения слагаемых берем с четырьмя десятичными знаками и после сложения последний десятичный знак отбрасываем:

$$1,7475<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<1,7477, \quad 1,747<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<1,748.$$

Таким образом, любое из двух чисел, 1,747 или 1,748, может быть принято за приближенное значение суммы $\frac{1}{3}+\sqrt{2}$ с точностью до 0,001: первое число — по недостатку, второе — по избытку.

Определение 2. *За произведение двух действительных чисел* принимается такое действительное число, которое больше произведения рациональных приближений сомножителей, взятых по недостатку с любой степенью точности, но меньше произведения их рациональных приближений, взятых по избытку с любой степенью точности.

Пример 2. Вычислить произведение чисел α и π с точностью до 0,01, если

$$\alpha = 5{,}414414441\ldots, \quad \pi = 3{,}14159\ldots$$

На основании данного определения имеем следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
5{,}4\cdot 3{,}1 &< \alpha\cdot\pi < 5{,}5\cdot 3{,}2,\\
5{,}41\cdot 3{,}14 &< \alpha\cdot\pi < 5{,}42\cdot 3{,}15,\\
5{,}414\cdot 3{,}141 &< \alpha\cdot\pi < 5{,}415\cdot 3{,}142,\\
5{,}4144\cdot 3{,}1415 &< \alpha\cdot\pi < 5{,}4145\cdot 3{,}1416,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Так как произведение требуется вычислить с точностью до 0,01, т. е. в произведении надо получить четыре значащие цифры, то приближенные значения множителей берем с пятью значащими цифрами и после умножения сохраняем в результате только четыре значащие цифры. Получим:

$$17{,}009 < \alpha\pi < 17{,}0102 \quad \text{или} \quad 17{,}00 < \alpha\pi < 17{,}01.$$

Подобным образом определяются и другие арифметические действия над действительными числами.

Пример 3. Найти длину отрезка AB с точностью до 0,01, если длина отрезка CD принимается за единицу.

В данном случае безразлично, соизмерим ли отрезок AB с отрезком CD или несоизмерим. Всегда можно найти такое рациональное число, которое дает приближенное значение длины AB с заданной степенью точности.

Разделим отрезок CD на 100 равных частей и будем откладывать $\frac{1}{100}$ часть его на отрезке AB до тех пор, пока не получим остаток, меньший сотой части отрезка CD. Пусть для этого понадобилось операцию откладывания повторить n раз. Отложив еще раз $\frac{1}{100}$ часть отрезка CD, получим уже отрезок, бóльший отрезка AB. Тогда получаем две десятичные дроби:

$$\frac{n}{100} \text{ и } \frac{n+1}{100}.$$

Первая из них дает длину AB по недостатку, вторая — по избытку с точностью до 0,01:

$$\frac{n}{100} < \text{длина } AB < \frac{n+1}{100}.$$

§ 33. Геометрическое изображение действительных чисел. Проведем прямую, на ней выберем: 1) положительное направление, например направление слева направо (указано стрелкой), 2) начало отсчета, т. е. произвольную точку O, 3) единицу масштаба (OE) (рис. 16).

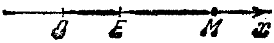

Рис. 16.

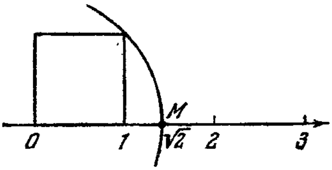

Рис. 17.

Построенная таким образом прямая называется *осью*.

Каждой точке, взятой на оси, например точке M, можно поставить в соответствие одно единственное действительное число x, выражающее длину отрезка OM, причем $x > 0$, если точка M лежит справа от начала O; если M лежит слева от O, то $x < 0$. Точке O соответствует 0. Справедливо и обратное утверждение: всякому действительному числу x соответствует единственная точка M на оси Ox; точка M лежит справа от начала O, если $x > 0$; если же $x < 0$, то точка M лежит слева от начала O. Таким образом, соответствие между действительными числами и точками оси является *взаимно однозначным*. Точки, изображающие рациональные числа, называются *рациональными точками*, а точки, которым соответствуют иррациональные числа,— *иррациональными точками*.

Ось Ox называется осью действительных чисел, по-другому — *числовой прямой*.

Пример. Построить точку M, изображающую число $\sqrt{2}$.

Строим квадрат со стороной, равной единице (рис. 17). Из центра O раствором циркуля, равным длине диагонали, делаем засечку на оси Ox; точка M изображает число $\sqrt{2}$.

ГЛАВА V

СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

§ 34. Степень с натуральным показателем.

1. Определение. Произведение нескольких равных между собой множителей называется *степенью*:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{\text{всего } n \text{ раз}} = a^n.$$

Повторяющийся множитель a называется *основанием степени*; число n, показывающее, сколько раз повторяется основание в качестве множителя, называется *показателем степени*.

Вторая степень числа a называется *квадратом*, третья — *кубом*.

2. Правило знаков. *Четная степень положительного или отрицательного числа есть число положительное; нечетная степень положительного числа есть число положительное, нечетная степень отрицательного числа — число отрицательное:*

$$(\pm a)^{2n} = a^{2n} \qquad (a > 0),$$
$$(\pm a)^{2n+1} = \pm a^{2n+1} \qquad (a > 0),$$

где $2n$ — общая запись четного числа, а $2n+1$ — общая запись нечетного числа.

Примечание. Не надо смешивать два выражения: $(-a)^n$ и $-a^n$; в первом знак минус относится к основанию степени, во втором — к самой степени.

3. Действия над степенями с одинаковыми основаниями. а) *При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются, а при делении — вычитаются:*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Примеры. 1) $2^6 \cdot 2^4 = 2^{10} = 1024$; 2) $7^5 : 7^3 = 7^2 = 49$; 3) $(x+y)^8 : (x+y)^5 = (x+y)^3$.

б) *При возведении произведения в степень можно возвести в эту степень каждый сомножитель и полученные результаты перемножить:*

$$(abc)^n = a^n b^n c^n.$$

Иногда последним равенством удобнее пользоваться в обратном направлении. Например, если надо вычислить величину

$$A = 8^3 \cdot 25^3 \cdot 2^3,$$

то гораздо быстрее получим результат, если напишем $A = (8 \cdot 25 \cdot 2)^3 = 400^3 = (4 \cdot 100)^3 = 64\,000\,000$, чем если будем возводить каждое из чисел 8, 25 и 2 в куб и потом перемножать полученные результаты.

в) *Если возводится в степень дробь, то можно возвести в эту степень отдельно числитель и знаменатель дроби и первый результат разделить на второй:*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Примеры. 1) $\left(\frac{5}{2}\right)^4 = \frac{5^4}{2^4} = \frac{625}{16}$; 2) $\left(\frac{2a}{3b}\right)^3 = \frac{8a^3}{27b^3}$.

г) *При возведении степени в степень показатели степеней перемножаются:*

$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

Примеры. 1) $(x^2)^3 = x^6$;
2) $(a^2b^3)^5 = (a^2)^5 \cdot (b^3)^5 = a^{10}b^{15}$.

На основании только что сформулированных правил действий над степенями можно возводить в степень более сложные одночленные выражения. Например,

1) $\left(-\frac{1}{2}a^4b^2\right)^3 = -\frac{1}{8}a^{12}b^6$;

2) $\left(-\frac{3xy^2}{2z^3}\right)^4 = \frac{(-3xy^2)^4}{(2z^3)^4} = \frac{81x^4y^8}{16z^{12}}$.

Чтобы возвести в степень одночлен, надо возвести в эту степень коэффициент, а показатели степени отдельных букв умножить на показатель степени, в которую возводится данный одночлен.

Примечание. В примере 2) это правило было применено в отдельности к числителю и знаменателю дроби.

4. Квадрат многочлена. *Квадрат многочлена равен сумме квадратов всех его членов плюс удвоенные произведения каждого члена на все последующие; например:*

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+$$
$$+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

В справедливости написанной формулы можно убедиться простым умножением многочлена $a+b+c+d$ на самого себя.

Примеры.

1) $(3x^2+2y^2+xy)^2=(3x^2)^2+(2y^2)^2+$
$+(xy)^2+2\cdot 3x^2\cdot 2y^2+2\cdot 3x^2\cdot xy+2\cdot 2y^2\cdot xy=$
$=9x^4+4y^4+x^2y^2+12x^2y^2+6x^3y+4xy^3=$
$=9x^4+4y^4+13x^2y^2+6x^3y+4xy^3$;

2) $(a-2b+3c-4d)^2=a^2+4b^2+9c^2+16d^2+$
$+2a(-2b)+2a\cdot 3c+2a(-4d)+$
$+2(-2b)3c+2(-2b)(-4d)+2\cdot 3c(-4d)=$
$=a^2+4b^2+9c^2+16d^2-4ab+6ac-$
$-8ad-12bc+16bd-24cd.$

§ 35. Степень с нулевым и целым отрицательным показателем.

Определение 1. Всякое действительное число a, отличное от нуля, в нулевой степени принимается равным единице:

$$a^0=1 \quad (a\neq 0).$$

Примеры. 1) $2^0=1$; 2) $(a-b)^0=1 \quad (a\neq b)$; 3) $-5^0=-1$; 4) $(-5)^0=1$.

Определение 2. Под степенью действительного числа a с целым отрицательным показателем понимается дробь, числитель которой равен 1, а знаменатель есть степень с тем же основанием, но с противоположным показателем:

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n} \quad (a\neq 0).$$

Примечание. Два числа n и $-n$ называются *противоположными*.

Примеры. 1) $4^{-3}=\frac{1}{4^3}=\frac{1}{64}$; 2) $a^{-2}\cdot b^{-4}=\frac{1}{a^2}\frac{1}{b^4}=\frac{1}{a^2b^4}$.

Обратно: всякую правильную дробь с числителем, равным 1, можно записать в виде степени с отрицательным показателем:

$$\frac{1}{3}=3^{-1}; \quad \frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}=2^{-3}.$$

Действия над степенями с нулевым и отрицательным показателями можно производить по тем же правилам, по каким мы производим эти действия над степенями с натуральными показателями.

Мы не станем строго доказывать это утверждение, а проверим на ряде примеров, что это действительно так. Проверка будет заключаться в том, что каждую операцию будем выполнять дважды: первый раз с заменой символов a^0 и a^{-n} на 1 и $\frac{1}{a^n}$, второй раз без такой замены, но с применением соответствующего правила для степеней с натуральными показателями. Если окажется, что оба результата одинаковы, то этим подтвердится возможность распространения соответствующего правила на новые объекты a^0 и a^{-n}.

Умножение степеней ($a \neq 0$)

1) $$a^0a^{-n}=1\cdot\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a^n}=a^{-n},$$
$$a^0a^{-n}=a^{0+(-n)}=a^{-n};$$

2) $$a^{-n}a^{-m}=\frac{1}{a^n}\,\frac{1}{a^m}=\frac{1}{a^{n+m}}=a^{-(n+m)},$$
$$a^{-n}a^{-m}=a^{-n+(-m)}=a^{-n-m}=a^{-(n+m)};$$

3) $$x^mx^{-n}=x^m\,\frac{1}{x^n}=\frac{x^m}{x^n}=x^{m-n},$$
$$x^mx^{-n}=x^{m+(-n)}=x^{m-n}.$$

Как видно из приведенных примеров, во всех случаях подтверждается, что при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются.

Деление степеней

1) $$a^0:a^n=1:a^n=\frac{1}{a^n}=a^{-n},$$
$$a^0:a^n=a^{0-n}=a^{-n};$$

2) $$a^0:a^{-n}=1:\frac{1}{a^n}=a^n,$$
$$a^0:a^{-n}=a^{0-(-n)}=a^{0+n}=a^n;$$

3) $$a^{-n}:a^{-m}=\frac{1}{a^n}:\frac{1}{a^m}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n},$$

$$a^{-n}:a^{-m}=a^{-n-(-m)}=a^{-n+m}=a^{m-n}.$$

Этим подтверждается, что при делении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней вычитаются и в том случае, когда эти показатели равны либо 0, либо отрицательному целому числу.

Возведение степени в степень

1) $$(a^0)^n=1^n=1,$$

$$(a^0)^n=a^{0n}=a^0=1;$$

2) $$(a^{-n})^m=\left(\frac{1}{a^n}\right)^m=\frac{1}{a^{nm}}=a^{-nm},$$

$$(a^{-n})^m=a^{-nm};$$

3) $$(a^{-n})^{-m}=\frac{1}{(a^{-n})^m}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^n}\right)^m}=\frac{1}{\frac{1}{a^{nm}}}=a^{nm},$$

$$(a^{-n})^{-m}=a^{(-n)(-m)}=a^{nm}.$$

Примечание. Степени с отрицательными показателями удобны в том отношении, что позволяют экономно записывать весьма малые величины.

Например, масса электрона $m=9{,}1085\cdot10^{-28}$ г. Гравитационная постоянная $G=6{,}673\cdot10^{-11}$ Н$\cdot$м^2/кг^2.

При такой записи сразу видно, что масса электрона определена с пятью точными значащими цифрами, а гравитационная постоянная — с четырьмя точными значащими цифрами.

Для записи больших чисел пользуются положительными степенями числа 10.

Например: число молекул в 1 см^3 при нормальных условиях равно $2{,}68713\cdot10^{19}$.

Если не пользоваться степенями с отрицательными показателями, то пришлось бы писать в первом примере

$$m=\frac{9{,}1085}{10^{28}}=\frac{91\,085}{10^{32}}=\frac{91\,085}{\underbrace{100\ldots0}_{32\text{ нуля}}}.$$

Запись числа в виде произведения его значащих цифр на степень 10 называется «записью с плавающей запятой». Такая запись широко применяется при работе на электронно-вычислительных машинах.

§ 36. Понятие корня. Из курса арифметики известно, что сложение и вычитание называются *взаимно обратными действиями* на том основании, что если к произвольному числу a сначала прибавим число b, а затем вычтем то же число b, то от этого число a останется без изменения:

$$(a+b)-b=a,$$

или, меняя порядок действий,

$$(a-b)+b=a.$$

Подобным образом умножение и деление—также взаимно обратные действия, так как

$$(ab):b=a \qquad (b\neq 0),$$
$$(a:b)\cdot b=a.$$

Действие, обратное возведению в степень, называется *извлечением корня*; с помощью этого действия по данной степени и ее показателю ищется основание степени; например, если

1) $a^3=27$, то $a=\sqrt[3]{27}=3$;

2) $y^5=-32$, то $y=\sqrt[5]{-32}=-2$.

Действие извлечения корня обозначается знаком $\sqrt{\ }$ (знак корня, или радикала), причем над этим знаком пишется показатель корня и только в случае квадратного корня показатель корня 2 не пишется.

Определение. *Извлечь корень степени n из числа a—это значит найти такое число x, которое после возведения в степень n дает само число a*:

$$\sqrt[n]{a}=x, \quad \text{если} \quad x^n=a.$$

Из этого определения следует, что $(\sqrt[n]{a})^n=a$.

1. Правило знаков. а) *Корень четной степени из положительного числа имеет два противоположных действительных значения*:

$$\sqrt{49}=\pm 7, \quad \text{так как} \quad (\pm 7)^2=49;$$
$$\sqrt[4]{81}=\pm 3, \quad \text{так как} \quad (\pm 3)^4=81.$$

б) *Корень нечетной степени имеет тот же знак, что и подкоренное число:*

$$\sqrt[3]{64}=4, \qquad \text{так как} \quad 4^3=64;$$
$$\sqrt[5]{-32}=-2, \qquad \text{так как} \quad (-2)^5=-32.$$

в) *Корень четной степени из отрицательного числа не является действительным числом*; например, $\sqrt{-9}$ не может быть ни $+3$, ни -3, так как $(\pm 3)^2 = 9$. Такие корни называют *мнимыми числами*, о чем подробнее будет сказано позже (см. гл. XV).

2. Арифметический корень. Определение. Неотрицательное значение корня четной степени из неотрицательного числа называется *арифметическим значением корня* или *арифметическим корнем.*

Имея в виду арифметические корни, надо писать:

1) $\sqrt{16} = 4$,

2) $\sqrt[4]{81} = 3$,

3) $\sqrt{(-\alpha)^2} = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \geqslant 0, \\ -\alpha, & \text{если } \alpha < 0. \end{cases}$

Далее в этой главе рассматриваются только арифметические корни.

§ 37. Основные тождества, на которых основаны преобразования корней и действия над ними.

(I) $(\sqrt[n]{a})^n = a$ (по определению корня).

(II) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$ (основное свойство корня), т. е.

Величина корня не изменится, если показатель корня и показатель степени подкоренного числа умножить на одно и то же число.

Но всякое тождество можно читать как слева направо, так и справа налево. При чтении тождества (II) справа налево оно звучит по-другому: *показатель корня и показатель степени подкоренного числа можно разделить на их общий множитель.*

Примеры. 1) $\sqrt{5} = \sqrt[4]{5^2}$; 2) $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2}$; 3) $\sqrt[12]{x^8} = \sqrt[3]{x^2}$.

(III) $\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c}$.

При извлечении корня из произведения можно извлечь корень той же степени из каждого множителя и полученные результаты перемножить.

Примеры. 1) $\sqrt{900} = \sqrt{9 \cdot 100} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{100} = 3 \cdot 10 = 30$; 2) $\sqrt[3]{64 \cdot 343} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{343} = 4 \cdot 7 = 28$. Если читать тождество (III) в обратном направлении (справа налево), то словесная формулировка будет другая: *при умножении корней (радикалов) с одинаковыми показателями* *надо перемножить их подкоренные выражения и извлечь корень той же степени из их произведения.*

Таким образом, тождество (III) в то же время дает и правило умножения радикалов с одинаковыми показателями.

Примеры. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}=\sqrt{100}=10$; 2) $\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[3]{a^3}=$ $=a$. Сочетая основное свойство корня (II) с тождеством (III), можно умножать корни с разными показателями:

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{x^2}\,\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{x^3},$$
$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^2}\,\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{2^5}=\sqrt[6]{32}.$$

На тождестве (III) основано вынесение множителя за знак радикала:

$$\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=2\sqrt{2},\ \sqrt{18a^3b}=\sqrt{9a^2\cdot 2ab}=3a\sqrt{2ab},$$
$$\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{27\cdot 2}=3\sqrt[3]{2}.$$

(IV) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, т. е. *чтобы извлечь корень из дроби (частного), можно извлечь в отдельности корень той же степени из числителя и знаменателя и первый результат разделить на второй.*

Чтение тождества (IV) справа налево дает правило деления корней с одинаковыми показателями: *при делении корней с одинаковыми показателями можно разделить их подкоренные выражения и извлечь корень той же степени из полученного частного.*

Примеры. 1) $\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}$;

2) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{1000}}=\frac{3}{10}$;

3) $\sqrt{8}:\sqrt{2}=\sqrt{\frac{8}{2}}=2$;

4) $\sqrt[3]{4}:\sqrt{2}=\sqrt[6]{4^2}:\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{\frac{16}{8}}=\sqrt[6]{2}.$

(V) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$.

Это тождество есть следствие из тождества (III). *При возведении корня в степень можно возвести в эту степень подкоренное число, оставляя показатель корня без изменения.*

Примеры. 1) $(\sqrt{2})^4=\sqrt{2^4}=\sqrt{16}=4$; 2) $(\sqrt[3]{9})^2=\sqrt[3]{9^2}=\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{27\cdot 3}=3\sqrt[3]{3}$.

(VI) $\sqrt[n]{a^m}=a^{m:n}$.

При извлечении корня из степени можно показатель степени подкоренного числа разделить на показатель корня, если это деление совершается нацело.

Примеры. 1) $\sqrt{x^4}=x^2$; 2) $\sqrt[3]{27y^6}=\sqrt[3]{3^3y^6}=3y^2$; 3) $\sqrt[4]{81a^{12}b^8}=\sqrt[4]{3^4a^{12}b^8}=3a^3b^2$.

Примечание. При решении примеров 2) и 3) были применены тождества (III) и (VI).

(VII) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$, т. е. *при извлечении корня из корня можно извлечь корень степени, равной произведению показателей данных двух корней, оставляя подкоренное число без изменения.*

Тождеством (VII) чаще приходится пользоваться, читая его справа налево; например, располагая только таблицей квадратных корней или логарифмической линейкой, целесообразно заменить извлечение корня 4-й степени двумя последовательными извлечениями квадратного корня:

$$\sqrt[4]{2}=\sqrt{\sqrt{2}}\approx\sqrt{1,414}\approx 1,19.$$

Подобным же образом

$$\sqrt[8]{12}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{12}}}\approx\sqrt{\sqrt{3,46}}\approx\sqrt{1,86}\approx 1,36.$$

Примечание. Справедливость формул (II)—(VII) проверяется одним и тем же приемом: обе части каждого равенства возводятся в одну и ту же степень, в результате чего получаются одинаковые выражения.

§ 38. Извлечение квадратного корня с заданной степенью точности. В большинстве случаев извлечение квадратных корней из чисел можно выполнить лишь приближенно. Покажем, как это делается.

Пусть требуется вычислить $\sqrt{3}$ с точностью до 0,001. Это значит, что надо найти две десятичные дроби, разнящиеся между собой на 0,001, между квадратами которых должно заключаться число 3, т. е. квадрат меньшей дроби должен быть меньше 3, а квадрат бóльшей дроби должен быть больше 3.

Известно, что при возведении десятичной дроби в квадрат число десятичных знаков удваивается, например:

$$(1,5)^2 = 2,25; \quad (0,012)^2 = 0,000144.$$

Поэтому три десятичных знака в квадратном корне можно получить лишь при условии, что подкоренное число имеет шесть десятичных знаков, т. е. выражено в миллионных долях. На место недостающих десятичных знаков напишем нули и применим обычный прием извлечения квадратного корня:

$$\sqrt{3,00'00'00} \approx 1,732.$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\ \hline
27 & 200 \\
7 & 189 \\ \hline
343 & 1100 \\
3 & 1029 \\ \hline
3462 & 7100 \\
2 & 6924 \\ \hline
 & 176 \text{ (остаток)}
\end{array}$$

Дробь 1,732 есть приближенное значение $\sqrt{3}$ по недостатку с точностью до 0,001, так как $(1,732)^2 = 2,999824\ldots$

Дробь 1,733 есть приближенное значение $\sqrt{3}$ по избытку с точностью до 0,001, так как $(1,733)^2 = 3,003289\ldots$

Пример. Вычислить $\sqrt{0,043818}$ с точностью до 0,01.

В данном случае надо сохранить в подкоренном числе только четыре десятичных знака, лишние знаки отбрасываются:

$$\sqrt{0,04'38} \approx 0,209 \approx 0,21.$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 4 \\ \hline
409 & 3800 \\
9 & 3681 \\ \hline
 & 119
\end{array}$$

§ 39. Освобождение дроби от квадратной иррациональности в знаменателе. При приближенном вычислении числовой величины дроби, содержащей в знаменателе радикал, часто приходится делить на многозначное число, что неудобно. Однако можно данную дробь преобразовать так, чтобы знаменатель стал рациональным числом. Это преобразование носит название «освобождение дроби от иррациональности в знаменателе».

Пример 1. Вычислить значение дроби $1/\sqrt{3}$ с тремя точными значащими цифрами.

Предварительно умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{3}$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Приближенное значение $\sqrt{3}$ берем с четырьмя значащими цифрами по таблице квадратных корней:

$$\sqrt{3}\approx 1{,}732.$$

Тогда

$$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1{,}732}{3}\approx 0{,}577.$$

Здесь деление легко выполнить устно, и, конечно, это проще, чем делить 1 на 1,732.

Пример 2. Вычислить числовую величину дроби $\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$ с точностью до 0,001.

Умножим числитель и знаменатель дроби на $3+\sqrt{2}$:

$$\frac{\sqrt{2}\,(3+\sqrt{2})}{3^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{3\sqrt{2}+2}{7}\approx\frac{3\cdot 1{,}414+2}{7}=\frac{6{,}242}{7}\approx 0{,}892.$$

Вычисление без предварительного уничтожения иррациональности в знаменателе требует большой затраты труда ввиду неизбежности деления на многозначные числа:

$$\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=\frac{1{,}414}{3-1{,}414}=\frac{1{,}414}{1{,}586}\approx 0{,}892.$$

§ 40. Простейший вид радикала. Подобие радикалов. *Простейшим видом* радикала принято считать такой его вид, когда: а) подкоренное выражение не содержит дробей; б) множители вынесены за знак радикала; в) показатель корня и показатель степени подкоренного выражения сокращены на их общий множитель.

Следующие примеры служат иллюстрацией приведения радикалов к простейшему виду:

1) $\sqrt{32a^3b^4}=\sqrt{16a^2b^4 2a}=4ab^2\sqrt{2a}$;

2) $\sqrt{\frac{8ab}{3c}}=\sqrt{\frac{4\cdot 2ab\cdot 3c}{(3c)^2}}=\frac{2}{3c}\sqrt{6abc}$;

3) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}=\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{ab}}=\sqrt[3]{\frac{(a^2+b^2)a^2b^2}{a^3b^3}}=$

$$=\frac{1}{ab}\sqrt[3]{(a^2+b^2)a^2b^2};$$

4) $xy\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}=\sqrt{x^2y^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}=$

$$=\sqrt{xy^2-x^2y}=\sqrt{xy(y-x)}\ (y>x>0).$$

Определение. Два или несколько радикалов называются *подобными*, если они различаются только коэффициентами, но имеют одинаковые подкоренные выражения и одинаковые показатели радикала или ничем не отличаются. Подобными будут, например, $3\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$; $a\sqrt{x+y}$ и $\frac{b}{c}\sqrt{x+y}$.

Часто с виду радикалы как будто неподобны; однако после приведения их к простейшему виду может обнаружиться их подобие.

Примеры. 1) $3\sqrt{\frac{1}{2}}$ и $\sqrt{\frac{1}{8}}$ подобны, так как

$$3\sqrt{\frac{1}{2}}=3\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{2},\quad \sqrt{\frac{1}{8}}=\sqrt{\frac{2}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{2};$$

2) $\sqrt[3]{4a^4b^2}$ и $\sqrt[3]{\frac{1}{2a^2b}}$ подобны, так как

$$\sqrt[3]{4a^4b^2}=a\sqrt[3]{4ab^2},\quad \sqrt[3]{\frac{1}{2a^2b}}=\sqrt[3]{\frac{4ab^2}{8a^3b^3}}=\frac{1}{2ab}\sqrt[3]{4ab^2}.$$

Подобные радикалы приводятся так же, как и подобные рациональные одночлены, что видно из следующего сопоставления:

$$3xy+5xy-6xy=2xy,$$
$$3\sqrt{ab}+5\sqrt{ab}-6\sqrt{ab}=2\sqrt{ab}.$$
$$mx-nx+px=(m-n+p)x,$$
$$m\sqrt[3]{a(b+c)}-n\sqrt[3]{a(b+c)}+p\sqrt[3]{a(b+c)}=$$
$$=(m-n+p)\sqrt[3]{a(b+c)}.$$

§ 41. Сложение и вычитание радикалов. При сложении или вычитании радикалов соединяют их между собой знаком плюс или минус и приводят подобные радикалы, если они имеются. Например,

$$(2\sqrt{20}+5\sqrt{8})-\left(3\sqrt{\frac{1}{5}}-\sqrt{98}\right)=$$

$$=2\sqrt{20}+5\sqrt{8}-3\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{98}=$$

$$=4\sqrt{5}+10\sqrt{2}-\frac{3}{5}\sqrt{5}+7\sqrt{2}=3{,}4\sqrt{5}+17\sqrt{2}.$$

§ 42. Умножение и деление более сложных иррациональных выражений. В § 37 при рассмотрении основных тождеств было показано, как выполняются умножение и деление радикалов в простейших случаях.

При умножении и делении иррациональных многочленов применяются те же правила, что и при умножении и делении рациональных многочленов.

Примеры.

1) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(7\sqrt{2}+5\sqrt{3})=3\sqrt{2}\cdot 7\sqrt{2}-$
$-2\sqrt{3}\cdot 7\sqrt{2}+3\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3}-2\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3}=21\cdot 2-$
$-14\sqrt{6}+15\sqrt{6}-10\cdot 3=12+\sqrt{6};$

2) $\left(2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b}}-x\sqrt[3]{b}\right):\sqrt[3]{bx}=2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b^2x}}-$
$-x\sqrt[3]{\frac{b}{bx}}=\frac{2ab}{b}\sqrt[3]{bx}-\sqrt[3]{x^2}=2a\sqrt[3]{bx}-\sqrt[3]{x^2}.$

§ 43. Преобразование сложного радикала.

Иррациональное выражение вида

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}},$$

где A и B — положительные рациональные числа, B не есть точный квадрат, называется *сложным радикалом.* Сложный радикал может быть преобразован к виду

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}. \qquad (1)$$

Проверить справедливость формулы (1) можно путем возведения в квадрат обеих частей, с учетом того, что все радикалы арифметические. Выполним это для случая, когда везде берутся верхние знаки.

Квадрат левой части

$$\left(\sqrt{A+\sqrt{B}}\right)^2=A+\sqrt{B}.$$

Квадрат правой части

$$\left(\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\right)^2=$$
$$=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}+\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}+$$
$$+2\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}=$$
$$=A+\sqrt{A^2-(A^2-B)}=A+\sqrt{B}.$$

Может показаться, что такое преобразование бесполезно, так как правая часть тождества содержит два сложных радикала, а левая часть — только один. Однако в тех случаях, когда выражение A^2-B есть точный квадрат, в правой части тождества получим сумму или разность двух простых радикалов, и тогда есть смысл пользоваться преобразованием сложного радикала.

Примеры.

1) $$\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{4-3}}{2}}-\sqrt{\frac{2-\sqrt{4-3}}{2}}=$$
$$=\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2});$$

2) $$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{3+1}{2}}+\sqrt{\frac{3-1}{2}}=\sqrt{2}+1.$$

§ 44. Степень с дробным показателем.

Определение 1. Степень с *положительным дробным показателем*, т. е. выражение $a^{\frac{m}{n}}$ (m и n — целые положительные числа), означает корень (радикал), показатель которого равен n, а подкоренное выражение равно a^m:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\quad(a>0).$$

Примеры. 1) $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$; 2) $(a+b)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(a+b)^2}$; 3) $(xy)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{xy}$.

Обратно, всякий радикал можно представить в виде степени с дробным показателем:

1) $$\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}};$$

2) $$\sqrt{x-y}=(x-y)^{\frac{1}{2}},\ \text{где } x\geqslant y;$$

3) $$\sqrt[5]{b^3}=b^{\frac{3}{5}}.$$

Определение 2. Степень с *отрицательным дробным показателем*, т. е. выражение $a^{-\frac{m}{n}}$ (m и n — целые положительные числа), означает обратную величину выражения $a^{m/n}$:

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{m/n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

Над степенями с дробными показателями можно производить действия умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня по тем же правилам, как и над степенями с целыми показателями, если основания степеней равны между собой.

Умножение:

$$a^{m/n}a^{p/q}=\sqrt[n]{a^m}\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[nq]{a^{pn}}=\sqrt[np]{a^{mq+pn}}=$$
$$=a^{\frac{mq+pn}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}},$$

т. е. показатели степеней складываются также в случае умножения степеней с дробными показателями.

Пример. $8^{-\frac{2}{3}}\cdot 8^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}}\sqrt{8^3}=\frac{1}{4}\cdot 8\sqrt{8}=2\sqrt{8}=4\sqrt{2}.$

Теперь произведем умножение без замены множителей радикалами:

$$8^{-\frac{2}{3}}\cdot 8^{\frac{3}{2}}=8^{-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}=8^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{8^5}=\sqrt[6]{2^{15}}=4\sqrt{2}.$$

Деление:

$$a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{a^m}:\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}:\sqrt[nq]{a^{pn}}=\sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{pn}}}=$$
$$=\sqrt[nq]{a^{mq-pn}}=a^{\frac{mq-pn}{nq}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}},$$

т. е. показатели степеней вычитаются в случае деления степеней с дробными показателями.

Предоставляется учащемуся самому проверить, что и при возведении степени в степень, а также при извлечении корня из степени прежние правила действий над степенями сохраняются.

Примеры. 1) $3^{\frac{1}{2}}:3^{-\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}=3^1=3;$

2) $(2^{-4})^{-\frac{1}{2}}=2^2=4;$

3) $(0{,}027)^{-\frac{1}{3}}+256^{0{,}75}-3^{-1}+(4{,}5)^0=$

$$=\left[\left(\frac{3}{10}\right)^3\right]^{-\frac{1}{3}}+\sqrt[4]{256^3}-\frac{1}{3}+1=\left(\frac{3}{10}\right)^{-1}+(\sqrt[4]{256})^3+$$
$$+\frac{2}{3}=\frac{10}{3}+4^3+\frac{2}{3}=68.$$

§ 45. Примеры на все действия над радикалами.

Пример 1. Упростить выражение

$$\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}\right)\left(\sqrt{x^{-2}-1}-\frac{1}{x}\right),$$
$$0<x<1.$$

Действия выполняем последовательно, сначала над выражениями, заключенными в скобки:

$$1)\ \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}\,\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\,\sqrt{1+x}-(\sqrt{1-x})^2}=$$
$$=\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}\,\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}=$$
$$=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=$$
$$=\frac{2+2\sqrt{1-x^2}}{2x}=\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Теперь упрощаем выражение, заключенное во вторые скобки:

$$2)\ \sqrt{x^{-2}-1}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}(\sqrt{1-x^2}-1).$$

3) Перемножим результаты предыдущих действий:

$$\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\,\frac{1}{x}(\sqrt{1-x^2}-1)=\frac{(\sqrt{1-x^2})^2-1}{x^2}=\frac{1-x^2-1}{x^2}=-1.$$

Пример 2. Упростить и вычислить выражение

$$\frac{(z^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}+(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(z^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}-(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}$$

при $z=a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}}$ $(a>0;\ n>m>0)$.

Вычислим сначала два выражения:

$$A=(z^2+a^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ и } B=(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Имеем

$$A=\left\{\left[a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2+a^2\right\}^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\left[a^2\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}+1\right)\right]^{-\frac{1}{2}}=\left[a^2\frac{(m+n)^2}{2mn}\right]^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2mn}}{a(m+n)}.$$

Аналогично находим B:

$$B=\left\{\left[a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2-a^2\right\}^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\left[a^2\frac{m^2+n^2}{2mn}-a^2\right]^{-\frac{1}{2}}=\left[a^2\left(\frac{m^2+n^2-2mn}{2mn}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{a^{-1}(n-m)^{-1}}{(2mn)^{-\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{2mn}}{a(n-m)}.$$

Здесь при вычислении выражения

$$[m^2+n^2-2mn]^{-\frac{1}{2}}$$

надо учесть, что

$$m^2+n^2-2mn=(m-n)^2=(n-m)^2.$$

Но $\sqrt{m^2+n^2-2mn}=\sqrt{(m-n)^2}=\pm(m-n)$, а так как $n>m$, то арифметическое значение радикала

$$\sqrt{(m-n)^2}=n-m.$$

После вычисления вспомогательных величин A и B имеем:

$$\frac{\frac{\sqrt{2mn}}{a(m+n)}+\frac{\sqrt{2mn}}{a(n-m)}}{\frac{\sqrt{2mn}}{a(m+n)}-\frac{\sqrt{2mn}}{a(n-m)}}=\frac{\frac{\sqrt{2mn}}{a}\left(\frac{1}{m+n}+\frac{1}{n-m}\right)}{\frac{\sqrt{2mn}}{a}\left(\frac{1}{m+n}-\frac{1}{n-m}\right)}=$$

$$=\frac{n-m+n+m}{n-m-n-m}=\frac{2n}{-2m}=-\frac{n}{m}.$$

Упражнения

1. Вычислить:

1) 2^4, $(-3)^4$, 4^3, $(-5)^3$;

2) $13\cdot 2^3-9\cdot 2^3+15\cdot 2^3+6(-2)^3-5(-2)^3-(-2)^3$;

3) $a^2+(-a)^2$, $(-2a)^2$, $(-2a)^3$, $(-a)^{2n}$, $(-a)^{2n+1}$;

4) $2^3+(-3)^3-(-2)^2+(-1)^5$.

2. Упростить выражение

$$x^3+2x^2-3x-(-x)^3+3(-x)^2-5x+2.$$

3. Произвести указанные действия: $(3\cdot 4)^2(2\cdot 3\cdot 4)^3$; $(2xy)\times$ $\times(-4xyz)^3$; $(-a)^4(2b)^4$; $(-2x)^3(-3y)^3$; $24\left(-\frac{1}{3}\right)^3\left(4\frac{1}{2}\right)^2$.

4. Вычислить: 1) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$; 2) $(1{,}5)^4$; 3) $\left(\frac{a}{b}\right)^3$; 4) $\left(\frac{2xy}{z}\right)^4$; 5) $\left(\frac{4ab}{3c}\right)^3$; 6) $\left(\frac{7}{2}\right)^3:\left(\frac{7}{3}\right)^3$; 7) $\left(\frac{a}{2b}\right)^n\left(\frac{b}{3c}\right)^n\left(\frac{2c}{a}\right)^n$; 8) $\frac{(x^2-y^2)^n}{c^2-d^2}\,\frac{(c+d)^n}{x-y}\,\frac{(c-d)^n}{x+y}$.

5. Вычислить: 1) $(2^2)^3$; 2) $[(-3)^2]^3$; 3) $(x^{n-1})^2$; 4) $(x^2y^3)^{2n-1}$; 5) $(-b^2)^3$; 6) $(a^2)^3\cdot(a^3)^4$; 7) $\left(\frac{2x^2y^3}{-3z^5}\right)^4$; 8) $\left(\frac{a^7}{b^x}\right)^m(b^x)^m a^m$; 9) $\left(-\frac{3x^{n-1}}{4y^{n+1}}\right)^m$.

6. Упростить выражение $\left(\frac{a+b}{c-d}\right)^3\left(\frac{1}{a+b}\right)^2\left(\frac{c-d}{a+b}\right)^4$.

7. Подвести рациональный множитель под знак корня:

1) $3\sqrt{2}$; 2) $5\sqrt{0{,}6}$; 3) $4\sqrt{0{,}5}$; 4) $a\sqrt{\frac{b}{a}}$; 5) $x\sqrt{\frac{ab}{x}}$; 6) $2\sqrt[3]{3}$; 7) $ab^2\sqrt{c}$; 8) $2\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$; 9) $3\sqrt{3\frac{1}{3}}$; 10) $\frac{a}{2c}\sqrt{\frac{c}{a}}$; 11) $\frac{m}{n}\sqrt{\frac{n}{m}}$; 12) $(a-b)\sqrt{\frac{2}{a-b}}$; 13) $\frac{a+1}{a-1}\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$; 14) $2a\sqrt[3]{b}$; 15) $xy\sqrt[3]{\frac{a}{xy}}$.

8. Не извлекая корней, определить, какое из чисел больше: 1) $2\sqrt{3}$ или $3\sqrt{2}$? 2) $5\sqrt{3}$ или $3\sqrt{10}$?

9. Преобразовать к простейшему виду следующие корни:

1) $\sqrt{\frac{2}{25}}$; 2) $\sqrt{\frac{17}{81}}$; 3) $\sqrt{\frac{72}{49}}$; 4) $\sqrt{\frac{2}{5}}$; 5) $\sqrt{\frac{1}{3}}$; 6) $\sqrt{4\frac{1}{2}}$; 7) $a\sqrt{\frac{x}{a}}$; 8) $\sqrt{\frac{2a^3}{3b^2}}$; 9) $c\sqrt{\frac{x}{c^3}}$;

10) $2ax\sqrt{\frac{3}{2ax}}$; 11) $\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$; 12) $\sqrt{2x^2-4x+2}$;

13) $\frac{a}{m}\sqrt{\frac{2ab}{3m^2n}}$; 14) $\sqrt[3]{\frac{a+b}{(a-b)^2}}$; 15) $b\sqrt[3]{\frac{1}{b^3}+\frac{1}{b^2}}$;

16) $\sqrt[5]{\frac{mn}{8a^4b^3}}$.

10. Пользуясь приближенным значением $\sqrt{6}\approx 2{,}449$, вычислить:

1) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; 2) $\sqrt{\frac{3}{2}}$; 3) $\sqrt{\frac{3}{8}}$.

11. Привести к простейшему виду и обнаружить подобие:

1) $\sqrt{8}$ и $\sqrt{50}$; 2) $\sqrt{40}$ и $\sqrt{90}$; 3) $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\frac{1}{8}}$ и $3\sqrt{18}$;

4) $\frac{2}{x}\sqrt{x^3y}$, $\frac{3}{y}\sqrt{xy^3}$ и $xy\sqrt{\frac{1}{xy}}$; 5) $\sqrt[3]{4a^4b^5}$ и $\sqrt[3]{\frac{1}{2a^2b}}$;

6) $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}$ и $\sqrt{\frac{8}{9}-\frac{1}{3}}$; 7) $\sqrt[3]{0{,}001xy^2}$ и $y\sqrt[3]{\frac{0{,}027x}{y}}$;

8) $\sqrt{\frac{c}{ac-bc}}$ и $\sqrt{\frac{4a}{b^2}-\frac{4}{b}}$.

12. Произвести сложение и вычитание следующих корней:

1) $3\sqrt{18}+2\sqrt{8}+3\sqrt{32}-\sqrt{50}$;

2) $\sqrt{12}-2\sqrt{27}-3\sqrt{48}+2\sqrt{75}+3\sqrt{108}$;

3) $(\sqrt{ab}-2a\sqrt{b})+(4a\sqrt{b}-2\sqrt{ab})$;

4) $a\sqrt[3]{ab^4}+b\sqrt[3]{a^4b}+\sqrt[3]{a^4b^4}-3ab\sqrt[3]{ab}$;

5) $3\sqrt{\frac{1}{27}}-\frac{5}{6}\sqrt{27}-0{,}1\sqrt{75}+2\sqrt{\frac{1}{3}}$;

6) $\sqrt{1-x^2}+(1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2(1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

7) $b\sqrt{\frac{1}{a-b}}-\frac{1}{a}\sqrt{a^3-a^2b}+\frac{1}{b}\sqrt{ab^2-b^3}-b\sqrt{\frac{4a}{b^2}-\frac{4}{b}}$.

13. Привести к общему показателю следующие корни:

1) $\sqrt{3}$ и $\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[6]{32}$; 3) $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{3ab}$ и $\sqrt{2c}$.

14. Произвести умножение и деление в следующих примерах:

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}$; 2) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{4a^3}$; 3) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{2}$; 4) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}$;

5) $\sqrt{2a}:\sqrt[4]{a}$; 6) $\sqrt[3]{16}:\sqrt{2}$; 7) $\sqrt[3]{2xy}:3\sqrt{xy}$; 8) $\frac{\sqrt{2}\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{8}}$.

15. Произвести указанные действия над корнями:

1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$; 2) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$; 3) $\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{4\cdot5}$; 4) $\sqrt{3}\cdot2\sqrt[3]{2}$;
5) $\sqrt[5]{x^2}\sqrt[3]{x^2}$; 6) $\sqrt{12}:\sqrt{13}$; 7) $2\sqrt{10}:\frac{1}{2}\sqrt{2,5}$; 8) $\sqrt{2}:\sqrt[3]{2}$;
9) $4,8\sqrt{ab}:12\sqrt{\frac{1}{ab}}$; 10) $(\sqrt{12}-2\sqrt{27}+3\sqrt{75})\cdot\sqrt{3}$;
11) $(\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{125}):2\sqrt{5}$; 12) $(4\sqrt{8}-2\sqrt{18}):\sqrt[3]{2}$;
13) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$; 14) $(a-b\sqrt{c}+m\sqrt{b}):a\sqrt{bc}$;
15) $\sqrt{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a^2-b}$; 16) $(2\sqrt{xy}+x\sqrt{y}+y\sqrt{x}):\sqrt{xy}$;
17) $\left(a\sqrt{\frac{a}{b}}+2\sqrt{ab}+b\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\sqrt{ab}$; 18) $(5-2\sqrt{3})(6+5\sqrt{3})$;
19) $(3\sqrt{2}+5\sqrt{3})(8\sqrt{3}-3\sqrt{2})$; 20) $\sqrt{7+\sqrt{24}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{24}}$;
21) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}$; 22) $\sqrt{p+\sqrt{p^2-1}}\sqrt{p-\sqrt{p^2-1}}$;
23) $\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-y^3}}\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-y^3}}$.

16. Возвести в степень следующие выражения:

1) $(2\sqrt{a})^2$; 2) $(\sqrt[3]{a})^4$; 3) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^4$; 4) $(\sqrt[n]{ab})^{2n}$; 5) $(\sqrt[3]{3a^2})^9$;
6) $(ab\sqrt{c})^4$; 7) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$; 8) $(a-b\sqrt{x})^2$; 9) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$;
10) $(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})^2$; 11) $(a+\sqrt{4+a^2})^2$; 12) $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$;
13) $\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2$; 14) $(\sqrt{a-x}-\sqrt{x-b})^2$;
15) $(a\sqrt{a}-b\sqrt{b})^2$; 16) $(\sqrt{2}p+\sqrt{3}q)^3$; 17) $(\sqrt{2p}+\sqrt{3q})^3$;
18) $(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})^2(x\sqrt{y}+y\sqrt{x})^2$; 19) $(\sqrt[n]{p^2-q^2})^{2n}$;
20) $(\sqrt[n]{2^3})^{nm}$.

17. Упростить радикалы: $\sqrt{\sqrt{18}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{16}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{ab^2}}$;
$\sqrt{2\sqrt{2}}$; $\sqrt[3]{\frac{4}{9}\sqrt{\frac{4}{9}}}$; $\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$.

18. Освободить дробь от иррациональности в знаменателе:

1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{5}{\sqrt{5}}$; 4) $\frac{8}{\sqrt{6}}$; 5) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{xy}}$;
7) $\frac{m}{\sqrt{\frac{p}{q}}}$; 8) $\frac{a}{b\sqrt{a}}$; 9) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$; 10) $\frac{1}{3-\sqrt{7}}$; 11) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$;
12) $\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$; 13) $\frac{7-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$; 14) $\frac{9-5\sqrt{3}}{7-3\sqrt{3}}$; 15) $\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

16) $\dfrac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$; 17) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; 18) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$;

19) $\dfrac{5}{2-\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; 20) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}$.

19. Упростить выражение $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

20. В выражении $\dfrac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\dfrac{1+bx}{1-bx}}$ заменить x на $\sqrt{\dfrac{2a}{b}-1}$ и упростить.

21. Какой простейший вид примет выражение $\dfrac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$, если применить подстановку

$$x=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right] \qquad (0<b<a)?$$

22. Вычислить значение y при $x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$, если

$$y=\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}.$$

23. Упростить выражение

$$\frac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}}+\frac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}.$$

24. Вычислить значение y при $x=\sqrt{\dfrac{m-\sqrt{m^2-4}}{2m}}$, если

$$y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

25. Упростить выражения:

1) $\dfrac{a}{\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}}-b\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}-1}+\dfrac{b}{\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}-1}}$;

2) $\dfrac{a^2}{2}\,\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}+\sqrt{x^2+a^2}\right)$;

3) $2x+\sqrt{x^2-1}\left(1+\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)-\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}$;

4) $\frac{2}{3}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right]$;

5) $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+\frac{2a^2}{\sqrt{a}}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}$.

26. Записать следующие радикалы в виде степеней с дробными показателями:

1) $\sqrt{5}$; 2) $\sqrt[3]{a^2}$; 3) $\sqrt[5]{x^3}$; 4) $\sqrt{a+b}$; 5) $\sqrt{a^2+b^2}$; 6) $\sqrt[3]{x-y}$;

7) $\sqrt[5]{ab^2}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{a}}$; 9) $\frac{1}{\sqrt[3]{b^2}}$; 10) $\frac{1}{\sqrt{m+n}}$; 11) $\frac{3}{\sqrt[3]{x-y}}$;

12) $\frac{3ab}{\sqrt[5]{(a+b)^2}}$; 13) $\frac{A}{\sqrt{1+x^2}}$.

27. Вычислить, заменив дробные степени соответствующими радикалами:

1) $2^{\frac{1}{2}}$; 2) $8^{\frac{1}{3}}$; 3) $16^{\frac{3}{4}}$; 4) $64^{-\frac{1}{2}}$; 5) $0{,}25^{-\frac{1}{2}}$; 6) $0{,}36^{\frac{1}{2}}$; 7) $(-2)^{-\frac{2}{3}}$;

8) $(x+y)^{\frac{2}{3}}$; 9) $(a-b)^{-\frac{3}{2}}$; 10) $(-27)^{-\frac{4}{3}}$; 11) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+32^{-\frac{1}{5}}$;

12) $(125)^{\frac{2}{3}}+(0{,}01)^{-0{,}5}$; 13) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}(0{,}81)^{-\frac{1}{2}}$.

28. Произвести указанные действия:

1) $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}\cdot ab^{\frac{1}{2}}$; 2) $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)a^{\frac{1}{2}}$; 3) $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)$;

4) $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^3$; 5) $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^2$; 6) $\left(a+a^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(a-a^{\frac{1}{2}}+1\right)$;

7) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2$; 8) $\left(125^{\frac{2}{3}}+16^{\frac{1}{2}}+343^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$;

9) $\left[\frac{1}{4}\left(0{,}027^{\frac{2}{3}}+15\cdot 0{,}0016^{\frac{3}{4}}+1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$; 10) $\left(x^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\right)\left(x\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2x^2}+\sqrt[3]{4}\right)$;

11) $\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}}b^{-1}}\,a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{2}}\sqrt{a^{-1}b^{\frac{2}{3}}}$; 12) $\left(\sqrt[n+3]{\sqrt[n-1]{a^2}\,\sqrt[n+1]{a^{-1}}}\right)^{n^2-1}$.

29. Упростить выражения:

1) $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}-\frac{2x\sqrt{x^2-y^2}}{y^2(xy^{-1}+1)^2}\,\frac{1}{1+\frac{1-yx^{-1}}{1+yx^{-1}}}$;

2) $\left\{\left[\left(\frac{2\sqrt[4]{xy}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}\right)^{-2}+1\right]:\frac{4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y+2\sqrt{xy}}\right\}^{\frac{1}{2}}$;

3) $\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-2}+1}$;

4) $\frac{a+\sqrt{ab}}{a+b}\left[a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}-\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1}\right]$;

5) $\frac{1}{a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{8}}+1}+\frac{1}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{8}}+1}-\frac{2a^{\frac{1}{4}}-2}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}+1}$.

30. Вычислить при $x=\frac{1}{a-1}$ $(a\neq 1)$

$$\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\left[1-\frac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right].$$

31. Упростить следующие выражения:

1) $\left(\frac{x^{\frac{4}{3}}+8x^{\frac{1}{3}}y}{x^{\frac{2}{3}}-2\sqrt[3]{xy}+4y^{\frac{2}{3}}}-2\sqrt[3]{xy}\right)^6$; 2) $\frac{(a^{-1}+b^{-1})(a+b)^{-1}}{\sqrt[6]{a^4\sqrt[5]{a^{-2}}}}$

3) $\left(a^{-\frac{2}{3}}-b^{-\frac{2}{3}}\right)ab\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^{-1}+\sqrt[3]{ab^2}$ $(a\neq b)$;

4) $\left[(x\sqrt{x}+y\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{-1}+3\sqrt{xy}\right]^{\frac{1}{2}}$ $(x>0;\ y>0)$.

ГЛАВА VI

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ФУНКЦИЯХ. КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН И ЕГО ГРАФИК

§ 46. Вводное замечание. Начальные сведения о функциях и их графиках вам были уже сообщены в VII—VIII классах средней школы. Поэтому в первых параграфах этой главы мы только в сжатой форме повторяем основные понятия и определения. Новый материал излагается подробно и иллюстрируется большим количеством примеров.

§ 47. Основные понятия и определения.

Определение 1. Величина называется *постоянной*, если в условиях данного исследования (наблюдения, эксперимента) она сохраняет одно и то же значение.

Примеры постоянных величин: 1) отношение длины окружности к своему диаметру; 2) ускорение силы тяжести g в данной точке земной поверхности; 3) сумма внутренних углов треугольника.

Определение 2. Величина называется *переменной*, если в данном исследовании или процессе она принимает различные значения.

Примеры переменных величин: 1) расстояние, отделяющее парашютиста от поверхности Земли после того, как он выбросился из самолета; 2) угол зрения, под которым виден удаляющийся от наблюдателя предмет (самолет, человеческая фигура, танк и т. д.); 3) скорость истечения жидкости из сосуда через отверстие при изменяющемся давлении (напоре); 4) температура воздуха в течение суток.

Одна и та же величина в одних условиях может оказаться постоянной, в других—переменной. Например, ускорение силы тяжести g будет переменной величиной, если ее измерять на различных широтах земной поверхности: на полюсе она больше, чем на экваторе (для Москвы $g=9,81$ м/с²). Постоянные величины принято обозначать начальными буквами латинского алфавита: a, b, c, ..., переменные величины — через x, y, z, u, v.

В математике отвлекаются от физического смысла переменных величин, участвующих в том или другом процессе, а интересуются только взаимосвязью между числовыми значениями изменяющихся переменных величин. Это приводит к одному из важнейших понятий математики — понятию функции.

Определение 3. Величина y называется *функцией* переменной x, если каждому значению x из данного числового множества соответствует по некоторому закону вполне определенное значение y.

Переменная x называется *аргументом* или *независимой переменной*, величина y — *зависимой переменной* или *функцией*. Говорят, что переменные x и y связаны между собой функциональной зависимостью, и записывают $y=f(x)$ («игрек равняется эф от икс»). Под записью $y=f(x)$ подразумевается правило, по которому каждому рассматриваемому значению x ставится в соответствие определенное значение y; например, если $y=\frac{x}{1+x^2}$, то для нахождения y надо:

1) возвести аргумент x в квадрат,
2) прибавить 1 к квадрату аргумента,
3) поделить x на сумму $1+x^2$.

Возвращаясь к рассмотренным примерам, можно сказать, что

1) расстояние, отделяющее парашютиста от поверхности Земли, есть функция времени;

2) угол, под которым видна цель из данной точки, есть функция расстояния до цели;

3) скорость истечения жидкости из сосуда есть функция высоты уровня жидкости над отверстием, через которое выливается жидкость.

Примечание. Бывают функции, зависящие от двух, трех и более переменных величин.

Примеры. 1. Сила тока I зависит от напряжения E и от сопротивления R: $I=\frac{E}{R}$.

2. Объем прямоугольного параллелепипеда есть функция трех его измерений a, b и c: $v=abc$.

В дальнейшем мы будем изучать функции только одного аргумента.

§ 48. Способы задания функции. Соответствие между значениями переменных x и y может быть задано различными способами.

1. Табличный способ. Функция может быть задана при помощи таблицы. Такой способ задания функции состоит в том, что численные значения аргумента располагают в виде строки (или столбца), а против каждого значения аргумента помещают соответствующее значение функции:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n...
y	y_1	y_2	y_3	y_4	...	y_n...

По этому принципу построены уже известные вам таблицы квадратов, кубов, квадратного корня, кубического корня и т. д.

Обычно табулируют одновременно несколько функций; например, во всех инженерных справочниках можно встретить следующую таблицу, в которой аргумент обозначен буквой n вместо обычного обозначения x.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{\pi n^2}{4}$
1	1	1	1,000	3,162	1,000	2,154	4,642	1	0,785
2	4	8	1,414	4,472	1,260	2,714	5,848	0,500	3,142
3	9	27	1,732	5,477	1,442	3,107	6,694	0,333	7,069

Мы показали лишь начало таблицы. Здесь табулированы 9 различных функций. В первом столбце помещены значения аргумента с равными промежутками, т. е. через единицу, для всех девяти функций. Считаем, что пользование такой таблицей не вызовет никаких затруднений. Хотя таблица составлена только для целых значений аргумента n в пределах от 1 до 100, но тем не менее она дает большие преимущества: значения любой из девяти функций находим сразу без всяких вычислений. Например, при $n=3$ получаем $\sqrt[3]{10n}=\sqrt[3]{30}=3,107$. Следует сказать, что в результате экспериментального изучения какого-нибудь явления или процесса (испытание самолетов, моторов, урожайности семян и т. д.) всегда устанавливается функциональная зависимость между переменными в виде таблицы.

2. А н а л и т и ч е с к и й с п о с о б. Говорят, что функция задана аналитически, если дается формула, указывающая, какие действия и в каком порядке надо выполнить над значениями аргумента x и некоторыми данными числами, чтобы получить соответствующие значения функции.

П р и м е р ы 1. Если $y=\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$, то при данном значении $x=5$ функция y равна арифметическому значению квадратного корня из частного: $\sqrt{\frac{4}{5^2+1}}=$ $=\sqrt{\frac{5}{26}}\approx 0,437$.

2. Если $y=x^3+5x^2-x+4$, то при $x=2$ легко находим соответствующее значение функции, которое обозначим следующим образом:

$$y|_{x=2}=y(2)=2^3+5\cdot 2^2-2+4=30.$$

Вообще символическая запись $f(a)$ или $y(a)$ означает то значение функции $f(x)$, которое она принимает при аргументе, равном числу a. По-другому можно сказать, что $f(a)$ есть частное значение функции, соответствующее значению аргумента $x=a$.

В некоторых случаях функция задается не одной формулой, а несколькими для различных промежутков изменения аргумента.

П р и м е р. $y=\begin{cases} 2x-1, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 3, \\ -x+8, & \text{если } 3<x\leqslant 5. \end{cases}$

Задание функции с помощью формулы имеет то большое преимущество, что по формуле значения функции могут быть вычислены для каждого допустимого значения x с нужной точностью весьма быстро, если пользоваться средствами современной вычислительной техники.

Недостатком аналитического способа является то, что часто по формуле невозможно судить о характере изменения функции. Несмотря на этот недостаток, аналитический способ господствует в математике, к нему приспособлен математический аппарат изучения функций.

3. Графический способ. Зависимость между аргументом x и функцией y можно представить в виде некоторой линии (вообще говоря, кривой); абсцисса любой точки этой кривой изображает некоторое значение аргумента x, ордината — соответствующее значение функции y.

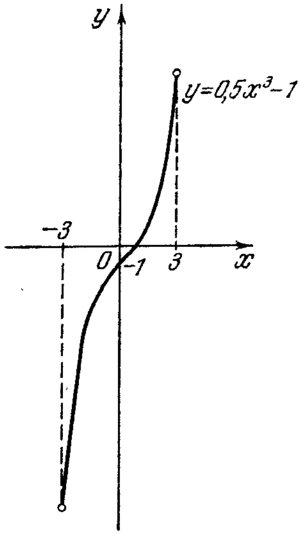

Рис. 18.

Определение. *Графиком функции* $y=f(x)$ называется множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют равенству $y=f(x)$.

Чтобы построить график функции, заданной формулой, обычно поступают следующим образом:

1) Составляют таблицу значений аргумента x и соответствующих значений функции y.

2) Выбирают систему координат xOy и единицу масштаба на каждой из осей (не обязательно одну и ту же для обеих осей).

3) Каждую пару значений x и y, помещенных в таблицу, принимают за координаты точки и строят эти точки.

4) Построенные точки соединяют от руки или с помощью лекала плавной линией.

Очевидно, что чем больше будет нанесено точек, тем точнее получается график функции.

Графический способ задания функции удобен тем, что он наглядно показывает ход изменения функции: в каких промежутках изменения аргумента функция возрастает, в каких — убывает, когда функция обращается в нуль.

Графическое изображение функциональной зависимости широко применяется в современной науке и технике, где графики воспроизводят самопишущие приборы. Приведем такие примеры:

1) В медицине о работе сердца судят по кардиограмме, которую создает прибор — кардиограф.

2) Сейсмограф изображает колебания земной коры; по нему можно определить, где произошло землетрясение и какова его сила.

3) Виброметр регистрирует колебания различных сооружений, например, мостов, судов и т. д.

Подобные примеры можно привести из самых различных областей науки.

К недостаткам графического способа изображения функции надо отнести:

1) сравнительно небольшую точность, с какой можно прочесть значения аргумента и функции по графику;

2) ограниченность промежутка, на котором может быть построен график.

Пример. Построить график функции $y=0{,}5x^3-1$ на отрезке $[-3, 3]$.

Составляем таблицу значений:

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1
$y=0{,}5x^3-1$	$-14{,}5$	$-8{,}8$	-5	$-2{,}7$	$-1{,}5$

x	0	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
$y=0{,}5x^3-1$	-1	$-\frac{1}{2}$	$0{,}7$	3	$6{,}8$	$12{,}5$

Через полученные 11 точек проводим плавную кривую, называемую *кубической параболой* (рис. 18).

§ 49. Область определения функции. *Областью определения* функции называется множество точек числовой оси, в которых функция имеет вполне определенные действительные значения. Поясним сказанное рядом примеров.

Пример 1. Найти область определения функции $y=1-x^2$. При любом действительном значении x функция y принимает также действительные значения; поэтому область определения ее — вся числовая ось, или промежуток $-\infty < x < +\infty$.

Пример 2. $y=\frac{1}{1-x^2}$.

Данная функция определена при значениях аргумента $x \neq \pm 1$; ее область определения состоит из трех промежутков:

$$(-\infty, -1), (-1, 1) \text{ и } (1, +\infty).$$

Пример 3. $y=\sqrt{9-2x}+\sqrt{x-3}$.

Область определения данной функции может быть найдена решением системы неравенств:

$$\begin{cases} 9-2x \geqslant 0, \\ x-3 \geqslant 0. \end{cases}$$

Искомая область выразится так: $3 \leqslant x \leqslant 4{,}5$.

Пример 4. $f(x)=\sqrt[4]{-x}+\sqrt{x}$.

Подкоренные выражения должны быть неотрицательны, т. е.

$$\begin{cases} -x \geqslant 0, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

Этой системе неравенств удовлетворяет единственное значение $x=0$. Итак, данная функция определена только в одной точке $x=0$, причем $f(0)=0$.

В тех случаях, когда функция выражает зависимость между переменными в конкретных условиях некоторого исследования, может случиться, что область определения функции и *область допустимых значений аргумента* — не одно и то же.

Так, например, при свободном падении тела (без учета сопротивления воздуха) пройденный путь S в зависимости от времени t выражается функцией $S=\frac{gt^2}{2}$, которая определена (по смыслу переменной t) при $t \geqslant 0$. Если отвлечься от физической сущности переменных t и S, то тогда функция вида $S=\frac{gt^2}{2}$ определена на всей числовой оси (t).

§ 50. Некоторые свойства функций, используемые при построении графиков. Построение графика функции упрощается, если по уравнению $y=f(x)$ можно обнаружить некоторые свойства данной функции.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *четной*, если перемена знака у аргумента не меняет значения функции, т. е. $f(-x)=f(x)$.

График четной функции—кривая, симметричная относительно оси ординат (рис. 19).

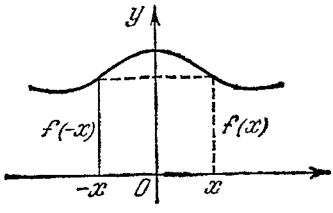

Рис. 19.

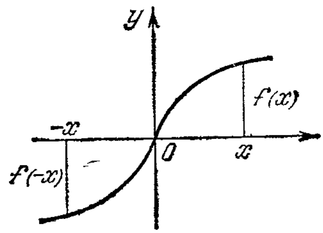

Рис. 20.

Примеры четных функций. 1) $y=3-x^2$; 2) $f(x)=$ $=x^4-4x^2+1$; 3) $y=\sqrt{9-x^2}$.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется *нечетной*, если перемена знака у аргумента изменяет только знак самой функции, не меняя ее абсолютной величины, т. е.

$$f(-x)=-f(x).$$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 20).

Примеры нечетных функций. 1) $y=3x$; 2) $y=\frac{1}{x}$; 3) $y(x)=\frac{1}{2}x^3-5x$.

Согласно определению, нечетность функции (пример 3) проверяем так:

$$y(-x)=\frac{1}{2}(-x)^3-5(-x)=-\left(\frac{1}{2}x^3-5x\right)=-y(x).$$

Однако бывают функции, как например, $y=2x+1$ или $y=x^2-x+3$, которые не являются ни четными, ни нечетными.

Определение 3. Функция называется *возрастающей* в данном промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.

График возрастающей функции—восходящая кривая, если перемещаться по оси Ox в положительном направлении (рис. 21, слева).

Определение 4. Функция называется *убывающей* в промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

График убывающей функции — нисходящая кривая, если смотреть на него в направлении слева направо (рис. 21, справа).

Пример 1. Показать, что функция $y=kx+b$ при $k>0$ возрастает, а при $k<0$ убывает.

Пусть x_1 и x_2 — два значения аргумента, причем $x_2>x_1$. Требуется убедиться в том, что $y_2>y_1$ при $k>0$ и $y_2<y_1$ при $k<0$.

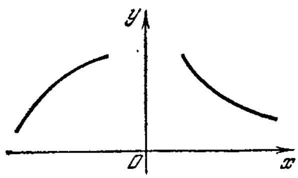

Рис. 21.

Значению аргумента x_1 соответствует значение функции

$$y_1=kx_1+b.$$

Значению аргумента x_2 соответствует

$$y_2=kx_2+b.$$

Вычитая из второго равенства первое, находим:

$$y_2-y_1=k(x_2-x_1).$$

При $k>0$ правая часть равенства положительна, как произведение двух положительных чисел, а потому и левая часть положительна, т. е. $y_2-y_1>0$, или $y_2>y_1$, а это и означает, что функция y возрастает.

При $k<0$ имеем: $k(x_2-x_1)<0$, т. е. $y_2-y_1<0$, или $y_2<y_1$; следовательно, функция $y=kx+b$ убывает.

§ 51. Линейная функция и ее график. Определение. Функция вида $y=kx+b$ называется *линейной*.

Можно указать на ряд примеров из физики, механики и других наук, где зависимости между переменными выражаются линейными функциями. Приведем несколько примеров.

1) Под влиянием переменной нагрузки x длина стержня, работающего на растяжение, изменяется в пределах упругих деформаций по закону

$$l=l_0+kx,$$

где l_0 — начальная длина (без нагрузки), k — растяжение, приходящееся на единицу нагрузки.

2) Если будем нагревать данную массу газа v_0, взятую при температуре 0° С, то при постоянном давлении p объем газа v будет увеличиваться с повышением температуры t по закону

$$v = v_0 + v_0 \alpha t = v_0 (1 + \alpha t),$$

где α — коэффициент объемного расширения данного газа.

3) Путь, пройденный телом при равномерном и прямолинейном движении, изменяется по закону

$$S = v_0 t + S_0,$$

где v_0 — постоянная скорость движения, S_0 — начальный путь. Составим таблицу значений линейной функции для данных значений $x_1, x_2, x_3, \ldots$ аргумента по формуле $y = kx + b$:

x	x_1	x_2	x_3	...
y	y_1	y_2	y_3	...

Изобразим каждую пару чисел $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$, ... в виде точки на плоскости. Получим ряд точек: M_1, M_2, M_3, ...

Если мы проведем прямую через какие-нибудь две из построенных точек, то окажется, что эта прямая проходит и через остальные построенные точки. Однако у нас нет никакой уверенности в том, что всякая новая точка, которая еще не построена, но которую можно построить, если продолжим таблицу, обязательно окажется на проведенной прямой. Это надо еще доказать.

Теорема. *Все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = kx + b$, лежат на одной прямой.*

Возьмем две точки M_0 и M_1, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = kx + b$. Покажем, что любая третья точка M_2 также лежит на прямой, проходящей через точки M_0 и M_1, если координаты точки M_2 удовлетворяют уравнению $y = kx + b$.

Доказательство. Пусть координаты точек $M_0(0; b)$ и $M_1(x_1; y_1)$ удовлетворяют данному уравнению $y = kx + b$. Тогда имеем два тождества:

$$b = k \cdot 0 + b, \qquad (1)$$

$$y_1 = kx_1 + b. \qquad (2)$$

Вычитаем почленно из равенства (2) равенство (1). При $x_1 \neq 0$ получим $y_1 - b = kx_1$, откуда

$$\frac{y_1 - b}{x_1} = k. \qquad (3)$$

Проведем через точки M_0 и M_1 прямую (рис. 22). Докажем, что точка M_2 лежит на прямой M_0M_1.

По условию $y_2 = kx_2 + b$ и, кроме того, $b = k \cdot 0 + b$; отсюда $y_2 - b = kx_2$, т. е.

$$\frac{y_2 - b}{x_2} = k. \qquad (4)$$

Сравнивая равенства (3) и (4), получим

$$\frac{y_1 - b}{x_1} = \frac{y_2 - b}{x_2}. \qquad (5)$$

Равенство (5) означает, что у двух прямоугольных треугольников $M_0C_1M_1$ и $M_0C_2M_2$ отношения сходственных катетов равны (рис. 22), а поэтому треугольники подобны. Из подобия следует, что угол $M_1M_0C_1$ равен углу $M_2M_0C_2$, а потому стороны M_0M_2 и M_0M_1 сливаются в одну, или, другими словами, все три точки M_0, M_1 и M_2 лежат на одной прямой.

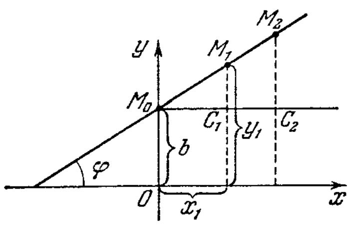

Рис. 22.

Теперь остается доказать, что любая точка M_3, координаты которой не удовлетворяют уравнению $y = kx + b$, не лежит на прямой M_0M_2. Последнее предлагается доказать читателю.

Отметим, что постоянная k называется *угловым коэффициентом* прямой и характеризует скорость того равномерного процесса, который изображен линейной функцией; величина b, получаемая как значение функции при $x = 0$, означает отрезок, отсекаемый на оси ординат.

Согласно сказанному в § 50, при $k > 0$ линейная функция монотонно возрастает, при $k < 0$ — монотонно убывает. Для построения графика достаточно вычислить координаты двух точек. По рис. 23 определите, как влияет величина углового коэффициента k на положение прямой относительно оси абсцисс.

§ 52. Квадратный трехчлен. Вводные замечания. В различных областях науки и техники приходится иметь дело с переменными величинами, связанными между собой функциональной зависимостью вида $y = ax^2 + bx + c$.

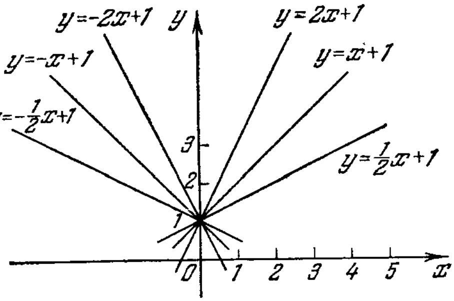

Рис. 23

Примеры 1. Путь, пройденный телом при равномерно ускоренном или равномерно замедленном прямолинейном движении, выражается формулой

$$S = \frac{at^2}{2} + v_0 t + S_0,$$

где t — время, S — пройденный путь, S_0 — начальный путь, v_0 — начальная скорость, a — ускорение.

2. Зависимость между диаметром круга d и его площадью F выражается формулой

$$F = \frac{\pi d^2}{4}.$$

3. Сопротивление, оказываемое средой, например воздухом, движению тела, пропорционально квадрату скорости: $f = kv^2$. Такое соотношение имеет место, например, при движении самолета в воздухе.

В примерах 2) и 3) мы имеем частный случай функциональной зависимости $y = ax^2 + bx + c$, когда $b = c = 0$.

Определение. Функция вида $y = ax^2 + bx + c$ называется *функцией второй степени* или *квадратным трехчленом*.

Приведенные выше три примера функциональных зависимостей были примерами функций второй степени.

Изучение свойств квадратного трехчлена начнем с рассмотрения частных случаев и построения соответствующих графиков.

§ 53. График функции $y = ax^2$. По уравнению легко обнаружить следующие свойства:

1) Функция определена при любом действительном x.

2) Функция ax^2— четная, так как $y(-x) = a(-x)^2 = ax^2$. Следовательно, график симметричен относительно оси ординат.

3) Функция обращается в нуль, если $x = 0$, т. е. график проходит через начало координат.

4) При $a > 0$ на положительной полуоси функция возрастает, на отрицательной—убывает.

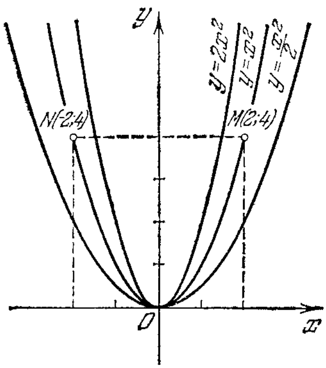

Рис. 24.

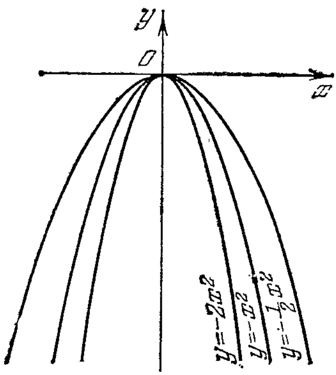

Рис. 25.

В самом деле, пусть x_1 и x_2—два положительных значения аргумента ($x_2 > x_1$), тогда $y_2 > y_1$, ибо разность $a(x_2^2 - x_1^2) > 0$, как произведение двух положительных чисел. На отрицательной полуоси большему отрицательному числу соответствует меньший квадрат этого числа. (Например, $-2 > -3$, но $(-2)^2 < (-3)^2$.) Следовательно, $a(x_2^2 - x_1^2) < 0$ при $a > 0$.

Опираясь на результаты исследования, можно построить график функции.

Определение. График функции $y = ax^2$ называется *параболой*.

На рис. 24 изображены три различных параболы:

$$1)\ y = x^2, \quad 2)\ y = 2x^2, \quad 3)\ y = \frac{1}{2}x^2.$$

Выясним, какую роль играет числовая величина коэффициента a при x^2. С этой целью сравним ординаты двух парабол $y=x^2$ и $y=2x^2$, соответствующие одной и той же абсциссе, равной x_0, т. е. величины $y_1=x_0^2$, $y_2=2x_0^2$. Получаем, что $\frac{y_2}{y_1}=2$ или $y_2=2y_1$.

Таким образом, *все ординаты параболы $y=2x^2$ в два раза больше ординат параболы $y=x^2$, взятых при одних и тех же абсциссах*; это позволяет легко построить график $y=2x^2$ по имеющемуся графику $y=x^2$. Для этого надо все ординаты точек параболы $y=x^2$ подвергнуть растяжению в положительном направлении оси Oy, увеличив их вдвое. Аналогично, график $y=\frac{1}{2}x^2$ может быть получен из графика $y=x^2$ сжатием всех ординат в два раза, что изображено на рис. 24.

Для получения графика функции $y=-ax^2$, имея график функции $y=ax^2$, надо график $y=ax^2$ отразить симметрично относительно оси Ox, так как при одних и тех же значениях x ординаты $y_1=ax^2$ и $y_2=-ax^2$ отличаются только знаками.

На рис. 25 изображены параболы $y=-x^2$, $y=-2x^2$, $y=-\frac{1}{2}x^2$ как зеркальные отображения относительно Ox парабол:

$$y=x^2, \quad y=2x^2, \quad y=\frac{1}{2}x^2.$$

Пример. Пользуясь графиком $y=x^2$, найти $\sqrt{10}$.

Отложим по оси Oy вверх от начала координат отрезок OB, равный 10 единицам масштаба, и через точку B проведем прямую, параллельную оси Ox. Пусть M — точка пересечения этой прямой с параболой, лежащая в первой четверти. Абсцисса этой точки и дает приближенное значение $\sqrt{10}$.

§ 54. График функции $y=ax^2+n$. Если параболу $y=ax^2$ перенесем параллельно самой себе в положительном направлении оси Oy на n единиц вверх (при $n>0$), то новое уравнение кривой будет $y=ax^2+n$, так как от такого переноса все ординаты увеличились на одну и ту же величину, а абсциссы остались прежними. При $n<0$ параллельный перенос надо произвести в отрицательном направлении оси Oy, другими словами, кривую надо опустить вниз на $-n$ единиц.

На рис. 26 показаны соответствующие преобразования при $n=3$ и $n=-2$.

§ 55. График функции $y=(x-m)^2$. Произведем сдвиг параболы $y=x^2$ вдоль оси Ox в положительном направлении на величину, равную двум единицам масштаба (рис. 27). Тогда точка M перейдет в точку M_1, точка N — в точку N_1 и то же самое произойдет со всякой другой точкой графика. При этом преобразовании абсциссы точек M_1 и N_1 увеличатся на две единицы по сравнению с абсциссами точек M и N, а ординаты останутся без изменения.

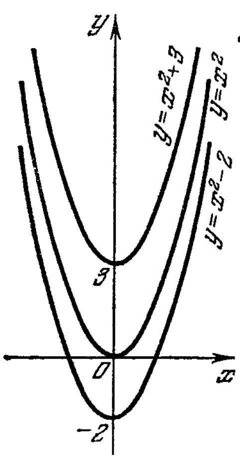

Рис. 26.

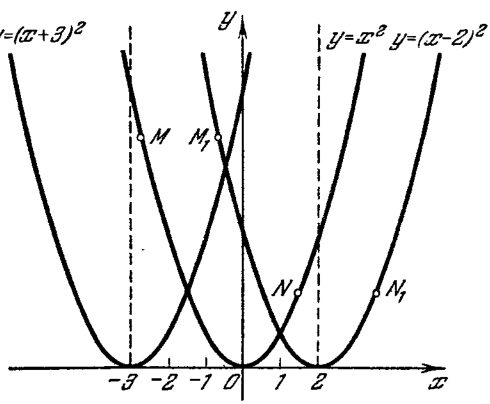

Рис. 27.

Отсюда следует, что уравнение параболы в новом положении относительно координатной системы должно быть $y=(x-2)^2$. Подобным образом при сдвиге параболы в отрицательном направлении оси Ox на три единицы масштаба новое уравнение параболы будет $y=$ $=(x+3)^2$, так как при таком движении абсцисса каждой точки уменьшилась на три единицы, а ординаты остались без изменения.

Ясно, что имеет место следующее общее положение. График функции $y=(x-m)^2$ может быть получен сдвигом параболы $y=x^2$ вдоль оси Ox на $|m|$ единиц масштаба вправо, если $m>0$, и влево, если $m<0$.

Примечание. График функции $y=a(x-m)^2$ может быть получен аналогичным образом из графика функции $y=ax^2$.

§ 56. График функции $y=(x-m)^2+n$. Переход от параболы $y=x^2$ к графику функции $y=(x-m)^2+n$ можно совершить в два этапа:

1) сдвигом параболы $y=x^2$ вдоль оси Ox на величину m, что даст график функции $y=(x-m)^2$;

2) переносом кривой $y=(x-m)^2$ параллельно самой себе на величину n (т. е. на $|n|$ вверх, если $n>0$, и вниз, если $n<0$).

На рис. 28 изображено построение графика $y=(x+2)^2-3$.

1) Сдвигаем параболу $y=x^2$ вдоль оси Ox в отрицательном направлении на две единицы, получаем график функции

$$y=(x+2)^2.$$

2) Делаем параллельный перенос параболы $y=(x+2)^2$ на три единицы вниз, что приводит к графику исходной функции

$$y=(x+2)^2-3.$$

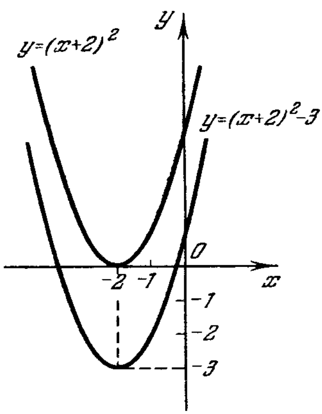

Рис. 28.

Вообще график функции $y=(x-m)^2+n$ есть парабола, ось симметрии которой (называемая также *осью параболы*) параллельна оси ординат, а *вершина* находится в точке $C(m;\ n)$.

§ 57. График функции $y=ax^2+bx+c$. Покажем, что квадратный трехчлен всегда можно преобразовать к виду $y=a(x-m)^2+n$. Имеем:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left[x^2+2x\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Если обозначим $-\frac{b}{2a}$ через m, $\frac{4ac-b^2}{4a}$ через n, то трехчлен окончательно примет вид $y=a(x-m)^2+n$.

Выполненное нами преобразование позволяет сразу строить график функции по имеющемуся графику $y=ax^2$.

Пример. $y=x^2+4x-1$.

Преобразуем правую часть:

$$x^2+4x+1=x^2+4x+4-4+1=(x+2)^2-3,$$
$$y=(x+2)^2-3 \text{ (см. рис. 28).}$$

§ 58. Общее заключение о квадратном трехчлене. Мы рассмотрели квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$, начиная с частных случаев:

1) $y=ax^2$ $(b=c=0,\ a\neq 0)$;

2) $y=ax^2+c$ $(b=0,\ a\neq 0,\ c\neq 0)$;

3) $y=ax^2+bx$ $(c=0,\ a\neq 0,\ b\neq 0)$;

и, наконец, полный его вид

4) $y=ax^2+bx+c$, когда a, b и c не равны нулю.

Во всех рассмотренных четырех случаях графики функций представляют одну и ту же кривую — параболу, но только по-разному расположенную относительно координатных осей.

По графику нам легко проследить за ходом изменения функции, установить свойства функции.

Свойства функции $y=ax^2$ нами были установлены аналитически, т. е. по уравнению, до того, как был построен график.

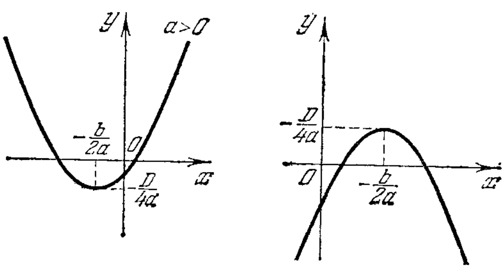

Рис. 29.

Устанавливать аналитически свойства функции $y=ax^2+bx+c$ мы не будем.

Тем не менее мы можем установить некоторые из этих свойств по графику (рис. 29). Этим будет оправдана целесообразность приведения квадратного трехчлена $y=ax^2+bx+c$ к виду $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$.

1) Функция $y=ax^2+bx+c$ определена на всей числовой оси, т. е. при любом действительном значении аргумента.

2) При $a>0$ в промежутке $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ трехчлен монотонно убывает, в промежутке $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ — монотонно возрастает.

3) В точке $x=-\frac{b}{2a}$ трехчлен имеет наименьшее значение $(a>0)$, равное $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

4) При $a<0$ трехчлен возрастает в промежутке $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ и убывает в промежутке $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$, достигая в точке $x=-\frac{b}{2a}$ своего наибольшего значения. Это наибольшее значение равно $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

§ 59. Задачи на квадратный трехчлен.

Задача 1. Из всех прямоугольников данного периметра $p=24$ (м) найти тот, который имеет наибольшую площадь. Пусть x — основание прямоугольника, тогда высота равна $(12-x)$, площадь

$$y=x(12-x)=12x-x^2=36-(x-6)^2.$$

Ясно, что при $x=6$ имеем наибольшее значение площади $y=36$, а прямоугольник есть квадрат.

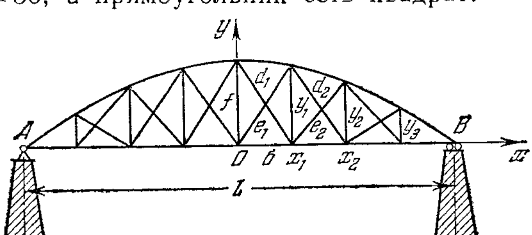

Рис. 30.

Задача 2. На рис. 30 изображена параболическая ферма с величиной пролета $l=40$ м и высотой стрелки

$f=5$ м. Ферма разделена на восемь равных по ширине участков. Подсчитать длины стоек y_1, y_2 и y_3.

Составим уравнение параболы AB; оно должно иметь вид $y=ax^2+c$, где $a<0$. Свободный член $c=f=5$. Координаты точки B: $x_B=\frac{l}{2}=20$, $y_B=0$. Зная координаты точки B, можно с их помощью определить коэффициент a: действительно, из $0=a\cdot 20^2+5$ получаем $a=-\frac{1}{80}$. Следовательно, уравнение параболы AB принимает вид

$$y=-\frac{1}{80}x^2+5.$$

Длина стойки y_1 равна величине ординаты параболы при абсциссе $x_1=\frac{20}{4}=5$, т. е.

$$y_1=-\frac{1}{80}\cdot 5^2+5, \quad y_1\approx 4{,}7.$$

Аналогично

$$y_2=y(10)=-\frac{1}{80}\cdot 10^2+5, \quad y_2=3{,}75;$$

$$y_3=y(15)=-\frac{1}{80}\cdot 15^2+5, \quad y_3\approx 2{,}2.$$

Задача 3. Найти наименьшее значение функции $y=\sqrt{x^2+x+1}$.

Квадратный трехчлен, стоящий под знаком радикала, достигает наименьшего значения в точке $x=-\frac{b}{2a}$; в данном случае $a=1$, $b=1$, $-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2}$, и наименьшее значение трехчлена x^2+x+1 равно

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)+1=\frac{3}{4}.$$

Наименьшему значению подкоренного выражения соответствует наименьшее значение арифметического корня.

Следовательно, $y_{\text{наим}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}866$.

§ 60. График функции $y=\frac{1}{x}$. Построение графиков более сложных функций. Построим график функции $y=\frac{1}{x}$, часто встречающейся на практике.

Установим сначала некоторые свойства этой функции.

1) Функция определена при всех действительных $x \neq 0$. При $x = 0$ функция не определена (делить на нуль нельзя!). Таким образом, область определения состоит из двух промежутков: $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

2) Функция нечетна, так как $f(-x) = -f(x)$. Следовательно, график ее симметричен относительно начала координат. Поэтому достаточно рассмотреть эту функцию только для $x > 0$.

3) При $x > 0$ функция *убывает* с ростом x. Действительно, пусть $x_2 > x_1 > 0$, тогда $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$, т. е. $y_2 < y_1$.

Составим таблицу значений функции

x	...	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	...
y	...	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...

График функции $y = \frac{1}{x}$ приведен на рис. 31. Эта кривая называется *равнобочной гиперболой*. Она состоит из

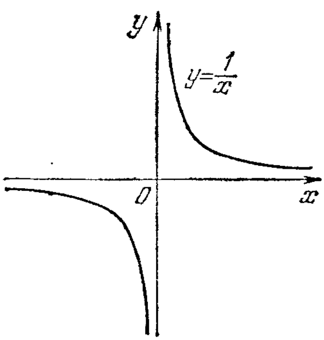

Рис. 31.

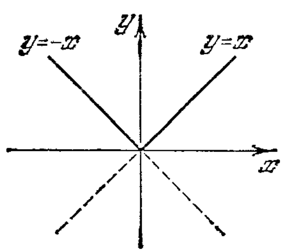

Рис. 32.

двух ветвей, расположенных в первой и третьей четвертях.

Такой же вид имеет и график функции $y = \frac{a}{x}$ при $a > 0$; если же $a < 0$, то мы получаем гиперболу, ветви которой расположены во второй и четвертой четвертях.

В предыдущих параграфах были построены графики простейших функций — линейной функции и квадратного трехчлена. Покажем теперь на нескольких примерах, как можно построить графики других функций, более сложных по своему способу задания.

Пример 1. Построить график функции: $y=|x|$.

1) Если $x \geqslant 0$, то $|x|=x$ и наша функция $y=x$, т. е. искомый график совпадает с биссектрисой первого координатного угла.

2) Если $x<0$, то $|x|=-x$ и $y=-x$. При отрицательных значениях аргумента x график данной функции — прямая $y=-x$, т. е. биссектриса второго координатного угла.

Таким образом, искомый график есть ломаная, составленная из двух полупрямых (рис. 32).

Из сопоставления двух графиков: $y=x$ и $y=|x|$ заключаем, что второй получается из первого зеркальным отображением относительно Ox той части первого графика, которая лежит под осью абсцисс. Это положение вытекает из определения абсолютной величины.

Пример 2. $y=|x-2|$.

Построим сначала график функции $y=x-2$ (рис. 33), который пересекает ось абсцисс в точке $x=2$. Часть графика, лежащую под осью абсцисс, отобразим зеркально относительно оси Ox, это и будет график $y=|x-2|$.

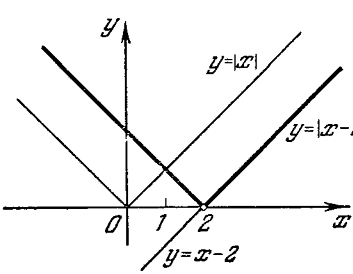

Рис. 33.

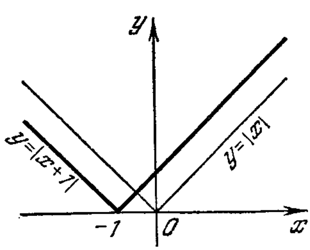

Рис. 34.

Нетрудно заметить, что если сдвинуть вдоль оси Ox в положительном направлении на 2 единицы график $y=|x|$, то получим новый график $y=|x-2|$.

Подобным образом график $y=|x+1|$ получается из графика $y=|x|$ параллельным переносом его в отрицательном направлении оси Ox на 1 единицу масштаба (рис. 34).

Пример 3. $y=\frac{x}{|x|}$.

1) При всех значениях $x<0$ имеем $|x|=-x$, а поэтому $y=\frac{x}{-x}=-1$.

2) При всех $x>0$ будет $y=\frac{x}{x}=1$. Итак,

$$y=\begin{cases} 1 \text{ при } x>0, \\ -1 \text{ при } x<0. \end{cases}$$

В точке $x=0$ данная функция не определена, так как выражение $\frac{0}{0}$ считается неопределенным. График функции изображен на рис. 35.

Пример 4. $y=x\cdot|x|$.

Очевидно, что

$$y=\begin{cases} -x^2 \text{ при } x\leqslant 0, \\ x^2 \text{ при } x>0. \end{cases}$$

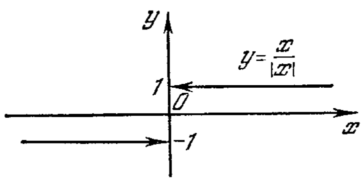

Рис. 35.

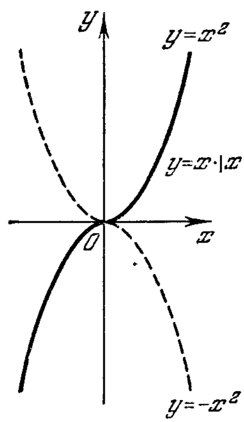

Рис. 36.

График данной функции представляет собой комбинацию левой половины параболы $y=-x^2$ с правой половиной другой параболы $y=x^2$ (рис. 36). Под левою половиной параболы $y=-x^2$ мы подразумеваем ту ее часть, которая соответствует отрицательным абсциссам. Аналогично правой половиной параболы $y=x^2$ нами названа та ее часть, которая соответствует положительным абсциссам.

Упражнения

1. Дана функция $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$. Найти $f(0)$; $f(-1)$; $f(1)$; $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. Найти величину дроби $\frac{f(2)}{\varphi(2)}$ и произведения $f(1)\cdot\varphi(3)$, если $f(x)=2x+1$, $\varphi(x)=x^2+4$.

3. Найти область определения каждой из следующих фуикций:

1) $y=\frac{2x}{1+x^2}$; 2) $y=\sqrt{2x+1}$; 3) $y=\sqrt{-x}$; 4) $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$; 5) $y=\sqrt{x^2-4}$; 6) $y=\frac{1}{2x-3}$; 7) $y=\frac{1+x}{\sqrt[3]{x}}$.

4. Указать, какие из приведенных ниже функций являются четными, какие — нечетными, какие — ни теми, ни другими:

1) $y=x^4+1$; 2) $y=x^2+x$; 3) $y=\frac{1}{x+2}$; 4) $y=\frac{x}{x^2-4}$; 5) $y=\frac{x-3}{x+1}$; 6) $y=\sqrt[3]{x^2}$; 7) $y=\frac{x-x^3}{1+x^2}$.

5. Построить графики следующих функций:

1) $y=\sqrt[3]{x^2}$; 2) $y=\frac{3}{\sqrt{3+x^2}}$; 3) $y=\frac{2x+1}{x+2}$; 4) $y^2=x^3$.

6. Перенести параболу $y=x^2$ параллельно самой себе; 1) вверх на 1 единицу; 2) вниз на 2 единицы; 3) вверх на 5 единиц. Для каждого случая написать новое уравнение параболы.

7. Как располагается вершина параболы $y=x^2+q$ на оси ординат, если: 1) $q>0$; 2) $q<0$; 3) $q=0$?

8. Произвести сдвиг параболы $y=x^2$ вдоль оси абсцисс: 1) вправо на 4 единицы; 2) влево на 3 единицы. Для каждого случая написать новое уравнение параболы.

9. Указать, каким перемещением параболы $y=x^2$ получается каждая из кривых: 1) $y=(x-2)^2+1$; 2) $y=(x+1)^2-4$; 3) $y=(x-3)^2-4$; 4) $y=(x+4)^2+1$.

10. Параболу $y=x^2$ перенести параллельно самой себе:

1) на 3 единицы *вправо* и на 2 единицы *вверх*; 2) на 1 единицу *влево* и на 3 единицы *вверх*; 3) на 5 единиц *вправо* и на 4 единицы *вниз*; 4) на 1,5 единицы *влево* и на 2,5 единицы *вниз*.

Написать для каждого из упомянутых четырех случаев новое уравнение параболы.

11. Как надо сместить параболу $y=x^2$ относительно координатных осей, чтобы новое уравнение параболы было: 1) $y=x^2-8x+7$; 2) $y=x^2+4x+3$; 3) $y=x^2-x+2\frac{1}{4}$? Каковы будут новые координаты вершины параболы в каждом отдельном случае?

12. Каково взаимное расположение каждой из следующих пар парабол: 1) $y=3x^2$ и $y=-3x^2$; 2) $y=(x-1)^2$ и $y=-(x-1)^2$; 3) $y=(x+2)^2+3$ и $y=-(x+2)^2+3$?

13. Чему должен быть равен коэффициент a, если известно, что значение функции $y=ax^2$ при $x=1$ равно 2?

14. Тот же вопрос при условии, что парабола $y=ax^2$ должна пройти через точку (2; —4).

15. Какие значения надо придать коэффициентам a и c в формуле $y=ax^2+c$, выражающей функцию второй степени, чтобы график функции проходил через точки $M(-1;\ -3)$ и $P(3;\ 0)$?

16. При каком значении аргумента x функция $y=x^2-7x-10$ имеет наименьшее значение?

17. В какой точке, т. е. при каком значении аргумента x, функция $y=-x^2+8x+7$ достигает своего наибольшего значения?

ГЛАВА VII

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 61. Связь (зависимость) между квадратным трехчленом и квадратным уравнением. При графическом исследовании квадратного трехчлена мы сознательно не касались одного важного вопроса, а именно: при каких значениях аргумента x трехчлен обращается в нуль и существуют ли, вообще говоря, такие значения аргумента?

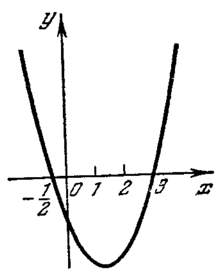

Рис. 37.

В каждом конкретном случае по графику функции мы можем ответить на поставленный вопрос. Например, функция $y = 2x^2 - 5x - 3$ дважды обращается в нуль: при $x = -\frac{1}{2}$ и $x = 3$, что видно из графика (рис. 37). Однако такое графическое решение вопроса в ряде случаев надо признать неполноценным, так как, во-первых, построение графика отнимают много труда и времени; во-вторых, корни трехчлена по графику можно найти лишь приближенно, поэтому надо искать аналитические способы решения поставленной задачи, что, естественно, приводит нас к решению уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

§ 62. Основные понятия и определения.

Определение. Уравнение, в котором левая часть есть многочлен второй степени относительно неизвестного x, а правая часть равна нулю, называется *квадратным*.

Общий вид квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Числа a, b и c называются *коэффициентами* квадратного уравнения; из них a — первый коэффициент, или коэффициент при старшем члене, b — второй коэффициент, или коэффициент при неизвестном в первой степени, c — свободный член.

Число x_0, обращающее квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ в нуль, называется *корнем* трехчлена, а также и корнем квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Например, корни трехчлена $y = 2x^2 - 5x - 3$ равны $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_2 = 3$, так как

$$y\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = 0$$

и

$$y(3) = 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 - 3 = 0.$$

По-другому мы скажем, что квадратное уравнение $2x^2 - 5x - 3 = 0$ имеет два корня: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 3$.

§ 63. Неполные квадратные уравнения.

1. Типы неполных квадратных уравнений. Если в квадратном уравнении общего вида $ax^2 + bx + c = 0$ один из двух коэффициентов, b или c, равен нулю или оба одновременно равны нулю, то квадратное уравнение называется *неполным*.

Возможны три типа неполных квадратных уравнений:

1) $ax^2 + bx = 0$ $\quad (c = 0,\ a \neq 0,\ b \neq 0)$;

2) $ax^2 + c = 0$ $\quad (b = 0,\ a \neq 0,\ c \neq 0)$;

3) $ax^2 = 0$ $\quad (a \neq 0,\ b = c = 0)$.

2. Решение неполных квадратных уравнений. 1) Уравнение $ax^2 + bx = 0$ решается разложением левой части на множители: $x(ax + b) = 0$. Произведение обращается в нуль тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю; поэтому либо $x = 0$, либо $ax + b = 0$, откуда $x = -\frac{b}{a}$.

Итак, неполное квадратное уравнение $ax^2 + bx = 0$ имеет два корня: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Пример. $4x^2 - 3x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{4}$.

2) Уравнение $ax^2+c=0$ почленным делением на a и переносом свободного члена в правую часть приводим к виду: $x^2=-\frac{c}{a}$, $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Если коэффициенты a и c имеют противоположные знаки, то $\frac{c}{a}<0$, а потому неизвестное x имеет два действительных значения, противоположных по знаку:

$$x_1=-\sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2=\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Примеры. 1) $4x^2-9=0$, $x_1=-\sqrt{\frac{9}{4}}=-\frac{3}{2}$, $x_2=\frac{3}{2}$. 2) $3x^2+5=0$, $x^2=-\frac{5}{3}$. Данное уравнение корней не имеет, так как нет такого действительного числа x, квадрат которого равен отрицательному числу $-\frac{5}{3}$. В таких случаях говорят, что корни мнимые (о мнимых числах см. гл. XV).

3) $ax^2=0$. Так как $a\neq 0$, то $x^2=0$, $x=0$. Говорят, что число 0 является двукратным корнем уравнения $ax^2=0$, т. е. $x_1=x_2=0$.

§ 64. Приведение полного квадратного уравнения к виду $(x+m)^2=n$ $(n\geqslant 0)$. Подобно тому как решалось неполное квадратное уравнение $ax^2+c=0$, может быть решено уравнение $(x+m)^2=n$.

Извлекая квадратный корень из обеих частей, получим $x+m=\pm\sqrt{n}$, откуда

$$x_1=-m-\sqrt{n}, \quad x_2=-m+\sqrt{n}.$$

Пример 1. $(x+3)^2=25$, $x+3=\pm 5$, $x_1=-8$, $x_2=2$.

Проверка. $(-8+3)^2=25$, $(2+3)^2=25$. Оба корня удовлетворяют уравнению. Если в данном примере раскрыть скобки и перенести все члены в левую часть, то получим полное квадратное уравнение $x^2-6x-16=0$.

Приемы решения такого уравнения пока нам неизвестны. Но если мы сумеем его привести к форме $(x+m)^2=n$, то этим и будет найден способ решения.

Пример 2. $x^2-8x-65=0$.

Выделим в левой части полный квадрат разности:

$$x^2-8x+16-16-65=0,$$

$$(x-4)^2=81;\ x-4=\pm 9;\ x_1=-5;\ x_2=13.$$

§ 65. Вывод формулы корней приведенного квадратного уравнения. Квадратное уравнение, у которого первый коэффициент равен 1, т. е. уравнение вида $x^2+px+q=0$, называется *приведенным*.

Преобразуем левую часть приведенного квадратного уравнения:

$$x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=0.$$

Здесь в левую часть уравнения введены в качестве слагаемых два противоположных числа $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ и $-\left(\frac{p}{2}\right)^2$, что, конечно, не изменяет величины левой части.

После переноса последних двух слагаемых в правую часть имеем:

$$x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$

или

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q.$$

Извлекаем квадратный корень из обеих частей, считая, что

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\geqslant 0;\ \text{тогда}\ x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},$$

откуда

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Это и есть формула, по которой вычисляются корни приведенного квадратного уравнения. Словами ее можно выразить так:

Корни приведенного квадратного уравнения равны половине второго коэффициента, взятого с противоположным знаком, плюс-минус квадратный корень из квадрата этой половины без свободного члена.

Теперь мы можем сразу найти корни всякого приведенного квадратного уравнения.

Пример. Решить уравнение $x^2-3x-28=0$. Здесь $p=-3$, $q=-28$. Поэтому

$$x_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-(-28)},$$

$$x_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\frac{11}{2},\quad x_1=-4,\quad x_2=7.$$

§ 66. Общая формула корней квадратного уравнения. Если требуется найти корни квадратного уравнения общего вида $ax^2+bx+c=0$, то после деления всех членов на $a\,(a\neq 0)$ оно перейдет в приведенное:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Тогда

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}$$

или

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}},\quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Корни квадратного уравнения общего вида равны дроби, знаменатель которой равен удвоенному первому коэффициенту, а числитель равен второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, плюс-минус квадратный корень из квадрата этого коэффициента без учетверенного произведения первого коэффициента на свободный член.

Пример 1. $4x^2-5x-6=0$ $(a=4,\ b=-5,\ c=-6)$;

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\,(-6)\,4}}{8},\quad x_{1,2}=\frac{5\pm 11}{8},\quad x_1=-\frac{3}{4},\quad x_2=2.$$

Если второй коэффициент $b=2m$, то формула корней может быть упрощена; в этом случае имеем:

$$x_{1,2}=\frac{-2m\pm\sqrt{4m^2-4ac}}{2a}=\frac{-2m\pm 2\sqrt{m^2-ac}}{2a},$$

или

$$x_{1,2}=\frac{-m\pm\sqrt{m^2-ac}}{a}.$$

Пример 2. $5x^2-8x-4=0$.

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+4\cdot 5}}{5},\quad x_1=-\frac{2}{5},\quad x_2=2.$$

§ 67. Свойства корней квадратного уравнения. Между корнями квадратного уравнения и его коэффициентами существует зависимость, выражаемая следующей теоремой.

Теорема. *Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.*

Доказательство. По формуле корней приведенного квадратного уравнения имеем:

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Складывая почленно эти два равенства, получим:

$$x_1 + x_2 = -p.$$

Перемножая почленно те же равенства, получим

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2$$

(произведение разности двух чисел на их сумму),

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q, \quad x_1 \cdot x_2 = q,$$

что и требовалось доказать.

Справедлива и обратная теорема. *Если сумма двух неизвестных чисел равна p, а их произведение равно q, то искомые числа являются корнями квадратного уравнения*

$$x^2 - px + q = 0. \qquad (1)$$

Доказательство. Если m и n — неизвестные числа, то по условию теоремы имеем:

$$\left.\begin{aligned} m + n &= p, \\ m \cdot n &= q. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

На основании равенств (2) уравнение (1) принимает вид

$$x^2 - (m + n)\,x + mn = 0. \qquad (3)$$

Подстановка в уравнение (3) на место x числа m дает

$$m^2 - (m + n)\,m + mn = 0$$

или

$$0 = 0.$$

Подобным образом убеждаемся, что число n также есть корень уравнения (3), и этим справедливость обратной теоремы доказана.

Следствие. Для квадратного уравнения общего вида $ax^2+bx+c=0$, после его приведения к виду $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, имеем

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Если заданы корни квадратного уравнения, то можно составить и само уравнение, опираясь на доказанную нами обратную теорему.

Пример 1. Составить квадратное уравнение, корни которого равны: $x_1=-3$, $x_2=5$. Вычисляем сумму и произведение корней: $x_1+x_2=2$, $x_1\cdot x_2=-15$.

Искомое уравнение: $x^2-2x-15=0$.

Пример 2. $x_1=3-\sqrt{2}$, $x_2=3+\sqrt{2}$.

Находим: $x_1+x_2=6$, $x_1\cdot x_2=7$.

Искомое уравнение: $x^2-6x+7=0$.

§ 68. Разложение квадратного трехчлена на множители. Пользуясь свойствами корней квадратного уравнения, можно всякий трехчлен с действительными корнями разложить на множители:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$$
$$=a\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right]=a\left[(x^2-x_1x)-(x_2x-x_1x_2)\right]=$$
$$=a\left[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)\right]=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Пример. $2x^2+5x-3=2(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

Корни трехчлена: $x_1=-3$, $x_2=\frac{1}{2}$.

§ 69. Исследование корней квадратного уравнения. При решении квадратных уравнений с числовыми коэффициентами в некоторых случаях получаются два действительных и различных между собой корня, в других — два равных действительных корня, а в иных — два мнимых корня.

Естественно возникают такие вопросы: 1) от чего зависит характер корней квадратного уравнения? 2) нельзя ли заранее сказать, не решая самого уравнения, будет ли оно иметь действительные корни, и если да, то положительны они или отрицательны?

Ответы на поставленные вопросы и составляют то, что принято называть **исследованием** корней квадратного уравнения.

В этом исследовании важную роль играет выражение $D=b^2-4ac$, называемое *дискриминантом квадратного уравнения.*

Возможны следующие три случая.

Случай 1. $a>0$, $D>0$.

Если дискриминант — положительное число, то квадратное уравнение имеет два действительных и различных корня, так как выражение $\pm\sqrt{b^2-4ac}$ представляет собой два противоположных числа, причем ни одно из них не равно нулю; следовательно, дроби

$$\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad \text{и} \quad \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

имеют разные числители при одинаковых знаменателях.

Относительно знаков у коэффициентов b и c можно сделать следующие четыре предположения:

1) $$b<0, \ c>0.$$

Если свободный член положителен, то оба корня одинаковы по знаку, так как $x_1x_2=\frac{c}{a}>0$. Сумма корней $x_1+x_2=-\frac{b}{a}>0$ и потому оба корня положительны.

2) $$b>0, \quad c>0.$$

Оба корня одинаковы по знаку и оба отрицательны, так как знак суммы корней противоположен знаку коэффициентов $\frac{b}{a}>0$.

3) $$b<0, \quad c<0.$$

Корни противоположны по знаку, так как их произведение отрицательно: $x_1x_2=\frac{c}{a}<0$. Бóльший по абсолютной величине корень положителен, ибо

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}>0.$$

4) $$b>0, \quad c<0.$$

Корни противоположны по знаку. Бо́льший по абсолютной величине корень отрицателен.

Случай 2. $a > 0$, $D = 0$.

Оба корня действительны и одинаковы: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$, как это следует из формулы корней квадратного уравнения. При $b > 0$ оба корня отрицательны, при $b < 0$ оба корня положительны.

Случай 3. $a > 0$, $D < 0$.

Квадратное уравнение действительных корней не имеет, так как квадратный корень из отрицательного числа $\sqrt{D}$ есть мнимое число. Такие случаи нами пока рассматриваться не будут (см. гл. XV).

Примечание. Если $a < 0$, то, помножив обе части уравнения на -1, получим уравнение с положительным коэффициентом при x^2.

Результаты исследования истолкованы геометрически на графике квадратного трехчлена (рис. 38): в случае 1 парабола пересекает ось абсцисс в двух точках x_1 и x_2

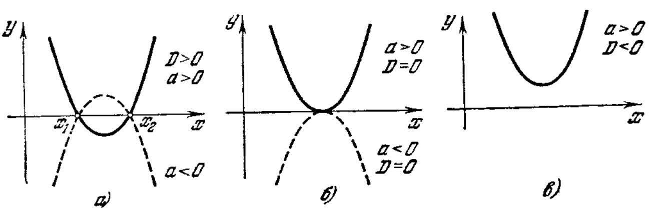

Рис. 38.

(x_1 и x_2—корни трехчлена и в то же время корни квадратного уравнения); в случае 2 парабола касается оси абсцисс (два корня сливаются в один) и в случае 3 парабола не пересекает ось Ox (корни мнимые).

§ 70. Решение задач, основанных на свойствах корней квадратного уравнения.

Задача 1. Дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Составить новое квадратное уравнение, корни которого обратны корням данного уравнения.

Обозначим корни нового уравнения через α и β, тогда $\alpha = \frac{1}{x_1}$, $\beta = \frac{1}{x_2}$, где x_1 и x_2—корни данного уравнения

Найдем сумму и произведение новых корней:

$$\alpha+\beta=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}, \qquad \alpha\cdot\beta=\frac{1}{x_1x_2}.$$

Но так как $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$, то

$$\alpha+\beta=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c}, \qquad \alpha\cdot\beta=\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{a}{c}.$$

Зная сумму и произведение корней, составляем само уравнение $x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0$, или $cx^2+bx+a=0$.

Таким образом, если поменять местами крайние коэффициенты квадратного уравнения, то корни нового уравнения будут обратны корням первоначального.

Задача 2. Дано уравнение $2x^2+mx+30=0$. При каком значении m отношение корней $\frac{x_1}{x_2}=\frac{3}{5}$?

По свойству корней квадратного уравнения и по условию задачи имеем:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{m}{2}, \\ x_1\cdot x_2=15, \\ \frac{x_1}{x_2}=\frac{3}{5}. \end{cases}$$

Исключив из этой системы неизвестные x_1 и x_2, найдем m. Именно, найдя из третьего уравнения $x_1=\frac{3}{5}x_2$ и подставив в первые два, получим:

$$\begin{cases} \frac{8}{5}x_2=-\frac{m}{2}, \\ \frac{3}{5}x_2^2=15, \end{cases}$$

откуда $x_2=\pm 5$, $\frac{8}{5}(\pm 5)=-\frac{m}{2}$, $m=\pm 16$.

Задача 3. Найти сумму квадратов и сумму кубов корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, не находя самих корней x_1 и x_2.

1) Сумма квадратов $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=$ $=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$.

2) Сумму кубов корней можно представить следующим образом:

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2),$$

$$x_1^3+x_2^3=\left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\cdot\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)=\frac{3bc}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}.$$

§ 71. Задачи на квадратные уравнения.

Задача 1. По сторонам прямого угла равномерно движутся два тела A и B по направлению к вершине прямого угла.

Скорость тела A в два раза больше скорости тела B. Через 10 с расстояние между A и B равно 130 м. Найти скорость каждого тела, если в момент начала движения тело A находилось на расстоянии 270 м от вершины прямого угла, тело B — на расстоянии 125 м (рис. 39).

Пусть скорость тела A равна $2x$ м/с, скорость тела B равна x м/с. Тогда по истечении 10 с расстояние тела A от вершины равно $(270-20x)$ м, а расстояние тела B от вершины равно $(125-10x)$ м.

По условию задачи должно быть

$$(270-20x)^2+(125-10x)^2=130^2.$$

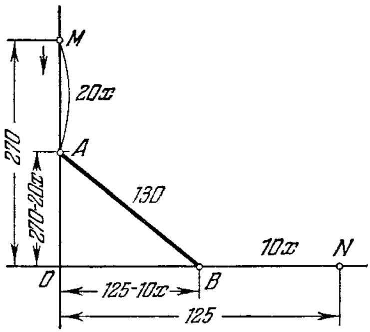

Рис. 39.

Раскрывая скобки, перенося все члены в левую часть, получим квадратное уравнение

$$20x^2-532x+2865=0.$$

Его корни $x_1=7{,}5$; $x_2=19{,}1$.

Таким образом, скорость тела B равна или 7,5 м/с, или 19,1 м/с, скорость тела A равна соответственно или 15 м/с, или 38,2 м/с.

В первом случае оба тела не дошли до вершины: A находится на расстоянии $270-150=120$ м, B находится на расстоянии $125-75=50$ м.

Так как $120^2+50^2=130^2$, то полученный ответ удовлетворяет условиям задачи.

Второй ответ не удовлетворяет условиям задачи в строгом смысле слова, так как через 10 с пройденный каждым телом путь будет уже больше расстояния до вершины и тела будут находиться не на сторонах прямого угла, а на их продолжениях за вершину. Для принятия второго ответа надо изменить условия задачи: вместо фразы «по сторонам прямого угла движутся два тела» следует сказать «по взаимно перпендикулярным прямым движутся два тела», и тогда оба ответа будут удовлетворять условиям задачи.

Задача 2 (историческая, принадлежит Эйлеру). Две крестьянки принесли на рынок вместе 100 яиц; из них одна имела больше яиц, чем другая, но обе выручили от продажи одинаковые суммы денег. Одна из них сказала другой: «Будь у меня твои яйца, я выручила бы 15 крейцеров». Вторая ответила: «А будь у меня твои яйца, я выручила бы за них $6\frac{2}{3}$ крейцера». Сколько яиц было у каждой крестьянки?

Предположим, что у первой крестьянки было x яиц, тогда у второй было $100-x$. Если бы первая имела столько яиц, сколько вторая, т. е. $100-x$, то она выручила бы 15 крейцеров; следовательно, первая продавала каждое яйцо по $\frac{15}{100-x}$ крейцера, вторая крестьянка продавала каждое яйцо по цене $\frac{6\frac{2}{3}}{x}=\frac{20}{3x}$. Таким образом, первая крестьянка за свои x яиц выручила $x\frac{15}{100-x}$, вторая выручила $(100-x)\frac{20}{3x}$.

По условию задачи выручки одинаковы. Отсюда имеем уравнение $\frac{15x}{100-x}=\frac{20(100-x)}{3x}$. После сокращения и освобождения от дробных членов получим:

$$\frac{3x}{100-x}=4\frac{(100-x)}{3x}; \quad 9x^2=4(100-x)^2; \quad 3x=\pm 2(100-x);$$

$$x_1=40; \quad x_2=-200 \text{ (не годен).}$$

Итак, первая крестьянка имела 40, вторая 60 яиц.

Задача 3. Двое рабочих A и B взялись выполнить некоторую работу за 16 дней. После четырехдневной совместной работы A перешел на другую работу, вследствие чего B один окончил оставшуюся часть работы в срок, на 12 дней больший того, в течение которого A один может выполнить всю работу.

За сколько дней каждый рабочий в отдельности может выполнить всю работу?

Предположим, что A может выполнить всю работу за x дней, тогда за один рабочий день он должен выполнить $\frac{1}{x}$ часть всей работы.

При совместной работе A и B в день они выполняют $\frac{1}{16}$ часть всей работы; следовательно, на долю B приходится в день $\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{x}\right)$ часть всей работы. С другой стороны, B должен выполнить в день $\frac{3}{4}:(x+12)=\frac{3}{4(x+12)}$ часть всей работы, так как за 4 дня их совместной работы была выполнена $\frac{1}{4}$ всей работы; следовательно, осталось на долю B выполнить $\frac{3}{4}$ всей работы за $(x+12)$ дней.

Отсюда имеем уравнение $\frac{1}{16}-\frac{1}{x}=\frac{3}{4(x+12)}$. Левая и правая части уравнения выражают одну и ту же величину — дневную норму рабочего B.

Решая это уравнение, находим $x=24$ (второй корень $x=-8$ не удовлетворяет условию задачи).

Рабочий B выполняет в день $\frac{1}{16}-\frac{1}{24}=\frac{1}{48}$ часть всей работы; следовательно, всю работу он выполняет за 48 дней.

§ 72. Биквадратное уравнение.

Определение. Уравнение четвертой степени, содержащее только четные степени неизвестного, называется *биквадратным*. Общий вид такого уравнения

$$ax^4+bx^2+c=0 \qquad (a\neq 0).$$

Решение такого уравнения сводится к решению двух квадратных уравнений, о чем говорит само название (биквадратное означает «двойное квадратное»).

Отметим, что если биквадратное уравнение имеет корень x_0, то оно имеет также и корень $-x_0$, т. е. корни биквадратного уравнения попарно противоположны.

В самом деле, если x_0 есть корень, то подстановка в уравнение на место x числа x_0 дает справедливое равенство

$$ax_0^4+bx_0^2+c=0, \tag{1}$$

но тогда справедливо и другое равенство:

$$a(-x_0)^4+b(-x_0)^2+c=0, \tag{2}$$

так как левые части у равенств (1) и (2) одинаковы.

Чтобы решить биквадратное уравнение, введем вспомогательное неизвестное z, полагая $z=x^2$, $z^2=x^4$. Тогда уравнение примет вид

$$az^2+bz+c=0.$$

Это — квадратное уравнение относительно вспомогательного неизвестного z, и его корни

$$z_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad z_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Но $z_1=x^2$ и $z_2=x^2$, откуда

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}, \quad x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Таким образом, биквадратное уравнение имеет четыре корня, причем корни x_1 и x_2, x_3 и x_4 попарно противоположны, т. е. сумма каждой пары корней равна нулю, а потому и сумма всех четырех корней равна нулю.

Эти формулы можно объединить в одну:

$$x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Пример. $2x^4-19x^2+9=0$; $z=x^2$,

$$2z^2-19z+9=0, \quad z_1=\frac{1}{2}, \quad z_2=9; \quad x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$x_{3,4}=\pm 3.$$

§ 73. Исследование корней биквадратного уравнения.

Характер корней биквадратного уравнения

$$ax^4+bx^2+c=0 \tag{1}$$

зависит от того, каковы корни вспомогательного квадратного уравнения

$$az^2+bz+c=0. \qquad (2)$$

1. Предположим, что $a>0$ и дискриминант уравнения (2) положителен: $D=b^2-4ac>0$. Тогда при $c>0$ и $b<0$ оба корня положительны: $z_1>0$ и $z_2>0$, и биквадратное уравнение (1) имеет четыре действительных корня, так как

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{z_1}, \quad x_{3,4}=\pm\sqrt{z_2}.$$

2. Если $a>0$, $D>0$, $c>0$ и $b>0$, то $z_1<0$, $z_2<0$. Все четыре корня биквадратного уравнения мнимы.

3. При $a>0$, $D>0$, $c<0$ квадратное уравнение (2) имеет один корень положительный, другой — отрицательный, $z_1<0$ и $z_2>0$, поэтому одна пара корней x_3 и x_4 — действительная, другая x_1 и x_2 — мнимая.

§ 74. Уравнения, приводящиеся к квадратным. При решении биквадратного уравнения мы применили подстановку $z=x^2$, которая помогла снизить степень данного уравнения и свести его к квадратному уравнению.

К подстановкам прибегают и в других случаях, когда необходимо неизвестные типы уравнений или системы уравнений свести к уже известным типам уравнений или систем.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. $2\sqrt[3]{x^4}-3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=20.$

Если внести под знак радикала множитель x, то

$$2\sqrt[3]{x^4}-3\sqrt[3]{x^2}-20=0.$$

Пусть $t=\sqrt[3]{x^2}$, $t^2=\sqrt[3]{x^4}$. Тогда уравнение запишется в виде

$$2t^2-3t-20=0.$$

Находим его корни:

$$t_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+160}}{4}, \quad t_1=4, \quad t_2=-\frac{5}{2}.$$

Отсюда $4=\sqrt[3]{x^2}$, $64=x^2$, $x=\pm 8$.

Второе значение $t=-\frac{5}{2}$ отбрасываем, так как t — число положительное, что следует из равенства $t=\sqrt[3]{x^2}$.

Пример 2. $\frac{10}{1+x+x^2}=6-x-x^2.$

Правую часть уравнения можно представить в виде

$$7-(1+x+x^2).$$

Пусть $t=1+x+x^2$, тогда $\frac{10}{t}=7-t$.

Решая это квадратное уравнение относительно t, получим: $t_1=2$; $t_2=5$. Возвращаясь к неизвестному x, получим два квадратных уравнения:

1) $x^2+x+1=2$; 2) $x^2+x+1=5$.

Решая их, находим: $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, $x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$.

Таким образом, все четыре корня уравнения оказались иррациональными.

Пример 3. Найти действительные корни уравнения

$$\sqrt{x^2+3x+6}-3x=x^2+4.$$

Уравнение можно переписать в виде

$$\sqrt{x^2+3x+6}=x^2+3x+6-2.$$

Пусть

$$t=\sqrt{x^2+3x+6};\quad t^2=x^2+3x+6.$$

Исходное уравнение принимает вид

$$t^2-t-2=0.$$

Положительный корень этого уравнения $t=2$.

Другой корень $t=-1$ отбрасываем, так как t — арифметическое значение радикала. Таким образом,

$$2=\sqrt{x^2+3x+6}.$$

Возводя обе части в квадрат, получим квадратное уравнение $x^2+3x+2=0$, корни которого $x_1=-2$, $x_2=-1$.

Проверка показывает, что оба корня удовлетворяют уравнению.

Пример 4. Решить уравнение

$$|9-x^2|-\frac{7x}{22}-\frac{48}{11}=0.$$

Это уравнение равносильно двум квадратным уравнениям

$$9-x^2-\frac{7x}{22}-\frac{48}{11}=0 \text{ и } x^2-9-\frac{7x}{22}-\frac{48}{11}=0,$$

решив которые, можно найти все корни данного уравнения.

Однако мы будем решать его графическим методом. Для этого перепишем уравнение в виде

$$|9-x^2|=\frac{7x}{22}+\frac{48}{11}.$$

Наша задача сводится теперь к нахождению таких значений аргумента x, при которых две функции $y=|9-x^2|$ и $y=\frac{7x}{22}+\frac{48}{11}$ делаются численно равными. Очевидно, что такие значения аргумента x являются абсциссами точек пересечения графиков этих двух функций.

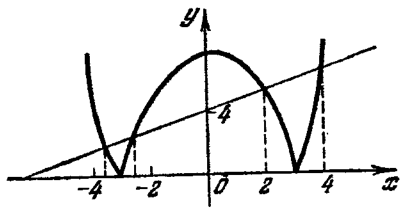

Рис. 40.

График функции $y_1=|9-x^2|$ можно получить из графика $y=9-x^2$, отобразив зеркально относительно оси Ox ту его часть, которая лежит под осью абсцисс. (Часть графика $y=9-x^2$, лежащая над осью Ox, остается без изменения.)

Прямая $y=\frac{7x}{22}+\frac{48}{11}$ пересекает первый график в четырех точках, абсциссы которых прочитываем по рис. 40. Таким образом, данное уравнение имеет четыре корня:

$$x_1\approx-3{,}5;\ x_2\approx-2{,}3;\ x_3=2;\ x_4\approx3{,}8.$$

Рассмотренный нами конкретный пример поучителен в том отношении, что показывает некоторые преимущества графического решения перед аналитическим. Прежде всего видим, что уравнение имеет четыре корня, о чем догадаться без графика было бы трудно. Далее, нужно проделать довольно большую вычислительную работу, чтобы найти эти корни непосредственно (проверьте сами). Правда, при графическом способе решения уравнения в большинстве случаев мы находим только приближенные значения корней; в редких, специально подобранных примерах можно найти и точные значения корней.

§ 75. Решение уравнений степени выше второй разложением левой части на множители. Если после переноса всех членов уравнения в левую часть получается многочлен относительно неизвестного x, разложимый на множители, каждый из которых не выше второй степени, то решение такого уравнения не представляет трудности.

Пример 1. Решить уравнение $x^3-3x^2-x+3=0$. Это — уравнение третьей степени, левая часть его способом группировки разлагается на множители:

$$x^3-3x^2-x+3=x^2(x-3)-(x-3)=(x-3)(x^2-1).$$

Уравнение принимает вид

$$(x-3)(x^2-1)=0.$$

Произведение обращается в нуль тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю; следовательно, либо

$$x-3=0,\ x=3,$$

либо

$$x^2-1=0,\ x=\pm 1.$$

Всего имеем три корня: $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=3$.

Пример 2. Найти все корни уравнения

$$x^4+4x+4=x^3+5x^2.$$

Данное уравнение есть уравнение четвертой степени. После переноса всех членов в левую часть получим:

$$x^4-x^3-5x^2+4x+4=0.$$

Член $-5x^2$ разложим на два слагаемых: $-5x^2=$ $=-x^2-4x^2$; тогда имеем:

$$x^4-x^3-x^2-4x^2+4x+4=0.$$

Образуем две группы членов по три члена в каждой:

$$x^4-x^3-x^2-(4x^2-4x-4)=0,$$
$$x^2(x^2-x-1)-4(x^2-x-1)=0,$$
$$(x^2-4)(x^2-x-1)=0.$$

Приравнивая каждый из двух множителей нулю и располагая корни в порядке их возрастания, получим:

1) $x^2-4=0$, $x=\pm 2$; 2) $x^2-x-1=0$, $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$;

$x_1=-2$, $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_3=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_4=2$.

Примечание. Разумеется, левую часть не всякого уравнения четвертой степени удается так легко разложить на множители; однако когда такое разложение выполняется без особого труда, его удобно применять.

§ 76. Неравенства второй степени. После того как мы изучили способы решения квадратных уравнений, ознакомимся с тем, как решаются неравенства второй степени. Оба эти вопроса тесно связаны между собой, что выяснится в дальнейшем.

Предварительно рассмотрим задачу, которая приведет нас к простейшему неравенству второй степени.

Задача. Парашютист делает затяжной прыжок, находясь на высоте 9000 м. Сколько секунд может длиться свободное падение, если парашют должен раскрыться на высоте не меньшей, чем 500 м, в противном случае создается опасность для его жизни. (Сопротивлением воздуха пренебречь.)

По смыслу задачи путь S, пройденный парашютистом при свободном падении, должен быть меньше или в крайнем случае равен 8500 м, $S \leqslant 8500$ м, или $\frac{gx^2}{2} \leqslant 8500$. Умножая обе части неравенства на положительное число $\frac{2}{g}$, получим:

$$x^2 \leqslant \frac{17000}{g} = \frac{17000}{9,8}, \quad x \leqslant \sqrt{\frac{17000}{9,8}}; \quad x \leqslant 42\,(\text{с}).$$

Определение. Неравенства вида $ax^2+bx+c>0$ и $ax^2+bx+c<0$ называются неравенствами *второй степени*, или *квадратными* (в строгом смысле слова).

Если к знакам $>$ или $<$ присоединим еще и знак равенства, то получим нестрогое неравенство второй степени.

Решение задачи привело нас к частному случаю нестрогого неравенства вида $ax^2+bx+c \leqslant 0$, где $a=\frac{g}{2}$; $b=0$; $c=-8500$.

Для успешного решения неравенств второй степени нужно отчетливо и твердо усвоить, как изменяется знак квадратного трехчлена ax^2+bx+c, представляющего левую часть неравенства (правая часть равна нулю).

§ 77. Исследование знака квадратного трехчлена. Проследим за тем, как изменяется знак трехчлена ax^2+bx+c, когда аргумент x принимает любое действительное значение. Для наглядности и простоты исследования воспользуемся рис. 38 из § 69.

Случай 1. Пусть $a>0$ и $D=b^2-4ac>0$. Тогда трехчлен имеет два действительных и различных корня

x_1 и x_2 и график трехчлена, т. е. парабола $y=ax^2+bx+$ $+c$, в точках x_1 и x_2 пересекает ось абсцисс (рис. 38, *а*).

По графику устанавливаем, что если $x<x_1$ или $x>x_2$, то $y=ax^2+bx+c>0$. Если же x принимает значения из промежутка (x_1, x_2), то $y=ax^2+bx+c<0$.

Примечание. Если $a<0$ и $D=b^2-4ac>0$, то, наоборот, $ax^2+bx+c<0$ при $x<x_1$ и при $x>x_2$, и $ax^2+bx+c>0$ при значениях x из промежутка (x_1, x_2) (см. рис. 38, *а*—пунктир).

Итак, *если квадратный трехчлен имеет два действительных и различных корня x_1 и x_2 $(x_2>x_1)$, то при всех значениях x вне промежутка (x_1, x_2) знак трехчлена совпадает со знаком первого коэффициента a; при всяком x из промежутка (x_1, x_2) знак трехчлена противоположен знаку коэффициента a.*

Случай 2. Пусть $a>0$, $D=b^2-4ac=0$.

Корни трехчлена одинаковы: $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$. Парабола $y=ax^2+bx+c$ касается своей вершиной оси абсцисс в точке $x=-\frac{b}{2a}$ (рис. 38, *б*), при всяком $x\neq-\frac{b}{2a}$ ее ординаты положительны, т. е. $ax^2+bx+c>0$.

Примечание. При $a<0$ и $D=0$ парабола $y=$ $=ax^2+bx+c$ касается оси абсцисс снизу и при всяком $x\neq-\frac{b}{2a}$ ординаты параболы отрицательны, т. е. ax^2+ $+bx+c<0$.

Итак, *если корни трехчлена действительны и равны между собой $\left(x_1=x_2=-\frac{b}{2a}\right)$, то при любом $x\neq-\frac{b}{2a}$ знак трехчлена совпадает со знаком первого коэффициента.*

Случай 3. Предположим, что $a>0$ и $D=b^2-4ac<0$. Тогда трехчлен не имеет действительных корней и парабола $y=ax^2+bx+c$ не пересекает ось абсцисс—она вся расположена над осью Ox (рис. 38, *в*). Все ординаты параболы положительны, или $ax^2+bx+c>0$ при всяком x.

При $a<0$ и $D<0$ парабола $y=ax^2+bx+c$ вся расположена под осью абсцисс, т. е. все ординаты отрицательны.

Итак, *если квадратный трехчлен не имеет действительных корней, то при любом действительном значении аргумента x знак трехчлена совпадает со знаком коэффициента a,* т. е. при $a>0$ трехчлен положителен при любом x, при $a<0$ трехчлен отрицателен при любом x.

§ 78. Решение неравенств второй степени.

Пример 1. Решить неравенство $2x^2-5x-3>0$. Находим корни трехчлена: $2x^2-5x-3=0$;

$$x_1=-{}^1/_2;\quad x_2=3.$$

Имеем два действительных и различных корня, причем первый коэффициент $a=2>0$. Согласно результатам

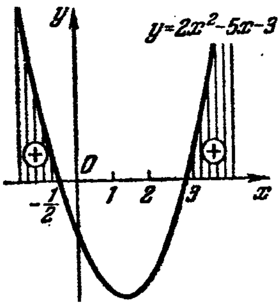

Рис. 41.

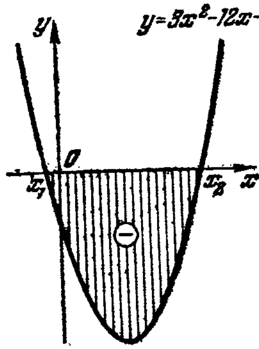

Рис. 42.

предыдущего параграфа решением данного неравенства будет всякое такое число x, что $x<-{}^1/_2$ или $x>3$. График функции $y=2x^2-5x-3$ показан на рис. 41.

Пример 2. Решить неравенство

$$5x^2-8x+3<2x^2+4x+5.$$

Перенесем члены из правой части в левую: $3x^2-12x-2<0$. Находим корни трехчлена:

$$3x^2-12x-2=0;\quad x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36+6}}{3},$$

$$x_1=\frac{6-\sqrt{42}}{3};\quad x_2=\frac{6+\sqrt{42}}{3}.$$

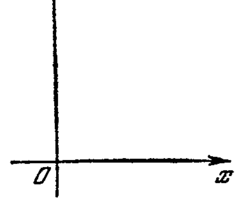

Рис. 43.

Трехчлен с положительным первым коэффициентом и различными действительными корнями отрицателен при всяком x, заключенном между корнями, т. е. $\frac{6-\sqrt{42}}{3}<x<\frac{6+\sqrt{42}}{3}$.

График функции $y=3x^2-12x-2$ показан на рис. 42.

Пример 3. Решить неравенство

$$5x^2-8x+20<0.$$

Так как дискриминант трехчлена $D=b^2-4ac=$ $=64-400<0$, то трехчлен при любом x сохраняет знак первого коэффициента a, т. е. в нашем случае положителен, а потому данное неравенство решений не имеет. График функции $y=5x^2-8x+20$ показан на рис. 43.

§ 79. Теоремы о равносильности уравнений.

Теорема 1. *Если к обеим частям уравнения прибавим одно и то же число или один и тот же многочлен, то новое уравнение равносильно исходному.*

Доказательство. Пусть имеем уравнение

$$f(x)=\varphi(x). \qquad (1)$$

Требуется доказать, что новое уравнение

$$f(x)+p(x)=\varphi(x)+p(x), \qquad (2)$$

полученное из уравнения (1) прибавлением к обеим частям по многочлену $p(x)$, равносильно исходному уравнению (1).

Пусть число x_0 есть корень уравнения (1), тогда имеем числовое равенство

$$f(x_0)=\varphi(x_0). \qquad (3)$$

Если к обеим частям равенства (3) прибавим по числу $p(x_0)$, то получим справедливое равенство:

$$f(x_0)+p(x_0)=\varphi(x_0)+p(x_0). \qquad (4)$$

Равенство (4) означает, что число x_0 есть также корень уравнения (2). Этими рассуждениями мы показали, что всякий корень уравнения (1) есть также корень уравнения (2).

Докажем и обратное: всякий корень уравнения (2) является также корнем уравнения (1).

Пусть число x_0 есть корень уравнения (2). Тогда подстановка в уравнение (2) на место x числа x_0 приводит к числовому равенству:

$$f(x_0)+p(x_0)=\varphi(x_0)+p(x_0).$$

Но от равных чисел можно отнять по равному числу (в данном случае по $p(x_0)$), получим равенство $f(x_0) = \varphi(x_0)$, которое означает, что число x_0 есть корень уравнения (1), и этим доказательство равносильности уравнений (1) и (2) завершено.

Теорема 2. *Если обе части уравнения*

$$f(x) = \varphi(x) \tag{1}$$

умножим на одно и то же число A $(A \neq 0)$, *то новое уравнение*

$$Af(x) = A\varphi(x) \tag{2}$$

равносильно исходному уравнению (1).

Доказательство. Предположим, что число x_1 есть корень уравнения (1). Тогда имеем числовое равенство $f(x_1) = \varphi(x_1)$. Как известно, равные числа можно умножить на одно и то же отличное от нуля число, в результате также получим равные числа, т. е. $Af(x_1) = A\varphi(x_1)$, и таким образом, число x_1 есть также корень уравнения (2).

Обратно, пусть число x_1 есть корень уравнения (2). Тогда подстановка его в уравнение (2) дает числовое тождество $Af(x_1) = A\varphi(x_1)$, где $A \neq 0$. Но равные числа можно делить на одно и то же число A; выполнив деление предыдущего равенства на A, получим

$$f(x_1) = \varphi(x_1);$$

это равенство означает, что число x_1 есть также корень уравнения (1). Справедливость теоремы 2 этим доказана.

Примечание. В теореме 1 говорилось о прибавлении к обеим частям уравнения одного и того же многочлена, но не произвольной функции. Дело в том, что многочлен определен на всей числовой оси, а потому $p(a)$ есть действительное число при всяком действительном a. Например, если $p(x) = 2x^3 - 4x + 3$, то $p(1) = 2 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1 + 3 = 1$, $p(a) = 2a^3 - 4a + 3$ и т. д.

Если эту оговорку не делать, то теорема 1 может оказаться несправедливой, как это видно из следующего примера.

Пусть имеем исходное уравнение

$$2x + 3 = x^2 - 12.$$

Это уравнение имеет корень $x = 5$, что легко проверить.

Прибавив к обеим частям дробную функцию $\frac{2}{x-5}$, получим новое уравнение $2x+3+\frac{2}{x-5}=x^2-12+\frac{2}{x-5}$, для которого число 5 уже не является корнем, так как подстановка его в левую и правую части уравнения лишает каждую из этих частей определенного смысла. Действительно, в равенстве

$$2\cdot5+3+\frac{2}{5-5}=5^2-12+\frac{2}{5-5}$$

дробь $\frac{2}{0}$ смысла не имеет, а потому и вся левая, а также правая части смысла не имеют, что говорит о неравносильности этих двух уравнений.

§ 80. Потерянные и посторонние корни. В двух теоремах § 79 говорится о том, какие действия над уравнениями не нарушают их равносильности. Рассмотрим теперь такие операции над уравнениями, которые могут привести к новому уравнению, неравносильному исходному уравнению. Вместо общих рассуждений ограничимся рассмотрением конкретных примеров.

Пример 1. Уравнение $3x(x-1)=5(x-1)$ после раскрытия скобок и переноса всех членов в левую часть может быть решено по формуле полного квадратного уравнения или разложением левой части на множители; корни будут: $x_1=1$; $x_2=\frac{5}{3}$. Если сократить обе части уравнения на общий множитель $(x-1)$, то получится уравнение $3x=5$, которое неравносильно первоначальному, так как имеет всего один корень $x=\frac{5}{3}$.

Следовательно, сокращение обеих частей уравнения на множитель, содержащий неизвестное, может привести к потере корней.

Пример 2. Уравнение $2x-3=5$ имеет единственный корень $x=4$. Возведем обе части этого уравнения в квадрат, получим $(2x-3)^2=25$. Решая это квадратное уравнение, найдем два корня: $x_1=-1$; $x_2=4$. Замечаем, что новое уравнение $(2x-3)^2=25$ неравносильно исходному уравнению $2x-3=5$. Лишний корень $x_1=-1$ принадлежит уравнению $2x-3=-5$, которое после возведения в квадрат обеих его частей дает то же самое уравнение $(2x-3)^2=25$.

Посторонние корни могут появляться также при умножении обеих частей уравнения на множитель, содержащий неизвестное, если этот множитель при действительных значениях x обращается в нуль.

Пример 3. Если обе части уравнения $2x-1=5$ умножим на $x+2$, то получим новое уравнение $(2x-1)(x+2)=5(x+2)$, которое после переноса члена $5(x+2)$ из правой части в левую и разложения на множители дает $(x+2)(2x-6)=0$, откуда $x=-2$ либо $x=3$.

Корень $x=-2$ не удовлетворяет исходному уравнению $2x-1=5$, которое имеет единственный корень $x=3$. Посторонний корень $x=-2$ принадлежит уравнению $x+2=0$.

Отсюда заключаем: при возведении обеих частей уравнения в квадрат (вообще в четную степень), а также при умножении на множитель, содержащий неизвестное и обращающийся в нуль при действительных значениях неизвестного, могут появляться посторонние корни.

§ 81. Посторонние корни иррационального уравнения. Уравнение, содержащее неизвестное под знаком радикала, называется *иррациональным*; например,

$$\sqrt{2x+7}=3; \quad \sqrt[3]{3x-1}=4.$$

Покажем на простом примере возможность появления посторонних корней при решении иррационального уравнения.

Пусть имеем иррациональное уравнение $\sqrt{2x-1}=$ $=x-2$. Возведем обе части в квадрат, получим:

$$2x-1=(x-2)^2.$$

Решая это квадратное уравнение, получим корни:

$$x_1=1; \ x_2=5.$$

Проверим корни: $\sqrt{2\cdot1-1}\neq1-2$; корень $x_1=1$ уравнению не удовлетворяет, следовательно, он является посторонним.

Второй корень $x_2=5$ удовлетворяет уравнению. Возникает вопрос: каким образом появился лишний корень $x=1$? Этот посторонний корень принадлежит другому иррациональному уравнению $-\sqrt{2x-1}=x-2$, которое после возведения в квадрат дает то же самое квадратное уравнение $2x-1=(x-2)^2$. По отношению к уравнению $-\sqrt{2x-1}=x-2$ корень $x=5$ является посторонним.

Поэтому необходимо проверять корни, полученные при решении иррационального уравнения, подстановкой в данное уравнение.

§ 82. Решение иррациональных уравнений. Приемы решения иррациональных уравнений рассмотрим на примерах.

Пример 1. $\sqrt{x^2+5x+1}+1=2x$.

Уравнение содержит всего один радикал; оставляем его в левой части, или, как говорят, *уединяем радикал*, перенося единицу в правую часть: $\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1$; возводим обе части в квадрат, получим:

$$x^2+5x+1=(2x-1)^2,$$

или

$$x^2+5x+1=4x^2-4x+1;$$

после переноса всех членов в левую часть и приведения подобных членов имеем:

$$3x^2-9x=0; \quad x^2-3x=0; \quad x(x-3)=0;$$
$$x_1=0; \quad x_2=3.$$

Проверка. $\sqrt{0^2+5\cdot 0+1}+1\neq 2\cdot 0$. Следовательно, первый корень $x=0$ не удовлетворяет уравнению; отбрасываем его (этот корень принадлежит иррациональному уравнению

$$-\sqrt{x^2+5x+1}+1=2x,$$

что легко проверить). Таким же путем убеждаемся, что второй корень $x_2=3$ удовлетворяет заданному уравнению.

Пример 2. $\sqrt{x-9}-\sqrt{x-18}=1$.

Уравнение содержит два радикала в одной части; перенесем один из них в правую часть: $\sqrt{x-9}=1+$ $+\sqrt{x-18}$; после возведения в квадрат имеем $x-9=1+$ $+2\sqrt{x-18}+x-18$; оставляем радикал в правой части, остальные члены переносим в левую часть:

$$8=2\sqrt{x-18}; \quad 4=\sqrt{x-18}; \quad 16=x-18; \quad x=34.$$

Проверка обнаруживает пригодность полученного корня.

Пример 3. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+2}-\sqrt{2x+5}=\sqrt{3x}$.

Уравнение содержит четыре радикала; распределим их по два по обеим частям уравнения:

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+2}=\sqrt{2x+5}+\sqrt{3x};$$

после возведения в квадрат имеем:

$$2x+3+2\sqrt{(2x+3)(3x+2)}+3x+2=$$
$$=2x+5+2\sqrt{(2x+5)3x}+3x;$$
$$2\sqrt{(2x+3)(3x+2)}=2\sqrt{(2x+5)3x};$$

сокращаем на 2 и снова возводим в квадрат:

$$(2x+3)(3x+2)=(2x+5)3x,$$
$$6x^2+13x+6=6x^2+15x;\ 2x=6;\ x=3.$$

Проверка. $\sqrt{9}+\sqrt{11}=\sqrt{11}+\sqrt{9}$; полученный корень удовлетворяет данному уравнению.

Пример 4. $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\dfrac{b}{a}$.

Уравнение имеет вид пропорции. Составим производную пропорцию: сумма членов первого отношения так относится к их разности, как сумма членов второго отношения относится к их разности: $\dfrac{2\sqrt{a+x}}{2\sqrt{a-x}}=\dfrac{b+a}{b-a}$ $(b\neq a)$; возводим в квадрат обе части:

$$\frac{a+x}{a-x}=\frac{(b+a)^2}{(b-a)^2};$$

снова составляем производную пропорцию:

$$\frac{2a}{2x}=\frac{(b+a)^2+(b-a)^2}{(b+a)^2-(b-a)^2};$$
$$\frac{a}{x}=\frac{2(a^2+b^2)}{4ab}=\frac{a^2+b^2}{2ab};\quad x=\frac{2a^2b}{a^2+b^2}.$$

Проверка обнаруживает, что полученный корень удовлетворяет данному уравнению.

Если $b=a$, то исходное уравнение принимает вид

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=1;$$
$$\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x};$$
$$2\sqrt{a-x}=0;\quad \sqrt{a-x}=0;\quad a-x=0;\quad x=a.$$

§ 83. Системы уравнений второй степени и их решение. Если уравнение с несколькими неизвестными приведено к виду, не содержащему дробных членов, и в нем произведены все возможные упрощения (раскрытие скобок, освобождение от радикалов, перенос всех членов в левую часть, приведение подобных членов), то *степенью этого уравнения называется сумма показателей степеней неизвестных в том члене уравнения, в котором эта сумма наибольшая*; например:

а) уравнение $2xy^2+5x^2+6y-20=0$ есть уравнение третьей степени, так как в первом члене сумма показателей при x и y наибольшая и равна $1+2=3$;

б) уравнение $\frac{x^2}{x^2+y^2}+2y^2=3$ после освобождения от дробных членов принимает вид

$$x^2+2y^2(x^2+y^2)=3(x^2+y^2),$$

или

$$2x^2y^2+2y^4-2x^2-3y^2=0.$$

Это — уравнение четвертой степени относительно неизвестных x и y.

Система двух уравнений с двумя неизвестными называется *системой второй степени*, если по крайней мере одно из уравнений есть уравнение второй степени, а другое — не выше второй степени.

Примеры.

$$1)\ \begin{cases} x^2+y^2+2y-9=0, \\ 3x-y-1=0; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x^2+3y^2+xy=5, \\ 2x^2+y^2=9. \end{cases}$$

Решить систему уравнений с двумя неизвестными — это значит найти все пары значений x и y, удовлетворяющих одновременно обоим уравнениям. Эти пары значений x и y называются *решениями системы*. Например, система

$$\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x-y=1 \end{cases}$$

имеет два решения:

$$1)\ x_1=-1,\ y_1=-2 \text{ и } 2)\ x_2=2,\ y_2=1,$$

так как каждая пара значений неизвестных x и y после подстановки в данные уравнения приводит их к числовым тождествам:

$$1)\ (-1)^2+(-2)^2=5;\quad 5=5;\qquad 2)\ 2^2+1^2=5;\quad 5=5;$$
$$-1-(-2)=1;\quad 1=1.\qquad 2-1=1;\quad 1=1.$$

Рассмотрим решение простейших систем.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} x^2+y^2+2y-9=0, \\ 3x-y-1=0. \end{cases}$$

Из второго уравнения выражаем y через x; $y=3x-1$. Подставляем это значение y в первое уравнение; получим:

$$x^2+(3x-1)^2+2(3x-1)-9=0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов имеем:

$$x^2-1=0;$$
$$x_1=-1;\quad x_2=1;$$
$$y_1=-4;\quad y_2=2.$$

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} x^2+3xy=18; \\ 3y^2+xy=6. \end{cases}$$

Разложим левые части данных уравнений на множители

$$\begin{cases} x(x+3y)=18; \\ y(3y+x)=6. \end{cases}$$

После деления первого уравнения на второе получим:

$$\frac{x}{y}=3,\quad \text{или}\quad x=3y.$$

Тогда второе уравнение дает:

$$3y^2+3y^2=6;\qquad y^2=1;$$
$$y_1=-1,\qquad y_2=1;$$
$$x_1=-3,\qquad x_2=3.$$

§ 84. Искусственные приемы решения систем уравнений. В некоторых случаях системы уравнений решаются более изящно, чем способом подстановки, если прибегнуть к особым приемам.

П р и м е р 1. Решить систему

$$\begin{cases} x+y=5; \\ xy=6. \end{cases}$$

Неизвестные x и y можно принять за корни вспомогательного квадратного уравнения $z^2-5z+6=0$, откуда $z_1=2$; $z_2=3$; так как безразлично, какое неизвестное принято за z_1, какое за z_2, то всего имеем два решения:

$$x_1=2, \quad x_2=3;$$
$$y_1=3, \quad y_2=2.$$

П р и м е р 2. Решить систему

$$\begin{cases} x-y=7; \\ xy=-10. \end{cases}$$

Представим данную систему следующим образом:

$$\begin{cases} x+(-y)=7, \\ x(-y)=10. \end{cases}$$

Как и в предыдущем примере, неизвестные x и $-y$ суть корни уравнения $z^2-7z+10=0$, т. е. $z_1=2$, $z_2=5$, откуда получаем два решения:

$$x_1=2, \qquad x_2=5;$$
$$y_1=-5, \qquad y_2=-2.$$

П р и м е р 3. Решить систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=20, \\ xy=8. \end{cases}$$

П е р в ы й с п о с о б. Умножим второе уравнение на 2 и сложим с первым; получим $(x+y)^2=36$, откуда $x+y=\pm 6$.

Таким образом, данная система равносильна совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} x+y=6, \\ xy=8; \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x+y=-6, \\ xy=8, \end{cases}$$

каждая из которых решается так же, как и система в примере 1.

Всего получим четыре решения:

$$x_1=-4;\quad x_2=-2;\quad x_3=4;\quad x_4=2;$$
$$y_1=-2;\quad y_2=-4;\quad y_3=2;\quad y_4=4.$$

Второй способ. Возведем второе уравнение системы в квадрат; получим:

$$x^2+y^2=20,$$
$$x^2y^2=64.$$

Если ввести обозначения $x^2=u$; $y^2=v$, то имеем:

$$\begin{cases} u+v=20; \\ uv=64. \end{cases}$$

Решая эту систему по образцу примера 1, находим:

$$u_1=16,\quad \text{откуда}\quad x=\pm4;$$
$$v_1=4,\quad \text{откуда}\quad y=\pm2$$

или

$$u_2=4,\quad \text{откуда}\quad x=\pm2,$$
$$v_2=16,\quad \text{откуда}\quad y=\pm4.$$

Так как знаки у неизвестных x и y должны быть одинаковы, то всего получаем четыре решения.

Пример 4. Решить систему

$$\begin{cases} 2x^2+5xy-18y^2=0; \\ xy+y^2-12=0. \end{cases}$$

Первое уравнение системы—однородное уравнение второй степени, так как левая часть уравнения есть однородный многочлен относительно неизвестных x и y *), а правая часть—нуль.

Такое уравнение всегда имеет нулевое решение: $x=0$; $y=0$. Однако система не имеет нулевого решения; более того, $y\neq0$, так как при $y=0$ второе уравнение

*) Это значит, что все члены его одинаковой степени. Степенью одночлена называется сумма показателей при неизвестных; например каждый из одночленов $5x^2$; $3xy$; $-0,5y^2$—второй степени, поэтому многочлен $5x^2+3xy-0,5y^2$ есть однородный многочлен.

Многочлен $x^3-2,5x^2y+4y^3$—тоже однородный, так как все члены его третьей степени.

Многочлен $x^2-5xy+3y$—неоднородный, так как первые два члена второй степени, а третий член—первой степени.

приводится к неверному равенству $-12=0$. Следовательно, обе части первого уравнения можно разделить на y^2:

$$2\frac{x^2}{y^2}+5\frac{x}{y}-18=0;$$

если обозначить $\frac{x}{y}=t$, то имеем квадратное уравнение

$$2t^2+5t-18=0,$$

корни его

$$t_1=-\frac{9}{2}, \quad t_2=2.$$

Таким образом, данная система равносильна совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} \frac{x}{y}=-\frac{9}{2}; \\ xy+y^2-12=0; \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} \frac{x}{y}=2, \\ xy+y^2-12=0. \end{cases}$$

Первая из них действительных решений не имеет, вторая имеет два решения:

$$x_1=4, \ y_1=2 \ \text{и} \ x_2=-4, \ y_2=-2.$$

Пример 5. Решить систему

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=3; \\ 2x^2-xy-y^2=5. \end{cases}$$

Левая часть каждого уравнения данной системы представляет однородный многочлен второй степени относительно неизвестных x и y (все члены второго измерения), поэтому удобно ввести вспомогательное неизвестное t, полагая $y=tx$; тогда каждое из уравнений данной системы после подстановки примет вид

$$x^2(1-t+t^2)=3; \quad x^2(2-t-t^2)=5.$$

Так как $x\neq 0$, то разделим первое уравнение на второе; получим:

$$\frac{1-t+t^2}{2-t-t^2}=\frac{3}{5},$$

$$5-5t+5t^2=6-3t-3t^2,$$

или

$$8t^2-2t-1=0;$$

это — квадратное уравнение относительно вспомогательного неизвестного t; решая его, находим:

$$t_1 = -\frac{1}{4}; \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, либо $y = -\frac{1}{4}x$, либо $y = \frac{1}{2}x$.

Далее решаем способом подстановки две более простые системы:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ y = -\frac{1}{4}x \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ y = \frac{1}{2}x. \end{cases}$$

Всего получим четыре решения:

$$x_1 = \frac{4}{\sqrt{7}}; \quad x_2 = -\frac{4}{\sqrt{7}}; \quad x_3 = -2; \quad x_4 = 2;$$

$$y_1 = -\frac{1}{\sqrt{7}}; \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{7}}; \quad y_3 = -1; \quad y_4 = 1.$$

§ 85. Графический способ решения системы уравнений. Кроме аналитического способа решения системы уравнений с двумя неизвестными можно пользоваться также и графическим способом.

Построим для каждого уравнения данной системы соответствующий график, т. е. кривую. Если кривые пересекаются в точке $M_1(x_1; y_1)$, то координаты точки пересечения являются решением системы. Действительно, так как точка пересечения принадлежит обеим кривым, то, следовательно, ее координаты удовлетворяют как первому уравнению системы, так и второму, а такая пара чисел и есть решение системы.

Пример 1.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Первому уравнению системы соответствует окружность радиуса $r = \sqrt{13}$ с центром в начале координат (рис. 44), второму уравнению соответствует равнобочная гипербола, ее ветви расположены в первой и третьей четвертях. Кривые пересекаются в четырех точках: $M_1(3; 2)$, $M_2(2; 3)$, $M_3(-3; -2)$, $M_4(-2; -3)$. Таким образом, система имеет четыре решения.

Графический способ решения имеет то преимущество, что сразу видно, сколько действительных решений имеет данная система.

Однако графический способ дает лишь приближенные значения этих решений, обычно с точностью до 0,1. Чтобы получить бóльшую точность, надо кривые построить в более крупном масштабе на миллиметровой бумаге, что связано с большой затратой времени. В этом — главный недостаток графического способа решения уравнений, а также систем уравнений.

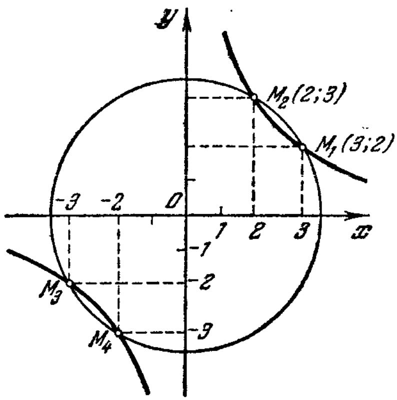

Рис. 44.

Разумеется, кривые надо строить в одном и том же масштабе, если мы собираемся с их помощью находить решения системы.

Пример 2. Решить графически систему

$$\begin{cases} xy=2, \\ y=x^2+\frac{7}{2}x-\frac{5}{2}. \end{cases}$$

На рис. 45 изображена равнобочная гипербола $y=\frac{2}{x}$ и парабола $y=x^2+\frac{7}{2}x-\frac{5}{2}$, которые пересекаются в трех точках: $M_1\left(-4;\ -\frac{1}{2}\right)$, $M_2\left(-\frac{1}{2};\ -4\right)$, $M_3(1;\ 2)$.

Следовательно, данная система имеет три решения:

$$\begin{cases} x_1=-4, \\ y_1=-\frac{1}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=-\frac{1}{2}, \\ y_2=-4, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3=1, \\ y_3=2. \end{cases}$$

Решение данной системы способом подстановки привело бы к уравнению $x\left(x^2+\frac{7}{2}x-\frac{5}{2}\right)=2$ или $2x^3+7x^2-5x-4=0$. Это — полное кубическое уравнение; способы решения таких уравнений в элементарном курсе алгебры не рассматриваются. Надо догадаться, что левая часть уравнения разложима на множители:

$$2x^3+7x^2-5x-4=$$
$$=(x-1)(2x^2+9x+4)=0.$$

Приравнивая нулю каждый множитель, найдем три значения $x\left(1;\quad -4;\quad -\frac{1}{2}\right)$, а тогда соответствующие значения y найдем из соотношения $xy=2$.

В этом примере графический способ решения выглядит более естественным по сравнению с алгебраическим, так как разложение левой части уравнения на множители требует применения искусственных приемов.

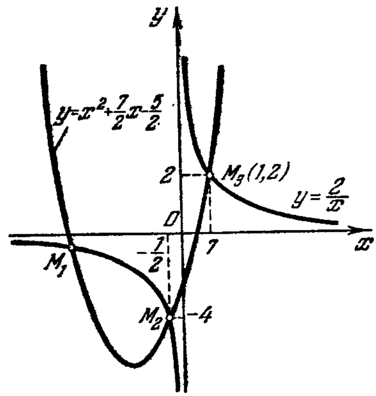

Рис. 45.

Упражнения

1. Решить уравнения:

1) $\frac{4x^2-3x+5}{x^2-2x+13}=2;$

2) $\frac{5}{y+2}+\frac{9}{2y+3}=2;$

3) $\frac{x-2}{x+1}=\frac{2}{1-x}-\frac{6}{1-x^2};$

4) $2y^2-(b-2c)y=bc;$

5) $x^2+2(a-b)x-4ab=0;$

6) $6x^2+5mx+m^2=0;$

7) $56y^2+ay-a^2=0;$

8) $\frac{3m}{2m-1}-\frac{39}{2m+1}=5-\frac{45}{4m^2-1};$

9) $x+\frac{a}{x}=b;$

10) $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0;$

11) $x+\frac{1}{x}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b};$

12) $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0;$

13) $\frac{x^2-x+16}{x^2+x+1}=\frac{x+6}{x-1}+\frac{x+36}{x^3-1};$

14) $(m-n)x^2-nx-m=0;$

15) $\frac{1}{2x-2}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{1}{4};$

16) $(7-4\sqrt{3})x^2+(2-\sqrt{3})x=2;$

17) $abx^2+2(a+b)\sqrt{ab}\,x+(a-b)^2=0;$

18) $\frac{x+5}{x+1}+\frac{3x+1}{x^2+3x+2}=2{,}5;$

19) $\frac{a-b+1}{ax+bx}=\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{a-b}{x^2};$

20) $\frac{8}{x^2-9}+\frac{8}{3x+9}-\frac{5}{6}=0;$

21) $\frac{5t}{2t^2-t-1}-\frac{4t-5}{t^2-1}=\frac{5}{2t+1};$

22) $\frac{x-6}{x-12}-\frac{x-12}{x-6}=\frac{5}{6}.$

2. На плоскости дано несколько точек, расположенных так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Определить число точек, если через них можно провести всего 28 различных прямых.

3. Решить в общем виде предыдущую задачу, если всего можно провести m различных прямых.

4. Участок земли площадью 375 $м^2$ имеет форму прямоугольника, одна из сторон которого составляет 60% другой. Найти эти стороны.

5. Периметр прямоугольника равен 85 см, а диагональ его равна 32,5 см. Найти стороны прямоугольника.

6. Возможен ли такой выпуклый многоугольник, в котором число всех диагоналей было бы равно 12?

7. В каком многоугольнике число сторон равно числу всех диагоналей?

8. Возможен ли такой прямоугольный треугольник, стороны которого выражаются тремя последовательными целыми числами? Тремя последовательными четными или нечетными числами?

9. Два туриста отправляются одновременно в город, находящийся от них на расстоянии 30 км. Первый из них проходит в час на 1 км больше, вследствие чего приходит в город на один час раньше. Сколько километров в час проходит каждый путешественник?

10. Бассейн наполняется посредством двух труб в $1\frac{7}{8}$ часа; первая труба в отдельности может наполнить бассейн двумя часами скорее, чем одна вторая. За сколько часов каждая из труб в отдельности может наполнить бассейн?

11. Расстояние между двумя городами на реке равно 80 км. Пароход проходит это расстояние дважды (вверх и вниз) за 8 ч. 20 мин. Определить скорость парохода в стоячей воде, если скорость течения равна 4 км/ч.

12. Расстояние между двумя станциями железной дороги равно 96 км. Скорый поезд проходит этот путь на $\frac{2}{3}$ часа быстрее, чем пассажирский. Найти скорость каждого поезда, если известно, что разность между их скоростями равна 12 км/ч.

13. При совместной работе двое рабочих мугут выполнить данное задание за 12 ч. Первый из них в отдельности может выполнить ту же работу на 10 ч скорее, чем второй. За сколько часов может каждый рабочий в отдельности выполнить задание?

14. Если артель продаст товар за 2688 руб., то получит столько процентов прибыли, сколько сотен рублей содержится в половине себестоимости товара. Какова себестоимость товара?

15. Два туриста A и B выехали одновременно из разных мест навстречу друг другу. При встрече оказалось, что A проехал на 210 км больше, чем B. Если каждый из них будет продолжать путь с прежней скоростью, то A приедет в место выезда B через 4 дня, а B прибудет к месту выезда A через 9 дней. Сколько километров проехал каждый из них до встречи?

16. Турист выехал из A в B и делает в среднем 8 км/ч. Когда он проехал 27 км, то из B навстречу ему выехал другой турист, который проезжал в час двадцатую часть всего пути от B к A и встретил первого через столько часов, сколько километров в час он сам делает. Определить расстояние от A до B.

17. Агроном установил, что наличным семенным фондом в 22,5 тонны можно засадить весь намеченный под картофель участок. При посадке выяснилось, что семена отборные и потому можно уменьшить предполагавшуюся норму посадки на один гектар примерно на 200 кг. Это привело к увеличению площади посева на 1 га. Какова была запроектированная норма посадки картофеля на 1 га и чему равна площадь первоначального участка?

18. Найти корни следующих уравнений с точностью до 0,01:

1) $0{,}05x^2-4x+7=0$;
2) $0{,}015y^2+2y-3{,}75=0$;
3) $2{,}17x^2-1{,}8x-1{,}06=0$;
4) $7x^2-8{,}06x+2{,}16=0$.

19. Составить квадратное уравнение, если его корни равны:

1) 3 и 5;
2) —3 и 9;
3) 4 и $-\frac{1}{2}$;
4) 3 и —3;
5) 0 и 6;
6) 0 и $\frac{b}{a}$;
7) 4 и 4;
8) $\frac{3}{4}$ и $\frac{4}{3}$;
9) $a+b$ и $a-b$;
10) $\frac{m+n}{2}$ и $\frac{m-n}{2}$;
11) $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$;
12) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$;
13) $a+\sqrt{b}$ и $a-\sqrt{b}$.

20. Не решая следующих уравнений, указать, какие имеют действительные корни, какие не имеют действительных корней; какие из уравнений с действительными корнями имеют равные корни, какие имеют оба корня положительных или оба отрицательных:

1) $x^2-4x+4=0$;
2) $x^2-9x-22=0$;
3) $x^2-16x+48=0$;
4) $4x^2+x+1=0$;
5) $7x^2-x-1=0$;
6) $14y^2+11y-3=0$;
7) $z^2-6z+9=0$;
8) $y^2+y-6=0$.

21. При каких значениях коэффициента m каждое из следующих уравнений имеет два равных корня:

1) $4x^2+mx+9=0$;
2) $mx^2+4x+1=0$;
3) $x^2-2(1+3m)x+7(3+2m)=0$?

22. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты a, b и c, чтобы уравнение $ax^2+bx+c=0$ имело

1) действительные положительные корни;
2) действительные отрицательные корни;
3) один действительный корень положительный, другой отрицательный?

23. Какое значение имеет m, если уравнение

1) $x^2-2ax+m=0$ имеет один корень, равный $a-b$;
2) $z^2+mz-18=0$ имеет один корень, равный —3;
3) $mx^2-15x-7=0$ имеет один корень, равный —7;
4) $y^2+my+a^2+5a+6=0$ имеет один корень, равный $a+3$?

24. Если корни уравнения $x^2+3x+k=0$ обозначим через x_1 и x_2, то какие значения нужно придать параметру k, чтобы

1) $x_1-x_2=6$;
2) $3x_1-x_2=4$;
3) $\frac{x_1}{x_2}=-\frac{2}{5}$;
4) $x_1^2+x_2^2=34$?

25. При каком значении свободного члена — a корни уравнения $3x^2+2x-a=0$ относятся между собой, как $2:3$?

26. Составить квадратное уравнение, корни которого равны $(x_1+x_2)^2$ и $(x_1-x_2)^2$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

27. Разложением левой части на множители решить следующие уравнения:

1) $x^3-2x^2-15x=0$;
2) $y^3+3y^2-4y=0$;
3) $v^3+11v^2+28v=0$;
4) $x^3-3x^2-x+3=0$;
5) $2z^3-5z^2+2z-5=0$;
6) $x^3-8=0$;
7) $x^3+1=0$;
8) $y^4-2y^2=0$.

28. Составить алгебраическое уравнение наинизшей степени, имеющее следующие корни:

1) 1; 2 и —3;
2) 0 и ± 1;
3) ± 2 и ± 3;
4) —1; 2; 3 и 4;
5) a, b, $-c$ и d.

29. Решить уравнения:

1) $x^4-17x^2+16=0$;
2) $x^4-50x^2+49=0$;
3) $u^4-11u^2+30=0$;
4) $3y^4-28y^2+9=0$;
5) $z^4-3z^2-4=0$.

30. Решить следующие иррациональные уравнения и полученные корни проверить:

1) $3+5\sqrt{x}=13$;
2) $11-3\sqrt{x}=5$;
3) $16-\sqrt{\frac{2}{3}x}=12$;
4) $\sqrt{16+\sqrt{x+4}}=5$;
5) $\sqrt{5+\sqrt{3+x}}=3$;
6) $\frac{2x-5}{\sqrt{x+2}}=\sqrt{x+2}$;
7) $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+24}=14$;
8) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-4}=5$;
9) $\sqrt{x+5}=\sqrt{4x+9}-\sqrt{x}$;
10) $\sqrt{x+10}-\sqrt{x+3}=\sqrt{4x-23}$;
11) $\sqrt{4x-3a}-\sqrt{x+6a}=\sqrt{x-3a}$;
12) $\sqrt{8x+1}-\sqrt{2x-2}=$
$=\sqrt{7x+4}-\sqrt{3x-5}$;
13) $\sqrt{x+4}=7$;
14) $\sqrt{36+x}=2+\sqrt{x}$;
15) $x+\sqrt{25-x^2}=7$;
16) $x-\sqrt{25-x^2}=1$;
17) $4x+\sqrt{5x+10}=17$;
18) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$;
19) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$;
20) $\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}=\sqrt{7x+4}$;
21) $\frac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}}=\frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$;
22) $\sqrt{5a+x}+\sqrt{5a-x}=\frac{12a}{\sqrt{5a+x}}$;
23) $\frac{2}{x+\sqrt{2-x^2}}+\frac{2}{x-\sqrt{2-x^2}}=x$;
24) $y\sqrt{\frac{a}{y}-1}=\sqrt{y^2-b^2}$;
25) $\sqrt{a^2+x\sqrt{b^2+x^2-a^2}}=x-a$;
26) $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b}$;
27) $\sqrt{2+x}+\sqrt{x}=\frac{4}{\sqrt{2+x}}$;

28) $2x+2\sqrt{a^2+x^2}=\dfrac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

31. Решить следующие системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=74; \\ x-y=2. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-2y=2; \\ xy=12. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5(x-y)=4y; \\ x^2+4y^2=181. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+2y^2=34; \\ x+y=7. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2-2xy-y^2=1; \\ x+y=2. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2+3y^2-4x-5y-8=0; \\ x-y+1=0. \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1; \\ x+y=4. \end{cases}$

8) $\begin{cases} y-x=2; \\ \dfrac{10x+y}{xy}=3. \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{16}{15}; \\ x-y=2. \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2+xy=12; \\ xy-y^2=2. \end{cases}$

11) $\begin{cases} u^2+v^2=8; \\ \dfrac{1}{u^2}+\dfrac{1}{v^2}=0,5. \end{cases}$

12) $\begin{cases} x^2+y^2=65; \\ xy=28. \end{cases}$

13) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=18; \\ x+y=12. \end{cases}$

14) $\begin{cases} x+xy+y=27; \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2,5. \end{cases}$

15) $\begin{cases} x^2+y^2=45; \\ \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{10}{3}. \end{cases}$

16) $\begin{cases} x:12=3:y; \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5. \end{cases}$

17) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=2\sqrt{xy}; \\ x+y=20. \end{cases}$

18) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=2,5; \\ x+y=10. \end{cases}$

19) $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=7; \\ x^2+y^2+xy=133. \end{cases}$

20) $\begin{cases} x+y=a\sqrt{xy}; \\ x-y=b\sqrt{\dfrac{x}{y}}. \end{cases}$

21) $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1; \\ \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=4. \end{cases}$

22) $\begin{cases} x+y=72; \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6. \end{cases}$

23) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{7}{\sqrt{xy}}+1; \\ \sqrt{x^3y}+\sqrt{y^3x}=78. \end{cases}$

24) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=a \quad (a>0); \\ \sqrt{xy}=b. \end{cases}$

25) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{6x}}=\dfrac{5}{2}; \\ xy-x-y=9. \end{cases}$

26) $\begin{cases} 5\sqrt{x^2-3y-1}+\sqrt{x+6y}=19; \\ 3\sqrt{x^2-3y-1}=1+2\sqrt{x+6y}. \end{cases}$

32. Произведение двух чисел равно 135, а их разность равна 6. Найти эти числа.

33. Разность двух чисел относится к их произведению, как 1:24, а сумма этих чисел относится к их разности, как 5:1. Найти эти числа.

34. Сумма двух взаимно обратных дробей равна $2\frac{1}{6}$, а разность их равна $\frac{5}{6}$. Найти эти дроби.

35. Решить неравенства:

1) $x^2-5x+4<0$; 2) $x^2>3x-2$;

3) $8x-3>x^2+4$; 4) $3x^2+4\geqslant 2x^2+5x$;

5) $\dfrac{2x+1}{x-1}<1$; 6) $|x^2-4|<5$;

7) $|x^2-5x|<4$; 8) $|9-x^2|\geqslant 3$.

36. Решить системы неравенств:

1) $\begin{cases} x^2+x<12, \\ x^2-x-2>0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x-3|<2, \\ x^2+x>6. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+3>0, \\ |x^2-5x+6|\leqslant 2. \end{cases}$

ГЛАВА VIII

ВЕКТОРЫ

§ 86. Положительные и отрицательные отрезки на оси. Пусть дана ось OP, т. е. прямая, на которой выбрано положительное направление, начало отсчета O и единица масштаба (рис. 46). Возьмем ряд точек на этой оси, например точки A, B, C, D, N.

Отрезки AB, CD, BC, AN и т. д., лежащие на оси OP, будем различать не только по их длине, но и по направлению: первая буква A в обозначении отрезка AB всегда

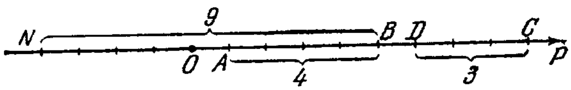

Рис. 46.

принимается за начало отрезка, вторая буква B обозначает конец отрезка. Отрезку AB приписывается то направление, в каком мы перемещаемся по оси OP, пробегая отрезок AB от его начала A к концу B; если это направление совпадает с положительным направлением оси OP, как на рис. 46, то отрезок считается положительным, в противном случае — отрицательным.

Из сказанного следует, что отрезки AB, DC, NB положительны; отрезки BA, CD, BN отрицательны.

Определение. Действительное число, абсолютная величина которого равна длине отрезка AB, взятое со знаком плюс или минус, смотря по тому, является ли отрезок AB положительиым или отрицательным, называется *алгебраической величиной* отрезка. Алгебраические величины отрезков AB и BA — два противоположных числа.

Длину отрезка AB, взятого на оси OP, будем обозначать $|AB|$.

Мы не будем вводить для алгебраической величины специального обозначения, помня, что это понятие имеет смысл только для положительных или отрицательных (т. е. лежащих на оси) отрезков. Например, через AB обозначаем как сам отрезок, так и его алгебраическую величину.

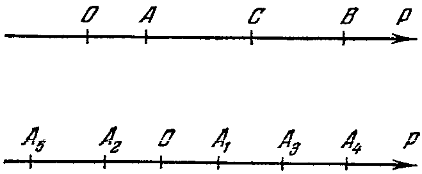

Рис. 47.

Суммой двух отрезков AB и BC, взятых на оси, называется (по определению) отрезок AC той же оси (рис. 46). Очевидно, что алгебраическая величина суммы отрезков равна сумме алгебраических величин слагаемых отрезков.

Если на оси взято n произвольных точек A_1, A_2, A_3, ..., A_n, то суммой отрезков $A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + \ldots$ $\ldots + A_{n-1}A_n$ называется отрезок A_1A_n, соединяющий первую точку A_1 с последней A_n (для $n = 5$ см. рис. 47).

§ 87. Понятие вектора. В математике, физике, механике, а также в ряде других наук встречаются двоякого рода величины: одни из них — например такие, как длина, площадь, объем, масса, температура, теплоемкость и т. д., — вполне определяются числами, выражающими эти величины в соответствующих единицах измерения. Такие величины принято называть *скалярными величинами* или просто *скалярами*.

Другие величины — например такие, как скорость, ускорение, сила, напряженность электромагнитного поля, — помимо их численных значений, имеют еще определенное направление. Такие величины называются *векторными величинами*. Всякую векторную величину изображают в виде *вектора*, т. е. направленного отрезка, снабженного стрелкой на конце. Обычно векторы обозначают маленькими латинскими буквами полужирного шрифта: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ...; однако, когда необходимо подчеркнуть, что начало вектора — точка A, а конец — точка B, его обозначают через $\overrightarrow{AB}$. На рис. 48 изображены три вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$.

Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ (измеренная принятой единицей масштаба) называется его *модулем* и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$. Модуль вектора $\boldsymbol{a}$ часто обозначают той же буквой a, но светлым шрифтом. Например, на рис. 48

$$|\overrightarrow{AB}|=3;\ |\overrightarrow{CD}|=2;\ |\overrightarrow{EF}|=|\boldsymbol{a}|=a=5.$$

Итак, модуль вектора — число (скаляр), всегда положительное.

Два вектора считаются *равными*, если они имеют одинаковые модули и одинаковое направление. Из этого определения следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, от этого он не изменится.

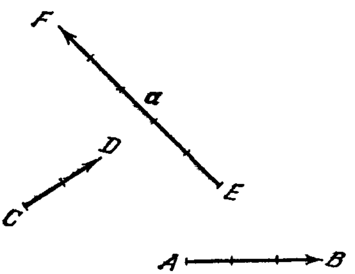

Рис. 48.

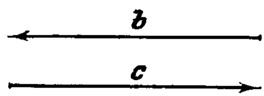

Рис. 49.

Два вектора с равными модулями, но направленные в противоположные стороны, называются *противоположными*. На рис. 49 векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ противоположны.

Вектор, противоположный вектору $\boldsymbol{a}$, принято обозначать $-\boldsymbol{a}$.

§ 88. Действия над векторами. Над векторами можно по установленным правилам производить арифметические действия, как и над числами, т. е. скалярными величинами.

1. Сложение векторов. Пусть даны три вектора: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Тогда их суммой называется вектор, построенный по следующему правилу (рис. 50, *а*).

При произвольной точке A строим вектор $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$: для этого перемещаем вектор $\boldsymbol{a}$ параллельно себе так, чтобы его начало совпало с точкой A; аналогично при точке B строим вектор $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$; при точке C строим вектор $\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{c}$; получается векторная ломаная $ABCD$.

Вектор $\overrightarrow{AD}$, идущий от начала первого вектора к концу последнего, называется *суммой* данных трех векторов (по определению). Сумму двух векторов иногда строят

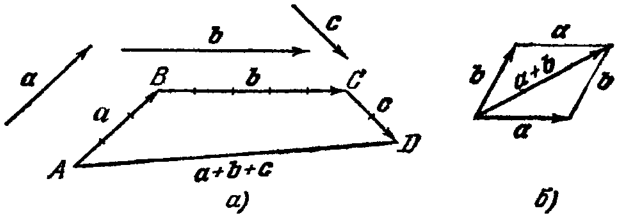

Рис. 50.

так: приводят векторы к общему началу и строят на них, как на двух смежных сторонах, параллелограмм, тогда вектор, идущий по диагонали из общего начала, есть их сумма (рис. 50, *б*).

2. Вычитание векторов. *Разностью* между вектором $\boldsymbol{a}$ и вектором $\boldsymbol{b}$ называется такой третий вектор $\boldsymbol{c}$, который, будучи сложен с вектором $\boldsymbol{b}$, дает в сумме вектор $\boldsymbol{a}$. Такой вектор можно построить следующим образом: приведем векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ к общему началу (рис. 51).

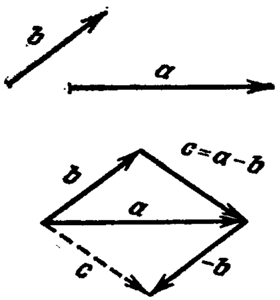

Рис. 51.

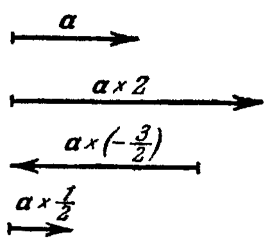

Рис. 52.

Вектор, идущий от конца вектора $\boldsymbol{b}$ к концу вектора $\boldsymbol{a}$, и есть разность между вектором $\boldsymbol{a}$ и вектором $\boldsymbol{b}$.

Примечание. Вычитание вектора $\boldsymbol{b}$ можно заменить прибавлением противоположного вектора $-\boldsymbol{b}$. Результат будет один и тот же. Заметим, что если направим векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ по двум смежным сторонам параллелограмма, то вектор, идущий по одной из диагоналей, есть сумма, а по другой диагонали — разность данных векторов.

3. Умножение вектора на скаляр. Умножить вектор $\boldsymbol{a}$ на скаляр m — значит увеличить его длину (модуль) в m раз и сохранить направление вектора прежним, если $m > 0$, или изменить направление на противоположное, если $m < 0$. На рис. 52 изображены случаи: 1) $\boldsymbol{a} \cdot 2$; 2) $\boldsymbol{a} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$; 3) $\boldsymbol{a} \cdot \frac{1}{2}$.

Для всякого вектора $\boldsymbol{a}$ можно построить его единичный вектор $\boldsymbol{a}^0$, имеющий то же направление, что и вектор $\boldsymbol{a}$, и длину, равную единице. Тогда по правилу умножения вектора на скаляр имеем:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^0 \cdot a.$$

Всякий вектор $\boldsymbol{a}$ *равен своему единичному вектору* $\boldsymbol{a}^0$, *умноженному на модуль вектора* $\boldsymbol{a}$, *т. е. на положительное число* a.

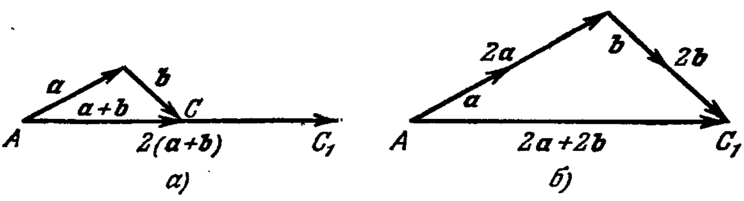

Рис. 53.

Запись $\boldsymbol{a} \cdot 2$ и $2\boldsymbol{a}$ означает одно и то же. Если сумма векторов умножается на скаляр, то можно каждый слагаемый вектор умножить на этот скаляр и полученные результаты сложить. На рис. 53 показано умножение суммы векторов $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ на скаляр 2; это умножение выполнено двояко: а) вектор $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ умножается на 2 (длина увеличивается в два раза); получается вектор $\overrightarrow{AC_1}$, равный $2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ (рис. 53, *а*); б) вектор $\overrightarrow{AC_1}$ получен как сумма векторов $2\boldsymbol{a}$ и $2\boldsymbol{b}$ (рис. 53, *б*).

§ 89. Проекция вектора на ось. Как известно, *проекцией точки* M на ось называется основание перпендикуляра MM_1, опущенного из точки M на эту ось, т. е. точка M_1.

Пусть дана ось l и произвольный вектор $\overrightarrow{AB}$ (рис. 54). Опустим перпендикуляры из начала и конца вектора на ось. Получим на оси отрезок A_1B_1, алгебраическая величина которого и называется *проекцией вектора* $\overrightarrow{AB}$ на ось l, что записывается так:

$$\text{пр}_l \overrightarrow{AB} = A_1B_1.$$

Определение. *Проекцией вектора* на ось называется число (скаляр), выражающее алгебраическую величину отрезка на оси, ограниченного проекциями начала и конца данного вектора.

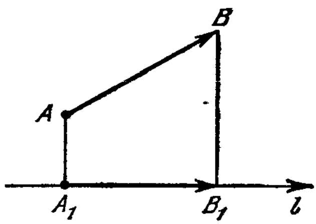

Рис. 54.

На рис. 55 показано, что

$$\text{пр}_l \overrightarrow{AB} = A_1B_1 = 3;$$
$$\text{пр}_l \overrightarrow{CD} = C_1D_1 = -4;$$
$$\text{пр}_l \overrightarrow{EF} = 0,$$

так как вектор $\overrightarrow{EF}$ перпендикулярен к оси l. Очевидно, если вектор параллелен оси проекции и имеет с осью

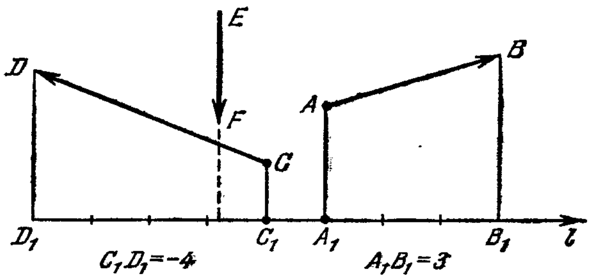

Рис. 55.

одинаковое направление, то его проекция равна длине вектора; если же направление вектора противоположно направлению оси l, то

$$\text{пр}_l \boldsymbol{a} = -a.$$

Теорема 1. *Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций отдельных слагаемых векторов на ту же ось.*

Доказательство. Пусть вектор $\overrightarrow{AD}$ есть сумма трех векторов: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$ (рис. 56). Тогда

$$\text{пр}_l\,\overrightarrow{AD}=A_1D_1. \qquad (1)$$

Спроектируем отдельные слагаемые векторы на ту же ось:

$$\text{пр}_l\,\overrightarrow{AB}=A_1B_1;\quad \text{пр}_l\,\overrightarrow{BC}=B_1C_1;\quad \text{пр}_l\,\overrightarrow{CD}=C_1D_1. \qquad (2)$$

Складывая эти равенства, получим:

$$\text{пр}_l\,\overrightarrow{AB}+\text{пр}_l\,\overrightarrow{BC}+\text{пр}_l\,\overrightarrow{CD}=A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1=A_1D_1. \qquad (3)$$

Правые части равенств (1) и (3) равны между собой, следовательно, равны и левые части:

$$\text{пр}_l\,\overrightarrow{AD}=\text{пр}_l\,\overrightarrow{AB}+\text{пр}_l\,\overrightarrow{BC}+\text{пр}_l\,\overrightarrow{CD}.$$

Примечание. Доказанную теорему часто формулируют еще так: проекция векторной ломаной на ось

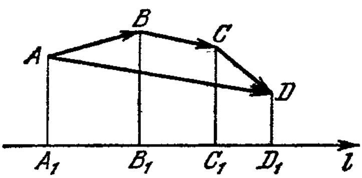

Рис. 56.

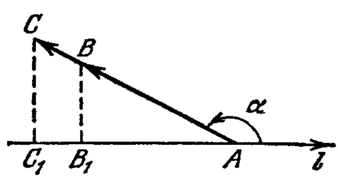

Рис. 57.

равна сумме проекций отдельных звеньев ломаной и равна проекции замыкающего вектора на ту же ось. $\overrightarrow{AD}$ — замыкающий вектор векторной ломаной $ABCD$.

Теорема 2. *Для данного угла α, образованного вектором с осью l, отношение проекции вектора к его модулю есть определенное число, не зависящее от модуля вектора.*

На рис. 57 два вектора, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, образуют один и тот же угол α с осью l, причем

$$\text{пр}_l\,\overrightarrow{AB}=AB_1,\qquad \text{пр}_l\,\overrightarrow{AC}=AC_1.$$

Из подобия прямоугольных треугольников ABB_1 и ACC_1 имеем:

$$\frac{|AB_1|}{AB}=\frac{|AC_1|}{AC}; \qquad (4)$$

проекции векторов взяты по абсолютной величине, потому что в геометрии стороны треугольников всегда выражаются положительными числами. Но проекции AB_1 и AC_1 обе одинаковы по знаку (на рис. 57 обе отрицательны), а потому знаки абсолютной величины в равенстве (4) можно опустить, и мы получим:

$$\frac{AB_1}{AB}=\frac{AC_1}{AC},$$

что и требовалось доказать.

Примечание. Если $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$;

$$\text{пр}_l\,\boldsymbol{a}=a_l,\quad \text{пр}_l\,\boldsymbol{b}=b_l,$$

то утверждение теоремы зипишется так:

$$\frac{a_l}{a}=\frac{b_l}{b}.$$

§ 90. Координаты вектора. Пусть в прямоугольной системе координат xOy дан вектор $\overrightarrow{OM}$ (рис. 58).

Определение. Вектор, направленный из начала координат в произвольную точку M плоскости xOy, называется *радиусом-вектором точки* M и обозначается через $\boldsymbol{r}$:

$$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}.$$

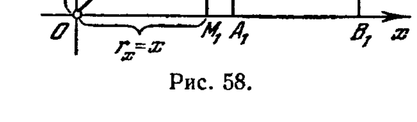

Рис. 58.

Спроектируем вектор $\boldsymbol{r}$ как на ось Ox, так и на ось Oy, получим:

$$\text{пр}_x\,\boldsymbol{r}=OM_1=\boldsymbol{r}_x,$$
$$\text{пр}_y\,\boldsymbol{r}=OM_2=\boldsymbol{r}_y.$$

Легко показать, что если вектор $\boldsymbol{r}$ перестанет быть радиусом-вектором и переместнтся параллельно самому себе в новое положение $\overrightarrow{AB}$, то его проекции на координатные оси останутся без изменения. Это следует из равенства прямоугольных треугольников $\triangle OM_1M$ и $\triangle ABN$:

$$|\boldsymbol{r}|=|\overrightarrow{AB}|,\quad |OM_1|=|A_1B_1|,$$

но так как направление отрезков OM_1 и A_1B_1 одно и то же, то можно опустить знак абсолютной величины:

$$OM_1 = A_1B_1 = \text{пр}_x\, \boldsymbol{r}.$$

Таким образом, каждый заданный в координатной плоскости xOy вектор имеет вполне определенные проекции на координатные оси; справедливо и обратное: две заданные проекции на координатные оси вполне определяют вектор.

Определение. Проекции вектора на координатные оси называются *координатами вектора*.

Принято координаты вектора записывать следующим образом:

$$\boldsymbol{a} = \{x,\ y\},$$

где $x = \text{пр}_x\, \boldsymbol{a}$, $y = \text{пр}_y\, \boldsymbol{a}$. Первая координата x может быть названа абсциссой вектора $\boldsymbol{a}$, вторая координата y — ординатой вектора $\boldsymbol{a}$. Координаты радиуса-вектора $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ являются одновременно координатами точки M, т. е. конца радиуса-вектора.

Если начало вектора не совпадает с началом координат, то координаты вектора и координаты конца вектора не одно и то же, но тогда справедливо соотношение

$$\overrightarrow{AB} = \{x,\ y\} = \{x_B - x_A,\ y_B - y_A\},$$

так как $x = \text{пр}_x\, \overrightarrow{AB} = x_B - x_A$, $y = \text{пр}_y\, \overrightarrow{AB} = y_B - y_A$, что наглядно пояснено на рис. 58.

Теорема. *Координаты суммы двух векторов равны сумме соответствующих координат слагаемых векторов.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a} = \{x_1,\ y_1\}$; $\boldsymbol{b} = \{x_2,\ y_2\}$; требуется доказать, что $\boldsymbol{c} = \{x_1 + x_2,\ y_1 + y_2\}$, где $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

По теореме о проекции суммы векторов на ось имеем:

$$\text{пр}_x\, \boldsymbol{c} = \text{пр}_x\, (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \text{пр}_x\, \boldsymbol{a} + \text{пр}_x\, \boldsymbol{b} = x_1 + x_2,$$
$$\text{пр}_y\, \boldsymbol{c} = \text{пр}_y\, (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \text{пр}_y\, \boldsymbol{a} + \text{пр}_y\, \boldsymbol{b} = y_1 + y_2.$$

Следовательно, $\boldsymbol{c} = \{x_1 + x_2,\ y_1 + y_2\}$.

§ 91. Разложение вектора по координатным осям. Произвольный вектор $\overrightarrow{AB}$ координатной плоскости xOy можно рассматривать как сумму двух векторов, направленных по осям координат. Для этого достаточно спроектировать вектор $\overrightarrow{AB}$ на координатные оси (рис. 59). Тогда получим две вектор-проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Ox и ось Oy, а именно: вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и вектор $\overrightarrow{A_2B_2}$, сумма которых равна вектору $\overrightarrow{AB}$:

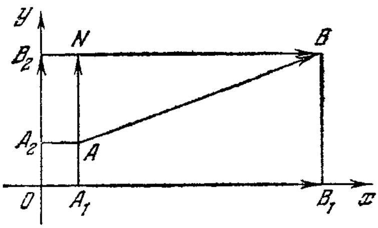

Рис. 59.

$$\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{AB}.$$

Это следует из равенства

$\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{AB}$, так как $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{A_2B_2}, \overrightarrow{NB}=\overrightarrow{A_1B_1}$.

Определение. Векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_2B_2}$ называются *составляющими* или *компонентами вектора* $\overrightarrow{AB}$ *по осям координат.*

Выберем на каждой из координатных осей по единичному вектору, имеющему направление соответствующей оси:

$\boldsymbol{i}$ — единичный вектор оси Ox,

$\boldsymbol{j}$ — единичный вектор оси Oy.

Пусть

$$\overrightarrow{AB}=\{x,\ y\}.$$

Тогда по правилу умножения вектора на скаляр имеем:

$$\overrightarrow{A_1B_1}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{A_2B_2}=y\boldsymbol{j},$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j},$$

$$\overrightarrow{AB}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}.$$

Мы получили одну из основных формул векторной алгебры:

Всякий вектор координатной плоскости xOy равен сумме произведений его координат на соответствующие единичные векторы осей.

§ 92. Скалярное произведение двух векторов.

Задача 1. Под действием силы $\boldsymbol{F}$ тело совершает поступательное движение так, что его центр тяжести O перемещается в точку M, причем OM образует угол в 60° с направлением действия силы (рис. 60). Вычислить произведенную силой работу, если $|\boldsymbol{F}|=F=120$ Н, а $OM=5$ м.

Если направление силы совпадает с направлением перемещения, то работа A равна произведению модуля силы на пройденный путь. В данном случае это правило неприменимо, поскольку сила действует под углом.

Разложим силу $\boldsymbol{F}$ на две составляющие: $\boldsymbol{F}_1$, направленную по прямой OM, и $\boldsymbol{F}_2$, перпендикулярную к $\boldsymbol{F}_1$. Работу производит только горизонтальная составляющая $\boldsymbol{F}_1$, ее модуль (см. прямоугольный треугольник на рис. 60) $F_1 = F\cos 60° = 120 \cdot \frac{1}{2} = 60$ (Н), а потому произведенная работа $A = 60 \cdot 5 = 300$ (Н · м) $= 300$ (Дж).

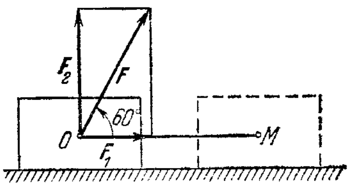

Рис. 60.

В этой задаче мы имели два вектора: вектор-силу $\boldsymbol{F}$ и вектор-перемещение $\overrightarrow{OM}$. Требовалось поставить им в соответствие некоторую скалярную величину, в данном случае работу.

Определение. *Скалярным произведением* вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ называется произведение их модулей на косинус угла между ними:

$$\boldsymbol{ab} = ab\cos\varphi,$$

где φ — угол, образованный векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Таким образом, работа есть скалярное произведение вектора-силы на вектор-перемещение:

$$A = \boldsymbol{F} \cdot \overrightarrow{OM} = 120 \cdot 5\cos 60° = 120 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 300\,(\text{Н} \cdot \text{м}) = 300(\text{Дж}).$$

§ 93. Различные задачи на векторы.

Задача 1. На сторонах прямоугольника $ABCD$ построены вектор $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$ и вектор $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$. Выразить через эти два вектора вектор $\overrightarrow{MB}$, если точка M — середина стороны AD (рис. 61).

Имеем: $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$, но $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$; $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, поэтому

$$\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}.$$

Задача 2. Построить вектор $\boldsymbol{c}$, равный $2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

Строим вектор, равный удвоенному вектору $\boldsymbol{a}$ (начало вектора — произвольная точка A). Складываем его с вектором, противоположным вектору $\boldsymbol{b}$, т. е. с вектором $(-\boldsymbol{b})=\overrightarrow{BC}$. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ равен сумме $2\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=$ $=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ (рис. 62).

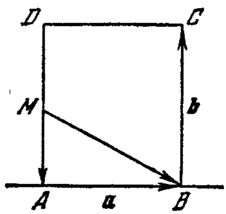

Рис. 61.

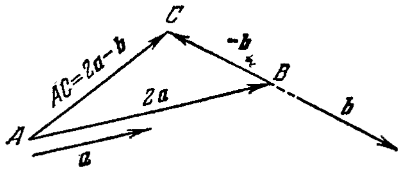

Рис. 62.

Задача 3. Дан вектор $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, причем $A(-2;\ 3)$, B $(2;\ 6)$. Найти: проекции вектора на координатные оси; модуль вектора $\boldsymbol{a}$; единичный вектор $\boldsymbol{a}^0$ вектора $\boldsymbol{a}$ (рис. 63).

Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Ox равна алгебраической величине отрезка A_1B_1, лежащего на оси Ox. Отрезок A_1B_1 — положительный и по длине равен $2-(-2)=4$ единицам. Проекция вектора на ось ординат равна $6-3=3$.

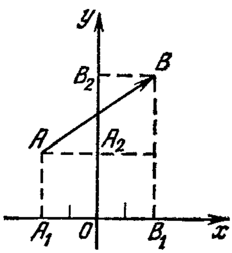

Рис. 63.

Модуль (длина вектора) равен

$$|\boldsymbol{a}|=a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5.$$

Единичный вектор $\boldsymbol{a}^0$ данного вектора $\boldsymbol{a}$ находим из равенства $\boldsymbol{a}=$ $=\boldsymbol{a}^0\cdot a$, откуда $\boldsymbol{a}^0=\frac{a}{5}$.

Задача 4. Показать, что если

$$\boldsymbol{a}=\{-1,\ 2\},\ \boldsymbol{b}=\{3,\ 3\},$$

то $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{2,\ 5\}$ (рис. 64).

По теореме о проекции суммы векторов имеем:

$$\text{пр}_x(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\text{пр}_x\boldsymbol{a}+\text{пр}_x\boldsymbol{b}=-1+3=2.$$

Берем проекции на ось Oy:

$$\text{пр}_y(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\text{пр}_y\boldsymbol{a}+\text{пр}_y\boldsymbol{b}=2+3=5.$$

Итак, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{2,\ 5\}$.

Задача 5. Найти разложение $\overrightarrow{AB}$ по единичным векторам $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ координатных осей, если $A(-2;\ 3)$, $B(4;\ 5)$ (рис. 65).

Находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\text{пр}_x \overrightarrow{AB} = x_B - x_A = 4 - (-2) = 6,$$

$$\text{пр}_y \overrightarrow{AB} = y_B - y_A = 5 - 3 = 2, \qquad \overrightarrow{AB} = 6\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}.$$

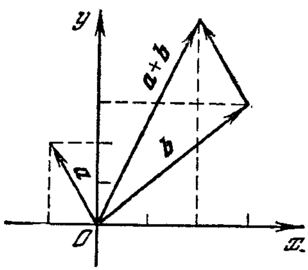

Рис. 64.

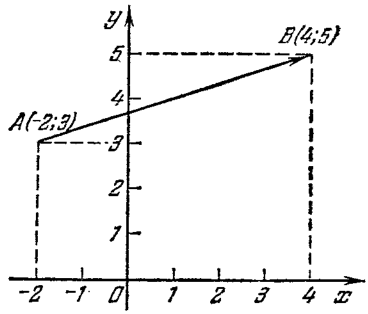

Рис. 65.

Упражнения

1. Изобразите три произвольных вектора и постройте их сумму.
2. Постройте два произвольных вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и постройте вектор, равный разности $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.
3. На сторонах треугольника ABC построены векторы $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{c}$. Чему равна сумма $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$?
4. Дайте истолкование следующих векторных равенств: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})$ (переместительное свойство), $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$ (сочетательное свойство), $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})m=\boldsymbol{a}m+\boldsymbol{b}m$ (распределительное свойство).
5. Изобразите произвольный вектор $\boldsymbol{a}$ и рядом с ним постройте векторы: $\boldsymbol{a}\frac{3}{2}$; $\boldsymbol{a}\left(-\frac{2}{3}\right)$; $-2\boldsymbol{a}$.
6. Найти проекцию вектора $\boldsymbol{a}$ на ось, образующую с вектором угол $120°$, если $|\boldsymbol{a}|=8$.
7. В прямоугольнике $ABCD$ на сторонах AB и AD отложены (от точки A) единичные векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$. Выразить через $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ векторы: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$, если длины сторон прямоугольника $AB=4$, $AD=6$.
8. Точки M и N — середины сторон CD и BC прямоугольника $ABCD$ (см. предыдущую задачу). Определить векторы: $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{MN}$, выражая их через единичные векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$.

9. В начале координат приложены три силы: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, причем $A(0;\ -2)$, $B(4;\ 2)$, $C(4;\ -2)$.

Построить равнодействующую этих трех сил, найти ее координаты и вычислить величину равнодействующей.

10. Показать, что точки $A(3;\ -1)$, $B(1;\ 2)$, $C(-1;\ 1)$, $D(1;\ -2)$ являются вершинами параллелограмма.

Указание. У параллельных векторов сходственные координаты пропорциональны.

11. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 5)$, $C(-2;\ 2)$. Найти координаты четвертой вершины D, противолежащей вершине B, используя векторный метод.

12. Даны векторы $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$. Найти скалярное произведение $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

13. Пользуясь скалярным произведением, найти угол между векторами $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$.

14. Даны векторы $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b}=8\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$. Найти $\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$ и $\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$.

15. На двух векторах $\boldsymbol{a}=\{2,\ 1\}$ и $\boldsymbol{b}=\{-1,\ 5\}$ построен параллелограмм. Найти угол между его диагоналями.

16. Дано, что $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, причем $\boldsymbol{a}=\{3,\ 4\}$; $\boldsymbol{b}=\{8,\ y\}$. Найти число y.

17. Проверьте векторным методом, что диагонали ромба делятся в точке пересечения пополам.

18. Даны три вектора: $\boldsymbol{a}=\{x_1,\ y_1\}$, $\boldsymbol{b}=\{x_2,\ y_2\}$, $\boldsymbol{c}=\{x_3,\ y_3\}$. Показать, что $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

19. Вычислить $\left|\boldsymbol{i}-\dfrac{2(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})}{5}\right|$, если $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ — два взаимно перпендикулярных единичных вектора.

20. Вычислить $\left|\boldsymbol{a}-\dfrac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{3}\right|$, если $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$ и угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен 60.

ГЛАВА IX

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЛЮБОГО УГЛА

§ 94. Обобщение понятия угла. В геометрии угол определяется как фигура, образованная двумя лучами, исходящими из общей точки; при этом не делается различия между сторонами угла: угол AOB или угол BOA считаются одинаковыми. Кроме того, нигде в геометрии не встречаются отрицательные углы.

Установим более общий взгляд на угол как на алгебраическую величину, которая может принимать любые значения: положительные, отрицательные или нуль.

Рис. 66.

Проведем ось OP из начала O и произвольным радиусом r опишем окружность. Пусть эта окружность пересекает ось OP в точке A (рис. 66). Если M — произвольная точка на окружности, то ей соответствует вектор $\overrightarrow{OM}$, который в дальнейшем будем называть *радиусом-вектором* точки M. Тогда угол $AOM = \alpha$ будем считать образованным вращением вектора $\overrightarrow{OM}$ в направлении против движения часовой стрелки от первоначального положения OA до положения OM:

OA — начальная сторона угла (неподвижная сторона),

OM — конечная сторона угла.

Определение. Угол α считается *положительным*, если он образован вращением вектора $\overrightarrow{OM}$ против движения часовой стрелки, и *отрицательным*, если вектор $\overrightarrow{OM}$ вращается по часовой стрелке. Однако данному положению OM конечной стороны угла соответствует не единственный угол α: вектор $\overrightarrow{OM}$, повернувшись сначала в положительном направлении на угол α, может после этого совершить любое целое число оборотов в положительном или в отрицательном направлении, после чего конец его неизменно окажется в той же фиксированной точке M. Следовательно, данному положению конечной стороны угла соответствует бесчисленное множество углов как положительных, так и отрицательных. Все эти углы получаются по формуле

$$\beta = \alpha + 360^\circ k,$$

где k — любое целое число, в том числе и 0:

$$k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \ldots$$

Пример. Если радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ повернут в положительном направлении на угол 120° относительно начальной стороны OA, то такому положению вектора $\overrightarrow{OM}$ соответствуют: а) положительные углы 120°, 480°, 840°, 1200°, ...; б) отрицательные углы (-240°), (-600°), (-960°), ... Все названные углы содержатся в формуле

$$\beta = 120^\circ + 360^\circ k$$

при $k = 0, 1, 2, 3$ для положительных углов а) и при $k = -1, -2, -3$ для отрицательных углов б).

§ 95. Радианная мера углов. При измерении углов в градусах за единицу угла принимается угол, равный 1/90 прямого угла и называемый *угловым градусом* (1°).

В математике, а также в других науках (физика, механика, астрономия и др.) широко применяется другая мера углов, так называемая *радианная*.

Пусть α — центральный угол, которому соответствуют две дуги ANB и $A_1N_1B_1$ (рис. 67) радиусов $OA = r$ и $OA_1 = r_1$. Если длину дуги ANB обозначим через l, длину дуги $A_1N_1B_1$ — через l_1, то легко показать, что

$$\frac{l}{r} = \frac{l_1}{r_1},$$

т. е. для данного центрального угла α отношение длины дуги, на которую он опирается, к длине радиуса есть величина постоянная, не зависящая от размера радиуса.

Действительно, длина дуги, соответствующая центральному углу в α градусов, будет:

$$l=\frac{2\pi r\alpha}{360}=\frac{\pi r\alpha}{180},$$

$$l_1=\frac{2\pi r_1\alpha}{360}=\frac{\pi r_1\alpha}{180},$$

откуда

$$\frac{l}{r}=\frac{\pi\alpha}{180},\quad \frac{l_1}{r_1}=\frac{\pi\alpha}{180}.$$

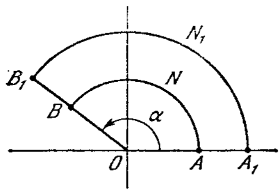

Рис. 67.

Из равенства правых частей следует равенство левых частей:

$$\frac{l}{r}=\frac{l_1}{r_1},$$

что и требовалось доказать. Обозначим $\frac{l}{r}=a$.

Определение 1. Число a, равное отношению длины дуги l, соответствующей некоторому центральному углу, к длине радиуса r, называется *радианной мерой* этого угла.

За единицу в радианной системе измерения углов принимается угол, для которого $l=r$; тогда $a=1$. Такой угол называют *радианом*.

Определение 2. *Радианом* называется такой центральный угол, длина дуги которого равна длине радиуса.

Таким образом, 1) если длина дуги равна двум радиусам, то угол равен 2 радианам, 2) если $l=\frac{1}{3}r$, то угол равен трети радиана.

Примечание. В математической литературе часто название «радиан» не пишется, а только подразумевается; например, пишут $\angle AOB=1{,}5$ вместо полной записи $\angle AOB=1{,}5$ радиана.

§ 96. Зависимость между радианной и градусной мерами углов. Всякий угол, заданный в градусной мере, можно перевести в радианную и, наоборот, угол, заданный в радианной мере, можно перевести в градусную меру.

Найдем прежде всего, сколько градусов содержит 1 радиан. Известно, что длина окружности содержит

2π радиусов, следовательно,

$$360° = 2\pi \text{ (рад)},$$
$$180° = \pi \text{ (рад)},$$

отсюда на 1 радиан приходится:

$$\frac{180°}{\pi} = \frac{180°}{3{,}14159\ldots} \approx 57°17'44{,}8''.$$

Менее точно будет принять радиан равным $57°18'$.

Пусть α — градусная мера некоторого угла, a — радианная мера того же угла; тогда справедлива следующая пропорция:

$$\alpha : 180 = a : \pi,$$

откуда

$$a = \frac{\pi a}{180}. \qquad (1)$$

Составим с помощью формулы (1) таблицу радианной и градусной мер некоторых углов.

$\alpha°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$
a	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

В этой таблице приведены радианные меры наиболее часто встречающихся углов, причем эта мера выражена с помощью числа π, приближенное значение которого можно взять с желаемой точностью. Например, $30° = \frac{\pi}{6}$ (рад), откуда

$$30° \approx \frac{3{,}14}{6} \text{ (рад)} \approx 0{,}52 \text{ (рад)},$$

$$30° \approx \frac{3{,}1416}{6} \text{ (рад)} \approx 0{,}5236 \text{ (рад) и т. д.}$$

Из формулы (1) можно найти угол в $\alpha°$; получим:

$$\alpha° = \frac{180°\, a}{\pi}. \qquad (2)$$

Формула (2) дает градусную меру угла по радианной.

П р и м е р. $a = 0,3$; найти $\alpha°$:

$$\alpha° = \frac{180°\cdot 0,3}{\pi} \approx \frac{54°}{3,14} \approx 17°.$$

Для быстрого перевода любых углов из градусной меры в радианную и наоборот во всех справочниках имеются соответствующие таблицы.

Решим два примера, пользуясь четырехзначными таблицами В. М. Брадиса.

П р и м е р 1. Перевести в радианную меру угол 64°38'. По таблицам Брадиса (см. стр. 47) находим:

$$\begin{array}{r} 64°36' = 1,1275 \\ 2' = 0,0006 \\ \hline 64°38' = 1,1281 \text{ (рад)} \end{array}$$

П р и м е р 2. Выразить в градусах и минутах угол 2,154 рад.

Так как в таблицах Брадиса такого угла нет, то его градусную меру будем находить в два этапа:

$$\begin{array}{l} 1,1537 \text{ рад} = 66°6' \\ 1,0003 \text{ рад} = 57°19' \\ \hline 2,154 \text{ рад} = 123°25' \end{array}$$

§ 97. Длина дуги окружности. Из формулы $a = l/r$ (см. § 77) следует, что $l = ra$; иными словами, *длина дуги окружности равна радиусу, умноженному на радианную меру центрального угла, соответствующего этой дуге.*

П р и м е р. Вычислить длину дуги окружности радиуса $r = 20$ см, если дуга содержит 34°18' (дуговых). Центральный угол, соответствующий этой дуге, также содержит 34°18' (угловых), но

$$34°18' = 0,5986 \text{ (рад)},$$

а потому

$$l = 20\cdot 0,5986 = 11,972 \text{ (см)}.$$

§ 98. Определение тригонометрических функций любого угла. В школьном курсе геометрии для VIII класса даются определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла α как отношения сторон прямоугольного треугольника (рис. 68):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}},$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}}.$$

Так как эти определения относятся только к острому углу α ($0 < \alpha < 90°$), то нельзя говорить о синусе, косинусе, тангенсе и котангенсе таких углов, как, например, углы $0°$, $90°$, $120°$, поскольку острый угол прямоугольного треугольника не может принимать таких значений.

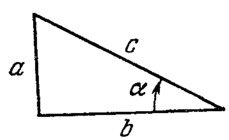

Рис. 68.

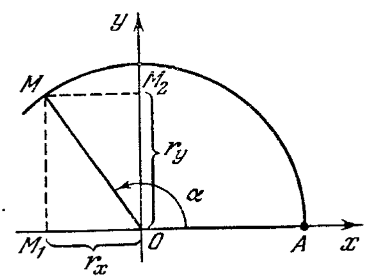

Рис. 69.

Однако можно по-новому определить эти величины так, чтобы они относились к любому углу α.

Проведем две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy. Из точки O их пересечения произвольным радиусом r опишем окружность, которая пересечет ось Ox в точке A (рис. 69).

Пусть M — произвольная точка на окружности, ей соответствует радиус-вектор $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r} = \{x, y\}$. Начальной стороной угла $AOM = \alpha$ всегда будем считать сторону OA, лежащую на оси Ox, конечной стороной — OM.

Подчеркнем еще раз, что α — угол, образованный вектором $\boldsymbol{r}$ с положительным направлением оси Ox.

Определение 1. *Синусом угла* α называется отношение ординаты вектора $\boldsymbol{r}$ к модулю самого вектора:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}. \qquad (1)$$

Определение 2. *Косинусом угла* α называется отношение абсциссы вектора $\boldsymbol{r}$ к модулю самого вектора:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}. \qquad (2)$$

Определение 3. *Тангенсом угла* α называется отношение ординаты вектора $\boldsymbol{r}$ к его абсциссе:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}. \qquad (3)$$

Определение 4. *Котангенсом угла* α называется отношение абсциссы вектора $\boldsymbol{r}$ к его ординате:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}. \qquad (4)$$

Ясно, что синус, косинус, тангенс и котангенс — отвлеченные числа. С изменением угла α координаты x и y вектора изменяются, модуль вектора остается без изменения, а потому $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ будут переменными величинами, зависящими от угла α; поэтому их называют тригонометрическими функциями угла α.

Примечание 1. Кроме упомянутых выше четырех тригонометрических функций, иногда рассматриваются еще две функции.

Определение 5. *Секансом угла* α называется величина, обратная косинусу:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}. \qquad (5)$$

Определение 6. *Косекансом угла* α называется величина, обратная синусу:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}. \qquad (6)$$

Примечание 2. Если угол α острый, то новые определения тригонометрических функций совпадают с прежними, так как обе координаты, x и y, положительны и являются катетами прямоугольного треугольника с острым углом α.

Примечание 3. На основании доказанной теоремы о том, что отношение проекции вектора на ось к модулю вектора не зависит от модуля вектора (см. теорему 2 из § 89), можно дать более простые определения синуса и косинуса угла α. Взяв в качестве $\boldsymbol{r}$ единичный вектор, т. е. $r=|\boldsymbol{r}|=1$, получим

$$\sin\alpha=\frac{y}{1}=y; \quad \cos\alpha=\frac{x}{1}=x.$$

Синусом угла α называется число, выражающее ординату y единичного радиуса-вектора, а косинусом угла α называется число, выражающее абсциссу x единичного радиуса-вектора.

Такое истолкование синуса и косинуса удобно для изучения их изменений при вращении единичного радиуса-вектора $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ в направлении против движения часовой стрелки.

Следствие. Из формул (1) и (2) вытекает, что $x=r\cos\alpha$, $y=r\sin\alpha$, где α — произвольный угол. Этими равенствами будем пользоваться в дальнейшем.

§ 99. Знаки тригонометрических функций. Оси координат Ox и Oy делят окружность единичного радиуса на четыре части, каждая из которых называется *четвертью* или *квадрантом*. Нумерация четвертей показана на рис. 70.

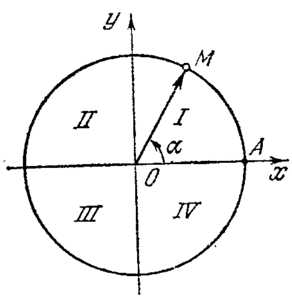

Рис. 70.

Пусть переменный вектор $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ от первоначального положения, совпадающего с вектором $\overrightarrow{OA}$, вращается в положительном направлении и совершает один оборот. Следовательно, угол α при этом изменяется от $0°$ до $360°$ (в радианной мере от 0 до 2π). Проследим за тем, как меняются в процессе вращения вектора $\overrightarrow{OM}$ знаки его координат x и y, так как от знаков координат зависят знаки самих тригонометрических функций.

а) Ордината y остается положительной до тех пор, пока конец вектора $\overrightarrow{OM}$, т. е. точка M, остается на верхней половине окружности. Когда конец вектора описывает нижнюю половину окружности, ордината y отрицательна. Следовательно, синус положителен для углов, оканчивающихся в I и во II четвертях, и отрицателен для углов, оканчивающихся в III и в IV четвертях.

б) Координата x вектора $\overrightarrow{OM}$ положительна, если конец вектора $\overrightarrow{OM}$ находится на правой половине окружности, что соответствует углам, оканчивающимся в I и в IV четвертях. Если же конец вращающегося вектора $\overrightarrow{OM}$ описывает левую половину окружности, что соответствует углам, оканчивающимся во II и в III четвертях, то координата x отрицательна. Таким образом, косинусы углов, оканчивающихся в I и в IV четвертях, положительны, а во II и в III четвертях — отрицательны.

в) Зная знаки координат x и y вектора $\boldsymbol{r}$, легко установить знаки тангенса и котангенса в каждой четверти, так как по определению $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$.

Отсюда следует, что тангенс и котангенс положительны в тех четвертях, где обе координаты вектора одинаковы по знаку, что имеет место для углов, оканчивающихся в I и в III четвертях. Во II и в IV четвертях тангенс и котангенс отрицательны, поскольку x и y противоположны по знаку.

Результат исследования знака тригонометрических функций дается следующей таблицей:

Функция \ Четверть	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	—	—
$\cos\alpha$	+	—	—	+
$\operatorname{tg}\alpha$	+	—	+	—
$\operatorname{ctg}\alpha$	+	—	+	—

Примечание. Знак секанса совпадает со знаком косинуса, а знак косеканса — со знаком синуса, что следует из определений 5 и 6 § 98.

§ 100. Изменение тригонометрических функций при изменении угла α в пределах первой окружности. Проследим за изменением каждой из четырех тригонометрических функций в отдельности при изменении угла от 0° до 360° (от 0 до 2π). Для этого проще всего исходить из единичной окружности, для которой (см. § 98)

$$\sin\alpha = y; \quad \cos\alpha = x.$$

1. Изменение синуса. Если угол α возрастает от 0° до 90°, то $\sin\alpha$ возрастает от 0 до 1 (рис. 71). При дальнейшем возрастании угла от 90° до 180° синус убывает от 1 до 0. В III четверти с изменением угла от 180° до 270° синус продолжает убывать от 0 до —1. В IV четверти при изменении угла от 270° до 360° синус возрастает от —1 до 0.

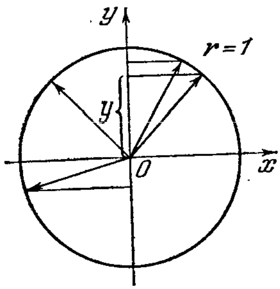

Рис. 71.

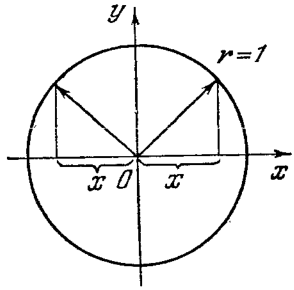

Рис. 72.

2. Изменение косинуса. На рис. 72 изображено изменение косинуса: в I четверти при возрастании угла α от 0° до 90° косинус убывает от 1 до 0; во II четверти с возрастанием угла α от 90° до 180° $\cos\alpha$ продолжает убывать от 0 до —1; при изменении угла α от 180° до 270° $\cos\alpha$ возрастает от —1 до 0; наконец, в IV четверти с изменением угла α от 270° до 360° косинус возрастает от 0 до 1.

3. Изменение тангенса. По определению $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$. Чтобы наглядно представить себе изменение тангенса, постараемся для каждого угла α подобрать на некоторой оси отрезок, алгебраическая величина которого равна $\frac{y}{x}$, т. е. равна $\operatorname{tg}\alpha$.

Построим окружность единичного радиуса. В конце радиуса OA, лежащего на оси Ox, проведем касательную AT, на которой точку A примем за начало отсчета отрезков. За положительное направление оси AT примем направление от точки A вверх (рис. 73).

Пусть вектор $\overrightarrow{OM}$ образует угол α с осью Ox. Продолжим прямую, на которой расположен вектор $\overrightarrow{OM}$, до пересечения с осью AT в точке N, получим отрезок AN

на оси AT. Докажем, что его алгебраическая величина AN равна $\operatorname{tg}\alpha$.

Если угол α оканчивается в I четверти, то отрезок ON положителен. Из подобия треугольников OM_1M и OAN следует пропорция $\frac{M_1M}{OM_1}=\frac{AN}{OA}$, или $\frac{y}{x}=AN$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha=AN$.

Если угол α оканчивается во II четверти (рис. 74), то отрезок AN отрицателен. Координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в этом случае имеют разные знаки, а потому их отношение есть число отрицательное. Следовательно, числа

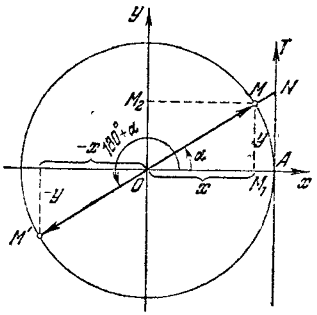

Рис. 73.

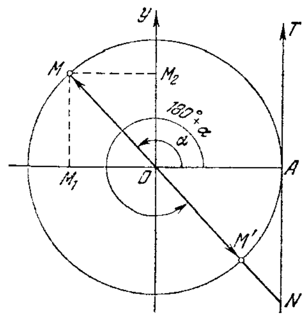

Рис. 74.

$\frac{y}{x}$ и AN имеют одинаковые знаки, остается убедиться только в совпадении их абсолютных величин. Из подобия прямоугольных треугольников OMM_1 и OAN (оба имеют по равному острому углу) имеем:

$$\frac{|M_1M|}{|OM_1|}=\frac{|AN|}{1}, \text{ или } \left|\frac{M_1M}{OM_1}\right|=|AN|$$

(отношение абсолютных величин двух чисел равно абсолютной величине их отношения). Опуская знак абсолютной величины, получим $\frac{y}{x}=AN$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha=AN$.

В случаях, когда угол α оканчивается в III и в IV четвертях, предлагаем читателю самостоятельно проверить справедливость равенства $\operatorname{tg}\alpha=AN$ (см. рис. 73 и 74).

Теперь легко установить следующее.

1) Если угол α возрастает от 0° до 90°, то $\operatorname{tg}\alpha=AN$, оставаясь положительным, возрастает неограниченно по мере того, как угол α все ближе подходит к углу в 90°, и перестает существовать при $\alpha=90°$, так как вектор $\overrightarrow{OM}$

становится параллельным оси AT. Условно пишут, что

$$\operatorname{tg}\alpha \to +\infty \text{ при } \alpha \to 90^\circ.$$

2) При возрастании угла α от 90° до 180° тангенс по знаку делается отрицательным, а его абсолютная величина убывает до 0 (рис. 74).

3) Так как (см. рис. 73) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)$, то при изменении угла α от 180° до 270° тангенс меняется так же, как в I четверти.

4) Аналогично изменение $\operatorname{tg}\alpha$ в IV четверти такое же, как во II, что видно из рис. 74.

4. Изменение котангенса. По аналогии с предыдущим пунктом, в качестве оси выбираем касательную BL, проведенную к единичной окружности в конце радиуса OB, лежащего на оси Oy. Точка B — начало отсчета отрезков, за положительное направление принято направление от точки B вправо (рис. 75). Тогда $BP = \operatorname{ctg}\alpha$, где P — точка пересечения прямой, на которой расположен вектор $\overrightarrow{OM}$, с осью BL. Доказательство этого факта проведем в предположении, что угол α оканчивается в I четверти; рассмотрение же оставшихся трех случаев предоставляем читателю (см. рис. 75 и 76).

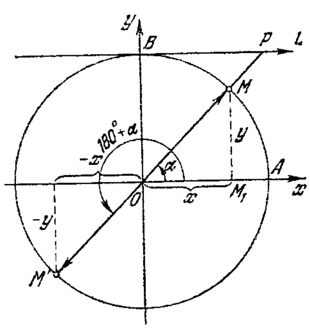

Рис. 75.

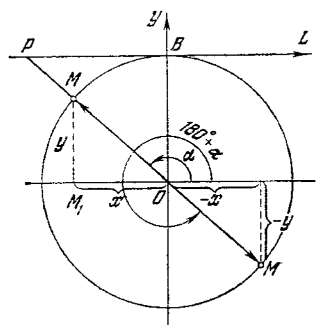

Рис. 76.

В самом деле, из подобия прямоугольных треугольников OMM_1 и OBP следует пропорция

$$\frac{OM_1}{M_1M} = \frac{BP}{OB} \quad \text{или} \quad \frac{x}{y} = \frac{BP}{1}. \tag{1}$$

Итак, $\frac{x}{y} = BP$, т. е. $\operatorname{ctg}\alpha = BP$.

Теперь легко проследить за изменением котангенса при изменении угла.

1) При $\alpha=0$ отрезок BP параллелен оси Ox, следовательно, контангенс угла в 0° не существует.

Пусть α изменяется от 0° до 90°, тогда отрезок BP, оставаясь положительным, уменьшается от неограниченно больших значений до 0 (см. рис. 75).

2) При изменении угла от 90° до 180° отрезок BP по абсолютной величине неограниченно возрастает, оставаясь по знаку отрицательным (рис. 76). Следовательно, котангенс продолжает убывать, переставая существовать при $\alpha=180^\circ$, что условно запишем так: $\operatorname{ctg}\alpha\to-\infty$ при $\alpha\to180^\circ$.

3) Если угол α изменяется от 180° до 270°, то $\operatorname{ctg}\alpha$ изменяется так же, как и при изменении угла α от 0° до 90°, т. е. убывает от ∞ до 0. Это вытекает из того, что $\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha)$, в чем легко убедиться геометрически (см. рис. 75).

4) Аналогично при изменении угла от 270° до 360° котангенс изменяется так же, как и при изменении угла от 90° до 180° (см. рис. 76).

§ 101. Построение угла по заданному значению тригонометрической функции. Построение угла α рассмотрим на примерах.

Пример 1. $\sin\alpha=2/3$.

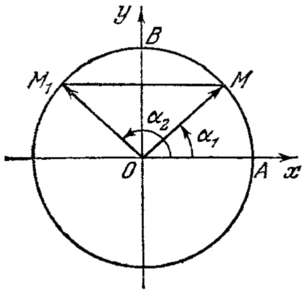

Рис. 77.

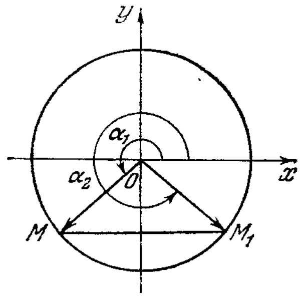

Рис. 78.

Радиус окружности $OB=1$ делим на три равные части (рис. 77). На расстоянии 2/3 от точки O проводим перпендикуляр к OB до пересечения с окружностью в точках M и M_1. Получаем два искомых угла: $\angle AOM=\alpha_1$ и $\angle AOM_1=\alpha_2$.

Пример 2. $\sin\alpha = -\frac{3}{4}$.

Построение, аналогичное описанному выше, дано на рис. 78. Получаем два угла: первый, α_1, оканчивается в III четверти, второй, α_2, оканчивается в IV четверти.

Пример 3. $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

Горизонтальный радиус $OA = 1$ (рис. 79) делим на пять равных частей. На расстоянии $\frac{4}{5}$ от точки O проводим

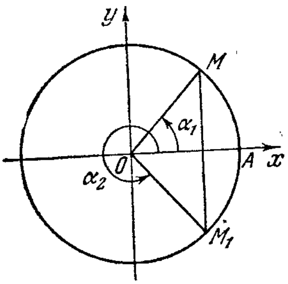

Рис. 79.

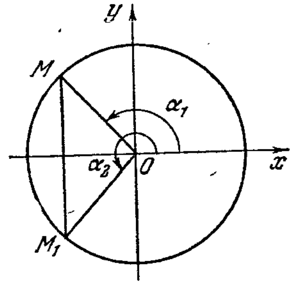

Рис. 80.

перпендикуляр к OA до пересечения с окружностью в точках M и M_1, получаются два угла α_1 и α_2, оканчивающиеся в I и в IV четвертях.

Пример 4. $\cos\alpha = -0{,}7 = -\frac{7}{10}$.

Построение дано на рис. 80. Получаем два угла: первый, α_1, оканчивается во II четверти, второй, α_2, в III четверти.

Пример 5. $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}5 = \frac{3}{2}$.

Строим произвольную окружность и ось тангенсов AT (рис. 81). На оси тангенсов от точки касания A откладываем в положительном направлении отрезок AN, равный полутора радиусам, точку N соединяем с центром окружности и продолжаем OM за центр до получения второй точки пересечения M_1. Тогда $\alpha_1 = \angle AOM$ и $\alpha_2 = \angle AOM_1$ — искомые углы.

Пример 6. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$.

Построение аналогично предыдущему и дано на рис. 82.

Примечание 1. Двойственность в ответах отпадает, если на угол α наложено ограничение; например,

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3} \quad (90^\circ < \alpha < 180^\circ).$$

Теперь угол α должен быть взят только из второй четверти (угол α_1 на рис. 82).

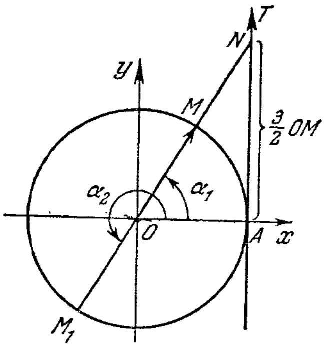

Рис. 81.

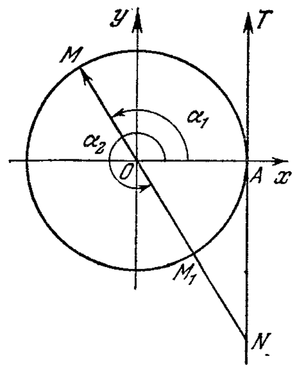

Рис. 82.

Примечание 2. Построение угла по секансу и косекансу может быть заменено построением по косинусу и синусу. Например, если $\sec \alpha = 2$, или $\frac{1}{\cos \alpha} = 2$, то $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

Точно так же нет нужды строить угол по котангенсу. Из равенства $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{5}$ следует, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{3}$.

§ 102. Значения тригонометрических функций некоторых углов. Такие углы, как 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°, 360°, или, в радианной мере, 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, будут в дальнейшем часто встречаться. Значения тригонометрических функций этих углов рекомендуем запомнить.

Поясним, как найдены числа, помещенные в таблицу:

Название функции \ Угол α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$r_y = \sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$r_x = \cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\frac{r_y}{r_x} = \operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Не существ.	0	Не существ.	0
$\frac{r_x}{r_y} = \operatorname{ctg}\alpha$	Не существ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	Не существ.	0	Не существ.

Пусть $\alpha = 30°$, т. е. радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ единичного круга образует угол в $30°$ с осью Ox; обе координаты положительны и представляют собой катеты прямоугольного треугольника с гипотенузой $r = 1$.

Следовательно, $x^2 + y^2 = 1$. Но $y = \frac{1}{2}$ (катет против угла в $30°$ равен половине гипотенузы), а потому

$$x = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 30° = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{ctg} 30° = \frac{x}{y} = \sqrt{3}$.

Подобным образом могут быть вычислены значения тригонометрических функций остальных углов, что рекомендуем проделать читателю.

§ 103. Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же угла. Пусть α — произвольный угол, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с осью Ox, тогда

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}; \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}. \tag{1}$$

Возведем равенства (1) в квадрат и сложим почленно:

$$\begin{array}{r} \sin^2\alpha = \frac{y^2}{r^2} \\ + \\ \cos^2\alpha = \frac{x^2}{r^2} \\ \hline \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{y^2+x^2}{r^2}. \end{array} \tag{2}$$

Но координаты вектора x и y, взятые по абсолютной величине, представляют собой длины катетов; сумма их квадратов равна квадрату гипотенузы:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

вследствие чего равенство (2) примет вид

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{3}$$

Сумма квадратов синуса и косинуса одного и того же угла равна 1.

По определению $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$; величина дроби $\frac{y}{x}$ не изменится, если числитель и знаменатель разделим на число r:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \tag{4}$$

Тангенс угла есть отношение синуса этого угла к косинусу того же угла (предполагается, что $\cos\alpha \neq 0$)

По определению $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$. Но

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{5}$$

Котангенс угла есть отношение косинуса этого угла к синусу того же угла ($\sin\alpha \neq 0$).

Если к тождествам (3), (4) и (5) присоединим еще два,

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \tag{6}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \tag{7}$$

то получим пять независимых друг от друга соотношений между шестью тригонометрическими функциями одного и того же угла.

Выведем некоторые следствия из равенств (3)—(7).

1) Перемножив равенства (4) и (5), получим:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1,$$

или

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Котангенс угла есть величина, обратная тангенсу, и наоборот.

2) Разделим обе части равенства $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ на $\cos^2\alpha$; получим:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

На основании равенств (4) и (6) имеем:

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha.$$

Подобным же образом делением обеих частей того же равенства (3) на $\sin^2\alpha$ получим:

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha.$$

§ 104. Вычисление значений всех тригонометрических функций по заданному значению одной из них.

Пример 1. Дано: $\sin\alpha = 0{,}6$. Найти значения всех остальных функций.

1) Сразу можно найти обратную величину синуса, т. е. $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{0{,}6} = \frac{5}{3}$.

2) Из соотношения $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ находим:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-(0{,}6)^2} = \pm\frac{4}{5}.$$

Двойной знак $\pm$ пишем потому, что неизвестно, в какой четверти оканчивается угол α.

3) Находим обратную величину косинуса:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \pm\frac{5}{4}.$$

4) Из тождества $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$ находим тангенс:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\pm\frac{4}{5}} = \pm\frac{3}{4}.$$

5) По тангенсу находим обратную ему величину:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \pm\frac{4}{3}.$$

Примечание. Если известно, в какой четверти оканчивается угол α, то этим двойственность в знаках устраняется.

Пример 2. $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}4\ (90^\circ < \alpha < 180^\circ)$. Вычислить значения остальных тригонометрических функций.

1) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{-2{,}4} = -\frac{10}{24} = -\frac{5}{12}$.

2) Из соотношений $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$ находим:

$$\sec\alpha = -\sqrt{1 + (-2{,}4)^2} = -\frac{13}{5}.$$

3) $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$.

4) Из тождества $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$ следует, что $\sin\alpha = \cos\alpha \operatorname{tg}\alpha$; отсюда

$$\sin\alpha = \left(-\frac{5}{13}\right)(-2{,}4) = \frac{12}{13}.$$

5) $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{13}{12}$.

Ниже приводится таблица, в которой любая из четырех функций — $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ — выражена через любую из остальных трех, в предположении, что не указано, в какой четверти оканчивается угол α.

Рекомендуется учащемуся самостоятельно составить эту таблицу.

Функции \ Через функции	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	$\operatorname{ctg}\alpha$

§ 105. Разные примеры и задачи.

Пример 1. Вычислить значение дроби $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$ при $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2}{5}$.

Разделим числитель и знаменатель данной дроби на $\cos\alpha$ ($\cos\alpha\neq 0$), отчего величина дроби не изменится; получим:

$$\left.\frac{\operatorname{tg}\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha+1}\right|_{\text{при } \operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{5}}=\frac{\frac{2}{5}-1}{\frac{2}{5}+1}=-\frac{3}{7}.$$

Пример 2. Дано:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=p. \qquad (1)$$

Найти сумму $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$.

Возводим обе части равенства (1) в квадрат:

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+\underbrace{2\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}_{2}=p^2,$$

откуда

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=p^2-2.$$

Пример 3. Показать, что дробь

$$\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$$

не может принимать отрицательных значений.

Преобразуем данную дробь:

$$\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\sin\alpha+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\cos\alpha+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\sin\alpha\left(\frac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha}\right)}{\cos\alpha\left(\frac{\sin\alpha+1}{\sin\alpha}\right)}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\geqslant 0;$$

так как каждый из двух множителей $\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$ и $\frac{1+\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$ не может быть отрицательным, то и их произведение неотрицательно.

Пример 4. Найти угол $x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$, если $3\sin x=2\cos^2 x$. Имеем:

$$3\sin x=2\,(1-\sin^2 x),$$

или

$$2\sin^2 x+3\sin x-2=0.$$

Это — квадратное уравнение относительно $\sin x$:

$$(\sin x)_{1,\,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4};$$

$$\sin x_1=\frac{-3-5}{4}=-2 \text{ (невозможно)},$$

$$\sin x_2=\frac{-3+5}{4}=\frac{1}{2}.$$

Искомый острый угол $x=\frac{\pi}{6}$ (рад), или $x=30^\circ$.

§ 106. Доказательство тождеств. В тригонометрии часто встречаются два разных по внешнему виду выражения, которые, однако, при всех допустимых значениях углов принимают одинаковые численные значения. Такие два выражения называются *тождественными*. Убедиться в том, что данное равенство представляет собой тождество, или, как говорят, доказать тождество обычно удается преобразованием одной части равенства и приведением ее к другой части. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Доказать тождество

$$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha.$$

Приведем левую часть к правой:

$$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-1}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\sin\alpha\right)}=\frac{2\sin\alpha}{\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha.$$

Левая часть исходного равенства обратилась в точности в такое же выражение, какое стоит в правой части, и этим тождество доказано.

Пример 2. Показать, что

$$\frac{2-\operatorname{cosec}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-1}-\operatorname{cosec}^2\alpha+1=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Приводим снова левую часть, как более сложную, к правой, причем все тригонометрические функции будем выражать через котангенс:

$$\frac{2-\operatorname{cosec}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-1}-\operatorname{cosec}^2\alpha+1=$$

$$=\frac{1-(\operatorname{cosec}^2\alpha-1)}{\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}-1}-(\operatorname{cosec}^2\alpha-1)=\frac{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\frac{1-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}}-\operatorname{ctg}^2\alpha=$$

$$=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\,(1-\operatorname{ctg}\alpha)\,(1+\operatorname{ctg}\alpha)}{(1-\operatorname{ctg}\alpha)}-\operatorname{ctg}^2\alpha=$$

$$=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Пример 3. Доказать тождество

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha.$$

Приведем правую часть к левой:

$$\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\sin^2\alpha=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\sin^2\alpha=$$

$$=\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

В некоторых случаях при доказательствах тождеств удобнее преобразовать как правую, так и левую части к одному и тому же выражению.

Пример 4. Доказать тождество

$$\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{1}{\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}. \qquad (1)$$

Представим данное равенство в следующем виде:

$$\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{1}{\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (2)$$

Преобразуем левую часть:

$$\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha+1-\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}=$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{\cos^2\alpha(\sin\alpha+1)}{\cos^3\alpha}=\frac{\sin\alpha+1}{\cos\alpha}.$$

Преобразуем правую часть:

$$\frac{1}{\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}=\frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Этим справедливость тождества доказана.

§ 107. Приведение тригонометрических функций отрицательного аргумента к функциям положительного аргумента. Пусть вектор $\overrightarrow{OM}$ образует с осью Ox угол α; вектор $\overrightarrow{OM'}$ — угол $(-\alpha)$ (рис. 83; $OM=1$); тогда

$$\sin\alpha=OM_1; \quad \sin(-\alpha)=OM_2.$$

По абсолютной величине проекции OM_1 и OM_2 равны между собой, по знаку — противоположны; следовательно,

$$OM_2=-OM_1,$$

или

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha.$$

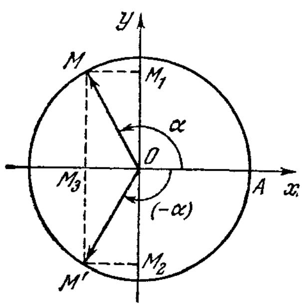

Рис. 83.

Точки M и M' симметричны относительно оси Ox, т. е. лежат на одном перпендикуляре к оси и на равном расстоянии по обе стороны от нее, поэтому векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM'}$ имеют одну и ту же проекцию на ось Ox; следовательно,

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha.$$

Теперь легко выводим:

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha)=\frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\sec(-\alpha)=\frac{1}{\cos(-\alpha)}=\frac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha,$$

$$\operatorname{cosec}(-\alpha)=\frac{1}{\sin(-\alpha)}=\frac{1}{-\sin\alpha}=-\operatorname{cosec}\alpha.$$

Таким образом, знак минус в аргументе у косинуса и секанса можно просто опустить, а у синуса, тангенса, котангенса и косеканса знак минус выносится и ставится перед обозначением самой функции. Другими словами, $y=\cos x$ — четная функция (§ 50), а $y=\sin x$, $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ — нечетные функции.

Примеры. 1) $\sin(-120^\circ)=-\sin 120^\circ=-\sin 60^\circ=$ $=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\cos(-210^\circ)=\cos 210^\circ=$

$$=\cos(180^\circ+30^\circ)=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2};$$

3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=-1$;

4) $\operatorname{cosec}(-300^\circ)=-\operatorname{cosec} 300^\circ=-\operatorname{cosec}(360^\circ-60^\circ)=$ $=\operatorname{cosec} 60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

§ 108. Формулы приведения. В этом параграфе будут даны формулы, по которым можно значения тригонометрических функций любого угла α, не выходящего из границ $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 360^\circ$, выразить через соответствующие значения тригонометрических функций острого угла. Такие формулы называются *формулами приведения*.

1. Формулы приведения для углов, оканчивающихся во II четверти. Всякий угол, оканчивающийся во II четверти, можно представить либо как сумму $90^\circ+\alpha$, либо как разность $180^\circ-\alpha$. Например,

$$115^\circ=90^\circ+25^\circ,\quad 115^\circ=180^\circ-65^\circ.$$

Соответственно этим двум разным представлениям одного и того же угла получим две серии формул приведения.

На рис. 84 изображены две окружности единичного радиуса; в первой из них построен угол $90°+\alpha$, во второй — угол α.

Пусть $\overrightarrow{OM}=\{x,\ y\}$, $\overrightarrow{O_1N}=\{x_1,\ y_1\}$;

$$\sin(90°+\alpha)=OM_1=y,$$
$$\cos\alpha=O_1N_1=x_1.$$

Из равенства прямоугольных треугольников OM_1M и O_1N_1N следует, что $|OM_1|=|O_1N_1|$, или $|y|=|x_1|$.

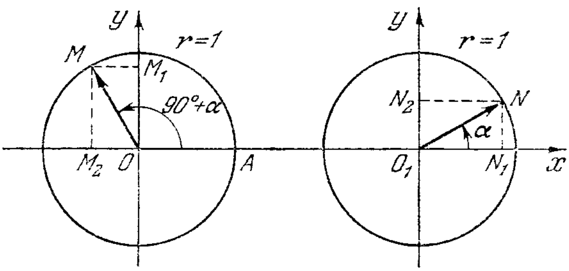

Рис. 84.

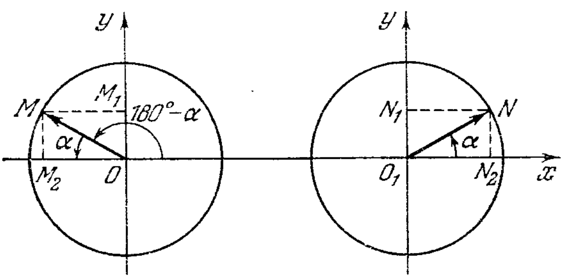

Рис. 85.

Опуская знак абсолютной величины, поскольку y и x_1 положительны, получим $y=x_1$, или $\sin(90°+\alpha)=\cos\alpha$.

Из этого же рис. 84 следует, что

$$\cos(90°+\alpha)=OM_2, \quad \sin\alpha=O_1N_2.$$

По абсолютной величине проекции OM_2 и O_1N_2 равны, по знаку противоположны, а потому

$$\cos(90^\circ+\alpha) = -\sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha) = \frac{\sin(90^\circ+\alpha)}{\cos(90^\circ+\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha) = \frac{\cos(90^\circ+\alpha)}{\sin(90^\circ+\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

На рис. 85 имеем другую пару единичных окружностей, в которой вектор $\overrightarrow{OM}$ образует с осью Ox угол $180^\circ-\alpha$, вектор O_1N — угол α: $\sin(180^\circ-\alpha) = OM_1$, $\sin\alpha = O_1N_1$. Координаты OM_1 и O_1N_1 равны друг другу по величине и знаку:

$$OM_1 = O_1N_1,$$

или

$$\sin(180^\circ-\alpha) = \sin\alpha.$$

Далее,

$$\cos(180^\circ-\alpha) = OM_2, \quad \cos\alpha = O_1N_2.$$

По абсолютной величине координаты OM_2 и O_1N_2 равны, по знаку противоположны:

$$OM_2 = -O_1N_2,$$

или

$$\cos(180^\circ-\alpha) = -\cos\alpha.$$

Теперь можно найти значения тангенса и котангенса:

$$\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha) = \frac{\sin(180^\circ-\alpha)}{\cos(180^\circ-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Примеры. 1) $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ-30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$;

2) $\operatorname{ctg} 120^\circ = \operatorname{ctg}(180^\circ-60^\circ) = -\operatorname{ctg} 60^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

3) $\cos 110^\circ = \cos(90^\circ+20^\circ) = -\sin 20^\circ \approx -0{,}342$.

2. Формулы приведения для углов, оканчивающихся в III четверти. Угол, оканчивающийся в III четверти, можно представить либо как сумму $180^\circ+\alpha$, либо как разность $270^\circ-\alpha$.

На рис. 86 на двух единичных окружностях изображены углы $180^\circ+\alpha$ и α:

$$\sin(180^\circ+\alpha) = OM_1, \quad \sin\alpha = O_1N_1;$$

координаты OM_1 и O_1N_1 по абсолютной величине равны, но противоположны по знаку; следовательно,

$OM_1 = -O_1N_1$, или

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha.$$

Подобным же образом устанавливаем, что

$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(180° + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(180° + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

На рис. 87 изображены углы $270° - \alpha$ и α на двух

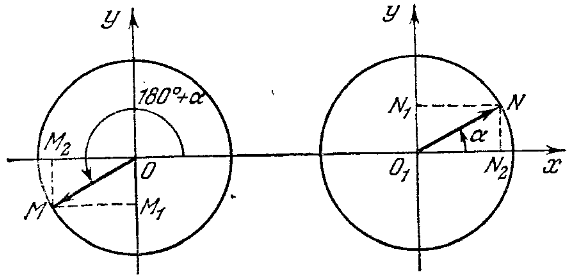

Рис. 86.

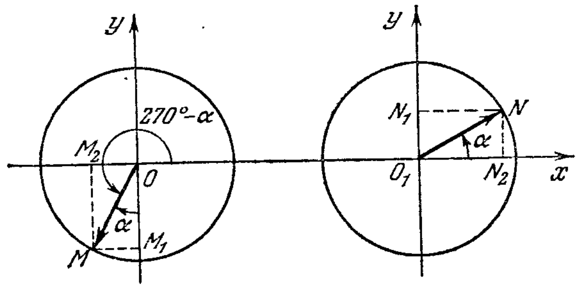

Рис. 87.

единичных окружностях. Согласно изображению на рисунке, имеем

$$\sin(270° - \alpha) = OM_1, \ \cos\alpha = O_1N_2; \ OM_1 = -O_1N_2,$$

откуда

$$\sin(270° - \alpha) = -\cos\alpha.$$

Подобным же образом находим, что

$$\cos(270° - \alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(270° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(270° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Примеры. 1) $\sin 250^\circ = \sin(270^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ \approx$ $\approx -0{,}9397$;

2) $\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -1/2$.

Рекомендуем читателю вывести самостоятельно формулы приведения для углов, оканчивающихся в IV четверти, т. е. углов вида либо $270^\circ + \alpha$, либо $360^\circ - \alpha$.

§ 109. Общность формул приведения. При выводе формул приведения мы предполагали, что входящий в состав аргумента угол α — острый. Однако формулы остаются справедливыми и при любом α.

Покажем, например, что имеет место формула

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha. \qquad (1)$$

Во-первых, из справедливости ее для углов, изменяющихся в пределах первой окружности, следует справедливость для любых углов. Действительно, если угол $\alpha > 360^\circ$ или $\alpha < 0^\circ$, то его можно представить в виде $\alpha = \beta + 360^\circ \cdot n$, где $\beta < 360^\circ$, n — целое (положительное или отрицательное) число. Но согласно определению тригонометрических функций (§ 98) $\sin(90^\circ + \alpha) =$ $= \sin[360^\circ \cdot n + (\beta + 90^\circ)] = \sin(\beta + 90^\circ)$, $\cos\alpha =$ $= \cos(\beta + 360^\circ \cdot n) = \cos\beta$; следовательно, $\sin(90^\circ + \alpha) =$ $= \cos\alpha$, так как для β эта формула по предположению уже выполняется *).

Докажем теперь формулу (1) для углов α, изменяющихся в пределах первой окружности.

Пусть α — угол II четверти, т. е. $\alpha = 90^\circ + \beta$, $0 < \beta < 90^\circ$. Тогда, так как

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \sin(180^\circ + \beta) = -\sin\beta,$$
$$\cos\alpha = \cos(90^\circ + \beta) = -\sin\beta,$$

то левая и правая части равенства (1) совпадают, следовательно, в этом случае формула справедлива.

Пусть теперь α — угол III четверти, т. е. $\alpha = 180^\circ + \beta$, $0 < \beta < 90^\circ$. Тогда

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \sin(270^\circ + \beta) = -\cos\beta,$$
$$\cos\alpha = \cos(180^\circ + \beta) = -\cos\beta,$$

откуда опять следует справедливость соотношения (1).

*) Свойство тригонометрических функций, которым мы здесь воспользовались, носит название *периодичности* и будет особо рассмотрено в § 112.

Пусть, наконец, α — угол IV четверти, т. е. $\alpha = 270° + \beta$, $0 < \beta < 90°$. Тогда

$$\sin(90° + \alpha) = \sin(360° + \beta) = \sin\beta,$$
$$\cos\alpha = \cos(270° + \beta) = \sin\beta.$$

Следовательно, и в этом случае формула (1) верна.

Итак, справедливость формулы (1) доказана для любых углов.

Подобным образом можно проверить справедливость любой из формул приведения.

§ 110. Два правила для запоминания формул приведения. 1. *Если аргумент (угол) приводимой тригонометрической функции имеет вид* $(180° - \alpha)$, $(180° + \alpha)$, $(360° - \alpha)$, или в радианной мере, $(\pi - a)$, $(\pi + a)$, $(2\pi - a)$, *то название приводимой функции не меняется. Знак в правой части формулы приведения пишется в зависимости от того, какой знак имеет приводимая функция в данной четверти.*

Примеры. 1) $\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Знак минус взят потому, что угол 150° оканчивается во второй четверти, где косинус отрицателен.

2) $\operatorname{tg} 240° = \operatorname{tg}(180° + 60°) = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$. Угол 240° оканчивается в III четверти, где тангенс положителен.

3) $\sin 315° = \sin(360° - 45°) = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Угол 315° оканчивается в IV четверти, где синус отрицателен.

4) $\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. *Если аргумент приводимой тригонометрической функции имеет вид* $(90° - \alpha)$, $(90° + \alpha)$, $(270° - \alpha)$, $(270° + \alpha)$, или, в радианной мере,

$$\left(\frac{\pi}{2} - a\right), \quad \left(\frac{\pi}{2} + a\right), \quad \left(\frac{3}{2}\pi - a\right), \quad \left(\frac{3}{2}\pi + a\right),$$

то название приводимой функции меняется на сходственное: синус переходит в косинус, и наоборот; тангенс переходит в котангенс, и наоборот; секанс — в косеканс, и наоборот; знак в правой части формул пишется согласно знаку приводимой функции в данной четверти.

П р и м е р ы. 1) $\sin 100^\circ = \sin(90^\circ + 10^\circ) = \cos 10^\circ$. Угол 100° лежит во второй четверти, где синус имеет положительное значение.

2) $\cos 300^\circ = \sin(270^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

3) $\operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ + 45^\circ) = -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1$.

4) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3} = \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

§ 111. Тригонометрические функции числового аргумента. При изучении функции вида $y = ax^2$ (см. § 52) отмечалось, что эта функция отражает различные конкретные явления нашей действительности, например:

1) закон свободного падения тела в пустоте, тогда x — время, y — пройденный путь, $a = \frac{g}{2}$;

2) зависимость между площадью круга и радиусом; здесь x — радиус, y — площадь, коэффициент $a = \pi$;

3) сопротивление среды движению тела, $y = kx^2$, где x — скорость, y — сила сопротивления.

Во всех этих случаях одна из переменных величин изменялась пропорционально квадрату другой. При математическом изучении функции $y = ax^2$ мы отвлекаемся от физического или геометрического смысла переменных и под буквами x и y подразумеваем числа. Аналогично поступают и при изучении тригонометрических функций. Аргумент x принимается за некоторое число, тогда

1) $\sin 0{,}5$ означает синус угла, равного 0,5 рад.

2) $\cos 1{,}2$ означает косинус угла, равного 1,2 рад.

3) $\operatorname{tg}(\cos\pi) = \operatorname{tg}(-1) = -\operatorname{tg} 1$, где $\operatorname{tg} 1$ означает тангенс угла, равного одному радиану.

О п р е д е л е н и е. *Тригонометрической функцией* числового аргумента x называется (одноименная) функция угла, содержащего x рад.

П р и м е ч а н и е. Для отыскания значений синуса и косинуса числового аргумента в конце книги приведена таблица. По ней находим:

$$\sin 0{,}75 = 0{,}6816, \quad \cos 1{,}3 = 0{,}2675.$$

§ 112. Периодичность тригонометрических функций. Пусть вектор $\overrightarrow{OM}$ в единичном круге образует угол α с осью Ox (рис. 66). Если к аргументу, т. е. к углу α, прибавим любое целое число оборотов, то конец вектора $\overrightarrow{OM}$ окажется в прежней точке окружности и от такого увеличения аргумента на целое число оборотов значения тригонометрических функций не изменятся, каков бы ни был исходный угол α.

Определение 1. Функция называется *периодической*, если существует число, отличное от нуля, прибавление которого к любому значению аргумента не меняет значения функции.

Определение 2. Наименьшее положительное число, прибавление которого к любому значению аргумента не меняет значения функции, называется *периодом* функции*).

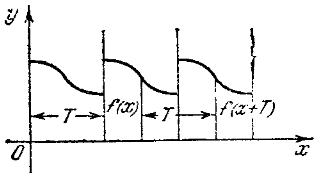

Рис. 88.

Все тригонометрические функции периодичны, причем период синуса, косинуса, секанса и косеканса равен 2π, а для тангенса и котангенса период равен π (180°), что видно из формул приведения.

Свойство периодичности функции $f(x)$ принято записывать следующим образом:

$$f(x)=f(x+T),$$

где T — период функции (рис. 88).

По отношению к тригонометрическим функциям, аргумент которых обозначим через x, свойство периодичности запишется так:

$$\sin(x+2\pi)=\sin x, \quad \cos(x+2\pi)=\cos x,$$
$$\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg}x, \quad \operatorname{ctg}(x+\pi)=\operatorname{ctg}x.$$

Примечание 1. В том, что период функции $\sin x$ равен 2π и не меньше, можно убедиться путем следующих рассуждений.

Допустим, что существует число l такое, что

$$\sin(x+l)=\sin x \tag{1}$$

при любом значении x. Тогда при $x=0$ и при $x=\frac{\pi}{2}$ из

*) Иногда под словом «период» понимают любое положительное число, отличное от нуля, прибавление которого к любому значению аргумента не меняет значения функции. Наименьшее же число с таким свойством называют *основным периодом*.

тождества (I) следует:

$$\sin l = 0,\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + l\right) = 1,$$

или

$$\sin l = 0,\ \cos l = 1.$$

Наименьший положительный угол l, синус которого равен нулю, а косинус равен 1 — это угол 2π (рад).

Примечание 2. Период можно не только прибавлять к аргументу, но и вычитать из него; кроме того, прибавлять к аргументу можно любое целое число периодов, а также вычитать любое целое число периодов:

$$\sin(x + 2\pi k) = \sin x,\ \operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x,$$

где k — любое целое число, положительное или отрицательное — все равно.

Примеры. 1) $\sin(-330^\circ) = \sin(-330^\circ + 360^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. Здесь к аргументу был прибавлен период.

2) $\sin 765^\circ = \sin(45^\circ + 2\cdot 360^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. В этом примере из аргумента вычли два периода.

3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{17\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{17\pi}{3} + 6\pi\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. К отрицательному аргументу $\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$ было прибавлено шесть периодов (6π), что привело к положительному аргументу $\frac{\pi}{3}$.

4) $\sin 1200^\circ = \sin(3\cdot 360^\circ + 120^\circ) = \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5) $\sin(-5{,}6\pi) = \sin(-5{,}6\pi + 6\pi) = \sin 0{,}4\pi = \cos 0{,}1\pi \approx 0{,}305$.

§ 113. Графики тригонометрических функций.

1. Графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Изобразим графически изменение функции $y = \sin x$ при изменении аргумента x от $x = 0$ до $x = 2\pi$, или, в градусной мере, от 0° до 360°. Проще всего это можно выполнить так:

Начертим окружность единичного радиуса и разделим ее на 16 равных частей (рис. 89). Каждому делению дуги соответствует центральный угол $22°30'$, или, в радианной мере, $\frac{\pi}{8}$ (рад).

По оси Ox будем откладывать углы

$$0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \ldots,$$

изображая их в виде отрезков в выбранном масштабе.

В точках деления восставим перпендикуляры к оси Ox и на них отложим значения синуса соответствующих углов. Значения синуса находим построением, проектируя точки деления окружности на ось Oy и перенося проекции на соответствующий перпендикуляр. Через концы перпендикуляров проводим плавную линию. Получим кривую, которая называется *синусоидой*. Мы построили лишь одну «волну» синусоиды, соответствующую изменению аргумента от 0 до 2π. В силу периодичности

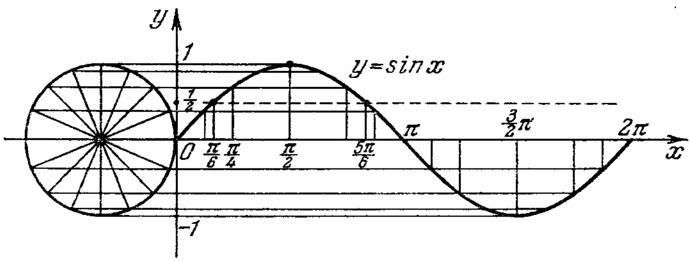

Рис. 89.

функции $\sin x$ дальнейшее изменение аргумента x в промежутке от 2π до 4π приведет к тому, что образуется вторая волна синусоиды, одинаковая с первой.

То же самое произойдет, если мы захотим построить ту часть кривой, которая соответствует изменению аргумента x от 0 до -2π. График отражает ход изменения функции. Из графика легко установить свойства функции $y=\sin x$.

1) Функция $\sin x$ определена при любом действительном значении аргумента x, т. е. ее область определения — все действительные числа, принимаемые за радианную меру угла.

2) Все значения функции $\sin x$ заполняют отрезок $[-1, 1]$, т. е. $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

3) Функция — нечетная, так как $\sin(-x) = -\sin x$. График симметричен относительно начала координат.

4) В промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ функция $\sin x$ возрастает, изменяясь от -1 до $+1$; в промежутке $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ функция $\sin x$ убывает от 1 до -1.

5) Функция достигает наибольшего значения при $x=\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+2\pi, \frac{\pi}{2}+4\pi, \ldots, \frac{\pi}{2}+2\pi k$, где k — любое целое число, положительное, отрицательное и 0; в этих точках синус равен 1.

6) Синус принимает наименьшее значение, равное -1, при $x=-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}+2\pi, -\frac{\pi}{2}+4\pi, \ldots$, и вообще при $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

7) Функция обращается в нуль при $x=\ldots -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$, и вообще при $x=\pi k$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Зная график функции $y=\sin x$, легко получить график функции $y=\cos x$. Воспользуемся формулой

$$\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

которая справедлива при любом действительном x. Из этой формулы следует, что вместо значения косинуса

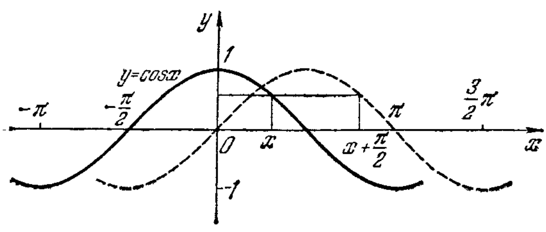

Рис. 90.

в точке x можно взять значение синуса в точке $x+\frac{\pi}{2}$, т. е. что графиком функции $y=\cos x$ будет синусоида, передвинутая вдоль оси Ox на $\frac{\pi}{2}$ влево (см. рис. 90)*).

Из графика устанавливаем следующие свойства косинуса.

*) Подробнее о преобразовании синусоиды см. в § 138.

1) Функция $\cos x$ определена на всей числовой оси, так как каждому действительному числу x, принимаемому за радианную меру угла, соответствует вполне определенное значение косинуса.

2) Множество значений функции заполняет отрезок $[-1, 1]$.

3) $\cos x$ — четная функция, так как $\cos(-x) = \cos x$; график симметричен относительно оси Oy.

4) Функция $\cos x$ убывает в промежутке $(0, \pi)$, изменяясь от 1 до -1; в промежутке $(-\pi, 0)$ функция возрастает от -1 до $+1$.

5) Наибольшее значение, равное 1, $\cos x$ достигает при $x = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots, 2\pi k$; наименьшее значение, равное -1, функция принимает в точках $\pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$ $\ldots, (2k+1)\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

6) Функция обращается в нуль, если аргумент $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2. **Графики функций** $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$. На рис. 91 изображен график функции $y = \operatorname{tg} x$, построен-

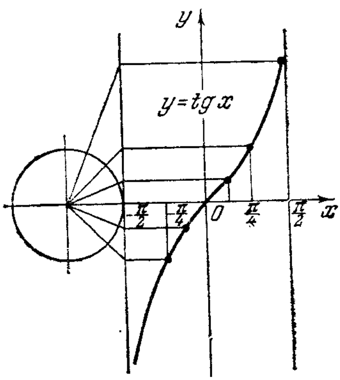

Рис. 91.

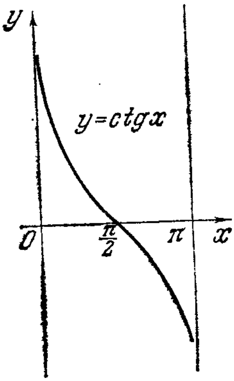

Рис. 92.

ный тем же способом, что и график функции $y = \sin x$. Свойства функции $\operatorname{tg} x$:

1) Тангенс — периодическая функция с периодом, равным π.

2) Функция определена на всей числовой оси, за исключением точек $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \ldots, \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3) $\operatorname{tg} x$ — неограниченная функция, так как может принимать какие угодно большие по абсолютной величине значения.

4) Функция нечетная, ибо $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$; симметрия относительно начала координат отражена на графике.

5) $\operatorname{tg} x$ возрастает в промежутках $\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$.

6) Наибольшего и наименьшего значений тангенс не имеет.

7) Функция обращается в нуль при $x = \pi k$ $(k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$.

На рис. 92 изображен график функции $y = \operatorname{ctg} x$, который может быть построен сдвигом графика функции $y = \operatorname{tg} x$ влево вдоль оси Ox на $\frac{\pi}{2}$ с последующим отражением относительно оси Ox, согласно формуле

$$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Постройте самостоятельно этот график и сформулируйте на его основе свойства котангенса.

Упражнения

1. Выразить в радианах величину того угла, который образуют стрелки часов, когда они показывают 2 ч., 6 ч., 8 ч.

2. Найти радианную меру углов:
1) 2°; 2) 5°; 3) 7°,5; 4) 12°,5; 5) 22°,5; 6) 200°; 7) 320°.

3. Найти радианную меру углов:
1) 2700°; 2) 7200°; 3) 10 000°.

4. Выразить в градусах и минутах величины дуг, радианная мера которых выражается числами:
1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) $\frac{3\pi}{4}$; 3) $\frac{3\pi}{2}$; 4) 3π; 5) $\frac{\pi}{8}$; 6) $\frac{\pi}{15}$; 7) $\frac{\pi}{10}$.

5. Два угла треугольника содержат 59° и 69°. Вычислить в радианах величину третьего угла треугольника.

6. Два угла треугольника содержат $\frac{3\pi}{10}$ рад и $\frac{2\pi}{15}$ рад. Вычислить, сколько градусов содержится в третьем угле.

7. Дуги составляют следующие части окружности: $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{11}{15}$; 1; 1,75; 0,03; 0,005; 0,375.

Какова радианная мера каждой из этих дуг?

8. Дуга окружности радиуса $R=6$ см имеет длину, равную 4,5 см. Какова радианная мера этой дуги?

9. Пользуясь таблицей, перевести в радианную меру углы:

1) $126°$; 2) $279°$; 3) $118°40'$; 4) $250°20'$; 5) $352°10'$; 6) $168°15'$; 7) $56°18'$; 8) $472°50'$.

10. Пользуясь таблицей, перевести в градусную меру углы:

1) 0,4800; 2) 0,6510; 3) 1,2700; 4) 0,6270; 5) 1,3983; 6) 0,0099; 7) 0,5000; 8) 2,6400.

11. Найти длину дуги окружности, если ее радиус равен 22,5 см и ее центральный угол равен $40°30'$.

12. Дуга окружности содержит $200°$. Определить радиус окружности, если длина дуги равна 50 см.

13. Найти периметр и площадь сектора круга, радиус которого равен 15 см, если дуга содержит $54°$.

14. Вычислить площадь кругового сегмента, ограниченного дугой в $45°44'$, зная, что радиус круга равен 47,34 м.

15. Зубчатое колесо имеет 90 зубцов. Выразить в радианах угол поворота колеса, когда оно повернется на: 1) 30 зубцов; 2) 25 зубцов; 3) 40 зубцов; 4) 200 зубцов.

16. Какую угловую скорость имеет диск при 300 оборотах в минуту?

17. Угловая скорость вала $42{,}3\ с^{-1}$. Определить число его оборотов в минуту.

18. Непосредственным построением и измерением в единичном круге ($R=1$) найти следующие величины:

1) $\sin 120°$; 2) $\operatorname{ctg} 60°$; 3) $\cos 75°$; 4) $\operatorname{tg} 250°$; 5) $\sin 225°$; 6) $\cos 160°$.

19. (Устно). Может ли функция $\cos x$ иметь по абсолютной величине значение больше единицы?

20. (Устно.) В каких четвертях $\sin x$ и $\cos x$ имеют одинаковые знаки?

21. Доказать неравенство $\sin x+\cos x > 1$; $0 < x < 90°$.

22. Определить знаки следующих выражений:

1) $\sin 285°$; 2) $\operatorname{ctg} 252°30'$; 3) $\cos 135°$; 4) $\operatorname{tg} 327°20'$.

23. Построить наименьший положительный угол по заданному значению тригонометрической функции и выразить угол в радианной мере:

1) $\sin x=\frac{2}{5}$; 2) $\cos x=-0{,}6$; 3) $\operatorname{tg} x=1{,}2$; 4) $\sin x=-0{,}7$; 5) $\operatorname{tg} x=-0{,}6$.

24. В каких границах может изменяться аргумент x, чтобы были справедливы следующие неравенства ($0 \leqslant x \leqslant 2\pi$):

1) $\sin x-\frac{1}{2} \geqslant 0$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin x \leqslant 0$; 3) $\cos x-\frac{1}{2} \leqslant 0$;

4) $\operatorname{tg} x-\sqrt{3} \geqslant 0$; 5) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x+1 \leqslant 0$; 6) $\operatorname{ctg} x+1 \geqslant 0$.

25. По данному значению одной из тригонометрических функций вычислить значения остальных трех функций:

1) $\sin\alpha=-0{,}6\left(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right)$; 2) $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi\right)$;

3) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha=-2\ (90° < \alpha < 180°)$.

26. Упростить выражения:

1) $5\sin 270^\circ - 2\cos 0^\circ + 3\operatorname{tg} 0^\circ$; 2) $a\sin\pi + b\cos\pi + \operatorname{tg}\pi$;

3) $m\cos\frac{\pi}{2} - n\cos\frac{3}{2}\pi + p\sin\frac{3}{2}\pi$; 4) $2\operatorname{tg} 0^\circ + 8\cos 270^\circ - 6\sin 270^\circ$.

27. Привести тригонометрические функции следующих углов к соответствующим функциям острых углов:

1) $\sin 165^\circ$; 2) $\cos 210^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 135^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 240^\circ$; 5) $\cos 315^\circ$;

6) $\operatorname{tg} 200^\circ$; 7) $\sin\frac{5}{4}\pi$; 8) $\cos\frac{5}{3}\pi$; 9) $\operatorname{tg}\frac{7}{8}\pi$; 10) $\operatorname{ctg}\frac{8}{5}\pi$.

28. Привести тригонометрические функции отрицательного аргумента к функциям положительного аргумента:

1) $\sin(-300^\circ)$; 2) $\cos(-400^\circ)$; 3) $\operatorname{tg}(-960^\circ)$; 4) $\operatorname{ctg}(3{,}2\pi)$;

5) $\sin(-5{,}4\pi)$; 6) $\operatorname{tg}(-2{,}3\pi)$; 7) $\cos(-1250^\circ)$; 8) $\operatorname{ctg}(-4{,}3\pi)$.

29. Упростить следующие выражения:

1) $\operatorname{ctg} 675^\circ \operatorname{cosec} 280^\circ - \operatorname{tg} 1845^\circ \sin 460^\circ$;

2) $\cos x \operatorname{tg}(180^\circ + x)\operatorname{tg}(270^\circ - x)\operatorname{cosec}(90^\circ - x)$;

3) $\dfrac{\sin(\pi - x)\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\operatorname{ctg}(\pi - x)}$; 4) $\sin\frac{3\pi}{10} - \cos\frac{\pi}{5}$;

5) $\sin 0{,}6\pi + \cos^2(-1{,}1\pi)\sin 1{,}6\pi$;

6) $\cos(-7{,}9\pi)\operatorname{tg}(-1{,}1\pi) - \sin 5{,}6\pi \operatorname{ctg} 4{,}4\pi$;

7) $\sin(A - \pi)\cos(A - 2\pi)\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - A\right)\operatorname{cosec}(5{,}5\pi + A)$;

8) $\left[\sin^2(5\pi + 0{,}5) + \sin^2\left(0{,}5 - \frac{3}{2}\pi\right)\right]\sin\left(\frac{1}{2} - \pi\right)$;

9) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)\left(\sin\frac{5}{14}\pi - \cos\frac{\pi}{7}\right)$;

10) $\sin 170^\circ \cos 280^\circ - \sin 260^\circ \cos 10^\circ - \dfrac{1 + \sin 100^\circ \cos 170^\circ}{1 + \sin 350^\circ \sin 180^\circ}$;

11) $\operatorname{tg}(90^\circ + B) + \operatorname{ctg}(270^\circ - B) - \operatorname{tg}(180^\circ - B) + \operatorname{ctg} B$;

12) $\operatorname{ctg}(x - 90^\circ)[\sin(x - 270^\circ) - \sin(180^\circ - x)]$.

30. Доказать справедливость следующих равенств:

1) $\dfrac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$; 2) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \dfrac{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}{1 - \operatorname{ctg}^2\alpha}$;

3) $1 - \dfrac{\sin^2\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha$;

4) $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$;

5) $\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \cos^2\alpha \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha$; 6) $\dfrac{1 + \operatorname{tg}^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$;

7) $\sin(A - 30^\circ) + \sin(A + 150^\circ) = 0$;

8) $\cos(B - 100^\circ) = -\sin(170^\circ + B)$;

9) $\sqrt{\dfrac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}} + \sqrt{\dfrac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}} = 2\sec\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$;

10) $\sin\alpha(2\operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)(\operatorname{cosec}\alpha - 2\operatorname{ctg}\alpha) = 2\sin\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha$;

11) $1 + \dfrac{\cos x \operatorname{tg}^2 x}{1 + \cos x} = \sec x$;

12) $2(\sin^6 A+\cos^6 A)-3(\sin^4 A+\cos^4)+1=0$;
13) $(\sin y+\operatorname{cosec} y)^2+(\cos y+\sec y)^2-(\operatorname{tg}^2 y+\operatorname{ctg}^2 y)=7$;
14) $\sin^6 A+\cos^6 A+3\sin^2 A\cos^2 A=1$.

31. Исходя из наглядного представления об изменениях тригонометрических функций в пределах первой окружности ($0\leqslant x<2\pi$), решите следующие неравенства, пользуясь тригонометрическим кругом ($r=1$):

1) $\sin x>0$; 2) $\cos x\leqslant 0$; 3) $\sin 2x<0$; 4) $\cos 3x>0$;

5) $\operatorname{tg} x>\sqrt{3}$; 6) $\sin x\geqslant\frac{1}{2}$; 7) $\cos 2x<\frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) $0<\sin x<\frac{\sqrt{3}}{2}$;

9) $\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos x<1$; 10) $0<\operatorname{tg} x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$; 11) $0<\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<\frac{1}{2}$;

12) $|\sin x|<\frac{1}{2}$; 13) $\frac{1}{2}<\cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right)<1$; 14) $|\cos 2x|<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ГЛАВА X

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

§ 114. Косинус и синус суммы (разности) двух углов. В прямоугольной системе координат xOy проведем луч ON под углом α к оси Ox, а луч OP—под углом β к лучу ON (рис. 93). На луче OP построим единичный вектор $\overrightarrow{OM}$; из точки M опустим перпендикуляр MM_1 на луч ON. Тогда

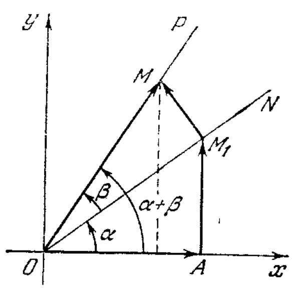

Рис. 93.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M}. \qquad (1)$$

Если

$$\overrightarrow{OM_1} = \{x_1,\ y_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x_2,\ y_2\},$$

то

$$\overrightarrow{OM} = \{x_1 + x_2,\ y_1 + y_2\},$$

что следует из равенства (1) по теореме из § 90. Поэтому

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{x_1+x_2}{|\overrightarrow{OM}|} = x_1 + x_2. \qquad (2)$$

Но

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= |\overrightarrow{OM_1}|\cos\alpha, \\ x_2 &= |\overrightarrow{M_1M}|\cos(90^\circ+\alpha) = -|\overrightarrow{M_1M}|\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Следовательно,

$$\cos(\alpha+\beta) = |\overrightarrow{OM_1}|\cos\alpha - |\overrightarrow{M_1M}|\sin\alpha. \qquad (4)$$

Но так как $|\overrightarrow{OM_1}| = 1\cdot\cos\beta$, $|\overrightarrow{M_1M}| = 1\cdot\sin\beta$, то окончательно имеем:

$$\text{(I)} \qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

Косинус суммы двух углов равен произведению косинусов этих углов минус произведение синусов тех же углов.

Пример. $\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx$

$\approx 0{,}2588.$

Найдем формулу для синуса суммы двух углов:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{y_1 + y_2}{|\overrightarrow{OM}|} = y_1 + y_2, \qquad (5)$$

но $y_1 = |\overrightarrow{OM_1}| \sin\alpha$, $y_2 = |\overrightarrow{M_1M}| \sin(90^\circ + \alpha) = |\overrightarrow{M_1M}| \cos\alpha$, а потому

$$\sin(\alpha + \beta) = |\overrightarrow{OM_1}| \sin\alpha + |\overrightarrow{M_1M}| \cos\alpha. \qquad (6)$$

Заменяя в равенстве (6) $|\overrightarrow{OM_1}|$ на $\cos\beta$ и $|\overrightarrow{M_1M}|$ на $\sin\beta$, окончательно имеем:

$$\text{(II)} \qquad \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

Синус суммы двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго плюс произведение косинуса первого угла на синус второго.

Пример. Дано: $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, $\cos\beta = \frac{1}{3}$, где α — угол во второй четверти, β — острый угол. Найти $\sin(\alpha + \beta)$.

Находим:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \frac{9}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}; \quad \sin\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}.$$

Поэтому

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{3 - 2\sqrt{14}}{12}.$$

Примечание. Формулы (I) и (II) справедливы при любых значениях углов α и β, так как они основываются на двух теоремах о проекциях вектора и векторной суммы на ось, а эти теоремы имеют место при любом расположении векторов относительно оси.

Разность двух углов можно представить в виде суммы:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta),$$

а потому

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos[\alpha+(-\beta)]=$$
$$=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta),$$

$$\text{(III)}\quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Косинус разности двух углов равен произведению косинусов этих углов плюс произведение синусов тех же углов.

Пример.

$$\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ,$$
$$\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}966.$$

Подобным образом можно получить формулу для синуса разности двух углов:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin[\alpha+(-\beta)]=$$
$$=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta),$$

$$\text{(IV)}\quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Синус разности двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго минус произведение косинуса первого угла на синус второго.

Пример.

$$\sin 15^\circ=\sin(60^\circ-45^\circ)=\sin 60^\circ\cdot\cos 45^\circ-\sin 45^\circ\cdot\cos 60^\circ=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}2588.$$

§ 115. Скалярное произведение двух векторов, выраженное через их координаты. Обычно векторы задают при помощи их координат (или проекциями на оси, что одно и то же). Поэтому практично выразить скалярное произведение двух векторов через их координаты.

Пусть вектор $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{r}_1=\{x_1,\ y_1\}$ образует с осью Ox угол φ_1, вектор $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{r}_2=\{x_2,\ y_2\}$ образует с осью Ox угол φ_2 (рис. 94). Тогда угол φ между векторами равен разности $\varphi=\varphi_2-\varphi_1$.

По определению скалярного произведения имеем:

$$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2=r_1r_2\cos\varphi=r_1r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1). \qquad (1)$$

Равенство (1) перепишем в виде

$$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2=r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1\cos\varphi_1\cdot r_2\cos\varphi_2+r_1\sin\varphi_1\cdot r_2\sin\varphi_2. \qquad (2)$$

Из определения тригонометрических функций следует, что $r_1 \cos \varphi_1 = x_1$; $r_2 \cos \varphi_2 = x_2$; $r_1 \sin \varphi_1 = y_1$; $r_2 \sin \varphi_2 = y_2$, откуда $\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их одноименных координат.

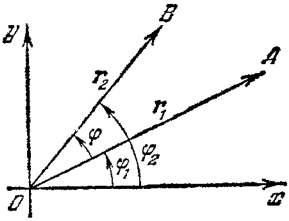

Рис. 94.

Пример 1. Вычислить скалярное произведение вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{CD}$, если A (2; 5), B (4; 3), C (—5; —1) и D (—1; 2). Находим координаты каждого вектора:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A,\ y_B - y_A\};\quad \overrightarrow{AB} = \{2,\ -2\};\quad \overrightarrow{CD} = \{4,\ 3\};$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 2 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 = 2.$$

Пример 2. Определить координату y вектора $\boldsymbol{a} = \{3,\ y\}$ таким образом, чтобы векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b} = \{4,\ -2\}$ были перпендикулярны.

Так как $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, а потому скалярное произведение обратится в нуль,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 3 \cdot 4 + y(-2) = 0.$$

Следовательно, $y = 6$.

Примечание. В этом примере использовалось следующее важное свойство скалярного произведения: из перпендикулярности векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ следует, что $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$. Верно и обратное: из обращения скалярного произведения в нуль следует, что $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, если ни один из векторов $\boldsymbol{a}$ или $\boldsymbol{b}$ не является нуль-вектором.

§ 116. Тангенс суммы и разности двух углов. Рассмотрим тангенс любого угла как частное от деления синуса этого угла на его косинус:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \dfrac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}{\dfrac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} - \dfrac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta},$$

(I) $$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

Тангенс суммы двух углов равен дроби, числитель которой есть сумма тангенсов, а знаменатель — разность между единицей и произведением тангенсов этих углов.

Пример. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$, α и β — острые углы. Найти $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$. Имеем:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1.$$

Следовательно, $\alpha+\beta=45^\circ$.

Заменяя в формуле (V) угол β на $-\beta$, получим

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta},$$

(II) $$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

Тангенс разности двух углов равен дроби, числитель которой есть разность тангенсов, а знаменатель — сумма единицы и произведения тангенсов этих двух углов.

Пример.

$$\operatorname{tg}15^\circ=\operatorname{tg}(45^\circ-30^\circ)=\frac{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}30^\circ}{1+\operatorname{tg}45^\circ\cdot\operatorname{tg}30^\circ}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{(3-\sqrt{3})^2}{6}=\frac{12-6\sqrt{3}}{6}=2-\sqrt{3}\approx 0{,}2679.$$

Примечание. Нет необходимости выводить и запоминать формулу котангенса суммы и разности двух углов; для этого достаточно воспользоваться тем, что

$$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)}.$$

§ 117. Тригонометрические функции двойного аргумента. Рассмотрим частный случай формулы сложения:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

при $\beta=\alpha$; тогда имеем

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha,$$

или

$$\text{(I)} \qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Синус двойного угла равен удвоенному произведению синуса данного угла на его косинус.

Пример. $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Найти $\sin 2\alpha$.

$$\sin 2\alpha\,\Big|_{\sin\alpha=\frac{2}{3}}=2\sin\alpha\cos\alpha\,\Big|_{\sin\alpha=\frac{2}{3}}=2\cdot\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{4}{9}},$$

$$\sin 2\alpha=2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{4}{9}\sqrt{5}.$$

Далее, из формулы

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

при $\beta=\alpha$ следует, что

$$\text{(II)} \qquad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

Косинус двойного угла равен квадрату косинуса данного угла минус квадрат его синуса.

Пример 1. $\cos 120^\circ=\cos^2 60^\circ-\sin^2 60^\circ=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}$.

В этом можно убедиться и так:

$$\cos 120^\circ=\cos(180^\circ-60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Дано: $\sin\alpha=\frac{3}{4}$, $0<\alpha<90^\circ$. Найти $\cos 2\alpha$.

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha;$$

$$\cos 2\alpha\,\Big|_{\sin\alpha=\frac{3}{4}}=1-2\sin^2\alpha\,\Big|_{\sin\alpha=\frac{3}{4}}=1-2\cdot\frac{9}{16}=-\frac{1}{8}.$$

Если в формуле

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

положить $\beta=\alpha$, то имеем:

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (\operatorname{tg} \alpha \neq \pm 1).$$

Тангенс двойного угла равен удвоенному тангенсу данного угла, разделенному на разность между единицей и квадратом тангенса этого угла.

Пример. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найти $\operatorname{tg} 2\alpha$.

$$\operatorname{tg} 2\alpha \Big|_{\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \Big|_{\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}} = \frac{3}{1 - \frac{9}{4}} = -\frac{12}{5}.$$

Примечание. Всякий угол есть двойной по отношению к половине этого угла, как например; α — по отношению к $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2}$ — по отношению к $\frac{\alpha}{4}$, 5α — по отношению к $\frac{5\alpha}{2}$, $(\alpha + \beta)$ — по отношению к $\frac{\alpha+\beta}{2}$ и т. д.

Примеры.

1) $\sin 3x = 2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{3x}{2}$, $\quad$ 4) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{16}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{16}}$.

2) $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$,

3) $\sin (\alpha + \beta) = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$.

§ 118. Тригонометрические функции половинного аргумента. Будем исходить из следующих двух тождеств:

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \\ \cos \alpha &= \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

Почленно складывая эти два равенства, потом вычитая из первого второе, получим:

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \tag{2}$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \tag{3}$$

Из формулы (2) находим $\cos\frac{\alpha}{2}$, а из формулы (3) $\sin\frac{\alpha}{2}$:

$$\text{(I)}\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$\text{(II)}\qquad \sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

Почленно разделим равенство (II) на (I):

$$\text{(III)}\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

Формулы (I), (II) и (III) выражают косинус, синус и тангенс половинного угла через косинус целого угла.

Если известно, в какой четверти оканчивается угол $\frac{\alpha}{2}$, то перед радикалом берется соответствующий знак, в противном случае двойной знак сохраняется.

Пример 1. Вычислить без таблиц $\sin\frac{\pi}{8}$. Угол $\frac{\pi}{8}$ есть половина угла $\frac{\pi}{4}$, причем $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, поэтому

$$\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}};$$

$\frac{\pi}{8}$ — острый угол, поэтому перед радикалом взят знак плюс.

Пример 2. Дано: $\sin\alpha=-\frac{1}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$. Вычислить $\cos\frac{\alpha}{2}$. Сначала находим $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{1}{9}},\qquad \cos\alpha=-\frac{\sqrt{8}}{3}$$

(знак минус взят потому, что угол α оканчивается в третьей четверти, где косинус отрицательный); половинный угол $\frac{\alpha}{2}$ оканчивается во второй четверти, поэтому

$$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\Bigg|_{\cos\alpha=-\frac{\sqrt{8}}{3}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{8}}{3}}{2}}.$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{3-\sqrt{8}}{6}}\approx-0{,}1691.$$

Пример 3. Вычислить $\operatorname{tg} 15^\circ$.

Применяем формулу (III), считая угол 15° половиной угла 30°:

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}} = 2-\sqrt{3}.$$

Для тангенса половинного угла вместо формулы (III) можно вывести две другие, более удобные для вычисления и не содержащие радикалы:

$$\text{(III}'\text{)}\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

или

$$\text{(III}''\text{)}\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Заметим, что $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ имеют один и тот же знак.

Пример.

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1 \approx 0{,}414.$$

§ 119. Выражение синуса и косинуса через тангенс половинного угла. При доказательстве тригонометрических тождеств, решении тригонометрических уравнений, а также в других случаях существенную пользу приносят формулы, выражающие $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\text{(I)} \qquad \sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Синус угла равен удвоенному тангенсу половины этого угла, разделенному на сумму единицы и квадрата тангенса половинного угла.

Пример. Вычислить $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2$:

$$\sin\alpha = \left.\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right|_{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2} = \frac{2\cdot 2}{1+2^2} = \frac{4}{5}.$$

Аналогично выражаем $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$:

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\text{(II)} \qquad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Почленным делением равенства (I) на (II) находим:

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Формулы (I), (II) и (III) примечательны тем, что их правые части не содержат радикалов, поэтому говорят, что синус, косинус и тангенс рационально выражаются через тангенс половинного угла; значения остальных трех тригонометрических функций — котангенса, секанса и косеканса — обратны по величине значениям тангенса, косинуса и синуса, а потому также рационально выражаются через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Пример. Дано: $\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Найти $\sin 4x$.

Сначала найдем $\sin 2x$ и $\cos 2x$:

$$\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\Bigg|_{\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}} = \frac{3}{1+\frac{9}{4}} = \frac{12}{13};$$

$$\cos 2x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\Bigg|_{\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}} = \frac{1-\frac{9}{4}}{1+\frac{9}{4}} = -\frac{5}{13}.$$

Угол $4x$ является двойным по отношению к углу $2x$, а потому

$$\sin 4x = 2\sin 2x \cdot \cos 2x.$$

Заменяя в этом равенстве $\sin 2x$ и $\cos 2x$ их значениями, получим

$$\sin 4x = 2\cdot\frac{12}{13}\left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{120}{169}.$$

§ 120. Примеры на доказательство тождеств.

Пример 1. Доказать, что

$$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}.$$

Приведем правую часть к левой:

$$\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Пример 2. Доказать тождество

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

Приведем левую часть к правой:

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

§ 121. Преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение и обратные преобразования. 1. Преобразование суммы и разности двух синусов:

$$\left.\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta,\\ \sin(\alpha-\beta)&=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Почленно складывая равенства (1), а потом вычитая из первого второе, получим:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta,\qquad(2)$$

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\sin\beta\cos\alpha.\qquad(3)$$

Положим:

$$\alpha+\beta=x,\quad \alpha-\beta=y.\qquad(4)$$

Путем почленного сложения, а потом вычитания равенств (4) найдем, что

$$\alpha=\frac{x+y}{2},\ \beta=\frac{x-y}{2}.\qquad(5)$$

В новых обозначениях равенства (2) и (3) окончательно примут вид

$$\text{(I)}\qquad \sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\text{(II)}\qquad \sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.$$

Равенство (I) обычно формулируется так: *сумма синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы на косинус полуразности этих углов.*

Примеры.

1) $\sin 40° + \sin 50° = 2 \sin \frac{40° + 50°}{2} \cos \frac{40° - 50°}{2} =$

$$= 2 \sin 45° \cdot \cos 5° = \sqrt{2} \cos 5°;$$

2) $\sin \frac{\pi}{8} + \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin \frac{\frac{\pi}{8} + 2x - \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{8} - 2x + \frac{\pi}{4}}{2} =$

$$= 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{16}\right) \cos\left(x - \frac{3\pi}{16}\right).$$

Аналогично читается и формула (II): *разность синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полуразности на косинус полусуммы этих углов.*

Примеры.

1) $\sin 75° - \sin 15° = 2 \sin \frac{75° - 15°}{2} \cdot \cos \frac{75° + 15°}{2} =$

$$= 2 \sin 30° \cdot \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

2) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) =$

$$= 2 \sin \frac{x + \frac{\pi}{3} - x + \frac{2\pi}{3}}{2} \cos \frac{x + \frac{\pi}{3} + x - \frac{2\pi}{3}}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

2. Преобразование суммы и разности двух косинусов. Имеем

$$\left.\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta, \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Складывая и вычитая равенства (6), получаем:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos\alpha \cdot \cos\beta, \quad (7)$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin\alpha \cdot \sin\beta, \quad (8)$$

или в обозначениях (5)

$$\text{(III)} \qquad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2},$$

$$\text{(IV)} \qquad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}.$$

Сумма косинусов двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы на косинус полуразности этих углов.

Подобным образом можно прочесть также и формулу (IV).

Примеры.

1) $\cos 35^\circ + \cos 25^\circ = 2\cos\frac{25^\circ+35^\circ}{2}\cdot\cos\frac{35^\circ-25^\circ}{2} =$

$= 2\cos 30^\circ\cdot\cos 5^\circ = \sqrt{3}\cdot\cos 5^\circ;$

2) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=$

$= -2\sin\frac{3x}{2}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\frac{3x}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$

3. Преобразование суммы и разности двух тангенсов. Если $\cos x \neq 0$, $\cos y \neq 0$, то имеем:

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos x}{\cos x\cdot\cos y}=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}.$$

Подобным же образом можно преобразовать разность;

$$\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}.$$

Пример.

$$\operatorname{tg} 75^\circ-\operatorname{tg} 15^\circ=\frac{\sin(75^\circ-15^\circ)}{\cos 75^\circ\cos 15^\circ}=\frac{\sin 60^\circ}{\cos 75^\circ\cos 15^\circ}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2\cos 75^\circ\cos 15^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2\sin 15^\circ\cos 15^\circ}=2\sqrt{3}.$$

4. Преобразование произведения в алгебраическую сумму. Каждое из равенств (2), (3), (7) и (8) можно читать как слева направо, так и в обратном направлении. Разделим в этих равенствах предварительно каждую часть на 2, а потом перепишем их в обратном порядке, получим:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\beta\cos\alpha=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)].$$

§ 122. Введение вспомогательного угла. Часто при преобразовании тригонометрических выражений используется так называемый метод введения вспомогательного угла.

Пример 1. Преобразовать в произведение $1+2\cos\alpha$. Выносим множитель 2 за скобку:

$$1+2\cos\alpha=2\left(\frac{1}{2}+\cos\alpha\right)=$$
$$=2(\cos 60^\circ+\cos\alpha)=4\cdot\cos\frac{60^\circ+\alpha}{2}\cos\frac{60^\circ-\alpha}{2}=$$
$$=4\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Пример 2. Преобразовать в произведение $1-3\operatorname{tg}^2 x$:

$$1-3\operatorname{tg}^2 x=3\left(\frac{1}{3}-\operatorname{tg}^2 x\right)=$$
$$=3\left(\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}^2 x\right)=3\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg} x\right)\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+\operatorname{tg} x\right)=$$
$$=4\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}{\cos^2 x}.$$

Пример 3. Преобразовать $\sqrt{a^2+b^2}$ в произведение с помощью вспомогательного угла. Выносим множитель a за знак радикала:

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)}=|a|\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=$$
$$=|a|\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}=|a\sec\varphi|,$$

где $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$.

Пример 4. Найти наибольшее значение суммы $\sin x+\cos x$:

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=$$
$$=\sqrt{2}(\cos 45^\circ\cdot\sin x+\sin 45^\circ\cdot\cos x)=\sqrt{2}\sin(x+45^\circ).$$

Так как наибольшее значение, которое может принимать $\sin(x+45^\circ)$, равно единице, то наибольшее значение суммы $\sin x+\cos x$ равно $\sqrt{2}$.

§ 123. Примеры на преобразования тригонометрических выражений. В этом параграфе приводятся примеры на более сложные тригонометрические преобразования.

Пример 1. Преобразовать в произведение

$$\sin 5x \sin 4x + \sin 4x \sin 3x - \sin 2x \sin x.$$

Применяем тождество

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos (A - B) - \cos (A + B)];$$

тогда

$$\sin 5x \sin 4x = \frac{1}{2} (\cos x - \cos 9x),$$

$$\sin 4x \sin 3x = \frac{1}{2} (\cos x - \cos 7x),$$

$$\sin 2x \sin x = \frac{1}{2} (\cos x - \cos 3x).$$

Исходная сумма принимает вид

$$\frac{1}{2} (\cos x - \cos 9x + \cos x - \cos 7x - \cos x + \cos 3x) =$$

$$= \frac{1}{2} (\cos x + \cos 3x) - \frac{1}{2} (\cos 7x + \cos 9x) =$$

$$= \cos 2x \cos x - \cos 8x \cos x = \cos x (\cos 2x - \cos 8x) =$$

$$= \cos x \cdot 2 \sin 5x \sin 3x = 2 \sin 5x \sin 3x \cos x.$$

Пример 2. Доказать тождество

$$4 \sin \alpha \sin (60^\circ - \alpha) \sin (60^\circ + \alpha) = \sin 3\alpha.$$

Приведем левую часть к правой преобразованием произведения двух синусов в разность косинусов:

$$4 \sin \alpha \sin (60^\circ - \alpha) \sin (60^\circ + \alpha) =$$

$$= 2 \sin \alpha \cdot 2 \sin (60^\circ - \alpha) \cdot \sin (60^\circ + \alpha) =$$

$$= 2 \sin \alpha (\cos 2\alpha - \cos 120^\circ) = 2 \sin \alpha \left(\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2 \sin \alpha \cos 2\alpha + \sin \alpha = \sin 3\alpha - \sin \alpha + \sin \alpha = \sin 3\alpha.$$

Пример 3. Доказать, что

$$(1 + \operatorname{tg} \alpha)(1 + \operatorname{tg} \beta) = 2, \text{ если } \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}.$$

Выразим угол β через α: $\beta = \frac{\pi}{4} - \alpha$; тогда $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$. Левая часть равенства примет вид

$$(1 + \operatorname{tg} \alpha)\left(1 + \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}\right) = (1 + \operatorname{tg} \alpha) \cdot \frac{2}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = 2.$$

Пример 4. Показать, что

$$\sin^2\alpha = \sin\beta(\sin\gamma + \sin\beta), \text{ если } \alpha + \beta + \gamma = \pi \text{ и } \alpha = 2\beta.$$

Преобразуем правую часть и приведем ее к левой, учитывая, что $\beta = \frac{\alpha}{2}$. Тогда

$$\sin\beta(\sin\gamma + \sin\beta) = \sin\frac{\alpha}{2}\left[\sin\left(\pi - \alpha - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\frac{\alpha}{2}\right] =$$

$$= \sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$= \underbrace{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}_{\sin\alpha}\cdot\sin\alpha = \sin^2\alpha.$$

§ 124. Простейшие тригонометрические уравнения.

Определение 1. Уравнение называется *тригонометрическим*, если оно содержит неизвестное только под знаками тригонометрических функций.

Примеры. 1) $\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$;

2) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x = 0$;

3) $\cos 3x + \sin x = 0$.

Уравнение $\operatorname{tg} x - 2x + 1 = 0$ нельзя назвать тригонометрическим. Здесь неизвестное x находится не только под знаком тангенса, но и без знака тригонометрической функции. Такие уравнения мы пока рассматривать не будем.

Определение 2. *Решить* тригонометрическое уравнение — это значит найти все углы, удовлетворяющие данному уравнению, т. е. обращающие уравнения в тождество после подстановки вместо неизвестного.

Так, например, уравнение

$$\sin x - \cos x = 0$$

имеет корень $x = \frac{\pi}{4}$, но оно имеет бесчисленное множество и других корней; все они охватываются формулой

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k,$$

где k — любое целое число — положительное, отрицательное и 0, т. е. $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Решим сначала 8 часто встречающихся простейших уравнений.

1) $\sin x = 0$.

Поскольку $\sin 0° = 0$, $\sin 180° = 0$, $\sin 360° = 0$, $\sin 540° = 0$ и т. д., а также $\sin(-180°) = 0$, $\sin(-360°) = 0$, $\sin(-540°) = 0$ и т. д., то решениями уравнения $\sin x = 0$ служат углы

$$\ldots -540°,\ -360°,\ -180°,\ 0°,\ 180°,\ 360°,\ 540°,\ \ldots$$

Все эти углы можно записать в виде

$$x = 180°k, \text{ где } k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,$$

или в радианном измерении $x = \pi k$, где $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$

Если дано уравнение

$$\sin x \cos x = 0,$$

то его можно решить так: умножив обе части заданного уравнения на 2, получим:

$$2 \sin x \cos x = 0, \text{ или } \sin 2x = 0,$$

откуда $2x = \pi k$, а $x = \frac{\pi k}{2}$, где $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$

2) $\operatorname{tg} x = 0$.

Так как $\operatorname{tg} x = 0$ и $\sin x = 0$ при одних и тех же значениях x, то $\operatorname{tg} x = 0$ при $x = 180°k$ $(x = \pi k)$, где $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$

3) $\cos x = 0$.

Так как $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$, $\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{5\pi}{2} = 0$, $\cos\left(3\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$ и т. д., а также $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = 0$ и т. д., то решениями данного уравнения служат углы

$$\ldots -\frac{5\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \ldots$$

Все эти углы охватываются формулой

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \text{где } k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots$$

Если дано уравнение $\operatorname{tg}^2 x = 1$, то его можно решить так:

$$\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0; \quad \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1 = 0; \quad \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0;$$

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = 0; \quad \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} = 0.$$

Дробь обращается в нуль тогда, когда ее числитель равен нулю, при условии, что знаменатель отличен от нуля. В данном примере $\cos x \neq 0$ (в противном случае не существовал бы $\operatorname{tg} x$). Таким образом,

$$\cos 2x = 0.$$

Отсюда $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, а $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

4) $\operatorname{ctg} x = 0$.

Так как $\operatorname{ctg} x = 0$ и $\cos x = 0$ при одних и тех же значениях x, то $\operatorname{ctg} x = 0$, если $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

5) $\sin x = 1$.

Так как $\sin 90° = 1$, $\sin(90° \pm 360°) = 1$, $\sin(90° \pm 2 \cdot 360°) = 1$, $\sin(90° \pm 3 \cdot 360°) = 1$, ..., $\sin(90° + k \cdot 360°) = 1$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, то решениями уравнения $\sin x = 1$ служат углы $x = 90° + 360° k \left(x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Если дано уравнение

$$\sin 3x \cos 3x = \frac{1}{2},$$

то его можно решать так:

$$2 \sin 3x \cos 3x = 1, \text{ или } \sin 6x = 1,$$

откуда $6x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, а $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$.

6) $\sin x = -1$.

Поскольку $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = -1$,

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2} + 4\pi\right) = -1, \ \ldots, \ \sin\left(-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right) = -1,$$

то $\sin x = -1$ при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

7) $\cos x = 1$.

Так как $\cos 0° = 1$, $\cos(\pm 360°) = 1$, $\cos(\pm 2 \cdot 360°) = 1$,

$$\cos(\pm 3 \cdot 360°) = 1, \ \ldots, \ \cos(\pm n \cdot 360°) = 1,$$

то $\cos x = 1$ при $x = 360° k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

8) $\cos x = -1$.

Поскольку $\cos(\pm\pi) = -1$, $\cos(\pm\pi + 2\pi) = -1$, ..., $\cos(\pm\pi + 2k\pi) = -1$, то решения уравнения $\cos x = -1$ имеют вид

$$x = \pi + 2\pi k, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Рассмотрим еще несколько примеров простейших тригонометрических уравнений, в которых аргументы тригонометрических функций имеют более сложный вид, чем в примерах 1)—8).

а) $\cos\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Используя решение примера 8), можно написать:

$$\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{4} = \pi(2k+1),$$

откуда

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}(2k+1), \quad \text{где} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

б) $\sin\left(75^\circ - \frac{x}{2}\right) = -1$.

В силу нечетности функции $\sin x$ можно переменить знак у аргумента и функции, т. е. вместо данного уравнения решить равносильное ему уравнение

$$\sin\left(\frac{x}{2} - 75^\circ\right) = 1.$$

Следуя решению примера 5), получим:

$$\frac{x}{2} - 75^\circ = 90^\circ + 360^\circ \cdot k,$$

откуда

$$x = 330^\circ + 360^\circ \cdot 2k, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

в) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$.

Используя решение примера 1), можно написать:

$$3x - \frac{\pi}{8} = \pi k,$$

откуда

$$x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{3}k, \quad \text{где} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Вообще отыскание решений почти всякого тригонометрического уравнения в конечном счете сводится к отысканию решений простейших уравнений вида:

1) $\sin x = m$ или $\sin kx = m$, $|m| \leqslant 1$;

2) $\cos x = m$ или $\cos kx = m$, $|m| \leqslant 1$;

3) $\operatorname{tg} x = m$ или $\operatorname{tg} kx = m$, m — любое число.

§ 125. Общий вид углов, соответствующих данному значению тригонометрической фуикции.

Пример 1. $\sin x = \frac{1}{2}$.

Простейший угол, синус которого равен $\frac{1}{2}$, есть угол $\frac{\pi}{6}$ (или 30°); кроме того, во II четверти находится другой угол с тем же значением синуса: $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Все остальные углы найдутся прибавлением к этим углам любого целого числа периодов; получим два вида углов:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \tag{1}$$

$$x_2 = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k = -\frac{\pi}{6} + \pi(2k+1),$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{6} + \pi(2k+1). \tag{2}$$

Отметим, что при всяком целом k число $2k$ — четное, а число $(2k+1)$ — нечетное. Углы, определяемые формулой (1), равны простейшему углу $\frac{\pi}{6}$ плюс угол π, взятый четное число раз. Углы, входящие в формулу (2), составлены из нечетного числа раз взятого угла π минус простейший угол.

Формула

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \tag{3}$$

содержит в себе оба вида углов, т. е. она объединяет предыдущие две формулы в одну, так как при $n = 2k$ получим

$$x = (-1)^{2k} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi \cdot 2k = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

— углы, даваемые формулой (1); при $n = 2k+1$ имеем

$$x = (-1)^{2k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi(2k+1) = -\frac{\pi}{6} + \pi(2k+1)$$

— эти углы содержатся в формуле (2).

Пример 2. $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Наименьший положительный угол, удовлетворяющий уравнению, есть угол $\frac{\pi}{3}$, поэтому

$$2x = \frac{\pi}{3} \cdot (-1)^k + \pi k,$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; отсюда

$$x = \frac{\pi}{6} \cdot (-1)^k + \frac{\pi}{2} k.$$

Пример 3. $\sin \frac{x}{2} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$.

Для данного отрицательного значения синуса берем простейший угол $-\frac{\pi}{4}$; все углы содержатся в формуле

$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4}(-1)^k + \pi k,$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, откуда

$$x = -\frac{\pi}{2}(-1)^k + 2\pi k = \frac{\pi}{2}(-1)^{k+1} + 2\pi k.$$

Пример 4. $\sin px = 0 \quad (p \neq 0)$.

Простейший угол есть 0. Поэтому

$$px = \pi k, \text{ или } x = \frac{\pi k}{p} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Пример 5. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Наименьший положительный угол, удовлетворяющий данному уравнению, есть $\frac{\pi}{4}$. Так как косинус — четная функция, то угол $-\frac{\pi}{4}$ также служит решением данного уравнения; все остальные углы получаются прибавлением к этим двум основным углам любого целого числа периодов. Получим общую формулу

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Пример 6. $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

Наименьший положительный угол равен $\frac{2\pi}{3}$, а потому

$$2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k \qquad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots).$$

Пример 7. $\cos 3x = 0$.

Косинус обращается в нуль, если аргумент $3x$ равен $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ и т. д. Общий вид таких углов

$$\frac{\pi}{2}(2k+1) \qquad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Следовательно,

$$3x = \frac{\pi}{2}(2k+1), \quad x = \frac{\pi}{6}(2k+1).$$

Пример 8. $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

В пределах первой полуокружности имеется только один угол, соответствующий значению тангенса, равному $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Это — угол $\frac{\pi}{6}$. Все остальные углы получаются прибавлением к нему целого числа периодов, так что

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k \qquad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3\ \ldots).$$

Пример 9. $\operatorname{tg} \frac{2x}{3} = -\sqrt{3}$. Решение:

$$\frac{2x}{3} = -\frac{\pi}{3} + \pi k \qquad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots),$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi k.$$

Пример 10. $\sin(2x - 1{,}5) = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$2x - 1{,}5 = \frac{\pi}{4}\cdot(-1)^k + \pi k \qquad (k = 0,\ \pm 1,\ \ldots).$$

$$2x = \frac{\pi}{4}\cdot(-1)^k + \pi k + 1{,}5,$$

$$x = \frac{\pi}{8}\cdot(-1)^k + \frac{\pi}{2}k + 0{,}75.$$

§ 126. Примеры более сложных тригонометрических уравнений.

Пример 1. $\sqrt{2}\sin^2 x+\cos x=0$.

В данное уравнение входят две функции одного и того же аргумента, поэтому выразим $\sin^2 x$ через косинус, чтобы уравнение содержало лишь одну функцию ($\cos x$):

$$\sqrt{2}(1-\cos^2 x)+\cos x=0.$$

Получилось квадратное уравнение относительно $\cos x$:

$$\sqrt{2}\cos^2 x-\cos x-\sqrt{2}=0,$$

откуда

$$(\cos x)_{1,2}=\frac{1\pm 3}{2\sqrt{2}}, \qquad \cos x_1=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$x_1=\pm\frac{3}{4}\pi+2\pi k \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots);$$

$$\cos x_2=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}>1,$$

что не дает решения.

Пример 2. $\sin 2x+\cos x=0$.

Приведем функции к одному аргументу:

$$2\sin x\cos x+\cos x=0.$$

Разложим левую часть на множители

$$\cos x\,(2\sin x+1)=0.$$

Приравниваем каждый множитель нулю:

1) $\cos x=0,\ x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1) \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots);$

2) $2\sin x+1=0,\ \sin x=-\frac{1}{2},\ x_2=\frac{\pi}{6}(-1)^{k+1}+\pi k$

$(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$

Пример 3. $2\sin^2 2x-1=0$.

Хотя это уравнение легко решается относительно $\sin 2x\left[\sin 2x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, выгоднее, однако, $2\sin^2 2x$ заменить на $1-\cos 4x$.

Имеем

$$1-\cos 4x-1=0, \qquad \cos 4x=0; \qquad 4x=\frac{\pi}{2}(2k+1),$$

$$x=\frac{\pi}{8}(2k+1) \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \ldots).$$

Пример 4. $1-\cos(\pi-x)+\sin\frac{\pi+x}{2}=0$.

Так как $\cos(\pi-x)=-\cos x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)=\cos\frac{x}{2}$, то уравнение принимает вид

$$1+\cos x+\cos\frac{x}{2}=0, \quad 2\cos^2\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=0,$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2}+1\right)=0;$$

1) $\cos\frac{x}{2}=0$, $\frac{x_1}{2}=\frac{\pi}{2}(2k+1)$,

$$x_1=\pi(2k+1) \qquad (k=0, \pm 1, \ldots);$$

2) $2\cos\frac{x}{2}+1=0$, $\cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$, $\frac{x_2}{2}=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k$,

$$x_2=\pm\frac{4}{3}\pi+4\pi k \qquad (k=0, \pm 1, \ldots).$$

Упражнения

1. Дано: $\sin\alpha=\frac{3}{5}$; $\sin\beta=\frac{-7}{25}$; $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi$.

Найти: 1) $\sin(\alpha+\beta)$; 2) $\sin(\alpha-\beta)$; 3) $\cos(\alpha+\beta)$; 4) $\cos(\alpha-\beta)$; 5) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$; 6) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

2. $\operatorname{tg}\alpha=-2{,}4$; $\operatorname{tg}\beta=\frac{15}{8}$; $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$; $\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi$. Вычислить $\cos(\alpha-\beta)$ и $\sin(\alpha+\beta)$.

3. Упростить следующие выражения:

1) $\cos(a-b)-2\cos a\cos b-2\sin a\sin b$;

2) $\sin(45^\circ+\alpha)\sin(45^\circ-\alpha)+\cos(45^\circ+\alpha)\cos(45^\circ-\alpha)$;

3) $\cos x+\cos(120^\circ+x)+\cos(240^\circ+x)+\sin x$;

4) $\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}(\cos x\cos y+\sin x\sin y)$;

5) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$; 6) $1+\cos 2\alpha-2\sin^2\alpha$;

7) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}$; 8) $\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$.

4. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$; α и β — острые углы.

Найти: 1) $\operatorname{tg}(2\alpha+\beta)$; 2) $\sin 2\alpha$; 3) $\cos 4\alpha$; 4) $\sin(2\alpha-\beta)$; 5) $\cos\frac{\beta}{2}$; 6) $\sin\frac{\alpha}{2}$.

5. Дано: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2}-1$; $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Найти: 1) $\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$.

6. Доказать тождества:

1) $\dfrac{2\sin x+\sin 2x}{2\sin x-\sin 2x}=\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{2}$;

2) $\cos A+\cos(120^\circ-A)+\cos(120^\circ+A)=0$;

3) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=2\operatorname{tg}2x$;

4) $1-\operatorname{tg}^2(45^\circ-\alpha)=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos^2(45^\circ-\alpha)}$; 5) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)$;

6) $\dfrac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha$; 7) $\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)=\dfrac{1-\sin 4x}{1+\sin 4x}$;

8) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 9) $\dfrac{\sin x}{\sin x-\cos x\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}=1+\cos x$;

10) $2\cos^2 y+\cos y-1=2\cos\dfrac{3y}{2}\cos\dfrac{y}{2}$;

11) $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z=\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z$, если $x+y+z=\pi$;

12) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$, если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

7. Дано: $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$; $\sin\beta=\dfrac{1}{4}$; α и β — острые углы. Найти: 1) $\sin(2\alpha+2\beta)$; 2) $\cos 2(\alpha-\beta)$.

8. Вычислить $\cos 2x$, если угол x удовлетворяет соотношению $\operatorname{tg}^2 x-a\operatorname{tg}x+1=0$; $0<x<\dfrac{\pi}{4}$.

9. Решить уравнения:

1) $3\sin x=2\cos^2 x$; 2) $\sin x+\cos^2 x=\dfrac{1}{4}$; 3) $\sin 2x=\cos 2x$;

4) $\sin 2x=(\cos x-\sin x)^2$; 5) $\sin^4 x-\cos^4 x=\dfrac{1}{2}$;

6) $\sin(x+30^\circ)+\cos(x-30^\circ)=0$; 7) $\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x=0$;

8) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=\dfrac{1}{2}$;

9) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cos^2 x$;

10) $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x=0$; 11) $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin\dfrac{\pi}{2}=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$;

12) $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)+2\cos x+2=0$; 13) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3}{2}\pi-x\right):\operatorname{ctg}x=\dfrac{1}{3}$;

14) $2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=-\cos 2x$; 15) $3\operatorname{tg}(\pi+x)=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$.

10. Вычислить без таблиц:

1) $\sin^4\dfrac{\pi}{8}+\sin^4\dfrac{3\pi}{8}+\sin^4\dfrac{5\pi}{8}+\sin^4\dfrac{7\pi}{8}$; 2) $\operatorname{tg}7^\circ 30'$.

11. Преобразовать в произведения:

1) $1-\sin x+\cos x$; 2) $\sin a+\sin 2a+\sin 3a$; 3) $2+\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha$; 4) $\sin x+\sin y+\sin(x+y)$; 5) $\dfrac{\cos x+\sqrt{3}\sin x}{\cos x-\sqrt{3}\sin x}$; 6) $3-\operatorname{tg}^2\alpha$.

ГЛАВА XI

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 127. Прямая и обратная функции. Функцию

$$y=f(x) \qquad (1)$$

назовем *прямой* функцией; тогда функция

$$x=\varphi(y), \qquad (2)$$

получаемая из уравнения (1) после разрешения его относительно x, называется *обратной* по отношению к функции $y=f(x)$.

Примеры.

1) $y=2x-3$ (прямая функция, линейная),

$x=\frac{y+3}{2}$ (обратная функция, тоже линейная);

2) $y=2x^2$ (прямая функция), $x=\pm\sqrt{\frac{y}{2}}$;

здесь две функции, и каждую из них можно назвать обратной для прямой функции $y=2x^2$. Если мы хотим получить однозначную обратную функцию, то надо наложить ограничения на область изменения аргумента x прямой функции; например, если $y=2x^2$ и $x\geqslant 0$, то имеем однозначную ей обратную функцию $x=\sqrt{\frac{y}{2}}$.

Отметим, что прямая функция $y=2x-3$ и обратная ей функция $x=\frac{y+3}{2}$ имеют один и тот же график, так как любая пара чисел, удовлетворяющая уравнению (1), удовлетворяет также и уравнению (2). Например, для функции $y=2x-3$ имеем $x_1=2$; $y_1=1$; $x_2=-3$; $y_2=-9$. Но если в обратной функции поменяем местами x и y, т. е.

обратную функцию будем обозначать, как и прямую, буквой y, а аргумент буквой x, то графики функций

$$y=2x-3 \text{ (прямая функция)},$$
$$y=\frac{x+3}{2} \text{ (обратная функция)}$$

уже не совпадают: они симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (рис. 95).

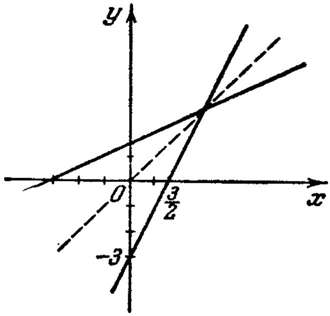

Рис. 95.

Таким образом, прямая функция $y=f(x)$ будет иметь однозначную ей обратную функцию $x=\varphi(y)$ или, при обычных обозначениях аргумента и функции, $y=\varphi(x)$, если для прямой функции берется такая область изменения аргумента x, в которой функция y или только возрастает, или только убывает.

Пример. Функция $y=x^3$ возрастает на всей числовой оси. Обратная ей функция $y=x^{1/3}$ также всюду возрастает.

§ 128. Функция арксинус. Будем исходить из графика функции $y=\sin x$ (рис. 89). Каждому значению угла x соответствует определенное и единственное значение синуса этого угла; в геометрическом истолковании это означает, что перпендикуляр, восставленный из любой точки оси Ox, пересекает график функции только в одной точке. Но можно ли сказать и наоборот, что каждому допустимому значению синуса, т. е. числу y, соответствует единственное значение угла x? Очевидно, нет, так как нам известно, что данному значению синуса соответствует бесчисленное множество углов; например, если $y=\sin x=$ $=\frac{1}{2}$, то $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, т. е. k — любое целое число. Геометрически эти углы мы получим, если проведем прямую параллельно оси Ox на расстоянии $d=\frac{1}{2}$ и выше оси Ox. Эта параллель пересечет синусоиду бесконечно много раз, так как график может быть продолжен неограниченно в обе стороны. На рис. 88 показаны точки пересечения, абсциссы которых x равны

$$\ldots; \frac{\pi}{6}; \quad \frac{5}{6}\pi; \ldots$$

Таким образом, нельзя пока установить обратного соответствия между значениями синуса (y) и значениями x так, чтобы это соответствие было однозначным. Однако *если угол x считать изменяющимся только на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то каждому значению y ($|y| \leqslant 1$) будет соответствовать единственное значение x*. Другими словами, существует однозначная обратная функция, которая обозначается следующим образом:

Если

$$y = \sin x \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

то

$$x = \arcsin y \quad (|y| \leqslant 1).$$

Последнее равенство читается так: x есть угол (дуга) в радианной мере, синус которого (которой) равен y, или сокращенно: «x равен *арксинусу* от y». Символ «arcsin» пишется слитно. Он образован из двух латинских слов «arcus» — дуга и «sinus».

Аргумент обратной функции также принято обозначать буквой x, а функцию — буквой y, так что вместо записи $x = \arcsin y$ в дальнейшем будем писать:

$$y = \arcsin x,$$

где

$$|x| \leqslant 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Взаимная обратность функций $\sin x$ и $\arcsin x$ записывается так:

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad \text{если} \quad |x| \leqslant 1,$$

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad \text{если} \quad |x| \leqslant \frac{\pi}{2},$$

т. е. знаки операций «arcsin» и «sin», если они следуют друг за другом, взаимно уничтожаются и остается то число x, над которым последовательно были произведены эти две операции.

Например, 1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$;

2) $\sin\left[\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$;

4) $\arcsin\left[\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=-\frac{\pi}{6}$.

Но

$$\arcsin\left(\sin\frac{2}{3}\pi\right)\neq\frac{2}{3}\pi.$$

Это выражение надо вычислять так:

$$\sin\frac{2\pi}{3}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3},$$

откуда

$$\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

Примечание. Множество всех углов, синус которых равен x ($|x|\leqslant 1$), обозначают символом $\operatorname{Arcsin} x$, так что, например,

$$\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}(-1)^k+\pi k,$$

$$\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}(-1)^k+\pi k,$$

где $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

§ 129. График функции $y=\arcsin x$. Для построения графика функции

$$y=\arcsin x \tag{1}$$

можно воспользоваться тем, что из соотношения (1) следует

$$x=\sin y \tag{2}$$

по определению функции арксинус.

Если построим ту часть синусоиды $x=\sin y$, которая соответствует изменению аргумента y на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, то это и есть график функции $y = \arcsin x$ (рис. 96). Вся синусоида $x = \sin y$ есть график многозначной функции

$$y = \operatorname{Arcsin} x.$$

Отметим свойства функции $\arcsin x$, которые можно обнаружить с помощью графика:

1) функция определена только на отрезке $[-1, 1]$;

2) множество всех значений функции составляет отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, т. е.

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2};$$

3) если аргумент x пробегает отрезок $[-1, 1]$ слева направо, то значения функции y изменяются от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, т. е. функция возрастает на всем отрезке $[-1, 1]$, принимая наименьшее значение при $x = -1$, равное $-\frac{\pi}{2}$, и наибольшее значение при $x = 1$, равное $\frac{\pi}{2}$;

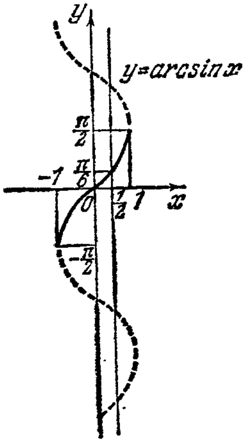

Рис. 96.

4) функция обращается в нуль при $x = 0$;

5) функция $\arcsin x$ нечетная:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x;$$

график ее симметричен относительно начала координат.

§ 130. **Функция арктангенс.** Функция $y = \operatorname{tg} x$ каждому значению аргумента x из области определения $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ ставит в соответствие определенное значение y—тангенс этого угла.

Можно установить и обратное однозначное соответствие между значениями y и x, если функцию $y = \operatorname{tg} x$ будем рассматривать только при тех значениях x, которые находятся в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда каждому действительному числу y, принимаемому за значение тангенса, можно поставить в соответствие единственное число x —

соответствующий угол в радианной мере: любая прямая, параллельная оси Ox, проведенная на каком угодно конечном расстоянии от оси Ox (выше или ниже ее — все равно), пересечет график функции $y = \operatorname{tg} x$ только в одной точке, абсцисса которой заключена между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ (рис. 91).

Определение. Функция, обратная тангенсу, называется *арктангенсом*.

Если $y = \operatorname{tg} x$ — прямая функция, то $x = \operatorname{arctg} y$ — обратная функция.

Эту запись надо понимать так: «x есть такой угол в радианной мере, взятый из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен числу y». Переставляя обозначения аргумента и функции, запишем обратную функцию в виде $y = \operatorname{arctg} x$. В этой записи аргумент x (тангенс) — любое действительное число, функция y (угол в радианной мере) — любое число из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Взаимная обратность операций «tg» и «arctg» записывается так:

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ (x — любое действительное число),

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

Таким образом,

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2) = 2, \quad \operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(-\pi)] = -\pi;$$

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}, \text{ но } \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi\right) \neq \frac{3\pi}{4},$$

поскольку угол $\frac{3}{4}\pi$ выходит за пределы промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому надо писать:

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi\right) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Примечание. Множество всех углов (дуг), тангенс которых равен данному числу x, обозначают через $\operatorname{Arctg} x$. Отсюда следует, что функция $y = \operatorname{Arctg} x$ многозначна:

$$\operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4} + \pi k,$$

$$\operatorname{Arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} + \pi k,$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

§ **131. График функции $y = \operatorname{arctg} x$.** На рис. 97 изображен график функции $y = \operatorname{arctg} x$. Этот график совпадает с графиком функции $x = \operatorname{tg} y$, когда аргумент y изменяется в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Свойства функции $\operatorname{arctg} x$:

1) аргумент x может быть любым действительным числом, т. е. функция определена на всей числовой оси;

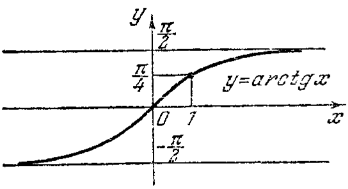

Рис. 97.

2) множество значений функции (y) образует промежуток $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

3) функция $\operatorname{arctg} x$ нечетная, так как $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$; график симметричен относительно начала координат;

4) функция $\operatorname{arctg} x$ возрастает во всей области ее определения: когда x, возрастая, пробегает числовую ось в направлении слева направо, значения функции последовательно увеличиваются;

5) функция арктангенс не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений, если ее рассматривать на всей числовой оси $(-\infty < x < +\infty)$.

§ **132. Обратные функции $\arccos x$ и $\operatorname{arcctg} x$.**

Определение 1. Функция, обратная косинусу, называется *арккосинусом*.

Если $y = \cos x$, то $x = \arccos y$, что следует понимать так: x есть угол (дуга), косинус которого (которой) равен y. Обозначая аргумент обратной функции также буквой x, а функцию буквой y, получим запись

$$y = \arccos x.$$

Функция арккосинус будет однозначной, если множество ее значений заполняет отрезок $[0, \pi]$. Тогда каждому значению $|x| \leqslant 1$ соответствует единственное значение $y\,(0 \leqslant y \leqslant \pi)$.

Взаимная обратность функций $\cos x$ и $\arccos x$ записывается так:

$$\cos(\arccos x) = x, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$\arccos(\cos x) = x, \text{ если } \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

График функции $y = \arccos x$ совпадает с той частью графика функции $x = \cos y$, которая соответствует изменению y от 0 до π (рис. 98). Пользуясь этим графиком, установите свойства функции $\arccos x$.

Определение 2. Функция, обратная котангенсу, называется *арккотангенсом*.

Из равенства $y = \operatorname{ctg} x$ следует, что $x = \operatorname{arcctg} y$, или в уже привычных обозначениях,

$$y = \operatorname{arcctg} x. \qquad (1)$$

В равенстве (1) x — любое действительное число, принимаемое за значение котангенса, y — соответствующий угол (дуга), взятый (взятая)

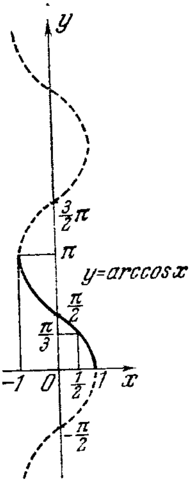

Рис. 98.

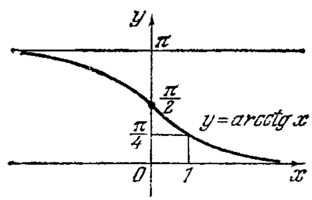

Рис. 99.

из промежутка $0 < y < \pi$. График функции изображен на рис. 99.

Примеры.

1) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$; 3) $\arccos(-1) = \pi$;

2) $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3}{4}\pi$; 4) $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Взаимная обратность функций $\operatorname{arcctg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ видна из следующей записи;

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \qquad -\infty < x < \infty;$$
$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \quad \text{если} \quad 0 < x < \pi.$$

Примечание. Множество всех углов, косинус (котангенс) которых равен x, обозначают символом $\operatorname{Arccos} x$ (соответственно $\operatorname{Arcctg} x$). Например:

$$\operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{3}}{2} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,$$

$$\operatorname{Arcctg}(-1) = \frac{3}{4}\pi + \pi k,$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

§ 133. Некоторые тождества, связывающие обратные тригонометрические функции.

Теорема. *При всяком действительном значении x, удовлетворяющем неравенству $|x| \leqslant 1$, имеет место тождество*

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Доказательство. Рассмотрим два угла

$$\arcsin x \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{2} - \arccos x$$

и докажем, что они совпадают.

По определению

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi.$$

Из последних неравенств получаем:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - \arccos x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Итак, оба рассматриваемых угла содержатся в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, являющемся, как известно, множеством значений однозначной функции $y = \arcsin x$. Следовательно, для доказательства совпадения этих углов достаточно доказать совпадение их синусов.

Действительно,

$$\sin(\arcsin x) = x,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x,$$

т. е. теорема доказана.

Подобным же образом может быть доказано, что при любом действительном значении x справедливо тождество

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Доказательство рекомендуем читателю провести самостоятельно.

§ 134. Выражение любой обратной тригонометрической функции через остальные. Любую из четырех обратных тригонометрических функций можно выразить через любую из трех остальных.

1. Выражение $\arcsin x$ через арккосинус, арктангенс и арккотангенс. Пусть

$$\sin\alpha = x \quad (0 < x < 1).$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \sqrt{1-x^2}, \\ \operatorname{tg}\alpha &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \operatorname{ctg}\alpha &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Равенства (1) вместе с исходным равенством равносильны следующим равенствам:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \arcsin x, \\ \alpha &= \arccos\sqrt{1-x^2}, \\ \alpha &= \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \alpha &= \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Эти равенства вытекают из самого определения обратных тригонометрических функций.

Так как левые части всех равенств (2) равны между собой, то равны и их правые части:

$$\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Пример.

$$\arcsin\frac{5}{13} = \arccos\sqrt{1-\frac{25}{169}} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{\frac{5}{13}}{\sqrt{1-\frac{25}{169}}} = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-\frac{25}{169}}}{\frac{5}{13}},$$

или

$$\arcsin\frac{5}{13} = \arccos\frac{12}{13} = \operatorname{arctg}\frac{5}{12} = \operatorname{arcctg}\frac{12}{5}.$$

2. Выражение $\operatorname{arcctg} x$ через остальные обратные тригонометрические функции. Пусть

$$\operatorname{tg}\alpha = x \qquad \left(x > 0;\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

Тогда

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{x}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Поэтому

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \operatorname{arctg} x, \\ \alpha &= \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}, \\ \alpha &= \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \\ \alpha &= \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \end{aligned}\right\}$$

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Пример.

$$\operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \operatorname{arcctg}\frac{4}{3} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \arcsin\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}},$$

или

$$\operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \operatorname{arcctg}\frac{4}{3} = \arccos\frac{4}{5} = \arcsin\frac{3}{5}.$$

Рекомендуем читателю тем же методом показать справедливость следующих равенств:

$$\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} =$$
$$= \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (0 < x \leqslant 1);$$
$$\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} =$$
$$= \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (x > 0).$$

§ 135. Примеры на обратные тригонометрические функции.

Пример 1. Вычислить $\sin\left[\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Полагаем:

$$\alpha=\arccos\left(-\frac{1}{2}\right),\quad \beta=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \text{следовательно,}\quad \alpha=\frac{2}{3}\pi,$$

$$\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \text{следовательно,}\quad \beta=\frac{\pi}{3},$$

откуда

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}+3\cdot\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{5\pi}{3}=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 2. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$. Полагаем

$$\alpha=\arcsin\frac{1}{3},\quad \beta=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}.$$

Тогда

$$\sin\alpha=\frac{1}{3};\qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\frac{1}{9}}}=\frac{1}{\sqrt{8}};\qquad \operatorname{tg}\beta=\frac{4}{3}.$$

По формуле тангенса суммы имеем:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\left.\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}\right|_{\substack{\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{8}},\\ \operatorname{tg}\beta=\frac{4}{3}}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{3\sqrt{8}}}=\frac{3+8\sqrt{2}}{6\sqrt{2}-4}\approx 3{,}19.$$

Пример 3. Вычислить $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}\right)$.

В новых обозначениях данный пример можно переписать так:

$$\sin\left(2\alpha-\frac{\beta}{2}\right),$$

где

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\operatorname{arctg}\frac{1}{2},\\ \beta&=\arccos\frac{3}{4}.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

По этим данным предварительно вычислим $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\sin\frac{\beta}{2}$ и $\cos\frac{\beta}{2}$, так как

$$\sin\left(2\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\sin 2\alpha\cdot\cos\frac{\beta}{2}-\cos 2\alpha\cdot\sin\frac{\beta}{2}. \qquad (2)$$

Из равенств (1) следует

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}, \quad \cos\beta=\frac{3}{4},$$

где α и β — острые углы. Поэтому

$$\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};$$

при $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$ имеем:

$$\sin 2\alpha=\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{5};$$

$$\cos 2\alpha=\left.\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right|_{\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}}=\frac{3}{5}$$

(здесь угол α рассматривался как половинный по отношению к 2α, а потому были применены формулы § 119). Аналогично

$$\sin\frac{\beta}{2}=\left.\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}\right|_{\cos\beta=\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}\sqrt{2},$$

$$\cos\frac{\beta}{2}=\left.\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}\right|_{\cos\beta=\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}\sqrt{14}.$$

Теперь, используя (2), имеем

$$\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}\right)=$$

$$=\frac{4}{5}\,\frac{1}{4}\sqrt{14}-\frac{1}{4}\sqrt{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{\sqrt{14}}{5}-\frac{3\sqrt{2}}{20}\approx 0{,}536.$$

Пример 4. Проверить справедливость равенства

$$\underbrace{\operatorname{arctg}\frac{2}{11}}_{\alpha}+\underbrace{2\operatorname{arctg}\frac{1}{7}}_{2\beta}=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

Если данное равенство справедливо, т. е. левая и правая части представляют собой одинаковые углы, то равным углам соответствуют равные тангенсы. **Возьмем** тангенс от левой и правой частей:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{11}+2\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right)=\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\beta}.$$

Но

$$\operatorname{tg}2\beta=\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}\Big|_{\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{7}}=\frac{7}{24}\left(0<2\beta<\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{11}\left(0<\alpha<\frac{\pi}{4}\right),$$

а потому $\alpha+2\beta<\frac{\pi}{2}$, и левая часть равенства есть острый угол, причем

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{11}+2\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right)=\frac{\frac{2}{11}+\frac{7}{24}}{1-\frac{2}{11}\cdot\frac{7}{24}}=\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Из равенства тангенсов двух острых углов следует равенство самих углов. Этим равенство доказано.

Пример 5. Найти x из уравнения

$$\arcsin x-\arccos x=0 \qquad (x>0).$$

Так как $\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}$, то уравнению можно придать следующий вид:

$$\arccos\sqrt{1-x^2}=\arccos x,$$

откуда

$$\sqrt{1-x^2}=x, \qquad 1-x^2=x^2;$$

$$2x^2=1, \quad \text{или} \quad x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Проверка:

1) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=0;$

2) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\neq 0.$

Число $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ не является корнем данного уравнения, оно есть корень уравнения

$$\arcsin x-\arccos x=-\pi.$$

§ 136. Некоторые примеры тригонометрических уравнений. В § 124 были показаны приемы решения простейших тригонометрических уравнений.

Рассмотрим еще другие типы тригонометрических уравнений и способы их решений.

1. Уравнение вида

$$a\cos^2 x + b\cos x \cdot \sin x + c\sin^2 x = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) называется *однородным* относительно $\sin x$ и $\cos x$, причем степень однородности равна 2. (Сравните с алгебраическим уравнением $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, которое тоже называется однородным второй степени относительно x и y.)

Будем считать все три коэффициента a, b и c отличными от нуля. Очевидно, что решениями или корнями уравнения (1) не могут являться те углы, косинус или синус которых равен нулю:

$$\cos x \neq 0, \quad \sin x \neq 0.$$

Допустим противное, т. е. что $\cos x = 0$. Тогда первые два члена левой части уравнения (1) обратятся в нуль и получится:

$$c \cdot \sin^2 x = 0,$$

что невозможно при $c \neq 0$, так как $\sin x = \pm 1$ при $\cos x = 0$.

Аналогично убеждаемся в том, что $\sin x \neq 0$. В таком случае можно делить все члены уравнения на $\cos^2 x$ (или на $\sin^2 x$). Получим квадратное уравнение относительно тангенса (соответственно котангенса):

$$c \cdot \operatorname{tg}^2 x + b \cdot \operatorname{tg} x + a = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c};$$

если $b^2 - 4ac \geqslant 0$, то уравнение имеет действительные корни.

Пример. $2\cos^2 x + 5\cos x \cdot \sin x - 3\sin^2 x = 0$. После деления на $\cos^2 x$ получим:

$$3\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x - 2 = 0,$$

$$(\operatorname{tg} x)_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6},$$

$$(\operatorname{tg} x)_1 = -\frac{1}{3}, \qquad (\operatorname{tg} x)_2 = 2;$$

$$x_1 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k, \qquad x_1 = -\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k,$$

$$x_2 = \operatorname{arctg} 2 + \pi k,$$

где $k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$

Вообще уравнение вида

$$a\cos^2 x + b\cos x\sin x + c\sin^2 x = m,$$

где $m \neq 0$, решается так: умножаем правую часть уравнения на $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

Тогда

$$a\cos^2 x + b\cos x\sin x + c\sin^2 x = m(\sin^2 x + \cos^2 x),$$

$$(a - m)\cos^2 x + b\sin x\cdot\cos x + (c - m)\sin^2 x = 0.$$

Это однородное уравнение, и оно решается предыдущим способом.

2. Уравнение вида

$$a\cos x + b\sin x = c \qquad (a \neq 0, \ b \neq 0, \ c \neq 0).$$

Выразим $\cos x$ и $\sin x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (§ 119); получим:

$$a\frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + b\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = c,$$

или

$$a\frac{1 - z^2}{1 + z^2} + b\frac{2z}{1 + z^2} = c \qquad \left(z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right),$$

что приводит к квадратному уравнению:

$$(a + c)z^2 - 2bz + c - a = 0.$$

Если дискриминант $D = b^2 - (c - a)(a + c) \geqslant 0$, или $a^2 + b^2 \geqslant c^2$, то уравнение имеет действительные корни.

Пример. $5\cos x + 4\sin x = 3$.

Здесь $a^2+b^2-c^2=25+16-9=32>0$, и уравнение имеет действительные корни. Получим:

$$8z^2-8z-2=0,$$
$$4z^2-4z-1=0,$$

$$z_1=\frac{2-\sqrt{8}}{4}=\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \qquad z_2=\frac{1+\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{x_1}{2}=\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \qquad \frac{x_1}{2}=-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}-1}{2}+\pi k,$$

$$x_1=-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}-1}{2}+2\pi k;$$

$$\operatorname{tg}\frac{x_2}{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}, \qquad x_2=2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}+1}{2}+2\pi k.$$

Наименьший положительный угол, удовлетворяющий данному уравнению, есть

$$x=2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

Найдем его величину сначала в градусах, а потом в радианах:

$$\frac{\sqrt{2}+1}{2}\approx\frac{2,4142}{2}=1,2071,$$
$$\operatorname{arctg}1,2071\approx 50°22',$$
$$2\operatorname{arctg}1,2071\approx 100°44'\approx 1,758 \text{ рад.}$$

Второй способ решения. Преобразуем левую часть уравнения:

$$5\cos x+4\sin x=4\left(\frac{5}{4}\cos x+\sin x\right).$$

Введем вспомогательный угол φ, полагая $\operatorname{tg}\varphi=\frac{5}{4}$ ($\varphi=51°20'$). Тогда

$$5\cos x+4\sin x=4(\operatorname{tg}\varphi\cos x+\sin x)=\frac{4}{\cos\varphi}\sin(x+\varphi).$$

Уравнение теперь принимает вид

$$\frac{4}{\cos\varphi}\sin(x+\varphi)=3,$$

откуда

$$\sin(x+\varphi)=\frac{3\cos\varphi}{4}.$$

Но

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{25}{16}}} = \frac{4}{\sqrt{41}} \approx \frac{4}{6,403},$$

$$\sin(x+\varphi) \approx \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{6,403} \approx \frac{1}{2,134} \approx 0,4686.$$

Поэтому

$$x+\varphi = (-1)^k \arcsin 0,4686 + \pi k \quad (k=0, \ \pm 1, \ \ldots).$$

Но

$$\arcsin 0,4686 \approx 27°57'.$$

Окончательно,

$$x = -51°20' + (-1)^k \cdot 27°57' + 180° \cdot k.$$

Часто удается после переноса всех членов уравнения в левую часть разложить эту часть на множители. Приравнивая каждый сомножитель нулю, находим корни данного уравнения.

Примеры. 1) $\cos x - \cos 2x = 1$. Представляем уравнение в следующем виде:

$$\cos x - (1+\cos 2x) = 0, \qquad \cos x - 2\cos^2 x = 0,$$
$$\cos x\,(1-2\cos x) = 0.$$

Если произведение равно нулю, то должен быть равен нулю хотя бы один из сомножителей: либо

$$\cos x = 0, \qquad x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1),$$

либо

$$1-2\cos x = 0, \qquad \cos x = \frac{1}{2},$$

$$x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k \qquad (k=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots).$$

2) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$. Сумму $\sin x + \sin 5x$ преобразуем в произведение:

$$\sin x + \sin 5x = 2\sin 3x \cdot \cos 2x.$$

Уравнение принимает вид

$$2\sin 3x \cdot \cos 2x + \sin 3x = 0,$$
$$\sin 3x\,(2\cos 2x + 1) = 0.$$

Приравнивая нулю каждый сомножитель в отдельности, получаем:

$$\sin 3x = 0, \qquad 3x = \pi k, \qquad x_1 = \frac{\pi}{3} k \ (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots);$$

$$2\cos 2x + 1 = 0, \qquad \cos 2x = -\frac{1}{2},$$

откуда

$$2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \qquad x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k \ (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots).$$

§ 137. Общие указания к решению тригонометрических уравнений. Приемы решения тригонометрических уравнений весьма разнообразны и нет общего правила решения всякого уравнения. Поэтому ограничимся показом на примерах некоторых часто применяемых приемов решения.

1) Если уравнение содержит несколько различных тригонометрических функций одного и того же аргумента, то можно все функции выразить через одну, после чего получим алгебраические уравнения относительно неизвестного, обозначающего ту функцию, через которую выражены все остальные.

Пример 1. $3\sin x + \cos^2 x = 2$. Здесь удобно $\cos^2 x$ выразить через синус, после чего получим квадратное уравнение относительно $\sin x$:

$$\sin x - 3\sin x + 1 = 0.$$

Решая его, получим:

$$\sin x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0{,}382,$$

$$x = (-1)^k \, 22°30' + 180° \cdot k \qquad (k = 0, \ \pm 1, \ \ldots);$$

второй корень, $\sin x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, отбрасывается, поскольку $\frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1$.

Пример 2. $3\sin x + \cos x = 1$. В данном случае нецелесообразно заменять $\cos x$ на $\pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$, так как получим иррациональное уравнение относительно $\sin x$, и после освобождения от радикала могут появиться посторонние корни. Проще решать это уравнение так:

$$3\sin x - (1 - \cos x) = 0, \qquad 6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} = 0.$$

После сокращения на 2 и разложения левой части на множители имеем:

$$\sin\frac{x}{2}\left(3\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)=0;$$

$$\sin\frac{x}{2}=0, \qquad x_1=2\pi k;$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=3, \qquad x_2=2\operatorname{arctg}3+2\pi k.$$

2) Если уравнение содержит тригонометрические функции от различных аргументов, в состав которых входит неизвестное, то часто целесообразно привести функции к одному аргументу.

Пример 3. $\sin x+2\cos 2x=1{,}5$. Здесь можно $\cos 2x$ выразить только через $\sin x$, так как $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=$ $=1-\sin^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x$, после чего получим квадратное уравнение относительно $\sin x$:

$$8\sin^2 x-2\sin x-1=0,$$

$$\sin x_1=\frac{1}{2}, \qquad x_1=\frac{\pi}{6}(-1)^k+\pi k \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

$$\sin x_2=-\frac{1}{4}, \qquad x_2=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{4}+\pi k$$

$$(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Пример 4. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$. При решении этого уравнения нет необходимости приводить все функции к одному аргументу. Преобразуем левую часть уравнения в произведение:

$$(\cos x+\cos 3x)+\cos 2x=0, \qquad 2\cos 2x\cos x+\cos 2x=0,$$

$$\cos 2x(2\cos x+1)=0,$$

$$x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1); \qquad x_2=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

3) Приведенные примеры показывают, что одним из результативных приемов решения уравнений является разложение левой части уравнения на множители после переноса всех членов в эту часть. Поэтому иногда приходится прибегать к искусственным приемам разложения.

Пример 5. $\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}=1+\sin 2x$. Представим уравнение в следующем виде:

$$\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}-1=2\sin x\cos x, \quad \text{или} \quad \frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}-2\sin x\cos x=0;$$

выносим общий множитель $\sin x$:

$$\sin x\left(\frac{\frac{1}{\cos x}}{1-\operatorname{tg} x}-\cos x\right)=0, \text{ или } \sin x\left(\frac{1}{\cos x-\sin x}-\cos x\right)=0;$$

1) $\sin x=0, \quad x_1=\pi k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$

2) $\dfrac{1}{\cos x-\sin x}-\cos x=0,$

$$\frac{1-\cos^2 x+\sin x\cos x}{\cos x-\sin x}=0.$$

Предполагая, что $\cos x-\sin x\neq 0$, находим:

$$1-\cos^2 x+\sin x\cos x=0, \quad \sin^2 x+\sin x\cos x=0,$$

$$\sin x(\sin x+\cos x)=0;$$

отсюда либо $\sin x=0$, тогда имеем 1), либо

$$\sin x+\cos x=0,$$

или

$$\operatorname{tg} x=-1, \quad x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi k \quad (k=0, \pm 1, \ldots).$$

4) Если уравнение содержит квадраты синусов или косинусов от неизвестного аргумента, то обычно применяют формулы понижения степени, заменяя $\sin^2 x$ на $\frac{1-\cos 2x}{2}$, а $\cos^2 x$ — на $\frac{1+\cos 2x}{2}$. Этот прием целесообразно применять и при более высоких четных степенях синуса и косинуса.

Пример 6. $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$. Решение:

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{5}{8},$$

$$(1-\cos 2x)^2+(1+\cos 2x)^2=\frac{5}{2},$$

$$2+2\cos^2 2x=\frac{5}{2},$$

или

$$1+\cos 4x=\frac{1}{2}, \quad \cos 4x=-\frac{1}{2}, \quad 4x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,$$

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

5) Уравнение, содержащее члены с произведениями синусов или косинусов, бывает удобно приводить к виду,

в котором произведения заменены алгебраическими суммами.

Пример 7. $\sin 5x \cos 3x - \sin 8x \cos 6x = 0$. Решение:

$$\frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x) - \frac{1}{2}(\sin 14x + \sin 2x) = 0,$$

$$\sin 8x - \sin 14x = 0,$$

$$-2 \sin 3x \cos 11x = 0,$$

$$\sin 3x = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{3}k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$\cos 11x = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{22}(2k+1) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

§ 138. Графики функций, получающиеся преобразованием синусоиды.

1. График функции $y = \sin(x+a)$. Рассмотрим, как связаны между собой графики функций

$$y = \sin x \text{ и } y = \sin(x+a).$$

Положим для определенности $a > 0$.

При одинаковых значениях независимого переменного x аргументы этих двух функций отличаются на постоянную величину $(x+a) - x = a$. Вследствие этого

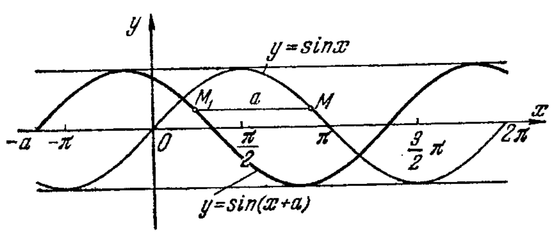

Рис. 100.

всякой точке M на графике $y = \sin x$ будет соответствовать точка M_1 на втором графике с той же величиной ординаты, но абсцисса точки M_1 меньше абсциссы точки M на величину a. Таким образом, любая точка первого графика может быть преобразована в соответствующую точку второго графика переносом ее параллельно оси Ox в отрицательном направлении на величину a (рис. 100).

Если сдвинуть синусоиду $y = \sin x$ вдоль оси Ox в отрицательном направлении на величину a, то произойдет слияние (совпадение) этих двух графиков, и можно сказать, что *график* $y=\sin(x+a)$ *есть синусоида* $y=\sin x$, *сдвинутая вдоль оси* Ox *влево на величину* a.

Вообще, *график функции* $y=\sin(x+a)$ *есть синусоида* $y=\sin x$, *сдвинутая вдоль оси* Ox *на величину* $|a|$ *вправо при* $a<0$ *и влево при* $a>0$.

Примечание. В частности, при $a=\frac{\pi}{2}$ такое преобразование синусоиды было нами рассмотрено в § 113 при построении графика функции $y=\cos x$, так как $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$.

2. График функции $y=A\sin x$. Сравним две функции: 1) $y=2\sin x\,(A=2)$ и 2) $y=\frac{1}{2}\sin x\left(A=\frac{1}{2}\right)$ с функцией $y=\sin x$.

При одинаковых значениях аргумента x значения первой функции в два раза больше соответствующих значений функции $y=\sin x$; значения второй функции — в два раза меньше. В геометрическом истолковании это означает, что ординаты кривой $y=2\sin x$ могут быть получены из соответствующих ординат кривой $y=\sin x$

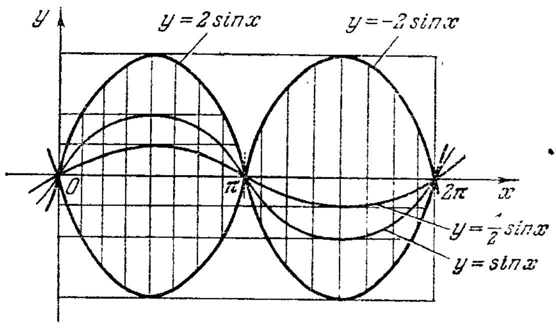

Рис. 101.

растяжением их в два раза в направлении оси Oy (положительные ординаты растягиваются вверх, отрицательные — вниз).

График функции $y=\frac{1}{2}\sin x$ получается из графика $y=\sin x$ *сжатием* всех ординат в два раза в направлении оси Oy, что изображено на рис. 101.

Вообще, *график функции* $y = A\sin x$ *получается из графика* $y = \sin x$ *растяжением ординат в* A *раз в направлении оси* Oy *при* $A > 1$ *и сжатием их в* $\frac{1}{A}$ *раз, если* $0 < A < 1$.

Число A называется *амплитудой* синусоиды $y = A\sin x$ и означает наибольшее отклонение точек графика от оси Ox, т. е. наибольшую по абсолютной величине ординату кривой.

Примечание. График функции $y = -2\sin x$ есть зеркальное отражение относительно оси Ox графика $y = 2\sin x$ (см. рис. 101). Вообще график функции $y = A\sin x$ при $A < 0$ получается из графика $y = \sin x$ растяжением ординат, если $|A| > 1$ (соответственно сжатием, если $|A| < 1$), с последующим отражением относительно оси Ox.

3. График функции $y = \sin kx$. Пусть $y = \sin 2x$ ($k = 2$). Нетрудно сообразить, что период этой функции равен π, т. е. $T = \pi$, где буквой T обозначен период. Действительно, по определению периода равенство

$$\sin 2(x + T) = \sin 2x$$

должно выполняться при любом значении x, или

$$\sin(2x + 2T) = \sin 2x,$$

что возможно, только если

$$2T = 2\pi n, \quad T = \pi n.$$

Так как $T = \pi$ при $n = 1$, то π и есть наименьшее положительное число, прибавление которого к x не меняет

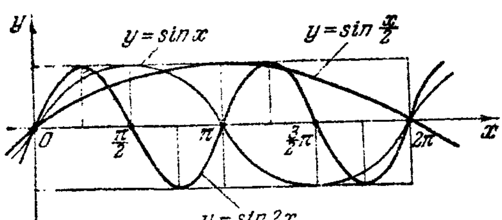

Рис. 102.

значения функции $y = \sin 2x$, т. е. ее *период*. График функции $y = \sin 2x$ есть синусоида, сжатая в два раза в направлении оси Ox (рис. 102).

График функции $y = \sin\frac{x}{2}$ есть растянутая в два раза синусоида с длиной волны (периодом) 4π, так как тождество

$$\sin\frac{x+T}{2} = \sin\frac{x}{2}, \quad \text{или} \quad \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{T}{2}\right) = \sin\frac{x}{2},$$

будет справедливым при всех значениях x, если

$$\frac{T}{2} = 2\pi, \quad \text{т. е.} \quad T = 4\pi.$$

Построение графика дано на рис. 102.

4. **График функции** $y = \sin(kx+a)$, $k > 0$. Аргумент $(kx+a)$ можно представить в виде $k(x+a_1)$, где $a_1 = \frac{a}{k}$. Тогда $y = \sin k(x+a_1)$. Параллельным сдвигом (переносом) синусоиды $y = \sin x$ в направлении оси Ox на величину a_1 (вправо на $|a_1|$, если $a_1 < 0$, и влево при $a_1 > 0$) достигнем того, что новому положению синусоиды соответствует и новое уравнение $y = \sin(x+a_1)$.

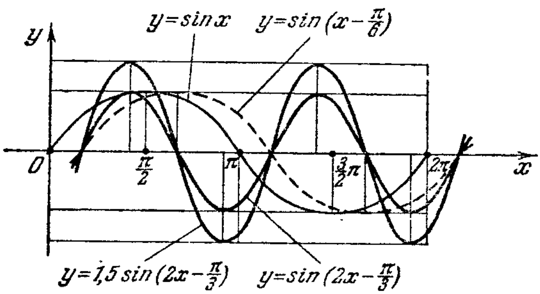

Рис. 103.

Если теперь длину волны сократить в k раз, если $k > 1$ $\left(\text{соответственно удлинить в } \frac{1}{k} \text{ раз, если } k < 1\right)$, то такому вторичному геометрическому преобразованию синусоиды соответствует уравнение

$$y = \sin k(x+a_1), \quad \text{или} \quad y = \sin(kx+a).$$

Итак, график функции $y = \sin(kx+a)$ *есть преобразованная, или деформированная, синусоида*, На рис. 103

изображен график функции $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ с показом каждого преобразования.

5. Г р а ф и к ф у н к ц и и $y=A\sin(kx+a)$. Этот график представляет собой деформацию (искажение) графика $y=\sin(kx+a)$, а именно — *растяжение* всех ординат графика в направлении оси Oy в A раз, если $A>1$, или *сжатие* в $\frac{1}{A}$ раз, если $0<A<1$ (если же $A<0$, то соответственно сжатие или растяжение производится с последующим отражением относительно оси Ox). Пример такого графика $\left(y=1{,}5\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ изображен на рис. 103.

6. Ф у н к ц и я $y=A\cos kx+B\sin kx$. Покажем, что функция

$$y=A\cos kx+B\sin kx \tag{1}$$

может быть приведена к виду

$$y=C\sin(kx+\alpha).$$

Умножим и разделим первую часть равенства (1) на $\sqrt{A^2+B^2}$:

$$y=\sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos kx+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin kx\right).$$

Положим

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sin\alpha,\qquad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}=\cos\alpha,$$

то всегда возможно, так как по абсолютной величине каждая из дробей $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ и $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ не больше единицы и сумма их квадратов равна единице:

$$\left|\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|\leqslant 1,\qquad \left|\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|\leqslant 1;$$

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2+\left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2=1.$$

Тогда имеем;

$$y=\sqrt{A^2+B^2}\,(\sin\alpha\cos kx+\cos\alpha\sin kx)=$$
$$=\sqrt{A^2+B^2}\sin(kx+\alpha)=C\sin(kx+\alpha),$$

где $C=\sqrt{A^2+B^2}$.

Пример. $y = -0{,}5\cos 2x + 1{,}2\sin 2x$. Здесь $A = -0{,}5$; $B = 1{,}2$; $k = 2$. Находим:

$$C = \sqrt{(-0{,}5)^2 + (1{,}2)^2} = 1{,}3.$$

Тогда

$$\cos\alpha = \frac{-0{,}5}{1{,}3} = -\frac{5}{13} \approx -0{,}3846; \quad \sin\alpha = \frac{1{,}2}{1{,}3} = \frac{12}{13} \approx 0{,}9231.$$

Угол α принадлежит второй четверти, в которой синус имеет положительное значение, а косинус — отрицательное. По таблицам находим:

$$\alpha = 180° - 67°23' = 112°37'.$$

В радианной мере

$$\alpha = 1{,}9654, \text{ или } \alpha \approx 1{,}97.$$

Таким образом,

$$y = 1{,}3\sin(2x + 1{,}97),$$

т. е. мы получили уравнение вида, рассмотренного выше (см. п. 5).

§ 139. Графическое решение тригонометрических уравнений.

Пример 1. Пусть надо решить тригонометрическое уравнение $\sin 2x = 0$. Это означает, что надо найти корни функции $y = \sin 2x$, а в геометрическом истолковании — абсциссы точек пересечения графика с осью Ox. Точки пересечения кривой $y = \sin 2x$ с осью абсцисс могут быть заданы формулой $x = \frac{\pi}{2}k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, что изображено на рис. 104.

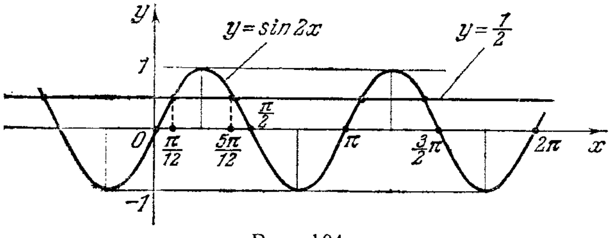

Рис. 104.

Пример 2. Корни уравнения $\sin 2x = \frac{1}{2}$ представляют абсциссы точек пересечения графика $y = \sin 2x$ с прямой $y=\frac{1}{2}$, параллельной оси Ox и расположенной над ней на расстоянии $d=\frac{1}{2}$. Точки пересечения имеют вид

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

На рис. 104 отмечены ближайшие к началу координат точки с абсциссами: $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, ...

Пример 3. Решение уравнения $\sin 2x - \cos x = 0$ сводится к отысканию абсцисс точек пересечения графиков двух функций, $y=\sin 2x$ и $y=\cos x$, так как уравнению можно придать вид

$$\sin 2x = \cos x.$$

Абсциссы точек пересечения графиков $y=\sin 2x$ и $y=\cos x$, т. е. корни уравнения, определяются двумя формулами (рис. 105):

$$x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1) \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

На рисунке изображены корни $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, получен-

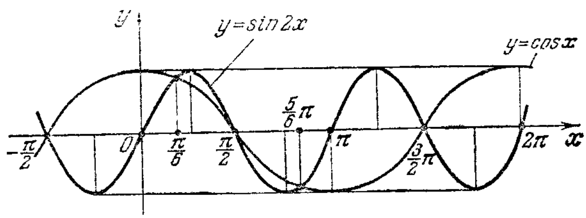

Рис. 105.

ные из первой формулы при $k=-1$, 0 и 1, и корни $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$, полученные из второй формулы при $k=0$ и 1.

§ 140. Простое гармоническое колебание. По окружности радиуса $OA=a$ движется точка M с постоянной угловой скоростью в положительном направлении. По какому закону движется проекция точки M на ось Oy, т. е. точка C, если в момент начала движения $(t=0)$ движущаяся по окружности точка M находилась в положении M_0; угловая скорость точки M равна $\omega\left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right)$ (рис. 106).

В начальный момент радиус OM_0 образует с осью Ox угол $\angle AOM_0=\alpha$. Через t секунд угол увеличится на величину ωt, и радиус OM, соответствующий новому положению точки, образует с осью Ox угол $\angle xOM=\omega t+\alpha$. За время t *сек* проекция точки M на ось Oy, т. е. точка C, из первоначального положения C_0 сместится по оси Oy в положение C. Если обозначим через y отрезок OC, характеризующий отклонение проекции C от центра окружности в момент времени t, то

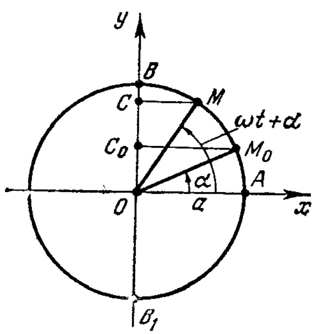

Рис. 106.

$$\frac{y}{a}=\sin(\omega t+\alpha),$$

или

$$y=a\sin(\omega t+\alpha).$$

Это и есть закон, описывающий движение проекции на ось Oy точки M. Проекция C движется прямолинейно по оси Oy, колеблясь около точки O, т. е. отклоняясь то вверх, то вниз не больше, чем на величину радиуса. Следовательно, проекция движется по оси Oy между точками B_1 и B.

Определение. Движение по закону

$$y=a\sin(\omega t+\alpha)$$

называется *простым гармоническим колебанием*.

Выясним смысл постоянных, входящих в уравнение $y=a\sin(\omega t+\alpha)$. Параметр a называется *амплитудой* колебания и характеризует наибольшее отклонение колеблющейся точки от центра O. Аргумент $\omega t+\alpha$ называется *фазой* колеблющейся точки C; α — *начальная фаза* колебания.

Время T, в течение которого точка M совершает по окружности полный оборот, а следовательно, точка C совершит полное колебание и возвратится в исходное положение, называется *периодом гармонического колебания*.

Очевидно, что

$$T=\frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega=\frac{2\pi}{T}.$$

Величина, обратная периоду колебания, называется *частотой колебания*, частота $\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$.

Примечание. Проекция точки M, взятая на оси Ox, также совершает гармоническое колебание, если точка M движется равномерно по окружности, но только с другой начальной фазой:

$$x=a\cos(\omega t+\alpha)=a\sin\left[\frac{\pi}{2}+\omega t+\alpha\right],$$

или

$$x=a\sin\left(\omega t+\underbrace{\frac{\pi}{2}+\alpha}_{\alpha_1}\right).$$

График гармонического колебания для случая $a=1{,}5$; $\omega=2$; $\alpha=-\pi/3$ изображен на рис. 103.

Упражнения

1. Найти: 1) $\arcsin\frac{1}{2}$; 2) $2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; 4) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}1$; 5) $3\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2. Найти: 1) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$; 4) $2\operatorname{arcctg}(-1)$; 5) $\arccos 0$.

3. Вычислить: 1) $\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; 2) $\arccos(-1)+\arcsin(-1)$; 3) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. Построить соответствующие углы (дуги): 1) $\arcsin 0{,}6$; 2) $\arccos(-0{,}4)$; 3) $\operatorname{arctg}1{,}5$; 4) $\arcsin(-0{,}3)$.

5. Выразить x как функцию y из следующих равенств:

1) $y=\sin x$, если $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$; 2) $y=\frac{1}{2}\sin x$, если $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$; 3) $y=\cos 2x$, если $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$; 4) $y=\frac{1}{4}\operatorname{tg}x$, если $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$; 5) $y=3\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, если $-\pi<x<\pi$; 6) $y=\operatorname{ctg}2x$, если $0<x<\frac{\pi}{2}$.

6. Выразить x как функцию y из равенств: 1) $y=\arcsin\frac{x}{2}$; 2) $y=2\operatorname{arctg} x$; 3) $y=\frac{1}{2}\arccos x$; 4) $y=3\sin 2x$.

7. Вычислить: 1) $\cos(\arcsin 0{,}8)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\arcsin 1-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2}\right)$; 3) $\sin(2\arcsin x)$ $(0<x<1)$; 4) $\cos\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\arcsin\frac{1}{2}\right)$.

8. Показать справедливость следующих равенств:

1) $2\arccos x=\arccos(2x^2-1)$, $0\leqslant x\leqslant 1$; 2) $\operatorname{arctg} 1+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=\operatorname{arctg} 3$; 3) $\arccos 0{,}6+\arccos 0{,}8=\arccos 0$.

9. Пользуясь обозначениями обратных тригонометрических функций, написать общий вид углов, соответствующих данному значению тригонометрической функции: 1) $\sin x=\frac{2}{3}$; 2) $\sin 3x=-\frac{1}{4}$; 3) $\cos 2x=\frac{1}{5}$; 4) $\operatorname{tg} 2x=5$; 5) $\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{4}{5}$; 6) $\cos\frac{x}{2}=-\frac{3}{7}$.

Указание. Если $\sin 2x=\frac{3}{5}$, то $2x=(-1)^k\arcsin\frac{3}{5}+\pi k$; $x=\frac{1}{2}(-1)^k\arcsin\frac{3}{5}+\frac{\pi}{2}k$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots)$.

10. Преобразовать в произведения:

1) $\sin 80°+\sin 30°$; 2) $\sin 3\alpha-\sin\alpha$; 3) $\sin 5+\sin 3$; 4) $\cos 4x-\cos 2x$; 5) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$; 6) $\operatorname{tg} 70°+\operatorname{ctg} 40°$; 7) $\frac{1}{2}+\cos x$; 8) $\sqrt{3}+\operatorname{tg} A$; 9) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin 40°$; 10) $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha$; 11) $1+\sin x+\cos x$; 12) $\cos x+\sin 2x-\cos 3x$; 13) $\sin A+\cos A$; 14) $3-4\cos^2 x$.

11. Представить в виде суммы следующие выражения:

1) $2\sin 40°\cdot\cos 20°$; 2) $2\cos 70°\cdot\sin 10°$; 3) $\sin 3\alpha\cdot\cos\alpha$; 4) $\cos 5x\cdot\sin 2x$; 5) $\cos\frac{3\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{5}$; 6) $\sin\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{3\pi}{8}$; 7) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$; 8) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

12. Доказать тождества:

1) $4\sin\alpha\cdot\sin(60°-\alpha)\sin(60°+\alpha)=\sin 3\alpha$;

2) $\sin x+\cos x+1=2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\cos\left(45°-\frac{x}{2}\right)$;

3) $(\cos A+\cos B)^2+(\sin A-\sin B)^2=4\cos^2\frac{A+B}{2}$;

4) $\operatorname{tg} 30°+\operatorname{tg} 40°+\operatorname{tg} 50°+\operatorname{tg} 60°=\frac{4\cos 20}{\sin 60°}$;

5) $\sin 10°+2\sin 5°\cdot\cos 15°+\cos 50°=\cos 10°$;

6) $\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha-\sin 4\alpha\cdot\sin\alpha=\cos 3\alpha\cos 2\alpha$;

7) $\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)=0$;

8) $\cos 10°\cdot\cos 50°\cdot\cos 70°=\frac{\sqrt{3}}{8}$;

9) $1-4\cos^2\alpha=4\sin(60^\circ+\alpha)\sin(\alpha-60^\circ)$;

10) $1-\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$; 11) $\cos\dfrac{\pi}{5}-\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{1}{2}$;

12) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-1}=\operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha)$; 13) $\operatorname{tg}20^\circ\cdot\operatorname{tg}40^\circ\cdot\operatorname{tg}60^\circ\cdot\operatorname{tg}80^\circ=3$.

13. Решить уравнения:

1) $\sin x+2\cos x=1$; 2) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=1$;

3) $8\sin x-3\cos x=4$; 4) $\sin 2x=(\cos x-\sin x)^2$;

5) $\sin^2 x+\dfrac{1}{2}\sin 2x=1$;

6) $\sin 3x=\cos 2x$. Указание. $\cos 2x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2x\right)$;

7) $\operatorname{tg}2x-\operatorname{ctg}3x=0$; 8) $\sin(x+45^\circ)\sin(x-15^\circ)=\dfrac{1}{2}$;

9) $\sin 3x\cos 5x=\sin 4x\cos 6x$; 10) $\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin 3x$;

11) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=0$;

12) $12\sin x+4\sqrt{3}\cos(x+\pi)=8\sqrt{3}$;

13) $8\sin^2\dfrac{x}{2}+3\sin x-4=0$; 14) $\sin x\cdot\sin 2x+\cos 3x=0$;

15) $\sec x=4\sin x+6\cos x$; 16) $3\cos x+5\sin\dfrac{x}{2}=-1$;

17) $\cos\dfrac{x}{2}+\cos x+\cos 2x=0$;

18) $\cos^2 x-2\sqrt{3}\cos x\sin x-\sin^2 x=1$;

19) $\sin x\sin(x+60^\circ)\sin(x+120^\circ)=\dfrac{1}{4}$;

20) $\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x=\dfrac{1}{4}\sin 4x$; 21) $\dfrac{\sin x\operatorname{tg}x}{\cos x-1}=1$;

22) $\operatorname{ctg}x=2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$. Указание. $y=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}$;

23) $2\sin 3x+\sqrt{3}\cos 5x+\sin 5x=0$;

24) $\sin^2 4x-\sin^2 2x=\sin^2 x-\sin^2 3x$;

25) $\sec^2\dfrac{x}{2}-1=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}\sec x$; 26) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=\operatorname{ctg}x-1$;

27) $2(\cos x-\sin x)+10\cos x\sin x-5=0$;

28) $\sin^3 x-\cos^3 x=1$; 29) $\cos x+\sin x=\dfrac{\cos 2x}{1-\sin 2x}$;

30) $\dfrac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}+2\operatorname{tg}x=0$;

31) $\sin 3x+4\sin^3 x+4\cos x=5$;

32) $2\left[1-\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)\right]=\sqrt{3}\operatorname{tg}\dfrac{\pi-x}{2}$.

ГЛАВА XII

ПРОГРЕССИИ

§ 141. Числовая последовательность.

Пример 1. Телеграфные столбы ставятся на расстоянии 50 м один от другого. Выразить длину линии связи S_n в зависимости от количества поставленных столбов.

Очевидно, что $S_n = 50(n-1)$.

При $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$

$$S_n = 50 \text{ м}, 100 \text{ м}, 150 \text{ м}, 200 \text{ м}, \ldots$$

Пример 2. Из геометрии известно, что число всех диагоналей выпуклого многоугольника, имеющего n сторон, определяется по формуле $a_n = \frac{n(n-3)}{2}$, где a_n — число диагоналей в n-угольнике. Давая n значения: 4, 5, 6, 7, 8, ..., получим соответствующие значения $a_n = 2, 5, 9, 14, 20, \ldots$

В рассмотренных двух примерах мы имеем дело с функциями, аргумент которых n может принимать лишь целые положительные значения. Такие функции принято называть функциями натурального аргумента (по-другому, функциями целочисленного аргумента) и кратко (символически) записывать:

$$a_n = f(n) \text{ или } \{a_n\}.$$

Существенной особенностью функции натурального аргумента является то, что множество ее значений можно пронумеровать и расположить в определенном порядке: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$. Здесь на первом месте стоит число $a_1 = f(1)$, на втором месте число $a_2 = f(2)$, на третьем месте число $a_3 = f(3)$ и т. д. В таком случае говорят, что множество чисел: a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... *упорядочено*.

Определение 1. Упорядоченное множество значений функции натурального аргумента называется *числовой последовательностью*. В общем виде числовую последовательность записывают: a_1, a_2, a_3, ..., a_k, ... Число a_1 называется первым членом последовательности, число a_2—вторым членом и т. д.

Приведем еще примеры последовательностей.

Пример 3. Если возвести в квадрат каждое натуральное число, то получим последовательность квадратов натуральных чисел $\{n^2\}$: 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, ...

Пример 4. Для каждого натурального числа n существует обратное ему число $\frac{1}{n}$; эти обратные числа образуют числовую последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

Последовательность считается заданной, если известно правило, по которому каждому натуральному числу n ставится в соответствие другое число a_n. Чаще всего такое соответствие устанавливается формулой общего члена последовательности, например $a_n=\frac{n}{2n+1}$. Эта формула порождает последовательность $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$, ... Однако не всякую числовую последовательность можно задать формулой. Так, например, для последовательности 3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; ... мы не в состоянии указать формулу, которая позволяет по номеру члена последовательности определить и сам член.

Тем не менее правило, по которому образованы члены последовательности, легко выразить словами: первый член последовательности есть приближенное значение числа π по недостатку с точностью до 1, второй член есть приближенное значение π по недостатку с точностью до 0,1 и т. д. Вообще n-й член последовательности есть приближенное значение числа π по недостатку с точностью до $\frac{1}{10^{n-1}}$.

Последовательность 2, 3, 5, 7, 11, ... примечательна тем, что членами ее являются простые числа, расположенные в порядке их возрастания. На первом месте стоит наименьшее простое число 2; на втором месте — следующее простое число, т. е. 3, и т. д. Эту последовательность легко продолжить, располагая таблицей простых чисел; без такой таблицы мы не в состоянии назвать, например, член, стоящий на 1000-м месте, ибо нет такой формулы, которая выражала бы n-е простое число как функцию номера. Однако словесное правило вполне точно выражает закон образования ее членов.

Иногда последовательность задается так называемой рекуррентной формулой, например $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$. Смысл этой формулы состоит в том, что каждый член (начиная с третьего) определяется как сумма двух ближайших предшествующих ему членов: $a_3=a_1+a_2$, $a_4=$ $=a_2+a_3$, ... Чтобы можно было написать эту последовательность, необходимо задать ее первые два члена.

Пусть $a_1=2$, $a_2=1$, тогда имеем:

$$a_3=3,\ a_4=4,\ a_5=7,\ a_6=11 \text{ и т. д.}$$

Определение 2. Последовательность $\{a_n\}$ называется *монотонно возрастающей*, если каждый следующий член больше предыдущего, т. е. неравенство $a_{n+1}>$ $>a_n$ справедливо при всяком натуральном n.

Монотонно возрастающие последовательности нам уже встречались в примерах 1, 2, 3.

Определение 3. Последовательность $\{a_n\}$ называется *монотонно убывающей*, если каждый следующий член меньше предыдущего, т. е. неравенство $a_{n+1}<a_n$ справедливо при всяком натуральном n.

Примером монотонно убывающей последовательности может служить $\left\{\frac{1}{n}\right\}$: $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots$

Бывают последовательности, члены которых то возрастают, то убывают. Такие последовательности называются колеблющимися.

Пример. $a_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n}{n+1}$.

При $n=1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ получим члены последовательности:

$$1,\ -\frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ -\frac{8}{5},\ \frac{5}{3},\ \ldots$$

Легко заметить, что $a_2<a_1$, но $a_3>a_2$.

Члены этой последовательности попеременно то убывают, то возрастают.

§ 142. Графическая иллюстрация последовательности. Члены монотонных (т. е. только возрастающих или только убывающих) последовательностей удобно изображать точками на числовой оси, причем в случае возрастания точка движется вправо по мере того, как возрастает номер члена, что изображено на рис. 107. Для

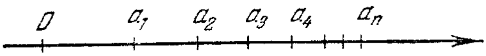

Рис. 107.

монотонно убывающей последовательности точка движется влево с возрастанием номера члена.

Но можно поступать по-другому. Номер каждого члена принять за абсциссу, а величину этого члена — за ординату и построить точки: $(1;\ a_1)$, $(2;\ a_2)$, $(3;\ a_3)$, ... и т. д. Получится ряд изолированных точек плоскости,

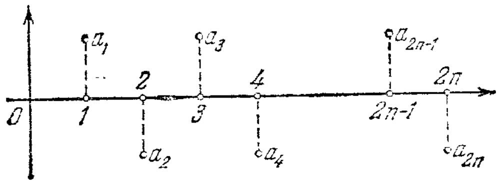

Рис. 108.

или, как говорят, дискретных точек. Эти точки, точнее говоря, их ординаты, являются изображениями членов последовательности.

На рис. 108 изображена последовательность $\{a_n\}$: 1, —1, 1, ... Здесь $a_n = (-1)^{n+1}$. Если бы мы захотели изобразить члены этой последовательности в виде точек на числовой оси, то изображение получилось бы невыразительное, так как члены с нечетными номерами изображаются одной точкой $a_{2n+1} = 1$, а все члены с четными номерами сливаются в другую точку $a_{2n} = -1$.

На этом примере можно заметить преимущество второго способа изображения перед первым.

§ 143. Арифметическая прогрессия. Рассмотрим следующие две последовательности:

$$4,\ 7,\quad 10,\ 13,\ 16,\ \ldots,$$
$$8,\ 3,\ -2,\ -7,\ -12,\ \ldots$$

Закон составления их один и тот же; разность между любым членом последовательности и ближайшим ему слева (предыдущим) есть величина постоянная. В первом примере эта разность равна: $7-4=10-7=\ldots$ $\ldots=3$; во втором примере имеем $3-8=-2-3=\ldots$ $\ldots=-5$.

Определение. *Арифметической прогрессией* называется последовательность чисел, в которой каждый следующий член получается из предыдущего прибавлением к нему одного и того же числа, называемого *разностью прогрессии*. Разность прогрессии обозначается буквой d; следовательно, в первом примере $d=3$; во втором примере $d=-5$. Члены арифметической прогрессии обозначаются a_1, a_2, a_3 и т. д.; в первом примере $a_1=4$; $a_2=7$; $a_3=10$.

Если $d>0$, то прогрессия возрастающая, при $d<0$ — убывающая. Чтобы показать, что данная последовательность есть арифметическая прогрессия, ставят впереди нее знак $\div$, например: $\div 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ \ldots$

Если $d=0$, то все члены прогрессии равны между собой. Изучение таких прогрессий интереса не представляет.

§ 144. Формула любого члена арифметической прогрессии. По определению прогрессии имеем:

$$a_2=a_1+d;$$
$$a_3=a_2+d=a_1+2d;$$
$$a_4=a_3+d=a_1+3d.$$

Можно подметить такую закономерность: чтобы получить член арифметической прогрессии с номером k, надо прибавить к первому члену разность d, умноженную на число членов, предшествующих определяемому:

$$a_k=a_1+(k-1)\,d \qquad (1)$$

(члену a_k предшествуют $(k-1)$ членов). Но это пока наше предположение, справедливость равенства (1) еще не доказана.

Докажем, что если справедливо равенство (1), то справедливо также и равенство

$$a_{k+1}=a_1+kd. \tag{2}$$

Действительно,

$$a_{k+1}=a_k+d=a_1+(k-1)d+d=a_1+kd,$$

и справедливость равенства (2) доказана.

Непосредственно мы убедились в том, что при $k=2$ и $k=3$ формула (1) верна, тогда она по доказанному верна также при $k=4$, а раз верна при $k=4$, то верна также и при $k=5$ и вообще верна при любом $k=n$. Поэтому

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

§ 145. Среднее арифметическое. Пусть a_{k-1}, a_k, a_{k+1} — три последовательных члена арифметической прогрессии. Тогда по свойству прогрессии имеем:

$$a_k-a_{k-1}=a_{k+1}-a_k;$$
$$2a_k=a_{k-1}+a_{k+1};$$
$$a_k=\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}.$$

Полусумма двух чисел называется их *средним арифметическим*; следовательно, *любой член арифметической прогрессии* (кроме первого) *есть среднее арифметическое двух смежных с ним членов.*

Пример. Между числами 8 и 20 вставить 7 средних арифметических. Это значит, что надо найти 7 таких чисел, которые вместе с данными числами 8 и 20 образовали бы арифметическую прогрессию; первым членом этой прогрессии является число 8, 9-м — число 20. Имеем

$$a_9=a_1+8d;\ 20=8+8d,\ d=1{,}5.$$

Искомая прогрессия:

$$\div 8;\ 9{,}5;\ 11;\ 12{,}5;\ 14;\ 15{,}5;\ 17;\ 18{,}5;\ 20.$$

Этот пример можно обобщить: если нужно вставить k средних арифметических между числами a и b, то имеем

$$b=a+(k+1)d,\ d=\frac{b-a}{k+1}.$$

По первому члену и разности d можно написать остальные члены.

§ 146. Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии. Предварительно отметим одно свойство арифметической прогрессии с конечным числом членов.

Пусть имеем:

$$\div 2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ 32,\ 37.$$

Сложим члены, равноотстоящие от начала и конца прогрессии: $2+37=39$; $7+32=39$; $12+27=39$; $17+22=39$; замечаем, что *сумма двух членов арифметической прогрессии, равноотстоящих от концов, равна сумме крайних членов.*

Так оно и должно быть: первые слагаемые этих сумм (т. е. 2, 7, 12, 17) возрастают на 5; зато вторые слагаемые (37, 32, 27, 22) убывают на 5; от этого сумма каждой пары слагаемых остается без изменения.

Перейдем к выводу формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии. Обозначим эту сумму через S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n. \qquad (1)$$

Если слагаемые в правой части равенства напишем в обратном порядке, то сумма S_n от этого не изменится:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1. \qquad (2)$$

Сложим почленно равенства (1) и (2); получим:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots$$
$$\ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

В каждой скобке имеем сумму двух членов, равноотстоящих от концов прогрессии; следовательно, все эти суммы в скобках равны между собой и каждая из них равна сумме крайних членов $a_1 + a_n$; таких скобок всего n, т. е. столько, сколько членов прогрессии. Поэтому имеем:

$$2S_n = (a_1 + a_n)\cdot n;$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}.$$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии равна полусумме крайних членов, умноженной на число членов.

Если воспользоваться выражением общего члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + (n-1)\,d$, то формуле суммы можно придать другой вид:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)\,d}{2}\,n,$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)\,d}{2}\,n.$$

Этой формулой удобно пользоваться, если нужно найти число членов прогрессии по данным a_1, d и S_n.

§ 147. Геометрическая иллюстрация суммы S_n. Дадим геометрический вывод суммы первых n членов арифметической прогрессии.

Прежде всего заметим следующее: если основание прямоугольника равно единице, то площадь прямоугольника выражается тем же числом, что и его высота.

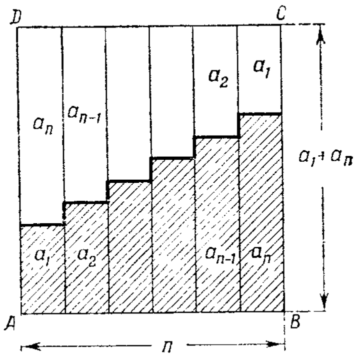

Рис. 109.

Строим n прямоугольников с высотами, равными членам арифметической прогрессии (рис. 109); основание каждого прямоугольника равно единице; все прямоугольники плотно приставлены друг к другу. Получим ступенчатую фигуру (на чертеже заштрихована), площадь ее численно равна S_n. Если к заштрихованной фигуре пристроить такую же фигуру, но перевернутую, то получится прямоугольник $ABCD$ с основанием $AB = n$, высотой $AD = a_1 + a_n$; площадь ступенчатой фигуры есть половина прямоугольника, т. е. $S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$.

§ 148. Примеры на применение формулы суммы S_n.

Пример 1. Найти сумму первых n чисел натурального ряда. Имеем: $a_1 = 1$; $a_n = n$; число членов также равно n; по первой формуле суммы можно написать:

$$S_n = \frac{(1+n)\,n}{2}.$$

Пример 2. Найти сумму 10 членов прогрессии:

$$\div\, 18,\ 14,\ 10,\ 6,\ \ldots$$

В данном случае $d=14-18=-4$; $a_1=18$; $n=10$. По второй формуле суммы имеем:

$$S_{10}=\frac{2\cdot 18+9\cdot(-4)}{2}\cdot 10;\quad S_{10}=0.$$

Пример 3. Четвертый член прогрессии равен 9, девятый член равен -6. Сколько нужно взять членов, чтобы сумма их равнялась 54?

$$\begin{aligned}
&a_9=-6, \text{ или } a_1+8d=-6\\
&a_4=9, \text{ или } \underline{a_1+3d=9}\\
&\qquad\qquad\qquad 5d=-15;\\
&d=-3;\\
&9=a_1+3\cdot(-3);\\
&a_1=18.
\end{aligned}$$

По второй формуле суммы имеем:

$$\begin{aligned}
54&=\frac{2\cdot 18+(n-1)\cdot(-3)}{2}n;\\
108&=(36-3n+3)\,n;\\
36&=(13-n)\,n;\\
n^2&-13n+36=0.
\end{aligned}$$

Решая это квадратное уравнение, находим:

$$n_1=4;\ n_2=9.$$

Оба ответа удовлетворяют условию задачи, что обнаруживается при проверке:

$$\div 18,\ 15,\ 12,\ 9,\ 6,\ 3,\ 0,\ -3,\ -6;\ S_4=54;$$

$S_9=S_4+0=54$, так как сумма последних пяти членов равна нулю. Такое положение, очевидно, будет иметь место, если прогрессия имеет члены, противоположные по знаку, но равные по абсолютной величине.

§ 149. Сумма квадратов первых n чисел натурального ряда. Обозначим сумму первых n чисел натурального ряда через S_1, а сумму их квадратов через S_2, так что

$$\begin{aligned}
S_1&=1+2+3+4+\ldots+n;\\
S_2&=1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2.
\end{aligned}$$

Если в тождестве

$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$$

будем последовательно давать n значения 1, 2, 3, 4, ..., n, то получим:

$$2^3-1^3=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1;$$
$$3^3-2^3=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1;$$
$$4^3-3^3=3\cdot 3^2+3\cdot 3+1;$$
$$5^3-4^3=3\cdot 4^2+3\cdot 4+1;$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$n^3-(n-1)^3=3(n-1)^2+3(n-1)+1;$$
$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1.$$

Складываем почленно эти равенства:

$$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+n^2)+$$
$$+3(1+2+3+4+\dots+n)+n,$$

или

$$(n+1)^3-1^3=3S_2+3S_1+n. \qquad (3)$$

Но

$$S_1=\frac{(n+1)n}{2}.$$

Подставив значение S_1 в равенство (3), получим:

$$n^3+3n^2+3n=3S_2+\frac{3n(n+1)}{2}+n,$$

откуда

$$6S_2=2(n^3+3n^2+3n)-3n^2-3n-2n=2n^3+3n^2+n=$$
$$=n(n+1)(2n+1);$$
$$S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Подобным же образом можно найти сумму кубов первых n чисел натурального ряда, если исходить из тождества

$$(n+1)^4-n^4=4n^3+6n^2+4n+1;$$

получим:

$$S_3=\left[\frac{(1+n)n}{2}\right]^2=S_1^2.$$

§ 150. Геометрическая прогрессия.

Определение. Последовательность чисел, в которой каждый следующий член равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число, называется *геометрической прогрессией*. Приведем примеры геометрических прогрессий:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \ldots;$$
$$27,\ 9,\ 3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \ldots;$$
$$12,\ -6,\ 3,\ -\frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ \ldots$$

Каждый член первой последовательности, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на 2; во втором примере последующий член получается из предыдущего умножением на $\frac{1}{3}$, в третьем примере—умножением на $-\frac{1}{2}$.

Число на которое надо умножить предыдущий член, чтобы получить последующий, называется *знаменателем прогрессии*. Знаменатель прогрессии обозначается буквой q. Члены геометрической прогрессии, аналогично членам арифметической прогрессии, будем обозначать a_1, a_2, a_3 и т. д. Геометрическую прогрессию будем обозначать знаком $\dot{\div}$, поставленным впереди ее членов.

Если знаменатель прогрессии q больше 1, то прогрессия является возрастающей при $a_1 > 0$ и убывающей при $a_1 < 0$. Если $q = 1$, то все члены геометрической прогрессии равны между собой. Такие прогрессии интереса не представляют.

В приведенных выше примерах первая прогрессия возрастающая, вторая—убывающая, а третья не является ни возрастающей, ни убывающей (здесь последующий член бывает то больше, то меньше предыдущего).

§ 151. Формула любого члена геометрической прогрессии. По определению геометрической прогрессии имеем:

$$a_2 = a_1 q;$$
$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2;$$
$$a_4 = a_3 q = a_1 q^3.$$

Выявляется определенная закономерность; чтобы получить член геометрической прогрессии с определенным номером, нужно первый член прогрессии умножить на знаменатель прогрессии с показателем степени, равным числу предшествующих членов. Допустим, что этот закон справедлив для члена с номером k:

$$a_k = a_1 q^{k-1}; \qquad (1)$$

докажем, что тогда

$$a_{k+1}=a_1q^k. \quad (2)$$

Действительно, по определению геометрической прогрессии имеем:

$$a_{k+1}=a_kq=a_1q^{k-1}q=a_1q^k,$$

и равенство (2) доказано.

Справедливость равенства (1) непосредственно проверена нами вплоть до значения $k=4$. Тогда, по доказанному, оно верно и при $k=5$, а раз справедливо при $k=5$, то верно и при $k=6$ и т. д., и вообще оно верно при любом натуральном значении $k=n$:

$$a_n=a_1q^{n-1}.$$

Любой член геометрической прогрессии равен первому члену, умноженному на знаменатель прогрессии с показателем степени, равным числу членов, предшествующих определяемому.

Пример 1. Найти 8-й член прогрессии:

$$\div\!\div 1,\ 3,\ 9,\ 27,\ \ldots$$

В этом примере $a_1=1$; $q=3$; поэтому

$$a_8=a_1q^7=1\cdot 3^7=2187.$$

Пример 2. Найти 10-й член прогрессии:

$$2,\ -\sqrt{2},\ 1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ldots$$

Знаменатель $q=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $a_1=2$.

$$a_{10}=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^9=-2\cdot\frac{2^4\sqrt{2}}{2^9}=-\frac{\sqrt{2}}{16}.$$

§ 152. Среднее геометрическое. Пусть a_{k-1}, a_k, a_{k+1} — три последовательных члена геометрической прогрессии, где индекс k — любое натуральное число, большее 1. Тогда имеем:

$$\frac{a_k}{a_{k-1}}=\frac{a_{k+1}}{a_k};$$

каждое из этих отношений равно знаменателю прогрессии q. По свойству пропорции имеем:

$$a_k^2=a_{k-1}\cdot a_{k+1}.$$

Число, квадрат которого равен произведению двух данных чисел, называется их *средним геометрическим;* например, число 6 есть среднее геометрическое чисел 4 и 9, так как $6^2 = 4 \cdot 9$.

Таким образом, *любой член геометрической прогрессии есть среднее геометрическое двух смежных с ним членов.*

Пример. Между числами 2 и 1458 вставить пять средних геометрических.

Условие задачи надо понимать так: требуется найти пять таких чисел, которые вместе с данными числами 2 и 1458 образовали бы геометрическую прогрессию с 1-м членом $a_1 = 2$ и 7-м членом $a_7 = 1458$.

Имеем:

$$a_7 = a_1 q^6; \quad 1458 = 2q^6; \quad 729 = q^6;$$
$$q = \sqrt[6]{729} = \pm 3.$$

Возможны две прогрессии:

$$\div\!\div 2, \ 6, \ 18, \ 54, \ 162, \ 486, \ 1458$$

или

$$\div\!\div 2, \ -6, \ 18, \ -54, \ 162, \ -486, \ 1458.$$

§ 153. Сумма первых n членов геометрической прогрессии. Обозначим сумму первых n членов геометрической прогрессии через S_n.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n. \qquad (1)$$

Умножим обе части равенства (1) на q; получим:

$$S_n q = a_1 q + a_2 q + a_3 q + \ldots + a_{n-1} q + a_n q; \qquad (2)$$

так как

$$a_1 q = a_2, \quad a_2 q = a_3, \quad \ldots, \quad a_{n-1} q = a_n,$$

то равенство (2) примет вид

$$S_n q = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_n q. \qquad (3)$$

Вычитаем из равенства (3) равенство (1):

$$S_n q - S_n = a_n q - a_1,$$
$$S_n (q - 1) = a_n q - a_1,$$

откуда

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} \qquad (q \neq 1).$$

Формулу суммы можно представить в другом виде, если в ней a_n заменить через a_1q^{n-1}; получим:

$$S_n = \frac{a_1q^{n-1}q - a_1}{q-1} = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1};$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} \quad (q \neq 1).$$

Если знаменатель прогрессии $|q| < 1$, то удобнее писать формулу так:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q},$$

чтобы числитель и знаменатель дроби были положительны при $a_1 > 0$.

Решим старинную задачу, относящуюся к XVIII веку.

Задача. Некто продает лошадь с условием, чтобы за первый гвоздь подковы был уплачен 1 грош, за второй гвоздь — 2 гроша, за третий — 4 гроша и т. д. Всех подковных гвоздей у лошади 32. Спрашивается, во сколько он ценит лошадь?

Очевидно, надо найти сумму 32 членов геометрической прогрессии, первый член которой $a_1 = 1$; знаменатель $q = 2$;

$$a_{32} = 1 \cdot 2^{31};$$

$$S_{32} = \frac{2 \cdot 2^{31} - 1}{2-1} = 2^{32} - 1 = 4\,294\,967\,295 \text{ (грошей).}$$

В переводе на рубли это составит около 2,15 млн. руб. (цена фантастическая!).

Пример. Сумма первых трех членов прогрессии равна 6, а сумма 2-го, 3-го и 4-го членов равна —3. Найти прогрессию. Запишем условие:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 6; \quad a_2 + a_3 + a_4 = -3.$$

Выражая члены прогрессии через первый, получим:

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 = 6, \text{ или } a_1(1 + q + q^2) = 6; \tag{4}$$

$$a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = -3, \text{ или } a_1q(1 + q + q^2) = -3. \tag{5}$$

Разделим равенство (5) на равенство (4); получим: $q = -\frac{1}{2}$. Первый член находим из соотношения

$$a_1 = \frac{6}{1+q+q^2} = \frac{6}{\frac{3}{4}} = 8.$$

Искомая прогрессия $\div\!\div 8; -4; 2; -1; \ldots$

§ 154. Метод математической индукции. При выводе формулы любого члена арифметической и геометрической прогрессий мы пользовались рассуждениями, которые носят название *метода математической индукции*. Сущность этого метода заключается в следующем: если надо установить справедливость некоторой формулы, в которой фигурирует натуральное число n, то:

1) проверяем, что предполагаемый закон имеет место для частного случая $n=1$;

2) предполагаем, что закон справедлив при каком-нибудь произвольном значении $n=k$, и доказываем, что в таком случае он справедлив и при $n=k+1$; отсюда будет следовать, что закон вообще справедлив при любом значении n, ибо справедливость его была обнаружена при $n=1$, а по доказанному он тогда верен и при $n=2$, а раз справедлив при $n=2$, то справедлив и при $n=3$, и т. д.

Иногда эти рассуждения называют способом доказательства от n к $n+1$. Рассмотрим пример.

Пример. Доказать, что при всяком натуральном n имеет место равенство

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Формула верна для $n=1$, ибо

$$1^2=\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)}{6}=1; \quad 1=1.$$

Допустим, что формула верна при $n=k$:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Докажем, что в таком случае она верна и при $n=k+1$, т. е.

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

В самом деле,

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=$$
$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=(k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6}+(k+1)\right]=$$
$$=(k+1)\frac{2k^2+k+6k+6}{6}=(k+1)\frac{2k^2+7k+6}{6}=$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

так как $2k^2+7k+6=(k+2)(2k+3)$.

Непосредственная проверка показала, что формула верна при $n=1$; по доказанному она будет справедлива также при $n=2$, а потому и при $n=3$, следовательно, и при $n=4$ и вообще при любом натуральном n.

§ 155. Задачи на прогрессии.

Задача 1. Два тела, находясь на расстоянии 153 м друг от друга, движутся навстречу одно другому. Первое прокодит 10 м в секунду, а второе в первую секунду прошло 3 м, а в каждую следующую секунду проходит на 5 м больше, чем в предыдущую. Через сколько секунд они встретятся?

Пусть встреча происходит через x секунд, тогда первое тело прошло путь, равный $10x$ (м), второе тело прошло путь, равный сумме членов арифметической прогрессии:

$$S=3+(3+5)+(3+5\cdot 2)+\ldots+[3+5(x-1)].$$

По условию задачи $10x+S=153$, или $10x+\frac{5x+1}{2}x=$ $=153$.

Решая это квадратное уравнение, находим, что $x=6$.

Задача 2. Могут ли числа, выражающие длины сторон треугольника и его периметр, образовывать арифметическую прогрессию?

Предполагаем, что длины сторон образуют арифметическую прогрессию, тогда их можно обозначить a, $a+d$, $a+2d$, периметр в таком случае равен $3a+3d$. Разность между периметром и большей стороной равна $(3a+3d)-(a+2d)=2a+d$, и, так как $2a+d>d$, периметр не является четвертым членом арифметической прогрессии.

Задача 3. Четыре числа образуют убывающую геометрическую прогрессию. Зная, что сумма крайних членов равна 27, а сумма средних членов равна 18, найти эту прогрессию.

Имеем систему

$$\begin{cases} a_1+a_1q^3=27, \\ a_1q+a_1q^2=9. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение на второе: $\frac{1-q+q^2}{q}=3$. Решая это квадратное уравнение, получим $q=2\pm\sqrt{3}$.

Условиям данной задачи удовлетворяет только $q=2-\sqrt{3}$, так как прогрессия должна быть убывающей и потому $|q|<1$. Первый член прогрессии находим из соотношения $a_1(q+q^2)=9$, $a_1=\frac{3}{2}(9+5\sqrt{3})$.

Задача 4. Сумма трех положительных чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 21. Если к этим числам прибавить соответственно 2, 3 и 9, то новые числа образуют геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

Пусть x, y и z — искомые числа. Тогда $x+y+z=21$, и, так как числа x, y, z образуют арифметическую прогрессию, то $2y=x+z$. По условию числа $x+2$, $y+3$, $z+9$ составляют геометрическую прогрессию, т. е. $(y+3)^2=(x+2)(z+9)$.

Получилась система уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=21. \\ 2y=x+z, \\ (y+3)^2=(x+2)(z+9). \end{cases}$$

Из первого уравнения находим, что $x+z=21-y$, тогда второе уравнение принимает вид $2y=21-y$; $y=7$. Подставляя в третье уравнение вместо y число 7, получим $(x+2)(z+9)=100$, но так как $x+z=14$, $z=14-x$, то

$$(x+2)(14-x+9)=100.$$

Решая это квадратное уравнение, получим $x_1=3$; $x_2=18$. Второе значение $x_2=18$ не подходит, так как сумма первых двух чисел $x+y$ уже превосходит сумму всех трех, что невозможно, поскольку все три числа положительны. Итак, искомые числа: 3, 7 и 11.

Упражнения

1. Написать несколько первых членов последовательности, если общий член выражается формулой $a_n=\frac{1}{n+1}$.

2. Та же задача при условии, что: 1) $a_n=\frac{1}{3n+1}$; 2) $a_n=\frac{1}{2^n-1}$; 3) $a_n=(-1)^n\frac{1}{n^2+1}$; 4) $a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}$.

3. Подобрать по возможности простую формулу для общего члена следующих последовательностей: 1) 1, 3, 5, 7, 9, ...; 2) 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{6}{11}$, ...; 3) a^2, a^4, a^6, ...

4. Какие из следующих последовательностей представляют арифметическую прогрессию: 1) 3, 6, 9, 12, ...; 2) 1, 8, 27, 64, ...; 3) 1, 3, 7, 15, 31, ...; 4) 5, 3, 1, —1, —3, ...?

5. Дана прогрессия

$$\div 3,\ 7,\ 11,\ 15,\ \ldots$$

Найти: 1) 7-й член; 2) k-й член.

6. В прогрессии

$$\div 5,\ 2,\ -1,\ -4,\ \ldots$$

найти: 1) a_{12}; 2) a_n.

7. Найти общий член прогрессии

$$\div 3b,\ 5b,\ 7b,\ \ldots\quad (b \neq 0).$$

8. Дана прогрессия

$$\div 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots$$

Если вычеркнуть в ней члены, стоящие на четных местах, то какую последовательность чисел образуют оставшиеся члены?

9. Между числами 4 и 40 вставить 8 средних арифметических.

10. Диаметры шкивов, насаженных на общий вал, образуют арифметическую прогрессию из пяти членов, крайние члены которой равны 120 мм и 216 мм; найти диаметры промежуточных шкивов.

11. Найти сумму 12 членов прогрессии

$$\div 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ \ldots$$

12. Сколько раз пробьют часы за сутки, если они отбивают и получасы?

13. Показать, что сумма первых n нечетных чисел есть точный квадрат.

14. Заполнить пустые места следующей таблицы:

	a_1	a_n	d	n	S_n
1	7	39		9	
2	8		—2		14
3	31		—7	10	
4	1	61	5		
5			12	40	9400
6	2		3		442
7		22	0,4	43	
8		25,7	1,3		266
9	—4,5	100			955
10		—15		11	0

15. Сумма 2-го и 5-го членов прогрессии равна 14, сумма 3-го и 7-го равна 8. Найти прогрессию.

16. Сумма 3-го и 6-го членов прогрессии равна 3, а сумма их квадратов равна 45. Найти прогрессию.

17. Купецкий некто человек, имяще 14 чарок сребряных, ихже каяждо превышает тягостию по чину прогрессии четырьмя лотами, а последняя чарка весит 59 лотов. И ведательно есть, колико все чарки веса имуть. (Из арифметики Магницкого (1703 г.).)

18. При свободном падении в пустоте тело проходит в первую секунду приблизительно 4,9 м, а в каждую следующую секунду на 9,8 м больше. Какой путь пройдет тело за 10 с? Какой путь пройден в последнюю секунду?

19. Какое натуральное число равно сумме всех ему предшествующих натуральных чисел?

20. Сумма трех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 16. Произведение первого на второе равно $12\frac{4}{9}$. Найти эти числа.

21. Шестой член арифметической прогрессии составляет 60% от третьего члена той же прогрессии, а произведение их равно 15. Сколько нужно взять членов этой прогрессии, чтобы сумма их равнялась $30\frac{1}{3}$?

22. Дана прогрессия

$$\div 3;\ 3{,}2;\ 3{,}4;\ 3{,}6;\ \ldots$$

Начиная с какого номера члены ее будут больше 1000?

23. Показать, что последовательность, общий член которой выражается формулой $a_n = 2\cdot 3^n$, есть геометрическая прогрессия. Написать первые четыре члена этой прогрессии.

24. Определить 10-й член прогрессии

$$\div\!\div 2,\ 4,\ 8,\ \ldots$$

25. Чему равен 7-й член прогрессии

$$\div\!\div 15,\ -5,\ \frac{5}{3},\ \ldots$$

26. Чему равен знаменатель геометрической прогрессии: 1) 2, $\sqrt{2}$, 1, ...; 2) a^n, a^{n-1}, a^{n-2}, ... $(a > 0)$?

27. Между числами 12 и 972 вставить три средних геометрических.

28. Между числами 5 и 20 вставить четыре средних геометрических.

29. Найти сумму десяти членов прогрессии, если

$$1)\ a_1 = 3;\ q = 2;\quad 2)\ a_1 = 8;\ q = \frac{1}{4}.$$

30. Найти знаменатель и сумму семи членов геометрической прогрессии, если $a_1 = 36$; $a_7 = \frac{4}{81}$.

31. Дано: $S_7 = 2186$; $q = 3$. Найти a_1 и a_7.

32. Найти число членов геометрической прогрессии, если

$$a_1 = 3;$$
$$q = 2;$$
$$S_n = 189.$$

33. Найти знаменатель прогрессии, если $a=1$; $n=3$; $S_3=157$.

34. Дана геометрическая прогрессия, в которой $a_1+a_2=9$; $a_1-q=2\frac{3}{4}$. Найти a_3.

35. Сумма трех чисел, составляющих возрастающую геометрическую прогрессию, равна 65. Если отнять от меньшего числа 1, от большего 19, то вновь полученные числа составляют арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

36. Найти четыре числа, зная, что первые три из них составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую. Известно, что $q=2$; $d=6$.

37. Найти четыре положительных числа, составляющих геометрическую прогрессию, если $a_1+a_2=15$; $a_3+a_4=60$.

38. Показать, что если три положительных числа a, b и c образуют геометрическую прогрессию, то

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3.$$

39. Тело движется по прямой равноускоренно. За первую секунду им пройден путь в 1 м, за вторую 1,2 м, за третью 1,4 м. Таким образом, путь, пройденный за каждую следующую секунду, на 0,2 м больше. Какой путь будет пройден телом по истечении двух минут с момента начала движения?

40. Из пунктов A и B одновременно движутся друг другу навстречу два тела. Первое из них проходит за первую минуту 50 м, а за каждую следующую минуту на два метра больше, чем за предыдущую. Второе тело проходит в первую минуту 40 м, а за каждую следующую минуту на 4 м больше, чем за предыдущую. Через сколько минут произойдет встреча этих двух тел, если расстояние $AB=510$ м? Дать графическое решение задачи.

41. Решите аналитически и графически следующую задачу:

Из пункта A выезжает велосипедист. Путь, пройденный им за первую секунду, равен 3,5 м, а за каждую следующую секунду движения пройденный путь увеличивается на 1 м по сравнению с тем, что пройдено за предыдущую. Тремя секундами позже из того же пункта A и в том же направлении выезжает второй велосипедист. В первую секунду он проходит 4 м, а в каждую следующую секунду на 2 м больше, чем за предыдущую. Через сколько секунд второй велосипедист догонит первого и на каком расстоянии от места старта это произойдет?

42. Три положительных числа: a, aq, aq^2, образующие геометрическую прогрессию, могут быть приняты за длины сторон треугольника. В каких границах может изменяться знаменатель прогрессии q? Рассмотреть два случая: 1) $q>1$ и 2) $0<q<1$.

ГЛАВА XIII

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И ЛОГАРИФМЫ

§ 156. Степень с иррациональным показателем. В гл. V понятие степени было обобщено и распространено на любой рациональный показатель степени. Так, например,

$$a^{3/2}=\sqrt{a^3};\quad a^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{a}},\ \text{где } a>0 \text{ и } a\neq 1.$$

Однако нами не был рассмотрен случай, когда показатель степени есть число иррациональное, что означает символ a^{α} (α — иррациональное число, $a>0$; $a\neq 1$).

Не рассматривая этот вопрос в общем виде, поясним смысл этого нового символа на примере выражения $2^{\sqrt{2}}$.

К иррациональному числу $\sqrt{2}$ можно приближаться двумя последовательностями рациональных чисел:

(I) 1; 1,4; 1,41; 1,414; ...

или

(II) 2; 1,5; 1,42; 1,415; ...

Первая последовательность — монотонно возрастающая; ее члены — приближенные значения квадратного корня из двух по недостатку, взятые со все возрастающей степенью точности.

Вторая последовательность — монотонно убывающая, ее членами являются приближенные значения квадратного корня из двух по избытку, причем точность приближений возрастает по мере возрастания номера члена последовательности.

Образуем две новые последовательности:

(I′) 2^1; $2^{1,4}$; $2^{1,41}$; $2^{1,414}$; ...,

(II″) 2^2; $2^{1,5}$; $2^{1,42}$; $2^{1,415}$; ...

Первая из новых последовательностей также монотонно возрастает, вторая — монотонно убывает.

Можно доказать, что обе последовательности стремятся к одному и тому же числу по мере неограниченного возрастания номера члена последовательности. Это число принимается (по определению) за значение $2^{\sqrt{2}}$.

Примечание. Над степенями с иррациональными показателями производятся действия по тем же законам, что и над степенями с рациональными показателями, например:

$$a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta},$$
$$a^{\alpha} : a^{\beta} = a^{\alpha-\beta} \text{ и т. д.}$$

(α и β — два иррациональных числа).

§ 157. Показательная функция. Во многих областях науки и техники при изучении самых различных явлений и процессов обнаруживается одна общая функциональная зависимость между двумя переменными величинами, участвующими в данном процессе. Приведем несколько примеров.

1) С изменением высоты h над уровнем моря атмосферное давление p изменяется по закону: $p = p_0 a^h$, где p_0 — давление на уровне моря, a — постоянная величина.

2) Рост древесины происходит по закону $A = A_0 a^{kt}$, где t — время, A_0 — начальное количество древесины, A — изменяющееся со временем количество древесины, выражаемое обычно в м³.

3) Размножение бактерий в какой-либо культуре (например, в пивных дрожжах) происходит по закону: $y = y_0 a^{kt}$, где t — время, y — изменяющееся количество бактерий, y_0 — начальное количество бактерий в момент времени $t = 0$, a и k — постоянные.

4) Распад радия протекает по закону: $x = x_0 a^{kt}$; здесь x_0 означает начальное количество радия при $t = 0$, a и k — постоянные числа.

В приведенных примерах мы имеем дело с процессами, носящими общее название процесса *органического роста*. Если отвлечься от физического смысла переменных, участвующих в процессах органического роста, и обозначить эти переменные буквами x и y, то можно сказать, что всякий органический рост изображается (описывается) функцией вида

$$y = Ca^{kx}.$$

Рассмотрим сначала простейший случай такой функции при $C = k = 1$; тогда $y = a^x$.

Определение. Функция вида $y=a^x$, где $a>0$ и $a\neq 1$, называется *показательной*.

Изучение этой функции начнем с построения ее графика.

§ 158. Графики показательных функций. Составим таблицы значений следующих показательных функций:

$$y=2^x \quad (a=2); \qquad y=\left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \left(a=\frac{1}{2}\right);$$

$$y=10^x \quad (a=10); \qquad y=\left(\frac{1}{10}\right)^x \quad \left(a=\frac{1}{10}\right).$$

	x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4					
I	$y=2^x$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16					
I	$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	16	[illegible]	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$					
	x	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	1
II	$y=10^x$	0,1	0,18	0,3	0,4	0,6	0,7	1	1,3	1,8	2,4	3,2	4,2	5,6	10
II	$y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$	10	5,6	3,2	2,4	1,8	1,3	1	0,7	0,6	0,4	0,3	0,24	0,18	0,1

Таблица II составлена следующим образом. Положительные значения аргумента x образуют арифметическую прогрессию с разностью $d=\frac{1}{8}$; значения показательной функции 10^x в таком случае составляют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=10^{\frac{1}{8}}$.

1) $10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}\approx 3,16;$

2) $10^{\frac{1}{4}}=\sqrt{10^{\frac{1}{2}}}\approx\sqrt{3,16}\approx 1,78;$

3) $10^{\frac{1}{8}}=\sqrt{10^{\frac{1}{4}}}\approx\sqrt{1,78}\approx 1,33 \quad (q=1,33).$

Остальные степени находим умножением:

4) $10^{\frac{3}{8}}=10^{\frac{1}{4}}\cdot 10^{\frac{1}{8}}\approx 1,78\cdot 1,33\approx 2,37$

и т. д.

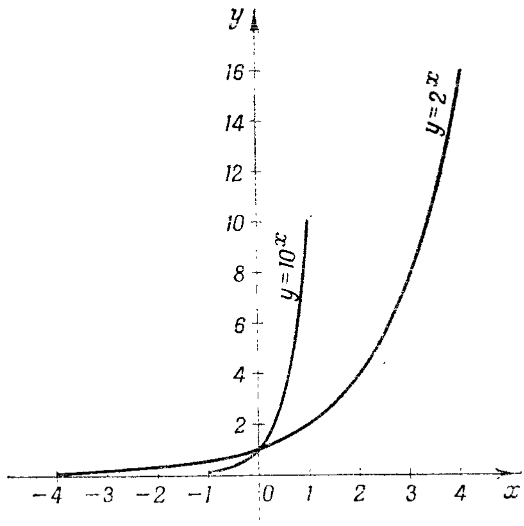

Рис. 110.

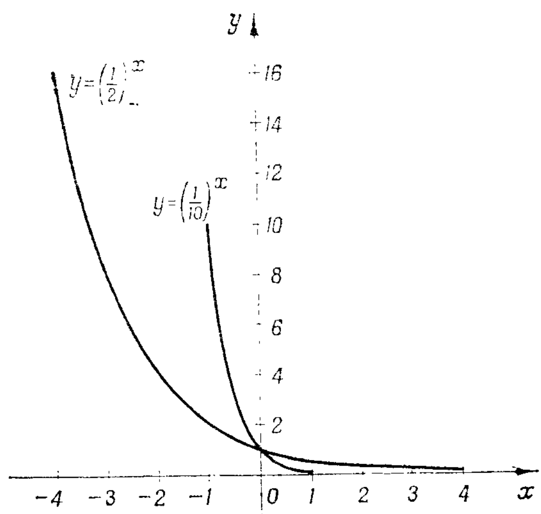

Рис. 111.

Для отрицательных значений показателя степени удобно пользоваться таблицей обратных величин $\left(\frac{1}{n}\right)$:

$$10^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{10^{\frac{1}{2}}}\approx\frac{1}{3,16}\approx 0,316;\quad 10^{-\frac{3}{8}}=\frac{1}{10^{\frac{3}{8}}}\approx\frac{1}{2,37}\approx 0,422$$

и т. д.

Округленные результаты с одним десятичным знаком занесены в таблицу.

На основании составленных таблиц построены графики этих четырех показательных функций в одном и том же масштабе на рис. 110 и 111.

§ 159. Свойства показательной функции. Построенные графики показательных функций иллюстрируют следующие свойства показательной функции, которые мы принимаем без доказательства:

1) Показательная функция положительна при любом значении аргумента (график расположен выше оси Ox).

2) При основании $a>1$ показательная функция возрастает с увеличением аргумента x, причем $a^x<1$ при $x<0$ и $a^x>1$ при $x>0$.

3) При положительном основании $a<1$ показательная функция a^x убывает с увеличением аргумента x, причем $a^x>1$ при $x<0$ и $a^x<1$ при $x>0$.

4) При любом положительном основании $a^x=1$, если $x=0$ (все кривые пересекают ось ординат в одной и той же точке (0; 1)).

5) При $a>1$ функция a^x возрастает тем быстрее, чем больше a (кривая $y=10^x$ быстрее уходит вверх, чем $y=2^x$).

6) При неограниченном возрастании аргумента x функция a^x $(a>1)$ может принимать какие угодно большие значения. Это свойство из чертежа непосредственно не вытекает, но нетрудно усмотреть, что при

$$x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

и т. д. функция

$$10^x=10,\ 100,\ 1000,\ 10\,000,\ 100\,000 \text{ и т. д.}$$

Это свойство показательной функции кратко выражают в такой условной записи: $y\to\infty$ при $x\to\infty$, где знак $\to\infty$ — символ неограниченного возрастания переменной; фраза «x стремится к бесконечности» означает неограниченное возрастание переменной x.

7) При отрицательных и больших по абсолютной величине значениях аргумента функция a^x $(a > 1)$ может принимать сколь угодно малые значения, например при $x = -8$

$$10^{-8} = 0{,}00000001.$$

Это свойство кратко выражают в такой условной записи: $a^x \to 0$ при $x \to -\infty$ $(a > 1)$.

8) Если $a < 1$, то $a^x \to 0$ при $x \to \infty$ и $a^x \to \infty$ при $x \to -\infty$.

§ 160. График показательной функции $y = Ca^{kx}$. Как было отмечено в § 157, процессы органического роста изображаются показательной функцией вида

$$y = Ca^{kx}.$$

Построим график такой функции при частных значениях параметров:

$$C = 3; \quad a = 2; \quad k = 0{,}4.$$

Тогда $y = 3 \cdot 2^{0{,}4x}$.

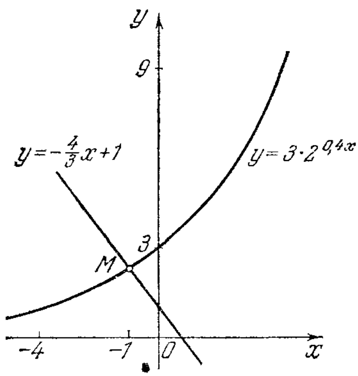

Рис. 112.

Составим таблицу значений, в которой значения x образуют арифметическую прогрессию; тогда значения функции y (вычисленные с точностью до 0,1) образуют геометрическую прогрессию:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$y=3\cdot2^{0,4x}$	1	1,3	1,7	2,3	3	4,0	5,2	6,9	9	...

Значения функции вычислены с помощью таблиц. График изображен на рис. 112. Сравнивая его с графиком функции $y = 2^x$ (рис. 110), можно сказать, что общий характер обеих кривых одинаков: обе функции — возрастающие на всей числовой оси и ни при каких значениях

x не принимают отрицательных значений. Но темп роста функции $y=3\cdot 2^{0,4x}$ отстает от темпа роста функции $y=2^x$, что вызвано множителем $k=0,4$ в показателе степени, меньшем единицы.

С помощью графика $y=3\cdot 2^{0,4x}$ можно решить уравнение, например, $3\cdot 2^{0,4x}+\frac{4}{3}x-1=0$. Для этого достаточно представить уравнение в виде $3\cdot 2^{0,4x}=-\frac{4}{3}x+1$ и построить прямую $y=-\frac{4}{3}x+1$, пересекающую график $y=3\cdot 2^{0,4x}$ в точке M; абсцисса точки M дает приближенное значение корня данного уравнения, которое равно -1 (рис. 112).

Примечание. Функция $y=Ca^{kx+b}$ приводится к виду $y=Aa^{kx}$, так как $Ca^{kx+b}=Ca^{kx}\cdot a^b=Aa^{kx}$, где $A=C\cdot a^b$.

§ 161. Понятие логарифма. При составлении таблицы значений функции $y=3\cdot 2^{0,4x}$ (§ 160) возникла одна трудность: как по данному значению x, например при $x=1$, вычислить соответствующее значение функции $y=3\cdot 2^{0,4\cdot 1}=3\cdot 2^{\frac{2}{5}}=3\sqrt[5]{2^2}$? Ведь не существует таблиц для извлечения корня 5-й степени из чисел.

Эту трудность можно преодолеть, если изучить изменение показателя степени в зависимости от величины самой степени, но это требует введения нового математического понятия.

Пусть дано равенство $a^c=b$, где $a>0$, $b>0$ и $a\neq 1$.

Определение. *Логарифмом данного числа b по основанию a* называется показатель степени c, в которую надо возвести данное основание a, чтобы получить число b. Запись $\log_a b=c$ читается так: логарифм числа b по основанию a равен c. Число, служащее основанием логарифма, пишется ниже строки.

Из равенств	следует, что
$2^5=32$,	$5=\log_2 32$,
$10^2=100$,	$2=\log_{10} 100$,
$3^4=81$,	$4=\log_3 81$,
$5^3=125$,	$3=\log_5 125$,
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$,	$-3=\log_{\frac{1}{2}} 8$.
$a^c=b$,	$c=\log_a b$.

Равенства в левом и правом столбцах равнозначны: первые влекут вторые и наоборот.

Из определения логарифма следует, что

$$a^{\log_a b} = b.$$

Например,

$$2^{\log_2 32} = 32; \quad 10^{\log_{10} 100} = 100.$$

Рассмотрим решение примеров вида

$$1)\ a^x = b; \quad 2)\ x^a = b; \quad 3)\ a^c = x,$$

где по данным двум числам требуется найти третье число.

Пример 1. Чему равен логарифм числа 27 при основании 9?

$$\log_9 27 = x; \quad 9^x = 27;$$

$$(3^2)^x = 3^3, \quad 3^{2x} = 3^3,$$

откуда

$$2x = 3; \quad x = \frac{3}{2}.$$

Пример 2. При каком основании логарифм числа 8 равен 6? Имеем:

$$\log_x 8 = 6;$$

$$x^6 = 8; \quad x = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}.$$

Пример 3. Найти число, логарифм которого при основании 64 равен $-{}^2/_3$.

Обозначим искомое число через x, тогда $\log_{64} x = -{}^2/_3$, откуда

$$64^{-\frac{2}{3}} = x, \quad \text{или} \quad x = \frac{1}{\sqrt[3]{64^2}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{64})^2} = \frac{1}{16}; \quad x = \frac{1}{16}.$$

§ 162. Логарифмическая функция и ее график.

Определение. Функция, обратная показательной функции, называется *логарифмической*.

Если $y = a^x$ $(a > 0$ и $a \neq 1)$, то

$$x = \log_a y,$$

или, переставляя обозначения аргумента и функции,

$$y = \log_a x.$$

График логарифмической функции можно получить по общему правилу из графика показательной функции, если перегнуть рисунок по биссектрисе первого и третьего координатных углов.

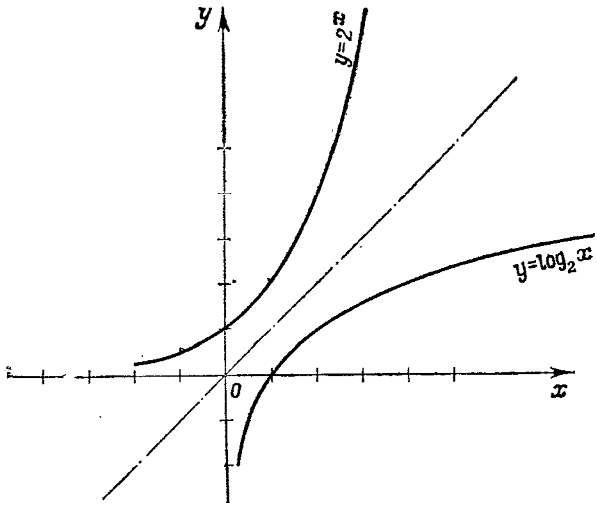

Рис. 113.

На рис. 113 представлены графики показательной функции $y=2^x$ и обратной ей функции $y=\log_2 x$.

§ 163. Свойства логарифмической функции. Каждому свойству показательной функции соответствует определенное свойство логарифмической функции, что видно из следующих сопоставлений:

Показательная функция	Логарифмическая функция
1. Показательная функция положительна при любом значении аргумента x.	1. Логарифмическая функция имеет действительные значения лишь при положительных значениях аргумента (график расположен справа от оси ординат).
2. При $x=0$ показательная функция равна 1.	2. Логарифм 1 по любому основанию равен 0.

3. При отрицательных значениях аргумента x функция $a^x < 1$ $(a > 1)$, причем $a^x \to 0$ при $x \to -\infty$.	3. Логарифмы чисел, меньших 1, по основанию $a > 1$ отрицательны, причем $\log_a x \to -\infty$ при $x \to 0$.
4. Показательная функция возрастает и $a^x \to \infty$ при $x \to \infty$ $(a > 1)$.	4. Логарифмическая функция возрастает, причем $\log_a x \to \infty$ при $x \to \infty$ $(a > 1)$.

§ 164. Практическое значение логарифмов.

Составим таблицу целых степеней числа 2:

Показатель n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Степень 2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	4 096	8 192

Показатель n	14	15	16	17	18	19	20	21
Степень 2^n	16 384	32 768	65 536	131 072	262 144	524 288	1 048 576	2 097 152

Заметим, что в первой и третьей строках таблицы даны логарифмы по основанию 2 чисел второй и четвертой строк. Так, например, $11 = \log_2 2048$.

С помощью этой таблицы можно быстро производить умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня над числами, помещенными в строке с надписью «2^n», например:

1) Умножение 2048 на 256 можно заменить сложением соответствующих показателей $(11 + 8 = 19)$ и отысканием соответствующего этому показателю числа, получим:

$$2048:256 = 524\,288.$$

2) Деление 1 048 576 на 32 768 заменяется вычитанием показателей $(20 - 15 = 5)$ и отысканием соответствующего этой разности числа (32), т. е.

$$1\,048\,576:32\,768 = 32.$$

3) Возведение в степень 128^3 может быть выполнено умножением соответствующего основанию показателя

(7) на 3:

$$7 \cdot 3 = 21;$$

показателю 21 соответствует число 2 097 152:

$$128^3 = 2\,097\,152.$$

4) Извлечение корня, например $\sqrt{1\,048\,576}$, сводится к делению показателя степени (20) на показатель корня (2):

$$\sqrt{1\,048\,576} = 1\,024.$$

Во всех четырех случаях громоздкие действия над самими числами мы заменили более простыми действиями над их логарифмами.

§ 165. Общие свойства логарифмов.

1. *Логарифм произведения двух или нескольких положительных чисел равен сумме логарифмов сомножителей.*

Пусть N и N_1—два положительных числа, тогда по определению логарифма имеем:

$$N = a^{\log_a N}, \quad N_1 = a^{\log_a N_1}. \tag{1}$$

Перемножая почленно эти равенства, получим:

$$NN_1 = a^{\log_a N + \log_a N_1},$$

откуда

$$\log_a (NN_1) = \log_a N + \log_a N_1.$$

2. *Логарифм частного или дроби равен логарифму числителя минус логарифм знаменателя.*

Разделим почленно первое из равенств (1) на второе, помня, что при делении степеней с одинаковыми основаниями показатели степени вычитаются: $\frac{N}{N_1} = a^{\log_a N - \log_a N_1}$, откуда

$$\log_a \frac{N}{N_1} = \log_a N - \log_a N_1.$$

3. *Логарифм степени равен показателю степени, умноженному на логарифм основания степени.*

В самом деле, если обе части тождества $N = a^{\log_a N}$ возведем в n-ю степень, то получим $N^n = a^{n \log_a N}$, откуда

$$\log_a (N^n) = n \cdot \log_a N.$$

4. *Логарифм корня из положительного числа равен логарифму подкоренного числа, разделенному на показатель корня.*

Действительно, если извлечь корень n-й степени из обеих частей равенства-тождества $N=a^{\log_a N}$, то

$$\sqrt[n]{N}=\sqrt[n]{a^{\log_a N}}=a^{\frac{1}{n}\log_a N}.$$

Следовательно,

$$\log_a(\sqrt[n]{N})=\frac{1}{n}\log_a N.$$

Полученные нами свойства называются общими, так как эти свойства не зависят от основания a (лишь бы $a>0$ и $a\neq 1$).

§ 166. Примеры логарифмирования произведения и частного. На основании четырех свойств, установленных в предыдущем параграфе, можно выразить логарифм любого одночленного выражения через логарифмы составляющих его чисел.

Пример 1. Найти $\log x$, если $x=\frac{ab^3}{c\sqrt[3]{d^2}}$,

$$\log\frac{ab^3}{c\sqrt[3]{d^2}}=\log(ab^3)-\log(c\sqrt[3]{d^2})=$$
$$=\log a+\log b^3-(\log c+\log\sqrt[3]{d^2})=$$
$$=\log a+3\log b-\left(\log c+\frac{2}{3}\log d\right)=$$
$$=\log a+3\log b-\log c-\frac{2}{3}\log d\text{ *)}.$$

Пример 2.

$$\log\frac{\sqrt[5]{a(b-c)^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=\log\sqrt[5]{a(b-c)^2}-\log\sqrt{a^2+b^2}=$$
$$=\frac{1}{5}\log[a(b-c)^2]-\frac{1}{2}\log(a^2+b^2)=$$
$$=\frac{1}{5}[\log a+2\log(b-c)]-\frac{1}{2}\log(a^2+b^2).$$

---

*) Здесь основание логарифма—произвольное положительное число, не равное единице; для краткости мы его не пишем.

Отметим, что ни сумма, ни разность не логарифмируются.

Пример 3. Дано: $\log_{10} 2 \approx 0{,}3010$, $\log_{10} 3 \approx 0{,}4771$. Найти $\log_{10} \sqrt[5]{12}$.

$$\log_{10} \sqrt[5]{12} = \frac{1}{5} \log_{10} 12 = \frac{1}{5} \log_{10} (2^2 \cdot 3) =$$

$$= \frac{1}{5} (2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3) \approx \frac{1}{5} (2 \cdot 0{,}3010 + 0{,}4771) \approx 0{,}216.$$

Пример 4.

$$y = \frac{(a-b)^3 \sqrt[3]{c}}{\sqrt[5]{(a+b)^2 d^3}},$$

$$\log y = 3 \log (a-b) + \frac{1}{3} \log c - \frac{1}{5} [2 \log (a+b) + 3 \log d].$$

§ 167. Потенцирование. Если по логарифму некоторого выражения отыскивается само выражение, то говорят, что надо произвести потенцирование, т. е. действие, обратное логарифмированию.

Пример 1. Дано: $\log x = \log a + 2 \log b - \log c$. Найти x.

$$x = \frac{a \cdot b^2}{c}.$$

Пример 2.

$$\log x = \frac{1}{3} \left[\log a - \frac{1}{2} \log b + 2 \log (a+b)\right] + \log c;$$

$$x = c \sqrt[3]{\frac{a (a+b)^2}{\sqrt{b}}}.$$

При потенцировании руководствуемся следующими соображениями: сумма логарифмов есть логарифм произведения, например:

$$\log m + \log n = \log (m \cdot n);$$

разность логарифмов — логарифм частного; множитель перед логарифмом указывает на то, что был взят логарифм степени, например:

$$3 \log a = \log a^3,$$

$$\frac{1}{3} (\log a + \log b) = \log \sqrt[3]{ab}.$$

Правильность произведенного потенцирования всегда можно проверить логарифмированием.

§ 168. Система десятичных логарифмов. Логарифмы чисел, вычисленные по одному и тому же основанию, образуют *систему логарифмов*. В частности, если за основание принять число 10, то система логарифмов называется *десятичной*. Десятичные логарифмы обозначаются символом «lg» без указания основания 10, т. е. вместо $\log_{10} A$ пишут просто $\lg A$.

Десятичные логарифмы обладают рядом свойств, делающих их чрезвычайно удобными при вычислениях. Отметим эти свойства.

Свойство I. *Десятичный логарифм целого числа, изображенного единицей с последующими нулями, равен стольким единицам, сколько нулей в изображении числа.* Это свойство очевидно, так как

$$10^1 = 10, \quad \text{т. е.} \quad \lg 10 = 1;$$
$$10^2 = 100, \quad \text{т. е.} \quad \lg 100 = 2;$$
$$10^3 = 1000, \quad \text{т. е.} \quad \lg 1000 = 3;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$10^n = \underbrace{100\dots0}_{\text{всего } n \text{ нулей}}, \quad \text{т. е.} \quad \lg \underbrace{100\dots0}_{\text{всего } n \text{ нулей}} = n.$$

Свойство II. *Логарифм правильной десятичной дроби, изображенной единицей с предшествующими нулями, равен стольким отрицательным единицам, сколько нулей предшествует единице, считая и нуль целых.* Действительно,

$$10^{-1} = 0,1, \quad \text{откуда} \quad \lg 0,1 = -1;$$
$$10^{-2} = 0,01, \quad \text{откуда} \quad \lg 0,01 = -2;$$
$$10^{-3} = 0,001, \quad \text{откуда} \quad \lg 0,001 = -3;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$10^{-n} = \underbrace{0,00\dots01}_{\text{всего } n \text{ нулей}}, \quad \text{откуда} \quad \lg \underbrace{0,00\dots01}_{\text{всего } n \text{ нулей}} = -n.$$

Десятичные логарифмы рациональных чисел, не являющихся числами вида 10^n и 10^{-n} (n — целое число), не могут быть выражены точно ни целым, ни дробным числом; они представляют собой иррациональные числа.

Покажем, например, что $\lg 2$ не может быть равен дробному числу $\frac{p}{q}$, где p и q — целые положительные числа.

Если допустим, что $\lg 2 = \frac{p}{q}$, то должно иметь место равенство $10^{\frac{p}{q}} = 2$, или $10^p = 2^q$. Это равенство невозможно, так так левая часть его 10^p есть число, изображенное единицей с p нулями, и состоит из множителей 2 и 5, повторенных p раз $[10^p = (2 \cdot 5)^p = 2^p \cdot 5^p]$; правая часть 2^q такого разложения дать не может; следовательно, допущение, что $\lg 2$ является дробным числом, неверно.

Однако можно вычислить приближенно $\lg 2$, а также логарифм всякого другого числа с любой степенью точности, т. е. с любым числом десятичных знаков. Пример такого вычисления будет дан в следующем параграфе. Здесь же мы дадим способ производить грубую оценку логарифма, т. е. способ находить, между какими целыми числами он содержится.

Пусть требуется найти $\lg 275{,}6$; напишем очевидное неравенство

$$100 < 275{,}6 < 1000;$$

тогда

$$\lg 100 < \lg 275{,}6 < \lg 1000,$$

или $2 < \lg 275{,}6 < 3$, откуда

$$\lg 275{,}6 = 2 + \text{положительная правильная дробь.}$$

Определение. Целая часть логарифма называется *характеристикой*, дробная часть — *мантиссой*. В четырехзначных таблицах Брадиса находим: $\lg 275{,}6 = 2{,}4402$; здесь характеристика равна 2, мантисса равна 0,4402.

Свойство III. *Характеристика логарифма числа, большего или равного* 1, *содержит столько единиц, сколько цифр в целой части числа, без одной.*

Сначала убедимся в правильности высказанного положения на отдельных примерах, а потом рассмотрим общий случай.

а) Число 32,185 имеет в целой части две цифры и заключается между 10^1 и 10^2, т. е. $10^1 < 32{,}185 < 10^2$, но большему числу соответствует больший логарифм:

$$\lg 10 < \lg 32{,}185 < \lg 10^2,$$

или $1 < \lg 32{,}185 < 2$, откуда

$$\lg 32{,}185 = 1 + \text{правильная дробь.}$$

Характеристика равна 1, т. е. на единицу меньше числа цифр в целой части.

б) $\lg 5147{,}3 = 3 +$ правильная дробь, ибо

$$1000 < 5147{,}3 < 10\,000,$$

или $10^3 < 5147{,}3 < 10^4$, откуда

$$3 < \lg 5147{,}3 < 4.$$

в) Пусть число A имеет в целой части n цифр, тогда имеем неравенство

$$10^{n-1} \leqslant A < 10^n,$$

откуда $n-1 \leqslant \lg A < n$, следовательно,

$$\lg A = \underbrace{n-1}_{\substack{\text{харак-}\\\text{тери-}\\\text{стика}}} + \underbrace{\text{правильная дробь}}_{\text{мантисса}},$$

Свойство IV. *Характеристика логарифма правильной десятичной дроби содержит столько отрицательных единиц, сколько нулей предшествует первой значащей цифре, считая в том числе и нуль целых; мантисса при этом положительна.*

Пример 1. Дробь 0,0475 заключается между 0,01 и 0,1, т. е.

$$0{,}01 < 0{,}0475 < 0{,}1;$$
$$\lg 0{,}01 < \lg 0{,}0475 < \lg 0{,}1;$$
$$-2 < \lg 0{,}0475 < -1.$$

Следовательно, $\lg 0{,}0475 = -2 +$ правильная положительная дробь. Характеристика в данном случае равна -2. Первой значащей цифре (4) предшествуют два нуля.

Пример. 2. $\lg 0{,}00054 = -4 +$ положительная правильная дробь, так как

$$0{,}0001 < 0{,}00054 < 0{,}001,$$

откуда

$$\lg 0{,}0001 < \lg 0{,}00054 < \lg 0{,}001;$$
$$-4 < \lg 0{,}00054 < -3.$$

Пусть имеем правильную десятичную дробь α, первой значащей цифре которой предшествуют n нулей (считая и нуль целых). Такую дробь в общем виде можно изобразить так:

$$\alpha = \overbrace{0{,}000 \ldots 0}^{n \text{ нулей}} b_1 b_2 \ \ldots,$$

где b_1 есть первая значащая цифра.

Имеем неравенство

$$\overbrace{0{,}000 \ldots 01}^{n \text{ нулей}} \leqslant \alpha < \overbrace{0{,}000 \ldots 01}^{(n-1) \text{ нулей}}.$$

Поэтому

$$\lg \overbrace{0{,}000 \ldots 01}^{n \text{ нулей}} \leqslant \lg \alpha < \lg \overbrace{0{,}000 \ldots 01}^{(n-1) \text{ нулей}};$$

$$-n \leqslant \lg \alpha < -(n-1).$$

Логарифм данной дроби оказался заключенным между двумя целыми отрицательными числами: $-n$ и $-(n-1)$, разность между которыми равна 1, следовательно, он (логарифм) равен меньшему числу + положительная правильная дробь:

$$\lg \alpha = -n + \text{правильная положительная дробь}.$$

Итак, характеристика $\lg \alpha$ равна $-n$.

Условились алгебраическую сумму целого отрицательного числа и положительной правильной дроби сокращенно записывать так:

$$-3 + 0{,}4317 = \bar{3}{,}4317;$$
$$-5 + 0{,}8205 = \bar{5}{,}8205.$$

Знак минус сверху указывает на то, что отрицательна лишь целая часть, мантисса же положительна (читается: пять под минусом). В такой форме принято записывать логарифмы чисел, меньших 1; эта форма логарифма называется *искусственной*.

Всякий отрицательный логарифм можно привести к искусственной форме, например:

а) $-2{,}1543 = -2 - 0{,}1543 = (-2-1) + (1 - 0{,}1543) =$
$= -3 + 0{,}8457 = \bar{3}{,}8457;$

б) $-1{,}0647 = (-1-1) + (1 - 0{,}0647) = -2 + 0{,}9353 =$
$= \bar{2}{,}9353;$

в) $-4{,}2564 = \bar{5}{,}7436.$

Правило. Чтобы преобразовать отрицательный логарифм в искусственную форму, поступают так: к характеристике прибавляют отрицательную единицу и ставят над результатом знак минус сверху, все цифры мантиссы вычитают из 9, последнюю цифру — из 10.

Свойство V. *При умножении или делении числа на* 10, 100, 1000 *и т. д. мантисса его логарифма остается без изменения, а характеристика увеличивается или уменьшается соответственно на одну, две, три и т. д. единиц.*

Заметим, что числа 10, 100, 1000, ... суть целые положительные степени 10, т. е. числа вида 10^n.

а) Имеем: $\lg(A\cdot 10^n)=\lg A+\lg 10^n=\lg A+n$.

В результате умножения числа A на 10^n логарифм увеличился на n единиц, следовательно, дробная часть — мантисса — осталась без изменения.

б) $\lg\left(\frac{A}{10^n}\right)=\lg A-\lg 10^n=\lg A-n$;

логарифм уменьшился на n единиц, следовательно, мантисса осталась прежней. Например:

$$\begin{aligned}\lg 38{,}1&=1{,}5809;\\ \lg 381&=2{,}5809;\\ \lg 3810&=3{,}5809;\\ \lg 38\,100&=4{,}5809;\\ \lg 3{,}81&=0{,}5809;\\ \lg 0{,}381&=\bar{1}{,}5809;\\ \lg 0{,}000381&=\bar{4}{,}5809.\end{aligned}$$

Следствия. 1) *Характеристика логарифма зависит только от положения запятой в данном числе, но не зависит от цифр, изображающих это число.*

Логарифмы таких чисел, как 278; 598,5; 110,7; 705,48; 142,845, имеют одну и ту же характеристику, равную 2.

2) *Мантисса не зависит от положения запятой, а зависит только от значащих цифр и их взаимного расположения.* Мантиссы логарифмов таких чисел, как 23,4; 2,34; 0,234; 2340 и т. п., будут одни и те же.

§ 169. Вычисление логарифма. В § 168 было доказано, что $\lg 2$ есть число иррациональное. Покажем способ, позволяющий вычислить приближенное значение $\lg 2$ с заданной степенью точности, например с точностью до 0,001.

Идея этого способа заключается в следующем: находят две целые положительные степени числа 10, показатели которых разнятся на 1; между ними должна заключаться степень числа 2 с достаточно большим показателем. Другими словами, надо решить неравенство вида

$$10^m < 2^p < 10^{m+1}, \qquad (1)$$

где m и p — искомые целые положительные числа.

Если $p \geqslant 1000$, то поставленная нами точность будет достигнута. В самом деле, логарифмируя неравенство (1), получим:

$$m < p \lg 2 < m + 1, \text{ или } \frac{m}{p} < \lg 2 < \frac{m+1}{p}.$$

Две дроби $\frac{m}{p}$ и $\frac{m+1}{p}$, между которыми заключается $\lg 2$, разнятся между собой на величину $\frac{1}{p}$. При $p \geqslant 1000$ поставленная точность будет достигнута.

Переходим к вычислениям, для чего пользуемся таблицей квадратов как вспомогательным средством. Имеем:

$$\begin{aligned}
2^5 &= 32;\\
2^{10} &= 32^2 = 1024 = 1{,}024 \cdot 10^3;\\
2^{20} &= (1{,}024 \cdot 10^3)^2 \approx 1{,}04 \cdot 10^6;\\
2^{40} &\approx (1{,}04 \cdot 10^6)^2 \approx 1{,}08 \cdot 10^{12};\\
2^{80} &\approx (1{,}08 \cdot 10^{12})^2 \approx 1{,}16 \cdot 10^{24};\\
2^{160} &\approx (1{,}16 \cdot 10^{24})^2 \approx 1{,}34 \cdot 10^{48};\\
2^{320} &\approx (1{,}34 \cdot 10^{48})^2 \approx 1{,}79 \cdot 10^{96};\\
2^{640} &\approx (1{,}79 \cdot 10^{96})^2 \approx 3{,}20 \cdot 10^{192};\\
2^{1280} &\approx (3{,}20 \cdot 10^{192})^2 \approx 1{,}02 \cdot 10^{385},
\end{aligned}$$

Так как $1{,}02 \cdot 10^{385} > 10^{385}$, но $1{,}02 \cdot 10^{385} < 10^{386}$, то имеем неравенство

$$10^{385} < 2^{1280} < 10^{386}.$$

Логарифмируя двойное неравенство, получим:

$$385 < 1280 \lg 2 < 386;$$

$$\frac{385}{1280} < \lg 2 < \frac{386}{1280};$$

$$0{,}3001 < \lg 2 < 0{,}3017,$$

или

$$0{,}300 < \lg 2 < 0{,}302,$$

Взяв полусумму верхней и нижней границ, имеем:

$$\lg 2 \approx 0,301.$$

Более точные вычисления дают:

$$\lg 2 = 0,3010299956\ldots$$

Первые три десятичных знака были вычислены нами совершенно точно. Существуют другие, более удобные способы вычисления логарифмов, но они требуют знания высшей математики.

§ 170. Действия над логарифмами. Прежде чем приступить к вычислениям с помощью логарифмов, надо научиться производить четыре арифметических действия над логарифмами, ибо к этому в основном сводится техника логарифмирования. Рассмотрим каждое действие в отдельности.

1. Сложение.

Пример 1.

$$\begin{array}{r} 2,1742 \\ +\bar{1},5736 \\ \hline 1,7478 \end{array}$$

Пример 2.

$$\begin{array}{r} \bar{3},4832 \\ +\bar{1},6758 \\ \hline \bar{3},1590 \end{array}$$

Сложение производится по правилам сложения десятичных дробей с той разницей, что характеристики складываются алгебраически, и к результату прибавляются целые единицы, полученные от сложения десятых долей мантисс.

2. Вычитание. Рассмотрим несколько случаев.

Пример 1.

$$\begin{array}{r} 2,4845 \\ -3,1796 \\ \hline \bar{1},3049 \end{array}$$

Из мантиссы уменьшаемого (0,4845) вычитаем мантиссу вычитаемого (0,1796), получаем в результате 0,3049, затем из характеристики уменьшаемого (2) вычитаем характеристику вычитаемого (3), получим -1; оба результата вычитания объединяем в запись $\bar{1},3049$.

Пример 2.

$$\begin{array}{r} 1,3516 \\ -\bar{2},6432 \\ \hline 2,7084 \end{array}$$

При вычитании мантисс пришлось занять единицу из характеристики уменьшаемого, т. е. из 1,3561 вычесть 0,6432, что дает 0,7084; вычитая характеристики, получим $0-(-2)=2$.

Пример 3.

$$\begin{array}{r} \bar{3},2534 \\ -\ \bar{5},6718 \\ \hline 1,5816 \end{array}$$

Характеристику уменьшаемого (-3) представляем мысленно как сумму $(-4+1)$, положительную единицу присоединяем к мантиссе и из 1,2534 вычитаем мантиссу вычитаемого 0,6718, что дает 0,5816. Затем вычитаем характеристики: $-4-(-5)=1$; окончательный результат 1,5816.

3. Умножение. При умножении логарифма с отрицательной характеристикой на натуральное число в отдельности умножается мантисса и характеристика:

$$\bar{2},1853\cdot 4=(-2+0,1853)\cdot 4=-8+0,7412=\bar{8},7412.$$

Обычно такое умножение производится без предварительного представления логарифма в виде алгебраической суммы, например:

$$\bar{1},8916\cdot 5=\bar{1},4580.$$

После умножения десятых долей мантиссы на 5 получились 4 целые положительные единицы, которые легко прибавить в уме к 5 отрицательным единицам, полученным от умножения -1 на 5: $-5+4=-1$; окончательный результат $\bar{1},4580$.

Если логарифм с отрицательной характеристикой, но с положительной мантиссой умножается на положительную десятичную дробь, то удобно перевести логарифм из искусственной формы в естественную, произвести умножение двух десятичных дробей и результат перевести в искусственную форму.

Пример 1.

$$\bar{1},1526\cdot 0,23=(-1+0,1526)\cdot 0,23=-0,8474\cdot 0,23=$$
$$=-0,1949=\bar{1},8051.$$

Пример 2.

$$\bar{3},6418\cdot(-0,47)=-2,3582\cdot(-0,47)=1,1084.$$

4. Деление. Если нужно разделить логарифм с отрицательной характеристикой на натуральное число, то

здесь надо различать два случая: а) когда характеристика делится нацело, б) когда характеристика не делится нацело.

Пример 1. $\bar{2},1856:2=\bar{1},0928.$

Здесь сразу отдельно были разделены на 2 и характеристика и мантисса.

Пример 2.

$$\bar{2},4365:5=(-2+0,4365):5=(-5+3,4365):5= \\ =-1+0,6873=\bar{1},6873.$$

К характеристике прибавляем столько отрицательных единиц (-3), чтобы получить ближайшее целое число, делящееся нацело на делитель; к мантиссе одновременно прибавляем столько же положительных единиц и делим в отдельности полученные целую и дробную части.

Пример 3. $\bar{5},4724:4=\bar{2},8681.$

К характеристике было прибавлено -3, к мантиссе $+3$, деление легко произвести в уме.

Пример 4.

$$\bar{3},1832:0,658=-2,8168:0,658=-4,2809=\bar{5},7191.$$

Пример 5.

$$\bar{1},6405:(-1,3)=-0,3595:(-1,3)=0,3595:1,3=0,2765.$$

§ 171. Дополнительный логарифм. Два числа N и $\frac{1}{N}$, как известно, называются *взаимно обратными*; произведение их равно 1.

Определение. *Дополнительным логарифмом числа N* называется логарифм числа $\frac{1}{N}$:

$$\text{доп. } \lg N=\lg\frac{1}{N}.$$

Так как

$$\lg\frac{1}{N}=-\lg N,$$

то

$$\text{доп. } \lg N=-\lg N.$$

Дополнительный логарифм числа N есть логарифм этого же числа, взятый с противоположным знаком;

например:

а) доп. $\lg 17{,}18 = -\lg 17{,}18 = -1{,}2350 = \bar{2}{,}7650$;

б) доп. $\lg 0{,}0085 = -\lg 0{,}0085 = -\bar{3}{,}9294 =$

$= -(-3+1-1+0{,}9294) = -(-2-0{,}0706) = 2{,}0706$.

Допустим, что $\lg N = c + m$, где c — характеристика, m — мантисса, тогда

$$\text{доп. } \lg N = -\lg N = -c - m = -c - 1 - m + 1 =$$
$$= -(c+1) + (1-m).$$

Чтобы по логарифму числа N найти его дополнительный логарифм, надо к характеристике прибавить единицу и результат взять с противоположным знаком, мантиссу же вычесть из 1.

Пример.

1) $-\lg 0{,}0672 = $ доп. $\lg 0{,}0672 = -\bar{2}{,}8274 = 1{,}1726$;

2) $-\lg 13{,}8 = -1{,}1399 = \bar{2}{,}8601$;

3) $-\frac{2}{3}\lg 0{,}825 = -\frac{2}{3}\cdot\bar{1}{,}9165 = -\frac{\bar{1}{,}8330}{3} =$

$= -\bar{1}{,}9443 = 0{,}0557$.

§ 172. Таблицы логарифмов. Таблицы Брадиса дают приближенные значения мантисс логарифмов всех целых чисел от 1 до 9999 с четырьмя точными десятичными знаками; характеристика логарифма проставляется на основании указанных свойств десятичных логарифмов. Так как мантисса логарифма не зависит от положения запятой в изображении числа, а зависит только от последовательности значащих цифр в данном числе, то этими же таблицами можно пользоваться для отыскания мантисс дробных чисел. Ниже дается отрывок из таблицы.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5

Предположим, что надо найти $\lg 65.4$. Первые две цифры числа (65) берем из первого слева столбца, помеченного сверху надписью «N», и продвигаемся от числа 65 по горизонтальной строке до пересечения с вертикальным столбцом, помеченным сверху (или снизу) третьей значащей цифрой числа, т. е. цифрой 4. В пересечении получим мантиссу 8156, что означает десятичные доли, т. е. 0,8156, следовательно, $\lg 65,4 = 1,8156$. Мантиссы логарифмов двузначных чисел или трехзначных чисел, оканчивающихся нулями, берутся из столбца, помеченного сверху цифрой нуль; например, мантисса логарифма числа 68 или числа 680 равна 0,8325.

Чтобы найти логарифм четырехзначного числа, например $\lg 6754$, проставляем прежде всего характеристику, т. е. пишем: $\lg 6754 = 3, \ldots$; неизвестные цифры мантиссы находим следующим образом: находим сначала, как было объяснено выше, мантиссу логарифма трехзначного числа 675, т. е. числа, изображенного первыми тремя цифрами данного числа; получаем 0,8293; от этой мантиссы продвигаемся вправо по горизонтальной строке, пересекая двойную вертикальную черту, пока не окажемся на пересечении с тем из напечатанных в правой части таблицы столбцов, который помечен сверху цифрой 4; в пересечении находим число 3 (3 десятитысячных); это — поправка на четвертую значащую цифру 4, ее легко прибавить в уме к уже найденной мантиссе 0,8293; получим окончательно: $\lg 6754 = 3,8296$.

§ 173. Таблицы антилогарифмов. Число, соответствующее данному логарифму, называется *антилогарифмом*. Для нахождения числа по данному его логарифму пользуются таблицами антилогарифмов. Устройство и способ употребления их ничем не отличаются от только что описанной таблицы логарифмов. Если $\lg x = \bar{1},5245$, то x (антилогарифм) находим следующим образом: не обращая пока внимания на характеристику, берем первые две цифры мантиссы, т. е. 52, из первого слева столбца, помеченного буквой m (мантисса), и продвигаемся по этой горизонтали до пересечения со столбцом, помеченным сверху третьей цифрой мантиссы 4; на пересечении их находим число 3342; на четвертую цифру мантиссы — 5 — находим поправку 4, помещенную на пересечении той же горизонтали с тем из крайних справа столбцов, который помечен сверху цифрой 5; поправку прибавляем к найденному числу 3342, получим $x=0,3346$. Первой значащей цифре предшествует один нуль, так как характеристика равна $\bar{1}$.

§ 174. Примеры на вычисления с применением логарифмов.

Пример 1. $x=\sqrt[3]{\frac{783\sqrt{41,3}}{0,815^2\cdot 52,6}}$,

$$\lg x=\frac{1}{3}\left[\lg 783+\frac{1}{2}\lg 41,3-(2\lg 0,815+\lg 52,6)\right],$$

или

$$\lg x=\frac{1}{3}\left(\lg 783+\frac{1}{2}\lg 41,3+2\,\text{доп.}\lg 0,815+\text{доп.}\lg 52,6\right).$$

Предварительные вычисления

$\frac{1}{2}\lg 41,3=\frac{1,6160}{2}=0,8080$;

доп. $\lg 0,815=-(\bar{1},9112)=$
$=0,0888$;

доп. $\lg 52,6=-1,7210=$
$=\bar{2},2790$;

Окончательные вычисления

$$\begin{array}{r}\lg 783=2,8938\\ \frac{1}{2}\lg 41,3=0,8080\\ 2\,\text{доп.}\lg 0,815=0,1776\\ \text{доп.}\lg 52,6=\bar{2},2790\\ \hline 2,1584\end{array}$$

$\lg x=\frac{2,1584}{3}=0,7195$;

$x=5,242$;

$x\approx 5,24$.

Пример 2.

$$y=\sqrt[5]{0,178\cdot\sqrt[3]{0,4963}+4,727\sqrt{0,00283}}.$$

Вычислим каждое подкоренное слагаемое в отдельности:

1) $N=0,178\sqrt[3]{0,4963}$; $\lg N=\lg 0,178+\frac{1}{3}\lg 0,4963$;

$$\begin{array}{r}\lg 0,178=\bar{1},2504\\ \frac{1}{3}\lg 0,4963=\frac{\bar{1},6958}{3}=\bar{1},8986\\ \hline \lg N=\bar{1},1490\\ N=0,1409;\end{array}$$

2) $M=4,727\cdot\sqrt{0,00283}$; $\lg M=\lg 4,727+\frac{1}{2}\lg 0,00283$;

$$\frac{1}{2}\lg 0,00283=\frac{\bar{3},4518}{2}=\bar{2},7259$$
$$\lg 4,727=0,6745$$
$$\lg M=\bar{1},4004$$
$$M=0,2514;$$

3) $\begin{array}{r} +\,0,1409 \\ 0,2514 \\ \hline 0,3923 \end{array}$;

4) $y=\sqrt[5]{0,3923}$; $\lg y=\frac{\lg 0,3923}{5}=\frac{\bar{1},5936}{5}=\bar{1},9187$;

$y=0,8292$; $y\approx 0,829$.

Пример 3. $Z=\frac{(6,429)^{-0,32}\cdot(0,819)^{1/3}}{(4,27)^{-3/5}\cdot(0,00318)^{0,48}}$.

Представим данное выражение в следующей форме:

$$Z=\frac{(4,27)^{3/5}\cdot(0,819)^{1/3}}{(6,429)^{0,32}\cdot(0,00318)^{0,48}}.$$

Логарифмируем:

$$\lg Z={}^{3}/_{5}\lg 4,27+{}^{1}/_{3}\lg 0,819+0,32\,\text{доп.}\lg 6,429+$$
$$+0,48\,\text{доп.}\ \lg 0,00318.$$

Вспомогательные вычисления

1) $0,32$ доп. $\lg 6,429=$
$=-0,32\cdot 0,8081=$
$=-0,2586=\bar{1},7414$,

2) $0,48$ доп. $\lg 0,00318=$
$=-0,48\cdot(\bar{3},5024)=$
$=-0,48\cdot(-2,4976)=$
$=1,1988$;

3) $\frac{3}{5}\lg 4,27=\frac{3\cdot 0,6304}{5}=$
$=\frac{1,8912}{5}=0,3782$;

Окончательные вычисления

$$\frac{3}{5}\lg 4,27=0,3782$$
$$\frac{1}{3}\lg 0,819=\frac{\bar{1},9133}{3}=\bar{1},9711$$
$$0,32\ \text{доп.}\ \lg 6,429=\bar{1},7414$$
$$0,48\,\text{доп.}\lg 0,00318=1,1988$$
$$\lg Z=1,2895$$

$$Z=19,47;$$
$$Z\approx 19,5.$$

§ 175. Модуль перехода от одной системы логарифмов к другой. Поставим такой вопрос: как найти логарифм положительного числа N по основанию b ($b > 0$ и $b \neq 1$), если известен логарифм числа N при основании a ($a > 0$, $a \neq 1$)?

Чтобы ответить на поставленный вопрос, надо уметь находить тот переводной множитель, с помощью которого осуществляется переход к новой системе логарифмов.

Пусть $\log_a N = m$ (m—известное число). Требуется найти $\log_b N = x$ (x неизвестно).

Тогда

$$a^m = N, \quad b^x = N,$$

откуда

$$a^m = b^x.$$

Логарифмируем обе части этого равенства по основанию a:

$$m \log_a a = x \log_a b,$$

или

$$m = x \log_a b,$$

$$x = m \cdot \frac{1}{\log_a b}.$$

Заменяя x и m их значениями, получим:

$$\log_b N = \log_a N \cdot \frac{1}{\log_a b}.$$

Множитель $\frac{1}{\log_a b}$ называется *модулем перехода* от системы логарифмов с основанием a к системе с основанием b.

Примеры.

1) $\log_5 2 = \lg 2 \cdot \frac{1}{\lg 5} = 0{,}3010 \cdot \frac{1}{0{,}6990} \approx 0{,}431$.

2) $\log_2 7 = \lg 7 \cdot \frac{1}{\lg 2} = 0{,}8451 \cdot 3{,}322 \approx 2{,}807$.

3) $\log_{\sqrt{a}} N = \log_a N \cdot \frac{1}{\log_a \sqrt{a}} = 2 \log_a N$.

Пусть a и b—два положительных числа, отличных от 1; тогда имеет место тождество

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1,$$

так как из равенства $a^{\log_a b}=b$ путем логарифмирования его по основанию b находим:

$$\log_a b\cdot\log_b a=\log_b b=1.$$

Примечание. Помимо десятичных логарифмов в математике и ее различных приложениях широко применяются натуральные логарифмы, основанием которых служит иррациональное число e, $e\approx 2{,}718$. Натуральные логарифмы обозначаются знаком «ln» без указания основания, например:

$$\ln 2=\lg 2\cdot\frac{1}{\lg e}\approx 0{,}3010\frac{1}{\lg 2{,}718}=0{,}3010\cdot 2{,}303\approx 0{,}6932.$$

Итак, натуральный логарифм числа примерно в 2,3 раза больше десятичного логарифма этого же числа.

Рассмотрим частные случаи модуля перехода:

1) если новое основание $b=\frac{1}{a}$, то $M=\frac{1}{\log_a\frac{1}{a}}=\frac{1}{-1}=-1$,

следовательно, $\log_{\frac{1}{a}}N=-\log_a N$;

2) если $b=a^2$, то $M=\frac{1}{\log_a a^2}=\frac{1}{2}$, $\log_{a^2}N=\frac{1}{2}\log_a N$;

3) если $b=\sqrt{a}$, то $M=\frac{1}{\log_a\sqrt{a}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$, $\log_{\sqrt{a}}N=2\log_a N$;

4) если $b=a^n$, то $M=\frac{1}{\log_a a^n}=\frac{1}{n}$.

Таким образом,

$$\log_{a^n}N=\frac{1}{n}\log_a N.$$

Случай 4) обобщает предыдущие три: при $n=-1$ имеем случай 1), при $n=2$ имеем случай 2), при $n=\frac{1}{2}$ имеем случай 3).

Пример. Решить уравнение

$$\log_2 x+\log_{\frac{1}{2}}x+\log_4 x+\log_{\sqrt{2}}x=\frac{15}{2}.$$

Приводим все логарифмы к основанию 2:

$$\log_2 x-\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+2\log_2 x=\frac{15}{2},$$

$$\frac{5}{2}\log_2 x=\frac{15}{2},\quad \log_2 x=3,\quad x=8.$$

§ 176. Показательные уравнения. Рассмотрим уравнения, содержащие неизвестное в показателе степени. Такие уравнения принято обычно называть *показательными*, например:

$$\sqrt{3^x} = \frac{1}{\sqrt{27}}; \quad 5^{x+1} + 5^x = 750; \quad 9^{x+1} - 3^{x+3} = 486.$$

Существуют два основных способа решения показательных уравнений.

1. Способ приведения к общему основанию. Если обе части уравнения можно представить как степени с одним и тем же основанием a, где a — положительное число, не равное 1, то из равенства степеней и оснований следует, что должны быть равны показатели степени. Приравняв показатели степени, получаем обычно уже известный нам тип уравнения.

Пример 1. $\sqrt{3^x} = \dfrac{1}{\sqrt{27}}$.

Имеем:

$$3^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}; \quad 3^{\frac{x}{2}} = 3^{-\frac{3}{2}}, \text{ откуда } \frac{x}{2} = -\frac{3}{2}; \quad x = -3.$$

Проверка.

$$\sqrt{3^{-3}} = 3^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{27}},$$

Пример 2. $5^{x+1} + 5^x = 750$.

Так как $5^{x+1} = 5^x \cdot 5$, то можно вынести в левой части общий множитель 5^x за скобки, получим:

$$5^x \cdot (5+1) = 750; \quad 5^x \cdot 6 = 750, \quad 5^x = 125,$$

или

$$5^x = 5^3; \; x = 3.$$

Проверка.

$$5^{3+1} + 5^3 = 625 + 125 = 750; \qquad 750 = 750.$$

Пример 3. $\sqrt{9^{x(x+1)-\frac{1}{2}}} = \sqrt[4]{3}$.

Представим обе части уравнения как степени числа 3:

$$9^{\frac{1}{2}\left[x(x-1)-\frac{1}{2}\right]} = 3^{\frac{1}{4}}; \quad (3^2)^{\frac{1}{2}\left[x(x-1)-\frac{1}{2}\right]} = 3^{\frac{1}{4}};$$

$$3^{x(x-1)-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{4}},$$

откуда

$$x(x-1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{4};\quad x^2-x-\frac{3}{4}=0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим:

$$x_1=-\frac{1}{2};\quad x_2=\frac{3}{2}.$$

Подстановкой в первоначальное уравнение убеждаемся, что оба корня пригодны.

2. Способ логарифмирования обеих частей уравнения.

Пример 4. $2{,}3^x=1{,}5^{x+1}$.

Здесь представляется более удобным логарифмировать обе части уравнения, после чего получим

$$x\lg 2{,}3=(x+1)\lg 1{,}5;$$
$$x\lg 2{,}3-x\lg 1{,}5=\lg 1{,}5;$$
$$x(\lg 2{,}3-\lg 1{,}5)=\lg 1{,}5;$$
$$x=\frac{\lg 1{,}5}{\lg 2{,}3-\lg 1{,}5}\approx\frac{0{,}1761}{0{,}1856}\approx 0{,}95.$$

В некоторых случаях при решении показательного уравнения удобно вводить вспомогательное неизвестное.

Пример 5. $4^{x-1}-2^{x+3}+28=0$.

Имеем

$$(2^2)^{x-1}-2^{x+3}+28=0,\quad\text{или}\quad 2^{2x}\cdot 2^{-2}-2^x\cdot 2^3+28=0;$$

пусть $2^x=z$; тогда $2^{2x}=z^2$; уравнение принимает вид

$$\frac{z^2}{4}-8z+28=0,\ \text{или}\ z^2-32z+112=0.$$

Решая это квадратное уравнение, получаем:

$$z_1=4;\qquad z_2=28,$$

откуда

$$2^x=4;\qquad x_1=2;$$
$$2^x=28;\qquad x\lg 2=\lg 28;$$
$$x_2=\frac{\lg 28}{\lg 2}\approx 4{,}81.$$

Оба корня удовлетворяют данному уравнению.

Пример 6. Решить систему

$$\begin{cases}2^x\cdot 3^y=12,\\ 2^y\cdot 3^x=18.\end{cases}$$

Разделим почленно первое уравнение на второе:

$$\frac{2^x \cdot 3^y}{2^y \cdot 3^x}=\frac{2}{3}, \text{ или } 2^{x-y}\cdot 3^{y-x}=\frac{2}{3}, \text{ но } 3^{y-x}=\frac{1}{3^{x-y}},$$

а потому $\frac{2^{x-y}}{3^{x-y}}=\frac{2}{3}$, или $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y}=\left(\frac{2}{3}\right)^1$, следовательно,

$$x-y=1, \text{ или } y=x-1.$$

Теперь первое уравнение системы примет вид

$$2^x \cdot 3^{x-1}=12, \text{ или } 6^x=36,$$

откуда $x=2$, $y=1$.

§ 177. Логарифмические уравнения.

Определение. Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма, называется *логарифмическим*.

Примерами таких уравнений являются:

1) $\lg(x+6)-\frac{1}{2}\lg(2x-3)=2-\lg 25$,

2) $\sqrt{\lg x}=\lg\sqrt{x}$,

3) $\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)$.

Основной способ решения логарифмических уравнений — это потенцирование, в результате чего получаем обычно алгебраическое уравнение. Найденные корни необходимо проверить, так как возможны случаи появления посторонних корней.

Пример 1. $\lg(x+6)-\frac{1}{2}\lg(2x-3)=2-\lg 25$.

Очевидно, что

$$\lg(x+6)-\frac{1}{2}\lg(2x-3)=\lg\frac{x+6}{\sqrt{2x-3}}$$

(левая часть уравнения),

$$2-\lg 25=\lg 100-\lg 25=\lg 4$$

(правая часть уравнения). Таким образом,

$$\lg\frac{x+6}{\sqrt{2x-3}}=\lg 4.$$

Но равным логарифмам, взятым по одному и тому же основанию, соответствуют равные числа. Следовательно, $\frac{x+6}{\sqrt{2x-3}}=4$. Решая это иррациональное уравнение, находим два корня: $x_1=6$; $x_2=14$.

Проверка корня $x_1=6$: $\lg 12-\frac{1}{2}\lg 9=\lg 4$; $\lg\frac{12}{3}=\lg 4$ (верно).

Проверка корня $x_2=14$; $\lg 20-\frac{1}{2}\lg 25=\lg 4$, $\lg\frac{20}{5}=\lg 4$ (верно).

Пример 2. $\sqrt{\lg x}=\lg\sqrt{x}$.

Прежде чем находить корни этого уравнения, найдем область допустимых значений x: обе части уравнения имеют смысл при $\lg x\geqslant 0$, $x\geqslant 1$; учитывая, что $\lg\sqrt{x}=\frac{1}{2}\lg x$, имеем $\sqrt{\lg x}=\frac{1}{2}\lg x$; возводим обе части в квадрат:

$$\lg x=\frac{1}{4}\lg^2 x, \quad \text{или} \quad \lg x(\lg x-4)=0.$$

Следовательно,

$$\lg x=0, \quad x_1=1;$$
$$\lg x=4, \quad x_2=10^4.$$

Убедитесь в том, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Пример 3. $\lg(x^{\lg x})=1$. Ясно, что $x>0$ и $x\neq 1$. Так как $\lg(x^{\lg x})=\lg x\cdot\lg x=\lg^2 x$, то уравнение принимает вид: $\lg^2 x=1$; $\lg x=\pm 1$; $x_1=0{,}1$; $x_2=10$; оба корня годны.

Пример 4. $2\lg\lg x=\lg(7-2\lg x)-\lg 5$.

Если положим $\lg x=t$, то имеем $2\lg t=\lg(7-2t)-\lg 5$, или $\lg t^2=\lg\frac{7-2t}{5}$, откуда $t^2=\frac{7-2t}{5}$, $t_1=-7/5$ (не годен, так как не существует $\lg t$), $t_2=1$; $x=10$. Проверкой легко убедиться, что $x=10$ удовлетворяет данному уравнению.

Пример 5. Решить систему $xy=a^2$, $\lg^2 x+\lg^2 y=\frac{5}{2}\lg^2 a^2$.

Очевидно, что искомые значения неизвестных должны быть положительными числами: $x>0$; $y>0$.

Логарифмируем первое уравнение: $\lg x+\lg y=2\lg a$. Полагаем $\lg x=u$; $\lg y=v$, тогда имеем систему

$$\begin{cases} u+v=2\lg a, \\ u^2+v^2=\frac{5}{2}(2\lg a)^2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} u+v=2m, \\ u^2+v^2=10m^2, \end{cases}$$

где $m=\lg a$.

Решая эту систему, найдем:

$$u_1=-m=-\lg a; \quad u_2=3\lg a;$$
$$v_1=3m \;=3\lg a; \quad v_2=-\lg a,$$

откуда

$$\lg x_1=-\lg a; \; x_1=\frac{1}{a};$$
$$\lg y_1=3\lg a; \quad y_1=a^3.$$

Аналогично находим: $x_2=a^3$, $y_2=\frac{1}{a}$.

Проверка решения $x_1=\frac{1}{a}$; $y_1=a^3$:

$$\frac{1}{a}\cdot a^3=a^2,$$
$$(-\lg a)^2+(3\lg a)^2=10\lg^2 a.$$

§ 178. Решение простейших показательных и логарифмических неравенств. Неравенства, содержащие неизвестное в показателе степени или под знаком логарифма, принято называть соответственно *показательными* или *логарифмическими неравенствами*. Такие неравенства, в большинстве случаев, приводятся к алгебраическим.

Пример 1. Решить неравенство $2^{3x-2}<2^{x+3}$.

При основании, большем 1, меньшему значению показательной функции соответствует и меньшее значение показателя степени, т. е. $3x-2<x+3$, $2x<5$, $x<\frac{5}{2}$.

Пример 2. Решить неравенство $2\cdot 3^{2x}-5\cdot 3^x+2>0$.

Введем вспомогательное неизвестное. Положим $z=3^x$ $(z>0)$. Тогда $2z^2-5z+2>0$, т. е. имеем квадратное неравенство относительно z. Корни трехчлена, стоящего в левой части, равны $\frac{1}{2}$ и 2; по известному нам правилу трехчлен положителен при всех значениях z, лежащих вне промежутка $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$. Следовательно, $z>2$ или $z<\frac{1}{2}$. Так как $z>0$, то $0<z<\frac{1}{2}$ или $z>2$.

Итак, $0<3^x<\frac{1}{2}$ или $3^x>2$.

Таким образом, после логарифмирования (по основанию 10) имеем:

$$x\lg 3<\lg\frac{1}{2}, \; x<\frac{\lg\frac{1}{2}}{\lg 3}, \; x<-\frac{0{,}3010}{0{,}4771}, \; x<-0{,}63.$$

Решая второе неравенство $3^x > 2$, находим:

$$x > \frac{\lg 2}{\lg 3}, \text{ или } x > 0{,}63.$$

Пример 3. $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5) < -2$.

Отметим, что неравенство имеет смысл при $2x+5 > 0$, или при $x > -\frac{5}{2}$. Представим правую часть неравенства, т. е. число -2, как $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, или $-2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$. Тогда $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5)\log_{\frac{1}{3}} 9$, но так как при положительном основании, меньшем единицы, меньшему логарифму соответствует большее число, то

$$2x+5 > 9; \quad x > 2.$$

Пример 4. $\log_3|3-4x| > 2$.

В данном неравенстве x может принимать любое значение, кроме $x = \frac{3}{4}$. Тогда, потенцируя, имеем:

$$|3-4x| > 3^2 = 9,$$
$$|3-4x| > 9.$$

1) Предположим, что $3-4x > 0$, или $x < \frac{3}{4}$. Тогда

$$3-4x > 9, \quad x < -\frac{3}{2}.$$

2) Если $3-4x < 0$, то $|3-4x| = 4x-3$,

$$4x-3 > 9, \quad x > 3.$$

Итак, неравенство $\log_3|3-4x| > 2$ удовлетворяется значениями $x > 3$ или $x < -\frac{3}{2}$.

Пример 5. $\log_6(x-3\sqrt{x+1}+3) < 1$.

Это неравенство имеет смысл, если одновременно выполнены два условия:

$$\begin{cases} x-3\sqrt{x+1}+3 > 0, \\ x+1 \geqslant 0, \quad \text{или} \quad x \geqslant -1. \end{cases}$$

Решаем первое неравенство системы:

$$x+3 > 3\sqrt{x+1} \quad \text{при} \quad x \geqslant -1.$$

Здесь обе части положительны и возведение в квадрат допустимо;

$$(x+3)^2 > 9(x+1), \quad \text{или} \quad x^2-3x > 0,$$
$$x < 0, \quad x > 3.$$

Итак, выражение под знаком логарифма имеет смысл, если $-1 \leqslant x < 0$ и $x > 3$. Теперь решим само неравенство. Потенцируем, помня, что основание логарифмов больше 1, получаем $x-3\sqrt{x+1}+3 < 6$, или

$$x-3 < 3\sqrt{x+1}. \qquad (1)$$

1) При всяком x из промежутка $-1 \leqslant x < 0$ неравенство (1) справедливо, так как левая часть отрицательна, правая часть неотрицательна, и, таким образом, исходное неравенство также справедливо.

2) При $x > 3$ обе части неравенства (1) положительны, можно возводить в квадрат, так как смысл неравенства не изменится. Имеем $(x-3)^2 < 9(x+1)$. После раскрытия скобок и переноса всех членов в левую часть получим $x^2-15x < 0$, откуда $0 < x < 15$.

Поскольку $x > 3$, то решениями будут значения x из промежутка $3 < x < 15$. Таким образом, решениями первоначального неравенства являются все точки из промежутков $-1 \leqslant x < 0$, $3 < x < 15$.

Пример 6. $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$.

По определению логарифмической функции основания x и $2x$ должны быть положительными, не равными 1. Итак $x > 0$, $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq 1$. Приведем все логарифмы к одному основанию, равному 2:

$$\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}; \quad \log_{2x} 2 = \frac{1}{\log_2 2x} = \frac{1}{1+\log_2 x}$$

(см. тождество $\log_b a \cdot \log_a b = 1$).

Исходное неравенство принимает вид

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{1+\log_2 x} \cdot (2+\log_2 x) > 1.$$

Положим $\log_2 x = t$,

$$\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1+t} \cdot (2+t) > 1;$$

после простых преобразований неравенство примет вид

$$\frac{-t^2+2}{t(t+1)} > 0, \quad \text{или} \quad \frac{t^2-2}{t(t+1)} < 0.$$

Решая его, находим: $-\sqrt{2} < t < -1$, $0 < t < \sqrt{2}$. Заменяя t на $\log_2 x$, имеем:

1) $\log_2 2^{-\sqrt{2}} < \log_2 x < \log_2 \frac{1}{2}$, откуда $2^{-\sqrt{2}} < x < \frac{1}{2}$;

2) $\log_2 1 < \log_2 x < \log_2 2^{\sqrt{2}}$, откуда $1 < x < 2^{\sqrt{2}}$.

§ 179. Примеры графического решения уравнений и неравенств.

Пример 1. Решить уравнение $4x = 2^x$.

Строим прямую $y=4x$ и кривую $y=2^x$ (рис. 114). Абсциссы точек пересечения этих линий являются корнями данного уравнения. На рисунке видно, что абсциссы

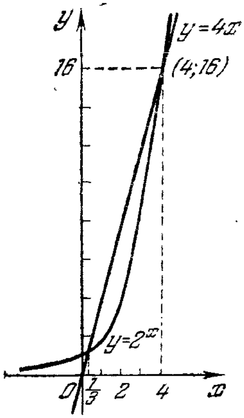

Рис. 114.

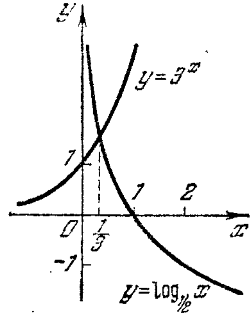

Рис. 115.

точек пересечения этих графиков $x_1=4$ и $x_2 \approx \frac{1}{3}$. Таким образом, данное уравнение имеет два корня. В том, что данное уравнение не может иметь больше двух корней, можно убедиться из следующих соображений: график $y=2^x$ есть вогнутая кривая, а прямая может иметь с такой кривой либо две общие точки, либо одну общую точку, либо ни одной.

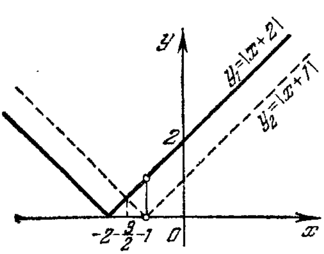

Рис. 116.

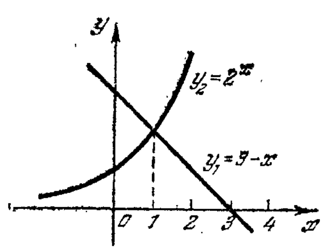

Рис. 117.

Пример 2. Решить уравнение $x \cdot 2^{3^x} = 1$.

Так как при всех действительных значениях x функция 3^x положительна, то $2^{3^x} > 1$ (свойство показательной функции при основании, большем единицы, и положительном показателе). Перепишем данное уравнение в виде

$$x=\frac{1}{2^{3^x}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3^x}.$$

Так как 2^{3^x} положительно, то $x>0$. Логарифмируя обе части уравнения $x=\left(\frac{1}{2}\right)^{3^x}$ по основанию $\frac{1}{2}$, получаем уравнение $\log_{\frac{1}{2}} x=3^x$, равносильное данному.

Строим графики функций $\log_{\frac{1}{2}} x$ и 3^x (рис. 115). Абсцисса точки пересечения этих графиков является решением данного уравнения. Из рисунка видим, что корень уравнения $x\approx\frac{1}{3}$.

Пример 3. Решить графически неравенство $\left|\frac{x+2}{x+1}\right|>1$. Если $x=-1$, то левая часть неравенства не определена. Если $x\neq-1$, то $|x+1|>0$, поэтому данное неравенство можно записать так: $|x+2|>|x+1|$. Строим графики функций $y_1=|x+2|$ и $y_2=|x+1|$ (рис. 116). Из чертежа видим, что при всех значениях x, лежащих правее точки $x=-1{,}5$, ординаты графика y_1 больше соответствующих ординат графика y_2.

Таким образом, $y_1>y_2$, если $x>-1{,}5$. Но так как $x\neq-1$, то $-1{,}5<x<-1$ или $x>-1$.

Пример 4. Решить неравенство $3-x>2^x$.

Строим графики: 1) прямой $y_1=3-x$, 2) показательной функции $y_2=2^x$ (рис. 117).

Линии пересекаются в точке $x=1$. При любом $x<1$ ордината прямой больше соответствующей ординаты графика показательной функции. Следовательно, решением неравенства является всякое действительное число $x<1$.

Упражнения

1. Написать следующие показательные равенства в виде логарифмических: 1) $3^6=729$; 2) $4^5=1024$; 3) $10^4=10\,000$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$; 5) $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$; 6) $10^{-3}=0{,}001$.

2. Написать следующие логарифмические равенства в виде показательных: 1) $\log_2 64=6$; 2) $\log_3 81=4$; 3) $\log_5 125=3$; 4) $\log_{10} 100\,000=5$; 5) $\log_{10} 0{,}01=-2$; 6) $\log_{\frac{4}{3}}\frac{27}{64}=-3$; 7) $\log_3\frac{1}{81}=-4$.

3. Найти при основании 2 логарифмы следующих чисел: 1) 32; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{8}$; 4) $\sqrt{2}$; 5) $2\sqrt{2}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $\sqrt[3]{4}$; 8) $\frac{4}{\sqrt[5]{2}}$.

4. Чему равны при основании 10 логарифмы следующих чисел: 1) 10; 2) 1000; 3) 0,1; 4) 0,0001; 5) 10^n; 6) $\sqrt{10}$; 7) $\sqrt[3]{10^2}$; 8) $\sqrt[5]{100}$; 9) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; 10) $\frac{1}{10\sqrt{10}}$?

5. На основании определения логарифма найти неизвестное из следующих равенств: 1) $x=\log_3 27$; 2) $y=\log_2 16$; 3) $z=\log_5 625$; 4) $x=\log_9 27$; 5) $y=\log_5 0{,}04$; 6) $u=\log_2 0{,}125$; 7) $\log_3 x=2$; 8) $\log_5 x=0$; 9) $\log_4 y=\frac{2}{3}$; 10) $\log_8 z=-2$; 11) $\log_{\frac{3}{2}} u=2$; 12) $\log_{\frac{1}{2}} N=-3$.

При каком основании:

1) $\log 36=2$; 2) $\log 27=\frac{3}{2}$; 3) $\log 64=4$; 4) $\log 2=-0{,}5$?

6. Между какими целыми числами заключаются логарифмы чисел: 7, 30, 120, 495 при основании 2?

7. Между какими целыми числами заключаются логарифмы чисел: 3, 18, 134 и 1782 при основании 10?

8. Между какими отрицательными целыми числами заключаются логарифмы чисел: 1) 0,07; 2) 0,018; 3) 0,00215 и 4) 0,00005 при основании 10?

9. Между какими отрицательными целыми числами заключаются логарифмы чисел 1) $\frac{1}{15}$; 2) $\frac{3}{80}$ и 3) $\frac{1}{120}$ при основании 2?

10. Чему равен логарифм $\sqrt[5]{8}$ при основании: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 4; 4) 16; 5) 64?

11. При каком основании $\sqrt{27}$ имеет логарифм, равный:

1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{3}{4}$?

12. Составить такую последовательность чисел, чтобы логарифмы членов этой последовательности при основании 2 образовали арифметическую прогрессию 1, 2, 3, ..., 10. Какую последовательность образуют эти числа?

13. Показать в общем виде, что если числа образуют геометрическую прогрессию с положительными членами, то логарифмы этих чисел образуют арифметическую прогрессию.

14. Построить на одном чертеже графики функций: 1) $y=\log_2 x$; 2) $y=\log_2(x+1)$; 3) $y=\log_2 x+1$.

Указание. Предварительно составить таблицу значений.

15. Выразить логарифм числа 15 через логарифмы чисел 3 и 5.

16. Выразить логарифм числа $2\frac{1}{3}$ через логарифмы чисел 7 и 3.

17. Выразить: 1) $\log 8$ через $\log 2$; 2) $\log 81$ через $\log 3$.

18. Выразить: 1) $\log\sqrt{5}$ через $\log 5$; 2) $\log\sqrt[3]{2}$ через $\log 2$; 3) $\log\sqrt[5]{27}$ через $\log 3$.

19. Логарифмы каких простых чисел надо знать, чтобы найти при том же основании логарифмы чисел:

$$40,\ \frac{27}{64},\ \frac{12}{25},\ \sqrt{80},\ \sqrt[3]{\frac{3}{16}}?$$

20. Найти 1) $\log_2(8\cdot 128)$; 2) $\log_5\left(25\sqrt{125}\right)$.

21. Зная, что $\log_{10}2=0{,}3010$, $\log_{10}3=0{,}4771$; $\log_{10}5=0{,}6990$, найти: 1) $\log_{10}40$; 2) $\log_{10}1{,}8$; 3) $\log_{10}0{,}12$; 4) $\log_{10}0{,}02$.

22. Прологарифмировать следующие выражения:

1) $x=3ab$; 2) $x=\dfrac{2ab}{c}$; 3) $y=a^3b^2$; 4) $z=\dfrac{a^2b^5}{c^3}$; 5) $x=3(a-b)$;

6) $y=\dfrac{2a}{a^2-b^2}$; 7) $x=\sqrt{ab}$, 8) $x=\dfrac{\sqrt[3]{ac}}{(a+c)^2}$; 9) $y=\dfrac{1}{a^2bc^3}$;

10) $x=\sqrt[3]{\dfrac{ab^2}{c}}$; 11) $y=\dfrac{a^2\sqrt{bc}}{3\sqrt[5]{(a+b)^3}}$; 12) $z=\sqrt{\dfrac{4a\sqrt{ab}}{5b\sqrt[3]{a^2b}}}$;

13) $y=\sqrt[n]{\dfrac{1}{ab}\sqrt{\dfrac{b}{a}}}$; 14) $x=\dfrac{5ab\sqrt[3]{ab}}{\sqrt{a^2-b^2}}$;

15) $y=\left(\sqrt[3]{\dfrac{a^4\sqrt{ab}}{b^2\sqrt[3]{bc}}}\right)^2$; 16) $x=\sqrt{\dfrac{40\sqrt{2\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{5\sqrt{6}}}}$;

17) $y=\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}b^3}{c^{-\frac{3}{4}}}$; 18) $x=\sqrt[n]{m\sqrt[p]{b^2}}$; 19) $z=\dfrac{1}{\sqrt{a\sqrt{b}\sqrt{c}}}$;

20) $y=\sqrt[m]{a^{n+1}\sqrt[n]{b^p}}$; 21) $x=\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}$;

22) $x=\log_a\left[(a+b)^{\log_a(a+b)}\right]$.

23. По логарифму неизвестного числа найти само число:

1) $\log x=\log 5-\log 2+\log 3$; 2) $\log x=\log 7+\log 5-\log 3$;
3) $\log y=2\log 3+3\log 5$; 4) $\log z=3\log 2-2\log 3+\log 5$;

5) $\log y=\dfrac{1}{2}\log 3+\dfrac{2}{3}\log 5-\dfrac{1}{3}\log 2$;

6) $\log u=\dfrac{1}{3}\log(a+b)-[\log a+2\log(b+c)]$;

7) $\log x=\dfrac{1}{2}\log(a^2+b^2)-\dfrac{1}{3}[\log(a+b)-\log(b-a)]$;

8) $\log z=\dfrac{3\log a-(3\log b+2\log c)}{4}$;

9) $\log y=\dfrac{1}{5}[3\log(a-b)+2\log(a+b)-4\log a]$;

10) $\log z=\dfrac{1}{3}\left[\log a+\dfrac{1}{4}(\log a+3\log c)\right]-$
$-[\log b+3\log(c+a)-\log(b+1)]$.

24. Найти: 1) $\lg 1000$; 2) $\lg 0,1$; 3) $\lg 0,0001$.

25. Найти характеристики логарифмов следующих чисел:

$$7;\quad 125;\quad 5832;\quad 109,54;\quad 0,083;\quad 0,00012.$$

26. Зная, что $\lg 32 = 1,5051$, найти: $\lg 3,2$, $\lg 3200$, $\lg 0,32$, $\lg 0,0032$.

27. Следующие логарифмы с отрицательной характеристикой представить в виде отрицательных чисел:

1) $\bar{1},1728$; 2) $\bar{2},5893$; 3) $\bar{4},0075$; 4) $\bar{6},9917$.

28. Следующие отрицательные логарифмы представить в искусственной форме, т. е. с положительной мантиссой:

1) $-0,5618$; 2) $-1,6247$; 3) $-2,0019$; 4) $-3,9904$; 5) $-0,7328$.

29. Найти по таблицам логарифмы следующих целых чисел:

1) 30; 2) 160; 3) 4800; 4) 72 000; 5) 252; 6) 493; 7) 109; 8) 649; 9) 1183; 10) 7845; 11) 5848; 12) 2007.

Найти логарифмы следующих дробей:

1) 0,007; 2) 0,03; 3) 0,0008; 4) 0,0002; 5) 0,12; 6) 0,019; 7) 0,0031; 8) 0,0078; 9) 3,18; 10) 0,0542; 11) 72,8; 12) 0,632; 13) 30,65; 14) 1,967; 15) 18,12; 16) 0,4343.

30. Зная, что $\lg 375 = 2,5740$, найти без таблиц логарифмы чисел:

1) 37,5; 2) 0,375; 3) 3,75; 4) 0,00375; 5) 3750.

31. Округляя данные пятизначные числа до четырех цифр, найти их логарифмы:

1) 13407; 2) 32,742; 3) 0,058369; 4) 18396; 5) 0,070418.

32. Найти числа, соответствующие логарифмам:

1) 0,8140; 2) 1,6590; 3) $\bar{1},6454$; 4) $\bar{2},7789$; 5) 3,1580; 6) $\bar{3},1752$; 7) 1,003; 8) 3,0463; 9) $\bar{2},0032$.

33. Найти логарифмы чисел и произвести над ними указанные действия:

1) $\lg 0,057 + \lg 0,09$; 2) $\lg 3,18 + \lg 0,25$; 3) $\lg 25,6 - \lg 18,2$; 4) $\lg 0,873 - \lg 0,543$; 5) $\lg (2,17)^3$; 6) $\lg (0,3725)^3$; 7) $\lg \sqrt[4]{1,27}$; 8) $3 \lg 0,728$; 9) $2 \lg 15,8 + 3 \lg 0,263$; 10) $\lg \sqrt{32,7} + \lg \sqrt[3]{0,0253}$.

34. Найти дополнительные логарифмы:

1) доп. $\lg 18,23$; 2) доп. $\lg 0,0532$; 3) доп. $\lg 318,6$; 4) $\frac{2}{3}$ доп. $\lg 0,326$; 5) $-\frac{1}{2} \lg 13,6$.

35. С помощью четырехзначных таблиц логарифмов вычислить:

1) $x = 0,7545 \cdot 2,457$; 2) $x = 144,6 \cdot 0,0256 \cdot 0,75^3$; 3) $x = \dfrac{120,4 \cdot 1,44}{300,1}$;

4) $x = \dfrac{17,6 \cdot 2,85}{43,6 \cdot 8,95}$; 5) $y = \dfrac{0,0795 \cdot 15,4}{1,18^2 \cdot 32,7}$; 6) $z = \sqrt[5]{17,32}$;

7) $x = \sqrt[4]{0,0386}$; 8) $y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{0,724}}$; 9) $x = \dfrac{\sqrt[4]{27,32}}{0,4316}$;

10) $x = \sqrt[3]{\dfrac{23,6}{18,3}}$; 11) $y = \sqrt[4]{\dfrac{128}{9657}}$; 12) $z = \dfrac{37,26}{28,75} \sqrt{48,31}$;

13) $x = \sqrt[5]{0,42 \sqrt{0,0275}}$; 14) $y = 0,75^4 \sqrt[3]{0,75^2}$;

15) $x=\sqrt[3]{0,275}\cdot\sqrt[4]{7,386}$; 16) $x=\dfrac{\sqrt[3]{2,5\sqrt[4]{0,0125}}}{\sqrt[4]{0,0125}\cdot\sqrt[3]{0,25}}$;

17) $y=\sqrt[5]{3,125-\sqrt[3]{0,75}}$; 18) $x=\sqrt[5]{1-\sqrt[3]{0,0814}}$;

19) $x=\dfrac{1,56^3\cdot 0,00364^2\sqrt[3]{\dfrac{3}{7}}}{4,658^2\sqrt{0,0467}}$; 20) $y=2,75^{0,6}$; 21) $z=0,463^{0,45}$;

22) $x=\dfrac{1}{7,45^{0,32}}$; 23) $A=0,00485^{0,0652}$; 24) $y=1+0,4893^{0,285}$;

25) $x=\sqrt[3]{\dfrac{7,83\sqrt{41}}{\dfrac{1}{4}}}$; 26) $y=\dfrac{(0,089)^{0,41}\cdot(3,726)^{-1,3}}{300^{\frac{1}{7}}\cdot(43,6)^{-0,7}}$;

27) $z=\sqrt{\dfrac{7,82^{\frac{1}{2}}(3,47)^{-0,71}}{(6,402)^{-\frac{3}{5}}\cdot(0,081)^{0,57}}}$.

36. Решить следующие показательные уравнения:

1) $\sqrt[x]{2}=2^x$; 2) $2^{x-1}=4^5$; 3) $4^{-\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{2}$; 4) $\left(\dfrac{5}{4}\right)^{0,8x}=\dfrac{64}{125}$;

5) $a^{x-7}=a^{7-x}$; 6) $9^{-3x}=\left(\dfrac{1}{27}\right)^{x+3}$; 7) $\sqrt[x]{16}=\sqrt{4^x}$.

37. Решить уравнения:

1) $13,2^x=8$; 2) $(0,785)^{2x}=3,18$; 3) $\sqrt[x]{22,1}=7^x$.

38. Решить уравнения:

1) $3^{x+1}+\dfrac{18}{3^x}=29$; 2) $x^{x^2-7x+12}=1$; 3) $7^{2x}-6\cdot 7^x+5=0$;

4) $\dfrac{\lg 2x}{\lg(4x-15)}=2$; 5) $\dfrac{1}{5-\lg x}+\dfrac{2}{1+\lg x}=1$;

6) $\lg(x^3)-\dfrac{12}{\lg x}=5$; 7) $\lg\sqrt{7x+5}+\dfrac{1}{2}\lg(2x+7)=1+\lg 4,5$;

8) $x^{\lg x-1}=100$; 9) $x^{3-\frac{\lg x}{3}}=900$;

10) $\lg(x-5)-\dfrac{1}{2}\lg(3x-20)=0,3010$; 11) $x^{\lg x}=100x$;

12) $\lg\left(\dfrac{1}{2}+x\right)=\lg\dfrac{1}{2}-\lg x$; 13) $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=10$;

14) $\dfrac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)}=3$; 15) $\lg(5x^2-14x+1)=\lg(4x^2-4x-20)$.

39. Решить графически следующие уравнения:

$$\lg x - \frac{x}{2} + 4 = 0; \quad 2^x + x - 2 = 0.$$

40. Вычислить: 1) $4^{\log_{16} 27}$; 2) $5^{\log_5 2}$; 3) $3^{\log_3 2 - 1}$.

41. Вычислить, не пользуясь таблицами, $10^{\frac{1}{2} - \lg 0{,}375\sqrt{10}}$.

Решить уравнения:

42. $\left(2\sqrt{12} + 3\sqrt{3} + 6\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt{3^{2x^2 - 2x - 2}}$.

43. $10^{\log_a (x^2 - 3x + 5)} = 3^{\log_a 10}$. **44.** $(x^2 - x - 1)^{x^2 - 7x + 2} = 1$.

45. $x^{3\lg^2 x - \frac{2}{3}\lg x} = 100\sqrt[3]{10}$. **46.** $\lg[3 + 2\lg(1 + x)] = 0$.

47. $2\lg\lg x = \lg(7 - 2\lg x) - \lg 5$.

48. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} + 2\log_3(x - 3)\log_3(x + 2) = \log_3^2(x - 3) + \log_3^2(x + 2)$.

49. $\sqrt[\frac{2}{9} - x]{m^{\frac{1}{3} + x}} = \sqrt[\frac{2}{9} + x]{m^{\frac{1}{3} - x}} \cdot \sqrt[\left(\frac{2}{9}\right)^2 - x^2]{m^2}$; $m > 0$ и $m \neq 1$.

50. $2^{\log_x (x^2 - 6x + 9)} = 3^{2\log_x \sqrt{x} - 1}$.

51. $25^{\sqrt{x}} - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} = 125$. **52.** $\log_2^2 x - 9\log_8 x = 4$.

53. $\lg 8 + 2\lg 4 = \lg 2^{3x^2 - 2x + 1} - \lg 12 + 2\lg\sqrt{3}$.

54. $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x + y} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}; \\ (x + y) \cdot 2^{y - x} = 48. \end{cases}$ **55.** $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576; \\ \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4. \end{cases}$

56. $\log_x 5\sqrt{5} - 1{,}25 = (\log_x \sqrt{5})^2$. **57.** $\left(\frac{9}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{27}\right)^{x - 1} = \frac{2}{3}$.

58. $\sqrt[x-1]{\sqrt[3]{2^{3x - 1}}} - \sqrt[3x-7]{8^{x - 3}} = 0$. **59.** $\left(\frac{3}{4}\right)^{x - 1} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{9}{16}$.

60. $0{,}2^{x^2 - 16x + 37{,}5} = 5\sqrt{5}$. **61.** $\sqrt[x-4]{2^{x^2 - 7x + 12}} = (2^{x - 5})^{x - 5}$.

62. $4^x + 6^x - 2 \cdot 9^x = 0$.

63. $2\lg\left(\sqrt{x + \frac{x}{24}} + \sqrt{\frac{x}{24}}\right) - 1 = \lg 3 - \lg 2$.

64. $\lg^2(100x) + \lg^2(10x) + \lg x = 14$.

65. $4\lg^2\sqrt{ax} = \lg ax \ (a > 0)$. **66.** $x + \lg(1 + 2^x) = x\lg 5 + \lg 6$.

67. $\log_x \sqrt{5} + \log_x(5x) - 2{,}25 = (\log_x \sqrt{5})^2$.

68. $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}} = 10$. **69.** $\lg^{-1} x = 2 + \lg x^{-1}$.

70. $3^{x + 1} + 2 \cdot 3^{2 - x} - 29 = 0$. **71.** $3 + \log_x\left(\frac{x^{4x - 6} + 1}{2}\right) = 2x$.

72. $16^{\log_x 2} = 8x$. **73.** $9^{\log_{\sqrt{x}} 3} = 27x$.

74. $x^{(\lg x)^2 - 3\lg x + 1} = 10^3$. **75.** $\log_x (2\cdot x^{x-2} - 1) = 2x - 4$.

76. $3^{1 + \lg \operatorname{ctg} x} - 3^{\lg \operatorname{tg} x + 1} - 8 = 0$.

77. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2\log_2 x} + x\log_2 0{,}125 = 4$.

78. $(\sqrt[3]{x})^{\log_x (x^2+2)} = 2\log_3 \sqrt{27}$. **79.** $x^{2x} - (x^2 + x)\cdot x^x + x^3 = 0$.

80. Решить неравенства:

1) $\log_{\frac{1}{3}} (2x+5) < -2$; 2) $\log_2 (3x+2) - \log_2 (1-2x) > 2$;

3) $\log_3 (3x+4) - \log_3 (2x-1) > 1$; 4) $\log_3 |3-4x| > 2$;

5) $\log_{\frac{1}{2}} |2x-3| > -3$; 6) $\log_2 (|x-2| - 1) > 1$;

7) $\log_2 \left(\left| \frac{x-2}{x-5} \right| + 7 \right) > 3$; 8) $\log_3 (x-1) + \log_3 (2-3x) > 2$.

81. Решить графически уравнения (при построении графиков воспользоваться таблицами значений функций: e^x, e^{-x}, $\sin x$ и $\cos x$, приведенными в конце книги):

1) $e^x = 2 - x$; 2) $x^2 = e^{-x} + 1$; 3) $0{,}5 + x + \sin x = 0$;

4) $2\cos x + \frac{x}{2} = 0$; 5) $1 + \lg x + \frac{x}{2} = 0$.

82. Решить графически неравенства:

1) $e^x > 3 - x$, 2) $e^{-x} + 1 < x$; 3) $\lg (x-2) > 4 - x$;

4) $\lg \sin x > \frac{2x}{\pi} - 2\ (0 < x < \pi)$.

83. Решить системы:

1) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 24, \\ x + y = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4^x = 16y, \\ 2^{x+1} = 4y; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3^x - 2^{y^2} = 77, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 40, \\ 64^{x+y} = 12; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x^2 + y = 75, \\ 2\lg x - \lg y = 2\lg 2 + \lg 3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2^{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 512; \\ \lg \sqrt{xy} = 1 + \lg 2; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} y + \lg x = \frac{2}{\pi} \arcsin 1, \\ x^y = 2^{2\log_{0,5} 10}; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y}, \\ x^2 y = \frac{2}{\pi}\left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \end{cases}$

9) $\begin{cases} 4^{\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-y}, \\ 3^{\log_9 x} = \frac{y}{3}. \end{cases}$

84. Решить неравенства:

1) $\log_{0,5} \left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right) > 2 - \log_2 5$; 2) $\log_x \frac{x+3}{x-1} > 1$.

ГЛАВА XIV

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ЛИНЕЙКА

Введение. Наиболее распространенным среди инженеров и техников счетным прибором является логарифмическая линейка.

Логарифмическая линейка позволяет производить разнообразные операции: умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня, логарифмирование и потенцирование, отыскание значений тригонометрических функций заданных углов и обратно. При этом значительно экономятся труд и время вычислителя. Но результаты всех действий на линейке получаются приближенными с точностью до трех значащих цифр.

§ 180. Части логарифмической линейки и названия шкал. Логарифмическая линейка состоит из трех частей:

1) самой линейки (корпуса линейки) с нанесенными на ней шкалами;

2) движка — подвижной части,— скользящего в желобке корпуса линейки;

3) бегунка, состоящего из вделанного в металлическую рамку стеклышка. Посредине стеклышка нанесена тонкая визирная линия (визир).

На лицевой стороне линейки и движка находятся следующие шкалы (рис. 118):

1) Шкала кубов (помечена буквой C) — самая верхняя.

2) Шкала квадратов (помечена буквой B) — вторая сверху; она один раз изображена на самой линейке (шкала B); другой раз — на движке (шкала B_1).

3) Основная шкала (помечена буквой A) — вторая снизу; она, как и шкала квадратов, нанесена и на линейке (шкала A), и на движке (шкала A_1).

4) Шкала логарифмов (помечена буквой D)— самая нижняя шкала.

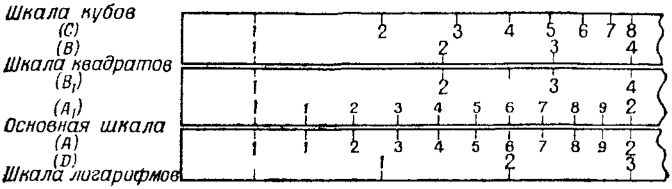

Рис. 118.

Основные шкалы на линейке и на движке, если движок не выдвинут влево или вправо, совпадают друг с другом всеми своими делениями. То же самое можно сказать и про шкалы квадратов на линейке и на движке.

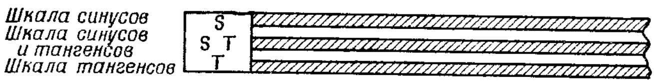

Рис. 119.

На оборотной стороне движка, помимо того, имеются следующие шкалы (рис. 119):

1) Шкала синусов (помечена буквой S)—верхняя шкала.

2) Шкала синусов и тангенсов (помечена буквами S и T)—средняя шкала.

3) Шкала тангенсов (помечена буквой T)—нижняя шкала.

§ 181. Логарифмическая шкала. Прежде чем приступить к изучению действий, производимых на линейке, надо ознакомиться с тем, как построена логарифмическая шкала, составляющая основу линейки.

Возьмем функцию $y = \lg x$. Если аргумент (x) изменяется от $x = 1$ до $x = 10$, то логарифм (y) изменяется от 0 до 1, так как $\lg 1 = 0$; $\lg 10 = 1$.

Примем условно отрезок длиной в 250 мм за единицу и разделим его *пропорционально логарифмам целых чисел от* 1 *до* 10.

Предварительно составим следующую таблицу:

x	$y=\lg x$	$250 \lg x$ (мм)	x	$y=\lg x$	$250 \lg x$ (мм)
1	0,0000	0,00	6	0,7782	194,6
2	0,3010	75,3	7	0,8451	211,3
3	0,4771	119,3	8	0,9031	225,8
4	0,6021	150,5	9	0,9542	238,6
5	0,6990	174,7	10	1,0000	250,0

На основании этой таблицы строим шкалу функции $y=\lg x$.

На произвольной прямой выбираем начальную точку O. Против нее ставим пометку 1, так как начальное значение x равно 1. Затем откладываем от точки O вправо последовательно отрезки, по длине равные 75,3 мм, 119,3 мм, 150,5 мм, ..., 250 мм; концы их помечаем соответствующими числами 2, 3, 4, ..., 10.

Получилась логарифмическая шкала, на которой нанесены пока только крупные деления, или деления первого разряда. На рис. 120 эта шкала изображена в умень-

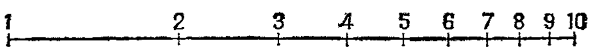

Рис. 120.

шенном масштабе. Для уточнения шкалы надо интервал между каждыми двумя смежными крупными делениями разделить на 10 частей пропорционально логарифмам промежуточных чисел. Например, для получения на шкале пометки 1,5 надо отложить до начала отрезок, равный $250 \text{ мм} \cdot \lg 1{,}5 \approx 250 \cdot 0{,}176 \approx 44$ (мм). Подобным образом можно нанести на шкалу пометки 1,6; 1,7 и т. д.; это будут деления второго разряда, соответствующие десятым долям единицы.

Итак, пометки на логарифмической шкале: 1, 2, 3, 4, ..., 10 выражают собою числа, а отрезки 1—2, т. е. от пометки 1 до пометки 2, 1—3, 1—4, ..., 1—10 выражают соответственно логарифмы этих чисел, точнее числа, пропорциональные логарифмам, где коэффициент пропорциональности есть масштаб; в данном случае масштаб $M=250$ мм.

Шкала получилась неравномерная, так как логарифмы чисел не пропорциональны самим числам.

Логарифмическая шкала с масштабом 250 мм называется *нормальной*.

§ 182. Свойства логарифмической шкалы. Одно из важнейших свойств логарифмической шкалы заключается в том, что она *периодична*.

Поясним это. Если бы логарифмическую шкалу 1, ..., 10 продолжить вправо для чисел 10, 20, 30, ..., 100, то пришлось бы от начала шкалы (от пометки 1) отложить вправо отрезки, равные, точнее пропорциональные, соответственно $\lg 20$, $\lg 30$, $\lg 40$, ..., $\lg 100$. Но $\lg 20 = 1 + \lg 2$, $\lg 30 = 1 + \lg 3$ и т. д. Отсюда видно, что построение дополнительной шкалы свелось бы к тому, что к первоначальной шкале, длина которой равна масштабу, пристраивалась бы снова такая же шкала. Точно так же снова повторилась бы шкала и для чисел от 100 до 1000 и т. д.

То же самое можно заключить и о шкале для чисел, расположенных слева от 1, например для чисел: 0,1; 0,2; 0,3; ...; 1; изображенная на рис. 119 шкала оказалась бы смещенной влево на всю ее длину (250 мм).

Этого и следовало ожидать, исходя из свойств десятичных логарифмов: логарифмы чисел 0,02; 0,2; 2; 20; 200; 2000 и т. д. имеют одинаковые мантиссы; отличаются они лишь характеристиками. Производя те или иные операции на линейке, мы в сущности оперируем с мантиссами, поэтому нам достаточно иметь под руками логарифмическую шкалу от 1 до 10. Роль характеристик при вычислениях с помощью линейки играют порядки, которые подсчитываются без линейки и позволяют найти искомый результат.

Таким образом, свойство периодичности позволяет заменить бесконечную шкалу одним ее отрезком, например от 1 до 10.

§ 183. О делениях на основной шкале. На основной логарифмической шкале деления нанесены от 1 до 2 через 0,01:

1,01; 1,02; 1,03; 1,04; 1,05 и т. д.;

от 2 до 4 через 0,02;

2,02; 2,04; 2,06 и т. д.;

от 4 до 10 через 0,05:

4,05; 4,10; 4,15 и т. д.

Принято говорить, что «цена» мелкого деления на участке от 1 до 2 равна 0,01, «цена» мелкого деления на участке от 2 до 4 равна 0,02, а на участке от 5 до 10 равна 0,05.

§ 184. Установка и чтение чисел на основной шкале. Прежде чем приступить к изучению различного рода действий, производимых на логарифмической линейке, необходимо научиться делать установку чисел с помощью визира и прочитывать числа, стоящие под наведенной визирной линией.

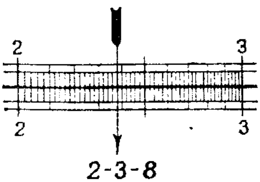

Рис. 121.

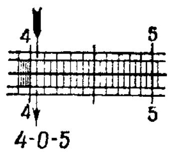

Рис. 122.

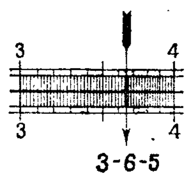

Рис. 123.

При этом следует помнить, что на линейке нормального типа можно поставить или прочитать три (редко четыре) последовательные значащие цифры числа. Когда требуется поставить на линейке число с бóльшим количеством цифр, его приходится предварительно округлять.

При установке уже округленного числа на линейке не принимаются во внимание нули, стоящие до первой значащей цифры, и все нули, стоящие в конце числа. Например, установка чисел 238; 0,238; 238 000; 0,000238 на линейке будет одна и та же. Каждое из этих чисел читаем на линейке так: 2—3—8.

Рис. 121 показывает, как нужно ставить на линейке число 2—3—8.

Первая цифра 2 соответствует числу крупных делений, вторая цифра 3—числу делений второго разряда, третья цифра 8—числу мелких делений, т. е. делений третьего разряда, их взято 4, так как в данном промежутке цена одного мелкого деления равна двум единицам третьего разряда.

На рис. 122 показана установка числа 4—0—5. Нуль отражает отсутствие единиц второго разряда.

Обратно, если нужно прочесть число, стоящее под наведенной визирной линией, то называют ближайшую слева цифру первого разряда, потом ближайшую слева цифру второго разряда и цифру третьего разряда, которую в большинстве случаев приходится прочитывать на глаз. Рис. 123 изображает под визирной линией число 3—6—5.

Напомним, что до тех пор, пока визирная линия не вышла за пределы, например, промежутка 1—2, все отсчеты будут начинаться с цифры 1. Аналогично обстоит дело с делениями второго разряда.

Точно так же устанавливаются и прочитываются числа на соприкасающейся шкале движка, которую коротко будем называть шкалой A_1.

§ 185. Умножение на линейке. Умножение чисел на логарифмической линейке основано на графическом сложении логарифмов этих чисел, так как

$$\lg ab = \lg a + \lg b.$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть требуется умножить 2 на 3. Наводим визирную линию на отсчет 2 на основной шкале A. Под визирную линию подводим единицу — начало шкалы A_1. Берем визиром отсчет 3 на шкале A_1 и под ним прочитываем на шкале A произведение 6.

Схематически это умножение изображено на рис. 124.

2. Пусть надо умножить 8 на 5. Наводим визирную линию на отсчет 8 шкалы A. Если подведем под визирную линию начало шкалы A_1, то отсчет 5 на шкале движка A_1 окажется за пределами шкалы A. Это и понятно, потому что при сложении мантисс логарифмов 8 и 5 получится число, бо́льшее 1: $\lg 8 + \lg 5 = 0{,}903 + 0{,}699 = 1{,}602$. Измерим циркулем, насколько выступает пометка 5 на шкале A_1 за пределы основной шкалы A, и отложим этот отрезок на основной шкале A от ее начала. Против конца этого отрезка стоит на шкале A пометка 4. Этот отсчет следует в 10 раз увеличить, так как число, соответствующее логарифму 1,602, должно иметь в целой части две цифры.

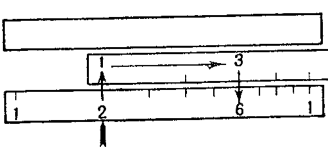

Рис. 124.

Тот же самый результат проще получится так: вместо начальной единицы движка подводим конец движка под отсчет 8, взятый по шкале A. Под отсчетом 5 шкалы движка можно прочесть на шкале A результат 40. Схематически это умножение изображено на рис. 125.

Приведенные выше два примера имели своей целью пояснить принцип умножения чисел на логарифмической линейке.

Более сложный случай умножения, когда результат не может быть получен в уме:

$$0{,}0215 \cdot 32{,}2.$$

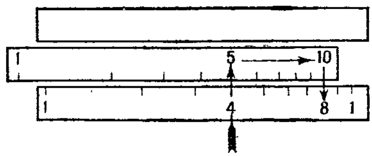

Рис. 125.

Как видно из рис. 126, результат равен 6—9—2. Возникает вопрос, где поставить десятичную запятую. Можно

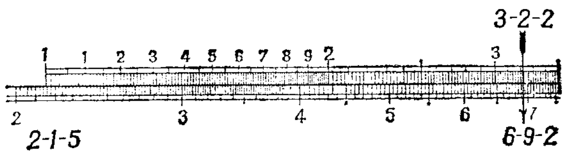

Рис. 126.

произвести грубую оценку полученного результата, округлив данные до одной значащей цифры:

$$0{,}02 \cdot 30 = 0{,}60.$$

Итак,

$$0{,}0215 \cdot 32{,}2 = 0{,}692.$$

Ясно, что первая цифра результата означает десятые доли. На первых порах рекомендуется именно таким образом делать грубую «прикидку» ожидаемого результата.

В случаях, когда приходится находить произведение большего числа сомножителей или производить еще и другие действия помимо умножения, возникает потребность в другом правиле оценки значимости в результате первой цифры, т. е. оценки того, представляет ли первая значащая цифра сотни, десятки или, быть может, тысячные доли и т. д. Введем понятие порядка числа.

§ 186. О порядке чисел. Условимся в дальнейшем говорить, что, например,

1) число 183,4 имеет порядок +3;
2) число 34,87 имеет порядок +2;
3) число 8,53 имеет порядок +1;
4) число 0,784 имеет порядок 0;
5) число 0,0215 имеет порядок —1;
6) число 0,00012 имеет порядок —3 и т. д.

Таким образом, *порядок* всякого положительного числа, большего единицы, характеризуется количеством цифр в целой части, взятым со знаком плюс.

Количество нулей между нулем целых и первой значащей цифрой числа, взятое со знаком минус, принимается за порядок всякого положительного числа, меньшего единицы.

Примечание. Понятие «порядок числа N» и понятие «характеристика логарифма числа N»—не одно и то же. Например, порядок числа 48,7 есть число 2, а характеристика $\lg 48{,}7$ равна 1, т. е. порядок числа на 1 больше характеристики логарифма того же числа.

§ 187. Подсчет порядка.

Если при умножении двух чисел движок перемещается вправо, то порядок результата равен сумме порядков сомножителей минус единица. Если же движок перемещается влево, то порядок произведения равен сумме порядков сомножителей.

Если порядок множимого m, а порядок множителя n, то порядок произведения подсчитывается по такой схеме:

Перемещение движка при умножении	вправо	влево
Порядок произведения	$m+n-1$	$m+n$

Пример 1. $3{,}\overrightarrow{2\cdot 2}{,}5=8{,}00,$

$$1+1-1=1.$$

Движок перемещается вправо, что отмечено стрелкой, поэтому порядок произведения равен сумме порядков сомножителей минус 1.

Пример 2. $4\overleftarrow{5\cdot 8}{,}2=369,$

$$2+1=3.$$

Движок перемещается влево, что отмечено стрелкой, поэтому порядок произведения равен сумме порядков сомножителей.

Если требуется выполнить умножение нескольких чисел, то рекомендуется фиксировать перемещение движка при каждом умножении постановкой стрелки, направленной в сторону перемещения движка.

Пример 3. $0.007\overleftarrow{5\cdot 4},\overleftarrow{2\cdot 4},\overrightarrow{3\cdot 1}50=20,3,$

$$-2+1+1+3-1=2.$$

При умножении движок перемещался дважды влево и один раз вправо, поэтому порядок результата равен сумме порядков сомножителей без одной единицы.

Примечание. Заметим, что если произведение первых значащих цифр равно 10 или больше 10, то движок наверняка будет перемещаться влево. Например: 4,8·0,327; 54,8·2,1 и т. д.

§ 188. Деление. Так как логарифм частного равен логарифму делимого минус логарифм делителя, то на линейке деление сводится к графическому вычитанию логарифмов.

Пример 1. $6:3=2$.

Установка

Делимое (6) ставим визиром на шкале A. Передвигаем движок так, чтобы делитель (3) на нем оказался под визирной линией.

Против начала шкалы движка на шкале A прочитываем результат (2). Схематически это деление показано на рис. 127.

Пример 2. $40:5=8$.

Ставим отсчет 4—0 визиром на шкале A. Под него подводим отсчет 5, взятый на шкале движка. Против по-

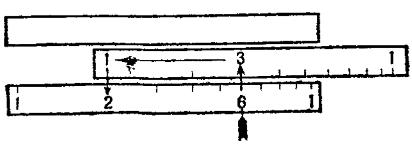

Рис. 127.

метки 10 (или 1) на конце шкалы A_1 прочитываем на шкале A результат 8. Схематически это деление показано на рис. 128.

Подсчет порядка частного, если порядок делимого m, а порядок делителя n, ведется по следующей схеме:

Перемещение движка при делении	влево	вправо
Порядок частного	$m-n$	$m-n+1$

Примеры. $8{,}7\overrightarrow{5:0}{,}0025=3500$; $4{,}\overleftarrow{7:0}{,}065=72{,}3$;

$1-(-2)+1=4$; $1-(-1)=2$.

Примечание. Если первая цифра делимого больше первой цифры делителя, то движок перемещается вправо

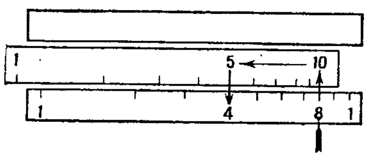

Рис. 128.

и в этом случае при подсчете порядка прибавляется единица.

Пример. $0{,}0842:42{,}1=0{,}002$;

$$-1-2+1=-2.$$

§ 189. Примеры с умножением и делением.

Пример 1. $\dfrac{0{,}215\cdot 17{,}5}{0{,}019}=198$

Стрелки указывают последовательность действий: сначала деление, затем умножение.

В этом примере и деление, и умножение были выполнены одной установкой движка, поэтому порядок результата равен сумме порядков сомножителей числителя минус порядок знаменателя. В нашем примере имеем:

$$(0{,}21\overrightarrow{5:0}{,}019)\overrightarrow{\cdot 1}7{,}5.$$

Подсчет порядка:

$$[0-(-1)+1]+2-1=3.$$

Пример 2. $\frac{54{,}2\cdot 0{,}42}{0{,}0154} = 1480.$

Выполнив деление 54,2:0,0154, получаем результат против начальной единицы движка (не прочитываем). Произвести умножение полученного результата на 0,42 не удается, так как пометка 4—2 на движке оказывается вне пределов основной шкалы *A*. В данном случае требуется «перекидка» движка, т. е. вместо начальной единицы движка нужно поставить конечную единицу движка. Порядок в таком случае равен порядку числителя минус порядок знаменателя плюс единица, так как при втором действии (умножении) движок перемещался влево.

Пример 3. $\frac{0{,}486\cdot 0{,}007\cdot 26{,}4}{0{,}124\cdot 2{,}5} = 0{,}29$

$$\{[(0{,}486:0{,}124)\cdot 0{,}007]:2{,}5\}:26{,}4.$$

В процессе выполнения действий пришлось делать одну перекидку движка влево; следовательно, порядок окончательного результата равен порядку числителя минус порядок знаменателя плюс единица:

$$0+(-2)+2-(0+1)+1=0.$$

§ 190. О делениях на шкале квадратов. Шкала квадратов состоит из двух равных по длине и совершенно одинаковых, следующих одна за другой, шкал: левая половина и правая половина. Каждая из них имеет масштаб 125 мм.

Правая половина начинается от указанной средней пометки 1 (иногда 10) и оканчивается пометкой 1 (иногда 100) на конце шкалы квадратов.

На каждой из этих шкал имеются деления трех разрядов.

1. Крупные деления—они отмечены цифрами 1, 2, 3, ..., 1. (Иногда на правой половине эти деления помечены числами 10, 20, 30, ..., 100.) Эти деления соответствуют первой значащей цифре трехзначного числа.

2. Промежутки между делениями, отмеченные цифрами, разделены на 10 частей, причем эти новые деления на участке 1—5 выступают несколько выше (на движке)

и ниже (на самой линейке) горизонтальных полосок. На участке 5—1 (10) эти деления, кроме пятого, не выступают за полоски.

Указанные новые деления соответствуют второй значащей цифре трехзначного числа.

3. Промежутки между последними делениями разбиваются, где на пять частей (между 1 и 2), где на две части (между 2 и 5), а где вовсе не разбиваются (между 5 и 1). Цена деления на шкале квадратов от 1 до 2 равна 0,02, от 2 до 5 равна 0,05 и от 5 до 10 равна 0,1.

Таким образом на этой шкале третью значащую цифру чаще всего приходится и устанавливать, и читать на глаз.

§ 191. Умножение и деление на шкале квадратов. Умножение и деление чисел можно производить также и на шкале квадратов. Принцип установок остается тот же, что и при вычислениях с помощью основной шкалы, только результаты получаются, вообще говоря, менее точными.

Следует различать два случая подсчета порядка при умножении на шкале квадратов. *Если произведение двух сомножителей находится не на той же подшкале, на которой взят первый сомножитель, то порядок его равен сумме порядков обоих сомножителей. Если же произведение оказывается на той же подшкале, на которой взят и первый сомножитель, то порядок произведения равен сумме порядков сомножителей минус единица.*

Примеры. 1) $2{,}4 \cdot 0{,}0075 = 0{,}018$. Подсчет порядка результата: $1 + (-2) = -1$.

2) $0{,}0018 \cdot 0{,}0345 = 0{,}0000621$. Подсчет порядка результата: $-2 + (-1) - 1 = -4$.

Также имеем два случая подсчета порядка при делении на шкале квадратов.

Если частное находится справа от делимого, то порядок частного равен разности порядков делимого и делителя. Если же частное находится слева от делимого, то порядок его равен разности порядков делимого и делителя плюс единица.

Примеры. 1) $450 : 0{,}06 = 7500$. Подсчет порядка результата: $3 - (-1) = 4$.

2) $3{,}6 : 2400 = 0{,}0015$. Подсчет порядка результата: $1 - 4 + 1 = -2$.

§ 192. Возведение чисел в квадрат. Пусть против пометки a на основной шкале A линейки находится пометка b на шкале квадратов B (рис. 129). Это означает, что отрезок от 1 до a равен отрезку от 1 до b. Но отрезок от 1 до a равен $250 \lg a$ мм, так как масштаб основной шкалы линейки равен 250 мм. Отрезок от 1 до b на шкале квадратов равен $125 \lg b$ мм, так как масштаб шкалы квадратов равен 125 мм, как было сказано раньше.

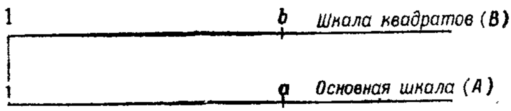

Рис. 129.

На основании равенства отрезков от 1 до a и от 1 до b имеем:

$$250 \lg a = 125 \lg b,$$

или

$$2 \lg a = \lg b,$$

или

$$\lg a^2 = \lg b,$$

откуда

$$a^2 = b.$$

Таким образом, *против любого отсчета на основной шкале A на шкале квадратов B находится квадрат этого числа.*

Замечание. Движок при возведении чисел в квадрат не участвует.

Установка при возведении чисел в квадрат

1. На основной шкале отмечаем визиром бегунка возводимое в квадрат число.

2. На шкале квадратов под визиром читаем квадрат данного числа.

Порядок квадрата данного числа определяется так:

а) если квадрат данного числа находится на правой половине шкалы квадратов, то порядок результата равен $2m$, где m — порядок основания;

б) если квадрат данного числа прочитывается на левой половине шкалы квадратов, то порядок его равен $2m-1$:

Порядок возводимого в квадрат числа	Порядок квадрата, если он находится	
	на левой половине	на правой половине
m	$2m-1$	$2m$

Примеры. 1) $200^2 = 40\,000$. Подсчет порядка

$$3 \cdot 2 - 1 = 5.$$

2) $0{,}00855^2 \approx 0{,}000073$. Подсчет порядка

$$(-2) \cdot 2 = -4.$$

3) $0{,}0295^2 \approx 0{,}00087$.
4) $0{,}604^2 \approx 0{,}365$.
5) $1{,}08^2 \approx 1{,}17$.

§ 193. Извлечение квадратного корня из чисел. Прежде чем приступить к самому извлечению квадратного корня на линейке, делим подкоренное число на грани по две цифры в каждой, начиная от запятой как влево, так и вправо. Если последняя грань справа от запятой окажется неполной, то приписываем к ней нуль. Первая слева грань может оказаться и неполной.

В случае правильной десятичной дроби первой гранью слева будем считать грань, следующую за чисто нулевыми гранями; она может начинаться с нуля и тогда считается неполной.

Например, у дроби 0,00268 первая слева грань 26 полная, а у дроби 0,000169 первая слева грань 01 неполная.

Нули, стоящие до значащих цифр в десятичной дроби, при установке на линейке в расчет, как уже было сказано, не принимаются. Они учитываются при определении места запятой в ответе, т. е. в корне.

Замечание. Движок при извлечении квадратного корня из чисел, так же как и при возведении в квадрат, не участвует.

Установка при извлечении квадратного корня из чисел

1. На шкале квадратов отмечаем визиром бегунка первые три значащие цифры (округленно) подкоренного

числа, причем, если первая слева грань полная, эту установку бегунка делаем на правой половине; если же первая грань неполная, установку делаем на левой половине.

2. На основной шкале читаем цифры искомого корня: этот корень отмечен тем же визиром бегунка.

Схематически установка на линейке при извлечении корня квадратного из чисел запишется так:

Первая слева грань	Половина шкалы квадратов, на которой производится установка подкоренного числа
Неполная 189, 0,0235, 0,00024	Левая
Полная 0,0012, 0,45, 0,4	Правая

Для установки подкоренного числа на линейке целесообразно, пользуясь таблицей умножения, определить первую цифру корня, т. е. извлечь корень из первой грани подкоренного числа, и записать ее на свое место в корне; эта цифра позволит контролировать правильность установки на линейке.

Определение числа цифр в целой части или места запятой в правильной десятичной дроби у искомого квадратного корня производится по следующему правилу:

Для чисел, бо́льших единицы, число цифр в целой части корня равно числу граней (полных и неполных) в целой части подкоренного числа; для чисел, меньших единицы, число нулей после запятой равно числу чисто нулевых граней в подкоренном числе.

Примеры.

$$\sqrt{49'00}=70;\quad \sqrt{72',5}=8{,}52;\quad \sqrt{7',25}=2{,}69;$$
$$\sqrt{0',00'00'35'5'}=0{,}00596;\quad \sqrt{0',00'01'69}=0{,}013;$$
$$\sqrt{0',00'26'8}=0{,}052.$$

§ 194. Возведение чисел в куб. Здесь используется шкала кубов (шкала C).

Шкала кубов разбита на три совершенно одинаковые подшкалы (левая, средняя и правая), которые следуют друг за другом. Деления на каждой из этих подшкал такого же характера, как и на подшкалах квадратов, только они соответственно меньше, так как масштаб шкалы кубов равен $\frac{250}{3}$ мм.

Замечание. Движок при возведении чисел в куб не участвует.

Установка при возведении чисел в куб

1. На основной шкале отмечаем визиром бегунка возводимое в куб число.

2. На шкале кубов читаем куб данного числа; он отмечен тем же визиром.

Порядок куба числа в зависимости от того, на какой из трех подшкал шкалы кубов он читается, определяется по следующей схеме:

Порядок возводимого в куб числа	Порядок куба числа, если он находится		
	на левой подшкале	на средней подшкале	на правой подшкале
m	$3m-2$	$3m-1$	$3m$

Примеры. 1) $20^3=8000$. Подсчет порядка: $2\cdot3-2=4$.

2) $0{,}003^3=0{,}000000027$. Подсчет порядка: $-2\cdot3-1=-7$.

3) $50^3=125\,000$. Подсчет порядка: $2\cdot3=6$.

4) $0{,}123^3=0{,}00966$. Подсчет порядка: $0\cdot3-2=-2$.

§ 195. Извлечение кубического корня из чисел. Для установки подкоренного числа на линейке делим его на грани по три цифры в каждой, начиная от запятой вправо и влево. Если последняя грань справа от запятой окажется неполной, нужно приписать к ней один или два нуля, чтобы грань стала полной. Первая слева грань может оказаться и неполной, т. е. содержать одну или две цифры. Следует заметить, что в случае правильной десятичной дроби первой гранью слева считается грань, следующая за чисто нулевыми гранями. Эта грань может начинаться с одного или двух нулей, и тогда она также считается неполной; таким образом, нули впереди не считаются за знаки.

Прежде чем приступить к установке на линейке подкоренного числа, надо выяснить, полная ли первая слева грань или неполная, и если неполная, то содержит ли она одну цифру или две.

Замечание. Движок при извлечении кубического корня из чисел не участвует.

Установка при извлечении кубического корня из чисел

1. В соответствии с тем, сколько цифр в первой слева грани подкоренного числа, установка этого числа визиром на шкале кубов делается по следующей схеме:

Число цифр в первой слева грани	одна	две	три
Подшкала шкалы кубов, на которой делается установка	левая	средняя	правая
Примеры	$\sqrt[3]{8}$	$\sqrt[3]{27}$	$\sqrt[3]{216}$
	$\sqrt[3]{1'728}$	$\sqrt[3]{42'300}$	$\sqrt[3]{156'000}$
	$\sqrt[3]{0',005}$	$\sqrt[3]{0',012}$	$\sqrt[3]{0',125}$
	$\sqrt[3]{0',000'002}$	$\sqrt[3]{0',000'095}$	$\sqrt[3]{0',000'125}$

2. Искомое число, т. е. кубический корень, читается на основной шкале, где оно отмечено тем же визиром.

Определение числа цифр в левой части искомого кубического корня, а также определение места запятой в нем, если он представляет собой правильную десятичную дробь, производится по следующему правилу:

Для чисел, больших единицы, число цифр в целой части корня кубического равно числу граней в целой части подкоренного числа;

для правильных десятичных дробей число нулей после запятой в корне кубическом равно числу чисто нулевых граней в подкоренном числе.

Примеры.

$$\sqrt[3]{8000}=20;\quad \sqrt[3]{0{,}008}=0{,}2;\quad \sqrt[3]{0',000'027}=0{,}03;$$
$$\sqrt[3]{0{,}036}=0{,}33;\quad \sqrt[3]{125'000'000}=500;\quad \sqrt[3]{0{,}7}=0{,}888.$$

§ 196. Простейшие комбинированные действия. При различного рода вычислениях приходится нередко встречаться с выражениями, содержащими несколько действий. Тогда целесообразно делать на линейке установки, которые скорее приводят к цели.

Разберем несколько примеров.

Пример 1. Вычислить $3{,}5^2 \cdot 720$.

Здесь установка такова: отмечаем визиром бегунка на основной шкале 3,5. Умножение на 720 производим уже на шкале квадратов, подводя конечную единицу движка под визирную линию, т. е. совмещая ее с квадратом числа 3,5. Далее, на шкале квадратов находим ответ: 8800 (против числа 720 на шкале квадратов движка).

Пример 2. Вычислить $\frac{2{,}3^2 \cdot 0{,}56}{0{,}0125}$.

2,3 устанавливаем на основной шкале, и далее все вычисление ведется на шкале квадратов. Ответ: 237.

Пример 3. Вычислить $\frac{\sqrt{3{,}85} \cdot 0{,}48}{25{,}6}$.

Вычисление ведется следующим образом. Отмечаем визиром бегунка на левой подшкале шкалы квадратов число 3,85 и подводим под этот визир число 25,6, взятое на основной шкале движка. После этого на основной шкале движка визиром фиксируем число 48. Тот же визир на основной шкале самой линейки отмечает искомый ответ: 0,0368.

Пример 4. Вычислить $\frac{3{,}35\sqrt[3]{44{,}4}}{17{,}8 \cdot 0{,}09}$.

Начинается вычисление с установки корня кубического из 44,4. Спустившись затем по визиру на основную шкалу, на ней и заканчиваем вычисление по аналогии с примером 3. Ответ: 7,40.

Пример 5. Вычислить $\left(\frac{108 \cdot 0{,}208}{3{,}08}\right)^3$.

Вычисление выражения в скобках ведется на основной шкале, а ответ читаем на шкале кубов. Он там отмечен визиром в его последнем положении при вычислении скобок. Ответ: 388.

Пример 6. Вычислить $\sqrt{\frac{48,8\cdot 0,00506}{12,6\cdot 0,0304}}$.

Ясно, что все вычисления под корнем целесообразно вести на шкале квадратов, чтобы окончательный ответ прочесть на основной шкале под визиром в его последнем положении. Ответ: 0,803.

Пример 7. В вопросах прикладного характера иногда встречаются выражения типа $a^{\frac{2}{3}}$. Вычисление здесь основывается на том, что $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$. Тогда делаем установку на шкале кубов для извлечения кубического корня из a и окончательный ответ читаем непосредственно на шкале квадратов, не спускаясь на основную шкалу. Например,

$$8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 4.$$

Вычислить $42,5^{\frac{2}{3}}$. На шкале кубов ставим 42,5, а на шкале квадратов та же визирная линия указывает ответ: 12,2.

Пример 8. Вычислить $(0,53)^{\frac{3}{2}}$.

В этом примере ставим визиром бегунка на шкале квадратов 0,53 и на шкале кубов тот же визир укажет ответ: 0,385. Спускаться на основную шкалу нет необходимости.

§ 197. Отыскание десятичных логарифмов чисел. Шкала логарифмов (самая нижняя шкала) представляет собой таблицу мантисс логарифмов.

Деления на шкале логарифмов

Шкала логарифмов D, в отличие от остальных шкал, равномерная. Она разделена на 10 отмеченных цифрами делений. Это деления, соответствующие первой цифре мантиссы логарифма. В отличие от остальных шкал, первое слева деление не 1, а 0.

Каждый из промежутков между указанными делениями разделен также на 10 частей. Эти новые деления, несколько выступающие над горизонтальной чертой, соответствуют второй цифре мантиссы логарифма.

Каждый из промежутков между последними делениями разбит на пять частей. Таким образом, цена каждого из этих делений равна двум единицам третьей значащей цифры мантиссы. Пользуясь шкалой D, можно производить всякого рода операции, требующие применения таблиц логарифмов.

Замечание. Движок при отыскании логарифмов чисел с помощью линейки не участвует.

Установка на линейке при отыскании мантиссы логарифма данного числа

1. На основной шкале отмечаем визиром бегунка данное число.

2. На шкале логарифмов тот же визир укажет искомую мантиссу логарифма.

Примеры. 1) $\lg 6750 = 3{,}830$; 2) $\lg 3{,}14 = 0{,}497$; 3) $\lg 0{,}00873 = \bar{3}{,}941$.

§ 198. Нахождение с помощью логарифмической линейки числа по данному его логарифму.

Замечание. При нахождении числа по данному его логарифму движок не участвует.

Установка при нахождении числа по данному его логарифму

1. На шкале логарифмов отмечаем визиром бегунка мантиссу данного логарифма.

2. Тот же визир одновременно на основной шкале укажет первые три (иногда и четыре) цифры искомого числа. Место запятой в этом числе или число нулей после найденных цифр определяется по характеристике логарифма данного числа согласно правилам алгебры.

Примеры. 1) $\lg x = 4{,}398$, $x = 25\,000$;

2) $\lg z = \bar{2}{,}714$, $z = 0{,}0518$; 3) $\lg N = 0{,}420$, $N = 2{,}63$.

§ 199. Примеры вычислеиий с помощью шкалы логарифмов. Вычислять на линейке с помощью шкалы логарифмов выражения, содержащие только умножение, деление, несложные степени (квадрат, куб) или корни квадратные и кубические, не имеет смысла. Это проще вычисляется с помощью ранее рассмотренных шкал.

Шкала логарифмов используется главным образом при вычислении сложных степенных выражений или выражений, содержащих логарифмы.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить выражение $2{,}57^{0,344}$. Имеем:

$$x = 2{,}57^{0,344}.$$

Находим:

$$\lg x = \lg(2{,}57^{0,344}) = 0{,}344 \lg 2{,}57 = 0{,}344 \cdot 0{,}41.$$

Перемножаем на линейке; получим

$$\lg x = 0{,}141,$$

откуда

$$x = 1{,}38.$$

Пример 2. Вычислить $x = 0{,}00256^{0,00256}$. Логарифмируем обе части. Получим:

$$\lg x = \lg(0{,}00256^{0,00256}) = 0{,}00256 \lg 0{,}00256 = 0{,}00256 \cdot \bar{3}{,}408.$$

Логарифм с отрицательной характеристикой и положительной мантиссой представим в виде отрицательной десятичной дроби. Будем иметь:

$$\bar{3}{,}408 = -3 + 0{,}408 = -2{,}592.$$

После этого продолжаем начатое вычисление:

$$\lg x = 0{,}00256 \cdot (-2{,}592) = -0{,}00663.$$

Преобразуем полученный логарифм так, чтобы мантисса его была положительной, а характеристика отрицательной. Получим:

$$\lg x = \bar{1}{,}993,$$

откуда

$$x = 0{,}985.$$

Пример 3. Вычислить $A = \left(\frac{231}{482}\right)^{0,41}$. Имеем:

$$\lg A = \lg\left(\frac{231}{482}\right)^{0,41} = 0{,}41 \lg\frac{231}{482}.$$

Дробь $\frac{231}{482}$ не логарифмируем. Делим на основной шкале 231 на 482 и против конца движка читаем на шкале логарифмов мантиссу логарифма частного 68; характеристика этого логарифма равна -1. Следовательно, имеем, что

$$\lg A = 0{,}41 \cdot \bar{1}{,}68 = 0{,}41\,(-0{,}32) = -0{,}132 = \bar{1}{,}868,$$

откуда

$$A = 0{,}738.$$

Пример 4. Вычислить

$$v = 4{,}8\left(\frac{20{,}5}{135}\right)^{\frac{1}{7}}.$$

Делим сначала 20,5 на 135 и полученное частное ставим в данное выражение. Получим:

$$v = 4{,}8 \cdot 0{,}152^{\frac{1}{7}}.$$

Логарифмируя обе части, будем иметь:

$$\lg v = \lg 4{,}8 + \frac{1}{7}\lg 0{,}152 =$$

$$= 0{,}681 + \frac{1}{7}\cdot \bar{1}{,}182 = 0{,}681 + \bar{1}{,}883 = 0{,}564,$$

откуда

$$v = 3{,}66.$$

Пример 5. Вычислить

$$v = \frac{9{,}5}{\sqrt[1{,}75]{2{,}45}}.$$

Имеем:

$$\lg v = \lg 9{,}5 - \frac{\lg 2{,}45}{1{,}75} = 0{,}978 - \frac{0{,}389}{1{,}75} =$$

$$= 0{,}978 - 0{,}222 = 0{,}756,$$

откуда

$$v = 5{,}70.$$

Пример 6. $v = \dfrac{43{,}5}{0{,}75^{0{,}67}\cdot 6{,}5^{0{,}22}}$.

Логарифмируем:

$$\begin{aligned}\lg v &= \lg 43{,}5 - (0{,}67\cdot \lg 0{,}75 + 0{,}22\lg 6{,}5) = \\ &= 1{,}638 - (0{,}67\cdot \bar{1}{,}875 + 0{,}22\cdot 0{,}813) = \\ &= 1{,}638 - [0{,}67\cdot(-0{,}125) + 0{,}179] = \\ &= 1{,}638 - 0{,}095 = 1{,}543,\end{aligned}$$

откуда

$$v = 34{,}9.$$

§ 200. Вычисление площади круга и обратная задача. Помимо делений общего характера, на многих линейках имеются штрихи, отмечающие числа, часто встречающиеся при вычислениях. Например, на основной шкале и шкале квадратов как на самой линейке, так и на движке отмечено специально число π.

На основной шкале движка в начале (между 11 и 12) имеется штрих c. Служит он для вычисления площади круга.

Площадь круга S через его диаметр d может быть выражена так:

$$S=\frac{\pi d^2}{4}=\left(\frac{d}{\sqrt{\frac{4}{\pi}}}\right)^2=\left(\frac{d}{c}\right)^2.$$

Через c, как видно, обозначена величина $\sqrt{\frac{4}{\pi}}$. Итак, имеем:

$$c=\sqrt{\frac{4}{\pi}}\approx 1,128.$$

При помощи штриха c площадь круга по данному диаметру определяется так:

1. Отмечаем на основной шкале линейки визиром бегунка данный диаметр.

2. Перемещаем движок так, чтобы пометка c на нем оказалась под визиром бегунка.

3. На шкале квадратов против начального или конечного деления движка читаем искомую площадь.

Порядок площади круга определяется как порядок квадрата числа. Если порядок диаметра обозначить через m, то порядок площади круга определяется по такой схеме:

Площадь круга находится на шкале квадратов	Против конечного деления движка на правой половине	Против начального деления движка	
		на левой половине	на правой половине
Порядок площади круга	$2m-2$	$2m-1$	$2m$

Примеры: 1) $d=103$ м, $S=8330$ м²;

2) $d=0,195$ м, $S=0,0299$ м²;

3) $d=457$ м, $S=164\,000$ м².

Чтобы по данной площади круга найти его диаметр, поступаем так:

1. На шкале квадратов визиром бегунка отмечаем данную площадь круга.

2. Подводим начальное или конечное деление движка под визир бегунка.

3. На основной шкале линейки против штриха c движка находим искомый диаметр.

Порядок диаметра круга определяется как порядок произведения $c\sqrt{S}$, где S — площадь круга.

Примеры. 1) $S=57{,}7$ м², $d=8{,}57$ м;

2) $S=8330$ м², $d=103$ м.

Вычисление площади круга по его диаметру с помощью штриха c позволяет упрощенно вычислять целый ряд выражений, связанных с площадью круга.

Пример 1. Вычислить объем кругового цилиндра, если диаметр его основания d и высота цилиндра H.

Имеем такую формулу для объема цилиндра:

$$V=S\cdot H=\frac{\pi d^2}{4}H, \text{ или } V=\left(\frac{d}{c}\right)^2 H.$$

Установка при вычислении объема цилиндра по этой формуле понятна. Найденную по данному диаметру площадь круга на шкале квадратов там же умножаем на H и получаем таким образом искомый объем цилиндра на шкале квадратов.

Например, если $d=20{,}3$ дм и $H=4{,}5$ дм, имеем $V=1460$ дм³.

Пример 2. По данному диаметру шара d вычислить поверхность шара Q.

Для поверхности шара Q имеем формулу

$$Q=4\pi\frac{d^2}{4}, \text{ или } Q=4\left(\frac{d}{c}\right)^2.$$

Установка

Находим на шкале квадратов площадь круга по данному диаметру и там же умножаем ее на 4.

Например, поверхность Q шара с диаметром $d=$ $=31{,}5$ см выразится так:

$$Q=3120 \text{ см}^2.$$

Пример 3. Диаметр шара равен d; вычислить объем шара. Имеем формулу для объема шара

$$V=\frac{1}{6}\pi d^3,$$

или

$$V=\frac{2}{3}\frac{\pi d^3}{4}=\frac{2}{3}\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)d=\frac{2}{3}\left(\frac{d}{c}\right)^2 d.$$

Установка

Находим на шкале квадратов площадь большого круга данного шара и там же умножаем ее на $\frac{2}{3}d$.

Например, объем шара диаметром в 146 см равен 1 630 000 см^3.

§ 201. Шкала синусов. На обратной стороне движка по верхнему краю нанесена шкала синусов S. На этой шкале длины отрезков шкалы, отсчитываемые от ее начала, пропорциональны сумме $(1 + \lg \sin x)$, так как шкала построена для функции

$$l = 250\,(1 + \lg \sin x).$$

Шкала синусов содержит деления от 5°44′ до 90°. Цена каждого мелкого деления дана в следующей таблице:

Промежуток	Цена мелкого деления	Промежуток	Цена мелкого деления
от 5°44′ до 10°	5′	от 40° до 70°	30′
от 10° до 20°	10′	от 70° до 80°	1°
от 20° до 40°	20′	от 80° до 90°	2,5°

Как видно из приведенной таблицы, цена мелкого деления весьма разнообразна, т. е. шкала синусов получается пестрая, и надо сперва привыкнуть к ее делениям, чтобы потом уверенно на ней откладывать данные углы и быстро прочитывать углы, соответствующие данному значению синуса.

§ 202. Нахождение синуса угла, заключенного между 5°44′ и 90°.

Установка

1. Поворачиваем линейку обратной стороной.
2. Выдвигаем движок вправо так, чтобы данный угол на шкале синусов S оказался против засечки, сделанной в вырезе линейки.
3. Поворачиваем линейку лицевой стороной.
4. Читаем на основной шкале движка A_1 против конечной единицы (или 10) основной шкалы линейки A

значение синуса, помня, что первая цифра означает десятые доли.

Примеры. 1) $\sin 20° = 0{,}342$; 2) $\sin 41°30' = 0{,}663$; 3) $\sin 65°30' = 0{,}910$.

§ 203. Нахождение угла по его синусу, если порядок синуса равен 0.

Установка

1. Держим перед собой лицевую сторону линейки.

2. Выдвигаем движок вправо так, чтобы на его основной шкале A_1 данное значение синуса оказалось против конечной единицы (или 10) шкалы A.

3. Переворачиваем линейку обратной стороной и в правой прорези линейки против засечки читаем на шкале синусов S угол.

Примеры. 1) $\sin x = 0{,}45$, $x = 26°40'$; 2) $\sin\alpha = 0{,}196$, $\alpha = 11°15'$; 3) $\sin y = 0{,}898$, $y = 64°$.

§ 204. Нахождение тангенса угла, заключенного между 5°44′ и 45°. Пользуемся шкалой тангенсов T, нанесенной по нижнему краю обратной стороны движка. Эта шкала содержит деления от 5°44′ до 45°, причем в промежутке от 5°44′ до 20° деления нанесены через каждые 5′, в промежутке от 20° до 45° цена мелкого деления равна 10′.

Установка

1. Переворачиваем линейку обратной стороной.

2. Выдвигаем движок влево так, чтобы данный угол, взятый на шкале тангенсов, оказался в левой прорези линейки, против насечки.

3. Переворачиваем линейку и на ее лицевой стороне против начальной единицы шкалы A прочитываем на шкале A_1 результат. Впереди прочитанного числа следует поставить нуль целых и запятую.

Примеры. 1) $\operatorname{tg} 17° = 0{,}306$; 2) $\operatorname{tg} 42°30' = 0{,}916$; 3) $\operatorname{tg} 8°40' = 0{,}152$.

§ 205. Нахождение угла по данному значению тангенса, если порядок тангенса равен 0.

Установка

1. Выдвигаем движок влево так, чтобы значение тангенса, взятое на шкале A_1 движка, оказалось против начальной единицы шкалы A.

2. Переворачиваем линейку обратной стороной и на шкале T против засечки в левом вырезе прочитываем угол.

Примеры. 1) $\operatorname{tg} x = 0{,}348$, $x = 19°10'$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}85$, $\alpha = 40°20'$; 3) $\operatorname{tg} y = 0{,}152$, $y = 8°40'$.

§ 206. Нахождение тангенса угла α, если $45° < \alpha < 84°17'$.

Установка

1. Переворачиваем линейку и выдвигаем движок влево так, чтобы против засечки в левом вырезе на шкале T оказался угол, дополнительный к данному.

2. Переворачиваем линейку лицевой стороной и на основной шкале линейки A против конечной единицы шкалы движка A_1 читаем значение тангенса, помня, что первая цифра означает целые единицы.

Примеры. 1) $\operatorname{tg} 48°30' = 1{,}13$;
2) $\operatorname{tg} 65°10' = 2{,}16$;
3) $\operatorname{tg} 83° = 8{,}14$.

Примечание. Если нужно решить обратную задачу, т. е. по данному значению тангенса найти соответствующий угол, то все операции производим в обратном порядке.

Пример. $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}54$. Найти α.

1. Откладываем визиром отсчет 2—5—4 на шкале A и подводим под визирную линию конечную единицу (10) шкалы A_1 движка.

2. Переворачиваем линейку и в левой прорези против засечки читаем угол $21°30'$.

Следовательно,

$$\alpha = 90° - 21°30' = 68°30'.$$

§ 207. Нахождение синуса и тангенса малых углов ($44' < \alpha < 5°44'$). Если угол α мал и не превышает $5°44'$, то его синус и тангенс столь мало разнятся между собой, что у них первые три десятичных знака совпадают; практически можно считать их равными между собой. Поэтому на обратной стороне движка посередине нанесена общая шкала для синусов и тангенсов малых углов — шкала ST.

Цена каждого мелкого деления этой шкалы представлена в следующей таблице:

Промежуток	Цена мелкого деления
от 44′ до 3°	1′
от 3° до 5°	2′
от 5° до 5°44′	5′

Пользоваться этой шкалой надо так же, как и шкалой синусов, помня, что порядок синуса или тангенса равен —1.

Примеры. 1) $\sin 2°40' = 0{,}0465$; 2) $\operatorname{tg} 3°20' = 0{,}0582$.

Обратно, если надо по данному значению синуса или тангенса, имеющему порядок —1, найти соответствующий угол, то выдвигаем движок вправо и откладываем визирной линией значение синуса или тангенса на шкале A_1 против конечной единицы шкалы A, переворачиваем линейку и на обратной стороне в правом вырезе против засечки на средней шкале для синусов и тангенсов находим величину угла.

Примеры. 1) $\sin x = 0{,}0435$, $x = 2°30'$; 2) $\operatorname{tg} y = 0{,}0740$; $y = 4°15'$.

Примечание. Если с помощью логарифмической линейки надо найти косинус или котангенс угла, то ищем синус или тангенс дополнительного угла.

Упражнения

Вычислить с помощью логарифмической линейки:

1. 1) $450 \cdot 48$; 2) $21{,}4 \cdot 2{,}38$; 3) $72{,}5 \cdot 0{,}306$; 4) $358 \cdot 472$; 5) $1{,}46 \cdot 0{,}0298$; 6) $51{,}5 \cdot 1{,}62$; 7) $0{,}202 \cdot 3{,}03$; 8) $8{,}05 \cdot 423$; 9) $419 \cdot 0{,}0358$; 10) $0{,}0177 \cdot 0{,}00785$; 11) $2{,}57 \cdot 0{,}00305$.

2. 1) $485:655$; 2) $62{,}5:1{,}25$; 3) $42{,}5:3{,}06$; 4) $0{,}305:0{,}00675$; 5) $246:0{,}188$; 6) $0{,}107:0{,}00315$; 7) $4{,}07:0{,}00805$; 8) $52\,300:19{,}8$; 9) $0{,}0344:75$; 10) $0{,}0404:3{,}25$; 11) $0{,}0543:0{,}00743$; 12) $2{,}02:0{,}001435$.

3. 1) $73{,}5 \cdot 0{,}124 \cdot 1{,}07$; 2) $73{,}5 \cdot 0{,}124 \cdot 4{,}3$; 3) $14{,}5 \cdot 0{,}00191 \cdot 7{,}78$; 4) $6{,}66 \cdot 5{,}55 \cdot 0{,}223$.

4. 1) $\dfrac{432 \cdot 0{,}0218}{0{,}00555}$; 2) $\dfrac{1{,}05 \cdot 42{,}4}{157}$; 3) $\dfrac{5{,}15 \cdot 0{,}0243}{0{,}00555 \cdot 66{,}8}$; 4) $\dfrac{0{,}0743 \cdot 4{,}36}{0{,}00045 \cdot 23{,}8}$; 5) $\dfrac{16{,}7 \cdot 0{,}952}{0{,}0044 \cdot 8{,}62}$; 6) $\dfrac{108 \cdot 0{,}208}{3080}$; 7) $\dfrac{0{,}00427 \cdot 6{,}45}{0{,}0196 \cdot 23{,}8}$; 8) $\dfrac{54{,}2 \cdot 0{,}42}{0{,}0154}$; 9) $\dfrac{2{,}74 \cdot 0{,}00515 \cdot 1{,}09}{85{,}6 \cdot 3{,}36 \cdot 0{,}0226}$; 10) $\dfrac{5{,}6 \cdot 0{,}27 \cdot 48{,}5}{0{,}07 \cdot 0{,}548}$.

5. 1) $13{,}5^2$; 2) $4{,}35^2$; 3) $0{,}222^2$; 4) $0{,}0308^2$; 5) 417^2; 6) 670^2; 7) $1{,}09^2$; 8) $0{,}0193^2$.

6. 1) $\sqrt{0{,}4}$; 2) $\sqrt{0{,}0777}$; 3) $\sqrt{4560}$; 4) $\sqrt{4{,}56}$; 5) $\sqrt{0{,}000248}$; 6) $\sqrt{0{,}00006}$.

7. 1) $\sqrt[3]{425}$; 2) $\sqrt[3]{4{,}25}$; 3) $\sqrt[3]{42{,}5}$; 4) $\sqrt[3]{0{,}425}$; 5) $\sqrt[3]{0{,}00425}$.

8. 1) $\dfrac{\sqrt{18{,}9}\cdot 4{,}56}{0{,}00735\cdot 8{,}07}$; 2) $\dfrac{\sqrt[3]{0{,}0495\cdot 6{,}08}}{15{,}8\cdot 0{,}00834}$;

3) $\dfrac{1920\cdot 0{,}00509\cdot \sqrt{6{,}24}}{4{,}07\cdot 70}$; 4) $\dfrac{50{,}8\cdot 0{,}0375\sqrt[3]{4{,}95}}{1860\cdot 0{,}00356\cdot 4{,}03}$;

5) $\left(\dfrac{38{,}7\cdot 1200\sqrt[3]{0{,}07}}{51{,}8\cdot 6{,}13\cdot 9}\right)^2$.

9. 1) $0{,}275^{0{,}324}$; 2) $0{,}489^{0{,}285}$; 3) $0{,}62^{-0{,}91}$; 4) $0{,}157^{0{,}00485}$; 5) $0{,}215^{0{,}505}$; 6) $0{,}064^{0{,}0521}$.

10. 1) $24{,}8\cdot 5^{0{,}28}\cdot 0{,}8^{0{,}67}$; 2) $30\cdot\left(\dfrac{2}{9}\right)^{0{,}125}$;

3) $5{,}48\cdot 0{,}6^{0{,}8}\cdot 75^{0{,}8}\cdot 55^{0{,}4}$; 4) $\dfrac{126\,500\cdot 400^{0{,}12}}{5^{0{,}28}\cdot 0{,}6^{0{,}6}\cdot 45^{0{,}65}\cdot 55^{1{,}5}}$.

11. 1) $(0{,}125)^{\frac{2}{3}}$; 2) $(65)^{\frac{2}{3}}$; 3) $(0{,}55)^{\frac{3}{2}}$.

12. 1) $\sqrt[7{,}06]{0{,}427}$; 2) $24{,}8\cdot 5^{0{,}22}\cdot 0{,}8^{0{,}67}$; 3) $\sqrt[3{,}25]{335}$; 4) $\left(\dfrac{1{,}85}{0{,}398}\right)^{0{,}25}$;

5) $\dfrac{0{,}289^{0{,}289}\cdot 0{,}625^{2{,}34}}{0{,}505^{2{,}48}}$.

13. Найти x: 1) $\dfrac{23{,}5}{0{,}0246}=\dfrac{x}{0{,}00566}$; 2) $\dfrac{0{,}243}{x}=\dfrac{6{,}54}{0{,}0156}$.

ГЛАВА XV

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

§ 208. **Комплексные числа.** Не всякое квадратное уравнение имеет корни среди действительных чисел; например, уравнение $x^2+1=0$, или $x^2=-1$, не имеет корней, так как нет такого действительного числа, квадрат которого был бы равен -1.

Задача решения квадратного уравнения вида $x^2+b^2=0$ $(b \neq 0)$ послужила одним из поводов для введения новых, так называемых *мнимых чисел.*

Введем новое число i — *мнимую единицу,* — обладающее тем свойством, что квадрат его равен -1:

$$i^2=-1.$$

Мы принимаем без доказательства, что можно ввести новые числа, так называемые *комплексные числа,* такие, что, присоединив их к известным нам уже действительным числам, получим множество чисел, над которыми можно по обычным правилам выполнять арифметические действия, и, кроме того, среди новых чисел будет существовать число i, обладающее свойством

$$i^2=-1.$$

Определение. *Числа вида $a+bi$, где a и b — два действительных числа, называются комплексными.* Число a называется *действительной частью,* bi — *мнимой частью* комплексного числа. Например:

$$3+2i\,(a=3;\ b=2);\ \frac{1}{2}-i\sqrt{2}\left(a=\frac{1}{2};\ b=-\sqrt{2}\right).$$

Два комплексных числа $a+bi$ и a_1+b_1i считаются *равными* в том и только в том случае, когда равны в отдельности их действительные и мнимые части, т. е. если

$$a+bi=a_1+bi_1, \quad \text{то} \quad a=a_1, \ b=b_1.$$

Если $a=0$, $b\neq 0$, то комплексное число $a+bi$ обращается в чисто мнимое число bi; b называется коэффициентом при мнимой единице.

Если $b=0$, то комплексное число $a+bi$ становится действительным числом, равным a.

Множество комплексных чисел содержит в себе как часть (подмножество) все действительные числа, а также все чисто мнимые числа; другими словами, действительные числа, а также мнимые числа представляют частные случаи комплексных чисел.

Например:

$$5=5+0\cdot i \qquad (a=5;\ b=0);$$
$$-3i=0+(-3)\,i \qquad (a=0;\ b=-3).$$

Примечание 1. С помощью мнимой единицы i может быть выражен квадратный корень из отрицательного числа. Например:

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4\,(-1)}=2i; \qquad \sqrt{-5}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{-1}=i\sqrt{5}.$$

Примечание 2. Введение комплексных чисел делает возможным решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом; например, уравнение $x^2-6x+13=0$ имеет два комплексных корня: $x_{1,2}=3\pm 2i$.

§ 209. Геометрическое представление комплексных чисел. Принято комплексное число $z=a+bi$ изображать точкой M на плоскости; абсцисса этой точки равна действительной части a, ордината равна b, т. е. коэффициенту при мнимой единице (рис. 130). Всякому комплексному числу соответствует определенная точка на плоскости, и, наоборот, всякой точке на плоскости соответствует определенное комплексное число.

Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками координатной плоскости xOy и множеством комплексных чисел. Точкам, лежащим на оси Ox, соответствуют действительные числа ($b=0$); точкам, лежащим на оси ординат, —мнимые числа. Так, например, комплексное число $3+4i$ изобразится точкой A (рис. 131), комплексное число $-3+2i$ изобразится точкой B, число $3i$ изобразится точкой C, число $-2i$ изобразится точкой D.

Определение. Два комплексных числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ называются *сопряженными*; они отличаются только знаком перед мнимой частью.

Пара сопряженных комплексных чисел изображается точками M и M_1, симметричными относительно оси абсцисс. На рис. 131 точки M и M_1 изображают сопряженные комплексные числа $2+3i$ и $2-3i$.

Можно дать еще и другое геометрическое истолкование комплексного числа $a+bi$.

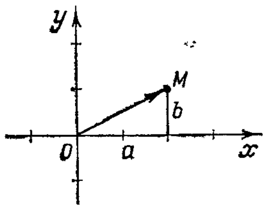

Рис. 130.

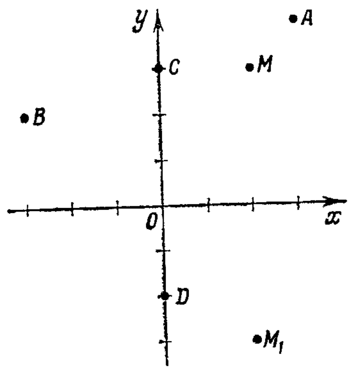

Рис. 131.

Соединим начало координат O с точкой $M(a; b)$ (рис. 130). Тогда вектор $\overrightarrow{OM}$ можно принять за геометрический образ комплексного числа $z = a + bi$, причем действительная часть a есть проекция вектора $\overrightarrow{OM}$ на ось Ox, коэффициент b при мнимой единице есть проекция вектора на ось Oy:

$$a = \text{пр}_x \overrightarrow{OM}; \quad b = \text{пр}_y \overrightarrow{OM}.$$

Оба способа геометрического представления комплексных чисел равноценны, так как всякой точке M плоскости xOy соответствует определенный вектор $\overrightarrow{OM}$, и, наоборот, всякому вектору $\overrightarrow{OM}$, начало которого совпадает с началом координат, соответствует определенная точка M — конец вектора.

Определение. *Модулем комплексного числа* $z = a + bi$ называется действительное число $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

В геометрическом истолковании модуль — это длина радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$. Число r положительно и обращается в нуль лишь в том случае, когда $a = 0$, $b = 0$.

Для обозначения модуля комплексного числа это число берется в вертикальные черточки, например:

$$|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5;$$
$$|-2-i|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}.$$

В частном случае при $b=0$ имеем:

$$|a+0\cdot i|=\sqrt{a^2+0^2}=|a|,$$

т. е. модуль действительного числа есть абсолютная величина этого числа. Поэтому модуль комплексного числа называют еще и абсолютной величиной этого числа.

Все комплексные числа, имеющие модуль, равный единице, изображаются точками единичного круга с центром в начале координат; например, числа

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i;$$
$$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;$$
$$-0{,}6+0{,}8i$$

изображаются точками M_1, M_2 и M_3 (рис. 132).

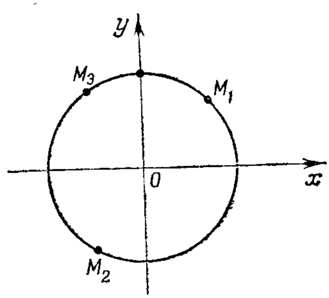

Рис. 132.

§ 210. Сложение комплексных чисел.

Определение. *Суммой двух комплексных чисел* $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ называется комплексное число $z=a+bi$, действительная и мнимая части которого равны соответственно сумме действительных и мнимых частей слагаемых чисел z_1 и z_2, т. е. $z=z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$.

Примеры.

1) $(2+3i)+(3-i)=(2+3)+(3-1)i=5+2i$;
2) $(4-5i)+(2+5i)=6$;
3) $(2m+ni)+(m-2ni)=3m-ni$.

Из приведенных примеров видно, что сложение комплексных чисел производится по обычным правилам сложения многочленов.

Из геометрического истолкования комплексных чисел как векторов следует, что сложение комплексных чисел приводится к сложению векторов по правилу, данному в § 88.

На рис. 133 изображено сложение комплексных чисел $z_1 = 3 + 2i$ и $z_2 = 2 + 4i$.

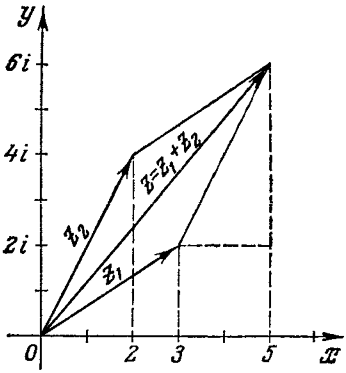

Рис. 133.

§ 211. Вычитание комплексных чисел.

Определение. Под *вычитанием* из комплексного числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ другого комплексного числа $z_2 = a_2 + b_2 i$ подразумевается отыскание такого числа $z = a + bi$, которое, будучи сложено с вычитаемым z_2, дает уменьшаемое z_1.

Таким образом,

$$z_1 - z_2 = z,$$

если $z + z_2 = z_1$, или

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = a + bi$$

при условии, что

$$a + bi + a_2 + b_2 i = a_1 + b_1 i.$$

Производя сложение, получаем:

$$(a + a_2) + (b + b_2) i = a_1 + b_1 i.$$

Применяя условия равенства двух комплексных чисел, получаем:

$$a + a_2 = a_1, \quad \text{откуда} \quad a = a_1 - a_2,$$
$$b + b_2 = b_1, \quad \text{откуда} \quad b = b_1 - b_2.$$

При вычитании двух комплексных чисел отдельно вычитаются их действительные и мнимые части.

Пример.

$$3-2i-(1+3i)=(3-1)+(-2-3)i=2-5i.$$

В геометрическом истолковании вычитание комплексных чисел означает вычитание соответствующих им векторов. На рис. 134 изображено вычитание из $z_1=5+3i$ числа $z_2=-2+i$.

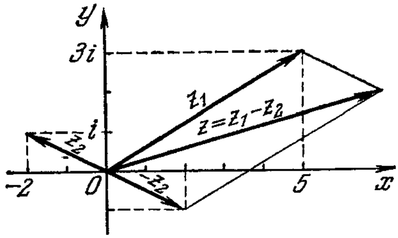

Рис. 134.

§ 212. Умножение комплексных чисел. Два комплексных числа $a+bi$ и a_1+b_1i перемножаются по обычному правилу умножения многочленов; в полученном результате i^2 заменяется на -1 и отделяется действительная часть от мнимой:

$$(a+bi)(a_1+b_1i)=aa_1+a_1bi+ab_1i+bb_1i^2=$$
$$=\underbrace{aa_1-bb_1}_{\text{действительная часть}}+\underbrace{(a_1b+ab_1)}_{\text{мнимая часть}}i.$$

Замечаем, что *произведение двух комплексных чисел есть также число комплексное.*

Это правило умножения распространяется и на большее число комплексных множителей.

Примеры. 1) $(2-3i)(3+5i)=6-9i+10i-15i^2=$ $=6+i-15\cdot(-1)=21+i$;

2) $(4+i)\cdot 2i=8i+2i^2=-2+8i$.

Произведение комплексных чисел может оказаться действительным числом. В частности, это будет при умножении двух сопряженных комплексных чисел:

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+abi-abi-b^2i^2=a^2+b^2=r^2,$$

где r — модуль каждого из сомножителей.

Итак, *произведение двух сопряженных комплексных чисел есть число действительное, равное квадрату их общего модуля.*

Приведем еще пример, показывающий, что в результате действий над комплексными числами могут получиться интересные соотношения в области действительных чисел.

Имеется два произведения:

$$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(bc+ad)i$$

и

$$(a-bi)(c-di)=ac-bd-(bc+ad)i.$$

Перемножив эти равенства почленно, получим:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(bc+ad)^2.$$

Последнее равенство содержит исключительно действительные числа и выражает следующее соотношение из теории чисел: при умножении двух чисел, каждое из которых есть сумма двух квадратов, получается произведение, представляющее собой также сумму двух квадратов.

Примеры. 1) $(1+4)(9+25)=5\cdot 34=170=1^2+13^2$; 2) $(25+4)(1+9)=29\cdot 10=290=1^2+17^2$.

§ 213. Деление комплексных чисел. *Частным от деления двух комплексных чисел* $a+bi$ и a_1+b_1i называется такое комплексное число $x+yi$, которое, будучи умножено на делитель, дает в произведении делимое.

Таким образом, если одновременно коэффициенты a_1 и b_1 не равны нулю, то, полагая $\frac{a+bi}{a_1+b_1i}=x+yi$, имеем:

$$a+bi=(a_1+b_1i)(x+yi),$$

или

$$a+bi=a_1x-b_1y+(b_1x+a_1y)i.$$

Из условия равенства двух комплексных чисел следует:

$$\begin{cases} a_1x-b_1y=a, \\ b_1x+a_1y=b. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим:

$$x=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}, \quad y=\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{a+bi}{a_1+b_1i}=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}i.$$

Проще этот результат можно получить умножением делимого и делителя на сопряженное делителю число:

$$\frac{a+bi}{a_1+b_1i}=\frac{(a+bi)(a_1-b_1i)}{(a_1+b_1i)(a_1-b_1i)}=\frac{aa_1+bb_1+(a_1b-ab_1)i}{a_1^2+b_1^2}=$$

$$=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}i.$$

Этим правилом деления и будем руководствоваться в дальнейшем.

Примеры.

1) $\frac{2+3i}{2+i}=\frac{(2+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{4-3i^2+6i-2i}{2^2+1}=\frac{7}{5}+\frac{4}{5}i;$

2) $\frac{3-4i}{4+3i}=\frac{(3-4i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=\frac{12-12-16i-9i}{16+9}=\frac{-25i}{25}=-i.$

§ 214. Степени мнимой единицы. Пользуясь равенством $i^2=-1$, легко определить любую целую положительную степень мнимой единицы. Имеем:

$$i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i;\quad i^4=i^2\cdot i^2=1;\quad i^5=i^4\cdot i=i;$$
$$i^6=i^4\cdot i^2=-1;\qquad i^7=-i;\qquad i^8=1 \text{ и т. д.}$$

Это показывает, что значения степени i^n, где n — целое положительное число, периодически повторяются при увеличении показателя на 4. Поэтому, чтобы возвести число i в целую положительную степень, надо показатель степени разделить на 4 и возвести i в степень, показатель которой равен остатку от деления.

Примеры.

$$i^{25}=i^{4\cdot 6+1}=i^{24}\cdot i^1=1\cdot i=i;$$

$$i^{38}=i^{36+2}=i^2=-1,\quad i^{51}=i^{48}\cdot i^3=-i.$$

Вообще

$$i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=i^2=-1,$$
$$i^{4n+3}=i^3=-i,\quad i^{4n}=1.$$

§ 215. Возведение в степень комплексного числа. Возведение комплексного числа в целую положительную степень производится по правилу возведения двучлена в соответствующую степень, так как оно представляет собой частный случай умножения одинаковых комплексных множителей.

Примеры. $(a+bi)^2=a^2+2abi+b^2i^2=(a^2-b^2)+2abi;$
$(a+bi)^3=a^3+3a^2bi+3ab^2i^2+b^3i^3=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i.$

§ 216. Извлечение квадратного корня из комплексного числа. Пусть требуется извлечь квадратный корень из числа $a+bi$. Это значит, что требуется найти такое комплексное число $x+yi$, квадрат которого равен $a+bi$. Имеем:

$$\sqrt{a+bi}=x+yi,$$

где x и y — действительные числа. Тогда

$$a+bi=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi.$$

Применяя условие равенства двух комплексных чисел, получим:

$$x^2-y^2=a, \quad 2xy=b.$$

Решаем эту систему относительно неизвестных x и y. Из второго уравнения находим, что $y=\frac{b}{2x}$. Тогда

$$x^2-\frac{b^2}{4x^2}=a,$$

откуда

$$4x^4-b^2-4ax^2=0,$$

или

$$4x^4-4ax^2-b^2=0;$$

следовательно,

$$x^2=\frac{2a\pm\sqrt{4a^2+4b^2}}{4}; \quad x^2=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Так как $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant a$, то перед радикалом надо взять знак плюс, чтобы x^2 было положительным числом или нулем; следовательно,

$$x^2=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}. \tag{1}$$

Подставляем это значение x^2 в уравнение $x^2-y^2=a$, получим:

$$y^2=\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}. \tag{2}$$

Значения x и y находим из равенств (1) и (2):

$$x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \tag{3}$$

и

$$y=\pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}. \tag{4}$$

Уравнение $2xy=b$ показывает, что произведение xy имеет тот же знак, какой имеет число b. Следовательно, если $b>0$, то x и y имеют одинаковые знаки, если $b<0$, то x и y имеют разные знаки. Поэтому для $b>0$ имеем:

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right);$$

для $b<0$ имеем:

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}-i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right).$$

На практике этими формулами не пользуются, а проводят приведенный ход вычислений x и y в каждом отдельном случае.

Пример 1. $\sqrt{1+2i}=x+yi;$

$$1+2i=x^2-y^2+2xyi;\quad \begin{cases} x^2-y^2=1, \\ xy=1; \end{cases}$$

$$y=\frac{1}{x};\quad x^2-\frac{1}{x^2}=1;\quad x^4-x^2-1=0;\quad x^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2};$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}};\quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}-y^2=1;$$

$$y^2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\quad y=\pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Окончательно

$$\sqrt{1+2i}=\pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right).$$

Пример 2. $\sqrt{i}=x+yi;$

$$i=x^2-y^2+2xyi;\quad \begin{cases} x^2-y^2=0, \\ 2xy=1; \end{cases}$$

$$y=\frac{1}{2x};\quad x^2-\frac{1}{4x^2}=0;\quad 4x^4-1=0;\quad x^4=\frac{1}{4};\quad x^2=\frac{1}{2};$$

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}};\quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}};\quad \sqrt{i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i).$$

Проверка.

$$\left[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right]^2=\frac{1}{2}(1+2i+i^2)=\frac{1}{2}(1+2i-1)=i.$$

В § 222 будет показан более удобный способ извлечения корня из комплексного числа.

§ 217. Тригонометрическая форма комплексного числа. Как уже было сказано в § 209, комплексное число $a+bi$, не равное нулю, изображается радиусом-вектором $\overrightarrow{OM}$, причем длина этого вектора есть модуль комплексного числа (рис. 135):

$$r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Угол φ между положительным направлением оси Ox и вектором $\overrightarrow{OM}$ называется *аргументом комплексного числа* $a+bi$. Этот угол принято отсчитывать от оси Ox к вектору $\overrightarrow{OM}$, что показано стрелкой на чертеже. Если комплексное число равно нулю, то вектор $\overrightarrow{OM}$ обращается в точку (нуль-вектор) и говорить о его направлении нет смысла. Поэтому считают, что число нуль не имеет аргумента.

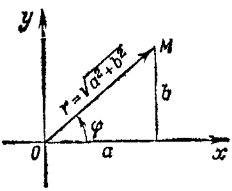

Рис. 135.

Очевидно, что каждое комплексное число, не равное нулю, имеет бесконечное множество значений аргумента; эти значения отличаются друг от друга на целое число полных оборотов, т. е. на величину $2\pi k$, где k — любое целое число; например, аргументом комплексного числа $2+2i$ являются углы вида $\frac{\pi}{4}+2\pi k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$).

Значение аргумента, взятое в пределах первой окружности, т. е. от 0 до 2π, называется *главным*.

Так, например, для комплексного числа $2+2i$ главное значение аргумента равно $\frac{\pi}{4}$, для числа $-2+2i$ главное значение аргумента равно $\frac{3}{4}\pi$. Для чисел $3, -3, i, -i$ главные значения равны соответственно $0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$.

По рис. 135 имеем:

$$a=r\cos\varphi, \quad b=r\sin\varphi,$$

откуда

$$a+bi=r\cos\varphi+ir\sin\varphi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Выражение $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой* комплексного числа, в отличие от формы $a+bi$, называемой *алгебраической*.

Для определения аргумента φ пользуемся формулами

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} \text{ и } \sin\varphi = \frac{b}{r} \quad (r = \sqrt{a^2+b^2}).$$

В зависимости от знака действительной и мнимой частей выбирается соответствующая четверть, в которой должен оканчиваться угол φ.

Пример 1. Представить в тригонометрической форме число $-1+i\sqrt{3}$.

$$r = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2; \quad \cos\varphi = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\left(\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} \text{ и } \cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}\right).$$

Так как $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то φ следует взять равным $\frac{2\pi}{3}$. Следовательно,

$$-1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Пример 2. Представить в тригонометрической форме число $-1-i$.

Имеем:

$$r = \sqrt{2}; \quad \cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\varphi = \frac{5\pi}{4}$.

Итак, $-1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

Пример 3. Представить в тригонометрической форме число 1.

Имеем $r=1$, $\varphi=0$; следовательно, $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$, или $1 = \cos 2\pi k + i\sin 2\pi k$.

§ 218. Умножение комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме. Перемножим два комплексных числа:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

и

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Получим:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i r_1 r_2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \\ + i r_1 r_2 \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - r_1 r_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2.$$

Короче:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Результат показывает, что *модуль произведения равен произведению модулей сомножителей, а аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей.*

§ 219. Геометрическое истолкование умножения комплексных чисел. На рис. 136 комплексному числу $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ соответствует вектор $\overrightarrow{OM_1}$, числу $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ соответствует вектор $\overrightarrow{OM_2}$.

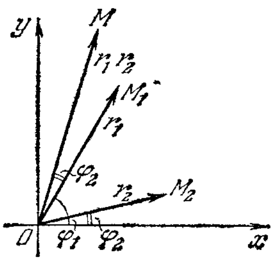

Рис. 136.

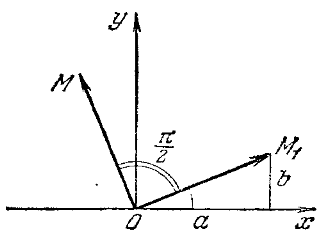

Рис. 137.

Произведению

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

соответствует вектор $\overrightarrow{OM}$.

Вектор $\overrightarrow{OM}$ получается из вектора $\overrightarrow{OM_1}$ поворотом на угол φ_2 и изменением его длины (r_1) в r_2 раз. Если $r_2 > 1$, то говорят, что вектор $\overrightarrow{OM_1}$ подвергается *растяжению*, при $r_2 < 1$ — *сжатию*.

В частном случае, когда комплексное число z_1 умножается на i, то вектор $\overrightarrow{OM_1}$ поворачивается на прямой угол $\left(\frac{\pi}{2}\right)$, сохраняя при этом длину r_1 без изменения (рис. 137).

Пример.

$2(\cos\varphi+i\sin\varphi)\,5(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)=10(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi).$

Полученное правило остается в силе для любого числа сомножителей.

§ 220. Деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме. Найдем модуль и аргумент частного

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}.$$

Умножим числитель и знаменатель правой части на $(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)$; получим

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2)}=$$
$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

Следовательно, *модуль частного равен частному модулей делимого и делителя, а аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя.*

Пользуясь этим правилом, можно показать, что

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-1}=\frac{1}{\cos\varphi+i\sin\varphi}=\frac{\cos 0+i\sin 0}{\cos\varphi+i\sin\varphi}=$$
$$=\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi).$$

Короче:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-1}=\cos\varphi-i\sin\varphi.$$

§ 221. Возведение в степень комплексного числа, заданного в тригонометрической форме. Так как n-я степень, где n — целое положительное число, представляет произведение n равных сомножителей, то по правилу умножения комплексных чисел получим:

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),$$

или

$$r^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

После сокращения имеем:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi. \qquad (1)$$

Эта формула носит название *формулы Муавра.* В частности, она дает возможность получить косинус и синус дуг, кратных данной.

Положим $n=2$, тогда $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2=\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi$, или

$$\cos^2\varphi-\sin^2\varphi+2i\sin\varphi\cos\varphi=\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi,$$

откуда

$$\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi \quad \text{и} \quad \sin 2\varphi=2\sin\varphi\cos\varphi.$$

При $n=3$ получим:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3=\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi,$$

или

$$\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi+i(3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi)=$$
$$=\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi,$$

откуда

$$\cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi,$$

или

$$\cos 3\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi;$$
$$\sin 3\varphi=3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi,$$

или

$$\sin 3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi.$$

Если обе части последнего равенства предыдущего параграфа возвести в степень n, получим:

$$[(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-1}]^n=[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)]^n,$$

или

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-n}=\cos(-n\varphi)+i\sin(-n\varphi).$$

Последнее равенство показывает, что формула (1) справедлива и для целых отрицательных показателей.

§ 222. Извлечение корня из комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме. Пусть требуется извлечь корень n-й степени из комплексного числа $Z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Это значит, что надо найти такое комплексное число $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$, которое, будучи возведено в n-ю степень, даст число Z, т. е.

$$[\rho(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

или

$$\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

На основании условия равенства двух комплексных чисел заключаем, что модули их должны быть равны, а аргументы могут отличаться на число, кратное 2π, т. е. $r=\rho^n$; $n\theta=\varphi+2\pi k$, где k — целое число. Отсюда получим:

$$\rho=\sqrt[n]{r};\ \theta=\frac{\varphi+2\pi k}{n}.$$

Таким образом, результат извлечения корня представится так:

$$z=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=$$
$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \quad (1)$$

где $\sqrt[n]{r}$ — арифметическое значение корня.

Если в формуле (1) числу k будем давать значения: 0, 1, 2, 3, ..., $n-1$, то получим следующие n значений корня:

$$\text{при } k=0 \quad z_0=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right);$$

$$\text{при } k=1 \quad z_1=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)\right];$$

$$\text{при } k=2 \quad z_2=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{4\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{4\pi}{n}\right)\right];$$

. . . .

$$\text{при } k=n-1 \quad z_{n-1}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)+\right.$$
$$\left.+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right].$$

Аргументы этих значений корня, т. е. углы

$$\frac{\varphi}{n};\ \frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n};\ \frac{\varphi}{n}+\frac{4\pi}{n};\ \ldots;\ \frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n},$$

идут в возрастающем порядке; нетрудно убедиться в том, что каждый из них меньше полного угла, или 2π. Для этого достаточно показать, что наибольший из них

$$\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}<2\pi.$$

В самом деле, главное значение аргумента комплексного числа меньше полного угла: $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, а потому

$$\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}<\frac{2\pi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}=2\pi;$$

$$\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}<2\pi.$$

Из тригонометрии известно, что в пределах одной окружности два различных угла не могут иметь одновременно одинаковые значения синуса и одинаковые значения косинуса; *следовательно, все n значений корня будут различны.*

При дальнейшем увеличении числа k $(k=n,\ n+1,\ n+2,\ \ldots)$ новых значений корня уже не получим; например, при $k=n$ имеем:

$$z_n=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi n}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi n}{n}\right)=$$

$$=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)\right]=$$

$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)=z_0.$$

Получилось то же значение что и при $k=0$. Если положить $k=n+1$, то получим z_1, при $k=n+2$ получим z_2 и т. д.

Пример 1. $\sqrt{i}$. Представляем i в тригонометрической форме:

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\ (r \text{ равно } 1);$$

$$\sqrt{i}=\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}\right).$$

При $k=0$ имеем:

$$\sqrt{i}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

При $k=1$ получим:

$$\sqrt{i}=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

Этот пример был решен другим способом в § 216.

Пример 2. $z=\sqrt[4]{-1}$. Имеем:

$$-1=\cos\pi+i\sin\pi.$$

Тогда

$$\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{\cos\pi+i\sin\pi}=\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4};$$

при $k=0$ получаем:

$$z_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i);$$

при $k=1$ получаем:

$$z_2=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i);$$

при $k=2$ получаем:

$$z_3=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i);$$

при $k=3$ получаем:

$$z_4=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Пример 3. Найти четыре значения $x=\sqrt[4]{1}$.

$$\sqrt[4]{1}=\sqrt{1(\cos 0+i\sin 0)}=$$

$$=\sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{4}+i\sin\frac{0+2\pi k}{4}\right)=\cos\frac{k\pi}{2}+i\sin\frac{k\pi}{2}=x_k.$$

Полагаем $k=0$; 1; 2; 3. Получим:

$$x_1=\cos 0+i\sin 0=1;$$

$$x_2=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i;$$

$$x_3=\cos\pi+i\sin\pi=-1;$$

$$x_4=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i.$$

Дадим геометрическое истолкование полученных результатов. Построим точки, соответствующие найденным четырем значениям.

Это будут точки A_1, A_2, A_3, A_4, представляющие собой вершины вписанного в данный круг квадрата (рис. 138).

Подобным образом, извлекая корень кубический из 1, найдем три комплексных числа:

$$\cos 0 + i \sin 0,\ \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \quad \text{и} \quad \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}.$$

Если построим соответствующие им точки, то эти точки окажутся на окружности единичного радиуса и явятся вершинами правильного вписанного треугольника (рис. 139).

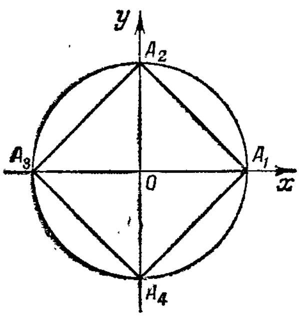

Рис. 138.

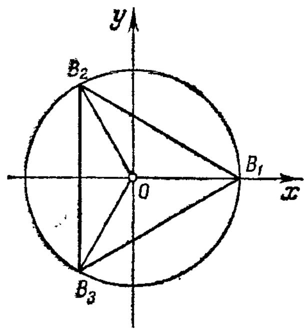

Рис. 139.

Геометрически извлечение корня n-й степени из 1 сводится к построению правильного n-угольника, вписанного в круг единичного радиуса, причем, если n — нечетное число, то одна из вершин окажется на оси абсцисс вправо от 0; если же n — четное, то имеются две вершины, расположенные на оси абсцисс.

§ 223. Показательная форма комплексного числа. В различных разделах современной математики, а также ее приложениях (электротехника, радиотехника, гидравлика и т. д.) применяется *показательная форма* комплексного числа. В основе показательной формы лежит формула Эйлера, устанавливающая связь между тригонометрическими функциями действительного аргумента и показательной функцией мнимого аргумента.

Приводим *первую формулу Эйлера* без вывода:

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{1}$$

где число e, принятое за основание натуральных логарифмов (см. §§ 175 и 240), иррационально ($e \approx 2{,}718$;

это число играет в математике роль, не меньшую, чем число π).

Если в формуле $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ произведем замену выражения $\cos\varphi + i\sin\varphi$ на $e^{\varphi i}$, то получим $z = re^{\varphi i}$. Это и есть показательная форма комплексного числа z.

В этой записи r — модуль комплексного числа, φ — аргумент комплексного числа z.

Заменив в формуле Эйлера (1) φ на $(-\varphi)$, получим *вторую формулу Эйлера*

$$e^{-\varphi i} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi),$$

или

$$e^{-\varphi i} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \tag{2}$$

Пример 1. Представить в показательной форме комплексное число $z = 3 + 4i$.

Модуль $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Находим аргумент φ.

Так как $\operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{3}$, то $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} \approx 0{,}93$, $3 + 4i = 5e^{0{,}93i}$.

Пример 2. $z = \sqrt{3} - i$.

Находим модуль: $|z| = \sqrt{3+1} = 2$. Аргумент φ (главное значение) будем находить из соотношения $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Следовательно, $\varphi = -\frac{\pi}{6}$; $\sqrt{3} - i = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$.

Пример 3. $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i}$.

Пример 4. $-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{\pi i}$.

Пример 5. Вычислить e^{2+i}.

Имеем $e^{2+i} = e^2 \cdot e^i = e^2(\cos 1 + i\sin 1) = e^2(0{,}540 + i\cdot 0{,}842) = 7{,}39(0{,}540 + i\cdot 0{,}842) \approx 3{,}99 + 6{,}22i$.

Из формул Эйлера

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{1}$$

$$e^{-\varphi i} = \cos\varphi - i\sin\varphi \tag{2}$$

можно получить важные следствия.

Складывая почленно равенства (1) и (2), получаем $e^{\varphi i} + e^{-\varphi i} = 2\cos\varphi$, откуда

$$\cos\varphi = \frac{e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}}{2}. \tag{3}$$

Почленно вычитая из равенства (1) равенство (2), имеем

$e^{\varphi i}-e^{-\varphi i}=2i\sin\varphi$, откуда

$$\sin\varphi=\frac{e^{\varphi i}-e^{-\varphi i}}{2i}. \qquad (4)$$

Равенства (3) и (4) также называются *формулами Эйлера*; они выражают тригонометрические функции действительного аргумента φ через показательные функции мнимого аргумента. Формулы (3) и (4) справедливы и тогда, когда φ заменяется любым комплексным числом z; такая замена дает:

$$\cos z=\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}, \qquad (5)$$

$$\sin z=\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}; \qquad (6)$$

равенства (5) и (6) принимаются за определения косинуса и синуса комплексного аргумента.

Пример. Вычислить $\cos i$.

Полагая в равенстве (5) $z=i$, получим:

$$\cos i=\frac{e^{i\cdot i}+e^{-i\cdot i}}{2}=\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}.$$

Оказалось, что $\cos i$ — число действительное, большее 1, чему не следует удивляться.

Вычислим $\sin i$:

$$\sin i=\frac{e^{-1}-e^{1}}{2i}=\frac{i(e^{-1}-e^{1})}{-2}.$$

Таким образом, $\sin i$ — мнимое число.

Покажем, что тригонометрические функции комплексного аргумента также периодичны, причем период $T=2\pi$. Действительно,

$$\cos(z+2\pi)=\frac{e^{(z+2\pi)i}+e^{-(z+2\pi)i}}{2}=$$

$$=\frac{e^{zi}\cdot e^{2\pi i}+e^{-zi}\cdot e^{-2\pi i}}{2}=\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}=\cos z,$$

так как по формулам Эйлера

$$e^{2\pi i}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1,$$

$$e^{-2\pi i}=\cos 2\pi-i\sin 2\pi=1.$$

Легко обнаружить периодичность показательной функции комплексного аргумента, ее период $T=2\pi i$. Действительно, $e^{z+2\pi i}=e^z\cdot e^{2\pi i}=e^z\cdot 1=e^z$.

Примечательно то, что все формулы обычной тригонометрии сохраняют свою силу в комплексной области. Например,

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

Это легко проверить:

$$\left(\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2zi}+2+e^{-2zi}}{4} + \frac{e^{2zi}-2+e^{-2zi}}{-4} =$$

$$= \frac{e^{2zi}+2+e^{-2zi}-e^{2zi}+2-e^{-2zi}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Точно так же можно проверить, что $\sin 2z = 2\sin z \cdot \cos z$, $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$, и ряд других вам известных формул для тригонометрических функций действительного аргумента.

§ 224. Различные задачи на комплексные числа.

Пример 1. Найти два действительных числа x и y, удовлетворяющих равенству

$$\frac{2i}{x} + iy - 2 = 3i - \frac{3}{x} + y.$$

Данное равенство перепишем в виде

$$-2 + \left(\frac{2}{x} + y\right)i = \left(y - \frac{3}{x}\right) + 3i.$$

На основании условия равенства двух комплексных чисел имеем систему

$$\begin{cases} y - \frac{3}{x} = -2, \\ \frac{2}{x} + y = 3, \end{cases}$$

откуда находим:

$$x = 1, \quad y = 1.$$

Пример 2. Найти комплексное число z, равное квадрату сопряженного ему комплексного числа, т. е.

$$z = \bar{z}^2. \qquad (1)$$

Пусть $z=x+yi$, тогда $\bar{z}=x-yi$. Равенство (1) принимает вид

$$x+yi=(x-yi)^2,$$
$$x+yi=x^2-y^2-2xyi,$$

откуда

$$\begin{cases} x=x^2-y^2, \\ y=-2xy, \end{cases}$$

где снова мы воспользовались условиями равенства двух комплексных чисел.

Если системе придать вид

$$\begin{cases} x^2-y^2=x, \\ y(1+2x)=0, \end{cases}$$

то ее решение сводится к решению следующих двух более простых систем:

$$\begin{cases} x^2-y^2=x, \\ y=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x^2-y^2=x, \\ 1+2x=0. \end{cases}$$

Решая каждую из них, получим:

$$\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=-\frac{1}{2}, \\ y_3=\frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=-\frac{1}{2}, \\ y_4=-\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, поставленному условию удовлетворяют четыре числа:

$$z_1=0+0\cdot i=0, \qquad z_2=1+0\cdot i=1,$$
$$z_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad z_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Пример 3. Истолковать геометрически произведение $(2+2i)i$.

Комплексному числу $z_1=2+2i$ соответствует вектор $\boldsymbol{r}_1=\{2, 2\}$, причем вектор $\boldsymbol{r}_1$ образует с осью Ox угол $\varphi=\frac{\pi}{4}$ $\left(\operatorname{tg}\varphi=\frac{2}{2}=1\right)$.

Комплексное число i изображается единичным вектором $\boldsymbol{r}_2=\{0, 1\}$, направленным под углом $\frac{\pi}{2}$ к оси Ox.

Согласно данному в § 219 пояснению, умножение числа $(2+2i)$ на i означает поворот вектора $\boldsymbol{r}_1$ на угол $\frac{\pi}{2}$ в направлении против движения часовой стрелки с сохранением длины вектора.

Следовательно, данному произведению соответствует вектор $\boldsymbol{r}_3$, образующий с осью угол, равный $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}$. Длина вектора $\boldsymbol{r}_3$ равна длине вектора $\boldsymbol{r}_1$, т. е. $|\boldsymbol{r}_1|=$ $=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

Проверка: $(2+2i)\,i=-2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Пример 4. Какой геометрический смысл имеет неравенство $|z|<1$?

Модуль комплексного числа z, т. е. $|z|$, означает расстояние от начала координат до точки z; раз это расстояние меньше 1, то опишем из начала координат окружность радиусом $r=1$.

Все внутренние точки круга изображают комплексные числа z, для которых $|z|<1$. Для точек, лежащих на окружности, имеем $|z|=1$. Точки, лежащие вне круга, изображают комплексные числа, удовлетворяющие неравенству $|z|>1$.

Пример 5. Как расположены комплексные точки, удовлетворяющие неравенству $|z-2|<3$?

Модуль разности чисел z и 2, т. е. $|z-2|$, означает расстояние от точки $z_1=2$ до точки z, которое должно быть меньше 3. Поэтому проводим из точки 2 окружность радиусом, равным 3 единицам; внутренние комплексные точки этого круга являются решениями неравенства $|z-2|<3$.

Упражнения

1. Записать короче следующие выражения: а) $i+i+i+i$; б) $5i-9i+12i$; в) $ai+bi$; г) $10i-10i$; д) $ai+bi-ai$; е) $ai-ai$.

Вычислить:

2. а) $(3+5i)+(2+i)$; б) $(7-5i)+(7+5i)$; в) $(2+5i)+(-2+3i)$.

3. а) $(1+4i)+(-1-4i)$; б) $(-6+3i)+(6+3i)$; в) $(5+3i)+(12+i)$.

4. а) $(-7+2i)+(7+2i)$; б) $(m+ni)+(x+yi)$; в) $i+(a+bi)$.

5. а) $(3+5i)-(2+i)$; б) $(7-5i)-(7+5i)$; в) $(2+5i)-(-2+3i)$.

6. а) $1+4i-(-1-4i)$; б) $-6+3i-(6+3i)$; в) $(5+3i)-(5-3i)$.

7. а) $(0{,}25-i)-(0{,}75+i)$; б) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}i\right)-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}i\right)$;
в) $(a+bi)-i$.
8. а) $5(2-3i)$; б) $-3(1+i)$; в) $i(4+5i)$.
9. а) $-2(3-i)$; б) $i(1-i)$; в) $-0{,}5i(1+2i)$.
10. а) $(3+2i)(4-i)$; б) $(1-i)(2+i)$;
в) $(0{,}2-0{,}3i)(0{,}5+0{,}6i)$.
11. а) $(3+i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})$; б) $(a+mi)(2a-mi)$;
в) $(x-i\sqrt{y})(-x-2i\sqrt{y})$.
12. а) $(3+5i)(4-i)$; б) $(6+11i)(7+3i)$;
в) $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}i\right)$.
13. а) $(\sqrt{3}+i\sqrt{2})(\sqrt{3}-i\sqrt{2})$; б) $(p-2qi)(2p+qi)$;
в) $(a-i\sqrt{b})(a+2i\sqrt{b})$.
14. а) $(a+i\sqrt{b})(a-i\sqrt{b})$; б) $(3+2i\sqrt{2})(3-2i\sqrt{2})$;
в) $(\sqrt{a}+i\sqrt{b})(\sqrt{a}-i\sqrt{b})$.

Разложить на пары комплексных множителей:

15. а) x^2+y^2; б) a^2+9b^2; в) $4m^2+9n^2$.
16. а) $a^2+\frac{b^2}{4}$; б) p^2+1; в) $16+9$.
17. а) $25+1$; б) 5; в) 65.

Вычислить частные:

18. а) $\frac{10i}{2}$; б) $\frac{15i}{5i}$; в) $8i:(-16i)$.
19. а) $\frac{21-i}{i}$; б) $\frac{1+i}{i}$; в) $-\frac{12}{5i}$.
20. а) $\frac{5}{1+2i}$; б) $\frac{1+i}{1-i}$; в) $-\frac{17-6i}{3-4i}$.
21. а) $\frac{63+16i}{4+3i}$; б) $\frac{4}{1+i\sqrt{3}}$; в) $\frac{5i}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$.
22. а) $\frac{1-20i\sqrt{5}}{7-2i\sqrt{5}}$; б) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$; в) $\frac{m+ni}{m-ni}$.
23. а) $\frac{1-i^2}{(1+i)^3}$; б) $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}$;
в) $\frac{\sqrt{1+a}+i\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-i\sqrt{1-a}}-\frac{\sqrt{1-a}+i\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}-i\sqrt{1+a}}$.
24. а) $\frac{32}{1+3i\sqrt{7}}$; б) $\frac{21}{4+3i\sqrt{6}}$; в) $\frac{5}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$.
25. а) $\frac{3}{\sqrt{2}-i}$; б) $\frac{7}{\sqrt{5}+i\sqrt{2}}$; в) $\frac{10i}{3+i}$.

Возвести в степень:

26. а) i^{24}; б) i^{37}; в) i^{49}; г) $(-i)^{10}$; д) $(-i)^9$; е) $-i^{10}$.
27. а) i^{21}; б) i^{11}; в) i^{25}; г) i^{41}; д) i^{58}; е) i^{136}.
28. а) $(2-i\sqrt{2})^2$; б) $(x+yi)^2+(x-yi)^2$; в) $(1+i)^3$.

29. а) $(-0{,}5-0{,}5i\sqrt{3})^2$; б) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^3$;

в) $\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^4+\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^4$.

30. а) $(4+3i)^2$; б) $(2-i\sqrt{3})^2$; в) $(1-i)^3$,

Извлечь корень:

31. а) $\sqrt{ai}$; б) $\sqrt{5+12i}$. **32.** а) $\sqrt{21+20i}$; б) $\sqrt{-13+84i}$.

33. а) $\sqrt{15+8i}$; б) $\sqrt{-77+36i}$.

34. а) $\sqrt{3{,}75+2i}$; б) $\sqrt{3+4i}+\sqrt{3-4i}$.

35. Построить точки, изображающие числа: а) $3+5i$; б) $4-i$; в) $-3+2i$; г) $-2-2i$; д) 5; е) $-4i$; ж) $5i$; з) $0{,}2-0{,}5i$; н) $-5i-5$.

36. Как расположатся на плоскости изображения двух сопряженных комплексных чисел?

Найти модуль и аргумент чисел:

37. а) $1+i$; б) $1-i$; в) $-1+i$; г) $-1-i$.

38. а) $\sqrt{3}+i$; б) $5+2i$; в) $-2i$; г) $3-3i$.

Представить в тригонометрической форме числа:

39. а) i; б) $-i$; в) -3; г) $\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$.

40. а) $3+2i$; б) $3+4i$. **41.** а) $3-4i$; б) $8+5i$.

42. а) $2+3i$; б) $-12+5i$. **43.** а) $-2-7i$; б) $4-3i$.

Построить слагаемые и сумму комплексных чисел:

44. а) $3+4i$ и $5+3i$; б) $1-5i$ и $2+3i$; в) $-4+2i$ н $4+2i$.

45. а) $5+3i$ и $3+5i$; б) $1-3i$ и $1+3i$; в) $-5+2i$ и $5+2i$.

Построить уменьшаемое, вычитаемое и разность комплексных чисел:

46. а) $3+4i$ и $2+i$; б) $7-2i$ н $5-3i$; в) $4+5i$ и $5+4i$.

47. а) $3+6i$ и $6+3i$; б) $6+3i$ и $3+6i$; в) $1-i$ н $3i$.

Вычислить произведения:

48. $2(\cos 30°+i\sin 30°)\cdot 3(\cos 30°+i\sin 30°)$.

49. $2(\cos 30°+i\sin 30°)\cdot 3(\cos 45°+i\sin 45°)$.

50. $2(\cos 60°+i\sin 60°)\cdot(\cos 45°+i\sin 45°)$.

51. $(\cos 30°+i\sin 30°)\cdot(\cos 15°+i\sin 15°)$.

52. $(\cos 40°+i\sin 40°)\cdot(\cos 50°+i\sin 50°)$.

Доказать, что

53. $(\cos 30°+i\sin 30°)^2=\cos 60°+i\sin 60°$.

54. $(\cos 30°+i\sin 30°)^3=i$, т. е. $\cos 90°+i\sin 90°$.

55. $(\cos 60°+i\sin 60°)^{\frac{1}{2}}=\cos 30°+i\sin 30°$.

Вычислить:

56. а) $(\cos 60°+i\sin 60°)^3$; б) $(\cos 25°+i\sin 25°)^5$.

57. а) $(\cos 30°+i\sin 30°)^6$; б) $(\cos 45°+i\sin 45°)^4$.

58. $\sqrt{i}$. **59.** $\sqrt{-i}$. **60.** $\sqrt{1+i}$. **61.** $\sqrt{1-i}$. **62.** $\sqrt[3]{i}$.

63. $\sqrt[5]{1}$. **64.** $\sqrt[6]{1}$. **65.** $\sqrt[4]{-1}$.

66. Изобразить в виде векторов следующие числа: 1,5; -2; i; $-3i$; $2+i$; $-2+i$; $2-i$; $-2-i$.

67. Истолковать геометрически каждую из следующих операций над комплексными числами:

1) $(2+3i)+(-1+i)$; 2) $(-4+2i)-(2-3i)$;

3) $2i\cdot 3$; 4) $(1+2i)\,i$;

5) $(1+i)\cdot(1+\sqrt{3}\,i)$; 6) $(1-\sqrt{3}\,i)^2$.

68. Найти действительные числа x и y из уравнений:

1) $3+2xi+3yi=8i+x-2y$;

2 $(1-i)x+(2+i)y=4+2i$;

3) $\frac{8i}{x}+iy-2=7i-\frac{10}{x}+y$.

69. Найти комплексные корни следующих квадратных уравнений:

1) $x^2-6x+13=0$; 2) $2x^2+5x+6=0$;

3) $x^2-2(1+i)x+(2i-1)=0$.

70. Как расположены на плоскости комплексные точки z, для которых:

1) $\varphi=\frac{\pi}{4}$; 2) $\varphi=\frac{2}{3}\pi$; 3) $\varphi=1{,}2$; 4) $|z|>1$; 5) $|z|<5$;

6) $2<|z|<4$; 7) $|z+1|<3$; 8) $|z-i|>2$.

71. Представить в показательной форме следующие комплексные числа:

1) $2+3i$; 2) $1-i$; 3) $2i$; 4) $-\sqrt{3}+i$; 5) -2; 6) i.

72. Перевести в алгебраическую форму:

1) $2\cdot e^{\frac{\pi}{8}i}$; 2) e^{2+i}; 3) $2\cdot e^{1-\frac{\pi}{4}i}$

73. Пользуясь равенством $a^x=e^{x\ln a}$; $a>0$ и $a\neq 1$ (проверьте логарифмированием), представить в показательной форме следующие числа:

1) 2^{3i}; 2) $3^{-\frac{1}{2}}$; 3) 5^{1+i}; 4) 10^{1-i}.

74. Вычислить значения тригонометрических функций комплексного аргумента:

1) $\cos(2-i)$; 2) $\sin(1+0{,}5i)$; 3) $\cos\left(\frac{1}{2}+3i\right)$; 4) $\sin(-3i)$.

75. Доказать справедливость равенств

1) $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$;

2) $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$;

3) $\cos 2z=\cos^2 z-\sin^2 z$;

4) $\sin 2z=2\sin z\cos z$.

76. Показать, что корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ при действительных a, b, c и отрицательном дискриминанте являются парой сопряженных комплексных чисел.

77. Какова должна быть зависимость между x и y, чтобы произведение $(x+yi)\cdot(2+3i)$ было действительным числом?

78. Доказать, что если z и $\bar{z}$ — пара сопряженных комплексных чисел, то z^3 и $\bar{z}^3$ также взаимно сопряженны.

79. Как расположены на плоскости xOy комплексные точки z, удовлетворяющие неравенству:

$$\log_{\frac{1}{2}}|z|+\log_{\frac{1}{2}}(|z|+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2|z|+5)?$$

80. Решить неравенства:

$$-2<2\log_{\frac{1}{3}}|x+1-i\sqrt{5}|<-\log_3 2-1.$$

ГЛАВА XVI

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ

§ 225. Примеры на повторение понятия функции и общих свойств функций. Основные сведения о функциях были даны в гл. VI. Не повторяя данных ранее определений и формулировок, рассмотрим ряд конкретных примеров, которые в своей совокупности охватывают все существенные моменты из учения о функциях в том объеме, как это предусмотрено программой.

Пример 1. Дана функция $f(x)=2x^3-\frac{1}{x}+1$. Вычислить: $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $\frac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)+3}$; $f\left(\frac{1}{x}\right)$. Показать, что число $x=-1$ есть корень функции $f(x)$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{\frac{1}{2}}+1=-\frac{3}{4};$$

$$\frac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)+3}=\frac{1}{-\frac{3}{4}+3}=\frac{4}{9};$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^3-\frac{1}{\frac{1}{x}}+1=\frac{2}{x^3}-x+1.$$

Так как $f(-1)=2\cdot(-1)^3-\frac{1}{-1}+1=0$, то число -1 действительно является корнем функции $f(x)$.

Пример 2. Величина атмосферного давления p (Н/м²) в зависимости от высоты h (км) над уровнем моря изменяется по закону $p=10^5\cdot e^{-0,12h}$. Найти давление на высоте $h=10$ км.

Пользуясь таблицей, приведенной в конце книги, находим $e^{-0,12\cdot 10} = e^{-1,2} \approx 0,3012 \approx 0,3$.

Таким образом, атмосферное давление на высоте $h = 10$ км приблизительно равно $3\cdot 10^4$ Н/м$^2 = 3\cdot 10^4$ Па.

Пример 3. Выразить площадь прямоугольного треугольника с постоянной гипотенузой, равной c, как функцию острого угла α. При каком α площадь достигнет наибольшего значения.

Если обозначим катеты через a и b, то $S = \frac{ab}{2}$, но $a = c\sin\alpha$, $b = c\cos\alpha$, а потому

$$S = \frac{c^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{c^2}{4}\sin 2\alpha.$$

Итак, искомая функция $S = \frac{c^2}{4}\sin 2\alpha$. Площадь будет наибольшей, если $\sin 2\alpha = 1$, т. е. при $\alpha = 45°$. Таким образом, при постоянной гипотенузе наибольшую площадь имеет равнобедренный прямоугольный треугольник; эта наибольшая площадь равна $\frac{c^2}{4}$.

Пример 4. Найти область определения каждой из следующих функций:

1) $y = \sqrt{2 - \lg(4 - x)}$;

2) $y = \arcsin\frac{x-3}{\sqrt{2}}$;

3) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

1) Функция $\sqrt{2 - \lg(4 - x)}$ определена при всяком x, удовлетворяющем системе неравенств

$$\begin{cases} 2 - \lg(4 - x) \geqslant 0; \\ 4 - x > 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \lg(4 - x) \leqslant 2. \\ x < 4. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $-96 \leqslant x < 4$. Область определения есть полуотрезок $[-96, 4)$.

2) Функция $\arcsin\frac{x-3}{\sqrt{2}}$ определена при всяком x, удовлетворяющем неравенству $\left|\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right| \leqslant 1$, что равносильно

двойному неравенству $-1 \leqslant \frac{x-3}{\sqrt{2}} \leqslant 1$, или $-\sqrt{2} \leqslant$ $\leqslant x-3 \leqslant \sqrt{2}$. Прибавляя ко всем частям неравенств по 3, получим $3-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 3+\sqrt{2}$. Область определения данной функции есть отрезок $[3-\sqrt{2},\ 3+\sqrt{2}]$.

3) Функция $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$ определена при всех значениях аргумента, для которых $\cos x \neq 0$ и $\sin x \neq 0$; следовательно, $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$ и $x \neq \pi k$. Таким образом, область определения есть вся числовая ось, за исключением точек $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, где $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3$, и точек $x=\pi k\,(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$. По-другому можно сказать, что область определения состоит из бесконечного множества промежутков:

$$\ldots,\ \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right),\ \left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right),\ \left(\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right),\ \ldots$$

Пример 5. Показать, что: 1) функция $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ четная; 2) функция $\varphi(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ нечетная.

1) $f(-x)=\frac{e^{-x}+e^x}{2}=f(x)$.

Полученное равенство $f(-x)=f(x)$ и доказывает четность функции (см. определение четной функции).

2) $\varphi(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{2}=-\frac{e^x-e^{-x}}{2}=-\varphi(x)$.

Из равенства $\varphi(-x)=-\varphi(x)$ следует нечетность функции $\varphi(x)$ (по определению нечетной функции).

Пример 6. Доказать, что: 1) функция $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ имеет наименьшее значение при $x=0$, равное 1; 2) функция $\varphi(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ монотонно возрастает на всей числовой оси.

1) Представим $f(x)$ в следующем виде:

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\left[\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2+2\right]$$

(проверьте!). Выражение $\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 \geqslant 0$ (квадрат действительного числа есть число неотрицательное), а потому сумма, заключенная в квадратные скобки, не меньше 2. Эта сумма примет значение, равное 2, если первое слагаемое $\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2=0$, что имеет место при $x=0$. Тогда

$$f(0)=f_{\text{наим}}=\frac{1}{2}[0+2]=1.$$

2) Чтобы доказать монотонное возрастание функции $\varphi(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ на всей числовой оси, достаточно убедиться в том, что для любых двух значений аргумента x_1 и x_2, где $x_2>x_1$, имеет место неравенство $\varphi(x_2)>\varphi(x_1)$ (т. е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции), что равносильно неравенству $\varphi(x_2)-\varphi(x_1)>0$. Справедливость этого неравенства и будем доказывать. Имеем:

$$\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=\frac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{2}-\frac{e^{x_1}-e^{-x_1}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{x_2}-e^{-x_2}-e^{x_1}+e^{-x_1}\right]=\frac{1}{2}\left[(e^{x_2}-e^{x_1})+(e^{-x_1}-e^{-x_2})\right].$$

Первая из разностей в скобках положительна, так как из $x_2>x_1$ следует, что $e^{x_2}>e^{x_1}$ (см. § 159). Второе слагаемое в квадратных скобках, т. е. $e^{-x_1}-e^{-x_2}$, также положительно, так как $e^{-x_1}-e^{-x_2}=\frac{1}{e^{x_1}}-\frac{1}{e^{x_2}}>0$ (из двух положительных дробей с одинаковыми числителями та больше, знаменатель которой меньше). Из сказанного следует, что выражение в квадратных скобках есть положительное число при всяком $x_2>x_1$.

Итак, $\varphi(x_2)-\varphi(x_1)>0$, или $\varphi(x_2)>\varphi(x_1)$, что и требовалось доказать.

Пример 7. Доказать, что график четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Пусть $f(-x)=f(x)$, тогда любым двум противоположным значениям аргумента x и $-x$ соответствует одно и то же значение функции y, т. е. точки $M(x;\ y)$ и $M_1(-x;\ y)$ симметричны относительно оси ординат, а так как множество всех таких точек образует график функции, то отсюда и следует его симметрия относительно оси Oy.

В случае нечетной функции имеем равенство $f(-x)=-f(x)$ или равносильное ему равенство $-f(-x)=f(x)$. Всякой точке $M(x;\ y)$ на графике соответствует точка $M_1(-x; -y)$ на том же графике. Такие две точки симметричны относительно начала координат O, так как отрезок MM_1 проходит через начало координат O и делится в точке O пополам (сделайте чертеж и докажите геометрически).

Пример 8. Дана функция $y(t)=2\sin(10\pi t-0{,}3)$. Найти: 1) период этой функции; 2) наименьший ее положительный корень.

1) Пусть период равен T. Тогда согласно определению периода (см. § 112) для всякого числа t должно иметь место равенство

$$y(t+T)=y(t), \qquad (1)$$

или $2\sin[10\pi(t+T)-0{,}3]=2\sin(10\pi t-0{,}3)$, что равносильно обращению в нуль разности:

$$\sin\underbrace{[10\pi(t+T)-0{,}3]}_{x}-\sin\underbrace{(10\pi t-0{,}3)}_{y}=0.$$

Левую часть равенства можно преобразовать в произведение по формуле $\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$. Получим:

$$2\sin 5\pi T\cos[10\pi t-0{,}3+5\pi T]=0.$$

Второй сомножитель $\cos[10\pi t-0{,}3+5\pi T]$ не может быть тождественно (при любых значениях t) равен нулю. Следовательно, $\sin 5\pi T=0{,}5\pi T=\pi k$, $5T=k$. Но так как период—это наименьшее число, удовлетворяющее соотношению (1), то $k=1$, откуда $T=\frac{1}{5}$.

2) Для отыскания корня функции $y(t)$ решим уравнение

$$2\sin(10\pi t-0{,}3)=0,$$

откуда $10\pi t-0{,}3=0$; $t=\frac{0{,}3}{10\pi}=\frac{0{,}03}{\pi}\approx 0{,}0095$.

В дополнение к тому, что сказано в § 48 о способах задания функции, следует добавить, что, помимо табличного, аналитического и графического способов, существуют и другие способы задания. Так, например, функцию можно задать каким-нибудь словесным правилом, по которому можно каждому числу x поставить в соответствие другое число y.

Например, определим функцию $E(x)$ следующим правилом: значение функции равно наибольшему целому числу, содержащемуся в аргументе x и не превосходящему его. На основании этого правила имеем: $E(3{,}2)=3$; $E(-1{,}5)=-2$; $E(5)=5$; $E(0{,}8)=0$ и т. д. $E(x)$ принимает (согласно определению) лишь целые значения. Этой функции дано специальное название «антье от x», происходящее от французского слова «целое». В математической литературе встречается и другое обозначение этой функции, например $[x]$. Постройте самостоятельно график функции $E(x)$.

Для выработки навыков в решении примеров, подобных разобранным в этом параграфе, в конце этой главы дано достаточное количество упражнений; свободное владение этим материалом поможет вам лучше усвоить элементы теории пределов, что является основным содержанием данной главы.

§ 226. Некоторые приемы построения графиков функций. При построении графика квадратного трехчлена $y=ax^2+bx+c$, а также функции $y=A\cdot\sin(kx+a)$ мы пользовались одними и теми же приемами. Сформулируем общность этих приемов. Это позволит применять

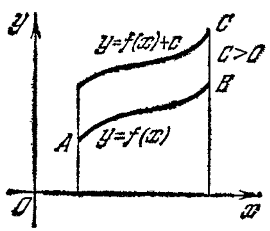

Рис. 140.

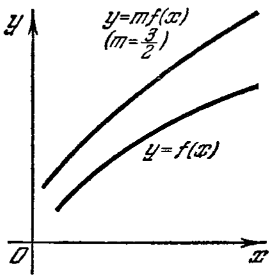

Рис. 141.

их и в других случаях, т. е. при построении графиков неизвестных нам пока функций.

1) Если нам известен график функции $y=f(x)$, то график функции $y=f(x)+c$ получается из графика исходной функции сдвигом в направлении оси ординат Oy на $|c|$ единиц вверх, если $c>0$, и вниз, если $c<0$ (рис. 140).

2) Если $y=mf(x)$, то график этой функции можно получить из исходного растяжением всех ординат в m раз, если $m>1$ (рис. 141), и сжатием их в $\frac{1}{m}$ раз, если $0<m<1$ (рис. 142). При $m<0$, если $|m|>1$ (соответственно $|m|<1$), производится сначала растяжение ординат в $|m|$ раз $\left(\text{соответственно сжатие в } \frac{1}{|m|} \text{ раз}\right)$, а потом график подвергается зеркальному отражению относительно оси Ox.

3) $y=f(x-a)$. Этот график получается из графика $y=f(x)$ сдвигом в направлении оси Ox на $|a|$ единиц масштаба вправо, если $a>0$, и влево при $a<0$ (рис. 143).

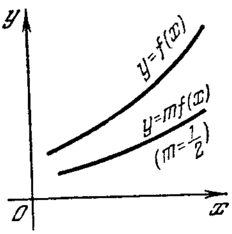

Рис. 142.

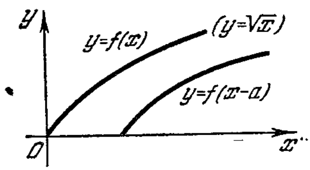

Рис. 143.

4) График функции $y=f(kx)$, $k>0$, можно получить, если все абсциссы графика $y=f(x)$ уменьшить в k раз, оставив ординаты без изменения. При $k<1$ фактически абсциссы будут увеличены в $\frac{1}{k}$ раз. Примером может служить график $y=\sin 2x$, полученный из графика $y=\sin x$ (§ 138).

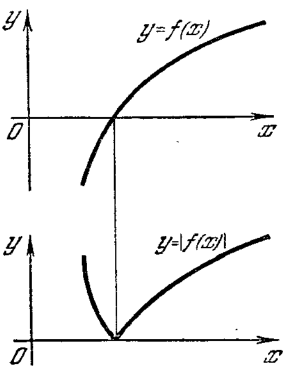

Рис. 144.

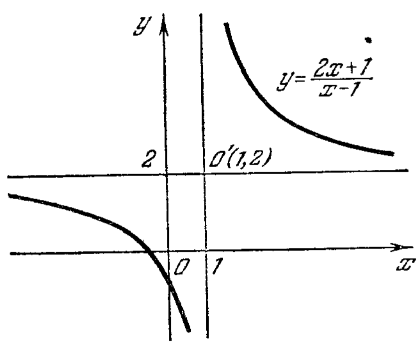

Рис. 145.

5) График функции $y=|f(x)|$ можно получить из графика $y=f(x)$, если дуги кривой, лежащие под осью абсцисс, зеркально отразить относительно оси Ox (рис. 144).

Пример. Построить график функции $y=\frac{2x+1}{x-1}$.

Данная функция определена на всей числовой оси, кроме точки $x=1$. Преобразуем дробное выражение $\frac{2x+1}{x-1}$, для чего разделим числитель на знаменатель. Получим $y=2+\frac{3}{x-1}$ (проверьте!).

Теперь можно догадаться, что для построения графика заданной функции надо взять за основу график функции $y=\frac{1}{x}$, т. е. гиперболу.

Произведем над гиперболой $y=\frac{1}{x}$ следующие операции:

1) Сдвиг в положительном направлении оси Ox на одну единицу масштаба; новому положению гиперболы относительно координатных осей соответствует уравнение $y=\frac{1}{x-1}$.

2) Растяжение всех ее ординат в три раза, тогда новое уравнение примет вид $y=\frac{3}{x-1}$.

3) Сдвиг в положительном направлении оси Oy на две единицы масштаба (рис. 145), что приведет к графику функции

$$y=2+\frac{3}{x-1}, \quad \text{или} \quad y=\frac{2x+1}{x-1}.$$

Рассмотренный нами пример есть частный случай функции вида $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ при $x\neq-\frac{d}{c}$.

Эта функция называется дробно-линейной, так как представляет собой отношение двух линейных функций. Можно в общем виде показать (аналогично тому, как это сделано в рассмотренном выше примере), что графиком дробно-линейной функции является гипербола.

§ 227. Элементарные функции. В заглавии этой книги написано «Алгебра и элементарные функции». У читателя должен возникнуть естественный вопрос: что такое элементарная функция? Ведь об этом в данной книге до сих пор не сказано ни единого слова. В действительности это понятие нельзя было определить, пока не были изучены основные функции.

Основными элементарными функциями принято считать:

1) $y=C$, где C — действительное число;

2) степенную функцию $y=x^{\alpha}$, α — действительное число;

3) показательную функцию $y=a^x$ ($a>0$ и $a\neq1$);

4) логарифмическую функцию $y=\log_a x$ ($a>0$ и $a\neq1$);

5) тригонометрические функции: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$;

6) обратные тригонометрические функции: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Изучению перечисленных выше функций было отведено значительное место в этой книге. Функции, получающиеся из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий и операции взятия функции от функции, называются *элементарными*. К ним, в частности, относятся:

1) линейная функция $y=ax+b$;

2) квадратическая функция $y=ax^2+bx+c$;

3) функции: а) $\sqrt{2}\cdot 2^x \cos x$, б) $\frac{x^2}{\arcsin x}$ и множество других.

Элементарные функции находят широкое применение в науке и технике.

§ 228. Свойства абсолютных величин. В предыдущих главах нам уже приходилось иметь дело с абсолютной величиной действительных чисел. Вспомним, что абсолютной величиной действительного числа a называется само число a, если оно неотрицательно, и противоположное число $(-a)$, если число a отрицательно:

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0, \\ -a, & a<0. \end{cases}$$

Например, $|-5|=5$; $|12|=12$.

Свойство 1. *Абсолютная величина суммы не больше суммы абсолютных величин слагаемых:*

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

Знак равенства может иметь место только в тех случаях, когда оба слагаемых одинаковы по знаку.

Примеры. 1) $|(-2)+(-8)|=|-2|+|-8|$, $10=10$; 2) $|15+(-3)|<|15|+|-3|$, $12<18$. Это свойство распространяется на любое конечное число слагаемых.

Свойство 2. *Абсолютная величина разности двух действительных чисел не меньше разности абсолютных величин этих чисел:*

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|.$$

Примеры. 1) $|15-9|=|15|-|9|$, $6=6$;

2) $|3-(-1)|>|3|-|-1|$, $4>2$.

§ 229. Предел последовательности. Начальные сведения о последовательностях были сообщены в § 141. Рекомендуется учащемуся перед изучением этого параграфа прочесть все сказанное ранее о последовательностях. Вначале рассмотрим примеры на нахождение предела последовательности.

Пример 1. Пусть общий член последовательности $x_n=\frac{n}{n+1}$; при $n=1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 100, \ldots, 1000, \ldots$

получим первые члены последовательности:

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \ldots,\ \frac{100}{101},\ \ldots,\ \frac{1000}{1001},\ \ldots$$

Замечаем, что с возрастанием номера члена последовательности величина общего члена все ближе и ближе подходит к числу 1. Так, например, 100-й член $x_{100}=\frac{100}{101}$ отличается от 1 на $\frac{1}{101}$; 1000-й член $x_{1000}=\frac{1000}{1001}$ отличается от 1 на $\frac{1}{1001}$ и т. д. Можно уже предвидеть, что стотысячный член будет отличаться от 1 на $\frac{1}{100\,001}<10^{-5}$.

В этом примере мы видим, что разность между числом 1 и общим членом последовательности по абсолютной величине делается и остается сколь угодно малой в процессе неограниченного возрастания номера члена; в таком случае говорят, что *последовательность стремится к пределу, равному* 1.

Пример 2. $x_n=2+(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Выпишем первые члены последовательности, давая n значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...:

$$x_1=\frac{3}{2};\quad x_2=2\frac{1}{4};\quad x_3=1\frac{7}{8};$$
$$x_4=2\frac{1}{16};\quad x_5=1\frac{31}{32};\quad x_6=2\frac{1}{64};\ \ldots$$

Легко заметить, что величина членов последовательности колеблется около числа 2, отклоняясь от него в ту или другую сторону все меньше и меньше по мере возрастания номера членов последовательности. Убедимся в том, что это отклонение сделается сколь угодно малым при достаточно больших номерах членов последовательности. Потребуем, например, чтобы обнаружился тот член последовательности, начиная с которого отклонение от числа 2 делается меньше 10^{-5}, т. е. $|x_n-2|<10^{-5}$:

$$\left|2+(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\right|<10^{-5},$$

или

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n<10^{-5},\quad 2^{-n}<10^{-5}.$$

Решим это показательное неравенство относительно n:

$$-n\lg 2 < -5, \quad n\lg 2 > 5,$$

$$n > \frac{5}{\lg 2} = \frac{5}{0{,}3010} \approx 16{,}6.$$

Таким образом, начиная с номера $n=17$, все дальнейшие члены будут отличаться от числа 2 меньше чем на 10^{-5}. Очевидно, что если мы назначим еще меньшее отклонение, например отклонение $\varepsilon = 10^{-20}$, то, рассуждая по предыдущему, найдем, что $n > 66{,}4$, т. е. 67-й член уже отвечает поставленному условию.

Определение. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такой номер N члена последовательности, начиная с которого абсолютная величина разности $|x_n - a|$ делается и остается при дальнейшем возрастании n меньше числа ε, т. е. если

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant N.$$

Если a — предел последовательности $\{x_n\}$, то пишут:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \text{или} \quad x_n \to a \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

§ 230. Геометрическая иллюстрация приближения последовательности к пределу. Условимся называть

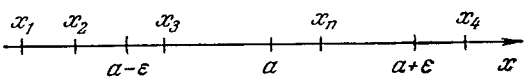

Рис. 146.

ε-окрестностью (читается «эпсилон-окрестность») *числа a* множество действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $|x-a| < \varepsilon$, т. е. двойному неравенству

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$.

Например, если $a=3$, $\varepsilon = 0{,}1$, то ε-окрестность числа 3 есть промежуток (2,9; 3,1).

Геометрически ε-окрестность числа a (или говорят еще — точки a) представляет собой интервал $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ (рис. 146).

Теперь легко получить геометрическую иллюстрацию того факта, что число a является пределом числовой последовательности. Именно, если члены последовательности изобразить точками числовой оси, то какую бы ε-окрестность точки a мы ни взяли, начиная с определенного номера, все члены последовательности попадают в эту ε-окрестность и из нее уже не выходят, продолжая накапливаться около точки a, изображающей предел числовой последовательности.

§ 231. Предел функции. Исследуем изменение функции $f(x)=0{,}5x^2+3$, когда аргумент x неограниченно приближается к значению $x=2$, не делаясь равным $2\ (x\neq 2)$, что принято обозначать: $x\to 2$ («икс стремится к 2»).

Приближаться к 2 можно разными способами. Например, аргумент x может принимать значения

$$1{,}5;\ 1{,}9;\ 1{,}99;\ 1{,}999;\ \ldots$$

или значения

$$2{,}2;\ 2{,}01;\ 2{,}001;\ \ldots$$

Приведенная ниже таблица показывает, что значения данной выше функции приближаются к числу 5.

x	1,5	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,2
y	4,125	4,805	4,980	4,998	5	5,002	5,02	5,42

Покажем, что значения функции как угодно мало будут отличаться от числа 5, если только x достаточно близок к $2\ (x\neq 2)$.

Назначим малое положительное число ε, например $\varepsilon=0{,}001$, и спросим себя: как мала должна быть δ-окрестность точки 2, чтобы при любом значении x из этой окрестности $(2-\delta,\ 2+\delta)$ имело место неравенство

$$|f(x)-5|<0{,}001?$$

Перепишем это неравенство для нашей функции:

$$|0{,}5x^2+3-5|<0{,}001,$$

$$0{,}5\,|x^2-4|<0{,}001,$$

$$|x^2-4|<0{,}002,$$

откуда

$$-0{,}002<x^2-4<0{,}002,$$

$$3{,}998<x^2<4{,}002$$

(после прибавления ко всем членам неравенства по 4), или

$$1{,}999 < x < 2{,}001,$$

т. е.

$$2-0{,}001 < x < 2+0{,}001.$$

Следовательно, достаточно положить $\delta=0{,}001$.

Итак, мы нашли такую малую окрестность точки $x=2$, что любому значению аргумента x из этой окрестности соответствуют значения функции, отличающиеся от числа 5 меньше чем на 0,001.

Определение. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to a$, если для всякого положительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такую δ-окрестность (дельта-окрестность) точки a, что как только $|x-a| < \delta$ $(x \neq a)$, то $|f(x)-A| < \varepsilon$.

Это записывают так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \text{ или } f(x) \to A \; (x \to a).$$

§ 232. Бесконечно малая функция. Особо важную роль в математике играют функции, предел которых равен нулю.

Определение. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой функцией* (или *бесконечно малой величиной*) при $x \to a$, если $\lim f(x) = 0$ при $x \to a$.

Пример. Покажем, что функция $f(x)=x^2-4$ при $x \to 2$ есть бесконечно малая функция. Согласно определению предела, достаточно убедиться в том, что значения функции по абсолютной величине могут быть сделаны меньше всякого, как угодно малого, положительного числа ε, если только значения аргумента x достаточно близки к числу 2 (т. е. берутся из соответствующей δ-окрестности числа 2).

Пусть

$$|x^2-4| < \varepsilon,$$

откуда

$$-\varepsilon < x^2-4 < \varepsilon.$$

Прибавляя ко всем частям неравенств по 4, получим:

$$4-\varepsilon < x^2 < 4+\varepsilon.$$

После извлечения квадратного корня из всех частей неравенств имеем:

$$\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon};$$

при $\varepsilon = 0{,}01$

$$\sqrt{3{,}99} < x < \sqrt{4{,}01}; \quad 1{,}997 < x < 2{,}002,$$

т. е. $\delta = 0{,}002$.

§ 233. Бесконечно большая функция.

Пример 1. Показать, что функция натурального аргумента $f(n) = 2^n$ способна сделаться и оставаться больше любого положительного числа M, как угодно большого. Значения данной функции, расположенные в порядке возрастания аргумента n, образуют числовую последовательность, которая является геометрической прогрессией.

n	1	2	3	4	5	...
$f(n)$	2	4	8	16	32	...

Назначим сами себе какое-нибудь большое положительное число, например $M = 10^8$ (сто миллионов). Найдем номер члена последовательности, начиная с которого постоянно будет выполняться неравенство

$$2^n > 10^8.$$

Решим это неравенство, считая неизвестным n. Логарифмируем по основанию 10:

$$n \lg 2 > 8,$$

откуда

$$n > \frac{8}{\lg 2} \approx 26{,}6.$$

Таким образом, 27-й член прогрессии и все дальнейшие члены превзойдут по величине число 10^8. Очевидно, что если назначать наперед другое число, например $M = 10^{30}$, то все равно найдется член последовательности, начиная с которого $2^n > 10^{30}$; именно, 100-й член и следующие за ним члены удовлетворяют этому неравенству.

П р и м е р 2. Исследовать изменение функции

$$f(x)=\frac{1}{x-2} \text{ при } x\to 2.$$

Будем, например, давать аргументу x последовательные значения: 2,1; 2,01; 2,001; 2,0001; ... (заметим, что каждый член этой последовательности больше, чем 2; в таком случае говорят, что x стремится к 2 справа), тогда соответствующими значениями функции $f(x)$ будут: 10, 100, 1000, ... Если теперь $x=1{,}9$; 1,99; 1,999; ... (т. е. x стремится к 2 слева), то соответствующими значениями функции будут: —10, —100, —1000, ... Это показывает, что значения функции по абсолютной величине неограниченно возрастают.

Действительно, если мы потребуем, чтобы абсолютная величина функции удовлетворяла неравенству

$$\left|\frac{1}{x-2}\right|>10^5,$$

то, решая это неравенство, найдем;

$$|x-2|<10^{-5},$$

т. е. значения x должны быть взяты из промежутка $1{,}99999<x<2{,}00001$.

О п р е д е л е н и е. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой функцией* (или *бесконечно большой величиной*) при $x\to a$, если ее значения, взятые по абсолютной величине, превосходят любое, наперед заданное, положительное число M, как только значения аргумента x попадают в достаточно малую окрестность точки a; при этом пишут:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty.$$

Короче, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, если для любого $M>0$ найдется такое $\delta>0$, что $|f(x)|>M$ при $a-\delta<x<a+\delta$.

Таким образом: 1) общий член последовательности $f(n)=2^n$ есть бесконечно большая величина, когда номер члена неограниченно возрастает, что записывают так:

$$\lim_{n\to\infty} 2^n=\infty;$$

2) функция $f(x)=\frac{1}{x-2}$ — бесконечно большая при $x \to 2$ $(x \neq 2)$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \infty.$$

В тех случаях, когда важно отметить и знак бесконечно большой функции, пишут перед символом ∞ соответственно знак плюс или минус. Например, для функции $f(x)=\frac{1}{x-2}$

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty, \quad \lim_{x \to 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty.$$

Здесь обозначение $x \to 2+0$ заменяет фразу «x стремится к 2 справа», т. е. оставаясь больше 2; $x \to 2-0$ означает приближение к числу 2 слева.

Отметим, что нельзя функцию заранее объявить ни бесконечно малой, ни бесконечно большой, если не указано, при каком изменении аргумента x рассматривается эта функция. Например, функция $f(x)=(x-1)^2$ есть бесконечно малая, если $x \to 1$, но эта же функция есть бесконечно большая, если x неограниченно возрастает:

1) $\lim\limits_{x \to 1}(x-1)^2=0$, 2) $\lim\limits_{x \to \infty}(x-1)^2=\infty$.

§ 234. Связь между бесконечно малой и бесконечно большой величинами. На примере функции $y=\frac{1}{x}$ поясним связь между бесконечно малой и бесконечно большой величинами. Если $x \to 0$ (x — бесконечно малая), то обратная величина $\frac{1}{x}$ есть бесконечно большая функция, или бесконечно большая величина. Наглядно это иллюстрируется на правой ветви гиперболы $y=\frac{1}{x}$ (рис. 147): при движении точки M по кривой справа налево абсцисса $x \to 0$ (x — бесконечно малая), обратная ей величина $\frac{1}{x}=y$, т. е. ордината кривой, при этом растет неограниченно: $\frac{1}{x} \to \infty$, и наоборот, при движении точки M по кривой слева направо абсцисса $x \to \infty$, а ордината

$y=\frac{1}{x}\to 0$. Таким образом, величина, обратная бесконечно малой, есть бесконечно большая, и наоборот.

Другой пример: $\operatorname{tg} x$ при $x\to\frac{\pi}{2}$ есть бесконечно большая величина; обратная ей величина, т. е. $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, стремится к нулю при $x\to\frac{\pi}{2}$.

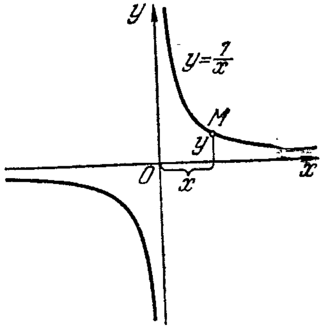

Рис. 147.

§ 235. Свойства бесконечно малых функций. Для упрощения записей введем сокращенные обозначения: бесконечно малые функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ будем впредь обозначать просто через α, β, γ, помня, что эти три функции зависят все от аргумента x и что бесконечно малыми они делаются только тогда, когда аргумент x остремится к определенному числу a $(x\to a)$.

Свойство 1. *Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.* Если

$$\alpha\to 0,\quad \beta\to 0,\quad \gamma\to 0,$$

то, например,

$$(\alpha-\beta+\gamma)\to 0.$$

Или в другой записи:

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\to 0\\ \gamma\to 0}}(\alpha-\beta+\gamma)=0.$$

Действительно, чтобы алгебраическая сумма $(\alpha-\beta+\gamma)$ сделалась по абсолютной величине меньше любого наперед заданного положительного числа ε, сколь угодно малого, нужно только потребовать, чтобы

$$\left.\begin{aligned} |\alpha|&<\frac{\varepsilon}{3},\\ |-\beta|&<\frac{\varepsilon}{3},\\ |\gamma|&<\frac{\varepsilon}{3},\end{aligned}\right\}\qquad (1)$$

что вполне возможно, иначе α, β и γ не были бы бесконечно малыми. Складывая неравенства (1), получим:

$$|\alpha|+|-\beta|+|\gamma|<\varepsilon,$$

а потому подавно (см. § 228)

$$|\alpha-\beta+\gamma|<\varepsilon\,^{*}).$$

Остальные свойства доказывать не будем, а только поясним их смысл на примерах.

Свойство 2. *Произведение бесконечно малой функции на ограниченную есть бесконечно малая функция.*

Функция $f(x)$ называется *ограниченной* в некоторой окрестности точки $x=a$, если существует такое положительное число M, что для всех точек x из этой окрестности значения функции $f(x)$, взятые по абсолютной величине, меньше числа M:

$$|f(x)|<M.$$

Свойство 2 коротко записываем так: если $\alpha\to 0$ и $|f(x)|<M$, то $\alpha\cdot f(x)\to 0$.

Примеры. 1) Функции $\sin x$ и $\cos x$ ограничены в окрестности любой точки их области определения (вся числовая ось), так как

$$|\sin x|<1{,}1; \quad |\cos x|<1{,}1.$$

Здесь за M взято число 1,1 но вообще может быть взято любое другое число, большее 1.

Согласно свойству 2 мы можем утверждать, что произведение $(x-3)\sin x\to 0$, если $x\to 3$, так как $(x-3)\to 0$ при $x\to 3$, а $\sin x$ — ограниченная функция.

2) Функция $\frac{1}{x-2}$ не является ограниченной в окрестности точки $x=2$, но в достаточно малой окрестности любой другой точки, например точки $x=5$, она ограничена, так как $\left|\frac{1}{x-2}\right|<\frac{1}{2}$ для всех значений x из промежутка (4,5; 5,5).

Следствие. Всякая постоянная величина ограничена, а потому произведение постоянной на бесконечно

---

*) Имеется в виду, что неравенства (1) выполняются соответственно в некоторых δ_1-, δ_2- и δ_3-окрестностях точки a. Результирующее неравенство выполняется, следовательно, в наименьшей из этих трех окрестностей.

малую есть величина бесконечно малая. На этом основании можно писать, что

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} 100\pi \cos x = 0,$$

так как $\cos x \to 0$ при $x \to \frac{\pi}{2}$, т. е. $\cos x$ — бесконечно малая величина в окрестности точки $x = \frac{\pi}{2}$; 100π — постоянная, а потому произведение $100\pi \cos x$ есть величина бесконечно малая.

§ 236. Теоремы о пределах. Доказательства теорем о пределах основаны на следующем очевидном положении: всякая переменная, стремящаяся к пределу, может быть представлена в виде суммы ее предела и некоторой бесконечно малой. Это вытекает из самого определения предела: если $z \to A$, т. е. число A есть предел z, то в процессе неограниченного приближения разность $z - A$ делается сколь угодно малой по абсолютной величине, т. е. эта разность есть бесконечно малая:

$$z - A = \alpha, \text{ или } z = A + \alpha.$$

Обратно: если переменная величина z представлена в виде суммы «постоянная + бесконечно малая», то постоянная A есть предел переменной z.

Теорема 1. *Предел алгебраической суммы двух или нескольких переменных равен алгебраической сумме пределов слагаемых.* Здесь и далее имеется в виду, что такие пределы (слагаемых, сомножителей и т. д.) существуют.

Доказательство. Дано:

$$z \to A, \quad y \to B, \quad u \to C.$$

Докажем, например, что

$$(z + y - u) \to A + B - C.$$

Если α, β, γ — бесконечно малые, а z, y, u — функции аргумента x, то можем написать:

$$\left.\begin{aligned} z &= A + \alpha, \\ y &= B + \beta, \\ u &= C + \gamma, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$z + y - u = A + B - C + (\alpha + \beta - \gamma). \tag{2}$$

Равенство (2) получено из равенств (1) сложением первых двух и вычитанием третьего.

Левая часть равенства (2) есть переменная величина, правая часть представляет сумму постоянной $(A+B-C)$ и бесконечно малой $(\alpha+\beta-\gamma)$, а потому эта постоянная есть предел переменной величины:

$$(z+y-u) \longrightarrow A+B-C,$$

или в другой записи:

$$\lim (z+y-u)=\lim z+\lim y-\lim u=A+B-C.$$

Остальные теоремы о пределах только сформулируем, предоставляя их доказательства самому читателю.

Теорема 2. *Предел произведения двух или нескольких переменных равен произведению пределов отдельных множителей:*

$$\lim (zyu)=\lim z \cdot \lim y \cdot \lim u = A \cdot B \cdot C,$$

или

$$zyu \longrightarrow ABC.$$

Следствие. Если одна из переменных величин есть постоянная, то

$$\lim (My)=M \lim y = MB,$$

так как предел постоянной равен самой постоянной. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела.*

Пример. $\lim\limits_{x \to 1} (x^2+3)(3x+2)=\lim\limits_{x \to 1} (x^2+3)\lim\limits_{x \to 1} (3x+2)= = (\lim\limits_{x \to 1} x^2+3)(3\lim\limits_{x \to 1} x+2)=(1+3)(3\cdot 1+2)=20.$

Теорема 3. *Предел частного двух переменных равен частному пределов делимого и делителя, если предел делителя не равен* 0.

Если

$$z \longrightarrow A, \quad y \longrightarrow B \quad (B \neq 0),$$

то

$$\frac{z}{y} \longrightarrow \frac{A}{B},$$

или в другой записи:

$$\lim \frac{z}{y}=\frac{\lim z}{\lim y}=\frac{A}{B}.$$

Пример.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+3}{x^3-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+3)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-1)}=\frac{11}{7}.$$

Теорема 4. *Предел степени переменного равен той же степени предела основания*:

$$\lim(z^n)=(\lim z)^n.$$

Примеры.

1) $\lim\limits_{x\to 2}x^3=(\lim\limits_{x\to 2}x)^3=2^3=8$;

2) $\lim\limits_{x\to 6}\sqrt{2x-3}=$

$=\lim\limits_{x\to 6}(2x-3)^{\frac{1}{2}}=$

$=[\lim\limits_{x\to 6}(2x-3)]^{\frac{1}{2}}=$

$=(2\cdot 6-3)^{\frac{1}{2}}=3.$

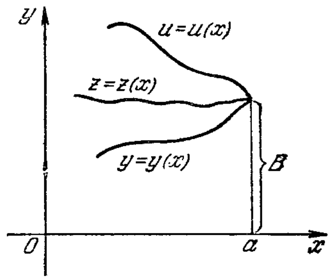

Рис. 148.

Теорема 5. *Если переменная z заключена между двумя другими переменными y и u, стремящимися к общему пределу, то z стремится к тому же пределу.*

Если $y<z<u$ и $y\to B$, $u\to B$, то $z\to B$. Можно наглядно истолковать смысл этой теоремы: на рис. 148 изображены графически три функции аргумента x. График функции $z=z(x)$ заключен между графиками $y=y(x)$ и $u=u(x)$; если $x\to a$, то ординаты y и u стремятся к пределу B; тогда ясно, что ордината средней кривой $z=z(x)$ стремится к тому же пределу B.

§ 237. Признак существования предела последовательности. Во многих случаях при отыскании предела последовательности важно знать, что такой предел существует независимо от того, умеем мы его находить или нет.

Чтобы сформулировать признак существования предела, дадим сначала некоторые определения.

Последовательность называется *ограниченной сверху*, если все члены ее меньше одного и того же числа.

Аналогично последовательность называется *ограниченной снизу*, если все члены ее больше одного и того же числа.

Примеры. 1) Последовательность $a_n=2-\frac{1}{n}$ ограничена сверху числом 2 или любым числом, бо́льшим 2:

$$a_n<2 \text{ при всех } n.$$

2) Последовательность $x_n = 2 + \frac{1}{n}$ ограничена снизу числом 2 или любым положительным числом, меньшим 2:

$$x_n > 2 \text{ при всех } n.$$

Последовательность называется *монотонно возрастающей*, если всякий ее член больше любого предыдущего (или равен ему).

Последовательность называется *монотонно убывающей*, если всякий ее член меньше любого предыдущего (или равен ему).

Из последовательностей, приведенных в примерах этого параграфа, первая является монотонно возрастающей, а вторая — монотонно убывающей.

Сформулируем теперь признак существования предела последовательности.

Монотонно возрастающая последовательность, ограниченная сверху, имеет предел; точно так же монотонно убывающая последовательность, ограниченная снизу, имеет предел.

§ 238. Длина окружности как предел. Построим окружность единичного радиуса и в нее впишем, а также около нее опишем квадраты (рис. 149). Затем путем удвоения числа сторон построим правильные вписанные и описанные восьмиугольники, шестнадцатиугольники и т. д., считая этот процесс продолжающимся неограниченно. Тогда последовательность, составленная из периметров вписанных многоугольников $p_1, p_2, p_3, \ldots$, есть монотонно возрастающая последовательность, ограниченная сверху.

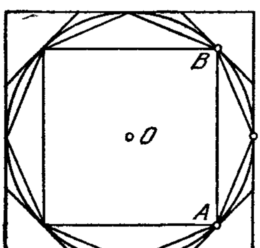

Рис. 149.

Периметр правильного вписанного квадрата меньше периметра правильного вписанного восьмиугольника, т. е. $p_1 < p_2$, так как сумма двух сторон восьмиугольника больше стороны квадрата: $AC + CB > AB$.

Точно так же $p_2 < p_3$, $p_3 < p_4$ и т. д. Но как бы эта последовательность ни возрастала, сверху она ограничена периметром описанного квадрата, т. е. числом $P_1 = 8$, так как описанный квадрат, как объемлющая ломаная, больше выпуклой объемлемой ломаной, а таковой является любой вписанный многоугольник.

Последовательность периметров правильных описанных многоугольников

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ \ldots$$

монотонно убывает, так как описанный квадрат есть объемлющая по отношению к описанному восьмиугольнику. Следовательно, $P_1 > P_2$. На том же основании $P_2 > P_3$ и т. д. Ограниченность последовательности снизу следует из того, что любое из чисел последовательности P_1, P_2, P_3, ... больше любого члена последовательности p_1, p_2, p_3, p_4, ...

Таким образом, обе последовательности имеют предел. Как будет показано в § 241 (пример 6), этот предел является общим и принимается за длину окружности.

Определение. *За длину окружности* принимается общий предел последовательностей периметров правильных вписанных и описанных многоугольников, когда число сторон многоугольников неограниченно возрастает. Длину окружности обозначают буквой C.

§ 239. Вычисление длины окружности. Математики XVI, XVII и XVIII столетий, не зная того, что спрямленная окружность представляет отрезок, несоизмеримый с ее радиусом, старались с большой точностью находить длину окружности методом периметров. Для этого применялась так называемая *формула удвоения*:

$$a_{2n}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}}\,.$$

Последуем их примеру.

Известно, что сторона вписанного квадрата $a_4=R\sqrt{2}$; $a_4=\sqrt{2}$ при $R=1$. По формуле удвоения: $a_8=\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $a_{16}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $a_{32}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ и т. д.

Если число сторон окажется достаточно большим, то по вычисленной стороне находим периметр и его принимаем за приближенную длину окружности. Таким образом был вычислен периметр вписанного и описанного многоугольников с числом сторон $2n=3072$ (исходный многоугольник — шестиугольник, а не квадрат, как у нас).

Оказалось, что при $R=1$

$$p \approx 6{,}2831842, \quad P \approx 6{,}2831876.$$

Отсюда

$$\pi = \frac{C}{2R}\Big|_{R=1} \approx 3{,}141592.$$

Только в XIX столетии было доказано, что число π иррационально.

§ 240. Два замечательных предела. 1) $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$.

Предел отношения синуса бесконечно малого аргумента к самому аргументу равен 1.

Построим окружность единичного радиуса (рис. 150) и в ней острый центральный угол $\angle AOB = z$; точки A и B соединим хордой и в точке B проведем касательную к окружности, точка C — пересечение касательной с продолжением радиуса OA. Можно написать следующие очевидные неравенства:

$$\text{пл. } \triangle AOB < \text{пл. сектора } AOB < \text{пл. } \triangle OBC,$$

или

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin z < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot z < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} z. \qquad (1)$$

[Здесь были использованы известные факты из геометрии и тригонометрии:

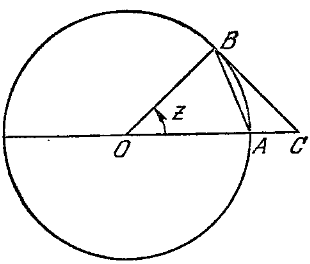

Рис. 150.

а) площадь треугольника равна половине произведения двух сторон на синус угла между ними;

б) площадь сектора равна половине произведения длины на радиус;

в) площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, где катет $BC = \operatorname{tg} z$.]

Умножаем все члены неравенства (1) на 2, после чего делим на $\sin z$ ($\sin z > 0$). Получим неравенства того же смысла:

$$1 < \frac{z}{\sin z} < \frac{1}{\cos z},$$

или

$$1 > \frac{\sin z}{z} > \cos z \qquad (2)$$

$\left(\text{если } a < b, \text{ то } \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \text{ при } a > 0\right).$

При $z \to 0$ крайние члены двойного неравенства (2) стремятся к общему пределу, равному 1, следовательно, заключенное между ними отношение $\frac{\sin z}{z}$ имеет тот же предел, т. е.

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Примечание. Вместо z может стоять любая другая бесконечно малая величина. Например:

$$1)\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1, \quad z = 5x;$$

$$2)\ \lim_{y \to 0} \frac{\sin \frac{\pi y}{3}}{\frac{\pi y}{3}} = 1, \quad z = \frac{\pi y}{3};$$

$$3)\ \lim_{x \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1, \quad z = \frac{1}{x}.$$

Но

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} \neq 1,$$

так как здесь нет соответствия: под знаком синуса имеем бесконечно малую $3x$, а в знаменателе дроби стоит x — тоже бесконечно малая, но другая. Тогда предел находится так:

$$\frac{\sin 3x}{x} = 3\frac{\sin 3x}{3x},$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 \quad (z = 3x).$$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Рассмотрим последовательность, общий член которой

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

где n — натуральное число.

Следующая таблица показывает, как изменяется x_n, когда n возрастает:

n	1	2	3	...	10	100	10 000	1 000 000	...
x_n	2,00000	2,2500	2,3704	...	2,59382	2,70481	2,71815	2,71828	...

Из этой таблицы можно заметить, что с возрастанием n x_n также возрастает, но темп роста затухает: вначале, когда n изменяется от 1 до 2, x_n изменяется от 2 до 2,25, т. е. на 0,25, а уже при изменении n от 10^4 до 10^6 величина x_n увеличивается всего на 0,00013.

Примем без доказательства, что выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при неограниченном возрастании $n\,(n \to \infty)$ стремится к определенному пределу (можно показать, что последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, например, числом 3). Этот предел обозначается буквой e. Число e — иррациональное; его первые десятичные знаки: $e = 2{,}7182818284590\ \ldots$, или $e \approx 2{,}718$.

Выше мы уже говорили, что логарифмы с основанием, равным e, называются *натуральными* и обозначаются «ln».

Можно доказать также, что и

$$\lim_{\alpha \to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Для этого достаточно положить $\frac{1}{\alpha} = n$, тогда $n \to \infty$ при $\alpha \to 0$.

Число e играет исключительно важную роль как в самой математике, так и в ряде других наук.

§ 241. Примеры на отыскание пределов.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 2}(x^3-3x^2+8x+5)$.

Сначала применяем теорему о пределе алгебраической суммы и одновременно выносим постоянные множители за знак предела, потом — теорему о пределе степени:

$$\lim_{x \to 2}(x^3-3x^2+8x+5) = \lim_{x \to 2}x^3 - 3\lim_{x \to 2}x^2 + 8\lim_{x \to 2}x + 5 =$$
$$= 2^3 - 3\cdot 2^2 + 8\cdot 2 + 5 = 17.$$

Предел в данном случае можно было получить проще, если сразу на место x подставить его предельное значение: $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-3x^2+8x+5)=2^3-3\cdot 2^2+8\cdot 2+5=17.$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$.

Если в этом примере подставим на место x его предел 3, то получим неопределенность:

$$\frac{3^2-9}{3-3}=\frac{0}{0},$$

что говорит о том, что теорема о пределе частного неприменима (предел знаменателя равен 0), но

$$\frac{x^2-9}{x-3}=x+3. \qquad (1)$$

Равенство (1) имеет место при всяком $x\neq 3$. В таком случае считают, что пределы у левой и правой частей должны быть одинаковы:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

Так как предел знаменателя при $x\longrightarrow 0$ снова оказывается равным нулю, то мы не можем применить теорему о пределе частного; преобразуем данную дробь до перехода к пределу:

$$\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}=\frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{(\sqrt{1+3x}-1)(\sqrt{1+3x}+1)}=$$

$$=\frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{3x}=\frac{1}{3}(\sqrt{1+3x}+1).$$

Таким, образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}(\sqrt{1+3x}+1)=$$

$$=\frac{1}{3}(\sqrt{1+3\cdot 0}+1)=\frac{2}{3}.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{x^2+x+1}$.

Так как с символом ∞ нельзя обращаться как с числом, то надо преобразовать данную дробь:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{3+0}{1+0+0}=3,$$

так как $\frac{1}{x}\to 0$ при $x\to\infty$ и $\frac{1}{x^2}\to 0$ при $x\to\infty$.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin\frac{x}{2}}$.

Представим выражение под знаком предела в следующем виде:

$$\frac{3x}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{6\cdot\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=6\,\frac{1}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\left(6\,\frac{1}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}\right)=6\cdot\frac{1}{1}=6$$

$$\left(\text{так как }\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1\right).$$

Пример 6. Показать, что последовательности, составленные из периметров правильных вписанных и правильных описанных многоугольников, в процессе неограниченного удвоения числа их сторон стремятся к одному и тому же пределу C.

Пусть p_n — периметр вписанного n-угольника, P_n — периметр описанного n-угольника. Исследуем, как меняется их отношение

$$\frac{p_n}{P_n}=\frac{h_n}{R}$$

(периметры подобных правильных многоугольников относятся, как их апофемы).

Учитывая, что апофема h_n правильного вписанного многоугольника стремится к R при $n \to \infty$, имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p_n}{P_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} h_n}{R}=\frac{R}{R}=1.$$

Из того, что предел отношения периметров равен 1, следует, что C есть общий их предел.

Пример 7. Вывести формулу для площади круга, рассматривая площадь круга как общий предел двух последовательностей площадей правильных вписанных и описанных многоугольников, когда число их сторон неограниченно удваивается.

Площадь правильного вписанного n-угольника равна половине произведения периметра на апофему:

$$q_n=\frac{1}{2}p_nh_n,$$

где q_n — площадь, p_n — периметр, h_n — апофема правильного n-угольника. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} q_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(p_nh_n)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}p_n\lim_{n\to\infty}h_n=\frac{1}{2}CR=\pi R^2.$$

Здесь была применена теорема о пределе произведения.

Для описанного многоугольника имеем $Q_n=\frac{1}{2}P_n\cdot R$, откуда

$$\lim_{n\to\infty} Q_n=\frac{1}{2}R\lim_{n\to\infty}P_n=\frac{1}{2}RC=\frac{1}{2}R\cdot 2\pi R=\pi R^2.$$

§ 242. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Определение. Геометрическая прогрессия, знаменатель которой по модулю меньше единицы ($|q|<1$), называется *бесконечно убывающей* или *сходящейся*. Сумма первых n ее членов может быть вычислена по формуле

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Представим S_n в следующем виде:

$$S_n=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1}{1-q}q^n. \qquad (1)$$

Пусть число членов n неограниченно возрастает ($n \to \infty$). Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^n.$$

Но $q^n \to 0$ при $n \to \infty$ ($|q| < 1$); следовательно,

$$\frac{a_1}{1-q} q^n \to 0$$

как произведение постоянной на бесконечно малую, а потому

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Определение. Предел, к которому стремится сумма первых n членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии при неограниченном возрастании числа членов n, называется *суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии*.

Таким образом,

$$S = \frac{a_1}{1-q}, \text{ где } S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна первому члену a_1, разделенному на разность между 1 и знаменателем прогрессии q.

§ 243. Обращение периодической десятичной дроби в обыкновенную. Представим бесконечную периодическую десятичную дробь $\alpha = 0{,}3151515\ \ldots$ в следующем виде:

$$\alpha = 0{,}3 + 0{,}015 + 0{,}00015 + 0{,}0000015 + \ldots,$$
$$\alpha = 0{,}3 + 15 \cdot 10^{-3} + 15 \cdot 10^{-5} + 15 \cdot 10^{-7} + \ldots$$

Правая часть этого равенства, начиная со второго члена, представляет сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = 10^{-2}$, а потому

$$\alpha = 3 \cdot 10^{-1} + \frac{15 \cdot 10^{-3}}{1 - 10^{-2}},$$

$$\alpha = \frac{3}{10} + \frac{15}{990} = \frac{3 \cdot 99 + 15}{990} = \frac{3(100-1)+15}{990} = \frac{315-3}{990},$$

$$\alpha = \frac{312}{990} = \frac{52}{165}.$$

Правило. *Чтобы обратить смешанную периодическую дробь в обыкновенную, нужно из числа, стоящего* *до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и взять эту разность числителем, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и приписать к ним цифру 0 столько раз, сколько цифр до периода.*

Пример. Обратить в обыкновенную дробь $\beta = 0{,}42777\ldots$

$$\beta = \frac{427-42}{900} = \frac{385}{900} = \frac{77}{180}.$$

Примечание. Чистую периодическую дробь, например $1{,}272727\ldots$, обратить в обыкновенную проще:

$$1{,}272727\ldots = 1 + \frac{27-0}{99} = 1\frac{27}{99} = 1\frac{3}{11}.$$

§ 244. Сравнение бесконечно малых величин. Различные бесконечно малые величины имеют то общее между собой, что в процессе своего изменения каждая из них обязана стремиться к нулю, в противном случае они не были бы бесконечно малыми.

Оказывается, что у разных бесконечно малых величин процесс стремления к нулю протекает неодинаково: одни «быстрее» приближаются к нулю, чем другие. Это видно из следующего простого примера.

Если $x \to 0$, то x^2 также стремится к 0.

Пусть x пробегает числовую последовательность $x = 1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}0001;\ \ldots$ Тогда $x^2 = 1;\ 0{,}01;\ 0{,}0001;\ 0{,}000001;\ \ldots$

Сразу заметно, что x^2 «быстрее» приближается к нулю по сравнению с x. Но разговор о том, что одна величина быстрее приближается к нулю, чем другая, лишен пока точного математического смысла: остается невыясненным, что подразумевать под «быстротой» (скоростью) стремления бесконечно малых к нулю, как ее измерить?

Введем новые математические понятия и, пользуясь ими, будем описывать различный характер приближения к нулю бесконечно малых величин.

В основу новых понятий положена идея сравнения двух бесконечно малых путем отыскания предела их отношения (частного).

Определение 1. Две бесконечно малые величины α и β называются бесконечно малыми *одного порядка*, если предел их отношения равен числу A, отличному от 0.

Таким образом, если $\lim \frac{\beta}{\alpha} = A$ ($A \neq 0$, $A \neq \infty$), то α и β — бесконечно малые одного порядка.

Пример. $\alpha = 3(x-1)$ и $\beta = x - 1$ — две бесконечно малые одного порядка при $x \to 1$, так как

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{3(x-1)} = \frac{1}{3}.$$

Определение 2. Бесконечно малая β называется бесконечно малой *высшего порядка* по сравнению с бесконечно малой α, если предел их отношения равен 0.

В условной математической записи данное определение выражают так: если $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, то $\beta = o(\alpha)$. Запись $\beta = o(\alpha)$ читается: β — бесконечно малая высшего порядка относительно бесконечно малой α.

Примеры. 1) x^2 — бесконечно малая высшего порядка по сравнению с x в процессе стремления x к нулю, так как

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0.$$

2) $\beta = (2x-1)^3$ и $\alpha = (2x-1)^2$. Здесь $\beta = o(\alpha)$ при $x \to \frac{1}{2}$, так как $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\beta}{\alpha} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (2x-1) = 0$.

§ 245. Эквивалентные бесконечно малые. Среди различных бесконечно малых в приложениях математики важную роль играют те из них, предел отношения которых равен 1.

Определение. Две бесконечно малые α и β называются *эквивалентными* или *равносильными*, если предел их отношения равен 1.

Если $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, то $\beta \sim \alpha$. Здесь знак $\sim$ заменяет слово «эквивалентно» и называется знаком эквивалентности.

Приведем примеры:

1) $\sin x \sim x$, 2) $\operatorname{tg} x \sim x$, 3) $\sin x \sim \operatorname{tg} x$ при $x \to 0$.

Поэтому при значениях x, близких к нулю, значения $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ можно считать равными числу x, т. е. радианной мере угла.

Например: 1) $\sin 2^\circ = \sin 0{,}035 \approx 0{,}035$,
2) $\operatorname{tg} 1^\circ 40' = \operatorname{tg} 0{,}029 \approx 0{,}029$.

Эквивалентность синуса и тангенса отражена в устройстве общей шкалы для синуса и тангенса малых углов на обратной стороне движка логарифмической линейки (см. § 207).

Отметим еще одну важную пару эквивалентных бесконечно малых. Убедимся в том, что

$$\ln(1+x) \sim x \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln e = 1.$$

Отсюда, например, следует, что:
1) $\ln 0{,}9985 = \ln(1-0{,}0015) \approx -0{,}0015$,
2) $\ln 1{,}043 = \ln(1+0{,}043) \approx 0{,}043$.

Таким образом, мы можем легко находить натуральные логарифмы чисел, близких к единице.

Нетрудно показать, что

$$\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2} \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{\frac{x}{2}(\sqrt{1+x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{x}{2}(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+1} = 1.$$

Поэтому в приближенных вычислениях пользуются формулой

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \quad (x \text{ — число, близкое к } 0).$$

Аналогичного происхождения формула $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2}$, вытекающая из эквивалентности бесконечно малых $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1$ и $\beta = -\frac{x}{2}$ при $x \to 0$.

Примеры.

$$\sqrt{0,992}=\sqrt{1+(-0,008)}\approx 1-0,004=0,996,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1,082}}\approx 1-\frac{0,082}{2}=1-0,041=0,959.$$

§ 246. Приращение аргумента и функции. Пусть дана функция $y=3x^2-5x+8$. Если аргумент x принимает значение $x_1=2$, то соответствующее значение функции $y_1=3\cdot 2^2-5\cdot 2+8=10$.

При другом значении аргумента $x_2=4$ функция принимает значение $y_2=3\cdot 4^2-5\cdot 4+8=36$.

Изменению аргумента на величину $x_2-x_1=2$ соответствует изменение данной функции на величину $y_2-y_1=26$.

Определение. Разность двух значений аргумента называется *приращением аргумента* и обозначается: $x_2-x_1=\Delta x$ («дельта икс»).

Аналогично разность соответствующих двух значений функции называется *приращением функции*, что записывается: $y_2-y_1=\Delta y$ («дельта игрек»). В нашем примере $\Delta x=2$; $\Delta y=26$.

Приращения аргумента и функции могут быть положительными, отрицательными и 0. Например, если $y=1/x$ и аргумент x от значения $x_1=5$ переходит к значению $x_2=1$, то $\Delta x=x_2-x_1=1-5=-4$. Приращение функции при этом

$$\Delta y=y_2-y_1=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{1}-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}.$$

В этом примере отрицательному приращению аргумента соответствует положительное приращение функции.

Очень важно научиться находить приращения различных функций в общем виде, когда не фиксируется в виде определенного числа ни исходное (x_1), ни конечное (x_2) значение аргумента. Тогда чаще всего применяются следующие обозначения: начальное (исходное) значение аргумента обозначают просто через x (без индекса), конечное значение—через $(x+\Delta x)$.

Начальное значение функции обозначают через y или $f(x)$, конечное значение—через $(y+\Delta y)$ или $f(x+\Delta x)$.

Пример 1. Найти в общем виде приращение функции

$$y=x^3-2x+5. \qquad (1)$$

В правой части равенства (1) аргумент x заменяем на $(x+\Delta x)$ и производим над $(x+\Delta x)$ все те действия, которые должны производиться над x. Одновременно в левой части y заменяется на $(y+\Delta y)$:

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)+5,$$

или

$$y+\Delta y=x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-2x-2\Delta x+5. \quad (2)$$

Заметим, что $(y+\Delta y)$ называют *приращенным значением* функции. Из равенства (2) вычитаем равенство (1):

$$\Delta y=(3x^2-2)\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3.$$

Это и есть общая формула для приращения данной функции. Если $x=5$, $\Delta x=-1$, то $\Delta y=-73+15-1=-59$.

Пример 2. $f(x)=\sin x$. Найти приращение $f(x)$, когда x принимает приращение Δx:

$$f(x+\Delta x)=\sin(x+\Delta x),$$

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=$$
$$=\sin(x+\Delta x)-\sin x,$$

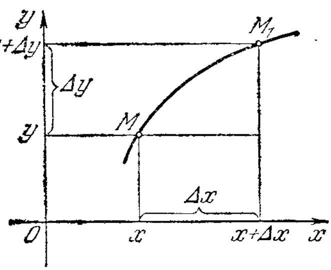

Рис. 151.

или, преобразуя разность двух синусов в произведение, получим окончательно:

$$\Delta f(x)=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

На рис. 151 изображен график функции $y=f(x)$. На кривой взята точка $M(x, y)$ с абсциссой x и ординатой y. Если точка M сместится по кривой в новое положение M_1, то ее новые координаты будут $x+\Delta x$ и $y+\Delta y$. Таким образом, *приращение аргумента Δx есть приращение абсциссы, а приращение функции Δy есть приращение ординаты точки M кривой $y=f(x)$.*

§ 247. Непрерывность функции. Остановимся на одном важном свойстве функции, которым мы многократно пользовались при построении графиков, но еще не дали точного математического определения.

Пусть $y=f(x)$ — произвольная функция, x_0 — точка, взятая из области определения данной функции, так что

$f(x_0)$ есть действительное число. Считая x_0 исходным (начальным) значением аргумента, дадим ему приращение Δx. Это приращение может быть как положительным, так и отрицательным числом, и в дальнейших рассуждениях его знак не будет играть никакой роли. Приращенному значению аргумента, равному $x_0+\Delta x$, соответствует приращенное значение функции, равное $f(x_0+\Delta x)$. Разность $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ есть приращение функции:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

Будем постепенно уменьшать абсолютную величину приращения аргумента, заставляя $\Delta x \to 0$. Если при этом приращение функции Δy также стремится к нулю, то говорят: функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=x_0$.

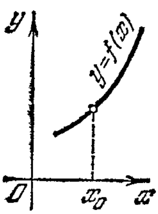

Рис. 152.

Определение 1. Функция называется *непрерывной в точке* $x=x_0$, если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции.

Заметим, что в самом определении непрерывности неявно содержится требование того, чтобы функция была определена в точке x_0. Действительно, если бы в точке x_0 функция не была определена, то не имело бы смысла говорить о приращении функции в этой точке, а следовательно, и о непрерывности.

В геометрическом истолковании непрерывность функции в точке $x=x_0$ означает, что график функции в окрестности точки x_0 представляет собой сплошную кривую без разрывов (рис. 152).

Определение 2. Если функция непрерывна в любой точке промежутка (a, b), то она называется *непрерывной в этом промежутке*.

Определение 3. Точка, в которой не выполняются условия непрерывности, называется *точкой разрыва*, а функция называется *разрывной* в этой точке.

Пример 1. Убедиться в том, что при любом $x \neq 0$ функция $y=\frac{1}{x}$ непрерывна.

Находим приращение функции в точке $x \neq 0$.

Имеем $\Delta y = \frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$, Приближаем приращение Δx к нулю и находим предел приращения Δy:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)} = \frac{0}{x^2} = 0.$$

Здесь мы применили теорему о пределе частного и произведения. Оказалось, что при $\Delta x \to 0$ одновременно и $\Delta y \to 0$, что означает непрерывность функции при любом $x \neq 0$.

Пример 2. Показать, что в точке $x=4$ функция $y=\frac{x}{\lg(x-3)}$ разрывна.

Разрыв функции в точке $x=4$ обусловлен тем, что $f(x)$ не определена в данной точке (знаменатель $\lg(x-3)|_{x=4} = \lg 1 = 0$, а на нуль делить нельзя).

Пример 3. Функция $f(x)$ задана двумя формулами:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2+3 & \text{при} \quad x \leqslant 1, \\ 3x+7 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

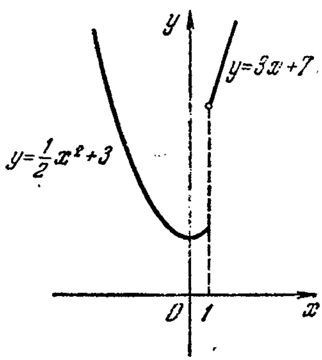

Рис. 153.

Показать, что в точке $x=1$ функция разрывна.

В этом примере, в отличие от предыдущего, в точке $x=1$ функция определена: $f(1)=\frac{1}{2}\cdot 1^2+3=3{,}5$. Остается проверить, стремится ли Δy к 0 при $\Delta x \to 0$, каков бы ни был знак приращения Δx.

1) Пусть аргумент x получает сначала отрицательное приращение $(-\Delta x)$, тогда приращение функции в точке $x=1$ равно $f(1-\Delta x)-f(1)=\left[\frac{1}{2}(1-\Delta x)^2+3\right]-3{,}5$, или $\Delta y = -\Delta x + \frac{(\Delta x)^2}{2}$. Если $(-\Delta x) \to 0$, то Δy, как алгебраическая сумма двух бесконечно малых величин, также стремится к нулю.

2) При положительном Δx значение аргумента равно $1+\Delta x$, приращение функции

$$\Delta y = f(1+\Delta x) - f(1),$$

Но $1+\Delta x > 1$, а потому согласно правилу задания данной функции (при $x > 1$ функция $f(x) = 3x + 7$) $f(1+\Delta x) - f(1) = [3(1+\Delta x) + 7] - 3{,}5$,

$$\Delta y = 3 \cdot \Delta x + 6{,}5.$$

Если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 6{,}5$. Таким образом, в точке $x = 1$ функция разрывна (рис. 153).

§ 248. Свойства функции, непрерывной на отрезке.

1. Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция принимает хотя бы в одной точке этого отрезка свое наибольшее

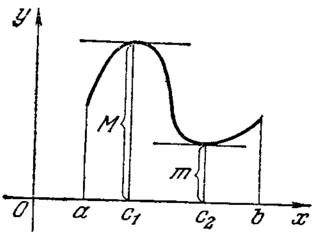

Рис. 154.

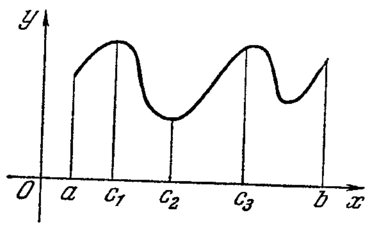

Рис. 155.

значение (M) и хотя бы в одной точке свое наименьшее значение (m):

1) На рис. 154 наибольшее значение соответствует точке $x = c_1$, наименьшее значение — точке $x = c_2$.

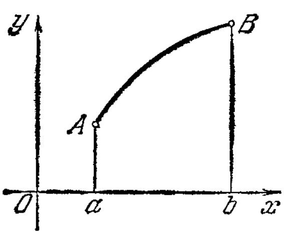

Рис. 156.

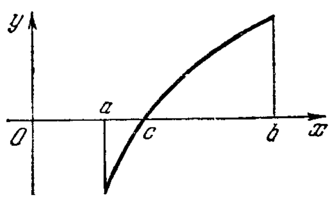

Рис. 157.

2) На рис. 155 показано, что наибольшее значение достигается в двух точках c_1 и c_3, наименьшее значение — только в одной точке c_2.

3) Если функция на данном отрезке всюду возрастает (график — восходящая кривая), то наименьшее значение функции соответствует левому концу отрезка, наибольшее — правому концу (рис. 156), в случае убывания — наоборот.

2. Если на концах отрезка $[a, b]$ непрерывная функция имеет противоположные по знаку значения, то хотя бы в одной промежуточной точке она обращается в нуль (график кривой пересекает ось Ox). На рис. 157 показано, что в левом конце отрезка $[a, b]$ функция отрицательна, в правом — положительна, в промежуточной точке c $(a < c < b)$ функция обращается в нуль: $f(c) = 0$.

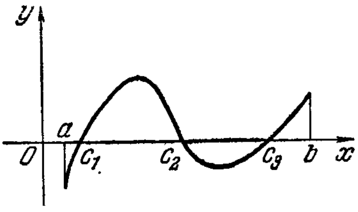

Рис. 158.

На рис. 158 показаны три точки пересечения с осью Ox. Вообще точек пересечения с осью Ox может быть только нечетное число.

Упражнения

1. Приведите примеры функций, взятые из геометрии, физики.

2. Выразить длину хорды окружности радиуса R (R — постоянно) как функцию расстояния от центра окружности до хорды.

3. Дана функция $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Вычислить: $f(0)$; $f(-2)$; $\frac{1}{f(1)}$; $f^2(1)$; $[1+f(1)]^2$; $\lg f\left(\frac{1}{2}\right)$; $\sin f(0)$.

4. Показать, что если $\varphi(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, то $\varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) = \varphi(x_1 + x_2)$, $\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)} = \varphi(x_1 - x_2)$.

5. $f(x) = \lg x$; показать, что $f(ab) = f(a) + f(b)$, $f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$.

6. Найти область определения для каждой из функций:

1) $y = \frac{3x-2}{x+5}$; 2) $y = \frac{2}{x^2+3x}$; 3) $y = \sqrt{3-2x}$;

4) $y = \frac{1}{\sqrt{2-3\cos x}}$; 5) $y = \sqrt{x^2-5x+6}$; 6) $y = \lg(x^2-4)$;

7) $y = \lg(-3x^2+5x+2)$; 8) $y = \arcsin\frac{2x-5}{3}$; 9) $y = \frac{2+\sin x}{2-\sqrt{8\cos x}}$;

10) $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$; 11) $y = \arccos\frac{3}{x^2+1}$; 12) $y = \sqrt{\lg(x+3)}$.

7. Указать, какие из приведенных ниже функций являются четными, нечетными, ни теми, ни другими:

1) $y = \frac{x}{x^2+1}$; 2) $y = \frac{\sin x}{2x+1}$; 3) $y = 3^x + 3^{-x}$;

4) $y = x\sqrt{9-x^2}$; 5) $y = 2x - 3\sin x$; 6) $y = 2^x - 2^{-x}$;

7) $y = 3\,\mathrm{arctg}\, x + 1$; 8) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$; 9) $y = \arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$;

10) $y = \sin(x^2)$; 11) $y = \frac{\cos x}{\mathrm{tg}\, x}$; 12) $y = \sin^2 2x + \sqrt{4-x^2}$.

8. Доказать, что произведение и частное двух нечетных функций есть четная функция.

9. Доказать, что сумма, разность, произведение и частное двух четных функций есть четная функция.

10. Построить графики следующих функций:

1) $y=\lg(x-3)$; 2) $y=\ln|x-3|$; 3) $y=\frac{x}{x-3}$;

4) $y=2^{-x}$; 5) $y=2^{|x|}$; 6) $y=x^2-3|x|+2$; 7) $y=\arccos\frac{x}{x^2+1}$;

8) $y=\lg\frac{3-x^2}{1+x^2}$; 9) $y=\sin x+\cos 2x-1$; 10) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

11) $y=|\sin x|$; 12) $y=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1$.

11. Написать пять первых членов последовательностей:

1) $a_n=\frac{2n}{n+3}$; 2) $a_n=\frac{(-1)^n n}{2n-1}$; 3) $a_n=\frac{\cos\frac{\pi}{2}n}{n^2+1}$.

12. Показать, что апофема правильного вписанного в круг многоугольника стремится к радиусу круга при $n\longrightarrow\infty$.

13. Показать, что последовательность $a_n=\frac{3n-1}{n+2}$ стремится к пределу $a=3$ при $n\longrightarrow\infty$.

14. Найти пределы следующих функций: 1) $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2+1)$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

15. К какому наименьшему неотрицательному числовому значению должен стремиться аргумент x для каждой из указанных ниже функций в отдельности, чтобы все они были бесконечно большими:

1) $f(x)=\frac{1}{x-2}$; 2) $y=\operatorname{tg}x$; 3) $y=\frac{2}{1-\cos x}$; 4) $y=\frac{3}{1+\lg x}$.

16. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-2x}{x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{2x^2-3}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x^3+1}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-1})$; 6) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\frac{1}{x+2}+\frac{4}{x^2-4}\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{2x}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

17. Показать, что при $x\longrightarrow 0$

1) $\sin 2x\sim 2x$; 2) $\operatorname{tg}3x\sim 3x$; 3) $\sqrt[3]{1+x}-1\sim\frac{1}{3}x$.

18. Найти точки разрыва функций и показать вид их графиков:

1) $y=\frac{x}{x^2-4}$; 2) $y=2^{\frac{1}{x-1}}$; 3) $y=\frac{1}{1-\cos x}$.

19. Показать, что перечисленные ниже функции непрерывны на всей числовой оси:

1) $y=ax^2+bx+c$; 2) $y=\frac{x}{1+x^2}$; 3) $y=\sin x$; 4) $y=\sqrt[3]{x}$.

ГЛАВА XVII

ПРОИЗВОДНАЯ

§ 249. Вводное замечание. При изучении линейной функции $y=kx+b$ (§ 51) было отмечено, что путь S, пройденный телом при равномерном движении, есть линейная функция времени: $S=vt+S_0$. Здесь роль коэффициента пропорциональности k играет скорость v, постоянная в данном движении и понимаемая как путь, пройденный в единицу времени.

Всякий равномерный процесс характеризуется линейной функцией и имеет ту особенность, что изменение функции пропорционально изменению аргумента:

$$\Delta y=k\,\Delta x. \qquad (1)$$

В самом деле, если

$$y=kx+b, \qquad (2)$$

то

$$y+\Delta y=k(x+\Delta x)+b. \qquad (3)$$

Вычитая из равенства (3) равенство (2), придем к соотношению (1). Естественно назвать число $k=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *скоростью линейной функции* независимо от того, какой конкретный физический смысл имеют переменные x и y в каждом отдельном случае, так как всегда при $\Delta x=1$ приращение $\Delta y=k$ означает изменение функции, приходящееся на единицу изменения аргумента, что, по аналогии с равномерным движением, есть скорость изменения данной функции.

Другое дело, когда мы сталкиваемся с неравномерными процессами, такими, например, как неравномерное движение, остывание нагретого тела в среде с постоянной температурой, истечение жидкости из отверстия под меняющимся давлением и ряд других явлений. Здесь возникает два вопроса:

1) что называть скоростью неравномерного процесса?

2) как вычислять эту скорость после того, как дано само определение скорости?

Ответы на поставленные вопросы даются в следующем параграфе.

§ 250. Задачи, приводящие к понятию производной.

1. Задача о нахождении скорости неравномерного движения. Лифт после включения движется по закону

$$S = 1{,}5t^2 + 2t + 12,$$

где t — время в секундах, S — пройденный путь в метрах. Найти скорость движения в конце четвертой секунды, считая с момента начала движения.

Составим следующую таблицу:

t	0	1	2	3	4	5
S'	12	15,5	22	31,5	44	59,5
Δt	1	1	1	1	1	
ΔS	3,5	6,5	9,5	12,5	15,5	

Из этой таблицы видно, что в равные промежутки времени лифт проходит различные пути: за первую секунду 3,5 м, за вторую секунду 6,5 м, за третью секунду 9,5 м и т. д. Движение лифта все ускоряется, и мы пока не знаем, что принять за скорость движения в конце четвертой секунды и вообще для любого другого момента времени.

Рассмотрим промежуток времени от конца четвертой секунды до $(4+\Delta t)$ с. Пройденный за этот промежуток времени путь легко подсчитать:

при $t=4$ путь $S = 1{,}5 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 12 = 44$ (м),

при $t = 4 + \Delta t$ путь $S + \Delta S = 1{,}5 \cdot (4 + \Delta t)^2 + 2(4+\Delta t) + 12$ (м). Вычитанием находим:

$$\Delta S = 14 \cdot \Delta t + 1{,}5(\Delta t)^2,$$

Введем понятие средней скорости.

Определение. *Средней скоростью за промежуток времени Δt (с) называется частное от деления приращения пути ΔS на приращение времени Δt:*

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \tag{1}$$

В нашем примере

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{14\Delta t + 1{,}5(\Delta t)^2}{\Delta t}, \quad v_{\text{ср}} = 14 + 1{,}5\Delta t \ (\text{м/с}).$$

Будем находить среднюю скорость за все уменьшающиеся промежутки времени, пользуясь формулой (1):

Δt	1	0,1	0,01	0,001
$v_{\text{ср}}$	15,5	14,15	14,015	14,0015

Истинную, или мгновенную, скорость найдем, если промежуток Δt будем считать бесконечно малой величиной, т. е. $\Delta t \to 0$; тогда

$$v_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} (14 + 1{,}5 \cdot \Delta t) = 14 \ (\text{м/с}).$$

Таким образом, *истинная скорость движения есть предел средней скорости, отнесенной к бесконечно малому промежутку времени:*

$$v_{\text{ист}} = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

2. Задача об определении линейной плотности неоднородного стержня. *Стержнем* называют такое физическое тело, которое по своей форме приближается к отрезку прямой, например, проволока, тонкий брусок; при этом предполагается, что поперечные сечения стержня вдоль всей его длины одинаковы и малы по сравнению с его длиной.

Если стержень однородный, то вдоль его длины масса распределена равномерно и тогда его *линейной плотностью* называется частное от деления его массы на длину: $\gamma = \frac{M}{l}$.

Если же стержень неоднородный, т. е. масса распределена неравномерно вдоль его длины (стержень сделан как бы из различных материалов), то уже нельзя говорить о плотности стержня вообще, ибо масса, приходящаяся на 1 см его длины, будет различна, в зависимости от того, на каком расстоянии от начала стержня выделяется участок стержня длиной 1 см.

Предположим, что нам известен закон распределения массы: $M = f(x)$. Масса есть функция расстояния от начала стержня. Требуется определить плотность в сечении x (рис. 159). Проведем близкое сечение на расстоянии $x + \Delta x$. Приращению длины стержня на величину Δx соответствует приращение массы на величину ΔM. Таким образом, $\frac{\Delta M}{\Delta x}$ — средняя линейная плотность участка стержня между сечениями x и $x + \Delta x$.

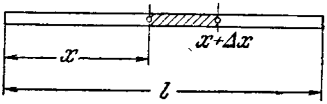

Рис. 159.

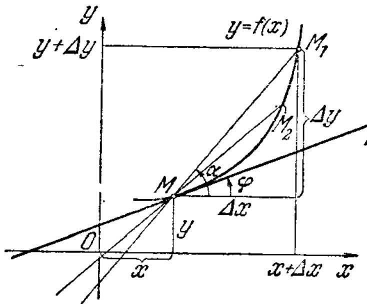

Рис. 160.

Предел средней плотности при условии, что приращение длины стержня $\Delta x \to 0$, называется *линейной плотностью в сечении* x:

$$\gamma_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta x}.$$

3. Задача о проведении касательной к кривой. Дана парабола $y = 0{,}5x^2$. Требуется провести касательную к этой кривой в точке, абсцисса которой равна x.

Прежде всего надо уточнить само понятие «касательная к кривой». Пусть $y = f(x)$ — непрерывная функция, график которой изображен на рис. 160. Возьмем на кривой произвольную точку $M(x; y)$, которую будем считать неподвижной, фиксированной точкой. Сместимся по кривой от точки M в новое положение M_1, причем координаты точки M_1 обозначим через $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, так что $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$. Соединив точки M и M_1 прямой, получим секущую MM_1. Заставим точку M_1 по кривой неограниченно приближаться к точке M (промежуточное положение — точка M_2), тогда секущая MM_1 при этом будет поворачиваться вокруг точки M и в момент слияния точки M_1 с точкой M станет касательной MT к кривой в точке M.

Определение. *Касательной к кривой в данной точке M* называется предельное положение секущей MM_1.

Точку M на кривой, в которой проводится касательная, обычно определяют по ее абсциссе x, так как, зная абсциссу и уравнение кривой, легко отыскать и саму точку M.

Исходя из данного определения касательной, можно вычислением найти положение касательной: прямая (касательная есть прямая) в координатной системе вполне определяется точкой, через которую она проходит, и своим направлением, т. е. угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg} \varphi$. Приняв во внимание эти соображения, решим конкретную задачу о проведении касательной к параболе $y = 0{,}5x^2$ в произвольной точке с абсциссой x.

Возьмем две точки на параболе: $M(x;\ y)$ и $M_1(x + \Delta x;\ y + \Delta y)$. Секущая MM_1 образует с положительным направлением оси Ox угол α, причем угловой коэффициент секущей, т. е. $\operatorname{tg} \alpha$, равен $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (см. рис. 160). Но

$$y = 0{,}5 \cdot x^2, \quad y + \Delta y = 0{,}5\,(x + \Delta x)^2,$$

откуда вычитанием находим:

$$\Delta y = 0{,}5\,[(x + \Delta x)^2 - x^2],$$

или

$$\Delta y = 0{,}5 \cdot [2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2],$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0{,}5\,(2x + \Delta x) = x + 0{,}5 \cdot \Delta x,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = x + 0{,}5 \cdot \Delta x.$$

Если точка M_1 неограниченно приближается к точке M, то $\Delta x \to 0$, и угол α при этом стремится к предельному углу φ, образованному касательной MT с осью Ox. Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} (x + 0{,}5 \cdot \Delta x) = x,$$

или $\operatorname{tg} \varphi = x$.

Таким образом, мы нашли, что угловой коэффициент касательной к параболе $y = 0{,}5x^2$ в произвольной точке равен x, т. е. абсциссе точки касания.

Если $x=1$, то $\operatorname{tg}\varphi=1$, $\varphi=45^\circ$, т. е. в точке с абсциссой $x=1$ касательная наклонена под углом 45° к оси Ox.

Рассмотренные выше три задачи были различны по своему физическому и геометрическому содержанию, однако их решение требовало применения одних и тех же рассуждений: искомая величина в каждой задаче оказалась пределом отношения двух приращений. Можно было бы привести ряд других задач из техники и естествознания, которые решались бы тем же методом.

Ввиду исключительной важности отмеченного выше предела для математики и прикладных наук ему присвоено особое название.

§ 251. Определение производной. Пусть $y=f(x)$ — некоторая функция.

Определение 1. Предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, называется *производной от данной функции:*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}\text{— производная.}$$

Здесь даны три различных обозначения производной: y' (читается «игрек штрих»); $f'(x)$ («эф штрих от икс»); $\frac{dy}{dx}$ («дэ игрек по дэ икс»).

Теперь можно сказать, что:

1) если формулой $S=f(t)$ задан закон прямолинейного движения, то скорость движения (мгновенная скорость) для любого момента времени есть производная от пути по времени:

$$v_{\text{мгн}}=\frac{dS}{dt} \qquad \text{(задача 1).}$$

2) Если дан закон распределения массы по длине неоднородного стержня, т. е. $M=f(x)$, то линейная плотность стержня в сечении x есть производная от массы по расстоянию (по длине):

$$\gamma_x=\frac{dM}{dx} \qquad \text{(задача 2).}$$

3) Если дано уравнение кривой $y=f(x)$, то производная от ординаты по абсциссе есть угловой коэффициент

касательной MT, проведенной к кривой в точке M:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = k_{\text{кас}} \qquad \text{(задача 3).}$$

В этой формулировке дан геометрический смысл производной.

Обратим внимание на то, что при фиксированном значении аргумента ($x = x_0$) производная от данной функции есть определенное число. Это число обозначается $y'(x_0)$ или $f'(x_0)$. Так было при решении задачи 1 о движении лифта. Здесь требовалось найти скорость в момент времени $t = 4$ *сек*; ответ:

$$S'(4) = 14, \quad \text{или} \quad \left.\frac{dS}{dt}\right|_{t=4} = 14.$$

Если же исходное значение аргумента не фиксируется, а остается произвольным, то производная от данной функции есть функция того же аргумента, но только закон зависимости y' от x, вообще говоря, другой, чем закон зависимости y от x. Это видно из решения задачи 3: здесь функция $y = 0{,}5x^2$, ее производная $y' = x$.

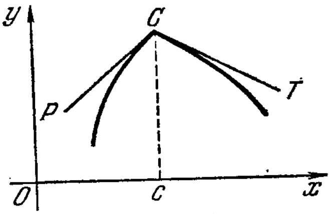

Рис. 161.

Определение 2. Функция, имеющая конечную производную во всех точках некоторого промежутка (a, b), называется *дифференцируемой в этом промежутке.*

График дифференцируемой функции называют *гладкой кривой*, а сама функция называется *гладкой*.

Бывают функции, которые в некоторых точках (или даже во всех точках) не имеют производной. Пример такой функции изображен на рис. 161: здесь в точке $x = c$ к кривой можно провести две различные касательные: левую CP, когда $\Delta x < 0$, и правую CT, когда $\Delta x > 0$. В таких случаях говорят, что нет никакой касательной, так как предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не должен зависеть от того, стремится ли Δx к нулю справа или слева, т. е. правая и левая касательные должны совпасть.

В дальнейшем речь будет идти только о дифференцируемых функциях. Фразы «найти производную» и «продифференцировать функцию» по своему смыслу равнозначны.

§ 252. Общее правило отыскания производной. Производная от любой дифференцируемой функции $y=f(x)$ находится по следующей схеме:

1) Аргументу x даем приращение Δx и находим приращенное значение функции: $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$.

2) Из приращенного значения функции вычитаем начальное значение функции: $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

3) Находим отношение приращения функции к приращению аргумента: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ (это — средняя скорость изменения функции).

4) Находим предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю. Этот предел и есть производная от данной функции:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'.$$

Пример 1. Найти производную функции $y=\sqrt{x}$:

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x};\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Прежде чем переходить к пределу, числитель и знаменатель умножим на $\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=$$

$$=\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}};$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}};\quad y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Пример 2. Под каким углом наклонена касательная к гиперболе $y=4/x$ в точке $x=2$?

Найдем сначала производную y' в любой точке x $(x\neq 0)$ функции $y=4/x$:

$$\Delta y=\frac{4}{x+\Delta x}-\frac{4}{x}=\frac{4(x-x-\Delta x)}{x(x+\Delta x)},\quad \Delta y=-\frac{4\Delta x}{x(x+\Delta x)};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{4}{x(x+\Delta x)};$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4}{x(x+\Delta x)}=-\frac{4}{x^2},\quad y'=-\frac{4}{x^2}.$$

Теперь $y'(2)=-\frac{4}{2^2}=-1.$

Следовательно, $\operatorname{tg}\varphi=-1$, т. е. $\varphi=\frac{3}{4}\pi$ (или 135°).

Упражнения

1. Известно, что путь, пройденный свободно падающим телом, вычисляется по формуле $S=gt^2/2$, где S — путь в метрах, g — ускорение силы тяжести, равное 9,8 м/с^2, t — время в секундах.

1) Найти среднюю скорость тела за промежуток времени от $t_1=2$ до $t_2=5$; 2) найти скорость v тела в момент $t=2$, вычисляя $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$; 3) показать, что скорость v свободно падающего тела в любой момент времени t равна $v=gt$.

2. Тело движется прямолинейно и равноускоренно по закону $S=5t^2+8t+10$, где t — время в секундах, S — пройденный путь в метрах. Найти: 1) скорость движения в конце 8-й секунды; 2) по истечении скольких секунд скорость достигнет 128 м/с?

3. Вычислением $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ найти производные от функций:

1) $y=x^3$; 2) $y=\frac{1}{x^2}$; 3) $y=\frac{2}{\sqrt{x}}$; 4) $y=2x^2-5x+8$; 5) $y=\frac{x^3}{2}+3x+1$; 6) $y=\cos x$; 7) $y=\frac{x+1}{1-4x}$.

4. Вычислить $f'(0)$, если $f(x)=\sqrt{1+x}$.

5. Найти углы наклона касательных, проведенных к параболе $y=0{,}5x^2+1$ в точках с абсциссами $x=\pm 1$.

6. Под каким углом пересекаются параболы: $y=3x^2$ и $y=4-x^2$?

Указание. Углом пересечения двух кривых называется угол, образованный касательными, проведенными в точке пересечения кривых.

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

Глава I

2. 6400; 6360; 6357. **3.** Вторая запись указывает на более точное измерение. **5.** С точностью до 0,02 *м*. **6.** 5,286. **7.** 18,6 и 18,8. **8.** 0,05%. **9.** Второе. **10.** Точнее $3\frac{1}{7}$. **11.** 18,8. **12.** 6,829. **13.** 615 км ($\pm$ 5 км). **14.** 164 кг. **15.** 0,25. **16.** 2%. **17.** С тремя точными цифрами. **18.** С точностью до 0,5%. **19.** 14,1 ц. **20.** С точностью до 0,1 см.

Глава II

1. 1) $\frac{4}{3}$; 3) $2b$. **2.** 1) 0; $-\frac{8}{3}$; 3) 6; 8; 5) 0,7; 0,3; 7) $\frac{3m+8}{m^2+6}$; $\frac{4m-9}{m^2+6}$; 9) $(a+b)^2$; $(a-b)^2$; 11) $\frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}$; $\frac{ab(a-b)}{a^2+b^2}$; a и b не равны 0; 13) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 15) $-\frac{m(D+Aa+Bb+Cc)}{Am+Bn+Cp}+a$; $-\frac{n(D+Aa+Bb+Cc)}{Am+Bn+Cp}+b$; $-\frac{p(D+Aa+Bb+Cc)}{Am+Bn+Cp}+c$ при условии, что $Am+Bn+Cp\neq 0$; 16) -5; 2 и 3; 2. **3.** $k\neq 7{,}5$. **4.** $k=2$. **5.** $k=8$.

Глава III

1. 1) $x>2$; 3) $x<7$; 5) $x>\frac{2(1-k)}{3-6k}$ при $k<0$; 7) $\frac{2}{3}<x<\frac{8}{3}$; 9) $x<-1$ и $x>4$. **2.** 1) $x>\frac{3}{2}$; 3) $\frac{53}{4}<x<20$. **3.** $-\frac{3}{2}<a<4$. **4.** $\frac{26}{3}<m<\frac{91}{5}$. **5.** $10<a<12$. **6.** $m<-4$ и $m>2$. **7.** При $n=0$; 1.

Глава V

5. 3) x^{2n-2}; 6) a^{18}; 8) a^{8m}. **6.** $\frac{c-d}{(a+b)^3}$. **7.** 2) $\sqrt{15}$; 5) $\sqrt{abx}$; 8) $\sqrt[3]{10}$; 10) $\sqrt{\frac{a}{4b}}$; 13) $\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}$. **8.** 1) Больше $3\sqrt{2}$;

2) больше $3\sqrt{10}$. **9.** 3) $\frac{6}{7}\sqrt{2}$; 6) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$; 11) $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$; 12) $|x-1|\sqrt{2}$; 15) $\sqrt[3]{1+b}$. **11.** 7) $0{,}7\sqrt[3]{xy^2}$ и $0{,}3\sqrt[3]{xy^2}$; 8) $\frac{1}{a-b}\sqrt{a-b}$ и $\frac{2}{b}\sqrt{a-b}$. **12.** 1) $20\sqrt{2}$; 6) 0. **13.** 3) $\sqrt[6]{a^3}$, $\sqrt[6]{9a^2b^2}$, $\sqrt[6]{8c^3}$. **14.** 1) $\sqrt[4]{2^3}$; 4) $2\sqrt[12]{2}$. **15.** 3) $\sqrt{10}$; 5) $x\sqrt[15]{x}$; 9) $0{,}4ab$; 11) 7; 13) 1; 15) a^2-b; 17) $(a+b)^2$; 19) $102+9\sqrt{6}$; 21) 1; 23) y. **16.** 4) a^2b^2; 7) $a+b+2\sqrt{ab}$; 10) $2(x+\sqrt{x^2-y^2})$; 13) $\frac{(x+y)^2}{xy}$; 19) $(p^2-q^2)^2$. **18.** 2) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$; 5) $\frac{2}{3}\sqrt{5}$; 9) $2-\sqrt{3}$. **19.** $4x\sqrt{x^2-1}$. **24.** m. **26.** 2) $a^{\frac{2}{3}}$; 6) $(x-y)^{\frac{1}{3}}$; 8) $a^{-\frac{1}{2}}$; 11) $3(x-y)^{-\frac{1}{3}}$; 12) $3ab(a+b)^{-\frac{2}{5}}$. **27.** 4) $\frac{1}{8}$; 10) $\frac{1}{81}$; 13) $12\frac{4}{9}$. **28.** 3) $x-y$; 6) a^2+a+1; 10) x^2+2; 12) a. **29.** 1) $\frac{2y}{\sqrt{x^2-y^2}}$; 2) $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{4\sqrt{xy}}$; 3) $\frac{x+y}{x-y}$; 4) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; 5) $\frac{4}{a+\sqrt{a}+1}$. **30.** $\frac{a^3}{2(a-1)}$. **31.** 1) x^4; 2) $a^{-\frac{8}{5}}b^{-1}$; 3) $-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$; 4) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

Глава VI

1. $f(-1)=0$; $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$. **2.** $\frac{f(2)}{\varphi(2)}=\frac{5}{8}$; $f(1)\cdot\varphi(3)=39$.

3. 1) Вся действительная ось; 2) $x \geqslant -\frac{1}{2}$; 3) $x \leqslant 0$; 4) вся действительная ось, кроме точек $x=\pm 1$; 5) $|x| \geqslant 2$; 6) вся действительная ось, кроме точки $x=\frac{3}{2}$; 7) вся действительная ось, кроме точки $x=0$. **4.** Четными будут функции, приведенные в примерах 1) и 6), нечетными — в примерах 4) и 7). **6.** 1) $y=x^2+1$; 2) $y=x^2-2$. **7.** 1) При $q>0$ вершина лежит над осью Ox, при $q<0$ — под осью Ox, при $q=0$ вершина совпадает с началом координат. **8.** 1) $y=(x-4)^2$; 2) $y=(x+3)^2$. **9.** 1) Сдвигом вправо на 2 единицы и вверх на 1 единицу; 2) сдвигом влево на 1 единицу и вниз на 4 единицы. **10.** 1) $y=(x-3)^2+2$; 4) $y=(x+1{,}5)^2-2{,}5$. **11.** Сдвиг вправо на 4 единицы и вниз на 9 единиц, вершина параболы — в точке $(4;\ -9)$; 2) сдвиг влево на 2 единицы и вниз на 1 единицу, вершина параболы — в точке $(-2;\ -1)$. **12.** 1) Параболы симметричны относительно оси Ox и имеют общую вершину в начале координат; 3) параболы имеют общую вершину $(-2;\ 3)$ и симметричны относительно прямой $y=3$. **13.** $a=2$. **14.** $a=-1$. **15.** $a=\frac{3}{8}$; $c=-\frac{27}{8}$. **16.** $x=\frac{7}{2}$. **17.** $x=4$.

Глава VII

1. 1) $-3{,}5$ и 3; 3) 2; 5) $-2a$ и $2b$; 7) $-\frac{a}{7}$ и $\frac{a}{8}$; 8) $-\frac{89}{14}$ и 1; 9) $\frac{b\pm\sqrt{b^2-4a}}{2}$; 10) $\frac{b}{a}$ и $\frac{a}{b}$; 11) $\frac{a-b}{a+b}$ и $\frac{a+b}{a-b}$; 12) $\frac{a+b+c\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-(ab+ac+bc)}}{3}$; 13) действительных корней нет; 14) $\frac{m}{m-n}$ и -1; 17) $-\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\pm 2$; 19) $a+b$ и a^2-b^2. **2.** 8 точек. **3.** $\frac{1+\sqrt{8m+1}}{2}$. **4.** 15 м и 25 м. **5.** 30 см и 12,5 см. **6.** Нет. **7.** В пятиугольнике. **8.** Возможны прямоугольные треугольники соответственно со сторонами: 3, 4, 5 и 6, 8, 10, — однако 3) не существует прямоугольного треугольника, стороны которого выражаются тремя последовательными нечетными числами, так как сумма квадратов двух нечетных чисел есть число четное, которое не может равняться квадрату третьего нечетного числа, т. е. нечетному числу. **9.** 5 км и 6 км. **10.** 3 ч и 5 ч. **11.** 20 км/ч. **12.** 48 км/ч и 36 км/ч. **13.** 20 ч и 30 ч. **14.** 2400 руб. **15.** 630 км и 420 км. **16.** 180 км и 60 км. **18.** 3) 1,23 и $-0{,}40$; 4) 0,42 и 0,72. **19.** 1) $x^2-8x+15=0$; 3) $2x^2-7x-4=0$; 4) $x^2-9=0$; 6) $x^2-\frac{b}{a}x=0$; 8) $12x^2-25x+12=0$; 9) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$; 10) $4x^2-4mx+m^2-n^2=0$; 11) $x^2-4x+1=0$; 12) $2x^2-2x-1=0$; 13) $x^2-2ax+a^2-b=0$. **21.** 1) $m=\pm 12$; 2) $m=4$; 3) $m=\frac{-10}{9}$ и $m=2$. **22.** 1) $b^2-4ac\geqslant 0$, $a>0$, $c>0$, $b<0$; 3) $b^2-4ac>0$, $a>0$ и $c<0$. **23.** 1) $m=a^2-b^2$; 3) $m=-2$; 4) $m=-(2a+5)$. **24.** 1) $k=-\frac{27}{4}$; 2) $k=-\frac{13}{16}$; $k=-\frac{25}{2}$. **25.** $a=-\frac{8}{25}$. **26.** $a^4x^2-(2b^2-4ac)a^2x+b^4-4ab^2c=0$. **27.** 1) 0; 5; -3; 3) 0; -4; -7; 4) 3; -1; 1; 6) $x=2$, еще два корня — мнимые числа; 8) 0; $\pm\sqrt{2}$. **28.** $(x-1)(x-2)(x+3)=0$; 3) $(x^2-4)(x^2-9)=0$; 5) $(x-a)(x-b)(x+c)(x-d)=0$. **29.** 1) ± 1; ± 4; 3) $\pm\sqrt{5}$; $\pm\sqrt{6}$; 5) ± 2; еще два корня — мнимые числа. **30.** 1) 4; 3) 24; 4) 77; 6) 7; 7) 40; 8) 4; 9) 4; 10) 6; 11) $3a$; 12) 3; 14) 64; 16) 4; 18) $\frac{5}{4}$; 20) 3; 22) $3a$ и $4a$ $(a>0)$; 23) 0; 24) $\frac{a+\sqrt{a^2+8b^2}}{4}$ $(a>0$ и $|b|\leqslant a)$; 25) при $a<0$ и $b^2-a^2\geqslant 0$ $x=0$; при $a>0$ и $a\geqslant|b|$ $x=\frac{5a^2-b^2}{4a}$; при $a=b=0$ уравнению удовлетворяет любое положительное число x; 26) $\frac{2a\sqrt{b}}{b+1}$ $(b>0)$; 28) $\frac{3}{4}a$ $(a>0)$. **31.** 1) (7; 5) и $(-5;\ -7)$; 3) (9;

5) и (—9; —5); 5) $\left(\sqrt{\frac{5}{2}};\ 2-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ и $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}};\ 2+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$;
7) (2; 2); 9) (5; 3) и $\left(\frac{3}{4};\ -\frac{5}{4}\right)$; 10) (3; 1); (—3; —1); $(2\sqrt{2};\ \sqrt{2})$ и $(-2\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$; 11) (2; 2); (—2; —2); (2; —2) и (—2; 2); 12) (7; 4); (4; 7); (—7; —4) и (—4; —7); 13) (8; 4) и (4; 8); 14) (6; 3); (3; 6); $\left(-9;\ -\frac{9}{2}\right)$ и $\left(-\frac{9}{2};\ -9\right)$; 15) (6; 3) и (—6; —3); 17) $(10+4\sqrt{6};\ 10-4\sqrt{6})$; 18) (8; 2) и (2; 8); 19) (9; 4) и (4; 9); 20) $\left(\frac{b}{(1-m)\sqrt{m}};\ \frac{b\sqrt{m}}{1-m}\right)$, где $m=\frac{a^2-2\pm\sqrt{a^2(a^2-4)}}{2}$; 21) $\left(\frac{a}{2};\ \frac{b}{2}\right)$; 22) (8; 64) и (64; 8); 23) (4; 9); (9; 4); (—4; —9) и (—9; —4); 24) $\left(\frac{a^2+2b+\sqrt{a^2(a^2+4b)}}{2};\ \frac{a^2+2b-\sqrt{a^2(a^2+4b)}}{2}\right)$; 25) (6; 3); $\left(-3;-\frac{3}{2}\right)$; $\left(\frac{12+\sqrt{351}}{23};\ 12+\sqrt{351}\right)$ и $\left(\frac{12-\sqrt{351}}{23};\ 12-\sqrt{351}\right)$; 26) (4; 2). **32.** (15; 9) и (—15; —9). **33.** 12 и 8. **34.** $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{2}$.
35. 1) $1<x<4$; 2) $x<1$ и $x>2$; 3) $1<x<7$; 4) $x\leqslant 1$ и $x\geqslant 4$; 5) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}<x<1$ и $x>\frac{3+\sqrt{13}}{2}$; 6) $-3<x<3$; 7) $\frac{5-\sqrt{41}}{2}<x<1$ и $4<x<\frac{5+\sqrt{41}}{2}$; 8) $x\leqslant-\sqrt{12}$; $-6\leqslant x\leqslant 6$ и $x\geqslant\sqrt{12}$.
36. 1) $-4<x<-1$ и $2<x<3$; 2) $2<x<5$; 3) $-1{,}5<x\leqslant-1$.

Глава VIII

3. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$. **6.** $\text{пр}_l\boldsymbol{a}=-4$. **7.** $\overrightarrow{AB}=4\boldsymbol{i}$; $\overrightarrow{BC}=6\boldsymbol{j}$; $\overrightarrow{CD}=-4\boldsymbol{i}$; $\overrightarrow{DA}=-6\boldsymbol{j}$; $\overrightarrow{AC}=4\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}$; $\overrightarrow{BA}=-4\boldsymbol{i}$. **8.** $\overrightarrow{AM}=2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}$; $\overrightarrow{AN}=4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$; $\overrightarrow{MN}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$. **9.** Равнодействующая $\overrightarrow{OM}=\{8,\ -2\}$, $|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{68}$. **12.** $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-5$. **13.** $\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{17\cdot 13}}$. **14.** $\text{пр}_b\boldsymbol{a}=\frac{9}{\sqrt{73}}$; $\text{пр}_a\boldsymbol{b}=\frac{9}{\sqrt{34}}$. **15.** $\cos\varphi=\frac{21}{5\sqrt{37}}$. **16.** $y=-6$. **19.** 1. **20.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Глава IX

2. 1) $\frac{\pi}{90}$; 4) $\frac{5\pi}{72}$; 7) $\frac{16\pi}{9}$. **4.** 1) 120°; 3) 270°; 5) 22°30′; 17) 18°. **6.** 102°. **7.** $\frac{2\pi}{5}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5}{3}\pi$; $\frac{4}{5}\pi$; $\frac{22}{15}\pi$; 2π; $3{,}5\pi$; $0{,}06\pi$; $0{,}01\pi$; $0{,}75\pi$. **8.** $\frac{3}{4}$ (рад). **11.** 15,9 см. **13.** $P=44{,}1$ см; $S=106$ см². **15.** 1) $\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{8\pi}{9}$. **22.** 1) $\sin 285°<0$; 4) $\operatorname{tg} 327°20'<0$. **24.** 1) $\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}$;

3) $60° \leqslant x \leqslant 300°$. **25.** 1) $\cos\alpha = -0{,}8$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$; 3) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$; $\sin\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\alpha = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$. **26.** 1) -7; 3) $-p$. **27.** 1) $\sin 15°$; 3) $-\operatorname{tg}45° = -1$; 5) $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 7) $-\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 9) $-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$. **28.** 1) $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $-\operatorname{tg}60° = -\sqrt{3}$; 5) $\sin 0{,}4\pi$; 8) $-\operatorname{ctg}0{,}3\pi$. **29.** 1) $\operatorname{tg}10°\cdot\sin 10°$; 3) 1; 5) $\cos 0{,}1\pi\cdot\sin^2 0{,}1\pi$; 6) 0; 7) $\cos A$; 8) $-\sin 0{,}5$; 9) 0; 10) $\cos^2 10°$; 11) $2\operatorname{tg}B$; 12) $\operatorname{tg}x\cdot(\sin x - \cos x)$. **31.** 1) $0 < x < \pi$; 2) $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ и $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$; 4) $0 \leqslant x < \frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}$ и $\frac{11\pi}{6} < x \leqslant 2\pi$; 5) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2}$; 6) $\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6}$; 7) $\frac{\pi}{8} < x < \frac{7\pi}{8}$ и $\frac{9\pi}{8} < x < \frac{15\pi}{8}$; 8) $0 < x < \frac{\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3} < x < \pi$; 9) $0 < x < \frac{\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$; 10) $0 < x \leqslant \frac{\pi}{6}$ и $\pi < x \leqslant \frac{7\pi}{6}$; 11) $\frac{7\pi}{12} < x < \frac{3\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4} < x < \frac{23\pi}{12}$; 12) $0 \leqslant x < \frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}$ и $\frac{11\pi}{6} < x \leqslant 2\pi$; 13) $0 \leqslant x < \frac{11\pi}{24}$ и $\frac{43\pi}{24} < x \leqslant 2\pi$; 14) $\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{12} < x < \frac{11\pi}{12}$; $\frac{13\pi}{12} < x < \frac{17\pi}{12}$ и $\frac{19\pi}{12} < x < \frac{23\pi}{12}$.

Глава X

1. 1) $-\frac{4}{5}$; 4) $-\frac{117}{125}$; 6) $\frac{44}{117}$. **2.** $\cos(\alpha-\beta) = \frac{140}{221}$. **3.** 1) $-\cos(a-b)$; 3) $\sin x$; 5) $\operatorname{tg}2\alpha$; 7) $\operatorname{ctg}2\alpha$; 8) $\operatorname{tg}^2\alpha$. **4.** 1) 3; 3) $-\frac{7}{25}$; 5) $\sqrt{\frac{10+3\sqrt{10}}{20}}$. **5.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) 1. **7.** 1) $\frac{1}{72}(28\sqrt{2}+7\sqrt{15})$. **9.** 1) $x = (-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 3) $x = \frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 5) $x = \pm\frac{\pi}{3}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 7) $x = \frac{\pi}{3}k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 9) $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x_2 = \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 11) $x = \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 13) $x = \pm\frac{\pi}{6}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. **10.** 1) 1,5; 2) $\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$. **11.** 1) $2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$;

2) $2\sin\frac{3a}{2}\cos a\cos\frac{a}{2}$; 3) $\frac{4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{\sin 4\alpha}$; 4) $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}$;

5) $\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$; 6) $\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos^2\alpha}$.

Глава XI

1. 1) $\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 5) $-\frac{\pi}{2}$. **2.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{3\pi}{4}$; 4) $\frac{3}{2}\pi$. **3.** 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{2}$. **5.** 1) $x=\arcsin y$; 2) $x=\arcsin 2y$; 4) $x=\operatorname{arcctg} 4y$; 5) $x=2\operatorname{arctg}\frac{y}{3}$. **6.** 1) $x=2\sin y$; 3) $x=\cos 2y$; 4) $x=\frac{1}{2}\arcsin\frac{y}{3}$. **7.** 1) 0.6; 2) $\sqrt{3}$; 3) $2x\sqrt{1-x^2}$. **9.** 1) $x=(-1)^k\arcsin\frac{2}{3}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 3) $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{5}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 5) $x=(-1)^k\arcsin\frac{4}{5}+\pi k+\frac{\pi}{8}$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. **10.** 1) $2\sin 55^\circ\cos 25^\circ$; 3) $2\sin 4\cos 1$; 5) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\sec\frac{3\pi}{5}$; 7) $2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)$; 11) $2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$; 14) $4\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$. **11.** 1) $\sin 60^\circ+\sin 20^\circ$; 3) $\frac{1}{2}(\sin 4\alpha+\sin 2\alpha)$; 5) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}\right)$; 8) $\frac{1}{2}\left[\cos 3x+\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$. **13.** 1) $\frac{\pi}{2}(4k+1)$; $-2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 4) $x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 5) $x_1=$ $=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{4}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 7) $x=\frac{\pi}{10}(2k+1)$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 8) $x=\pm 60^\circ+180^\circ k-15^\circ$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 10) $x_1=\frac{\pi}{4}(8k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{5}(2k+1)-\frac{\pi}{20}$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 13) $x=$ $=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 15) $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $x_2=\operatorname{arctg}5+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 17) $x_1=\pi(2k+1)$; $x_2=\pm\frac{4}{9}\pi+\frac{4}{3}\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 19) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 21) $x=\frac{2k\pi}{3}$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 22) $x_1=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $x_2=\frac{\pi}{2}-(-1)^k\frac{\pi}{3}+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$;

23) $x_1=\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{24}$; $x_2=(2k+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 24) $x_1=\frac{k\pi}{2}$; $x_2=\frac{k\pi}{5}$; $x_3=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 25) $x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 26) $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 27) $x_1=$ $=\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x_2=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{5}+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 28) $x_1=$ $=\frac{\pi}{2}(4k+1)$; $x_2=(2k+1)\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 29) $x_1=2k\pi$; $x_2=\frac{3\pi}{4}+k\pi$; $x_3=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 30) $x_1=k\pi$; $x_2=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{6}+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 31) $x=(-1)^k\arcsin\frac{3}{5}+k\pi$ $(k+0, \pm 1, \ldots)$; 32) $x_1=(2k+1)\pi$; $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{3}+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$.

Глава XII

3. 2) $a_n=\frac{n}{2n-1}$. **10.** 144, 168, 192. **14.** 1) $d=4$; $S_n=207$; 2) $a_n=-4$; $n=7$; 3) $a_n=-32$; $S_n=-5$; 4) $n=13$; $S_n=403$; 5) $a_1=1$; $a_n=469$; 6) $n=17$; $a_n=50$; 7) $a_1=5{,}2$; $S_n=584{,}8$; 8) $a_1=2{,}3$; $n=19$; 9) $d=5{,}5$; $n=20$; 10) $a_1=15$; $d=-3$. **15.** $\div$ 12, 10, 8, ... **16.** $\div$ 12, 9, 6, 3, ... или $\div$ —9; —6; —3; 0, ... **19.** 3. **20.** $2\frac{1}{3}$; $5\frac{1}{3}$; $8\frac{1}{3}$. **21.** 7 или 13. **30.** $q=\frac{1}{3}$; $S_7=53\frac{79}{81}$. **31.** $a_1=2$, $a_7=1458$. **32.** $n=6$. **33.** $q_1=12$; $q_2=-13$. **34.** $6\frac{1}{4}$ или $-56\frac{1}{4}$. **35.** 5; 15; 45. **37.** 5; 10; 20; 40. **39.** 154,8 м. **40.** 5 мин. **41.** 9 с; 108 м. **42.** 1) $1 < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < 1$.

Глава XIII

3. 6) $-\frac{1}{2}$; 7) $\frac{2}{3}$; 8) $\frac{9}{5}$. **4.** 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{2}{3}$; 9) $-\frac{1}{2}$; 10) $-\frac{3}{2}$. **5.** 10) $\frac{1}{64}$; 11) $\frac{9}{4}$; 12) 8. **8.** 1) Между —2 и —1; 3) между —3 и —2; 4) между —5 и —4. **9.** 1) Между —4 и —3; 2) между —5 и —4; 3) между —7 и —6. **10.** 1) $\frac{3}{5}$; 2) $-\frac{3}{5}$; 3) $\frac{3}{10}$; 4) $\frac{3}{20}$; 5) $\frac{1}{10}$. **11.** 1) 3; 2) $3^{\frac{9}{4}}$; 3) $\frac{1}{27}$; 4) $\frac{1}{9}$. **12.** Геометрическую прогрессию: 2, 4, 8, 16, ... **19.** 2, 3 и 5. **22.** 15) $\lg y=3\lg a-\frac{11}{9}\lg b-$

$-\frac{2}{9}\lg c$; 17) $\lg y=3\lg b+\frac{3}{4}\lg c-\frac{1}{2}\lg a$; 18) $\lg x=\frac{1}{n}\left(\lg m+\frac{2}{p}\lg b\right)$; 19) $\lg z=-\frac{1}{2}\left(\lg a+\frac{1}{2}\lg b+\frac{1}{4}\lg c\right)$; 20) $\lg y=\frac{1}{m}\left[(n+1)\lg a+\frac{p}{n}\lg b\right]$; 21) $\lg x=\frac{\sqrt{2}}{2}\lg 3$; 22) $\lg x=\lg\log_a^2(a+b)$. **23.** 8) $z=\sqrt[4]{\frac{a^3}{b^3c^2}}$; 9) $y=\sqrt[5]{\frac{(a-b)^3(a+b)^2}{a^4}}$; 10) $z=\frac{\sqrt[3]{a\cdot\sqrt[4]{ac^3}\,(b+1)}}{b\cdot(c+a)^3}$. **27.** 3) $-3{,}9925$; 4) $-5{,}0083$. **28.** 3) $\bar{3}{,}9981$; 4) $\bar{4}{,}0096$; 5) $\bar{1}{,}2672$. **34.** 4) 0,3245; 5) $\bar{1}{,}4333$. **35.** 2) 1,56; 11) 0,339; 12) 9,00; 13) 0,587; 14) 0,26; 15) 1,072; 16) 4,47; 17) 1,17; 18) 0,893; 19) $8{,}09\cdot 10^{-6}$; 23) 0,706; 24) 1,816; 25) 5,85; 26) 0,417. **36.** 1) $x=\pm 1$; 2) $x=11$; 3) $x=2$; 4) $x=\frac{-15}{4}$; 5) $x=7$; 6) $x=3$; 7) $x=\pm 2$. **37.** 1) $x\approx 0{,}806$; 2) $x\approx -2{,}4$; 3) $x=\pm\sqrt{\frac{\lg 22{,}1}{\lg 7}}$. **38.** 1) 2 и $\frac{\lg 2-\lg 3}{\lg 3}$; 2) 1, 3 и 4; 3) 0 и $\frac{\lg 5}{\lg 7}$; 4) $\frac{9}{2}$; 5) 100 и 1000; 6) 1000 и $\frac{1}{10\sqrt[3]{10}}$; 7) $x=10$; 8) 0,1 и 100; 9) 13,34 и $7499\cdot 10^4$; 10) 7 и 15; 11) 100 и 0,1; 12) $x=\frac{1}{2}$; 13) 100 и 0,01; 14) 2 и 3; 15) 3 и 7. **41.** $\frac{8}{3}$. **42.** 2 и -1. **43.** 1 и 2. **44.** -1, 2, $\frac{7\pm\sqrt{41}}{2}$. **45.** 10. **46.** $-0{,}9$. **47.** 10. **48.** $\frac{29}{8}$. **50.** 2 и 4. **51.** 9 . **52.** $\frac{1}{2}$ и 16. **53.** 2 и $-\frac{4}{3}$. **54.** $x=5$; $y=7$. **55.** $x=2$; $y=6$. **56.** 5, $\sqrt[5]{5}$. **57.** 4. **58.** $\frac{5}{3}$. **59.** $\frac{7}{2}$. **60.** 3 и 13. **61.** 7. **62.** $x=0$. **63.** $x=10$. **64.** $x=10$ и $10^{-\frac{9}{2}}$. **65.** $x_1=\frac{1}{a}$; $x_2=\frac{10}{a}$. **66.** 1. **67.** $\sqrt[5]{5}$ и 5. **68.** 100 и 0,01. **69.** 10. **70.** $x_1=2$; $x_2=\frac{\lg\frac{2}{3}}{\lg 3}$. **71.** $x=\frac{3}{2}$. **72.** $x_1=2$; $x_2=\frac{1}{16}$. **73.** $x_1=\frac{1}{81}$; $x_2=3$. **74.** $x=10^3$. **75.** $x=2$. **76.** $x=\operatorname{arctg}10+\pi k$. **77.** $x=4$. **78.** $x=5$. **79.** $x_1=1$; $x_2=2$. **80.** 1) $x>2$; 2) $\frac{2}{11}<x<\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}<x<\frac{7}{3}$; 4) $x<-\frac{3}{2}$ и $x>3$; 5) $-\frac{5}{2}<x<\frac{3}{2}$ и $\frac{3}{2}<x<\frac{11}{2}$; 6) $x<-1$ и $x>5$; 7) $\frac{7}{2}<x<5$ и $x>5$; 8) решений нет. **83.** 1) $x=5$; $y=3$; 2) $x=3$; $y=4$; 3) $x=4$; $y=\sqrt{2}$ и $x=4$; $y=-\sqrt{2}$; 4) $x=\frac{\lg 6}{6\lg 2}$; $y=\frac{1}{6}$ и $x=\frac{1}{6}$; $y=\frac{\lg 6}{6\lg 2}$; 5) $x=6$; $y=3$; 6) $x=25$; $y=16$ и $x=16$; $y=25$; 7) $x=\frac{1}{10}$; $y=2$

и $x=100$; $y=-1$; 8) $x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; $y=\sqrt[3]{9}$ и $x=1$; $y=1$; 9) $x=4$; $y=6$. **84.** 1) $-1<x<-\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2}<x<2$; 2) $1<x<3$.

Глава XIV

1. 2) 51; 5) 0,0435; 7) 0,612; 10) 0,000139; 11) 0,00785. **2.** 1) 0,74; 2) 50; 3) 13,9; 4) 45,2; 5) 1310; 6) 34; 7) 505; 8) 2640; 9) 0,000458; 10) 0,0124; 11) 7,32; 12) 1410. **3.** 1) 9,75; 2) 39,2; 3) 0,216; 4) 8,25. **4.** 1) 1700; 2) 0,284; 3) 0,338; 4) 30,2; 5) 419; 6) 0,00729; 7) 0,059; 8) 1480; 9) 0,00237; 10) 1910. **5.** 1) 182; 2) 18,9; 3) 0,0493; 4) 0,00095; 5) 174 000; 6) 449 000; 7) 1,19; 8) 0,000372. **6.** 1) 0,632; 2) 0,279; 3) 67,6; 4) 2,14; 5) 0,0158; 6) 0,00775. **7.** 1) 7,52; 2) 1,62; 3) 3,49; 4) 0,752; 5) 0,162. **8.** 1) 334; 2) 16,95; 3) 0,0854; 4) 0,122; 5) 44,7. **9.** 1) 0,660; 2) 0,815; 3) 1,55; 4) 0,991; 5) 0,460; 6) 0,867. **10.** 1) 33,5; 2) 23,2; 3) 570; 4) 46,9. **11.** 1) 0,25; 2) 16,2; 3) 0,41. **12.** 1) 0,886; 2) 30,4; 3) 5,97; 4) 1,47; 5) 1,275. **13.** 1) 5,4; 2) 0,00058.

Глава XV

2. в) $8i$. **3.** в) $17+4i$. **4.** в) $a+(b+1)i$. **5.** в) $4+2i$. **6.** в) $6i$. **7.** в) $a+(b-1)i$. **8.** в) $-5+4i$. **9.** в) $1-0,5i$. **10.** в) $0,28-0,03i$. **11.** в) $-(x^2+2y)-ix\sqrt{y}$. **12.** в) $\frac{5}{12}-\frac{1}{12}i$. **13.** в) $(a^2+2b)+a\sqrt{b}i$. **14.** в) $a+b$. **15.** в) $(2m+3ni)(2m-3ni)$. **16.** в) $(4+3i)(4-3i)$. **17.** в) $(8+i)(8-i)$. **18.** в) $-\frac{1}{2}$. **19.** в) $2,4i$. **20.** а) $1-2i$; б) i; в) $-3-2i$. **21.** а) $12-5i$; б) $1-i\sqrt{3}$; в) $i\sqrt{2}-\sqrt{3}$. **22.** а) $3-2i\sqrt{5}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}$; в) $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}+\frac{2mn}{m^2+n^2}i$. **23.** а) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$; б) 0; в) $2a$. **24.** в) $\sqrt{2}+i\sqrt{3}$. **25.** б) $\sqrt{5}-i\sqrt{2}$. **26.** г) -1; д) $-i$; е) 1. **27.** д) -1; е) 1. **28.** а) $2-4i\sqrt{2}$; б) $2(x^2-y^2)$; в) $2(i-1)$. **29.** а) $0,5(-1+i\sqrt{3})$; б) 1; в) 1. **30.** в) $-2-2i$. **31.** а) $\sqrt{\frac{a}{2}}+i\sqrt{\frac{a}{2}}$; б) $3+2i$. **32.** а) $5+2i$; б) $6+7i$. **33.** а) $4+i$; б) $2+9i$. **34.** а) $2+\frac{i}{2}$; б) 4. **37.** а) $\sqrt{2}$ и $\frac{\pi}{4}$; г) $\sqrt{2}$ и $\frac{5\pi}{4}$. **39.** а) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; б) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$; в) $3(\cos\pi+i\sin\pi)$; г) $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$. **40.** а) $\sqrt{13}(\cos 33°40'+i\sin 33°40')$; б) $5(\cos 53°10'+i\sin 53°10')$. **41.** а) $5(\cos 306°50'+i\sin 306°50')$; б) $9,434(\cos 32°+i\sin 32°)$. **42.** а) $\sqrt{13}(\cos 56°20'+i\sin 56°20')$; б) $13(\cos 157°20'+i\sin 157°20')$. **43.** а) $\sqrt{53}(\cos 254°+i\sin 254°)$; б) $5(\cos 323°10'+i\sin 323°10')$. **58.** $\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi n}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi n}{2}$; $n=0, 1$. **59.** $\pm\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$.

60. $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi n}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi n}{2}\right)$; $n=0,\ 1$.

61. $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{7}{4}\pi+2\pi n}{2}+i\sin\frac{\frac{7}{4}\pi+2\pi n}{2}\right)$; $n=0,\ 1$. 62. $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$; $\frac{1}{2}(i-\sqrt{3})$; $-i$. 63. $\cos\frac{2\pi n}{5}+i\sin\frac{2\pi n}{5}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$. 64. $\cos\frac{2\pi n}{6}+i\sin\frac{2\pi n}{6}$ $(n=0, 1,\ \ldots,\ 5)$. 65. $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$; $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$. 67. 1) Сложение векторов: $r_1=\{2,\ 3\}$ и $r_2=\{-1,\ 1\}$, что дает $r=\{1,\ 4\}$; 3) умножение вектора $r=\{0,\ 2\}$ на скаляр 3, что дает $r_1=\{3\cdot 0,\ 3\cdot 2\}$, или $r_1=\{0,\ 6\}$; 4) поворот вектора $r=\{1,\ 2\}$ вокруг начала координат на прямой угол в положительном направлении; 5) поворот вектора $r=\{1,\ 1\}$ вокруг начала координат на угол $\varphi=60^\circ$ в положительном направлении с последующим растяжением его в два раза. 68. 1) $x=\frac{25}{7}$; $y=\frac{2}{7}$; 2) $x=0$; $y=2$; 3) $x=2$; $y=3$. 69. 1) $x_{1,2}=3\pm 2i$; 2) $x_{1,2}=-\frac{5}{4}\pm\frac{\sqrt{23}i}{4}$; 3) $x_1=i$; $x_2=2+i$. 70. 1) Комплексные точки z лежат на луче, исходящем из начала координат под углом в 45° к положительному направлению оси Ox; 4) вне круга единичного радиуса с центром в начале координат; 5) внутри круга радиуса $r=5$ с центром в начале координат; 6) внутри кольца, образованного двумя концентрическими окружностями радиусов $r_1=2$ и $r_2=4$ с общим центром в начале координат; 8) вне круга радиуса $r=2$ с центром в точке (0; 1). 71. 1) $\sqrt{13}e^{0,983i}$; 2) $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$; 3) $2e^{\frac{\pi}{2}i}$; 4) $2e^{\frac{5\pi}{6}i}$; 5) $2e^{\pi i}$; 6) $e^{\frac{\pi}{2}i}$. 72. 1) $1,85+0,77i$; 2) $e^2(\cos 1+i\sin 1)=7,4(0,54+i\cdot 0,84)$. 73. 1) $e^{3i\ln 2}=e^{2,079i}$ 3) $5e^{i\ln 5}=5e^{1,609i}$; 4) $10e^{-i\cdot 2,303}$. 74. 1) $\cos(2-i)=-0,64+1,07i$; 4) $\sin(-3i)=-10,02i$. 77. $y=-\frac{3}{2}x$. 79. Комплексные точки z лежат вне круга радиуса $r=\frac{1+\sqrt{21}}{2}$ с центром в начале координат. 80. $-3<x<-2$ и $0<x<1$.

Глава XVI

2. $y=2\sqrt{R^2-x^2}$. 3. $\frac{1}{f(1)}=2$; $[1+f(1)]^2=\frac{9}{4}$; $\lg f\left(\frac{1}{2}\right)=\lg 0,8\approx -0,0969$. 6. 1) Вся действительная ось, кроме точки $x=-5$; 2) вся действительная ось, кроме точек $x=-3$ и $x=0$; 3) $x\leqslant\frac{3}{2}$; 4) $2\pi k+\arccos\frac{2}{3}<x<2\pi(k+1)-\arccos\frac{2}{3}$; 5) $x\leqslant 2$ и

$x \geqslant 3$; 6) $|x| > 2$; 7) $-\frac{1}{3} < x < 2$; 8) $1 \leqslant x \leqslant 4$; 10) вся действительная ось, кроме точки $x=1$; 11) $|x| \geqslant \sqrt{2}$; 12) $x \geqslant -2$. **7.** В примерах; 1), 4), 5), 6), 11) даны нечетные функции, в примерах 3), 8), 10) и 12)—четные функции; функции в примерах 2), 7) и 9) не являются ни четными, ни нечетными. **11.** 2) $-1, \frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, \frac{4}{7}, -\frac{5}{9}$; 3) $0, -\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{17}, 0$. **13.** $a_n = 3 - \frac{7}{n+2}$, но $\frac{7}{n+2} \to 0$ при $n \to \infty$, следовательно, $a_n \to 3$. **14.** 4) $\frac{3}{2}$; 5) 2. **15.** 1) $x \to 2$; 2) $x \to \frac{\pi}{2}$; 3) $x \to 0$; 4) $x \to \frac{1}{10}$. **16.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) -2; 3) $\frac{3}{2}$; 4) 0; 5) 0; 6) $-\frac{1}{4}$; 7) 1; 8) $\frac{3}{2}$; 9) 1; 10) $\frac{1}{2}$. **17.** 3) $\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\frac{1}{3}x} =$

$$= \frac{x}{\frac{1}{3}x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1\right)} = \frac{1}{\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1\right)} \to 1$$

при $x \to 0$. **18.** 1) $x = \pm 2$; 2) $x = 1$; 3) $x = 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Глава XVII

1. 1) $v_{\text{ср}} = 3{,}5g$ (м/с); 2) $v = 2g$ (м/с). **2.** 1) 88 (м/с); 2) 12 с. **3.** 1) $3x^2$; 2) $-\frac{2}{x^3}$; 3) $-\frac{1}{x\sqrt{x}}$ $(x > 0)$; 4) $4x-5$; 5) $\frac{3}{2}x^2+3$; 6) $-\sin x$; 7) $\frac{5}{(1-4x)^2}$. **4.** $f'(0) = \frac{1}{2}$. **5.** При $x=1$ $\varphi = 45°$; при $x=-1$ $\varphi = 135°$. **6.** В точках пересечения при $x = \pm 1$ касательные к параболам образуют острый угол $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{8}{11}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПРАВОК

Квадратные уравнения

1. $x^2+px+q=0$; $\quad x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$.

$ax^2+bx+c=0$; $\quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $(a\neq 0)$.

$ax^2+2kx+c=0$; $\quad x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$ $(a\neq 0)$.

2. Формулы Виета:

$$x_1+x_2=-p=-\frac{b}{a}; \quad x_1x_2=q=\frac{c}{a}.$$

3. $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$;

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Прогрессии

а) Арифметическая прогрессия.

1. Общий член арифметической прогрессии:

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

2. Сумма n членов арифметической прогрессии:

$$S_n=\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)n=\left[\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\right]n,$$

где d — разность.

б) Геометрическая прогрессия.

1. Общий член геометрической прогрессии:

$$u_n=u_1q^{n-1}.$$

2. Сумма n членов геометрической прогрессии:

$$S_n=\frac{u_1-u_nq}{1-q}=u_1\frac{1-q^n}{1-q}=u_1\frac{q^n-1}{q-1},$$

где q — знаменатель прогрессии $(q\neq 1)$.

3. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $S=\frac{u_1}{1-q}$.

Логарифмы

1. Запись $\log_a N=x$ равносильна записи $a^x=N$ $(a>0,\ a\neq 1,\ N>0)$, так что $a^{\log_a N}=N$.

2. $\log_a 1=0$. 3. $\log_a a=1$.

4. $\log_a(N\cdot M)=\log_a N+\log_a M$.

5. $\log_a\frac{N}{M}=\log_a N-\log_a M$.

6. $\log_a N^n=n\log_a N$.

7. $\log_a\sqrt[n]{N}=\frac{1}{n}\log_a N$.

8. $\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}$.

Таблица знаков и некоторых значений тригонометрических функций

Название функции	Четверти				I					II	III	IV
	I	II	III	IV	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	+	+	−	−	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
$\cos\alpha$	+	−	−	+	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	+	−	+	−	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	+	−	+	−	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$
2. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\mathrm{tg}\,\alpha.$
3. $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\mathrm{ctg}\,\alpha.$
4. $\sin\alpha\cdot\mathrm{cosec}\,\alpha=1.$
5. $\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1.$
6. $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha=1.$
7. $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha.$
8. $1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\mathrm{cosec}^2\alpha.$

Таблица формул приведения

Угол / Функция	$-\alpha$	$90°\mp\alpha$	$180°\mp\alpha$	$270°\mp\alpha$	$360°\,k\mp\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$
cos	$+\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$
ctg	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$

Преобразования тригонометрических выражений

1. $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;$
   $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$
   $\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta}{1\mp\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}.$
2. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$
   $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1;$
   $\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}.$

3. $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$; $\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$;

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

4. $\sin x=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$; $\qquad \cos x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$; $\qquad \operatorname{tg} x=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

5. $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$; $\qquad \sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

6. $\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha\mp\beta}{2}$;

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \qquad \operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

7. $\cos mx\cdot\cos nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x]$;

$$\sin mx\cdot\sin nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x];$$

$$\sin mx\cdot\cos nx=\frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x].$$

Обратные тригонометрические функции

1. $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\qquad \sin(\arcsin x)=x$.
2. $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$, $\qquad \cos(\arccos x)=x$.
3. $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg} x<\frac{\pi}{2}$, $\qquad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x$.
4. $0<\operatorname{arcctg} x<\pi$, $\qquad \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)=x$.

Простейшие тригонометрические уравнения

1. $\sin x=a$, $\qquad x=(-1)^n\arcsin a+\pi n$.
2. $\cos x=a$, $\qquad x=\pm\arccos a+2\pi n$.
3. $\operatorname{tg} x=a$, $\qquad x=\operatorname{arctg} a+\pi n$.
4. $\operatorname{ctg} x=a$, $\qquad x=\operatorname{arcctg} a+\pi n$

$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$.

Таблица значений функций e^x, e^{-x}, $\sin x$ и $\cos x$ для числового значения x

x	e^x	e^{-x}	$\sin x$	$\cos x$	x	e^x	e^{-x}	$\sin x$	$\cos x$
0,00	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,40	1,4918	0,6703	0,3894	0,9211
01	1,0101	0,9900	0,0100	1,0000	41	1,5068	0,6637	0,3986	0,9171
02	1,0202	0,9802	0,0200	0,9998	42	1,5220	0,6570	0,4078	0,9131
03	1,0305	0,9704	0,0300	0,9996	43	1,5373	0,6505	0,4169	0,9090
04	1,0408	0,9608	0,0400	0,9992	44	1,5527	0,6440	0,4259	0,9048
0,05	1,0513	0,9512	0,0500	0,9988	0,45	1,5683	0,6376	0,4350	0,9004
06	1,0618	0,9418	0,0600	0,9982	46	1,5841	0,6313	0,4439	0,8961
07	1,0725	0,9324	0,0699	0,9976	47	1,6000	0,6250	0,4529	0,8916
08	1,0833	0,9231	0,0799	0,9968	48	1,6161	0,6188	0,4618	0,8870
09	1,0942	0,9139	0,0899	0,9960	49	1,6323	0,6126	0,4706	0,8823
0,10	1,1052	0,9048	0,0998	0,9950	0,50	1,6487	0,6065	0,4794	0,8776
11	1,1163	0,8958	0,1098	0,9940	51	1,6653	0,6005	0,4882	0,8727
12	1,1275	0,8869	0,1197	0,9928	52	1,6820	0,5945	0,4969	0,8678
13	1,1388	0,8781	0,1296	0,9916	53	1,6989	0,5886	0,5055	0,8628
14	1,1503	0,8694	0,1395	0,9902	54	1,7160	0,5827	0,5141	0,8577
0,15	1,1618	0,8607	0,1494	0,9888	0,55	1,7333	0,5769	0,5227	0,8525
16	1,1735	0,8521	0,1593	0,9872	56	1,7507	0,5712	0,5312	0,8473
17	1,1853	0,8437	0,1692	0,9856	57	1,7683	0,5655	0,5396	0,8419
18	1,1972	0,8353	0,1790	0,9838	58	1,7860	0,5599	0,5480	0,8365
19	1,2092	0,8270	0,1889	0,9820	59	1,8040	0,5543	0,5564	0,8309
0,20	1,2214	0,8187	0,1987	0,9801	0,60	1,8221	0,5488	0,5646	0,8253
21	1,2337	0,8106	0,2085	0,9780	61	1,8404	0,5434	0,5729	0,8196
22	1,2461	0,8025	0,2182	0,9759	62	1,8589	0,5379	0,5810	0,8139
23	1,2586	0,7945	0,2280	0,9737	63	1,8776	0,5326	0,5891	0,8080
24	1,2712	0,7866	0,2377	0,9713	64	1,8965	0,5273	0,5972	0,8021
0,25	1,2840	0,7788	0,2474	0,9689	0,65	1,9155	0,5220	0,6052	0,7961
26	1,2969	0,7711	0,2571	0,9664	66	1,9348	0,5169	0,6131	0,7900
27	1,3100	0,7634	0,2667	0,9638	67	1,9542	0,5117	0,6210	0,7838
28	1,3231	0,7558	0,2764	0,9611	68	1,9739	0,5066	0,6288	0,7776
29	1,3364	0,7483	0,2860	0,9582	69	1,9937	0,5016	0,6365	0,7712
0,30	1,3499	0,7408	0,2955	0,9553	0,70	2,0138	0,4966	0,6442	0,7648
31	1,3634	0,7334	0,3051	0,9523	71	2,0340	0,4916	0,6518	0,7584
32	1,3771	0,7261	0,3146	0,9492	72	2,0544	0,4868	0,6594	0,7518
33	1,3910	0,7189	0,3240	0,9460	73	2,0751	0,4819	0,6669	0,7452
34	1,4049	0,7118	0,3335	0,9428	74	2,0959	0,4771	0,6743	0,7385
0,35	1,4191	0,7046	0,3429	0,9394	0,75	2,1170	0,4724	0,6816	0,7317
36	1,4333	0,6977	0,3523	0,9359	76	2,1383	0,4677	0,6889	0,7248
37	1,4477	0,6907	0,3616	0,9323	77	2,1598	0,4630	0,6961	0,7179
38	1,4623	0,6839	0,3709	0,9287	78	2,1815	0,4584	0,7033	0,7109
39	1,4770	0,6771	0,3802	0,9249	79	2,2034	0,4538	0,7104	0,7038

Продолжение

x	e^x	e^{-x}	$\sin x$	$\cos x$	x	e^x	e^{-x}	$\sin x$	$\cos x$
0,80	2,2255	0,4493	0,7174	0,6967	1,20	3,3201	0,3012	0,9320	0,3624
81	2,2479	0,4449	0,7243	0,6895	21	3,3535	0,2982	0,9356	0,3530
82	2,2705	0,4404	0,7311	0,6822	22	3,3872	0,2952	0,9391	0,3436
83	2,2933	0,4360	0,7379	0,6749	23	3,4212	0,2923	0,9425	0,3342
84	2,3164	0,4317	0,7446	0,6675	24	3,4556	0,2894	0,9458	0,3248
0,85	2,3396	0,4274	0,7513	0,6600	1,25	3,4903	0,2865	0,9490	0,3153
86	2,3632	0,4232	0,7578	0,6524	26	3,5254	0,2837	0,9521	0,3058
87	2,3869	0,4190	0,7643	0,6448	27	3,5609	0,2808	0,9551	0,2963
88	2,4109	0,4148	0,7707	0,6372	28	3,5966	0,2780	0,9580	0,2867
89	2,4351	0,4107	0,7771	0,6294	29	3,6328	0,2753	0,9608	0,2771
0,90	2,4596	0,4066	0,7833	0,6216	1,30	3,6693	0,2725	0,9636	0,2675
91	2,4843	0,4025	0,7895	0,6137	31	3,7062	0,2698	0,9662	0,2579
92	2,5093	0,3985	0,7956	0,6058	32	3,7434	0,2671	0,9687	0,2482
93	2,5345	0,3946	0,8016	0,5978	33	3,7810	0,2645	0,9711	0,2385
94	2,5600	0,3906	0,8076	0,5898	34	3,8190	0,2618	0,9735	0,2288
0,95	2,5857	0,3867	0,8134	0,5817	1,35	3,8574	0,2592	0,9757	0,2190
96	2,6117	0,3829	0,8192	0,5735	36	3,8962	0,2567	0,9779	0,2092
97	2,6379	0,3791	0,8249	0,5653	37	3,9354	0,2541	0,9799	0,1994
98	2,6645	0,3753	0,8306	0,5570	38	3,9749	0,2516	0,9819	0,1896
99	0,6912	0,3716	0,8360	0,5487	39	4,0149	0,2491	0,9837	0,1798
1,00	2,7183	0,3679	0,8415	0,5403	1,40	4,0552	0,2466	0,9854	0,1700
01	2,7456	0,3642	0,8468	0,5319	41	4,0960	0,2441	0,9871	0,1601
02	2,7732	0,3606	0,8521	0,5234	42	4,1371	0,2417	0,9887	0,1502
03	2,8011	0,3570	0,8573	0,5148	43	4,1787	0,2393	0,9901	0,1403
04	2,8292	0,3535	0,8624	0,5062	44	4,2207	0,2369	0,9915	0,1304
1,05	2,8577	0,3499	0,8674	0,4976	1,45	4,2631	0,2346	0,9927	0,1205
06	2,8864	0,3465	0,8724	0,4889	46	4,3060	0,2322	0,9939	0,1106
07	2,9154	0,3430	0,8772	0,4801	47	4,3492	0,2299	0,9949	0,1006
08	2,9447	0,3396	0,8820	0,4713	48	4,3929	0,2276	0,9959	0,0907
09	2,9743	0,3362	0,8866	0,4625	49	4,4371	0,2254	0,9967	0,0807
1,10	3,0042	0,3329	0,8912	0,4536	1,50	4,4817	0,2231	0,9975	0,0707
11	3,0344	0,3296	0,8957	0,4447	51	4,5267	0,2209	0,9982	0,0608
12	3,0649	0,3263	0,9001	0,4357	52	4,5722	0,2187	0,9987	0,0508
13	3,0957	0,3230	0,9044	0,4267	53	4,6182	0,2165	0,9992	0,0408
14	3,1268	0,3198	0,9086	0,4176	54	4,6646	0,2144	0,9995	0,0308
1,15	3,1582	0,3166	0,9128	0,4085	1,55	4,7115	0,2122	0,9998	0,0208
16	3,1899	0,3135	0,9168	0,3993	56	4,7588	0,2101	0,9999	0,0108
17	3,2220	0,3104	0,9208	0,3902	57	4,8066	0,2080	1,0000	+0,0008
18	3,2544	0,3073	0,9246	0,3809	58	4,8550	0,2060	1,0000	−0,0092
19	3,2871	0,3042	0,9284	0,3717	59	4,9037	0,2039	0,9998	−0,0192