Р. А. КАЛНИН

КУРС АЛГЕБРЫ

ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА · 1958

Р. А. КАЛНИН

КУРС АЛГЕБРЫ ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ,
СТЕРЕОТИПНОЕ

Допущено
Управлением средних специальных учебных заведений
Министерства высшего образования СССР
в качестве учебника для средних
специальных учебных заведений

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1958

Калнин Роберт Августович. Курс алгебры для техникумов.

Редактор *Э. П. Тихонова.*

Техн. редактор *Р. А. Негримовская.* Корректор *А. С. Каган*

Подписано к печати 14/VI 1958 г. Бумага 84×108 1/32.
Физ.-печ. л. 9,88. Условн. печ. л. 16,19. Уч.-изд. л. 13,94. Тираж 100 000 экз.
Цена книги 5 р. 20 к. Заказ 3257.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

Отпечатано с матриц тип. № 1 „Печатный Двор"

ОГЛАВЛЕНИЕ

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящая книга написана применительно к программе по математике для техникумов, утвержденной Министерством высшего образования СССР, и предназначена быть учебником для техникумов различных специальностей. Для социально-экономических техникумов включена специальная глава, посвященная элементам теории соединений. Для техникумов электротехнической и машиностроительной специальностей написана глава о комплексных числах, в которой рассматривается также тригонометрическая форма комплексного числа.

В соответствии с потребностями техникумов в настоящем учебнике более подробно по сравнению с учебником для десятилетней школы изложены основные приемы приближенных вычислений, теория и практика логарифмической линейки.

Разумеется, что в учебнике для техникумов не представляется возможным вполне строго изложить многие основные вопросы элементарной алгебры (учение об иррациональном числе, о показательной и логарифмической функциях, о комплексном числе и т. п.). Поэтому автор сознательно принимал ряд положений без доказательства, делая в соответствующих местах нужные оговорки.

Автор старался по возможности придерживаться краткого изложения материала, избегая «собеседований» с учащимися. В тексте приводится ряд примеров и задач с решениями; в некоторых случаях эти примеры предшествуют определениям новых понятий, в других — следуют за этими определениями. Автор достаточно широко пользовался графическими иллюстрациями и при этом стремился к органическому внедрению в курс функциональных понятий, а также и других понятий современной математики.

В учебнике, кроме теории и разобранных в тексте примеров, содержится набор упражнений и задач по каждому разделу курса.

Автор

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание учебника алгебры содержит ряд существенных изменений по сравнению с предыдущими.

Прежде всего, значительно сокращена по объему глава «Приближенные вычисления»; в ней оставлены лишь основные сведения, относящиеся главным образом к нестрогому учету погрешностей по правилам подсчета точных цифр.

В более практическом разрезе даются сведения по теории и практике логарифмической линейки, причем рассматриваются лишь основные операции.

Количество примеров и задач значительно увеличено. Задачи и примеры приведены в систему, в основном повторяющую последовательность изложения материала.

Ответы к задачам приведены в конце книги.

Стиль изложения и структура учебника оставлены в прежнем виде.

Автор учел критические замечания, высказанные на конференции преподавателей математики, работающих в техникумах. Особенно признателен он преподавателю математики т. Никольскому П. И., указавшему на ряд неточностей и недочетов, имевшихся в прежних изданиях.

Автор

ГЛАВА I

ПРОСТЕЙШИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

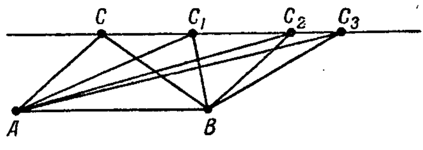
§ 1. Величины постоянные и переменные

При изучении разнообразных явлений и процессов, протекающих в окружающей нас природе, технике, общественной жизни, нам приходится иметь дело с различного рода величинами (длина, вес, объем, температура, скорость, сила тока, плотность населения и др.).

Наблюдения показывают, что некоторые величины, участвующие в данном явлении, сохраняют одно и то же значение, т. е. остаются неизменными, другие принимают различные значения, изменяются.

Пример 1. При свободном падении тела с некоторой высоты h изменяются скорость падающего тела и расстояние, отделяющее его от поверхности земли; а, например, вес тела остается неизменным.

Пример 2. Если нагревать круглую металлическую пластинку, то изменяются ее диаметр, площадь; отношение длины окружности пластинки к ее диаметру остается неизменным.



Черт. 1.

Пример 3. Если вершина C треугольника ABC перемещается по прямой, параллельной основанию AB, а основание остается неизменным (черт. 1), то боковые стороны и углы треугольника будут изменяться; площадь треугольника и сумма внутренних его углов остаются неизменными.

Величина называется постоянной, если она сохраняет одно и то же значение в условиях данной задачи.

Величина называется переменной, если она принимает различные значения в условиях данной задачи.

Таким образом, в рассмотренных выше примерах вес падающего тела, отношение длины окружности пластинки к ее диаметру, площадь треугольника и сумма внутренних его углов — постоянные величины, а скорость падающего тела, его расстояние от поверхности земли, диаметр пластинки, углы треугольника — переменные величины.

Принято обозначать постоянные величины начальными буквами латинского алфавита: a, b, c, d, ..., переменные — последними его буквами: x, y, z, u, v и т. д.

§ 2. Допустимые значения переменной величины

Пример 1. Высота h подъема самолетов разных конструкций различна, но каждый тип самолета имеет свой «потолок», т. е. наивысшую высоту подъема, например 15 *км*; подняться на бо́льшую высоту он уже не может.

Если следить за полетом такого самолета, начиная с момента его взлета, то можно сказать, что высота, набираемая самолетом, есть переменная величина, которая может принимать любые значения, заключенные между 0 и 15 *км*.

Пример 2. Биолог, изучающий влияние температуры воздуха на рост данного растения, будет изменять температуру только в определенных пределах, например от 5° С до 35—40° С; более высокая или низкая температура может привести к гибели растения.

Пример 3. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника, имеющего n сторон, равна $2d(n-2)$. Здесь n может принимать лишь целые положительные значения, начиная с $n=3$.

Пример 4. Дробь $\frac{1}{x}$ с переменным знаменателем имеет вполне определенное значение при любом значении x, не равном нулю.

Условимся называть допустимыми значениями переменной величины x все ее значения, которые эта переменная величина может принимать в конкретных условиях изучаемого явления.

§ 3. Функция и аргумент

Для науки и ее многочисленных приложений представляет интерес не самый факт существования переменных величин, а те зависимости, которые существуют между различными переменными величинами, участвующими в данном явлении; другими словами, нас интересует следующий вопрос: *как изменение одной величины влечет за собой изменение другой?* Так, например, если подвергнуть металлический стержень действию растягивающей силы, то простые лабораторные исследования обнаруживают, что с увеличением нагрузки *определенным образом* увеличивается также длина стержня. С изменением числа оборотов мотора по *определенному закону* меняется скорость самолета.

Разберем более подробно несколько простых примеров.

Пример 1. Дан прямоугольник с основанием $a=8$ *см*. Как изменяется площадь F этого прямоугольника, если высота h принимает значения:

$$h=1;\ 1{,}5;\ 2;\ 2{,}5;\ 3;\ 4;\ \ldots\ (\textit{см}).$$

Очевидно, что соответствующие значения площади F будут:

$$8;\ 12;\ 16;\ 20;\ 24;\ 32;\ \ldots\ (\textit{см}^2).$$

Пример 2. Велосипедист проезжает в среднем 400 *м* в минуту. Как изменяется пройденный путь S в зависимости от времени t?

Если времени t будем давать значения

$$t=1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots\ (\text{минут}),$$

то путь $S=400;\ 800;\ 1200;\ 1600;\ \ldots\ (\textit{м})$.

Пример 3. Сколько времени потребуется движущемуся равномерно телу для прохождения пути 360 *м* при следующих значениях скорости v:

$$v=10;\ 12;\ 15;\ 18;\ 20;\ 30;\ \ldots\ (\textit{м/сек}).$$

Так как время движения равно пройденному пути, деленному на скорость, то имеем следующие значения времени:

$$t=36;\ 30;\ 24;\ 20;\ 18;\ 12;\ \ldots\ (\text{сек.}).$$

В каждом из рассмотренных выше примеров встречались две переменные величины, связанные между собой таким образом, что изменение одной из них влекло за собой изменение другой *по определенному закону*.

Определение. *Переменная величина y называется функцией другой переменной x, если каждому допустимому значению величины x соответствует вполне определенное значение величины y.* Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом*, а y также *зависимой переменной*.

Про переменные x и y говорят, что они связаны функциональной зависимостью.

Возвращаясь к предыдущим примерам, можно сказать, что *длина стержня есть функция растягивающей силы* (нагрузки), *скорость самолета — функция числа оборотов мотора*.

Функция y может зависеть от нескольких аргументов. Например, площадь прямоугольника есть функция двух аргументов: основания и высоты прямоугольника. Объем прямоугольного параллелепипеда есть функция трех аргументов: длины, ширины и высоты.

Отметим, что термины независимая переменная и зависимая переменная носят условный характер. Будет ли переменная зависимой или независимой — определяется конкретными условиями задачи. Часто можно зависимую и независимую переменные поменять ролями; можно сказать, что площадь круга есть функция радиуса, ибо каждому значению радиуса соответствует определенное значение площади круга, но справедливо и обратное утверждение: радиус круга есть функция его площади, ибо каждому значению площади круга соответствует определенное значение радиуса.

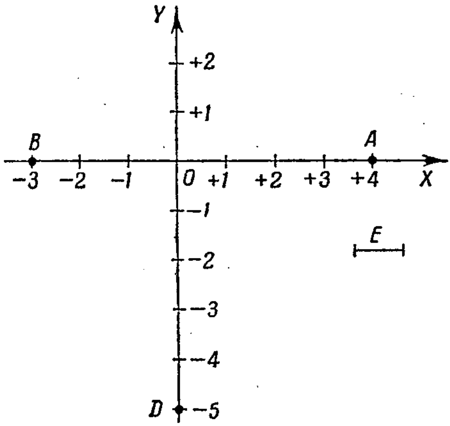
§ 4. Прямоугольная система координат

1. Предварительные замечания. Посетитель кино безошибочно находит свое место в зрительном зале по двум данным: по номеру ряда и номеру места в этом ряду, отмеченным на билете.

Электромонтер поставит штепсельную розетку в желаемом месте, если, например, ему будет сказано следующее: на расстоянии 0,5 *м* справа от окна и на высоте 1,5 *м* от пола. В приведенных двух примерах *два числа* дали возможность ориентироваться на плоскости. Общий способ определения положения точки на плоскости заключается в следующем.

Проведем на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые OX и OY; на каждой из них выберем положительное направление, указываемое стрелкой (черт. 2).

Направленные прямые OX и OY называются *осями координат*, причем OX называется *осью абсцисс*, OY называется *осью ординат*. Точка пересечения осей O называется *началом координат*. Выберем единицу масштаба, т. е. отрезок E, длину которого примем за единицу.



Черт. 2.

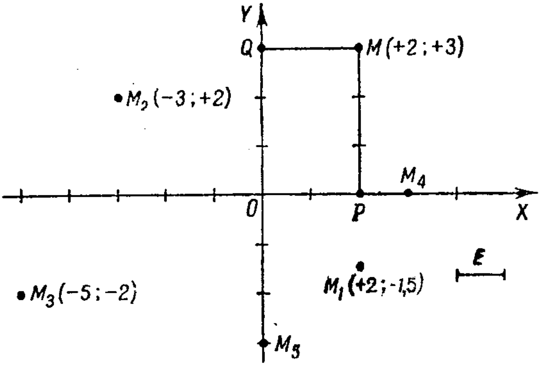
Любому отрезку на координатных осях, имеющему начало в точке O, соответствует положительное или отрицательное число, абсолютная величина этого числа выражает длину отрезка в принятой единице масштаба, а знак указывает направление отрезка.

Отрезкам на координатных осях, откладываемым в положительном направлении, соответствуют положительные числа; отрезкам, откладываемым в противоположном направлении, соответствуют отрицательные числа.

Так, например, отрезку OA соответствует число $(+4)$, отрезку OB — число (-3), отрезку OD соответствует число (-5) (черт. 2).

Пусть M — произвольная точка на плоскости. Положение точки M по отношению к осям координат можно определить, измерив расстояния от точки до осей координат. Для этого опустим из точки M перпендикуляры MP и MQ на оси координат (черт. 3); получим на осях координат два отрезка OP и OQ. Измерим единицей масштаба направленный отрезок OP и возьмем результат с соответствующим знаком. Получим число, называемое *абсциссой* точки M.

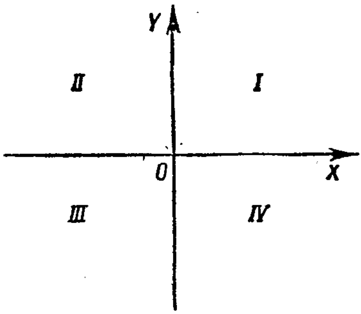
Измерив той же единицей масштаба отрезок OQ и взяв результат с соответствующим знаком, получим другое число — *ординату* точки M.



Черт. 3.

На чертеже 3 абсцисса точки M равна $+2$, ордината точки M равна $+3$.

Абсцисса и ордината называются *координатами* точки. Координаты точки M записываются так: $M(+2;\ +3)$; первое число в скобках всегда есть абсцисса, второе число — ордината.



Черт. 4.

Следует помнить, что координаты точки — относительные числа; им присваивается знак ($+$) или знак ($-$) в зависимости от расположения данной точки по отношению к осям координат. На чертеже 3 точка M_1 имеет координаты: абсцисса равна $+2$, ордината равна $-1,5$; координаты точки M_2: абсцисса равна -3, ордината $+2$; точка M_3 имеет координаты $(-5;\ -2)$.

Точки, лежащие на оси абсцисс, имеют ординату, равную нулю; например, $M_4(3;\ 0)$. Точки оси ординат имеют абсциссу, равную нулю, например $M_5(0;\ -3)$. Абсцисса и ордината начала координат равны нулю: $O(0;\ 0)$.

В целях упрощения записи условимся в дальнейшем знак плюс ($+$) перед положительной координатой не писать: вместо $M(+2;\ +3)$ будем писать $M(2;\ 3)$; вместо $N(-5;\ +4)$ будем писать $N(-5;\ 4)$.

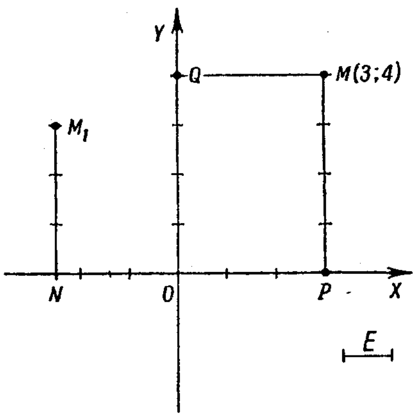
Оси координат OX и OY делят плоскость на четыре части, называемые *четвертями*. Четыре угла, образованные пересечением осей координат, называются координатными углами. Нумерация четвертей, а также координатных углов указана на чертеже 4.

Знаки координат точки, расположенной в различных четвертях, даются следующей таблицей:

Четверть	Абсцисса x	Ордината y
I	$+$	$+$
II	$-$	$+$
III	$-$	$-$
IV	$+$	$-$

2. Построение точки по ее координатам. Рассмотрим несколько примеров построения точки по заданным ее координатам.

Пример 1. Построить точку $M(3;\ 4)$. Выбранную единицу масштаба (например, 1 *см* или 1 клетку) откладываем по оси абсцисс (OX) от начала *вправо* три раза, получим отрезок OP (черт. 5); затем ту же единицу отложим по оси ординат (OY) *вверх* 4 раза; получим отрезок OQ. В точках P и Q восставим перпендикуляры PM и QM к осям координат; точка их пересечения M и будет искомой.

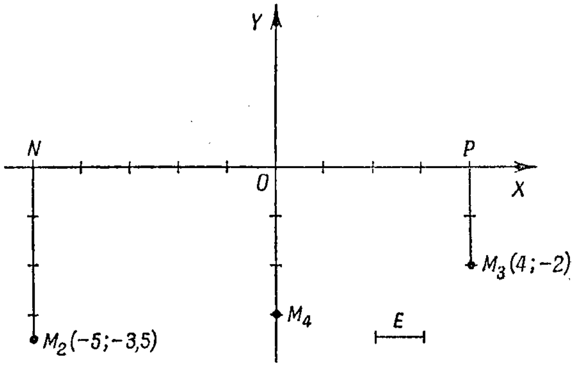


Черт. 5.

Точку M по-другому можно построить так: отложить по оси OX отрезок OP, равный 3 единицам масштаба, в точке P восставить перпендикуляр и на нем вверх отложить отрезок PM, равный 4 единицам масштаба.

В дальнейшем будем придерживаться этого способа, как более практичного, так как он требует проведения лишь одного перпендикуляра.

Пример 2. Построить точку $M_1(-2{,}5;\ 3)$. По оси абсцисс влево от начала координат откладываем отрезок ON, равный по длине 2,5; в точке N восставляем перпендикуляр к оси OX и на нем вверх откладываем отрезок NM_1, равный по длине 3; получаем искомую точку M_1.



Черт. 6.

Построение точек $M_2\,(-5;\ -3{,}5)$, $M_3\,(4;\ -2)$, $M_4\,(0;\ -3)$ пояснено на чертеже 6.

Примечание. Часто для построения точек по их координатам приходится прибегать к разным масштабам на координатных осях. Это бывает в тех случаях, когда одна из координат точки значительно превышает другую по абсолютной величине. Например, чтобы построить точку $M\,(3;\ 120)$ на клетчатой бумаге, можно принять по оси абсцисс две клетки за единицу, по оси ординат одну клетку за десять единиц. Однако мы обычно будем считать масштабы по осям одинаковыми.

3. Выводы. 1. Две взаимно перпендикулярные оси OX и OY, точка их пересечения O и выбранная единица масштаба представляют собой по определению так называемую *прямоугольную систему координат.*

2. Положение точки на плоскости в координатной системе определяется парой чисел — координатами этой точки. Первое

число называется абсциссой, второе — ординатой данной точки. В общем виде абсциссу принято обозначать через x, а ординату — через y, что для точки M записывается так: $M (x; y)$.

3. Координаты точки суть числа относительные, так как они выражают длины направленных отрезков.

4. Каждую пару чисел, заданную в определенном порядке, можно отобразить точкой на плоскости, приняв первое число за абсциссу, второе — за ординату этой точки.

§ 5. Три основных способа задания функции

Функциональная зависимость между переменными величинами может быть задана различными способами. Наиболее употребительны следующие три.

1. Табличный способ. Производя какой-нибудь опыт или изучая какое-нибудь явление, мы часто получаем два ряда чисел. Например, опыт, имевший своей целью установить зависимость между длиной пружины и нагрузкой, дал следующие результаты:

Нагрузка x (*кг*)	0	1	2	3	4	5	6
Длина y (*см*)	12	12,5	13	13,5	14	14,5	15

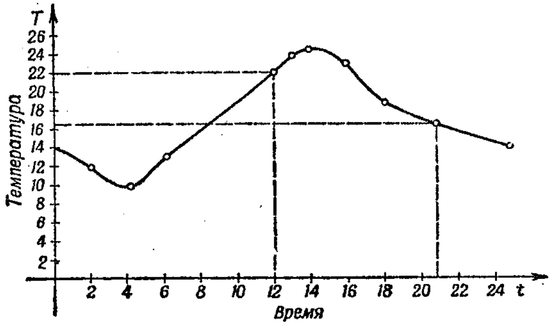
Первый ряд чисел дает значения аргумента (нагрузки). Второй ряд чисел дает соответствующие значения функции (длины пружины).

В данном случае говорят, что функциональная зависимость между переменными x и y задана или выражена *табличным способом.*

Этот способ задания функции широко распространен в науке и технике. Примерами такого задания функций могут служить всевозможные таблицы: таблицы квадратов, кубов, квадратных корней, кубических корней и др.

2. Графический способ. На чертеже 7 в виде кривой линии изображено изменение температуры в течение суток в один из летних дней.

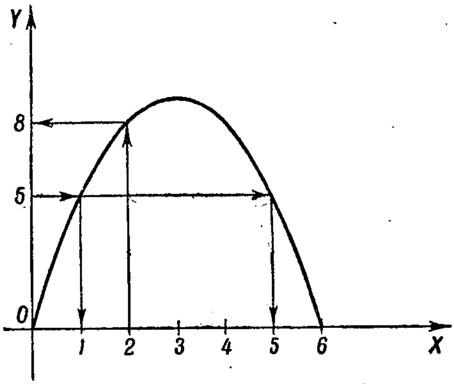
Отрезки на горизонтальной оси изображают время t в часах, отрезки на вертикальной оси изображают температуру T в градусах Цельсия. Единица масштаба по вертикальной оси в два раза меньше единицы масштаба по горизонтальной оси.



Черт. 7.

По этому чертежу можно для каждого значения времени t отыскать соответствующее значение температуры T.

Например, найдем температуру T при $t=12$, т. е. в полдень. Для этого из точки $t=12$ на горизонтальной оси восставим перпендикуляр до пересечения с нашей кривой линией. Из точки пересечения опустим перпендикуляр на вертикальную ось, как это показано на чертеже. На вертикальной оси прочтем искомую температуру: $T=22°$ C.



Черт. 8.

Так же найдем, что при $t=21$ температура $T=16{,}5°$ C.

На чертеже 8 изображена кривая, выражающая функциональную зависимость между площадью прямоугольника y и его основанием x при постоянном периметре, равном 12 *см*. С помощью этой кривой можно по данному основанию x найти соответствующее значение площади. Например, при $x=2$ $y=8$; при $x=3$ $y=9$.

И наоборот, задавшись значением площади y, можно найти соответствующее значение основания x. Например,

при $y=5$ x равен либо 1, либо 5.

Итак, если функция задана графически, то это означает следующее: дана в прямоугольной системе координат кривая; каждой точке этой кривой соответствует определенное значение аргумента и функции: абсцисса точки представляет значение аргумента, ордината точки — соответствующее значение функции.

3. Аналитический способ. Из физики известно, что путь, пройденный свободно падающим телом, определяется по формуле: $s=\frac{gt^2}{2}$, где g — ускорение силы тяжести, t — время (сек.). Каждому значению времени t соответствует определенное значение пути s. Например, при $t=2$ сек. $s=2g$ (*м*), при $t=4$ сек. $s=8g$ (*м*) и т. д.

Говорят, что функция s (путь) в данном случае задана аналитически.

Все формулы из геометрии, физики, механики и других наук представляют не что иное, как различного рода функциональные зависимости, заданные аналитическим способом.

Пример 1. $C=2\pi R$; эта формула определяет длину окружности C как функцию радиуса R.

Пример 2. $V=x^3$; эта формула выражает объем куба V как функцию его ребра x.

Если задается ребро куба x, например $x=10$ (*см*), то легко вычислить соответствующее значение функции

$$V=10^3=1000 \ (см^3).$$

Пример 3. Формула $I=\frac{E}{R}$ связывает три переменные: силу тока I, напряжение E и сопротивление R. Величины E и R будем считать аргументами, а силу тока I — функцией.

Итак, аналитический способ задания функции заключается в том, что дана формула, указывающая, какие действия и в каком порядке надо произвести над численными значениями аргументов, чтобы получить соответствующие численные значения функции: например, формула $y=x^2+3x+2$ определяет y как функцию x; задавшись определенным значением аргумента, например $x=1$, можно найти соответствующее значение функции $y=1^2+3\cdot 1+2=6$.

§ 6. Построение графика фуккции

Если функция задана формулой, то можно составить для нее таблицу значений, а потом на основании этой таблицы построить соответствующий график.

Пример. Построить график функции $y=x^3$.

Составим таблицу значений аргумента и функции. Аргументу x будем давать ряд произвольных значений как положительных, так и отрицательных и находить возведением в куб соответствующие значения функции y.

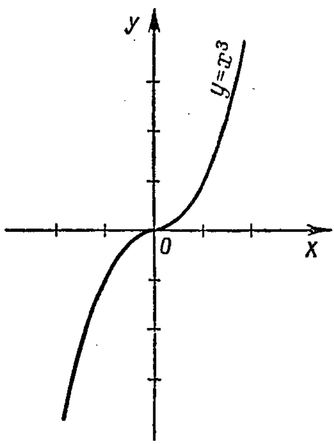
Например,

при $x=-2$ $y=(-2)^3=-8$;

при $x=-1{,}75$ $y=(-1{,}75)^3\approx-5{,}359\approx-5{,}4$ и т. д.

x	-2	$-1{,}75$	$-1{,}5$	$-1{,}25$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,25	1,5	1,75	2
$y=x^3$	-8	$-5{,}4$	$-3{,}4$	-2	-1	$-0{,}1$	0	0,1	1	2	3,4	5,4	8

В таблице значения функции округлены до десятых долей.



Черт. 9.

Принимаем каждую пару значений аргумента и функции за координаты точки и строим эти точки, т. е. точки

$$M_1(-2;\ -8),$$
$$M_2(-1{,}75;\ -5{,}4),$$
$$M_3(-1{,}5;-3{,}4),\ \ldots,\ M_{13}(2{,}8).$$

Проведем через построенные точки плавную линию (черт. 9). Эта линия и называется графиком функции $y=x^3$ (кубическая парабола).

Мы построили график функции в пределах изменения аргумента x от -2 до $+2$; ясно, что эти пределы по желанию можно всегда расширить.

§ 7. Прямая пропорциональность

В курсе арифметики дается понятие о прямо пропорциональных величинах. Примерами таких величин могут служить:

а) пройденный путь и время при равномерном движении тела;

б) вес данного вещества и его объем;

в) количество товара и его стоимость.

Определение. *Функциональная зависимость между переменными y и x, определяемая формулой $\boldsymbol{y = kx}$, называется прямой пропорциональностью.* Число k называется *коэффициентом пропорциональности*: смысл его выясняется из того, что при $x = 1$ $y = k$, т. е. *коэффициент пропорциональности численно равен значению функции при значении аргумента x, равном* 1: так, например, из формулы $s = 4t$ (где s — путь, а t — время) следует, что $k = 4$; это — путь, пройденный телом в единицу времени ($t = 1$); другими словами, коэффициент пропорциональности в данном случае означает *скорость равномерного движения.*

Из формулы $p = vd$ (где p — вес, v — объем) следует, что $k = d$, т. е. весу в граммах 1 $см^3$ данного вещества.

Коэффициент пропорциональности может быть числом как положительным, так и отрицательным.

§ 8. График прямой пропорциональности

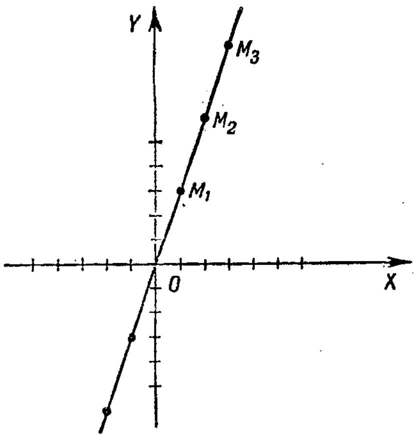
Будем исходить из формулы $y = kx$, определяющей две прямо пропорциональные величины x и y. Положим для определенности, что $k = 3$, тогда

$$y = 3x.$$

Составим таблицу значений величин x и y:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$y = 3x$	...	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	...

На основании этой таблицы построим в произвольном масштабе точки, приняв каждую пару значений аргумента и функции за координаты точки, т. е. точки $O\,(0;\ 0)$, $M_1\,(1;\ 3)$, $M_2\,(2;\ 6)$, $M_3\,(3;\ 9)$ и т. д. (черт. 10).



Черт. 10.

Замечаем, что точки O, M_1, M_2, M_3, ... лежат на одной прямой, проходящей через начало координат. Эта прямая называется *графиком функции* $y=3x$, т. е. в данном случае прямой пропорциональности.

Можно доказать, что графиком прямой пропорциональности $y=kx$ при любых значениях k будет прямая линия.

§ 9. Влияние коэффициента k на график прямой пропорциональности

Чтобы выяснить, как влияет величина коэффициента пропорциональности k на график прямой пропорциональности, построим в одном и том же масштабе на одном чертеже графики следующих трех функций:

$$y=\frac{1}{3}x\left(k=\frac{1}{3}\right),$$

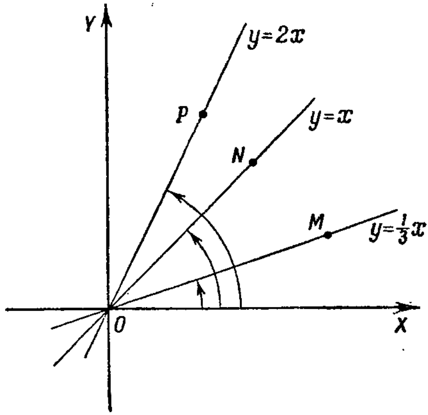
$$y=x\ \ (k=1),$$

$$y=2x\ \ (k=2).$$

x	$y=\frac{1}{3}x$	$y=x$	$y=2x$
0	0	0	0
3	1	3	6
6	2	6	12

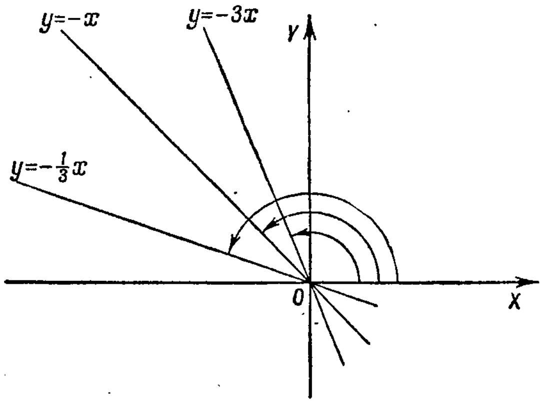
Так как графики этих функций представляют прямые, а положение прямой определяется двумя ее точками, то достаточно вычислить координаты каких-либо двух точек каждой из данных прямых; однако для контроля правильности вычислений следует находить еще координаты третьей точки.

Из чертежа 11 видно, что все три прямые проходят через начало координат и отличаются только наклоном по отношению к оси абсцисс. Чем больше коэффициент пропорциональности, тем круче поднимается прямая по отношению к оси абсцисс, или, как говорят, *наклон* графика к оси абсцисс увеличивается. Наклон прямых к оси абсцисс определяется углами XOM, XON, XOP.



Черт. 11.

Если коэффициент пропорциональности — отрицательное число, например $k = -\frac{1}{3}$; $k = -1$; $k = -3$, то



Черт. 12.

при положительных значениях аргумента x соответствующие значения функции будут отрицательны. Прямые, изображающие функции

$$y = -\frac{1}{3}x;$$

$$y = -x;$$

$$y = -3x,$$

будут наклонены под тупыми углами к положительному направлению оси абсцисс (черт. 12).

§ 10. Обратная пропорциональность

Задача. Требуется выбрать под огород прямоугольный участок земли площадью 64 $м^2$. Каковы должны быть размеры участка?

Задача, очевидно, неопределенная, так как существует бесконечное множество прямоугольников с данной площадью 64 $м^2$.

Пусть длина одной стороны прямоугольника будет x (*м*), другой y (*м*); тогда следующая таблица дает ряд возможных решений данной задачи:

x	1	2	4	8	16	32	64	...
y	64	32	16	8	4	2	1	...

Понятно, что, *уменьшая* одну сторону в *несколько* раз, мы должны *увеличить* другую *во столько же раз*, тогда произведение сторон (площадь) будет величиной постоянной, что легко проверить по таблице.

В условиях данной задачи налицо две переменные величины x и y; они связаны между собой определенной функциональной зависимостью, а именно: увеличение одной из них в несколько раз влечет за собой уменьшение другой во столько же раз и наоборот.

Эта зависимость аналитически выражается формулой $xy = 64$ или $y = \frac{64}{x}$.

Определение. *Функциональная зависимость, определяемая формулой*

$$xy = k \quad \text{или} \quad y = \frac{k}{x},$$

называется обратной пропорциональностью. Число k называется *коэффициентом обратной пропорциональности* и может быть как положительным, так и отрицательным. В рассмотренной выше задаче коэффициент k означал площадь прямоугольника: $k = 64$.

Приведем другие примеры обратно пропорциональных величин.

1) Скорость и время при равномерном движении тела на пути *определенной* длины.

2) Объем и удельный вес тела при постоянном весе.

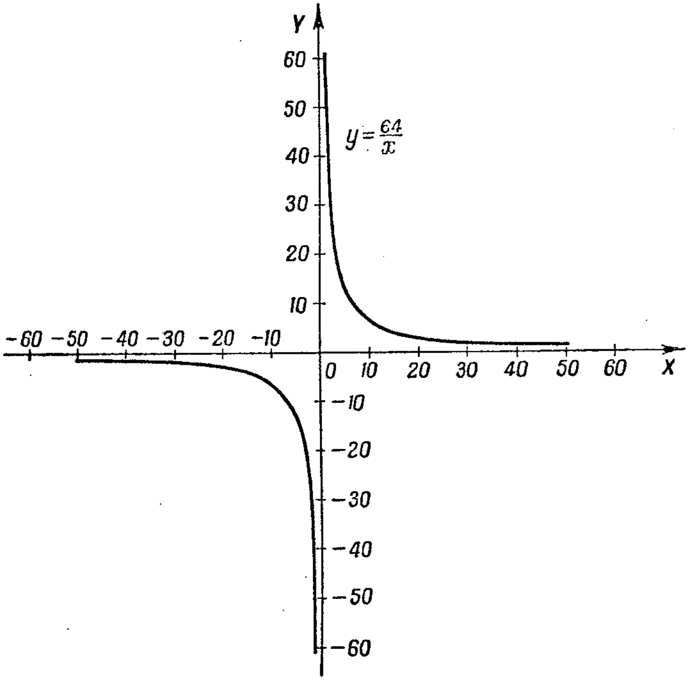
3) Сила тока (I) и сопротивление (R) при постоянной электродвижущей силе E.

§ 11. График обратной пропорциональности

Каждую пару значений переменных x и y функции $y = \frac{64}{x}$ изобразим точкой на плоскости в масштабе 1 *см* = 10. Получим ряд точек; проведем через эти точки плавную кривую (черт. 13).

Мы получим график обратной пропорциональности, носящий название «гипербола», точнее сказать — только одну ветвь гиперболы. Забудем о том, что x и y — стороны прямоугольника, которые могут принимать лишь положительные значения. Пусть x и y — вообще две переменные величины, ограниченные в своем изменении лишь тем условием, что произведение их должно равняться постоянному числу 64. В таком случае они могут обе одновременно принимать и отрицательные значения, т. е. таблицу значений можно продолжить, изменив знак каждой координаты на противоположный. Соответствующие пары значений аргумента и функции изобразятся точками, расположенными в третьей четверти. Таким образом, получим другую (левую) ветвь гиперболы, симметричную с первой (правой) ветвью кривой относительно начала координат O.

По графику легко заметить, что если точка перемещается по правой ветви в сторону положительного направления сси OX, т. е. абсцисса x (аргумент) возрастает, то ордината y (функция) убывает. При движении точки по той же



Черт. 13.

ветви кривой в обратном направлении (когда абсцисса x убывает) ордината y возрастает.

Заметим, что при отрицательном значении коэффициента k ветви гиперболы расположатся во второй и четвертой четвертях. Это следует из того, что знаки у переменных x и y должны быть противоположны.

§ 12. Линейная функция

Задача. Опытным путем найдено, что *удлинение пружины пропорционально растягивающей силе или нагрузке.* Выразить формулой *длину пружины* (y) как функцию нагрузки (x), если пружина в свободном состоянии имеет длину 8 *см*, увеличение нагрузки на 1 *кг* удлиняет пружину на 0,5 *см*.

Одному килограмму нагрузки соответствует удлинение на 0,5 *см*, x *кг* нагрузки вызовут удлинение в x *раз большее*, т. е. 0,5 x (*см*). Новая длина пружины есть прежняя длина плюс удлинение; следовательно, имеем:

$$y = 8 + 0{,}5\,x \ (см). \qquad (1)$$

Определение. *Функциональная зависимость между переменными величинами x и y вида*

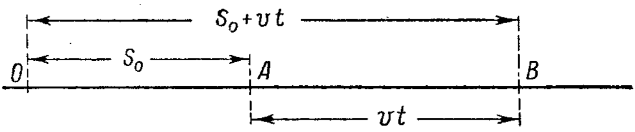
$$\boldsymbol{y = kx + b} \qquad (2)$$

называется линейной. В этой формуле k и b означают постоянные величины. Говорят, что y есть *линейная функция* аргумента x.

Следовательно, длина пружины есть линейная функция нагрузки, так как формула $y = 0{,}5x + 8$ есть частный случай формулы (2) при $k = 0{,}5$; $b = 8$.

Приведем другие примеры линейных функций.

Пример 1. Путь, пройденный телом при равномерном движении, есть *линейная функция времени* и выражается



Черт. 14.

формулой: $s = vt + s_0$ (черт. 14), где s_0 — начальный путь, v — скорость, t — время.

Пример 2. Из физики известно, что зависимость между объемом данной массы газа (V) и его температурой (t) выражается формулой: $V = V_0(1 + \alpha t)$, где V_0 — начальный объем, α—коэффициент расширения. Если раскрыть скобки, то имеем: $V = V_0 + V_0 \alpha t$.

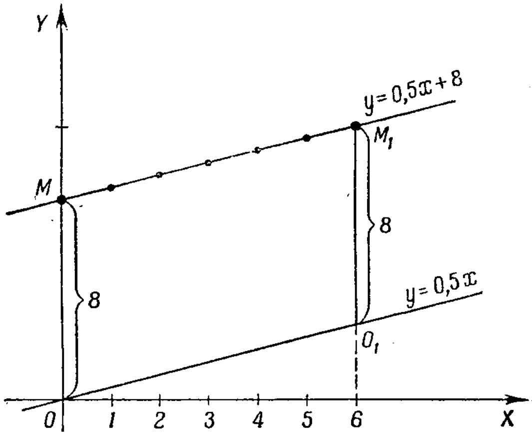
Отсюда видно, что объем V есть линейная функция температуры.

§ 13. График линейной функции

Составим таблицу значений для линейной функции $y=0{,}5x+8$, дающей зависимость между длиной пружины и нагрузкой. Ясно, что в данном конкретном случае нагрузка может принимать лишь положительные значения:

x	0	1	2	3	4	5	6
$y=0{,}5x+8$	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11

Построим точки, изображающие каждую пару значений аргумента и функции (черт. 15). Точки располагаются на одной прямой. Эта прямая называется графиком линейной функции. Если на том же чертеже построить график функ-



Черт. 15.

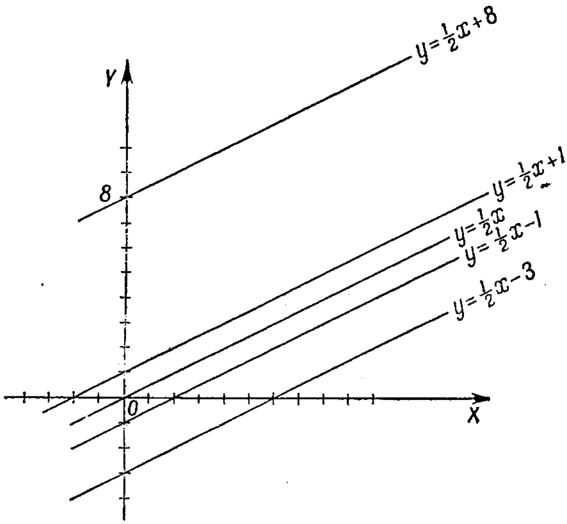
ции $y=0{,}5x$, то оба графика будут изображать две параллельные прямые. График линейной функции можно получить из графика прямой пропорциональности *параллельным* переносом в направлении оси ординат на отрезок OM, равный 8. Это вытекает из следующих соображений: значения функций 1) $y=0{,}5x+8$ и 2) $y=0{,}5x$ при одинаковых значениях аргумента x *разнятся* на постоянную величину 8;

поэтому соответствующие точки их графиков (с одинаковой абсциссой) будут лежать на одном перпендикуляре к оси абсцисс на расстоянии 8 единиц одна от другой, например точки O и M; O_1 и M_1 (черт. 15).

§ 14. Геометрический смысл свободного члена линейной функции

Выясним геометрический смысл постоянной b, входящей в формулу линейной функции

$$y = kx + b.$$



Черт. 16.

Построим на одном чертеже графики следующих линейных функций:

$$y = \frac{1}{2}x + 8 \quad (b = 8); \qquad y = \frac{1}{2}x - 1 \quad (b = -1);$$

$$y = \frac{1}{2}x + 1 \quad (b = 1); \qquad y = \frac{1}{2}x - 3 \quad (b = -3)$$

$$y = \frac{1}{2}x \quad (b = 0);$$

(черт. 16). Все они имеют один и тот же коэффициент $k=\frac{1}{2}$. Прямые, соответствующие этим уравнениям, *параллельны* между собой, но отсекают *разные* отрезки на оси OY, как это показано на чертеже.

Свободный член b равен величине отрезка, отсекаемого прямой $y=kx+b$ на оси ординат; при положительном значении b график пересекает ось ординат выше начала координат O, при отрицательном значении b — ниже начала координат. Физический смысл величины b в различных задачах может быть различным; в примере с пружиной он ясен: это длина пружины в свободном состоянии (без нагрузки). В примере на равномерное движение, путь для которого выражается формулой $s=vt+s_0$, свободный член s_0 означает путь, пройденный телом к моменту времени $t=0$ (начальный путь).

§ 15. Влияние коэффициента k на график линейной функции

На чертеже 17 даны графики линейных функций при *различных значениях коэффициента* k, но одном и том же свободном члене b:

$$y=\frac{1}{2}x+1 \quad \left(k=\frac{1}{2}\right); \quad y=-\frac{1}{2}x+1 \quad \left(k=-\frac{1}{2}\right);$$

$$y=x+1 \quad (k=1); \quad y=-x+1 \quad (k=-1);$$

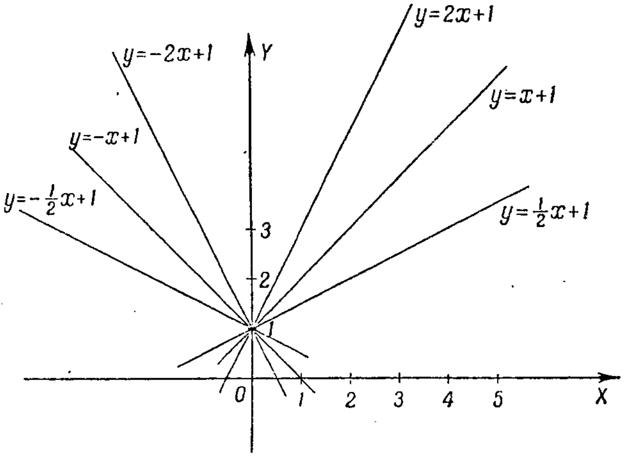
$$y=2x+1 \quad (k=2); \quad y=-2x+1 \quad (k=-2).$$

Каждый из этих графиков может быть построен по образцу, данному в § 13, т. е. на основе предварительно составленной таблицы значений для аргумента x и функции y.

Из чертежа ясно видно, что с изменением коэффициента k меняется наклон прямой относительно оси абсцисс. При положительном значении k угол наклона прямой относительно оси абсцисс острый и с увеличением k он увеличивается. При отрицательном значении k прямая наклонена под тупым углом к оси абсцисс.

Геометрически коэффициент пропорциональности линейной функции характеризует *наклон графика* (прямой) *к оси абсцисс*. Название «линейная функция» указывает на то, что графически такая функция изображается прямой.

В тех случаях, когда уравнение $y = kx + b$ выражает линейную зависимость между какими-нибудь *физическими*



Черт. 17.

величинами, коэффициент k тоже получает определенный физический смысл.

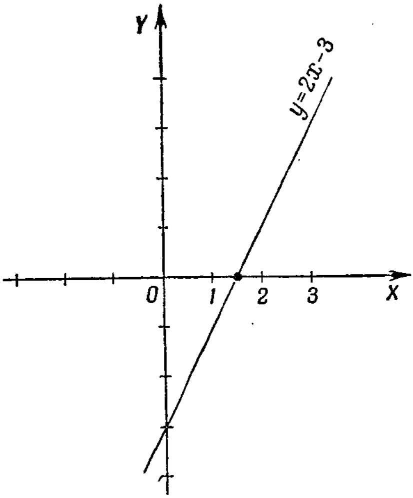
В примере на растяжение пружины коэффициент k равен 0,5; это — удлинение пружины при нагрузке 1 *кг*.

В примере на равномерное движение $s = vt + s_0$; роль коэффициента играет величина v, т. е. *скорость* при равномерном движении.

Говорят, что *коэффициент пропорциональности k линейной функции $y = kx + b$ характеризует скорость изменения этой функции*; он численно равен изменению функции при изменении аргумента на 1. Например, функция $y = 3x - 2$ увеличится на 3 единицы, если аргумент x изменится от значения 0 до 1, или от 1 до 2, или от 2 до 3 и т. д., что легко подсчитать в уме.

§ 16. Понятие о корне линейной функции

Определение. *Корнем линейной функции называется значение аргумента, при котором значение функции равно нулю.*



Черт. 18.

Так, например, корень функции $y=2x-3$ равен 1,5, так как при $x=1,5$ $y=2\cdot 1,5-3=0$.

Очевидно, чтобы найти корень линейной функции, надо приравнять функцию y нулю и решить полученное уравнение:

$$0=kx+b;$$

$$x=-\frac{b}{k}\ (k\neq 0).$$

Геометрически корень линейной функции означает *абсциссу точки пересечения графика линейной функции с осью абсцисс.*

На чертеже 18 показано, что прямая $y=2x-3$ пересекает ось абсцисс в точке $x=1,5$; в этой точке $y=0$.

§ 17. Пример графического решения системы линейных уравнений

Пусть дана система уравнений:

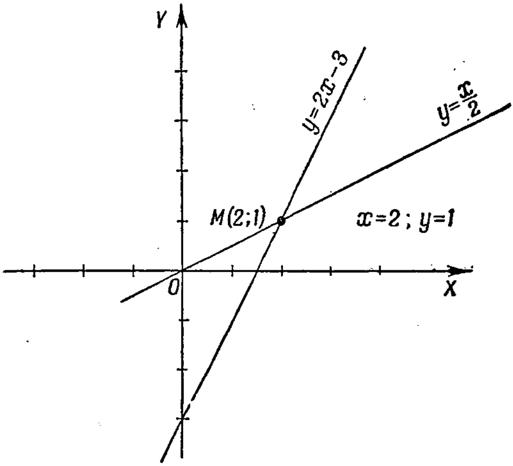
$$\begin{cases} y=2x-3, \\ y=\frac{x}{2}. \end{cases}$$

Каждое уравнение этой системы можно рассматривать как выражение линейной зависимости между аргументом x и функцией y. Нужно найти такое значение аргумента x, при котором значения обеих линейных функций равны между собой. Геометрически это означает, что ищется точка пересечения двух прямых — графиков данных линейных функций.

На чертеже 19 показано, что прямые, соответствующие уравнениям данной системы, пересекаются в точке M (2; 1); следовательно, решение данной системы будет:

$$x = 2; \quad y = 1.$$

Заметим, что каждое уравнение системы, взятое в отдельности, имеет бесконечное множество решений; эти ре-



Черт. 19.

шения представляют координаты точек соответствующей данному уравнению прямой, но может иметься лишь одна пара значений x и y, удовлетворяющих двум данным линейным уравнениям; это — координаты точки пересечения двух соответствующих прямых.

Упражнения

1. Построить точки по их координатам:

A (3; 5); B (—2; 4); C (5; —2); D (—3; —5); E (4; 0); F (0; 3); K (—5; 0); M (0; —2).

2. Построить координатные оси, взять на плоскости ряд произвольных точек и записать их координаты.

3. В каких четвертях лежат точки:

$$N(2;\ 7);\quad P(-3;\ -2);\quad Q(3;\ -5);\quad L(4;\ -1).$$

4. Дана точка $M(4;\ 3)$. Построить симметричную ей точку относительно: а) оси абсцисс, б) оси ординат, в) начала координат и записать координаты этих точек.

5. Как расположены на координатной плоскости точки, абсциссы которых равны 2, а ординаты — произвольные числа.

6. Как расположены в координатной системе точки, ординаты которых равны 3, а абсциссы — любым числам.

7. Эскалатор метро движется со скоростью 0,4 *м* в секунду. На каждом метре его длины в среднем размещаются 4 пассажира. Выразите формулой количество пассажиров Q, прошедших через эскалатор за время t часов. Какая существует функциональная зависимость между переменными величинами Q и t?

8. В сосуд налита жидкость, которая давит с силой 1,8 *кг* на каждый квадратный сантиметр площади дна сосуда. Выразить формулой зависимость между давлением на дно и площадью дна, предполагая уровень жидкости неизменным.

Построить график этой функциональной зависимости.

9. На черт. 20 дан график прямой пропорциональности между величинами s и t, где t — время (в часах), s — поднятая трактором площадь в *га*.

Черт. 20.

Определить по графику:

а) какая площадь вспахана за 2,5 часа;

б) за сколько часов работы тракторист вспашет 5 *га*;

в) чему равен коэффициент пропорциональности k и каков его смысл в данном случае.

10. Между величинами x и y существует прямая пропорциональность, причем при значении аргумента $x = 2{,}4$ значение функции $y = 6$.

Найти коэффициент пропорциональности k и выразить формулой зависимость между переменными x и y.

11. Расстояние между двумя населенными пунктами A и B равно 15 *км*. Сколько времени потребуется, чтобы пройти это расстояние:

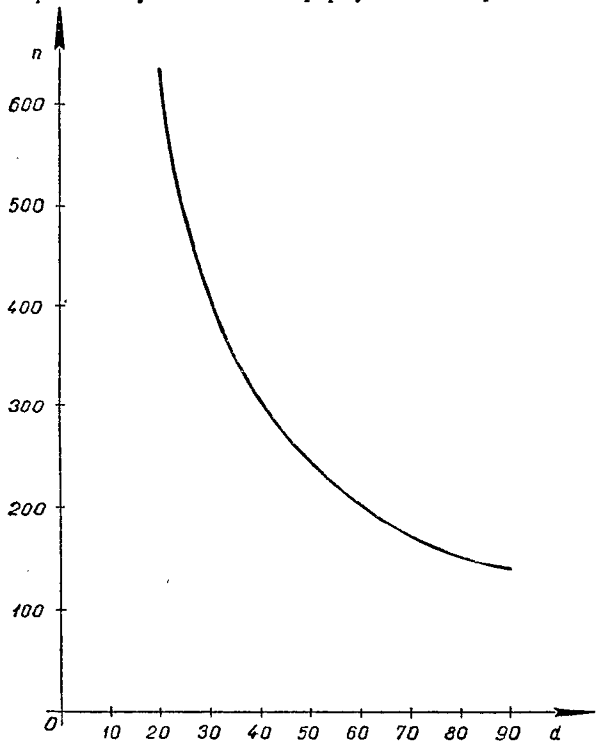
а) пешеходу, идущему со скоростью 5 *км/час*;

б) велосипедисту при скорости 12 *км/час*;

в) автомобилисту, едущему со скоростью 40 *км/час*;

г) какая зависимость существует между скоростью движения v и временем t?

д) выразите эту зависимость формулой и постройте ее график.



Черт. 21.

12. На чертеже 21 изображена функциональная зависимость между диаметром d обтачиваемого вала и числом n оборотов в минуту при скорости резания 400 *м/мин*. Установить по графику:

а) сколько оборотов в минуту делает станок при диаметре вала 30 *см*, 40 *см*?

б) чему должен быть равен диаметр вала при числе оборотов $n = 450$?

в) какая зависимость существует между величинами d и n при постоянной скорости резания?

13. При изменении температуры t на 1 градус по Цельсию (1° С) каждый сантиметр железного стержня удлиняется на 0,000012 *см*. Вывести формулу, выражающую зависимость между длиной стержня l и его температурой t, если начальная длина стержня $l_0 = 100$ *см* при $t_0 = 0°$ С.

Как называется такая функциональная зависимость?

14. Постройте на одном чертеже графики функций:

$$1)\ y = 3x + 2;\quad 2)\ y = 3x - 1;\quad 3)\ y = 3x - 3;$$

а) как расположены относительно друг друга эти графики;

б) найдите по чертежу, чему равен корень каждой из этих трех функций и проверьте полученный результат вычислением.

15. Постройте на одном чертеже графики функций:

$$1)\ y = 3 - x;\quad 2)\ y = 3 - 2x;\quad 3)\ y = 3 + x.$$

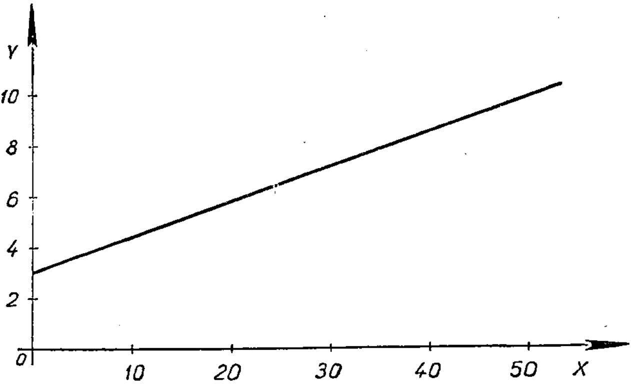
Что можно сказать о взаимном расположении полученных прямых? Чему равен коэффициент каждой из данных прямых?

16. Линейная функция $y = kx + 5$ принимает при $x = 6$ значение $y = 17$. Найти по этим данным угловой коэффициент прямой.

17. Переменная величина y есть линейная функция независимой переменной x.

Известно, что при $x = 1{,}5$ $y = 3$
при $x = 3$ $y = 9$.

Найти коэффициент k и свободный член b. Вычислить y при $x = 2$.



Черт. 22.

18. На чертеже 22 изображен график линейной функции $y = kx + b$. Найдите по чертежу, чему равны k и b.

19. Постройте график функции $y=\frac{3+x}{4+x^2}$, составив предварительно таблицу значений.

Масштаб по оси y возьмите больше, чем по оси x.

20. Решите графически задачу: из двух городов A и B выезжают одновременно друг к другу навстречу два туриста, причем скорость первого 15 *км/час*, второго 20 *км/час*. Через сколько часов они встретятся, если расстояние между городами равно 120 *км*?

21. Решите графически следующие системы уравнений:

1) $\begin{cases} 2y-x-1=0, \\ x+y-5=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y=3x, \\ x+y-4=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=-2y, \\ x-2y+8=0. \end{cases}$

22. Из Москвы в Загорск отправляется дачный поезд со средней скоростью 35 *км/час*. Через полчаса проходит через Загорск встречный скорый поезд, идущий со скоростью 50 *км/час*.

Постройте графики движения этих двух поездов и определите точку их встречи (считая от Москвы), если расстояние между городами равно 68 *км*.

Примечание: За начало координат принять город Москву.

ГЛАВА II

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

§ 18. Приближенное число и его границы

Если нужно сосчитать небольшое количество предметов, например количество изготовленных токарем за одну смену деталей или присутствующих на уроке учащихся, то результат счета обычно выражается *точным числом.*

Но вряд ли можно *точно* сосчитать количество автомашин, снующих по такой оживленной магистрали нашей столицы, как улица Горького. Наверняка ошибется и всякий, кто попытается сосчитать количество деревьев, растущих в зоне большого кольца города Москвы: легко сбиться со счета, можно пропустить какое-нибудь дерево или посчитать его дважды.

Таким образом, результат счета большого количества объектов приходится *выражать приближенным числом.*

В таких случаях обычно говорят, например: «На общезаводском собрании присутствует *около* 8000 человек». Слово «около» указывает на то, что число 8000 — приближенное.

Другой источник появления приближенных чисел — это всевозможного рода измерения, с которыми постоянно приходится иметь дело инженеру, технику и любому практическому работнику.

Измерение любой величины не может быть произведено абсолютно точно, полученный результат *всегда содержит некоторую погрешность.* Величина этой погрешности зависит от качества измерительных приборов и от опытности лица, производящего измерения. Так, например, если при измерении длины металлической плиты с помощью ленты, подразделенной на сантиметры, получено в результате 78 *см*, то можно только утверждать, что погрешность измерения не превосходит 1 *см*; это означает, что истинная длина заключается между 77 и 79 *см*.

Более точные измерения с помощью масштабной линейки, подразделенной на миллиметры, могут уменьшить погрешность и свести ее до 1—2 *мм*.

Запись 77 ($\pm$1) означает, что допущенная при измерении погрешность не превышает 1. Аналогично запись приближенного числа 12,72 ($\pm$0,01) говорит о том, что погрешность может доходить до 0,01, причем неизвестно, в какую сторону произошла ошибка. По этой записи можно установить так называемые *границы приближенного числа*:

нижняя граница (н. г.) равна $12{,}72-0{,}01=12{,}71$;
верхняя граница (в. г.) равна $12{,}72+0{,}01=12{,}73$.

Итак, границы приближенного числа — это два числа, между которыми заключается истинное значение измеряемой величины. Чем меньше разность между границами, тем точнее измерение.

§ 19. Округление чисел

Приближенные числа могут появляться также при округлении точных данных. Лицо, уплатившее за товар, скажем, 99 р. 75 к., на вопрос «сколько стоит?», наверно, назовет круглую сумму 100 руб., полагая, что спрашивающему неинтересно знать точную цену с копейками.

Если по списку количество учащихся техникума, например, равно 803 чел., то мы получим достаточно правильное представление о количестве учащихся, если «округлим» число 803 до десятков, т. е. отбросим в нем единицы и возьмем круглое число 800.

При обращении обыкновенной дроби $\frac{2}{3}$ в десятичную получаем бесконечную периодическую дробь:

$$\frac{2}{3}=0{,}666\ \ldots$$

Для практических вычислений мы обычно «обрываем» такую дробь на определенном десятичном знаке, например на тысячных, отбрасывая остальные десятичные знаки. Тогда имеем:

$$\frac{2}{3} \approx 0{,}666,$$

где знак $\approx$ обозначает приближенное равенство.

Округление состоит в том, что, отбрасывая ряд цифр, мы оставляем последнюю удерживаемую цифру без изменения, если первая отбрасываемая цифра меньше 5, и увеличиваем последнюю цифру на 1, если первая из отброшенных цифр больше или равна 5. Таким образом, по правилу округления надо писать:

$$\frac{2}{3} \approx 0{,}667.$$

Округление дает более точный результат, чем простое отбрасывание единиц последних разрядов.

Например, число 867, округленное до десятков, будет 870; погрешность равна трем единицам. Простое отбрасывание единиц дало бы 860, погрешность в данном случае была бы равна семи единицам.

§ 20. Точные значащие цифры

Один из самых простых способов оценки точности приближенного числа состоит в подсчете точных значащих цифр этого числа.

Определение. *Если погрешность приближенного числа не превышает половины единицы последнего разряда, то все цифры данного числа называются точными значащими цифрами, за исключением нулей, стоящих впереди первой отличной от нуля цифры.*

Например, число 73,58 имеет четыре точные значащие цифры, если погрешность не превышает 0,005; число 0,0043 имеет две точные значащие цифры, если погрешность не больше 0,00005.

Что касается цифры нуль, стоящей в конце числа, то она в некоторых случаях идет в счет точных значащих цифр, в других — не идет. Поясним это на примерах.

Если фактическое число жильцов по домовой книге значится 2135, то округление этого числа до сотен, т. е. 2100, будет иметь всего две точные значащие цифры; здесь нули в конце в счет точных значащих цифр не идут, так как нули заменяют отброшенные точные значащие цифры 3 и 5.

Приближенное число 2,5043, округленное до сотых, будет 2,50, здесь нуль идет в счет точных *значащих цифр*, так как точно известно, что сотых долей в данном числе не имеется.

Округляя точное число 1,9996 до тысячных, получим 2,000; здесь все четыре цифры, в том числе три нуля, будут точными.

В дальнейшем для краткости вместо термина «точные значащие цифры» иногда будем употреблять термин «значащие цифры». Условились нули в конце записи приближенного числа писать мелкими, если они не идут в счет значащих цифр. Таким образом, запись 27₀₀ означает приближенное число с двумя значащими цифрами. При таком способе записи приближенных чисел сразу заметно, когда нули надо считать значащими цифрами.

Не надо смешивать два термина: «десятичные знаки» и «значащие цифры», число 127,005 имеет шесть значащих цифр, но всего три десятичных знака.

Определение. *Если погрешность приближенного числа больше единицы последнего разряда, то последняя значащая цифра называется сомнительной* (ненадежной) *), например приближенное число 2,72 ($\pm$0,03) имеет сомнительную последнюю цифру 2, так как погрешность равна трем единицам этого разряда (сотые).

Число 17,25 ($\pm$0,18) имеет уже две сомнительные значащие цифры, так как погрешность доходит почти до 0,2.

Условились писать приближенные числа так, чтобы в них были сохранены только точные значащие цифры, сомнительные цифры отбрасываются.

В приближенном числе сохраняют одну сомнительную цифру, если это число получено в результате выполнения каких-то действий над исходными данными и не является окончательным результатом данного вычисления. Поясним это на примере.

---

*) Если погрешность приближенного числа больше половины, но меньше единицы последнего разряда, то, строго говоря, последняя значащая цифра сомнительная. Однако в приближенных вычислениях в таких случаях чаще считают все значащие цифры данного числа точными.

Пусть требуется вычислить значение x, если

$$x = \frac{0{,}372 \cdot 42{,}3}{9{,}37 + 8{,}75}.$$

Исходные данные — это числа, входящие в правую часть формулы, причем все они даны с тремя значащими цифрами. Выполняя умножение и сложение, называемые в данном случае промежуточными вычислениями, получим в результате приближенные числа, в которых целесообразно сохранить по одной сомнительной цифре.

Окончательный результат получим, выполнив деление; в нем следует удержать только точные цифры *).

§ 21. Абсолютная погрешность и ее граница

Пусть a — приближенное значение величины x.

Определение. *Разность между истинным значением некоторой величины x и ее приближенным значением a называется абсолютной погрешностью приближенного числа:*

$$\alpha = x - a,$$

где α («альфа») обозначает абсолютную погрешность.

Точное значение абсолютной погрешности в большинстве случаев нам неизвестно (так как неизвестно истинное значение величины), а если известно, то это бывает в маловажных случаях, когда мы прибегаем к округлению точных данных.

Так, например, если вместо точного числа учащихся в техникуме 813 чел. возьмем округленное число 800, то в данном случае абсолютная погрешность $\alpha = 813 - 800 = 13$ (чел.). Ясно, что при округлении точного числа по недостатку абсолютная погрешность *положительна*, в противном случае — *отрицательна*. В тех случаях, когда приближенное число a есть результат измерения или взвешивания, истинное значение абсолютной погрешности нам неизвестно, но всегда удается установить такое положительное число Δa («дельта» a), что имеет место неравенство: $|\alpha| < \Delta a$. Число Δa называется границей абсолютной погрешности.

*) Правила подсчета точных цифр будут даны ниже (см. § 27).

Граница абсолютной погрешности устанавливается, исходя из конкретных условий данного вопроса: предположим, например, что при измерении длины карандаша обычной масштабной линейкой, установлено, что искомая длина заключается между 17,6 и 17,8 *см*; если взять за приближенное значение число 17,7 *см*, то мы ошибемся в ту или другую сторону не больше чем на 0,1 *см*; следовательно, граница абсолютной погрешности $\Delta a = 0{,}1$ (*см*).

Иначе можно сказать, что граница абсолютной погрешности Δa есть такое положительное число, сложение которого с приближенным числом дает верхнюю границу, а вычитание дает нижнюю границу этого приближенного числа.

Иногда границу абсолютной погрешности указывают в скобках за приближенным числом, о чем было сказано выше, в § 18.

В теории приближенных вычислений принято границу абсолютной погрешности записывать однозначным числом: например, не пишут, что $\Delta a = 0{,}143$, а вместо этого пишут $\Delta a = 0{,}2$, т. е. границу абсолютной погрешности округляют в сторону ее увеличения. При более точных подсчетах сохраняют в записи границы две цифры.

Граница абсолютной погрешности суммы $a+b$ обозначается $\Delta(a+b)$; граница абсолютной погрешности произведения ab обозначается Δab. Знак «Δ» ни в коем случае нельзя рассматривать как множитель, хотя по внешнему виду имеется полное сходство.

Для краткости будем в дальнейшем границу абсолютной погрешности называть просто абсолютной погрешностью. Фраза: «погрешность не превышает 0,5» будет заменять точную фразу: «граница абсолютной погрешности не превышает 0,5». Это будем делать в тех случаях, когда нет опасности вызвать какое-нибудь недоразумение.

§ 22. Относительная погрешность и ее граница

Если известна только граница абсолютной погрешности, то трудно пока судить о *качестве* произведенного измерения. Так, например, погрешность $\Delta a = 1$ *см* при измерении длины чертежной доски, меньшей одного метра, свидетельствует о небрежности, допущенной при измерении.

Та же погрешность, допущенная при определении длины туннеля метро между станциями Белорусская — пл. Маяковского, говорит о чрезвычайно точных способах определения длины.

Из этих двух примеров видно, что важно знать, *какую часть от измеряемой величины составляет абсолютная погрешность.*

Если при двух взвешиваниях получены результаты:

$$20 \text{ кг } (\pm 0{,}01 \text{ кг}),$$
$$60 \text{ г } (\pm 0{,}01 \text{ г}),$$

то при первом взвешивании погрешность составляет:

$$\frac{0{,}01}{20} = \frac{1}{2000} = 0{,}05\% \text{ от веса предмета,}$$

при втором:

$$\frac{0{,}01}{60} = \frac{1}{6000} \approx 0{,}017\%.$$

Второе взвешивание в три раза точнее первого.

Определение. *Отношение абсолютной погрешности приближенного числа к самому приближенному числу называется относительной погрешностью:*

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{a}, \tag{1}$$

где ε («эпсилон») есть обозначение относительной погрешности.

В практике приближенных вычислений пользуются не относительной погрешностью, а ее границей; для этого заменяют в формуле (1) величину α ее границей Δa; имеем:

$$\delta a = \frac{\Delta a}{a}, \tag{2}$$

где символ δ («дэльта малая») есть обозначение границы относительной погрешности; обозначение «δa» надо читать так: «относительная погрешность числа a».

Итак, *отношение границы абсолютной погрешности к самому приближенному числу называется границей относительной погрешности.*

Обозначение δab означает границу относительной погрешности произведения чисел a и b, под $\delta \frac{a}{b}$ будем подразумевать границу относительной погрешности частного.

Для краткости вместо точного термина «граница относительной погрешности» будем употреблять неточный термин «относительная погрешность».

Относительную погрешность весьма часто выражают в процентах.

Пример 1. Найти относительную погрешность приближенного числа $l = 218$ *см* ($\pm 0{,}5$ *см*):

$$\delta l = \frac{0{,}5}{218} = \frac{1}{436} \approx 0{,}00229 < 0{,}0023 = 0{,}23\%.$$

Пример 2. По относительной погрешности приближенного числа установить его абсолютную погрешность и границы, между которыми находится само приближенное число, если

$$a = 32{,}8; \; \delta a = 0{,}5\%.$$

По формуле $\delta a = \frac{\Delta a}{a}$ находим абсолютную погрешность

$$\Delta a = a \cdot \delta a;$$

$$\Delta a = 32{,}8 \cdot 0{,}005 = 0{,}164 \approx 0{,}17 < 0{,}2.$$

Следовательно, истинное значение измеряемой величины заключается между 32,6 или 33.

§ 23. Вычисления с приближенными данными

Приближенные данные, полученные при измерении величин, *служат основой всех технических расчетов и проектов,* по которым строятся различные сооружения: здания, мосты, самолеты, шахты и т. д.

Отсюда возникает необходимость научиться обращаться с приближенными числами, уметь производить над ними арифметические действия, уметь оценивать точность полученных результатов.

Рассмотрим эти вопросы по отношению к четырем основным арифметическим действиям.

§ 24. Сложение и вычитание приближенных чисел

Пример 1. Найти общий вес в килограммах четырех деталей машины, если каждая из них весит в отдельности: 18,4 *кг*, 3,7 *кг*, 0,3 *кг* и 5,4 *кг*.

Произведя сложение, получим:

$$18,4+3,7+0,3+5,4=27,8 \ (\textit{кг}).$$

Погрешность каждого слагаемого не превышает 0,05 *кг*; следовательно, погрешность суммы не больше $0,05 \cdot 4 = 0,2$ (*кг*). Это означает, что последняя цифра суммы сомнительна и ее как будто надо отбросить, округлив результат до целых килограммов, т. е. считая общий вес 28 *кг*.

Однако надо принять во внимание, что погрешности слагаемых *необязательно будут все одного знака*, они могут быть как положительными, так и отрицательными, так что при сложении может произойти взаимное их погашение, в результате чего последняя цифра все же может оказаться точной. Следующий пример подтверждает правильность таких соображений.

Пример 2. Найти сумму дробей:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13} \text{ с точностью до } 0,01.$$

Обратим каждую дробь в десятичную с точностью до сотых и сложим их, получим: $0,33+0,14+0,09+0,08=0,64$.

Проверим, все ли цифры являются точными. Для этого сложим данные *обыкновенные дроби* и результат обратим в десятичную дробь:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}=\frac{1934}{3003}=0,644\ldots$$

Замечаем, что полученный первым способом ответ 0,64 имеет точную цифру сотых.

В практике приближенных вычислений выработалось следующее правило, относящееся к сложению и вычитанию приближенных чисел.

Правило 1. *Складывая или вычитая приближенные числа, имеющие одинаковое число точных десятичных знаков, можно в результате сохранять столько же десятичных знаков, сколько их имеет каждое из данных приближенных чисел.*

Рассмотрим теперь случай, когда слагаемые имеют *разное число десятичных знаков.*

Пример 3. Найти сумму:

$$0,234+17,5+2,54+0,0456,$$

если все значащие цифры слагаемых точны. Наименее точным является второе слагаемое, так как в нем цифра сотых неизвестна, не говоря о дальнейших цифрах. Поэтому в сумме цифра сотых уже будет сомнительной и ее нет смысла писать.

Сложение произведем так, что более точные слагаемые округлим до сотых и в окончательном результате цифру сотых отбрасываем:

$$\begin{array}{r} 0,23 \\ +\;17,5 \\ 2,54 \\ 0,05 \\ \hline 20,32 \end{array}$$

Сумма равна 20,3.

Пример 4. Товар с упаковкой весит 118,5 *кг*, тара весит 3,745 *кг*. Найти чистый вес товара.

Несмотря на то, что очень тщательно вывешена тара, чистый вес товара можно определить только с точностью до десятых, так как в уменьшаемом неизвестны сотые и тысячные доли (*кг*). Поэтому вычитаемое округляем до десятых:

$$\begin{array}{r} 118,5 \\ -\;\;\;3,7 \\ \hline 114,8\ (\text{кг}) \end{array}$$

Правило 2. *При сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их имеет наименее точное данное.*

Наименее точным данным считается то, в котором меньше десятичных знаков, например из чисел: 27,5; 1,873 и 0,0018 наименее точным является 27,5. Согласно правилу 2 сложение следует произвести так:

$$\begin{array}{r} 27,5 \\ +\;1,87 \\ 0,00 \\ \hline 29,37 \end{array}$$

Отв. 29,4.

Сложение и вычитание целых приближенных чисел производится так же, как и сложение и вычитание дробных приближенных чисел.

Пример 5. Найти сумму чисел: $42_{000} + 37_{00} + 125_{0}$

$$\begin{array}{r} 42_{000} \\ +\,3\,700 \\ 1\,250 \\ \hline 46\,95_{0} \\ \hline 47_{000} \end{array}$$

§ 25. Умножение приближенных чисел

Задача. С какой точностью может быть *вычислена площадь* прямоугольника со сторонами $a = 43{,}5$ *см*, $b = 81{,}2$ *см*. Здесь каждое данное имеет три точных значащих цифры. Перемножая данные числа обычным способом, найдем:

$$43{,}5 \cdot 81{,}2 = 3532{,}2 \ (см^2).$$

Выясним, какие значащие цифры произведения являются *точными*, какие — *сомнительными*.

Истинная длина стороны a заключается между 43,45 *см* и 43,55 *см*, стороны b — между 81,15 *см* и 81,25 *см*, поэтому искомая площадь прямоугольника заключается между $43{,}45 \cdot 81{,}15$ и $43{,}55 \cdot 81{,}25$, т. е. нижняя граница произведения ab равна: $43{,}45 \cdot 81{,}15 \approx 3520$ ($см^2$); верхняя граница произведения равна: $43{,}55 \cdot 81{,}25 \approx 3540$ ($см^2$).

Эти два числа, между которыми заключено истинное значение площади прямоугольника, разнятся друг от друга уже третьей значащей цифрой, т. е. цифрой десятков.

Если за приближенную величину площади принять полусумму ее границ:

$$\frac{3520 + 3540}{2} = 3530 \ (см^2),$$

то мы ошибемся не больше чем на 10 $см^2$. Сличая этот результат с ранее полученным произведением приближенных чисел 3532,2 $см^2$, видим, что в нем не больше трех точных значащих цифр.

Пример 1. Сколько граммов весит железный шарик объемом $V = 12{,}5$ *см*^{3}, если удельный вес железа $d \approx 7{,}8$?

Вес $p = 12{,}5 \cdot 7{,}8 = 97{,}5$ (*г*).

Подсчет нижней и верхней границ веса p по образцу предыдущей задачи показал бы, что в данном случае произведение может быть вычислено не больше чем с двумя точными цифрами, т. е.

$$p \approx 98\ (г).$$

Пример 2. Сколько точных значащих цифр в произведении приближенных чисел 0,429 и 0,33?

Перемножая данные числа, найдем: $0{,}429 \cdot 0{,}33 = 0{,}14157$.

Взятые нами числа представляют приближенные значения дробей $\frac{1}{3}$ и $\frac{3}{7}$, точное произведение которых равно:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{7} = 0{,}1429\ldots$$

Сопоставляя это более точное произведение с полученным выше приближенным его значением, замечаем, что только первые две цифры (14) являются точными, остальные — сомнительными.

Рассмотренные примеры поясняют целесообразность следующего правила умножения приближенных чисел.

Правило. *В произведении двух приближенных чисел следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет менее точный сомножитель.*

Менее точным считается то число, у которого меньше точных значащих цифр.

§ 26. Деление приближенных чисел

Задача. Вычислить силу тока I в электрической цепи, сопротивление которой $R = 48{,}6$ ома, напряжение E равно 218 вольт. Сила тока определяется по формуле $I = \frac{E}{R}$.

Произведем деление обычным путем:

$$218 : 48{,}6 = 4{,}485\ \ldots\ (ампера).$$

Возникает вопрос: сколько точных значащих цифр можно получить в частном, если учесть, что данные имеют по три точные значащие цифры?

Найдем границы, между которыми содержится истинное значение частного. Очевидно, что этими границами будут числа $\frac{217,5}{48,65}$ и $\frac{218,5}{48,55}$, так как дробь тем меньше, чем числитель ее меньше и знаменатель больше, и наоборот.

Выполняя деление, находим:

$$217,5:48,65=4,470\ \ldots,$$
$$218,5:48,55=4,500\ \ldots,$$

следовательно, можно утверждать, что истинное значение силы тока I заключается между 4,47 ампера и 4,5 ампера.

Если взять за приближенное значение силы тока среднее арифметическое границ, то получим:

$$I=\frac{4,47+4,51}{2}=4,49 \text{ (ампера)}.$$

Граница абсолютной погрешности при этом равна:

$$\Delta I=\frac{4,51-4,47}{2}=0,02 \text{ (ампера)}.$$

Наш подсчет показывает, что частное от деления 218 на 48,6, т. е. число 4,485..., имеет уже сомнительную цифру сотых, о дальнейших цифрах частного говорить нечего, они никакого доверия не заслуживают.

Итак, в данном случае при делении двух приближенных чисел, из которых каждое было дано с тремя точными цифрами, мы получили в частном только две точные цифры, третья цифра оказалась уже сомнительной.

Так бывает не всегда, как это видно из следующего примера.

Пример 1. $0,667:0,143=4,664\ldots\approx 4,66$.

Здесь все три цифры частного являются точными, так как делимое 0,667 есть приближенное значение дроби $\frac{2}{3}$, делитель 0,143 есть приближенное значение дроби $\frac{1}{7}$ с тремя значащими цифрами. Выполним деление над точными данными:

$$\frac{2}{3}:\frac{1}{7}=\frac{14}{3}=4,666\ldots$$

Первые три значащие цифры точного частного совпадают с тремя первыми цифрами приближенного частного.

Если деление производится над приближенными числами, имеющими неодинаковое количество точных значащих цифр, то более точное данное предварительно округляют, сохраняя в нем одну лишнюю цифру.

Пример 2. С площади 9,4 *га* было собрано 4843 *ц* сахарной свеклы. Каков средний урожай свеклы с 1 *га*?

Надо разделить 4843 на 9,4.

Делимое округляем до трех значащих цифр. В частном сохраняем лишь две значащие цифры:

$$4840 : 9{,}4 = 514 \approx 510 \ (ц).$$

Приходим к следующему выводу: *при делении приближенных чисел следует руководствоваться теми же правилами, что и при умножении.*

§ 27. Правила подсчета цифр

Мы рассмотрели четыре арифметических действия над приближенными числами и дали грубую оценку точности получаемых при этом результатов.

Наш способ вычисления был основан на подсчете точных значащих цифр *в исходных данных* и *в конечном результате*; поэтому в теории приближенных вычислений этот способ известен под названием: «Правила подсчета цифр».

Сформулируем эти правила.

1. Прежде чем решать какую-нибудь задачу или пример, необходимо установить, *какие данные точны*, какие *приближенны.*

2. Приближенные числа надо округлять, сохраняя в них только точные значащие цифры и не более одной сомнительной цифры.

3. При сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько *десятичных знаков*, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом десятичных знаков; данные с бо́льшим числом десятичных знаков предварительно округляются так, чтобы они имели лишь один лишний десятичный знак.

4. При умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом точных значащих цифр; данные с бо́льшим числом значащих цифр предварительно округляются так, что в них оставляется лишь одна лишняя значащая цифра.

5. При возведении в квадрат и куб в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет основание.

6. При вычислении промежуточных результатов следует брать одной цифрой больше, чем указано в перечисленных выше правилах 3—5.

§ 28. Примеры более сложных вычислений по правилу подсчета цифр

Пример 1. Мощность N паровой машины в лошадиных силах определяется по формуле

$$N=\frac{PFsn}{30\cdot 75},$$

где P — среднее давление на поршень в $кг/см^2$, F — площадь поршня в $см^2$, s — ход поршня в $м$, n — число оборотов в минуту.

Вычислить мощность при следующих данных:

$$P=7{,}8;\ F=\frac{\pi d^2}{4},\quad \text{где}\quad d=32{,}4;\quad s=0{,}535;\ n=150.$$

Наименее точными данными являются P и n, известные только с двумя точными значащими цифрами, поэтому окончательный результат будет иметь не больше двух точных значащих цифр.

Более точные данные — d и s — имеют три точные значащие цифры, т. е. всего на одну цифру больше менее точных, поэтому предварительному округлению эти данные не подлежат.

Число π возьмем с тремя значащими цифрами.

После подстановки числовых данных в формулу получим:

$$N=\frac{7{,}8\cdot 3{,}14\cdot 32{,}4\cdot 32{,}4\cdot 0{,}535\cdot 150}{30\cdot 75\cdot 4}=1{,}3\cdot 3{,}14\cdot 16{,}2\cdot 32{,}4\cdot 0{,}107.$$

Вычисления дадут:

$$3{,}14 \cdot 1{,}3 = 4{,}082 \approx 4{,}08;$$
$$4{,}08 \cdot 16{,}2 = 66{,}096 \approx 66{,}1;$$
$$66{,}1 \cdot 32{,}4 = 2141{,}64 \approx 2140;$$
$$2140 \cdot 0{,}107 = 214 \cdot 1{,}07 = 228{,}98 \approx 230.$$

Итак, мощность $N = 230$ (*л. с.*).

Пример 2. Теплоемкость твердого тела x определяется по формуле

$$x = \frac{(m_2 - m_1 + m_1 n)\,(t_2 - t_1)}{P\,(T - t_2)},$$

где m_1 — вес внутреннего сосуда калориметра без воды,
m_2 — вес внутреннего сосуда калориметра с водой,
t_1 — первоначальная температура воды,
t_2 — температура воды после погружения тела,
T — температура кипения воды,
n — теплоемкость калориметра и мешалки,
P — вес металла, теплоемкость которого надо найти.

Из опыта получены следующие данные:

$$P = 403{,}7;\quad m_1 = 119;\quad m_2 = 673;$$
$$n = 0{,}094;\quad t_1 = 9{,}5^\circ;\quad t_2 = 12{,}8^\circ;\quad T = 100{,}11^\circ.$$

Менее точные данные — n и t — имеют всего две точные значащие цифры, поэтому более точные данные округляем, сохраняя в них три точные значащие цифры: $P \approx 404$; $T \approx 100$.

Подставляем числовые данные в формулу:

$$x = \frac{(673 - 119 + 119 \cdot 0{,}094) \cdot (12{,}8 - 9{,}5)}{404 \cdot (100 - 12{,}8)} = \frac{(554 + 119 \cdot 0{,}094) \cdot 3{,}3}{404 \cdot 87{,}2}.$$

Производим вычисления:

$$119 \cdot 0{,}094 = 11{,}186 \approx 11{,}2;$$
$$554 + 11{,}2 = 565{,}2 \approx 565;$$
$$565 \cdot 3{,}3 = 1864{,}5 \approx 1860;$$
$$404 \cdot 87{,}2 = 35\,228{,}8 \approx 35\,200;$$
$$1860 : 35\,200 = 186 : 3520 = 0{,}0528 \approx 0{,}053.$$

Отв. $x \approx 0{,}053$.

§ 29. Вычисления с наперед заданной точностью

В примерах и задачах, которые мы решали до сих пор, содержались приближенные данные; точность их нам заранее была известна; требовалось определить точность окончательного результата. Но часто приходится решать обратную задачу: по точности окончательного результата надо установить, какова должна быть точность исходных данных.

Нижеследующие примеры поясняют, как вести такие вычисления.

Задача 1. С какой точностью должны быть измерены диаметр основания и высота цилиндра, чтобы объем его мог быть вычислен с точностью до 1%?

Известно, что грубо приближенные значения диаметра $d \approx 20$ (*см*), высоты $h \approx 30$ (*см*).

Определим грубо приближенное значение объема цилиндра:

$$\frac{3{,}14 \cdot 20^2 \cdot 30}{4} = 9420 \ (см^3).$$

1% от 9420 $см^3$ равен 94,2 ($см^3$), — это значит, что цифра десятков в окончательном результате может быть сомнительной; следовательно, надо обеспечить лишь *две точные значащие цифры* окончательного результата. Если мы возьмем исходные данные с *тремя* точными значащими цифрами, то *желаемая точность будет достигнута.*

Итак, диаметр и высота цилиндра должны быть измерены с точностью до 0,5 *мм*, так как цифра *десятых* долей сантиметра должна быть точной. Число π следует взять с тремя значащими цифрами.

Задача 2. С какой точностью должны быть измерены длина, ширина и высота прямоугольного железного бруса, чтобы погрешность при вычислении его веса не превышала 5%? Известно, что грубо приближенные значения размеров бруса следующие:

$$a \approx 60 \ см, \quad b \approx 50 \ см \ \text{и} \ c \approx 40 \ см.$$

Удельный вес железа $\gamma \approx 8$ *г/см*^{3}.

Найдем грубо приближенное значение веса P:

$$P \approx 60 \cdot 50 \cdot 40 \cdot 8 = 960\,000 \ (г) = 960 \ (кг).$$

5% от 960 *кг* равны 48 *кг*. Так как допускаемая погрешность падает на десятки (*кг*), то цифра десятков сомнительна, а потому достаточно произвести измерения с двумя точными цифрами, т. е. с точностью до 0,5 *см*.

§ 30. Понятие о строгом учете погрешностей

Правила подсчета точных цифр учат разумно обращаться с приближенными числами, помогают устранять лишние ненадежные цифры при вычислениях, экономя, таким образом, труд и время.

Однако, выполнив какое-нибудь сложное вычисление по правилу подсчета точных цифр, мы не можем утверждать, что погрешность окончательного результата не превышает *определенной границы*; в этом смысле называют этот способ *нестрогим*. Существуют способы строгого учета погрешностей. Применение их к действиям над приближенными числами приводит к определенному суждению о том, какова граница погрешности окончательного результата, абсолютной или относительной — все равно.

Отметим некоторые правила строгого учета погрешностей, не касаясь их вывода.

1. *При сложении и вычитании приближенных чисел за границу абсолютной погрешности принимается сумма границ погрешностей компонентов*, т. е.

$$\Delta(a \pm b) = \Delta a + \Delta b.$$

Правило распространяется на большее число слагаемых.

Пример. Абсолютная погрешность суммы двух приближенных чисел $a = 17{,}8$ и $b = 42{,}7$, все значащие цифры которых точны, равна $0{,}05 + 0{,}05 = 0{,}1$. Такой же будет и граница абсолютной погрешности разности:

$$\Delta(42{,}7 - 17{,}8) = 0{,}1.$$

2. *Граница абсолютной погрешности произведения двух приближенных чисел равна сумме произведений каждого сомножителя на границу абсолютной погрешности другого:*

$$\Delta(ab) = a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a.$$

Пример. Стороны прямоугольника $a=13{,}4$ *см*, $b=28{,}6$ *см*. С какой точностью может быть определена площадь прямоугольника:

$$\Delta S=\Delta(ab)=13{,}4\cdot 0{,}05+28{,}6\cdot 0{,}05=0{,}05\cdot 42=2{,}1\ (см^2).$$

По границе абсолютной погрешности произведения легко найти границу относительной погрешности:

$$\delta ab=\frac{\Delta(ab)}{ab}=\frac{\Delta a\cdot b+\Delta b\cdot a}{ab}=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}=\delta a+\delta b,$$

$$\delta ab=\delta a+\delta b.$$

3. *Граница относительной погрешности произведения двух приближенных чисел равна сумме границ относительных погрешностей сомножителей.*

Это правило распространяется и на бо́льшее число сомножителей.

Пример. С какой точностью может быть вычислена кубатура классной комнаты, размеры которой: $a=12{,}4$ *м*; $b=10{,}2$ *м*; $c=4{,}2$ *м*.

Имеем:

$$V=abc;$$

$$\delta V=\delta a+\delta b+\delta c;$$

$$\delta a=\frac{0{,}05}{12{,}4}=\frac{1}{248}\approx 0{,}004;$$

$$\delta b=\frac{0{,}05}{10{,}2}\approx 0{,}005;$$

$$\delta c=\frac{0{,}05}{4{,}2}\approx 0{,}012;$$

$$\delta V=0{,}004+0{,}005+0{,}012=0{,}021=2{,}1\%.$$

Грубо приближенное значение кубатуры комнаты:

$$V=12{,}4\cdot 10{,}2\cdot 4{,}2\approx 500\ (м^3);$$

$$2{,}1\%\ \text{от}\ 500\ м^3=10{,}5\ (м^3);$$

$$\Delta V=11\ м^3.$$

Этот подсчет показывает, что объем может быть вычислен не точнее, чем с двумя значащими цифрами, что вполне согласуется с правилом подсчета цифр.

4. *Граница относительной погрешности частного равна сумме относительных погрешностей делимого и делителя:*

$$\delta\frac{a}{b} = \delta a + \delta b.$$

Пример. С какой относительной погрешностью может быть вычислен удельный вес железа, если кусок железа весом $P = 54{,}2$ *г* имеет объем $V = 7{,}1$ *см*^{3}?

$$d = \frac{P}{V}, \text{ где } d \text{ — удельный вес;}$$

$$\delta d = \frac{0{,}05}{54{,}2} + \frac{0{,}05}{7{,}1} = \frac{1}{1084} + \frac{1}{142} \approx 0{,}001 + 0{,}007 < 0{,}01 = 1\%.$$

Отв. С точностью до 1%.

§ 31. Вычисления при помощи таблиц

В целях рационализации вычислительной работы, экономии труда и времени вычислителя в инженерной практике широко пользуются всевозможного рода математическими таблицами и справочниками.

Дадим краткие пояснения, как пользоваться «Четырехзначными математическими таблицами» В. Брадиса, составленными для средних школ.

1. Таблица квадратов. Эта таблица помещена на стр. 9—11. В ней даны значения квадратов всех трехзначных чисел от 1,00 до 9,99 (через 0,01) с четырьмя точными значащими цифрами. Поясним на примерах, как пользоваться этой таблицей.

Пример 1. Вычислить $2{,}46^2$.

Первые две цифры числа (2,4) берем из столбца, помеченного сверху буквой N, третью цифру (6) берем из столбца, помеченного сверху крупной цифрой 6; на пересечении строки 2,4 и столбца 6 находим 6,052; следовательно,

$$2{,}46^2 \approx 6{,}052.$$

Заметим, что по той же таблице $24{,}6^2$; 246^2 и $0{,}246^2$ вычисляются так:

$$24{,}6^2 = (2{,}46 \cdot 10)^2 = 6{,}052 \cdot 10^2 = 605{,}2;$$

$$246^2 = (2{,}46 \cdot 10^2)^2 = 6{,}052 \cdot 10^4 = 60\,520;$$

$$0{,}246^2 = \left(\frac{2{,}46}{10}\right)^2 = \frac{6{,}052}{100} = 0{,}06052 \text{ и т. д.}$$

Если необходимо найти квадрат четырехзначного числа, то «поправку» на четвертую цифру берем из столбца, помеченного сверху соответствующей цифрой.

Пример 2. Найти $2{,}467^2$. Сначала находим по предыдущему квадрат числа 2,46; к результату прибавляем поправку на последнюю цифру 7 из столбца, помеченного мелкой цифрой 7 (справа от черной вертикали), помещенную на пересечении этого столбца со строкой 2,4. Эта поправка равна 34 (тысячных); следовательно,

$$2{,}467^2 \approx 6{,}052 + 0{,}034 = 6{,}086.$$

2. Таблица квадратных корней (стр. 12—16). Устроена по тому же принципу, что и таблица квадратов. В ней даны непосредственно квадратные корни из чисел от 1,00 до 99,9.

Примеры:

1) $\sqrt{1{,}65} \approx 1{,}285;$

2) $\sqrt{74{,}8} \approx 8{,}649;$

3) $\sqrt{548} = \sqrt{5{,}48 \cdot 100} \approx 2{,}341 \cdot 10 = 23{,}41;$

4) $\sqrt{0{,}0385} = \frac{\sqrt{3{,}85}}{10} \approx \frac{1{,}962}{10} = 0{,}1962.$

В случае четырехзначного числа пользуемся поправками на четвертую цифру:

$$\sqrt{17{,}38} \approx 4{,}159 + 0{,}010 = 4{,}169.$$

Аналогично устроены таблицы кубов и кубических корней, обратных величин, длины окружности, площади круга и др.

§ 32. Линейное интерполирование

Предположим, что надо вычислить $\sqrt{32{,}76}$. Непосредственно по таблице мы можем найти:

$$\sqrt{32{,}7} \approx 5{,}718; \qquad \sqrt{32{,}8} \approx 5{,}727.$$

Число 32,76 содержится между 32,7 и 32,8. Поэтому можно считать, что квадратный корень из него заключается между 5,718 и 5,727.

Разность между числами 32,7 и 32,8 равна 0,1.

Разность между квадратными корнями (из этих чисел) равна $5{,}727-5{,}718=0{,}009$. Это так называемая табличная разность.

Разность между числом 32,76 и ближайшим *меньшим табличным числом* (32,7) составляет 0,06. Допускаем, что малые изменения числа и квадратного корня из этого числа пропорциональны друг другу.

Тогда имеем: при изменении числа на 0,1 квадратный корень из него изменяется на 0,009, при изменении числа на 0,06 квадратный корень из него изменяется на x.

Составляем пропорцию:

$$x:0{,}009=0{,}06:0{,}1.$$

Отсюда

$$x=\frac{0{,}009\cdot 0{,}06}{0{,}1}=\frac{0{,}009\cdot 0{,}6}{1}=0{,}0054.$$

Поэтому $\sqrt{32{,}76}=5{,}718+0{,}0054\approx 5{,}723.$

Предыдущий подсчет принято коротко записывать так:

$$0{,}1\ \ldots\ldots\ 9\ (\text{тысячных});$$
$$0{,}06\ \ldots\ldots\ x;$$
$$x:9=0{,}06:0{,}1;\quad x=\frac{9\cdot 0{,}06}{0{,}1}=5{,}4\ (\text{тысячных});$$
$$\sqrt{32{,}76}=5{,}718+0{,}0054\approx 5{,}723.$$

В данном случае говорят, что была произведена линейная интерполяция, т. е. по двум табличным значениям функции (квадратного корня) было найдено промежуточное значение функции, не помещенное в таблицу.

Упражнения

1. Колхозники артели «Путь к коммунизму» (Киевская область) достигли в 1955 г. следующих результатов:

валовой сбор зерна (в центнерах)	51 831,
валовой сбор сахарной свеклы	105 573,
валовой сбор картофеля	30 410,
общий доход колхоза (в рублях)	6 319 038.

Округлите эти данные с точностью до 1000.

2. По статистическим данным в городе значится 368 754 чел., округлить это число: 1) до сотен, 2) до тысяч, 3) до десятков тысяч.
3. Число 2,7182818 округлить до 5, 4, 3 значащих цифр.

4. Расстояние от центра Земли до полюса в километрах равно 6356,909. Округлить это число до 2, 3, 4 значащих цифр.
5. Какая разница между записью температуры 18° и 18,0°?
6. Начертить аккуратно прямоугольник и измерить его стороны с точностью до 1 *мм*. Записать, пользуясь знаками неравенства, между какими числами заключается длина его сторон.
7. Приближенное значение величины x заключено между 6,85 *м* и 6,89 *м*. С какой точностью произведено измерение?
8. Дробь $5\frac{2}{7}$ обратить в десятичную с точностью до 0,001.
9. При взвешивании тела получился вес 18,7 *кг* с точностью до 0,1 *кг*. Указать границы точного значения веса.
10. Найти в процентах границу относительной погрешности числа 3,14.
11. Какое из двух измерений точнее:

$$1)\ 895\ м\ (\pm 0{,}5\ м);\quad 2)\ 24{,}08\ м\ (\pm 0{,}01)?$$

12. Какое из двух приближенных значений числа π точнее:

$$3{,}14 \text{ или } 3\frac{1}{7}?$$

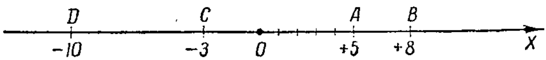
13. Написать число 18,754 без лишних цифр, зная, что относительная погрешность его равна $\frac{1}{2}\%$.
14. Найти сумму: $2\frac{3}{7}+\frac{1}{15}+4\frac{1}{3}$ с тремя точными десятичными знаками.
15. Расстояние между двумя городами по карте равно 24,6 *см* ($\pm$ 0,2 *см*). Найти действительное расстояние между городами, если масштаб карты 1 : 2 500 000; определить погрешность.
16. Кубатура классной комнаты 127,4 $м^3$. Сколько весит воздух, содержащийся в этой комнате, если вес 1 $м^3$ 1,29 *кг* ($\pm$ 0,01 *кг*)?
17. Сколько точных значащих цифр можно определить в произведении приближенных чисел $2{,}18 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}175$? Вычислить эти цифры.
18. Найти объем комнаты, если размеры ее $15{,}4 \times 12{,}6 \times 4{,}5$. Какова относительная погрешность произведения?
19. Для определения удельного веса тела было установлено, что вес его 117,8 *г*; при погружении в воду тело вытеснило 54,7 $см^3$. С какой точностью можно определить удельный вес тела?
20. С какой относительной погрешностью можно вычислить объем цилиндра, если радиус основания $r = 15{,}4$ *см*, $H = 28{,}2$ *см*?
21. С площади 32,4 *га* собрано 4580 *ц* ржи. По скольку центнеров в среднем собрано с 1 *га*?
22. Грубо приближенное значение радиуса цилиндра — 20 *см*, высоты — 30 *см*. С какой точностью надо выполнить измерение, чтобы относительная погрешность при вычислении объема не превышала 1%?

ГЛАВА III

НЕРАВЕНСТВА

§ 33. Предварительные замечания

Из курса алгебры VI класса известно, что числа могут быть изображены точками на числовой оси. Так, например, на чертеже 23 положительные числа $(+5)$ и $(+8)$ изображены точками A и B, отрицательные числа (-3) и (-10) изображены точками C и D.



Черт. 23.

Из двух положительных чисел *бо́льшим* считается то, абсолютная величина которого *больше*:

$(+8) > (+5)$, так как $|+8| > |+5|$, или просто $8 > 5$.

Из двух отрицательных чисел *бо́льшим* считается то, абсолютная величина которого *меньше*:

$$-3 > -10, \text{ так как } |-3| < |-10|, \text{ или } 3 < 10.$$

Заметим, что на числовой оси большее число всегда изображается точкой, расположенной *правее* точки, изображающей меньшее число; так, например, точка B расположена правее точки A, что иллюстрирует соотношение $8 > 5$; точка C правее точки D, что изображает соотношение $-3 > -10$.

Всякое положительное число больше нуля, всякое отрицательное число меньше нуля. Запись $a > 0$ говорит о том, что число a — положительное, запись $b < 0$ означает, что число b — отрицательное.

§ 34. Основные определения и свойства неравенств

Два числа или два алгебраических выражения, соединенных между собой знаком $>$ или знаком $<$, образуют неравенство.

Два неравенства вида $a>b$ и $c>d$ или вида $a<b$ и $c<d$ называются *неравенствами одинакового смысла.*

Два неравенства вида $a>b$ и $c<d$ называются *неравенствами противоположного смысла.*

Следующие свойства неравенств будем считать известными. Смысл каждого из них проиллюстрируем числовыми примерами.

1. Если: 1) $a>b$, то $b<a$; 2) $a<b$, то $b>a$.

Примеры.

1) $7>4$; $4<7$. 2) $-2<+5$; $5>-2$.

2. Если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.

Примеры.

1) $7>4$; $4>2$, откуда $7>2$.
2) $-4<-1$; $-1<3$, откуда $-4<3$.

3. Если $a>b$ и m — произвольное число, то:
1) $a+m>b+m$.
2) $a-m>b-m$.

Пример. $-5>-20$, прибавляя или отнимая от обеих частей этого неравенства по 4, получим:

$$-5+4>-20+4, \text{ т. е. } -1>-16;$$
$$-5-4>-20-4, \text{ т. е. } -9>-24.$$

Словами свойство 3 можно выразить так:

Если к обеим частям неравенства прибавим или из них вычтем одно и то же число, то смысл неравенства не меняется.

4. *Неравенства одинакового смысла можно почленно складывать, причем в результате получим неравенство того же смысла.* Если $a>b$; $c>d$, то $a+c>b+d$.

Пример. $3>-1$; $-10>-20$; складывая части этих неравенств почленно, получим

$$3+(-10)>-1+(-20)$$

или

$$-7 > -21.$$

П р и м е ч а н и е. Складывать почленно неравенства противоположного смысла, вообще говоря, нельзя, так как ничего определенного сказать нельзя о полученном результате.

5. *Два неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать, причем в результате получается неравенство того же смысла, что неравенство-уменьшаемое* (т. е. неравенство, из которого вычитаем).

П р и м е р ы.

1) $$\begin{array}{r} 15 > 9 \\ - \quad -3 < 2 \\ \hline 15-(-3) > 9-2, \text{ или } 18 > 7. \end{array}$$

2) $$\begin{array}{r} -10 < 8 \\ - \quad 7 > 5 \\ \hline -10-7 < 8-5, \text{ или } -17 < 3. \end{array}$$

Вычитать два неравенства одинакового смысла нельзя, так как смысл результата неизвестен; в некоторых случаях может в результате получиться неравенство того же смысла, в других — противоположного смысла, а иногда может получиться даже равенство.

Следующие примеры поясняют сказанное:

1) $$\begin{array}{r} 14 > 3 \\ - \quad 2 > -1 \\ \hline 12 > 4 \end{array}$$ 2) $$\begin{array}{r} 7 > -2 \\ - \quad 2 > -15 \\ \hline 5 < 13 \end{array}$$ 3) $$\begin{array}{r} 7 < +10 \\ - \quad -4 < -1 \\ \hline 11 = 11. \end{array}$$

6. *Обе части неравенства можно умножить или разделить на положительное число; в результате получается неравенство того же смысла.*

Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$ и $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

П р и м е р.

$$-4 > 20; \quad -4 \cdot 3 > -20 \cdot 3 \text{ или } -12 > -60.$$

7. *При умножении или делении обеих частей неравенства на отрицательное число смысл неравенства меняется на противоположный.*

Если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$ и $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Примеры.

1) $12 < 15$; умножая на (-2) обе части, получим: $-24 > -30$.

2) $-12 > -16$; если разделим обе части на -4, то получим: $3 < 4$; и в том и в другом случаях смысл неравенства изменился на противоположный.

8. *Два неравенства с положительными членами и одинакового смысла можно перемножить почленно; в результате получим неравенство того же смысла: если* $a > b$ $(b > 0)$ *и* $c > d$ $(d > 0)$, *то* $ac > bd$.

Пример.

$$\begin{array}{r} 9 > 4 \\ 5 > 3 \\ \hline 45 > 12. \end{array}$$

На неравенства, члены которых отрицательны, это свойство не распространяется, например:

$$\begin{array}{r} -4 > -5 \\ -2 > -3 \\ \hline 8 < 15. \end{array}$$

9. *Два неравенства с положительными членами и противоположного смысла можно делить почленно, причем в результате получается неравенство, имеющее тот же смысл, что и неравенство-делимое: если* $a > b$ $(b > 0)$ *и* $c < d$ $(c > 0)$, *то* $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

Пример.

$$\begin{array}{r} 8 > 6 \\ 2 < 3 \\ \hline 4 > 2. \end{array}$$

§ 35. Решение неравенства первой степени с одним неизвестным

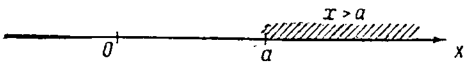
Неравенства могут содержать неизвестное, например $2x - 3 > 0$. Относительно таких неравенств может быть поставлен вопрос об отыскании *всех значений неизвестного, удовлетворяющих данному неравенству. Эти значения* *неизвестного называются решениями неравенства.* Так, например, решением неравенства $2x-3>0$ является всякое число, большее $\frac{3}{2}$, т. е. $x>\frac{3}{2}$; например при $x=2$ имеем $2\cdot 2-3>0$; $1>0$; таких решений бесконечное множество. Легко проверить, что при любом значении x, меньшем или равном $\frac{3}{2}$, данное неравенство несправедливо; например при $x=1$ левая часть окажется *не больше*, а меньше нуля: $2\cdot 1-3<0$.

Определение. *Решить неравенство — это значит найти множество всех значений неизвестного, удовлетворяющих данному неравенству.*

Решение всякого неравенства первой степени с одним неизвестным приводит к простейшим неравенствам вида

1) $x>a$;
2) $x<b$.

В первом случае говорят, что число a есть *нижняя граница* значений неизвестного (x), подразумевая под этим тот

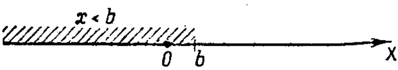


Черт. 24.

факт, что данному неравенству удовлетворяет любое число, лишь бы оно было больше, чем число a; таких чисел бесконечное множество. На числовой оси им соответствуют точки, расположенные правее точки, изображающей число a; на чертеже 24 точки заштрихованной части оси изображают множество всех решений неравенства

$$x>a.$$

Если имеем простейшее неравенство вида $x<b$, то число b называется *верхней границей* неизвестного, что надо понимать так: любое число, меньшее, чем число b, есть решение этого неравенства. Геометрическое истолкование неравенства $x<b$ весьма простое: любая точка числовой оси, расположенная левее точки b, изображает число, которое удовлетворяет данному неравенству (черт. 25).



Черт. 25.

Приемы решения неравенства первой степени с одним неизвестным напоминают приемы решения уравнения первой степени. Поясним их на примерах:

Пример 1. Решить неравенство:

$$\frac{2x+1}{3}-1>\frac{x+1}{2}.$$

Умножая обе части неравенства на положительное число 6 (освобождаемся от дробей), получим:

$$2(2x+1)-6>3(x+1).$$

После раскрытия скобок имеем:

$$4x+2-6>3x+3 \quad \text{или} \quad 4x-4>3x+3;$$

переносим член с неизвестным из правой части в левую, а свободный член — из левой части в правую, изменяя у переносимых членов знак на противоположный:

$$4x-3x>+3+4;$$

$$x>7.$$

Пример 2.

$$\frac{2x}{5}+4>x-\frac{1}{2};$$

$$2\cdot 2x+4\cdot 10>10x-5;$$

$$4x+40>10x-5;$$

$$4x-10x>-5-40;$$

$$-6x>-45.$$

Делим обе части неравенства на (—6), в результате чего смысл неравенства меняется на противоположный:

$$x<\frac{45}{6}=\frac{15}{2}, \quad x<7,5.$$

Число 7,5 — верхняя граница неизвестного.

Упражнения

1. Решить неравенства:

1) $x+3>7$.
2) $10-x<4$.
3) $2x-5>3$.
4) $3<5-2x$.
5) $2x-3>x-5$.
6) $x-12>3x+1$.
7) $\frac{x-3}{5}+2>\frac{x-1}{10}$.
8) $5(x-2)<2(x+7)$.
9) $x-3+\frac{x}{4}>\frac{x-5}{3}$.

2. При каких значениях x дробь $\frac{2x-1}{3}$ положительна?

3. При каких значениях y дробь $\frac{3-5y}{2}$ отрицательна?

4. При каких значениях x дробь $\frac{2-3x}{5}$ больше дроби $\frac{4x-1}{3}$?

5. Доказать, что при положительных значениях a и b сумма

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2.$$

Когда будет иметь место равенство?

ГЛАВА IV

СТЕПЕНИ И КОРНИ

§ 36. Возведение в степень

1. Определение степени. Из предыдущего курса алгебры известно, что *произведение нескольких одинаковых множителей называется степенью*, например:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81;$$

$$(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = (-5)^3 = -125;$$

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{\text{всего } m \text{ раз}} = a^m$$

Повторяющийся множитель называется основанием степени; число, показывающее, сколько раз берется основание в качестве множителя, называется показателем степени, результат умножения — степенью.

Определение. *Возвести число a в степень m значит повторить его множителем m раз* (m — целое положительное число).

2. Правило знаков. Если отрицательное число возводится в четную степень, то в результате всегда получается положительное число, например:

$$(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16;$$

$$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 9 \cdot 9 = 81;$$

$(-1)^{2n} = 1$ ($2n$ — общая запись четного числа).

При возведении отрицательного числа в нечетную степень в результате получим число отрицательное:

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 4 \cdot (-2) = -8;$$

$$(-b)^5 = -b^5 \quad (b > 0);$$

$(-1)^{2n+1}=-1$ ($2n+1$ — общая запись нечетного числа). Итак, *четная степень отрицательного числа есть положительное число, нечетная степень отрицательного числа — отрицательное.*

3. Умножение и деление степеней. *При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степени складываются,* например:

$$2^3\cdot 2^2=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^{3+2}=2^5;$$

$$c^3\cdot c^4=c\cdot c\cdot c\cdot c\cdot c\cdot c\cdot c=c^7;$$

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}.$$

При делении степеней с одинаковыми основаниями показатели степени вычитаются, например:

$$2^5:2^2=\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{2\cdot 2}=2^3;$$

$$x^8:x^3=\frac{x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x}{x\cdot x\cdot x}=x^5;$$

$$a^m:a^n=a^{m-n}.$$

4. Возведение в степень произведения, дроби, степени, одночлена. а) *Чтобы возвести в степень произведение, можно возвести в эту степень каждый сомножитель и полученные результаты перемножить:*

$$(3\cdot 2)^3=3^3\cdot 2^3=27\cdot 8=216;$$

$$(xyz)^4=xyz\cdot xyz\cdot xyz\cdot xyz;$$

меняя порядок сомножителей, получим:

$$(xyz)^4=x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y\cdot y\cdot y\cdot z\cdot z\cdot z\cdot z=x^4y^4z^4.$$

Вообще $(abc)^m=a^mb^mc^m$.

б) *Чтобы возвести в степень дробь, можно возвести в эту степень отдельно числитель и знаменатель и первый результат разделить на второй:*

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{3^3}{4^3}=\frac{27}{64};$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{3^4}{2^4}=\frac{81}{16};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b}=\frac{a\cdot a\cdot a\ldots a}{b\cdot b\cdot b\ldots b}=\frac{a^m}{b^m}.$$

Отметим, что правильная дробь от возведения в целую положительную степень уменьшается, неправильная — увеличивается.

в) *При возведении степени в степень показатели степеней перемножаются:*

$$(2^3)^2 = (2\cdot2\cdot2)^2 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^{3\cdot2} = 2^6 = 64;$$
$$(x^2)^4 = x^{2\cdot4} = x^8;$$
$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

г) На предыдущих трех правилах основано возведение в степень более сложных одночленных выражений:

$$\left(\frac{3}{4}x^2y\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot(x^2)^3\cdot y^3 = \frac{27}{64}x^6y^3;$$
$$\left(-\frac{1}{2}a^3b^2\right)^5 = \left(-\frac{1}{2}\right)^5\cdot(a^3)^5(b^2)^5 = -\frac{1}{32}a^{15}b^{10};$$
$$\left(\frac{4a^2b^3}{3c^4}\right)^3 = \frac{(4a^2b^3)^3}{(3c^4)^3} = \frac{64a^6b^9}{27c^{12}}.$$

Чтобы возвести в степень одночлен, надо возвести в эту степень коэффициент, а показатели букв умножить на показатель степени, в которую возводится данный одночлен.

§ 37. Погрешность при возведении приближенного числа в степень

Задача. С какой точностью может быть вычислена площадь квадрата со стороной

$$x = 12{,}5\ \textit{см}\ (\pm 0{,}05\ \textit{см}).$$

Площадь $S = x^2$; $S = 12{,}5^2$ ($\textit{см}^2$).

Так как возведение в квадрат есть частный случай умножения двух равных сомножителей, то из правила подсчета точных цифр следует, что площадь может быть вычислена не более чем с тремя точными значащими цифрами:

$$12{,}5^2 = 156{,}25;\quad S \approx 156\ (\textit{см}^2).$$

Относительная погрешность произведения равна сумме относительных погрешностей сомножителей; в случае двух равных сомножителей, т. е. для квадрата приближенного числа, получим, что

$$\delta a^2 = 2\delta a.$$

В нашем случае имеем:

$$\frac{2\cdot 0{,}05}{12{,}5}=\frac{1}{125}=0{,}8\%.$$

Подобным образом найдем, что относительная погрешность куба приближенного числа равна утроенной относительной погрешности основания

$$\delta a^3=\frac{3\Delta a}{a}=3\delta a.$$

Вообще

$$\delta a^n=n\delta a.$$

§ 38. Понятие о корне

1. Определение корня. Действие, обратное возведению в степень, называется извлечением корня; с помощью этого действия по степени и показателю степени ищется основание степени.

Определение. *Корнем n-й степени из числа a называется такое число x, n-я степень которого равна a.* Записывается корень n-й степени из числа a так: $\sqrt[n]{a}$, где цифра над знаком радикала — показатель корня; в случае квадратного корня показатель корня не пишется. Например,

$$\sqrt[3]{64}=4, \text{ так как } 4^3=64; \qquad \sqrt[5]{32}=2, \text{ так как } 2^5=32;$$

$$\sqrt[2]{81}=\sqrt{81}=\pm 9.$$

Если $x=\sqrt[n]{a}$, то, по определению, $x^n=a$ или $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$.

Последнее равенство утверждает взаимную обратность действий извлечения корня и возведения в степень: эти два действия, будучи последовательно произведены над данным числом, дают в результате само число. Подобным образом равенство $\frac{a}{p}\cdot p=a\,(p\neq 0)$ выражает взаимную обратность действий умножения и деления.

2. Правило знаков. а) *Корень четной степени из положительного числа имеет два значения, одинаковых по абсолютной величине, но противоположных по знаку*:

$$\sqrt{25}=\pm 5, \text{ так как } (\pm 5)^2=25.$$

$$\sqrt[6]{64}=\pm 2, \text{ так как } (\pm 2)^6=64.$$

б) *Корень нечетной степени имеет тот же знак, что и подкоренное число,* например:

$$\sqrt[3]{8}=2;\quad \sqrt[3]{-8}=-2,\ \text{так как}\ (-2)^3=-8;$$

$$\sqrt[5]{-243}=-3,\ \text{так как}\ (-3)^5=-243.$$

в) Корень четной степени из отрицательного числа не может быть ни положительным, ни отрицательным числом, например: $\sqrt{-4}$ не может равняться ни $+2$, ни -2, так как от возведения $+2$ или -2 в квадрат нельзя получить числа -4.

3. Арифметический корень. Ввиду двойственности результата при извлечении корня четной степени из положительного числа наложим следующее ограничение: из двух значений корня будем принимать во внимание только положительное значение, например: вместо записи $\sqrt{16}=\pm 4$ в дальнейшем будем писать: $\sqrt{16}=4$. Это значение корня называется арифметическим.

Определение. *Положительное значение корня из положительного числа называется арифметическим корнем* *). Иногда допускают ошибку, записывая $\sqrt{a^2}=a$; на самом деле

$$\sqrt{a^2}=\begin{cases} a, & \text{если}\ a>0,\\ -a, & \text{если}\ a<0.\end{cases}$$

Корни нечетной степени из отрицательных чисел могут быть выражены через соответствующие им арифметические корни, например:

$$\sqrt[3]{-125}=-\sqrt[3]{125}=-5.$$

Вообще

$$\sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}\quad (a>0).$$

В дальнейших параграфах речь будет итти только об арифметических корнях.

---

*) Арифметическое значение корня из нуля равно нулю.

§ 39. Извлечение корня из произведения, частного и степени

1. *Чтобы извлечь корень из произведения нескольких сомножителей, можно извлечь корень той же степени из каждого сомножителя и полученные результаты перемножить*

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}. \qquad (1)$$

Справедливость равенства (1) может быть проверена возведением обеих частей в n-ю степень:

$$(\sqrt[n]{abc})^n=abc \text{ (по определению корня)},$$

$$(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n\cdot(\sqrt[n]{c})^n=abc.$$

Мы получим одно и то же выражение; следовательно, равенство (1) справедливо *).

Примеры.

1) $\sqrt{400}=\sqrt{4\cdot 100}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{100}=2\cdot 10=20;$

2) $\sqrt[3]{64\,000}=\sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[3]{1000}=4\cdot 10=40.$

Если читать равенство (1) в обратном направлении, т. е. справа налево, то получим правило умножения корней:

чтобы перемножить несколько корней одной и той же степени, можно перемножить их подкоренные выражения и извлечь корень той же степени из произведения, например:

$$\sqrt{4}\cdot\sqrt{25}=\sqrt{100}=10.$$

2. *Чтобы извлечь корень n-й степени из дроби, можно извлечь корень той же степени из числителя и знаменателя в отдельности и первый результат разделить на второй:*

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \qquad (2)$$

---

*) Так как из равенства $A^n=B^n$, где A и B неотрицательные числа, следует, что $A=B$.

Справедливость равенства (2) проверяется тем же приемом, что и равенства (1):

$$\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n=\frac{a}{b};\quad \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\frac{a}{b}.$$

Примеры.

1) $\sqrt{\frac{36}{49}}=\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}}=\frac{6}{7}$;

2) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{3}{5}$.

При чтении тождества (2) в обратном направлении получим правило деления корней:

чтобы разделить два корня одной и той же степени (с одинаковыми показателями), *можно разделить их подкоренные выражения и извлечь корень той же степени из полученной дроби,* например:

$$\sqrt[3]{216}:\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{\frac{216}{27}}=\sqrt[3]{8}=2.$$

3. *Чтобы извлечь корень из степени, можно показатель степени подкоренного числа разделить на показатель корня:*

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}\ (m \text{ кратно } n). \qquad (3)$$

Если возведем обе части равенства (3) в n-ю степень, то получим одно и то же выражение:

$$(\sqrt[n]{a^m})^n=a^m;\ \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^{\frac{m}{n}\cdot n}=a^m.$$

Примеры.

1) $\sqrt{a^6}=a^{\frac{6}{2}}=a^3$;

2) $\sqrt[3]{x^{12}}=x^{\frac{12}{3}}=x^4$;

3) $\sqrt[5]{2^{10}}=2^{\frac{10}{5}}=2^2=4$.

§ 40. Понятие об иррациональном числе

Положительные и отрицательные числа, как целые, так и дробные, и число 0 образуют *множество рациональных чисел.*

Однако одними рациональными числами обойтись в математике нельзя и приходится рассматривать новые числа.

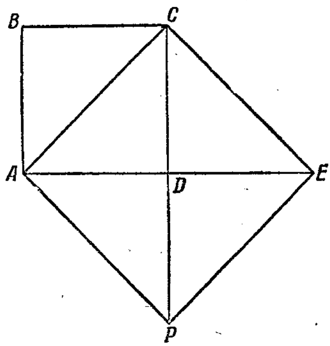
Одним из поводов к такому расширению множества рациональных чисел служила задача измерения отрезков. Обратимся к следующему примеру.

Пусть требуется найти длину стороны квадрата, если площадь его равна 2 (квадратным единицам). Если x — искомая длина, то должно иметь место равенство $x^2=2$. Однако найти такое число x в множестве рациональных чисел *невозможно*: нет такого *целого* числа, квадрат которого был бы равен 2.

Покажем, что нет такого и *дробного* числа $\frac{p}{q}$, чтобы $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$.

В самом деле, дробь $\frac{p}{q}$ можно считать несократимой (в противном случае можно ее сократить), но квадрат несократимой дроби есть также несократимая дробь, а такая дробь не может равняться целому числу 2.

Таким образом, выразить *числом* длину стороны такого квадрата мы пока не умеем, но легко можем построить ее геометрически.



Черт. 26.

Пусть $ABCD$ — квадрат со стороной, равной 1 (черт. 26). Площадь его, как известно, также будет выражаться числом 1.

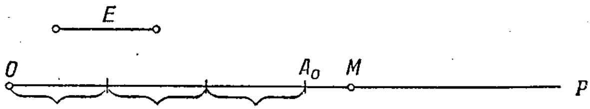
Если на диагонали AC, как на стороне, построим новый квадрат $ACEP$, то площадь его будет в два раза больше площади первоначального квадрата, т. е. будет выражаться числом 2. Это следует из того, что новый квадрат составлен из четырех равных между собою равнобедренных прямоугольных треугольников, а первоначальный квадрат — из двух таких треугольников.

Таким образом, мы пришли к выводу, что длина стороны квадрата, имеющего площадь, равную 2, не выражается никаким *рациональным* числом.

Чтобы иметь возможность сопоставить всякому отрезку некоторое число, выражающее его длину, или всякой точке числовой оси — определенное число — абсциссу этой точки, понадобилось ввести новые числа, так называемые иррациональные числа.

§ 41. Десятичное измерение отрезков

Пусть требуется измерить отрезок OM, лежащий на прямой OP (черт. 27). Примем некоторый другой отрезок E за единицу измерения и будем откладывать его на отрезке OM.



Черт. 27.

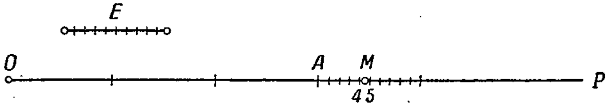
При этом возможны два случая.

1) Отрезок E отложится на отрезке OM целое число раз, например три раза. Тогда длина отрезка OM выразится целым числом 3.

2) Единичный отрезок E отложится несколько раз, и получится остаток, меньший E.

На чертеже 27 показано, что единичный отрезок укладывается 3 раза, остаток равен A_0M. В данном случае говорят, что длина отрезка OM с точностью до 1 равна либо 3 (по недостатку), либо 4 (по избытку).

Для достижения большей точности измерения разделим E на десять равных частей и будем откладывать $\frac{1}{10}E$ на остатке A_0M. Если при этом $\frac{1}{10}E$ уложится целое число раз без остатка, например 6 раз, то длина отрезка OM выразится числом 3,6. Если же $\frac{1}{10}E$ уложится несколько раз, например 4 раза, и при этом снова получится остаток A_1M, меньший $\frac{1}{10}E$, то длина отрезка OM с точностью до 0,1 равна либо 3,4 (с недостатком), либо 3,5 (с избытком), что изображено на чертеже 28.



Черт. 28.

Мы можем, далее, единичный отрезок разделить на 100 равных частей и откладывать последовательно $\frac{1}{100}E$ на последнем остатке A_1M и т. д.

Описанный нами процесс измерения отрезка либо закончится, и тогда результат измерения выразится *конечной десятичной дробью*, либо продолжится неограниченно, и тогда результат измерения выразится *бесконечной десятичной дробью*.

Эта дробь может оказаться периодической, и тогда она может быть обращена в обыкновенную дробь. В этом случае длина отрезка выразится рациональным числом. Так, например, отрезок длиною $\frac{1}{3}$ при десятичном измерении выразится бесконечной периодической дробью 0,333...

Но бесконечная дробь, получающаяся при десятичном измерении отрезков, может оказаться и непериодической.

В этом случае такая дробь представляет собою новое число, называемое *иррациональным*.

Примером иррационального числа может служить число $\sqrt{2}$, выражающее длину стороны квадрата, площадь которого равна 2.

Иррациональными числами будут также $\sqrt[8]{7}$, $\sqrt[5]{3}$ и вообще корни любой степени из числа, не представляющего точную степень целого числа.

Иррациональные числа могут быть не только положительными, но и отрицательными: $-\sqrt[8]{7}$, $-\sqrt[5]{3}$ — тоже иррациональные числа.

Рациональные и иррациональные числа вместе образуют множество чисел, называемых *действительными*. Таким образом, всякое данное действительное число может быть либо рациональным, либо иррациональным.

Над действительными числами можно производить все арифметические действия, кроме деления на 0.

Примечание 1. Иррациональные числа не исчерпываются одними корнями из рациональных чисел, какой бы степени эти корни ни были. Существует множество иррациональных чисел, которые не могут быть получены с помощью конечного числа алгебраических действий (сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня) над рациональными числами. Примером такого числа может служить число π, представляющее отношение длины окружности к своему диаметру. Поэтому лучше придерживаться общего определения иррационального числа как *бесконечной непериодической десятичной дроби.* Строить такие дроби можно совершенно произвольно, например:

$$0{,}12\ 102\ 1002\ 10002\ldots;$$
$$2{,}412\ 4112\ 41112\ldots$$

Примечание 2. При практическом выполнении десятичного измерения отрезков в результате всегда получится конечная десятичная дробь: рано или поздно мы дойдем до такой малой десятичной доли единичного отрезка, которая нам будет казаться отложенной целое число раз на последнем остатке, ибо наш глаз и измерительные инструменты не будут в состоянии обнаружить имеющееся расхождение.

§ 42. Извлечение квадратного корня из целых и дробных чисел с заданной точностью

Пусть требуется вычислить квадратный корень из 2 с точностью до 0,001. Это значит, что *надо найти две десятичные дроби*, разнящиеся между собой на 0,001, между квадратами которых должно заключаться число 2, т. е. такие две дроби, что квадрат меньшей дроби должен быть меньше 2, а квадрат большей дроби должен быть больше 2.

При возведении десятичных дробей в квадрат число десятичных знаков *удваивается*, например:

$$(0{,}12)^2 = 0{,}0144;\ (0{,}003)^2 = 0{,}000009.$$

Отсюда заключаем, что тысячные доли в квадратном корне (три десятичных знака) можно получить лишь при том условии, если подкоренное число будет выражено в *миллионных* долях (шесть десятичных знаков). Поэтому на место недостающих шести десятичных знаков напишем шесть нулей и применим обычный прием извлечения квадратного корня; получим:

$$\sqrt{2}=\sqrt{2{,}00'00'00}=1{,}414$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
\hline
\times\begin{matrix}24\\4\end{matrix} & \begin{matrix}10'0\\9\,6\end{matrix} \\
\hline
\times\begin{matrix}281\\1\end{matrix} & \begin{matrix}40'0\\28\,1\end{matrix} \\
\hline
\times\begin{matrix}2824\\4\end{matrix} & \begin{matrix}11\,90'0\\11\,296\end{matrix} \\
\cline{2-2}
 & \quad 604 \text{ (остаток)}
\end{array}$$

дробь 1,414 есть *приближенное значение* $\sqrt{2}$ по недостатку с точностью до 0,001, число 1,415 есть приближенное значение $\sqrt{2}$ по избытку с точностью до 0,001.

Действительно,

$$(1{,}414)^2=1{,}999396;$$
$$(1{,}415)^2=2{,}002225.$$

Подобным образом можно найти приближенное значение $\sqrt{2}$ с точностью до 0,0001; до 0,00001 и т. д.

Получим:

$\sqrt{2}\approx 1{,}4142$ (по недостатку) или 1,4143 (по избытку).

Пример 1. Вычислить $\sqrt{20{,}7}$ с точностью до 0,01.

Имеем:

$$\sqrt{20{,}7}=\sqrt{20{,}70'00}\approx 4{,}55 \text{ (по избытку)}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 16 \\
\hline
\times\begin{matrix}85\\5\end{matrix} & \begin{matrix}47'0\\42\,5\end{matrix} \\
\hline
\begin{matrix}905\\5\end{matrix} & \begin{matrix}4500\\4525\end{matrix}
\end{array}$$

Пример 2. Вычислить $\sqrt{0{,}00002957}$ с точностью до 0,001.

В подкоренном числе ограничиваемся шестью десятичными знаками, округляя его,

$$\sqrt{0{,}00'00'30}\approx 0{,}005 \text{ (по недостатку).}$$

§ 43. Действия над действительными числами

Покажем на примерах, как производятся сложение и умножение действительных чисел.

Пример 1. Найти сумму $\sqrt{2}+\frac{1}{3}$.

Имеем:

$$\sqrt{2}=1{,}414\ldots$$

$$\frac{1}{3}=0{,}333\ldots$$

Будем складывать последовательно приближенные значения данных чисел, взятые по недостатку, с точностью до 1, с точностью до 0,1, с точностью до 0,01 и т. д. Получим:

$$\sqrt{2}+\frac{1}{3}\approx 1+0=1;$$

$$\sqrt{2}+\frac{1}{3}\approx 1{,}4+0{,}3=1{,}7;$$

$$\sqrt{2}+\frac{1}{3}\approx 1{,}41+0{,}33=1{,}74;$$

$$\sqrt{2}+\frac{1}{3}\approx 1{,}414+0{,}333=1{,}747$$

и т. д.

Таким образом постепенно определяются десятичные знаки дроби 1,747..., представляющей сумму действительных чисел $\sqrt{2}$ и $\frac{1}{3}$.

Пример 2. Найти произведение чисел $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$.

Имеем:

$$\sqrt{2}=1{,}414\ldots$$

$$\sqrt{5}=2{,}236\ldots$$

Будем последовательно умножать приближенные значения первого сомножителя ($\sqrt{2}$) на приближенные значения другого ($\sqrt{5}$), причем оба приближения берем по недостатку и с одинаковым числом десятичных знаков.

Получим:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\approx 1\cdot 2=2;$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\approx 1{,}4\cdot 2{,}2=3{,}08;$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\approx 1{,}41\cdot 2{,}23\approx 3{,}144;$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\approx 1{,}414\cdot 2{,}236\approx 3{,}1615$$

и т. д.

В процессе умножения постепенно определяются десятичные знаки дроби 3,16..., представляющей произведение чисел $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$.

Подобным образом производятся другие арифметические действия над действительными числами.

§ 44. Оценка погрешности при извлечении квадратного корня

Пример 1. С какой точностью может быть вычислен $\sqrt{8{,}34}$, если все значащие цифры приближенного подкоренного числа являются точными? Истинное значение подкоренного числа заключается между 8,335 и 8,345.

Поэтому $\sqrt{8{,}335}<\sqrt{8{,}34}<\sqrt{8{,}345}$. По таблице квадратных корней находим: $2{,}887<\sqrt{8{,}34}<2{,}889$.

Мы нашли границы приближенного значения $\sqrt{8{,}34}$; эти границы расходятся на четвертой значащей цифре; следовательно, первые три цифры 2,88 можно считать точными. Итак, $\sqrt{8{,}34}\approx 2{,}88$.

Этот пример показывает, что квадратный корень из приближенного числа имеет столько же точных цифр, сколько их имеется в подкоренном числе.

Решим вопрос в общем виде. Пусть a — приближенное значение величины x, α — абсолютная погрешность числа a, тогда $x=a+\alpha$; если вместо точного числа $\sqrt{x}$ берется приближенное $\sqrt{a}$, то допускаемая при этом погрешность равна разности $\sqrt{x}-\sqrt{a}$. Преобразуем эту разность, умножив и разделив ее на $\sqrt{x}+\sqrt{a}$; получим:

$$\sqrt{x}-\sqrt{a}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=$$

$$=\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\approx\frac{a}{2\sqrt{a}}. \tag{4}$$

Так как x и a отличаются на малую величину друг от друга, то и значения квадратных корней из них близки друг другу; поэтому можно считать $\sqrt{x}\approx\sqrt{a}$, в результате чего и получается формула (4).

Если в этой формуле заменим a на Δa, то получим: $\Delta(\sqrt{a})=\frac{\Delta a}{2\sqrt{a}}$. Эта формула дает границу абсолютной погрешности квадратного корня. Практичнее вычислить границу относительной погрешности квадратного корня, а потом по ней находить границу абсолютной погрешности:

$$\delta\sqrt{a}=\frac{\Delta a}{2\sqrt{a}}:\sqrt{a}=\frac{\Delta a}{2a}=\frac{1}{2}\frac{\Delta a}{a}=\frac{1}{2}\delta a.$$

Итак,

$$\delta\sqrt{a}=\frac{1}{2}\delta a.$$

Граница относительной погрешности квадратного корня равна половине границы относительной погрешности подкоренного числа.

Пример 2. Найти относительную погрешность $\sqrt{3,28}$; $x=\sqrt{3,28}\approx1,811$.

$$\delta x=\frac{1}{2}\cdot\frac{0,005}{3,28}=\frac{1}{1312}\approx0,00077<0,0008.$$

Поэтому $\Delta x=1,81\cdot0,0008=0,005$. Следовательно, цифру тысячных долей в квадратном корне нельзя считать точной, так как абсолютная погрешность больше 0,001. Поэтому надо писать:

$$\sqrt{3,28}\approx1,81.$$

Наш вывод подтверждает правильность правила подсчета точных цифр при извлечении квадратного корня; при извлечении квадратного корня из приближенного числа в результате можно получить столько же точных цифр, сколько их имеется в подкоренном числе.

Это же правило распространяется на извлечение кубического корня, причем

$$\delta\sqrt[3]{a}=\frac{\Delta a}{3a}=\frac{1}{3}\delta a.$$

Пример 3. Катеты прямоугольного треугольника $a=12{,}5$ *см* и $b=18{,}4$ *см*; вычислить гипотенузу c. Как известно из геометрии, гипотенуза прямоугольного треугольника вычисляется по формуле $c=\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\begin{aligned} a^2 &= 12{,}5^2 \approx 156{,}3;\\ b^2 &= 18{,}4^2 \approx 338{,}6;\\ a^2+b^2 &\approx 494{,}9;\\ \sqrt{494{,}9} &\approx 22{,}3. \end{aligned}$$

Данные имели три точные значащие цифры, поэтому в окончательном результате удержаны три цифры; промежуточные вычисления велись с одной запасной цифрой.

Пример 4. Вычислить $x=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ с относительной погрешностью, не превышающей $0{,}5\%$.

Решение. Найдем сперва грубо приближенное значение искомой величины x:

$$\sqrt{2}\approx 1{,}4,\quad \sqrt{3}\approx 1{,}7,$$

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\approx\sqrt{3{,}7}\approx 2,$$

$$\frac{1{,}4+1{,}7}{2}\approx 1{,}5.$$

Найдем $0{,}5\%$ от 1,5.

$$0{,}015:2=0{,}0075.$$

Таким образом, абсолютная погрешность может доходить до 0,0075, что делает цифру тысячных ненадежной в окончательном результате. Вычисления будем вести на три десятичных знака или с четырьмя точными значащими цифрами.

$$\begin{array}{ll} \sqrt{2}\approx 1{,}414 & 2+\sqrt{3}\approx 3{,}732 \\ \sqrt{3}\approx 1{,}732 & \sqrt{3{,}732}\approx 1{,}932 \\ \hline \sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 3{,}146; & \dfrac{3{,}146}{1{,}932}\approx 1{,}628\approx 1{,}63. \end{array}$$

§ 45. Основное свойство арифметического корня

Величина корня не изменится, если показатель корня и показатель степени подкоренного числа умножить на одно и то же число:

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[np]{a^p}. \qquad (5)$$

Для доказательства справедливости равенства (5) возведем обе части в степень с показателем «np», получим:

$$\text{левая часть } (\sqrt[n]{a})^{np}=[(\sqrt[n]{a})^n]^p=a^p;$$

$$\text{правая часть } (\sqrt[np]{a^p})^{np}=a^p;$$

получились одинаковые выражения; следовательно, исходное равенство (5) справедливо.

Примеры.

1) $\sqrt{2}=\sqrt[4]{2^2}=\sqrt[8]{2^4}$;

2) $\sqrt[3]{a}=\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[9]{a^3}$;

3) $\sqrt{2ab}=\sqrt[6]{(2ab)^3}=\sqrt[6]{8a^3b^3}$.

Аналогично доказывается, что *величина корня не изменится, если показатель корня и показатель подкоренного числа разделить на их общий множитель.*

Пример.

$$\sqrt[12]{a^4}=\sqrt[3]{a}; \quad \sqrt[6]{27x^3}=\sqrt[6]{3^3x^3}=\sqrt{3x}.$$

§ 46. Рациональные и иррациональные выражения (радикалы)

Алгебраическое выражение называется *рациональным* относительно входящих в него букв, если над числами, обозначенными этими буквами, производятся лишь арифметические действия (сложение, вычитание, умножение и деление).

Например: 1) $2a(b+c)^2$; 2) $\frac{a-b}{(a+b)\cdot c}$; 3) ax^2+bx+c суть рациональные выражения относительно букв a, b, c и x.

Алгебраическое выражение называется *иррациональным* относительно входящих в него букв, если оно содержит эти буквы под знаком корня.

Например: 1) $\sqrt{\frac{a+b}{c-d}}$, 2) $\sqrt[3]{\frac{a^2+2c^2}{a^2+b^2}}$.

Алгебраическое выражение может быть рациональным относительно какой-либо буквы или совокупности букв и в то же время быть иррациональным относительно других букв, например: $3ab-2\sqrt{cd}$ рационально относительно букв a и b, но иррационально относительно букв c и d.

Термины «иррациональное число» и «иррациональное выражение» означают не одно и то же; разницу между этими двумя понятиями поясним на следующих примерах:

1) $\sqrt{a+b}$ есть иррациональное выражение; но при некоторых значениях букв a и b его значение может оказаться иррациональным числом, при других, — например при $a=5$, $b=11$, — рациональным числом.

2) $\sqrt[3]{7}$ есть иррациональное выражение и в то же время иррациональное число.

3) $\sqrt[5]{32}$ — иррациональное выражение, но рациональное число.

§ 47. Преобразования радикалов

1. Вынесение множителя за знак радикала. Если подкоренное выражение разлагается на такие множители, что некоторые из них представляют точную степень, показатель которой равен показателю корня, то можно из этих множителей извлечь корни и результат написать множителем перед знаком радикала. Такое преобразование называется *вынесением множителя за знак радикала.*

Примеры.

1) $\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot 2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=5\sqrt{2}$;

2) $\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{27\cdot 3}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}$;

3) $\sqrt{x^3y^4z}=\sqrt{x^2y^4xz}=\sqrt{x^2}\sqrt{y^4}\sqrt{xz}=xy^2\sqrt{xz}$;

4) $\sqrt[3]{\frac{54a^4b^5}{7c^8}}=\sqrt[3]{\frac{27a^3b^3\cdot 2ab^2}{c^6\cdot 7c^2}}=\frac{3ab}{c^2}\sqrt[3]{\frac{2ab^2}{7c^2}}$;

5) $\sqrt{\frac{x^2}{y^2}-1}=\sqrt{\frac{x^2-y^2}{y^2}}=\frac{1}{y}\sqrt{x^2-y^2}$.

Эти примеры показывают, как применяются формулы (1), (2) и (3) из § 39.

2. Введение множителя под знак радикала. Преобразование, обратное вынесению множителя за знак радикала, называется *введением этого множителя под знак радикала.* При выполнении этого преобразования надо помнить, что любое рациональное выражение можно представить в виде корня любой степени, например:

$$2=\sqrt{2^2}=\sqrt[3]{2^3};\quad 3xy=\sqrt{(3xy)^2};$$

$$a+b=\sqrt[3]{(a+b)^3};\quad \frac{2x}{y}=\sqrt[5]{\frac{(2x)^5}{y^5}}.$$

Поэтому имеем:

$$5\sqrt{3}=\sqrt{5^2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{25\cdot 3}=\sqrt{75};$$

$$3ab\sqrt{2a}=\sqrt{(3ab)^2}\cdot\sqrt{2a}=\sqrt{9a^2b^2}\cdot\sqrt{2a}=\sqrt{18a^3b^2};$$

$$\frac{2x}{3}\sqrt[3]{\frac{9y}{4x^2}}=\sqrt[3]{\left(\frac{2x}{3}\right)^3}\cdot\sqrt[3]{\frac{9y}{4x^2}}=\sqrt[3]{\frac{8x^3}{27}\cdot\frac{9y}{4x^2}}=\sqrt[3]{\frac{2xy}{3}};$$

$$\frac{2a}{a-b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{2a}}=\sqrt{\frac{4a^2}{(a-b)^2}\cdot\frac{a^2-b^2}{2a}}=\sqrt{\frac{2a(a+b)}{a-b}}.$$

Приведенные примеры показывают, что при введении множителя под знак корня надо этот множитель возвести в степень корня и умножить полученный результат на подкоренное выражение.

3. Приведение радикалов к одинаковому показателю. Радикалы с различными показателями степени можно привести к одинаковому показателю. Делается это так. Находят наименьшее кратное показателей всех радикалов и берут его в качестве нового показателя. Затем, так же как при нахождении общего знаменателя для дробей, находят дополнительные множители, на которые умножают показатели подкоренных выражений, т. е. возводят подкоренное выражение в соответствующую степень.

Примеры. 1) Привести к одинаковому показателю $\sqrt[3]{3a^2}$ и $\sqrt{2a}$:

$$\sqrt[3]{3a^2}=\sqrt[6]{(3a^2)^2}=\sqrt[6]{9a^4};$$

$$\sqrt{2a}=\sqrt[6]{(2a)^3}=\sqrt[6]{8a^3}.$$

2) Привести к одинаковому показателю $\sqrt[5]{3a^2x^3}$ и $\sqrt{2ax}$:

$$\sqrt[5]{3a^2x^3}=\sqrt[10]{(3a^2x^3)^2}=\sqrt[10]{9a^4x^6};$$

$$\sqrt{2ax}=\sqrt[10]{(2ax)^5}=\sqrt[10]{32a^5x^5}.$$

4. Приведение радикалов к простейшему виду. Простейшим видом радикала принято считать такой его вид, при котором:

1) подкоренное выражение не содержит дробей;

2) множители вынесены за знак корня;

3) сокращены показатель корня и показатель степени подкоренного выражения на их общий множитель.

Покажем на примерах, как приводятся радикалы к простейшему виду.

Примеры.

1) $\sqrt{\frac{27xy^3}{8z}}=\sqrt{\frac{27xy^3\cdot 2z}{8z\cdot 2z}}=\sqrt{\frac{9y^2\cdot 6xyz}{16z^2}}=\frac{3y}{4z}\sqrt{6xyz}.$

2) $ab\sqrt[3]{\frac{a}{b^3}-\frac{1}{b^2}}=ab\sqrt[3]{\frac{a-b}{b^3}}=\frac{ab}{b}\sqrt[3]{a-b}=a\sqrt[3]{a-b}.$

3) $x^2y\sqrt{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}=x^2y\sqrt{\frac{x^2-y^2}{xy}}=x^2y\sqrt{\frac{(x^2-y^2)xy}{x^2y^2}}=$

$$=\frac{x^2y}{xy}\sqrt{xy(x^2-y^2)}=x\sqrt{xy(x^2-y^2)}.$$

Таким образом, если подкоренное выражение — дробь, то умножают числитель и знаменатель этой дроби на один и тот же множитель, подобранный так, чтобы знаменатель сделался точной степенью, показатель которой равен показателю корня; в первом примере таким множителем является $2z$, в третьем примере xy; после этого выносят множитель за знак корня.

Рациональный множитель, стоящий перед радикалом, называется его коэффициентом; например, в иррациональном выражении $\frac{2c-b}{p}\sqrt{xy}$ коэффициентом является $\frac{2c-b}{p}$.

5. Подобные радикалы. *Два или несколько радикалов называются подобными, если они различаются только коэффициентами, но имеют одинаковые подкоренные выражения и одинаковые показатели корня,* например радикалы $2\sqrt{3}$ и $-1,5\sqrt{3}$; $a\sqrt[3]{a+b}$ и $\frac{m}{c}\sqrt[3]{a+b}$ подобны.

Часто по внешнему виду радикалы неподобны, например $\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $\sqrt{6}$; однако если привести первый из них к простейшему виду, то обнаружится их подобие:

$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2\cdot 3}{3\cdot 3}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{6}.$$

Чтобы обнаружить подобие данных радикалов, нужно их предварительно привести к простейшему виду.

Пример 1. Показать подобие радикалов:

$$\sqrt{\frac{a^2b-b^2a}{a+b}} \text{ и } \sqrt{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}.$$

Приводим радикалы к простейшему виду:

$$\sqrt{\frac{a^2b-b^2a}{a+b}}=\sqrt{\frac{ab(a-b)(a+b)}{(a+b)^2}}=\frac{1}{a+b}\sqrt{ab(a^2-b^2)};$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{ab}}=\frac{1}{ab}\sqrt{ab(a^2-b^2)}.$$

Радикалы подобны, так как различаются между собой только коэффициентами.

Подобные радикалы приводятся так же, как приводятся подобные рациональные одночлены, что видно из следующего сопоставления:

$$3ab^2+5ab^2=8ab^2;$$

$$3\sqrt{7}+5\sqrt{7}=8\sqrt{7}.$$

Пример 2.

$$a\sqrt{b}+m\sqrt{b}=(a+m)\sqrt{b}.$$

§ 48. Действия над радикалами

1. Сложение и вычитание радикалов. Чтобы сложить или вычесть радикалы, нужно соединить их между собой знаками (+) или (—); если окажутся подобные радикалы, то делают их приведение.

Примеры.

1) $3\sqrt{20}-\sqrt{45}+2\sqrt{1,25}=3\sqrt{4\cdot5}-\sqrt{9\cdot5}+$
$+2\sqrt{\frac{1,25\cdot4}{4}}=6\sqrt{5}-3\sqrt{5}+\sqrt{5}=4\sqrt{5};$

2) $12x\sqrt{3x}-5\sqrt{12x^3}+0,5\cdot4\sqrt{3x}=(2x+2)\sqrt{3x};$

3) $4\sqrt[3]{81}+7\sqrt[3]{-375}=4\sqrt[3]{27\cdot3}-7\sqrt[3]{125\cdot3}=$
$=12\sqrt[3]{3}-35\sqrt[3]{3}=-23\sqrt[3]{3}.$

2. Умножение и деление радикалов. В § 39 уже упоминалось о том, как умножаются и делятся два корня (радикала) с одинаковыми показателями: надо перемножить или разделить их подкоренные выражения и извлечь корень той же степени из произведения или частного:

$$\sqrt{3ax}\cdot\sqrt{48a^3}=\sqrt{144a^4x}=12a^2\sqrt{x};$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}:\sqrt[3]{\frac{b}{a^2}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}\cdot\frac{a^2}{b}}=\frac{a}{b}.$$

Если требуется умножить или разделить радикалы с различными показателями, то их предварительно *приводят к общему показателю*, после чего умножают или делят, как в случае с одинаковыми показателями.

Примеры.

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{2^3\cdot 2^2}=\sqrt[6]{2^5}=\sqrt[6]{32};$

2) $\sqrt[3]{\frac{a}{x}}:\sqrt[4]{\frac{x}{a}}=\sqrt[12]{\left(\frac{a}{x}\right)^4}:\sqrt[12]{\left(\frac{x}{a}\right)^3}=\sqrt[12]{\frac{a^4}{x^4}:\frac{x^3}{a^3}}=$

$$=\sqrt[12]{\frac{a^7}{x^7}}=\sqrt[12]{\frac{a^7x^5}{x^{12}}}=\frac{1}{x}\sqrt[12]{a^7x^5}.$$

При умножении и делении радикалов нет необходимости предварительно приводить их к простейшему виду, это преобразование выполняется лишь над окончательным результатом.

Коэффициенты радикалов умножаются или делятся отдельно, и результат берется в качестве коэффициента перед корнем из произведения или частного.

Примеры.

1) $2ab\sqrt{18xy}:3b\sqrt{2y}=\frac{2ab}{3b}\sqrt{\frac{18xy}{2y}}=2a\sqrt{x};$

2) $3,2a\sqrt[3]{\frac{2b^2}{a}}:\left(-8b\sqrt{\frac{3a}{2b}}\right)=3,2a\sqrt[6]{\frac{4b^4}{a^2}}:\left(-8b\sqrt[6]{\frac{27a^3}{8b^3}}\right)=$

$$=-\frac{3,2a}{8b}\sqrt[6]{\frac{4b^4}{a^2}\cdot\frac{8b^3}{27a^3}}=-\frac{0,4a}{b}\sqrt[6]{\frac{32b^7\cdot 27a}{27a^5\cdot 27a}}=$$

$$=-\frac{0,4}{3}\sqrt[6]{27\cdot 32ab}=-\frac{2}{15}\sqrt[6]{864ab}.$$

Примечание 1. Если надо умножить или разделить радикал на рациональное выражение, то достаточно на него умножить или разделить коэффициент:

$$2c\sqrt{5ab}\cdot(-4a)=-8ac\sqrt{5ab};$$

$$\frac{a}{b}\sqrt[3]{7xy}:a^2c=\frac{a}{bca^2}\sqrt[3]{7xy}=\frac{1}{abc}\sqrt[3]{7xy}.$$

Примечание 2. При делении рационального выражения на радикал можно рациональное выражение представить как радикал:

$$a:\sqrt{a}=(\sqrt{a})^2:\sqrt{a}=\sqrt{a};$$

$$(x^2-a^2):\sqrt{x^2-a^2}=(\sqrt{x^2-a^2})^2:\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{x^2-a^2}.$$

Умножение и деление алгебраических сумм, содержащих радикалы, производятся по обычным правилам умножения и деления многочленов.

Примеры.

1) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(7\sqrt{2}+5\sqrt{3})=3\sqrt{2}\cdot 7\sqrt{2}-$
$-2\sqrt{3}\cdot 7\sqrt{2}+3\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3}-2\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3}=$
$=42-14\sqrt{6}+15\sqrt{6}-30=12+\sqrt{6};$

2) $(2ab\sqrt[3]{x^2}-x\sqrt[3]{b}):\sqrt[3]{bx}=$
$=2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{bx}}-x\sqrt[3]{\frac{b}{bx}}=2ab\sqrt[3]{\frac{x}{b}}-x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=$
$=\frac{2ab}{b}\sqrt[3]{b^2x}-\frac{x}{x}\sqrt[3]{x^2}=2a\sqrt[3]{b^2x}-\sqrt[3]{x^2}.$

3. Возведение радикалов в степень. Чтобы возвести радикал в степень, достаточно возвести в эту степень подкоренное выражение

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}.$$

Справедливость этого равенства можно обнаружить следующим образом: пусть $(\sqrt[n]{a})=x$, тогда

$$(\sqrt[n]{a})^m=x^m \text{ (левая часть)};$$

$$a=x^n;\ a^m=(x^n)^m=x^{nm};$$

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{x^{nm}}=x^m \text{ (правая часть)}.$$

Таким образом, левая и правая части равенства представляют одно и то же выражение.

Примеры.

1) $(\sqrt{2})^4=\sqrt{2^4}=2^2=4$;

2) $\left(-\frac{2}{5}\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}\right)^2=\frac{4}{25}\sqrt[3]{\frac{x^4\cdot 2}{4\cdot 2}}=\frac{4\cdot x}{25\cdot 2}\sqrt[3]{2x}=\frac{2x}{25}\sqrt[3]{2x}.$

Если показатель корня и показатель степени, в которую возводится корень, имеют общий множитель, то на него можно сократить.

Примеры.

1) $(\sqrt[4]{x^5})^6=(\sqrt{x^5})^3$; 2) $(\sqrt{x^5})^2\cdot\sqrt{x^5}=x^5\sqrt{x^5}=x^7\sqrt{x}$;

3) $\left(\frac{2a}{3}\sqrt[6]{\frac{3}{2}ab}\right)^3=\left(\frac{2a}{3}\right)^3\sqrt{\frac{3}{2}ab}=\frac{4a^3}{27}\sqrt{6ab}.$

Многочленные иррациональные выражения возводятся в степень по обычным правилам:

Примеры.

1) $(2+\sqrt{3})^2=2^2+2\cdot 2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=4+4\sqrt{3}+3=$
$=7+4\sqrt{3}$;

2) $(x+\sqrt{a^2-x^2})^2=x^2+2x\sqrt{a^2-x^2}+a^2-x^2=$
$=a^2+2x\sqrt{a^2-x^2}$;

3) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2=2+\sqrt{3}-$
$-2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}+2-\sqrt{3}=4-2\sqrt{1}=2.$

4. Извлечение корня из корня. Чтобы извлечь корень из корня, достаточно перемножить показатели корней, не изменяя подкоренного выражения:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}.$$

Справедливость равенства проверяется возведением обеих частей в n-ю степень.

Примеры.

1) $\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}$;

2) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}=\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$;

3) $\sqrt{a\sqrt{a}}=\sqrt{\sqrt{a^3}}=\sqrt[4]{a^3}$.

Коэффициент перед внутренним знаком корня предварительно вводят под знак радикала, как это показано в примере 3.

4) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=\sqrt{\sqrt{2^3\sqrt{2}}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^6\cdot 2}}}=\sqrt[8]{2^7}$.

§ 49. Освобождение дроби от иррациональности в знаменателе

Предположим, что требуется вычислить приближенное значение дроби $\frac{1}{\sqrt{2}}$ с точностью до 0,001.

Было бы нерационально извлекать $\sqrt{2}$ с точностью до 0,001 и после этого делить 1 на полученную дробь; при таком способе вычисления много труда и затраты времени требует операция деления на многозначное число:

$$\sqrt{2}=1{,}414;\quad 1:1{,}414\approx 0{,}707.$$

Проще поступить так: умножить числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{2}$, тогда получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx\frac{1{,}414}{2}=0{,}707.$$

Это преобразование называется освобождением дроби от иррациональности в знаменателе.

Примеры.

1) $\frac{a}{\sqrt{a}}=\frac{(\sqrt{a})^2}{\sqrt{a}}=\sqrt{a}$;

2) $\frac{3}{2\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{2\cdot 5}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$;

3) $\frac{b}{\sqrt{c-b}}=\frac{b\sqrt{c-b}}{c-b}$.

В более сложных случаях в знаменателе дроби может оказаться сумма нескольких радикалов, тогда умножают числитель и знаменатель дроби на специально подобранное иррациональное выражение; в частности, если в знаменателе двучлен вида $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, то умножают на *сопряженное выражение* $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$.

Примеры.

1) $$\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})} = \frac{5(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{7-2} = \sqrt{7}-\sqrt{2};$$

2) $$\frac{3}{2-\sqrt{3}} = \frac{3(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{3(2+\sqrt{3})}{4-3} = 3(2+\sqrt{3});$$

3) $$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3})} =$$
$$= \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{5+2\sqrt{10}+2-3} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{10}-2)}{2(\sqrt{10}+2)(\sqrt{10}-2)} =$$
$$= \frac{\sqrt{50}+\sqrt{20}+\sqrt{30}-2\sqrt{5}-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6} =$$
$$= \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{30}-2\sqrt{3}}{6}.$$

Упражнения

1. Вычислить: 1) 2^4, $(-3)^4$, 4^3, $(-5)^3$; 2) $13\cdot 2^3 - 9\cdot 2^3 + 15\cdot 2^3 + 6(-2)^3 - 5(-2)^3 - (-2)^3$; 3) $a^2 + (-a^2)$, $(-2a)^2$, $(-2a)^3$, $(-a)^{2n}$, $(-a)^{2n+1}$; 4) $2^3 + (-3)^3 - (-2)^2 + (-1)^5$.

2. Упростить выражение:

$$x^3 + 2x^2 - 3x - (-x)^3 + 3(-x)^2 - 5x + 2.$$

3. Произвести указанные действия:

$(3\cdot 4)^2 \cdot (2\cdot 3\cdot 4)^3$; $(2xy)^4$; $(-4xyz)^3$; $(-a)^4\cdot(2b)^4$; $(-2x)^3\cdot(-3y)^3$; $24\left(-\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(4\frac{1}{2}\right)^2$.

4. Вычислить: $\left(\frac{3}{4}\right)^3$; $(1{,}5)^4$; $\left(\frac{a}{b}\right)^3$; $\left(\frac{2xy}{z}\right)^4$; $\left(\frac{4ab}{3c}\right)^3$; $\left(\frac{7}{2}\right)^3 : \left(\frac{7}{3}\right)^3$; $\left(\frac{a}{2b}\right)^n \cdot \left(\frac{b}{3c}\right)^n \cdot \left(\frac{2c}{a}\right)^n$; $\frac{(x^2-y^2)^n}{c^2-d^2} \cdot \frac{(c+d)^n}{x-y} \cdot \frac{(c-d)^n}{x+y}$.

5. Вычислить: 1) $(2^2)^3$; 2) $[(-3)^2]^3$; 3) $(x^{n-1})^2$; 4) $(x^2y^3)^{2n-1}$; 5) $(-b^2)^3$; 6) $(a^2)^3 \cdot (a^3)^4$; 7) $\left(\frac{2x^2y^3}{-3z^5}\right)^4$; 8) $\left(\frac{a^7}{b^x}\right)^m \cdot (b^x)^m \cdot a^m$;

9) $\left(-\frac{3x^{n-1}}{4y^{n+1}}\right)^m$.

6. Упростить выражение: $\left(\frac{a+b}{c-d}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{a+b}\right)^2 \cdot \left(\frac{c-d}{a+b}\right)^4$.

7. При каких положительных значениях a выполняются неравенства:

$$1)\ a^2 < a;\quad 2)\ a^2 > a.$$

3) Чему равно a, если $a^2 = a$?

8. Вычислить: 1) $\sqrt{4 \cdot 9}$; 2) $\sqrt{16 \cdot 81}$; 3) $\sqrt{25 \cdot 100}$; 4) $\sqrt{36a^2}$; 5) $\sqrt[3]{27x^3}$; 6) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$; 7) $\sqrt[5]{32}$; 8) $\sqrt{\frac{4}{81}}$; 9) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$; 10) $\sqrt{0{,}01}$;

11) $\sqrt[3]{x^6}$; 12) $\sqrt[3]{\frac{8x^3}{27}}$.

9. Вычислить с указанной точностью следующие корни:

1) $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{0{,}02}$; $\sqrt{0{,}54}$ (с точностью до 0,01);

2) $\sqrt{0{,}3}$; $\sqrt{0{,}012}$; $\sqrt{1{,}7}$ (с точностью до 0,001).

10. Найти приближенные значения следующих сумм и частных с точностью до 0,01.

1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{12{,}4}+\sqrt{0{,}3}$;

3) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; 4) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}+1}$.

11. В следующих примерах вынести рациональные множители за знак корня:

1) $\sqrt{8}$; 2) $\sqrt{27}$; 3) $\sqrt{45}$; 4) $\sqrt{1000}$; 5) $\sqrt[3]{16}$; 6) $\sqrt{a^3}$;

7) $\sqrt{4ab^2}$; 8) $\sqrt{8x^3}$; 9) $\sqrt{\frac{27}{8}}$; 10) $\sqrt{x(1+x)^2}$; 11) $\sqrt{x^2(1+x^2)}$;

12) $\sqrt{0{,}25(x+y)^3}$; 13) $\sqrt[3]{16a^5b}$; 14) $\sqrt[5]{32x^6}$; 15) $\sqrt{\frac{18a^5}{49b^3}}$;

16) $1\frac{1}{4}\sqrt{72a^4}$; 17) $\sqrt{\frac{4}{9}a^{2n+1}b^3}$; 18) $\sqrt{a^2x-a^2}$;

19) $\frac{a}{x-a}\sqrt{x^3-2ax^2+a^2x}$; 20) $\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}$; 21) $\sqrt[n]{\frac{a^{2n}b^{mn}}{n}}$.

12. Подвести рациональный множитель под знак корня:

1) $3\sqrt{2}$; 2) $5\sqrt{0{,}6}$; 3) $4\sqrt{0{,}5}$; 4) $a\sqrt{\frac{b}{a}}$; 5) $x\sqrt{\frac{ab}{x}}$;

6) $2\sqrt[3]{3}$; 7) $ab^2\sqrt{c}$; 8) $2\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$; 9) $3\sqrt{3\frac{1}{3}}$;

10) $\frac{a}{2c}\sqrt{\frac{c}{a}}$; 11) $\frac{m}{n}\sqrt{\frac{n}{m}}$; 12) $(a-b)\sqrt{\frac{2}{a-b}}$;

13) $\frac{a+1}{a-1}\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$; 14) $2a\sqrt[3]{b}$; 15) $xy\sqrt[3]{\frac{a}{xy}}$.

13. Не извлекая корней, определить, какое из чисел больше: 1) $2\sqrt{3}$ или $3\sqrt{2}$? 2) $5\sqrt{3}$ или $3\sqrt{10}$?

14. Привести к простейшему виду следующие корни:

1) $\sqrt{\frac{2}{25}}$; 2) $\sqrt{\frac{17}{81}}$; 3) $\sqrt{\frac{72}{49}}$; 4) $\sqrt{\frac{2}{5}}$; 5) $\sqrt{\frac{1}{3}}$;

6) $\sqrt{4\frac{1}{2}}$; 7) $a\sqrt{\frac{x}{a}}$; 8) $\sqrt{\frac{2a^3}{3b^2}}$; 9) $c\sqrt{\frac{x}{c^3}}$;

10) $2ax\sqrt{\frac{3}{2ax}}$; 11) $\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$; 12) $\sqrt{2x^2-4x+2}$;

13) $\frac{a}{m}\sqrt{\frac{2ab}{3m^2n}}$; 14) $\sqrt[3]{\frac{a+b}{(a-b)^2}}$; 15) $b\sqrt[3]{\frac{1}{b^3}+\frac{1}{b^2}}$;

16) $\sqrt[5]{\frac{mn}{8a^4b^3}}$.

15. Пользуясь приближенным значением $\sqrt{6}\approx 2{,}449$, вычислить:

1) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; 2) $\sqrt{\frac{3}{2}}$; 3) $\sqrt{\frac{3}{8}}$.

16. Приведением радикалов к простейшему виду обнаружить их подобие:

1) $\sqrt{8}$ и $\sqrt{50}$; 2) $\sqrt{40}$ и $\sqrt{90}$; 3) $3\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\frac{1}{8}}$ и $3\sqrt{18}$;

4) $\frac{2}{x}\sqrt{x^3y}$; $\frac{3}{y}\sqrt{xy^3}$ и $xy\sqrt{\frac{1}{xy}}$; 5) $\sqrt[3]{4a^4b^5}$ и $\sqrt[3]{\frac{1}{2a^2b}}$;

6) $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}$ и $\sqrt{\frac{8}{9}-\frac{1}{3}}$; 7) $\sqrt[3]{0{,}001xy^2}$ и $y\sqrt[3]{\frac{0{,}027\,x}{y}}$;

8) $a\sqrt{\frac{c}{ac-bc}}$ и $\sqrt{\frac{4a}{b^2}-\frac{4}{b}}$.

17. Произвести сложение и вычитание корней:

1) $3\sqrt{18}+2\sqrt{8}+3\sqrt{32}-\sqrt{50}$; 2) $\sqrt{12}-2\sqrt{27}-3\sqrt{48}+$ $+2\sqrt{75}+3\sqrt{108}$; 3) $(\sqrt{ab}-2a\sqrt{b})+(4a\sqrt{b}-2\sqrt{ab})$;

4) $a\sqrt[3]{ab^4}+b\sqrt[3]{a^4b}+\sqrt[3]{a^4b^4}-3ab\sqrt[3]{ab}$;

5) $3\sqrt{\frac{1}{27}}-\frac{5}{6}\sqrt{27}-0{,}1\sqrt{75}+2\sqrt{\frac{1}{3}}$;

6) $\sqrt{1-x^2}+(1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2(1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

7) $b\sqrt{\frac{1}{a-b}}-\frac{1}{a}\sqrt{a^3-a^2b}+\frac{1}{b}\sqrt{ab^2-b^3}-b\sqrt{\frac{4a}{b^2}-\frac{4}{b}}$.

18. Привести следующие корни к общему показателю:

1) $\sqrt{3}$ и $\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[6]{32}$;

3) $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{3ab}$ и $\sqrt{2c}$.

19. Произвести умножение и деление корней:

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}$; 2) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{4a^3}$; 3) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{2}$;

4) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}$; 5) $\sqrt{2a}:\sqrt[4]{a}$; 6) $\sqrt[3]{16}:\sqrt{2}$;

7) $6\sqrt[3]{2xy}:3\sqrt{xy}$; 8) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{8}}$.

20. Произвести указанные действия:

1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$; 2) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$; 3) $\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{4\cdot 5}$; 4) $\sqrt{3}\cdot 2\sqrt[3]{2}$;

5) $\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x^2}$; 6) $\sqrt{12}:\sqrt{3}$; 7) $2\sqrt{10}:\frac{1}{2}\sqrt{2{,}5}$;

8) $\sqrt{2}:\sqrt[3]{2}$; 9) $4{,}8\sqrt{ab}:12\sqrt{\frac{1}{ab}}$;

10) $(\sqrt{12}-2\sqrt{27}+3\sqrt{75})\cdot\sqrt{3}$;

11) $(\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{125}):2\sqrt{5}$; 12) $(4\sqrt{8}-2\sqrt{18}):\sqrt[3]{2}$;

13) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$;

14) $(a-b\sqrt{c}+m\sqrt{b}):a\sqrt{bc}$;

15) $\sqrt{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a^2-b}$;

16) $(2\sqrt{xy}+x\sqrt{y}+y\sqrt{x}):\sqrt{xy}$;

17) $\left(a\sqrt{\frac{a}{b}}+2\sqrt{ab}+b\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\cdot\sqrt{ab}$;

18) $(5-2\sqrt{3})(6+5\sqrt{3})$; 19) $(3\sqrt{2}+5\sqrt{3})\times$
$\times(8\sqrt{3}-3\sqrt{2})$; 20) $\sqrt{7+\sqrt{24}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{24}}$;

21) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}$; 22) $\sqrt{p+\sqrt{p^2-1}}\times$
$\times\sqrt{p-\sqrt{p^2-1}}$; 23) $\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-y^3}}\cdot\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-y^3}}$.

21. Возвести в степень:

1) $(2\sqrt{a})^2$; 2) $(\sqrt[3]{a})^4$; 3) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^4$; 4) $(\sqrt[n]{ab})^{2n}$;

5) $(\sqrt[3]{3a^2})^9$; 6) $(ab\sqrt{c})^4$; 7) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$; 8) $(a-b\sqrt{x})^2$;

9) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$; 10) $(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})^2$; 11) $(a+\sqrt{4+a^2})^2$;

12) $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$; 13) $\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2$;

14) $(\sqrt{a-x}-\sqrt{x-b})^2$;

15) $(a\sqrt{a}-b\sqrt{b})^2$; 16) $(\sqrt{2}p+\sqrt{3}q)^3$; 17) $(\sqrt{2p}+\sqrt{3q})^3$;

18) $(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})^2\cdot(x\sqrt{y}+y\sqrt{x})^2$;

19) $\sqrt[n]{(p^2-q^2)^{2n}}$; 20) $(\sqrt[n]{2^3})^{mn}$.

22. Упростить радикалы:

$$\sqrt{\sqrt{81}};\ \sqrt[3]{\sqrt{64}};\ \sqrt{\sqrt[3]{16}};\ \sqrt{\sqrt[3]{ab^2}};\ \sqrt{2\sqrt{2}};\ \sqrt[3]{\frac{4}{9}\sqrt{\frac{4}{9}}};$$

$$\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}.$$

23. Освободить дробь от иррациональности в знаменателе:

1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{5}{\sqrt{5}}$; 4) $\frac{8}{\sqrt{6}}$; 5) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{xy}}$;

7) $\frac{m}{\sqrt{\frac{p}{q}}}$; 8) $\frac{a}{b\sqrt{a}}$; 9) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$; 10) $\frac{1}{3-\sqrt{7}}$; 11) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$;

12) $\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$; 13) $\frac{7-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$; 14) $\frac{9-5\sqrt{3}}{7-3\sqrt{3}}$; 15) $\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

16) $\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$; 17) $\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; 18) $\frac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$;

19) $\frac{5}{2-\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; 20) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}$.

24. Упростить выражение

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}.$$

25. В выражении $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}$ заменить x на $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b}-1}$ и упростить.

26. Какой простейший вид примет выражение

$$\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}},$$

если применить подстановку

$$x=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right]\quad (0<b<a).$$

27. Вычислить значение y при $x=\frac{2ab}{b^2+1}$, если

$$y=\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}.$$

28. Упростить выражение:

$$\frac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}}+\frac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}.$$

29. Вычислить:

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\quad \text{при } x=\sqrt{\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2m}}.$$

Упростить выражения:

30. $$\frac{a}{\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}}-b\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}+\frac{b}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}}.$$

31. $$\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}+\sqrt{x^2+a^2}\right).$$

ГЛАВА V

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 50. Определение квадратного уравнения

Задача. Тело падает с высоты 19,6 *м* без начальной скорости. Через сколько времени оно упадет на землю (сопротивлением воздуха пренебречь)?

Из физики известно, что путь, пройденный свободно падающим телом, определяется по формуле $s=\frac{gt^2}{2}$ (где g — ускорение силы тяжести, а t — время). Принимая $s=19,6$ *м*, $g=9,8$ *м/сек*^{2}, получим:

$$19,6=4,9t^2,$$

откуда

$$t^2=\frac{19,6}{4,9}=4;\ \ t=2\ \text{(сек.)}.$$

Нам пришлось решить уравнение, которое содержит неизвестное в квадрате.

Определение. *Уравнение вида*

$$ax^2+bx+c=0,\ \text{где}\ a\neq 0, \qquad (1)$$

называется квадратным. Оно содержит: 1) член с неизвестным в квадрате, 2) член с неизвестным в первой степени, 3) свободный член. Числа a, b, c называются коэффициентами уравнения: a — коэффициент при старшем члене, b — коэффициент при неизвестном в первой степени, c — свободный член. Так, например, из двух уравнений:

$$(3x+2)^2=9x(x-3);$$

$$x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3},$$

только второе является квадратным, так как первое из них после раскрытия скобок и переноса всех членов в левую часть принимает вид $39x+4=0$; это — уравнение первой степени.

Второе уравнение после освобождения от дробных членов и переноса всех членов в левую часть примет вид:

$$3x^2-10x+3=0,\ a=3,\ b=-10,\ c=3.$$

Судить о том, является ли данное уравнение квадратным, следует только после приведения этого уравнения к виду (1).

Если разделить все члены уравнения $ax^2+bx+c=0$ на $a\ (a\neq 0)$, то получим: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$. Полагая $\frac{b}{a}=p$; $\frac{c}{a}=q$, имеем $x^2+px+q=0$. *Такой вид квадратного уравнения называется приведенным.*

Решить квадратное уравнение — это значит найти его корни, т. е. те значения неизвестного, которые удовлетворяют данному уравнению.

§ 51. Неполные квадратные уравнения

1. Типы неполных квадратных уравнений. *Если в квадратном уравнении общего вида $ax^2+bx+c=0$ один из двух коэффициентов b или c равен нулю или оба одновременно равны нулю, то квадратное уравнение называется неполным.* Возможны три типа неполных квадратных уравнений:

1) $ax^2+bx=0$ $(c=0;\ a\neq 0;\ b\neq 0)$;
2) $ax^2+c=0$ $(b=0;\ a\neq 0;\ c\neq 0)$;
3) $ax^2=0$ $(b=c=0;\ a\neq 0)$.

2. Решение неполных квадратных уравнений.

1) $ax^2+bx=0$. Разложим левую часть уравнения на множители: $x(ax+b)=0$. Произведение двух сомножителей равно нулю, если один из сомножителей равен нулю; следовательно, либо $x=0$, либо $ax+b=0$, откуда $x=-\frac{b}{a}$.

Итак, уравнение имеет два корня; обозначив первый из них x_1, а второй — x_2, мы получим:

$$x_1=0;\ x_2=-\frac{b}{a}.$$

Пример.

$$3x^2-5x=0;\ x(3x-5)=0;$$

$$x_1=0;\ x_2=\frac{5}{3}.$$

Проверка:

1) $3\cdot 0^2-5\cdot 0=0;\ 0=0;$

2) $3\left(\frac{5}{3}\right)^2-5\cdot\frac{5}{3}=\frac{25}{3}-\frac{25}{3}=0;\ 0=0.$

Вывод. Если в квадратном уравнении отсутствует свободный член, то один корень уравнения равен нулю.

2) $ax^2+c=0$. Так как $a\neq 0$, то

$$x^2+\frac{c}{a}=0;\ x^2=-\frac{c}{a},\ x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Если коэффициенты a и c противоположны по знаку, то $-\frac{c}{a}>0$; следовательно, для неизвестного x будем иметь два действительных значения, равных по абсолютной величине, но противоположных по знаку:

$$x_1=-\sqrt{-\frac{c}{a}};$$

$$x_2=+\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Пример.

$$2x^2-5=0;\ x^2=\frac{5}{2};\ x=\pm\sqrt{2,5};$$

$$x=\pm 1,581;\ x_1=-1,581;\ x_2=1,581.$$

Если $-\frac{c}{a}<0$, то уравнение не имеет действительных корней.

3) $ax^2=0$. Так как $a\neq 0$, то

$$x^2=0;\ x=0.$$

Говорят, что нуль является двукратным корнем уравнения $ax^2=0$:

$$x_1=x_2=0.$$

§ 52. Преобразование полного квадратного уравнения к форме $(x+n)^2=m^2$

По образцу неполного квадратного уравнения вида $ax^2+c=0$ может быть решено уравнение

$$(x+3)^2=49; \tag{2}$$

извлекая квадратный корень из обеих частей, получим:

$$x+3=\pm 7;\ x=\pm 7-3;$$
$$x_1=-10;\ x_2=4.$$

Раскрывая скобки в уравнении (2) и перенося все члены в левую часть, получим:

$$x^2+6x-40=0. \tag{3}$$

Это — полное квадратное уравнение; приемы решения такого уравнения пока нам неизвестны. Поэтому, если нам удастся преобразовать уравнение (3) снова к форме (2), то заодно будет найден способ решения всякого полного квадратного уравнения.

Покажем сначала на примере, как выполняется такое преобразование.

Пример.

$$x^2-6x+8=0.$$
$$x^2-6x=-8.$$

Прибавим к обеим частям по 9, получим:

$$x^2-6x+9=-8+9.$$

Левая часть представляет теперь квадрат разности:

$$(x-3)^2=1;\quad x-3=\pm 1;$$
$$x=3\pm 1;\quad x_1=2;\quad x_2=4.$$

§ 53. Вывод формулы корней приведенного квадратного уравнения

Пусть дано уравнение $x^2+px+q=0$.

Перепишем его в такой форме:

$$x^2+2x\frac{p}{2}=-q.$$

Прибавив к обеим частям уравнения $\left(\frac{p}{2}\right)^2$, получим в левой части квадрат суммы:

$$x^2+2x\cdot\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$

или

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q.$$

Считая $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\geqslant 0$, извлекаем квадратный корень из обеих частей; получим:

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},$$

откуда

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}. \tag{4}$$

Это и есть формула, по которой определяются корни приведенного квадратного уравнения. Словами ее можно выразить так: *корни приведенного квадратного уравнения равны половине коэффициента при неизвестном в первой степени с противоположным знаком плюс минус квадратный корень из квадрата половины того же коэффициента без свободного члена.*

Пример 1. Решить уравнение

$$x^2-2x-15=0;$$

$$p=-2;\quad q=-15.$$

По формуле имеем:

$$x=1\pm\sqrt{1-(-15)};\ x=1\pm 4;\ x_1=-3;\ x_2=5.$$

Пример 2. $\frac{t}{2}=\frac{4}{t+2}$; освободимся от дробных членов и приведем уравнение к нормальному виду:

$$t(t+2)=8;\quad t^2+2t-8=0;$$

$$t=-1\pm\sqrt{1-(-8)};\ t=-1\pm 3;\ t_1=-4;\ t_2=2.$$

§ 54. Вывод общей формулы корней квадратного уравнения

Пусть требуется найти корни квадратного уравнения общего вида $ax^2+bx+c=0$. Разделим все члены на a ($a\neq 0$), получим $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$; это — приведенное квадратное уравнение, а потому его корни будут:

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}};$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (5)$$

Эта формула читается так: *корни квадратного уравнения общего вида равны коэффициенту при неизвестном в первой степени с противоположным знаком плюс минус квадратный корень из квадрата того же коэффициента без учетверенного произведения коэффициента при неизвестном в квадрате на свободный член и все поделенное на удвоенный коэффициент при неизвестном в квадрате.*

Пример.

$$2x^2 - 3x - 5 = 0.$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2(-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 7}{4};$$

$$x_1 = \frac{3-7}{4} = -1; \quad x_2 = \frac{3+7}{4} = \frac{5}{2}.$$

Примечание. Формула (5) упрощается, если b — число четное, т. е. $b = 2b'$; тогда имеем:

$$x_{1,2} = \frac{-2b' \pm \sqrt{(-2b')^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a};$$

$$x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}. \qquad (6)$$

Пример.

$$3x^2 - 4x - 4 = 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 3 \cdot (-4)}}{3}; \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{3};$$

$$x_1 = -\frac{2}{3}; \quad x_2 = 2.$$

§ 55. Свойства корней и составление квадратного уравнения

1. Свойства корней квадратного уравнения. Между коэффициентами и корнями квадратного уравнения существует определенная зависимость; найдем эту зависимость.

1) Корни приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ по формуле выражаются так:

$$x_1=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}, \qquad (7)$$

$$x_2=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}. \qquad (8)$$

Сложив эти равенства, получим $x_1+x_2=-p$.

Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна коэффициенту при неизвестном в первой степени с противоположным знаком.

2) Если перемножить те же равенства (7) и (8) почленно, то получим:

$$x_1x_2=\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)=$$

$$=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)^2=\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=q;$$

$$x_1x_2=q.$$

Произведение корней приведенного квадратного уравнения равно свободному члену.

Если имеем квадратное уравнение общего вида: ax^2+ $+bx+c=0$, то, разделив все члены на коэффициент при старшем члене $a\,(a\neq 0)$, получим приведенное уравнение

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0,$$

для которого

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}; \quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

2. Составление квадратных уравнений по заданным корням. Если нам известны корни квадратного уравнения, то можно составить само уравнение. Для этого надо воспользоваться свойствами 1) и 2).

Пример 1. Составить квадратное уравнение, корни которого $x_1=-5$; $x_2=2$. Находим сумму и произведение корней:

$$x_1+x_2=-5+2=-3; \text{ следовательно, } p=3;$$

$$x_1x_2=(-5)\cdot 2=-10; \quad q=-10.$$

Искомое уравнение: $x^2+3x-10=0$.

Пример 2.

$$x_1 = 2 - \sqrt{3};\ x_2 = 2 + \sqrt{3};$$
$$x_1 + x_2 = 4; \quad p = -4;$$
$$x_1 x_2 = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1;\ q = 1.$$

Искомое уравнение будет:

$$x^2 - 4x + 1 = 0.$$

§ 56. Решение квадратного уравнения с буквенными коэффициентами

Если коэффициенты квадратного уравнения представляют собой буквенные выражения, то оно называется *уравнением с буквенными коэффициентами.*

Решение такого уравнения не представляет чего-либо нового по сравнению с решением уравнений с числовыми коэффициентами; усложняются только преобразования, а способ решения остается неизменным.

Пример 1.

$$(a^2 - b^2)x^2 - 2ax + 1 = 0 \quad (a \neq \pm b).$$

Так как коэффициент при неизвестном в первой степени — число четное, то удобно применить формулу (6) (§ 54):

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2} = \frac{a \pm b}{a^2 - b^2};$$

$$x_1 = \frac{a - b}{a^2 - b^2} = \frac{1}{a + b}; \quad x_2 = \frac{a + b}{a^2 - b^2} = \frac{1}{a - b}.$$

Пример 2.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x + a + b}.$$

Освобождаемся от дробных членов:

$$ab(x + a + b) + bx(x + a + b) + ax(x + a + b) = abx.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получим:

$$(a + b)x^2 + (a + b)^2 x + ab(a + b) = 0;$$

если

$$a + b \neq 0,$$

то, сокращая на $a+b$, имеем

$$x^2+(a+b)x+ab=0;$$

$$x_1=-a;\quad x_2=-b;$$

при $a+b=0$ уравнению удовлетворяет любое значение $x\neq 0$.

§ 57. Исследование квадратного уравнения

Корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ вычисляются по формуле

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Возможны три случая в зависимости от знака подкоренного выражения $D=b^2-4ac$.

Число D называется *дискриминантом* квадратного уравнения.

1) $D>0$. Обозначим это положительное число через h^2:

$$b^2-4ac=h^2;$$

тогда имеем:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{h^2}}{2a},\quad x_1=\frac{-b-h}{2a},\quad x_2=\frac{-b+h}{2a}\ (h>0).$$

Итак, *при $D>0$ оба корня действительны и различны между собой.*

2) $D=0$. Корни уравнения в данном случае будут:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm 0}{2a}=\frac{-b}{2a};$$

оба корня действительны и равны между собой.

3) $D<0$. *Уравнение действительных корней не имеет*).*

Пример 1. Уравнение $3x^2+4x-4=0$ имеет два действительных и различных между собой корня, так как

$$D=4^2-4\cdot 3(-4)=16+48>0.$$

Пример 2. Уравнение $9x^2-12x+4=0$ имеет два равных корня, так как $D=12^2-4\cdot 9\cdot 4=0$.

---

*) О решении квадратных уравнений в случае $D<0$ см. § 162.

Пример 3. Уравнение $5y^2 - 7y + 10 = 0$ действительных корней не имеет, ибо $D = 7^2 - 4 \cdot 5 \cdot 10 = 49 - 200 < 0$.

Остановимся подробнее на первом случае, когда $D > 0$. Коэффициент при старшем члене a будем считать положительным, т. е. $a > 0$. Возможны четыре комбинации знаков у коэффициентов b и c. Рассмотрим каждую из них в отдельности:

1) $b < 0$; $c > 0$.

Если свободный член положителен, то это значит, что корни одинаковы по знаку; так как коэффициент при неизвестном в первой степени отрицателен, то сумма корней должна быть положительна (см. § 55). Следовательно, *оба корня положительны*.

2) $b > 0$; $c > 0$.

Корни одинаковы по знаку, сумма корней по знаку отрицательна; следовательно, *оба корня отрицательны*.

3) $b < 0$; $c < 0$.

Отрицательный знак свободного члена указывает на то, что корни *противоположны по знаку*; сумма корней положительна $\left(\text{ибо если } b < 0, \text{ то } -\frac{b}{a} > 0\right)$; следовательно, *больший по абсолютной величине корень положителен*.

4) $b > 0$; $c < 0$.

Корни *противоположны по знаку*, но так как сумма корней отрицательна, *то больший по абсолютной величине корень отрицателен*.

Результат исследования можно записать в следующую таблицу ($D > 0$):

1	$a > 0$	$b < 0$; $c > 0$	оба корня положительны
2	$a > 0$	$b > 0$; $c > 0$	оба корня отрицательны
3	$a > 0$	$b < 0$; $c < 0$	корни противоположны по знаку, больший по абсолютной величине корень положителен
4	$a > 0$	$b > 0$; $c < 0$	корни противоположны по знаку, больший по абсолютной величине корень отрицателен

Примеры.

1) Не решая квадратного уравнения: $2x^2-8x+7=0$, определить характер его корней.

Составляем дискриминант:

$$D=8^2-4\cdot2\cdot7>0.$$

Корни действительны и различны между собой, оба корня положительны, так как их произведение положительно и сумма положительна

$$x_1x_2=\frac{7}{2};\quad x_1+x_2=\frac{8}{2}=4.$$

2) Уравнение $x^2+2x-15=0$ имеет действительные и противоположные по знаку корни, так как

$$D=4-4\cdot1(-15)=4+60>0$$

и

$$x_1x_2=-15;$$

$$x+x_2=-2.$$

Больший по абсолютной величине корень отрицателен.

§ 58. Решение задач, основанных на свойствах корней квадратного уравнения

Предварительное замечание. Если уравнение содержит буквенный коэффициент, числовые значения которого могут быть выбраны произвольно, то такой коэффициент называется *параметром.*

Если подчинить уравнение определенному условию, то этим будет ограничен выбор параметра. Например, уравнение

$$x^2-4x+m=0$$

содержит переменный параметр m; меняя m, будем получать квадратные уравнения, отличающиеся одно от другого только свободным членом. Чтобы получались уравнения, имеющие *действительные* корни, необходимо наложить ограничение на выбор параметра m: дискриминант должен быть неотрицательным, т. е. $D\geqslant0$; $16-4m\geqslant0$, откуда $m\leqslant4$.

Пример 1. Какое значение должен иметь параметр m, чтобы один из корней уравнения $x^2-7x+m=0$ был равен 5?

Если $x_1=5$, то $x_2=\frac{m}{5}$, так как $x_1x_2=m$; но $x_1+x_2=7$, откуда $5+\frac{m}{5}=7$ или $25+m=35$, откуда $m=10$.

Пример 2. Чему должен быть равен параметр m в уравнении

$$4x^2-12x+m=0,$$

чтобы уравнение имело два одинаковых корня?

Корни одинаковы, если дискриминант $D=0$, т. е. $12^2-16m=0$, откуда $m=9$.

Пример 3. При каком значении параметра m между корнями уравнения $x^2+3x+m=0$ имеет место соотношение $3x_1-x_2=4$? Имеем:

$$x_1+x_2=-3.$$

$$x_1x_2=m.$$

Имеем три уравнения, связывающие корни x_1 и x_2; исключим x_1 и x_2, для чего складываем первое и второе равенства: $4x_1=1$; $x_1=\frac{1}{4}$; подставляем это значение x_1 во второе равенство; получим $\frac{1}{4}+x_2=-3$, откуда $x_2=-3\frac{1}{4}$. Найденные значения x_1 и x_2 подставляем в третье равенство; получим

$$\frac{1}{4}\left(-\frac{13}{4}\right)=m,$$

$$m=-\frac{13}{16}.$$

Пример 4. Составить квадратное уравнение, корни которого обратны по величине корням уравнения $x^2+px+q=0$.

Обозначим корни данного уравнения через x_1 и x_2, тогда корни нового уравнения должны быть $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$. Найдем сумму и произведение корней нового уравнения:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=-\frac{p}{q},$$

$$\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1\cdot x_2}=\frac{1}{q}.$$

Поэтому вид нового квадратного уравнения будет:

$$x^2+\frac{p}{q}x+\frac{1}{q}=0.$$

После умножения на q получим: $qx^2+px+1=0$.

Числовой пример. Квадратное уравнение $x^2-5x+6=0$ имеет корни $x_1=2$; $x_2=3$; уравнение $6x^2-5x+1=0$ имеет корни

$$x_1=\frac{1}{2};\quad x_2=\frac{1}{3},$$

что легко проверить.

§ 59. Задачи на составление квадратных уравнений

1. Мотоциклист проехал 105 *км* с некоторой определенной средней скоростью; вследствие прошедших дождей остальной участок дороги протяжением в 132 *км* пришлось ехать со скоростью на 2 *км* в час меньше прежней. Определить его первоначальную скорость, если все расстояние было пройдено за 7 час.

Пусть x—первоначальная скорость мотоциклиста (*км/час*), тогда $x-2$ — уменьшенная скорость. Первый участок пути был пройден за $\frac{105}{x}$ час., второй участок пути был пройден за $\frac{132}{x-2}$ час.

По условию задачи весь путь был пройден за 7 час.; отсюда имеем уравнение

$$\frac{105}{x}+\frac{132}{x-2}=7;$$

решая это уравнение, получим $x_1=35$.

Второй корень $x_2=\frac{6}{7}$ не годится, так как $\frac{6}{7}-2<0$, а скорость — положительное число.

2. Задача Эйлера. Две крестьянки принесли на рынок вместе 100 яиц; из них одна имела больше яиц, чем другая, но обе выручили от продажи одинаковые суммы денег. Одна из них сказала другой: «будь у меня твои яйца, я выручила бы 15 крейцеров». Вторая ответила: «А будь у меня твои яйца, я выручила бы за них $6\frac{2}{3}$ крейцера». Сколько яиц было у каждой крестьянки?

Предположим, что у первой крестьянки было x яиц, тогда у второй было $100-x$. Если бы первая имела столько яиц, сколько вторая, т. е. $100-x$, то она выручила бы 15 крейцеров; следовательно, первая продавала каждое яйцо по $\frac{15}{100-x}$ крейцера, вторая крестьянка продавала каждое яйцо по цене $\frac{6\frac{2}{3}}{x}=\frac{20}{3x}$; таким образом, первая крестьянка за свои x яиц выручила $x\frac{15}{100-x}$; вторая выручила $(100-x)\frac{20}{3x}$.

По условию задачи выручки одинаковы. Отсюда имеем уравнение $\frac{15}{100-x}=\frac{20(100-x)}{3x}$. После сокращения и освобождения от дробных членов получим:

$$\frac{3x}{100-x}=\frac{4(100-x)}{3x};\ 9x^2=4(100-x)^2;\ 3x=\pm 2(100-x);$$

$$x_1=40;$$

$$x_2=-200 \text{ (не годен).}$$

Итак, первая имела 40, вторая — 60 яиц.

3. Двое рабочих A и B взялись выполнить некоторую работу за 16 дней. После четырехдневной совместной работы A перешел на другую работу, вследствие чего B один окончил оставшуюся часть работы в срок, на 12 дней больший того, в течение которого A один может выполнить всю работу.

За сколько дней каждый рабочий в отдельности может выполнить всю работу?

Предположим, что A может выполнить всю работу за x дней, тогда за один рабочий день он должен выполнить $\frac{1}{x}$ часть всей работы.

При совместной работе A и B в день выполняют $\frac{1}{16}$ часть всей работы; следовательно, на долю B приходится в день $\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{x}\right)$ часть всей работы. С другой стороны, за $(x+12)$ дней B один закончил работу, т. е. выполнил $\frac{3}{4}$ всей работы; следовательно, за день он выполняет $\frac{3}{4}:(x+12)=\frac{3}{4(x+12)}$ часть всей работы.

Отсюда имеем уравнение: $\frac{1}{16}-\frac{1}{x}=\frac{3}{4(x+12)}$. Левая и правая части уравнения выражают одну и ту же величину — дневную норму рабочего B.

Решая это уравнение, находим $x=24$ (второй корень $x=-8$ не удовлетворяет условию задачи).

B выполняет в день $\frac{1}{16}-\frac{1}{24}=\frac{1}{48}$ часть всей работы; следовательно, всю работу он выполняет за 48 дней.

§ 60. Краткие исторические сведения о квадратных уравнениях

Уже примерно за 2000 лет до нашей эры вавилонские ученые умели решать квадратные уравнения. Об этом свидетельствуют клинописные древневавилонские тексты (на глиняных дощечках), обнаруженные при археологических раскопках на территории древнего Вавилона.

Приблизительно в ту же эпоху квадратные уравнения умели решать также и китайские ученые.

Значительно позднее квадратные уравнения встречаются в работах греческого математика Диофанта (III век н. э.), который вводит сокращенные буквенные обозначения для неизвестных. В примерах на квадратные уравнения Диофант (так же как и вавилоняне) рассматривает всегда только *одни положительные* корни. Уравнения, приводящие к отрицательным корням, он называет «неуместными».

Индусы улучшили и обобщили способы решения квадратных уравнений, известные грекам. Для обозначения неизвестных и знаков действий они пользовались символами. Индусский математик Бхаскара (1141—1225) дает для уравнения $x^2-45x=250$ два корня $x=50$ и $x_2=-5$, но все же добавляет, что второй корень не подходит, ибо «никто не одобряет отрицательных корней». Задачи у индусов в большинстве имели стихотворную форму с числовыми данными. В качестве примера приведем «задачу о лотосе» из сочинений индусского математика Бхаскара.

Задача о лотосе

Над озером тихим, с полфута размером,
Высился лотоса цвет.
Он рос одиноко. И ветер порывом
Отнес его в сторону. Нет
Более цветка над водой.
Нашел же рыбак его ранней весной
В двух футах от места, где рос.
Итак, предложу я вопрос:
Как озера вода
Здесь глубока?

Ценный вклад в дело систематизации приемов решения квадратных уравнений внес древний узбекский математик IX века Мухаммед бен-Муса (ал Хорезми).

Нужно сказать, что средневековые математики не знали общего вида квадратного уравнения, какой мы применяем теперь; для них уравнения: $x^2+px=q$; $x^2=px+q$; $x^2+q=px$ представляли три разных уравнения, тогда как для нас — это один вид уравнения.

Ньютон в своей книге «Универсальная арифметика» дает решение квадратных уравнений, которое почти ничем не отличается от современного.

Упражнения

1. Решить следующие неполные квадратные уравнения вида $ax^2+bx=0$.

1) $x^2-2x=0$.
2) $x^2+7x=0$.
3) $\frac{4y^2}{5}+8y=0$.
4) $5t-t^2=0$.
5) $(3x-2)-(x-3)^2+11=0$.
6) $(7y-2)^2=(3-5y)^2-5$.
7) $(6-x)(2x-5)+30=0$.
8) $\frac{3x-5}{10}=\frac{3}{5x-6}$.
9) $\frac{5t+4}{3t-2}=\frac{7t-10}{4t+5}$.
10) $\frac{ax^2}{b}-\frac{x}{a}=0$.
11) $b(y^2-y)=0,\ b\neq 0$.
12) $ax^2-bx=cx^2$.
13) $\frac{y+a}{b}=\frac{y}{y+b}$.
14) $\frac{mx+b}{x-m}=\frac{x-b}{x+m}$.

2. Найти два числа, отличных от нуля, если одно из них на 8 больше другого, а их произведение в 11 раз больше меньшего числа.

3. Тело брошено вверх со скоростью $v=98$ *м* в секунду. Через сколько секунд оно упадет на землю, если расстояние тела от поверхности земли определяется формулой: $s=vt-\frac{gt^2}{2}$, где $g=9{,}8$ *м/сек*^{2}; сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Решить уравнения:

1) $5x^2=125$.
2) $2x^2-13=5$.
3) $\frac{5y}{2}=\frac{800}{0{,}2y}$.
4) $(3z+1{,}5)(3z-1{,}5)=54$.
5) $\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{16}$.
6) $\frac{a-x}{1-ax}=\frac{1-bx}{b-x}$.
7) $(2y-7)^2=74-28y$.
8) $(z+c)(z-c)=m(2c+m)$.
9) $3x^2-4=0$ (с точностью до 0,01).
10) $5y^2-4y=(2y-1)^2+2$ (с точностью до 0,001).

5. Произведение половины неизвестного числа на одну треть того же числа равно 24. Найти число.
6. Высота прямоугольника в три раза меньше основания. Найти основание, если площадь прямоугольника равна 27 *см*².
7. Старинная задача из арифметики Магницкого (1709 г.). Случися некоему человеку к стене лествицу прибрати, стены те тоя высота есть 117 стоп. И обрете лествицу долготою 125 стоп. И ведати хощет, колико стоп сея лествицы нижний конец от стены отстояти имать?
8. Катеты треугольника относятся, как 5 : 12, гипотенуза равна 26 *см*. Найти катеты.
9. На товар сделана накидка во столько процентов, сколько рублей стоит товар. Найти стоимость товара, если накидка составляет 2,25 руб.
10. Старинная индусская задача. На берегу ручья, ширина которого 4 фута, рос тополь. Порыв ветра сломал его на высоте 3 футов от земли так, что верхний конец его коснулся другого берега ручья (ствол направлен перпендикулярно течению). Определить высоту тополя.
11. Решить следующие полные квадратные уравнения:

1) $(x+3)^2=4^2$.

2) $(8x+3)^2=361$.

3) $(5z+2)^2=16z^2$.

4) $(2a+3t)^2=(2b-t)^2$.

5) $x^2-5x+6=0$.

6) $z^2+7z+12=0$.

7) $y^2-3y=10$.

8) $(x-1)(x+2)+3x-10=0$.

9) $x^2-0{,}8x-0{,}0704=0$.

10) $x^2-\frac{1}{3}x-2\frac{2}{9}=0$.

11) $(t+7)^2-10(3t+1)=0$.

12) $\frac{y}{y+1}+\frac{y+1}{y}=\frac{5}{2}$.

13) $2x^2-11x+14=0$.

14) $3z^2+23z-70=0$.

15) $5d^2+23d=318$.

16) $1{,}2m^2+10=7m$.

17) $10m^2+49m=5$.

18) $72x^2-18x-35=0$.

19) $(z+1)(z+2)=(2z-1)(2z-10)$.

20) $\frac{3x-7}{x+5}=\frac{x-3}{x+2}$.

21) $\frac{x(2x-3)}{2}+\frac{(3x-1)^2}{5}=\frac{(x+3)^2}{5}+1$.

22) $\dfrac{4x^2-3x+5}{x^2-2x+13}=2.$

23) $\dfrac{5}{y+2}+\dfrac{9}{2y+3}=2.$

24) $\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{2}{1-x}-\dfrac{6}{1-x^2}.$

25) $2y^2-(b-2c)\,y=bc.$

26) $x^2+2(a-b)\,x-4ab=0.$

27) $6x^2+5mx+m^2=0.$

28) $56y^2+ay-a^2=0.$

29) $\dfrac{3m}{2m-1}-\dfrac{39}{2m+1}=5-\dfrac{45}{4m^2-1}.$

30) $x+\dfrac{a}{x}=b.$

31) $abx^2-(a^2+b^2)\,x+ab=0.$

32) $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{a+b}{a-b}.$

33) $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}=0.$

34) $\dfrac{x^2-x+16}{x^2+x+1}=\dfrac{x+6}{x-1}-\dfrac{x+36}{x^3-1}.$

35) $(m-n)\,x^2-nx-m=0.$

36) $\dfrac{1}{2x-2}+\dfrac{3}{x^2-1}=\dfrac{1}{4}.$

37) $(7-4\sqrt{3})\,x^2+(2-\sqrt{3})\,x=2.$

38) $abx^2+2(a+b)\sqrt{ab}\,x+(a-b)^2=0.$

39) $\dfrac{x+5}{x+1}+\dfrac{3x+1}{x^2+3x+2}=2{,}5.$

40) $\dfrac{a-b+1}{ax+bx}=\dfrac{1}{(a+b)^2}+\dfrac{a-b}{x^2}.$

41) $\dfrac{8}{x^2-9}+\dfrac{8}{3x+9}-\dfrac{5}{6}=0.$

42) $\dfrac{5t}{2t^2-t-1}-\dfrac{4t-5}{t^2-1}=\dfrac{5}{2t+1}.$

43) $\dfrac{x-6}{x-12}-\dfrac{x-12}{x-6}=\dfrac{5}{6}.$

12. На плоскости дано несколько точек, расположенных так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Определить число точек, если через них можно провести всего 28 различных прямых.

13. Решить в общем виде предыдущую задачу, если всего можно провести m различных прямых.

14. Участок земли площадью в 375 $м^2$ имеет форму прямоугольника, одна из сторон которого составляет 60% другой. Найти стороны.
15. Периметр прямоугольника равен 85 *см*, а диагональ его равна 32,5 *см*. Найти стороны прямоугольника.
16. Возможен ли такой выпуклый многоугольник, в котором число всех диагоналей было бы равно 12?
17. В каком многоугольнике число сторон равно числу всех диагоналей?
18. Возможен ли такой прямоугольный треугольник, стороны которого выражаются тремя последовательными целыми числами? Тремя последовательными четными или нечетными числами?
19. Два туриста отправляются одновременно в город, находящийся от них на расстоянии 30 *км*. Первый из них проходит в час на 1 *км* больше, вследствие чего приходит в город на один час раньше. Сколько километров в час проходит каждый путешественник?
20. Долг в 820 руб. погашен в два срока: в конце первого года уплачен 441 руб. и в конце второго года уплачено столько же. По скольку сложных процентов был занят капитал?
21. Бассейн наполняется двумя трубами в $1\frac{7}{8}$ часа; первая труба в отдельности может наполнить бассейн двумя часами скорее, чем одна вторая. Во сколько часов каждая из труб в отдельности может наполнить бассейн?
22. Расстояние между двумя городами на реке равно 80 *км*. Пароход проходит это расстояние дважды (вверх и вниз) за 8 час. 20 мин. Определить скорость парохода в стоячей воде, если скорость течения равна 4 *км/час*.
23. Расстояние между двумя станциями железной дороги равно 96 *км*. Скорый поезд проходит этот путь на $\frac{2}{3}$ часа быстрее, чем пассажирский. Найти скорость каждого поезда, если известно, что разность между их скоростями равна 12 *км/час*.
24. При совместной работе двое рабочих могут выполнить данное задание в 12 час. Первый из них в отдельности может выполнить ту же работу на 10 час. скорее, чем второй. Во сколько часов может каждый рабочий в отдельности выполнить задание?
25. Если артель продаст товар за 2688 руб., то получит столько процентов прибыли, сколько сотен рублей содержится в половине себестоимости товара. Какова себестоимость товара?
26. Два туриста A и B выехали одновременно из разных мест навстречу друг другу. При встрече оказалось, что A проехал на 210 *км* больше, чем B. Если каждый из них будет продолжать путь с прежней скоростью, то A приедет в место выезда B через 4 дня, а B прибудет к месту выезда A через 9 дней. Сколько километров проехал каждый из них до встречи?
27. Некто купил груш и яблок счетом 80 штук, причем за груши платил вдвое дороже, чем за яблоки. Если бы он купил яблоки по цене груш, то заплатил бы за них 10 руб., а если купил бы

груши по цене яблок, то заплатил бы 45 руб. Сколько было куплено груш и яблок?

28. Два экскаватора одинаковой мощности должны были вынуть около 15,6 тысячи кубометров грунта, чтобы вырыть котлован под строящееся здание. Машинист первого из них перекрывал дневную норму выработки на 60 кубометров, машинист второго — на 30 кубометров, что позволило им на 8 дней сократить срок выполнения работы. Какова запроектированная дневная норма выработки?

29. Токарь рассчитал, что если ему удастся сократить время обработки каждой детали на 2 минуты, то он увеличит норму дневной выработки на 16 штук изделий при сохранении прежнего машинного времени, составляющего 40% длительности рабочего дня. Сколько минут тратит токарь на обработку одной детали и какова норма выработки в день?

30. Бригада трактористов должна была поднять участок целины площадью в 120 *га*. В результате развернувшегося социалистического соревнования между членами бригады им удалось увеличить норму дневной выработки всей бригады на 2 *га*, что сократило срок вспашки на 2 дня. Какое было дано дневное задание бригаде и в какой срок нужно было выполнить работу?

31. Поезд должен был пройти 840 *км* пути в определенное время, но на полпути он был задержан у семафора на 30 минут, вследствие чего пришлось увеличить скорость на 2 *км/час*, чтобы в точности прибыть по расписанию. Найти первоначальную скорость поезда?

32. Из двух городов A и B, расстояние между которыми равно 396 *км*, одновременно отправляются друг другу навстречу два путешественника A и B. Через число дней, равное разности между расстояниями в километрах, проезжаемыми ими в день, путешественники встречаются на расстоянии 216 *км* от города A. Сколько *км* в день проезжает каждый путешественник?

33. Курьерский поезд через 7 час. после отправления со станции A был задержан в пути на 2 часа, а затем продолжал путь со скоростью, в $1^1/_3$ раза большей первоначальной, и прибыл на станцию B в назначенный срок. Если бы поезд после остановки увеличил свою скорость только на 6 *км*, то он опоздал бы на 1 час 20 минут. Найти расстояние между станциями A и B и начальную скорость поезда.

34. Из A в B отправляется поезд. Час спустя из B навстречу ему выходит другой поезд, и они встречаются на середине пути. Если бы оба поезда вышли одновременно, то через 4 часа расстояние между ними составляло бы 10% первоначального. За сколько времени каждый поезд проходит весь путь?

35. Бассейн с помощью двух труб может быть наполнен в течение 12 час. Если половину бассейна будет наполнять одна первая труба, а другую половину одна вторая труба, то на это потребуется 25 часов. Во сколько часов наполняет бассейн каждая труба в отдельности?

36. Турист выехал из A в B и делает в среднем 8 *км/час*. Когда он проехал 27 *км*, то из B навстречу ему выехал другой турист, который проезжал в час $^1/_{20}$ всего пути от B к A и встретил первого через столько часов, сколько километров в час он сам делает. Определить расстояние от A до B.

37. Агроном установил, что наличным семенным фондом в 22,5 тонны можно засадить весь намеченный участок под картофель. При посадке выяснилось, что семена отборные и потому можно уменьшить предполагавшуюся норму посадки на один гектар примерно на 200 *кг*. Это привело к увеличению площади посева на 1 *га*. Какова была запроектирована норма посадки картофеля на 1 *га* и чему равна площадь первоначального участка?

38. Найти корни следующих уравнений с точностью до 0,01:

1) $0{,}05x^2 - 4x + 7 = 0$.
2) $0{,}015y^2 + 2y - 3{,}75 = 0$.
3) $2{,}17x^2 - 1{,}8x - 1{,}06 = 0$.
4) $7x^2 - 8{,}06x + 2{,}16 = 0$.

39. Составить квадратное уравнение, если его корни равны:

1) 3 и 5; 2) -3 и 5; 3) 4 и $-\frac{1}{2}$; 4) 3 и -3; 5) 0 и 6;

6) 0 и $\frac{b}{a}$; 7) 4 и 4; 8) $\frac{3}{4}$ и $\frac{4}{3}$; 9) $a+b$ и $a-b$;

10) $\frac{m+n}{2}$ и $\frac{m-n}{2}$; 11) $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$; 12) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$;

13) $a+\sqrt{b}$ и $a-\sqrt{b}$.

40. Не решая следующих уравнений, указать: 1) какие из уравнений с действительными корнями имеют равные корни; 2) какие имеют оба корня положительных или оба отрицательных; 3) какие имеют действительные корни, какие не имеют действительных корней.

1) $x^2-4x+4=0$; 2) $x^2-9x-22=0$; 3) $x^2-16x+48=0$;
4) $4x^2+x+1=0$; 5) $7x^2-x-1=0$; 6) $14y^2+11y-3=0$;
7) $z^2-6z+9=0$; 8) $y^2+y-6=0$.

41. При каких значениях коэффициента m следующие уравнения имеют два равных корня:

1) $4x^2+mx+9=0$; 2) $mx^2+4x+1=0$; 3) $x^2-2(1+3m)x+$
$+7(3+2m)=0$.

42. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты a, b и c, чтобы уравнение $ax^2+bx+c=0$ имело:
1) действительные и положительные корни;
2) действительные и отрицательные корни;
3) один действительный корень положительный, другой отрицательный?

43. Какое значение имеет параметр m, если уравнение:

1) $x^2-2ax+m=0$ имеет один корень, равный $a-b$;
2) $z^2+mz-18=0$ имеет один корень, равный -3;
3) $mx^2-15x-7=0$ имеет один корень, равный -7;
4) $y^2+my+a^2+5a+6=0$ имеет один корень, равный $a+3$.

44. Если корни уравнения $x^2+3x+k=0$ обозначим через x_1 и x_2, то какие значения нужно придать параметру k, чтобы:

1) $x_1-x_2=6$; 2) $3x_1-x_2=4$; 3) $\frac{x_1}{x_2}=-\frac{2}{5}$; 4) $x_1^2+x_2^2=34$.

45. При каком значении свободного члена — a корни уравнения $3x^2+2x-a=0$ относятся между собой как $2:3$.

46. Составить квадратное уравнение, корни которого равны $(x_1+x_2)^2$ и $(x_1-x_2)^2$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

ГЛАВА VI

ФУНКЦИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

§ 61. Вводные замечания

В различных областях науки и техники приходится иметь дело с переменными величинами, связанными между собой функциональной зависимостью вида $y = ax^2 + bx + c$.

Приведем несколько примеров:

1) Путь, пройденный телом при равномерно ускоренном или равномерно замедленном прямолинейном движении, выражается формулой

$$s = \frac{at^2}{2} + v_0 t + s_0,$$

где t — время, s — пройденный путь, s_0 — начальный путь, v_0 — начальная скорость, a — ускорение.

2) Зависимость между диаметром круга d и его площадью F выражается формулой $F = \frac{\pi d^2}{4}$.

3) Сопротивление, оказываемое средой, например воздухом, движению тела, пропорционально *квадрату скорости* $f = kv^2$. Такое соотношение имеет место, например, при движении самолета в воздухе.

В примерах 2) и 3) мы имеем частный случай функциональной зависимости $y = ax^2 + bx + c$, когда $b = c = 0$.

Определение. *Функция вида* $y = ax^2 + bx + c$ *называется функцией второй степени или квадратным трехчленом.*

Приведенные выше три примера функциональных зависимостей были примерами функции второй степени.

Каждому значению независимого переменного x соответствует единственное значение функции y, например, если

$$y=2x^2-3x+2,$$

то:

при $x=1$ $\quad y=2\cdot 1^2-3\cdot 1+2=1;$

при $x=2$ $\quad y=2\cdot 2^2-3\cdot 2+2=4;$

при $x=0$ $\quad y=2;$

при $x=-2$ $\quad y=2(-2)^2-3(-2)+2=16$

и т. д.

Определение. *Значения аргумента x, обращающие трехчлен ax^2+bx+c в нуль, называются корнями трехчлена.*

Эти значения находятся приравниванием трехчлена нулю и решением соответствующего квадратного уравнения.

Пример.

$$y=3x^2-5x+2.$$

Если $y=0$, то имеем уравнение

$$3x^2-5x+2=0;$$

$$x_1=\frac{2}{3},\ x_2=1.$$

Корни трехчлена в данном случае $\frac{2}{3}$ и 1. Было бы грубой ошибкой считать, что квадратное уравнение и квадратный трехчлен — одно и то же: квадратный трехчлен есть функция, следовательно, переменная величина, принимающая множество значений при различных значениях аргумента x; квадратное уравнение есть равенство, справедливое только при двух значениях аргумента x_1 и x_2, соответствующих корням трехчлена.

§ 62. Разложение трехчлена второй степени на линейные множители

При изучении свойств функции второй степени

$$y=ax^2+bx+c$$

иногда удобно разложить правую часть, т. е. трехчлен ax^2+bx+c, на линейные множители. Выполним это разложение.

Предположим, что трехчлен имеет действительные корни. Обозначим их через x_1 и x_2. Тогда имеем:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}; \quad x_1x_2=\frac{c}{a} \ (\S\ 55);$$

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$$
$$=a\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right]=a(x-x_1)(x-x_2);$$
$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Квадратный трехчлен разлагается на три множителя, из которых первый есть коэффициент при старшем члене, а остальные два множителя представляют разности между аргументом x и корнями трехчлена.

Пример 1.

$$3x^2-5x+2=3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1).$$

Пример 2. Сократить дробь

$$\frac{a^2+2a-3}{a^2+7a+12}.$$

Числитель и знаменатель дроби представляют квадратные трехчлены относительно буквы a, принимаемой за аргумент; разлагаем их на множители, предварительно найдя корни каждого трехчлена,

$$a^2+2a-3=0, \quad a_1=-3; \quad a_2=1;$$

корни трехчлена $a^2+7a+12$ будут -3 и -4;

$$\frac{a^2+2a-3}{a^2+7a+12}=\frac{(a+3)(a-1)}{(a+3)(a+4)}=\frac{a-1}{a+4}.$$

§ 63. График функции $y=ax^2$

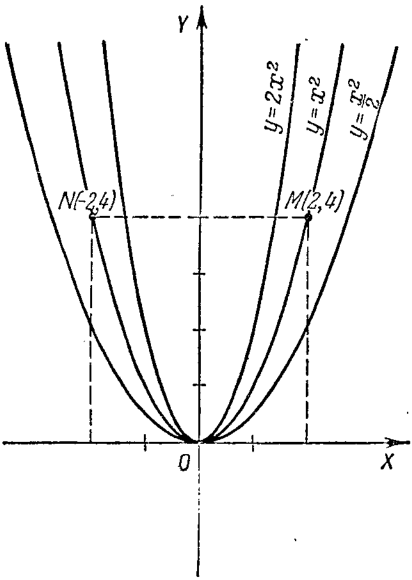
Построим графики следующих функций:

$$y=x^2; \quad y=2x^2; \quad y=\frac{1}{2}x^2.$$

Сначала составим таблицу значений переменных x и y, для чего аргументу дадим ряд частных значений и вычислим соответствующие значения функции:

y \ x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	0	1	1,5	2	2,5	3
$y=x^2$	9	6,25	4	2,25	1	0	1	2,25	4	6,25	9
$y=2x^2$	18	12,5	8	4,5	2	0	2	4,5	8	12,5	18
$y=\frac{1}{2}x^2$	4,5	3,125	2	1,125	0,5	0	0,5	1,125	2	3,125	4,5

Выберем систему координат и построим точки, соответствующие каждой паре значений аргумента и функции, причем x берем за абсциссу, y — за ординату; это построение выполняем сначала для функции $y=x^2$.



Черт. 29.

В результате получим ряд точек. Эти точки не лежат на одной прямой.

Множество всех точек, координаты которых удовлетворяют формуле, задающей функцию аналитически, называется графиком данной функции. Для функции $y=x^2$ — это линия, называемая *параболой*.

Чтобы начертить параболу, плавно от руки проводится линия через построенные точки. На чертеже 29 график функции $y=x^2$ дается средней кривой.

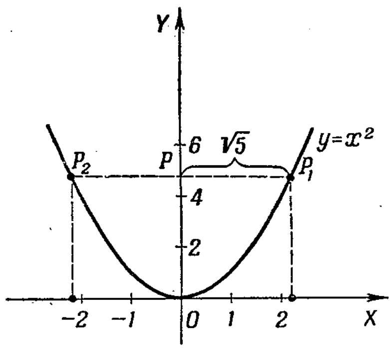
График симметричен относительно оси ординат, так как изменение знака у аргумента x не меняет значения функции; равным по абсолютной величине, но противоположным по знаку значениям аргумента x соответствуют равные значения функции, например при $x=\pm 2$ функция $y=4$; две точки $M(2; 4)$ и $N(-2, 4)$ расположены симметрично относительно оси ординат.

Точно так же любой другой паре противоположных значений аргумента x соответствует одно и то же значение y.

Точка пересечения параболы с ее осью симметрии называется *вершиной параболы*. В нашем случае вершина параболы находится в начале координат.

Подобным образом по точкам могут быть построены графики функций $y=2x^2$ и $y=\frac{1}{2}x^2$, представляющие также *параболы* с вершинами в начале координат, симметричные относительно оси OY (черт. 29).

§ 64. Графическое извлечение квадратного корня из чисел



Черт. 30.

Если график функции $y=x^2$ построен аккуратно, на миллиметровой бумаге и в крупном масштабе, то он может быть использован для приближенного извлечения квадратного корня, например: чтобы найти $\sqrt{5}$, отложим на оси OY отрезок $OP=5$ и через точку P проведем параллель оси OX до пересечения с параболой в точке P_1 (черт. 30). Абсцисса этой точки $x_1 \approx 2{,}2$ будет арифметическим значением $\sqrt{5}$.

§ 65. Влияние величины коэффициента a на вид графика функции $y=ax^2$

В § 63 параболы $y=2x^2$ и $y=\frac{1}{2}x^2$ строились по точкам; координаты этих точек были предварительно вычислены по соответствующему уравнению и занесены в таблицу. Однако можно те же параболы строить чисто геометрически с помощью уже построенной параболы $y=x^2$.

Сравним функции $y=x^2$ и $y=2x^2$.

При одних и тех же значениях аргумента x значения второй функции в два раза больше соответствующих значений первой функции, что означает следующее: ординаты точек параболы $y=2x^2$ *в два раза больше* ординат параболы $y=x^2$ *при одних и тех же абсциссах*; следовательно, такую параболу можно получить «*растяжением*» ординат параболы $y=x^2$ в два раза (черт. 31).

График функции $y=\frac{1}{2}x^2$ может быть получен «*сжатием*» ординат параболы $y=x^2$ *в два раза*, что изображено на том же чертеже.

Если коэффициенту a в уравнении $y=ax^2$ дадим отрицательные значения, например $a=-1; -2; -\frac{1}{2}; \ldots$, то значения функций

1) $y=-x^2$; 2) $y=-2x^2$;

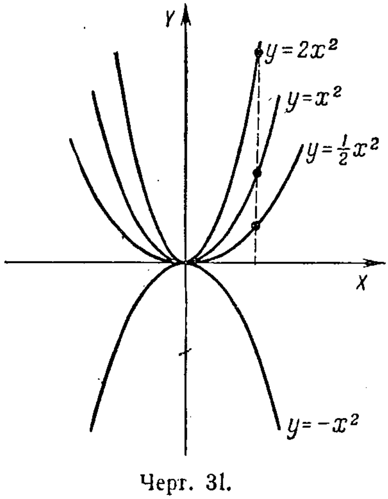
3) $y=-\frac{1}{2}x^2$

противоположны по знаку значениям функции

1) $y=x^2$; 2) $y=2x^2$;

3) $y=\frac{1}{2}x^2$,

но имеют одну и ту же абсолютную величину при одинаковых значениях аргумента. Геометрически это означает, что парабола $y=-x^2$ может быть получена из параболы $y=x^2$ поворотом в плоскости чертежа на угол 180° вокруг вершины; другими словами, графики $y=x^2$ и $y=-x^2$ симметричны относительно оси OX (черт. 31).



Черт. 31.

Таково же взаимное расположение парабол $y=2x^2$ и $y=-2x^2$; $y=\frac{1}{2}x^2$ и $y=-\frac{1}{2}x^2$ и вообще парабол $y=ax^2$ и $y=-ax^2$.

Выводы.

1) Функция $y=ax^2$ при различных значениях коэффициента a представляет *семейство парабол* с вершинами в начале координат. Ось OY является общей осью симметрии всех кривых семейства.

2) При $a>0$ параболы направлены вверх.

3) При $a<0$ параболы направлены вниз.

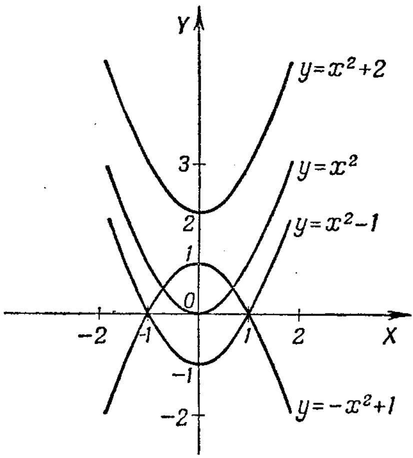
Влияние численного значения параметра a отражено на чертеже 31.

§ 66. График функции $y=ax^2+c$

Если параболу $y=ax^2$ перенесем в направлении оси OY параллельно самой себе на величину c $(c>0)$, то все ординаты кривой увеличатся на c, абсциссы же останутся без изменения. Новому положению параболы относительно осей координат соответствует уравнение $y=ax^2+c$. Если $c<0$, то парабола перенесена вниз. На чертеже 32 изображены параболы:

$y=x^2+2$, вершина ее в точке $(0;\ 2)$;

$y=x^2-1$, вершина в точке $(0;\ -1)$.



Черт. 32.

График функции $y=ax^2+c$ при $a<0$ представляет параболу с вершиной в точке $(0;\ c)$ парабола направлена вниз. На чертеже 32 представлен частный случай: $y=-x^2+1$.

§ 67. График функции $y=(x+m)^2$

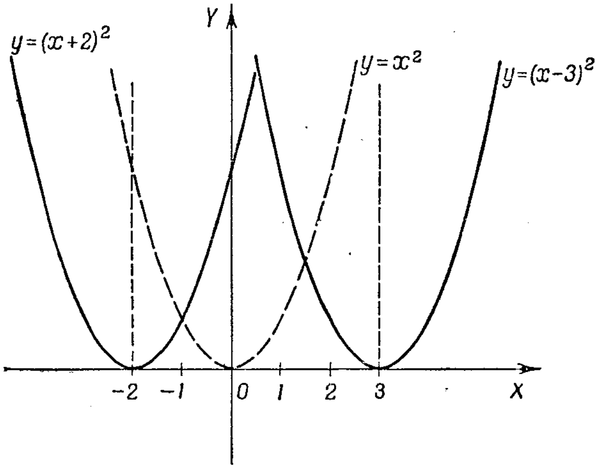
Рассмотрим две функции:

$$y=(x+2)^2;$$
$$y=(x-3)^2.$$

Чтобы построить графики этих двух функций, составим таблицу значений:

y \ x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$y=(x+2)^2$	...	4	1	0	1	4	9	16	25	...
$y=(x-3)^2$	...	49	36	25	16	9	4	1	0	...

Если построим точки: (0; 4); (1; 9); ...; (— 2; 0); (— 3; 1); (— 4; 4) и соединим их плавной кривой, то получим график функции $y=(x+2)^2$ (черт. 33).



Черт. 33.

Аналогично строится график функции $y=(x-3)^2$. Замечаем, что первый график представляет параболу $y=x^2$, *сдвинутую вдоль оси абсцисс на* 2 *единицы влево*; второй график изображает параболу $y=x^2$, *сдвинутую вдоль оси OX вправо на* 3 *единицы*; ось симметрии в том и другом случае параллельна оси OY.

Вывод. График функции $y=(x+m)^2$ может быть получен сдвигом параболы $y=x^2$ вдоль оси абсцисс на величину m: при $m>0$ сдвиг происходит от начала координат влево, при $m<0$ — сдвиг вправо.

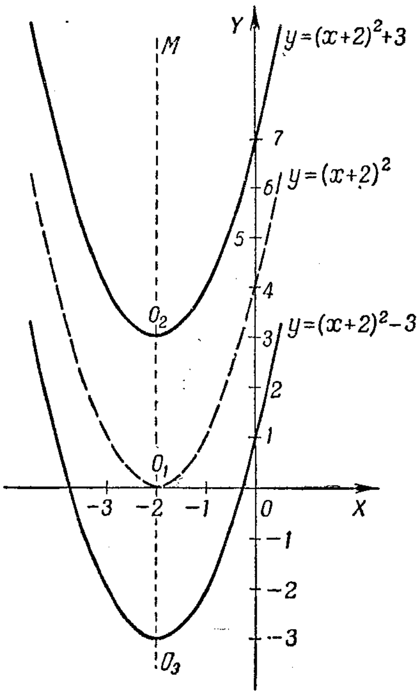
Примечание. График функции $y=a(x+m)^2$ может быть получен аналогичным образом из графика функции $y=ax^2$.

§ 68. График функции $y=(x+m)^2+n$

Сравним две функции $y_1=(x+2)^2$ и $y_2=(x+2)^2+3$. При одних и тех же значениях аргумента x значения второй функции на 3 единицы больше соответствующих значений первой функции, например: при $x=1$ $y_1=9$, $y_2=12$; при $x=-3$ $y_1=1$, $y_2=4$ и т. д.

Отсюда следует, что график функции $y=(x+2)^2+3$ есть парабола $y=(x+2)^2$, сдвинутая вверх вдоль оси симметрии O_1M параллельно самой себе на три единицы масштаба (черт. 34); вершина параболы $y=(x+2)^2+3$ находится в точке $O_2(-2; 3)$.

График функции $y=(x+2)^2-3$ есть парабола $y=(x+2)^2$, сдвинутая вниз вдоль ее оси симметрии на три единицы масштаба; вершина сдвинутой параболы находится в точке $O_3(-2; -3)$.



Черт. 34.

Рассмотренные примеры приводят к следующему общему выводу: *график функции $y=(x+m)^2+n$ есть парабола,* *ось симметрии ее параллельна оси ординат, вершина находится в точке* $(-m;\ n)$. Эту параболу можно получить двумя преобразованиями параболы $y=x^2$: сдвигом ее вдоль оси OX так, чтобы вершина оказалась в точке $(-m;\ 0)$, и последующим переносом вершины в новую точку $(-m;\ n)$, причем ось симметрии преобразованной параболы должна быть параллельна оси ординат.

§ 69. График функции $y=ax^2+bx+c$

Всякий трехчлен вида x^2+px+q может быть представлен в форме $(x+m)^2+n$.

Эта форма трехчлена позволяет сразу построить его график согласно выводу предыдущего параграфа.

Пример. $$y=x^2-4x+1.$$

Преобразуем правую часть равенства

$$x^2-4x+1=x^2-2\cdot 2x+4-3=(x-2)^2-3;$$
$$y=(x-2)^2-3.$$

Этому уравнению соответствует парабола с вершиной в точке $(2;\ -3)$.

График функции $y=ax^2+bx+c$ может быть построен аналогичным преобразованием правой части уравнения.

Пример. $$y=2x^2-5x+2.$$

$$2x^2-5x+2=2\left(x^2-\frac{5}{2}x+1\right)=$$
$$=2\left[x^2-2\cdot\frac{5}{4}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2+1\right]=$$
$$=2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right];$$
$$y=2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{9}{8}.$$

График этой функции может быть получен параллельным переносом параболы $y=2x^2$ так, чтобы вершина оказалась в точке $\left(\frac{5}{4};\ -\frac{9}{8}\right)$.

§ 70. Графический способ решения и исследования квадратного уравнения

Решение всякого квадратного уравнения сводится к отысканию значений аргумента x, обращающих трехчлен в нуль. В геометрическом истолковании это означает, что корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ *суть абсциссы точек пересечения параболы* $y=ax^2+bx+c$ *с осью* OX, так как ординаты этих точек равны нулю.

Пример. Решить уравнение

$$x^2-2x-3=0.$$

Первый способ. Строим параболу

$$y=x^2-2x-3,$$

или

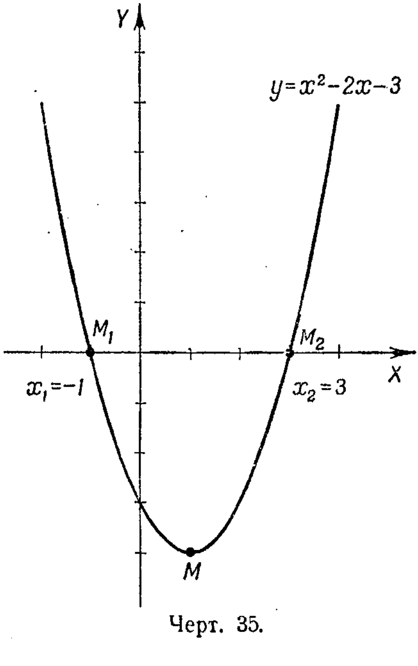
$$y=(x-1)^2-4.$$

Парабола

$$y=(x-1)^2-4$$

имеет вершину в точке M $(1; -4)$ и пересекает ось абсцисс в двух точках M_1 и M_2, абсциссы которых

$$x_1=-1; \quad x_2=3.$$



Черт. 35.

Следовательно, корни квадратного уравнения (они же и корни трехчлена) равны -1 и 3 (черт. 35).

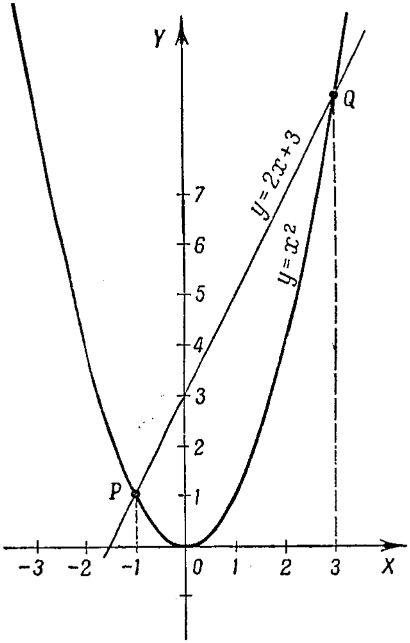
Второй способ. Уравнение $x^2-2x-3=0$ напишем в такой форме: $x^2=2x+3$. Такой вид квадратного уравнения допускает следующее его истолкование: *при каких значениях аргумента x две функции:* 1) $y=x^2$ *и* 2) $y=2x+3$ *делаются численно равными между собой.*

Геометрически это означает, что надо найти такие точки на графиках этих двух функций, *абсциссы и ординаты* *которых одинаковы.* Такие точки *являются точками пересечения параболы* $y=x^2$ *с прямой* $y=2x+3$.

На чертеже 36 показано, что прямая и парабола пересекаются в точках P и Q, абсциссы которых равны:

$$x_1=-1; \quad x_2=3.$$

Второй способ графического решения квадратного уравнения имеет то преимущество, что позволяет рационализировать процесс решения: можно построить раз навсегда в крупном масштабе на миллиметровой бумаге параболу



Черт. 36.

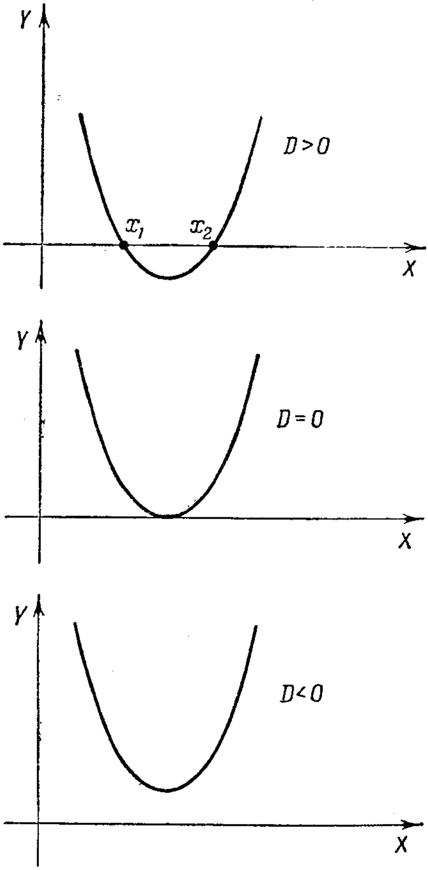
$$y=x^2;$$

прямые $y=-px-q$ ($x^2+px+q=0$; $x^2=-px-q$) можно и не строить, достаточно найти две точки прямой $y_2=-px-q$ (p и q — определенные числа), отметить их булавкой и натянуть тонкую нить между этими точками; точки пересечения нити с параболой отмечаем булавками и прочитываем по чертежу абсциссы этих точек; это и будут приближенные значения корней квадратного уравнения $x^2+px+q=0$.

Примечание. Если коэффициенты p и q — дробные числа, например $p=2{,}715$, $q=-10{,}92$, то уравнение

$$x^2+2{,}715x-10{,}92=0$$

может быть решено графически даже быстрее, чем аналитически, т. е. по формуле. Точность графического способа вычисления корней уравнения хотя и меньше, чем при аналитическом способе, но во многих случаях она вполне достаточна для целей практики.



Черт. 37.

В § 57 было дано исследование квадратного уравнения. Полученные выводы могут быть наглядно иллюстрированы с помощью графика функции второй степени

$$y = ax^2 + bx + c.$$

1) Дискриминант

$$D > 0.$$

Парабола *пересекает* в двух точках ось абсцисс. Корни уравнения x_1 и x_2 действительны и различны.

2) $D = 0$. Парабола *касается* оси абсцисс в точке

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Оба корня квадратного уравнения одинаковы.

3) $D < 0$. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ не *имеет общих точек* с осью абсцисс. Уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

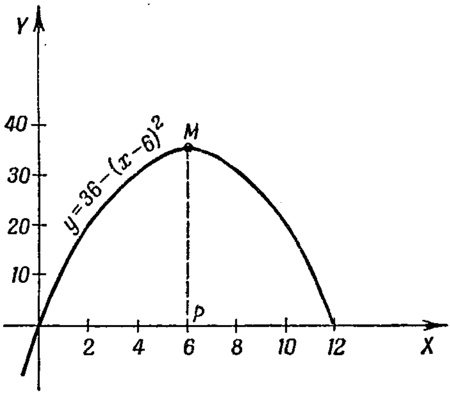
действительных корней не имеет; чертеж 37 иллюстрирует три возможных случая для $a > 0$.

§ 71. Наибольшее и наименьшее значения квадратного трехчлена

Задача 1. Из всех прямоугольников данного периметра 24 *м* найти тот, площадь которого наибольшая. Обозначим основание прямоугольника через x (*м*), тогда высота равна $12-x$, площадь $y=x(12-x)$; $y=12x-x^2$. Замечаем, что площадь y есть функция второй степени от основания x. Представим эту функцию в таком виде:

$$y=12x-x^2=36+12x-x^2-36=36-(x-6)^2;$$
$$y=36-(x-6)^2.$$

Функция y представляет *разность* между постоянным уменьшаемым 36 и переменным вычитаемым $(x-6)^2$; разность тем больше, чем меньше вычитаемое; но наименьшее значение выражения $(x-6)^2$ есть 0, которое получим при $x=6$. Следовательно, основание прямоугольника x должно быть равно 6 *м*, высота — тоже 6 *м*, а потому прямоугольник — *квадрат*.



Черт. 38.

Итак, *из всех прямоугольников с данным периметром квадрат имеет наибольшую площадь*. Полученный результат может быть истолкован графически: парабола $y=36-(x-6)^2$ имеет вершину в точке (6; 36), ордината MP вершины есть *наибольшая ордината* по сравнению с ординатами других точек, означающими в данном случае площадь прямоугольника. Говорят, что в точке $x=6$ функция y (площадь) достигает *максимума*, что изображено на чертеже 38.

Задача 2. При каком значении аргумента x квадратный трехчлен $y=x^2-4x+8$ принимает наименьшее значение? Представим трехчлен в форме

$$y=(x-2)^2+4.$$

Функция y есть сумма двух неотрицательных слагаемых, причем второе слагаемое — постоянное, поэтому сумма достигнет наименьшего значения при *наименьшем* значении слагаемого $(x-2)^2$. Это наименьшее значение равно 0 и достигается при $x=2$. Итак, при $x=2$ трехчлен $x^2-4x+8=(x-2)^2+4$ имеет *минимум*, равный 4, что геометрически означает ординату вершины параболы $y=x^2-4x+8$. Таким образом, квадратный трехчлен с положительным коэффициентом при старшем члене имеет минимум, равный по величине ординате вершины соответствующей параболы; трехчлен с отрицательным коэффициентом при старшем члене имеет максимум, достигаемый при значении аргумента x, равном абциссе вершины соответствующей трехчлену параболы. Ордината вершины этой параболы дает числовую величину максимума трехчлена.

Упражнения

1. Найти корни следующих функций:

   а) $y = x^2 - 1$; б) $y = x^2 - 3x$; в) $y = x^2 - 5x + 6$.

2. При каких значениях аргумента:

   а) квадратный трехчлен $y = x^2 - 6x + 10$ принимает значение, равное 2?

   б) трехчлен $t^2 + 4t - 3$ делается численно равным 18?

   в) трехчлен $u^2 - 1{,}5u + 3{,}5$ делается численно равным 10?

3. Разложить следующие квадратные трехчлены на линейные множители:

   1) $x^2 - 3x - 10$; 2) $x^2 + 2x - 35$; 3) $u^2 - 6au - 40a^2$;
   4) $2x^2 - 7x + 3$; 5) $2a^2 - 5ab - 3b^2$ (аргументом считать a).

4. Сократить следующие дроби, предварительно разложив числитель и знаменатель дроби на линейные множители:

   1) $\dfrac{4x^2 - 9}{6x^2 + x - 15}$; 2) $\dfrac{a^2 + 7a - 8}{a^2 + 2a - 3}$; 3) $\dfrac{3x^2 + 4x - 4}{2x^2 + 5x + 2}$.

5. Построить линию, ординаты всех точек которой больше ординат кривой $y = x^2$, на: 1) 2; 2) 5; 3) -4.

   Каким перемещением параболы $y = x^2$ в плоскости чертежа могут быть получены построенные кривые? Записать их уравнения.

6. Перенести параболу $y = x^2$ параллельно самой себе: 1) вверх на одну единицу; 2) вниз на две единицы; 3) вверх на 5 единиц, и написать новое уравнение каждой параболы.

7. Как располагается вершина параболы $y = x^2 + q$ на оси ординат, если 1) $q > 0$; 2) $q < 0$; 3) $q = 0$?

8. Произвести сдвиг параболы $y = x^2$ вдоль оси абцисс: 1) вправо на 4 единицы; 2) влево на 3 единицы, и написать новое уравнение параболы для каждого случая.

9. Указать, каким перемещением параболы $y = x^2$ получается каждая из кривых:

   1) $y = (x - 2)^2 + 1$; 2) $y = (x + 1)^2 - 4$;
   3) $y = (x - 3)^2 - 4$; 4) $y = (x + 4)^2 + 1$.

10. Параболу $y = x^2$ перенести параллельно самой себе:

    1) на 3 единицы *вправо* и на 2 единицы *вверх*;
    2) на 1 единицу *влево* и на 3 единицы *вверх*;
    3) на 5 единиц *вправо* и 4 единицы *вниз*;
    4) на 1,5 единицы *влево* и на 2,5 единицы *вниз*.

    Написать для каждого из упомянутых четырех случаев новое уравнение параболы.

11. Как надо смещать параболу $y=x^2$ относительно координатных осей, чтобы новое уравнение параболы было:

1) $y=x^2-8x+7$;
2) $y=x^2+4x+3$;
3) $y=x^2-x+2\frac{1}{4}$.

Каковы будут новые координаты вершины параболы в каждом отдельном случае?

12. Каково взаимное расположение каждой из следующих пар парабол:

1) $y=3x^2$ и $y=-3x^2$;
2) $y=(x-1)^2$ и $y=-(x-1)^2$;
3) $y=(x+2)^2+3$; $y=-(x+2)^2+3$.

13. Чему должен быть равен коэффициент a, если известно, что значение функции $y=ax^2$ при $x=1$ равно 2?

14. Тот же вопрос при условии, что парабола $y=ax^2$ должна пройти через точку $(2; -4)$.

15. Какие значения надо придать коэффициентам a и c в формуле $y=ax^2+c$, выражающей функцию второй степени, чтобы график функции проходил через точки

$$M(-1;\ -3) \text{ и } P(3;\ 0)?$$

16. При каком значении аргумента x функция $y=x^2-7x-10$ имеет наименьшее значение?

17. В какой точке, т. е. при каком значении аргумента x функция $y=-x^2+8x+7$ достигает своего наибольшего значения?

18. Решить графическим способом следующие квадратные уравнения:

1) $x^2-2x-8=0$; 2) $x^2+x-2=0$; 3) $x^2+4x+4=0$.

ГЛАВА VII

НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ И УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДИМЫЕ К КВАДРАТНЫМ

§ 72. Разложение левой части уравнения на множители

В некоторых случаях удается привести данное уравнение к такому виду, что его левая часть есть произведение нескольких сомножителей, а правая часть равна нулю. Такая форма уравнения позволяет быстро находить корни данного уравнения, как это видно из следующего примера.

Пример 1. Решить уравнение

$$(x^2-4)(x-3)=0.$$

Произведение равно нулю, если один из сомножителей равен нулю; следовательно, либо

$$x^2-4=0; \quad x=\pm 2;$$

либо

$$x-3=0; \quad x=3.$$

Всего имеем три корня:

$$x_1=-2;\ x_2=2;\ x_3=3.$$

Только что решенное уравнение было третьей степени (в чем легко убедиться, раскрыв скобки). Таким образом, показанный прием дает возможность иногда решать уравнения высших степеней. Следующий пример показывает, что в некоторых случаях это можно сделать, даже если левая часть уравнения первоначально не разложена на множители.

Пример 2. Найти все корни уравнения

$$x^3+3x^2-2x-6=0.$$

Методом группировки разложим левую часть на множители:

$$(x^3+3x^2)-(2x+6)=0; \quad x^2(x+3)-2(x+3)=0;$$
$$(x+3)(x^2-2)=0;$$
$$x+3=0; \; x=-3; \; x^2-2=0; \; x=\pm\sqrt{2}.$$

Получим три корня: $x_1=-3$, $x_2=-\sqrt{2}$; $x_3=\sqrt{2}$. Обратно, если нужно составить алгебраическое уравнение наименьшей степени, корни которого, например равны: $x_1=-3$; $x_2=-1$, $x_3=2$; $x_4=5$, то можно сразу написать это уравнение в форме $(x+3)(x+1)(x-2)(x-5)=0$, так как, приравнивая нулю каждый сомножитель в левой части, получим заданные корни.

§ 73. Биквадратное уравнение

Задача. Сумма площадей двух квадратов равна $4\frac{1}{4}$ $м^2$.

Определить их стороны, если известно, что они выражаются взаимно обратными числами.

Если длину стороны первого квадрата обозначим через x, то длина стороны второго квадрата должна быть обозначена $\frac{1}{x}$, их площади будут x^2 и $\frac{1}{x^2}$, а потому по условию задачи имеем:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{17}{4}.$$

После освобождения от дробей получим:

$$4x^4-17x^2+4=0.$$

Это — уравнение четвертой степени относительно искомой стороны x. Рассмотрим решение таких уравнений в общем виде.

Определение. *Уравнение вида* $ax^4+bx^2+c=0$ *называется биквадратным.*

Оно — четвертой степени и содержит только члены с четными степенями неизвестного.

Для решения биквадратного уравнения делаем подстановку: $x^2=z$; $x^4=z^2$. Тогда имеем: $az^2+bz+c=0$. Это — квадратное уравнение относительно нового неизвестного z. Решая по формуле, получим: $z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; но так как $z=x^2$, то $x=\pm\sqrt{z}$ или

$$x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Имеем четыре значения неизвестного x (четыре корня):

$$x_1=+\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}};$$

$$x_2=-\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}};$$

$$x_3=+\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}};$$

$$x_4=-\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Решим теперь уравнение, к которому свелась задача. Делаем подстановку $z=x^2$; $z^2=x^4$:

$$4z^2-17z+4=0;$$

$$z=\frac{17\pm\sqrt{289-64}}{8}=\frac{17\pm 15}{8}; \quad z_1=\frac{1}{4}; \quad z_2=4;$$

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}; \quad x_{3,4}=\pm\sqrt{4}=\pm 2.$$

Очевидно условию задачи удовлетворяют только положительные корни, т. е. искомая сторона первого квадрата $x_1=\frac{1}{2}$ или $x_2=2$.

Пример.

$$x^4-13x^2+36=0; \quad z=x^2; \quad z^2=x^4.$$

$$z^2-13z+36=0;$$

$$z=\frac{13}{2}\pm\sqrt{\frac{169}{4}-36};$$

$$z=\frac{13}{2}\pm\frac{5}{2}; \quad z_1=4; \quad z_2=9;$$

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{4}=\pm 2; \quad x_{3,4}=\pm\sqrt{9}=\pm 3.$$

§ 74. Потерянные и посторонние корни

1. О равносильности уравнений. При решении уравнений первой степени было дано понятие о равносильности уравнений; отмечалось, что два уравнения называются равносильными, *если все корни первого уравнения являются также и корнями второго уравнения, и наоборот: все корни второго уравнения являются также корнями первого,* например:

1) уравнения $(x-3)^2=16$ и $x^2-2x=4x+7$ равносильны, так как оба имеют одни и те же корни $x_1=-1$; $x_2=7$;

2) уравнения $(x-3)^2=16$ и $(x+1)(x-7)(x-1)=0$ неравносильны, так как хотя все корни первого (-1 и 7) удовлетворяют второму уравнению, но обратного сказать нельзя: второе уравнение имеет еще третий корень $x_3=1$, не удовлетворяющий первому уравнению.

Решение всякого уравнения заключается в том, что это уравнение подвергается преобразованиям (раскрытие скобок и освобождение от дробных членов, перенос членов, приведение подобных членов и т. д.), приводящим его к тому виду, какой дает возможность находить его корни. Квадратное уравнение, например, чаще всего приводится к виду $ax^2+bx+c=0$, или к виду, где левая часть разложена на произведение двух линейных множителей, а правая часть равна нулю.

Преобразованное уравнение может оказаться равносильным или неравносильным исходному, оно может иметь больше корней, чем исходное уравнение, т. е. иметь посторонние корни, или иметь меньше корней, чем исходное уравнение, т. е. некоторые корни могут оказаться потерянными. Поэтому важно выяснить, какие преобразования, производимые над уравнением, нарушают его равносильность.

2. Потеря корней. Уравнение $3x(x-1)=5(x-1)$ после раскрытия скобок и переноса всех членов в левую часть может быть решено по формуле полного квадратного уравнения или разложением левой части на множители; корни будут $x_1=1$; $x_2=\frac{5}{3}$. Если сократить обе части уравнения на общий множитель $(x-1)$, то получится уравнение $3x=5$, которое неравносильно первоначальному, так как имеет всего один корень $x=\frac{5}{3}$. *Следовательно, сокращение обеих частей уравнения на множитель, содержащий неизвестное, приводит к потере корней.*

3. Посторонние корни уравнения и их происхождение. Уравнение

$$2x-3=5 \qquad (1)$$

имеет единственный корень $x=4$. Возведем обе части этого уравнения в квадрат, получим:

$$(2x-3)^2=25; \qquad (2)$$

после переноса члена 25 в левую часть имеем: $(2x-3)^2-25=0$. Левая часть представляет собой разность двух квадратов, которая разлагается на два множителя:

$$(2x-3+5)(2x-3-5)=0.$$

Приравнивая нулю каждый сомножитель, получим:

$$2x-3+5=0;\ x_1=-1;$$
$$2x-3-5=0;\ x_2=4;$$

замечаем, что возведение в квадрат данного уравнения (1) привело к уравнению (2), неравносильному данному, так как появился посторонний корень $x_1=-1$. Этот корень принадлежит уравнению $2x-3=-5$, так как после возведения его в квадрат получится то же уравнение (2). Посторонние корни могут появляться не только от возведения в квадрат обеих частей уравнения, но и от умножения обеих частей на выражение, содержащее неизвестное, например: $3=x-1$; умножая обе части на $x+2$, получим $3(x+2)=(x-1)(x+2)$. После раскрытия скобок и переноса всех членов в одну часть получим квадратное уравнение, корни которого $x_1=-2$; $x_2=4$. Корень $x_1=-2$ не удовлетворяет уравнению $3=x-1$.

§ 75. Посторонние корни иррационального уравнения

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком радикала, называется иррациональным, например:

$$\sqrt{2x+7}=3; \qquad \sqrt[3]{3x-1}=4.$$

Не разбирая пока в полном объеме способов решения таких уравнений, покажем на простом примере возможность появления посторонних корней при решении иррационального уравнения.

Пусть имеем иррациональное уравнение $\sqrt{2x-1}=x-2$. Возведем обе части в квадрат, получим: $2x-1=(x-2)^2$. Решая это квадратное уравнение, получим корни: $x_1=1$; $x_2=5$. Проверим корни: $\sqrt{2\cdot 1-1}\neq 1-2$, корень $x_1=1$ уравнению не удовлетворяет, следовательно, он является посторонним.

Второй корень $x_2=5$ удовлетворяет уравнению. Возникает вопрос: каким образом появился лишний корень $x=1$? Этот посторонний корень принадлежит другому иррациональному уравнению: $-\sqrt{2x-1}=x-2$, которое после возведения в квадрат дает то же самое квадратное уравнение $2x-1=(x-2)^2$. По отношению к уравнению $-\sqrt{2x-1}=x-2$ корень $x=5$ является посторонним. Поэтому каждый раз, как решается иррациональное уравнение, необходимо проверять полученные корни подстановкой в данное уравнение. Обнаруженные посторонние корни отбрасываются.

§ 76. Решение иррациональных уравнений

Приемы решения иррациональных уравнений рассмотрим на примерах.

Пример 1. $\sqrt{x^2+5x+1}+1=2x$.

Уравнение содержит всего один радикал, оставляем его в левой части или, как говорят, *уединяем радикал*, перенося единицу в правую часть: $\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1$; возводим обе части в квадрат, получим:

$$x^2+5x+1=(2x-1)^2$$

или

$$x^2+5x+1=4x^2-4x+1;$$

после переноса всех членов в левую часть и приведения подобных членов имеем:

$$3x^2-9x=0;\ x^2-3x=0;\ x(x-3)=0;\ x_1=0;\ x_2=3.$$

Проверка:

$$\sqrt{0^2+5\cdot 0+1}+1\neq 2\cdot 0.$$

Следовательно, первый корень $x=0$ не удовлетворяет уравнению; отбрасываем его, ибо он принадлежит иррациональному уравнению $-\sqrt{x^2+5x+1}+1=2x$, как это легко проверить. Второй корень $x_2=3$ при проверке удовлетворяет данному уравнению.

Пример 2. $\sqrt{x-9}-\sqrt{x-18}=1$. Уравнение содержит два радикала в одной части; перенесем один из них в правую часть: $\sqrt{x-9}=1+\sqrt{x-18}$; после возведения в квадрат имеем: $x-9=1+2\sqrt{x-18}+x-18$; оставляем радикал в правой части, остальные члены переносим в левую часть:

$$8=2\sqrt{x-18};\quad 4=\sqrt{x-18};\quad 16=x-18;\quad x=34.$$

Проверка обнаруживает пригодность полученного корня.

Пример 3.

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+2}-\sqrt{2x+5}=\sqrt{3x}.$$

Уравнение содержит 4 радикала; распределим их по два по обеим частям уравнения:

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+2}=\sqrt{2x+5}+\sqrt{3x};$$

после возведения в квадрат имеем:

$$2x+3+2\sqrt{(2x+3)(3x+2)}+3x+2=$$
$$=2x+5+2\sqrt{(2x+5)\,3x}+3x;$$
$$2\sqrt{(2x+3)(3x+2)}=2\sqrt{(2x+5)\,3x};$$

сокращаем на 2 и снова возводим в квадрат:

$$(2x+3)(3x+2)=(2x+5)\,3x,$$
$$6x^2+13x+6=6x^2+15x;\quad 2x=6;\quad x=3.$$

Проверка: $\sqrt{9}+\sqrt{11}=\sqrt{11}+\sqrt{9}$, полученный корень удовлетворяет данному уравнению.

Пример 4. $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{b}{a}$; уравнение имеет вид пропорции. Составим производную пропорцию: сумма членов первого отношения так относится к их разности, как сумма членов второго отношения относится к их разности: $\frac{2\sqrt{a+x}}{2\sqrt{a-x}}=\frac{b+a}{b-a}$ $(b\neq a)$, возводим в квадрат обе части:

$$\frac{a+x}{a-x}=\frac{(b+a)^2}{(b-a)^2},$$

снова составляем производную пропорцию:

$$\frac{2a}{2x}=\frac{(b+a)^2+(b-a)^2}{(b+a)^2-(b-a)^2};$$

$$\frac{a}{x}=\frac{2(a^2+b^2)}{4ab}=\frac{a^2+b^2}{2ab};$$

$$x=\frac{2a^2b}{a^2+b^2}.$$

Проверка обнаруживает, что полученный корень удовлетворяет данному уравнению.

Если $b=a$, то исходное уравнение принимает вид:

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=1;$$

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x};$$

$$2\sqrt{a-x}=0;\quad \sqrt{a-x}=0;$$

$$a-x=0;\ x=a.$$

§ 77. Системы уравнений второй степени

Если уравнение с несколькими неизвестными приведено к виду, не содержащему дробных членов, и в нем произведены все возможные упрощения (раскрытие скобок, освобождение от радикалов, перенос всех членов в левую часть, приведение подобных членов), то *степенью этого уравнения называется сумма показателей степеней неизвестных в том члене уравнения, в котором эта сумма наибольшая,* например:

а) уравнение $2xy^2+5x^2+6y-20=0$ есть уравнение третьей степени, так как в первом члене сумма показателей при x и y наибольшая и равна $1+2=3$;

б) уравнение $\frac{x^2}{x^2+y^2}+2y^2=3$ после освобождения от дробных членов принимает вид

$$x^2+2y^2(x^2+y^2)=3(x^2+y^2)$$

или

$$2x^2y^2+2y^4-2x^2-3y^2=0.$$

Это уравнение четвертой степени относительно неизвестных x и y. *Система двух уравнений с двумя неизвестными называется системой второй степени, если по крайней мере одно из уравнений есть уравнение второй степени, а другое — не выше второй степени.*

Примеры.

1) $\begin{cases} x^2+y^2+2y-9=0; \\ 3x-y-1=0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+3y^2+xy=5; \\ 2x^2+y^2=9. \end{cases}$

Решить систему уравнений с двумя неизвестными — это значит найти все пары значений x и y, удовлетворяющих одновременно обоим уравнениям. Эти пары значений x и y называются решениями системы. Например, система

$$\begin{cases} x^2+y^2=5; \\ x-y=1 \end{cases}$$

имеет два решения:

$$1)\ x_1=-1;\ y_1=-2 \text{ и } 2)\ x_2=2;\ y_2=1;$$

тах как каждая пара значений неизвестных x и y после подстановки в данные уравнения приводит их к числовым тождествам:

1) $(-1)^2+(-2)^2=5;\quad 5=5;$
$\quad -1-(-2)=1;\quad 1=1.$

2) $2^2+1^2=5;\quad 5=5;$
$\quad 2-1=1;\quad 1=1.$

§ 78. Решение простейших систем уравнений второй степени

Основной способ, применяемый при решении систем уравнений, это способ подстановки. Особенно он удобен в тех случаях, когда одно из уравнений системы — первой степени.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} x^2+y^2+2y-9=0; \\ 3x-y-1=0. \end{cases}$$

Из второго уравнения выражаем y через x; $y=3x-1$. Подставляем это значение y в первое уравнение, получим:

$$x^2+(3x-1)^2+2(3x-1)-9=0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов имеем:

$$x^2-1=0;$$

$$x_1=-1; \quad x_2=1;$$

$$y_1=-4; \quad y_2=2.$$

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} x^2+3xy=18; \\ 3y^2+xy=6. \end{cases}$$

Разложим левые части данных уравнений на множители:

$$\begin{cases} x(x+3y)=18; \\ y(3y+x)=6. \end{cases}$$

После деления первого уравнения на второе получим:

$$\frac{x}{y}=3 \text{ или } x=3y.$$

Подстановка во второе уравнение дает:

$$3y^2+3y^2=6; \quad y^2=1;$$

$$y_1=-1; \quad y_2=1;$$

и

$$x_1=-3; \quad x_2=3.$$

§ 79. Искусственные приемы решения системы уравнений

В некоторых случаях системы уравнений решаются более изящно, чем способом подстановки, если прибегнуть к особым приемам, вытекающим из самой структуры данной системы. Такие приемы решения называются *искусственными*.

Применение искусственных приемов покажем на примерах:

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} x+y=5; \\ xy=6. \end{cases}$$

Неизвестные x и y можно принять за корни вспомогательного квадратного уравнения $z^2-5z+6=0$, откуда $z_1=2$; $z_2=3$; так как безразлично, какое неизвестное принято за z_1, какое за z_2, то всего имеем два решения:

$$x_1=2; \quad x_2=3;$$

и

$$y_1=3 \quad y_2=2.$$

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} x-y=7; \\ xy=-10. \end{cases}$$

Представим данную систему следующим образом:

$$\begin{cases} x+(-y)=7; \\ x(-y)=10. \end{cases}$$

Согласно предыдущему неизвестные x и $(-y)$ суть корни уравнения $z^2-7z+10=0$.

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=20; \\ xy=8. \end{cases}$$

Первый способ. Умножим второе уравнение на 2 и сложим с первым, получим: $(x+y)^2=36$, откуда $x+y= \pm 6$.

Теперь имеем взамен данной — исходной — системы две более простые системы:

$$1) \begin{cases} x+y=6; \\ xy=8; \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x+y=-6; \\ xy=8, \end{cases}$$

каждая из которых решается так же, как и система в примере 1.

Всего получим четыре решения:

$$x_1=-4; \quad x_2=-2; \quad x_3=4; \quad x_4=2;$$
$$y_1=-2; \quad y_2=-4; \quad y_3=2; \quad y_4=4.$$

Второй способ. Возведем второе уравнение системы в квадрат, получим:

$$x^2+y^2=20;$$
$$x^2y^2=64.$$

Если ввести обозначения $x^2=u$; $y^2=v$, то имеем:

$$\begin{cases} u+v=20; \\ uv=64. \end{cases}$$

Решая эту систему по образцу примера 1, находим:

$$u_1=16, \text{ откуда } x=\pm 4;$$
$$v_1=4, \text{ откуда } y=\pm 2$$

или

$$u_2=4, \text{ откуда } x=\pm 2;$$
$$v_2=16, \text{ откуда } y=\pm 4.$$

Так как знаки у неизвестных x и y должны быть одинаковы, то всего получаем те же уже найденные четыре решения.

Пример 4. Решить систему

$$\begin{cases} 2x^2+5xy-18y^2=0; \\ xy+y^2-12=0. \end{cases}$$

Первое уравнение системы — однородное уравнение второй степени, так как левая часть уравнения есть однородный многочлен относительно неизвестных x и y *), а правая часть — нуль.

Такое уравнение всегда имеет нулевое решение: $x=0$; $y=0$; но так как второе уравнение неоднородно, то система не имеет нулевого решения. Разделим почленно первое уравнение на y^2, получим:

$$2\frac{x^2}{y^2}+5\frac{x}{y}-18=0;$$

если обозначить $\frac{x}{y}=t$, то имеем квадратное уравнение

$$2t^2+5t-18=0,$$

корни его

$$t_1=-\frac{9}{2};\ t_2=2.$$

Теперь вместо данной системы имеем две более простые системы:

$$1)\ \begin{cases}\frac{x}{y}=-\frac{9}{2};\\ xy+y^2-12=0.\end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases}\frac{x}{y}=2;\\ xy+y^2-12=0.\end{cases}$$

Первая из них действительных решений не имеет; вторая имеет два решения:

$$x_1=4,\ y_1=2 \text{ и } x_2=-4,\ y_2=-2.$$

Пример 5. Решить систему

$$\begin{cases}x^2-xy+y^2=3;\\ 2x^2-xy-y^2=5.\end{cases}$$

Левая часть каждого уравнения данной системы представляет однородный многочлен второй степени относительно неизвестных x и y (все члены второго измерения), поэтому

*) Это значит, что все члены его одинаковой степени. Как известно, степенью одночлена называется сумма показателей при x и y, например, каждый из одночленов: $5x^2$; $3xy$; $-0{,}5y^2$ — второй степени, поэтому многочлен $5x^2+3xy-0{,}5y^2$ есть однородный многочлен.

Многочлен $x^3-2{,}5x^2y+4y^3$ — тоже однородный, так как все члены его третьей степени.

Многочлен $x^2-5xy+3y$ неоднородный, так как первые два члена — второй степени, а третий член — первой степени.

удобно ввести вспомогательное неизвестное t, полагая $y = tx$; тогда каждое из уравнений данной системы после подстановки примет вид:

$$x^2(1 - t + t^2) = 3; \quad x^2(2 - t - t^2) = 5;$$

так как $x \neq 0$, то разделим первое уравнение на второе, получим:

$$\frac{1 - t + t^2}{2 - t - t^2} = \frac{3}{5},$$

$$5 - 5t + 5t^2 = 6 - 3t - 3t^2,$$

или

$$8t^2 - 2t - 1 = 0;$$

это — квадратное уравнение относительно вспомогательного неизвестного t; решая его, находим:

$$t_1 = -\frac{1}{4}; \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, либо $y = -\frac{1}{4}x$, либо $y = -\frac{1}{2}x$.

Дальше решаем способом подстановки две более простые системы:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ y = -\frac{1}{4}x \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ y = \frac{1}{2}x. \end{cases}$$

Всего получим четыре решения:

$$x_1 = \frac{4}{\sqrt{7}}; \quad x_2 = -\frac{4}{\sqrt{7}}; \quad x_3 = -2; \quad x_4 = 2;$$

$$y_1 = -\frac{1}{\sqrt{7}}; \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{7}}; \quad y_3 = -1; \quad y_4 = 1.$$

§ 80. Графический способ решения системы уравнений

Пример 1. Пусть требуется решить систему:

$$\begin{cases} x^2 - y - 3x + 5 = 0; \\ 2x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение системы перепишем так:

$$y = x^2 - 3x + 5.$$

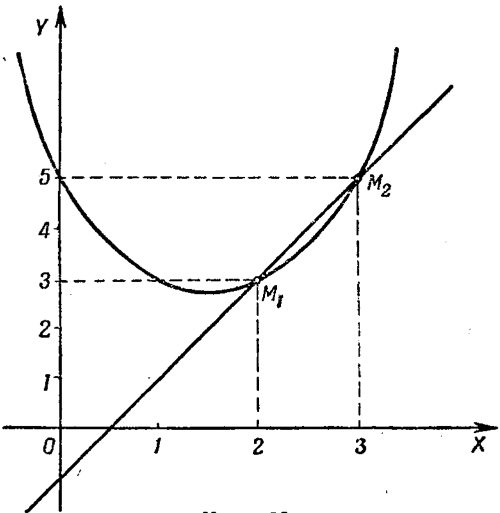
Этому уравнению соответствует в прямоугольной системе координат парабола, которую легко построить, если предварительно привести правую часть уравнения к виду

$$y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}.$$

Вершина параболы находится в точке $\left(\frac{3}{2};\ \frac{11}{4}\right)$. Для уточнения графика вычислим координаты еще нескольких точек; результаты запишем в таблицу:

x	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$	2	3...
y	$6\frac{3}{4}$	5	3	$\frac{11}{4}$	3	5...

Второму уравнению $2x-y-1=0$ соответствует прямая, которую легко построить, если придать уравнению вид $y=2x-1$.



Черт. 39.

Обе линии пересекаются в точках

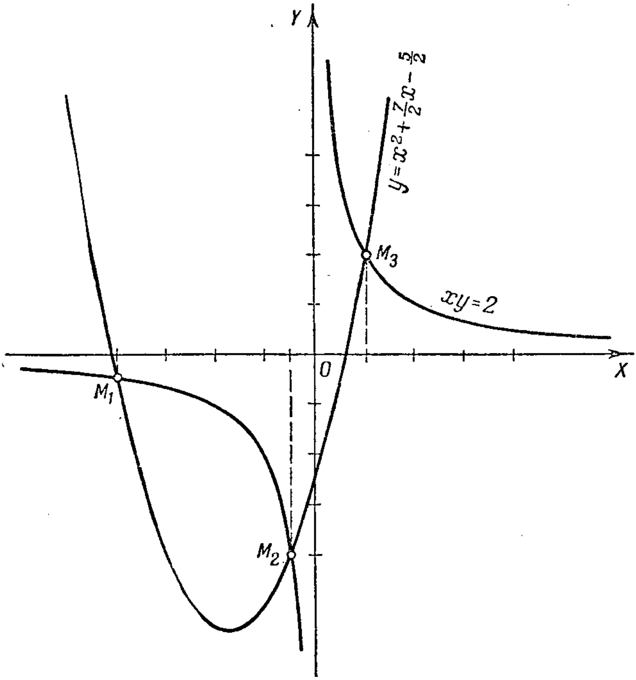
$$M_1(2;\ 3) \text{ и } M_2(3;\ 5) \text{ (черт. 39)}.$$

Координаты этих точек являются решениями данной системы.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} xy=2; \\ y=x^2+\frac{7}{2}x-\frac{5}{2}. \end{cases}$$

Графическое решение этой системы сводится к отысканию



Черт. 40.

точек пересечения гиперболы

$$xy=2$$

с параболой

$$y=x^2+\frac{7}{2}x-\frac{5}{2}.$$

На чертеже 40 показано, что всего имеется три точки пересечения

$$M_1\left(-4;\ -\frac{1}{2}\right);\quad M_2\left(-\frac{1}{2};\ -4\right);\quad M_3(1;\ 2).$$

Решение данной системы способом подстановки привело бы к уравнению

$$x\left(x^2+\frac{7}{2}x-\frac{5}{2}\right)=2$$

или $x^3+\frac{7}{2}x^2-\frac{5}{2}x-2=0$. Это — полное кубическое уравнение, решение которого не рассматривается в элементарной алгебре.

Таким образом, графический способ решения данной системы оказался наиболее простым и доступным.

§ 81. Графический способ решения уравнений высших степеней

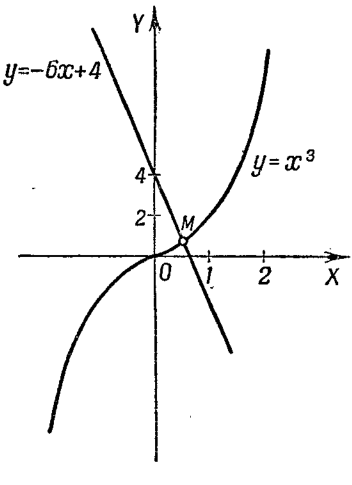
Пусть требуется найти действительные корни кубического уравнения $x^3+6x-4=0$. Представим уравнение в такой форме:

$$x^3=-6x+4.$$

Применим тот же прием, что и при графическом решении квадратного уравнения, а именно построим графики двух функций:

$y_1=x^3$ (кубическая парабола) (§ 6);

$y_2=-6x+4$ (прямая).



Черт. 41.

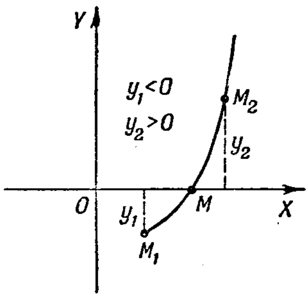
Абсциссы точек пересечения этих двух линий представляют корни данного уравнения. По чертежу 41 видим, что прямая пересекает параболу только в одной точке M; абсцисса ее $x=0{,}6$ есть приближенное значение корня уравнения.

Для получения графическим способом лучшего приближения можно построить в более крупном масштабе параболу вблизи точки пересечения ее с прямой, например в промежутке от $x=0$ до $x=1$.

Примечание. Полное кубическое уравнение вида $x^3+ax^2+bx+c=0$ подстановкой $x=z-\frac{a}{3}$ может быть приведено к виду $x^3+px+q=0$, пример решения которого был рассмотрен нами выше.

§ 82. Способ последовательных приближений

В § 70 было выяснено, что корни квадратного уравнения представляют абсциссы точек пересечения параболы с осью OX. Подобным образом могут быть истолкованы геометрически корни любого другого уравнения, только вместо параболы окажется другая линия.



Черт. 42.

Обратим внимание на одно важное обстоятельство.

Если найдены два значения аргумента x_1 и x_2, при которых соответствующие значения функции противоположны по знаку, то известно, что между x_1 и x_2 находится хотя бы один корень функции. Геометрически это означает, что между двумя точками M_1 и M_2 непрерывной (сплошной) линии (черт. 42), ординаты которых противоположны по знаку, имеется точка пересечения ее с осью абсцисс.

На этой идее основан один из приближенных способов решения уравнения, так называемый способ последовательных приближений. Сущность его поясним на примере.

Пример. Найти меньший положительный корень уравнения $x^3-5x+3=0$.

Наряду с данным кубическим уравнением рассмотрим функцию $y=x^3-5x+3$:

1) при $x=0$ функция $y=x^3-5x+3$ принимает значение $y=0^3-5\cdot 0+3=3$,

2) при $x=1$ функция равна: $y=1^3-5\cdot 1+3=-1$.

Следовательно, между 0 и 1 имеется корень уравнения. Обозначим этот корень через h: $x=h$, $0<h<1$.

Подставляя в уравнение на место x корень h, получим: $h^3-5h+3=0$. В предположении, что h — малая величина, можно пренебречь членом h^3, так как куб малого числа есть число еще меньшее; получим приближенное равенство:

$$-5h+3=0; \qquad h=\frac{3}{5}=0{,}6.$$

Найдено первое приближение корня. Для получения более точного значения корня полагаем $x=0{,}6+h_1$, где h_1 есть *поправка* к найденному первому приближению 0,6. Подстановка в уравнение дает: $(0,6+h_1)^3-5(0,6+h_1)+3=0$. После раскрытия скобок и приведения подобных членов получим: $h_1^3+3\cdot 0,6h_1^2-3,92h_1+0,216=0$; пренебрегая членами h_1^3 и h_1^2, напишем приближенное равенство:

$$-3,92h_1+0,216=0;$$

$$h_1=\frac{0,216}{3,92}=0,055.$$

Следовательно, $x\approx 0,6+0,055=0,655$. Как показывают более точные вычисления, все цифры найденного корня являются точными. Для получения еще более точных значений корня можно и дальше пользоваться тем же приемом.

Упражнения

1. Разложением левой части на множители решить следующие уравнения:

1) $x^3-2x^2-15x=0$; 5) $2z^3-5z^2+2z-5=0$;
2) $y^3+3y^2-4y=0$; 6) $x^3-8=0$;
3) $v^3+11v^2+28v=0$; 7) $x^3+1=0$;
4) $x^3-3x^2-x+3=0$; 8) $y^4-2y^2=0$.

2. Составить алгебраическое уравнение наинизшей степени, имеющее следующие корни:

1) 1; 2 и -3; 2) 0 и ± 1; 3) ± 2 и ± 3;
4) -1; 2; 3 и 4; 5) a, b, $-c$ и d.

3. Решить уравнения:

1) $x^4-17x^2+16=0$;
2) $x^4-50x^2+49=0$;
3) $u^4-11u^2+30=0$;
4) $3y^4-28y^2+9=0$;
5) $z^4-3z^2-4=0$.

4. Решить следующие иррациональные уравнения и полученные корни проверить:

1) $3+5\sqrt{x}=13$;
2) $11-3\sqrt{x}=5$;
3) $16-\sqrt{\frac{2}{3}x}=12$;
4) $\sqrt{16+\sqrt{x+4}}=5$;
5) $\sqrt{5+\sqrt{3+x}}=3$;
6) $\frac{2x-5}{\sqrt{x+2}}=\sqrt{x+2}$;
7) $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+24}=14$;
8) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-4}=5$;
9) $\sqrt{x+5}=\sqrt{4x+9}-\sqrt{x}$;
10) $\sqrt{x+10}-\sqrt{x+3}=\sqrt{4x-23}$;

11) $\sqrt{4x-3a}-\sqrt{x+6a}=\sqrt{x-3a}$;
12) $\sqrt{8x+1}-\sqrt{2x-2}=\sqrt{7x+4}-\sqrt{3x-5}$;
13) $\sqrt{x+4}=7$; 14) $\sqrt{36+x}=2+\sqrt{x}$;
15) $x+\sqrt{25-x^2}=7$; 16) $x-\sqrt{25-x^2}=1$;
17) $4x+\sqrt{5x+10}=17$; 18) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$;
19) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$; 20) $\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}=\sqrt{7x+4}$; 21) $\dfrac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}}=\dfrac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$;
22) $\sqrt{5a+x}+\sqrt{5a-x}=\dfrac{12a}{\sqrt{5a+x}}$;
23) $\dfrac{2}{x+\sqrt{2-x^2}}+\dfrac{2}{x-\sqrt{2-x^2}}=x$;
24) $y\sqrt{\dfrac{a}{y}-1}=\sqrt{y^2-b^2}$; 25) $\sqrt{a^2+x\sqrt{b^2+x^2-a^2}}=x-a$; 26) $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b}$;
27) $\sqrt{2+x}+\sqrt{x}=\dfrac{4}{\sqrt{2+x}}$;
28) $2x+2\sqrt{a^2+x^2}=\dfrac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

5. Решить следующие системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=74; \\ x-y=2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y=2; \\ xy-12. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5(x-y)=4y; \\ x^2+4y^2=181. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+2y^2=34; \\ x+y=7. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2-2xy-y^2=1; \\ x+y=2. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2+3y^2-4x-5y-8=0; \\ x-y+1=0. \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1; \\ x+y=4. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} y-x=2; \\ \dfrac{10x+y}{xy}=3. \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{16}{15}; \\ x-y=2. \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x^2+xy=12; \\ xy-y^2=2. \end{cases}$

11) $\begin{cases} u^2+v^2=8; \\ \dfrac{1}{u^2}+\dfrac{1}{v^2}=0,5. \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x^2+y^2=65; \\ xy=28. \end{cases}$

13) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=18; \\ x+y=12. \end{cases}$ 14) $\begin{cases} x+xy+y=27; \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2{,}5. \end{cases}$

15) $\begin{cases} x^2+y^2=45; \\ \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{10}{3}. \end{cases}$ 16) $\begin{cases} x:12=3:y; \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5. \end{cases}$

17) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=2\sqrt{xy}; \\ x+y=20. \end{cases}$ 18) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=2{,}5; \\ x+y=10. \end{cases}$

19) $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=7; \\ x^2+y^2+xy=133. \end{cases}$ 20) $\begin{cases} x+y=a\sqrt{xy}; \\ x-y=b\sqrt{\dfrac{x}{y}}. \end{cases}$

21) $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1; \\ \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=4. \end{cases}$ 22) $\begin{cases} x+y=72; \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6. \end{cases}$

23) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{7}{\sqrt{xy}}+1; \\ \sqrt{x^3y}+\sqrt{y^3x}=78. \end{cases}$

24) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=a \quad (a>0); \\ \sqrt{xy}=b. \end{cases}$

25) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{6x}}=\dfrac{5}{2}; \\ xy-x-y=9. \end{cases}$

26) $\begin{cases} 5\sqrt{x^2-3y-1}+\sqrt{x+6y}=19; \\ 3\sqrt{x^2-3y-1}=1+2\sqrt{x+6y}. \end{cases}$

6. Произведение двух чисел равно 135, а их разность равна 6. Найти эти числа.
7. Разность двух чисел относится к их произведению, как 1 : 24, а сумма этих чисел относится к их разности, как 5 : 1. Найти эти числа.
8. Сумма двух обратных дробей равна $2\frac{1}{6}$, а разность их равна $\frac{5}{6}$. Найти эти дроби.

9. Периметр прямоугольника равен 28 *см*, площадь его равна 48 *см*^{2}. Найти стороны прямоугольника.
10. Число, выражающее площадь прямоугольника, составляет 120% от числа, выражающего его периметр. Найти стороны прямоугольника, если основание на 2 *см* больше высоты.
11. Сумма диагоналей ромба равна 24,5 *см*; площадь ромба равна 73,5 *см*^{2}. Найти диагонали ромба.
12. Площадь трапеции с высотой 4,8 *см* равна площади прямоугольника со сторонами, равными основаниям трапеции; средняя линия трапеции равна 5 *см*. Найти основания трапеции.
13. Периметр прямоугольного треугольника равен 41 *см*, один из катетов равен 10,5 *см*. Найти гипотенузу и другой катет.
14. Высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, равна 4 *см*, а гипотенуза равна 10 *см*. Найти отрезки гипотенузы.

ГЛАВА VIII

ПРОГРЕССИИ

§ 83. Числовая последовательность

Пример 1. Из геометрии известно, что сумма внутренних углов выпуклого многоугольника, имеющего n сторон, определяется по формуле

$$S_n = 2d(n-2);$$

здесь n может принимать лишь натуральные значения, т. е. целые и положительные, начиная с $n=3$, так как наименьшее число сторон многоугольника — три.

Давая n значения: $n=3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots$, получим соответствующие значения для суммы углов S_n:

$$S_n = 2d,\ 4d,\ 6d,\ 8d,\ 10d,\ \ldots$$

Пример 2. При отправке телеграммы взимается плата в размере 30 коп. за каждое слово. Выразить формулой стоимость телеграммы как функцию количества слов, содержащихся в ней.

Очевидно, что если обозначим количество слов через n, стоимость через S, то имеем:

$$S = 30n.$$

В приведенных двух примерах мы имели дело с функциями, для которых допустимыми значениями аргумента являются только натуральные числа: $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

В этих случаях функция является *функцией натурального аргумента*. Всякая такая функция называется *последовательностью*. Приведем еще другие примеры последовательностей.

Пример 3. Если возвести каждое натуральное число в квадрат, то получим последовательность квадратов натуральных чисел: 1, 4, 9, 16, ..., n^2, ...

Пример 4. Каждому натуральному числу можно сопоставить обратное ему число; эти обратные числа образуют последовательность:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Пример 5. При извлечении квадратного корня из числа 2 с точностью до 1, до 0,1, до 0,01 и т. д. получается последовательность приближенных значений $\sqrt{2}$ по недостатку:

$$1,\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ \ldots$$

Определение. *Последовательностью называется функция натурального аргумента. Значения этой функции называются членами последовательности.*

Каждому натуральному числу соответствует вполне определенное значение этой функции, т. е. вполне определенный член последовательности. Последовательность может быть задана формулой, определяющей каждый член последовательности по номеру этого члена, например, формула

$$S = \frac{n}{n^2+1}$$

определяет последовательность

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \ldots \quad (n = 1, 2, 3, 4, \ldots).$$

В некоторых случаях последовательность задается не формулой; это имеет место в приведенном выше примере 5 при рассмотрении последовательности приближенных значений квадратного корня из 2 с неограниченно возрастающей точностью. Здесь формулу заменяет правило, по которому находятся члены этой последовательности; это правило состоит в том, что первый член есть приближенное значение $\sqrt{2}$ по недостатку с точностью до 1, второй — с точностью до 0,1, третий — с точностью до 0,01 и т. д. Вообще, n-й член последовательности есть приближенное значение $\sqrt{2}$ по недостатку с точностью до $\frac{1}{10^{n-1}}$.

Последовательность называется возрастающей, если каждый следующий ее член больше предыдущего; например, последовательности:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots$$
$$1,\ 1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ \ldots$$
$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{9},\ \ldots,\ \frac{n}{2n+1},\ \ldots$$

— возрастающие последовательности.

Последовательность называется убывающей, если каждый следующий ее член меньше предыдущего. Таковыми, например, будут последовательности:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$$
$$-1;\ -10;\ -100;\ -1000;\ \ldots,\ -10^{n-1},\ \ldots$$

Последовательность:

$$1,\ -3,\ 5,\ -7,\ 9,\ -11,\ \ldots$$

не является ни возрастающей, ни убывающей.

Примечание. Число членов последовательности предполагается неограниченным (бесконечным), т. е. за каждым ее членом следуют другие.

Иногда при решении некоторых задач приходится рассматривать последовательности с конечным числом членов; например, если требуется найти сумму первых 20 четных чисел натурального ряда, то в данном случае речь идет о последовательности 2, 4, 6, ..., 40, общий член которой $a_n = 2n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots, 20$).

Такие последовательности называются *конечными* (в отличие от бесконечных).

§ 84. Арифметическая прогрессия

Рассмотрим следующие две последовательности:

$$4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ \ldots;$$
$$8,\ 3,\ -2,\ -7,\ -12,\ \ldots$$

Закон составления их один и тот же: разность между любым членом последовательности и ближайшим ему слева (предыдущим) есть величина постоянная. В первом примере эта разность равна: $7-4=10-7=\ldots=3$; во втором примере имеем: $3-8=-2-3=-7-(-2)=\ldots=-5$.

Определение. *Арифметической прогрессией называется последовательность чисел, в которой каждый следующий член получается из предыдущего прибавлением к нему одного и того же числа, называемого разностью прогрессии.* Разность прогрессии обозначается буквой d; следовательно, в первом примере $d=3$; во втором примере $d=-5$. Члены арифметической прогрессии обозначаются a_1, a_2, a_3 и т. д.; в первом примере $a_1=4$; $a_2=7$; $a_3=10$.

Если $d>0$, то прогрессия возрастающая, при $d<0$ — убывающая. Чтобы показать, что данная последовательность есть арифметическая прогрессия, ставят впереди ее знак $\div$, например $\div 7, 9, 11, 13, \ldots$

Если $d=0$, то все члены прогрессии равны между собой. Изучение таких прогрессий интереса не представляет.

§ 85. Формула любого члена арифметической прогрессии

По определению прогрессии имеем:

$$a_2=a_1+d;$$
$$a_3=a_2+d=a_1+2d;$$
$$a_4=a_3+d=a_1+3d \text{ и т. д.}$$

Вообще

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

Любой член арифметической прогрессии равен первому члену, сложенному с разностью, умноженной на число членов, предшествующих определяемому.

Пример. 18; 14; 10; 6; ...; $d=-4$.

Найти $a_{16}=?$

$$a_{16}=a_1+15d;\quad a_{16}=18+15\cdot(-4)=-42.$$

§ 86. Среднее арифметическое

Пусть a_{k-1}, a_k, a_{k+1} — три последовательных члена арифметической прогрессии. Тогда по свойству прогрессии имеем:

$$a_k-a_{k-1}=a_{k+1}-a_k;$$
$$2a_k=a_{k-1}+a_{k+1};$$
$$a_k=\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}.$$

Полусумма двух чисел называется их средним арифметическим; следовательно, *любой член арифметической прогрессии* (кроме первого) *есть среднее арифметическое двух смежных с ним членов.*

Пример. Между числами 8 и 20 вставить 7 средних арифметических. Это значит, что надо найти 7 таких чисел, которые вместе с данными числами 8 и 20 образовали бы арифметическую прогрессию; первым членом этой прогрессии является число 8, 9-м — число 20.

Имеем:

$$a_9 = a_1 + 8d; \quad 20 = 8 + 8d, \quad d = 1{,}5.$$

Искомая прогрессия:

$$\div 8;\ 9{,}5;\ 11;\ 12{,}5;\ 14;\ 15{,}5;\ 17;\ 18{,}5;\ 20.$$

Этот пример можно обобщить: если нужно вставить «k» средних арифметических между числами a и b, то имеем

$$b = a + (k+1)\,d,$$

$$d = \frac{b-a}{k+1}.$$

По первому члену и разности d можно написать остальные члены.

§ 87. Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии

Предварительно отметим одно свойство арифметической прогрессии с конечным числом членов.

Пусть имеем:

$$\div 2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ 32,\ 37.$$

Сложим члены, равноотстоящие от начала и конца прогрессии: $2+37=39$; $7+32=39$; $12+27=39$; $17+22=39$; замечаем, что *сумма двух членов арифметической прогрессии, равноотстоящих от концов, равна сумме крайних членов.*

Так оно и должно быть: первые слагаемые этих сумм (т. е. 2, 7, 12, 17) возрастают на 5; зато вторые слагаемые

(37, 32, 27, 22) убывают на 5; от этого сумма каждой пары слагаемых остается без изменения.

Перейдем к выводу формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии. Обозначим эту сумму через S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n. \qquad (1)$$

Если слагаемые в правой части равенства напишем в обратном порядке, то сумма S_n от этого не изменится:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1. \qquad (2)$$

Сложим почленно равенства (1) и (2); получим:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + \\ + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

В каждой скобке имеем сумму двух членов, равноотстоящих от концов прогрессии; следовательно, все эти суммы в скобках равны между собой и каждая из них равна сумме крайних членов $a_1 + a_n$; таких скобок всего n, т. е. столько, сколько членов прогрессии. Поэтому имеем:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n;$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}.$$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии равна полусумме крайних членов, умноженной на число членов.

Если воспользоваться выражением общего члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + (n - 1)d$, то формуле суммы можно придать другой вид:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)\,d}{2}\,n;$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)\,d}{2}\,n.$$

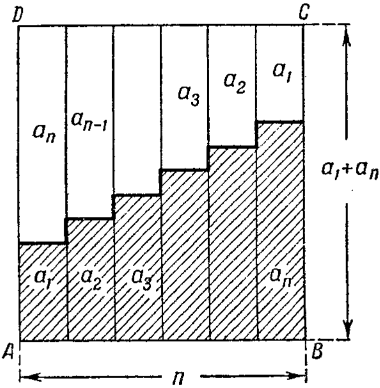
Этой формулой удобно пользоваться, если нужно найти число членов прогрессии по данным a_1, d и S_n.

§ 88. Геометрическая иллюстрация суммы S_n

Дадим геометрический вывод формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии.

Прежде всего заметим следующее: если основание прямоугольника равно единице, то площадь прямоугольника выражается тем же числом, что и его высота.

Строим n прямоугольников с высотами, равными членам арифметической прогрессии (черт. 43), основание каждого прямоугольника равно единице; все прямоугольники плотно приставлены друг к другу. Получим ступенчатую фигуру (на чертеже заштриховано), площадь ее численно равна S_n. Если к заштрихованной фигуре пристроить такую же фигуру, но перевернутую, то получится прямоугольник $ABCD$ с основанием $AB=n$ и высотой $AD=a_1+a_n$; площадь ступенчатой фигуры есть половина площади прямоугольника, т. е. $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$.



Черт. 43.

§ 89. Примеры на применение формулы суммы S_n

Пример 1. Найти сумму первых n чисел натурального ряда. Имеем: $a_1=1$; $a_n=n$; число членов также равно n; по первой формуле суммы можно написать:

$$S_n=\frac{(1+n)n}{2}.$$

Пример 2. Найти сумму 10 членов прогрессии:

$$\div 18,\ 14,\ 10,\ 6,\ \ldots$$

В данном случае $d=14-18=-4$; $a_1=18$; $n=10$.

По второй формуле суммы имеем:

$$S_{10}=\frac{2\cdot 18+9\cdot(-4)}{2}\cdot 10;\quad S_{10}=0.$$

Пример 3. Четвертый член прогрессии 9, девятый член равен -6. Сколько нужно взять членов, чтобы сумма их равнялась 54?

$$\begin{aligned} a_9=-6 \quad &\text{или} \quad a_1+8d=-6\\ a_4=9 \quad &\text{или} \quad a_1+3d=9\\ \hline &\qquad\qquad 5d=-15; \end{aligned}$$

$$d=-3;$$

$$9=a_1+3\cdot(-3);$$

$$a_1=18.$$

По второй формуле суммы имеем:

$$54=\frac{2\cdot(18)+(n-1)\cdot(-3)}{2}n;$$

$$108=(36-3n+3)\cdot n;$$

$$36=(13-n)n;$$

$$n^2-13n+36=0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим:

$$n_1=4;\quad n_2=9.$$

Оба ответа удовлетворяют условию задачи, что обнаруживается при проверке:

$$\div 18,\ 15,\ 12,\ 9,\ 6,\ 3,\ 0,\ -3,\ -6;$$

$$S_4=54;$$

$S_9=S_4+0=54$, так как сумма последних пяти членов равна нулю. Такое положение, очевидно, будет иметь место, если прогрессия имеет члены, противоположные по знаку, но равные по абсолютной величине.

§ 90. Сумма квадратов первых n чисел натурального ряда

Обозначим сумму первых n чисел натурального ряда через S_1, а сумму их квадратов через S_2, так что

$$S_1=1+2+3+4+\ldots+n;$$

$$S_2=1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2.$$

Если в тождестве

$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$$

будем последовательно давать n значения 1, 2, 3, 4, ..., n, то получим:

$$2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1;$$
$$3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1;$$
$$4^3-3^3=3\cdot3^2+3\cdot3+1;$$
$$5^3-4^3=3\cdot4^2+3\cdot4+1;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$n^3-(n-1)^3=3(n-1)^2+3(n-1)+1;$$
$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1.$$

Складываем почленно эти равенства:

$$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+n^2)+ \\ +3(1+2+3+4+\dots+n)+n$$

или

$$(n+1)^3-1^3=3S_2+3S_1+n. \qquad (3)$$

Но

$$S_1=\frac{(n+1)n}{2}.$$

Подставив значение S_1 в равенство (3), получим:

$$n^3+3n^2+3n=3S_2+\frac{3n(n+1)}{2}+n,$$

откуда

$$6S_2=2(n^3+3n^2+3n)-3n^2-3n-2n=2n^3+3n^2+n= \\ =n(n+1)(2n+1);$$

$$S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Подобным же образом можно найти сумму кубов первых n чисел натурального ряда, если исходить из тождества

$$(n+1)^4-n^4=4n^3+6n^2+4n+1;$$

получим

$$S_3=\left[\frac{(1+n)n}{2}\right]^2=S_1^2.$$

§ 91. Геометрическая прогрессия

Определение. *Последовательность чисел, составленная по такому закону, что каждый следующий член равен предыдущему, умноженному на одно и то же число, называется геометрической прогрессией.* Приведем примеры геометрических прогрессий:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \ldots;$$

$$27,\ 9,\ 3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \ldots;$$

$$12,\ -6,\ 3,\ -\frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ \ldots$$

Каждый член первой последовательности, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на 2; во втором примере последующий член получается из предыдущего умножением на $\frac{1}{3}$, в третьем примере — умножением на $-\frac{1}{2}$.

Число, на которое надо умножить предыдущий член, чтобы получить последующий, называется *знаменателем прогрессии*. Знаменатель прогрессии обозначается буквой q. Члены геометрической прогрессии, аналогично членам арифметической прогрессии, будем обозначать a_1, a_2, a_3 и т. д. Геометрическую прогрессию будем обозначать знаком $\div\div$, поставленным впереди ее членов.

Если знаменатель прогрессии q больше 1, то прогрессия является возрастающей при $a_1 > 0$ и убывающей при $a_1 < 0$. Если $q = 1$, то все члены геометрической прогрессии равны между собой. Изучение таких прогрессий интереса не представляет.

В приведенных выше примерах первая прогрессия — возрастающая, вторая — убывающая и третья — не является ни возрастающей, ни убывающей. (Здесь последующий член бывает то больше, то меньше предыдущего.)

§ 92. Формула любого члена геометрической прогрессии

По определению геометрической прогрессии имеем:

$$a_2 = a_1 q;$$
$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2,$$
$$a_4 = a_3 q = a_1 q^3 \text{ и т. д.}$$

Очевидно, что

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Любой член геометрической прогрессии равен первому члену, умноженному на знаменатель прогрессии с показателем степени, равным числу членов, предшествующих определяемому.

Пример 1. Найти 8-й член прогрессии:

$$\div\div 1,\ 3,\ 9,\ 27,\ \ldots$$

В этом примере $a_1 = 1$; $q = 3$; поэтому

$$a_8 = a_1 q^7;$$
$$a_8 = 1 \cdot 3^7 = 2187.$$

Пример 2. Найти 10-й член прогрессии:

$$2,\ -\sqrt{2},\ 1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ldots$$

Знаменатель $q = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $a_1 = 2$.

$$a_{10} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^9 = -2\,\frac{2^4\sqrt{2}}{2^9} = -\frac{\sqrt{2}}{16}.$$

§ 93. Среднее геометрическое

Пусть a_{k-1}, a_k, a_{k+1} — три последовательных члена геометрической прогрессии, где индекс «k» — любое натуральное число, большее 1. Тогда имеем:

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_{k+1}}{a_k};$$

каждое из этих отношений равно знаменателю прогрессии q. По свойству пропорции имеем:

$$a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}.$$

Число, квадрат которого равен произведению двух данных чисел, называется их средним геометрическим; например, число 6 есть среднее геометрическое чисел 4 и 9, так как $6^2 = 4 \cdot 9$.

Таким образом, *любой член геометрической прогрессии есть среднее геометрическое двух смежных с ним членов.*

Пример. Между числами 2 и 1458 вставить пять средних геометрических.

Условие задачи надо понимать так: требуется найти пять таких чисел, которые вместе с данными числами 2 и 1458 образовали бы геометрическую прогрессию с 1-м членом $a_1=2$ и 7-м членом $a_7=1458$.

Имеем:

$$a_7=a_1\cdot q^6;$$
$$1458=2\cdot q^6;\ 729=q^6;$$
$$q=\sqrt[6]{729}=\pm 3.$$

Возможны две прогрессии:

$$\div\!\div\ 2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162,\ 486,\ 1458$$

или

$$\div\!\div\ 2,\ -6,\ 18,\ -54,\ 162,\ -486,\ 1458.$$

§ 94. Сумма первых n членов геометрической прогрессии

Обозначим сумму первых n членов геометрической прогрессии через S_n:

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n. \tag{4}$$

Умножим обе части равенства (4) на q; получим:

$$S_nq=a_1q+a_2q+a_3q+\ldots+a_{n-1}q+a_nq; \tag{5}$$

так как

$$a_1q=a_2,\quad a_2q=a_3,\ \ldots,\ a_{n-1}q=a_n,$$

то равенство (5) примет вид

$$S_nq=a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n+a_nq. \tag{6}$$

Вычитаем из равенства (6) равенство (4):

$$S_nq-S_n=a_nq-a_1,$$
$$S_n(q-1)=a_nq-a_1,$$

откуда

$$S_n=\frac{a_nq-a_1}{q-1}.$$

Формулу суммы можно представить в другом виде, если в ней a_n заменить через a_1q^{n-1}; получим:

$$S_n = \frac{a_1q^{n-1}q - a_1}{q-1} = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1};$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}. \qquad (7)$$

Если знаменатель прогрессии $|q| < 1$, то удобнее писать формулу так:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q},$$

чтобы числитель и знаменатель дроби были положительны при $a_1 > 0$. Решим старинную задачу, относящуюся к XVIII веку.

Задача. Некто продает лошадь с условием, чтобы за первый гвоздь подковы был уплачен 1 грош $\left(\frac{1}{2}\text{ коп.}\right)$, за второй гвоздь — 2 гроша, за третий — 4 гроша и т. д. Всех подковных гвоздей у лошади 32. Спрашивается, во сколько он ценит лошадь?

Очевидно, надо найти сумму 32 членов геометрической прогрессии, первый член которой $a_1 = 1$; знаменатель $q = 2$.

$$a_{32} = 1 \cdot 2^{31};$$

$$S_{32} = \frac{2 \cdot 2^{31} - 1}{2-1} = 2^{32} - 1 = 4\,294\,967\,295 \text{ (грошей)}.$$

В переводе на рубли это составит около 21,5 млн. руб. Цена фантастическая.

Пример. Сумма первых трех членов прогрессии равна 6, а сумма 2-го, 3-го и 4-го членов равна -3. Найти прогрессию. Запишем условие:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 6;$$
$$a_2 + a_3 + a_4 = -3.$$

Выражая члены прогрессии через первый, получим:

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 = 6 \quad \text{или} \quad a_1(1 + q + q^2) = 6; \qquad (8)$$

$$a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = -3, \qquad a_1q(1 + q + q^2) = -3. \qquad (9)$$

Разделим равенство (9) на равенство (8); получим: $q = -\frac{1}{2}$.

Первый член находим из соотношения

$$a_1=\frac{6}{1+q+q^2}=\frac{6}{\frac{3}{4}}=8.$$

Искомая прогрессия: $\div\div 8;\ -4;\ 2;\ -1;\ \ldots$

§ 95. Сходящаяся геометрическая прогрессия

Определение. *Геометрическая прогрессия a, aq, aq^2, aq^3, ... называется сходящейся, если ее знаменатель по абсолютной величине меньше единицы* ($|q|<1$)*).

Примерами таких прогрессий могут служить следующие:

$$\div\div 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots;$$

$$\div\div 3,\ -1,\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ -\frac{1}{81},\ \ldots$$

Понятие суммы сходящейся прогрессии нуждается в особом определении, так как невозможно выполнить непосредственное сложение членов такой прогрессии по той причине, что число членов бесконечно, а понятие суммы до сих пор относилось только к конечному числу слагаемых.

Прежде чем дать определение суммы сходящейся прогрессии, рассмотрим следующий конкретный пример.

Дана прогрессия $\div\div\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \ldots$

Найдем сумму первых n ее членов S_n. Последовательно полагая $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$, имеем:

$$S_1=\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2},$$

$$S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=1-\frac{1}{2^2},$$

$$S_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}=1-\frac{1}{2^3},$$

$$S_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}=1-\frac{1}{2^4},$$

. . . .

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}.$$

---

*) Сходящаяся прогрессия называется также бесконечно убывающей.

Замечаем, что по мере возрастания числа членов n сумма все ближе и ближе подходит к 1 и разность между ними может быть сделана (выбором достаточно большого n) сколь угодно малой. Например, если желательно, чтобы разность между 1 и S_n сделалась меньше 0,001, достаточно взять 10 или больше членов, так как при $n=10$

$$S_{10}=1-\frac{1}{2^{10}}=1-\frac{1}{1024}, \quad 1-S_{10}=\frac{1}{1024}<0{,}001.$$

Если желательно разность между 1 и S_n сделать меньше, например 0,000001, то можно найти соответствующее число членов, сумма которых отличается от единицы меньше чем на 0,000001. Для этого надо решить неравенство

$$\frac{1}{2^n}<\frac{1}{1\,000\,000}, \text{ откуда } 2^n>10^6;$$

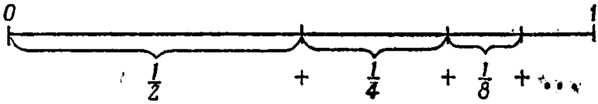
при всех $n \geqslant 20$ это неравенство удовлетворяется.

В таком случае говорят, что при неограниченном возрастании n сумма S_n стремится к пределу, равному единице:

$$S_n \to 1 \text{ при } n \to \infty.$$

Читается эта краткая запись так: S_n стремится к единице при n, стремящемся к бесконечности. Знак ∞ (бесконечность) выражает мысль о неограниченном возрастании n.

Определение. *Суммой сходящейся геометрической прогрессии называется предел суммы первых n членов, когда n неограниченно возрастает.*



Черт. 44.

На чертеже 44 наглядно изображен процесс неограниченного приближения S_n к 1.

Найдем теперь сумму любой сходящейся прогрессии. Имеем: $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$; правую часть формулы расчленим на два слагаемых:

$$S_n=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1q^n}{1-q};$$

первое слагаемое $\frac{a_1}{1-q}$ есть определенное число и от n не зависит; второе слагаемое содержит множитель q^n, абсолютная величина его $|q^n| = |q|^n \to 0$ при $n \to \infty$, так как $|q| < 1$, поэтому и произведение $\frac{a_1}{1-q} q^n$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Итак: $S_n \to \frac{a_1}{1-q}$; поэтому пишут:

$$S = \frac{a_1}{1-q},$$

где S означает сумму сходящейся прогрессии.

Сумма сходящейся прогрессии равна первому члену, деленному на разность между единицей и знаменателем прогрессии.

Пример 1. Найти сумму прогрессии:

$$\div\div 1, \ -\frac{1}{3}, \ \frac{1}{9}, \ -\frac{1}{27}, \ \ldots$$

$$a_1 = 1; \quad q = -\frac{1}{3};$$

поэтому имеем:

$$S = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4}.$$

Пример 2. Смешанную периодическую дробь 0,5777... обратить в обыкновенную. Представим данную дробь в виде суммы ее разрядных единиц:

$$0{,}5777\ldots = 0{,}5 + 0{,}07 + 0{,}007 + 0{,}0007 + \ldots$$

Слагаемые в правой части, начиная со второго, представляют члены сходящейся геометрической прогрессии со знаменателем $q = 0{,}1$; поэтому имеем:

$$0{,}5777\ldots = 0{,}5 + \frac{0{,}07}{1-0{,}1} = 0{,}5 + \frac{7 \cdot 10}{100 \cdot 9} = \frac{1}{2} + \frac{7}{90} = \frac{26}{45};$$

$$0{,}5777\ldots = \frac{26}{45}.$$

Упражнения

1. Написать несколько первых членов последовательности, если общий член выражается формулой $a_n = \frac{n}{n+1}$.

2. Та же задача при условии, что

1) $a_n = \frac{n}{3n+1}$; 2) $a_n = \frac{1}{2^n - 1}$; 3) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2+1}$;

4) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n(n+1)}$.

3. Подобрать по возможности простую формулу для общего члена следующих последовательностей:

1) 1, 3, 5, 7, 9, ...

2) $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \frac{6}{11}, \dots$

3) $a^2, a^4, a^6, \dots$

4. Какие из следующих последовательностей представляют арифметическую прогрессию?

1) 3, 6, 9, 12, ...
2) 1, 8, 27, 64, ...
3) 1, 3, 7, 15, 31, ...
4) 5, 3, 1, —1, —3, ...

5. Дана прогрессия

$$\div 3, 7, 11, 15, \dots$$

Найти: 1) 7-й член; 2) k-й член.

6. В прогрессии

$$\div 5, 2, -1, -4, \dots$$

найти: 1) a_{12}; 2) a_n.

7. Найти общий член прогрессии

$$\div 3b, 5b, 7b, \dots \ (b \neq 0).$$

8. Дана прогрессия

$$\div 3, 5, 7, 9, \dots$$

Если вычеркнуть в ней члены, стоящие на четных местах, то какую последовательность чисел образуют оставшиеся члены?

9. Между числами 4 и 40 вставить 8 средних арифметических.

10. Диаметры шкивов, насаженных на общий вал, образуют арифметическую прогрессию из пяти членов, крайние члены которой равны 120 *мм* и 216 *мм*; найти диаметры промежуточных шкивов.

11. Найти сумму 12 членов прогрессии

$$\div 4, 8, 12, 16, \dots$$

12. Сколько раз пробьют часы за сутки, если они отбивают и получасы?

13. Показать, что сумма первых n нечетных чисел есть точный квадрат.

14. Заполнить пустые места следующей таблицы.

	a_1	a_n	d	n	S_n
1	7	39		9	
2	8		—2		14
3	31		—7	10	
4	1	61	5		
5			12	40	9400
6	2		3		442
7		22	0,4	43	
8		25,7	1,3		266
9	— 4,5	100			955
10		—15		11	0

15. Сумма 2-го и 5-го членов прогрессии равна 14, сумма 3-го и 7-го равна 8. Найти прогрессию.
16. Сумма 3-го и 6-го членов прогрессии равна 3, а сумма их квадратов равна 45. Найти прогрессию.
17. Купецкий некто человек, имяше 14 чарок сребряных, ихже каяждо превышает тягостию по чину прогрессии четырьмя лотами, а последняя чарка весит 59 лотов. И ведательно есть, колико все чарки веса имуть. (Из арифметики Магницкого (1703 г.).)
18. При свободном падении в пустоте тело проходит в первую секунду приблизительно 4,9 *м*, а каждую следующую секунду на 9,8 *м* больше. Какой путь пройдет тело за 10 сек.? Какой путь пройден в последнюю секунду?
19. Какое натуральное число равно сумме всех ему предшествующих натуральных чисел?
20. Сумма трех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 16. Произведение первого на второе равно $12\frac{4}{9}$. Найти эти числа.
21. Шестой член арифметической прогрессии составляет 60% от третьего члена той же прогрессии, а произведение их равно 15. Сколько нужно взять членов этой прогрессии, чтобы сумма их равнялась $30\frac{1}{3}$?
22. Дана прогрессия

$$\div 3;\ 3,2;\ 3,4;\ 3,6;\ \ldots$$

Начиная с какого номера члены ее будут больше 1000?
23. Показать, что последовательность, общий член которой выражается формулой $a_n = 2 \cdot 3^n$, есть геометрическая прогрессия. Написать первые четыре члена этой прогрессии.
24. Определить 10-й член прогрессии

$$\div\div 2,\ 4,\ 8,\ \ldots$$

25. Чему равен 7-й член прогрессии

$$\div\div 15, \ -5; \ \frac{5}{3}, \ \ldots ?$$

26. Чему равен знаменатель геометрической прогрессии:

1) $2, \ \sqrt{2}, \ 1, \ \ldots$

2) $a^n, \ a^{n-1}, \ a^{n-2}, \ \ldots \ (a>0)$.

27. Между числами 12 и 972 вставить три средних геометрических.

28. Между числами 5 и 20 вставить четыре средних геометрических.

29. Найти сумму десяти членов прогрессии, если:

1) $a_1=3$; $q=2$; 2) $a_1=8$; $q=\frac{1}{4}$.

30. Найти знаменатель и сумму семи членов геометрической прогрессии, если $a_1=36$; $a_7=\frac{4}{81}$.

31. Дано: $S_7=2186$; $q=3$.
Найти a_1 и a_7.

32. Найти число членов геометрической прогрессии, если

$$a_1=3; \ q=2; \ S_n=189.$$

33. Найти знаменатель прогрессии, если $a_1=1$; $n=3$; $S_3=157$.

34. Дана геометрическая прогрессия, в которой

$$a_1+a_2=9; \ a_1-q=2\frac{3}{4}.$$

Найти a_3.

35. Сумма трех чисел, составляющих возрастающую геометрическую прогрессию, равна 65. Если отнять от меньшего числа 1, от большего 19, то вновь полученные числа составляют арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

36. Найти четыре числа, зная, что первые три из них составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую. Известно, что $q=2$; $d=6$.

37. Найти четыре положительных числа, составляющих геометрическую прогрессию, если $a_1+a_2=15$; $a_3+a_4=60$.

38. Показать, что если три положительных числа a, b, и c образуют геометрическую прогрессию, то

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3.$$

39. Найти сумму каждой из следующих сходящихся прогрессий:

1) $1; \ \frac{1}{4}; \ \left(\frac{1}{4}\right)^2; \ \left(\frac{1}{4}\right)^3; \ \ldots$

2) $27; \ -18; \ 12; \ -8; \ \ldots$

3) $1, \ x, \ x^2, \ x^3, \ \ldots \ (|x|<1)$.

40. Дан правильный треугольник со стороной a. Из высот этого треугольника образован новый правильный треугольник, из высот

второго — снова правильный треугольник и т. д. Определить сумму площадей полученных треугольников при неограниченном продолжении этого построения.

41. В круг радиуса R вписан квадрат, в квадрат вписан круг, в круг — снова квадрат и т. д. до бесконечности. Найти сумму площадей всех кругов, не считая первого, и сумму площадей всех квадратов.

42. Написать в виде периодической дроби сумму сходящейся прогрессии (не вычисляя ее):

а) $1+0{,}1+0{,}01+0{,}001+\ldots$

б) $0{,}29+0{,}0029+0{,}000029+\ldots$

43. Следующие периодические дроби обратить в обыкновенные дроби, рассматривая их как сумму сходящейся геометрической прогрессии:

а) $0{,}363636\ldots$

б) $1{,}5272727\ldots$

44. Если обозначим через P сумму сходящейся геометрической прогрессии: $1, r^p, r^{2p}, r^{3p}, \ldots$, а через Q — сумму другой сходящейся прогрессии: $1, r^q, r^{2q}, r^{3q}, \ldots$, где $|r|<1$, то имеет место соотношение

$$P^q(Q-1)^p=Q^p(P-1)^q.$$

Доказать это.

ГЛАВА IX

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ О СТЕПЕНИ. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

§ 96. Степень с нулевым показателем

При делении степеней с одинаковыми основаниями показатели степени вычитаются: $a^n : a^m = a^{n-m}$. Это правило применялось до сих пор в предположении, что n и m — натуральные числа, т. е. целые и положительные, причем $n > m$. Допустим, что $m = n$. Тогда имеем:

$$a^n : a^n = a^{n-n} = a^0 \text{ (по правилу деления степеней).}$$

Полученный результат не подходит под обычное определение степени, так как нам встречались степени только с натуральными показателями.

Но всякое число, деленное само на себя, дает в частном 1, а потому и $a^n : a^n = 1$. Эти соображения показывают, что целесообразно принять следующее определение.

Определение. *Всякое число в нулевой степени равняется* 1:

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0).$$

Примеры.

1) $5^0 = 1$;
2) $(a+b)^0 = 1 \;\; (a \neq -b)$;
3) $(-0{,}8)^0 = 1$.

§ 97. Степень с отрицательным показателем

Распространим правило деления степеней на случай, когда $n < m$, т. е. показатель степени в делимом меньше показателя степени делителя, например:

$$a^2 : a^4 = a^{2-4} = a^{-2}; \;\; x^3 : x^6 = x^{3-6} = x^{-3}.$$

Новые обозначения a^{-2}; x^{-3} не могут быть истолкованы в прежнем смысле степени с натуральным показателем, так как нельзя a повторить множителем (—2) раза или x взять множителем (—3) раза. Нужно придать новый смысл этим символам. Для этого выполним деление, пользуясь чертой как знаком деления:

$$\frac{a^2}{a^4}=\frac{1}{a^2}; \quad \frac{x^3}{x^6}=\frac{1}{x^3}.$$

Двояко записанный результат деления одних и тех же выражений должен означать одни и те же числа; поэтому

$$a^{-2}=\frac{1}{a^2}; \quad x^{-3}=\frac{1}{x^3};$$

и вообще

$$a^{-p}=\frac{1}{a^p}.$$

Определение. *Степень с отрицательным показателем означает дробь, числитель которой равен единице, а знаменатель — степень того же основания с показателем, равным абсолютной величине данного показателя.*

Примеры.

$$1)\ 5^{-2}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}; \quad 2)\ 10^{-3}=\frac{1}{10^3}=0{,}001;$$

$$3)\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^5}=\frac{1}{\frac{1}{32}}=32; \quad 4)\ (a-b)^{-3}=\frac{1}{(a-b)^3}\ (a\neq b);$$

$$5)\ 2x^{-3}=\frac{2}{x^3}; \quad 6)\ (2x)^{-3}=\frac{1}{(2x)^3}=\frac{1}{8x^3}.$$

Пользуясь отрицательным показателем степени, можно представить всякое дробное одночленное выражение по форме целым:

$$\frac{a}{bc^2}=a\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c^2}=ab^{-1}c^{-2};$$

$$\frac{3xy^3}{z^4(x+y)^2}=3xy^3\cdot\frac{1}{z^4}\cdot\frac{1}{(x+y)^2}=3xy^3z^{-4}(x+y)^{-2};$$

$$24{,}547=20+4+0{,}5+0{,}04+0{,}007=$$
$$=2\cdot 10+4+5\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}01+7\cdot 0{,}0001=$$
$$=2\cdot 10+4\cdot 10^0+5\cdot 10^{-1}+4\cdot 10^{-2}+7\cdot 10^{-3},$$

т. е. всякое десятичное число можно написать в виде многочлена, расположенного по убывающим степеням основания 10. Заметим, что малые десятичные дроби удобно записывать, пользуясь отрицательными степенями, например $0{,}000012 = 12 \cdot 10^{-6} = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$.

§ 98. Действия над степенями с нулевым и отрицательным показателями

Введением нулевого и отрицательного показателя степени расширяется или обобщается понятие степени. Это расширение будет оправдано, если обнаружится, что правила действий над степенями с целыми положительными показателями распространяются также и на степени с нулевым и отрицательным показателями.

Покажем, что прежние правила действий сохраняют свою силу.

Итак, надо проверить справедливость равенств

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \qquad (1)$$

$$a^n : a^m = a^{n-m}; \qquad (2)$$

$$(a^n)^m = a^{nm} \qquad (3)$$

при n и m, равных 0 или отрицательному числу.

1) Предположим, что $m = 0$, тогда по правилу умножения степеней имеем:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} = a^{n+0} = a^n;$$

с другой стороны, $a^m = a^0 = 1$, поэтому $a^n \cdot a^m = a^n \cdot 1 = a^n$. Оба результата совпадают, и этим подтверждается равенство (1) для случая, когда один из показателей есть нуль;

2) $m = 0$; $a^n : a^m = a^{n-m} = a^{n-0} = a^n$;

с другой стороны, $a^n : a^0 = a^n : 1 = a^n$;

3) $n = 0$; $m \neq 0$;

$$a^n : a^m = a^{n-m} = a^{0-m} = a^{-m}.$$

Но

$$a^n = a^0 = 1; \; a^n : a^m = 1 : a^m = \frac{1}{a^m} = a^{-m}.$$

Пришли к одинаковым результатам, что обнаруживает справедливость равенства (2) для случая, когда одно из чисел m или n есть нуль.

Подобным образом можно проверить справедливость равенства (3) для нулевого показателя.

Примечание. Случай, когда оба числа m и n одновременно нули, проверяется легко в уме.

Проверим справедливость формул (1), (2) и (3) при отрицательном показателе степени для частных значений n и m.

Общий прием такой проверки заключается в следующем: каждое действие выполняем дважды: первый раз заменяем отрицательные степени соответствующими дробями и полученный результат записываем в виде степени с отрицательным показателем; второй раз производим действия над отрицательными степенями без замены их дробями (применяя соответствующее правило); оба результата должны оказаться одинаковыми.

Примеры.

1) $a^2 \cdot a^{-3} = a^2 \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a} = a^{-1}$; $a^2a^{-3} = a^{2+(-3)} = a^{-1}$;

2) $a^{-1} \cdot a^{-5} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{1}{a^6} = a^{-6}$; $a^{-1} \cdot a^{-5} = a^{-1+(-5)} = a^{-6}$;

3) $a^{-3} : a^2 = \frac{1}{a^3} : a^2 = \frac{1}{a^3 \cdot a^2} = \frac{1}{a^5} = a^{-5}$;

$a^{-3} : a^2 = a^{-3-2} = a^{-5}$;

4) $a^{-2} : a^{-5} = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a^5} = \frac{a^5}{a^2} = a^3$;

$a^{-2} : a^{-5} = a^{-2-(-5)} = a^3$;

5) $(a^{-3})^2 = \left(\frac{1}{a^3}\right)^2 = \frac{1}{a^6} = a^{-6}$; $(a^{-3})^2 = a^{-6}$;

6) $(a^2)^{-3} = \frac{1}{(a^2)^3} = \frac{1}{a^6} = a^{-6}$; $(a^2)^{-3} = a^{-6}$;

7) $(a^{-3})^{-2} = \frac{1}{(a^{-3})^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^3}\right)^2} = a^6$; $(a^{-3})^{-2} = a^{(-3)(-2)} = a^6$.

Приведенные примеры подтверждают справедливость основных правил действий над степенями и для отрицательных показателей.

§ 99. Степень с дробным показателем

Если m и n — натуральные числа, причем m кратно n (т. е. делится без остатка на n), то $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$. Распространим это правило на случаи, когда m не делится без остатка на n, например:

$$\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}};$$

$$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}\ (a>0);$$

$$\sqrt[5]{(a+b)^3}=(a+b)^{\frac{3}{5}}.$$

Понятно, что новые обозначения $a^{\frac{2}{3}}$; $a^{\frac{1}{2}}$; $(a+b)^{\frac{3}{5}}$ не могут быть истолкованы в том смысле, как понимается степень с целым положительным показателем, т. е. как произведение одинаковых множителей, нельзя взять a множителем $\frac{2}{3}$ раза — это нелепость.

Выражения $a^{\frac{2}{3}}$; $(a+b)^{\frac{3}{5}}$; $a^{\frac{m}{n}}$ представляет новую запись радикалов и только.

Определение. *Степень с дробным показателем означает корень* (радикал), *причем знаменатель дробного показателя равен показателю корня, а числитель равен показателю степени подкоренного числа*:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m} \qquad (a>0).$$

Таким образом

$$8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=4;\ (a+b)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a+b},$$

и обратно:

$$\sqrt[3]{b}=b^{\frac{1}{3}};\quad \sqrt[5]{m^2}=m^{\frac{2}{5}}.$$

Запись $a^{-\frac{m}{n}}$ будем понимать как обратную величину радикала $a^{\frac{m}{n}}$

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}},\text{ например:}$$

$$4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2};$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1}{8}}}=\sqrt[4]{8};$$

$$(a+b)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{(a+b)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}.$$

§ 100. Действия над степенями с дробными показателями

Покажем, что над степенями с дробными показателями можно производить действия по тем же правилам, по каким производятся действия над степенями с натуральными показателями.

Каждое действие будем производить двумя способами: первый раз заменяя дробные степени соответствующими радикалами, второй раз — без такой замены, причем оба результата должны оказаться тождественными.

1. Умножение

1) $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{2}{3}}=\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[6]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^4}=\sqrt[6]{a^7}=a^{\frac{7}{6}}$;

$a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}=a^{\frac{7}{6}}$.

2) $a^{-\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{5}{6}}=\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\cdot\sqrt[6]{a^5}=\frac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[4]{a^3}}=\frac{\sqrt[12]{a^{10}}}{\sqrt[12]{a^9}}=\sqrt[12]{a}=a^{\frac{1}{12}}$;

$a^{-\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{5}{6}}=a^{-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}}=a^{\frac{1}{12}}$.

В общем виде

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[s]{a^r}=\sqrt[qs]{a^{ps}}\cdot\sqrt[qs]{a^{rq}}=$$

$$=\sqrt[qs]{a^{ps}a^{rq}}=\sqrt[qs]{a^{ps+rq}}=a^{\frac{ps+rq}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}};$$

без замены радикалами

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$$

2. Деление. Ограничимся рассмотрением отдельных примеров, так как общий прием остается тем же.

1) $a^{\frac{3}{4}}:a^{\frac{1}{2}}=\sqrt[4]{a^3}:\sqrt{a}=\sqrt[4]{a^3}:\sqrt[4]{a^2}=\sqrt[4]{a}=a^{\frac{1}{4}};$

$a^{\frac{3}{4}}:a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{4}};$

2) $2^{\frac{2}{3}}:2^{-\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{2^2}:\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt[3]{2^2}\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^4}\cdot\sqrt[6]{2^3}=$

$=\sqrt[6]{2^7}=2^{\frac{7}{6}};\ 2^{\frac{2}{3}}:2^{-\frac{1}{2}}=2^{\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)}=2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}=2^{\frac{7}{6}}.$

3. Возведение в степень

1) $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2}=\sqrt[3]{(\sqrt{a})^2}=\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}};$

$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{3}};$

2) $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3}}=\frac{1}{\sqrt{(\sqrt[3]{a^2})^3}}=\frac{1}{\sqrt{a^2}}=\frac{1}{a};$

без замены радикалами

$$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}=a^{-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}}=a^{-1}=\frac{1}{a}.$$

Рассмотренные примеры подтвердили, что прежние правила действий над степенями распространяются также и на дробные степени, причем второй способ решения (без замены радикалами) гораздо проще и быстрее приводит к окончательному результату.

Примеры на действия над степенями с дробными показателями:

$$1)\ \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8^{-\frac{2}{3}}}=\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{4}{9}}+8^{\frac{2}{3}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{27}{8}}}-\frac{2}{3}+\sqrt[3]{8^2}=\frac{1}{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}+4=4;$$

$$2)\ \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}:\sqrt[8]{x^7}=\left(x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{8}}\right):x^{\frac{7}{8}}=x^{\frac{7}{8}}:x^{\frac{7}{8}}=1;$$

$$3)\ \left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2=a-b;$$

$$4)\ (a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(a+b)^{-\frac{1}{2}}\cdot(a-b)^{\frac{3}{2}}=$$

$$=(a-b)^{\frac{1}{2}}\cdot(a+b)^{\frac{1}{2}}(a+b)^{-\frac{1}{2}}(a-b)^{\frac{3}{2}}=(a-b)^2;$$

$$5)\ (x+y):\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)=x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}.$$

Так как $x=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3$; $y=\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3$, то здесь можно применить формулу сокращенного деления.

§ 101. Понятие о степени с иррациональным показателем

Введение нулевого, отрицательного и дробного показателя степени расширило наши представления о степени; теперь можно сказать, что при $a>0$ выражение a^r имеет вполне определенный смысл, если r — рациональное число, т. е. число вида $\frac{m}{n}$ (m и n — целые).

Остается невыясненным, что подразумевать под степенью с иррациональным показателем, например, что означает $a^{\sqrt{2}}$ ($a>0$). Иррациональное число $\sqrt{2}$ определяется двумя последовательностями чисел:

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \ldots$$

$$2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ 1{,}4143;\ \ldots$$

Естественно принять $a^{\sqrt{2}}$ за такое число, которое *больше каждого из чисел последовательности*

$$a^1,\ a^{1,4},\ a^{1,41},\ a^{1,414},\ a^{1,4142},\ \ldots$$

и меньше каждого из чисел последовательности

$$a^2,\ a^{1,5},\ a^{1,42},\ a^{1,415},\ a^{1,4143},\ \ldots \qquad (a>1).$$

Доказано, что такое число существует и единственное. Действия над степенями с иррациональными показателями производятся по тем же правилам, что действия над степенями с рациональными показателями.

После сделанного нами обобщения понятия степени можно сказать, что выражение a^α имеет вполне определенный смысл при $a>0$, где α — любое действительное число.

§ 102. Показательная функция

Рассмотрим степень с постоянным основанием a, но с *переменным показателем* x, т. е. выражение вида a^x, где $a>0$ и $a \neq 1$. Ясно, что при различных значениях аргумента x величина a^x будет принимать различные значения. Обозначим эту зависимую переменную или функцию буквой y.

Определение. *Функция вида $y=a^x$ $(a>0;\ a\neq 1)$ называется показательной функцией.*

Ознакомимся со свойствами этой новой функции, для чего предварительно вычертим ее график при различных значениях основания a.

§ 103. Графики показательных функций

Составим таблицы значений следующих показательных функций

$$y=2^x\ (a=2);\quad y=\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(a=\frac{1}{2}\right);$$

$$y=10^x\ (a=10),\quad y=\left(\frac{1}{10}\right)^x \left(a=\frac{1}{10}\right).$$

Таблица (II) составлена следующим образом: значения аргумента x образуют арифметическую прогрессию с разностью $d=\frac{1}{8}$; значения показательной функции 10^x в таком

	x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4					
I	$y=2^x$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16					
	$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$					
	x	-1	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	1
II	$y=10^x$	0,1	0,8	0,6	0,4	0,3	0,17	1	1,3	1,8	2,4	3,2	3,7	5,8	10
	$y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$	10	1,3	1,8	2,4	3,2	5,8	0,1	0,8	0,6	0,4	0,3	0,27	0,17	0,1

случае составляют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=10^{\frac{1}{8}}$;

1) $10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}\approx 3{,}16$;

2) $10^{\frac{1}{4}}=\sqrt{10^{\frac{1}{2}}}\approx\sqrt{3{,}16}\approx 1{,}76$;

3) $10^{\frac{1}{8}}=\sqrt{10^{\frac{1}{4}}}\approx\sqrt{1{,}76}\approx 1{,}33 \quad (q=1{,}33)$.

Остальные степени находим умножением:

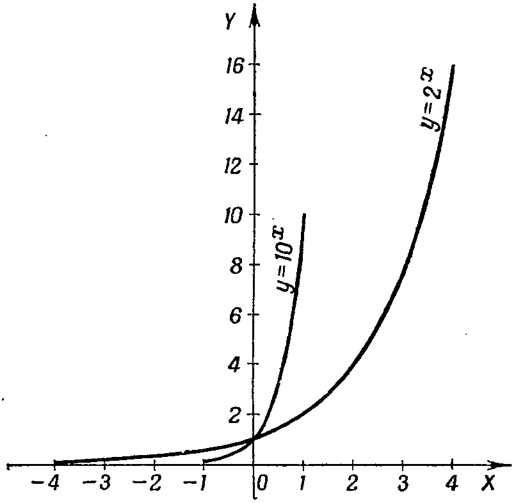
4) $10^{\frac{3}{8}}=10^{\frac{1}{4}}\cdot 10^{\frac{1}{8}}\approx 1{,}78\cdot 1{,}33\approx 2{,}36$

и т. д.

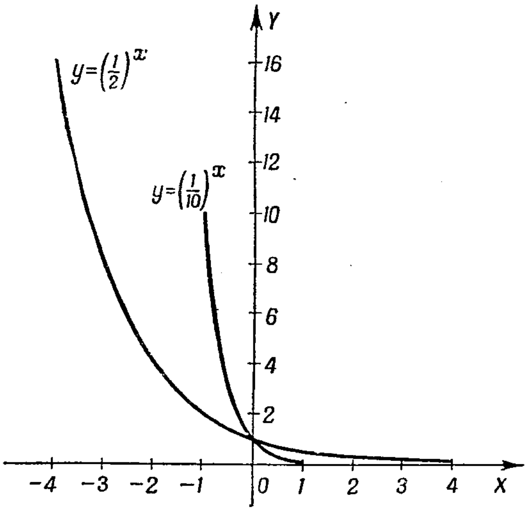
Для отрицательных значений показателя степени удобно пользоваться таблицей обратных величин $\left(\frac{1}{n}\right)$:

$$10^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{10^{\frac{1}{2}}}\approx\frac{1}{3{,}16}\approx 0{,}316;$$

$$10^{-\frac{3}{8}}=\frac{1}{10^{\frac{3}{8}}}\approx\frac{1}{2{,}36}\approx 0{,}424 \quad \text{и т. д.}$$



Черт. 45.



Черт. 46.

Округленные результаты с одним десятичным знаком занесены в таблицу (II).

На основании составленных таблиц построены графики этих четырех показательных функций в одном и том же масштабе на чертежах 45 и 46.

§ 104. Свойства показательной функции

Построенные графики показательных функций иллюстрируют следующие свойства показательной функции, которые мы принимаем без доказательства.

1. Показательная функция положительна при любом значении аргумента (график расположен выше оси Ox).

2. При основании $a > 1$ показательная функция возрастает с увеличением аргумента x, причем при $x < 0$ $a^x < 1$, при $x > 0$ $a^x > 1$.

3. При положительном основании $a < 1$ показательная функция a^x убывает с увеличением аргумента x, причем при $x < 0$ $a^x > 1$, при $x > 0$ $a^x < 1$.

4. При любом положительном основании $a^x = 1$, если $x = 0$ (все кривые пересекают ось ординат в одной и той же точке (0; 1)).

5. При $a > 1$ функция a^x возрастает тем быстрее, чем больше a (кривая $y = 10^x$ быстрее уходит вверх, чем $y = 2^x$).

6. При неограниченном возрастании аргумента x функция a^x $(a > 1)$ может принимать какие угодно большие значения. Это свойство из чертежа непосредственно не вытекает, но нетрудно усмотреть, что

при $x = 1, 2, 3, 4, 5$ и т. д.

функция

$$10^x = 10, \ 100, \ 1000, \ 10\,000, \ 100\,000 \text{ и т. д.};$$

это свойство показательной функции кратко выражают в такой условной записи: при $x \to \infty$ $y \to \infty$, где знак ∞ символ неограниченного возрастания переменной; фраза «x стремится к бесконечности» означает неограниченное возрастание переменной x.

7. При отрицательных и больших по абсолютной величине значениях аргумента функция a^x $(a > 1)$ может принимать сколь угодно малые значения, например, при $x = -8$

$$10^{-8} = 0{,}00000001.$$

Это свойство кратко выражают в такой условной записи: при $x \to -\infty$ $a^x \to 0$ $(a > 1)$.

Упражнения

1. Вычислить: 1) 3^0; 2) $5x^0$; 3) $(a-b)^0$; 4) $(2^0)^0$; 5) $x^0 - y^0$.
2. Представить следующие отрицательные степени в виде дробей с положительными показателями и вычислить их значения:

$$1)\ 2^{-3};\ 2)\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-3};\ 3)\ 12^{-1};\ 4)\ \left(\frac{3}{4}\right)^{-2};\ 5)\ (0,2)^{-3};$$

$$6)\ 0{,}05^{-1};\ 7)\ \left(2\frac{1}{2}\right)^{-3};\ 8)\ (a-b)^{-4};\ 9)\ a^{-x};\ 10)\ \frac{1}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{-1};$$

$$11)\ 3x^0 - 4x^{-1} + 3x^{-2} + 5x^{-3};\qquad 12)\ \frac{2}{x^{-3}} - \frac{5}{x^{-1}} + \frac{3}{x^0}.$$

3. Произвести указанные действия:

$$1)\ 16 \cdot 2^{-3};\ 2)\ 27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2};\quad 3)\ 2^{-3} \cdot 2^4;\ 4)\ 3a^{2n} \cdot 2a^{-n};$$

$$5)\ 4a^{-2}b^{-3} \cdot 3ab^2;\ 6)\ \frac{4a^{-2}b^{-4}}{5x^{-3}y^{-2}} \cdot \frac{10x^{-2} \cdot y^{-2}}{6a^{-1}b^{-3}}.$$

4. Пользуясь правилами умножения и деления степеней с одинаковыми основаниями и возведения степени в степень, решить следующие примеры:

$$1)\ 3^{-4} : 3^{-5};\ 2)\ x^n : x^{-n};\ 3)\ 8{,}5\ x^{-4} : 1{,}7\ x^{-3};\quad 4)\ (2^{-3})^2;$$

$$5)\ (a^2)^{-3};\ 6)\ [(3x)^{-2}]^{-3};\quad 7)\ -ax^{-1};\ 8)\ \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^3 \cdot \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{-2};$$

$$9)\ \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{-1};\ 10)\ (a-b)^{-2} : (b-a)^{-2};$$

$$11)\ (3x^{-2}y^{-3} + 5x^{-1}y - 6x^2y^{-1}) \cdot 2x^{-1}y^{-2};$$

$$12)\ (a^{-2m} - b^{-2n}) : (a^{-m} + b^{-n});$$

$$13)\ (4a^{-5} + 3a^{-4} - 2a^{-3}) \cdot (2a^{-2} + 3a^{-4}).$$

5. Записать следующие десятичные дроби в виде суммы отрицательных степеней числа 10:

0,1; 0,001; 0,3; 0,23; 0,325; 0,407; 0,00218.

Указание. $0{,}423 = 4 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} = 4{,}23 \cdot 10^{-1}$.

6. Записать следующие радикалы в виде степеней с дробными показателями:

$$1)\ \sqrt{5};\ 2)\ \sqrt[3]{a^2};\ 3)\ \sqrt[5]{x^3};\ 4)\ \sqrt{a+b};$$

$$5)\ \sqrt{a^2+b^2};\ 6)\ \sqrt[3]{x-y};\ 7)\ \sqrt[5]{ab^2};$$

8) $\frac{1}{\sqrt{a}}$; 9) $\frac{1}{\sqrt[3]{b^2}}$; 10) $\frac{1}{\sqrt{m+n}}$; 11) $\frac{3}{\sqrt[3]{x-y}}$;

12) $\frac{3ab}{\sqrt[5]{(a+b)^2}}$; 13) $\frac{A}{\sqrt{1+x^2}}$.

7. Вычислить, заменив дробные степени соответствующими радикалами:

1) $2^{\frac{1}{2}}$; 2) $8^{\frac{1}{3}}$; 3) $16^{\frac{3}{4}}$; 4) $64^{-\frac{1}{2}}$; 5) $0{,}25^{-\frac{1}{2}}$;

6) $0{,}36^{\frac{1}{2}}$; 7) $(-2)^{-\frac{2}{3}}$; 8) $(x+y)^{\frac{2}{3}}$; 9) $(a-b)^{-\frac{3}{2}}$;

10) $(-27)^{-\frac{4}{3}}$; 11) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+32^{-\frac{1}{5}}$;

12) $(125)^{\frac{2}{3}}+(0{,}01)^{-0,5}$; 13) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(0{,}81)^{-\frac{1}{2}}$.

8. Произвести указанные действия:

1) $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}\cdot ab^{\frac{1}{2}}$; 2) $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)a^{\frac{1}{2}}$; 3) $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)$;

4) $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^3$; 5) $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^2$; 6) $\left(a+a^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(a-a^{\frac{1}{2}}+1\right)$;

7) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2$; 8) $\left(125^{\frac{2}{3}}+16^{\frac{1}{2}}+343^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$;

9) $\left[\frac{1}{4}\left(0{,}027^{\frac{2}{3}}+15\cdot 0{,}0016^{\frac{3}{4}}+1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$;

10) $\left(x^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\right)\left(x\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2x^2}+\sqrt[3]{4}\right)$;

11) $\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}}b^{-1}\cdot a^{\frac{5}{6}}\cdot b^{\frac{1}{2}}\sqrt{a^{-1}b^{\frac{2}{3}}}}$;

12) $\left(\sqrt[n+3]{\sqrt[n-1]{a^2}\cdot\sqrt[n+1]{a^{-1}}}\right)^{n^2-1}$.

9. Упростить выражения:

1) $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}-\frac{2x\sqrt{x^2-y^2}}{y^2(xy^{-1}+1)^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1-yx^{-1}}{1+yx^{-1}}}$;

2) $\left\{\left[\left(\dfrac{2\sqrt[4]{xy}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}\right)^{-2}+1\right]:\dfrac{4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y+2\sqrt{xy}}\right\}^{\frac{1}{2}}$;

3) $\sqrt{\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-2}+1}$;

4) $\dfrac{a+\sqrt{ab}}{a+b}\left[a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}-\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1}\right]$;

5) $\dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{8}}+1}+\dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{8}}+1}-\dfrac{2a^{\frac{1}{4}}-2}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}+1}$.

10. Вычислить:

$$\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\cdot\left[1-\frac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right]\text{ при } x=\frac{1}{a-1}\ (a\neq 1).$$

ГЛАВА X

ЛОГАРИФМЫ

§ 105. Понятие логарифма

Построенный на черт. 45 график функции $y=2^x$ дает наглядное представление не только о свойствах показательной функции, но позволяет также решать следующую конкретную задачу: при каком значении аргумента x функция y принимает значение, равное числу 5, т. е. чему равен x, если $2^x=5$.

По чертежу находим, что $x \approx 2{,}3$.

Очевидно, можно задаваться другими значениями той же функции, например, $y=2{,}5$; $0{,}8$, ... и тогда для отыскания x из равенств:

1) $2^x=2{,}5$; 2) $2^x=0{,}8$ может быть использован тот же чертеж.

Обратим внимание на то, что:

1) Значения x, получаемые по чертежу, являются грубо приближенными.

2) Наш чертеж не может быть использован, если значения x находить, например, из равенств:

а) $3^x=2$; в) $5^x=7$. Пришлось бы строить графики функций $y=3^x$ и $y=5^x$ и по ним приближенно определять значения x.

Чтобы подробнее изучить изменение показателя степени в зависимости от величины самой степени, необходимо ввести новое математическое понятие.

Пусть дано равенство $a^c=b$, где $a>0$, $b>0$ и $a \neq 1$.

Определение. *Логарифмом данного числа b по основанию a называется показатель степени c, в которую надо возвести данное основание a, чтобы получить число b.* Запись $\log_a b=c$ читается так: логарифм b по основанию a

равен c. Число, служащее основанием логарифма, пишется ниже строки.

	Из равенств	следует, что	
	$2^5 = 32;$	$5 = \log_2 32;$	
	$10^2 = 100;$	$2 = \log_{10} 100;$	
	$3^4 = 81;$	$4 = \log_3 81;$	
(1)	$5^3 = 125;$	$3 = \log_5 125;$	(2)
	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8;$	$-3 = \log_{\frac{1}{2}} 8;$	
	$a^c = b.$	$c = \log_a b.$	

Равенства (1) и (2) равнозначны, первые влекут за собой вторые и наоборот.

Из определения логарифма следует, что

$$a^{\log_a b} = b.$$

Примеры.

$$1)\ 2^{\log_2 32} = 32;\quad 2)\ 10^{\log_{10} 100} = 100.$$

Рассмотрим решение примеров вида:

$$1)\ a^x = b;\quad 2)\ x^a = b;\quad 3)\ a^c = x,$$

где по данным двум числам требуется найти третье число.

Пример 1. Чему равен логарифм числа 27 при основании 9?

$$\log_9 27 = x;\quad 9^x = 27;$$

$$(3^2)^x = 3^3,\quad 3^{2x} = 3^3,\ \text{откуда}\ 2x = 3;\quad x = \frac{3}{2}.$$

Пример 2. При каком основании логарифм числа 8 равен 6?

Имеем:

$$\log_x 8 = 6;$$

$$x^6 = 8;\quad x = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}.$$

Пример 3. Найти число, логарифм которого при основании 64 равен $-\frac{2}{3}$?

Обозначим искомое число через x, тогда $\log_{64} x = -\frac{2}{3}$, откуда

$$64^{-\frac{2}{3}} = x;\ \text{или}\ x = \frac{1}{\sqrt[3]{64^2}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{64})^2} = \frac{1}{16};\quad x = \frac{1}{16}.$$

§ 106. Понятие обратной функции

Пример 1. Рассмотрим линейную функцию, заданную формулой

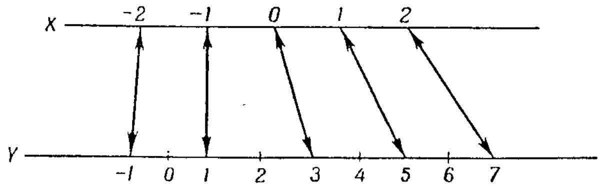
$$y = 2x + 3. \qquad (3)$$

Каждому действительному значению аргумента x соответствует одно определенное значение функции y, например:

при $x = -2, \; -1, \; 0, \; 1, \; 2, \; \ldots$

$\quad\; y = -1, \;\; 1, \; 3, \; 5, \; 7, \; \ldots$

Соответствие между значениями аргумента x и функции y наглядно изображено на чертеже 47.



Черт. 47.

Обратно: всякому заданному значению y соответствует определенное значение аргумента x. Это соответствие называется *обратным*. Так, например,

при $y = -1$ из формулы (3) находим:

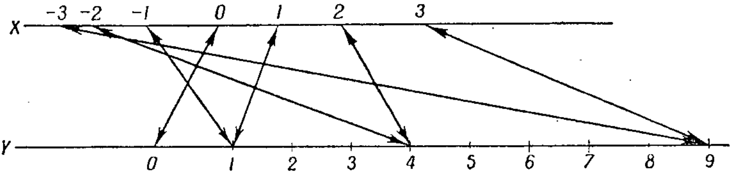
$$-1 = 2x + 3; \; x = -2.$$

Подобным образом с помощью той же формулы (3) можно установить обратное соответствие между всяким другим значением y и соответствующим значением x, что изображено на чертеже 47.

В нашем примере соответствие между значениями x и y, а также обратное соответствие между значениями y и x являются однозначными, т. е. каждому значению x соответствует единственное значение y, и наоборот, каждому значению y соответствует единственное значение x. Такие соответствия называются *взаимно однозначными*. На чертеже 47 стрелки, направленные от значений x к соответствующим значениям y и обратно — от значений y к значениям x — графически изображают *взаимную однозначность* этих двух соответствий.

Пример 2. Формула $y = x^2$ каждому действительному значению аргумента x ставит в соответствие единственное значение y.

Обратное соответствие не является однозначным: каждому положительному значению функции y соответствует два различных значения x, равных по абсолютной величине, но



Черт. 48.

противоположных по знаку, так как из формулы $y = x^2$ следует, что

$$x = \pm \sqrt{y},$$

например, при $y = \quad 1, \quad 4, \quad 9, \ldots$

$$x = \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \ldots,$$

что изображено на чертеже 48.

В данном случае говорят, что формула $y = x^2$ не определяет x однозначно по заданным наперед положительным значениям y.

Определение. *Если обратное соответствие для каждого допустимого значения y определяет единственное значение x, то можно рассматривать x как функцию y.* Эта функция называется *обратной* по отношению к данной, называемой *прямой*.

Таким образом:

1) функция $y = 2x + 3$ имеет обратную ей функцию $x = \frac{y-3}{2}$;

2) функция $y = 2x^3$ допускает обратную ей функцию $x = \sqrt[3]{\frac{y}{2}}$;

3) Для функции $y = x^2$, как было отмечено выше, мы не можем определить обратной функции.

Однако, если на функцию $y=x^2$ наложить ограничение — допустимыми значениями аргумента x считать только положительные значения и 0, — то существует обратная ей функция $x=\sqrt{y}$.

Подобным образом при ограничении — аргумент x может принимать лишь отрицательные значения и 0 — будет существовать обратная функция: $x=-\sqrt{y}$.

Пример 3. Функция $y=x^3+1$ имеет обратную ей функцию $x=\sqrt[3]{y-1}$, так как каждому действительному значению аргумента y соответствует единственное значение функции x, например:

$$
\begin{aligned}
\text{при } y &= 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\\
x &= -1,\ 0,\ 1,\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{3},\ \ldots
\end{aligned}
$$

Пример 4. Однозначная функция $y=x^4$ не имеет однозначной обратной ей функции, так как из формулы $y=x^4$ следует, что $x=\pm\sqrt[4]{y}$.

Каждому положительному значению y соответствуют два равных по абсолютной величине, но противоположных по знаку значения x.

Если допустимыми значениями x будем считать неотрицательные числа, то функция $y=x^4$ допускает обратную ей функцию $x=\sqrt[4]{y}$.

При записи прямых и обратных функций принято аргумент обозначать одной и той же буквой x. Таким образом, функции:

$$y=2x+5 \text{ и } y=\frac{x-3}{2},$$

$$y=x^3 \text{ и } y=\sqrt[3]{x}$$

будут взаимно обратны.

Во многих случаях можно получить формулу, определяющую обратную функцию, если: 1) разрешить уравнение, определяющее прямую функцию, относительно аргумента x и 2) поменять в полученном равенстве местами буквы x и y.

Пример 5.

$$y=x^3+1$$

(прямая функция),

$$x=\sqrt[3]{y-1}$$

(обратная функция при переставленных обозначениях аргумента через y),

$$y = \sqrt[3]{x-1}$$

(обратная функция при одном и том же обозначении аргумента через x).

Пример 6.

$$y = \frac{x-1}{x+1}$$

(допустимыми значениями аргумента x являются все действительные числа, кроме значения $x = -1$).

Найдем обратную функцию:

$$x - 1 = yx + y;\quad y + 1 = x - xy;\quad y + 1 = (1 - y)x;$$
$$x = \frac{y+1}{1-y};\quad y = \frac{x+1}{1-x}\ \text{(обратная функция).}$$

Допустимыми значениями аргумента являются все действительные числа, кроме значения $x = 1$.

§ 107. Зависимость между графиками прямой и обратной функций

Возьмем рассмотренные в предыдущем параграфе две взаимно обратные функции:

$$y = 2x + 3;\quad x = \frac{y-3}{2}.$$

График первой функции есть прямая (черт. 49). Та же прямая будет служить и графиком обратной функции, так как любая пара чисел, которая удовлетворяет первому уравнению, будет удовлетворять также и второму, и наоборот. Например, первому уравнению удовлетворяют пары чисел:

$$x_1 = 2,\ y_1 = 7;\ x_2 = 4,\ y_2 = 11;\ x_3 = -1,\ y_3 = 1.$$

Те же пары чисел удовлетворяют также и второму уравнению. Несущественная разница будет лишь в том, что при построении графика функции $x = \frac{y-3}{2}$ сначала задаемся произвольными значениями y и по уравнению находим соответствующие значения x.

По-другому обстоит дело при построении графиков двух взаимно обратных функций, *если аргумент в обоих случаях обозначен буквой x,* т. е. функций

$$y=2x+3;\ y=\frac{x-3}{2}.$$

Если первому уравнению, например, удовлетворяют пары чисел:

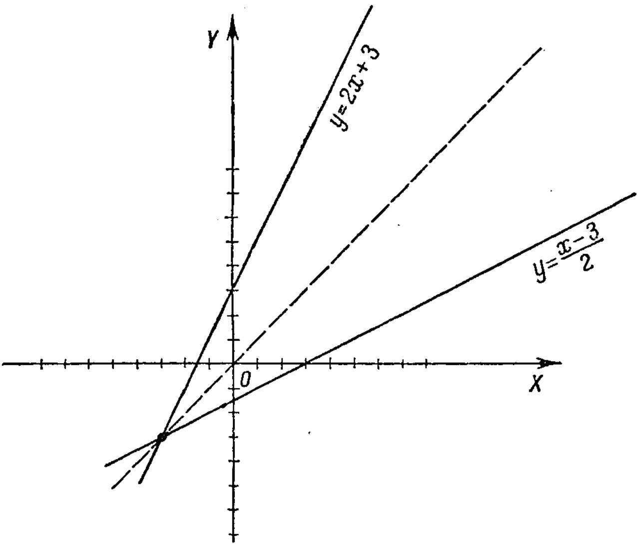
$$x_1=1,\ y_1=5;\ x_2=3,\ y_2=9;\ x_3=-1,\ y_3=1,$$

то второму уравнению эти пары чисел не удовлетворяют, но пары чисел:

$$x_1=5,\ y_1=1;\ x_2=9,\ y_2=3;\ x_3=1,\ y_3=-1$$

удовлетворяют.

Точки: (1; 5) и (5; 1); (3; 9) и (9; 3); (—1; 1) и (1; —1) симметричны относительно *биссектрисы первого и третьего*



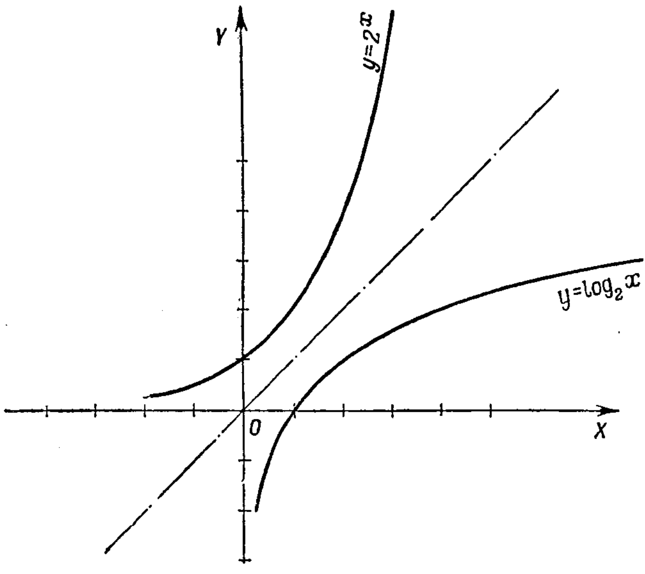
Черт. 49.

координатных углов; ясно, что каждой точке графика прямой функции будет соответствовать симметричная относительно биссектрисы точка на графике обратной функции и наоборот, что показано на чертеже 49.

Итак, графики двух взаимно обратных функций представляют симметричные линии относительно биссектрисы первого координатного угла, если аргумент в обоих случаях обозначен одной и той же буквой.

§ 108. Логарифмическая функция и ее график

Показательная функция $y=a^x$ имеет обратную функцию $x=\log_a y$; меняя местами x и y, получим $y=\log_a x$; эта функция называется *логарифмической*. Независимая переменная x означает любое положительное число, функция y — логарифм этого числа.



Черт. 50.

График логарифмической функции можно получить по общему правилу из графика показательной функции, если перегнуть чертеж по биссектрисе первого координатного угла. На чертеже 50 представлены графики показательной функции $y=2^x$ и обратной ей функции $y=\log_2 x$.

§ 109. Свойства логарифмической функции

Каждому свойству показательной функции соответствует определенное свойство логарифмической функции, что видно из следующих сопоставлений:

Показательная функция	Логарифмическая функция
1. Показательная функция положительна при любом значении аргумента x	1. Логарифмическая функция имеет действительные значения лишь при положительных значениях аргумента (график расположен справа от оси ординат)
2. При $x=0$ показательная функция численно равна 1	2. Логарифм 1 при любом основании равен 0
3. При отрицательных значениях аргумента x функция $a^x<1$ $(a>1)$, при $x\to-\infty$ $a^x\to 0$	3. Логарифмы чисел, меньших 1, при основании $a>1$ отрицательны, причем при $x\to 0$ $\log_a x\to-\infty$
4. Показательная функция возрастает и при $x\to\infty$ $a^x\to\infty$ $(a>1)$	4. Логарифмическая функция возрастает, причем при $x\to\infty$ $\log_a x\to\infty$ $(a>1)$

§ 110. Практическое значение логарифмов

Составим таблицу целых степеней числа 2:

Показатель n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Степень 2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192

Показатель n	14	15	16	17	18	19	20	21
Степень 2^n	16 384	32 768	65 536	131 072	262 144	524 288	1 048 576	2 097 152

Заметим, что в первой строке таблицы даны логарифмы по основанию 2 чисел второй строки. Так, например, $11=\log_2 2048$.

С помощью этой таблицы можно быстро производить умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня над числами, помещенными в строке с надписью «2^n», например:

1) Умножение 2048 на 256 можно заменить сложением соответствующих показателей ($11+8=19$) и отысканием соответствующего этому показателю числа, получим:

$$2048 \cdot 256 = 524\,288.$$

2) Деление 1 048 576 на 32 768 заменяется вычитанием показателей ($20-15=5$) и отысканием соответствующего этой разности числа (32), т. е.

$$1\,048\,576 : 32\,768 = 32.$$

3) Возведение в степень 128^3 может быть выполнено умножением соответствующего основанию показателя (7) на 3:

$$7 \cdot 3 = 21;$$

показателю 21 соответствует число 2 097 152;

$$128^3 = 2\,097\,152.$$

4) Извлечение корня, например, $\sqrt{1\,048\,576}$ сводится к делению показателя (20) на показатель корня (2)

$$\sqrt{1\,048\,576} = 1024.$$

Во всех четырех случаях громоздкие действия над самими числами мы заменили более простыми действиями над их логарифмами.

§ 111. Общие свойства логарифмов

1. *Логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей.*

Для доказательства рассмотрим частный случай, когда число сомножителей равно двум.

Пусть

$$\log_a N = x, \quad \log_a N_1 = x_1;$$

тогда

$$N = a^x, \quad N_1 = a^{x_1}.$$

Перемножая последние два равенства, получим:

$$N \cdot N_1 = a^{x+x_1},$$

откуда по определению логарифма следует, что

$$\log_a (NN_1) = x + x_1$$

или

$$\mathbf{\log_a (NN_1) = \log_a N + \log_a N_1.}$$

2. *Логарифм частного (дроби) равен разности логарифмов делимого и делителя.*

Пользуясь предыдущими обозначениями, имеем:

$$N = a^x; \quad N_1 = a^{x_1}.$$

Разделив первое равенство на второе, получим:

$$\frac{N}{N_1} = a^{x-x_1}, \text{ откуда } \log_a\left(\frac{N}{N_1}\right) = x - x_1$$

или

$$\mathbf{\log_a\left(\frac{N}{N_1}\right) = \log_a N - \log_a N_1.}$$

3. *Логарифм степени равен логарифму основания, умноженному на показатель степени.*

Действительно, если $a^x = N$, то $(a^x)^m = N^m$, откуда

$$\log_a (N^m) = mx;$$

так как $x = \log_a N$, то

$$\mathbf{\log_a (N^m) = m \log_a N.}$$

4. *Логарифм корня равен логарифму подкоренного числа, деленному на показатель корня.*

Имеем:

$$\sqrt[p]{N} = N^{\frac{1}{p}} = (a^x)^{\frac{1}{p}}; \quad \sqrt[p]{N} = a^{\frac{x}{p}},$$

откуда

$$\log_a \sqrt[p]{N} = \frac{x}{p}$$

или

$$\mathbf{\log_a \sqrt[p]{N} = \frac{\log_a N}{p}.}$$

§ 112. Логарифмирование произведений и частного

На основании четырех свойств, установленных в предыдущем параграфе, можно выразить логарифм любого одночленного выражения через логарифмы составляющих его чисел; например, пусть

$$x=\frac{ab^3}{c\sqrt[3]{d^2}}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}\log x\,^{*)} &= \log(ab^3)-\log(c\sqrt[3]{d^2})=\\ &=\log a+\log(b^3)-(\log c+\log\sqrt[3]{d^2})=\\ &=\log a+3\log b-\log c-\frac{2}{3}\log d.\end{aligned}$$

Пример.

$$y=\frac{(a-b)^3\sqrt[3]{c}}{\sqrt[5]{(a+b)^2d^3}},$$

$$\log y=3\log(a-b)+\frac{1}{3}\log c-\frac{1}{5}[2\log(a+b)+3\log d].$$

§ 113. Потенцирование

Если по логарифму некоторого выражения отыскивается само выражение, то говорят, что надо произвести потенцирование, т. е. действие, обратное логарифмированию.

Пример 1. Дано: $\log x=\log a+2\log b-\log c$. Найти x.

$$x=\frac{a\cdot b^2}{c}.$$

Пример 2. $\log x=\frac{1}{3}\left[\log a-\frac{1}{2}\log b+2\log(a+b)\right]+$ $+\log c$;

$$x=c\sqrt[3]{\frac{a(a+b)^2}{\sqrt{b}}}.$$

---

*) Здесь основание логарифма произвольное положительное число, не равное единице, для краткости мы его не пишем.

При потенцировании руководствуемся следующими соображениями: сумма логарифмов есть логарифм произведения, например

$$\log m + \log n = \log (m \cdot n);$$

разность логарифмов — логарифм частного, множитель перед логарифмом указывает на то, что был взят логарифм степени, например,

$$3 \log a = \log a^3,$$

$$\frac{1}{3} (\log a + \log b) = \log \sqrt[3]{ab}.$$

Правильность произведенного потенцирования всегда можно проверить логарифмированием.

§ 114. Система десятичных логарифмов

Логарифмы чисел, вычисленные при одном и том же основании, образуют *систему логарифмов.* В частности, если за основание принять число 10, то система логарифмов называется *десятичной.* Десятичные логарифмы обозначаются символом «lg» без указания основания 10, т. е. вместо $\log_{10} A$ пишут просто $\lg A$.

Десятичные логарифмы обладают рядом свойств, делающих их чрезвычайно удобными при вычислениях. Отметим эти свойства.

Свойство I. *Десятичный логарифм целого числа, изображенного единицей с последующими нулями, равен стольким единицам, сколько нулей в изображении числа.* Это свойство — очевидное, так как

$$\begin{array}{lcl}
10^1 = 10 & \text{отсюда} & \lg 10 = 1 \\
10^2 = 100 & » & \lg 100 = 2 \\
10^3 = 1000 & » & \lg 1000 = 3 \\
\dots\dots & » & \dots\dots \\
10^n = \underbrace{100\dots0}_{\text{всего } n \text{ нулей}} & » & \lg \underbrace{100\dots0}_{\text{всего } n \text{ нулей}} = n.
\end{array}$$

Свойство II. *Логарифм правильной десятичной дроби, изображенной единицей с предшествующими нулями, равен* *столькам отрицательным единицам, сколько нулей предшествуют единице, считая и нуль целых.*

Имеем:

$10^{-1}=0{,}1$ отсюда следует, что $\lg 0{,}1 = -1$

$10^{-2}=0{,}01$ » » » $\lg 0{,}01 = -2$

$10^{-3}=0{,}001$ » » » $\lg 0{,}001 = -3$

. . . .

$10^{-n}=\underbrace{0{,}00\ldots01}_{\text{всего } n \text{ нулей}}$ » » » $\lg \underbrace{0{,}00\ldots01}_{\text{всего } n \text{ нулей}} = -n$

Логарифмы чисел, изображенных другими цифрами, помимо единицы и нуля, не могут быть выражены точно ни целым, ни дробным числом; они представляют собой иррациональные числа.

Покажем, например, что $\lg 2$ не может быть равен дробному числу $\frac{p}{q}$, где p и q — целые положительные числа.

Если допустим, что $\lg 2=\frac{p}{q}$, то должно иметь место равенство $10^{\frac{p}{q}}=2$ или $10^p=2^q$. Это равенство невозможно, так как левая часть его 10^p есть число, изображенное единицей с «p» нулями и состоит из множителей 2 и 5, повторенных «p» раз $[10^p=(2\cdot5)^p=2^p\cdot5^p]$; правая часть 2^q такого разложения дать не может; следовательно, нельзя допустить, что $\lg 2$ выражается точно дробным числом.

Однако возможно вычислить приближенно $\lg 2$, а также логарифм всякого другого числа с любой степенью точности, т. е. с любым числом десятичных знаков. Пример такого вычисления будет дан в следующем параграфе.

Здесь же мы дадим способ производить грубую его оценку, т. е. указать, между какими целыми числами он содержится.

Пусть требуется найти $\lg 275{,}6$; напишем очевидное неравенство

$$100<275{,}6<1000,$$

тогда

$$\lg 100<\lg 275{,}6<\lg 1000 \text{ или}$$
$$2<\lg 275{,}6<3,$$

откуда $\lg 275{,}6=2+$ положительная правильная дробь.

Определение. *Целая часть логарифма называется характеристикой, дробная часть — мантиссой.* В четырехзначных таблицах Брадиса находим: $\lg 275{,}6 = 2{,}4402$; здесь характеристика равна 2, мантисса равна 0,4402.

Свойство III. *Характеристика логарифма числа, большего* 1, *содержит столько единиц, сколько цифр в целой части числа без одной.*

Сначала убедимся в правильности высказанного положения на отдельных примерах, а потом рассмотрим общий случай.

а) Число 32,185 имеет в целой части две цифры и заключается между 10^1 и 10^2: $10^1 < 32{,}185 < 10^2$; но большему числу соответствует больший логарифм:

$$\lg 10 < \lg 32{,}185 < \lg 10^2,$$
$$\text{или}\quad 1 < \lg 32{,}185 < 2,$$
$$\text{откуда}\quad \lg 32{,}185 = 1 + \text{правильная дробь.}$$

Характеристика равна 1, т. е. на единицу меньше числа цифр в целой части.

б) $\lg 5147{,}3 = 3 +$ правильная дробь, ибо

$$1000 < 5147{,}3 < 10\,000,$$
$$\text{или}\quad 10^3 < 5147{,}3 < 10^4,$$
$$\text{откуда}\quad 3 < \lg 5147{,}3 < 4.$$

в) Пусть число A имеет в целой части n цифр, тогда имеем неравенство

$$10^{n-1} \leqslant A < 10^n,$$
$$\text{откуда}\quad n - 1 \leqslant \lg A < n,$$
$$\text{следовательно,}\quad \lg A = \underbrace{n - 1}_{\text{характеристика}} + \underbrace{\text{правильная дробь.}}_{\text{мантисса}}$$

Свойство IV. *Характеристика логарифма правильной десятичной дроби содержит столько отрицательных единиц, сколько нулей предшествует первой значащей цифре, считая в том числе и нуль целых; мантисса при этом положительна.*

Пример 1. Дробь 0,0475 заключается между 0,01 и 0,1, т. е.

$$0{,}01 < 0{,}0475 < 0{,}1,$$
$$\lg 0{,}01 < \lg 0{,}0475 < \lg 0{,}1,$$
$$-2 < \lg 0{,}0475 < -1.$$

Следовательно, $\lg 0,0475 = -2 +$ правильная положительная дробь. Характеристика в данном случае равна -2. Первой значащей цифре (4) предшествуют два нуля.

Пример 2. $\lg 0,00054 = -4 +$ положительная правильная дробь, так как

$$0,0001 < 0,00054 < 0,001, \text{ откуда}$$
$$\lg 0,0001 < \lg 0,00054 < \lg 0,001,$$
$$-4 < \lg 0,00054 < -3.$$

Пусть имеем правильную десятичную дробь α, первой значащей цифре которой предшествуют n нулей (считая и нуль целых). Такую дробь в общем виде можно изобразить так:

$$\alpha = \overbrace{0,000\ldots0}^{n \text{ нулей}}\, b_1 b_2 \ldots,$$

где b_1 есть первая значащая цифра.

Имеем неравенство

$$\overbrace{0,000\ldots0}^{n \text{ нулей}}1 \leqslant \alpha < \overbrace{0,000\ldots0}^{(n-1) \text{ нулей}}1$$

Поэтому

$$\lg \overbrace{0,000\ldots0}^{n \text{ нулей}}1 \leqslant \lg \alpha < \lg \overbrace{0,000\ldots0}^{(n-1) \text{ нулей}}1$$
$$-n \leqslant \lg \alpha < -(n-1).$$

Логарифм данной дроби оказался заключенным между двумя целыми отрицательными числами: $-n$ и $-(n-1)$, разность между которыми равна 1; следовательно, он (логарифм) равен меньшему числу $+$ положительная правильная дробь.

$$\lg \alpha = -n + \text{правильная положительная дробь.}$$

Итак, характеристика $\lg \alpha$ равна $-n$.

Условились алгебраическую сумму целого отрицательного числа и положительной правильной дроби сокращенно записывать так:

$$-3 + 0,4317 = \bar{3},4317;$$
$$-5 + 0,8205 = \bar{5},8205.$$

Знак (—) сверху указывает на то, что отрицательна лишь целая часть, мантисса же — положительна (читается: пять под минусом). В такой форме принято записывать логарифмы чисел, меньших 1; эта форма логарифма называется искусственной.

Всякий отрицательный логарифм можно привести к искусственной форме, например:

а) $-2{,}1543=-2-0{,}1543=(-2-1)+(1-0{,}1543)=$
$=-3+0{,}8457=\bar{3}{,}8457;$

б) $-1{,}0647=(-1-1)+(1-0{,}0647)=-2+0{,}9353=$
$=\bar{2}{,}9353;$

в) $-4{,}2564=\bar{5}{,}7436.$

Правило. Чтобы преобразовать отрицательный логарифм в искусственную форму, нужно к характеристике прибавить отрицательную единицу и поставить над результатом знак (—) сверху, все цифры мантиссы вычесть из 9, последнюю цифру — из 10.

Свойство V. *При умножении или делении числа на* 10, 100, 1000 *и т. д. мантисса его логарифма остается без изменения, а характеристика увеличивается или уменьшается на одну, две, три и т. д. единиц.*

Заметим, что числа 10, 100, 1000, ... суть целые положительные степени 10, т. е. числа вида 10^n.

а) Имеем: $\lg(A\cdot 10^n)=\lg A+\lg 10^n=\lg A+n.$

В результате умножения числа A на 10^n логарифм увеличился на n единиц, следовательно, дробная часть — мантисса — осталась без изменения.

б) $\lg\left(\frac{A}{10^n}\right)=\lg A-\lg 10^n=\lg A-n;$

логарифм уменьшился на n единиц, следовательно, мантисса остается прежней. Например:

$$\begin{aligned}
\lg 38{,}1 &= 1{,}5809;\\
\lg 381 &= 2{,}5809;\\
\lg 3810 &= 3{,}5809;\\
\lg 38\,100 &= 4{,}5809;\\
\lg 3{,}81 &= 0{,}5809;\\
\lg 0{,}381 &= \bar{1}{,}5809;\\
\lg 0{,}000381 &= \bar{4}{,}5809.
\end{aligned}$$

Следствия: 1) *Характеристика логарифма зависит только от положения запятой в данном числе и нисколько не зависит от цифр, изображающих это число.*

Логарифмы таких чисел, как 278; 598,5; 110,7; 705,48; 142,845, имеют одну и ту же характеристику, равную 2.

2) *Мантисса не зависит от положения запятой, а зависит только от значащих цифр и их взаимного расположения.* Мантиссы логарифмов таких чисел, как 23,4; 2,34; 0,234; 2340 и т. п. будут одни и те же.

§ 115. Вычисление логарифма

В § 114 было доказано, что $\lg 2$ есть число иррациональное. Покажем способ, позволяющий вычислить приближенное значение $\lg 2$ с заданной степенью точности, например с точностью до 0,001.

Идея этого способа заключается в следующем: находят две целые положительные степени числа 10, показатели которых разнятся на 1; между ними должна заключаться степень числа 2 с достаточно большим показателем. Другими словами, надо решить неравенство вида

$$10^m < 2^p < 10^{m+1}, \tag{4}$$

где m и p — искомые целые положительные числа.

Если $p \geqslant 1000$, то поставленная нами точность будет достигнута. В самом деле, логарифмируя неравенство (4), получим:

$$m < p \lg 2 < m+1, \text{ или}$$

$$\frac{m}{p} < \lg 2 < \frac{m+1}{p}.$$

Две дроби $\frac{m}{p}$ и $\frac{m+1}{p}$, между которыми заключается $\lg 2$, разнятся между собой на величину $\frac{1}{p}$. При $p \geqslant 1000$ поставленная точность будет достигнута.

Переходим к вычислениям, для чего пользуемся таблицей квадратов как вспомогательным средством. Имеем:

$$\begin{aligned}
2^5 &= 32;\\
2^{10} &= 32^2 = 1024 = 1{,}024\cdot 10^3;\\
2^{20} &= (1{,}024\cdot 10^3)^2 \approx 1{,}04\cdot 10^6;\\
2^{40} &\approx (1{,}04\cdot 10^6)^2 \approx 1{,}08\cdot 10^{12};\\
2^{80} &\approx (1{,}08\cdot 10^{12})^2 \approx 1{,}16\cdot 10^{24};\\
2^{160} &\approx (1{,}16\cdot 10^{24})^2 \approx 1{,}34\cdot 10^{48};\\
2^{320} &\approx (1{,}34\cdot 10^{48})^2 \approx 1{,}79\cdot 10^{96};\\
2^{640} &\approx (1{,}79\cdot 10^{96})^2 \approx 3{,}20\cdot 10^{192};\\
2^{1280} &\approx (3{,}20\cdot 10^{192})^2 \approx 1{,}02\cdot 10^{385}.
\end{aligned}$$

Так как $1{,}02\cdot 10^{385} > 10^{385}$, но $1{,}02\cdot 10^{385} < 10^{386}$, то имеем неравенство

$$10^{385} < 2^{1280} < 10^{386}.$$

Логарифмируя это неравенство, получим:

$$\begin{aligned}
&385 < 1280 \lg 2 < 386;\\
&\frac{385}{1280} < \lg 2 < \frac{386}{1280};\\
&0{,}3001 < \lg 2 < 0{,}3017 \text{ или}\\
&0{,}300 < \lg 2 < 0{,}302.
\end{aligned}$$

Взяв полусумму верхней и нижней границ, имеем:

$$\lg 2 \approx 0{,}301.$$

Более точные вычисления дают:

$$\lg 2 = 0{,}3010299956\ldots$$

Первые три десятичных знака были вычислены нами совершенно точно. Существуют другие, более удобные способы вычисления логарифмов, но они требуют знания высшей математики.

§ 116. Действия над логарифмами

Прежде чем приступить к вычислениям с помощью логарифмов, надо научиться производить четыре арифметических действия над логарифмами, ибо к этому в основном сводится техника логарифмирования. Рассмотрим каждое действие в отдельности.

1. Сложение.

Пример 1.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 2,1742 \\ \bar{1},5736 \end{array} \\ \hline 1,7478 \end{array}$$

Пример 2.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} \bar{3},4832 \\ \bar{1},6758 \end{array} \\ \hline \bar{3},1590 \end{array}$$

Сложение производится по правилам сложения десятичных дробей с той разницей, что характеристики складываются алгебраически, т. е. как относительные числа, и к результату прибавляются целые единицы, полученные от сложения десятых долей мантисс.

2. Вычитание. Рассмотрим несколько случаев.

Пример 1.

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 2,4845 \\ 3,1796 \end{array} \\ \hline \bar{1},3049 \end{array}$$

Из мантиссы уменьшаемого (0,4845) вычитаем мантиссу вычитаемого (0,1796), получаем в результате 0,3049, затем из характеристики уменьшаемого (2) вычитаем характеристику вычитаемого (3), получим -1; оба результата вычитания объединяем в запись $\bar{1},3049$.

Пример 2.

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 1,3516 \\ \bar{2},6432 \end{array} \\ \hline 2,7084 \end{array}$$

При вычитании мантисс пришлось занять единицу из характеристики уменьшаемого, т. е. из $\dot{1},3516$ вычесть 0,6432, что дает 0,7084; вычитая характеристики, получим $0-(-2)=2$.

Пример 3.

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} \bar{3},2534 \\ \bar{5},6718 \end{array} \\ \hline 1,5816 \end{array}$$

Характеристику уменьшаемого (-3) представляем мысленно как сумму $(-4+1)$, положительную единицу присоединяем к мантиссе и из 1,2534 вычитаем мантиссу вычитаемого 0,6718, что дает 0,5816. Затем вычитаем характеристики: $-4-(-5)=1$; окончательный результат 1,5816.

3. Умножение. При умножении логарифма с отрицательной характеристикой на натуральное число в отдельности умножается мантисса и характеристика:

$$\bar{2},1853\cdot 4=(-2+0,1853)\cdot 4=-8+0,7412=\bar{8},7412.$$

Обычно такое умножение производится без предварительного представления логарифма в виде алгебраической суммы, например:

$$\bar{1},8916\cdot 5=\bar{1},4580.$$

После умножения десятых долей мантиссы на 5 получилось 4 целых положительных единицы, которые прибавляются в уме к 5 отрицательным единицам, полученным от умножения (—1) на 5; $-5+4=-1$; окончательный результат $\bar{1},4580$.

Если логарифм с отрицательной характеристикой, но с положительной мантиссой умножается на положительную десятичную дробь, то необходимо перевести логарифм из искусственной формы в естественную, произвести умножение двух десятичных дробей и результат перевести в искусственную форму.

Пример 1.

$$\bar{1},1526\cdot 0,23=(-1+0,1526)\cdot 0,23=$$
$$=-0,8474\cdot 0,23=-0,1949=\bar{1},8051.$$

Пример 2.

$$\bar{3},6418\cdot(-0,47)=-2,3582\cdot(-0,47)=1,0835.$$

4. Деление. Если необходимо разделить логарифм с отрицательной характеристикой на натуральное число, то здесь надо различать два случая: а) когда характеристика делится нацело, б) когда характеристика не делится нацело.

Пример 1.

$$\bar{2},1856:2=\bar{1},0928.$$

Здесь сразу отдельно были разделены на 2 и характеристика и мантисса.

Пример 2.

$$\bar{2},4365 : 5 = (-2 + 0,4365) : 5 =$$
$$= (-5 + 3,4365) : 5 = -1 + 0,6873 = \bar{1},6873.$$

К характеристике прибавляем столько отрицательных единиц (—3), чтобы получить ближайшее целое число, делящееся нацело на делитель; к мантиссе одновременно прибавляем столько же положительных единиц и делим в отдельности характеристику и мантиссу.

Пример 3.

$$\bar{5},4724 : 4 = \bar{2},8681.$$

К характеристике было прибавлено (—3), к мантиссе (+3), деление произведено в уме.

Пример 4.

$$\bar{3},1832 : 0,658 = -2,8168 : 0,658 = -4,2809 = \bar{5},7191.$$

Пример 5.

$$\bar{1},6405 : (-1,3) = -0,3595 : (-1,3) =$$
$$= 0,3595 : 1,3 = 0,2765.$$

§ 117. Дополнительный логарифм

Два числа N и $\frac{1}{N}$, как известно, называются взаимно обратными; произведение их равно 1.

Определение. *Дополнительным логарифмом числа N называется логарифм числа* $\frac{1}{N}$:

$$\text{доп. } \lg N = \lg \frac{1}{N}.$$

Так как

$$\lg \frac{1}{N} = -\lg N,$$

то

$$\text{доп. } \lg N = -\lg N.$$

Дополнительный логарифм числа N есть логарифм этого же числа, взятый с противоположным знаком; например:

а) $\text{доп. } \lg 17,18 = -\lg 17,18 = -1,2350 = \bar{2},7650.$

б) $\text{доп. } \lg 0,0085 = -\lg 0,0085 = -\bar{3},9294 =$

$$= -(-3 + 1 - 1 + 0,9294) = -(-2 - 0,0706) = 2,0706.$$

Допустим, что $\lg N = c + m$, где c — характеристика, m — мантисса, тогда

$$\text{доп.}\ \lg N = -\lg N = -c - m = -c - 1 - m + 1 = -(c+1) + (1-m).$$

Чтобы по логарифму числа N найти его дополнительный логарифм, надо к характеристике прибавить единицу и результат взять с противоположным знаком, мантиссу же вычесть из 1.

Примеры.

1) $-\lg 0{,}0672 = \text{доп.}\ \lg 0{,}0672 = -\bar{2}{,}8274 = 1{,}1726$;

2) $-\lg 13{,}8 = -1{,}1399 = \bar{2}{,}8274$;

3) $-\frac{2}{3} \lg 0{,}825 = -\frac{2}{3} \cdot \bar{1}{,}9165 = -\frac{\bar{1}{,}8330}{3} = -\bar{1}{,}9443 = 0{,}0557$.

§ 118. Таблицы логарифмов

Таблицы Брадиса дают приближенные значения мантисс логарифмов всех целых чисел от 1 до 9999 с четырьмя точными десятичными знаками; характеристика логарифма проставляется на основании указанных свойств десятичных логарифмов. Так как мантисса логарифма не зависит от положения запятой в изображении числа, а зависит только от последовательности значащих цифр в данном числе, то этими же таблицами можно пользоваться для отыскания мантисс дробных чисел. Ниже дается отрывок из таблицы.

1. Мантиссы логарифмов

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8443	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5

Предположим, что надо найти lg 65,4. Первые две цифры числа — 65 — берем из первого слева столбца, помеченного сверху надписью «N» (нумерус — число), и продвигаемся от числа 65 по горизонтальной строке до пересечения с вертикальным столбцом, помеченным сверху (или снизу) третьей значащей цифрой числа, т. е. цифрой 4. В пересечении получим мантиссу 8156, что означает десятитысячные доли, т. е. 0,8156; следовательно, $\lg 65{,}4 = 1{,}8156$. Мантиссы логарифмов двузначных чисел или трехзначных чисел, оканчивающихся нулями, берутся из столбца, помеченного сверху цифрой нуль; например, мантисса логарифма числа 68 или числа 680 равна 0,8325.

Чтобы найти логарифм четырехзначного числа, например lg 6754, проставляем прежде всего характеристику, т. е. пишем: $\lg 6754 = 3, \ldots$; неизвестные цифры мантиссы находим следующим образом: находим сперва, как было объяснено выше, мантиссу логарифма трехзначного числа 675, т. е. числа, изображенного первыми тремя цифрами данного числа; получаем 0,8293; от этой мантиссы продвигаемся вправо по горизонтальной строке, пересекая двойную вертикальную черту, пока не окажемся на пересечении с тем из напечатанных светлой краской столбцов, который помечен сверху цифрой 4; в пересечении находим число 3 (3 десятитысячных); это — поправка на четвертую значащую цифру 4, ее следует прибавить в уме к уже найденной мантиссе 0,8293; получим окончательно: $\lg 6754 = 3{,}8296$.

Если надо найти логарифм пятизначного числа или числа с бóльшим количеством значащих цифр, то предварительно округляют это число до четырех значащих цифр, после чего находят его логарифм по описанному выше способу.

Примеры:

1) $\lg 687{,}681 = \lg 687{,}7 = 2{,}8374$;

2) $\lg 0{,}040752 = \lg 0{,}04075 = \bar{2}{,}6101$;

3) $\lg 1{,}007 = 0{,}0030$.

§ 119. Таблица антилогарифмов

Число, соответствующее данному логарифму, называется *антилогарифмом*. Для нахождения числа по данному его логарифму пользуются таблицами антилогарифмов. Устройство и способ употребления их ничем не отличаются от только что описанной таблицы логарифмов. Если $\lg x = \bar{1},5245$, то x (антилогарифм) находим следующим образом: не обращая пока внимания на характеристику, берем первые две цифры мантиссы, т. е. 52, из первого слева столбца, помеченного буквой m (мантисса), и продвигаемся по этой горизонтали до пересечения со столбцом, помеченным сверху третьей цифрой мантиссы 4; на пересечении их находим число 3342; на четвертую цифру мантиссы — 5 — находим поправку 4, помещенную на пересечении той же горизонтали с тем из крайних справа столбцов, который помечен сверху цифрой 5; поправку прибавляем к найденному числу 3342, получим $x = 0,3346$. Первой значащей цифре предшествует один нуль, так как характеристика равна $\bar{1}$.

§ 120. Линейное интерполирование

Допустим, что нужно найти lg 20754, не прибегая к предварительному округлению числа до четырехзначного. Прежде всего заметим, что логарифмы чисел 20754 и 207,54 имеют одну и ту же мантиссу. По таблице находим: мантисса логарифма числа $207 = 3160$ (десятитысячным), а мантисса логарифма числа $208 = 3181$ (десятитысячной).

Изменению числа на 1, т. е. от 207 до 208, соответствует изменение его логарифма на $3181 - 3160 = 21$ (десятитысячной). Надо узнать, насколько изменится логарифм числа, если само число изменится на 0,54. Допустим, что *при малых изменениях числа логарифм его меняется пропорционально изменению самого числа;* тогда можно рассуждать так:

Изменению числа на 1 соответствует изменение его логарифма на 21 (десятитысячную).

Изменению числа на 0,54 соответствует изменение его логарифма на z.

Составляем пропорцию:

$$z : 21 = 0,54 : 1,$$

$$z = 21 \cdot 0,54 = 11,34 \approx 11.$$

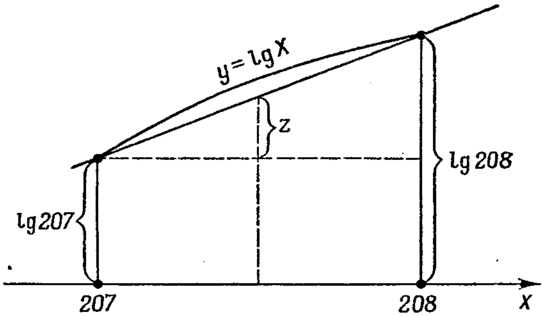
Эту поправку прибавляем к мантиссе числа 207, т. е. 0,3160;

получаем 0,3171. Итак,

$$\lg 207{,}54 = 2{,}3171,$$

$$\lg 20754 = 4{,}3171.$$

Отыскание промежуточного значения функции по двум ее табличным значениям называется интерполированием. Если при этом допускается, что изменение функции (логарифма) пропорционально изменению аргумента, то интерполирование называется *линейным*. Геометрически это означает, что вместо логарифмической кривой мы рассматриваем прямую, для которой изменения (приращения) ординат пропорциональны изменению абсцисс (черт. 51).



Черт. 51.

§ 121. Пятизначные таблицы

Если нужна бо́льшая точность в вычислениях, то пользуются таблицами логарифмов с бо́льшим числом десятичных знаков. Поясним на примере, как пользоваться пятизначными таблицами Пржевальского. К этим таблицам нужно обращаться в тех случаях, когда данные числа имеют пять точных значащих цифр. Пусть требуется найти $\lg 378{,}23$. Мантиссы логарифма данного числа в таблице нет, но есть мантиссы двух смежных четырехзначных чисел, между которыми заключается данное число:

$$378{,}2 < 378{,}23 < 378{,}3.$$

По таблице, отрывок которой помещен ниже, находим:

$$\lg 378{,}2 = 2{,}57772; \quad \lg 378{,}3 = 2{,}57784;$$

табличная разность равна $2{,}57784 - 2{,}57772 = 0{,}00012 = 12$ (стотысячным). Поправку на пятую цифру числа (3) находим из данной справа маленькой таблицы пропорциональных

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
370	56 820	832	844	855	867	879	894	902	914	926
371	937	949	961	972	984	996	008	019	031	043
372	57 054	066	078	089	101	113	124	136	148	159
373	171	183	194	206	217	229	241	252	264	276
374	287	299	310	322	334	345	357	368	380	392
375	403	415	426	438	449	461	473	484	496	507
376	519	530	542	553	565	576	588	600	611	623
377	634	646	657	669	680	692	708	715	726	788
378	749	761	772	784	795	807	818	830	841	852
379	864	875	887	898	910	921	933	944	955	967
380	978	990	001	013	024	035	047	058	070	081
381	58 092	104	115	127	138	149	161	172	184	195

P. P.	12
1	1,2
2	2,4
3	3,6
4	4,8
5	6,0
6	7,2
7	8,4
8	9,6
9	10,8

частей Р. Р. с надписью 12, где против цифры 3 справа стоит 3,6; эту поправку прибавляем к последней цифре мантиссы логарифма числа 378,2. Запись производим так:

$$\begin{array}{rr} 3782 \;\ldots & 57772 \\ 3 \;\ldots & 3{,}6 \\ \hline \multicolumn{2}{l}{\lg 378{,}23 = 2{,}577756 \approx 2{,}57776.} \end{array}$$

Обратно, если ищется число по данному его пятизначному логарифму, например $\lg x \doteq \overline{2},56979$, то *по тем же таблицам* находим *ближайшую меньшую мантиссу* 56972; ей соответствует число 3713, табличная разность равна 12 (стотысячным), наша разность, т. е. разность между данной мантиссой 0,56979 и ближайшей табличной 0,56972, равна 7 (стотысячным).

В столбике пропорциональных частей с пометкой 12 сверху ищем справа число 7 или ближайшее к нему число; находим число 7,2, которому соответствует пятая цифра искомого числа (6); следовательно, $x=0{,}037136$.

§ 122. Примеры на вычисления с применением логарифмов

Пример 1.

$$x=\sqrt[3]{\frac{783\sqrt{41{,}3}}{0{,}815^2\cdot 52{,}6}}.$$

$$\lg x=\frac{1}{3}\left[\lg 783+\frac{1}{2}\lg 41{,}3-(2\lg 0{,}815+\lg 52{,}6)\right],$$

или

$$\lg x=\frac{1}{3}\Bigl(\lg 783+\frac{1}{2}\lg 41{,}3+2\ \text{доп.}\ \lg 0{,}815+$$
$$+\ \text{доп.}\ \lg 52{,}6\Bigr).$$

Предварительные вычисления

$$\frac{1}{2}\lg 41{,}3=\frac{1{,}6160}{2}=0{,}8080;$$

$$\text{доп.}\ \lg 0{,}815=-(\bar{1}{,}9112)=$$
$$=0{,}0888;$$

$$\text{доп.}\ \lg 52{,}6=-(1{,}7210)=$$
$$=\bar{2}{,}2790;$$

Окончательные вычисления

$$\lg 783=2{,}8938$$
$$\frac{1}{2}\lg 41{,}3=0{,}8080$$
$$2\ \text{доп.}\ \lg 0{,}815=0{,}1776$$
$$\text{доп.}\ \lg 52{,}6=\bar{2}{,}2790$$
$$\overline{2{,}1584}$$

$$\lg x=\frac{2{,}1584}{3}=0{,}7195;$$
$$x=5{,}242;$$
$$x\approx 5{,}24.$$

Пример 2.

$$y=\sqrt[5]{0{,}178\cdot\sqrt[3]{0{,}4963}+4{,}727\sqrt{0{,}00283}}.$$

В этом примере сплошного логарифмирования произвести нельзя, так как под знаком корня стоит сумма. Вычислим каждое подкоренное слагаемое в отдельности:

1) $N = 0{,}178\ \sqrt[3]{0{,}4963}$;

$$\lg N = \lg 0{,}178 + \frac{1}{3}\lg 0{,}4963;$$

$$\lg 0{,}178 = \bar{1}{,}2504$$

$$\frac{1}{3}\lg 0{,}4963 = \frac{\bar{1}{,}6958}{3} = \bar{1}{,}8996$$

$$\lg N = \bar{1}{,}1490;$$

$$N = 0{,}1409;$$

2) $M = 4{,}727 \cdot \sqrt{0{,}00283}$;

$$\lg M = \lg 4{,}727 + \frac{1}{2}\lg 0{,}00283;$$

$$\frac{1}{2}\lg 0{,}00283 = \frac{\bar{3},\ 4518}{2} = \bar{2}{,}7259$$

$$\lg 4{,}727 = 0{,}6745$$

$$\lg M = \bar{1}{,}4004;$$

$$M = 0{,}2514;$$

3) $+\begin{array}{r} 0{,}1409 \\ 0{,}2514 \\ \hline 0{,}3923; \end{array}$

4) $y = \sqrt[5]{0{,}3923}$;

$$\lg y = \frac{\lg 0{,}3923}{5} = \frac{\bar{1}{,}5636}{5} = \bar{1}{,}9127;$$

$$y = 0{,}8179; \qquad y \approx 0{,}818.$$

Пример 3.

$$Z = \frac{(6{,}429)^{-0{,}32} \cdot (0{,}819)^{\frac{1}{3}}}{(4{,}27)^{-\frac{3}{5}} \cdot (0{,}00318)^{0{,}48}}.$$

Представим данное выражение в следующей форме:

$$Z = \frac{(4{,}27)^{\frac{3}{5}} \cdot (0{,}819)^{\frac{1}{3}}}{(6{,}429)^{0{,}32} \cdot (0{,}00318)^{0{,}48}}.$$

Логарифмируем:

$$\lg Z = \frac{3}{5}\lg 4{,}27 + \frac{1}{3}\lg 0{,}819 + 0{,}32 \text{ доп. } \lg 6{,}429 + \\ + 0{,}48 \text{ доп. } \lg 0{,}00318.$$

Вспомогательные вычисления	Окончательные вычисления
1) $0{,}32$ доп. $\lg 6{,}429 = -0{,}32 \cdot 0{,}8081 = -0{,}2586 = \bar{1}{,}7414$;	$\frac{3}{5}\lg 4{,}27 = 0{,}3782$;
2) $0{,}48$ доп. $\lg 0{,}00318 = -0{,}48 \cdot (\bar{3}{,}5024) = -0{,}48 \cdot (-2{,}4976) = 1{,}1988$;	$\frac{1}{3}\lg 0{,}819 = \frac{\bar{1}{,}9133}{3} = \bar{1}{,}9711$;
3) $\frac{3}{5}\lg 4{,}27 = \frac{3 \cdot 0{,}6304}{5} = \frac{1{,}8912}{5} = 0{,}3782$;	$0{,}32$ доп. $\lg 6{,}429 = \bar{1}{,}7414$; $0{,}48$ доп. $\lg 0{,}00318 = 1{,}1988$; $\lg Z = 1{,}2895$; $Z = 19{,}47$; $Z \approx 19{,}5$.

§ 123. Модуль перехода от одной системы логарифмов к другой

Кроме десятичных логарифмов в различных областях науки применяется еще другая система логарифмов, известная под названием «*натуральные логарифмы*». Основанием натуральной системы логарифмов является иррациональное число «e»; $e \approx 2{,}718$.

Натуральный логарифм обозначается знаком «ln» без указания основания.

Выведем формулу, позволяющую по десятичному логарифму числа найти натуральный логарифм того же числа. Допустим, что десятичный логарифм положительного числа N равен x, а натуральный логарифм того же числа — y, т. е.

$$\lg N = x; \ln N = y; \tag{5}$$

тогда имеем

$$10^x = N, \quad e^y = N,$$

откуда

$$10^x = e^y. \tag{6}$$

Прологарифмируем равенство (6) по основанию 10; получим:

$$x = y \lg e,$$

откуда

$$y = \frac{1}{\lg e} x;$$

так как $\lg e \approx \lg 2{,}718 = 0{,}4343$;

$$\frac{1}{0{,}4343} = 2{,}3026\ldots,$$

то

$$y = 2{,}3026\,x; \qquad (7)$$

заменяем x и y их значениями из равенства (5), получим:

$$\ln N = 2{,}3026 \cdot \lg N.$$

Натуральный логарифм положительного числа N *равен десятичному логарифму этого же числа, умноженному на* 2,3026. *Множитель* $2{,}3026\ldots = \frac{1}{\lg e}$ *называется модулем перехода от десятичной системы логарифмов к натуральной.*

Примеры.

1) $\ln 2 = 2{,}3026 \cdot \lg 2 = 2{,}3026 \cdot 0{,}3010 = 0{,}6931$;

$$\ln 2 = 0{,}6931;$$

2) $\ln 10 = 2{,}3026 \cdot \lg 10 = 2{,}3026$,

т. е. *модуль перехода равен натуральному логарифму числа* 10.

§ 124. Показательные уравнения

Рассмотрим уравнения, содержащие неизвестное в показателе степени. Такие уравнения принято обычно называть *показательными*, например:

$$\sqrt{3^x} = \frac{1}{\sqrt{27}}; \quad 5^{x+1} + 5^x = 750; \quad 9^{x+1} - 3^{x+3} = 486.$$

Существуют два основных способа решения показательных уравнений.

1. Способ приведения к общему основанию. Если обе части уравнения можно представить как степени с одним и тем же основанием a, где a — положительное число, не равное 1, то из равенства степеней и оснований следует, что должны быть равны показатели степени. Приравняв показатели степени, получаем обычно нам уже известный тип уравнения.

Пример 1.

$$\sqrt{3^x} = \frac{1}{\sqrt{27}}.$$

Имеем:

$$3^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}; \quad 3^{\frac{x}{2}} = 3^{-\frac{3}{2}},$$

откуда

$$\frac{x}{2}=-\frac{3}{2};\quad x=-3.$$

Проверка:

$$\sqrt{3^{-3}}=3^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{27}}.$$

Пример 2.

$$5^{x+1}+5^{x}=750.$$

Так как $5^{x+1}=5^{x}\cdot 5$, то можно вынести в левой части общий множитель 5^{x} за скобку, получим:

$$5^{x}\cdot(5+1)=750;\quad 5^{x}\cdot 6=750;\quad 5^{x}=125$$

или

$$5^{x}=5^{3};\quad x=3.$$

Проверка:

$$5^{3+1}+5^{3}=625+125=750;$$

$$750=750.$$

Пример 3.

$$\sqrt{9^{x(x+1)-\frac{1}{2}}}=\sqrt[4]{3}.$$

Представим обе части уравнения как степени числа 3

$$9^{\frac{1}{2}\left[x(x-1)-\frac{1}{2}\right]}=3^{\frac{1}{4}};$$

$$(3^{2})^{\frac{1}{2}\left[x(x-1)-\frac{1}{2}\right]}=3^{\frac{1}{4}};$$

$$3^{x(x-1)-\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{4}},$$

откуда

$$x(x-1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{4};$$

$$x^{2}-x-\frac{3}{4}=0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим:

$$x_{1}=-\frac{1}{2};\quad x_{2}=\frac{3}{2}.$$

Подстановкой в первоначальное уравнение убеждаемся, что оба корня пригодны.

2. Способ логарифмирования обеих частей уравнения.

Пример 4.

$$2{,}3^x = 1{,}5^{x+1}.$$

Здесь представляется более удобным логарифмировать обе части уравнения, после чего получим:

$$x \lg 2{,}3 = (x+1)\lg 1{,}5;$$
$$x \lg 2{,}3 - x \lg 1{,}5 = \lg 1{,}5;$$
$$x(\lg 2{,}3 - \lg 1{,}5) = \lg 1{,}5;$$
$$x = \frac{\lg 1{,}5}{\lg 2{,}3 - \lg 1{,}5} = \frac{0{,}1761}{0{,}1856} \approx 0{,}95.$$

В некоторых случаях при решении показательного уравнения приходится вводить вспомогательное неизвестное.

Пример 5.

$$4^{x-1} - 2^{x+3} + 28 = 0.$$

Имеем:

$$(2^2)^{x-1} - 2^{x+3} + 28 = 0$$

или

$$2^{2x} \cdot 2^{-2} - 2^x \cdot 2^3 + 28 = 0;$$

пусть $2^x = z$; тогда $2^{2x} = z^2$; уравнение принимает вид

$$\frac{z^2}{4} - 8z + 28 = 0 \quad \text{или} \quad z^2 - 32z + 112 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, получаем:

$$z_1 = 4; \qquad z_2 = 28,$$

откуда

$$2^x = 4; \qquad x_1 = 2;$$
$$2^x = 28; \qquad x \lg 2 = \lg 28;$$
$$x_2 = \frac{\lg 28}{\lg 2} \approx 4{,}83.$$

Оба корня удовлетворяют данному уравнению.

§ 125. Логарифмические уравнения

Если уравнение содержит неизвестное под знаком логарифма, то принято называть его *логарифмическим*, например:

$$\lg x + \lg(x+3) = 1; \qquad \frac{\lg x}{\lg(x+1)} = -1.$$

Обычный прием решения логарифмических уравнений — это потенцирование, в результате чего получаем обычно алгебраическое уравнение. Полученные корни нуждаются в обязательной проверке, поскольку среди них могут оказаться посторонние.

Пример 1.

$$\lg x + \lg (x+3) = 1.$$

Так как $1 = \lg 10$ и сумма логарифмов есть логарифм произведения, то данное уравнение принимает вид

$$\lg [x(x+3)] = \lg 10.$$

Если логарифмы двух чисел равны, то должны быть равны сами числа, т. е. $x(x+3) = 10$.

Решая это квадратное уравнение, находим:

$$x_1 = -5; \qquad x_2 = 2.$$

Отрицательный корень $x = -5$ должен быть отброшен, так как подстановка его в уравнение приводит к логарифму от отрицательного числа, а функция $\lg x$ определена нами только при положительных значениях аргумента x.

Пример 2.

$$\sqrt[3]{x^{\lg x - 1}} = 100.$$

Логарифмируем обе части:

$$\frac{1}{3}(\lg x - 1)\lg x = 2.$$

Раскрывая скобки, получаем квадратное уравнение относительно $\lg x$:

$$\lg^2 x - \lg x - 6 = 0,$$

откуда

$$\lg x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6}\ ;$$

$$\lg x_1 = -2; \qquad \lg x_2 = 3;$$

$$x_1 = 10^{-2} = 0{,}01; \qquad x_2 = 10^3 = 1000.$$

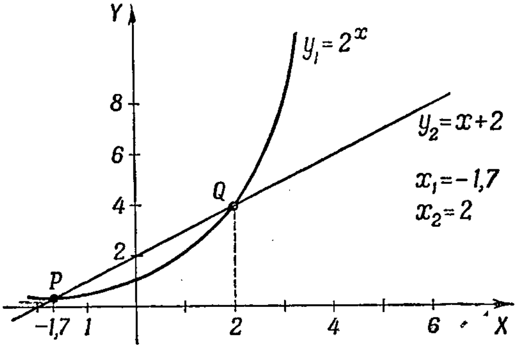
Проверкой убеждаемся в том, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

§ 126. Решение более сложного неалгебраического уравнения

Уравнение

$$2^x - x - 2 = 0$$

не может быть решено ни одним из приведенных выше способов; оно вообще *не решается алгебраически.* Однако графическим способом нетрудно найти приближенные зна-



Черт. 52.

чения корней. Представим уравнение в форме $2^x = x + 2$ и построим графики функций, представляющих левую и правую части уравнения (черт. 52):

$$y_1 = 2^x,$$
$$y_2 = x + 2.$$

По чертежу прочитываем абсциссы двух точек пересечения

$$x_1 \approx -1,7; \quad x_2 = 2 \quad \text{(точный корень).}$$

§ 127. Краткая историческая справка о логарифмах

Учение о логарифмах возникло в начале XVII века в связи с назревшей практической потребностью в новых вычислительных средствах. Мореплаватели, астрономы того времени вынуждены были производить чрезвычайно утомительные вычисления над многозначными числами, чтобы определить курс и местонахождение корабля в открытом море или чтобы обработать результаты наблюдений за движением планет.

Сама идея логарифмов возникла из сопоставления двух прогрессий: арифметической и геометрической, что было показано в § 110. Следует отметить, что геометрическая прогрессия со знаменателем $q=2$ мало пригодна для вычислительных целей: члены ее быстро возрастают и большинство целых чисел в эту таблицу не попадает.

Первыми составителями таблиц логарифмов были шотландский математик Непер (1550—1617) и швейцарский математик Бюрги (1552—1632).

Вычислительная работа по составлению первых таблиц логарифмов требовала исключительно большого труда и времени и заняла у их составителей десятки лет. В настоящее время методами высшей математики таблицы логарифмов, а равно и другие таблицы могут быть составлены исключительно быстро, особенно если при этом пользоваться современными вычислительными машинами.

В школьное преподавание логарифмы впервые вошли благодаря работам Эйлера (1707—1783), знаменитого петербургского академика XVIII века, современника великого Ломоносова.

Эйлером придуман термин «мантисса» для обозначения дробной части логарифма, он же дал и теорию логарифмов почти в том виде, в каком она излагается до сих пор в наших учебниках.

Упражнения

1. Написать следующие показательные равенства в виде логарифмических:

1) $3^6=729$; 2) $4^5=1024$; 3) $10^4=10\,000$;

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$; 5) $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$; 6) $10^{-3}=0{,}001$.

2. Написать следующие логарифмические равенства в виде показательных:

1) $\log_2 64=6$; 2) $\log_3 81=4$; 3) $\log_5 125=3$; 4) $\log_{10} 100\,000=5$;

5) $\log_{10} 0{,}01=-2$; 6) $\log_{\frac{4}{3}}\frac{27}{64}=-3$; 7) $\log_3\frac{1}{81}=-4$.

3. Найти при основании 2 логарифмы следующих чисел:

1) 32; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{8}$; 4) $\sqrt{2}$; 5) $2\sqrt{2}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $\sqrt[3]{4}$; 8) $\frac{4}{\sqrt[5]{2}}$.

4. Чему равны при основании 10 логарифмы следующих чисел:

1) 10; 2) 1000; 3) 0,1; 4) 0,0001; 5) 10^n; 6) $\sqrt{10}$; 7) $\sqrt[3]{10^2}$;

8) $\sqrt[5]{100}$; 9) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; 10) $\frac{1}{10\sqrt{10}}$.

5. На основании определения логарифма найти неизвестное из следующих равенств:

1) $x=\log_8 27$; 2) $y=\log_2 16$; 3) $z=\log_5 625$; 4) $x=\log_9 27$; 5) $y=\log_5 0{,}04$; 6) $u=\log_2 0{,}125$; 7) $\log_3 x=2$; 8) $\log_5 x=0$; 9) $\log_4 y=\frac{3}{2}$; 10) $\log_8 z=-2$; 11) $\log_{\frac{3}{2}} u=2$; 12) $\log_{\frac{1}{2}} N=-3$.

При каком основании:

1) $\log 36=2$; 2) $\log 27=\frac{3}{2}$; 3) $\log 64=4$; 4) $\log 2=-0{,}5$.

6. Между какими целыми числами заключаются логарифмы чисел: 7, 30, 120, 495 при основании 2?

7. Между какими целыми числами заключаются логарифмы чисел: 3, 18, 134 и 1782 при основании 10?

8. Между какими отрицательными целыми числами заключаются логарифмы чисел: 0,07; 0,018; 0,00215 и 0,00005 при основании 10?

9. Между какими отрицательными целыми числами заключаются логарифмы чисел: $\frac{1}{15}$; $\frac{3}{80}$ и $\frac{1}{120}$ при основании 2?

10. Чему равен логарифм $\sqrt[5]{8}$ при основании: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 4; 4) 16; 5) 64?

11. При каком основании $\sqrt{27}$ имеет логарифм, равный: 1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{3}{4}$?

12. Составить такую последовательность чисел, чтобы логарифмы членов этой последовательности при основании 2 образовали бы арифметическую прогрессию:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 10.$$

Какую последовательность образуют эти числа?

13. Показать в общем виде, что если числа образуют геометрическую прогрессию с положительными членами, то логарифмы этих чисел образуют арифметическую прогрессию.

14. Построить на одном чертеже графики функций:

1) $y=\log_2 x$,
2) $y=\log_2 (x+1)$,
3) $y=\log_2 x+1$.

Указание. Предварительно составить таблицу значений.

15. Выразить логарифм числа 15 через логарифмы чисел 3 и 5.

16. Выразить логарифм числа $2\frac{1}{3}$ через логарифмы чисел 7 и 3.

17. Выразить: 1) $\log 8$ через $\log 2$; 2) $\log 81$ через $\log 3$.

18. Выразить: 1) $\log\sqrt{5}$ через $\log 5$; 2) $\log\sqrt[3]{2}$ через $\log 2$; 3) $\log\sqrt[5]{27}$ через $\log 3$.

19. Логарифмы каких простых чисел надо знать, чтобы найти при том же основании логарифмы чисел

$$40;\quad \frac{27}{64};\quad \frac{12}{25};\quad \sqrt{80};\quad \sqrt[3]{\frac{3}{16}}?$$

20. Найти: 1) $\log_2(8\cdot 128)$; 2) $\log_5(25\sqrt{125})$.

21. Зная, что $\log_{10}2=0{,}3010$; $\log_{10}3=0{,}4771$; $\log_{10}5=0{,}6990$, найти: 1) $\log_{10}40$; 2) $\log_{10}1{,}8$; 3) $\log_{10}0{,}12$; 4) $\log_{10}0{,}02$.

22. Прологарифмировать следующие выражения:

1) $x=3ab$; 2) $x=\dfrac{2ab}{c}$; 3) $y=a^3b^2$; 4) $z=\dfrac{a^2b^5}{c^3}$; 5) $x=3(a-b)$;

6) $y=\dfrac{2a}{a^2-b^2}$; 7) $x=\sqrt{ab}$; 8) $x=\dfrac{\sqrt[3]{ac}}{(a+c)^2}$; 9) $y=\dfrac{1}{a^2bc^3}$;

10) $x=\sqrt[3]{\dfrac{ab^2}{c}}$; 11) $y=\dfrac{a^2\sqrt{bc}}{3\sqrt[5]{(a+b)^3}}$; 12) $z=\sqrt{\dfrac{4a\sqrt{ab}}{5b\sqrt[3]{a^2b}}}$;

13) $y=\sqrt[n]{\dfrac{1}{ab}\sqrt{\dfrac{b}{a}}}$; 14) $x=\dfrac{5ab\sqrt[3]{ab}}{\sqrt{a^2-b^2}}$;

15) $y=\left(\sqrt[3]{\dfrac{a^4\sqrt{ab}}{b^2\sqrt[3]{bc}}}\right)^2$; 16) $x=\sqrt{\dfrac{40\sqrt{2\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{5\sqrt{6}}}}$;

17) $y=\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}b^3}{c^{-\frac{3}{4}}}$; 18) $x=\sqrt[n]{m\sqrt[p]{b^2}}$; 19) $z=\dfrac{1}{\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c}}}}$;

20) $y=\sqrt[m]{a^{n+1}\sqrt[n]{b^p}}$; 21) $x=(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$;

22) $x=\log_a\left[(a+b)^{\log_a(a+b)}\right]$.

23. По логарифму неизвестного числа найти само число:

1) $\log x=\log 5-\log 2+\log 3$; 2) $\log x=\log 7+\log 5-\log 3$;
3) $\log y=2\log 3+3\log 5$; 4) $\log z=3\log 2-2\log 3+\log 5$;

5) $\log y=\dfrac{1}{2}\log 3+\dfrac{2}{3}\log 5-\dfrac{1}{3}\log 2$;

6) $\log u=\dfrac{1}{3}\log(a+b)-[\log a+2\log(b+c)]$;

7) $\log x=\dfrac{1}{2}\log(a^2+b^2)-\dfrac{1}{3}[\log(a+b)-\log(b-a)]$;

8) $\log z=\dfrac{3\log a-(3\log b+2\log c)}{4}$;

9) $\log y = \frac{1}{5}[3\log(a-b)+2\log(a+b)-4\log a]$;

10) $\log z = \frac{1}{3}\left[\log a + \frac{1}{4}(\log a + 3\log c)\right] -$
$- [\log b + 3\log(c+a) - \log(b+1)]$.

24. Найти: 1) $\lg 1000$; 2) $\lg 0{,}1$; 3) $\lg 0{,}0001$.

25. Найти характеристики логарифмов следующих чисел:

7; 125; 5832; 109,54; 0,083; 0,00012.

26. Зная, что $\lg 32 = 1{,}5051$, найти $\lg 3{,}2$; $\lg 3200$; $\lg 0{,}32$; $\lg 0{,}0032$.

27. Следующие логарифмы с отрицательной характеристикой представить в виде отрицательных чисел:

1) $\bar{1}{,}1728$; 2) $\bar{2}{,}5893$; 3) $\bar{4}{,}0075$; 4) $\bar{6}{,}9917$.

28. Следующие отрицательные логарифмы представить в искусственной форме, т. е. с положительной мантиссой:

1) $-0{,}5618$; 2) $-1{,}6247$; 3) $-2{,}0019$; 4) $-3{,}9904$; 5) $-0{,}7328$.

29. Найти по таблицам логарифмы следующих целых чисел:
1) 30; 2) 160; 3) 4800; 4) 72 000; 5) 252; 6) 493; 7) 109; 8) 649; 9) 1183; 10) 7845; 11) 5848; 12) 2007.
Найти логарифмы следующих дробей:
1) 0,007; 2) 0,03; 3) 0,0008; 4) 0,0002; 5) 0,12; 6) 0,019; 7) 0,0031; 8) 0,0078; 9) 3,18; 10) 0,0542; 11) 72,8; 12) 0,632; 13) 30,65; 14) 1,967; 15) 18,12; 16) 0,4343.

30. Зная, что $\lg 375 = 2{,}5740$, найти без таблиц логарифмы чисел:
1) 37,5; 2) 0,375; 3) 3,75; 4) 0,00375; 5) 3750.

31. Округляя данные пятизначные числа до четырех цифр, найти их логарифмы:

1) 13 407; 2) 32,742; 3) 0,058369; 4) 18 396; 5) 0,070418.

32. Найти числа, соответствующие логарифмам:

1) 0,8140; 2) 1,6590; 3) $\bar{1}{,}6454$; 4) $\bar{2}{,}7789$; 5) 3,1580; 6) $\bar{3}{,}1752$; 7) 1,003; 8) 3,0463; 9) $\bar{2}{,}0032$.

33. Найти логарифмы чисел и произвести над ними указанные действия:

1) $\lg 0{,}057 + \lg 0{,}09$; 2) $\lg 3{,}18 + \lg 0{,}25$; 3) $\lg 25{,}6 - \lg 18{,}2$;

4) $\lg 0{,}873 - \lg 0{,}543$; 5) $\lg (2{,}17)^3$; 6) $\lg (0{,}3725)^3$; 7) $\lg \sqrt[4]{1{,}27}$;
8) $3\lg 0{,}728$; 9) $2\lg 15{,}8 + 3\lg 0{,}263$; 10) $\lg \sqrt{32{,}7} + \lg \sqrt[3]{0{,}0253}$.

34. Найти дополнительные логарифмы следующих чисел:

1) доп. $\lg 18{,}23$; 2) доп. $\lg 0{,}0532$; 3) доп. $\lg 318{,}6$; 4) $\frac{2}{3}$ доп. $\lg 0{,}326$;

5) $-\frac{1}{2}\lg 13{,}6$.

35. С помощью четырехзначных таблиц логарифмов вычислить:

1) $x=0{,}7545\cdot 2{,}457$; 2) $x=144{,}6\cdot 0{,}0256\cdot 0{,}75^3$; 3) $x=\dfrac{120{,}4\cdot 1{,}44}{300{,}1}$;

4) $x=\dfrac{17{,}6\cdot 2{,}85}{43{,}6\cdot 8{,}95}$; 5) $y=\dfrac{0{,}0795\cdot 15{,}4}{1{,}18^2\cdot 32{,}7}$; 6) $z=\sqrt[5]{17{,}32}$;

7) $x=\sqrt[4]{0{,}0386}$; 8) $y=\dfrac{1}{\sqrt[5]{0{,}724}}$; 9) $x=\dfrac{\sqrt[4]{27{,}32}}{0{,}4316}$;

10) $x=\sqrt[3]{\dfrac{23{,}6}{18{,}3}}$; 11) $y=\sqrt[4]{\dfrac{128}{9657}}$; 12) $z=\dfrac{37{,}26}{28{,}75}\sqrt{48{,}31}$;

13) $x=\sqrt[5]{0{,}42\sqrt{0{,}0275}}$; 14) $y=0{,}75^4\,\sqrt[3]{0{,}75^2}$;

15) $x=\sqrt[3]{0{,}275}\cdot\sqrt[4]{7{,}386}$; 16) $\dfrac{\sqrt[3]{2{,}5\,\sqrt[4]{0{,}0125}}}{\sqrt[4]{0{,}0125}\cdot\sqrt[3]{0{,}25}}$;

17) $y=\sqrt[5]{3{,}125-\sqrt[3]{0{,}75}}$; 18) $x=\sqrt[5]{1-\sqrt[3]{0{,}0814}}$;

19) $x=\dfrac{1{,}56^3\cdot 0{,}00364^2\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3}{7}}}{4{,}658^2\sqrt{0{,}0467}}$; 20) $y=2{,}75^{0{,}6}$; 21) $z=0{,}463^{0{,}45}$;

22) $x=\dfrac{1}{7{,}45^{0{,}32}}$; 23) $A=0{,}00485^{0{,}0652}$; 24) $y=1+0{,}4893^{0{,}285}$;

25) $x=\sqrt[3]{\dfrac{7{,}83\sqrt{41}}{(300{,}7)^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{17}}}$; 26) $y=\dfrac{(0{,}089)^{0{,}41}\cdot(3{,}726)^{-1{,}3}}{300^{\frac{1}{7}}\cdot(43{,}6)^{-0{,}7}}$;

27) $z=\sqrt{\dfrac{7{,}82^{\frac{1}{2}}\cdot(3{,}47)^{-0{,}71}}{(6{,}402)^{-\frac{3}{5}}\cdot(0{,}081)^{0{,}57}}}$.

36. Решить следующие показательные уравнения:

1) $\sqrt[x]{2}=2^x$; 2) $2^{x-1}=4^5$; 3) $4^{-\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{2}$; 4) $\left(\dfrac{5}{4}\right)^{0{,}8x}=\dfrac{64}{125}$;

5) $a^{x-7}=a^{7-x}$; 6) $9^{-3x}=\left(\dfrac{1}{27}\right)^{x+3}$; 7) $\sqrt[x]{16}=\sqrt{4^x}$.

37. Решить уравнения:

1) $13{,}2^x=8$; 2) $(0{,}785)^{2x}=3{,}18$; 3) $\sqrt[x]{22{,}1}=7^x$.

38. Решить уравнения:

1) $3^{x+1}+\dfrac{18}{3^x}=29$; 2) $x^{x^2-7x+12}=1$; 3) $7^{2x}-6\cdot 7^x+5=0$;

4) $\dfrac{\lg 2x}{\lg (4x-15)} = 2$; 5) $\dfrac{1}{5-\lg x} + \dfrac{2}{1+\lg x} = 1$;

6) $\lg (x^3) - \dfrac{12}{\lg x} = 5$;

7) $\lg \sqrt{7x+5} + \dfrac{1}{2} \lg (2x+7) = 1 + \lg 4{,}5$;

8) $x^{\lg x - 1} = 100$; 9) $x^{3 - \frac{\lg x}{3}} = 900$;

10) $\lg (x-5) - \dfrac{1}{2} \lg (3x-20) = 0{,}3010$;

11) $x^{\lg x} = 100x$; 12) $\lg \left(\dfrac{1}{2} + x\right) = \lg \dfrac{1}{2} - \lg x$;

13) $\sqrt{x^{\lg \sqrt{x}}} = 10$; 14) $\dfrac{\lg (35 - x^3)}{\lg (5-x)} = 3$;

15) $\lg (5x^2 - 14x + 1) = \lg (4x^2 - 4x - 20)$.

39. Решить графически следующие уравнения:

$$\lg x - \frac{x}{2} + 4 = 0; \qquad 2^x + x - 2 = 0.$$

40. Вычислить

1) $4^{\log_{16} 27}$; 2) $5^{\log_3 2}$; 3) $3^{\log_3 2 - 1}$.

41. Вычислить, не пользуясь таблицами,

$10^{\frac{1}{2} - \lg 0{,}375 \sqrt{10}}$.

Решить уравнения.

42. $\left(2\sqrt{12} + 3\sqrt{3} + 6\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt{3^{2x^2 - 2x - 3}}$.

43. $10^{\log_a (x^2 - 3x + 5)} = 3^{\log_a 10}$.

44. $(x^2 - x - 1)^{x^2 - 7x + 2} = 1$.

45. $x^{3\lg^2 x - \frac{2}{3} \lg x} = 100\sqrt{10}$.

46. $\lg [3 + 2\lg (1+x)] = 0$.

47. $2 \lg \lg x = \lg (7 - 2 \lg x) - \lg 5$.

48. $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{16} + 2 \log_3 (x-3) \log_3 (x+2) = \log_3^2 (x-3) + \log_3^2 (x+2)$.

49. $\sqrt[\frac{2}{9}-x]{m^{\frac{1}{3}+x}}=\sqrt[\frac{2}{9}+x]{m^{\frac{1}{3}-x}}\cdot\sqrt[\left(\frac{2}{9}\right)^2-x^2]{m^2};$

$m>0$ и $m\neq 1$.

50. $2^{\log_8(x^2-6x+9)}=3^{2\log_x\sqrt{x}-1}$.

51. $25^{\sqrt{x}}-124\cdot 5^{\sqrt{x}}=125$.

52. $\log_8^2 x-9\log_8 x=4$.

53. $\lg 8+2\lg 4=\lg 2^{3x^2-2x+2}-\lg 12+2\lg\sqrt{3}$.

54. $\begin{cases}\sqrt[x-y]{x+y}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}};\\ (x+y)\cdot 2^{y-x}=48.\end{cases}$

55. $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=576;\\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4.\end{cases}$

56. $\log_x 5\sqrt{5}-1{,}25=(\log_x\sqrt{5})^2$.

57. $\left(\dfrac{9}{4}\right)^x\cdot\left(\dfrac{8}{27}\right)^{x-1}=\dfrac{2}{3}$.

58. $\sqrt[x-7]{\sqrt[3]{2^{3x-1}}}-\sqrt[3x-7]{8^{x-3}}=0$.

59. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\sqrt{\dfrac{4}{3}}=\dfrac{9}{16}$.

60. $0{,}2^{x^2-16x+37{,}5}=5\sqrt{5}$.

61. $\sqrt[x-4]{2^{x^2-7x+12}}=(2^{x-5})^{x-5}$.

ГЛАВА XI

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ЛИНЕЙКА

Введение. Наиболее распространенным среди инженеров и техников счетным прибором является логарифмическая линейка.

Логарифмическая линейка позволяет производить разнообразные операции: умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня, логарифмирование и потенцирование, отыскание значений тригонометрических функций заданных углов и обратно. При этом значительно экономятся труд и время вычислителя. Но результаты всех действий на линейке получаются приближенными с точностью до трех значащих цифр.

§ 128. Части логарифмической линейки и названия шкал

Логарифмическая линейка состоит из трех частей:

1) самой линейки (корпус линейки) с нанесенными на ней шкалами;

2) движка — подвижной части, — скользящего в желобке корпуса линейки;

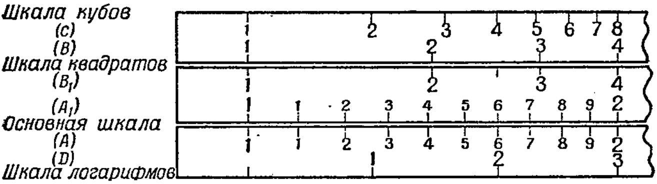
3) бегунка, состоящего из вделанного в металлическую рамку стеклышка. Посредине стеклышка нанесена тонкая визирная линия (визир).

На лицевой стороне линейки и движка находятся следующие шкалы (черт. 53):

1) Шкала кубов (помечена буквой C) — самая верхняя.

2) Шкала квадратов (помечена буквой B) — вторая сверху; она один раз изображена на самой линейке (шкала B), другой раз — на движке (шкала B_1).

3) Основная шкала (помечена буквой A) — вторая снизу; она, как и шкала квадратов, нанесена и на линейке (шкала A) и на движке (шкала A_1).



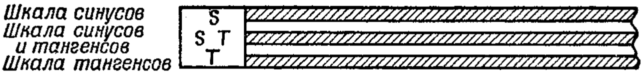
Черт. 53.

4) Шкала логарифмов (помечена буквой D) — самая нижняя шкала.

Основные шкалы на линейке и на движке, если движок не выдвинут влево или вправо, совпадают друг с другом всеми своими делениями. То же самое можно сказать и про шкалы квадратов на линейке и на движке.

На оборотной стороне движка, помимо того, имеются следующие шкалы (черт. 54):

1) Шкала синусов (помечена буквой S) — верхняя шкала.



Черт. 54.

2) Шкала синусов и тангенсов (помечена буквами S и T) — средняя шкала.

3) Шкала тангенсов (помечена буквой T) — нижняя шкала.

§ 129. Логарифмическая шкала

Прежде чем приступить к изучению действий, производимых на линейке, надо ознакомиться с тем, как построена логарифмическая шкала, составляющая основу линейки.

Возьмем функцию $y = \lg x$. Если аргумент (x) изменяется от $x = 1$ до $x = 10$, то логарифм (y) изменяется от 0 до 1, так как $\lg 1 = 0$; $\lg 10 = 1$.

Примем условно отрезок длиной в 250 *мм* за единицу и разделим его *пропорционально логарифмам целых чисел от* 1 *до* 10.

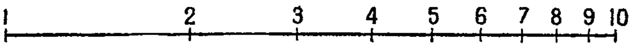
Предварительно составим следующую таблицу:

x	$y=\lg x$	$250 \lg x$ (*мм*)
1	0,0000	0,00
2	0,3010	75,3
3	0,4771	119,3
4	0,6021	150,5
5	0,6990	174,7
6	0,7782	194,6
7	0,8451	211,3
8	0,9031	225,8
9	0,9541	238,6
10	1,0000	250,0

На основании этой таблицы строим шкалу функции $y=$ $=\lg x$.

На произвольной прямой выбираем начальную точку O. Против нее ставим пометку 1, так как начальное значение x равно 1. Затем откладываем от точки O вправо последовательно отрезки, по длине равные 75,3 *мм*, 119,3 *мм*, 150,5 *мм*, ..., 250 *мм*; концы их помечаем соответствующими числами 2; 3; 4; ...; 10.

Получилась логарифмическая шкала, на которой нанесены пока только крупные деления или деления первого



Черт. 55.

разряда. На чертеже 55 эта шкала изображена в уменьшенном масштабе. Для уточнения шкалы надо интервал между каждыми двумя смежными крупными делениями разделить на 10 частей пропорционально логарифмам промежуточных чисел. Например, для получения на шкале пометки 1,5 надо отложить от начала отрезок, равный 250 *мм* $\cdot \lg 1{,}5=$ $=250 \cdot 0{,}176 \approx 44$ (*мм*). Подобным образом можно нанести на шкалу пометки 1,6; 1,7 и т. д.; это будут деления второго разряда, соответствующие десятым долям единицы.

Итак, пометки на логарифмической шкале: 1, 2, 3, 4, ..., 10 выражают собою числа; а отрезки 1—2, т. е. от пометки 1 до пометки 2, 1—3, 1—4, ..., 1—10 выражают соответственно логарифмы этих чисел, точнее числа, пропорциональные логарифмам, где коэффициент пропорциональности есть масштаб; в данном случае масштаб $M=250$ *мм*.

Шкала получилась неравномерная, так как логарифмы чисел не пропорциональны самим числам.

Логарифмическая шкала с масштабом 250 *мм* называется *нормальной*.

§ 130. Свойства логарифмической шкалы

Одно из важнейших свойств логарифмической шкалы заключается в том, что она *периодична*.

Поясним это. Если бы логарифмическую шкалу 1, ..., 10 продолжить вправо для чисел 10, 20, 30, ..., 100, то пришлось бы от начала шкалы (от пометки 1) отложить вправо отрезки, равные, точнее пропорциональные, соответственно $\lg 20$, $\lg 30$, $\lg 40$, ..., $\lg 100$. Но $\lg 20=1+\lg 2$, $\lg 30=1+\lg 3$ и т. д. Отсюда видно, что построение дополнительной шкалы свелось бы к тому, что к первоначальной шкале длиною, равной масштабу, пристраивалась бы снова такая же шкала. Точно так же снова повторилась бы шкала и для чисел от 100 до 1000 и т. д.

То же самое можно заключить и о шкале для чисел, расположенных слева от 1, например для чисел: 0,1; 0,2; 0,3; ...; 1 изображенная на чертеже 55 шкала оказалась бы смещенной влево на всю ее длину (250 *мм*).

Этого и следовало ожидать, исходя из свойств десятичных логарифмов: логарифмы чисел 0,02; 0,2; 2; 20; 200; 2000 и т. д. имеют одинаковые мантиссы; отличаются они лишь характеристиками. Производя те или иные операции на линейке, мы, в сущности, оперируем с мантиссами, поэтому нам достаточно иметь под руками логарифмическую шкалу длиною 1—10. Роль характеристик при вычислениях с помощью линейки играют значности, которые подсчитываются без линейки и позволяют найти искомый результат.

Таким образом, свойство периодичности позволяет заменить бесконечную шкалу одним ее отрезком, например от 1 до 10.

§ 131. О делениях на основной шкале

На основной логарифмической шкале деления нанесены от 1 до 2 через 0,01:

1,01; 1,02; 1,03; 1,04; 1,05 и т. д.;

от 2 до 4 через 0,02:

2,02; 2,04; 2,06 и т. д.;

от 4 до 10 через 0,05:

4,05; 4,10; 4,15 и т. д.

Принято говорить, что «цена» мелкого деления на участке от 1 до 2 равна 0,01, «цена» мелкого деления на участке от 2 до 4 равна 0,02, а на участке от 5 до 10 — равна 0,05.

§ 132. Установка и чтение чисел на основной шкале (A и A_1)

Прежде чем приступить к изучению различного рода действий, производимых на логарифмической линейке, необходимо научиться делать установку чисел с помощью визира и прочитывать числа, стоящие под наведенной визирной линией.

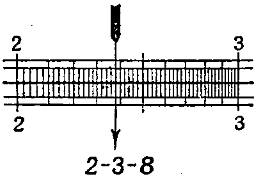
При этом следует помнить, что на линейке нормального типа можно поставить или прочитать три (редко четыре) последовательные значащие цифры числа. Когда требуется поставить на линейке число с бóльшим количеством цифр, его приходится предварительно округлять.

При установке уже округленного числа на линейке не принимаются во внимание нули, стоящие до первой значащей цифры, и все нули, стоящие в конце числа. Например, установка чисел 238; 0,238; 238 000; 0,000 238 на линейке будет одна и та же. Каждое из этих чисел читаем на линейке так: 2—3—8.

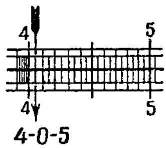
Чертеж 56 показывает, как нужно ставить на линейке, например, число 2—3—8.

Первая цифра 2 соответствует числу крупных делений, вторая цифра 3 — числу делений второго разряда, третья цифра 8 — числу мелких делений, т. е. делений третьего разряда, их взято 4, так как в данном промежутке цена одного мелкого деления равна двум единицам третьего разряда.

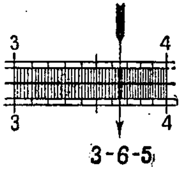
На чертеже 57 показана установка числа 4—0—5. Нуль отражает отсутствие единиц второго разряда.



Черт. 56.



Черт. 57.



Черт. 58.

Обратно, если нужно прочесть число, стоящее под наведенной визирной линией, то называют ближайшую слева цифру первого разряда, потом ближайшую слева цифру второго разряда и цифру третьего разряда, которую в большинстве случаев приходится прочитывать на глаз. Чертеж 58 изображает под визирной линией число 3—6—5.

Напомним, что до тех пор, пока визирная линия, например, не вышла за пределы промежутка 1—2, все отсчеты будут начинаться с цифры 1. Аналогично обстоит дело с делениями второго разряда.

Точно так же устанавливаются и прочитываются числа на соприкасающейся шкале движка, которую коротко будем называть шкалой A_1.

§ 133. Умножение на линейке

Умножение чисел на логарифмической линейке основано на графическом сложении логарифмов этих чисел, так как

$$\lg ab = \lg a + \lg b.$$

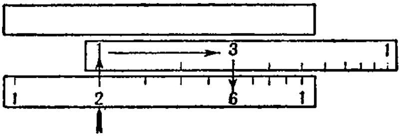
Рассмотрим два случая.

1. Пусть требуется умножить 2 на 3. Наводим визирную линию на отсчет 2 на основной шкале A. Под визирную

линию подводим единицу — начало шкалы A_1. Берем визиром отсчет 3 на шкале A_1 и под ним прочитываем на шкале A произведение 6.

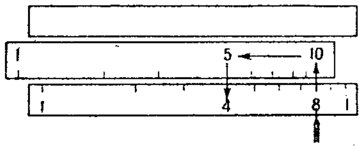
Схематически это умножение изображено на чертеже 59.

2. Пусть надо умножить 8 на 5. Наводим визирную линию на отсчет 8 шкалы A. Если подведем под визирную линию начало шкалы A_1, то отсчет 5 на шкале движка A_1 окажется за пределами шкалы A. Это и понятно, потому что при сложении мантисс логарифмов 8 и 5 получится число, бо́льшее 1: $\lg 8 + \lg 5 = 0{,}903 + 0{,}699 = 1{,}602$. Измерим циркулем, насколько выступает пометка 5 на шкале A_1 за пределы основной шкалы A, и отложим этот отрезок на основной шкале A от ее начала. Против конца этого отрезка стоит на шкале A пометка 4. Этот отсчет следует в 10 раз увеличить, так как число, соответствующее логарифму 1,602, должно иметь в целой части две цифры.



Черт. 59.

Тот же самый результат проще получится так: вместо начальной единицы движка подводим конец движка под отсчет 8, взятый по шкале A. Под отсчетом 5 шкалы движка можно прочесть на шкале A результат 40. Схематически это умножение изображено на чертеже 60.



Черт. 60.

Приведенные выше два примера имели своей целью пояснить принцип умножения чисел на логарифмической линейке.

Более сложный случай умножения, когда результат не может быть получен в уме:

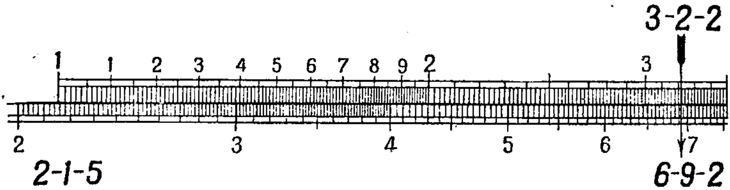
$$0{,}0215 \cdot 32{,}2.$$

Как видно из чертежа 61, результат равен 6—9—2.

Возникает вопрос, что означает первая цифра 6, — другими словами, где поставить десятичную запятую. Можно произвести грубую оценку полученного результата, округлив данные до одной значащей цифры:

$$0{,}02 \cdot 30 = 0{,}60.$$

Ясно, что первая цифра результата означает десятые доли. На первых порах рекомендуется именно таким образом делать грубую «прикидку» ожидаемого результата.



Черт. 61.

В случаях, когда приходится находить произведение большего числа сомножителей или производить еще и другие действия помимо умножения, возникает потребность в другом правиле оценки значимости в результате первой цифры, т. е. оценки того, представляет ли первая значащая цифра сотни, десятки или, быть может, тысячные доли и т. д. Введем понятие о значности числа.

§ 134. О значности чисел

Для чисел, бо́льших единицы, значность совпадает с количеством цифр в целой части этих чисел.

Значность чисел, меньших единицы, характеризуется столькими отрицательными единицами, сколько нулей предшествует первой значащей цифре, не считая нуль целых. Например, число 375 имеет значность 3, число 0,11 имеет значность 0, а число 0,003 имеет значность — 2.

Не надо смешивать значность числа с характеристикой логарифма этого числа: значность числа всегда на единицу больше характеристики.

§ 135. Подсчет значности произведения

Если при умножении двух чисел движок перемещается вправо, то значность результата равна сумме значностей сомножителей минус единица. Если же движок перемещается влево, то значность произведения равна сумме значностей сомножителей.

Если значность множимого m, а значность множителя n, то значность произведения подсчитывается по такой схеме:

Перемещение движка при умножении	Значность произведения
вправо	$m+n-1$
влево	$m+n$

Пример 1.

$$3{,}\overrightarrow{2\cdot}\,2{,}5=8{,}00;$$
$$1+1-1=1.$$

Движок перемещается вправо, что отмечено стрелкой, поэтому значность произведения равна сумме значностей сомножителей минус 1.

Пример 2.

$$4\overleftarrow{5\cdot 8}{,}2=369,$$
$$2+1=3.$$

Движок перемещается влево, что отмечено стрелкой, поэтому значность произведения равна сумме значностей сомножителей.

Если требуется выполнить умножение нескольких чисел, то рекомендуется фиксировать перемещение движка при каждом умножении постановкой стрелки, направленной в сторону перемещения движка.

Пример 3.

$$0{,}00\overleftarrow{75\cdot}\,4{,}\overleftarrow{2\cdot}\,4{,}\overrightarrow{3\cdot}\,150=20{,}3;$$
$$-2+1+1+3-1=2.$$

При умножении движок перемещался дважды влево и один раз вправо, поэтому значность результата равна сумме значностей сомножителей без одной единицы.

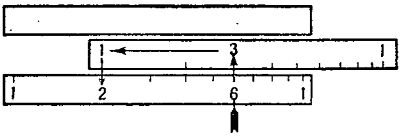
Примечание. Заметим, что если произведение первых значащих цифр есть число 10 или больше 10, то движок наверняка будет перемещаться влево. Например: 4,8·0,327; 54,8 · 2,1 и т. д.

§ 136. Деление

Так как логарифм частного равен логарифму делимого минус логарифм делителя, то на линейке деление сводится к графическому вычитанию логарифмов.

Пример 1.

$$6:3=2.$$



Черт. 62.

Установка. Делимое (6) ставим визиром на шкале A. Передвигаем движок так, чтобы делитель (3) на нем оказался под визирной линией.

Против начала шкалы движка на шкале A прочитываем результат (2).

Схематически это деление показано на чертеже 62.

Пример 2.

$$40:5=8.$$

Ставим отсчет 4—0 визиром на шкале A. Под него подводим отсчет 5, взятый на шкале движка. Против пометки 1 (или 10) на конце шкалы A_1 прочитываем на шкале A результат 8.

Схематически это деление показано на чертеже 63.

Подсчет значности частного, если значность делимого m, а значность делителя n, ведется по следующей схеме:

Черт. 63.

Перемещение движка при делении	Значность частного
влево	$m-n$
вправо	$m-n+1$

Пример.

$$8{,}7\overrightarrow{5:0}{,}0025 = 3500;$$

$$1-(-2)+1=4;$$

$$4{,}\overleftarrow{7:0}{,}065 = 72{,}3;$$

$$1-(-1)=2.$$

Примечание. Если первая цифра делимого больше первой цифры делителя, то движок перемещается вправо и в этом случае при подсчете значности прибавляется единица.

Пример.

$$0{,}0842:42{,}1=0{,}002;$$

$$-1-2+1=-2.$$

§ 137. Примеры с умножением и делением

Пример 1.

$$\frac{0{,}215\cdot 17{,}5}{0{,}019}=198$$

Стрелки указывают порядок действия: сперва деление, затем умножение.

В этом примере и деление и умножение были выполнены одной установкой движка, поэтому значность результата равна сумме значностей сомножителей числителя минус значность знаменателя. В нашем примере имеем:

$$(0{,}21\overrightarrow{5:0}{,}019)\cdot \overrightarrow{17}{,}5.$$

Подсчет значности:

$$[0-(-1)+1]+2-1=3.$$

Пример 2.

$$\frac{54{,}2\cdot 0{,}42}{0{,}0154}=1480$$

Выполнив деление $54{,}2:0{,}0154$, получаем результат против начальной единицы движка (не прочитываем). Произвести умножение полученного результата на 0,42 не удается, так как пометка 4—2 на движке оказывается вне пределов основной шкалы A. В данном случае требуется «перекидка» движка, т. е. вместо начальной единицы движка нужно поставить конечную единицу движка. Значность в таком случае равна значности числителя минус значность знаменателя плюс единица, так как при втором действии (умножении) движок перемещался влево.

Пример 3.

$$\frac{0{,}486 \cdot 0{,}007 \cdot 26{,}4}{0{,}124 \cdot 2{,}5} = 0{,}29$$

$$\{[(0{,}486 : 0{,}124) \cdot 0{,}007] : 2{,}5\} \cdot 26{,}4.$$

В процессе выполнения действий пришлось делать одну перекидку движка влево; следовательно, значность окончательного результата равна значности числителя минус значность знаменателя плюс единица

$$0 + (-2) + 2 - (0 + 1) + 1 = 0.$$

§ 138. О делениях на шкале квадратов

Шкала квадратов состоит из двух равных по длине и совершенно одинаковых следующих одна за другой шкал: левая половина и правая половина. Каждая из них имеет масштаб 125 *мм*.

Правая половина начинается от указанной средней пометки 1 (иногда 10) и оканчивается пометкой 1 (иногда 100) на конце шкалы квадратов.

На каждой из этих шкал имеются деления трех разрядов.

1. Крупные деления — они отмечены цифрами 1, 2, 3, ..., 1. (Иногда на правой подшкале эти деления помечены числами 10, 20, 30, ..., 100.) Эти деления соответствуют первой значащей цифре трехзначного числа.

2. Промежутки между делениями, отмеченными цифрами, разделены на 10 частей, причем эти новые деления на участке 1—5 выступают несколько выше (на движке) и ниже (на самой линейке) горизонтальных полосок. На участке 5—1 (10) эти деления, кроме пятого, не выступают за полоски. Указанные новые деления соответствуют вторым значащим цифрам трехзначного числа.

3. Промежутки между последними делениями разбиваются где на пять частей (между 1 и 2), где на две части (между 2 и 5), а где вовсе не разбиваются (между 5 и 1). Цена деления на шкале квадратов от 1 до 2 равна 0,02; от 2 до 5 — 0,05 и от 5 до 10 — 0,1.

Таким образом, на этой шкале третью значащую цифру по большей части приходится и устанавливать и читать на глаз.

§ 139. Умножение и деление на шкале квадратов

Умножение и деление чисел можно производить также и на шкале квадратов. Принцип установок остается тот же, что и при вычислениях с помощью основной шкалы, только результаты получаются, вообще говоря, менее точными.

Следует различать два случая подсчета значности при умножении на шкале квадратов. *Если произведение двух сомножителей находится не на той же подшкале, на которой взят первый сомножитель, то значность его равна сумме значностей обоих сомножителей. Если же произведение оказывается на той же подшкале, на которой взят и первый сомножитель, то значность произведения равна сумме значностей сомножителей минус единица.*

Примеры.

1) $$2{,}4 \cdot 0{,}0075 = 0{,}018.$$

Подсчет значности результата: $1 + (-2) = -1$.

2) $$0{,}0018 \cdot 0{,}0345 = 0{,}0000621.$$

Подсчет значности результата: $-2 + (-1) - 1 = -4$.

Также имеем два случая подсчета значности при делении на шкале квадратов.

Если частное находится вправо от делимого, то значность частного равна разности значностей делимого и делителя. Если же частное находится влево от делимого, то значность его равна разности значностей делимого и делителя плюс единица.

Примеры.

1) $450:0{,}06=7500$.

Подсчет значности результата:

$$3-(-1)=4.$$

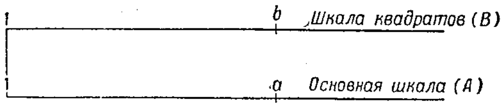
2) $3{,}6:2400=0{,}0015$.

Подсчет значности результата:

$$1-4+1=-2.$$

§ 140. Возведение чисел в квадрат

Пусть против пометки a на основной шкале A линейки находится пометка b на шкале квадратов B (чертеж 64). Это означает, что отрезок 1-a равен отрезку 1-b. Но



Черт. 64.

отрезок 1-a равен 250 $\lg a$ *мм*, так как масштаб основной шкалы линейки равен 250 *мм*. Отрезок 1-b на шкале квадратов равен $125 \lg b$ *мм*, так как масштаб шкалы квадратов равен 125 *мм*, как было сказано раньше.

На основании равенства отрезков 1-a и 1-b имеем:

$$250 \lg a = 125 \lg b;$$

или

$$2 \lg a = \lg b;$$

или

$$\lg a^2 = \lg b,$$

откуда

$$a^2 = b.$$

Таким образом, *против любого отсчета на основной шкале A на шкале квадратов B находится квадрат этого числа.*

Замечание. Движок при возведении чисел в квадрат не участвует.

Установка при возведении чисел в квадрат

1. На основной шкале отмечаем визиром бегунка возводимое в квадрат число.

2. На шкале квадратов под визиром читаем квадрат данного числа.

Значность квадрата данного числа определяется так:

а) если квадрат данного числа находится на правой половине шкалы квадратов, то значность результата равна $2m$, где m — значность основания;

б) если квадрат данного числа прочитывается на левой половине шкалы квадратов, то значность его равна $2m-1$:

Значность возводимого в квадрат числа	Значность квадрата, если он находится	
	на левой половине	на правой половине
m	$2m-1$	$2m$

Примеры.

1) $200^2 = 40\,000$.

Подсчет значности $3 \cdot 2 - 1 = 5$.

2) $0{,}00855^2 = 0{,}000073$.

Подсчет значности: $(-2) \cdot 2 = -4$.

3) $0{,}0295^2 = 0{,}00087$.

4) $0{,}604^2 = 0{,}365$.

5) $1{,}08^2 = 1{,}17$.

§ 141. Извлечение квадратного корня из чисел

Замечание. Движок при извлечении квадратного корня из чисел, так же как и при возведении в квадрат, не участвует.

Прежде чем приступить к самому извлечению квадратного корня на линейке, делим подкоренное число на грани по две цифры в каждой, начиная от запятой как влево, так и вправо. Если последняя грань справа от запятой окажется неполной, то приписываем к ней нуль. Первая слева грань может оказаться и неполной.

В случае правильной десятичной дроби первой гранью слева будем считать грань, следующую за чисто нулевыми гранями; она может начинаться с нуля и тогда считается неполной.

В примере 0,00268 первая слева грань 26 — полная.

В примере 0,000169 первая слева грань 01 — неполная.

Нули, стоящие до значащих цифр в десятичной дроби, при установке на линейке в расчет, как уже было сказано, не принимаются. Они учитываются при определении места запятой в ответе, т. е. в корне.

Установка при извлечении квадратного корня из чисел

1. На шкале квадратов отмечаем визиром бегунка первые три значащие цифры (округленно) подкоренного числа, причем, если первая слева грань полная, эту установку бегунка делаем на правой половине; если же первая грань неполная, установку делаем на левой половине.

2. На основной шкале читаем цифры искомого корня; этот корень отмечен тем же визиром бегунка.

Схематически установка на линейке при извлечении корня квадратного из чисел запишется так:

Первая слева грань	Половина шкалы квадратов, на которой производится установка подкоренного числа
Неполная 189, 0,0235, 0,00024	Левая
Полная 0,0012, 0,45, 0,4	Правая

Для установки подкоренного числа на линейке целесообразно, пользуясь таблицей умножения, определить первую цифру корня, т. е. извлечь корень из первой грани подкоренного числа, и записать ее на свое место в корне; эта цифра позволит контролировать правильность установки на линейке.

Определение числа цифр в целой части или места запятой в правильной десятичной дроби у искомого квадратного корня производится по следующему правилу:

для чисел, бóльших единицы, число цифр в целой части корня равно числу граней (полных и неполных) в целой части подкоренного числа;

для чисел, мéньших единицы, число нулей после запятой равно числу чисто нулевых граней в подкоренном числе.

Примеры.

$\sqrt{49'00}=70;$ $\sqrt{72',5}=8,52;$

$\sqrt{7',25}=2,69;$ $\sqrt{0',00'00'35'5}=0,00596;$

$\sqrt{0',00'01'69}=0,013;$ $\sqrt{0',00'26'8}=0,051.$

§ 142. Возведение чисел в куб

Здесь используется шкала кубов (шкала C).

Шкала кубов разбита на три совершенно одинаковые подшкалы, которые следуют друг за другом. Будем называть их соответственно их положению так: левая подшкала, средняя подшкала и правая подшкала. Деления на каждой из этих подшкал такого же характера, как и на подшкалах квадратов, только они соответственно меньше, так как масштаб шкалы кубов равен $\frac{250}{3}$ *мм*.

Замечание. Движок при возведении чисел в куб не участвует.

Установка при возведении чисел в куб

1. На основной шкале отмечаем визиром бегунка возводимое в куб число.

2. На шкале кубов читаем куб данного числа; он отмечен тем же визиром.

Значность куба числа в зависимости от того, на какой из трех подшкал шкалы кубов он читается, определяется по следующей схеме:

Значность возводимого в куб числа	Значность куба числа, если он находится		
	на левой подшкале	на средней подшкале	на правой подшкале
m	$3m-2$	$3m-1$	$3m$

Примеры.

1) $20^3 = 8000$.

Подсчет значности: $2 \cdot 3 - 2 = 4$.

2) $0{,}003^3 = 0{,}000000027$.

Подсчет значности: $-2 \cdot 3 - 1 = -7$.

3) $50^3 = 125\,000$.

Подсчет значности: $2 \cdot 3 = 6$.

4) $0{,}213^3 = 0{,}00966$.

Подсчет значности: $0 \cdot 3 - 2 = -2$.

§ 143. Извлечение кубичного корня из чисел

Замечание. Движок при извлечении кубичного корня из чисел не участвует.

Для установки подкоренного числа на линейке делим его на грани по три цифры в каждой, начиная от запятой вправо и влево. Если последняя грань справа от запятой окажется неполной, нужно приписать к ней один или два нуля, чтобы грань стала полной. Первая слева грань может оказаться и неполной, т. е. содержать одну или две цифры. Следует заметить, что в случае правильной десятичной дроби первой гранью слева считается грань, следующая за чисто нулевыми гранями. Эта грань может начинаться с одного или двух нулей и тогда она также считается неполной; таким образом, нули впереди не считаются за знаки.

Прежде чем приступить к установке на линейке подкоренного числа, надо выяснить, полная ли первая слева грань или неполная, и если неполная, то содержит ли она одну цифру или две.

Установка при извлечении кубичного корня из чисел

1. В соответствии с тем, сколько цифр в первой слева грани подкоренного числа, установка этого числа визиром на шкале кубов делается по следующей схеме:

Число цифр в первой слева грани	одна	две	три
Подшкала шкалы кубов, на которой делается установка	левая	средняя	правая
Примеры	$\sqrt[3]{8}$	$\sqrt[3]{27}$	$\sqrt[3]{216}$
	$\sqrt[3]{1'728}$	$\sqrt[3]{42'300}$	$\sqrt[3]{156'000}$
	$\sqrt[3]{0',005}$	$\sqrt[3]{0',012}$	$\sqrt[3]{0',125}$
	$\sqrt[3]{0',000'002}$	$\sqrt[3]{0',000'095}$	$\sqrt[3]{0',000'125}$

2. Искомое число, т. е. кубичный корень, читается на основной шкале, где оно отмечено тем же визиром.

Определение числа цифр в целой части искомого кубичного корня, а также определение места запятой в нем, если он представляет собою правильную десятичную дробь, производится по следующему правилу:

для чисел, бо́льших единицы, число цифр в целой части корня кубичного равно числу граней в целой части подкоренного числа;

для правильных десятичных дробей число нулей после запятой в корне кубичном равно числу чисто нулевых граней в подкоренном числе.

Примеры.

1) $\sqrt[3]{8000} = 20$;   4) $\sqrt[3]{0,008} = 0,2$;

2) $\sqrt[3]{0',000'027} = 0,03$;   5) $\sqrt[3]{0,036} = 0,33$;

3) $\sqrt[3]{125'000'000} = 500$;   6) $\sqrt[3]{0,7} = 0,888$.

§ 144. Простейшие комбинированные действия

При различного рода вычислениях приходится нередко встречаться с выражениями, содержащими несколько действий. Тогда целесообразно делать на линейке установки, которые скорее приводят к цели.

Разберем несколько примеров.

Пример 1. Вычислить $3{,}5^2 \cdot 720$.

Здесь установка такова: отмечаем визиром бегунка на основной шкале 3,5. Умножение на 720 производим уже на шкале квадратов, подводя конечную единицу движка под визирную линию, т. е. совмещаем ее с квадратом числа 3,5. Далее, на шкале квадратов находим ответ 8800 (против числа 720 на шкале квадратов движка).

Пример 2. Вычислить

$$\frac{2{,}3^2 \cdot 0{,}56}{0{,}0125}.$$

2,3 устанавливаем на основной шкале, и далее все вычисление ведется на шкале квадратов. Ответ: 237.

Пример 3. Вычислить

$$\frac{\sqrt{3{,}85} \cdot 0{,}48}{25{,}6}.$$

Вычисление ведется следующим образом. Отмечаем визиром бегунка на левой подшкале шкалы квадратов число 3,85 и подводим под этот визир число 25,6, взятое на основной шкале движка. После этого на основной шкале движка визиром фиксируем число 48. Тот же визир на основной шкале самой линейки отмечает искомый ответ: 0,0368.

Пример 4. Вычислить

$$\frac{3{,}35\sqrt[3]{44{,}4}}{17{,}8 \cdot 0{,}09}.$$

Начинается вычисление с установки корня кубичного из 44,4. Спустившись затем по визиру на основную шкалу, на ней и заканчиваем вычисление по аналогии с примером 3. Ответ: 7,42.

Пример 5. Вычислить

$$\left(\frac{108 \cdot 0{,}208}{3{,}08}\right)^3.$$

Вычисление выражения в скобках ведется на основной шкале, а ответ читаем на шкале кубов. Он там отмечен визиром в его последнем положении при вычислении скобок. Ответ: 387.

Пример 6. Вычислить

$$\sqrt{\frac{48{,}8 \cdot 0{,}00506}{12{,}6 \cdot 0{,}0304}}.$$

Ясно, что все вычисления под корнем целесообразно вести на шкале квадратов, чтобы окончательный ответ прочесть на основной шкале под визиром в его последнем положении. Ответ: 0,803.

Пример 7. В вопросах прикладного характера иногда встречаются выражения типа $a^{\frac{2}{3}}$. Вычисление здесь ведется в предположении, что $a^{\frac{2}{3}}$ представлено в виде $\sqrt[3]{a^2}$. Тогда делаем установку на шкале кубов для извлечения кубичного корня из a и окончательный ответ читаем непосредственно на шкале квадратов, не спускаясь на основную шкалу. Например,

$$8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 4.$$

Вычислить $42{,}5^{\frac{2}{3}}$. На шкале кубов ставим 42,5, а на шкале квадратов та же визирная линия указывает ответ: 12,2.

Пример 8. Вычислить $(0{,}53)^{\frac{3}{2}}$.

В этом примере ставим визиром бегунка на шкале квадратов 0,53 и на шкале кубов тот же визир укажет ответ: 0,385. Спускаться на основную шкалу нет необходимости.

§ 145. Отыскание десятичных логарифмов чисел

Шкала логарифмов (самая нижняя шкала) представляет собою таблицу мантисс логарифмов.

Деления на шкале логарифмов

Шкала логарифмов D в отличие от остальных шкал — равномерная. Она разделена на 10 отмеченных цифрами делений. Это — деления, соответствующие первой цифре мантиссы логарифма. В отличие от остальных шкал первое слева деление не 1, а 0.

Каждый из промежутков между указанными делениями разделен также на 10 частей. Эти новые деления, несколько выступающие над горизонтальной чертой, соответствуют второй цифре мантиссы логарифма.

Каждый из промежутков между последними делениями разбит на пять частей. Таким образом, цена каждого из этих делений равна двум единицам третьей значащей цифры мантиссы. Пользуясь шкалой D, можно производить всякого рода операции, требующие применения таблиц логарифмов.

Замечание. Движок при отыскании логарифмов чисел с помощью линейки не участвует.

Установка на линейке при отыскании мантиссы логарифма данного числа

1. На основной шкале отмечаем визиром бегунка данное число.

2. На шкале логарифмов тот же визир укажет искомую мантиссу логарифма.

Примеры.

1) $\lg 6750 = 3{,}829$;

2) $\lg 3{,}14 = 0{,}497$;

3) $\lg 0{,}00873 = \bar{3}{,}941$.

§ 146. Нахождение с помощью логарифмической линейки числа по данному его логарифму

Замечание. При нахождении числа по данному его логарифму движок не участвует.

Установка при нахождении числа по данному его логарифму

1. На шкале логарифмов отмечаем визиром бегунка мантиссу данного логарифма.

2. Тот же визир одновременно на основной шкале укажет первые три (иногда и четыре) цифры искомого числа. Место запятой в этом числе или число нулей после найденных цифр определяется по характеристике логарифма данного числа согласно правилам алгебры.

Примеры.

1) $\lg x = 4{,}398$; $x = 25\,000$;

2) $\lg z = \bar{2}{,}714$; $z = 0{,}0518$;

3) $\lg N = 0{,}420$; $N = 2{,}63$.

§ 147. Примеры вычислений с помощью шкалы логарифмов на логарифмической линейке

Вычислять на линейке с помощью шкалы логарифмов выражения, содержащие только умножение, деление, несложные степени (квадрат, куб) или корни квадратные и кубичные, не имеет смысла. Это проще вычисляется с помощью ранее рассмотренных шкал.

Шкала логарифмов используется главным образом при вычислении сложных степенных выражений или выражений, содержащих логарифмы.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить выражение $2{,}57^{0{,}344}$.

Имеем:

$$x = 2{,}57^{0{,}344}.$$

Находим:

$$\lg x = \lg (2{,}57^{0{,}344}) = 0{,}344 \lg 2{,}57 = 0{,}344 \cdot 0{,}41.$$

Перемножаем на линейке; получим:

$$\lg x = 0{,}141,$$

откуда

$$x = 1{,}38.$$

Пример 2. Вычислить $x = 0{,}00256^{0{,}00256}$.

Логарифмируем обе части. Получим:

$$\lg x = \lg (0{,}00256^{0{,}00256}) = 0{,}00256 \lg 0{,}00256 = 0{,}00256 \cdot \bar{3}{,}408.$$

Логарифм с отрицательной характеристикой и положительной мантиссой представим в виде отрицательной десятичной дроби. Будем иметь:

$$\bar{3}{,}408 = -3 + 0{,}408 = -2{,}592.$$

После этого продолжаем начатое вычисление

$$\lg x = 0{,}00256 \cdot (-2{,}592) = -0{,}00663.$$

Преобразуем полученный логарифм так, чтобы мантисса его была положительной, а характеристика отрицательной. Получим:

$$\lg x = \overline{1},993,$$

откуда

$$x = 0,985.$$

Пример 3. Вычислить $A = \left(\frac{231}{482}\right)^{0,41}$.

Имеем $\lg A = \lg\left(\frac{231}{482}\right)^{0,41} = 0,41 \lg \frac{231}{482}$.

Дробь $\frac{231}{482}$ не логарифмируем. Делим на основной шкале 231 на 482 и против конца движка читаем на шкале логарифмов мантиссу логарифма частного 68; характеристика этого логарифма равна -1.

Следовательно, имеем, что

$$\lg A = 0,41 \cdot \overline{1},68 = 0,41\,(-0,32) = -0,131 = \overline{1},869,$$

откуда

$$A = 0,740.$$

Пример 4. Вычислить $v = 4,8\left(\frac{20,5}{135}\right)^{\frac{1}{7}}$.

Делим сначала 20,5 на 135 и полученное частное ставим в данное выражение. Получим:

$$v = 4,8 \cdot 0,152^{\frac{1}{7}}.$$

Логарифмируем обе части и будем иметь:

$$\lg v = \lg 4,8 + \frac{1}{7} \lg 0,152 =$$

$$= 0,681 + \frac{1}{7} \cdot \overline{1},182 = 0,681 + \overline{1},883 = 0,564,$$

откуда

$$v = 3,66.$$

Пример 5. Вычислить

$$v = \frac{9,5}{\sqrt[1,75]{2,45}}.$$

Имеем:

$$\lg v = \lg 9{,}5 - \frac{\lg 2{,}45}{1{,}75} = 0{,}978 - \frac{0{,}389}{1{,}75} = \\ = 0{,}978 - 0{,}222 = 0{,}756,$$

откуда

$$v = 5{,}70.$$

Пример 6.

$$v = \frac{43{,}5}{0{,}75^{0{,}67} \cdot 6{,}5^{0{,}22}}.$$

Логарифмируем:

$$\lg v = \lg 43{,}5 - (0{,}67 \lg 0{,}75 + 0{,}22 \lg 6{,}5) = \\ = 1{,}638 - (0{,}67 \cdot \bar{1}{,}875 + 0{,}22 \cdot 0{,}812) = \\ = 1{,}638 - [0{,}67 \cdot (-0{,}125) + 0{,}179] = 1{,}638 - 0{,}095 = 1{,}543,$$

откуда

$$v = 34{,}9.$$

§ 148. Вычисление площади круга по его диаметру и обратная задача

Помимо делений общего характера, на многих линейках имеются штрихи, отмечающие числа, часто встречающиеся при вычислениях. Например, на основной шкале и шкале квадратов как на самой линейке, так и на движке отмечено специально число π.

На основной шкале движка в начале шкалы (между 11 и 12) имеется штрих c. Служит он для вычисления площади круга.

Площадь круга S через его диаметр d может быть выражена так:

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \left(\frac{d}{\sqrt{\frac{4}{\pi}}}\right)^2 = \left(\frac{d}{c}\right)^2.$$

Через c, как видно, обозначена величина $\sqrt{\frac{4}{\pi}}$.

Итак, имеем, $c = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \approx 1{,}128.$

При помощи штриха c площадь круга по данному диаметру определяется так:

1. Отмечаем на основной шкале линейки визиром бегунка данный диаметр.

2. Перемещаем движок так, чтобы пометка c на нем оказалась под визиром бегунка.

3. На шкале квадратов против начального или конечного деления движка читаем искомую площадь.

Значность площади круга определяется как значность квадрата числа.

Если значность диаметра обозначить через m, то значность площади круга определяется по такой схеме:

Площадь круга находится на шкале квадратов	против конечного деления движка на правой половине	против начального деления движка	
		на левой половине	на правой половине
Значность площади круга	$2m-2$	$2m-1$	$2m$

Примеры.

1) $d = 103$ *м*, $S = 8330$ *м*^{2}; 2) $d = 0{,}195$ *м*, $S = 0{,}0299$ *м*^{2}; 3) $d = 457$ *м*, $S = 164\,000$ *м*^{2}.

Чтобы по данной площади круга найти его диаметр, поступаем так:

1. На шкале квадратов визиром бегунка отмечаем данную площадь круга.
2. Проводим начальное или конечное деление движка под визир бегунка.
3. На основной шкале линейки против штриха c движка находим искомый диаметр.

Значность диаметра круга определяется как значность произведения $c \cdot \sqrt{S}$, где S — площадь круга.

Примеры.

1) $S = 57{,}7$ *м*; $d = 8{,}57$ *м*;
2) $S = 8330$ *м*; $d = 103$ *м*.

Вычисление площади круга по его диаметру с помощью штриха c позволяет упрощенно вычислять целый ряд выражений, связанных с площадью круга.

Пример 1. Вычислить объем кругового цилиндра, если диаметр его основания d и высота цилиндра H.

Имеем такую формулу для объема цилиндра:

$$V = S \cdot H = \frac{\pi d^2}{4} H \quad \text{или} \quad V = \left(\frac{d}{c}\right)^2 H.$$

Установка при вычислении объема цилиндра по этой формуле понятна. Найденную по данному диаметру площадь круга на шкале квадратов там же умножаем на H и получаем таким образом искомый объем цилиндра на шкале квадратов.

Например, если $d = 20{,}3$ *дм* и $H = 4{,}5$ *дм*, имеем $V = 1460$ *дм*^{3}.

Пример 2. По данному диаметру шара d вычислить поверхность шара Q.

Для поверхности шара Q имеем формулу

$$Q = 4\pi \frac{d^2}{4} \quad \text{или} \quad Q = 4\left(\frac{d}{c}\right)^2.$$

Установка. Находим на шкале квадратов площадь круга по данному диаметру и там же умножаем ее на 4.

Например, поверхность Q шара с диаметром $d = 31{,}5$ *см* выразится так:

$$Q = 3120 \text{ см}^2.$$

Пример 3. Диаметр шара равен d; вычислить объем шара. Имеем формулу для объема шара:

$$V = \frac{1}{6}\pi d^3 \quad \text{или} \quad V = \frac{2}{3}\frac{\pi d^3}{4} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)d = \frac{2}{3}\left(\frac{d}{c}\right)^2 d.$$

Установка. Находим на шкале квадратов площадь большого круга данного шара и там же умножаем ее на $\frac{2}{3}d$.

Например, объем шара диаметром в 146 *см* равен 163 000 *см*^{3}.

Упражнения

Вычислить с помощью логарифмической линейки:

1. 1) $450 \cdot 48$; 2) $21{,}4 \cdot 2{,}38$; 3) $72{,}5 \cdot 0{,}306$; 4) $358 \cdot 472$; 5) $1{,}46 \cdot 0{,}0298$; 6) $51{,}5 \cdot 1{,}62$; 7) $0{,}202 \cdot 3{,}03$; 8) $8{,}05 \cdot 423$; 9) $419 \cdot 0{,}0358$; 10) $0{,}0177 \cdot 0{,}00785$; 11) $2{,}57 \cdot 0{,}00305$.

2. 1) $485 : 655$; 2) $62{,}5 : 1{,}25$; 3) $42{,}5 : 3{,}06$; 4) $0{,}305 : 0{,}00675$; 5) $246 : 0{,}188$; 6) $0{,}107 : 0{,}00315$; 7) $4{,}07 : 0{,}00805$; 8) $52300 : 19{,}8$; 9) $0{,}0344 : 75$; 10) $0{,}0404 : 3{,}25$; 11) $0{,}0543 : 0{,}00743$; 12) $2{,}02 : 0{,}001435$.

3. 1) $73{,}5 \cdot 0{,}124 \cdot 1{,}07$; 2) $73{,}5 \cdot 0{,}124 \cdot 4{,}3$; 3) $14{,}5 \cdot 0{,}00191 \cdot 7{,}78$; 4) $6{,}66 \cdot 5{,}55 \cdot 0{,}223$.

4. 1) $\frac{432 \cdot 0{,}0218}{0{,}00555}$; 2) $\frac{1{,}05 \cdot 42{,}4}{157}$; 3) $\frac{5{,}15 \cdot 0{,}0243}{0{,}00555 \cdot 66{,}8}$;
4) $\frac{0{,}0743 \cdot 436}{0{,}00045 \cdot 23{,}8}$; 5) $\frac{16{,}7 \cdot 0{,}952}{0{,}0044 \cdot 8{,}62}$; 6) $\frac{108 \cdot 0{,}208}{3080}$;
7) $\frac{0{,}00427 \cdot 6{,}45}{0{,}0196 \cdot 23{,}8}$; 8) $\frac{54{,}2 \cdot 0{,}42}{0{,}0154}$; 9) $\frac{2{,}74 \cdot 0{,}00515 \cdot 1{,}09}{85{,}6 \cdot 3{,}36 \cdot 0{,}0226}$;
10) $\frac{5{,}6 \cdot 0{,}27 \cdot 48{,}5}{0{,}07 \cdot 0{,}548}$.

5. 1) $13{,}5^2$; 2) $4{,}35^2$; 3) $0{,}222^2$; 4) $0{,}0308^2$; 5) 417^2; 6) 670^2; 7) $1{,}09^2$; 8) $0{,}0193^2$.

6. 1) $\sqrt{0{,}4}$; 2) $\sqrt{0{,}0777}$; 3) $\sqrt{4560}$; 4) $\sqrt{4{,}56}$; 5) $\sqrt{0{,}000248}$; 6) $\sqrt{0{,}00006}$.

7. 1) $\sqrt[3]{425}$; 2) $\sqrt[3]{4{,}25}$; 3) $\sqrt[3]{42{,}5}$; 4) $\sqrt[3]{0{,}425}$; $\sqrt[3]{0{,}00425}$.

8. 1) $\frac{\sqrt{18,9}\cdot 4,56}{0,00735\cdot 8,07}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{0,0495}\cdot 6,08}{15,8\cdot 0,00834}$; 3) $\frac{1920\cdot 0,00509\cdot\sqrt{6,24}}{4,07\cdot 70}$;

4) $\frac{50,8\cdot 0,0375\sqrt[3]{4,95}}{1860\cdot 0,00356\cdot 4,03}$; 5) $\left(\frac{38,7\cdot 1200\sqrt[3]{0,07}}{51,8\cdot 6,13\cdot 9}\right)^2$.

9. 1) $0,275^{0,324}$; 2) $0,489^{0,285}$; 3) $0,62^{0,91}$; 4) $0,157^{0,00485}$; 5) $0,215^{0,505}$; 6) $0,064^{0,0521}$.

10. 1) $24,8\cdot 5^{0,28}\cdot 0,8^{0,67}$; 2) $30\left(\frac{2}{9}\right)^{0,125}$; 3) $5,48\cdot 0,6^{0,8}\cdot 75^{0,8}\cdot 55^{0,1}$;

4) $\frac{126500\cdot 400^{0,12}}{5^{0,28}\cdot 0,6^{0,6}\cdot 45^{0,65}\cdot 55^{1,5}}$.

11. 1) $(0,125)^{\frac{2}{3}}$; 2) $(65)^{\frac{2}{3}}$; 3) $(0,55)^{\frac{3}{2}}$.

12. 1) $\frac{23,5}{0,0246}=\frac{x}{0,00566}$; 2) $\frac{0,243}{x}=\frac{6,54}{0,0156}$.

13. 1) $\sqrt[7,06]{0,427}$; 2) $24,8\cdot 5^{0,22}\cdot 0,8^{0,67}$; 3) $\sqrt[3,25]{335}$;

4) $\left(\frac{1,85}{0,398}\right)^{0,25}$; 5) $\frac{0,289^{0,289}\cdot 0,625^{2,34}}{0,505^{2,48}}$.

ГЛАВА XII

СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ, СОЕДИНЕНИЯ И БИНОМ

§ 149. Формула сложных процентов

Если причитающиеся на вклад процентные деньги в конце операционного года присоединяются к вкладу и на наращенную сумму в дальнейшем начисляются проценты, то говорят, что на вклад начисляются *сложные проценты* («проценты на проценты»).

Сберкассы Советского Союза начисляют процентные деньги по сложным процентам.

Задача. В какую сумму обратится в течение t лет вклад a рублей, если сберкасса ежегодно начисляет p сложных процентов?

Решение. Каждый рубль вклада по истечении года приносит дохода $\frac{p}{100}$ руб.; следовательно, в конце года каждый рубль обратится в $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ руб., a руб. обратятся через год в сумму $a\left(1+\frac{p}{100}\right)$ руб. В течение второго года каждый рубль снова обратится в $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ руб., а сумма $a\left(1+\frac{p}{100}\right)$, образовавшаяся к концу первого года, обратится в конце второго года в

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)\times\left(1+\frac{p}{100}\right)=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2.$$

Продолжая эти рассуждения, найдем, что вклад a руб. в конце третьего года обратится в сумму $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$ руб., вклад a в конце четвертого года обратится в сумму

$a\left(1+\frac{p}{100}\right)^4$ руб., вклад a в конце t года обратится в сумму $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$ руб.

Если обозначим этот наращенный вклад буквой A, то имеем такую формулу:

$$A=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^t.$$

Это и есть формула сложных процентов; она связывает четыре величины: A, a, p и t. Если три величины известны, то четвертая может быть найдена; следовательно, всего возможны четыре типа задач на сложные проценты. Для облегчения вычислений в таблице В. Брадиса на стр. 25 даны $\lg\left(1+\frac{p}{100}\right)$ для различных значений p (от $p=0{,}25$ до $p=12{,}5$) с семью десятичными знаками. Если такая точность не нужна, то лишние десятичные знаки всегда можно отбросить.

Пример 1. Какую сумму надо поместить в сберкассу как срочный вклад, чтобы по истечении 20 лет образовалась сумма 20 000 руб.?

Примечание. По срочным вкладам доход составляет 3%. В данном случае $A=20\,000$ руб., $\frac{p}{100}=0{,}03$; $t=20$. Имеем: $20\,000=a\cdot 1{,}03^{20}$. Логарифмируем:

$$\begin{aligned}\lg 20\,000&=\lg a+20\lg 1{,}03,\\ \lg a&=\lg 20\,000-20\lg 1{,}03,\\ \lg a&=4{,}3010-20\cdot 0{,}0128,\\ \lg a&=4{,}3010-0{,}256,\\ \lg a&=4{,}045;\ a\approx 11\,090.\end{aligned}$$

Пример 2. Через сколько лет вклад a руб. (срочный) утроится?

Имеем: $A=3a$, $\frac{p}{100}=0{,}03$; отсюда $3a=a\cdot 1{,}03^t$; сокращаем на a; это означает, что величина вклада не влияет на ответ.

$$3=1{,}03^t;\ \lg 3=t\lg 1{,}03,$$

$$t=\frac{\lg 3}{\lg\cdot 1{,}03}=\frac{0{,}4771}{0{,}0128}\approx 35{,}7 \text{ года.}$$

Формула сложных процентов находит применение не только в финансовых вопросах; ею пользуются для определения численности населения страны или города, роста поголовья скота и в других вопросах.

§ 150. Срочные уплаты

Если долг вместе с нарастающими процентами погашается в течение известного числа лет равными ежегодными взносами, то такие взносы называются *срочными уплатами.*

Задача. По скольку надо платить ежегодно, чтобы погасить ссуду A рублей в течение n лет при p сложных процентах? Обозначим срочную уплату, вносимую в конце каждого года, через x (руб.); наращенный в течение года рубль — через r, т. е. $1+\frac{p}{100}=r$; тогда долг A руб. через год обратится в Ar руб., после уплаты долг будет равен $Ar-x$. К концу второго года $(Ar-x)$ руб. долга обратятся в сумму $(Ar-x)r$ руб. $=(Ar^2-rx)$ руб.; после уплаты второго взноса долг равен (Ar^2-rx-x) руб.

Продолжая эти рассуждения дальше, найдем, что долг в конце третьего года после очередной уплаты взносов равен

$$Ar^3-r^2x-rx-x,$$

в конце четвертого года:

$$Ar^4-r^3x-r^2x-rx-x,$$

. . . .

в конце n-го года:

$$Ar^n-r^{n-1}x-r^{n-2}x-\ldots-rx-x.$$

По условию задачи долг в конце n-го года должен быть равен нулю; отсюда имеем уравнение

$$Ar^n-r^{n-1}x-r^{n-2}x-\ldots-r^2x-rx-x=0;$$

$$Ar^n=x\,(r^{n-1}+r^{n-2}+\ldots+r^2+r+1).$$

Выражение в скобках представляет сумму n членов геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, знаменатель равен r; поэтому $1+r+r^2+r^3+\ldots+r^{n-2}+r^{n-1}=$ $=\frac{1-r^n}{1-r}$.

$$Ar^n=x\frac{1-r^n}{1-r}, \text{ откуда } x=\frac{Ar^n(1-r)}{1-r^n}.$$

Это и есть формула срочных уплат.

Пример. По скольку надо платить ежегодно, чтобы погасить ссуду 50 000 рублей при 2% (сложных) в течение 20 лет?

В данном случае $A=50\,000$; $n=20$; $p=0{,}02$; $r=1{,}02$.

Поэтому

$$x=\frac{50\,000\cdot 1{,}02^{20}\cdot(-0{,}02)}{1-(1{,}02)^{20}}\approx 3060 \text{ руб.}$$

§ 151. Срочные взносы

Задача. В начале каждого года рабочий вносит в сберкассу по a руб. Какая сумма окажется у него на сберкнижке через n лет, если начисление дохода (процентных денег) ведется из расчета p сложных процентов?

Путем рассуждений, аналогичных тем, что даны в предыдущем параграфе, найдем:

в конце 1-го года сумма будет ar;
» » 2-го » » » ar^2+ar;
» » 3-го » » » ar^3+ar^2+ar;

в конце n-го года: $ar^n+ar^{n-1}+\ldots+ar^2+ar$,

$$A=ar^n+ar^{n-1}+ar^{n-2}+\ldots+ar^2+ar,$$

$$A=ar(r^{n-1}+r^{n-2}+r^{n-3}+\ldots+r+1),$$

$$A=ar\frac{1-r^n}{1-r}.$$

Пример. Вкладчик вносит ежегодно по 200 рублей. Какая сумма окажется на сберкнижке по истечении 20 лет из расчета 2% (сложных).

Имеем: $a=200$; $r=1{,}02$; $n=20$. Поэтому

$$A=\frac{200\cdot 1{,}02\cdot[1-(1{,}02)^{20}]}{1-1{,}02}=$$

$$=200\cdot 1{,}02\,[(1{,}02)^{20}-1]\cdot 50\approx 4960.$$

§ 152. Соединения

В следующих параграфах речь будет итти о различных предметах, которые будем называть просто *элементами.* Так, например, элементами могут быть: 1) учащиеся данной группы; 2) цифры: 0, 1, 2, ...; 3) заданные точки на плоскости и т. д.

Из различных элементов можно образовать группы или *соединения.* В зависимости от того, входят ли *все элементы* в каждое соединение или только *определенное число* их, играет ли роль *порядок* элементов или нет, — различают три вида соединений: 1) *размещения,* 2) *перестановки* и 3) *сочетания.*

§ 153. Размещения

Задача. Сколько можно образовать различных трехзначных чисел, пользуясь девятью значащими цифрами, если ни одна из цифр не повторяется в одном и том же числе? Элементами в данной задаче являются девять значащих цифр, из них надо образовать всевозможные соединения (группы) по три элемента в каждом соединении (трехзначное число изображается тремя цифрами); порядок элементов в каждом соединении играет роль, например: числа 325, 235, 523 различны, хотя изображаются одними и теми же цифрами. В данном случае говорят, что решение задачи сводится к составлению всех размещений из девяти элементов по три в каждом.

Определение. *Размещениями из n элементов по m в каждом ($n \geqslant m$) называются такие соединения, каждое из которых содержит m элементов; одно соединение отличается от другого или составом элементов или порядком их.*

Число всех размещений из n элементов по m в каждом обозначается символом A_n^m; например, A_9^3 означает число всех размещений из девяти элементов по три элемента в каждом.

§ 154. Формула числа размещений

Пусть дано n элементов: $a, b, c, \ldots, k, l$. Ясно, что из них можно образовать всего n размещений по одному элементу в каждом, $A_n^1 = n$.

Чтобы найти A_n^2, поступим следующим образом: к элементу a присоединим по очереди каждый из остальных, получим всего $(n-1)$ пар: $ab, ac, ad, \ldots, ak, al$.

Таким же образом к элементу b приставим последовательно каждый из оставшихся элементов: $a, c, \ldots, k, l$, к элементу c присоединим каждый из оставшихся $(n-1)$ элементов и т. д., пока не дойдем до элемента l.

У нас получится следующая прямоугольная таблица:

$$n \text{ строк} \left\{ \begin{array}{ll} ab,\ ac,\ ad,\ \ldots,\ ak,\ al & (n-1 \text{ размещений}), \\ ba,\ bc,\ bd,\ \ldots,\ bk,\ bl & (n-1 \text{ размещений}), \\ ca,\ cb,\ cd,\ \ldots,\ ck,\ cl & (n-1 \text{ размещений}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ la,\ lb,\ lc,\ \ldots,\ lk & (n-1 \text{ размещений}). \end{array} \right.$$

Всего имеем n строк по $(n-1)$ размещений в каждой; следовательно, всего их будет $n(n-1)$.

Итак, $A_n^2 = n(n-1)$.

Чтобы составить всевозможные размещения из n элементов по три, поступим следующим образом: расположим все размещения из n по два, полученные выше, в один столбец; к каждому размещению по два из этого столбца присоединяем последовательно каждый из оставшихся $(n-2)$ элементов, не вошедший в эту пару; получим новую прямоугольную таблицу, в которой будет всего $n(n-1)$ строк по $(n-2)$ размещений в каждой строке:

$$n(n-1) \text{ строк} \left\{ \begin{array}{ll} abc,\ abd,\ \ldots,\ abk,\ abl & (\text{всего по } n-2 \text{ размещений}), \\ acb,\ acd,\ \ldots,\ ack,\ acl & (\text{всего по } n-2 \text{ размещений}), \\ adb,\ adc,\ \ldots,\ adk,\ adl & (\text{всего по } n-2 \text{ размещений}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ lka,\ lkb,\ \ldots & (\text{всего по } n-2 \text{ размещений}). \end{array} \right.$$

Следовательно, число всех размещений из n элементов по три будет:

$$A_n^3 = n(n-1)(n-2).$$

Применяя предыдущие рассуждения к составлению всевозможных размещений из n элементов по четыре, найдем, что

$$A_n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3).$$

Вообще,

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots[n-(m-1)].$$

Число всевозможных размещений из n элементов по m в каждом равно произведению m последовательно убывающих на единицу целых чисел, из которых большее есть n.

Примеры. 1) $A_5^4 = 5\cdot4\cdot3\cdot2 = 120$;

2) $A_{12}^2 = 12\cdot11 = 132$.

Теперь легко решить задачу из предыдущего параграфа. Число всех различных трехзначных чисел, которые можно изобразить девятью значащими цифрами, будет:

$$A_9^3 = 9\cdot8\cdot7 = 504.$$

Задачи.

1. Сколько можно образовать различных четырехзначных чисел, пользуясь девятью значащими цифрами и цифрой 0, не повторяя ни одну из этих цифр?

Всех элементов в данном случае 10, из них надо составить всевозможные размещения по четыре:

$$A_{10}^4 = 10\cdot9\cdot8\cdot7 = 5040.$$

Из этого числа надо исключить те размещения, которые начинаются с цифры 0, их будет $A_9^3 = 9\cdot8\cdot7 = 504$.

Следовательно, всего таких чисел можно написать:

$$5040 - 504 = 4536.$$

2. Учащиеся данного класса изучают восемь учебных предметов; если в расписание занятий включается каждый день по четыре предмета, то сколькими различными способами могут быть распределены уроки в день?

Всевозможные распределения уроков представляют все размещения из восьми по четыре, так как порядок чередования предметов тоже учитывается:

$$A_8^4 = 8\cdot7\cdot6\cdot5 = 1680.$$

§ 155. Перестановки

Определение. *Перестановками из n элементов называются такие соединения, в каждое из которых входят все данные n элементов; одна перестановка отличается от другой только порядком элементов.* Например, из трех элементов a, b и c можно образовать всего 6 различных перестановок:

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

Принято число всевозможных перестановок из n элементов обозначать P_n.

На перестановки можно смотреть как на особый случай размещений, когда число элементов, входящих в каждое размещение, равно числу всех элементов, т. е. $m = n$. Отсюда имеем такую формулу для числа перестановок из n элементов:

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\underbrace{[n-(n-1)]}_{1}$$

или, написав произведение сомножителей в обратном порядке,

$$\boldsymbol{P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-2)(n-1)\,n.}$$

Число всех перестановок из n элементов равно произведению последовательных натуральных чисел от 1 до n включительно.

Пример 1.

$$P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Пример 2. Сколькими различными способами друг относительно друга могут разместиться за столом 10 лиц?

$$P_{10} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots 10 = 3\,628\,800.$$

Примечание. Произведение n натуральных чисел от 1 до n сокращенно обозначается так:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\,n = n! \text{ (читается: } n\text{-факториал).}$$

Например, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

§ 156. Сочетания

Задача. В турнире участвовало 12 шахматистов; каждый из них сыграл с каждым из остальных по одной партии. Сколько всего было сыграно партий?

В этой задаче элементами являются 12 шахматистов; в каждой сыгранной партии участвовало два элемента — два игрока; порядок элементов не играет роли, т. е. в данном случае не учитывается, кто из них играл белыми, кто черными. *Соединения, в которых порядок элементов не играет роли, называются сочетаниями.* Одно сочетание должно отличаться от другого по крайней мере одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается так: C_n^m; например, C_8^3 — означает число всех сочетаний из восьми элементов по три в каждом. В качестве примера составим все сочетания из пяти элементов a, b, c, d, e по два, они будут:

$$ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ bc,\ bd,\ be,\ cd,\ ce,\ de,$$

$$C_5^2 = 10.$$

Если мы в каждом сочетании из пяти элементов по два произведем всевозможные перестановки элементов, то получим все размещения из тех же пяти элементов по два; их будет в два раза больше, т. е. 20, ибо каждое сочетание порождает два размещения; например, сочетание ab дает два размещения: ab, ba. Но к этому результату мы могли прийти, непосредственно применяя нам уже известную формулу $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$.

Поставим такой вопрос: как по числу всех размещений из n элементов по m в каждом найти число всех сочетаний из тех же n элементов по m?

Для одного частного случая мы этот вопрос разрешили, а именно:

$$C_5^2 = A_5^2 : 2.$$

Возьмем еще другой пример: составим все сочетания из четырех элементов по три, их будет всего четыре:

$$abc,\ abd,\ acd,\ bcd.$$

Если в каждом из этих сочетаний произведем всевозможные перестановки элементов, то получим все размещения из четырех по три; этих размещений будет во столько раз больше сочетаний, сколько можно образовать перестановок из 3 элементов, т. е. $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$; следовательно, размещений должно быть всего $4 \cdot 6 = 24$.

Следующая таблица наглядно поясняет сказанное:

abc	*abd*	*acd*	*bcd*
acb	*adb*	*adc*	*bdc*
bac	*bad*	*cad*	*cbd*
bca	*bda*	*cda*	*cdb*
cab	*dab*	*dac*	*dbc*
cba	*dba*	*dca*	*dcb*

Справедливо и обратное: число всех сочетаний из четырех элементов по три в каждом меньше числа размещений из четырех элементов по три во столько раз, сколько можно образовать перестановок из трех элементов, т. е.

$$C_4^3 = A_4^3 : P_3.$$

Если распространить предыдущие рассуждения на общий случай, то будем иметь следующую формулу:

$$C_n^m = A_n^m : P_m$$

или в раскрытой форме:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}.$$

Пример 1.

$$C_{12}^2 = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 66.$$

Число всех партий, сыгранных участниками турнира, таким образом, равно 66.

Пример 2. Сколько можно провести различных плоскостей через 8 точек пространства, если никакие четыре из них не лежат в одной плоскости?

Плоскость определяется тремя точками; следовательно, всех плоскостей будет

$$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

§ 157. Свойство сочетаний

Обратим внимание на следующие вычисления:

1) $C_5^2=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}=10;\quad C_5^3=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}=10;$

2) $C_{10}^3=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120;\quad C_{10}^7=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}=120.$

Таким образом, выходит:

1) $C_5^2=C_5^3\,(2+3=5);$

2) $C_{10}^3=C_{10}^7\,(3+7=10).$

Можно ожидать на основании подмеченной закономерности, что $C_{15}^{12}=C_{15}^3$, так как сумма верхних индексов в данном случае тоже равна нижнему числу: $12+3=15$. Случайно ли это или нет? Следующие рассуждения подтверждают, что здесь имеет место определенная закономерность.

Предположим, что из имеющихся n элементов мы отобрали m элементов, чтобы образовать одно сочетание; оставшиеся элементы представляют также сочетание по $(n-m)$ из тех же n элементов; всякий раз, как мы образуем новое сочетание из n по m, оставшиеся элементы дадут новое сочетание из тех же n элементов по $(n-m)$; таким образом, каждому сочетанию из n элементов по m соответствует сочетание из n элементов по $(n-m)$. Сколько будет одних, столько же будет и других, т. е.

$$C_n^m=C_n^{n-m}.$$

Пример. $C_{20}^{18}=C_{20}^{20-18}=C_{20}^2;\quad C_{20}^2=\frac{20\cdot 19}{1\cdot 2}=190.$

Выведенным свойством необходимо пользоваться в тех случаях, когда $m>\frac{n}{2}$, ибо это облегчает вычисления.

§ 158. Бином Ньютона. Предварительные замечания

Двучлен вида $x+a$ называется также биномом. Формулы сокращенного умножения позволяют написать сразу квадрат и куб двучлена:

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2;$$
$$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3.$$

Возникает вопрос: нельзя ли получить аналогичные формулы для более высоких степеней двучлена; другими словами, как возвести двучлен в четвертую, пятую и вообще в любую целую положительную степень?

Ответ на поставленный вопрос дает так называемая формула бинома Ньютона, к рассмотрению которой и переходим.

§ 159. Произведение двучленов, отличающихся только вторыми членами

Возьмем несколько двучленов с общим первым членом: $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, ... и будем постепенно перемножать их:

1) $(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab=$
$$=x^2+(a+b)x+ab;$$

2) $(x+a)(x+b)(x+c)=[x^2+(a+b)x+ab](x+c)=$
$$=x^3+(a+b)x^2+abx+cx^2+c(a+b)x+abc=$$
$$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc;$$

3) $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=[x^3+(a+b+c)x^2+$
$$+(ab+ac+bc)x+abc](x+d)=$$
$$=x^4+(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+$$
$$+cd)x^2+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd.$$

Если внимательно присмотреться к полученным результатам, то можно усмотреть закон образования этих произведений:

1) каждое произведение представляет собой многочлен, расположенный по убывающим степеням буквы x;

2) степень этого многочлена равна числу перемножаемых двучленов;

3) у буквы x показатель степени последовательно убывает на единицу;

4) всех членов в правой части на единицу больше, чем число перемножаемых двучленов;

5) коэффициент первого члена есть 1, коэффициент второго члена равен сумме всех вторых членов; коэффициент третьего члена есть сумма всех произведений из вторых членов, взятых по два; коэффициент четвертого члена

представляет собой сумму произведений из вторых членов, взятых по три. Последний член есть произведение всех вторых членов.

Можно доказать (чего мы не делаем), что отмеченный закон остается справедливым для произведения какого угодно числа двучленов. Предположим, что имеем всего n двучленов; тогда их произведение может быть записано в следующем виде:

$$\underbrace{(x+a)(x+b)(x+c)\dots(x+k)}_{\text{всего } n \text{ двучленов}} = x^n + S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + \\ + S_3x^{n-3} + \dots + S_n, \qquad (1)$$

где $S_1 = a + b + c + \dots + k$ (сумма всех вторых членов);

$S_2 = ab + ac + \dots + ak + \dots$ (сумма всех произведений из вторых членов, взятых по два);

$S_3 = abc + abd + \dots$ (сумма всех произведений из вторых членов по три);

. . . .

$S_n = abc \dots k$ (произведение всех вторых членов).

Допустим, что все вторые члены двучленов равны между собой, т. е. $a = b = c = \dots = k$; тогда левая часть формулы (1) переходит в $(x+a)^n$, в правой части коэффициенты S_1, S_2, S_3, ..., S_n примут вид

$$\underbrace{S_1 = a + a + a + \dots + a}_{n \text{ слагаемых}} = na;$$

$$S_2 = \underbrace{a^2 + a^2 + \dots + a^2}_{\text{всего } \frac{n(n-1)}{2} \text{ слагаемых}} = \frac{n(n-1)}{2}a^2,$$

так как всех парных произведений будет столько, сколько можно образовать сочетаний из n по два, т. е. $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Подобным образом

$$S_3 = \underbrace{a^3 + a^3 + \dots + a^3}_{\text{всего } \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \text{ слагаемых}},$$

ибо каждое слагаемое обращается в a^3, число этих слагаемых равно числу сочетаний из n по три, т. е. $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$.

Последний член $S_n = a^n$. Окончательно имеем:

$$(x+a)^n = x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{n-2} + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{n-3} + \ldots \\ \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} a^k x^{n-k} + \ldots + a^n.$$

Это и есть *формула бинома Ньютона*; правая часть ее носит название *разложения* бинома.

Пример.

$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} a^2 x^3 + \\ + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^4 x + a^5;$$

$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.$$

Пользуясь символом числа сочетаний, можно записать сокращенно формулу (1) так:

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^k a^k x^{n-k} + \ldots \\ \ldots + C_n^{n-1} a^{n-1} x + C_n^n a^n.$$

§ 160. Свойства формулы бинома

1. *Число всех членов разложения равно* $n+1$, так как разложение содержит все степени буквы a от 0 до n включительно.

2. Показатель у буквы x последовательно уменьшается на единицу, а у буквы a — возрастает на единицу; вследствие чего *сумма показателей при x и a в каждом члене остается одна и та же, равная показателю степени бинома n.*

3. Коэффициент у первого члена равен единице, у второго члена — n, т. е. числу сочетаний из n элементов по одному, у третьего члена — числу сочетаний из n по два, у четвертого — числу сочетаний из n элементов по три и т. д.; у $(k+1)$-го члена разложения коэффициент равен C_n^k; коэффициент последнего члена равен 1. Эти коэффициенты называются *биномиальными.*

4. Так называемый *общий член разложения* имеет вид

$$U_{k+1}=C_n^k a^k x^{n-k}. \qquad (2)$$

Давая в формуле (2) букве k различные значения от нуля до n, получим любой член разложения бинома, если подразумевать под C_n^0 единицу.

5. *Коэффициенты членов, равноотстоящих от начала и конца разложения, равны между собою.*

Действительно, коэффициент первого члена от начала равен 1, коэффициент первого от конца — тоже 1; второй член от начала имеет коэффициент C_n^1, второй от конца — C_n^{n-1}, но по свойству сочетаний $C_n^1=C_n^{n-1}$ (§ 157).

Подобным образом можно установить равенство остальных биномиальных коэффициентов, равноудаленных от концов.

6. *Сумма биномиальных коэффициентов равна* 2^n. Положим в формуле бинома $x=a=1$, тогда имеем:

$$(1+1)^n=1^n+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\ldots+C_n^{n-1}+1^n$$

или

$$2^n=1+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\ldots+1.$$

7. Сравним два рядом стоящих члена разложения:

$$U_{k+1} \text{ и } U_{k+2}.$$

Имеем:

$$U_{k+1}=C_n^k a^k x^{n-k}; \quad U_{k+2}=C_n^{k+1}a^{k+1}x^{n-k-1}.$$

Так как

$$C_n^{k+1}=\frac{C_n^k(n-k)}{k+1},$$

то

$$U_{k+2}=C_n^k\frac{n-k}{k+1}a^{k+1}x^{n-k-1}.$$

Чтобы получить биномиальный коэффициент следующего члена, надо биномиальный коэффициент предшествующего члена умножить на показатель степени у буквы x (убывает) в этом члене и разделить на число предшествующих членов. Воспользуемся этим свойством для быстрого разложения шестой степени двучлена:

$$(x+a)^6=x^6+6ax^5+15a^2x^4+20a^3x^3+15a^4x^2+6a^5x+a^6.$$

Пояснение. Биномиальный коэффициент третьего члена равен $\frac{6\cdot 5}{2}=15$ (третьему члену предшествуют два).

Биномиальный коэффициент четвертого члена:

$$\frac{15 \cdot 4}{3} = 20.$$

Очевидно, что достаточно довести коэффициенты до середины, а затем они идут в обратном порядке.

Пример 1. Найти восьмой член разложения:

$$(x-a)^{12}; \text{ так как } x-a=[x+(-a)],$$

то имеем:

$$(x-a)^{12}=[x+(-a)]^{12}.$$

По формуле общего члена пишем:

$$U_8 = U_{7+1} = C_{12}^7 (-a)^7 x^5,$$

$$U_{7+1} = -C_{12}^7 a^7 x^5 = -\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 a^7 x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \; [C_{12}^7 = C_{12}^5].$$

Пример 2. В разложении $(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})^{11}$ найти член, который содержит после упрощения букву x в пятой степени.

Пишем общий член разложения:

$$U_{k+1} = C_{11}^k (\sqrt{x})^k (\sqrt[3]{x})^{11-k};$$

$$U_{k+1} = C_{11}^k x^{\frac{k}{2}} x^{\frac{11-k}{3}}$$

или

$$U_{k+1} = C_{11}^k \cdot x^{\frac{22+k}{6}}.$$

По условию задачи $\frac{22+k}{6}=5$, откуда $k=8$; следовательно, искомый член будет девятый, равный

$$C_{11}^8 x^5 = C_{11}^3 x^5 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^5 = 165 x^5.$$

Примечание. В приближенных вычислениях часто приходится извлекать корни из чисел, близких к 1, например: $\sqrt{1{,}008}$, $\sqrt[3]{1{,}06}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{0{,}997}}$ и т. д.

Во всех этих случаях корни представляют в виде степеней с дробными показателями и применяют формулу бинома, левая часть которой в данном случае принимает вид: $(1+x)^{\alpha}$, где x — малое число, положительное или отрицательное, α — дробное число, положительное или отрицательное.

При этом обычно ограничиваются в правой части двумя членами разложения:

$$(1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x;$$

или тремя членами разложения:

$$(1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x+\frac{\alpha \cdot (\alpha-1)}{1 \cdot 2} x^2.$$

Доказательство справедливости такого приближенного способа вычисления выходит за рамки элементарной математики и поэтому мы здесь его не приводим.

Пример 1. Вычислить с точностью до 0,001 квадратный корень из 0,996. Имеем:

$$\sqrt{0{,}996}=\sqrt{1-0{,}004}=(1-0{,}004)^{\frac{1}{2}}.$$

В данном случае $x=-0{,}004$; $\alpha=\frac{1}{2}$, а потому по формуле бинома получим:

$$(1-0{,}004)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}(-0{,}004)+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1 \cdot 2}\cdot(0{,}004)^2+\ldots$$

Ограничиваясь первыми двумя членами в правой части, имеем:

$$\sqrt{0{,}996} \approx 1-0{,}002=0{,}998,$$

причем все значащие цифры корня точные.

Пример 2. Вычислить $\sqrt[3]{1{,}03}$ с точностью до 0,001. Имеем:

$$\sqrt[3]{1{,}03}=\sqrt[3]{1+0{,}03}=(1+0{,}03)^{\frac{1}{3}};$$

здесь

$$x=0{,}03; \quad \alpha=\frac{1}{3};$$

$$(1+0{,}03)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}(0{,}03)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1 \cdot 2}\cdot(0{,}03)^2+\ldots$$

Ограничиваясь первыми двумя членами в правой части, имеем

$$(1+0{,}03)^{\frac{1}{3}} \approx 1+0{,}01=1{,}01.$$

§ 161. Метод математической индукции

При изучении арифметической и геометрической прогрессий мы написали формулу общего члена для каждой из них на основании подмеченной закономерности. Точно так же формула числа размещений из n элементов по m в каждом, формула для произведения n двучленов, отличающихся только вторыми членами, были установлены на основании частных случаев и потом распространены нами на любые натуральные значения индексов.

Строго говоря, мы не имели на то права, ибо надо было еще доказать справедливость этих формул при любом n.

Во всех упомянутых выше случаях, а также и в ряде других справедливость некоторого закона, подмеченного лишь на частных случаях, устанавливается на основании так называемого *метода математической индукции.*

Сущность этого метода заключается в следующем.

Если нам нужно установить справедливость некоторого общего закона, то:

1) подмечаем, что предполагаемый закон имеет место для частных случаев: $n=1$, $n=2$, $n=3$ и т. д.;

2) предполагаем, что закон справедлив при каком-нибудь определенном значении $n=k$, и доказываем, что в таком случае он справедлив и при $n=k+1$; отсюда будет следовать, что закон вообще справедлив при любом значении n, ибо справедливость его была обнаружена, например, при $n=1$, а по доказанному он тогда верен и при $n=2$, а раз справедлив при $n=2$, то справедлив и при $n=3$, и т. д.

Иногда эти рассуждения называют способом доказательства от n к $n+1$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Доказать, что любой член арифметической прогрессии выражается формулой

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

При $n=1$ имеем:

$$a_1=a_1+(1-1)d=a_1;$$

$$a_1=a_1 \text{ (очевидное тождество).}$$

Допустим, что формула имеет место при $n=k$, т. е.

$$a_k=a_1+(k-1)d.$$

Тогда по определению арифметической прогрессии имеем:

$$a_{k+1}=a_k+d=a_1+(k-1)d+d=a_1+kd,$$

$$a_{k+1}=a_1+kd,$$

т. е. формула верна и для $n=k+1$, а в таком случае она верна при любом натуральном n, как это следует из общих соображений метода.

Пример 2. Доказать, что при всяком натуральном n имеет место равенство

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6};$$

формула верна для $n=1$, ибо

$$1^2=\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)}{6}=1;\quad 1=1;$$

точно так же непосредственная подстановка показывает, что она верна и при $n=2$, так как

$$1^2+2^2=\frac{2\cdot(2+1)\cdot(2\cdot2+1)}{6};$$

$$5=\frac{2\cdot3\cdot5}{6}.\quad 5=5.$$

Допустим, что формула верна при $n=k$,

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Докажем, что в таком случае она верна и при $n=k+1$, т. е.

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

В самом деле,

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$$

$$=(k+1)\cdot\left[\frac{k(2k+1)}{6}+(k+1)\right]=(k+1)\cdot\frac{2k^2+k+6k+6}{6}=$$

$$=(k+1)\cdot\frac{2k^2+7k+6}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6};$$

так как $2k^2+7k+6=(k+2)(2k+3)$.

Непосредственная проверка показала, что формула верна при $n=1$ и $n=2$; по доказанному она будет справедлива также при $n=3$, а потому и при $n=4$, следовательно, и при $n=5$ и вообще при любом натуральном n.

Упражнения

1. В какую сумму обратится срочный вклад в 5400 руб., положенный в сберкассу на 15 лет по 3%?
2. Какую сумму надо внести в сберкассу в виде срочного вклада, чтобы по истечении 10 лет иметь на сберкнижке сумму 8000 руб.?
3. По срочным вкладам государство платит 3% дохода, по обычным вкладам — 2%. Сколько теряет вкладчик, помещая свои сбережения не в виде срочного вклада, а в виде обычного вклада, на сумме 25 000 руб. в течение 5 лет?

4. В течение скольких лет сумма вклада удвоится, если доход составляет: 1) 2%? 2) 3%?
5. При скольких процентах вклад в 3750 руб. обратится через 20 лет в сумму 7000 руб.?
6. Во сколько лет можно погасить трехпроцентную ссуду в 20 000 руб. ежегодными уплатами по 2000 руб.?
7. Определить размер ссуды, полученной кооперативом из расчета $4\frac{1}{2}\%$, если срочная уплата в течение 15 лет составляет 4500 руб.
8. Каков должен быть ежегодный срочный взнос, чтобы по истечении 20 лет при 3% (сложных) иметь на сберкнижке сумму 20 000 руб.?
9. Неселение одного промышленного города увеличивается в среднем на 6% в год. Через сколько лет оно удвоится?
10. Ежегодный прирост древесины составляет $3{,}25\%$. Сколько кубометров даст участок леса по истечении 50 лет, если в настоящее время в нем около 25 тыс. кубометров древесины?
11. В городе в настоящее время числится 360 тыс. жителей, 30 лет тому назад их было около 200 тыс. Через сколько лет можно ожидать, что в том же городе будет 500 тыс. жителей, исходя из среднего годового прироста населения за предыдущие годы?
12. Вычислить:

$$1)\ A_5^2;\quad 2)\ A_7^5;\quad 3)\ \frac{A_6^2}{A_5^2};\ 4)\ \frac{A_7^5+A_7^4}{A_7^3}.$$

13. Решить уравнения:

$$1)\ A_x^2=42;\quad 2)\ A_x^2=56x.$$

14. Вычислить:

$$1)\ P_3;\ 2)\ P_7;\ 3)\ \frac{P_5-A_5^3}{5}.$$

15. Вычислить:

$$1)\ C_5^4;\ 2)\ C_{18}^{17};\ 3)\ C_{20}^{18}.$$

16. Сколько различных четырехзначных чисел можно написать девятью значащими цифрами, из которых ни одна цифра не повторяется?
17. Сколько различных делегаций можно выбрать из группы в 12 человек, если в делегацию входят три человека?
18. Среди перестановок из шести элементов сколько будет таких, которые начинаются с одного определенного элемента?
19. Написать разложение бинома:

$$1)\ (a+b)^6;\ 2)\ (\sqrt{x}+a)^4;\ 3)\ (\sqrt{a}+\sqrt{b})^8;\ 4)\ (\sqrt{x}-a)^5;$$

$$5)\ \left(x^3-\frac{1}{x^2}\right)^6.$$

20. Найти:

1) третий член разложения $(x+3)^5$;
2) седьмой член разложения $(2x-3)^{10}$;
3) пятый член разложения $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^{12}$.

21. Найти тот член разложения $(\sqrt{x}+a)^9$, который содержит букву x в кубе (т. е. x^3).

22. Найти пятый член разложения $\left(\frac{a}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{a}\right)^n$, если коэффициент третьего члена равен 66.

ГЛАВА XIII

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

§ 162. Комплексные числа

Не всякое квадратное уравнение имеет корни среди действительных чисел; например, уравнение $x^2+1=0$ или $x^2=-1$ не имеет корней, так как нет такого действительного числа, квадрат которого был бы равен -1.

Задача решения квадратного уравнения вида $x^2+b^2=0$ послужила одним из поводов для введения новых так называемых *мнимых чисел*.

Введем новое число i — *мнимую единицу*, — обладающее тем свойством, что квадрат его равен -1:

$$i^2=-1.$$

Мы принимаем без доказательства, что можно ввести новые числа, так называемые комплексные числа, такие, что, присоединив их к известным нам уже действительным числам, получим множество чисел, над которыми можно по обычным правилам выполнять арифметические действия, и, кроме того, среди новых чисел будет существовать число i, обладающее свойством

$$i^2=-1.$$

Определение. *Числа вида $a+bi$, где a и b — два действительных числа, называются комплексными.* Число a называется действительной частью, bi — мнимой частью комплексного числа.

Например,

$$3+2i\,(a=3;\ b=2);\ \frac{1}{2}-\sqrt{2}i\left(a=\frac{1}{2};\ b=-\sqrt{2}\right).$$

Два комплексных числа $a+bi$ и a_1+b_1i считаются равными в том и только в том случае, если равны в отдельности их действительные и мнимые части, т. е. если

$$a+bi=a_1+b_1i, \text{ то } a=a_1, \quad b=b_1.$$

Если $a=0$, то комплексное число $a+bi$ обращается в чисто мнимое число bi; b называется коэффициентом при мнимой единице.

Если $b=0$, то комплексное число $a+bi$ становится действительным числом, равным a.

Множество комплексных чисел содержит в себе как часть (подмножество) все действительные числа, а также все чисто мнимые числа; другими словами, действительные числа, а также мнимые числа представляют частные случаи комплексных чисел.

Например,

$$5=5+0\cdot i\,(a=5;\ b=0);$$

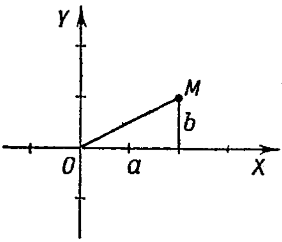
$$-3i=0+(-3)\,i\,(a=0;\ b=-3).$$

Примечание 1. С помощью мнимой единицы i может быть выражен квадратный корень из отрицательного числа. Например, $\sqrt{-4}=\sqrt{4\cdot(-1)}=2i$, $\sqrt{-5}=\sqrt{5}\sqrt{-1}=\sqrt{5}\,i$.

Примечание 2. Введение комплексных чисел делает возможным решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом, например уравнение $x^2-6x+13=0$ имеет два комплексных корня $x_{1,2}=3\mp 2i$.

§ 163. Геометрическое представление комплексных чисел

Принято комплексное число $z=a+bi$ изображать точкой M на плоскости; абсцисса этой точки равна действительной части a, ордината равна b, т. е. коэффициенту при мнимой единице (черт. 65). Всякому комплексному числу соответствует определенная точка на плоскости, и наоборот, всякой точке на плоскости соответствует определенное комплексное число.



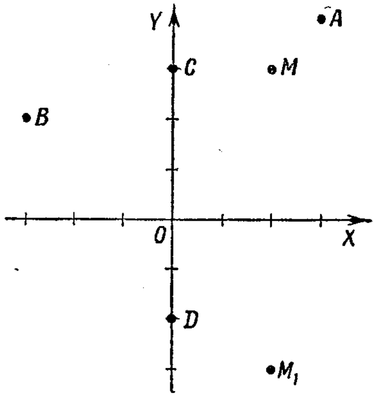
Черт. 65.

Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками координатной плоскости XOY и множеством комплексных чисел. Точкам, лежащим на оси OX, соответствуют действительные числа ($b=0$); точкам, лежащим на оси ординат, — мнимые числа. Так, например,

комплексное число $3+4i$ изобразится точкой A (черт. 66),
комплексное число $-3+2i$ изобразится точкой B,
число $3i$ изобразится точкой C,
число $-2i$ изобразится точкой D.

Определение. *Два комплексных числа* $z=a+bi$ *и* $\bar{z}=a-bi$ *называются сопряженными*; они отличаются только знаком перед мнимой частью.

Пара сопряженных комплексных чисел изображается точками M и M_1, симметричными относительно оси абсцисс. На чертеже 66 точки M и M_1 изображают сопряженные комплексные числа: $2+3i$ и $2-3i$.



Черт. 66.

Можно дать еще другое геометрическое истолкование комплексного числа $a+bi$.

Соединим начало координат O с точкой $M(a;\ b)$. Направленный отрезок $\overline{OM}$, называемый *радиусом-вектором* точки M, можно принять за геометрический образ комплексного числа $a+bi$. Оба эти способа изображения комплексных чисел равноценны, так как всякой точке плоскости XOY соответствует определенный радиус-вектор, и наоборот: заданием радиуса-вектора $\overline{OM}$ однозначно определяется точка M — конец вектора.

Определение. *Модулем комплексного числа* $z=a+bi$ *называется действительное число* $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

В геометрическом истолковании модуль — это длина радиуса-вектора OM. Число r положительно и обращается в нуль лишь в том случае, когда $a=0$, $b=0$.

Для обозначения модуля комплексного числа это число берется в вертикальных черточках, например:

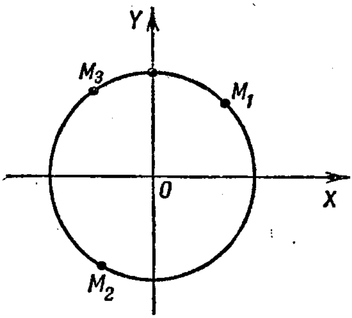
$$|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5;$$

$$|-2-i|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}.$$

В частном случае при $b=0$ имеем:

$$|a+0\cdot i| = \sqrt{a^2+0^2} = |a|,$$

т. е. модуль действительного числа есть абсолютная величина этого числа. Поэтому модуль комплексного числа называют еще и абсолютной величиной этого числа.



Черт. 67.

Все комплексные числа, имеющие модуль, равный единице, изображаются точками единичного круга с центром в начале координат; например, числа

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i; \\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i; \\ -0,6+0,8i \end{array}\right\}$$ изображаются точками M_1, M_2 и M_3 (черт. 67).

§ 164. Сложение и вычитание комплексных чисел

Сложение и вычитание комплексных чисел производится по тем же правилам, что сложение и вычитание многочленов:

$$a+bi+(c+di) = a+bi+c+di = (a+c)+(b+d)i.$$

Пример 1. $2+5i+(7-8i)=9-3i$.

$$a+bi-(c+di) = a+bi-c-di = (a-c)+(b-d)i.$$

Пример 2. $10+0,3i-(7-0,5i)=3+0,8i$.

Так же находится сумма любого числа комплексных слагаемых.

Таким образом, заключаем, что в результате сложения или вычитания комплексных чисел получается комплексное число.

Обращает на себя внимание случай сложения сопряженных комплексных чисел; сумма таких слагаемых есть число действительное:

$$a+bi+(a-bi)=a+bi+a-bi=2a.$$

§ 165. Геометрическое сложение комплексных чисел

Геометрическое истолкование комплексных чисел позволяет наглядно изобразить сложение и вычитание этих чисел.

Пусть требуется найти сумму двух комплексных чисел: $z_1=3+2i$ и $z_2=2+4i$. Искомая сумма z_3 выразится так:

$$z_3=z_1+z_2=3+2i+(2+4i)=5+6i.$$

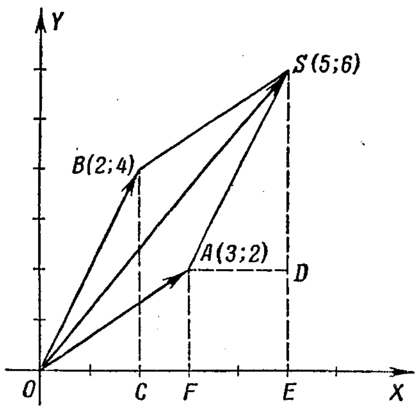
Построим векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, изображающие слагаемые z_1 и z_2 (черт. 68), и на них как на сторонах построим параллелограмм. Тогда диагональ этого параллелограмма $\overline{OS}$ представляет собой вектор-сумму этих векторов.

В самом деле, из построения видно, что $\triangle OBC=\triangle ASD$. Отсюда вытекает, что

$$OE=OF+FE=$$
$$=3+2=5$$

и $$ES=ED+DS=$$
$$=2+4=6,$$

5 и 6 — координаты точки S; следовательно, вектор $\overline{OS}$ изображает собою сумму z_3, т. е. сумму z_1+z_2.



Черт. 68.

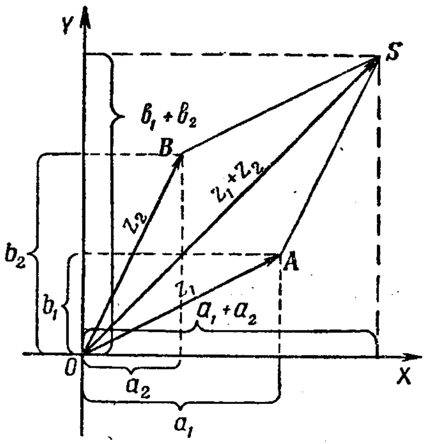
К такому же выводу мы пришли бы и в том случае, если бы комплексные числа были заданы в общем виде (черт. 69):

$$z_1=a_1+b_1i;\quad z_2=a_2+b_2i.$$

Отсюда заключаем: *чтобы получить геометрическую сумму комплексных чисел* a_1+b_1i *и* a_2+b_2i, *заданных векторами*

$\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, достаточно сложить эти векторы по правилу параллелограмма, тогда его диагональ $\overline{OS}$ изобразит вектор-сумму $a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)\, i$.

Диагональ $\overline{OS}$ может быть получена и без построения параллелограмма. Для этого из конца одного из векторов-слагаемых, например $\overline{OA}$, проводим вектор $\overline{AS}$, равный другому вектору-слагаемому $\overline{OB}$*); тогда вектор $\overline{OS}$, соединяющий начало первого вектора с концом второго, изобразит искомую сумму. Такое сложение векторов называется сложением по правилу треугольника.



Черт. 69.

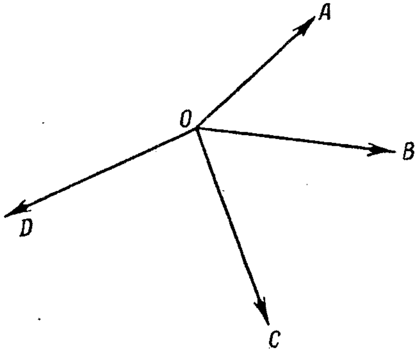
Покажем, как геометрически складываются несколько комплексных чисел.

Пусть четыре комплексных числа z_1, z_2, z_3, z_4 заданы соответственно векторами $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$ (черт. 70). Построим при некоторой точке K вектор $\overline{KL}$, равный OA, и вектор $\overline{LM}$, равный $\overline{OB}$ (черт. 71); тогда вектор KM выразит сумму комплексных чисел $z_1 + z_2$.

*) Векторы $\overline{OB}$ и $\overline{AS}$ считаются равными, если они параллельны и имеют одинаковую длину.

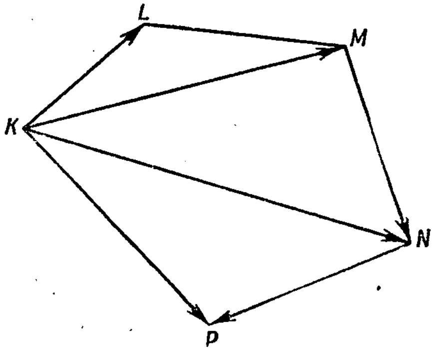
При точке M строим вектор $\overline{MN}$, равный вектору $\overline{OC}$, и находим геометрическую сумму векторов $\overline{KM}$ и $\overline{MN}$, т. е. вектор $\overline{KN}$; этот вектор изображает собою сумму комплексных чисел $z_1+z_2+z_3$.

Построим теперь при точке N вектор $\overline{NP}$, равный $\overline{OD}$, и сложим его с вектором $\overline{KN}$; получим вектор $\overline{KP}$, который представляет собою искомую сумму комплексных чисел $z_1+z_2+z_3+z_4$.



Черт. 70.

Следовательно, чтобы сложить геометрически несколько комплексных чисел, т. е. получить геометрическую сумму векторов, изображающих эти числа, поступаем следующим образом: из конца 1-го вектора проводим вектор, равный 2-му, из конца 2-го



Черт. 71.

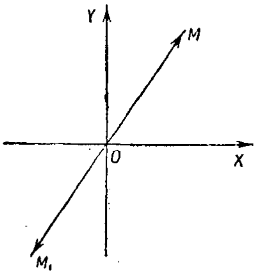
вектора — вектор, равный 3-му, и т. д. Вектор, соединяющий начало 1-го вектора с концом последнего, есть искомая сумма.

§ 166. Геометрическое вычитание комплексных чисел

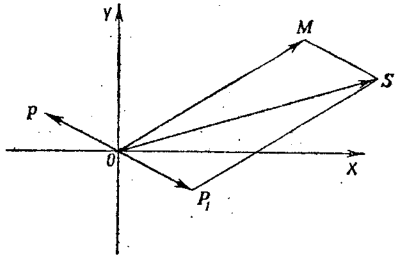
Прежде чем дать геометрическое истолкование вычитания комплексных чисел, условимся два числа $a+bi$ и $-a-bi$ называть *противоположными комплексными числами*. Таковыми будут, например:

1) $2+3i$ и $-2-3i$;
2) $3-4i$ и $-3+4i$;
3) $-1+2i$ и $1-2i$.

Противоположные комплексные числа имеют одинаковые модули и геометрически изображаются точками M и M_1, симметричными относительно начала координат (черт. 72), или векторами $\overline{OM}$ и $\overline{OM_1}$, лежащими на одной прямой и противоположно направленными.



Черт. 72.



Черт. 73.

Так как $a+bi-(a_1+b_1i)=a+bi+(-a_1-b_1i)$, то *вычитание комлексного числа можно заменить сложением с противоположным ему числом.* Геометрически это означает, что вычитание из вектора $\overline{OM}$ вектора $\overline{OP}$ равносильно сложению векторов $\overline{OM}$ и $\overline{OP_1}$, где вектор OP_1 противоположен вектору $\overline{OP}$.

На чертеже 73 показано вычитание из $5+3i$ числа $-2+i$. Разность представляет вектор OS, равный сумме векторов $\overline{OM}$ и $\overline{OP_1}$.

§ 167. Умножение комплексных чисел

Два комплексных числа $a+bi$ и a_1+b_1i перемножаются по обычному правилу умножения многочленов; в полученном результате i^2 заменяется -1 и отделяется действительная часть от мнимой:

$$(a+bi)(a_1+b_1i)=aa_1+a_1bi+ab_1i+bb_1i^2=$$
$$=\underbrace{aa_1-bb_1}_{\text{действительная часть}}+\underbrace{(a_1b+ab_1)}_{\text{мнимая часть}}i.$$

Замечаем, что произведение двух комплексных чисел есть также число комплексное.

Это правило умножения распространяется и на бóльшее число комплексных множителей.

Примеры.

1) $(2-3i)(3+5i)=6-9i+10i-15i^2=$
$=6+i-15\cdot(-1)=21+i;$

2) $(4+i)\cdot 2i=8i+2i^2=-2+8i.$

Произведение комплексных чисел может оказаться действительным числом. В частности, это будет при умножении двух сопряженных комплексных чисел:

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+abi-abi-b^2i^2=a^2+b^2=r^2,$$

где r — модуль каждого из сомножителей.

Итак, *произведение двух сопряженных комплексных чисел есть число действительное, равное квадрату их общего модуля.*

Приведем еще пример, показывающий, что в результате действий над комплексными числами могут получиться интересные соотношения в области действительных чисел.

Имеется два произведения:

$$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(bc+ad)i$$

и

$$(a-bi)(c-di)=ac-bd-(bc+ad)i.$$

Перемножив эти равенства почленно, получим:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(bc+ad)^2.$$

Последнее равенство содержит исключительно действительные числа и выражает следующее соотношение из теории чисел: при умножении двух чисел, каждое из которых есть сумма двух квадратов, получается произведение, представляющее собою также сумму двух квадратов.

Примеры.

1) $(1+4)(9+25)=5\cdot 34=170=1^2+13^2$;

2) $(25+4)(1+9)=29\cdot 10=290=1^2+17^2$.

§ 168. Деление комплексных чисел

Частным от деления двух комплексных чисел $a+bi$ *и* a_1+b_1i *называется такое комплексное число* $x+yi$, *которое, будучи умножено на делитель, дает в произведении делимое* (по определению действия деления).

Таким образом, если одновременно коэффициенты a_1 и b_1 не равны нулю, то, полагая $\frac{a+bi}{a_1+b_1i}=x+yi$, имеем: $a+bi=(a_1+b_1i)(x+yi)$, или

$$a+bi=a_1x-b_1y+(b_1x+a_1y)\cdot i.$$

Из условия равенства двух комплексных чисел следует, что

$$\begin{cases} a_1x-b_1y=a; \\ b_1x+a_1y=b. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим:

$$x=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}; \quad y=\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{a+bi}{a_1+b_1i}=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}i.$$

Проще этот результат можно получить умножением делимого и делителя на сопряженное делителю число:

$$\frac{a+bi}{a_1+b_1i}=\frac{(a+bi)(a_1-b_1i)}{(a_1+b_1i)(a_1-b_1i)}=\frac{aa_1+bb_1+(a_1b-ab_1)i}{a_1^2+b_1^2}=$$
$$=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}i.$$

Этим правилом деления и будем руководствоваться в дальнейшем.

Примеры.

1) $\frac{2+3i}{2+i}=\frac{(2+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{4-3i^2+6i-2i}{2^2+1}=\frac{7}{5}+\frac{4}{5}i.$

2) $\frac{3-4i}{4+3i}=\frac{(3-4i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=\frac{12-12-16i-9i}{16+9}=\frac{-25i}{25}=$

$=-i.$

§ 169. Степени мнимой единицы

Пользуясь равенством $i^2=-1$, легко определить любую целую положительную степень мнимой единицы. Имеем:

$$i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i;\qquad i^4=i^2\cdot i^2=1;\qquad i^5=i^4\cdot i=i;$$
$$i^6=i^4\cdot i^2=-1;\qquad i^7=-i;\qquad i^8=1 \text{ и т. д.}$$

Это показывает, что значения степени i^n, где n — целое положительное число, периодически повторяются при увеличении показателя на 4. Поэтому, чтобы возвести число i в целую положительную степень, надо показатель степени разделить на 4 и возвести i в степень, показатель которой равен остатку от деления.

Примеры.

$$i^{25}=i^{4\cdot 6+1}=i^{24}\cdot i^1=1\cdot i=i;\qquad i^{38}=i^{36+2}=i^2=-1;$$
$$i^{51}=i^{48}\cdot i^3=-i.$$

Вообще $i^{4n+1}=i;\ i^{4n+2}=i^2=-1;\ i^{4n+3}=i^3=-i;\ i^{4n}=1.$

§ 170. Возведение в степень комплексного числа

Возведение комплексного числа в целую положительную степень производится по правилу возведения двучлена в соответствующую степень, так как оно представляет собою частный случай умножения одинаковых комплексных множителей.

Примеры.

$$(a+bi)^2=a^2+2abi+b^2i^2=(a^2-b^2)+2abi,$$
$$(a+bi)^3=a^3+3a^2bi+3ab^2i^2+b^3i^3=$$
$$=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i.$$

§ 171. Извлечение квадратного корня из комплексного числа

Пусть требуется извлечь квадратный корень из числа $a+bi$. Это значит, требуется найти такое комплексное число $x+yi$, квадрат которого равен $a+bi$.

Имеем:

$$\sqrt{a+bi}=x+yi,$$

где x и y — действительные числа,

$$a+bi=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi.$$

Применяя условие равенства двух комплексных чисел, получим:

$$x^2-y^2=a,$$
$$2xy=b.$$

Решаем эту систему относительно неизвестных x и y. Из второго уравнения находим, что $y=\frac{b}{2x}$. Тогда

$$x^2-\frac{b^2}{4x^2}=a,$$

откуда

$$4x^4-b^2-4ax^2=0,$$

или

$$4x^4-4ax^2-b^2=0;$$

следовательно,

$$x^2=\frac{2a\pm\sqrt{4a^2+4b^2}}{4};\quad x^2=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Так как $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant a$, то перед радикалом надо взять знак $+$, чтобы x^2 было положительным числом или нулем; следовательно,

$$x^2=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}. \qquad (1)$$

Подставляем это значение x^2 в уравнение $x^2-y^2=a$; получим:

$$y^2=\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}. \qquad (2)$$

Значения x и y находим из равенств (1) и (2):

$$x = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \tag{3}$$

и

$$y = \pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}. \tag{4}$$

Уравнение $2xy = b$ показывает, что произведение xy имеет тот же знак, какой имеет число b. Следовательно, если $b > 0$, то x и y имеют одинаковые знаки; если $b < 0$, то x и y имеют разные знаки. Поэтому
для $b > 0$ имеем:

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right),$$

для $b < 0$ имеем:

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right).$$

Практически этими формулами пользоваться не следует, а лучше повторить приведенный ход вычислений x и y в каждом отдельном случае.

Пример 1.

$$\sqrt{1+2i} = x + yi;$$

$$1 + 2i = x^2 - y^2 + 2xyi;$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1; \\ xy = 1; \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{x}; \quad x^2 - \frac{1}{x^2} = 1; \quad x^4 - x^2 - 1 = 0; \quad x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2};$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}; \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} - y^2 = 1;$$

$$y^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \quad y = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Окончательно,

$$\sqrt{1+2i} = \pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right).$$

Пример 2.

$$\sqrt{i}=x+yi;\ i=x^2-y^2+2xyi;$$

$$\begin{cases} x^2-y^2=0; \\ 2xy=1; \end{cases}$$

$$y=\frac{1}{2x};\quad x^2-\frac{1}{4x^2}=0;\quad 4x^4-1=0;\quad x^4=\frac{1}{4};\quad x^2=\frac{1}{2};$$

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}};\quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}};\quad \sqrt{i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i).$$

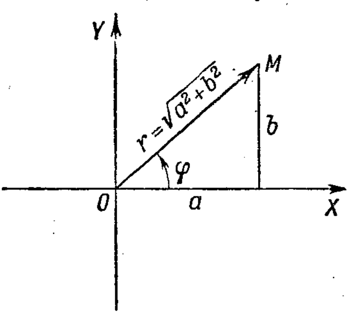
Проверка:

$$\left[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right]^2=\frac{1}{2}(1+2i+i^2)=\frac{1}{2}(1+2i-1)=i.$$

В § 176 будет показан более удобный способ извлечения корня из комплексного числа.

§ 172. Тригонометрическая форма комплексного числа

Как уже было сказано в § 163, комплексное число $a+bi$, не равное нулю, изображается радиусом-вектором $\overline{OM}$, причем длина этого вектора есть модуль комплексного числа (черт. 74):



Черт. 74.

$$r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Угол φ между положительным направлением оси OX и вектором $\overline{OM}$ называется аргументом комплексного числа $a+bi$. Этот угол принято отсчитывать от оси OX к вектору $\overline{OM}$, что показано стрелкой на чертеже.

Если комплексное число равно нулю, то вектор $\overline{OM}$ обращается в точку (нуль-вектор) и говорить о его направлении нет смысла. Поэтому считают, что число нуль не имеет аргумента.

Очевидно, что каждое комплексное число, не равное нулю, имеет бесконечное множество значений аргумента; эти значения отличаются друг от друга на любое целое число полных оборотов, т. е. на величину $2\pi k$, где k — любое целое число; например, аргументом комплексного числа $2+2i$ являются углы вида $\frac{\pi}{4}+2\pi k$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$.

Значение аргумента, взятое в пределах первой окружности, т. е. от 0 *до* 2π, *называется главным.*

Так, например, для комплексного числа $2+2i$ главное значение аргумента равно $\frac{\pi}{4}$, для числа $-2+2i$ главное значение аргумента равно $\frac{3}{4}\pi$.

Число	3	имеет	главное	значение	аргумента	0;
»	-3	»	»	»	»	π;
»	i	»	»	»	»	$\frac{\pi}{2}$;
»	$-i$	»	»	»	»	$\frac{3}{2}\pi$

и т. д.

По чертежу 74 имеем:

$$a=r\cos\varphi,\quad b=r\sin\varphi,$$

откуда

$$a+bi=r\cos\varphi+ir\sin\varphi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Выражение $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой комплексного числа* в отличие от формы $a+bi$, называемой *алгебраической.*

Для определения аргумента φ пользуемся формулами:

$$\cos\varphi=\frac{a}{r} \text{ и } \sin\varphi=\frac{b}{r} \quad (r=\sqrt{a^2+b^2}).$$

В зависимости от знака коэффициентов a и b выбирается соответствующая четверть, в которой должен оканчиваться угол φ.

Пример 1. Представить в тригонометрической форме число $-1+i\sqrt{3}$.

$$r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2;\quad \cos\varphi=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\left(\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2} \text{ и } \cos\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}\right).$$

Так как $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то φ следует взять равным $\frac{2\pi}{3}$. Следовательно,

$$-1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Пример 2. Представить в тригонометрической форме число $-1-i$. Имеем:

$$r = \sqrt{2};\ \cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}};\ \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\varphi = \frac{5\pi}{4}$.

Итак, $-1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

Пример 3. Представить в тригонометрической форме число 1; $r=1$; $\varphi=0$; следовательно, $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$, или $1 = \cos 2\pi k + i\sin 2\pi k$.

§ 173. Умножение комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

Перемножим два комплексных числа:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{и} \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Получим:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + ir_1r_2\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \\ + ir_1r_2\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - r_1r_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2.$$

Короче,

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Результат показывает, что *модуль произведения равен произведению модулей сомножителей, а аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей.*

Пример.

$$2(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot 5(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) = 10\cdot(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi).$$

Полученное правило остается в силе для любого числа сомножителей.

§ 174. Деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

Найдем модуль и аргумент частного

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}.$$

Умножим числитель и знаменатель правой части на $(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)$; получим:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2)}=$$
$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

Следовательно, *модуль частного равен частному модулей делимого и делителя, а аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя.*

Пользуясь этим правилом, можно показать, что

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-1}=\frac{1}{\cos\varphi+i\sin\varphi}=\frac{\cos 0+i\sin 0}{\cos\varphi+i\sin\varphi}=$$
$$=\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi).$$

Короче,

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-1}=\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi).$$

§ 175. Возведение в степень комплексного числа, заданного в тригонометрической форме

Так как n-я степень, где n — целое положительное число, представляет произведение n равных сомножителей, то по правилу умножения комплексных чисел получим:

$$[\boldsymbol{r}(\cos\varphi+\boldsymbol{i}\sin\varphi)]^n=\boldsymbol{r}^n(\cos n\varphi+\boldsymbol{i}\sin n\varphi),$$

или

$$r^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

По сокращении имеем:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi. \qquad (5)$$

Эта формула имеет применение как в самой математике, так и ее приложениях. В частности, она дает возможность получить косинус и синус дуг, кратных данной.

Положим $n=2$, тогда $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2=\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi$ или

$$\cos^2\varphi-\sin^2\varphi+2i\sin\varphi\cos\varphi=\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi,$$

откуда

$$\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi \text{ и } \sin 2\varphi=2\sin\varphi\cos\varphi.$$

При $n=3$ получим:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3=\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi$$

или

$$\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi+i(3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi)=$$
$$=\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi,$$

откуда

$$\cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi$$

или

$$\cos 3\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi;\qquad \sin 3\varphi=3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi$$

или

$$\sin 3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi.$$

Если обе части последнего равенства предыдущего параграфа возвести в степень n, получим:

$$[(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-1}]^n=[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)]^n$$

или

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-n}=\cos(-n\varphi)+i\sin(-n\varphi).$$

Последнее равенство показывает, что формула (5) справедлива и для целых отрицательных показателей.

§ 176. Извлечение корня из комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

Пусть требуется извлечь корень n-й степени из комплексного числа $Z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Это значит, что надо найти такое комплексное число $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$, которое, будучи возведено в n-ю степень, даст число Z, т. е.

$$[\rho(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

или

$$\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

На основании условия равенства двух комплексных чисел заключаем, что модули их должны быть равны, а аргументы могут отличаться на число, кратное 2π, т. е. $r=\rho^n$; $n\theta=\varphi+2\pi k$, где k — целое число. Отсюда получим:

$$\rho=\sqrt[n]{r}; \quad \theta=\frac{\varphi+2\pi k}{n}.$$

Таким образом, результат извлечения корня представится так:

$$z=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad (6)$$

где $\sqrt[n]{r}$ — арифметическое значение корня.

Если в формуле (6) числу k будем давать значения: $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$, то получим следующие n значений корня:

при $k=0$ имеем: $z_0=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$;

при $k=1$ имеем: $z_1=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)\right]$;

при $k=2$ имеем: $z_2=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{4\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{4\pi}{n}\right)\right]$;

. . . .

при $k=n-1$ имеем: $z_{n-1}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)+\right.$

$$\left.+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right].$$

Аргументы этих значений корня, т. е. углы

$$\frac{\varphi}{n}; \quad \frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}; \quad \frac{\varphi}{n}+\frac{4\pi}{n}; \quad \ldots; \quad \frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}$$

идут в возрастающем порядке; нетрудно убедиться в том, что каждый из них меньше полного угла, или 2π. Для этого достаточно показать, что наибольший из них

$$\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}<2\pi.$$

В самом деле, главное значение аргумента комплексного числа меньше полного угла: $0\leqslant\varphi<2\pi$; а потому

$$\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}<\frac{2\pi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}=2\pi; \quad \frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}<2\pi.$$

Из тригонометрии известно, что в пределах одной окружности два различных угла не могут иметь одинаковые значения синуса и одинаковые значения косинуса; *следовательно, все n значений корня будут различны.*

При дальнейшем увеличении числа k ($k=n$, $n+1$, $n+2, \ldots$) новых значений корня уже не получим; например, при $k=n$ имеем:

$$z_n=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi n}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi n}{n}\right)=$$
$$=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)\right]=$$
$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)=z_0.$$

Получилось то же значение, что и при $k=0$. Если положить $k=n+1$, то получим z_1, при $k=n+2$ получим z_2 и т. д.

Пример 1. $\sqrt{i}$. Представляем i в тригонометрической форме:

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2} \qquad (r \text{ равно } 1);$$

$$\sqrt{i}=\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right).$$

При $k=0$ имеем:

$$\sqrt{i}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

При $k=1$ получим:

$$\sqrt{i}=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

Этот пример был решен другим способом в § 171.

Пример 2. $z=\sqrt[4]{-1}$.

Имеем: $-1=\cos\pi+i\sin\pi$.

Тогда

$$\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{\cos\pi+i\sin\pi}=\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4};$$

при $k=0$ получаем $z_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$;

при $k=1$ получаем $z_2=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$;

при $k=2$ получаем $z_3=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$;

при $k=3$ получаем $z_4=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

Пример 3. Найти все четыре значения $x=\sqrt[4]{1}$. Имеем:

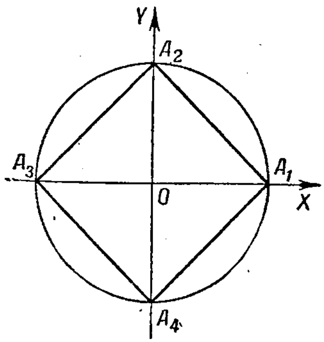
$$\sqrt[4]{1}=\sqrt[4]{1(\cos 0+i\sin 0)}=$$
$$=\sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{4}+i\sin\frac{0+2\pi k}{4}\right)=\cos\frac{k\pi}{2}+i\sin\frac{k\pi}{2}.$$

Полагаем $k=0;\ 1;\ 2;\ 3$.

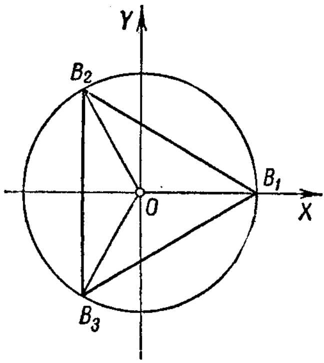
Получим: $x_1=\cos 0+i\sin 0=1$; $x_2=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$;

$x_3=\cos\pi+i\sin\pi=-1$; $x_4=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$.

Дадим геометрическое истолкование полученных результатов. Построим точки, соответствующие найденным четырем значениям.



Черт. 75.



Черт. 76.

Это будут точки A_1, A_2, A_3, A_4, представляющие собой вершины вписанного в данный круг квадрата. (черт. 75).

Подобным образом, извлекая корень кубичный из 1, найдем три комплексных числа:

$$\cos 0+i\sin 0;\quad \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\quad \text{и}\quad \cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}.$$

Если построим соответствующие им точки, то эти точки окажутся на окружности единичного радиуса и явятся вершинами правильного вписанного треугольника (черт. 76).

Геометрически извлечение корня n-й степени из 1 сводится к построению правильного n-угольника, вписанного в круг единичного радиуса, причем если n — нечетное число, одна из вершин окажется на оси абсцисс вправо от 0; если же n — четное, то имеются две вершины, расположенные на оси абсцисс.

Упражнения

1. Записать короче следующие выражения:

а) $i+i+i+i$; б) $5i-9i+12i$; в) $ai+bi$; г) $10i-10i$; д) $ai+bi-ai$; е) $ai-ai$.

Вычислить:

2. а) $(3+5i)+(2+i)$; б) $(7-5i)+(7+5i)$; в) $(2+5i)+(-2+3i)$;
3. а) $(1+4i)+(-1-4i)$; б) $(-6+3i)+(6+3i)$; в) $(5+3i)+(12+i)$.
4. а) $(-7+2i)+(7+2i)$; б) $(m+ni)+(x+yi)$; в) $i+(a+bi)$.
5. а) $(3+5i)-(2+i)$; б) $(7-5i)-(7+5i)$; в) $(2+5i)-(-2+3i)$.
6. а) $1+4i-(-1-4i)$; б) $-6+3i-(6+3i)$; в) $(5+3i)-(5-3i)$.
7. а) $(0{,}25-i)-(0{,}75+i)$; б) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}i\right)-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}i\right)$; в) $(a+bi)-i$.
8. а) $5(2-3i)$; б) $-3(1+i)$; в) $i(4+5i)$.
9. а) $-2(3-i)$; б) $i(1-i)$; в) $-0{,}5i(1+2i)$.
10. а) $(3+2i)(4-i)$; б) $(1-i)(2+i)$; в) $(0{,}2-0{,}3i)\cdot(0{,}5+0{,}6i)$.
11. а) $(3+i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})$; б) $(a+mi)(2a-mi)$; в) $(x-i\sqrt{y})(-x-2i\sqrt{y})$.
12. а) $(3+5i)(4-i)$; б) $(6+11i)(7+3i)$; в) $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{3}i\right)$.
13. а) $(\sqrt{3}+i\sqrt{2})(\sqrt{3}-i\sqrt{2})$; б) $(p-2qi)\cdot(2p+qi)$; в) $(a-i\sqrt{b})(a+2i\sqrt{b})$.
14. а) $(a+i\sqrt{b})(a-i\sqrt{b})$; б) $(3+2i\sqrt{2})(3-2i\sqrt{2})$; в) $(\sqrt{a}+i\sqrt{b})(\sqrt{a}-i\sqrt{b})$.

Разложить на пары комплексных множителей:

15. а) x^2+y^2; б) a^2+9b^2; в) $4m^2+9n^2$.

16. а) $a^2+\frac{b^2}{4}$; б) p^2+1; в) $16+9$.

17. а) $25+1$; б) 5; в) 65.

Вычислить частные:

18. а) $\frac{10i}{2}$; б) $\frac{15i}{5i}$; в) $8i:(-16i)$.

19. а) $\frac{21-i}{i}$; б) $\frac{1+i}{i}$; в) $-\frac{12}{5i}$.

20. а) $\frac{5}{1+2i}$; б) $\frac{1+i}{1-i}$; в) $-\frac{17-6i}{3-4i}$.

21. а) $\frac{63+16i}{4+3i}$; б) $\frac{4}{1+i\sqrt{3}}$; в) $\frac{5i}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$.

22. а) $\frac{1-20i\sqrt{5}}{7-2i\sqrt{5}}$; б) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$; в) $\frac{m+ni}{m-ni}$.

23. а) $\frac{1-i^2}{(1+i)^3}$; б) $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}$;

в) $\frac{\sqrt{1+a}+i\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-i\sqrt{1-a}}-\frac{\sqrt{1-a}+i\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}-i\sqrt{1+a}}$.

24. а) $\frac{32}{1+3i\sqrt{7}}$; б) $\frac{21}{4+3i\sqrt{6}}$; в) $\frac{5}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$.

25. а) $\frac{3}{\sqrt{2}-i}$; б) $\frac{7}{\sqrt{5}+i\sqrt{2}}$; в) $\frac{10i}{3+i}$.

Возвести в степень:

26. а) i^{24}; б) i^{87}; в) i^{49}; г) $(-i)^{10}$; д) $(-i)^{9}$; е) $-i^{10}$.

27. а) i^{21}; б) i^{11}; в) i^{25}; г) i^{44}; д) i^{58}; е) i^{186}.

28. а) $(2-i\sqrt{2})^2$; б) $(x+yi)^2+(x-yi)^2$; в) $(1+i)^3$.

29. а) $(-0{,}5-0{,}5i\sqrt{3})^2$; б) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^2$;

в) $\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^4+\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^4$.

30. а) $(4+3i)^2$; б) $(2-i\sqrt{3})^2$; в) $(1-i)^3$.

Извлечь корень:

31. а) $\sqrt{ai}$; б) $\sqrt{5+12i}$. **32.** а) $\sqrt{21+20i}$; б) $\sqrt{-13+84i}$.

33. а) $\sqrt{15+8i}$; б) $\sqrt{-77+36i}$.

34. а) $\sqrt{3{,}75+2i}$; б) $\sqrt{3+4i}+\sqrt{3-4i}$.

35. Построить точки, изображающие числа:

а) $3+5i$; б) $4-i$; в) $-3+2i$; г) $-2-2i$; д) 5; е) $-4i$. ж) $5i$; з) $0{,}2-0{,}5i$; и) $-5i-5$.

36. Как расположатся на плоскости изображения двух сопряженных комплексных чисел?

37. Найти модуль и аргумент чисел:

а) $1+i$; б) $1-i$; в) $-1+i$; г) $-1-i$.

38. а) $\sqrt{3}+i$; б) $5+2i$; в) $-2i$; г) $3-3i$.

Представить в тригонометрической форме числа:

39. а) i; б) $-i$; в) -3; г) $\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$.

40. а) $3+2i$; б) $3+4i$. 41. а) $3-4i$; б) $8+5i$.

42. а) $2+3i$; б) $-12+5i$. 43. а) $-2-7i$; б) $4-3i$.

Построить слагаемые и сумму комплексных чисел:

44. а) $3+4i$ и $5+3i$; б) $1-5i$ и $2+3i$; в) $-4+2i$ и $4+2i$.

45. а) $5+3i$ и $3+5i$; б) $1-3i$ и $1+3i$; в) $-5+2i$ и $5+2i$.

Построить уменьшаемое, вычитаемое и разность комплексных чисел:

46. а) $3+4i$ и $2+i$; б) $7-2i$ и $5-3i$; в) $4+5i$ и $5+4i$.

47. а) $3+6i$ и $6+3i$; б) $6+3i$ и $3+6i$; в) $1-i$ и $3i$.

Вычислить произведения:

48. $2(\cos 30°+i\sin 30°)\cdot 3(\cos 30°+i\sin 30°)$.

49. $2(\cos 30°+i\sin 30°)\cdot 3(\cos 45°+i\sin 45°)$.

50. $2(\cos 60°+i\sin 60°)\cdot(\cos 45°+i\sin 45°)$.

51. $(\cos 30°+i\sin 30°)\cdot(\cos 15°+i\sin 15°)$.

52. $(\cos 40°+i\sin 40°)\cdot(\cos 50°+i\sin 50°)$.

Доказать, что:

53. $(\cos 30°+i\sin 30°)^2=\cos 60°+i\sin 60°$.

54. $(\cos 30°+i\sin 30°)^3=i$, т. е. $\cos 90°+i\sin 90°$.

55. $(\cos 60°+i\sin 60°)^{\frac{1}{2}}=\cos 30°+i\sin 30°$.

Вычислить:

56. а) $(\cos 60°+i\sin 60°)^3$; б) $(\cos 25°+i\sin 25°)^5$.

57. а) $(\cos 30°+i\sin 30°)^6$; б) $(\cos 45°+i\sin 45°)^4$.

58. $\sqrt{i}$. 59. $\sqrt{-i}$. 60. $\sqrt{1+i}$. 61. $\sqrt{1-i}$. 62. $\sqrt[3]{i}$. 63. $\sqrt[5]{1}$.

64. $\sqrt[6]{1}$. 65. $\sqrt[4]{-1}$.

ОТВЕТЫ

ГЛАВА II

5. Вторая запись указывает на более точное измерение. 7. С точностью до 0,02 *м*. 8. 5,286. 9. 18,6 и 18,8. 10. 0,05%. 11. Второе. 12. Точнее $3\frac{1}{7}$. 13. 18,8. 14. 6,829. 15. 615 *км* (± 5 *км*). 16. 164 *кг*. 17. 0,25. 18. 1,9%; 870 $м^3$. 19. С тремя точными цифрами. 20. С точностью до 0,5%. 21. Около 14 центнеров. 22. С точностью до 0,1 *см*.

ГЛАВА III

1. 5) $x > -2$; 6) $x < -6,5$; 7) $x > -15$; 8) $x < 8$; 9) $x > \frac{16}{11}$. 2. $x > \frac{1}{2}$. 3. $y > \frac{3}{5}$. 4. $x < \frac{11}{29}$. 5. Равенство при $a = b$.

ГЛАВА IV

10. 1) 5,38; 4) 0,30. 11. 17) $\frac{2}{3}a^n b\sqrt{ab}$; 20) $\frac{1}{ab}\sqrt{b^2 - a^2}$. 12. 5) $\sqrt{abx}$; 12) $\sqrt{2(a-b)}$; 15) $\sqrt[3]{ax^2y^2}$. 13. $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$, так как $(3\sqrt{2})^2 > (2\sqrt{3})^2$. 14. 5) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 11) $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$; 14) $\frac{\sqrt[3]{a^2-b^2}}{a-b}$; 16) $\frac{\sqrt[5]{4ab^2mn}}{2ab}$. 16. 3) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ и $9\sqrt{2}$; 8) $\frac{a}{a-b}\sqrt{a-b}$, $\frac{2}{b}\sqrt{a-b}$. 17. 1) $20\sqrt{2}$; 5) $-2\sqrt{3}$; 6) 0. 20. 11) 7; 13) 1; 15) $a^2 - b$; 17) $(a+b)^2$; 20) 5; 22) 1; 23) y. 24. $4x\sqrt{x^2-1}$. 25. 1. 27. b. 28. n. 29. m. 30. $\frac{2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$. 31. $\sqrt{a^2+x^2}$.

ГЛАВА V

1. 1) $x_1=0$, $x_2=2$, 2) $x_1=-7$, $x_2=0$; 3) $y_1=-10$, $y_2=0$; 4) $t_1=0$, $t_2=5$; 5) $x_1=0$, $x_2=9$; 6) $y_1=0$, $y_2=-\frac{1}{12}$; 7) $x_1=0$, $x_2=8{,}5$; 8) $x_1=0$, $x_2=\frac{43}{15}$; 9) $t_1=0$, $t_2=85$; 10) $x_1=0$, $x_2=\frac{b}{a^2}$; 11) $y_1=0$, $y_2=1$; 12) $x_1=0$, $x_2=\frac{b}{a-c}$ $(a\neq c)$; 13) $y_1=-(a+b)$, $y_2=0$; 14) $x_1=0$, $x_2=\frac{2b+m+m^2}{1-m}$ $(m\neq 1)$. **2.** 3 и 11. **3.** 20 секунд. **4.** 3) $y_{1,2}=\pm 40$; 4) $z_{1,2}=\pm 2{,}5$; 5) $a_{1,2}=\pm\frac{3}{4}$; 6) $x_{1,2}=\pm 1$; 7) $y_{1,2}=\pm\frac{5}{2}$; 8) $z_{1,2}=\pm(c+m)$; 9) $x=\pm 1{,}15$; 10) $y=\pm 1{,}732$. **5.** ± 12. **6.** 9 *см*. **7.** 44 стопы. **8.** 10 *см* и 24 *см*. **9.** 15 руб. **10.** 8 фут. **11.** 1) $x_1=-7$, $x_2=1$; 2) $x_1=-\frac{11}{4}$, $x_2=2$; 3) $z_1=-2$, $z_2=-\frac{2}{9}$; 4) $t_1=-(a+b)$, $t_2=\frac{b-a}{2}$; 5) $x_1=2$, $x_2=3$; 6) $z_1=-4$, $z_2=-3$; 7) $y_1=-2$, $y_2=5$; 8) $x_1=-6$, $x_2=2$; 9) $x_1=-0{,}08$, $x_2=0{,}88$; 10) $x_1=-\frac{4}{3}$, $x_2=\frac{5}{3}$; 11) $t_1=3$, $t_2=13$; 12) $y_1=-2$, $y_2=1$; 13) $x_1=2$, $x_2=\frac{7}{2}$; 14) $z_1=-10$, $z_2=\frac{7}{3}$; 15) $d_1=-10{,}6$; $d_2=6$; 16) $m_1=\frac{5}{2}$, $m_2=\frac{10}{3}$; 17) $m_1=-5$, $m_2=0{,}1$; 18) $x_1=-\frac{7}{12}$, $x_2=\frac{5}{6}$; 19) $z_1=\frac{1}{3}$, $z_2=8$; 20) $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=1$; 21) $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=2$; 22) $x_1=-3{,}5$, $x_2=3$; 23) $y_1=-\frac{7}{4}$, $y_2=3$; 24) $x_1=2$, $x_2=-1$; 25) $y_1=-c$, $y_2=b/2$; 26) $x_1=-2a$, $x_2=2b$; 27) $x_1=-\frac{m}{2}$, $x_2=-\frac{m}{3}$; 28) $y_1=-\frac{a}{7}$, $y_2=\frac{a}{8}$; 29) $m_1=-\frac{89}{14}$, $m_2=1$; 30) $x_{1,2}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4a}}{2}$; 31) $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$; 32) $x_1=\frac{a-b}{a+b}$, $x_2=\frac{a+b}{a-b}$; 33) $x_{1,2}=\frac{1}{3}\left[a+b+c\pm\sqrt{(a+b+c)^2-3(ab+ac+bc)}\right]$; 34) $x_1=2$, $x_2=-\frac{7}{9}$; 35) $\frac{m}{m-n}$ и -1; 36) -3 и 5; 37) $2+\sqrt{3}$ и $-2(2+\sqrt{3})$; 38) $-\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\pm 2$; 39) $-\frac{4}{3}$ и 3;

40) $\frac{a-b+1\pm(a+b)(a-b-1)}{2}$; 41) 10, 5; 42) $-\frac{5}{8}$, 2; 43) 8,4, 24. **12.** 8. **13.** $\frac{1+\sqrt{8m+1}}{2}$. **14.** 15 *м* и 25 *м*. **15.** 12,5 *см* и 30 *см*. **17.** В пятиугольнике. **19.** 5 *км* и 6 *км*. **20.** 5%. **21.** 3 и 5 час. **22.** 20 *км*. **23.** 48 *км/час* и 36 *км/час*. **24.** 20 час. и 30 час. **25.** 2400 руб. **26.** 630 *км* и 420 *км*. **27.** 60 груш и 20 яблок. **30.** 10 *га* и 12 дней. **31.** 40 *км/час*. **32.** 36 и 30. **33.** 990. **34.** 10 час. и 8 час. **35.** 30 и 20. **36.** 60 или 180. **37.** $\approx 2{,}2$ *т* и около 10 *га*. **38.** 3) 1,23 и $-0{,}40$. **39.** 6) $x^2-\frac{b}{a}x=0$; 9) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$; 11) $x^2-4x+1=0$. **43.** 2) $m=-3$. **44.** 3) $k=-10$. **46.** $a^4x^2+a^2(4ac-2b^2)x+b^2(b^2-4ac)=0$.

ГЛАВА VI

3. 2) $(x-5)(x+7)$; 5) $(a-3b)(2a+b)$. **4.** 2) $\frac{a+8}{a+3}$. **15.** $y=\frac{3}{8}x^2-\frac{27}{8}$. **16.** $x=3{,}5$. **17.** $x=4$.

ГЛАВА VII

1. 1) 0; 5; -3; 4) 3; -1; 1; 8) 0; $\pm\sqrt{2}$. **2.** 1) $(x-1)(x-2)(x+3)=0$; 5) $(x-a)(x-b)(x+c)(x-d)=0$. **3.** 3) $\pm\sqrt{5}$; $\pm\sqrt{6}$; 5) ± 2. **4.** 2) 4; -4) 77; 7) 40; 9) 4; 11) $3a$; 18) $\frac{5}{4}$; 23) 0; 26) $\frac{2a\sqrt{b}}{b+1}$; 28) $\frac{3}{4}a$. **5.** 1) 7 и 5; 3) ± 9 и ± 5; 5) $\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ и $2\mp\sqrt{\frac{5}{2}}$; 7) 2 и 2; 9) 5 и 3; $\frac{3}{4}$ и $-\frac{5}{4}$; 11) ± 2 и ± 2; 13) 8 и 4; 4 и 8; 15) ± 6 и ± 3; 17) $10\pm 4\sqrt{6}$ и $10\mp 4\sqrt{6}$; $10\pm 5\sqrt{3}$ и $10\mp 5\sqrt{3}$; 19) 9 и 4; 4 и 9; 21) $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$; 23) 4 и 9; 9 и 4; 26) 4 и 2. **6.** 15 и 9. **7.** 12 и 8. **8.** $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{2}$. **9.** 8 *см* и 6 *см*. **10.** 6 *см* и 4 *см*. **11.** 10,5 *см* и 14 *см*. **12.** 6 *см* и 4 *см*. **13.** 17,0 *см* и 13,5 *см*. **14.** 8 *см* и 2 *см*.

ГЛАВА VIII

3. $a_n=\frac{n}{2n-1}$. **10.** 144, 168, 192. **14.** 1) $d=4$; $s_n=207$; 2) $a_n=-4$; $n=7$; 3) $a_n=-32$; $s_n=-5$; 4) $n=13$; $s_{13}=403$; 5) $a_1=1$; $a_n=469$; 6) $n=17$; $a_n=50$; 7) $a_1=5{,}2$; $s_n=584{,}8$; 8) $a_1=2{,}3$; $n=19$; 9) $a=5{,}5$; $n=20$; 10) $a_1=15$, $d=-3$.

15. $\div 12, 10, 8, \ldots$ **16.** $\div 12, 9, 6, 3, \ldots$ или $\div -9; -6; -3; 0$. **19.** 3. **20.** $2\frac{1}{3}$; $5\frac{1}{3}$; $8\frac{1}{3}$. **21.** 7 или 13. **30.** $\frac{1}{3}$; $53\frac{79}{81}$. **31.** 2 и 1458. **32.** $n=6$. **33.** $q_1=12$; $q_2=-13$. **34.** $6\frac{1}{4}$ или $-56\frac{1}{4}$. **35.** 5; 15; 45. **37.** 5; 10; 20; 40. **40.** $a^2\sqrt{3}$. **41.** $S_{\text{кругов}}=R^2\sqrt{2}(2-\sqrt{2})$; $S_{\text{квадр}}=4R^2$.

ГЛАВА IX

1. 5) 0. **2.** 4) $\frac{16}{9}$; 7) $\frac{8}{125}$; 10) $\frac{1}{b}$; 12) $2x^3-5x+3$. **3.** 6) $\frac{4x^3y^2}{5a^2b^4}$. **4.** 5) a^{-6}; 8) $\frac{a+b}{a-b}$. **6.** 4) $(a+b)^{\frac{1}{2}}$; 7) $a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{2}{5}}$; 9) $b^{-\frac{2}{3}}$. **7.** 4) $\frac{1}{8}$; 11) 2; 13) $\frac{112}{9}$. **8.** 3) $x-y$; 5) $x+y+2(xy)^{\frac{1}{2}}$; 8) 6; 10) x^2+2; 12) a. **9.** 1) $\frac{2y}{\sqrt{x^2-y^2}}$; 2) $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{4\sqrt{xy}}$; 3) $\frac{x+y}{x-y}$; 4) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; 5) $\frac{4}{a+a^{\frac{1}{2}}+1}$. **10.** $\frac{a^3}{2(a-1)}$.

ГЛАВА X

3. 6) $-\frac{1}{2}$; 7) $\frac{2}{3}$; 8) $\frac{9}{5}$. **4.** 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{2}{3}$; 9) $-\frac{1}{2}$; 10) $-\frac{3}{2}$. **5.** 10) $\frac{1}{64}$; 11) $\frac{9}{4}$; 12) 8. **8.** 1) -2 и -1; 3) между -3 и -2; 4) -5 и -4. **9.** 1) между -4 и -3; 2) -5 и -4; 3) -7 и -6. **10.** 1) $\frac{3}{5}$; 2) $-\frac{3}{5}$; 3) $\frac{3}{10}$; 4) $\frac{3}{20}$; 5) $\frac{1}{10}$. **11.** 1) 3; 2) $3^{\frac{9}{4}}$; 3) $\frac{1}{27}$; 4) $\frac{1}{9}$. **12.** Геометрическую прогрессию: 2, 4, 8, 16, … **19.** 2, 3 и 5. **22.** 15) $\lg y=3\lg a-\frac{11}{9}\lg b-\frac{2}{9}\lg c$; 17) $\lg y=3\lg b+\frac{3}{4}\lg c-$ $-\frac{1}{2}\lg a$; 18) $\lg x=\frac{1}{n}\left(\lg m+\frac{2}{p}\lg b\right)$; 19) $\lg z=$ $=-\frac{1}{2}\left(\lg a+\frac{1}{2}\lg b+\frac{1}{4}\lg c\right)$; 20) $\lg y=\frac{1}{m}\left[(n+1)\lg a+\frac{p}{n}\lg b\right]$; 21) $\lg x=\frac{\sqrt{2}}{2}\lg 3$; 22) $\lg x=\lg_a^2(a+b)$. **23.** 8) $z=\sqrt[4]{\frac{a^3}{b^3c^2}}$; 9) $y=\sqrt[5]{\frac{(a-b)^3(a+b)^2}{a^4}}$; 10) $z=\frac{\sqrt[3]{a\cdot\sqrt[4]{ac^3}(b+1)}}{b\cdot(c+a)^3}$.

27. 3) $-3,9925$; 4) $-5,0083$. **28.** 3) $\bar{3},9981$; 4) $\bar{4},0096$; 5) $\bar{1},2672$. **34.** 4) 0,3245; 5) $\bar{1},4333$. **35.** 2) 1,56; 11) 0,339; 12) 9,00; 13) 0,587; 14) 0,26; 15) 0,697; 16) 3,16; 17) 1,17; 18) 0,893; 19) $8,09 \cdot 10^{-6}$; 23) 0,706; 24) 1,816; 25) 1,43; 26) 0,417. **36.** 1) $x = \pm 1$; 2) $x = 11$, 3) $x = 2$; 4) $x = \frac{-15}{4}$; 5) $x = 7$; 6) $x = 3$; 7) $x = \pm 2$. **37.** 1) $x \approx 0,806$; 2) $x \approx -2,04$; 3) $x = \pm \sqrt{\frac{\lg 22,1}{\lg 7}}$. **38.** 1) 2 и $\frac{\lg 2 - \lg 3}{\lg 3}$; 2) 1, 3 и 4; 3) 0 и $\frac{\lg 5}{\lg 7}$; 4) $\frac{9}{2}$; 5) 100 и 1000; 6) 1000 и $\frac{1}{10\sqrt[8]{10}}$; 7) $x = 10$; 8) 0,1 и 100; 9) 13,34 и $7499 \cdot 10^1$; 10) 7 и 15; 11) 100 и 0,01; 12) $x = \frac{1}{2}$; 13) 100 и 0,01; 14) 2 и 3; 15) 3 и 7. **41.** $\frac{8}{3}$. **42.** 2 и -1. **43.** 1 и 2. **44.** 1, 2, $\frac{7 \pm \sqrt{41}}{2}$. **45.** 10. **46.** $-0,9$. **47.** 10. **48.** $\frac{29}{8}$. **50.** 2 и 4. **51.** 9. **52.** $\frac{1}{2}$ и 4. **53.** 2 и $-\frac{4}{3}$. **54.** $x = 5$; $y = 7$. **55.** $x = 2$; $y = 6$. **56.** 5, $\sqrt[5]{5}$. **57.** 4. **58.** $\frac{91}{33}$. **59.** $\frac{7}{2}$. **60.** 3 и 13. **61.** 7.

ГЛАВА XI

1. 2) 51; 5) 0,0435; 7) 0,612; 10) 0,000139; 11) 0,00785. **2.** 1) 0,74; 2) 50; 3) 13,9; 4) 45,2; 5) 1310; 6) 34; 7) 505; 8) 2640; 9) 0,000458; 10) 0,0124; 11) 7,32; 12) 1410. **3.** 1) 9,75; 2) 39,2; 3) 0,216; 4) 8,25. **4.** 1) 1700; 2) 0,284; 3) 0,338; 4) 30,2; 5) 419; 6) 0,00729; 7) 0,059; 8) 1480; 9) 0,00237; 10) 1910. **5.** 1) 182; 2) 18,9; 3) 0,0493; 4) 0,00094; 5) 174 000; 6) 449 000; 7) 1,19; 8) 0,000372. **6.** 1) 0,632; 2) 0,279; 3) 67,6; 4) 2,14; 5) 0,0158; 6) 0,00775. **7.** 1) 7,52; 2) 1,62; 3) 3,49; 4) 0,752; 5) 0,165. **8.** 1) 334; 2) 16,95; 3) 0,0854; 4) 0,122; 5) 44,7. **9.** 1) 0,660; 2) 0,815; 3) 1,55; 4) 0,991; 5) 0,460; 6) 0,867. **10.** 1) 30,4; 2) 24,8; 3) 570; 4) 46,9. **11.** 1) 0,25; 2) 16,2; 3) 0,41. **12.** 1) 5,4; 2) 0,00058. **13.** 1) 0,866; 2) 30,4; 3) 5,97; 4) 1,47; 5) 1,275.

ГЛАВА XII

6. Около 12 лет. **7.** 48 200. **8.** Приблизительно 720 руб. **9.** 11,8 года. **10.** Около 125 000. **11.** 18 лет. **16.** A_9^4. **17.** C_{12}^3. **18.** P_5. **20.** 1) $90x^3$; 3) $495x^4y^2$. **21.** $84a^3x^3$. **22.** $495\frac{a^4}{x^2}$.

ГЛАВА XIII

2. в) $8i$. **3.** в) $17 + 4i$. **4.** в) $a + (b+1)i$. **5.** в) $4 + 2i$. **6.** в) $6i$. **7.** в) $a + (b-1)i$. **8.** в) $-5 + 4i$. **9.** в) $1 - 0,5i$. **10.** в) $0,28 - 0,03i$. **11.** в) $-(x^2 + 2y) - ix\sqrt{y}$. **12.** в) $\frac{1}{6} + \frac{5}{12}i$. **13.** в) $(a^2 + 2b) + a\sqrt{b}\,i$. **14.** $a + b$. **15.** в) $(2m + 3ni)(2m - 3ni)$. **16.** в) $(4 + 3i)(4 - 3i)$.

17. в) $(8+i)(8-i)$. **18.** в) $-\frac{1}{2}$. **19.** в) $2,4i$. **20.** а) $1-2i$; б) i; в) $1,08-3,44i$. **21.** а) $12-5i$; б) $1-i\sqrt{3}$; в) $i\sqrt{2}-\sqrt{3}$.
22. а) $\frac{69}{8}-\frac{23\sqrt{5}}{4}i$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}$; в) $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}+\frac{2mn}{m^2+n^2}i$.
23. а) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$; б) 0; в) $2a$. **24.** в) $\sqrt{2}+\sqrt{3}i$. **25.** б) $\sqrt{5}-\sqrt{2}i$.
26. г) -1; д) $-i$; е) 1. **27.** д) -1; е) 1. **28.** а) $2-4\sqrt{2}i$; б) $2(x^2-y^2)$; в) $2\cdot(i-1)$. **29.** а) $0,5(-1+i\sqrt{3})$; б) $-0,5(1+i\sqrt{3})$; в) 2. **30.** в) $-2-4i$. **31.** а) $\sqrt{\frac{a}{2}}+i\sqrt{\frac{a}{2}}$; б) $3+2i$. **32.** а) $5+2i$; б) $6+7i$. **33.** а) $4+i$; б) $2+9i$. **34.** а) $2+\frac{i}{2}$; б) 4. **37.** а) $\sqrt{2}$ и $\frac{\pi}{4}$; г) $\sqrt{2}$ и $\frac{5\pi}{4}$. **39.** а) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; б) $\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3\pi}{2}$; в) $3(\cos\pi+i\sin\pi)$; г) $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$.
40. а) $\sqrt{13}(\cos 33°40'+i\sin 33°40')$; б) $5(\cos 53°10'+i\sin 53°10')$.
41. а) $5(\cos 306°50'+i\sin 306°50')$; в) $9,44(\cos 32°+i\sin 32°)$.
42. а) $\sqrt{13}(\cos 56°20'+i\sin 56°20')$; б) $13(\cos 157°20'+i\sin 157°20')$.
43. а) $\sqrt{53}(\cos 254°+i\sin 254°)$; в) $5(\cos 323°10'+i\sin 323°10')$.

58. $\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}+2\pi n}{2}+i\sin\dfrac{\frac{\pi}{2}+2\pi n}{2}$; $n=0$; 1. **59.** $\pm\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$.

60. $\sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{4}+2\pi n}{2}+i\sin\dfrac{\frac{\pi}{4}+2\pi n}{2}\right)$, $n=0$; 1.

61. $\sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{7}{4}\pi+2\pi n}{2}+i\sin\dfrac{\frac{7}{4}\pi+2\pi n}{2}\right)$, $n=0$; 1. **62.** $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$; $-\frac{1}{2}\sqrt{3}i$; $-i$. **63.** $\cos\frac{2\pi n}{5}+i\sin\frac{2\pi n}{5}$ $(n=0, 1, 2, 4)$.

64. $\cos\frac{2\pi n}{6}+i\sin\frac{2\pi n}{6}$ $(n=0, 1, 3)$. **65.** $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$; $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.