Л. В. Канторович
Б. З. Вулих
А. Г. Пинскер

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ В ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Л. В. Канторович
Б. З. Вулих
А. Г. Пинскер

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ В ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Л. В. КАНТОРОВИЧ, Б. З. ВУЛИХ и А. Г. ПИНСКЕР

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ В ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1950 ЛЕНИНГРАД

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 11

ЧАСТЬ I

ТЕОРИЯ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

Глава I. **Линейные полуупорядоченные пространства (*K*-пространства)** 19

§ 1. Определение *K*-пространства и его основные свойства . . 19

1.1. Линейное множество (19). 1.2. *K*-пространство (20). 1.3. Простейшие следствия из аксиом *K*-пространства (22). 1.4. Дальнейшие следствия из аксиом (26). 1.5. Положительная и отрицательная части элемента и его модуль. Дистрибутивный закон (28). 1.6. Дизъюнктные элементы и множества (32). 1.7. Соединения (34). 1.8. Частично упорядоченные множества (37).

§ 2. Сходимость в *K*-пространстве 41

2.1. (o)-сходимость (41). 2.2. (o)-полнота *K*-пространства (46). 2.3. (t)-сходимость (47). 2.4. Топологизация *K*-пространства (50).

§ 3. Примеры *K*-пространств 52

3.1. *K*-пространство S измеримых функций (52). 3.2. *K*-пространство V функций ограниченного изменения (54). 3.3. *K*-пространство s всех числовых последовательностей (55).

§ 4. Ряды 56

4.1. Основные понятия и свойства рядов (56). 4.2. Ряды, бесконечные в двух направлениях (58).

Глава II. **Разложение и соединение *K*-пространств** 59

§ 1. Различные виды подпространств *K*-пространства 59

1.1. Определение подпространства (59). 1.2. Правильные и нормальные подпространства (60). 1.3. Компонента *K*-пространства (62).

§ 2. Разложение K-пространства на компоненты 63

2.1. Проектирование на компоненту (63). 2.2. Разложение K-пространства по его компонентам (66). 2.3. Некоторые свойства разложений (68). 2.4. Соединение K-пространств (68).

Глава III. **Интегральное представление элементов K-пространства** 72

§ 1. Алгебры Буля 72

1.1. Определение и основные свойства (72). 1.2. Полные алгебры (74). 1.3. Полное соединение булевских алгебр (77).

§ 2. Проекторы 78

2.1. Булевская алгебра компонент (78). 2.2. Проекторы (80). 2.3. Проекторы, порождённые элементами (87).

§ 3. K-пространства с единицей 89

3.1. База K-пространства (89). 3.2. Свойства единичных элементов (91). 3.3. Разложение произвольного K-пространства на подпространства с единицей (93). 3.4. След элемента (93). 3.5. Некоторые теоремы о K-пространствах с единицей (94). 3.6. Ограниченные элементы (97).

§ 4. Интегральное представление элементов 98

4.1. Характеристики (98). 4.2. Интегральное представление элементов (103).

§ 5. Непрерывные и дискретные пространства 104

5.1. Определения (104). 5.2. Свойства дискретных K-пространств (106). 5.3. Разложение произвольного K-пространства на дискретную и непрерывную компоненты (108).

Глава IV. **Расширение K-пространств** 109

§ 1. Построение K-пространства по заданной базе 109

1.1. Разложение элементов алгебры Буля (109). 1.2. Сходимость в множестве разложений (112). 1.3. Конечнозначные разложения единицы (116). 1.4. K-пространство разложений единицы (124). 1.5. База K-пространства Ω (129).

§ 2. Расширение K-пространств 133

2.1. Погружение произвольного K-пространства с единицей в K-пространство разложений единицы (133). 2.2. Расширенные K-пространства (138). 2.3. О неограниченных множествах в расширенных пространствах (142). 2.4. Расширение K-пространств (144).

§ 3. Непрерывные функции в K-пространствах 146

3.1. Определение и (o)-непрерывность функций (146). 3.2. Монотонные функции (149). 3.3. Умножение элементов в K-пространствах (152). 3.4. Степень и корень (156). 3.5. Однородные функции (157). 3.6. Интегральное представление функций (159).

§ 4. Расширение K-линеала 160

4.1. Погружение K-линеала в K-пространство (160).

Глава V. **Регулярные K-пространства** 163

§ 1. Основные свойства регулярных K-пространств 163

1.1. Аксиома регулярности (163). 1.2. Свойства предела в регулярных K-пространствах (164). 1.3. Соотношения между некоторыми свойствами предела (169). 1.4. K-пространства счётного типа (171).

§ 2. Некоторые условия регулярности K-пространств 178

2.1. Разложение и соединение регулярных K-пространств (178). 2.2. Некоторые условия регулярности K-пространств с единицей (181).

§ 3. K^+-пространства 186

3.1. Основные определения (186). 3.2. K^+-пространства счётного типа (187). 3.3. Регулярные K^+-пространства (189).

Глава VI. **K-пространства с метрической функцией и нормированные K-пространства** 191

§ 1. K-пространства с метрической функцией 191

1.1. Общие свойства K-пространств с метрической функцией (191). 1.2. KM-пространства (197). 1.3. Условия ограниченности множества в K-пространствах с метрической функцией (201). 1.4. Некоторые конкретные KM-пространства (204).

§ 2. Нормированные K-пространства 208

2.1. Линейные нормированные пространства (208). 2.2. KB-линеал (211). 2.3. K-пространства ограниченных элементов (212). 2.4. KB-пространства (215). 2.5. V-пространства (218). 2.6. Некоторые конкретные KB-пространства (220).

ЧАСТЬ II

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ В ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Глава VII. **Аддитивные операции** 228

§ 1. Регулярные операции 228

1.1. Общие определения (228). 1.2. Регулярные операции (231). 1.3. (o)-сходимость в K-пространстве регулярных операций (235). 1.4. Уточнение типа K-пространства H_γ в одном частном случае (236).

§ 2. Линейные операции 238

2.1. Классы непрерывных операций (238). 2.2. Класс H_t^t (240). 2.3. Класс H_0^0 (243). 2.4. Соотношения между классами H_0^0 и H_r (244). 2.5. Некоторые дополнения к предыдущим теоремам (249). 2.6. Операции класса H_0^0 в KB-пространствах (252). 2.7. Операции в K-пространствах ограниченных элементов (255). 2.8. Класс H_b^0 (255). 2.9. Класс H_t^0 (260).

§ 3. Мультипликативные операции 262

3.1. Класс H_m (263). 3.2. Некоторые свойства операций класса H_m (265). 3.3. Некоторые характеристические свойства проекторов (268).

Глава VIII. **Аналитическое представление линейных операций** . 271

§ 1. Общее интегральное представление линейных операций . . . 271

1.1. Регулярные операции в K-пространстве ограниченных элементов (271). 1.2. Линейные операции в произвольном K-пространстве с единицей (277). 1.3. Непрерывность интегральной операции (280). 1.4. Класс H_t^0 (284).

§ 2. Операции в пространстве M 285

2.1. Общие результаты в M (285). 2.2. Интеграл Хеллингера (290). 2.3. Представление операций класса H_0^0 посредством интеграла Хеллингера (295).

§ 3. Операции в пространствах L^p 300

3.1. Общее представление операций класса H_0^0 в L (300). 3.2. Отображение L в L^p $(p > 1)$ (307). 3.3. Операции класса H_0^0 в пространстве L^p $(p > 1)$ (310).

§ 4. Операции в пространстве C 313

4.1. Общая теорема об операциях класса H_b^0 (314).

§ 5. Операции в дискретных пространствах 317

5.1 Операции, заданные в дискретных пространствах (317). 5.2. Операции, заданные в l^p (320). 5.3. Операции со значениями в дискретных пространствах (324).

§ 6. Операции со значениями в L^p 327

6.1. Общие теоремы (327). 6.2. Операции со значениями в L^p $(p \geqslant 1)$ (330). 6.3. Операции в сепарабельных пространствах (330).

Глава IX. **Распространение линейных операций** 334

§ 1. Распространение операций класса H_b^o 334

1.1. Теорема о распространении операций с линейного множества (334). 1.2. Продолжение операций класса H_b^o (337). 1.3. Условия продолжимости операций с произвольного множества (338). 1.4. Системы элементов. Биортогональность (340). 1.5. Обобщённый предел (342).

§ 2. Теорема о распространении положительных операций. 344

2.1. Особенности продолжения положительных операций (344). 2.2. Наличие достаточного числа положительных функционалов и операций в KB-линеалах (346). 2.3. Сопряжённые пространства. Рефлексивность (347).

§ 3. Общие условия для возможности распространения операций класса H_b^b 350

3.1. Некоторые достаточные условия (350). 3.2. Пример операции, не допускающей распространения (354). 3.3. Некоторые необходимые условия для распространимости операций (355).

§ 4. Распространение операций класса H_o^o 361

4.1. Непрерывность одного класса положительных операций (361). 4.2. Распространение положительной операции на замыкание области её задания (364). 4.3. Замечания и дополнения к предыдущей теореме (371). 4.4. Применения к теории меры и интеграла (372). 4.5. Распространение функций множества (375).

§ 5. Проблема моментов 376

5.1. Постановка проблемы (376). 5.2. Применение теорем функционального анализа к общей проблеме моментов для конечного интервала (377). 5.3. Положительная проблема моментов (381). 5.4. Положительная проблема моментов для конечного интервала (385).

Глава X. **Последовательности линейных операций** 387

§ 1. Общие теоремы о сходимости последовательности операций . . 387

1.1. Ограниченные последовательности операций (387). 1.2. Условие (t)-ограниченности последовательности операций (388). 1.3. Теоремы о линейности предельной операции (390). 1.4. Условия сходимости последовательности операций (392).

§ 2. Некоторые теоремы о сходимости функционалов 396

2.1. Линейность предельного функционала (396). 2.2. Условия ограниченности и равностепенной непрерывности последовательности функционалов (398). 2.3. Функционалы в K-пространстве ограниченных элементов (401).

§ 3. Применения теорем о сходимости линейных операций 402

3.1. Операции со значениями в S (402). 3.2. Сходимость разностных отношений к производной (402). 3.3. Применение к ортогональным рядам (404).

Глава XI. **Вполне линейные функционалы и сопряжённые пространства** 406

§ 1. Вполне линейные функционалы 406

1.1. Основные свойства вполне линейных функционалов (406). 1.2. Элементы положительности и условия дизъюнктности вполне линейных функционалов (412). 1.3. K-пространства с достаточным числом вполне линейных функционалов (416). 1.4. О распространении вполне линейных функционалов (423).

§ 2. K-пространства, сопряжённые K-пространству ограниченных элементов 431

2.1. Первое сопряжённое пространство (431). 2.2. Линейные функционалы в KB-пространствах с нормой, аддитивной для положительных слагаемых (435). 2.3. Применения теорем об общем представлении (o)-линейных функционалов к конкретным пространствам (438). 2.4. Строение второго сопряжённого пространства (441).

§ 3. K-пространства с обобщённой аддитивной нормой. 444

3.1. Определение и основные свойства K-пространств с обобщённой аддитивной нормой (444). 3.2. Элементарные K-пространства (449).

Глава XII. **Функциональные уравнения** 454

§ 1. Пространства, нормированные элементами полуупорядоченного пространства, и операции в них 455

1.1. Пространства типа (B_K) (455). 1.2. Примеры пространств типа (B_K) (456). 1.3. Регулярные операции в пространствах типа (B_K) (458). 1.4. Непрерывность регулярных операций и функционалов в пространствах типа (B_K) (459). 1.5. Условие существования операции, обратной для данной регулярной (462).

§ 2. Метод последовательных приближений для нелинейных функциональных уравнений 464

2.1. Вспомогательная теорема об уравнениях в K-пространствах (464). 2.2. Теорема существования для уравнений в пространствах типа (B_K) (465). 2.3. Единственность решения (467). 2.4. Непрерывность решения (469).

§ 3. Случай линейных уравнений. Приближённое решение 470

3.1. Основные теоремы о линейных уравнениях (470). 3.2. Теоремы о приближённом решении функциональных уравнений (473).

§ 4. Некоторые применения к конечным алгебраическим системам 476

4.1. Оценки для наибольшего собственного значения матрицы (476). 4.2. Применение к системам нелинейных уравнений (479).

§ 5. Применения к бесконечным системам уравнений 480

5.1. Класс регулярных систем (480). 5.2. Другой класс линейных бесконечных систем (483). 5.3. Один класс нелинейных бесконечных систем уравнений (485).

§ 6. Применения к интегральным уравнениям 487

6.1. Условия существования решения линейного уравнения (487). 6.2. Уточнение области сходимости последовательных приближений (488). 6.3. Приближённое решение интегрального уравнения (492). 6.4. Нелинейное интегральное уравнение (493).

§ 7. Применения к обыкновенным дифференциальным уравнениям 495

7.1. Сходимость метода Пикара (495). 7.2. Применение метода мажорант (Коши) к установлению существования аналитического решения (497).

ДОПОЛНЕНИЕ

Глава XIII. **Конкретное представление K-пространств** 499

§ 1. Представление булевских алгебр 499

1.1. Единичные функции на булевской алгебре (499). 1.2. Краткие сведения из общей теории топологических пространств (502). 1.3. Реализация булевской алгебры в виде кольца множеств (504).

§ 2. Пространство непрерывных функций 509

2.1. Ограниченные непрерывные функции (509). 2.2. Неограниченные непрерывные функции (513). 2.3. (o)-сходимость в C_∞ (516).

§ 3. Конкретное представление K-пространств посредством непрерывных функций 519

3.1. Погружение произвольного K-пространства в пространство непрерывных функций (519). 3.2. Новые доказательства некоторых теорем (521).

§ 4. Конкретное представление K-пространств с обобщённой аддитивной нормой 522

4.1. Общее представление пространств с обобщённой аддитивной нормой (522). 4.2. Конкретное представление сепарабельных K-пространств с обобщённой аддитивной нормой (526).

Библиографические указания 533

Список цитированной литературы 542

Указатель 547

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга представляет собой первое монографическое изложение новой математической концепции — теории линейных полуупорядоченных пространств и операций в них, которую можно рассматривать как самостоятельную ветвь функционального анализа, связанную, впрочем, и с рядом других математических дисциплин. Этой теории, созданной около 15 лет тому назад и представляющей в основном продукт работы советских математиков, в настоящее время посвящено значительное число работ, благодаря которым она сильно развилась и получила разнообразные применения. Естественно прежде всего сказать о месте этой теории в современной математике.

В развитии математики, наряду с накоплением опыта и новых фактов, чрезвычайно велика роль абстракции и обобщений. Обычно она заключалась в том, что благодаря известному отвлечению удавалось объединить ряд вопросов, рассматривавшихся уже ранее в математике, в один и найти его общее решение. Это давало, в частности, решение всех отдельных задач того круга, который привёл к общей проблеме. Однако значение сделанного шага заключалось не столько в этом, так как решение для большинства частных задач было известно уже раньше, сколько в том, что эта новая постановка вопроса в такой степени упрощала и проясняла существо дела, что прежний круг задач становился достоянием школьной математики. Путь же, приведший к нахождению решения общего вопроса, открывал методы, позволявшие ставить и решать новые задачи, о которых раньше нельзя было и мечтать. Примеры подобных продвижений — введение буквенных обозначений и открытие анализа бесконечно малых. Благодаря последнему, задачи, решение которых в XVI—XVII веках было под силу лишь первым математикам того времени, теперь предлагаются на экзамене рядовому студенту.

Дальнейшие важные шаги на пути абстракции были сделаны в XIX веке; это прежде всего: неевклидова геометрия (Лобачевский), теория групп (Галуа) и теория множеств (Кантор). В результате этого всеобщее признание в математике получил аксиоматический метод, который состоит в том, что вместо изучения отдельных конкретных объектов (числа, матрицы, полиномы, функции) изучается абстрактное множество объектов, удовлетворяющих некоторым основ-

ным аксиомам — постулатам. Полученные для таких общих систем теоремы и построения могут затем самым различным образом применяться к разным конкретным объектам. Наиболее важные достижения на этом пути в XX веке: теория абстрактных пространств, современная алгебра (группы, кольца, поля), аксиоматическое построение теории вероятностей и, наконец, функциональный анализ.

Следует особо отметить значение функционального анализа, являющегося одной из наиболее центральных и многообещающих областей современной математики. Несмотря на недавнее возникновение этой области науки, она получила значительные применения во многих проблемах анализа. Необходимо подчеркнуть исключительное значение для оформления функционального анализа, как самостоятельной науки, теории нормированных пространств, созданной С. С. Банахом и его школой, а также новые направления в нём, возникшие благодаря работам советских математиков.

Применение функционального анализа позволяет, как правило, систематизировать и вскрыть смысл прежних результатов и построений классического анализа и при этом значительно их упростить. Вместе с тем обычно удаётся существенно расширить и углубить постановку проблем и добиться дальнейшего продвижения в них, т. е. наряду с систематизирующей и в известной степени уничтожающей, «обесценивающей» прежнее работой, без которой, однако, математика не могла бы двигаться вперёд, он одновременно осуществляет и большой созидательный труд.

В этом смысле роль функционального анализа по отношению к задачам классического анализа может быть сопоставлена в известной степени с той ролью, которую в своё время сыграли методы аналитической геометрии и дифференциального и интегрального исчисления по отношению к задачам геометрии кривых.

Применения функционального анализа в ранний период его развития относились преимущественно к вопросам теоретического характера. В настоящее время методы и идеи функционального анализа успешно и многообразно используются в теоретической и математической физике и в прикладной математике, в частности, в приближённых методах анализа. Таким образом функциональный анализ получает непосредственные практические приложения.

Перспективы развития функционального анализа огромны. На этом именно пути, по нашему мнению, следует ожидать в ближайшие десятилетия перестройки и перевооружения математического анализа.

Та ветвь функционального анализа, которая является предметом данной монографии, естественно возникла в связи с существенным пробелом, имевшимся в то время (1935 г.) в функциональном анализе, да, пожалуй, и во всей абстрактной математике.

Все общие образования, играющие основную роль в современной математике: группы, кольца, поля, метрические и топологические

пространства и т. д. можно рассматривать как известные обобщения множества вещественных чисел. Действительно, если мы рассмотрим основные свойства этого множества: 1) наличие алгебраических действий: сложение, умножение; 2) предельные отношения — непрерывность, расстояние; 3) расположение — порядок, то те или иные из этих свойств сохранились в каждом из этих абстрактных образований: в группах, кольцах, полях — первое, в топологических и метрических пространствах—второе, в топологических группах, линейных пространствах — и то и другое, в упорядоченных множествах — третье.

В последнем направлении (порядок) обобщение было явно недостаточным. В то время как важнейшие постоянно используемые в математике системы объектов: матрицы, полиномы, функции представляют собой как группы и кольца, так и топологические пространства, даже такие близкие к вещественным числам образования, как комплексные числа и векторы, не могут быть естественным образом упорядочены, и поэтому расположение для них обычно не вводилось.

Этот пробел в абстрактных построениях особенно остро ощущался в функциональном анализе. При конкретных рассмотрениях, важных для анализа линейных пространств функций и последовательностей, существенную роль играют понятия положительности, неравенства, положительной операции. Между тем эти понятия и связанные с ними факты не находили никакого отражения в теории нормированных пространств Банаха, что не позволяло охватить методами функционального анализа некоторые существенные вопросы анализа классического.

Как мы говорили, даже для векторов и функций нельзя ввести естественным образом расположение (понятие $>$, $<$), если требовать, чтобы, как и для вещественных чисел, из двух различных элементов один всегда был больше, другой — меньше. Однако эта трудность сразу снимается, если отказаться от этого требования и ограничиться частичным упорядочением. Естественно, например, для двух векторов считать, что один из них больше другого или равен ему, если все компоненты первого $\geqslant$ соответственных компонент второго, и не вводить для них никакого расположения, когда указанное обстоятельство не имеет места.

В связи с потребностями функционального анализа представлялось особенно существенным рассмотреть внесение частичного упорядочения в линейные множества. Это и привело к основному для всей рассматриваемой теории понятию линейного полуупорядоченного пространства (кратко называемого K-пространством). Так называется линейное множество, в котором определено понятие положительности для некоторых элементов так, что соблюдены обычные свойства неравенств, а также обеспечено существование точных границ у всякого ограниченного множества.

В таком пространстве само собой вводится понятие абсолютной величины, а также понятие сходимости. При этих определениях

K-пространство во многом близко по своим свойствам к множеству вещественных чисел, хотя и охватывает довольно разнообразные классы объектов — векторы, последовательности, различные классы функций и т. д. Следует сказать, что само понятие частично упорядоченной системы и родственные ему можно встретить в некоторых работах прежних лет. В первую очередь здесь нужно отметить общее понятие предела С. О. Шатуновского [1], определение структур Дедекинда [1], работы Буля [1, 2] по математической логике. Однако эти работы, а также их значение в общем развитии математики в момент их появления не были достаточно оценены. В дальнейшем (1934 — 1935) потребность в рассмотрении частично упорядоченных множеств и введении соотношений порядка в абстрактные системы возникла не только в функциональном анализе, но и в ряде других областей математики. Тогда были вновь установлены известные ранее факты и была начата интенсивная и широкая разработка этих понятий.

К этому именно времени относятся работы П. С. Александрова [1], введшего понятие дискретного пространства, по существу совпадающее с понятием структуры, и выяснившего его значение для топологии; работы А. Г. Куроша [1, 2] по теории разложений в структурах и работы В. И. Гливенко [1, 2] по изучению различных классов структур, в частности метрических, в связи с их возможными применениями в теории меры и теории вероятностей. Следует также сказать здесь о работах того же периода: М. Стона по булевским алгебрам и проблеме реализации их, И. Неймана по непрерывным геометриям, О. Оре — по применениям теории структур в алгебре, и, в особенности, Г. Биркгофа по различным проблемам теории структур. Последнему принадлежит и монография (см. Г. Биркгоф [4]), содержащая компактную сводку многих результатов в этой области и обзор связей её с другими вопросами.

В нашей монографии, однако, теория общих частично упорядоченных множеств и структур и её применения почти не находят места. Мы сосредоточиваем своё внимание на теории линейных полуупорядоченных множеств, поскольку именно она находит наибольшее применение в теории функций и функциональном анализе.

В этом направлении наиболее интенсивно шла работа в Ленинграде. В первых работах Л. В. Канторовича (1935—1936) дана аксиоматика линейного полуупорядоченного пространства (и более общих образований), установлены основные свойства таких пространств, введены и изучены их важнейшие частные виды: регулярные, с метрической функцией, нормированные, и построена теория линейных операций в этих пространствах. Эти работы были доложены на семинаре по функциональному анализу в Ленинградском университете, а затем (в 1936—1937 гг.) Л. В. Канторовичем был прочитан специальный курс: «Функциональный анализ на основе теории полуупорядоченных пространств», в результате чего к работе в этой области примкнул

ряд ленинградских математиков, в частности, два других автора данной монографии, А. И. Юдин, М. А. Явец и позднее Г. П. Акилов, А. Н. Балуев. Это привело к значительному расширению проблематики.

А. Г. Пинскер (1938) ввёл операцию расширения K-пространств и понятие частично аддитивного функционала, тесно связанное с понятием дизъюнктности элементов, широко использованным им в его дальнейших работах. Б. З. Вулихом (1940) была установлена возможность введения действия умножения в K-пространствах и введён класс мультипликативных операций: впоследствии оказалось возможным ввести не только произведение, но и любые функции элементов. Были изучены структура K-пространств, разложение их на компоненты, введены новые классы K-пространств (А. Г. Пинскер).

Наконец, глубокому исследованию подверглась проблема реализации частично упорядоченных пространств конкретными (векторными и функциональными) пространствами. Здесь работы ленинградских математиков смыкаются с работами одесской школы М. Г. Крейна.

В 1940 г. М. Г. Крейном и С. Г. Крейном [1] была установлена возможность реализации (при известных условиях) нормированного линейного полуупорядоченного множества непрерывными функциями. Отсюда, в частности, был вновь получен более ранний результат А. И. Юдина об изоморфизме конечномерного K-пространства с эвклидовым.

Дальше была рассмотрена проблема реализации нормированных K-пространств посредством измеримых функций и последовательностей (А. Г. Пинскер [5, 10], М. Г. Крейн и С. Г. Крейн [2], С. Какутани [1, 2]). Наконец, было получено общее представление K-пространств с помощью непрерывных функций, допускающих бесконечные значения (Б. З. Вулих [10]).

Следует указать, что ещё ранее, примерно с 1936 г., М. Г. Крейном изучались нормированные пространства с выделенным конусом положительных элементов. В этом направлении М. Г. Крейном и его учениками получен ряд важных и интересных результатов, нашедших разнообразные применения. Однако ввиду того, что эти исследования лежат в стороне от основного направления данной монографии, мы не ставим своей задачей их изложение. К тому же полное освещение этих вопросов дано в обзорной статье М. Г. Крейна и М. А. Рутмана [1] в «Успехах Математических наук».

Уже общая теория полуупорядоченных пространств получает ряд приложений в применении к конкретным функциональным пространствам (измеримых функций, функций ограниченного изменения), по-новому освещая известные факты и приводя к установлению ряда новых результатов. Однако наиболее плодотворно используется в различных приложениях теория линейных операций в K-простран-

ствах. Эта теория весьма существенно обогащает обычный линейный функциональный анализ, представляющий теорию линейных операций в нормированных пространствах, и благодаря этому значительно расширяется круг приложений функционального анализа к проблемам анализа классического.

Из наиболее важных особенностей этой теории следует отметить то, что в ней оказывается естественным рассмотрение нескольких классов линейных операций, лишь один из которых обычно совпадает с классом линейных операций Банаха. Очень важную роль в этой теории играет понятие положительной операции, которое в банаховской теории, естественно, отсутствует. Из приложений в самом функциональном анализе отметим, например, вопрос о распространении операций, где с помощью этих понятий возможно не только дать достаточные условия распространимости операций (Л. В. Канторович), что не удавалось в прежних терминах, но и установить невозможность распространения в ряде других случаев (Г. П. Акилов).

Новое понятие вполне линейного функционала (А. Г. Пинскер) способствует более глубокому изучению структуры K-пространств общего вида, а также сопряжённых пространств. Вопросы аналитического представления линейных операций рассмотрены в работах Л. В. Канторовича и Б. З. Вулиха. Эти работы тесно соприкасаются с исследованиями по аналитическому представлению операций и функционалов в нормированных и сходимостных пространствах (Г. М. Фихтенгольц, И. М. Гельфанд и др.).

Из приложений к анализу отметим, например, весьма простой путь получения теорем о проблеме моментов, доказательство которых в своё время представляло большие трудности, а также приложения к теории функций множеств.

В применении к функциональным уравнениям (Л. В. Канторович) теория полуупорядоченных пространств приводит к возможности дать абстрактную трактовку метода мажорант — одного из классических методов для установления существования решения. В результате применения найденных общих теорем удаётся получать новые, а также и ранее известные предложения о существовании, единственности и непрерывности решений дифференциальных и интегральных уравнений. Абстрактная трактовка метода может быть использована также в вопросах приближённого решения уравнений. В частности, использование в оценках вместо вещественных чисел элементов подходящим образом выбранного K-пространства позволяет уточнить границы сходимости метода последовательных приближений и оценки для первого собственного числа задачи. Таким образом, в этих вопросах теория K-пространств оказывается связанной с непосредственными практическими приложениями.

В данной монографии не рассмотрены некоторые вопросы нелинейного анализа (например, теория частично аддитивных и дизъюнкт-

ных операций), вопросы топологического характера (различные топологизации K-пространства, топологические полуупорядоченные группы), а также теория полуупорядоченных групп и других образований, близких к K-пространствам, по которым уже имеются развёрнутые исследования, частично опубликованные.

Мы не отразили также применений теории K-пространств к тем областям, в которых эти применения не получили ещё окончательной формы, как, например, к обоснованию теории вероятностей, к эргодической теории, а также к теории операторов в пространстве Гильберта.

Можно ожидать, что при своем дальнейшем развитии теория K-пространств найдёт использование и в различных других областях математики, как, например, общей теории групп, теории колец, дескриптивной теории множеств и др.

Мы надеемся, что появление данной монографии будет способствовать как дальнейшей разработке самой теории, так и более широкому её использованию в разнообразных вопросах математики.

Мы сочли целесообразным считать читателя книги знакомым с общим курсом теории функций вещественной переменной. Однако для многих её фактов в книге указывается путь их получения из общих предложений теории K-пространств.

Что касается функционального анализа, то здесь не предполагаются какие-либо познания читателя в этой области. Те сравнительно немногие факты теории нормированных пространств, которые используются, либо важны для общей связи, даются в обычном изложении, или получаются как частные случаи более общих построений. В результате данная книга может рассматриваться как своеобразный, но независимый курс функционального анализа, не включающий, впрочем, ряда его важных разделов.

Первая часть книги (главы I — VI) посвящена теории самих пространств, вторая часть (главы VII — XII) — теории функциональных операций и функциональных уравнений. Особняком стоит глава XIII, посвящённая проблемам реализации.

Читатель, желающий ознакомиться лишь с основными фактами теории K-пространств и её приложений, может пропустить петит и полностью главы IV, XI и XIII, которые не используются в крупном шрифте других глав.

Читатель, интересующийся преимущественно теорией операций и её приложениями к анализу и уже знакомый с элементами функционального анализа, может из общей теории K-пространств ограничиться главами I, V (пункты 1.1, 1.2 и 3.1) и VI (крупный шрифт, за исключением пунктов 1.3 и 2.3). Это даст ему возможность перейти к интересующим его вопросам из глав VII, IX, X и XII.

Литературные указания в самом тексте книги сведены к минимуму, в частности в них отсутствуют указания на работы авторов книги.

Основные данные о литературе содержатся в библиографических указаниях, помещённых в конце книги.

В книге внутри главы принята десятичная нумерация для параграфов, номеров и отдельных предложений. При ссылке на предложение, находящееся в пределах той же главы, номер главы не указывается.

Авторы выражают сердечную признательность своему общему учителю, профессору Г. М. Фихтенгольцу, привлекшему их внимание к вопросам функционального анализа, способствовавшему развитию теории полуупорядоченных пространств и проявлявшему постоянный интерес к их работе. Ряд ценных советов проф. Г. М. Фихтенгольца использован нами при составлении настоящей книги.

Существенную помощь при написании глав IX и XII оказал нам Г. П. Акилов. Д. А. Райков внимательно прочитал всю рукопись и сделал большое количество важных замечаний, которые учтены нами при окончательном редактировании книги. Выражаем Г. П. Акилову и Д. А. Райкову свою глубокую благодарность.

Также благодарим А. Н. Балуева, И. П. Мысовских, Г. Ш. Рубинштейна и М. Ф. Широхова, принявших участие в чтении корректур.

ЧАСТЬ I
ТЕОРИЯ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

ГЛАВА I
ЛИНЕЙНЫЕ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА (K-ПРОСТРАНСТВА)

В первой главе даётся определение основного объекта, изучаемого в настоящей книге, — K-пространства — и устанавливается ряд его общих свойств.

§ 1. Определение K-пространства и его основные свойства

1.1. Линейное множество. В различных вопросах математики фундаментальное значение имеет понятие линейного множества. Это есть группа, в которой основная групповая операция называется сложением и где дополнительно определена операция умножения элементов группы на числа, причём оба эти действия подчинены обычным законам алгебры. Примером линейного множества является множество векторов n-мерного пространства с обычным определением действий. Дадим точное определение.

Пусть X — некоторое множество, в котором определены понятия суммы для любых двух его элементов и произведения любого элемента на вещественное число, не выводящие за пределы множества X. Условимся обозначать латинскими буквами x, y, z,... элементы из X, а греческими α, β, γ,... — вещественные числа. Предположим, что эти действия удовлетворяют следующим условиям:

1) $x+y=y+x$ (коммутативность сложения).

2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (ассоциативность сложения).

3) Существует элемент $\mathbf{0}$, называемый нулевым, такой, что $0x=\mathbf{0}$ для любого x.

4) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ } (дистрибутивность умножения относительно сложения).
5) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ }

6) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$ (ассоциативность умножения).

7) $1x=x$.

При этих условиях множество X называется *линейным*.

Если X — произвольное множество, то определение в нём действий сложения и умножения, удовлетворяющих перечисленным условиям 1) — 7), называется *линеаризацией* множества X.

Выведем некоторые простые следствия из перечисленных условий. Прежде всего отметим, что

$$x + \mathbf{0} = 1x + 0x = (1 + 0)\,x = x.$$

8) Введём элемент $-x$, полагая

$$-x = (-1)\,x.$$

Тогда

$$x + (-x) = (1 - 1)x = 0x = \mathbf{0}.$$

9) Теперь в X можно определить однозначное действие вычитания, обратное сложению, именно, полагая

$$x - y = x + (-y).$$

Тогда

$$(x - y) + y = [x + (-y)] + y = x + [(-y) + y] = x + \mathbf{0} = x.$$

С другой стороны, если $x = y + z$, то $z = x - y$. Действительно,

$$x - y = x + (-y) = [(-y) + y] + z = \mathbf{0} + z = z.$$

Таким образом, если линейное множество рассматривать как группу относительно операции сложения, то нулевой элемент будет служить единицей группы.

10) Если $\alpha x = \mathbf{0}$, причём $\alpha \neq 0$, то $x = \mathbf{0}$.

Действительно (по условиям 7), 6) и 3))

$$x = 1\,x = \left(\frac{1}{\alpha}\,\alpha\right)\,x = \frac{1}{\alpha}(\alpha x) = \mathbf{0}\ ^{*)}.$$

11) Если $\alpha x = \alpha y$, причём $\alpha \neq 0$, то $x = y$.

В самом деле, $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y = \mathbf{0}$ и на основании предыдущего результата отсюда следует, что $x - y = \mathbf{0}$, т. е. $x = y$.

12) Если $\alpha x = \beta x$, причём $\alpha \neq \beta$, то $x = \mathbf{0}$.

Действительно, $(\alpha - \beta)\,x = \alpha x - \beta x = \mathbf{0}$, а тогда, по 10), $x = \mathbf{0}$.

13) Если $\alpha x = \mathbf{0}$, причём $x \neq \mathbf{0}$, то $\alpha = 0$.

Следует прямо из 10).

14) Если $\alpha x = \alpha y$, причём $x \neq y$, то $\alpha = 0$.

Следует непосредственно из 11).

1.2. K-пространство. Пусть в линейном множестве X для некоторых его элементов определено соотношение $x > \mathbf{0}$ (x больше нуля). На основании этого соотношения вводится также соотношение $x > y$ (x больше y), которое по определению означает, что $x - y > \mathbf{0}$. Далее, как обычно, будем писать $x \geqslant y$, если $x > y$ или $x = y$, и $x < y$ (соответственно $x \leqslant y$), если $y > x$ (соответственно $y \geqslant x$).

---

*) Ясно, что $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ при любом α. Действительно, $\mathbf{0} = 0x$, а тогда $\alpha\mathbf{0} = (\alpha 0)\,x = 0x = \mathbf{0}$.

Будем предполагать, что при этом в X выполнены перечисленные ниже пять аксиом.

Аксиома I. Соотношение $x > \mathbf{0}$ исключает $x = \mathbf{0}$.

Аксиома II. Если $x > \mathbf{0}$ и $y > \mathbf{0}$, то $x + y > \mathbf{0}$.

Аксиома III. Для любого $x \in X$ существует элемент $y \geqslant \mathbf{0}$ такой, что $y \geqslant x$.

Аксиома IV. Если $x > \mathbf{0}$ и $\alpha > 0$, то $\alpha x > \mathbf{0}$.

Прежде чем формулировать аксиому V, введём некоторые определения.

Пусть $E \subset X$ — некоторое подмножество множества X. Если все элементы из E меньше или равны некоторому элементу $y \in X$, то y называется верхней границей множества E, и говорят, что множество E *ограничено сверху*. Аналогично определяется ограниченность снизу. Если множество ограничено и сверху и снизу, то оно называется просто *ограниченным*.

Может оказаться, что среди всех верхних границ ограниченного сверху множества $E = \{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ *) существует наименьшая, т. е. такой элемент $z \in X$, который является верхней границей для E, причём если y — любая верхняя граница для E, то $z \leqslant y$. Такая наименьшая из верхних границ обозначается $\sup E$ или $\sup\limits_{\xi \in \Xi} x_\xi$ и называется *точной верхней границей* или просто *верхней гранью* **). Аналогично, если для множества E, ограниченного снизу, имеется наибольшая из нижних границ, то она обозначается $\inf E = \inf\limits_{\xi} x_\xi$ (*точная нижняя граница* или просто *нижняя грань*).

Для множества, состоящего из конечного числа элементов, мы чаше будем писать вместо $\sup(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\inf(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ соответственно

$$x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n \text{ и } x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n.$$

Аксиома V. Для всякого ограниченного сверху множества $E \subset X$ существует верхняя грань $\sup E$.

Линейное множество X, в котором выполнены все перечисленные аксиомы, называется *линейным полуупорядоченным пространством* или *K-пространством*. Пространства такого типа и представляют основной объект изучения в настоящей монографии.

В K-пространстве элемент x называется *положительным*, если $x \geqslant \mathbf{0}$. Элемент x называется *отрицательным*, если $x \leqslant \mathbf{0}$. Иногда в случае $x > \mathbf{0}$ $(x < \mathbf{0})$ мы называем x *существенно положительным (отрицательным)*. Отметим, что если $x \geqslant \mathbf{0}$, то $-x \leqslant \mathbf{0}$. Из наших аксиом не следует, что для любого x обязательно выполнение по крайней мере одного из соотношений $x \geqslant \mathbf{0}$ или $x \leqslant \mathbf{0}$, т. е.

*) Ξ — произвольное множество индексов ξ.

**) Обращаем внимание читателя на то, что термин «грань» мы употребляем не как синоним границы, а как сокращённое наименование для *точной* границы.

могут существовать элементы, «не сравнимые» с нулём, а следовательно, и элементы, «не сравнимые» друг с другом. Этим K-пространство в общем случае существенно отличается от множества, упорядоченного полностью. Отсюда и происходит термин «*полу*упорядоченное».

Приведём некоторые примеры. При этом здесь мы ограничимся лишь самыми элементарными примерами, а более содержательные будут разобраны ниже.

Примером K-пространства, упорядоченного полностью, может служить множество R_1 всех вещественных чисел, упорядоченное по их величине, в котором сложение и умножение имеют обычный смысл. В R_1 соотношение порядка определено для любых двух элементов. Легко видеть, что других K-пространств, упорядоченных полностью, существенно отличных от R_1, не существует.

1.21. R_n — n-мерное эвклидово пространство, т. е. множество элементов вида $x=(x_1 \ldots, x_n)$, где $x_1, \ldots, x_n$ — любые вещественные числа. Сложение и умножение в R_n определяется по формулам

$$x+y=(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n),$$
$$\alpha x=(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n),$$

откуда видно, что R_n есть линейное множество. Упорядочение вводится так: $x>\mathbf{0}$, если $x_i \geqslant 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и $x_i>0$ хоть при одном i. Выполнение всех аксиом K-пространства проверяется без труда. Верхняя и нижняя грани вычисляются по координатам.

1.22. F — множество всех вещественных функций $x(t)$, заданных на произвольном множестве $T=\{t\}$. Линеаризуем множество F так: если x есть функция $x(t)$, а y есть функция $y(t)$, то $x+y$ есть сумма этих функций, т. е. $(x+y)(t)=x(t)+y(t)$; $(\alpha x)(t)=\alpha x(t)$. Упорядочение определим так: $x>\mathbf{0}$ означает, что $x(t) \geqslant 0$ при всех t и $x(t) \not\equiv 0$. Тогда F — K-пространство. Грани вычисляются по точкам, т. е. $y=\sup\limits_{\xi} x_\xi$ определяется так: при всех t

$$y(t)=\sup_{\xi} x_\xi(t).$$

1.3. Простейшие следствия из аксиом K-пространства. В этом n° мы выведем ряд непосредственных следствий из аксиом K-пространства. Из них наиболее существенными являются: ограниченность всякого конечного множества (1.35), формула 1.34, устанавливающая возможность перехода во многих рассуждениях от нижней грани к верхней и ассоциативный закон для граней (1.36 d)). Кроме того, для некоторых дальнейших обобщений понятия K-пространства важное значение имеет принцип Архимеда, согласно которому множество элементов вида nx $(x \neq \mathbf{0})$ не ограничено. В настоящем n° это предложение доказывается для $x>\mathbf{0}$, а для любого x обобщается ниже (1.54).

1.31. Соотношения $x > y$, $x < y$ и $x = y$ взаимно исключают друг друга.

Доказательство. Тот факт, что первое и второе соотношения несовместимы с третьим, сразу вытекает из аксиомы I. Чтобы убедиться в несовместимости первых двух неравенств, достаточно показать, что если $x > \mathbf{0}$, то невозможно одновременно $-x > \mathbf{0}$. Но действительно, в противном случае мы бы получили по аксиоме II $\mathbf{0} = x + (-x) > \mathbf{0}$, а это противоречит аксиоме I.

Из доказанного предложения сразу вытекает, что верхняя грань всякого ограниченного сверху множества, существование которой постулировано в аксиоме V, единственна.

1.32. a) Если $x \geqslant y$ и $y \geqslant z$, то $x \geqslant z$.

b) Если $x > y$, то $-x < -y$.

c) Если $x > y$, а $z \geqslant u$, то $x + z > y + u$.

Доказательство. a) и c) следуют сразу из аксиомы II, b) — из определения разности.

1.33. Если множество $E \subset X$ ограничено снизу, то оно имеет нижнюю грань ($\inf E$).

Доказательство. Пусть y — нижняя граница множества E, т. е. $x \geqslant y$ для всех $x \in E$. Тогда $-x \leqslant -y$, т. е. $-y$ есть верхняя граница для множества $E^- = \{-x\}$ $(x \in E)$. По аксиоме V существует $\sup E^- = z$. Покажем, что $-z = \inf E$. Действительно, на основании 1.32 b) $x \geqslant -z$ для любого $x \in E$. С другой стороны, если y — какая-нибудь нижняя граница множества E, то $-y$ — верхняя граница множества E^- и по определению $z \leqslant -y$, следовательно, $-z \geqslant y$. Тем самым $-z = \inf E$.

Единственность нижней грани очевидна.

1.34. Попутно мы доказали формулу, которой нам придётся весьма часто пользоваться:

$$\inf_{\xi \in \Xi} \{x_\xi\} = -\sup_{\xi \in \Xi} \{-x_\xi\} \tag{1}$$

(Ξ — произвольное множество индексов ξ), причём если имеет смысл одна из частей равенства, то имеет смысл и другая.

Благодаря формуле (1) многие соотношения для верхней и нижней граней имеют дуальный характер и доказательство одних сводится к доказательству других.

1.35. Любое конечное множество элементов $x_i \in X$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ограничено.

Доказательство. По аксиоме III для каждого i существует $y_i \geqslant \mathbf{0}$ такой, что $y_i \geqslant x_i$. Но тогда подавно при любом i $x_i \leqslant y_1 + y_2 + \ldots + y_n$, следовательно, множество элементов x_i ограничено сверху, т. е. наличие верхней границы у произвольного конечного множества установлено. На основании 1.34 из ограниченности сверху множества $\{-x_1, -x_2, \ldots, -x_n\}$ следует ограниченность снизу множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Замечание. Если $x_i \leqslant x_i'$ $(i=1, \ldots, n)$, то

$$x_1 \vee \ldots \vee x_n \leqslant x_1' \vee \ldots \vee x_n'.$$

1.36. a) Если E — не пустое ограниченное множество, то

$$\sup E \geqslant \inf E.$$

b) Если $E_1 \supset E_2$ и E_1 ограничено сверху, то

$$\sup E_1 \geqslant \sup E_2.$$

c) При любом x и для любого ограниченного сверху множества $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$

$$x + \sup_\xi x_\xi = \sup_\xi (x_\xi + x).$$

d) Пусть $E = \bigcup_{\eta \in H} E_\eta$ *) и E ограничено сверху; тогда

$$\sup E = \sup_{\eta \in H} [\sup E_\eta]$$

(ассоциативный закон для верхней грани).

e) Если два множества E_1 и E_2 удовлетворяют условию: $x \leqslant y$, для любых $x \in E_1$ и $y \in E_2$, то

$$\sup E_1 \leqslant \inf E_2.$$

Доказательство. a) и b) очевидны.

c) Пусть $y = \sup x_\xi$. Тогда при любом $\xi \in \Xi$ $x_\xi + x \leqslant x + y$, следовательно, $z = \sup (x_\xi + x) \leqslant x + y$. Обратно, из неравенства $x_\xi + x \leqslant z$ следует $x_\xi \leqslant z - x$ при любом $\xi \in \Xi$, откуда $y = \sup x_\xi \leqslant z - x$ или $x + y \leqslant z$. Сопоставляя полученные соотношения, заключаем, по 1.31, что $x + y = z$, ч. и. тр. д.

d) Очевидно $\sup E \geqslant \sup E_\eta$ при любом η, откуда $\sup E \geqslant \sup_{\eta \in H} [\sup E_\eta]$. С другой стороны, для каждого $x \in E$ существует индекс $\eta \in H$ такой, что $x \in E_\eta$; а тогда $x \leqslant \sup E_\eta$ и, следовательно,

$$\sup E \leqslant \sup_{\eta \in H} (\sup E_\eta).$$

Отсюда и вытекает требуемое равенство.

e) Очевидно.

Соотношения, аналогичные соотношениям b), c) и d), имеют место и для нижней грани (см. 1.34).

Замечание. Доказанными правилами оперирования с точными гранями часто приходится пользоваться и для конечных групп элементов. Например, из c) и d) получаем:

$$x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z);$$
$$x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z);$$
$$(x \vee y) \vee (x \vee z) = x \vee y \vee z.$$

---

*) Мы пользуемся следующими теоретико-множественными обозначениями: $\bigcup$ — сумма, $\bigcap$ — пересечение, Λ — пустое множество.

1.37. Справедливы обычные правила умножения неравенств:

a) Если $x>y$ и $\alpha>0$ (α — вещественное число), то $\alpha x>\alpha y$.

b) Если $\alpha>\beta$ и $x>\mathbf{0}$, то $\alpha x>\beta x$.

c) Если $x>\mathbf{0}$ и $\alpha<0$, то $\alpha x<\mathbf{0}$.

d) Если $x<\mathbf{0}$, $\alpha>0$, то $\alpha x<\mathbf{0}$.

e) Если $x<\mathbf{0}$, $\alpha<0$, то $\alpha x>\mathbf{0}$.

Доказательство. a) и b) очевидны в силу аксиомы IV.

c) $-\alpha x=(-\alpha)x>\mathbf{0}$. Следовательно, $\alpha x<\mathbf{0}$.

d) $-\alpha x=\alpha(-x)>\mathbf{0}$. Следовательно, $\alpha x<\mathbf{0}$.

e) $\alpha x=(-\alpha)(-1)x=(-\alpha)(-x)>\mathbf{0}$.

1.38. Если $x>\mathbf{0}$, то множество $\{nx\}$ ($n=1,2,\ldots$), не ограничено. (Принцип Архимеда.)

Доказательство. Допустим, что $nx\leqslant y$ ($n=1,2,\ldots$) и $z=\sup nx$.

Тогда при любом n $(n+1)x\leqslant z$, следовательно, $nx\leqslant z-x$, откуда $z\leqslant z-x$, т. е. $x\leqslant\mathbf{0}$, что противоречит условию $x>\mathbf{0}$.

Как мы увидим ниже, доказанный сейчас принцип Архимеда является одним из существенных свойств K-пространств.

1.39. Справедливы следующие правила вынесения постоянного множителя за знак точных граней:

a) Пусть множество $\{x_\xi\}$ ($\xi\in\Xi$) ограничено сверху и $\alpha>0$, тогда

$$\alpha\sup_\xi x_\xi=\sup_\xi(\alpha x_\xi).$$

b) Если $\alpha<0$, то $\alpha\sup\limits_\xi x_\xi=\inf\limits_\xi(\alpha x_\xi)$.

c) Пусть $\{\alpha_\xi\}$ ($\xi\in\Xi$) — множество вещественных чисел, ограниченное сверху, и $x>\mathbf{0}$. Тогда $x\sup\limits_\xi\alpha_\xi=\sup\limits_\xi(\alpha_\xi x)$.

Из каждого из этих соотношений легко следует дуальное, получающееся в результате замены sup на inf и наоборот.

Доказательство. a) Пусть $x=\sup x_\xi$. Тогда $\alpha x_\xi\leqslant\alpha x$ при любом $\xi\in\Xi$, следовательно, $y=\sup(\alpha x_\xi)\leqslant\alpha x$. Обратно, из неравенства $\alpha x_\xi\leqslant y$ следует $x_\xi\leqslant\frac{1}{\alpha}y$ при любом $\xi\in\Xi$, следовательно, $x\leqslant\frac{1}{\alpha}y$, откуда $\alpha x\leqslant y$. А это вместе с ранее полученным обратным соотношением и даёт $\alpha x=y$.

b) $\alpha\sup x_\xi=\alpha[-\inf(-x_\xi)]=(-\alpha)\inf(-x_\xi)=$
$=\inf[(-\alpha)(-x_\xi)]=\inf(\alpha x_\xi)$.

c) Пусть $\alpha=\sup\alpha_\xi$. Тогда $\alpha_\xi x\leqslant\alpha x$ при любом $\xi\in\Xi$, следовательно, $y=\sup(\alpha_\xi x)\leqslant\alpha x$. С другой стороны, при любом $n=1,2,\ldots$ найдётся $\alpha_\xi\geqslant\alpha-\frac{1}{n}$, следовательно,

$$\left(\alpha-\frac{1}{n}\right)x\leqslant y\leqslant\alpha x,$$

т. е. $\alpha x - y \leqslant \frac{1}{n} x$ при любом n или $n(\alpha x - y) \leqslant x$. А тогда, по 1.38, $\alpha x - y = \mathbf{0}$, т. е. $y = \alpha x$, ч. и тр. д.

Для того, чтобы распространить понятие точных граней на неограниченные множества, присоединим к K-пространству два новых «идеальных» элемента $+\infty$ и $-\infty$, подчинённые следующим соотношениям:

a) $-\infty < x < +\infty$ для всех $x \in X$;
b) $(+\infty) + x = +\infty$ для всех $x \in X$;
c) $(-\infty) + x = -\infty$ для всех $x \in X$;
d) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$;
e) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$;
f) $(+\infty) + (-\infty)$ не имеет смысла;
g) $-(+\infty) = -\infty$;
h) $-(-\infty) = +\infty$;
i) если $\alpha > 0$, то $\alpha(+\infty) = +\infty$, $\alpha(-\infty) = -\infty$;
j) если $\alpha < 0$, то $\alpha(+\infty) = -\infty$, $\alpha(-\infty) = +\infty$;
k) $0(+\infty)$ и $0(-\infty)$ не имеют смысла.

Тогда для неограниченного сверху множества $E \subset X$ условимся считать $\sup E = +\infty$, а для неограниченного снизу $\inf E = -\infty$. Кроме того, если в число элементов некоторого множества E, кроме собственных элементов $x \in X$, входит $+\infty$, то считаем $\sup E = +\infty$, а если входит $-\infty$, то считаем $\inf E = -\infty$.

При таких условиях результаты, установленные выше в 1.33, 1.34, 1.36 и 1.39a)—b), остаются верными и для неограниченных множеств *).

В дальнейшем, если X — K-пространство, и если не сделано никаких оговорок, то соотношение $x \in X$ означает, что x — конечный (собственный) элемент из X.

1.4. Дальнейшие следствия из аксиом. Установим ещё некоторые результаты, часто применяемые в дальнейшем, в первую очередь одну из основных формул:

1.41. $x + y = (x \vee y) + (x \wedge y)$.

Доказательство. Применяя 1.34 и 1.36c), получаем:

$$x - (x \vee y) = x + [(-x) \wedge (-y)] = \mathbf{0} \wedge (x - y) = (y \wedge x) - y,$$

откуда и следует требуемое равенство.

1.42. Возможность двойного разбиения элементов. Пусть

$$x = y + z, \quad y \geqslant \mathbf{0}, \quad z \geqslant \mathbf{0}$$

---

*) Например, 1.33 превращается в следующее предложение: всякое множество имеет нижнюю грань.

и пусть, с другой стороны,

$$x = x_1 + \ldots + x_n, \text{ где } x_i \geqslant \mathbf{0}.$$

Тогда каждый x_i можно представить в виде $x_i = y_i + z_i$, где $y_i \geqslant \mathbf{0}$, $z_i \geqslant \mathbf{0}$, таким образом, что

$$y = y_1 + \ldots + y_n, \; z = z_1 + \ldots + z_n.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что если $x_1 + \ldots + x_n \geqslant y \geqslant \mathbf{0}$ и $x_i \geqslant \mathbf{0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то можно найти y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ так, что $\mathbf{0} \leqslant y_i \leqslant x_i$ и $y_1 + \ldots + y_n = y$. Если это уже доказано, то остаётся положить $z_i = x_i - y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Доказательство проведём по индукции. Для $n = 1$ наше утверждение очевидно. Допустим, что оно доказано для некоторого n, и докажем, что оно остаётся верным при замене n на $n + 1$. Положим $y_{n+1} = x_{n+1} \wedge y$. Тогда

$$x_1 + \ldots + x_n = x - x_{n+1} = \mathbf{0} \vee (x - x_{n+1}) \geqslant \mathbf{0} \vee (y - x_{n+1}) =$$
$$= y + [(-y) \vee (-x_{n+1})] = y - (y \wedge x_{n+1}) = y - y_{n+1} \geqslant \mathbf{0}.$$

Таким образом имеем:

$$\mathbf{0} \leqslant y - y_{n+1} \leqslant x_1 + \ldots + x_n \quad \text{и} \quad y_{n+1} \leqslant x_{n+1}.$$

Тогда, по предположению индукции, существуют такие элементы $y_1, \ldots, y_n$, что $\mathbf{0} \leqslant y_i \leqslant x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $y_1 + \ldots + y_n = y - y_{n+1}$, и наше утверждение, а вместе с ним и 1.42 в целом доказаны.

Замечание. Доказанное предложение 1.42 легко обобщается на случай разбиения x на любое конечное число слагаемых, а именно: пусть

$$x = x^{(1)} + \ldots + x^{(m)}, \text{ где } x^{(k)} \geqslant \mathbf{0} \quad (k = 1, \ldots, m),$$

и пусть, с другой стороны,

$$x = x_1 + \ldots + x_n, \text{ где } x_i \geqslant \mathbf{0} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда каждое x_i можно представить в виде

$$x_i = x_i^{(1)} + \ldots + x_i^{(m)} \text{ где } x_i^{(k)} \geqslant \mathbf{0} \; (i = 1, 2, \ldots, n; \; k = 1, 2, \ldots, m),$$

таким образом, что

$$x^{(k)} = x_1^{(k)} + \ldots + x_n^{(k)} \text{ при всех } k = 1, \ldots, m.$$

При $m = 2$ это предложение уже доказано, а переход к любому m совершается очевидным способом по индукции.

1.43. Если $x \geqslant \mathbf{0}$, $y \geqslant \mathbf{0}$ и $z \geqslant \mathbf{0}$, то $(x + y) \wedge z \leqslant (x \wedge z) + (y \wedge z)$.

Доказательство. Положим $u=(x+y)\wedge z$. Тогда $u\leqslant x+y$. На основании 1.42 (при $n=2$) u можно представить в виде $u=v+w$, где $\mathbf{0}\leqslant v\leqslant x$, $\mathbf{0}\leqslant w\leqslant y$. С другой стороны, $v, w\leqslant u\leqslant z$. Тогда $v\leqslant x\wedge z$, $w\leqslant y\wedge z$, откуда и следует доказываемое соотношение.

1.44. Если $x\wedge z=y\wedge z=\mathbf{0}$, то $(x+y)\wedge z=\mathbf{0}$.

Это есть непосредственное следствие из 1.43, так как $x, y, z\geqslant\mathbf{0}$.

1.5. Положительная и отрицательная части элемента и его модуль. Дистрибутивный закон.

Введём некоторые основные определения.

Положительной частью элемента $x\in X$ называется элемент

$$x_+=x\vee\mathbf{0}.$$

Существование такого элемента следует из 1.35 и аксиомы V.

Отрицательной частью элемента x называется элемент

$$x_-=(-x)_+=(-x)\vee\mathbf{0}=-(x\wedge\mathbf{0}).$$

Модулем элемента x называется элемент

$$|x|=x_++x_-.$$

Иногда нам будет удобно в обозначении положительной и отрицательной частей ставить $+$ и $-$ сверху: x^+, x^-.

Непосредственно из определения вытекает, что

$$x_+\geqslant\mathbf{0},\quad x_-\geqslant\mathbf{0},\quad |x|\geqslant\mathbf{0},\quad x_+=(-x)_-,\quad x_+\geqslant x.$$

При этом x_+ — наименьший положительный элемент, который больше или равен x.

Мы докажем ряд предложений, связанных с введёнными понятиями. Именно, мы установим, что каждый элемент представляется в виде разности своих положительной и отрицательной частей (1.51a)), а также установим ряд свойств модуля, аналогичных свойствам абсолютной величины вещественного числа (1.52). Фундаментальное значение имеет «дистрибутивный закон» для граней (1.56).

1.51. a) $x_+-x_-=x$.

b) $(x+y)_+\leqslant x_++y_+$; $(x+y)_-\leqslant x_-+y_-$.

c) Если $\alpha>0$, то $(\alpha x)_+=\alpha x_+$, $(\alpha x)_-=\alpha x_-$.

d) $x_+\wedge x_-=\mathbf{0}$.

Доказательство. a) Имеем

$$x_+-x_-=(x\vee\mathbf{0})-[(-x)\vee\mathbf{0}]=(x\vee\mathbf{0})+(x\wedge\mathbf{0})=x+\mathbf{0}=x$$

(см. 1.41).

b) Имеем $x\leqslant x_+$, $y\leqslant y_+$, откуда $x+y\leqslant x_++y_+$ (см. 1.32c)). Так как, кроме того, $x_++y_+\geqslant\mathbf{0}$, то $(x+y)_+\leqslant x_++y_+$.

Используя доказанное, получаем:

$$(x+y)_-=(x+y)_+-(x+y)\leqslant(x_+-x)+(y_+-y)=x_-+{}_-y.$$

c) С помощью 1.39a) имеем:

$$(\alpha x)_+ = \alpha x \vee \mathbf{0} = \alpha(x \vee \mathbf{0}) = \alpha x_+;$$
$$(\alpha x)_- = (-\alpha x)_+ = \alpha(-x)_+ = \alpha x_-.$$

d) Пусть $y = x_+ \wedge x_-$. Значит, $y \geqslant \mathbf{0}$. Положим $z_1 = x_+ - y$, $z_2 = x_- - y$. Тогда $x = z_1 - z_2$ и $z_1, z_2 \geqslant \mathbf{0}$. Следовательно, $z_1 \geqslant x$, т. е. $z_1 \geqslant x \vee \mathbf{0} = x_+$. Это означает, что $y = x_+ - z_1 \leqslant \mathbf{0}$. Вместе с предыдущим это даёт $y = \mathbf{0}$, ч. и тр. д.

1.52. a) $|x| \geqslant x$, $|x| \geqslant -x$.

b) $|-x| = |x|$.

c) $|x| = \mathbf{0}$ только в том случае, когда $x = \mathbf{0}$.

d) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

e) $|\alpha x| = |\alpha|\,|x|$.

f) $|x| = x \vee (-x)$.

g) $|x| = x_+ \vee x_-$.

h) $||x| - |y|| \leqslant |x-y|$.

i) Если $y \leqslant x \leqslant z$, то $|x| \leqslant |y| \vee |z|$.

k) $|x-y| = (x \vee y) - (x \wedge y)$.

Доказательство. a) $|x| = x_+ + x_- \geqslant x_+ \geqslant x$; также $|x| \geqslant x_- \geqslant -x$.

b) $|-x| = (-x)_+ + (-x)_- = x_- + x_+ = |x|$.

c) Если $x = \mathbf{0}$, то $x_+ = x_- = \mathbf{0}$, следовательно, $|x| = \mathbf{0}$.

Обратно, если $|x| = \mathbf{0}$, то $x_+ = x_- = \mathbf{0}$ (на основании аксиомы II), следовательно, $x = \mathbf{0}$ по 1.51a).

d) С помощью 1.51b) имеем:

$$|x+y| = (x+y)_+ + (x+y)_- \leqslant x_+ + y_+ + x_- + y_- = |x| + |y|.$$

e) Для $\alpha > 0$ имеем:

$$|\alpha x| = (\alpha x)_+ + (\alpha x)_- = \alpha x_+ + \alpha x_- = \alpha(x_+ + x_-) = \alpha|x|.$$

Для $\alpha < 0$ на основании уже доказанного

$$|\alpha x| = |-\alpha x| = (-\alpha)|x| = |\alpha|\,|x|.$$

f) С помощью 1.51a), 1.36c), 1.34, 1.39 и 1.51d) получаем:

$$x \vee (-x) = (x_+ - x_-) \vee (x_- - x_+) =$$
$$= x_+ + x_- + [(-2x_-) \vee (-2x_+)] = |x| - (2x_- \wedge 2x_+) =$$
$$= |x| - 2(x_- \wedge x_+) = |x|.$$

g) $|x| = x_+ + x_- = (x_+ \vee x_-) + (x_+ \wedge x_-) = x_+ \vee x_-$. (см. 1.41 и 1.51d)).

h) Из предыдущих соотношений (d) и (b) сразу следует, что $|x| - |y| \leqslant |x-y|$, $|y| - |x| \leqslant |x-y|$. А тогда

$$||x| - |y|| = (|x| - |y|) \vee (|y| - |x|) \leqslant |x-y|.$$

i) Так как $x \leqslant z \leqslant |z|$, $-x \leqslant -y \leqslant |y|$, то $|x| = x \vee (-x) \leqslant \leqslant |y| \vee |z|$.

k) $|x-y| = (x-y)_+ + (x-y)_- = [(x-y) \vee \mathbf{0}] - [(x-y) \wedge \mathbf{0}] = \{[(x-y) \vee \mathbf{0}] + y\} - \{[(x-y) \wedge \mathbf{0}] + y\} = (x \vee y) - (x \wedge y)$.

1.53. Для того чтобы множество $E = \{x_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ было ограничено, необходимо и достаточно, чтобы множество $E^* = \{|x_\xi|\}$ также было ограничено. При этом $|\sup E| \leqslant \sup E^*$.

Доказательство. Пусть E^* ограничено, $y = \sup E^*$. Тогда при всех $\xi \in \Xi$ $x_\xi \leqslant |x_\xi| \leqslant y$ и $-x_\xi \leqslant |x_\xi| \leqslant y$, значит, $x_\xi \geqslant -y$, т. е. y и $-y$ суть границы множества E. В частности

$$-y \leqslant \sup E \leqslant y.$$

Отсюда, по 1.52i)

$$|\sup E| \leqslant |y| \vee |-y| = |y| = y.$$

Пусть, обратно, E ограничено, $z = \sup E$, $u = \inf E$. Тогда при всех $\xi \in \Xi$ $u \leqslant x_\xi \leqslant z$, следовательно, по 1.52i)

$$|x_\xi| \leqslant |z| \vee |u|.$$

Тем самым E^* ограничено. А тогда по уже доказанному $|\sup E| \leqslant \leqslant \sup E^*$.

1.54. Если $x \neq \mathbf{0}$, то множество $\{nx\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ не ограничено. Таким образом, доказанный в 1.38 принцип Архимеда обобщается на случай произвольных элементов.

Доказательство. Если $x \neq \mathbf{0}$, то и $|x| \neq \mathbf{0}$, и по 1.38 множество $\{n|x|\}$ не ограничено; но тогда по 1.53 и множество $\{nx\}$ не ограничено.

1.55. Пусть множество $E = \{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ ограничено сверху, $y = \sup x_\xi$. Тогда

a) $y_+ = \sup\{(x_\xi)_+\}$;

b) $y_- = \inf\{(x_\xi)_-\}$.

Доказательство. a) С помощью 1.36d) имеем:

$$y_+ = y \vee \mathbf{0} = (\sup_\xi x_\xi) \vee \mathbf{0} = \sup_\xi (x_\xi \vee \mathbf{0}) = \sup\{(x_\xi)_+\}.$$

b) Так как $(x_\xi)_- \geqslant \mathbf{0}$, то множество $\{(x_\xi)_-\}$ ограничено снизу. Положим

$$z = \inf_\xi \{(x_\xi)_-\}.$$

Так как для всякого $\xi \in \Xi$ $-y \leqslant -x$, то $y_- = (-y) \vee \mathbf{0} \leqslant \leqslant (-x_\xi) \vee \mathbf{0} = (x_\xi)_-$, откуда $y_- \leqslant z$. С другой стороны, $z \leqslant (x_\xi)_-$ при любом $\xi \in \Xi$. Следовательно, $-z \geqslant -(x_\xi)_-$, или $(x_\xi)_+ - z \geqslant$

$\geqslant (x_\xi)_+ - (x_\xi)_- = x_\xi$. Отсюда следует, что $\sup\limits_\xi [(x_\xi)_+ - z] \geqslant \sup x_\xi = y$, или

$$\sup_\xi \{(x_\xi)_+\} - z \geqslant y_+ - y_-.$$

На основании а) из этого неравенства мы получаем $-z \geqslant -y_-$ или $z \leqslant y_-$. Вместе с полученным выше обратным неравенством это даёт равенство $z = y_-$, ч. и тр. д.

1.56. Пусть множество $E = \{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ ограничено сверху, а z — произвольный элемент из X. Тогда

$$z \wedge \sup_\xi x_\xi = \sup_\xi (z \wedge x_\xi).$$

Эту формулу мы в дальнейшем называем *дистрибутивным законом* для граней.

Доказательство. По 1.55b),

$$\left[\sup_\xi (x_\xi - z)\right]_- = \inf_\xi \left[(x_\xi - z)_-\right].$$

Тогда

$$-\left[\sup_\xi (x_\xi - z)\right]_- = \sup_\xi \left[-(x_\xi - z)_-\right],$$

или

$$\mathbf{0} \wedge \sup_\xi (x_\xi - z) = \sup_\xi \left[\mathbf{0} \wedge (x_\xi - z)\right].$$

Прибавляя к обеим частям последнего равенства элемент z и внося его под знаки sup и $\wedge$, мы получим требуемое равенство.

Для конечного множества $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ дистрибутивный закон запишется так:

$$z \wedge (x_1 \vee \ldots \vee x_n) = (z \wedge x_1) \vee \ldots \vee (z \wedge x_n).$$

Из доказанной формулы легко выводится дуальное соотношение для множества, ограниченного снизу:

$$z \vee \inf_\xi x_\xi = \inf_\xi (z \vee x_\xi).$$

1.57. Для любых x, y, z

$$|(x \vee z) - (y \vee z)| + |(x \wedge z) - (y \wedge z)| = |x - y|.$$

Доказательство. На основании 1.52k) и дистрибутивного закона 1.56 имеем:

$$|(x \vee z) - (y \vee z)| = (x \vee y \vee z) - (x \vee z) \wedge (y \vee z) =$$
$$= (x \vee y \vee z) - (x \wedge y) \vee z;$$
$$|(x \wedge z) - (y \wedge z)| = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) - (x \wedge y \wedge z) =$$
$$= (x \vee y) \wedge z - (x \wedge y \wedge z).$$

Складывая полученные разности и применяя 1.41, получаем:

$$[(x \vee y) \vee z + (x \vee y) \wedge z] - [(x \wedge y) \vee z + (x \wedge y) \wedge z] =$$
$$= [(x \vee y) + z] - [(x \wedge y) + z] = (x \vee y) - (x \wedge y) = |x - y|.$$

1.58. $|(x \vee z) - (y \vee z)| \leqslant |x - y|$, т. е. операция $\vee$ «сближает» элементы.

Следует непосредственно из 1.57.

1.6. Дизъюнктные элементы и множества.

Определение. Два элемента x и y называются *дизъюнктными*, если $|x| \wedge |y| = \mathbf{0}$. Два множества E_1 и E_2 K-пространства X называются *дизъюнктными*, если любые $x_1 \in E_1$ и $x_2 \in E_2$ дизъюнктны.

Соотношение дизъюнктности обозначается буквой d: $x \,\mathrm{d}\, y$ или $E_1 \,\mathrm{d}\, E_2$.

Ясно, что если элемент $x \,\mathrm{d}\, x$, то $x = \mathbf{0}$.

Определение дизъюнктности играет фундаментальную роль во всём дальнейшем. Здесь мы установим простейшие предложения, связанные с понятием дизъюнктности.

1.61. $x_+ \,\mathrm{d}\, x_-$ для любого $x \in X$.

Действительно, $x_+ \,\mathrm{d}\, x_-$ означает, что $x_+ \wedge x_- = \mathbf{0}$, а это доказано в 1.51d).

Таким образом, всякий элемент представим в виде разности двух дизъюнктных положительных элементов: $x = x_+ - x_-$.

1.62. Если $x = y - z$, причём $y \geqslant \mathbf{0}$, $z \geqslant \mathbf{0}$ и $y \,\mathrm{d}\, z$, то $y = x_+$, $z = x_-$. Следовательно, представление любого элемента в виде разности дизъюнктных положительных элементов единственно.

Доказательство. Очевидно, $y \geqslant x$, следовательно,

$$y \geqslant x \vee \mathbf{0} = x_+.$$

Пусть $y = x_+ + u$, где $u \geqslant \mathbf{0}$. Тогда $z = y - x = x_- + u$ и $y \wedge z \geqslant u$, откуда $u = \mathbf{0}$, и наше утверждение доказано.

1.63. Если $x \,\mathrm{d}\, y$, то:

a) $(x + y)_+ = x_+ + y_+$, $(x + y)_- = x_- + y_-$;

b) $|x + y| = |x| + |y|$;

c) $\alpha x \,\mathrm{d}\, \beta y$ при любых α и β.

Доказательство. a) Из определения дизъюнктности следует, что $y_+ \wedge x_- = \mathbf{0}$. Но и $x_+ \wedge x_- = \mathbf{0}$, а тогда (по 1.44) и $(x_+ + y_+) \wedge x_- = \mathbf{0}$. Аналогично, $(x_+ + y_+) \wedge y_- = \mathbf{0}$, а тогда, снова по 1.44, $(x_+ + y_+) \wedge (x_- + y_-) = \mathbf{0}$. Так как $x + y = (x_+ + y_+) - (x_- + y_-)$, то наше утверждение следует из 1.62.

b) $|x + y| = (x + y)_+ + (x + y)_- = x_+ + y_+ + x_- + y_- = |x| + |y|$.

c) Положим $\gamma = \max(|\alpha|, |\beta|)$. Тогда дизъюнктность элементов αx и βy следует из соотношений:

$$\mathbf{0} \leqslant |\alpha x| \wedge |\beta y| \leqslant \gamma |x| \wedge \gamma |y| = \gamma (|x| \wedge |y|) = \mathbf{0}.$$

1.64. Для любых x и y $x-(x\wedge y)$ и $y-(x\wedge y)$ дизъюнктны между собой.

Доказательство. $[x-(x\wedge y)]\wedge[y-(x\wedge y)]=$ $=(x\wedge y)-(x\wedge y)=\mathbf{0}$ (ср. 1.36с)).

1.65. Если множества $E_1=\{x_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ и $E_2=\{y_\eta\}$ $(\eta\in\mathrm{H})$ дизъюнктны и ограничены сверху, то $\sup E_1\,\mathrm{d}\sup E_2$.

Доказательство. Пусть сначала $x_\xi\geqslant\mathbf{0}$ и $y_\eta\geqslant\mathbf{0}$. Положим $x^*=\sup E_1$, $y^*=\sup E_2$. Тогда с помощью дистрибутивного закона получаем:

$$x^*\wedge y^*=x^*\wedge\sup_\eta y_\eta=\sup_\eta(x^*\wedge y_\eta)=\sup_\eta(\sup_\xi x_\xi\wedge y_\eta)=$$
$$=\sup_{\xi,\eta}(x_\xi\wedge y_\eta)=\mathbf{0}.$$

В общем случае (см. 1.53)

$$|\sup x_\xi|\leqslant\sup|x_\xi|,\quad|\sup y_\eta|\leqslant\sup|y_\eta|.$$

Но по уже доказанному

$$\sup|x_\xi|\wedge\sup|y_\eta|=\mathbf{0},$$

а тогда и $\sup x_\xi\,\mathrm{d}\sup y_\eta$, ч. и тр. д*).

1.66. Если x и y дизъюнктны z, то и $(x+y)\,\mathrm{d}\,z$.

Доказательство. По 1.44 из $|x|\wedge|z|=\mathbf{0}$ и $|y|\wedge|z|=\mathbf{0}$ сразу следует, что $(|x|+|y|)\wedge|z|=\mathbf{0}$. Но $|x+y|\leqslant|x|+|y_a|$, а тогда подавно $|x+y|\wedge|z|=\mathbf{0}$, ч. и тр. д.

1.67. Пусть элементы $x_1,\ldots,x_n$ удовлетворяют условию $x_i\wedge x_k=\mathbf{0}$ при $i\neq k$. Тогда

$$x_1+\ldots+x_n=x_1\vee\ldots\vee x_n.$$

Доказательство. При $n=2$ эта формула получается сразу на основании 1.41: $x_1+x_2=(x_1\vee x_2)+(x_1\wedge x_2)=x_1\vee x_2$. Допустим, что она доказана для случая n слагаемых, и докажем, что она верна и для $n+1$ слагаемых. Положим $y=x_1+\ldots+x_n$. Тогда по предположению $y=x_1\vee\ldots\vee x_n$ и так как $x_1\wedge x_{n+1}=$ $=\ldots=x_n\wedge x_{n+1}=\mathbf{0}$, то (по 1.56) $y\wedge x_{n+1}=\mathbf{0}$. Отсюда следует, что

$$x_1+\ldots+x_{n+1}=y+x_{n+1}=y\vee x_{n+1}=$$
$$=(x_1\vee\ldots\vee x_n)\vee x_{n+1}=x_1\vee\ldots\vee x_{n+1}.$$

1.68. Если $x\wedge y=\mathbf{0}$ и $z\geqslant\mathbf{0}$, то $(x+y)\wedge z=(x\wedge z)+(y\wedge z)$.

Доказательство. С помощью 1.67 и 1.56 имеем:

$$(x+y)\wedge z=(x\vee y)\wedge z=(x\wedge z)\vee(y\wedge z).$$

---

*) Несколько изменяя доказательство, можно установить дизъюнктность верхних граней, предполагая только, что множества E_1 и E_2 ограничены сверху.

Но ясно, что $(x \wedge z) \wedge (y \wedge z) = \mathbf{0}$, а тогда предыдущее выражение равно $(x \wedge z) + (y \wedge z)$, что и требуется доказать.

1.69. Если для некоторого x из неравенства $y > x$ всегда следует, что $y > \mathbf{0}$, то $x \geqslant \mathbf{0}$.

Доказательство. Допустим, что x не положителен; тогда $x_- > \mathbf{0}$. Если при этом $x_+ = \mathbf{0}$, т. е. $x = -x_- < \mathbf{0}$, то за y можно взять $\mathbf{0}$. Тогда $y > x$, но y не $> \mathbf{0}$, что противоречит условию. Если же $x_+ > \mathbf{0}$, то такое же противоречие мы получим, полагая $y = 2x_+ - x_-$.

В дальнейшем (в главе IV) будет доказана теорема, на основании которой всякое утверждение, верное для вещественных чисел и связанное с применением конечного числа арифметических операций и знаков $\vee$, $\wedge$, $\geqslant$, остаётся верным и для элементов K-пространства. Таким образом, многие предложения, доказанные в настоящем параграфе, являются следствием этой общей теоремы.

Поясним понятия, введённые в двух последних n°n°, на примерах, рассмотренных в 1.2.

В пространстве вещественных чисел R_1 модуль $|x|$ имеет обычный смысл, а

$$x_+ = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0 \\ 0, \text{ если } x < 0 \end{cases}, \quad x_- = \begin{cases} 0, \text{ если } x > 0, \\ |x|, \text{ если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Дизъюнктность чисел x_1 и x_2 означает, что хоть одно из них равно 0. В дальнейшем мы используем для вещественных чисел обозначения x_+ и x_- без дополнительных пояснений.

В R_n (см. 1.21) для $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$x_+ = [(x_1)_+, \ldots, (x_n)_+], \; x_- = [(x_1)_-, \ldots, (x_n)_-],$$
$$|x| = (|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

Дизъюнктность x и y означает, что $x_i y_i = 0$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$, т. е. координаты x и y с одним и тем же номером не могут быть обе отличны от нуля.

В F (см. 1.22) x_+ есть функция $[x(t)]_+$, $x_-(t) = [x(t)]_-$, $|x|(t) = |x(t)|$. Дизъюнктность x_1 и x_2 означает, что функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ отличны от нуля на непересекающихся подмножествах множества T.

1.7. Соединения. Введём одну операцию, весьма полезную для дальнейшего.

Определение. Пусть $E = \{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — ограниченное множество элементов из X, попарно дизъюнктных между собой, т. е. $x_\xi \, \mathrm{d} \, x_\eta$ при $\xi \neq \eta$. Тогда элемент

$$y = \sup_{\xi \in \Xi} [(x_\xi)_+] - \sup_{\xi \in \Xi} [(x_\xi)_-]$$

называется *соединением* элементов $x_\xi \in E$ и обозначается

$$y = \mathbf{S}E = \mathbf{S}\{x_\xi\}_{\xi \in \Xi}.$$

При этом благодаря дизъюнктности обоих членов разности в выражении для y они равны соответственно y_+ и y_- (1.62).

Ясно, что для множества положительных элементов соединение совпадает с верхней гранью, а также, что

$$\mathbf{S}\{-x_\xi\} = -\mathbf{S}\{x_\xi\}. \tag{1}$$

1.71. Для конечного множества попарно дизъюнктных элементов $x_i (i = 1, \ldots, n)$

$$\mathbf{S}\, x_i = x_1 + \ldots + x_n.$$

Доказательство. Так как x_i попарно дизъюнктны, то $(x_i)_+$ и $(x_i)_-$ тоже все попарно дизъюнктны. Тогда по 1.67

$$\sup_i [(x_i)_+] = \sum_{i=1}^{n} (x)_+, \quad \sup_i [(x_i)_-] = \sum_{i=1}^{n} (x_i)_-$$

следовательно,

$$\mathbf{S}\, x_i = \sum_{i=1}^{n} [(x_i)_+ - (x_i)_-] = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

В частности, $x = \mathbf{S}(x_+, -x_-)$.

1.72. Для соединений верен ассоциативный закон в следующей форме.

Если ограниченное множество $E = \bigcup_{\eta \in \mathrm{H}} E_\eta$, где все множества E_η попарно дизъюнктны, а каждое E_η состоит из попарно дизъюнктных элементов $x_\xi^{(\eta)}$, то

$$\mathbf{S}E = \underset{\eta}{\mathbf{S}}(\mathbf{S}E_\eta).$$

Доказательство. По определению

$$\mathbf{S}E = \sup_{\xi, \eta} (x_\xi^{(\eta)})_+ - \sup_{\xi, \eta} (x_\xi^{(\eta)})_-.$$

На основании ассоциативного закона для верхней грани (1.36 d))

$$\mathbf{S}E = \sup_\eta \sup_\xi (x_\xi^{(\eta)})_+ - \sup_\eta \sup_\xi (x_\xi^{(\eta)})_-.$$

Положим

$$x_\eta = \mathbf{S}E_\eta = \sup_\xi (x_\xi^{(\eta)})_+ - \sup_\xi (x_\xi^{(\eta)})_-.$$

Покажем, что если $\eta' \neq \eta''$, то $x_{\eta'} \mathrm{d}\, x_{\eta''}$. Действительно, так как $x_{\xi'}^{(\eta')} \mathrm{d}\, x_{\xi''}^{(\eta'')}$ при любых ξ', ξ'', то по 1.65

$$\sup_{\xi'} (x_{\xi'}^{(\eta')})_+ \mathrm{d} \sup_{\xi''} (x_{\xi''}^{(\eta'')})_+,$$

а тогда из определения x_η следует, что $(x_{\eta'})_+ \mathrm{d}\, (x_{\eta''})_+$. Аналогично

$$(x_{\eta'})_+ \mathrm{d}\, (x_{\eta''})_-, \quad (x_{\eta'})_- \mathrm{d}\, (x_{\eta''})_+, \quad (x_{\eta'})_- \mathrm{d}\, (x_{\eta''})_-,$$

откуда $x_{\eta'} \mathrm{d}\, x_{\eta''}$ (см. 1.63 c) и 1.66).

Теперь имеем благодаря ассоциативности верхней грани:

$$\mathbf{S}E = \sup_\eta \sup_\xi (x_\xi^{(\eta)})_+ - \sup_\eta \sup_\xi (x_\xi^{(\eta)})_- =$$
$$= \sup_\eta (x_\eta)_+ - \sup_\eta (x_\eta)_- = \mathbf{S}x_\eta = \mathbf{S}(\mathbf{S}E_\eta),$$

ч. и тр. д.

Замечание. Попутно мы установили следующее более простое предложение: если $x = \mathbf{S}x_\xi$ и все $x_\xi \mathrm{d}\, y$, то $x \mathrm{d}\, y$. Действительно, по доказанному

$$\mathbf{S}(\{x_\xi\}, y) = \mathbf{S}(\mathbf{S}x_\xi, y) = \mathbf{S}(x, y),$$

и в этом равенстве уже содержится дизъюнктность x и y.

Отметим ещё некоторые почти очевидные свойства соединений.

1.73. a) Если все $x_\xi \leqslant \mathbf{0}$, то $\mathbf{S}x_\xi = -\sup(-x_\xi) = \inf x_\xi$.

b) Для любых x_ξ

$$(\mathbf{S}x_\xi)_+ = \sup (x_\xi)_+ = \mathbf{S}[(x_\xi)_+],$$
$$(\mathbf{S}x_\xi)_- = \sup (x_\xi)_- = \mathbf{S}[(x_\xi)_-].$$

c) $\mathbf{S}x_\xi$ равно соединению множества всех элементов $(x_\xi)_+$ и $-(x_\xi)_-$; это следует из замечания в конце 1.71 и ассоциативного закона для соединений.

d) $|\mathbf{S}x_\xi| = \mathbf{S}|x_\xi|$.

Действительно, с помощью 1.71, 1.72 и 1.73 b) легко получаем:

$$|\mathbf{S}x_\xi| = (\mathbf{S}x_\xi)_+ + (\mathbf{S}x_\xi)_- = \mathbf{S}[(x_\xi)_+] + \mathbf{S}[(x_\xi)_-] =$$
$$= \mathbf{S}\{\mathbf{S}[(x_\xi)_+], \mathbf{S}[(x_\xi)_-]\} = \mathbf{S}\{\mathbf{S}[(x_\xi)_+, (x_\xi)_-]\} =$$
$$= \mathbf{S}[(x_\xi)_+ + (x_\xi)_-] = \mathbf{S}|x_\xi|.$$

1.74. Если все элементы x_ξ ($\xi \in \Xi$) некоторого ограниченного сверху множества E попарно дизъюнктны и множество E содержит по крайней мере два различных элемента, то $\sup x_\xi \geqslant \mathbf{0}$ и

$$\sup_{\xi \in \Xi} x_\xi = \mathbf{S}[(x_\xi)_+]_{\xi \in \Xi}.$$

Доказательство. Так как x_ξ попарно дизъюнктны, то $\inf\limits_\xi (x_\xi)_- = \mathbf{0}$. Тогда по 1.55 b) $(\sup\limits_\xi x_\xi)_- = \mathbf{0}$, т. е. $\sup\limits_\xi x_\xi \geqslant \mathbf{0}$. А теперь вследствие ассоциативности верхней грани мы сразу получаем:

$$\sup_\xi x_\xi = (\sup_\xi x_\xi) \vee \mathbf{0} = \sup_\xi (x_\xi \vee \mathbf{0}) = \sup_\xi (x_\xi)_+ = \mathbf{S}\,[(x_\xi)_+],$$

ч. и тр. д.

Доказанное равенство остаётся верным и для множества, неограниченного сверху, в том смысле, что тогда обе части равенства одновременно обращаются в ∞.

1.75. Если x_ξ попарно дизъюнктны и в совокупности ограничены, то при любом α

$$\mathbf{S}(\alpha x_\xi) = \alpha\, \mathbf{S} x_\xi.$$

Доказательство. Пусть сначала $\alpha > 0$. Тогда (см. 1.51 c) и 1.39)

$$\mathbf{S}(\alpha x_\xi) = \sup(\alpha x_\xi)_+ - \sup(\alpha x_\xi)_- = \alpha \sup(x_\xi)_+ - \alpha \sup(x_\xi)_- = \alpha\, \mathbf{S} x_\xi.$$

Если $\alpha < 0$, то с помощью равенства (1) имеем:

$$\mathbf{S}(\alpha x_\xi) = -\mathbf{S}(|\alpha| x_\xi) = -|\alpha|\, \mathbf{S} x_\xi = \alpha\, \mathbf{S} x_\xi.$$

Если, наконец, $\alpha = 0$, то наше утверждение тривиально.

В K-пространстве функций F соединение $x = \mathbf{S} x_\xi$ определяется, очевидно, так: $x(t) = x_{\xi'}(t)$, если одна из функций, $x_{\xi'}(t)$, в данной точке отлична от нуля и $x(t) = 0$ в прочих точках.

1.8. Частично упорядоченные множества. Понятие упорядочения можно ввести и в множествах более общей природы, чем линейные.

1.81. Определение 1. Произвольное множество X называется *частично упорядоченным*, если для некоторых пар его элементов определено соотношение $x_1 > x_2$ (то же можно записать: $x_2 < x_1$), причём выполнены следующие условия:

1) если $x_1 > x_2$, то невозможно ни $x_1 = x_2$ ни $x_2 > x_1$;

2) если $x_1 > x_2$ и $x_2 > x_3$, то $x_1 > x_3$ (транзитивный закон).

Ясно, что в частично упорядоченном множестве имеет смысл понятия ограниченного множества и его граней, но при этом, конечно, не всякое ограниченное множество имеет грани.

Определение 2. Частично упорядоченное множество называется *структурой* или *полуупорядоченным множеством*, если каждое конечное его подмножество имеет верхнюю и нижнюю грани.

Ясно, что в определении структуры достаточно предположить существование верхней и нижней граней для множеств, состоящих из двух элементов.

Определение 3. Структура называется *полной*, если в ней всякое ограниченное множество имеет верхнюю и нижнюю грани.

Очевидно, K-пространство представляет частный случай полной структуры. Простейшим примером полной структуры (нелинейной) является множество всех подмножеств e некоторого множества E, в котором соотношение порядка определено как включение: $e_1 < e_2$ означает, что $e_1 \subset e_2$, но при этом $e_1 \neq e_2$. В такой структуре, действительно, соотношение $e_1 < e_2$ выполняется лишь для некоторых пар множеств.

Другим примером полной структуры может служить множество всех выпуклых замкнутых множеств конечномерного пространства, например, плоских. Соотношение порядка определяется так же, как в предыдущем примере. Верхняя грань некоторого множества замкнутых выпуклых множеств будет их наименьшей замкнутой выпуклой оболочкой, а нижняя грань — их пересечением. Читатель легко сможет убедиться, что в первом примере выполняется дистрибутивный закон для граней, а во втором этот закон не имеет места.

Множество всех множеств, измеримых (B) (в конечномерном пространстве), с тем же соотношением порядка, что и выше, представляет, очевидно, структуру, но неполную.

Приведём ещё один пример структуры. Рассмотрим множество всех натуральных чисел $N = \{n\}$, в котором полагаем по определению, $n_1 > n_2$, если n_1 делится на n_2 без остатка, но $n_1 \neq n_2$. В таком множестве верхняя и нижняя грани любого конечного подмножества его элементов совпадают соответственно с наименьшим общим кратным и наибольшим общим делителем данных чисел. Ограниченное сверху множество не может быть бесконечным; наоборот, всякое множество ограничено снизу (например, числом 1), и наибольший общий делитель опять является нижней гранью.

1.82. Дадим одно общее определение. Пусть X и Y — два частично упорядоченных множества, причём хоть одно из них не линейно. Взаимно однозначное соответствие $y = \varphi(x)$ между элементами $x \in X$ и $y \in Y$ называется *изоморфизмом*, если из $x_1 > x_2$ следует $\varphi(x_1) > \varphi(x_2)$ и обратно (т. е. соответствие $y = \varphi(x)$ сохраняет упорядочение). Сами множества X и Y называются в этом случае *изоморфными*.

Если оба частично упорядоченных множества X и Y, кроме того, линейны, то в понятие изоморфизма включаются дополнительные требования: $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$ и $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$.

Из равенства $\varphi(x) = \varphi(x + \mathbf{0}) = \varphi(x) + \varphi(\mathbf{0})$ следует, что $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$; таким образом, соответствие $y = \varphi(x)$ сохраняет смысл групповой операции сложения и нулевой элемент из X переходит в нулевой элемент из Y.

1.83. В случае, когда X и Y — K-пространства, приведённое определение равносильно такому: изоморфизмом K-пространств X и Y называется взаимно однозначное соответствие $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее двум условиям:

a) $\varphi(x_1+x_2)=\varphi(x_1)+\varphi(x_2)$;

b) из $x>\mathbf{0}$ следует $\varphi(x)>\mathbf{0}$ и обратно.

Высказанное утверждение почти очевидно. Нужно только показать, что из a) и b) следует возможность вынесения числового множителя за знак φ. Это будет доказано в главе VII (§ 1)*).

1.84. Докажем одно общее предложение. *Если полуупорядоченные множества X и Y изоморфны, то граням какого-нибудь подмножества $E\subset X$ соответствуют грани его образа $\varphi(E)\subset Y$* **), *т. е., например,* $\varphi(\sup E)=\sup\varphi(E)$.

Доказательство. Пусть $x^*=\sup E$ — элемент из X и $y^*=\varphi(x^*)$. Так как $x\leqslant x^*$ для всякого $x\in E$, то $\varphi(x)\leqslant y^*$, т. е. y^* — верхняя граница для $\varphi(E)$. Пусть y_0 — другая верхняя граница для $\varphi(E)$ и $y_0=\varphi(x_0)$ $(x_0\in X)$. Тогда $\varphi(x)\leqslant y_0$, следовательно, $x\leqslant x_0$ для любого $x\in E$, и, по определению точной верхней границы, $x^*\leqslant x_0$. Но из этого следует, что $\varphi(x^*)\leqslant\varphi(x_0)$, т. е. $y^*\leqslant y_0$. Тем самым $y^*=\sup\varphi(E)$, ч. и тр. д.

Из доказанного следует, что при изоморфизме K-пространств

$$\varphi(x_+)=[\varphi(x)]_+,\quad \varphi(x_-)=[\varphi(x)]_-,\quad \varphi(|x|)=|\varphi(x)|.$$

1.85. В некоторых случаях нам придётся рассматривать полуупорядоченные множества несколько более общего типа, чем K-пространства.

Определение 4. Линейное множество, в котором выполнены аксиомы I — IV K-пространства в прежнем виде, а аксиома V — для конечных множеств, называется *K-линеалом.*

При этом достаточно сформулировать аксиому V для множеств, состоящих из двух элементов, а тогда выполнение её для любого конечного множества доказывается по индукции. В K-линеалах сохраняются все предложения, доказанные для K-пространств, которые не связаны с применением аксиомы V к бесконечным множествам. Таким образом, все предложения, содержащиеся в пунктах 1.3—1.7 настоящего параграфа, в формулировку которых не входят точные границы бесконечного множества, остаются для K-линеалов без изменения. В частности, в K-линеалах верно предложение 1.35, т. е. всякое конечное множество ограничено, а, следовательно, по аксиоме V имеет верхнюю и нижнюю грани. Кроме того, для K-линеалов остаётся верным и 1.83.

Исключение представляет принцип Архимеда (1.38 и 1.54), доказательство которого опирается на существование $\sup nx$ и который может не выполняться в K-линеалах (см. ниже, 1.86). Осталь-

---

*) Впрочем, для рациональных r соотношение $\varphi(rx)=r\varphi(x)$, очевидно, следует из a) и b). Переход к произвольным α читатель легко сможет провести самостоятельно.

**) Образом множества E называется множество $\varphi(E)$, состоящее из всех элементов вида $y=\varphi(x)$, где $x\in E$.

ные же предложения остаются, во всяком случае, верным тогда, когда участвующие в их формулировках sup и inf вычисляются для конечных множеств*).

K-линеал — структура, но вообще неполная.

Определение 5. Пусть в множестве $X=\{x\}$ определена операция сложения для любых двух его элементов так, что выполнены условия коммутативности, ассоциативности, а также

a) существует элемент θ такой, что $x+\theta=x$ для любого x;

b) для любого x существует элемент, обозначаемый $-x$, такой, что $x+(-x)=\theta$.

В таком случае X представляет абелеву группу относительно операции сложения. При этом доказывается единственность нулевого элемента θ и «обратного» $-x$**).

Если в множестве X введено упорядочение, удовлетворяющее аксиомам I — III K-пространства в полном объёме и аксиоме V для конечных множеств, то X называется *полуупорядоченной группой* или *K-группой*.

Таким образом, K-линеал представляет частный случай K-группы; в общем случае в K-группе отсутствует умножение на вещественные числа.

В K-группах остаются верными все предложения, доказанные выше для K-пространств, не опирающиеся на существование точных границ бесконечного множества и на операцию умножения***). В частности, и в K-группе всякое конечное множество ограничено и имеет верхнюю и нижнюю грани.

K-группа также представляет частный случай структуры.

1.86. Приведём некоторые примеры.

C — множество всех непрерывных вещественных функций $x(t)$, заданных на сегменте $a\leqslant t\leqslant b$, линеаризованное и упорядоченное так же, как F (см. 1.22). Легко видеть, что C — K-линеал. То же заключение можно сделать относительно множества непрерывных функций, определённых на произвольном топологическом пространстве. Отметим, что в C выполняется принцип Архимеда. Точные границы конечного множества в C, очевидно, определяются так же, как в F.

---

*) Впрочем, многие предложения остаются верными и для бесконечных множеств, если дополнительно предположить существование точных граней, входящих в формулировку. Например, дистрибутивный закон 1.56 может быть сформулирован так: если $\sup x_\xi$ существует, то существует $\sup(z\wedge x_\xi)$ и имеет место равенство 1.56. Этим замечанием нам не придётся пользоваться в дальнейшем, и поэтому мы не останавливаемся на нём подробнее.

**) См. А. Г. Курош [4], стр. 136—137.

***) При этом следует отметить, что при доказательстве 1.52f) и 1.69 использовано умножение. Однако в K-группе $2x$ можно понимать как $x+x$, равенство же $2x_+\wedge 2x_-=\mathbf{0}$ есть прямое следствие 1.51d) и 1.44. А тогда прежнее доказательство остаётся в силе.

Рассмотрим множество всех точек плоскости R_2, линеаризованное так же, как в 1.21, но упорядоченное иначе: именно, $x=(x_1, x_2)>\mathbf{0}$, если или $x_1>0$, x_2 — произвольное, или $x_1=0$, но $x_2>0$. При таком упорядочении любые два элемента из R_2 сравнимы между собой и легко видеть, что R_2 становится K-линеалом. Но в полном объеме аксиома V здесь не выполнена. Например, множество E элементов $\{(0, x_2)\}$ $(-\infty<x_2<\infty)$ ограничено сверху любым x, для которого $x_1>0$; однако $\sup E$ не существует. В этом K-линеале не выполняется также принцип Архимеда. Например, если $x=(0, 1)$, $y=(1, 0)$ то $nx<y$ при всех $n=1, 2, \ldots$.

Если из K-пространства F выделить подмножество F_1, состоящее из всех функций с целочисленными значениями, то получится K-группа, которая удовлетворяет аксиоме V в полном объеме. Линеаризация и упорядочение предполагаются перенесёнными в F_1 из F.

§ 2. Сходимость в K-пространстве

2.1. (o)-сходимость. Мы неоднократно говорили уже о том, что для K-пространства верны многие понятия и свойства множества вещественных чисел, представляющего весьма частный пример K-пространства. Однако эти понятия переносятся с множества вещественных чисел на общие K-пространства часто нетривиальным образом. Конечно, всякое определение, данное для общих K-пространств, пригодно и для множества вещественных чисел, но обратное далеко не всегда верно. Определение, пригодное для множества вещественных чисел, может не иметь смысла или быть нецелесообразным для общих K-пространств. С таким положением мы встречаемся, в частности, при введении понятия предела в K-пространствах.

Для вещественных чисел можно пользоваться следующим определением предела. Последовательность чисел $\{x_n\}$ стремится к числу x, если в любой интервал, содержащий x, попадают все достаточно далёкие члены последовательности, т. е. если для любых $a<x<b$ мы имеем $a<x_n<b$ при $n\geqslant N$. Это определение предела имеет смысл и для любого K-пространства. Однако оно даёт не то, что нужно. Легко усмотреть, что, например, в случае R_2 последовательность точек (ξ_n, η_n) будет сходиться к (ξ, η) в указанном смысле только в тривиальном случае, когда $\xi_n=\xi$ и $\eta_n=\eta$, начиная с некоторого n *). Напротив, другое определение предела вещественных чисел, как общего значения наибольшего и наименьшего предела последовательности, также имеющее смысл для общих K-пространств, приводит к содержательному и с нескольких точек зрения важному и естественному понятию. На этом определении мы и остановимся.

---

*) Действительно, члены её должны попасть в интервалы $[(\xi-1, \eta), (\xi+1, \eta)]$ и $[(\xi, \eta-1), (\xi, \eta+1)]$.

Определение. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность элементов K-пространства X. *Наибольшим и наименьшим пределами* этой последовательности называются элементы, определяемые соотношениями:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \inf_n [\sup (x_n, x_{n+1}, \ldots)],$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \sup_n [\inf (x_n, x_{n+1}, \ldots)].$$

Эти элементы могут быть конечными либо равными $+\infty$ или $-\infty$. Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, то последовательность называется сходящейся, а общее значение её наибольшего и наименьшего пределов называется просто *(o)-пределом* и обозначается $(o)\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Мы будем употреблять также такую запись: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(o)} x$, что означает: $x = (o)\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Мы вводим букву (o) в обозначение определяемой сейчас сходимости вследствие того, что в дальнейшем нам придётся рассматривать другие виды сходимости, которые мы будем обозначать другими буквами. Однако (o)-сходимость является основным видом сходимости в K-пространствах. Поэтому в тех случаях, когда нет опасности смешения, мы будем опускать для (o)-сходимости букву (o) (а также указание $n\to\infty$ под знаком предела).

Из определения сразу следует, что если $x_n = x$ при всех n (или хотя бы при всех достаточно больших n), то $x_n \to x$. Отметим крайне важный очевидный факт: если $\{x_n\}$ имеет конечный предел, то эта последовательность ограничена, а тогда по 1.53 и $\sup|x_n| < +\infty$.

Установим, что в K-пространстве сохраняется ряд обычных свойств предела числовой последовательности.

2.11. Для любой последовательности

a) $\inf x_n \leqslant \underline{\lim}\, x_n \leqslant \overline{\lim}\, x_n \leqslant \sup x_n$;

b) $\overline{\lim}\,(x_n + x) = x + \overline{\lim}\, x_n$;

c) $\underline{\lim}\, x_n = -\overline{\lim}\,(-x_n)$.

d) Если $x_n \leqslant y_n$ при всех n, то $\overline{\lim}\, x_n \leqslant \overline{\lim}\, y_n$, $\underline{\lim}\, x_n \leqslant \underline{\lim}\, y_n$.

Доказательство. a) При любых $n < m$ имеем:

$$\inf (x_1, x_2, \ldots) \leqslant \inf (x_n, x_{n+1}, \ldots) \leqslant \inf (x_m, x_{m+1}, \ldots) \leqslant$$
$$\leqslant \sup (x_m, x_{m+1}, \ldots) \leqslant \sup (x_n, x_{n+1}, \ldots) \leqslant \sup (x_1, x_2, \ldots),$$

откуда и следует требуемое соотношение (на основании 1.36 e))

b) На основании 1.36 c)

$$\overline{\lim}(x_n + x) = \inf_n [\sup(x_n + x, x_{n+1} + x, \ldots)] =$$
$$= x + \inf_n [\sup(x_n, x_{n+1}, \ldots)] = x + \overline{\lim}\, x_n.$$

c) Благодаря 1.34 получаем:

$$\underline{\lim}\, x_n = \sup_n (\inf(x_n, x_{n+1}, \ldots)] = \sup_n [-\sup(-x_n, -x_{n+1}, \ldots)] =$$
$$= -\inf_n [\sup(-x_n, -x_{n+1}, \ldots)] = -\overline{\lim}(-x_n).$$

d) Очевидно.

Введём специальные обозначения для предела монотонных последовательностей. Если $x_n \to x$ возрастая, т. е. $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots$, то будем писать $x_n \nearrow x$; аналогично, $x_n \searrow x$ для убывающей последовательности.

2.12. a) Если $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots$, то существует $\lim x_n = \sup_n x_n$, т. е. $x_n \nearrow \sup_n x_n$. Аналогично для убывающей последовательности: $x_n \searrow \inf x_n$.

b) Для любой последовательности

$$\overline{\lim}\, x_n = \lim [\sup(x_n, x_{n+1}, \ldots)],$$
$$\underline{\lim}\, x_n = \lim [\inf(x_n, x_{n+1}, \ldots)].$$

c) Если при всех n $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ и $x = \lim x_n = \lim z_n$, то и $y_n \to x$.

d) Если $x_n \to x$, то существуют две монотонные последовательности $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ такие, что $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ и $y_n \nearrow x$, $z_n \searrow x$.

e) Для того чтобы $x_n \to x$ (x — конечный элемент), необходимо и достаточно, чтобы существовала такая последовательность $u_n \searrow \mathbf{0}$, что $|x_n - x| \leqslant u_n$.

Доказательство. a) Пусть $x = \sup x_n$. Очевидно, при любом n

$$\sup(x_n, x_{n+1}, \ldots) = x, \quad \inf(x_n, x_{n+1}, \ldots) = x_n,$$

откуда $\overline{\lim}\, x_n = x$, $\underline{\lim}\, x_n = x$, т. е. $x_n \to x$.

b) — прямое следствие из предложения a), применённого к убывающей последовательности $\sup(x_n, x_{n+1}, \ldots)$ и возрастающей последовательности $\inf(x_n, x_{n+1}, \ldots)$.

c) очевидно (ср. 2.11 d)).

d) На основании b) достаточно положить $z_n = \sup(x_n, x_{n+1}, \ldots)$, и аналогично $y_n = \inf(x_n, x_{n+1}, \ldots)$.

e) Заметим предварительно, что если $u_n \searrow \mathbf{0}$ и $v_n \searrow \mathbf{0}$, то $(u_n + v_n) \searrow \mathbf{0}$.

Действительно, при любом m

$$\lim(u_n+v_n)=\inf_n(u_n+v_n)\leqslant\inf_n(u_m+v_n)=u_m+\inf_n v_n=u_m.$$

Вследствие произвольности m

$$\mathbf{0}\leqslant\lim(u_n+v_n)\leqslant\inf_m u_m=\mathbf{0}.$$

Теперь необходимость условия получается сразу на основании d). Действительно, пусть $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ и $y_n\nearrow x$, $z_n\searrow x$. Тогда $z_n-x\searrow\mathbf{0}$ и $x-y_n\searrow\mathbf{0}$ по 2.11 b). Полагая $u_n=z_n-y_n=(z_n-x)+(x-y_n)$, имеем $u_n\searrow\mathbf{0}$ на основании только что доказанного. Далее, так как $y_n\leqslant x\leqslant z_n$ и $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$, то очевидно (см. 1.52 k)):

$$|x-x_n|=(x\vee x_n)-(x\wedge x_n)\leqslant z_n-y_n=u_n.$$

Докажем достаточность условия. Имеем:

$$x_n-x\leqslant|x_n-x|\leqslant u_n,$$

откуда $x_n\leqslant x+u_n$, а тогда (ср. 2.11 b) и d)),

$$\overline{\lim}\,x_n\leqslant\overline{\lim}\,(x+u_n)=x+\lim u_n=x.$$

Аналогично, из неравенства

$$x_n-x\geqslant-|x_n-x|\geqslant-u_n$$

выводим, что $\underline{\lim}\,x_n\geqslant x$. Сопоставляя с предыдущим, заключаем, что $x_n\xrightarrow{(o)}x$.

2.13. Если $x_n\to x$ и $y_n\to y$, то

a) $x_n+y_n\to x+y$ *);

b) $(x_n)_+\to x_+$, $(x_n)_-\to x_-$;

c) $|x_n|\to|x|$;

d) $(x_n\vee y_n)\to(x\vee y)$, $(x_n\wedge y_n)\to(x\wedge y)$

e) если $|x_n|\to\mathbf{0}$, то $x_n\to\mathbf{0}$;

f) для того чтобы $x_n\to x$, необходимо и достаточно, чтобы $x_n-x|\to\mathbf{0}$.

Доказательство. a) Проведём рассуждение для конечных x и y. Согласно 2.12 e) найдутся $u_n\searrow\mathbf{0}$ и $v_n\searrow\mathbf{0}$ такие, что

$$|x_n-x|\leqslant u_n,\quad|y_n-y|\leqslant v_n.$$

Но отсюда

$$|(x_n+y_n)-(x+y)|\leqslant u_n+v_n,$$

*) Для бесконечных пределов это свойство теряет смысл, если $x=+\infty$, $y=-\infty$, или, наоборот, $x=-\infty$, $y=+\infty$.

а $(u_n+v_n)\searrow \mathbf{0}$ по предложению, установленному выше (при доказательстве 2.12 е)). Отсюда опять на основании 2.12 е) заключаем, что

$$\lim (x_n+y_n)=x+y.$$

В случае, если x или y имеет бесконечное значение, доказательство проводится так же легко; предоставляем его читателю.

b) По 1.58 имеем:

$$|(x_n)_+-x_+|=|(x_n\vee\mathbf{0})-(x\vee\mathbf{0})|\leqslant|x_n-x|.$$

По 2.12 е) существует последовательность $u_n\searrow\mathbf{0}$ такая, что $|x_n-x|\leqslant u_n$; но тогда и

$$|(x_n)_+-x_+|\leqslant u_n,$$

откуда и следует, снова по 2.12 e), что $(x_n)_+\to x_+$. Аналогично доказывается, что $(x_n)_-\to x_-$.

c) следует из a) и b).

d) С помощью a) и b) получаем:

$$x_n\vee y_n=x_n+[\mathbf{0}\vee(y_n-x_n)]=x_n+(y_n-x_n)_+\to$$
$$\to x+(y-x)_+=x+[\mathbf{0}\vee(y-x)]=x\vee y.$$

Соотношение для нижних граней можно легко вывести отсюда либо с помощью 1.34, либо с помощью 1.41.

е) По 2.12 е) существуют такие $u_n\searrow\mathbf{0}$, что $|x_n|\leqslant u_n$. Но тогда, по тому же 2.12 е), и $x_n\to\mathbf{0}$.

f) — следует очевидным образом из 2.12 е).

2.14. a) Если $\alpha\geqslant 0$, то

$$\overline{\lim}\,\alpha x_n=\alpha\,\overline{\lim}\,x_n;$$

если $\alpha\leqslant 0$, то

$$\overline{\lim}\,\alpha x_n=\alpha\,\underline{\lim}\,x_n;$$

если α — произвольное и существует $\lim x_n$, то

$$\lim\alpha x_n=\alpha\lim x_n\,^{*)}.$$

b) Если $|x_n|\leqslant x_0<+\infty$ при всех n и $\alpha_n\to 0$, то $\alpha_n x_n\to\mathbf{0}$.

c) Если $x_n\to x$ (x — конечный элемент) и $\alpha_n\to\alpha$, то $\alpha_n x_n\to\alpha x$.

Доказательство. a) При $\alpha=0$, очевидно. Пусть $\alpha>0$. На основании 1.39 a) имеем:

$$\overline{\lim}\,\alpha x_n=\inf_n[\sup(\alpha x_n,\ \alpha x_{n+1},\ \ldots)]=$$
$$=\alpha\inf_n[\sup(x_n,\ x_{n+1},\ \ldots)]=\alpha\,\overline{\lim}\,x_n.$$

---

*) Для бесконечных пределов эти соотношения теряют смысл при $\alpha=0$.

Так же проверяется соотношение для $\alpha < 0$. Затем с помощью 2.11 c) можно установить аналогичные соотношения для наименьшего предела. Последнее соотношение пункта a) вытекает из первых двух.

b) С помощью рассуждений, аналогичных предыдущим, и используя 1.39 c), имеем:

$$\overline{\lim}\,|\alpha_n x_n| \leqslant \overline{\lim}\,|\alpha_n|\,x_0 = (\overline{\lim}\,|\alpha_n|)\cdot x_0 = \mathbf{0},$$

т. е.

$$\lim |\alpha_n x_n| = \mathbf{0},$$

откуда вытекает равенство $\lim \alpha_n x_n = \mathbf{0}$ (2.13 e)).

c) Имеем:

$$\alpha_n x_n - \alpha x = (\alpha_n - \alpha)\,x + \alpha\,(x_n - x).$$

Первое слагаемое $\to \mathbf{0}$ на основании b), второе — на основании a), а тогда и всё выражение — на основании 2.13 a).

2.15. Если $x_n \mathrm{d} y_n$ при всех $n = 1, 2, \ldots$ и $x_n \to x$, $y_n \to y$, причём x и y — конечные элементы, то $x \mathrm{d} y$.

Доказательство. По 2.13 $|x_n| \to |x|$, $|y_n| \to |y|$ и $|x| \wedge |y| = \lim(|x_n| \wedge |y_n|) = \mathbf{0}$.

2.2. (o)-полнота K-пространства. В K-пространствах выполняется условие сходимости типа признака Коши, а именно, справедлива следующая теорема.

2.21. Теорема об (o)-полноте K-пространства. *Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} [\sup_{k,\,m\geqslant n} |x_k - x_m|] = \mathbf{0}.$$

Это свойство K-пространства называется его *o-полнотой*.

Доказательство. a) Необходимость. Пусть $x = \lim x_n$. Тогда $|x_n - x| \to \mathbf{0}$ (по 2.13 f)). Положим

$$y_n = \sup(|x_n - x|,\ |x_{n+1} - x|,\ \ldots).$$

По 2.12 b), $y_n \to \mathbf{0}$. Теперь из очевидных неравенств

$$|x_k - x_m| \leqslant |x_k - x| + |x_m - x| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{k\geqslant n} |x_k - x| + \sup_{m\geqslant n} |x_m - x| = 2y_n \quad (k,\ m \geqslant n)$$

следует, что

$$\sup_{k,\,m\geqslant n} |x_k - x_m| \leqslant 2y_n,$$

а тогда необходимость условия очевидна.

b) Достаточность. Положим

$$y_n = \sup_{k,\,m\geqslant n} |x_k - x_m|.$$

Тогда для k, $m \geqslant n$

$$x_k \leqslant x_m + y_n.$$

Отсюда, по 1,36,

$$\sup(x_n, x_{n+1}, \ldots) \leqslant \inf(x_n, x_{n+1}, \ldots) + y_n$$

или

$$\mathbf{0} \leqslant \sup(x_n, x_{n+1}, \ldots) - \inf(x_n, x_{n+1}, \ldots) \leqslant y_n. \qquad (1)$$

На основании 2.12 с) отсюда следует, что

$$\lim[\sup(x_n, x_{n+1}, \ldots)] - \lim[\inf(x_n, x_{n+1} \ldots)] = \mathbf{0},$$

т. е. $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$, значит, существует $\lim x_n$. Конечность предела следует попутно из неравенства (1).

Для вещественных чисел условие теоремы 2.21 можно дать и в другой форме: $x_{n_i} - x_{m_i} \to 0$ при n_i, $m_i \to \infty$. Хотя внешне это условие выглядит слабее, чем сформулированное выше, но на самом деле для вещественных чисел обе формы равносильны. Однако для K-пространства в общем случае вопрос остаётся открытым, т. е. неизвестно, вытекает ли из соотношения $x_{n_i} - x_{m_i} \to \mathbf{0}$, если оно имеет место для любых n_i, $m_i \to \infty$ существование конечного предела последовательности x_n.

2.3. (t)-сходимость. П. С. Александрову и П. С. Урысону принадлежит общее понятие ($*$)-сходимости по отношению к данной сходимости, которое определяется следующим образом *). Пусть X — произвольное множество, в котором некоторые последовательности называются (σ)-сходящимися к пределу: $x_n \xrightarrow{(\sigma)} x$. При этом должно выполняться условие: если $x_n \xrightarrow{(\sigma)} x$, то и любая частичная последовательность $x_{n_i} \xrightarrow{(\sigma)} x$ $(n_1 < n_2 < \ldots)$. Последовательность $\{x_n\}$ называется ($*$)-сходящейся к x: $x_n \xrightarrow{(*)} x$, если из любой её подпоследовательности $\{x_{n_i}\}$ можно выделить частичную $\{x_{n_{i_k}}\}$ $(i_1 < i_2 < \ldots)$ так, что $x_{n_{i_k}} \xrightarrow{(\sigma)} x$ **).

Ясно, что если $x_n \xrightarrow{(\sigma)} x$, то $x_n \xrightarrow{(*)} x$, т. е., таким образом, класс ($*$)-сходящихся последовательностей не у́же, чем класс (σ)-сходящихся последовательностей. В то же время, если (σ)-сходимость — обычная сходимость в пространстве R_1 вещественных чисел, то ($*$)-сходимость совпадает с ней. Однако ниже мы встретимся с тем фактом, что для многих важных конкретных случаев ($*$)-сходимость оказывается шире (σ)-сходимости; поэтому определение ($*$)-сходимости не тривиально.

---

*) См. Александров П. С. и Урысон П. С. [1], а также Урысон П. С. [1].

**) Определение ($*$)-сходимости даётся по отношению к заданной (σ)-сходимости, так что точнее было бы писать $(*)\sigma$.

Легко видеть, что если последовательность $\{x_n\}$ обладает тем свойством, что любая её подпоследовательность содержит частичную, $(*)$-сходящуюся к элементу x, то и $x_n \xrightarrow{(*)} x$. Таким образом, $(*)$-сходимость по отношению к уже построенной $(*)$-сходимости совпадает с последней.

Определение. Если X — K-пространство, то $(*)$-сходимость, построенная в нём по отношению к (o)-сходимости, называется *(t)-сходимостью*.

Обозначение (t) будет оправдано ниже. Ясно, что если $x_n \xrightarrow{(t)} x$ и x_n образуют монотонную последовательность, то $x_n \xrightarrow{(o)} x$. Это следует из того, что монотонная последовательность всегда имеет (o)-предел.

Для (t)-предела можно проверить все результаты, доказанные выше для (o)-предела, а именно:

2.31. a) $\inf x_n \leqslant (t)\text{-}\lim x_n \leqslant \sup x_n$.

b) $(t)\text{-}\lim(x_n + x) = x + (t)\text{-}\lim x_n$ (в предположении, что существует по крайней мере один из указанных пределов).

c) Если $x_n \leqslant y_n$ при всех n, то $(t)\text{-}\lim x_n \leqslant (t)\text{-}\lim y_n$ (в предположении, что оба предела существуют).

d) Если $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ при всех n и $x = (t)\text{-}\lim x_n = (t)\text{-}\lim z_n$, то и $y_n \xrightarrow{(t)} x$.

2.32. Если $x_n \xrightarrow{(t)} x$, $y_n \xrightarrow{(t)} y$, то

a) $x_n + y_n \xrightarrow{(t)} x + y$;

b) $(x_n)_+ \xrightarrow{(t)} x_+$, $(x_n)_- \xrightarrow{(t)} x_-$;

c) $|x_n| \xrightarrow{(t)} |x|$;

d) $(x_n \vee y_n) \xrightarrow{(t)} (x \vee y)$, $(x_n \wedge y_n) \xrightarrow{(t)} (x \wedge y)$;

e) если $|x_n| \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$, то и $x_n \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$.

2.33. a) Если $x_n \xrightarrow{(t)} x$, α — произвольное число, то $\alpha x_n \xrightarrow{(t)} \alpha x$, с той же оговоркой относительно бесконечного предела, что и в 2.14 a).

b) Если $x_n \xrightarrow{(t)} x$ (x — конечный элемент) и $\alpha_n \to \alpha$, то $\alpha_n x_n \xrightarrow{(t)} \alpha x$.

2.34. Если $x_n \,\mathrm{d}\, y_n$ при всех $n = 1, 2, \ldots$ и $x_n \xrightarrow{(t)} x$, $y_n \xrightarrow{(t)} y$, причём x и y — конечные элементы, то $x \,\mathrm{d}\, y$.

Читатель легко сможет провести доказательство всех этих утверждений. В качестве образца рассуждения докажем 2.31 d).

Выделим произвольную частичную последовательность индексов $\{n_k\}$ $(n_1 < n_2 < \ldots)$. По определению, из неё можно выделить подпоследовательность $\{n_{k_i}\}$ $(k_1 < k_2 < \ldots)$ так, что $x_{n_{k_i}} \xrightarrow{(o)} x$. Из этой подпоследовательности индексов выделим новую $\{n_{k_{i_l}}\}$

$(i_1 < i_2 < \ldots)$ так, что $z_{n_{i_{k_l}}} \xrightarrow{(o)} x$. А тогда на основании 2.12c) также и $y_{n_{i_{k_l}}} \xrightarrow{(o)} x$, т. е. $y_n \xrightarrow{(t)} x$, ч. и тр. д.

Остаётся открытым вопрос о (t)-полноте K-пространства, т. е. неизвестно, справедливо ли для (t)-сходимости следующее предложение: если $x_{n_i} - x_{m_i} \to \mathbf{0}$ при n_i, $m_i \to \infty$, то существует конечный (t)-$\lim x_n$ *).

2.35. Выясним конкретный смысл (o)- и (t)-сходимости в тех K-пространствах, которые были рассмотрены в § 1 (1.21—22).

В R_n наибольший и наименьший пределы вычисляются по координатам, поэтому (o)-сходимость равносильна сходимости по координатам, т. е. если $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$, то $x^{(k)} \xrightarrow{(o)} x$ означает, что $x_i^{(k)} \to x_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$. В F, совершенно аналогично R_n, $x_n \xrightarrow{(o)} x$ означает, что $x_n(t) \to x(t)$ при всех $t \in T$.

Легко видеть, что во всех этих случаях (t)-сходимость совпадает с (o)-сходимостью. K-пространства, в которых эти сходимости имеют разный смысл, будут рассмотрены в § 3.

Отметим одно предложение, используемое в дальнейшем.

2.36. Пусть при всех $k = 1, 2, \ldots$

$$x_n^{(k)} \underset{n \to \infty}{\xrightarrow{(t)}} x^{(k)}.$$

Тогда существует такая подпоследовательность индексов $n_1 < n_2 < \ldots < n_m < \ldots$, что при всех k

$$x_{n_m}^{(k)} \xrightarrow{(o)} x^{(k)}.$$

Доказательство проводится по известному диагональному методу. Пользуясь определением (t)-сходимости, выделяем подпоследовательность индексов $n_1^{(1)} < n_2^{(1)} < \ldots \to \infty$, для которой

$$x_{n_i^{(1)}}^{(1)} \xrightarrow{(o)} x^{(1)}.$$

Из этой подпоследовательности выделяем новую $n_1^{(2)} < n_2^{(2)} < \ldots \to \infty$, для которой

$$x_{n_i^{(2)}}^{(2)} \xrightarrow{(o)} x^{(2)}.$$

---

*) Заменить в формулировке теоремы 2.21 (o)-сходимость на (t)-сходимость заведомо нельзя, так как $\sup\limits_{k,\, m \geqslant n} |x_k - x_m|$ образует монотонную последовательность, а тогда из её (t)-сходимости вытекает (o)-сходимость. Но это будет выполнено только если последовательность $\{x_n\}$ — (o)-сходящаяся.

Продолжаем этот процесс до бесконечности, а затем выделяем диагональную последовательность индексов, полагая $n_m = n_m^{(m)}$. Тогда при всех k

$$x_{n_m}^{(k)} \xrightarrow{(o)} x^{(k)}.$$

Так как в K-линеалах и в K-группах существование верхней грани бесконечного ограниченного множества не предполагается, то понятие (o)-предела в общем случае здесь не имеет смысла. Но если в K-группе аксиома V выполнена в полном объёме или хотя бы для счётных множеств, то в такой K-группе можно определить и (o)-сходимость и (t)-сходимость. В частности, в F_1 (см. 1.86), состоящем из функций с целочисленными значениями, $x_n \xrightarrow{(o)} x$ означает, что при каждом $t \in T$ $x_n(t) = x(t)$ начиная с некоторого n; (t)-сходимость здесь имеет тот же смысл.

Впрочем, в K-группе без аксиомы V понятие предела можно ввести следующим образом: $x_n \xrightarrow{(o)} x$, если существуют две монотонные последовательности $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$, обладающие следующими свойствами:

1) $\{y_n\}$ возрастает, $\{z_n\}$ убывает;

2) $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$;

3) $\sup y_n$ и $\inf z_n$ существуют и равны x.

Из 2.12 следует, что в K-пространствах это определение равносильно данному в начале этого параграфа.

2.4. Топологизация K-пространства. Теперь мы покажем, что в K-пространстве можно определить топологию так, чтобы (t)-сходимость совпала с топологической сходимостью. Именно поэтому буква t и использована в обозначении этого вида сходимости. Попутно мы приведём необходимые нам основные понятия из теории топологических пространств.

2.41. Определение. Множество X называется *топологическим пространством*, или *T_1-пространством*, если в нём выделено семейство $\mathfrak{F}$ некоторых подмножеств $F \subset X$, называемых *замкнутыми*, удовлетворяющее следующим условиям:

1. X и Δ (пустое множество) входят в $\mathfrak{F}$.

2. Всякое множество (x), состоящее из одного элемента $x \in X$, входит в $\mathfrak{F}$.

3. Сумма конечного числа замкнутых множеств замкнута.

4. Пересечение любого множества замкнутых множеств замкнуто.

Элементы топологического пространства называют его точками.

Всякое множество G вида $G = X \setminus F$, где $F \in \mathfrak{F}$, называется *открытым*. Если точка $x \in G$, где G — открытое множество, то G называется окрестностью точки x, и это обозначается так: $G = U(x)$.

В топологическом пространстве можно ввести понятие топологической сходимости, а именно: $x_n \xrightarrow{(\tau)} x$, если для любой окрестности $U(x)$ существует N_U такое, что $x_n \in U(x)$ при $n \geqslant N_U$.

Введём топологию в K-пространстве X, т. е. превратим его в топологическое пространство. С этой целью назовём множество $F \subset X$ замкнутым, если (o)-предел всякой сходящейся (к конечному пределу) последовательности точек из F тоже принадлежит F, т. е. из $x_n \in F$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $x_n \xrightarrow{(o)} x$ следует, что $x \in F$.

Читатель легко сможет проверить, что все условия 1—4 выполнены. Следовательно, X стало топологическим пространством.

2.42. Теорема о топологической сходимости. *(t)-сходимость в X совпадает с топологической сходимостью* (τ).

Иначе говоря, для $x_n \xrightarrow{(t)} x$ необходимо и достаточно $x_n \xrightarrow{(\tau)} x$.

Доказательство. a) Пусть $x_n \xrightarrow{(t)} x$. Допустим, что x_n не сходится к x топологически. Это означает, что существует открытое множество $G = U(x)$, в которое не входит бесконечная подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$. Тогда $x_{n_i} \in F = X \setminus G$. По определению (t)-сходимости, существует частичная последовательность $x_{n_{i_k}} \xrightarrow{(o)} x$; но так как F замкнуто, то отсюда должно следовать, что $x \in F$, т. е. $x \overline{\in} G$. Мы пришли к противоречию и, таким образом, доказали, что $x_n \xrightarrow{(\tau)} x$.

b) Пусть $x_n \xrightarrow{(\tau)} x$. Допустим, что x_n не сходится к x в смысле (t)-сходимости. Это означает, что существует подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$, из которой нельзя выделить частичную, (o)-сходящуюся к x. При этом можно считать, что все $x_{n_i} \neq x$.

Рассмотрим два случая. Предположим сначала, что из $\{x_{n_i}\}$ можно выделить частичную последовательность $x_{n_{i_k}} \xrightarrow{(o)} y \neq x$. Тогда множество $F = \{x_{n_{i_k}}\} \cup (y)$ замкнуто, а $x \overline{\in} F$. Следовательно, $G = X \setminus F$ есть окрестность точки x, но существует бесконечное множество элементов $x_{n_{i_k}} \overline{\in} G$. А это означает, что x_n не сходится топологически к x.

Теперь предположим, что из $\{x_{n_i}\}$ нельзя выделить никакой (o)-сходящейся последовательности. Тогда множество $F = \{x_{n_i}\}$ замкнуто, а $x \overline{\in} F$. Так же, как и в первом случае, отсюда мы делаем вывод, что x_n не сходится топологически к x. В обоих случаях мы пришли к противоречию, следовательно, мы доказали, что $x_n \xrightarrow{(t)} x$.

Теорема полностью доказана.

2.43. Введём понятие борелевой надстройки множества. Именно, если E — произвольное множество из K-пространства X, то полагаем $E_0 = E$, а затем для любого порядкового числа α 1-го или 2-го класса $(\alpha < \Omega)$ определяем E_α по индукции как множество всех $x \in X$, пред-

ставимых в виде $x=(o)\text{-}\lim x_n$, где $x_n \in E_{\alpha_n}$ при $\alpha_n<\alpha$. Теперь определяем *борелеву надстройку* $B(E)$ множества E как

$$B(E)=\bigcup_{\alpha<\Omega} E_\alpha.$$

Покажем, что $B(E)$ совпадает с замыканием множества E, т. е. с наименьшим замкнутым множеством, содержащим E. Действительно, если $x_n \in B(E)$, то $x_n \in E_{\alpha_n}$ и существует такое $\alpha<\Omega$, что $\alpha_n<\alpha$ для всех n. А тогда, если $x_n \xrightarrow{(o)} x$, то $x \in E_\alpha \subset B(E)$, т. е. $B(E)$ замкнуто. С другой стороны, если $E \subset F$, где F замкнуто, то $B(E) \subset B(F)$. Но, очевидно, $B(F)=F$, так как F уже содержит все свои предельные точки, т. е. $B(E) \subset F$.

Если в K-пространстве F всех вещественных функций, заданных на сегменте, за E взять множество всех непрерывных функций, то описанный трансфинитный процесс приводит к построению классификации функций Бэра, а $B(E)$ состоит из всех функций, измеримых (B). Этот пример подтверждает, что если к произвольному множеству элементов K-пространства присоединить все его (o)-предельные точки, то может не получиться замкнутое множество. Действительно, присоединяя к множеству непрерывных функций его предельные точки, мы получим множество функций не выше 1-го класса, а не всё множество функций, измеримых (B).

§ 3. Примеры K-пространств

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые более важные для приложений примеры K-пространств.

3.1. K-пространство S измеримых функций. Рассмотрим множество S всех измеримых, почти всюду конечных функций $x(t)$, заданных на некотором измеримом множестве T. При этом отождествим эквивалентные между собой функции, т. е. такие функции не будем различать между собой как элементы пространства S *). Линеаризуем S так же, как выше это было сделано в множестве F (1,22). Упорядочение вводим так: элемент $x \in S$ считаем существенно положительным ($x>\mathbf{0}$), если функция $x(t) \geqslant 0$ почти всюду на множестве T и при этом $\operatorname{mes} T[x(t)>0]>0$, т. е. $x(t)>0$ на множестве положительной меры. Тогда выполнение первых четырёх аксиом K-пространства очевидно, и остаётся проверить выполнение аксиомы V.

Для счётного множества функций $x_n(t)$ верхняя грань, очевидно, определяется по точечным значениям, т. е. если $x(t)=\sup\limits_n x_n(t)$, то

*) Функции называются *эквивалентными*, если они почти всюду равны между собой. Строго говоря, наше условие означает, что мы вместо группы всех измеримых функций рассматриваем её факторгруппу по подгруппе функций, эквивалентных нулю. За групповую операцию надо принять действие сложения.

$x = \sup x_n$. Однако аналогичная формула для несчётного множества вообще не верна. Например, если $x_t(\tau)$ есть функция, равная 1 в точке $\tau = t$ и 0 в прочих точках $\tau \in T$ (эта функция является нулевым элементом в S), то $\sup\limits_{t \in T} x_t(\tau) \equiv 1$; однако $\sup x_t = \mathbf{0}$. Докажем, что аксиома V всё же справедлива и для произвольного множества функций *).

3.11. Сначала рассмотрим множество характеристических функций $x_\xi(t)$ измеримых множеств $E_\xi \subset T$ ($\xi \in \Xi$). Ясно, что это множество ограничено сверху, например, функцией $x(t) \equiv 1$. Докажем, что существует его точная верхняя грань. Обозначим через E_ξ^* множество точек плотности множества E_ξ и положим $E = \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} E_\xi^*$. Тогда при каждом $\xi \in \Xi$ $E_\xi \subset E$ с точностью до некоторого множества меры нуль.

Покажем, что E измеримо. Для этого обозначим через H измеримое подмножество множества E такое, что $\operatorname{mes} H = \operatorname{mes}_i E$ (mes_i — внутренняя мера). Пусть $t \in E$. Тогда $t \in E_{\xi_0}^*$ при некотором ξ_0, следовательно, по определению точек плотности,

$$\frac{\operatorname{mes}[H \cap (t-h,\, t+h)]}{2h} = \frac{\operatorname{mes}_i[E \cap (t-h,\, t+h)]}{2h} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\operatorname{mes}[E_{\xi_0} \cap (t-h,\, t+h)]}{2h} \xrightarrow[h \to 0]{} 1.$$

Таким образом, каждая точка множества E является точкой плотности множества H. Но известно, что почти все точки, не принадлежащие H, являются его точками разрежения. Следовательно, $\operatorname{mes}(E - H) = 0$, т. е. E измеримо.

Пусть теперь E' — произвольное измеримое множество, причём $E_\xi \subset E'$ с точностью до множества меры нуль при любом ξ. Присоединим к E' все его точки плотности. Полученное множество $E'^* \supset E_\xi^*$ при любом ξ, т. е. $E'^* \supset E$, или $E \subset E'$ с точностью до множества меры нуль.

Обозначим через $x(t)$ характеристическую функцию множества E. Тогда ясно, что $x_\xi \leqslant x$ при любом ξ. С другой стороны, из сказанного выше легко следует, что если $x'(t)$ — характеристическая функция другого измеримого множества E' и при этом $x_\xi \leqslant x'$, то и $x \leqslant x'$. Отсюда уже легко следует, что $x = \sup x_\xi$.

Перейдём теперь к произвольному ограниченному сверху множеству из S, состоящему из функций $x_\xi(t)$. Нужно доказать существование точной верхней грани множества $\{x_\xi\}$. Так как ниже (в гл. VI) это будет установлено другим, более коротким путём, то мы ограничимся сейчас лишь указанием этой грани.

---

*) Здесь мы устанавливаем этот факт, пользуясь специальными рассуждениями; ниже, в гл. VI, это предложение будет вновь получено на основании некоторых общих теорем.

Положим $E_{\xi, a} = T[x_\xi(t) > a]$ ($\xi \in \Xi$, a — любое вещественное число). Затем обозначим через $E^{(a)}$ сумму множеств точек плотности всех $E_{\xi, a}$ при фиксированном a. После этого функция $x(t)$ определяется по формуле:

$$x(t) = \sup_{t \in E^{(a)}} \{a\}.$$

Нетрудно проверить, что $x = \sup x_\xi$.

3.12. Выясним смысл (o)-сходимости и (t)-сходимости в S. Так как для счётных множеств точные границы можно определять по точечным значениям, то $x = \overline{\lim}\, x_n$ означает, что $x(t) = \overline{\lim}\, x_n(t)$. А тогда $x_n \xrightarrow{(o)} x$ означает, что $x_n(t) \longrightarrow x(t)$ почти всюду.

Проверим, что $(*)$-сходимостью для сходимости измеримых функций почти всюду является сходимость по мере: следовательно, (t)-сходимость в S означает сходимость по мере.

В самом деле, по известной теореме Рисса из последовательности, сходящейся по мере, всегда можно выделить почти всюду сходящуюся подпоследовательность. С другой стороны, если последовательность $\{x_n(t)\}$ не сходится по мере к $x(t)$, то для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\operatorname{mes} T[|x_n(t) - x(t)| \geqslant \varepsilon] > \delta > 0$$

для бесконечного множества значений $n = n_1, n_2, \ldots$. Но тогда из подпоследовательности $\{x_{n_i}\}$ нельзя выделить частичную, которая сходилась бы к $x(t)$ по мере, а тем более почти всюду.

3.2. K-пространство V функций ограниченного изменения. Рассмотрим множество V функций ограниченного изменения $x(t)$, заданных на некотором отрезке $[a, b]$, с обычной линеаризацией. Элемент $x \in V$ считаем $> \mathbf{0}$, если $x(a) \geqslant 0$, а функция $x(t)$ — не убывающая и отлична от тождественного нуля. При таком определении упорядочения соотношение $x \geqslant y$ для элементов V означает, что:

1) $x(a) \geqslant y(a)$;

2) приращение $x(t)$ на любом промежутке из $[a, b]$ не меньше приращения $y(t)$ на том же промежутке, т. е.

$$\Delta x(t) = x(t + \Delta t) - x(t) \geqslant \Delta y(t) = y(t + \Delta t) - y(t)$$

(для $\Delta t > 0$).

Выполнение первых четырёх аксиом K-пространства очевидно. При этом x_+ есть функция

$$x_+(t) = [x(a)]_+ + \underset{a \leqslant \tau \leqslant t}{\text{положительное изменение}}\ x(\tau)\ ^{*)},$$

---

*) *Положительное изменение* $x(t)$ на отрезке $[a, t]$ определяется как $\sup \sum_{i=0}^{n-1} [x(t_{i+1}) - x(t_i)]_+$ для всевозможных разбиений $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$. Аналогично определяется *отрицательное изменение*. Смысл α_+ и α_- для вещественных чисел α был указан на стр. 34.

а x_- и $|x|$ определяются по аналогичным формулам:

$$x_-(t) = [x(a)]_- + \underset{a \leqslant \tau \leqslant t}{\text{отрицательное изменение}}\ x(\tau),$$

$$|x|(t) = |x(a)| + \operatorname*{var}_a^t x(\tau) \text{ (полное изменение).}$$

3.21. Для любого ограниченного сверху множества $x_\xi \in V$ $(\xi \in \Xi)$ точная верхняя грань определяется по формуле

$$x(t) = \inf y_\eta(t),$$

где $\{y_\eta\}$ — множество всевозможных верхних границ множества $\{x_\xi\}$, а нижняя грань вычисляется по точечным значениям функций $y_\eta(t)$.

Наметим ход доказательства. Ясно, что $x_\xi(a) \leqslant x(a)$ при любом $\xi \in \Xi$. Пусть $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое η, что

$$y_\eta(t_2) \geqslant x(t_2) > y_\eta(t_2) - \varepsilon,$$

а тогда

$$x(t_2) - x(t_1) > y_\eta(t_2) - y_\eta(t_1) - \varepsilon \geqslant x_\xi(t_2) - x_\xi(t_1) - \varepsilon$$

при любом ξ. Вследствие произвольности ε это означает, что

$$\Delta x_\xi(t_1) \leqslant \Delta x(t_1).$$

Мы убедились таким образом, что $x \geqslant x_\xi$, т. е. x — верхняя граница; так же легко проверить, что $x \leqslant y_\eta$ и, значит, $x = \sup x_\xi$.

Смысл (o)- и (t)-сходимостей в V будет выяснен нами позднее. Однако сейчас мы можем предложить читателю установить прямым путём, что (t)-сходимость x_n к x равносильна соотношению

$$|x_n(a) - x(a)| + \operatorname*{var}_a^b [x_n(t) - x(t)] \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

3.3. K-пространство s всех числовых последовательностей. Обозначим через s множество всех числовых последовательностей $x = \{\xi_k\}$ (ξ_k — вещественные числа). Числа ξ_k будем называть координатами x.

Линеаризуем это множество следующим образом: если $x = \{\xi_k\}$ $y = \{\eta_k\}$, то $x + y = \{\xi_k + \eta_k\}$, $\alpha x = \{\alpha \xi_k\}$. Нулевым элементом в s, очевидно, является последовательность, состоящая из одних нулей. Соотношение $x > \mathbf{0}$ определяем в s так: $\xi_k \geqslant 0$ при всех k и $\xi_k > 0$ хоть при одном k. Легко видеть, что s становится K-пространством. Верхняя грань ограниченного множества вычисляется по координатам, т. е. если $x_\mu = \{\xi_k^{(\mu)}\}$, $\xi_k = \sup\limits_\mu \xi_k^{(\mu)}$ и $x = \{\xi_k\}$, то $x = \sup\limits_\mu x_\mu$.

3.31. (o)-сходимость в s, очевидно, означает сходимость по координатам, т. е. $x_n \xrightarrow{(o)} x$ означает, что $\xi_k^{(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} \xi_k$ при всех k. Ясно, что для

такой сходимости ($*$)-сходимость совпадает с ней самой, поэтому в s (t)- и (o)-сходимости совпадают.

Ниже, по мере развития изложения теории K-пространств, мы рассмотрим другие важные примеры.

§ 4. Ряды

4.1. Основные понятия и свойства рядов. С целью некоторого упрощения используемого в дальнейшем вычислительного аппарата перенесём на K-пространства основные понятия и результаты теории бесконечных рядов.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (или $x_1+x_2+\ldots+x_n+\ldots$), состоящий из элементов K-пространства, называется (o)-сходящимся, если существует конечный (o)-$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k$, называемый суммой ряда. Аналогично можно ввести понятие (t)-сходимости ряда. Сразу из определения вытекают обычные простейшие свойства рядов, а также необходимое условие сходимости: $x_n \to \mathbf{0}$ в том же смысле, в каком сходится ряд. Для положительного ряда (т. е. такого ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, в котором все $x_n \geqslant \mathbf{0}$) сохраняется известный результат классического анализа: для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы множество частичных сумм $\sum_{k=1}^{n} x_k$ было ограничено. При этом для положительных рядов понятия (o)-сходимости и (t)-сходимости совпадают. Кроме того, из 2.12а) сразу следует, что для сходящегося положительного ряда сумма ряда совпадает с верхней гранью частичных сумм.

Если к последовательности частичных сумм ряда применить теорему об (o)-полноте K-пространства (см. 2.21), то мы сразу получим общий критерий (o)-сходимости ряда, аналогичный классическому критерию Коши. Точную формулировку его предоставляем читателю.

4.11. Для положительных рядов действует признак сходимости, основанный на сравнении двух рядов: если $x_n \leqslant y_n$ при всех n, начиная с некоторого, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ тоже сходится. Доказательство — обычное.

4.12. Если ряд $\sum_n |x_n|$ сходится, то ряд $\sum_n x_n$ также (o)-сходится. В этом случае последний ряд называется абсолютно сходящимся.

Для доказательства (o)-сходимости ряда $\sum_n x_n$ достаточно представить его как результат почленного вычитания рядов $\sum_n (x_n)_+$

и $\sum_n (x_n)_-$. Каждый из этих рядов (o)-сходится по признаку сравнения 4.11, так как сходится ряд $\sum_n |x_n|$. Но из определения сходимости сразу ясно, что при почленном вычитании сходимость сохраняется. При этом, очевидно,

$$\sum_n x_n = \sum_n (x_n)_+ - \sum_n (x_n)_- .$$

4.13. Если все члены (o)-сходящегося ряда $\sum_n x_n$ попарно дизъюнктны, то $\sum_n x_n = \mathbf{S}\{x_n\}$. (Это является прямым обобщением предложения 1.71 на случай бесконечного множества слагаемых *)).

Доказательство. По определению, $\sum_n x_n = (o)\text{-}\lim y_n$, где $y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Следовательно, множество $\{y_n\}$ ограничено, а тогда и множество модулей $\{|y_n|\}$ ограничено (см. 1.53). Из 1.63b) и 1.66 следует, что

$$|y_n| = \sum_{k=1}^{n} |x_k| ,$$

а тогда множество $\{x_k\}$ ограничено, т. е. имеет смысл его соединение. Из определения соединения и свойств предела сразу следует, что

$$\mathbf{S}\{x_k\} = \sup (x_k)_+ - \sup (x_k)_- = \lim_{n\to\infty} [\sup_{1\leqslant k\leqslant n} (x_k)_+ - \sup_{1\leqslant k\leqslant n} (x_k)_-] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\sum_{k=1}^{n} (x_k)_+ - \sum_{k=1}^{n} (x_k)_-] = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

ч. и тр. д.

4.14. Если x_n попарно дизъюнктны и ограничены в совокупности, то ряд $\sum_n x_n$ абсолютно сходится.

Доказательство. Пусть $|x_n| \leqslant x_0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$ Тогда и любая частичная сумма

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| = \sup_{1\leq k\leq n} |x_k| \leqslant x_0.$$

Отсюда сразу следует сходимость ряда $\sum_n |x_n|$.

---

*) Легко видеть, что если ряд состоит из попарно дизъюнктных членов и (t)-сходится, то он также и (o)-сходится.

4.2. Ряды, бесконечные в двух направлениях. Пусть нам задана бесконечная в двух направлениях последовательность элементов x_n, т. е. индекс n принимает все целые значения от $-\infty$ до $+\infty$. Если сходится в каком-нибудь смысле каждый из рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ и } \sum_{n=0}^{-\infty} x_n \qquad (\text{т. е. } x_0 + x_{-1} + x_{-2} + \ldots),$$

а s_1 и s_2 — их суммы, то мы будем считать сходящимся в том же смысле обобщённый бесконечный в двух направлениях ряд

$$\sum_{-\infty}^{\infty} x_n,$$

а его суммой будем называть элемент $s = s_1 + s_2$. Таким образом,

$$s = \lim_{N_1, N_2 \to +\infty} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x_n,$$

где предел следует понимать или в смысле (t)-сходимости, или в смысле (o)-сходимости. Ясно, что если ряд сходится, то

$$s = \sum_{n=p}^{\infty} x_n + \sum_{n=p-1}^{-\infty} x_n$$

при любом p, т. е. ни понятие сходимости, ни сумма ряда не зависят от того, каким именно членом мы разобьём данный обобщённый ряд на два обыкновенных бесконечных ряда.

ГЛАВА II

РАЗЛОЖЕНИЕ И СОЕДИНЕНИЕ K-ПРОСТРАНСТВ

Аналогом понятий разложения в прямое произведение в теории групп и ортогонального разложения в теории гильбертовых пространств служит в теории K-пространств понятие разложения K-пространства по его компонентам. Теория таких разложений тесно связана со свойствами дизъюнктных элементов и их соединений, изученными в предыдущей главе, и требует введения понятия подпространства и его специальных случаев: правильного и нормального подпространства.

§ 1. Различные виды подпространств K-пространства

1.1. Определение подпространства. Пусть X — K-пространство и E — некоторое множество его элементов. Будем говорить, что алгебраические операции и полуупорядочение в E индуцированы пространством X, если они определены в E так же, как и в X. Точнее, если $x, y \in E$ и λ — вещественное число, то под суммой элементов x и y в E будем понимать элемент $x+y \in X$ и под произведением числа λ на элемент x в E — элемент $\lambda x \in X$ (элементы $x+y$ и λx могут и не принадлежать E). Соотношение $x<y$ по определению имеет место в E в том и только в том случае, когда оно имеет место в X.

Во всём дальнейшем изложении, при рассмотрении какого-либо множества $E \subset X$, будем предполагать, что алгебраические операции и полуупорядочение в E индуцированы пространством X.

Существенно заметить, что грани множества $M \subset E$, взятые в E, если последнее рассматривать, как частично упорядоченное множество, могут не совпадать с гранями M в X; поэтому введём обозначения: $\sup_E M$ и $\inf_E M$, смысл которых ясен (когда речь будет итти о точных гранях M в X, будем писать просто $\sup M$ и $\inf M$).

1.11. Так как множество границ для M, принадлежащих E, составляет подмножество множества всех границ для M в X, то справедливы соотношения

$$\sup_E M \geqslant \sup M \quad \text{и} \quad \inf_E M \leqslant \inf M \qquad (M \subset E \subset X).$$

Более того, множество, ограниченное в X, может оказаться неограниченным в E.

1.12. Определение. Множество X_1 элементов K-пространства X называется *подпространством* пространства X, если X_1, в силу индуцированных в нём алгебраических операций и полуупорядочения, само представляет собой K-пространство.

Иными словами, X_1 есть подпространство пространства X, если:

1) X_1 — линейное подмножество из X; это означает, что из $x, y \in X_1$ следует $x+y \in X_1$ и $\alpha x \in X_1$ (α—любое вещественное число).

2) Для всякого $x \in X$, найдётся $y \in X_1$, удовлетворяющий условиям: $y \geqslant \mathbf{0}$ и $y \geqslant x$.

3) Для всякого множества $E \subset X_1$, ограниченного сверху в X_1 (ограниченного элементом из X_1), существует верхняя грань в X_1 (которая может и не совпасть с верхней гранью для E в X).

Действительно, X_1 в силу 1) есть линейное множество. Аксиомы I, II и IV K-пространства имеют место в X_1, так как X_1 — подмножество из X. Аксиома III следует из 2) и, наконец, аксиома V — из 3).

Из 1.11 непосредственно вытекают следующие утверждения:

1.13. a) Если X_1 — подпространство пространства X и $x \in X_1$, то

$$x^+_{X_1} \geqslant x^+, \quad x^-_{X_1} \geqslant x^- \quad \text{и} \quad |x|_{X_1} \geqslant |x|$$

(символ $x^+_{X_1}$ означает положительную часть элемента x, вычисленную в X_1; аналогичный смысл имеют и другие обозначения):

b) Если $x_n \to \mathbf{0}$ монотонно в X, $x_n \in X_1$, то $x_n \to \mathbf{0}$ монотонно и в X_1.

1.2. Правильные и нормальные подпространства. Среди подпространств K-пространства наибольшее значение имеют правильные и нормальные подпространства.

1.21. Определение. Подпространство $X_1 \subset X$ называется *правильным* (правильно содержится в X), если для любого множества $E \subset X_1$, ограниченного сверху в X, $\sup E \in X_1$.

Отсюда следует, что $\sup_{X_1} E = \sup E$. Действительно, $\sup E \in X_1$ и является верхней границей E в X_1, следовательно, $\sup E \geqslant \sup_{X_1} E$. Вместе с тем, в силу 1.11, $\sup E \leqslant \sup_{X_1} E$, так что $\sup_{X_1} E = \sup E$.

Справедливо и двойственное соотношение: если X_1 — правильное подпространство пространства X и E — ограниченное снизу в X множество элементов из X_1, то $\inf_{X_1} E = \inf E$.

1.22. Пусть X_1 — правильное подпространство пространства X; тогда:

a) Каков бы ни был элемент $x \in X_1$, x_+, x_- и $|x|$, вычисленные в X_1, совпадают соответственно с x_+, x_- и $|x|$, вычисленными в X.

b) Если $x, y \in X_1$, то соотношения $x \,\mathrm{d}\, y$ в X_1 и $x \,\mathrm{d}\, y$ в X равносильны.

c) Если $x_n \in X_1$ и $x_n \to x$ в X, то $x \in X_1$ и $x_n \to x$ в X_1.

d) Если $x_n \to x$ в X_1, то $x_n \to x$ и в X.

e) Если $x_\alpha \in X_1$ и $x = \mathbf{S}\, x_\alpha$, то $x \in X_1$.

Таким образом, если $x_n \in X_1$ и $x \in X_1$, то соотношения $x_n \to x$ в X_1 и $x_n \to x$ в X равносильны.

Справедливость утверждений a) — e) следует из того, что точные грани всякого множества $E \subset X_1$ в X и X_1 совпадают.

1.23. Пример правильного подпространства. Пусть S — K-пространство измеримых функций, заданных в промежутке $[0, 1]$ (3.1 гл. I). Через S_1 обозначим совокупность функций $x(t)$, принимающих постоянные (с точностью до множества меры нуль) значения на каждом промежутке $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Нетрудно проверить, что S_1 — правильное подпространство пространства S и притом изоморфное s (3.3 гл. I).

1.24. Введём теперь понятие нормального подпространства.

Определение. Подпространство $X_1 \subset X$ называется *нормальным* (нормально содержится в X), если из $x \in X_1$, $y \in X$, $|y| \leqslant |x|$ следует $y \in X_1$.

Это условие будем называть *условием нормальности*.

Отметим следующие простые предложения, дающие возможность установить, что некоторое множество элементов K-пространства X является его нормальным подпространством.

1.25. Линейное подмножество $X_1 \subset X$, нормально содержащееся в X, представлает собой нормальное подпространство пространства X.

Доказательство. Пусть $x \in X_1$; так как $|x| \leqslant |x|$, $x_+ \leqslant |x|$ и $x_- \leqslant |x|$, то, по условию нормальности, $|x|$, x_+ и x_- принадлежат X_1. Пусть теперь множество $E \subset X_1$ ограничено сверху элементом $x_0 \in X_1$. Покажем, что элемент $x^* = \sup E$ принадлежит X_1. Действительно, для любого элемента $x \in E$ имеем $x \leqslant x^* \leqslant x_0$. Отсюда (см. 1.52 i) гл. I)

$$|x^*| \leqslant |x| \vee |x_0| \leqslant |x| + |x_0|,$$

и так как по линейности множества X_1 элемент $|x| + |x_0|$ принадлежит X_1, то и $x^* \in X_1$, т. е. X_1 — подпространство пространства X. Вместе с тем X_1 удовлетворяет, по предположению, условию нормальности, так что X_1 — нормальное подпространство пространства X.

1.26. Пусть E — множество положительных элементов из X, удовлетворяющее условиям:

1) если $x, y \in E$, то $x + y \in E$;

2) если $x \in E$ и $\alpha \geqslant 0$, то $\alpha x \in E$;

3) если $x \in F$, $0 < y \leqslant x$, то $y \in E$.

Тогда совокупность X_1 элементов из X таких, что $|x| \in E$, образует нормальное подпространство пространства X.

Действительно, из указанных условий легко следует, что X_1 — линейное подмножество множества X и в силу 3) удовлетворяет условию нормальности.

1.27. Замечание. При доказательстве предложения 1.25 установлено попутно следующее предложение.

Если X_1 — нормальное подпространство пространства X и E — ограниченное в X_1 множество его элементов, то точные грани E в X_1 совпадают с точными гранями E в X.

В частности:

a) Если $x \in X_1$, то x_+, x_- и $|x|$ в X_1 равны соответственно x_+, x_- и $|x|$ в X.

b) Если $x, y \in X_1$, то соотношения $x \, \mathrm{d} \, y$ в X_1 и $x \, \mathrm{d} \, y$ в X равносильны.

c) Если $x_n \to x$ в X_1, то $x_n \to x$ в X.

d) Если $x_n \in X_1$, $x \in X$, то для того чтобы $x \in X_1$ и $x_n \to x$ в X_1, необходимо и достаточно, чтобы $x_n \to x$ в X и множество $\{x_n\}$ было ограничено в X_1.

1.28. Пример нормального подпространства. Пусть S — K-пространство измеримых функций, заданных на множестве T (см. 3.1 гл. I). Через M обозначим совокупность почти всюду ограниченных в T измеримых функций $x(t)$ (эквивалентные функции отождествляются как и в S). M — линейное подмножество пространства S и притом, очевидно, удовлетворяющее условию нормальности, так что M — нормальное подпространство пространства S. Вместе с тем M не является правильным подпространством пространства S, так как не всякое ограниченное в S множество элементов из M будет ограниченным в M.

1.3. Компонента K-пространства. В теории разложения K-пространств основное значение имеет понятие правильного и одновременно нормального подпространства K-пространства X. Такое подпространство будем называть *компонентой* пространства X.

Тривиальными примерами компонент K-пространства X служат само X и подпространство, состоящее только из нулевого элемента пространства X.

Нижеследующие утверждения вытекают непосредственно из определений правильного и нормального подпространств и имеют место для каждого из них в отдельности, а тем самым оказываются справедливыми и для компонент K-пространства.

1.31. a) Если X_1 — компонента пространства X, а X_2 — компонента пространства X_1, то X_2 — компонента пространства X.

b) Если X_1 и X_2 — компоненты пространства X и $X_2 \subset X_1$, то X_2 — компонента пространства X_1.

c) Пересечение любого множества компонент пространства X есть компонента этого пространства.

1.32. Определение. Пусть E — произвольное множество элементов K-пространства X. Пересечение X_E всех компонент про-

странства X, содержащих E, называется *подпространством* пространства X, *порождённым множеством* E.

X_E — минимальная компонента, содержащая E. В частности, если E состоит из одного элемента x_0, то X_E называется подпространством, порождённым элементом x_0, и обозначается X_{x_0}.

Определение. Пусть E — произвольное множество элементов K-пространства X. Множество X'_E всех элементов $x \in X$, дизъюнктных к E, называется *дизъюнктным дополнением* множества E.

1.33. Дизъюнктное дополнение X'_E всякого множества $E \subset X$ есть компонента пространства X.

Доказательство. Из 1.66 и 1.63c) гл. I следует, что X'_E — линейное подмножество пространства X. Если $x \in X'_E$, $y \in X$ и $|y| \leqslant |x|$, то $x \,\mathrm{d}\, E$ и подавно $y \,\mathrm{d}\, E$, следовательно, $y \in X'_E$, так что X'_E удовлетворяет условию нормальности. Тогда по 1.25 X'_E — нормальное подпространство пространства X.

Пусть множество $M \subset X'_E$ ограничено сверху в X. Так как $M \,\mathrm{d}\, E$, то по 1.65 гл. I $\sup M \,\mathrm{d}\, E$ и, таким образом, $\sup M \in X'_E$; это означает, что X'_E — правильное подпространство пространства X. Предложение полностью доказано.

1.34. Если $E_1 \subset X$, $E_2 \subset X$ и $E_1 \,\mathrm{d}\, E_2$, то $X_{E_1} \,\mathrm{d}\, X_{E_2}$.

Доказательство. По определению, X'_{E_2} состоит из всех элементов пространства X, дизъюнктных к E_2, и так как $E_1 \,\mathrm{d}\, E_2$, то $X'_{E_2} \supset E_1$. По доказанному (1.33), X'_{E_2} — компонента пространства X, притом содержащая множество E_1, так что X'_{E_2} содержит X_{E_1} — компоненту, порождаемую множеством E_1. Но $X'_{E_2} \,\mathrm{d}\, E_2$; следовательно, тем более $X_{E_1} \,\mathrm{d}\, E_2$. Заменяя E_2 на X_{E_1} и E_1 на E_2, из последнего соотношения найдем, что $X_{E_2} \,\mathrm{d}\, X_{E_1}$.

Следствие 1. X_E дизъюнктно к X'_E — дизъюнктному дополнению множества E.

Действительно, $E \,\mathrm{d}\, X'_E$, а тогда и $X_E \,\mathrm{d}\, X'_E$.

Следствие 2. Пусть $x \,\mathrm{d}\, y$; тогда $X_x \,\mathrm{d}\, X_y$.

§ 2. Разложение K-пространства на компоненты

Система попарно дизъюнктных компонент K-пространства при некоторых условиях образует его «разложение». При этом всякий элемент пространства может быть представлен единственным образом в виде соединения своих «проекций» на соответствующие компоненты.

2.1. Проектирование на компоненту.

Определение. Пусть X — K-пространство и X_0 — его компонента. Для каждого $x \geqslant \mathbf{0}$, $x \in X$ определим элемент $\mathrm{Pr}_{X_0} x$, полагая

$$\mathrm{Pr}_{X_0} x = \sup_{y \in X_0,\ \mathbf{0} \leqslant y \leqslant x} \{y\}, \tag{1}$$

где верхняя грань определяется для множества всех y, удовлетворяющих указанным условиям. В случае произвольного $x \in X$ полагаем

$$\mathrm{Pr}_{X_0} x = \mathrm{Pr}_{X_0} x_+ - \mathrm{Pr}_{X_0} x_-. \tag{2}$$

Элемент $\mathrm{Pr}_{X_0} x$ называется *проекцией* элемента x на компоненту X_0.

Замечание. Так как X_0 — правильное подпространство пространства X, то $\mathrm{Pr}_{X_0} x \in X_0$ при всяком $x \in X$ (см. 1.21).

В дальнейшем, когда это не может привести к недоразумениям, мы будем вместо $\mathrm{Pr}_{X_0} x$ писать просто $\mathrm{Pr}\, x$.

2.11. a) Если $x \geqslant \mathbf{0}$, то $\mathbf{0} \leqslant \mathrm{Pr}\, x \leqslant x$.

b) $\mathrm{Pr}(-x) = -\mathrm{Pr}\, x$.

Следует непосредственно из определения проекции (см. формулы (1) и (2)).

2.12. a) $|\mathrm{Pr}\, x| \leqslant |x|$.

b) Если $x \,\mathrm{d}\, y$, то $\mathrm{Pr}\, x \,\mathrm{d}\, \mathrm{Pr}\, y$ (иными словами, операция проектирования дизъюнктна).

Действительно:

a) $|\mathrm{Pr}\, x| = |\mathrm{Pr}\, x_+ - \mathrm{Pr}\, x_-| \leqslant \mathrm{Pr}\, x_+ + \mathrm{Pr}\, x_- \leqslant x_+ + x_- = |x|$ (см. 2.11a), а также 1.52d) гл. I).

b) Так как $|x| \,\mathrm{d}\, |y|$, а $|\mathrm{Pr}\, x| \leqslant |x|$ и $|\mathrm{Pr}\, y| \leqslant |y|$, то $\mathrm{Pr}\, x \,\mathrm{d}\, \mathrm{Pr}\, y$.

2.13. a) $x \in X_0$ равносильно $\mathrm{Pr}\, x = x$.

b) Соотношения $x \,\mathrm{d}\, X_0$ и $\mathrm{Pr}\, x = \mathbf{0}$ равносильны.

Доказательство. a) Пусть $x \in X_0$, $x \geqslant \mathbf{0}$; тогда, очевидно, $\mathrm{Pr}\, x = x$. Если же $x = x_+ - x_-$ — любой элемент из X_0, то $x_+, x_- \in X_0$ и $\mathrm{Pr}\, x_+ = x_+$, $\mathrm{Pr}\, x_- = x_-$ (так как $x_+, x_- \geqslant \mathbf{0}$). Отсюда

$$\mathrm{Pr}\, x = \mathrm{Pr}\, x_+ - \mathrm{Pr}\, x_- = x_+ - x_- = x.$$

Обратно, если $x = \mathrm{Pr}\, x$, то $x \in X_0$, так как $\mathrm{Pr}\, x \in X_0$ для любого x по сделанному выше замечанию.

b) Пусть $x \,\mathrm{d}\, X_0$; тогда x_+ и x_- дизъюнктны к X_0. Если $\mathbf{0} \leqslant y \leqslant x_+$, то $y \,\mathrm{d}\, X_0$ и в силу определения проекции, $\mathrm{Pr}\, x_+ = \mathbf{0}$. Аналогично $\mathrm{Pr}\, x_- = \mathbf{0}$ и, таким образом, $\mathrm{Pr}\, x = \mathbf{0}$.

Пусть, обратно, $\mathrm{Pr}\, x = \mathrm{Pr}\, x_+ - \mathrm{Pr}\, x_- = \mathbf{0}$. Тогда $\mathrm{Pr}\, x_+ = \mathrm{Pr}\, x_- = \mathbf{0}$ (см. 2.12b)). Покажем, что $x_+, x_- \,\mathrm{d}\, X_0$. Допустим, что, например, x_+ не дизъюнктен к X_0. Тогда существует $x_0 \in X_0$ такой, что $y = x_+ \wedge |x_0| > \mathbf{0}$. Но при этом благодаря нормальности пространства X_0, $y \in X_0$ и по формуле (1) мы получим $\mathrm{Pr}\, x_+ > \mathbf{0}$, вопреки установленному выше. Итак, $x_+ \,\mathrm{d}\, X_0$ и аналогично $x_- \,\mathrm{d}\, X_0$. А тогда и $x = x_+ - x_-$ дизъюнктен к X_0 (см. 1.63c) и 1.66 гл. I).

2.14. a) Операция проектирования аддитивна, т. е. для любых двух элементов $x, y \in X$

$$\mathrm{Pr}(x + y) = \mathrm{Pr}\, x + \mathrm{Pr}\, y.$$

b) Операция проектирования однородна, т. е. для всякого $x \in X$ и любого вещественного числа α

$$\Pr(\alpha x) = \alpha \Pr x.$$

Доказательство. a) Пусть сначала $x \geqslant \mathbf{0}$, $y \geqslant \mathbf{0}$. Если $z \in X_0$, $\mathbf{0} \leqslant z \leqslant x + y$, то найдутся элементы x_1 и y_1 такие, что $\mathbf{0} \leqslant x_1 \leqslant x$, $\mathbf{0} \leqslant y_1 \leqslant y$ и $z = x_1 + y_1$ (см. 1.42 гл. I). В таком случае, $x_1 \in X_0$, $y_1 \in X_0$ и

$$z = x_1 + y_1 \leqslant \Pr x + \Pr y.$$

Переходя к верхней грани по всем $z \in X_0$, удовлетворяющим условию $\mathbf{0} \leqslant z \leqslant x + y$, получим:

$$\Pr(x + y) \leqslant \Pr x + \Pr y.$$

Далее, так как $\Pr x \in X_0$, $\Pr y \in X_0$ и $\Pr x \leqslant x$, $\Pr y \leqslant y$, то $\Pr x + \Pr y \in X_0$, $\Pr x + \Pr y \leqslant x + y$ и, по определению проекции,

$$\Pr(x + y) \geqslant \Pr x + \Pr y.$$

Сопоставление полученных неравенств доказывает предложение a) для случая положительных слагаемых.

Пусть теперь $z = x - y$, где x, $y \geqslant \mathbf{0}$. Тогда (см. 1.5 гл. I) $x \geqslant z_+$, т. е. $x = z_+ + u$, где $u \geqslant \mathbf{0}$; отсюда $y = z_- + u$ (так как $z = z_+ - z_-$). По доказанному для положительных элементов имеем:

$$\Pr x - \Pr y = (\Pr z_+ + \Pr u) - (\Pr z_- + \Pr u) = \Pr z_+ - \Pr z_- = \Pr z$$

(последнее — по определению проекции).

Пусть, наконец, x и y — произвольные элементы пространства X. Имеем:

$$\begin{aligned}\Pr(x + y) &= \Pr[(x_+ + y_+) - (x_- + y_-)] = \\ &= \Pr(x_+ + y_+) - \Pr(x_- + y_-) = \\ &= \Pr x_+ + \Pr y_+ - \Pr x_- - \Pr y_- = \Pr x + \Pr y.\end{aligned}$$

b) Пусть $x \geqslant \mathbf{0}$ и $\alpha > 0$; тогда, по определению проекции,

$$\Pr(\alpha x) = \sup_{y \in X_0,\ \mathbf{0} \leqslant y \leqslant \alpha x} \{y\} = \sup_{y \in X_0,\ \mathbf{0} \leqslant \frac{y}{\alpha} \leqslant x} \left\{\alpha \frac{y}{\alpha}\right\} = \alpha \sup \frac{y}{\alpha} = \alpha \Pr x$$

Если $\alpha < 0$, $x \geqslant \mathbf{0}$, то $\Pr(\alpha x) = -\Pr(-\alpha x) = -(-\alpha)\Pr x = \alpha \Pr x$.

Если $\alpha = 0$, доказываемое соотношение очевидно.

В случае, когда и x и α — произвольные, то, по аддитивности операции проектирования и 2.11b),

$$\begin{aligned}\Pr(\alpha x) = \Pr(\alpha x_+ - \alpha x_-) = \Pr(\alpha x_+) - \Pr(\alpha x_-) = \\ = \alpha \Pr x_+ - \alpha \Pr x_- = \alpha \Pr x.\end{aligned}$$

2.15. Пусть X_0 — компонента X, а X_1 — компонента X_0. Тогда для любого $x \in X$

$$\mathrm{Pr}_{X_1}[\mathrm{Pr}_{X_0} x] = \mathrm{Pr}_{X_1} x.$$

Доказательство. Достаточно привести доказательство для $x \geqslant \mathbf{0}$. Так как в этом случае $\mathrm{Pr}_{X_0} x \leqslant x$, то из определения проекции ясно, что

$$\mathrm{Pr}_{X_1}(\mathrm{Pr}_{X_0} x) \leqslant \mathrm{Pr}_{X_1} x.$$

Обратно, если $y \in X_1$ и $y \leqslant x$, то $y \leqslant \mathrm{Pr}_{X_0} x$ и $y \leqslant \mathrm{Pr}_{X_1}(\mathrm{Pr}_{X_0} x)$, а тогда $\mathrm{Pr}_{X_1} x \leqslant \mathrm{Pr}_{X_1}(\mathrm{Pr}_{X_0} x)$. Сопоставлением полученных неравенств утверждение 2.15. доказано.

2.2. Разложение K-пространства по его компонентам. В настоящем пункте и в дальнейшем нам понадобится следующее определение.

2.21. Определение. Множество $E \subset X$ *полно* в X, если соотношение $x \mathrm{d} E$ $(x \in X)$ влечёт за собой $x = \mathbf{0}$. Система множеств $E_\alpha (\alpha \in A)$ полна в X, если полна в X их теоретико-множественная сумма. В частности, множества E_α могут быть и подпространствами пространства X.

Теперь дадим основное определение:

2.22. Определение. *Разложением* K-пространства X называется всякая система $\{X_\alpha\} (\alpha \in \mathrm{A})$ его компонент (т. е. правильных и нормальных подпространств), удовлетворяющая следующим условиям:

1) компоненты X_α попарно дизъюнктны: $X_{\alpha'} \mathrm{d} X_{\alpha''} (\alpha' \neq \alpha'')$.

2) система $\{X_\alpha\}$ полна в X.

2.23. Каково бы ни было множество $E \subset X$, компоненты X_E и X'_E образуют разложение пространства X.

Действительно, компоненты X_E и X'_E дизъюнктны (см. 1.33 и 1.34, следствие 1). Если $x \mathrm{d} X_E$ и $x \mathrm{d} X'_E$, то из первого соотношения следует $x \in X'_E$, а тогда из второго следует $x \mathrm{d} x$, откуда $x = \mathbf{0}$. Таким образом, система $\{X_E, X'_E\}$ полна в пространстве X и образует его разложение.

2.24. Теорема о разложении. *Если система компонент $\{X_\alpha\} (\alpha \in A)$ образует разложение K-пространства X, то всякий элемент $x \in X$ представляется в виде*

$$x = \mathbf{S}_\alpha x_\alpha, \text{ где } x_\alpha = \mathrm{Pr}_{X_\alpha} x. \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $x \geqslant \mathbf{0}$. Следует показать, что

$$x = \mathbf{S}_\alpha x_\alpha = \sup_\alpha x_\alpha, \text{ где } x_\alpha = \mathrm{Pr}_{X_\alpha} x.$$

Положим $y = \mathbf{S}_\alpha x_\alpha$. Так как при всяком $\alpha \in A$ $\mathbf{0} \leqslant x_\alpha \leqslant x$, то $y = \sup x_\alpha \leqslant x$. Допустим, что $y < x$. Тогда $x = y + z$, причём $z > \mathbf{0}$ В силу полноты системы компонент $\{X_\alpha\}$, z не может быть дизъюнктен всем X_α, а тогда по 2.13 b) среди проекций $z_\alpha = \mathrm{Pr}_{X_\alpha} z \geqslant \mathbf{0}$ найдётся по крайней мере одна, отличная от нуля. Пусть $z_{\alpha_0} > \mathbf{0}$. Из $x_{\alpha_0} \leqslant y$ и $z_{\alpha_0} \leqslant z$ следует $x_{\alpha_0} + z_{\alpha_0} \leqslant x$. Но $x_{\alpha 0} + z_{\alpha_0} \in X_{\alpha_0}$, поэтому, по определению проекции, $x_{\alpha_0} \geqslant x_{\alpha_0} + z_{\alpha_0}$, откуда $z_{\alpha_0} \leqslant \mathbf{0}$, и мы пришли к противоречию. Итак,

$$x = \mathbf{S}_\alpha x_\alpha.$$

Пусть теперь x — произвольный элемент из X. Тогда, по свойствам соединений (см. 1.7 гл. I)

$$x = x_+ - x_- = \mathbf{S}\{x_+, -x_-\} = \mathbf{S}\{\mathbf{S}_\alpha x_\alpha^+, \quad -\mathbf{S}_\alpha x_\alpha^-\}\ ^{*)} =$$

$$= \mathbf{S}_\alpha\{\mathbf{S}_\alpha x_\alpha^+, \quad \mathbf{S}_\alpha(-x_\alpha^-)\} = \mathbf{S}_\alpha[\mathbf{S}\{x_\alpha^+, \quad -x_\alpha^-\}] =$$

$$= \mathbf{S}_\alpha(x_\alpha^+ - x_\alpha^-) = \mathbf{S}_\alpha x_\alpha.$$

2.25. Теорема о единственности представления. *Пусть X_α $(\alpha \in A)$ — система попарно дизъюнктных компонент K-пространства X и*

$$x = \mathbf{S}_\alpha x_\alpha \qquad (x_\alpha \in X_\alpha) \tag{4}$$

— представление элемента $x \in X$ в виде соединения элементов из X_α. Тогда

$$x_\alpha = \mathrm{Pr}_{X_\alpha} x, \tag{5}$$

т. е. представление (4) *единственно* **).

Доказательство. Пользуясь ассоциативностью соединений (1.72 гл. I), представим x в виде

$$x = \mathbf{S}(x_\alpha, y) = x_\alpha + y, \text{ где } y = \mathop{\mathbf{S}}_{\beta \neq \alpha} x_\beta.$$

Из замечания к 1.72 гл. I следует, что y дизъюнктен любому элементу из X_α, а значит, и самому X_α. А тогда в силу аддитивности операции проектирования и 2.13 a) — b)

$$\mathrm{Pr}_{X_\alpha} x = \mathrm{Pr}_{X_\alpha} x_\alpha + \mathrm{Pr}_{X_\alpha} y = x_\alpha,$$

ч. и тр. д.

В частности, представление (4), имеющее место для всякого $x \in X$ в случае, когда система $\{X_\alpha\}$ полна в X, также единственно. Таким образом, разложение пространства определяет, и притом единственным образом, разложение его элементов.

---

*) x_α^+ и x_α^- — проекции элементов x_+ и x_- на X_α.

**) Заметим, что система $\{X_\alpha\}$ не предполагается, вообще говоря, полной в X.

2.26. Пусть X_1 — компонента K-пространства X и $\{X_\alpha\}$ — система компонент пространства X_1 (и вместе с тем пространства X); тогда:

a) Если всякий элемент $x \in X_1$ может быть представлен в виде

$$x = \mathbf{S}_\alpha x_\alpha \qquad (x_\alpha \in X_\alpha),$$

то система $\{X_\alpha\}$ полна в X_1.

b) Если система $\{X_\alpha\}$ полна в X_1, то X_1 — наименьшая компонента пространства X, содержащая все X_α.

Справедливость утверждений a) и b) легко следует из определения полноты систем компонент в K-пространстве.

2.3. Некоторые свойства разложений.

2.31. Если $\{X_\alpha\}$ — система попарно дизъюнктных компонент K-пространства X и X' — компонента пространства X, порождаемая множеством $E = \bigcup\limits_\alpha X_\alpha$, то система $\{X_\alpha\}$ образует разложение K-пространства X'.

Доказательство. Так как X_α и X' — компоненты пространства X и $X_\alpha \subset X'$, то X_α — компоненты пространства X' (1.31 b)). X_α попарно дизъюнктны и в X'. Наконец, система $\{X_\alpha\}$ полна в X'. Действительно, если элемент $x \in X'$ дизъюнктен всем X_α, то он дизъюнктен и компоненте, порождённой множеством E, т. е. компоненте X'; в таком случае, $x \,\mathrm{d}\, x$ и $x = \mathbf{0}$.

2.32. Если система компонент $\{X_\alpha\}$ K-пространства X полна в X и X' — компонента пространства X, то система $\{X_\alpha \cap X'\}$ полна в X'. В частности, если X_α попарно дизъюнктны, то система $\{X_\alpha \cap X'\}$ образует разложение пространства X'.

Доказательство. Пересечение $X_\alpha \cap X'$ есть, очевидно, компонента пространства X'. Пусть теперь $x \in X'$ дизъюнктен всем $X_\alpha \cap X'$. Если $x \neq \mathbf{0}$, то найдётся $\alpha = \alpha_0$ такое, что

$$\mathrm{Pr}_{X_{\alpha_0}} |x| = y > \mathbf{0}.$$

При этом $y \in X_{\alpha_0}$, а так как $y \leqslant |x|$, то вместе с тем $y \in X'$, так что $y \in X_{\alpha_0} \cap X'$. Но в таком случае элемент x не дизъюнктен к $X_{\alpha_0} \cap X'$ вопреки предположению. Таким образом, $x = \mathbf{0}$ и система компонент $\{X_\alpha \cap X'\}$ полна в X'.

Вторая часть утверждения следует из самого определения разложения пространства по компонентам.

2.4. Соединение K-пространств. Операция разложения K-пространства по компонентам допускает обращение в том смысле, что, отправляясь от некоторой заданной системы K-пространств X_α, можно определить новое K-пространство X — их „соединение" — так, чтобы X разлагалось на компоненты, изоморфные X_α. Существенно заметить что „соединение" заданной системы K-пространств можно определить различными способами, но наиболее важным является „полное" соединение K-пространств.

2.41. Определение. Пусть $\{X_\alpha\}$ (α пробегает заданное множество A индексов) — произвольная система K-пространств. Рассмотрим абстрактные функции $x(\alpha)$, определённые на множество A, значения которых принадлежат соответствующему пространству X_α: $x(\alpha) \in X_\alpha$. В множестве всех таких функций, которое мы обозначим через X^*, можно естественным образом определить алгебраические операции и полуупорядочение, а именно:

1) Если $x, y \in X^*$, $x = x(\alpha)$, $y = y(\alpha)$, полагаем $(x+y)(\alpha) = x(\alpha) + y(\alpha)$.

2) Если λ — вещественное число, то полагаем $(\lambda x)(\alpha) = \lambda x(\alpha)$.

3) Соотношение $x > \mathbf{0}$ означает, что $x(\alpha) \geqslant \mathbf{0}$ при всех $\alpha \in A$ и $x(\alpha) \neq \mathbf{0}$.

Отсюда легко следует, что верхняя грань множества $E = \{x_\xi\} \subset X^*$ вычисляется „покоординатно", т. е.

$$(\sup_\xi x_\xi)(\alpha) = \sup_\xi x_\xi(\alpha).$$

Далее, $|x|$, x_+ и x_- для абстрактной функции $x(\alpha)$ вычисляются по следующим формулам:

$$|x|(\alpha) = |x(\alpha)|, \quad x_+(\alpha) = [x(\alpha)]_+, \quad x_-(\alpha) = [x(\alpha)]_-.$$

Ясно, что X^* представляет собой K-пространство. Назовём его *полным соединением* K-пространств X_α, а эти последние — его составляющими; в обозначении:

$$X^* = \bar{\mathbf{S}}_\alpha X_\alpha.$$

Элементы пространства X^* будем иначе обозначать $\bar{\mathbf{S}} x_\alpha\,[x_\alpha = x(\alpha)]$ и называть их соединениями элементов x_α. Хотя здесь термин «соединение» и не совпадает по смыслу с тем, который уже был введён в гл. I, но это не приведёт нас к недоразумениям. В обозначениях же мы устанавливаем различие: $\bar{\mathbf{S}}$ и $\mathbf{S}$.

2.42. Пусть X^* — полное соединение K-пространств X_α ($\alpha \in A$). Через X'_α обозначим совокупность всех соединений $\bar{\mathbf{S}} x_\beta$ ($\beta \in A$), удовлетворяющих условию: $x_\beta = \mathbf{0}$ при $\beta \neq \alpha$. Нетрудно видеть, что X'_α — компонента пространства X^*, изоморфная X_α.

Наряду с полным соединением пространств целесообразно рассматривать и другие виды соединений.

2.43. Определение. Пусть X^* — полное соединение K-пространств X_α ($\alpha \in A$). Всякое его нормальное подпространство X, содержащее все компоненты X'_α (см. 2.42), называется *соединением* пространств X_α и обозначается

$$X = \mathbf{S} X_\alpha.$$

Как и в случае полного соединения пространств совокупность X'_α образует компоненту пространства X, изоморфную X_α. Неоднознач-

ность определения соединения K-пространств оправдывается следующими двумя предложениями.

2.44. Первая теорема о соединении K-пространств. *Если X — соединение K-пространств X_α $(\alpha \in A)$, то система его компонент X'_α $(\alpha \in A)$, изоморфных соответствующим X_α, образует разложение пространства X.*

Доказательство. Компоненты $X'_{\alpha'}$ и $X'_{\alpha''}$ $(\alpha' \neq \alpha'')$ дизъюнктны. Действительно, если $x' \in X'_{\alpha'}$, $x'' \in X'_{\alpha''}$, $x' = \overline{\mathbf{S}} x'_\beta$, $x'' = \overline{\mathbf{S}} x''_\beta$, то $|x'| \wedge |x''| = \mathbf{0}$, так как $x'_\beta = \mathbf{0}$ при $\beta \neq \alpha'$, а $x''_\beta = \mathbf{0}$ при $\beta \neq \alpha''$. Если $x \in X$, $x \neq \mathbf{0}$, $x = \overline{\mathbf{S}} x_\alpha$, то $x_{\alpha_0} \neq \mathbf{0}$ при некотором $\alpha = \alpha_0$ и x не дизъюнктен компоненте X'_{α_0}. Отсюда следует полнота системы $\{X'_\alpha\}$ в X. В таком случае система $\{X'_\sigma\}$ образует разложение пространства X, ч. и тр. д.

2.45. Вторая теорема о соединении K-пространств. *Если система компонент $\{X_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ образует разложение K-пространства X, то X изоморфно некоторому соединению пространств X_α. Точнее, если X^* — полное соединение пространств X_α, то X изоморфно его нормальному подпространству X', элементами которого служат все соединения $x = \overline{\mathbf{S}} x_\alpha$, удовлетворяющие следующему условию: для каждого x совокупность значений x_α, рассматриваемых как элементы пространства X, ограничена в X.*

Доказательство. В силу теорем о разложении (2.24) и единственности представления (2.25), всякий элемент $x \in X$ допускает единственное представление вида

$$x = \underset{\alpha}{\mathbf{S}} x_\alpha \qquad (x_\alpha \in X_\alpha).$$

Отнесём ему соединение $\overline{\mathbf{S}} x_\alpha$ $(\alpha \in A)$. Совокупность всех таких соединений обозначим через X'. Очевидно, $X' \subset X^*$.

1) Покажем, прежде всего, что X' — подпространство пространства X^*, изоморфное X.

Пусть x и y — элементы пространства X, $x = \mathbf{S} x_\alpha$, $y = \mathbf{S} y_\alpha$. Если $x \neq y$, то по крайней мере для одного $\alpha = \alpha_0$, $x_{\alpha_0} \neq y_{\alpha_0}$ и, следовательно, $\overline{\mathbf{S}} x_\alpha \neq \overline{\mathbf{S}} y_\alpha$. Таким образом, различным элементам из X отвечают различные элементы из X'.

По теореме о разложении и принимая во внимание аддитивность операции проектирования (2.14а)), имеем:

$$x + y = \underset{\alpha}{\mathbf{S}} \operatorname{Pr}_{X_\sigma}(x + y) = \underset{\alpha}{\mathbf{S}} (\operatorname{Pr}_{X_\alpha} x + \operatorname{Pr}_{X_\alpha} y) = \underset{\alpha}{\mathbf{S}} (x_\alpha + y_\alpha);$$

отсюда следует, что элементу $x + y$ соответствует соединение

$$\underset{\alpha}{\overline{\mathbf{S}}} (x_\alpha + y_\alpha) = \underset{\alpha}{\overline{\mathbf{S}}} x_\alpha + \underset{\alpha}{\overline{\mathbf{S}}} y_\alpha.$$

Если α — вещественное число, то аналогично, имея в виду однородность операции проектирования (2.14b)), находим, что $\lambda x = \underset{\alpha}{\mathbf{S}}\lambda x_\alpha (x_\alpha \in X_\alpha)$ и потому элементу λx отвечает соединение $\overline{\mathbf{S}}\lambda x_\alpha = \lambda \overline{\mathbf{S}} x_\alpha$.

Очевидно, наконец, что элемент x и соответствующее ему соединение $\overline{\mathbf{S}} x_\alpha$ одновременно положительны или неположительны. Из всего этого следует, что соответствие $x \to \overline{\mathbf{S}} x_\alpha$ взаимно однозначно и сохраняет линейные соотношения и полуупорядочение. Таким образом, X' есть K-пространство, изоморфное X.

2) Покажем теперь, что X' нормально содержится в X^*, а затем, что $X' = \mathbf{S} X_\alpha$ (т. е. что X' есть соединение K-пространств X_α).

Пусть $|\overline{\mathbf{S}} x_\alpha| \leqslant |\overline{\mathbf{S}} y_\alpha|$, $\overline{\mathbf{S}} y_\alpha \in X'$, $\overline{\mathbf{S}} x_\alpha \in X^*$. В силу установленного выше изоморфизма между X' и X соединению $\overline{\mathbf{S}} y_\alpha$ отвечает элемент $y \in X$, а именно, $y = \mathbf{S} y_\alpha$, соединению $|\overline{\mathbf{S}} y_\alpha|$ — элемент $|y| = \mathbf{S}|y_\alpha|$ (1.73d) гл. I), $y_\alpha \in X_\alpha$; значит, так как $|\overline{\mathbf{S}} x_\alpha| \leqslant |\overline{\mathbf{S}} y_\alpha|$, то $\mathbf{S}|x_\alpha| = \sup |x_\alpha| < +\infty$, следовательно, X содержит элемент $|x| = \mathbf{S}|x_\alpha|$, и вместе с тем элемент $x = \mathbf{S} x_\alpha$. В таком случае $\overline{\mathbf{S}} x_\alpha \in X'$ и X' — нормальное подпространство пространства X^*.

Заметим теперь, что все соединения $\overline{\mathbf{S}} x_\beta$ $(\beta \in \mathrm{A})$, где $x_\beta = \mathbf{0}$ при $\beta \neq \alpha$, очевидно, принадлежат X', так что X' действительно есть соединение пространств X_α.

3) Покажем, наконец, что X' состоит из тех и только тех соединений $\overline{\mathbf{S}} x_\alpha$, для которых x_α в совокупности ограничены в X. Действительно, если $x \in X$, $x = \mathbf{S} x_\alpha (x_\alpha \in X_\alpha)$, то множество $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in \mathrm{A})$ ограничено в X. Обратно, если $\mathbf{S} y_\alpha \in X^*$ и совокупность $\{y_\alpha\}$ $(y_\alpha \in X_\alpha$, $\alpha \in \mathrm{A})$ ограничена в X, то в X существует элемент $y = \mathbf{S} y_\alpha$, откуда и следует, что $\overline{\mathbf{S}} y_\alpha \in X'$. Теорема полностью доказана.

Замечание. Принимая во внимание доказанную теорему, условимся писать $X = \underset{\alpha}{\mathbf{S}} X_\alpha$ и в том случае, когда X_α суть компоненты K-пространства X, образующие его разложение.

2.46. Пусть $X = \mathbf{S} X_\alpha$. В силу первой теоремы о соединениях существует система $\{X'_\alpha\}$ компонент пространства X, изоморфных соответствующим X_α, образующая его разложение. Поэтому можно говорить о проектировании X в X'_α. Принимая во внимание, что X'_α изоморфно X_α, удобно определить понятие проекции элемента $x \in X$ на составляющее пространство X_α: $\overline{\mathrm{Pr}}_{X_\alpha} x$. Именно, будем понимать под этим тот элемент пространства X_α, который отвечает элементу $\mathrm{Pr}_{X'_\alpha} x \in X'_\alpha$ при установленном изоморфизме между X_α и X'_α (см. 2.42).

ГЛАВА III

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ K-ПРОСТРАНСТВА

Основным результатом этой главы является теорема о том, что каждый элемент K-пространства может быть получен с помощью некоторого процесса интегрального типа из некоторых, заранее выделенных элементов того же K-пространства. Предварительно нам придётся изучить ряд важных понятий, представляющих большой самостоятельный интерес.

§ 1. Алгебры Буля

В различных вопросах математики в последнее время всё чаще и чаще используется понятие алгебры Буля, т. е. полуупорядоченного множества, удовлетворяющего некоторым дополнительным условиям. Типичным примером алгебры Буля является алгебра множеств. В настоящей и следующей главах мы покажем, что алгебры Буля самым тесным образом связаны с K-пространствами.

1.1. Определение и основные свойства.

Определение. *Алгеброй Буля* называется структура (см. определение 2 в п. 1.81 гл. I) $\mathfrak{E} = \{e\}$, удовлетворяющая следующим трём дополнительным условиям:

I. В $\mathfrak{E}$ существуют наименьший элемент, обозначаемый $\mathbf{0}$ (нуль), и наибольший — $\mathbf{1}$ (единица), т. е. $\mathbf{0} \leqslant e \leqslant \mathbf{1}$ для любого $e \in \mathfrak{E}$.

II. Закон дистрибутивности:

$$e \vee (e_1 \wedge e_2) = (e \vee e_1) \wedge (e \vee e_2) \text{ *)}.$$

III. Для всякого $e \in \mathfrak{E}$ существует такой элемент $Ce \in \mathfrak{E}$, что $e \vee Ce = \mathbf{1}$, $e \wedge Ce = \mathbf{0}$. Этот элемент Ce называется *дополнением* элемента e.

Из определения сразу следует, что $C(Ce) = e$.

Отметим, что уже из определения частично упорядоченного множества вытекает, что если $e_1 \geqslant e_2$ и $e_2 \geqslant e_1$, то $e_1 = e_2$.

---

*) Знаки $\vee$ и $\wedge$ употребляются в том же смысле, что и в K-пространствах.

1.11. Докажем двойственный закон дистрибутивности:

$$e \wedge (e_1 \vee e_2) = (e \wedge e_1) \vee (e \wedge e_2).$$

Доказательство. Преобразуем правую часть равенства с помощью основного закона дистрибутивности, рассматривая сначала $e \wedge e_1$ как один элемент:

$$(e \wedge e_1) \vee (e \wedge e_2) = [(e \wedge e_1) \vee e] \wedge [(e \wedge e_1) \vee e_2] =$$
$$= e \wedge [(e \vee e_2) \wedge (e_1 \vee e_2)] = e \wedge (e_1 \vee e_2),$$

ч. и тр. д.

Легко видеть, что из второй формы дистрибутивного закона следует первая, т. е. обе формы дистрибутивного закона равносильны.

Установим некоторые свойства дополнения. Сохраняя терминологию K-пространств, мы называем два элемента e_1 и e_2 алгебры Буля *дизъюнктными* (и пишем: $e_1 \, \mathrm{d} \, e_2$), если $e_1 \wedge e_2 = \mathbf{0}$.

1.12. a) Для каждого $e \in \mathfrak{E}$ дополнение Ce единственно.

b) Для каждого $e \in \mathfrak{E}$ дополнение Ce есть наибольший элемент алгебры, дизъюнктный с e; последнее означает, что

1) $e \, \mathrm{d} \, Ce$,

2) если $e' \in \mathfrak{E}$ и $e' \, \mathrm{d} \, e$, то $e' \leqslant Ce$.

Доказательство. a) Пусть $e_1 = Ce$, $e_2 = Ce$. С помощью дистрибутивного закона имеем:

$$e_1 = e_1 \vee \mathbf{0} = e_1 \vee (e \wedge e_2) = (e_1 \vee e) \wedge (e_1 \vee e_2) =$$
$$= \mathbf{1} \wedge (e_1 \vee e_2) = e_1 \vee e_2,$$

т. е. $e_1 \geqslant e_2$. Но аналогично можно установить, что $e_2 \geqslant e_1$, откуда $e_1 = e_2$.

b) По определению, $Ce \, \mathrm{d} \, e$. Пусть $e' \in \mathfrak{E}$ и $e' \, \mathrm{d} \, e$. Положим $e'' = e' \vee Ce$. Тогда по закону дистрибутивности $e'' \, \mathrm{d} \, e$, так как $e'' \wedge e = (e' \vee Ce) \wedge e = (e' \wedge e) \vee (Ce \wedge e) = \mathbf{0}$. С другой стороны,

$$e \vee e'' = e \vee (e' \vee Ce) = (e \vee Ce) \vee e' = \mathbf{1} \vee e' = \mathbf{1}.$$

Благодаря уже доказанной в a) единственности дополнения

$$e'' = Ce, \text{ т. е. } e' \leqslant Ce.$$

1.13. a) Если $e_1 \leqslant e_2$, то $Ce_1 \geqslant Ce_2$.

b) Если $e_1 \leqslant e_2$, то $e_2 = e_1 \vee (Ce_1 \wedge e_2)$.

c) $C(e_1 \vee e_2) = Ce_1 \wedge Ce_2$.

Доказательство. a) Очевидно, $Ce_2 \, \mathrm{d} \, e_1$, а тогда по 1.12b) $Ce_2 \leqslant Ce_1$.

b) С помощью закона дистрибутивности получаем:

$$e_2 = e_2 \wedge \mathbf{1} = e_2 \wedge (e_1 \vee Ce_1) = e_1 \vee (e_2 \wedge Ce_1).$$

c) Положим $e = e_1 \vee e_2$, $e' = Ce_1 \wedge Ce_2$. Так как $e' \, \mathrm{d} \, e_1$, $e' \, \mathrm{d} \, e_2$, то по дистрибутивности $e' \, \mathrm{d} \, e$, т. е. по (1.12b)) $e' \leqslant Ce$.

С другой стороны, по 1.13а) $Ce \leqslant Ce_1$, $Ce \leqslant Ce_2$ и, следовательно, $Ce \leqslant e'$. Сопоставлением обоих неравенств требуемое равенство доказано.

1.2. Полные алгебры. Алгебра Буля называется *полной*, если всякое множество её элементов имеет точные грани сверху и снизу, т. е. если она полна как структура.

С помощью перехода к дополнениям легко показать, что если всякое множество из алгебры Буля имеет верхнюю грань, то также всякое множество имеет и нижнюю грань.

Простейшим примером полной алгебры Буля может служить множество всех подмножеств данного множества, если знак $<$ понимать как включение. Здесь верхняя грань любого множества подмножеств совпадает с их теоретико-множественной суммой, а нижняя грань — с их пересечением.

Множество всех замкнутых подмножеств топологического пространства, например, некоторого сегмента прямой — тоже полная алгебра Буля, но здесь верхняя грань реализуется не как теоретико-множественная сумма, а как её замыкание. Нижняя грань попрежнему совпадает с пересечением.

Другие примеры, более важные для теории K-пространств, будут рассмотрены ниже.

1.21. В полной алгебре Буля для любого множества ее элементов $e_\xi (\xi \in \Xi)$

$$C \sup_\xi e_\xi = \inf_\xi Ce_\xi.$$

Доказательство. Пусть $e = \sup e_\xi$, $e' = \inf Ce_\xi$. Тогда по 1,13а) $Ce \leqslant Ce_\xi$ при любом ξ, следовательно, $Ce \leqslant e'$. Обратно, $e' \leqslant Ce_\xi$ при любом ξ, следовательно, $Ce' \geqslant e_\xi$, откуда $Ce' \geqslant e$ или $e' \leqslant Ce$. Сопоставляя, видим, что требуемое равенство доказано.

1.22. В полной алгебре Буля имеет место общий закон дистрибутивности

$$e \vee \inf_{\xi \in \Xi} e_\xi = \inf_{\xi \in \Xi} (e \vee e_\xi)$$

и двойственное к нему соотношение.

Доказательство. Обозначим левую часть равенства через e', а правую — через e''. Опираясь на дистрибутивный закон в первоначальной форме, имеем:

$$e'' \wedge Ce \leqslant (e \vee e_\xi) \wedge Ce = (e \wedge Ce) \vee (e_\xi \wedge Ce) = e_\xi \wedge Ce \leqslant e_\xi.$$

Так как это верно при любом $\xi \in \Xi$, то $e'' \wedge Ce \leqslant \inf_{\xi \in \Xi} e_\xi$. Отсюда

$$e'' = e'' \wedge \mathbf{1} = e'' \wedge (e \vee Ce) = (e'' \wedge e) \vee (e'' \wedge Ce) \leqslant e \vee \inf_\xi e_\xi = e'.$$

т. е. $e'' \leqslant e'$. Обратное неравенство очевидно и, таким образом, равенство $e' = e''$ доказано.

Двойственный закон дистрибутивности легко выводится из доказанного переходом к дополнениям с помощью 1.21.

Читатель легко может убедиться в том, что в полной алгебре Буля верен ассоциативный закон для каждой из граней.

Определение. Если $\{e_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — множество попарно дизъюнктных элементов алгебры $\mathfrak{E}$, то $\sup e_\xi$ называется *соединением* множества элементов e_ξ и обозначается $\mathop{\mathbf{S}}\limits_{\xi \in \Xi} e_\xi$.

1.23. Пусть $e = \mathop{\mathbf{S}}\limits_{\xi} e_\xi = \mathop{\mathbf{S}}\limits_{\eta} e'_\eta$, т. е. e двумя способами представлен в виде соединения элементов алгебры. Тогда

$$e = \mathop{\mathbf{S}}_{\xi,\,\eta} (e_\xi \wedge e'_\eta).$$

Доказательство. Элементы $e_\xi \wedge e'_\eta$ попарно дизъюнктны. Действительно, пусть, например, $\xi \neq \xi_1$. Тогда $e_\xi \,\mathrm{d}\, e_{\xi_1}$, а

$$e_\xi \wedge e_\eta \leqslant e_\xi, \qquad e_{\xi_1} \wedge e'_{\eta_1} \leqslant e_{\xi_1},$$

следовательно,

$$(e_\xi \wedge e'_\eta) \,\mathrm{d}\, (e_{\xi_1} \wedge e'_{\eta_1}).$$

Теперь благодаря ассоциативности верхней грани и закону дистрибутивности

$$\mathop{\mathbf{S}}_{\xi,\,\eta} (e_\xi \wedge e'_\eta) = \sup_{\xi,\,\eta} (e_\xi \wedge e'_\eta) = \sup_{\xi} \sup_{\eta} (e_\xi \wedge e'_\eta) =$$

$$= \sup_{\xi} [e_\xi \wedge \sup_{\eta} e'_\eta] = \sup_{\xi} e_\xi \wedge \sup_{\eta} e'_\eta = e.$$

1.24 а). Пусть

$$e = \mathop{\mathbf{S}}_{\alpha} e_\alpha \quad (\alpha \in \mathrm{A}), \qquad e_\alpha = \mathop{\mathbf{S}}_{\beta} e_{\alpha\beta} \quad (\beta \in \mathrm{B}_\alpha).$$

Тогда

$$e = \mathop{\mathbf{S}}_{\alpha,\,\beta} e_{\alpha\beta}.$$

Обратно, пусть

$$e = \mathop{\mathbf{S}}_{\alpha,\,\beta} e_{\alpha\beta} \quad (\alpha \in \mathrm{A},\ \beta \in \mathrm{B}_\alpha), \qquad e_\alpha = \mathop{\mathbf{S}}_{\beta} e_{\alpha\beta} \quad (\beta \in \mathrm{B}_\alpha),$$

тогда $e = \mathop{\mathbf{S}}\limits_{\alpha} e_\alpha$.

Доказательство. а) Благодаря ассоциативности верхней грани ясно, что $e = \sup\limits_{\alpha,\,\beta} e_{\alpha\beta}$; попарная дизъюнктность элементов $e_{\alpha\beta}$ очевидна.

b) Равенство $e = \sup e_\alpha$ также сразу следует из ассоциативности верхней грани. Проверим попарную дизъюнктность элементов e.

Повторяя в обратном порядке рассуждение из доказательства предложения 1.23, имеем при $\alpha \neq \alpha'$:

$$e_\alpha \wedge e_{\alpha'} = \sup_{\beta \in B_\alpha} e_{\alpha\beta} \wedge \sup_{\gamma \in B_{\alpha'}} e_{\alpha'\gamma} = \sup_{\beta, \gamma} (e_{\alpha\beta} \wedge e_{\alpha'\gamma}) = \mathbf{0}.$$

1.25 Множество попарно дизъюнктных элементов e_ξ ($\xi \in \Xi$) называется *полным*, если в $\mathfrak{E}$ не существует отличного от нуля элемента, дизъюнктного всем e_ξ.

Если множество попарно дизъюнктных элементов e_ξ полно, то $\mathop{\mathbf{S}}\limits_{\xi} e_\xi = \mathbf{1}$.

Доказательство. Положим

$$e = \mathop{\mathbf{S}}\limits_{\xi} e_\xi = \sup_{\xi} e_\xi, \quad e' = Ce.$$

Но $e' \mathrm{d}\, e$, а тем более $e' \mathrm{d}\, e_\xi$ при всех ξ. Следовательно, по предложению, $e' = \mathbf{0}$, т. е. $e = \mathbf{1}$.

Введём в полной алгебре Буля понятие предела для монотонной последовательности, именно, будем писать:

$e_n \nearrow e$, если $e_{n+1} \geqslant e_n$ при любом n и $e = \sup e$;
$e_n \searrow e$, если $e_{n+1} \leqslant e_n$ при любом n и $e = \inf e_n$.

1.26. Если $e_n \nearrow e$ и $e'_n \nearrow e'$, то:
a) $(e_n \vee e'_n) \nearrow (e \vee e')$;
b) $(e_n \wedge e'_n) \nearrow (e \wedge e')$.

Доказательство. a) Ясно, что $e_n \vee e'_n$ образуют возрастающую последовательность. Кроме того, если $n > m$, то $e_n \vee e'_m \leqslant e_n \vee e'_n$, а тогда, благодаря ассоциативности верхней грани,

$$\sup_n (e_n \vee e'_n) = \sup_{n, m} (e_n \vee e'_m) = e \vee e'.$$

b) Доказывается аналогично, лишь приходится дополнительно использовать дистрибутивный закон. Предоставляем читателю провести это рассуждение.

Условимся рассматривать некоторые основные операции в алгебре Буля как арифметические действия. Именно, для конечного или счётного множества попарно дизъюнктных элементов e_n положим

$$e_1 + e_2 + e_3 + \ldots = \mathop{\mathbf{S}}\limits_{n} e_n \text{*)}.$$

Если $e_2 \leqslant e_1$, то полагаем

$$e_1 - e_2 = e_1 \wedge Ce_2$$

*) Если алгебра $\mathfrak{E}$ — не полная, то сумма имеет смысл только для конечного множества.

(см. 1.13b)). В частности, для любого e, $\mathbf{1}-e=Ce$. Наконец, для любых e_1 и e_2 полагаем

$$e_1e_2=e_1\wedge e_2.$$

Ясно, что сложение и умножение коммутативны и ассоциативны. Дистрибутивный закон алгебры Буля обеспечивает дистрибутивность сложения и умножения, т. е.

$$(e_1+e_2+\ldots)e=e_1e+e_2e+\ldots$$

Имеют место обычные формулы

$$(e_2-e_1)+e_1=e_2,\quad (e_2-e_1)+(e_1-e_0)=e_2-e_0.$$

В дальнейшем нам будет удобно использовать этот арифметический аппарат.

Установим еще один результат, используемый в дальнейшем.

1.27. Пусть e_n $(-\infty<n<\infty)$ *) образуют монотонную последовательность, причём

$$e_n\nearrow\mathbf{1}\text{ при }n\nearrow+\infty,\qquad e_n\searrow\mathbf{0}\text{ при }n\searrow-\infty.$$

Тогда

$$\mathop{\mathbf{S}}_{n}(e_n-e_{n-1})=\mathbf{1}.$$

Доказательство. Попарная дизъюнктность разностей e_n-e_{n-1} очевидна, так как при $n<m$

$$e_n-e_{n-1}\leqslant e_n\leqslant e_{m-1},\ \text{а}\ e_{m-1}\mathrm{d}\,(e_m-e_{m-1}).$$

Имеем с помощью 1.21 и 1.26b):

$$\mathop{\mathbf{S}}_{n}(e_n-e_{n-1})\geqslant\mathop{\mathbf{S}}_{n=-N_1+1}^{n=N_2}(e_n-e_{n-1})=\sum_{n=-N_1+1}^{N_2}(e_n-e_{n-1})=$$
$$=e_{N_2}-e_{N_1}\nearrow\mathbf{1}\quad\text{при }N_1,\ N_2\nearrow+\infty.$$

Отсюда сразу следует доказываемое равенство.

1.3. Полное соединение булевских алгебр. Введём для булевских алгебр понятие, аналогичное полному соединению K-пространств, рассмотренному в предыдущей главе

Пусть $\mathfrak{E}_\alpha$ $(\alpha\in A)$ — семейство полных булевских алгебр. Нуль и единицу алгебры $\mathfrak{E}_\alpha$ будем обозначать $\mathbf{0}_\alpha$ и $\mathbf{1}_\alpha$ (соответственно). Рассмотрим всевозможные наборы элементов $e_\alpha\in\mathfrak{E}_\alpha$, по одному из каждого $\mathfrak{E}_\alpha$. Будем называть их соединениями элементов e_α и обозначать $e=\mathop{\bar{\mathbf{S}}}_{\alpha}e_\alpha$. Множество всех таких соединений обозначим через $\mathfrak{E}$.

Равенство элементов в $\mathfrak{E}$ определим естественным образом: $\bar{\mathbf{S}}e_\alpha=\bar{\mathbf{S}}e'_\alpha$, если $e_\alpha=e'_\alpha$ при всех α.

---

*) n принимает только целые значения.

Введём упорядочение в $\mathfrak{E}$, полагая $e < e'$, где $e = \bar{\mathbf{S}} e_\alpha$, $e' = \bar{\mathbf{S}} e'_\alpha$, если $e_\alpha \leqslant e'_\alpha$ при всех $\alpha \in \Lambda$ и $e_\alpha < e'_\alpha$ хоть при одном α. Легко видеть, что соотношение порядка в $\mathfrak{E}$ удовлетворяет всем требованиям, налагаемым на него в полной структуре; точные грани любого множества элементов $e^\xi = \bar{\mathbf{S}} e^\xi_\alpha$ определяются, очевидно, по формулам:

$$\sup_\xi e^\xi = \bar{\mathbf{S}}_\alpha \sup_\xi e^\xi_\alpha, \qquad \inf_\xi e^\xi = \bar{\mathbf{S}}_\alpha \inf_\xi e^\xi_\alpha.$$

Также легко проверяется, что $\mathfrak{E}$ удовлетворяет всем требованиям, накладываемым на булевскую алгебру. Действительно, единицей и нулём в $\mathfrak{E}$ будут

$$\mathbf{1} = \bar{\mathbf{S}}\, \mathbf{1}_\alpha, \qquad \mathbf{0} = \bar{\mathbf{S}}\, \mathbf{0}_\alpha;$$

дополнение для $e = \bar{\mathbf{S}} e_\alpha$ определяется по формуле $Ce = \bar{\mathbf{S}}(Ce_\alpha)$. Проверим дистрибутивный закон.

Пусть $e = \bar{\mathbf{S}} e_\alpha$, $e' = \mathbf{S} e'_\alpha$, $e'' = \bar{\mathbf{S}} e''_\alpha$; тогда

$$e \vee (e' \wedge e'') = \bar{\mathbf{S}}\, [e_\alpha \vee (e'_\alpha \wedge e''_\alpha)] = \bar{\mathbf{S}}\, [(e_\alpha \vee e'_\alpha) \wedge (e_\alpha \vee e''_\alpha)] = (e \vee e') \wedge (e \vee e'').$$

Итак, $\mathfrak{E}$ — полная булевская алгебра. Построенная таким образом алгебра $\mathfrak{E}$ называется *полным соединением* алгебр $\mathfrak{E}_\alpha$, и это обозначается так:

$$\mathfrak{E} = \bar{\mathbf{S}}_\alpha \mathfrak{E}_\alpha.$$

Замечание. Легко видеть, что если не все булевские алгебры $\mathfrak{E}_\alpha$ — полные, то $\mathfrak{E}$ — тоже булевская алгебра, но неполная.

§ 2. Проекторы

2.1. Булевская алгебра компонент. Остановимся подробнее на одном важном примере алгебры Буля. В предыдущей главе (1.3 гл. II) введено понятие компоненты K-пространства. Введём частичное упорядочение в множестве $H = \{Y\}$ всех компонент данного K-пространства X. Именно, будем понимать знак $<$ как включение; точнее $Y_1 < Y_2$ означает, что $Y_1 \subset Y_2$, но при этом $Y_1 \neq Y_2$ в теоретико-множественном смысле. Тогда имеет место следующая теорема.

2.11. Теорема. *Множество H всех компонент K-пространства есть полная алгебра Буля.*

Доказательство. То, что H частично упорядочено, — очевидно. Далее нижняя грань любого множества компонент есть его пересечение, которое также является компонентой (1.31c) гл. II). Верхней гранью будет служить наименьшая компонента, содержащая все данные; такая наименьшая компонента всегда существует (1.32 гл. II). Таким образом, множество H всех компонент — полная структура. Остаётся проверить выполнение трёх условий из определения алгебры Буля.

I. Очевидно: $\mathbf{1}$ — всё пространство X, $\mathbf{0}$ — «нулевая» компонента, т. е. состоящая из одного нулевого элемента пространства X.

II. Дистрибутивный закон. Нам удобнее доказать его в дуальной форме:

$$Y \wedge (Y_1 \vee Y_2) = (Y \wedge Y_1) \vee (Y \wedge Y_2).$$

Доказательство. Очевидно,

$$Y \wedge Y_1 \subset Y \wedge (Y_1 \vee Y_2), \quad Y \wedge Y_2 \subset Y \wedge (Y_1 \vee Y_2),$$

и, значит,

$$(Y \wedge Y_1) \vee (Y \wedge Y_2) \subset Y \wedge (Y_1 \vee Y_2). \tag{1}$$

С другой стороны, так как по 2.31 гл. II система из двух компонент Y_1 и Y_2 полна в $Y_1 \vee Y_2$, то по 2.32 гл. II система из $Y \wedge Y_1$ и $Y \wedge Y_2$ полна в $Y \wedge (Y_1 \vee Y_2)$, т. е. эта последняя компонента — наименьшая, содержащая $Y \wedge Y_1$ и $Y \wedge Y_2$. Тогда в (1) имеет место знак равенства.

III. Дополнением любой компоненты Y служит её дизъюнктное дополнение X'_Y, которое также является компонентой (по 1.33 гл. II). В самом деле, по 2.23 гл. II Y и X'_Y образуют разложение X, а это означает (см. 2.26b) гл. II), что X — наименьшая компонента, содержащая Y и X'_Y, т. е. $X = Y \vee X'_Y$.

Теорема полностью доказана.

Замечание. Из того, что дизъюнктное дополнение компоненты совпадает с её дополнением как элемента алгебры Буля следует, что компонента, порождённая каким-нибудь множеством $E \subset X$, представляет дизъюнктное дополнение дизъюнктного дополнения множества E.

Действительно, дизъюнктное дополнение X'_E множества E есть компонента пространства X (1.33 гл. II). Её дизъюнктное дополнение CX'_E есть компонента, содержащая E. Следовательно, $E \subset X_E \subset CX'_E$. Но тогда для дизъюнктных дополнений этих множеств имеем обратное включение или неравенство в том смысле, как это было определено в булевской алгебре компонент: $X'_E \geqslant CX_E \geqslant X'_E$, т. е. $CX_E = X'_E$ или

$$X_E = CX'_E.$$

Конечно, доказанное сейчас предложение может быть установлено и прямым путём, без ссылки на теорему о булевской алгебре компонент. Предоставляем читателю провести такое рассуждение.

2.12. Отметим ещё очевидный факт: если два K-пространства X и X_1 изоморфны между собой, то булевские алгебры их компонент тоже изоморфны между собой.

Действительно, достаточно сопоставить между собой компоненты, состоящие из тех элементов пространств X и X_1, которые соответствуют друг другу при изоморфизме между X и X_1.

2.2. Проекторы. Мы уже рассматривали выше операцию проектирования (см. 2.1 гл. II). Теперь мы займёмся более детальным изучением этого оператора.

Пусть X_1 — некоторая компонента пространства X. Положим

$$Px = \mathrm{Pr}_{X_1} x.$$

Тогда P — оператор, переводящий X в X_1. Такой оператор будем называть *проектором, соответствующим компоненте* X_1 (или *проектором на* X_1).

Легко видеть, что различным компонентам соответствуют различные проекторы.

Действительно, если $X_1 \neq X_2$, то имеется, например, такой элемент $x \in X_1$ ($x \neq \mathbf{0}$), что $x \,\mathrm{d}\, X_2$. Тогда, если P_1 и P_2 — проекторы на X_1 и X_2, то очевидно, $P_1 x = x$, $P_2 x = \mathbf{0}$, т. е. P_1 и P_2 не тождественны.

Так как множество всех проекторов находится во взаимно однозначном соответствии с множеством H компонент, то на проекторы естественным образом переносится частичное упорядочение из H. Именно, мы считаем $P_1 < P_2$, если для соответствующих компонент $X_1 < X_2$; $P_1 = P_2$, если P_1 и P_2 тождественны, т. е. $X_1 = X_2$. А тогда множество проекторов превращается в полную алгебру Буля и для проекторов имеют смысл все соотношения, определённые в H, например,

$$P_1 \leqslant P_2 \quad P = \sup_\xi P_\xi, \quad P_1 \,\mathrm{d}\, P_2, \quad P = \mathop{\mathrm{S}}_\xi P_\xi.$$

Прежде всего выясним свойства и смысл основных операций булевской алгебры проекторов, непосредственно вытекающие из их определений и ранее доказанных предложений. Здесь и ниже P, Q, R означают проекторы, а X^P, X^Q, X^R — соответствующие им компоненты.

2.21. a) $Px = x$ эквивалентно $x \in X^P$, а $Px = \mathbf{0}$ эквивалентно $x \,\mathrm{d}\, X^P$.

b) $P = Q$ означает, что $X^P = X^Q$ или также, что для любого $x \in X$ (достаточно для $x \geqslant \mathbf{0}$) $Px = Qx$.

c) $P < Q$ означает, что $X^P \subset X^Q$, не совпадая с ним, или также, что $Px \leqslant Qx$ для любого $x \geqslant \mathbf{0}$, причём $Px < Qx$ для некоторого $x > \mathbf{0}$.

d) Единица алгебры проекторов $P = \mathbf{1}$ есть тождественный оператор $\mathbf{1}x = x$, т. е. для него $X^{\mathbf{1}} = X$.

Нулевой проектор $\mathbf{0}$ есть оператор, тождественно равный нулю: $\mathbf{0}x = \mathbf{0}$; ему соответствует нулевая компонента.

e) $P = \sup P_\xi$ означает, что X^P — компонента, порождённая суммой $\bigcup X^{P_\xi}$. $P = \inf P_\xi$ означает, что $X^P = \bigcap X^{P_\xi}$.

f) $P \,\mathrm{d}\, Q$ означает, что $Px \,\mathrm{d}\, Qx$ при всех $x \in X$.

g) $P = \underset{\xi}{\mathbf{S}} P_\xi$ означает, что компоненты X^{P_ξ} (так же, как операторы P_ξ) попарно дизъюнктны, а X^P — компонента, порождённая их суммой. Иначе это означает, что для любого элемента $x \in X$

$$Px = \underset{\xi}{\mathbf{S}} (P_\xi x).$$

h) Система операторов P_ξ называется полной, если не существует проектора $P > \mathbf{0}$, дизъюнктного всем P_ξ. Полнота системы проекторов P_ξ равносильна полноте системы компонент X^{P_ξ}. Это в свою очередь означает при дополнительном условии попарной дизъюнктности проекторов P_ξ, что для любого $x \in X$ имеет место разложение

$$x = \underset{\xi}{\mathbf{S}} (P_\xi x).$$

В частности, в случае конечного числа индексов $\xi = 1, 2, \ldots, n$,

$$x = P_1 x + P_2 x + \ldots + P_n x.$$

i) Равенство $P = Q + R$ ($Q \mathrm{d} R$) означает, что при любом $x \in X$

$$Px = Qx + Rx,$$

т. е. булевскому сложению проекторов соответствует их сложение как операторов.

k) $R = P - Q$ ($Q \leqslant P$) означает, что при любом $x \in X$

$$Rx = Px - Qx,$$

т. е. булевское вычитание соответствует операторному.

l) Дополнительный проектор $Q = CP = \mathbf{1} - P$ может быть определён равенством

$$Qx = x - Px.$$

Доказательство. a) — см. 2.13 гл. II.

b) $P = Q$ по определению означает, что $X^P = X^Q$, а тогда, очевидно, $Px = Qx$. Обратно, если $Px = Qx$ для всех $x \in X$, то, в частности, совпадают и множества тех $x \in X$, для которых $Px = x$ и $Qx = x$. Но эти множества суть X^P и X^Q (по a)), т. е. $P = Q$.

c) $P \leqslant Q$ эквивалентно $X^P \subset X^Q$ по изоморфизму ($P < Q$ означает, что, кроме того, $X^P \neq X^Q$). Если $X^P \subset X^Q$, то, по определению проекции, для $x \geqslant \mathbf{0}$

$$Px = \mathrm{Pr}_{X^P} x \leqslant \mathrm{Pr}_{X^Q} x = Qx.$$

Обратно, если $Px \leqslant Qx$, для любого $x \geqslant \mathbf{0}$, то так как $Qx \leqslant x$, из $Px = x$ следует $Qx = x$. Таким образом, всякий положительный элемент из X^P входит в X^Q, а тогда $X^P \subset X^Q$.

Если имеет место строгое неравенство $P<Q$, то дополнительно, на основании b) должно быть хоть для одного x (а тогда и для некоторого $x>\mathbf{0}$) $Px\neq Qx$, и обратно.

d) вытекает сразу из определения единицы и нуля в булевской алгебре компонент.

e) следует из изоморфизма булевских алгебр проекторов и компонент и из смысла операций sup и inf для компонент (см. 1.84 гл. I).

f) почти очевидно, если вспомнить, что компонента X^P состоит из всех x, для которых $Px=x$.

g) Первое утверждение содержится в e). Равенство

$$Px=\mathop{\mathbf{S}}_{\xi}(P_\xi x)$$

следует из того, что компоненты X^{P_ξ} образуют разложение для X^P (2.31 гл. II), и из теоремы о разложении 2.24 гл. II. Действительно, учитывая 2.15 гл. II, имеем:

$$Px=\mathop{\mathbf{S}}_{\xi}\{P_\xi(Px)\}=\mathop{\mathbf{S}}_{\xi}(P_\xi x).$$

Обратно, если это равенство имеет место для любого $x\in X$, то, в частности, для $x\in X^P$ имеем:

$$x=\mathop{\mathbf{S}}_{\xi}P_\xi x,$$

т. е. система компонент $\{X^{P_\xi}\}$ полна в X^P (2.26a) гл. II). Следовательно,

$$X^P=\mathop{\mathbf{S}}_{\xi}X^{P_\xi} \text{ или } P=\mathop{\mathbf{S}}_{\xi}P_\xi.$$

h) — иначе сформулированная теорема 2.24 гл. II.

i) по определению, $P=Q+R$ равносильно $P=\mathbf{S}\ \{Q,R\}$, а по g) это означает, что

$$Px=\mathbf{S}\{Qx,\ Rx\}=Qx+Rx.$$

Проверку обратного заключения, т. е. что из равенства $Px=Qx+Rx$ для всех $x\in X$ вытекает $P=Q+R$, предоставляем читателю.

k) $R=P-Q$ означает, что $P=Q+R$, а тогда k) — прямое следствие из i).

l) следует непосредственно из k).

Перечислим теперь некоторые свойства любого проектора P, в том числе и те простейшие, которые уже были установлены выше.

2.22. a) $\mathbf{0}\leqslant Px\leqslant x$ для любого $x\geqslant\mathbf{0}$.

b) $|Px|\leqslant|x|$ для любого $x\in X$.

c) $P(Px)=Px$.

d) $P(x+y)=Px+Py$ (аддитивность проектора).

e) $P(\alpha x)=\alpha Px$ (однородность проектора).

f) Если $x\leqslant y$, то $Px\leqslant Py$.

g) Если $x \mathrm{d} y$, то $Px \mathrm{d} Py$.

h) $P(\underset{\xi}{\mathbf{S}} x_\xi) = \underset{\xi}{\mathbf{S}}(Px_\xi)$.

i) $P(\sup_\xi x_\xi) = \sup_\xi Px_\xi$; $P(\inf_\xi x_\xi) = \inf_\xi Px_\xi$.

k) $(Px)_+ = P(x_+)$; $(Px)_- = P(x_-)$; $|Px| = P|x|$.

l) Если $x_n \xrightarrow{(o)} x$, то $Px_n \xrightarrow{(o)} Px$ ((o)-непрерывность проектора).

Доказательство. a) — см. 2.11 гл. II.

b) — см. 2.12a) гл. II.

c) Так как для любого $x \in X$, $Px \in X^P$, то $P(Px) = Px$.

d) — см. 2.14a) гл. II.

e) — см. 2,14b) гл. II.

f) Если $x \leqslant y$, то $y - x \geqslant \mathbf{0}$, следовательно, $P(y-x) \geqslant \mathbf{0}$. Но тогда по d)

$$Py = Px + P(y-x) \geqslant Px.$$

g) — см. 2.12b) гл. II.

h) Введём дополнительный проектор $Q = \mathbf{1} - P$. Тогда любой $x_\xi = \mathbf{S}\{Px_\xi, Qx_\xi\}$, а по ассоциативности соединений

$$\underset{\xi}{\mathbf{S}} x_\xi = \mathbf{S}\{\underset{\xi}{\mathbf{S}}(Px_\xi), \underset{\xi}{\mathbf{S}}(Qx_\xi)\}.$$

Но $\underset{\xi}{\mathbf{S}}(Px_\xi) \in X^P$, а $\underset{\xi}{\mathbf{S}}(Qx_\xi) \in X^Q$, следовательно, по теореме о единственности представления (2.25 гл. II),

$$\underset{\xi}{\mathbf{S}}(Px_\xi) = P(\underset{\xi}{\mathbf{S}} x_\xi).$$

i) Пусть сначала все $x_\xi \geqslant \mathbf{0}$ и $\inf x_\xi = \mathbf{0}$. Тогда $\mathbf{0} \leqslant Px_\xi \leqslant x_\xi$, следовательно, $\inf Px_\xi = \mathbf{0}$.

Пусть теперь $\inf x_\xi = y$. Тогда $\inf(x_\xi - y) = \mathbf{0}$, следовательно, по уже доказанному, $\inf P(x_\xi - y) = \mathbf{0}$. Но отсюда по d) и e) (с $\alpha = -1$)

$$\mathbf{0} = \inf_\xi P(x_\xi - y) = \inf_\xi Px_\xi - Py,$$

т. е.

$$Py = \inf_\xi Px_\xi.$$

Соотношение для верхней грани получается по дуальности:

$$P(\sup x_\xi) = -P(-\sup x_\xi) = -P[\inf(-x_\xi)] = \\ = -\inf P(-x_\xi) = \sup Px_\xi.$$

k) следует непосредственно из i). Например,

$$P(x_+) = P(x \vee \mathbf{0}) = Px \vee P\mathbf{0} = Px \vee \mathbf{0} = (Px)_+,$$

$$P|x| = P(x \vee (-x)) = Px \vee P(-x) = Px \vee (-Px) = |Px|$$

(см. 1.52f) гл. I).

l) Имеем (по i))

$$Px = P(\overline{\lim}\, x_n) = P[\inf_n \sup(x_n, x_{n+1}, \ldots)] =$$

$$= \inf_n \sup(Px_n, Px_{n+1}, \ldots) = \overline{\lim}\, Px_n.$$

Аналогично $Px = \underline{\lim}\, Px_n$ и, значит, $Px_n \xrightarrow{(o)} Px$.

2.23. Свойства 2.22 a), c), d) являются характеристическими для проекторов, т. е. всякий оператор P, отображающий X в X и удовлетворяющий этим трём условиям, есть проектор.

Доказательство. Обозначим через X_1 множество тех $x \in X$, для которых $Px = x$, и докажем, что X_1 — компонента пространства X.

Из условия a) следует, что $P\mathbf{0} = \mathbf{0}$, а тогда в силу условия d)

$$Px + P(-x) = P\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

т. е. $P(-x) = -Px$. В частности, если $x \in X_1$, то и $-x \in X_1$. Кроме того, из аддитивности оператора P следует, что если $x \in X_1$ и $y \in X_1$, то и $x + y \in X_1$, а также $nx \in X_1$ при любом целом n.

Отметим, что из a) и d) следует, что P удовлетворяет условию 2.22 f).

Докажем, что X_1 нормально содержится в X, т. е. если $x \in X_1$ и $|y| \leqslant |x|$ $(y \in X)$, то $y \in X_1$.

Пусть сначала $\mathbf{0} \leqslant y \leqslant x$. Тогда так как $Px = x$, то (по a) и d))

$$y \geqslant Py = Px - P(x - y) \geqslant x - (x - y) = y,$$

т. е. $Py = y$, и $y \in X_1$.

Пусть теперь $|y| \leqslant |x|$ и $x \in X_1$. Тогда

$$x = Px = Px_+ - Px_-.$$

Но из a) следует, что $Px_+ \,\mathrm{d}\, Px_-$, значит, $Px_+ = x_+$, $Px_- = x_-$ (см. 1.62 гл. I), т. е. $x_+ \in X_1$, $x_- \in X_1$. А тогда $|x| = x_+ + x_- \in X_1$. Но из неравенства $|y| \leqslant |x|$ следует, что $\mathbf{0} \leqslant y_+ \leqslant |x|$ и $\mathbf{0} \leqslant y_- \leqslant |x|$; значит, по доказанному $y_+ \in X$, и $y_- \in X_1$, а тогда и $y \in X_1$, т. е. нормальность множества X_1 установлена.

Так как для любого α найдётся такое целое число n, что $|\alpha| \leqslant n$, то по условию нормальности из $x \in X_1$ следует, что $\alpha x \in X_1$ (так как $nx \in X_1$). Таким образом, X_1 — линейное множество.

Теперь докажем, что X_1 правильно содержится в X. Пусть $x_\xi \in X_1$ $(x_\xi \geqslant \mathbf{0})$ и $x = \sup x_\xi$. Тогда (с помощью 2.22f))

$$x \geqslant Px \geqslant \sup Px_\xi = \sup x_\xi = x,$$

т. е. $Px = x$, или $x \in X_1$.

Если $x_\xi \in X_1$ — произвольные и $x = \sup x_\xi$, то (по 1.55 гл. I)

$$x_+ = \sup x_\xi^+, \quad x_- = \inf x_\xi^-.$$

Следовательно, $x_+ \in X_1$ и $x_- \in X_1$ (x_+ — по доказанному, x_- — по нормальности), откуда $x \in X_1$.

Итак, X_1 — компонента.

Наконец, если $x \,\mathrm{d}\, X_1$, то $Px = \mathbf{0}$. Очевидно, достаточно проверить это для $x \geqslant \mathbf{0}$, но в этом случае так как $Px = P(Px)$, то $Px \in X_1$, и потому $Px \,\mathrm{d}\, x$. В то же время $\mathbf{0} \leqslant Px \leqslant x$; следовательно, $Px = \mathbf{0}$.

Обозначим через X_2 дизъюнктное дополнение компоненты X_1. Тогда для любого $x \in X$ имеем $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, т. е. по теореме об единственности представления (2.25 гл. II)

$$x_1 = \mathrm{Pr}_{X_1} x.$$

Следовательно,

$$Px = Px_1 + Px_2 = Px_1 = x_1 = \mathrm{Pr}_{X_1} x,$$

т. е. P — проектор, ч. и тр. д.

Отметим ещё некоторые свойства совокупности проекторов.

2.24. a) $R = PQ = P \wedge Q$ означает, что для всех $x \in X$

$$Rx = P(Qx) = Q(Px),$$

т. е. булевское умножение проекторов соответствует их композиции как операторов.

b) $P \leqslant Q$ равносильно $P(Qx) = Px$ (или $Q(Px) = Px$) для всех $x \in X$.

c) Для $x \geqslant \mathbf{0}$

$$(\sup P_\xi)\, x = \sup (P_\xi x),$$
$$(\inf P_\xi)\, x = \inf (P_\xi x).$$

d) Если $P_n \nearrow P$ или $P_n \searrow P$, то $P_n x \xrightarrow{(o)} Px$ для любого $x \in X$.

Доказательство. a) В силу изоморфизма между проекторами и компонентами $R = P \wedge Q$ означает, что $X^R = X^P \cap X^Q \subset X^P$. Для любого $x \in X$

$$Qx = Rx + (Q - R)\, x$$

(по 2.21к)). Но по определению вычитания в алгебре Буля $Q - R = Q \cdot CR$ а $Q \cdot CR \,\mathrm{d}\, P$, так как $P(Q \cdot CR) = R \cdot CR = \mathbf{0}$. А тогда $(Q - R)\, x \,\mathrm{d}\, X^P$, т. е. $P[(Q - R)\, x] = \mathbf{0}$ и, следовательно,

$$P(Qx) = P(Rx) = Rx$$

(последнее — так как $Rx \in X^R \subset X^P$).

Чтобы получить равенство $Rx = Q(Px)$, достаточно поменять ролями P и Q.

Обратно, если $Rx = P(Qx)$ для любого x, то для $x \in X^R$ и $x \geqslant \mathbf{0}$ имеем:

$$x = Rx = P(Qx) \leqslant Qx \leqslant x,$$

т. е. $Qx = x$ и $Px = x$. Значит, $x \in X^P$ и $x \in X^Q$. Отсюда следует, что $X^R \subset X^P$ и $X^R \subset X^Q$, т. е. $X^R \subset X^P \cap X^Q$. Если допустить, что $X^R \neq X^P \cap X^Q$, то найдётся элемент $x_0 \in X^P \cap X^Q$, дизъюнктный с X^R $(x_0 \neq \mathbf{0})$. А тогда

$$Rx_0 = P(Qx_0) = Px_0 = x_0 \text{ и } Rx_0 = \mathbf{0},$$

что противоречит условию $x_0 \neq \mathbf{0}$,

Таким же образом для обратного заключения достаточно и второго равенства $Rx = Q(Px)$.

b) — прямое следствие из a), так как в этом случае $R = P$.

c) Этот пункт можно было бы получить из теоремы о разложении K-пространства (2.24 гл. II), но будет короче повторить использованное там рассуждение.

Пусть $P = \sup P_\xi$. Тогда для $x \geqslant \mathbf{0}$ $Px \geqslant P_\xi x$ и $Px \geqslant y = \sup(P_\xi x)$. Положим $Px = y + z$; тогда $z \geqslant \mathbf{0}$ и при этом $z \in X^P$. Нужно показать, что $z = \mathbf{0}$

Для любого η имеем:

$$P_\eta x = P_\eta(Px) = P_\eta y + P_\eta z = P_\eta(\sup P_\xi x) + P_\eta z =$$
$$= \sup_\xi P_\eta(P_\xi x) + P_\eta z \geqslant P_\eta x + P_\eta z.$$

Следовательно, $P_\eta z = \mathbf{0}$, т. е. z дизъюнктен всем X^{P_η}, а тогда $z \, \mathrm{d} \, X^P$. (см. 1.34 гл. II и 2.21e)). Но одновременно $z \in X^P$, значит $z = 0$.

Для нижней грани, наше предложение доказывается переходом к дополнениям:

$$(\inf P_\xi) x = [C(\sup CP_\xi)] x = (\mathbf{1} - \sup CP_\xi) x = x - \sup[(CP_\xi) x] =$$
$$= x - \sup(x - P_\xi x) = \inf P_\xi x.$$

d) Если, например, $P_n \nearrow P$, то $P = \sup P_n$, а тогда для $x \geqslant \mathbf{0}$ (по c))

$$Px = \sup P_n x = \lim P_n x.$$

Для произвольного x

$$Px = Px_+ - Px_- = \lim P_n x_+ - \lim P_n x_- =$$
$$= \lim P_n(x_+ - x_-) = \lim P_n x.$$

2.25. Пусть P_ξ попарно дизъюнктны, $x_\xi^\eta \in X^{P_\xi}$, $x_\xi = \sup_\eta x_\xi^\eta$ ($\xi \in \Xi$, $\eta \in \mathrm{H}$) и x_ξ ограничены в совокупности. Тогда

$$\mathop{\mathbf{S}}_\xi x_\xi = \sup_\eta \mathop{\mathbf{S}}_\xi x_\xi^\eta,$$

т. е. знаки $\mathbf{S}$ и sup перестановочны.

Доказательство. Пусть $x = \sup_\eta \mathop{\mathbf{S}}_\xi x_\xi^\eta$. По 2.22 i), h) и 2.21a)

$$P_{\xi_0} x = \sup_\eta P_{\xi_0}(\mathop{\mathbf{S}}_\xi x_\xi^\eta) = \sup_\eta \mathop{\mathbf{S}}_\xi (P_{\xi_0} x_\xi^\eta) = \sup_\eta x_{\xi_0}^\eta = x_{\xi_0}.$$

Но x входит в компоненту X^P, где $P = \underset{\xi}{\mathbf{S}} P_\xi$. Тогда (2.21a), g))

$$x = Px = \underset{\xi}{\mathbf{S}} (P_\xi x) = \mathbf{S} x_\xi,$$

ч. и тр. д.

2.3. Проекторы, порождённые элементами. Среди всех проекторов выделим особо проекторы, *порождённые элементами*, или *элементные проекторы*.

Определение. Пусть p — произвольный элемент K-пространства X. Проектор P_{X_p}, где X_p — компонента, порождённая элементом p, будем называть проектором, порождённым элементом p, и обозначать (p).

Таким образом,

$$(p)\, x = P_{X_p} x,$$

а $X^{(p)} = X_p$ (так как (p) — проектор на X_p).

Для элементных проекторов справедливы все общие свойства, установленные в 2.2, с заменой P на (p). Отметим ещё некоторые свойства элементных проекторов.

2.31. a) $(p)\, p = p$.

b) $(p)\, x = \mathbf{0}$ эквивалентно $p \,\mathrm{d}\, x$.

c) $(p) = (|p|) = (\alpha p)$ $(\alpha \neq 0)$.

d) $(p_+)\, p = p_+$, $(p_-)\, p = p_-$.

e) Если $|p| \geqslant |q|$, то $(p) \geqslant (q)$.

f) $(\mathbf{S} p_\xi) = \mathbf{S} (p_\xi)$.

g) Пусть P — любой проектор и q — любой элемент из X; тогда $(Pq) = P(q) = (q) P$. В частности, если $P = (p)$, то $((p)\, q) = (p)\,(q) = (q)\,(p)$.

Доказательство. a) очевидно, так как $p \in X_p$.

b) $(p)\, x = \mathbf{0}$ означает, что $x \,\mathrm{d}\, X_p$ (см. 2.21 a)), а это равносильно соотношению $x \,\mathrm{d}\, p$ (см. 1.34 гл. II).

c) следует из равенства компонент

$$X_p = X_{|p|} = X_{\alpha p},$$

которое вытекает сразу из определения компоненты, порождённой элементом (из её свойств линейности и нормальности).

d) Имеем, пользуясь свойствами a), b) и общими свойствами проектора 2.22 d), — e):

$$(p_+)\, p = (p_+)\,(p_+ - p_-) = (p_+)\, p_+ - (p_+)\, p_- = p_+.$$

Аналогично проверяется и второе соотношение.

e) Если $|p| \geqslant |q|$, то из условия нормальности компоненты сразу следует, что $q \in X_p$, т. е. $X_q \subset X_p$, а потому $(q) \leqslant (p)$.

f) Положим $q = \underset{\xi}{\mathbf{S}} p_\xi$. Если некоторый $x \,\mathrm{d}\, p_\xi$ при всех ξ, то $x \,\mathrm{d}\, q$ (см. замечание к 1.72 гл. I). Таким образом, система компонент X_{p_ξ}

полна в X_q, т. е. образует разложение для X_q. Это означает, что

$$X_q = \mathop{\mathbf{S}}_{\xi} X_{p_\xi},$$

т. е. $(q) = \mathop{\mathbf{S}}_{\xi} (p_\xi)$.

g) Положим $q_1 = Pq$ и $q_2 = (CP)q = (\mathbf{1} - P)q = q - q_1$, так что $(q_1) \leqslant P$, $(q_2)\,\mathrm{d}\,P$ (а также $q_1\,\mathrm{d}\,q_2$). Тогда $q = \mathbf{S}\{q_1, q_2\}$ и по f),

$$(q) = \mathbf{S}\{(q_1), (q_2)\} = (q_1) + (q_2).$$

Следовательно, по дистрибутивности

$$P(q) = P(q_1) + P(q_2) = (q_1) = (Pq).$$

По коммутативности умножения в алгебре Буля имеем также $P(q) = (q)P$.

Отметим ещё некоторые свойства элементных проекторов.

2.32. a) $(p)\,\mathrm{d}\,(q)$ равносильно $p\,\mathrm{d}\,q$.

b) $(p) \geqslant (q)$ равносильно $(p)q = q$, что в свою очередь равносильно $q \in X_p$.

c) Для $p_\xi \geqslant \mathbf{0}$.

$$(\sup p_\xi) = \sup (p_\xi).$$

В частности, для $p, q \geqslant \mathbf{0}$

$$(p \vee q) = (p) \vee (q).$$

d) Если $p, q \geqslant \mathbf{0}$, то

$$(p \wedge q) = (p) \wedge (q).$$

e) Всегда

$$(p + q) \leqslant (p) \vee (q).$$

Если $p, q \geqslant \mathbf{0}$ и если $p\,\mathrm{d}\,q$, то в предыдущей формуле имеет место знак равенства.

f) Если $p\,\mathrm{d}\,q$, то

$$(p + q) = (p) + (q) = (|p| \vee |q|).$$

Доказательство. a) $(p)\,\mathrm{d}\,(q)$ означает, что $X_p\,\mathrm{d}\,X_q$, а это равносильно $p\,\mathrm{d}\,q$ (1.34 гл. II).

b) $(p) \geqslant (q)$ означает, что $X_p \supset X_q$, что равносильно $q \in X_p$, а это в свою очередь равносильно $(p)q = q$.

c) Пусть $q = \sup p_\xi$. Тогда $(p_\xi) \leqslant (q)$ при любом ξ, следовательно,

$$P = \sup (p_\xi) \leqslant (q).$$

С другой стороны, $p_\xi \in X_{p_\xi} \subset X^P$, поэтому $q \in X^P$, следовательно, $(q) \leqslant P$. Таким образом, $(q) = P$.

d) Так как $(p \wedge q) \leqslant (p)$ и $(p \wedge q) \leqslant (q)$, то $(p \wedge q) \leqslant (p) \wedge (q)$. Положим

$$R = [(p) \wedge (q)] - (p \wedge q).$$

R — проектор; нужно показать, что $R = \mathbf{0}$.

Из определения разности следует, что $R\,\mathrm{d}\,(p\wedge q)$, откуда $R(p\wedge q)=\mathbf{0}$. Тогда по 2.22 i) $Rp\wedge Rq=\mathbf{0}$, следовательно, (по a)) $(Rp)\,\mathrm{d}\,(Rq)$. Теперь, в результате очевидных преобразований, из которых последнее опирается на 2.31g), получаем:

$$R=R\wedge[(p)\wedge(q)]=[R\wedge(p)]\wedge[R\wedge(q)]=$$
$$=R(p)\cdot R(q)=(Rp)\cdot(Rq)=\mathbf{0}.$$

e) Имеем (см. 2.31c) и e), а также 2.32c)):

$$(p+q)=(|p+q|)\leqslant(2(|p|\vee|q|))=(|p|\vee|q|)=$$
$$=(|p|)\vee(|q|)=(p)\vee(q).$$

Если $p,\ q\geqslant\mathbf{0}$ и $p\,\mathrm{d}\,q$, то $|p+q|=|p|+|q|$ (см. 1.63b) гл. I), а тогда

$$(p+q)=(|p+q|)=(|p|+|q|)\geqslant(|p|\vee|q|)=$$
$$=(|p|)\vee(|q|)=(p)\vee(q).$$

Сопоставляя это с предыдущим неравенством, получим точное равенство.

f) следует из e) и c), так как

$$(p+q)=(|p|)\vee(|q|)=(|p|\vee|q|).$$

§ 3. K-пространства с единицей

При исследовании K-пространств оказывается весьма полезным выделить класс K-пространств, содержащих некоторый элемент (единицу K-пространства), обладающий особыми свойствами. С одной стороны, теория таких K-пространств значительно богаче результатами, а с другой, идеи, развитые в предыдущей главе, дадут возможность свести исследование произвольного K-пространства к исследованию K-пространств с единицей.

3.1. База K-пространства.

Определение. Положительный элемент K-пространства X называется *единицей* и обозначается $\mathbf{1}$, если компонента $X_{\mathbf{1}}$, порождаемая этим элементом, совпадает с X.

Наше определение эквивалентно требованию, чтобы дизъюнктное дополнение компоненты $X_{\mathbf{1}}$ (1.32 гл. II) состояло только из нуля, т. е. данное определение равносильно такому: $\mathbf{1}$ — положительный элемент K-пространства X и в X не существует элемента, отличного от нуля и дизъюнктного с $\mathbf{1}$. Приведём ещё одну характеристику единицы.

3.11. Для того чтобы элемент $\mathbf{1}$ был единицей K-пространства X, необходимо и достаточно, чтобы $x\wedge\mathbf{1}>\mathbf{0}$ для любого $x>\mathbf{0}$ $(x\in X)$.

Необходимость этого условия тривиальна, а достаточность следует из того, что если бы существовал элемент $x\neq\mathbf{0}$, дизъюнктный с $\mathbf{1}$, то мы имели бы $|x|\,\mathrm{d}\,\mathbf{1}$, что противоречит условию.

Не во всяком K-пространстве существует единица. Например, в пространстве V (3.2 гл. I) единицы нет. Доказательство этого утверждения предоставляем читателю в качестве упражнения. Однако, если в каком-нибудь K-пространстве X имеется элемент, обладающий свойством единицы, то таких элементов в X содержится бесконечное множество *). Так, в пространстве S (3.1 гл. I) свойством единицы обладает любая функция, которая почти всюду больше 0. В пространстве s (3.3 гл. 1) свойством единицы обладает любая последовательность, все координаты которой больше 0. В общем случае, если данное K-пространство содержит единицу $\mathbf{1}$, то за единицу также может быть принят любой элемент вида $\alpha\mathbf{1}$, где α — положительное число. Это — прямое следствие из 1.63c) гл. I (так как оттуда вытекает, что $X_{\alpha\mathbf{1}} = X_{\mathbf{1}}$). В дальнейшем при изучении K-пространств с единицей мы предполагаем, что единица $\mathbf{1}$ выбрана и фиксирована.

3.12. Пусть x — произвольный элемент K-пространства X (не обязательно содержащего единицу). Тогда $|x|$ — единица в компоненте X_x, порождённой элементом x.

Для $x > \mathbf{0}$ это следует прямо из определения единицы, а в общем случае — из очевидного равенства $X_x = X_{|x|}$.

Пусть теперь X — K-пространство с единицей.

3.13. a) Проектор $(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, т. е. является тождественным оператором. (Очевидно, так как компонента, на которую проектирует $(\mathbf{1})$ совпадает с X.)

b) Каждый проектор P в пространстве с единицей порождается некоторым элементом.

Действительно, положим $e = P\mathbf{1}$. Тогда по 2.31g)

$$(e) = (P\mathbf{1}) = P(\mathbf{1}) = P\mathbf{1} = P. \tag{1}$$

Определение. Проекция единицы на любую компоненту пространства X, $e = P\mathbf{1}$ называется *единичным элементом*. Множество всех единичных элементов называется *базой* K-пространства.

Из (1) следует, что $e = (e)\mathbf{1}$.

Мы будем обозначать базу пространства X через $\mathfrak{E}(X)$ или просто $\mathfrak{E}$. Ясно, что если $e \in \mathfrak{E}$, то $e \geqslant \mathbf{0}$.

Из предложения 3.13b) и равенства (1) следует, что база $\mathfrak{E}$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $\mathfrak{P} = \{P\}$ всех проекторов, причём это соответствие $P \longleftrightarrow e$ устанавливается формулами

$$P = (e), \qquad e = P\mathbf{1}. \tag{2}$$

Благодаря этому соответствию в $\mathfrak{E}$ можно перенести частичное упорядочение из $\mathfrak{P}$, т. е. считать e_1 меньше e_2, если $(e_1) < (e_2)$. Таким образом, $\mathfrak{E}$ превращается в булевскую алгебру. Однако в $\mathfrak{E}$ имеет

*) Мы исключаем тривиальный случай когда X состоит только из нулевого элемента.

смысл также и частичное упорядочение, определённое в X. При этом по 2.31e), если $e_1 \leqslant e_2$, то $(e_1) \leqslant (e_2)$, а по 2.21 b) — c) верно и обратное заключение.

Отсюда вследствие взаимной однозначности соответствия (2), вытекает, что частичное упорядочение в $\mathfrak{E}$, перенесённое из $\mathfrak{P}$, совпадает с тем, которое определено в нём как в подмножестве пространства X.

3.14. Если в одном K-пространстве двумя различными способами выбрана единица, то получающиеся при этом базы изоморфны между собой. Это ясно, так как обе базы изоморфны $\mathfrak{P}$.

Ясно, что единицей алгебры $\mathfrak{E}$ является $\mathbf{1}$ ($\mathbf{1} = \boldsymbol{11}$), а нулём $\mathbf{0}$ ($\mathbf{0} = \boldsymbol{01}$).

3.2. Свойства единичных элементов. Так как $\mathfrak{E}$ — алгебра Буля, то для каждого $e \in \mathfrak{E}$ имеет смысл дополнение $e' = Ce$.

3.21. a) Дополнение $e' = \mathbf{1} - e$.

b) Для того чтобы $e \in \mathfrak{E}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$e \wedge (\mathbf{1} - e) = \mathbf{0}.$$

c) Элементы e и $\mathbf{1} - e$ могут входить в базу лишь одновременно.

Доказательство. a) По определению дополнительного проектора

$$(e') = C(e) = \boldsymbol{1} - (e).$$

Но по 2.21l)

$$e' = (e')\mathbf{1} = [\boldsymbol{1} - (e)]\mathbf{1} = \mathbf{1} - (e)\mathbf{1} = \mathbf{1} - e.$$

b) Необходимость очевидна, так как $\mathbf{1} - e$ есть дополнение к e. Достаточность получается с помощью 2.22d) и 2.31a) — b):

$$(e)\mathbf{1} = (e)[e + (\mathbf{1} - e)] = (e)e + (e)(\mathbf{1} - e) = e,$$

т. е. $e \in \mathfrak{E}$.

c) следует из a), так как

$$\mathbf{1} - e = Ce, \quad e = C(\mathbf{1} - e).$$

3.22. Из того факта, что упорядочение в $\mathfrak{E}$ порождено упорядочением в X, ещё не следует автоматически, что операции sup и inf в $\mathfrak{E}$ имеют тот же смысл, что и в X, если их применять к элементам $\mathfrak{E}$. Однако это легко вытекает из установленных выше свойств проекторов. Например, если $e_\xi \in \mathfrak{E}$ и $e = \sup e_\xi$ в X, то положим $P = \sup (e_\xi)$ в булевской алгебре проекторов. Тогда по 2.24c)

$$P\mathbf{1} = \sup [(e_\xi)\mathbf{1}] = \sup e_\xi = e,$$

т. е. $e \in \mathfrak{E}$ и $(e) = \sup (e_\xi)$ *).

Рассуждение для нижней грани аналогично.

Итак, мы доказали следующую теорему:

---

*) Равенство $(e) = \sup (e_\xi)$ доказано в 2.32c), но из него непосредственно не видно, что $e \in \mathfrak{E}$.

Основная теорема о базе. *База $\mathfrak{E}(X)$ с упорядочением, порождённым упорядочением в X, является полной алгеброй Буля, в которой операции* sup *и* inf *для любого подмножества имеют тот же смысл, что и в X.*

Из доказанного факта следует, что операции sup, inf и соединения, применённые в X к элементам базы, не выводят из базы. Отсюда непосредственно вытекает, что если $e_1, e_2 \in \mathfrak{E}$ и $e_1 \mathrm{d} e_2$, то $e_1 + e_2 = e_1 \vee e_2 \in \mathfrak{E}$; если $e_1 \geqslant e_2$, то $e_1 - e_2 \in \mathfrak{E}$; если $e_n \in \mathfrak{E}$, то $\overline{\lim}\, e_n \in \mathfrak{E}$ и $\underline{\lim}\, e_n \in \mathfrak{E}$.

3.23. a) Если $e_1, e_2 \in \mathfrak{E}$, то $(e_1) e_2 = e_1 \wedge e_2$.

b) Если $e \in \mathfrak{E}$ и $e = \mathop{\mathbf{S}}\limits_{\xi \in \Xi} e_\xi$, то $e_\xi \in \mathfrak{E}$ при всех $\xi \in \Xi$.

c) Если $e_0 \in \mathfrak{E}$ и e_0 принять за единицу в компоненте X_{e_0}, то база $\mathfrak{E}(X_{e_0}) = \mathfrak{E}(X) \cap X_{e_0}$.

Доказательство. a) С помощью 2.32d) и 2.24a) имеем (так как $e_1 \wedge e_2 \in \mathfrak{E}$):

$$e_1 \wedge e_2 = (e_1 \wedge e_2)\mathbf{1} = [(e_1) \wedge (e_2)]\mathbf{1} = (e_1)[(e_2)\mathbf{1}] = (e_1) e_2.$$

b) Имеем по 2.31e), 2.24b), 2.22h) и 2.31a) — b):

$$(e_\xi)\mathbf{1} = (e_\xi)[(e)\mathbf{1}] = (e_\xi) e = (e_\xi)[\mathop{\mathbf{S}}\limits_{\eta} e_\eta] = \mathop{\mathbf{S}}\limits_{\eta} \{(e_\xi) e_\eta\} = (e_\xi) e_\xi = e_\xi,$$

т. е. $e_\xi \in \mathfrak{E}$.

Если $e \in X_{e_0}$, то $X_e \leqslant X_{e_0}$, а тогда (по 2.24b))

$$(e) e_0 = (e)[(e_0)\mathbf{1}] = (e)\mathbf{1}.$$

Отсюда сразу следует, что включения $e \in \mathfrak{E}(X)$ и $e \in \mathfrak{E}(X_{e_0})$ влекут друг друга.

Установим одно вспомогательное предложение.

3.24. Если число $\alpha > 0$, то для любого $x \in X$

$$((x + \alpha\mathbf{1})_+) \geqslant \mathbf{1} - (x_-).$$

Доказательство. Имеем:

$$x + \alpha\mathbf{1} = x_+ - x_- + \alpha(x_-)\mathbf{1} + \alpha[\mathbf{1} - (x_-)]\mathbf{1} = \\ = \{x_+ + \alpha[\mathbf{1} - (x_-)]\mathbf{1}\} + \{\alpha(x_-)\mathbf{1} - x_-\}.$$

Так как элементы, стоящие в фигурных скобках, дизъюнктны между собой и первый из них положителен, то

$$(x + \alpha\mathbf{1})_+ \geqslant x_+ + \alpha[\mathbf{1} - (x_-)]\mathbf{1} \geqslant \alpha[\mathbf{1} - (x_-)]\mathbf{1}.$$

Действительно, если $x = y + z$, где $y \mathrm{d} z$ и $y \geqslant \mathbf{0}$, то, представив x в виде $x = y + z_+ - z_-$, мы сразу видим, что $x_+ = y + z_+$.

Теперь из доказанного неравенства сразу следует, что (см. формулы (2))

$$((x + \alpha\mathbf{1})_+) \geqslant ([\mathbf{1} - (x_-)]\mathbf{1}) = \mathbf{1} - (x_-).$$

Укажем, какой смысл имеют единичные элементы в уже рассматривавшихся выше конкретных K-пространствах. При этом здесь и в дальнейшем мы считаем, что единица в S — функция, почти всюду равная 1, а в s — последовательность, все координаты которой равны 1. Тогда базу в S образуют характеристические функции всевозможных измеримых подмножеств основного множества T (см. 3.1 гл. I). Базу в s составляют элементы, координаты которых принимают только значения 0 и 1.

3.3. Разложение произвольного K-пространства на подпространства с единицей. Основным результатом, подтверждающим важность рассмотрения K-пространств с единицей, является следующая теорема.

3.31. Теорема. *Для любого K-пространства X существует разложение по компонентам, каждая из которых содержит единицу.*

Доказательство. Благодаря 3.12 достаточно доказать существование разложения, состоящего из компонент, порождённых некоторыми элементами.

Пусть множество E всех отличных от нуля элементов пространства X вполне упорядочено: $E = \{x_\alpha\}$ $(1 \leqslant \alpha < \bar{\alpha})$ *) (α — порядковые числа). Из этого множества с помощью трансфинитной индукции выделяем подмножество Y, состоящее из попарно дизъюнктных элементов, полное в X. Для этого полагаем $y_1 = x_1$. Если y_β уже определены при $1 \leqslant \beta < \beta_0$, то полагаем y_{β_0} равным первому из x_α, который дизъюнктен всем y_β при $\beta < \beta_0$. Если такого элемента не окажется, то построение множества Y закончено. По самому построению Y полно в X, т. е. ни при каком α невозможно $x_\alpha \mathrm{d}\, Y$. Действительно, если допустить, что существуют такие x_α, то среди них есть первый x_{α_1}. Но тогда x_{α_1} должен быть присоединён к Y, т. е. построение множества Y не закончено.

Обозначим через X_β компоненту, построенную на y_β. Тогда компоненты X_β попарно дизъюнктны (1.34 гл. II), а система $\{X_\beta\}$ полна в X. Эта система и образует требуемое разложение.

3.4. След элемента. Во многих вопросах, рассматривая какую-нибудь функцию, существенно знать множество тех точек, где эта функция отлична от нуля. Это множество может быть охарактеризовано некоторой специальной функцией, например, характеристической. Обобщая последнее понятие на случай произвольного K-пространства X с единицей, мы дадим следующее

Определение. Для произвольного $x \in X$ положим

$$e_x = (x)\mathbf{1} = \mathrm{Pr}_{X_x}\mathbf{1}$$

и назовём e_x *следом* элемента x.

---

*) Если X состоит из одного нулевого элемента, то теорема тривиальна.

Равенство $e_x = (x)\mathbf{1}$ означает, что $(x) = (e_x)$, т. е. e_x — единичный элемент, порождающий тот же проектор, что и сам x. Это свойство может быть принято за определение следа.

Вследствие изоморфизма между булевской алгеброй проекторов и базой K-пространства многие доказанные выше свойства проекторов автоматически переформулируются в виде соответствующих свойств следов.

Например, 2.32c) принимает вид: если $x = \sup x_\xi$, где $x_\xi \geqslant \mathbf{0}$, то $e_x = \sup e_{x_\xi}$. Действительно, последнее равенство означает, что $(e_x) = \sup (e_{x_\xi})$, или, что то же самое, $(x) = \sup (x_\xi)$, а это установлено в 2.32c). Аналогичное свойство для нижней грани имеет место лишь в случае конечных множеств (2.32d)). Из 2.32a) следует, что $x\,\mathrm{d}\,y$ равносильно $e_x\,\mathrm{d}\,e_y$.

3.41. Если $e_0 \in \mathfrak{E}$, то его след совпадает с ним, т. е. $e_{e_0} = e_0$. Действительно, e_{e_0} — тот единичный элемент, который порождает проектор (e_0). Но каждый проектор порождается только одним элементом базы, следовательно, $e_{e_0} = e_0$ *).

3.42. Отметим ещё одно свойство следа. Если $e_0 \in \mathfrak{E}$, то

$$e_{(e_0)\,x} = e_0 \wedge e_x.$$

Действительно, в силу 2.31g),

$$((e_0)\,x) = (e_0)\,(x) = (e_0)\,(e_x) = (e_0) \wedge (e_x),$$

а это равносильно утверждаемой формуле.

Приведём одно предложение, используемое в дальнейшем.

3.43. Если $e_n \in \mathfrak{E}$ и $e_n \searrow \mathbf{0}$, то для любого $x \in X$ $(e_n)\,x \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $x \geqslant \mathbf{0}$. Но тогда $(e_{n+1})\,x \leqslant (e_n)\,x$ при любом n (2.31e), 2.21 b — c)). Пусть $(e_n)\,x \searrow x_0$. Тогда (см. 3.42)

$$e_{(e_n)\,x} = e_n \wedge e_x \geqslant e_{x_0}$$

Но так как $e_n \searrow \mathbf{0}$, то $e_{x_0} = \mathbf{0}$, следовательно, и $x_0 = \mathbf{0}$, ч. и тр. д.

Понятие единицы имеет смысл и в K-линеале, но там некоторые элементы могут не иметь следа. Например, в C (1.86 гл. I) свойством единицы обладает любая функция, для которой $x(t) > 0$ при всех t. Примем за единицу $x(t) \equiv 1$. Тогда в C нет ни одного единичного элемента, отличного от $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$, и для функции $x(t)$, равной нулю при $a \leqslant t \leqslant a' < b$ и отличной от нуля при $a' < t \leqslant b$, след не существует.

3.5. Некоторые теоремы о K-пространствах с единицей. Здесь мы установим некоторые особенно важные теоремы, многократно используемые в дальнейшем. Начнём с вспомогательного предложения.

---

*) Иначе:

$$e_{e_0} = (e_0)\,\mathbf{1} = e_0.$$

3.51. Лемма. *Если $x \not\leqslant y$, то существует такой проектор P, для которого*

$$Px > Py, \quad (CP)\,x \leqslant (CP)\,y \quad (CP = \mathbf{1} - P)$$

и при этом $P \leqslant (x) \vee (y)$.

Доказательство. Положим $P = ((x-y)_+)$. По предположению, $(x-y)_+ > \mathbf{0}$ (так как $x - y \not\leqslant \mathbf{0}$), а тогда

$$Px - Py = P(x-y) = ((x-y)_+)(x-y) = (x-y)_+ > 0$$

(по 2.31d)) и

$$(CP)\,x - (CP)\,y = \mathbf{1}(x-y) - P(x-y) = \\ = (x-y) - (x-y)_+ = -(x-y)_- \leqslant \mathbf{0}.$$

При этом

$$P = ((x-y)_+) \leqslant (|x-y|) \leqslant (|x| + |y|) = (x) \vee (y)$$

(по 2.31e), 2.32e) и 2.31c)).

3.52. Теорема. *Для всякого $x > \mathbf{0}$ найдутся такое $e \in \mathfrak{E}$ $(e > \mathbf{0})$ и число $\alpha > 0$, что $\alpha e < x$.*

Доказательство. Невозможно, чтобы при всех $\alpha > 0$ было $x \leqslant \alpha\mathbf{1}$, так как отсюда по 1.39c) гл. I (для нижней грани) следовало бы, что

$$x \leqslant \inf_{\alpha > 0} \alpha\mathbf{1} = (\inf \alpha)\,\mathbf{1} = \mathbf{0}.$$

Значит, найдётся $\alpha > 0$, для которого $x \not\leqslant \alpha\mathbf{1}$. А тогда, по лемме 3.51, существует проектор $P = (e)$, для которого $Px > P(\alpha\mathbf{1})$. Отсюда

$$x \geqslant Px > (e)(\alpha\mathbf{1}) = \alpha e,$$

ч. и тр. д.

3.53. Теорема. (Признак (o)-сходимости.) *Для того чтобы $x_n \xrightarrow{(o)} x$ необходимо и достаточно, чтобы x_n были в совокупности ограничены и чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали проекторы $P_n^\varepsilon \nearrow \mathbf{1}$ такие, что при $m \geqslant n$*

$$P_n^\varepsilon |x_m - x| \leqslant \varepsilon\mathbf{1}. \tag{3}$$

Замечание. Применяя к обеим частям неравенства (3) ещё раз оператор P_n^ε, можно представить это неравенство в равносильной форме:

$$P_n^\varepsilon |x_m - x| \leqslant \varepsilon P_n^\varepsilon \mathbf{1}.$$

Доказательство. Достаточно провести доказательство для случая $x = \mathbf{0}$, так как общий случай сведётся к этому, если перейти к последовательности $\{x_n - x\}$.

a) Необходимость. Пусть $x_n \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$. Тогда множество $\{x_n\}$ ограничено и $|x_n| \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$ (2.13c) гл. I). Последнее означает, что

$$y_n = \sup_{m \geqslant n} |x_m| \searrow \mathbf{0}.$$

Положим

$$P_n^\varepsilon = ((\varepsilon \mathbf{1} - y_n)_+).$$

Тогда (по 2.31d))

$$P_n^\varepsilon (\varepsilon \mathbf{1} - y_n) = (\varepsilon \mathbf{1} - y_n)_+ \geqslant \mathbf{0},$$

т. е.

$$P_n^\varepsilon (y_n) \leqslant P_n^\varepsilon (\varepsilon \mathbf{1}) \leqslant \varepsilon \mathbf{1}. \tag{4}$$

Из (4) сразу вытекает (3) при $m \geqslant n$. Остаётся доказать, что $P_n^\varepsilon \nearrow \mathbf{1}$.

Монотонность P_n^ε по n очевидна, так как $\varepsilon \mathbf{1} - y_{n_1} \geqslant \varepsilon \mathbf{1} - y_{n_2}$ при $n_1 \geqslant n_2$ (см. 2.31e)). Пусть $P = \sup_n P_n^\varepsilon$, т. е. $P_n^\varepsilon \nearrow P$. Так как

$$(\mathbf{1} - P_n^\varepsilon)(\varepsilon \mathbf{1} - y_n) = (\varepsilon \mathbf{1} - y_n) - (\varepsilon \mathbf{1} - y_n)_+ \leqslant \mathbf{0},$$

то и

$$(\mathbf{1} - P)(\varepsilon \mathbf{1} - y_n) = (\mathbf{1} - P)[(\mathbf{1} - P_n^\varepsilon)(\varepsilon \mathbf{1} - y_n)] \leqslant \mathbf{0},$$

откуда

$$(\mathbf{1} - P) y_n \geqslant (\mathbf{1} - P)(\varepsilon \mathbf{1}) = \varepsilon (\mathbf{1} - P\mathbf{1}).$$

Но $y_n \geqslant (\mathbf{1} - P) y_n$ и $y_n \searrow \mathbf{0}$, а тогда $(\mathbf{1} - P) y_n \searrow \mathbf{0}$ и $\mathbf{1} - P\mathbf{1} = \mathbf{0}$, т. е. $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$. Вследствие изоморфизма между базой и множеством проекторов последнее равенство означает, что $P = (\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.

b) Достаточность. Допустим, что $x_n \not\xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$. Тогда $\mathbf{0} < \overline{\lim} |x_n| < +\infty$ и по теореме 3.52 существуют $e \in \mathfrak{E}(e > \mathbf{0})$ и число $\alpha > 0$ такие, что $\overline{\lim} |x_n| > \alpha e$. Допустим, что существуют проекторы $P_n = P_n^\varepsilon$, удовлетворяющие условию теоремы при $\varepsilon < \alpha$. Тогда $P_n e \to \mathbf{1} e = e$, следовательно, $P_n e > \mathbf{0}$ при некотором n. Имеем, при $m \geqslant n$; $P_n |x_m| \leqslant \varepsilon P_n \mathbf{1}$, а тогда (2.22i))

$$P_n(\sup_{m \geqslant n} |x_m|) \leqslant \varepsilon P_n \mathbf{1},$$

и также

$$P_n(\overline{\lim} |x_n|) \leqslant \varepsilon P_n \mathbf{1}.$$

Отсюда

$$[P_n \wedge (e)](\overline{\lim} |x_n|) = (e)[P_n(\overline{\lim} |x_n|)] \leqslant \varepsilon P_n [(e)\mathbf{1}] = \varepsilon P_n e,$$

а, с другой стороны,

$$[P_n \wedge (e)](\overline{\lim} |x_n|) \geqslant [P_n \wedge (e)](\alpha e) = \alpha P_n e.$$

Полученные два неравенства противоречат друг другу, так как $\varepsilon < \alpha$ и $P_n e > \mathbf{0}$. Теорема доказана.

3.54. В случае, если в предыдущей теореме $x_n = e_n \in \mathfrak{E}$, то условие теоремы можно усилить в сторону необходимости, а именно: *существуют проекторы $P_n \nearrow \mathbf{1}$ такие, что*

$$P_n | x_m - x_n | = \mathbf{0}$$

при $m \geqslant n$.

Доказательство. Так как $x_n \in \mathfrak{E}$, то и $x \in \mathfrak{E}$ (3.22). Но тогда в силу 1.52k) гл. I и свойств базы

$$| x_n - x | = (x_n \vee x) - (x_n \vee x) \in \mathfrak{E}.$$

По доказанному признаку сходимости (при $\varepsilon < 1$) найдутся $P_n \nearrow \mathbf{1}$ такие, что $P_n | x_m - x | \leqslant \varepsilon \mathbf{1}$ при $m \geqslant n$. Применим к обеим частям неравенства оператор $P_n(| x_m - x |)$. Тогда получим (см. 2.31g) и a)):

$$P_n | x_m - x | \leqslant \varepsilon P_n | x_m - x |,$$

что возможно лишь при $P_n | x_m - x | = \mathbf{0}$.

3.55. Теорема об аппроксимации элементов K-пространства. *Пусть $x \geqslant \mathbf{0}$, $x \in X$. Обозначим через $K(x)$ множество всех конечных линейных комбинаций единичных элементов с положительными коэффициентами, т. е. элементов вида $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ (где $e_k \in \mathfrak{E}$, $k = 1, 2, \ldots, n$), удовлетворяющих дополнительному условию: $y \leqslant x$. Тогда $\sup K(x) = x$.*

Доказательство. Очевидно, $z = \sup K(x) \leqslant x$. Допустим, что $z < x$. Тогда, по теореме 3.52, существуют $e > \mathbf{0}$ и $\alpha > 0$ такие, что $z + \alpha e < x$. Следовательно, при любом $y \in K(x)$ $y + \alpha e$ также входит в $K(x)$. Но тогда $y + ne \in K(x)$ при любом $n = 1, 2, \ldots$, т. е. $y + ne \leqslant x$ или $ne \leqslant x - y$, а это противоречит принципу Архимеда. Значит, $z = x$, ч. и тр. д.

3.6. Ограниченные элементы. Сейчас мы рассмотрим одно подпространство K-пространства с единицей, которое мы в дальнейшем изучим весьма подробно.

Определение. Элемент x K-пространства X с единицей называется *ограниченным*, если $|x| \leqslant \alpha \mathbf{1}$, где α — вещественное число.

Обозначим множество всех ограниченных элементов пространства X через X_b. Легко видеть, что X_b удовлетворяет всем требованиям, перечисленным в 1.12 гл. II, т. е. является подпространством пространства X. Так как $\mathbf{1} \in X_b$, то X_b, рассматриваемое как самостоятельное пространство, есть K-пространство с единицей. При этом если единица в X_b оставлена та же, что и в X, то совпадают и базы $\mathfrak{E}(X_b)$ и $\mathfrak{E}(X)$.

Ясно, что X_b — нормальное подпространство пространства X. Но можно утверждать, что в случае, если в X существуют неограниченные элементы, X_b не будет правильным подпространством. Действительно, пусть $x \in X$ и x — неограниченный элемент; по тео-

реме об аппроксимации (3.55), $|x| = \sup K(|x|)$, причём $K(|x|)$ состоит из ограниченных элементов, т. е. $K(|x|) \subset X_b$, и $K(|x|)$ ограничено в X, но $\sup K(|x|) \overline{\in} X_b$.

Так как $\mathbf{1} \in X_b$, то X_b полно в X.

Легко видеть, что понятие ограниченного элемента не инвариантно относительно выбора единицы пространства.

В пространстве S ограниченными элементами будут функции, ограниченные почти всюду. Подпространство s_b пространства s состоит из ограниченных последовательностей.

§ 4. Интегральное представление элементов

4.1. Характеристики. Будем опять считать, что X — K-пространство с единицей.

Определение. *Характеристикой* элемента $x \in X$ называется семейство единичных элементов $\{e_\lambda\}$, зависящих от вещественного параметра $\lambda (-\infty < \lambda < +\infty)$, или, что то же самое, семейство проекторов $P_\lambda = (e_\lambda)$ (причём $e_\lambda = P_\lambda \mathbf{1}$), удовлетворяющее следующим условиям:

$$P_\lambda x \leqslant \lambda e_\lambda, \quad (\mathbf{1} - P_\lambda) x \geqslant \lambda (\mathbf{1} - e_\lambda) \tag{1}$$

при любом λ или, что то же самое,

$$P_\lambda (\lambda \mathbf{1} - x) \geqslant \mathbf{0}, \quad (\mathbf{1} - P_\lambda)(\lambda \mathbf{1} - x) \leqslant \mathbf{0}. \tag{1'}$$

Характеристику e_λ можно рассматривать также как функцию от λ со значениями в базе $\mathfrak{E}(X)$.

4.11. Покажем, что характеристика для каждого x существует; при этом она может определяться не однозначно.

Так как при любом λ $(\lambda \mathbf{1} - x)_+ \mathrm{d} (\lambda \mathbf{1} - x)_-$, то (2.32a))

$$((\lambda \mathbf{1} - x)_+) + ((\lambda \mathbf{1} - x)_-) \leqslant \mathbf{1},$$

или

$$((\lambda \mathbf{1} - x)_+) \leqslant \mathbf{1} - ((\lambda \mathbf{1} - x)_-).$$

Положим

$$P_\lambda^+ = ((\lambda \mathbf{1} - x)_+), \quad P_\lambda^- = ((\lambda \mathbf{1} - x)_-).$$

Возьмём в качестве P_λ любой проектор, заключённый между P_λ^+ и $\mathbf{1} - P_\lambda^-$, т. е.

$$P_\lambda^+ \leqslant P_\lambda \leqslant \mathbf{1} - P_\lambda^-, \tag{2}$$

и докажем, что P_λ удовлетворяет условиям (1′).

Действительно (см. 2.24b)).

$$\begin{aligned} P_\lambda (\lambda \mathbf{1} - x) &= \\ &= P_\lambda [\mathbf{1} - P_\lambda^-) (\lambda \mathbf{1} - x)] = P_\lambda [(\lambda \mathbf{1} - x) - (\lambda \mathbf{1} - x)_-] = \\ &= P_\lambda [(\lambda \mathbf{1} - x)_+] \geqslant \mathbf{0}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$(\mathbf{1}-P_\lambda)(\lambda\mathbf{1}-x)=(\mathbf{1}-P_\lambda)[(\mathbf{1}-P_\lambda^+)(\lambda\mathbf{1}-x)]=$$
$$=(\mathbf{1}-P_\lambda)[-(\lambda\mathbf{1}-x)_-]\leqslant\mathbf{0}.$$

4.12. Теперь установим обратный результат, а именно, что для любой характеристики проекторы P_λ удовлетворяют неравенствам (2).

Так как по 2.22 k) из $Px\geqslant\mathbf{0}$ следует $P(x_-)=\mathbf{0}$, то из первого из неравенств (1′) вытекает, что $P_\lambda[(\lambda\mathbf{1}-x)_-]=\mathbf{0}$. Значит, по 2.31b), $(\lambda\mathbf{1}-x)_-\,\mathrm{d}\,e_\lambda=P_\lambda\mathbf{1}$ или 2.32a) $P_\lambda^-\,\mathrm{d}\,P_\lambda$. Следовательно, $P_\lambda\leqslant CP_\lambda^-=\mathbf{1}-P_\lambda^-$.

Аналогичным образом из второго из неравенств (1′) вытекает, что $P_\lambda\geqslant P_\lambda^+$. Действительно, рассуждая, как выше, мы получим, что $(\mathbf{1}-P_\lambda)[(\lambda\mathbf{1}-x)_+]=\mathbf{0}$, т. е. $(\mathbf{1}-P_\lambda)\,\mathrm{d}\,P_\lambda^+$, и, следовательно, $P_\lambda^+\leqslant C(\mathbf{1}-P_\lambda)=P_\lambda$.

В пространстве S $e_\lambda^+=P_\lambda^+\mathbf{1}$ изображается характеристической функцией множества

$$E_\lambda^+=T(x(t)<\lambda),$$

$e_\lambda^-=P_\lambda^-\mathbf{1}$ изображается характеристической функцией множества

$$E_\lambda^-=T(x(t)>\lambda),$$

а $e_\lambda=P_\lambda\mathbf{1}$ — характеристическая функция любого измеримого множества $E\subset T$, удовлетворяющего условию

$$E_\lambda^+\subset E\subset T\setminus E_\lambda^-.$$

Установим некоторые свойства характеристик.

4.13. a) Если $\lambda<\mu$, то $P_\lambda\leqslant P_\mu$ $(e_\lambda\leqslant e_\mu)$.

b) $P_\lambda\nearrow\mathbf{1}$ $(e_\lambda\nearrow\mathbf{1})$ при $\lambda\nearrow+\infty$,

$P_\lambda\searrow\mathbf{0}$ $(e_\lambda\searrow\mathbf{0})$ при $\lambda\searrow-\infty$ *).

c) Если $x\geqslant\mathbf{0}$, то при $\lambda>0$

$$e_\lambda\geqslant\mathbf{1}-e_x$$

(e_x — след элемента x).

Доказательство. a) Представляя $\mu\mathbf{1}-x$ в виде

$$\mu\mathbf{1}-x=(\lambda\mathbf{1}-x)+(\mu-\lambda)\mathbf{1}$$

и применяя 3.24 (с заменой x на $\lambda\mathbf{1}-x$ и α на $\mu-\lambda$), получаем:

$$((\mu\mathbf{1}-x)_+)\geqslant\mathbf{1}-((\lambda\mathbf{1}-x)_-),$$

т. е. $P_\mu^+\geqslant\mathbf{1}-P_\lambda^-$. Отсюда по (2) $P_\mu\geqslant P_\lambda$.

---

*) Здесь подразумевается, что λ принимает значения из некоторой монотонной последовательности, стремящейся к $+\infty$ или $-\infty$ соответственно.

b) Положим $P = \sup_\lambda P_\lambda$. Так как монотонность P_λ уже доказана в a), то $P_\lambda \nearrow P$ при $\lambda \nearrow +\infty$. Нужно доказать, что $P = \mathbf{1}$.

С помощью (1) мы имеем при любом λ:

$$\lambda(\mathbf{1} - P)\mathbf{1} \leqslant \lambda(\mathbf{1} - P_\lambda)\mathbf{1} = \lambda(\mathbf{1} - e_\lambda) \leqslant$$
$$\leqslant (\mathbf{1} - P_\lambda)x \leqslant (\mathbf{1} - P_\lambda)|x| \leqslant |x|.$$

По принципу Архимеда это возможно только если $(\mathbf{1} - P)\mathbf{1} = \mathbf{0}$, т. е. $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$. Следовательно, $P = (\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.

Рассуждение для случая $\lambda \searrow -\infty$ аналогично.

c) Благодаря неравенству $P_\mu^+ \geqslant \mathbf{1} - P_\lambda^-$ $(\mu > \lambda)$, установленному при доказательстве монотонности характеристики, имеем $e_\lambda \geqslant e_\lambda^+ \geqslant \geqslant \mathbf{1} - e_0^-$ *). Но

$$e_0^- = P_0^-\mathbf{1} = ((-x)_-)\mathbf{1} = (x)\mathbf{1} = e_x.$$

Замечание. Читатель легко сможет проверить, что $e_{\lambda_n} \to \mathbf{1}$ (соответственно $\to \mathbf{0}$) при стремлении λ_n к $+\infty$ (соответственно к $-\infty$) любым способом.

4.14. a) Если $\lambda < \mu$, то

$$\lambda(e_\mu - e_\lambda) \leqslant (P_\mu - P_\lambda)x \leqslant \mu(e_\mu - e_\lambda).$$

b) Если $\lambda < \mu \leqslant \nu < \pi$, то $(P_\mu - P_\lambda)\,\mathrm{d}\,(P_\pi - P_\nu)$.

Доказательство. a) Имеем по (1) $P_\mu x \leqslant \mu e_\mu$. Применяя к обеим частям неравенства оператор $P_\mu - P_\lambda$, получаем (см. 3.23a))

$$(P_\mu - P_\lambda)x \leqslant \mu(P_\mu - P_\lambda)e_\mu = \mu[e_\mu - (e_\lambda \wedge e_\mu)] =$$
$$= \mu(e_\mu - e_\lambda).$$

Первое из неравенств a) получается аналогично.

b) Имеем $P_\mu\,\mathrm{d}\,\mathbf{1} - P_\mu$; тем более $P_\mu\,\mathrm{d}\,\mathbf{1} - P_\nu$, так как $\mathbf{1} - P_\nu \leqslant \mathbf{1} - P_\mu$. Но тогда b) очевидно, так как

$$P_\mu - P_\lambda \leqslant P_\mu, \quad P_\pi - P_\nu \leqslant \mathbf{1} - P_\nu.$$

4.15. Если $|x| \leqslant \alpha\mathbf{1}$ (т. е. x — ограниченный элемент, см. 3.6), то $P_\lambda = \mathbf{0}$ $(e_\lambda = \mathbf{0})$ при $\lambda < -\alpha$ и $P_\lambda = \mathbf{1}$ $(e_\lambda = \mathbf{1})$ при $\lambda > \alpha$.

Доказательство. Действительно, при $\lambda < -\alpha$

$$\lambda\mathbf{1} - x \leqslant \lambda\mathbf{1} - (-\alpha\mathbf{1}) = (\lambda + \alpha)\mathbf{1} < \mathbf{0},$$

откуда $(\lambda\mathbf{1} - x)_- \geqslant -(\lambda + \alpha)\mathbf{1} > \mathbf{0}$, следовательно, $P_\lambda^- \geqslant (\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, т. е. $P_\lambda^- = \mathbf{1}$. А тогда из неравенств (2) сразу следует, что $P_\lambda = \mathbf{0}$.

Для $\lambda > \alpha$ аналогично

$$\lambda\mathbf{1} - x \geqslant \lambda\mathbf{1} - \alpha\mathbf{1} = (\lambda - \alpha)\mathbf{1} > \mathbf{0},$$

откуда $P_\lambda^+ \geqslant \mathbf{1}$, т. е. $P_\lambda^+ = \mathbf{1}$ и, значит, $P_\lambda = \mathbf{1}$.

---

*) $e_\lambda^+ = P_\lambda^+\mathbf{1}$, $e_\lambda^- = P_\lambda^-\mathbf{1}$.

Отметим ещё некоторые свойства характеристик, которые не будут использованы в настоящем параграфе.

4.16. a) Для $x \geqslant \mathbf{0}$ $P_\lambda = \mathbf{0}$ при $\lambda < 0$. Наоборот, для $x \leqslant \mathbf{0}$ $P_\lambda = \mathbf{1}$ при $\lambda > 0$. В частности, если $x = \mathbf{0}$, то

$$P_\lambda = \begin{cases} \mathbf{0} \text{ при } \lambda < 0, \\ \text{любому } P \in \mathfrak{P} \text{ при } \lambda = 0, \\ \mathbf{1} \text{ при } \lambda > 0. \end{cases}$$

b) Если $x = \alpha e$ $(e \in \mathfrak{E}(X))$, то
в случае $\alpha > 0$:

$$P_\lambda = \begin{cases} \mathbf{0} \text{ при } \lambda < 0, \\ \mathbf{1} - (e) \text{ при } 0 < \lambda < \alpha, \\ \mathbf{1} \text{ при } \lambda > \alpha, \end{cases}$$

$$\mathbf{0} \leqslant P_0 \leqslant \mathbf{1} - (e) \leqslant P_\alpha \leqslant \mathbf{1}.$$

В случае $\alpha < 0$:

$$P_\lambda = \begin{cases} \mathbf{0} \text{ при } \lambda < \alpha, \\ (e) \text{ при } \alpha < \lambda < 0, \\ \mathbf{1} \text{ при } \lambda > 0, \end{cases}$$

$$\mathbf{0} \leqslant P_\alpha \leqslant (e) \leqslant P_0 \leqslant \mathbf{1}.$$

Доказательство. a) Очевидно.

b) Представим $\lambda\mathbf{1} - x$ в виде

$$\lambda\mathbf{1} - x = (\lambda - \alpha)\, e + \lambda\,(\mathbf{1} - e),$$

и заметим, что слагаемые в правой части дизъюнктны. Дальнейшее рассуждение проведём, например, для случая $0 < \lambda < \alpha$. В этом случае

$$(\lambda\mathbf{1} - x)_+ = \lambda\,(\mathbf{1} - e), \quad (\lambda\mathbf{1} - x)_- = (\alpha - \lambda)\, e.$$

Следовательно, $P_\lambda^+ = \mathbf{1} - (e)$, $P_\lambda^- = (e)$ и из неравенств (2) сразу вытекает что $P_\lambda = \mathbf{1} - (e)$. Аналогично рассматриваются все другие случаи.

4.17. $P_\lambda \nearrow P_\mu^+$ при $\lambda \nearrow \mu$ (иначе: $P_\mu^+ = \sup\limits_{\lambda < \mu} P_\lambda$).

Доказательство. Имеем $\mu\mathbf{1} - x = \sup\limits_{\lambda < \mu} (\lambda\mathbf{1} - x)$. Тогда по 1.55a) гл. I

$$(\mu\mathbf{1} - x)_+ = \sup_{\lambda < \mu} (\lambda\mathbf{1} - x)_+.$$

Отсюда по 2.32c) $P_\mu^+ = \sup\limits_{\lambda < \mu} P_\lambda^+$. Но $P_\lambda^+ \leqslant P_\lambda \leqslant P^+$ следовательно, подавно $P_\mu^+ = \sup\limits_{\lambda < \mu} P_\lambda$.

Таким образом, если при определении характеристики положить $P_\lambda = P_\mu^+$, то характеристика становится непрерывной слева функцией от λ. Легко видеть, что указанное определение характеристики — единственное, при котором имеет место непрерывность слева. Следовательно, если требовать непрерывности слева, то определение характеристики получается однозначным для каждого x. Однако в дальнейшем мы всё же не будем вводить этого требования.

В следующем пункте будет установлено, что характеристика полностью определяет элемент K-пространства.

Установим ещё один признак сходимости.

4.18. Второй признак (o)-сходимости. *Для того чтобы $x_n \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$, необходимо и достаточно, чтобы x_n были в совокупности ограничены и чтобы при любом $\varepsilon > 0$*

$$e_\varepsilon^{(n)} \xrightarrow{(o)} \mathbf{1},$$

где $\{e_\varepsilon^{(n)}\}$ — характеристика $|x_n|$.

Доказательство. a) Необходимость. По определению характеристики,

$$(\mathbf{1} - e_\varepsilon^{(n)})\,|x_n| \geqslant \varepsilon\,(\mathbf{1} - e_\varepsilon^{(n)}).$$

Так как для любого проектора $|Px_n| \leqslant |x_n|$, а $|x_n| \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$, то из написанного неравенства следует, что $\mathbf{1} - e_\varepsilon^{(n)} \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$, т. е. $e_\varepsilon^{(n)} \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$.

b) Достаточность. Положим

$$e_n^* = \inf\,(e_\varepsilon^{(n)}, e_\varepsilon^{(n+1)}, \ldots)$$

(e_n^*, конечно, зависит от ε). Тогда $e_n^* \nearrow \mathbf{1}$. Из неравенства $(e_\varepsilon^{(m)})\,|x_m| \leqslant \varepsilon\, e_\varepsilon^{(m)}$ применением к обеим его частям проектора (e_n^*) мы сразу получаем, что

$$(e_n^*)\,|x_m| \leqslant \varepsilon e_n^* \qquad \text{при } m \geqslant n.$$

Но это означает, что для x_n выполнены условия признака (o)-сходимости 3.53, откуда $x_n \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$.

4.19. Можно дать другую, равносильную формулировку предыдущего признака, которая имеет силу и в K-группе с аксиомой V, выполненной для счётных множеств. Именно в предыдущей формулировке следует заменить условие $e_\varepsilon^{(n)} \xrightarrow{(o)} \mathbf{1}$ на условие

$$e_{(k)}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{(o)} \mathbf{1}$$

при любом целом $k > 0$, где $e_{(k)}^{(n)}$ — след элемента $(\mathbf{1} - k\,|x_n|)_+$.

Необходимость этого условия в K-группе может быть установлена аналогично доказательству необходимости в 4.18. Именно, из неравенства

$$(\mathbf{1} - e_{(k)}^{(n)})\,(\mathbf{1} - k\,|x_n|) = -\,(\mathbf{1} - e_{(k)}^{(n)})\,(\mathbf{1} - k\,|x_n|)_- \leqslant \mathbf{0}$$

следует, что

$$(\mathbf{1} - e_{(k)}^{(n)})\,(k\,|x_n|) \geqslant \mathbf{1} - e_{(k)}^{(n)},$$

и так как левая часть неравенства (o)-стремится к $\mathbf{0}$ при $n \to \infty$ *), то $e_{(k)}^{(n)} \xrightarrow{(o)} \mathbf{1}$.

На доказательстве достаточности мы не останавливаемся. В дальнейшем этот признак будет использован в K-группах только в части необходимости.

---

*) В K-группе из $x_n \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$ вытекает, что $kx_n \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$. См. доказательство 2.12e) и предложение 2.13a) гл. I. Читатель легко убедится, что рассуждения, проведённые в этих номерах, сохраняют силу в K-группе.

4.2. Интегральное представление элементов. Теперь мы покажем, что всякий элемент K-пространства с единицей можно аппроксимировать с любой степенью точности некоторыми суммами, составленными с помощью характеристики. Конструкция этих сумм естественно приводит нас к понятию интеграла типа Стилтьеса.

4.21. Теорема (Г. Фрейденталь). *Каждый элемент $x \in X$ представим в виде*

$$x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, de_\lambda^x,$$

($\{e_\lambda^x\}$ — характеристика элемента x), где под интегралом понимается общий предел интегральных сумм

$$\sigma = \sum_{-\infty}^{\infty} l_n (e_{\lambda_n} - e_{\lambda_{n-1}}), \tag{3}$$

в которых

$$-\infty \leftarrow \ldots < \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \rightarrow +\infty,$$

$$\lambda_{n-1} \leqslant l_n \leqslant \lambda_n \qquad \text{при всех } n$$

и

$$\varepsilon = \sup_n (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \to 0.$$

Доказательство. По 4.13a) — b) и 1.27

$$\mathop{\mathbf{S}}_n \{P_{\lambda_n} - P_{\lambda_{n-1}}\} = \mathbf{1}.$$

Следовательно, по 2.21d) настоящей главы и 4.13—4.14 гл. I

$$x = \mathop{\mathbf{S}}_n \{(P_{\lambda_n} - P_{\lambda_{n-1}}) x\} = \sum_{-\infty}^{\infty} (P_{\lambda_n} - P_{\lambda_{n-1}}) x. \tag{4}$$

Далее, по 4.14a)

$$\lambda_{n-1} (e_{\lambda_n} - e_{\lambda_{n-1}}) \leqslant (P_{\lambda_n} - P_{\lambda_{n-1}}) x \leqslant \lambda_n (e_{\lambda_n} - e_{\lambda_{n-1}}),$$

откуда, так как $\lambda_{n-1} \leqslant l_n \leqslant \lambda_n$ и $\lambda_n - \lambda_{n-1} \leqslant \varepsilon$:

$$|(P_{\lambda_n} - P_{\lambda_{n-1}}) x - l_n (e_{\lambda_n} - e_{\lambda_{n-1}})| \leqslant \varepsilon (e_{\lambda_n} - e_{\lambda_{n-1}}). \tag{5}$$

Но $\sum (e_{\lambda_n} - e_{\lambda_{n-1}}) = \mathbf{1}$. Поэтому ряд, общим членом которого служит левая часть последнего неравенства, по признаку сравнения рядов сходится. Отсюда и из сходимости ряда (4) вытекает сходимость ряда (3). При этом в силу неравенства (5)

$$|\sigma - x| = \Big|\sum_{-\infty}^{\infty} l_n (e_{\lambda_n} - e_{\lambda_{n-1}}) - \sum_{-\infty}^{\infty} P_{\lambda_n} - P_{\lambda_{n-1}}) x\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{-\infty}^{\infty} \varepsilon (e_{\lambda_n} - e_{\lambda_{n-1}}) = \varepsilon \mathbf{1},$$

откуда и следует, что

$$x = (o)\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} \sigma.$$

В литературе вместо термина «интегральное» представление распространён термин «спектральное». При этом характеристика называется *спектром*.

4.22. Следствие. *Если* $\{P_\lambda\}$ *и* $\{P'_\lambda\}$ — *характеристики элементов* x *и* y (*соответственно*) *и* $P_\lambda = P'_\lambda$ *при всех* λ, *входящих в некоторое всюду плотное множество* L *), *то* $x = y$.

Это вытекает из доказанного интегрального представления элементов; действительно, последовательности $\{\lambda_n\}$ всегда можно выбрать так, чтобы все $\lambda_n \in L$. А в таком случае интегральные суммы для x и y, построенные с помощью одних и тех же λ_n и l_n, будут совпадать.

4.23. Мы уже отмечали выше (4.15), что для ограниченных элементов $\mathbf{0} < P_\lambda < \mathbf{1}$ только в некотором конечном промежутке. Благодаря этому в интегральных суммах для ограниченных элементов будет лишь конечное число слагаемых, отличных от нуля, т. е. интеграл фактически приходится брать по конечному промежутку. Но для сохранения единообразия мы во всех случаях будем писать $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$.

4.24. Если K-пространство X не содержит единицы, то мы не имеем возможности построить в нём общий интегральный аппарат для представления любых элементов. Но если $x_0 > \mathbf{0}$, то в подпространстве X_{x_0} можно принять x_0 за единицу и тогда возможно интегральное представление элементов $x \in X_{x_0}$.

§ 5. Непрерывные и дискретные пространства

5.1. Определения. В настоящем параграфе мы выделим два класса K-пространств принципиально различной структуры и покажем, что в самом общем случае K-пространство разлагается на подпространства этих классов. Здесь X — произвольное K-пространство, существование единицы заранее не предполагается.

Определение. 1. Элемент $x \in X$ называется *дискретным*, если для него невозможно представление $x = \mathbf{S}(x_1, x_2)$, где $x_1 \neq \mathbf{0}$ и $x_2 \neq \mathbf{0}$.

2. Элемент $x \in X$ называется *непрерывным*, если не существует дискретного элемента $y \in X$ такого, что $\mathbf{0} < y \leqslant |x|$.

3. K-пространство X называется *дискретным*, если каждый элемент $x \in X$ представим в виде $x = \mathbf{S} x_\alpha$, где x_α — дискретные элементы.

---

*) В частности, всюду, за исключением конечного или счётного множества.

4. K-пространство X называется *непрерывным*, если в нём нет дискретных элементов $x \neq \mathbf{0}$. Очевидно, все элементы непрерывного пространства, отличные от нуля, непрерывны.

Если в X выбрана единица, то дискретный единичный элемент называется *ортом*.

5.11. Для того чтобы $x \in X$ был дискретным элементом необходимо и достаточно, чтобы проектор (x) был *минимальным*, т. е. чтобы не существовало проектора P, удовлетворяющего неравенству $\mathbf{0} < P < (x)$.

Доказательство. a) Необходимость. Если бы такой проектор P существовал, то мы бы имели $Px \neq \mathbf{0}$ и для $Q = (x) - P > \mathbf{0}$ также $Qx \neq \mathbf{0}$. При этом

$$x = (x)\,x = (P + Q)\,x = [\mathbf{S}\,(P,\ Q)]\,x = \mathbf{S}\,(Px,\ Qx),$$

что противоречит дискретности элемента x.

b) Достаточность. Если $x = \mathbf{S}\,(x_1,\ x_2)$, где $x_1 \neq \mathbf{0}$ и $x_2 \neq \mathbf{0}$, то $(x) = \mathbf{S}\,[(x_1),\ (x_2)] = (x_1) + (x_2)$ (2.31f)) и $\mathbf{0} < (x_1) < (x)$.

5.12. Пусть x — дискретный элемент. Тогда

a) по крайней мере один из элементов x_+ или x_- равен $\mathbf{0}$.

b) Если, кроме того, X содержит единицу, то след e_x — орт и, обратно, если e_x — орт, то x — дискретный элемент.

Доказательство. a) Следует из равенства $x = \mathbf{S}\,(x_+,\ -x_-)$ (1.71 гл. I).

b) Следует из равенства $(x) = (e_x)$ и 5.11, так как условие минимальности проектора (e_x), очевидно, равносильно тому, что $e_x = (e_x)\,\mathbf{1}$ есть орт.

5.13. Если единица пространства является дискретным элементом, то база состоит из $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$.

Очевидно, так как если $e \in \mathfrak{E}$, то $\mathbf{1} = \mathbf{S}\,(e,\ \mathbf{1} - e)$.

5.14. Если X — K-пространство с единицей, а x — дискретный элемент, то $x = \alpha e$, где $e \in \mathfrak{E}\,(X)$. При этом непременно (при $x \neq \mathbf{0}$) $e = e_x$.

Доказательство. Если $x = \mathbf{0}$, то, например, $x = 0 \cdot \mathbf{1}$. Пусть $x \neq \mathbf{0}$. Тогда, по теореме 3.52, существуют $e \in \mathfrak{E}\,(e > \mathbf{0})$ и $\alpha > 0$ такие, что $\alpha e \leqslant |x|$. При этом $(e) \leqslant (x)$ и вследствие минимальности $(x) = (e)$, т. е. $e = e_x$. Обозначим через α_0 наибольшее α, удовлетворяющее неравенству $\alpha e \leqslant |x|$, и покажем, что $|x| = \alpha_0 e_x$. Действительно, если бы было $|x| - \alpha_0 e_x > \mathbf{0}$, то по той же теореме 3.52 мы бы получили $\beta e' \leqslant |x| - \alpha_0 e_x$ $(\beta > 0,\ e' > \mathbf{0})$ и при этом опять $e' = e_x$. Но тогда мы пришли бы к неравенству $(\alpha_0 + \beta)\,e_x \leqslant |x|$, которое противоречит определению числа α_0.

Итак, $|x| = \alpha_0 e_x$. Но по 5.12a) $x = x_+ = |x|$ или $x = -x_- = -|x|$. Следовательно, $x = \pm \alpha_0 e_x$.

5.15. Если x и $y\,(\in X)$ дискретны, то либо $x\,\mathrm{d}\,y$, либо $y = \alpha x$.

Доказательство. В компоненте X_x, порождённой элементом x, примем $|x|$ за единицу. Если $y \overline{\in} X_x$, то $y \, \mathrm{d} \, X_x$, так как иначе было бы $y = \mathbf{S}(y_1, y_2)$, где $y_1 \in X_x$, $y_2 \in CX_x$ (дополнение X_x), причём $y_1 \neq \mathbf{0}$ и $y_2 \neq \mathbf{0}$. Если же $y \in X_x$, то к y применимо 5.14. Но по 5.13 в X_x нет отличных от нуля элементов базы, кроме $|x|$; следовательно, $y = \alpha |x| = \pm \alpha x$, ч. и тр. д.

5.16. Если $x \neq \mathbf{0}$ — дискретный элемент, то подпространство X_x изоморфно пространству вещественных чисел R_1 (1.2 гл. I). При этом все элементы этого подпространства тоже дискретны.

Доказательство. Если $y \in X_x$ $(y \neq \mathbf{0})$, то $(y) \leqslant (x)$ и, вследствие минимальности (x), $(y) = (x)$, или $e_y = e_x$. Но по 5.12b) e_x — орт, значит, элемент y — дискретный. Тогда по 5.15 $y = \alpha |x|$, чем и устанавливается изоморфизм $y \longleftrightarrow \alpha \in R_1$.

5.17. Всякий непрерывный элемент $x \in X$ дизъюнктен с любым дискретным $y \in X$.

Доказательство. Допустим, что x и y не дизъюнктны, т. е. $z = |x| \wedge |y| > \mathbf{0}$. Но $z \in X_y$ и по 5.16 z дискретен, а это противоречит определению непрерывности элемента x.

5.2. Свойства дискретных K-пространств.

5.21. Теорема. (Критерий дискретности K-пространства.) *Для того чтобы K-пространство X было дискретным необходимо и достаточно, чтобы для него существовало разложение на компоненты, изоморфные R_1* *).

Доказательство. a) Необходимость. Рассмотрим все компоненты, порождённые дискретными элементами. По 5.15 они попарно дизъюнктны. Так как всякий элемент $x \in X$ имеет вид $x = \mathbf{S} x_\alpha$, где x_α дискретны, то выделенная система компонент полна в X, т. е. образует разложение пространства X. По 5.16 это и есть требуемое разложение.

b) Достаточность. Пусть $X = \mathbf{S} X_\xi$ и каждое $X_\xi = \{\alpha x_\xi\}$ $(-\infty < \alpha < \infty)$. Тогда каждый элемент αx_ξ дискретен в X_ξ, а следовательно, и в X, и любой элемент $x \in X$ имеет вид $x = \mathbf{S}(\alpha_\xi x_\xi)$, т. е. X дискретно.

5.22. Замечание. Пусть $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — полный набор попарно дизъюнктных дискретных элементов дискретного пространства X. При этом можно считать, что все $x_\xi > \mathbf{0}$, так как $x_\xi = \mathbf{0}$ можно выбросить, а $x_\xi < \mathbf{0}$ заменить на $-x_\xi$. Тогда каждый элемент $x = \mathbf{S}(\alpha_\xi x_\xi)$, где $\alpha_\xi x_\xi = (x_\xi) x$, т. е. x вполне определяется набором чисел α_ξ. Каждое число α_ξ называется *составляющей* элемента x по дискретному элементу x_ξ и обозначается $(x)_{x_\xi}$.

Из свойств проекций и соединений сразу следует:

a) $(x + y)_{x_\xi} = (x)_{x_\xi} + (y)_{x_\xi}$;

b) $(\alpha x)_{x_\xi} = \alpha (x)_{x_\xi}$;

*) Исключается тривиальный случай, когда X состоит из одного нуля.

c) $x > \mathbf{0}$ равносильно тому, что $(x)_{x_\xi} \geqslant \mathbf{0}$ при всех $\xi \in \Xi$ и хоть для одного из них $(x)_{x_\xi} > \mathbf{0}$.

Рассмотрим вещественные функции $\beta(\xi)$, определённые на множестве Ξ. Множество F всех таких функций было рассмотрено в 1.22 гл. I. Ясно, что F изоморфно полному соединению пространств X_{x_ξ} (см. 2.41 гл. II). Тогда по второй теореме о соединениях (2.45 гл. II) X изоморфно некоторому нормальному подпространству пространства F, причём изоморфизм устанавливается формулой

$$x \longleftrightarrow \beta(\xi), \quad \text{где } \beta(\xi) = (x)_{x_\xi}.$$

Если X содержит единицу, то за x_ξ можно взять орты.

5.23. В дискретном K-пространстве X для того, чтобы $x^{(n)} \xrightarrow{(o)} x$, необходимо и достаточно, чтобы $x^{(n)}$ были в совокупности ограничены и чтобы

$$(x^{(n)})_{x_\xi} \to (x)_{x_\xi} \text{ при всех } \xi \in \Xi.$$

Действительно, так как в F (o)-сходимость совпадает с точечной сходимостью (см. 2.35 гл. I), то наш результат вытекает из установленного выше изоморфизма и критерия сходимости в подпространстве (см. 1.27c) — d) гл. II).

5.24. Так как в F (o)-сходимость совпадает с (t)-сходимостью, то в дискретных K-пространствах имеем следующее: если $x_n \xrightarrow{(t)} x$ и x_n ограничены в совокупности, то $x_n \xrightarrow{(o)} x$. В частности, для элементов базы дискретного K-пространства с единицей (t)-сходимость совпадает с (o)-сходимостью.

Пространство s дискретно. Ортами в s являются такие элементы, у которых одна из координат равна 1, а остальные равны 0 (либо все координаты равны 0). В s имеется счётное полное множество попарно дизъюнктных компонент, каждая из которых изоморфна R_1. Наоборот, пространство S непрерывно.

Предлагаем читателю проверить, что K-пространство V не является ни непрерывным, ни дискретным.

Ясно, что в s составляющая по орту совпадает с соответствующей координатой. Действительно, если $x = \{\lambda_n\}$, а e_n — n-й орт, т. е. орт, у которого n-я координата равна 1, то $(e_n)\, x = \lambda_n e_n$, т. е. $(x)_{e_n} = \lambda_n$. Однако, если бы мы иначе выбрали единицу в s, именно $\mathbf{1}' = \{\rho_n\}$, где все $\rho_n > 0$, то составляющие определялись бы по формуле

$$(x)_{e_n'} = \frac{\lambda_n}{\rho_n} \quad (e_n' \text{ — новый } n\text{-й орт}).$$

Определение. Линейное множество X называется n-мерным, если в нём существуют n линейно независимых элементов $x_1, \ldots, x_n$, причём любой $x \in X$ имеет вид $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$.

Легко видеть, что если элементы $x_1, \ldots, x_k$ произвольного K-пространства попарно дизъюнктны и отличны от нуля, то они линейно независимы.

Действительно, в противном случае один из них выражался бы линейно через остальные, например

$$x_k = \sum_1^{k-1} \alpha_i x_i,$$

и в то же время мы имели бы $x_k \, \mathrm{d} \sum_1^{k-1} \alpha_i x_i$, что невозможно, так как $x_k \neq \mathbf{0}$.

5.25. Теорема о конечномерных K-пространствах (А. И. Юдин). *Если K-пространство X n-мерно, то оно изоморфно эвклидову пространству R_n* (см. 1.21 гл. I).

Доказательство. Из предыдущего замечания вытекает, что X дискретно, так как иначе в X существовал бы элемент, допускающий бесконечное расщепление на попарно дизъюнктные. По теореме 5.21 X разлагается на компоненты X_i, изоморфные R_1. При этом множество компонент конечно, и их число не больше n.

Согласно указанному в 5.22 выберем из каждой компоненты X_i элемент $x_i > \mathbf{0}$ и обозначим через α_i составляющую $(x)_{x_i}$. Тогда каждый элемент $x \in X$ будет представляться в виде

$$x = \mathbf{S}\,(\alpha_i x_i) = \sum_i \alpha_i x_i.$$

Отсюда уже ясно, что число компонент равно n (иначе X было бы пространством меньшего числа измерений) и что соответствие $x \longleftrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ устанавливает изоморфизм между X и R_n.

5.3. Разложение произвольного K-пространства на дискретную и непрерывную компоненты.

5.31. Теорема. *Всякое K-пространство X разлагается на дискретную и непрерывную компоненты.*

Доказательство. Обозначим через E_1 множество всех дискретных элементов $x \in X$, через X_1 — порождаемую им компоненту и через X_2 — её дизъюнктное дополнение. X_2 не содержит ни одного дискретного элемента $x \neq \mathbf{0}$. Следовательно, по определению, X_2 непрерывно. (Дискретный элемент компоненты X_2 был бы одновременно дискретным и в X.)

Если x и $y \in E_1$, то по 5.15 либо $X_x \, \mathrm{d} \, X_y$, либо $X_x = X_y$. Следовательно, компоненты подпространства X_1 вида X_x, где $x \in E_1$, попарно дизъюнктны и каждая из них изоморфна R_1 (5.16). Эти компоненты образуют систему, полную в X_1, так как E_1 полно в X_1; а тогда, по признаку 5.21 дискретности K-пространства, X_1 дискретно.

Теорема доказана.

Замечание. Если пространство X содержит единицу, то среди его непрерывных единичных элементов существует наибольший e_0, и $X_2 = X_{e_0}$. Тогда $X_1 = X_{\mathbf{1} - e_0}$.

ГЛАВА IV

РАСШИРЕНИЕ K-ПРОСТРАНСТВ

§ 1. Построение K-пространства по заданной базе

Выше было показано, что база любого K-пространства с единицей есть полная алгебра Буля (3.22 гл. III). Основным результатом настоящего параграфа является обратное предложение; именно, здесь будет доказано, что всякая полная булевская алгебра изоморфна базе некоторого K-пространства с единицей.

При дальнейших построениях в этой главе читателю полезно иметь в виду в качестве иллюстрации K-пространство измеримых функций S, в котором функции $x(t)$ могут быть определены через наборы их лебеговых множеств, т. е. множеств $\underset{t}{T}(x(t) < \lambda)$.

1.1. Разложение элементов алгебры Буля.

Определение. Пусть $\mathfrak{E}$ — полная алгебра Буля и $e \in \mathfrak{E}$. Функция $\omega(\lambda)$ от вещественного аргумента λ $(-\infty < \lambda < \infty)$ со значениями в $\mathfrak{E}$ называется *разложением элемента* e, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $\omega(\lambda_1) \leqslant \omega(\lambda_2)$ при $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$;

2) $\inf\limits_{-\infty<\lambda<+\infty} \omega(\lambda) = \mathbf{0}$, $\sup\limits_{-\infty<\lambda<+\infty} \omega(\lambda) = e$.

Множество всех разложений элемента e обозначим через $\Omega(e)$; множество $\Omega(\mathbf{1})$ всех разложений единицы обозначим просто через Ω.

Примером разложения элемента e может служить функция

$$\omega(\lambda) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{при } \lambda \leqslant \alpha, \\ e & \text{при } \lambda > \alpha. \end{cases}$$

Таким образом, каждое $\Omega(e)$ не пусто.

Если $\mathfrak{E}$ — база K-пространства X, то характеристики $\{e_\lambda^x\}$ элементов $x \in X$, рассматриваемые как функции от λ, являются разложениями единицы пространства X (4.13 гл. III).

1.11. Пусть $\omega \in \Omega(e)$ и $e' \in \mathfrak{E}$. Обозначим через $e' \wedge \omega$ функцию $\omega'(\lambda)$, определяемую по формуле

$$\omega'(\lambda) = e' \wedge \omega(\lambda).$$

Эта функция является разложением элемента $e' \wedge e$, т. е. $\omega' \in \Omega(e' \wedge e)$*).

Для доказательства нужно проверить, что ω' удовлетворяет двум условиям определения разложения. Но из них условие 1) и первая часть условия 2) очевидны, а вторая часть условия 2) получается сразу с помощью дистрибутивного закона:

$$\sup_\lambda \omega'(\lambda) = \sup_\lambda [e' \wedge \omega(\lambda)] = e' \wedge \sup_\lambda \omega(\lambda) = e' \wedge e.$$

1.12. Введём некоторые обозначения. Пусть $\omega, \omega' \in \Omega(e)$. Будем писать $\omega \leqslant \omega'$ (или $\omega' \geqslant \omega$), если $\omega'(\lambda_1) \leqslant \omega(\lambda_2)$ при любых $\lambda_1 < \lambda_2$. В частности, если $\omega'(\lambda) \leqslant \omega(\lambda)$ при всех λ, то $\omega \leqslant \omega'$. Если одновременно $\omega \leqslant \omega'$ и $\omega' \leqslant \omega$, то будем писать $\omega = \omega'$ и такие два разложения, как элементы множества $\Omega(e)$, будем считать равными. В этом случае функции $\omega(\lambda)$ и $\omega'(\lambda)$ можно называть эквивалентными ($\omega(\lambda) \sim \omega'(\lambda)$). Наконец, строгое неравенство $\omega < \omega'$ означает, что $\omega \leqslant \omega'$, но при этом $\omega \neq \omega'$.

Из определения ясно, что равенство $\omega = \omega'$ равносильно условию

$$\omega(\lambda_1) \leqslant \omega'(\lambda_2) \leqslant \omega(\lambda_3)$$

при любых $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

1.13. $\Omega(e)$ — полная структура.

Доказательство. По определению, неравенство $\omega < \omega'$ исключает соотношения $\omega = \omega'$ и $\omega > \omega'$. Транзитивность нестрогого неравенства $\leqslant$ очевидна. Тогда ясно, что из $\omega \leqslant \omega'$ и $\omega_1 = \omega$ следует $\omega_1 \leqslant \omega'$, т. е. члены нестрогого неравенства между разложениями можно заменять эквивалентными разложениями. Но тогда тем же свойством обладает строгое неравенство и транзитивность строгого неравенства становится очевидной.

Теперь докажем, что всякое ограниченное подмножество из $\Omega(e)$ имеет точные грани. Пусть $\omega_\xi \in \Omega(e)$ $(\xi \in \Xi)$, и $\omega_\xi \leqslant \omega_0 \in \Omega(e)$. Положим

$$\omega(\lambda) = \inf_\xi \omega_\xi(\lambda)$$

и покажем, что $\omega(\lambda)$ — разложение элемента e.

Монотонность функции $\omega(\lambda)$ и равенство $\inf_\lambda \omega(\lambda) = \mathbf{0}$ очевидны. Кроме того, по определению неравенства $\omega_\xi \leqslant \omega_0$, при любых $\lambda < \lambda'$ и при всех $\xi \in \Xi$ имеем:

$$\omega_0(\lambda) \leqslant \omega_\xi(\lambda'),$$

а тогда

$$\omega_0(\lambda) \leqslant \omega(\lambda'). \tag{1}$$

---

*) В обозначении $e' \wedge \omega$ знак $\wedge$ не является обычным обозначением нижней грани, так как элементы e' и ω берутся из разных множеств. Но мы всё же считаем удобным пользоваться этим обозначением.

Следовательно,

$$e = \sup_{\lambda} \omega_0(\lambda) \leqslant \sup_{\lambda'} \omega(\lambda') \leqslant e,$$

т. е. $\sup_{\lambda} \omega(\lambda) = e$. Таким образом, $\omega \in \Omega(e)$.

Так как $\omega(\lambda) \leqslant \omega_\xi(\lambda)$ при всех λ, то $\omega_\xi \leqslant \omega$. С другой стороны, из (1) следует, что $\omega \leqslant \omega_0$, где ω_0 — любая верхняя граница множества $\{\omega_\xi\}$. Следовательно, $\omega = \sup \omega_\xi$.

Существование нижней грани для множества, ограниченного снизу, доказывается аналогично. При этом $\omega = \inf \omega_\xi$ можно определить по формуле

$$\omega(\lambda) = \sup_{\xi} \omega_\xi(\lambda). \qquad (*)$$

Остаётся доказать, что любое конечное подмножество ограничено сверху и снизу; достаточно доказать это для множества из двух элементов $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(e)$.

Положим

$$\omega(\lambda) = \omega_1(\lambda) \wedge \omega_2(\lambda)$$

и покажем, что $\omega(\lambda)$ — разложение элемента e. Как и выше, проверки требует равенство $\sup_{\lambda} \omega(\lambda) = e$. Но сейчас это следует сразу из дистрибутивного закона, а именно:

$$\sup_{\lambda} \omega(\lambda) = \sup_{\lambda} [\omega_1(\lambda) \wedge \omega_2(\lambda)] = \sup_{\lambda, \mu} [\omega_1(\lambda) \wedge \omega_2(\mu)] =$$
$$= \sup_{\lambda} \omega_1(\lambda) \wedge \sup_{\mu} \omega_2(\mu) = e \wedge e = e.$$

Итак, $\omega \in \Omega(e)$. Но тогда $\omega \geqslant \omega_1$, $\omega \geqslant \omega_2$ множество из ω_1 и ω_2 ограничено и по доказанному выше $\omega = \omega_1 \vee \omega_2$. Аналогично находится $\omega_1 \wedge \omega_2$.

Наше утверждение полностью доказано.

Определение. Пусть $\omega \in \Omega(e)$. Разложение $\omega^h \in \Omega(e)$, определяемое равенством

$$\omega^h(\lambda) = \omega(\lambda - h)$$

(где число h — любого знака), мы будем называть *сдвинутым* относительно ω на величину h.

1.14. Ясно, что $\omega \leqslant \omega^h$ при $h > 0$ и $\omega \geqslant \omega^h$ при $h < 0$.

Если $\omega' \leqslant \omega^h$ при любом $h > 0$, то $\omega' \leqslant \omega$.

Действительно, если $\lambda_1 < \lambda_2$ и $0 < h < \lambda_2 - \lambda_1$, то $\omega(\lambda_1) = \omega^h(\lambda_1 + h) \leqslant \omega'(\lambda_2)$.

Аналогично, если $\omega' \geqslant \omega^h$ при любом $h < 0$, то $\omega' \geqslant \omega$.

1.15. Если $\omega \leqslant \omega_1$, то, очевидно, $\omega^h \leqslant \omega_1^h$ при любом h. Таким образом, операцию сдвига можно применять к неравенствам (а также, конечно, и к равенствам).

1.16. Пусть $e \in \mathfrak{E}$ и $e = \mathbf{S} e_\xi$, а $\omega_\xi \in \Omega(e_\xi)$ $(\xi \in \Xi)$. Положим

$$\omega(\lambda) = \mathop{\mathbf{S}}_{\xi} \{\omega_\xi(\lambda)\}.$$

Тогда $\omega(\lambda)$ — разложение элемента e.

Доказательство. a) Монотонность функции $\omega(\lambda)$ очевидна. b) По ассоциативности верхней грани

$$\sup_\lambda \omega(\lambda) = \sup_{\lambda,\xi} \omega_\xi(\lambda) = \sup_\xi \sup_\lambda \omega_\xi(\lambda) = \sup_\xi e_\xi = e.$$

c) Остаётся проверить, что $e^* = \inf \omega(\lambda) = \mathbf{0}$. Докажем сначала, что $e^* \,\mathrm{d}\, e_{\xi_0}$ при любом $\xi_0 \in \Xi$. Действительно,

$$e^* \wedge e_{\xi_0} = \inf_\lambda [\omega(\lambda) \wedge e_{\xi_0}] = \inf_\lambda [\sup_\xi \omega_\xi(\lambda) \wedge e_{\xi_0}] = \inf_\lambda \sup_\xi [\omega_\xi(\lambda) \wedge e_{\xi_0}].$$

Но

$$\omega_\xi(\lambda) \wedge e_{\xi_0} = \begin{cases} \omega_{\xi_0}(\lambda) & \text{при } \xi = \xi_0, \\ \mathbf{0} & \text{при } \xi \neq \xi_0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$e^* \wedge e_{\xi_0} = \inf_\lambda \omega_{\xi_0}(\lambda) = \mathbf{0}.$$

Но если $e^* \,\mathrm{d}\, e_\xi$ при любом $\xi \in \Xi$, то $e^* \,\mathrm{d}\, \sup e_\xi = e$ (1.65 гл. I), а так как, очевидно, $e^* \leqslant e$, то $e^* = \mathbf{0}$, ч. и тр. д.

Определение. Построенное здесь разложение $\omega \in \Omega(e)$ называется *соединением разложений* $\omega_\xi \in \Omega(e_\xi)$ и обозначается

$$\omega = \mathop{\bar{\mathbf{S}}}_{\xi} \omega_\xi.$$

1.17. Замечание. Ясно, что если $\omega \in \Omega(e)$, $e = \mathop{\mathbf{S}}_{\xi} e_\xi$ и $\omega_\xi = e_\xi \wedge \omega$ (см. 1.11), то $\omega = \bar{\mathbf{S}} \omega_\xi$.

1.2. Сходимость в множестве разложений. Введём некоторую обобщённую метрику в $\Omega(e)$. Предварительно установим одно вспомогательное предложение.

1.21. Если ω, $\omega_1 \in \Omega(e)$ и существует хоть одно число $\delta \geqslant 0$, для которого

$$\omega^{-\delta} \leqslant \omega_1 \leqslant \omega^\delta, \tag{2}$$

то среди всех таких чисел δ есть наименьшее.

Доказательство. Пусть h — точная нижняя граница чисел δ, удовлетворяющих указанным условиям. Так как операция сдвига, очевидно, монотонна относительно величины сдвига, т. е. $\omega^\delta \leqslant \omega^{\delta_1}$ при $\delta \leqslant \delta_1$, то из второго из неравенств (2) следует, что $\omega_1 \leqslant \omega^{h+\mu} = (\omega^h)^\mu$ при любом $\mu > 0$. Но тогда $\omega_1 \leqslant \omega^h$ (1.14). Аналогично устанавливается, что $\omega_1 \geqslant \omega^{-h}$.

Определение. Если ω, $\omega_1 \in \Omega(e)$ и существует хоть одно число $\delta \geqslant 0$, удовлетворяющее неравенствам (2), то наименьшее из

таких чисел δ (существование которого доказано в 1.21), назовём расстоянием между ω и ω_1 и обозначим $\rho(\omega, \omega_1)$. Если же таких δ нет, то положим $\rho(\omega, \omega_1) = +\infty$.

1.22. Расстояние $\rho(\omega_1, \omega)$ обладает обычными свойствами метрики:

a) $\rho(\omega, \omega_1) \geqslant 0$, причём $\rho(\omega, \omega_1) = 0$ тогда и только тогда, когда $\omega = \omega_1$.

b) $\rho(\omega, \omega_1) = \rho(\omega_1, \omega)$.

c) $\rho(\omega, \omega_2) \leqslant \rho(\omega, \omega_1) + \rho(\omega_1, \omega_2)$.

d) Кроме того, расстояние не меняется при одинаковом сдвиге, т. е.

$$\rho(\omega^h, \omega_1^h) = \rho(\omega, \omega_1).$$

Доказательство. a) Очевидно.

b) Если $\rho(\omega, \omega_1) = \delta < +\infty$, то из (2) с помощью сдвигов, на основании 1.15, получаем: $\omega = (\omega^{-\delta})^{\delta} \leqslant \omega_1^{\delta}$ и $\omega_1^{-\delta} \leqslant (\omega^{\delta})^{-\delta} = \omega$, т. е.

$$\omega_1^{-\delta} \leqslant \omega \leqslant \omega_1^{\delta}.$$

По определению расстояния это означает, что $\rho(\omega_1, \omega) \leqslant \delta$, т. е. $\rho(\omega_1, \omega) \leqslant \rho(\omega, \omega_1)$. Меняя ролями ω и ω_1, получим обратное неравенство, что и даёт требуемое равенство. Отсюда уже сразу следует, что если $\rho(\omega, \omega_1) = +\infty$, то и $\rho(\omega_1, \omega) = +\infty$.

c) Пусть $\rho(\omega, \omega_1) = \delta$ и $\rho(\omega_1, \omega_2) = \delta_1$. Тогда

$$\omega^{-\delta} \leqslant \omega_1 \leqslant \omega^{\delta}, \quad \omega_1^{-\delta_1} \leqslant \omega_2 \leqslant \omega_1^{\delta_1}.$$

Применяя в первом неравенстве сдвиг на $\pm\delta_1$, получаем:

$$\omega^{-(\delta+\delta_1)} \leqslant \omega^{-\delta_1} \leqslant \omega_2 \leqslant \omega_1^{\delta_1} \leqslant \omega^{\delta+\delta_1},$$

т. е.

$$\rho(\omega, \omega_2) \leqslant \delta + \delta_1 = \rho(\omega, \omega_1) + \rho(\omega_1, \omega_2).$$

d) Если $\omega^{-\delta} \leqslant \omega_1 \leqslant \omega^{\delta}$, то

$$(\omega^h)^{-\delta} = \omega^{h-\delta} \leqslant \omega_1^h \leqslant \omega^{h+\delta} = (\omega^h)^{\delta}.$$

Отсюда $\rho(\omega^h, \omega_1^h) \leqslant \rho(\omega, \omega_1)$. Заменяя здесь ω и ω_1 на ω^{-h} и ω_1^{-h} и затем h на $-h$, получаем обратное неравенство

$$\rho(\omega, \omega_1) \leqslant \rho(\omega^h, \omega_1^h),$$

и d) доказано.

Определение. Пусть ω_n и $\omega \in \Omega(e)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Будем говорить, что $\omega_n \to \omega$ равномерно, если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(\omega_n, \omega) = 0$. Аналогично будем говорить, что $\{\omega_n\}$ равномерно сходится в себе, если

$$\lim_{n,\, m\to\infty} \rho(\omega_n, \omega_m) = 0.$$

1.23. a) Если $\omega_n \to \omega$ равномерно, $\omega_n' \to \omega'$ равномерно ($\omega_n, \omega_n', \omega, \omega' \in \Omega(e)$) и $\omega_n \leqslant \omega_n'$ при всех n, то $\omega \leqslant \omega'$.

b) Если $\omega_n \to \omega$ и $\omega_n \to \omega'$ равномерно, то $\omega = \omega'$ (единственность предела).

c) Если последовательность $\{\omega_n\}$ равномерно сходится в себе ($\omega_n \in \Omega(e)$), то существует $\omega \in \Omega(e)$ такое, что $\omega_n \to \omega$ равномерно (полнота $\Omega(e)$ относительно равномерной сходимости).

Доказательство. a) По произвольному $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое N, что при $n \geqslant N$

$$\rho(\omega_n, \omega) < \varepsilon, \quad \rho(\omega_n', \omega') < \varepsilon.$$

Из этих неравенств и из условия следует, что

$$\omega^{-\varepsilon} \leqslant \omega_n \leqslant \omega_n' \leqslant (\omega')^{\varepsilon}.$$

Сдвигая на ε, мы получаем отсюда, что $\omega \leqslant (\omega')^{2\varepsilon}$. Так как это верно при любом $\varepsilon > 0$, то (по 1.14) $\omega \leqslant \omega'$.

b) — прямое следствие из a).

c) Зададим последовательность чисел $\varepsilon_k \searrow 0$. По определению равномерной сходимости в себе, существуют такие числа N_k, что

$$\rho(\omega_n, \omega_m) < \varepsilon_k \quad \text{при } n, m \geqslant N_k.$$

При этом можно считать, что N_k образуют возрастающую последовательность.

В частности, $\rho(\omega_n, \omega_{N_k}) < \varepsilon_k$, т. е.

$$\omega_{N_k}^{-\varepsilon_k} \leqslant \omega_n \leqslant \omega_{N_k}^{\varepsilon_k} \quad \text{при } n \geqslant N_k. \tag{3}$$

Так как в $\Omega(e)$ любое конечное множество ограничено, то из (3) следует, что всё множество $\{\omega_n\}$ ограничено. А тогда и множество $\{\omega_n^{\varepsilon}\}_{n, \varepsilon > 0}$ ограничено снизу. Положим

$$\omega = \inf_{\substack{1 \leqslant k < \infty \\ n \geqslant N_k}} \omega_n^{\varepsilon_k} \tag{4}$$

и докажем, что $\omega_n \to \omega$ равномерно.

Действительно, при $n \geqslant N_k$ $\omega \leqslant \omega_n^{\varepsilon_k}$. С другой стороны, пусть $n \geqslant N_k$, $l \geqslant k$, $m \geqslant N_l$. Тогда $m \geqslant N_k$ и $\rho(\omega_m, \omega_n) < \varepsilon_k$. Следовательно,

$$\omega_n^{-\varepsilon_k} \leqslant \omega_m$$

и тем более

$$\omega_n^{-\varepsilon_k} \leqslant \omega_m^{\varepsilon_l}$$

Если же $l<k$, $m \geqslant N_l$, то $N_l \leqslant N_k$ и $\rho(\omega_m, \omega_{N_k}) < \varepsilon_l$, а отсюда и из (3) следует, что

$$\omega_n^{-\varepsilon_k} \leqslant \omega_{N_k} \leqslant \omega_m^{\varepsilon_l}.$$

Итак, при всех $m \geqslant N_l$

$$\omega_m^{\varepsilon_l} \geqslant \omega_n^{-\varepsilon_k}.$$

Поэтому по формуле (4) то же верно и для ω, т. е. $\omega \geqslant \omega_n^{-\varepsilon_k}$. Соединяя это с неравенством $\omega \leqslant \omega_n^{\varepsilon_k}$ вытекающим из (4), мы получаем, что $\rho(\omega_n, \omega) < \varepsilon_k$ при $n \geqslant N_k$, т. е. $\omega_n \to \omega$ равномерно, ч. и тр. д.

Замечание. Обратное утверждение, т. е. что из равномерной сходимости к пределу вытекает сходимость в себе, является общим свойством метрических сходимостей.

Определение. 1° Пусть $\omega_n \in \Omega(e)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\omega \in \Omega(e)$, $e' \in \mathfrak{E}$, $\omega_n' = e' \wedge \omega_n$, $\omega' = e' \wedge \omega$. Мы знаем, что $\omega_n', \omega' \in \Omega(e' \wedge e)$ (1.11). Будем говорить, что $\omega_n \to \omega$ *равномерно на* e', если $\omega_n' \to \omega'$ равномерно в смысле старого определения (в множестве $\Omega(e' \wedge e)$).

Аналогично определим равномерную сходимость в себе на e'.

Ясно, что если $e'' \leqslant e'$, то из равномерной сходимости на e' вытекает равномерная сходимость на e''.

2° Пусть $\omega_n \in \Omega(e)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $\omega \in \Omega(e)$. Будем говорить, что последовательность $\{\omega_n\}$ *почти равномерно* сходится к ω (или в себе), если существует счётное множество попарно дизъюнктных элементов $e_k \in \mathfrak{E}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ таких, что $e = \mathbf{S} e_k$ и $\omega_n \to \omega$ (соответственно — в себе) равномерно на каждом e_k.

1.24. Если для двух последовательностей $\omega_n, \omega_n' \in \Omega(e)$ имеет место почти равномерная сходимость (к пределу или в себе), то существует общий для этих двух последовательностей набор элементов e_k $(e = \mathbf{S} e_k)$ таких, что $\{\omega_n\}$ и $\{\omega_n'\}$ равномерно сходятся на каждом e_k.

Действительно, если e_k и e_l' — наборы таких элементов из $\mathfrak{E}$ для $\{\omega_n\}$ и $\{\omega_n'\}$ (соответственно), что на каждом из e_k равномерно сходится последовательность $\{\omega_n\}$, а на каждом e_l' — последовательность $\{\omega_n'\}$, то требуемый общий набор образуют элементы $e_k \wedge e_l'$ (см. 1.23 гл. III).

В дальнейшем мы будем применять установленный сейчас факт без специальных ссылок.

1.25. Для почти равномерной сходимости допустим предельный переход в неравенстве, т. е. если $\omega_n \to \omega$ почти равномерно, $\omega_n' \to \omega'$ почти равномерно и $\omega_n \leqslant \omega_n'$ при всех n, то $\omega \leqslant \omega'$.

Доказательство. Если все упомянутые разложения суть разложения элемента e, то согласно 1.24 имеются такие $e_k \in \mathfrak{E}$, что $e = \mathbf{S} e_k$ и на каждом e_k имеет место равномерная сходимость обеих последовательностей. Так как для равномерной сходимости уже дока-

зана возможность предельного перехода в неравенстве (см. 1.23а)), то $\omega \leqslant \omega'$ на каждом e_k, т. е. $e_k \wedge \omega \leqslant e_k \wedge \omega'$. Но $\omega = \bar{\mathbf{S}}(e_k \wedge \omega)$, $\omega' = \bar{\mathbf{S}}(e_k \wedge \omega')$ (1.17); следовательно, при $\lambda_1 < \lambda_2$

$$\omega'(\lambda_1) = \mathbf{S}\{e_k \wedge \omega'(\lambda_1)\} \leqslant \mathbf{S}\{e_k \wedge \omega(\lambda_2)\} = \omega(\lambda_2),$$

т. е. $\omega \leqslant \omega'$, ч. и тр. д.

Следствие. (Единственность почти равномерного предела). *Если $\omega_n \to \omega$ и $\omega_n \to \omega'$ почти равномерно, то $\omega = \omega'$*

1.26. Теорема о полноте $\Omega(e)$ относительно почти равномерной сходимости. *Если $\{\omega_n\}$ почти равномерно сходится в себе $\{\omega_n \in \Omega(e),\ n = 1, 2, \ldots\}$, то существует такое $\omega \in \Omega(e)$, что $\omega_n \to \omega$ почти равномерно* *).

Доказательство. Пусть $e = \mathbf{S} e_k$ так, что $\{\omega_n\}$ равномерно сходится в себе на каждом e_k. Тогда по 1.23с) для каждого k существует $\omega^{(k)} \in \Omega(e_k)$ такое, что $e_k \wedge \omega_n \to \omega^{(k)}$ равномерно. Положим $\omega = \bar{\mathbf{S}}\omega^{(k)}$. По 1.16 $\omega \in \Omega(e)$, а $\omega^{(k)} = e_k \wedge \omega$; следовательно, по определению, $\omega_n \to \omega$ почти равномерно.

Замечание. Мы попутно доказали следующее утверждение: если $\omega_n = \bar{\mathbf{S}}_k \omega_{nk}$, $\omega = \bar{\mathbf{S}}_k \omega^{(k)}$, где ω_n, $\omega \in \Omega(e)$, ω_{nk}, $\omega^{(k)} \in \Omega(e_k)$ и $e = \mathbf{S} e_k$, и если $\omega_{nk} \xrightarrow[n \to \infty]{} \omega^{(k)}$ равномерно при каждом k, то $\omega_n \to \omega$ почти равномерно.

1.27. Если $\omega_n \to \omega$ почти равномерно, то при любом e $e \wedge \omega_n \to e \wedge \omega$ почти равномерно.

Доказательство. Пусть ω_n, $\omega \in \Omega(e_0)$ и $e_0 = \mathbf{S}_k e_k$, причём $\omega_n \to \omega$ равномерно на каждом e_k. Но тогда подавно $\omega_n \to \omega$ равномерно и на $e \wedge e_k$, а так как $e \wedge e_0 = \mathbf{S}'(e \wedge e_k)$, то, значит, $e \wedge \omega_n \to e \wedge \omega$ почти равномерно в $\Omega(e \wedge e_0)$.

1.3. Конечнозначные разложения единицы. Введём некоторые обозначения. Пусть $e \in \mathfrak{E}$, λ — вещественное число. Обозначим через $\binom{e}{\lambda}$ разложение элемента e, которое определяется по формуле

$$\omega(\mu) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{при } \mu < \lambda, \\ e & \text{при } \mu \geqslant \lambda. \end{cases}$$

Такое разложение назовём элементарным **).

---

*) Заметим, что обратное очевидно.

**) Из определения равенства разложений сразу следует, что если

$$\omega(\mu) = \begin{cases} \mathbf{0} & \mu < \lambda, \\ e & \mu > \lambda \end{cases}$$

и $\mathbf{0} \leqslant \omega(\lambda) \leqslant e$, то $\omega = \binom{e}{\lambda}$. В дальнейшем при определении разложения мы иногда не будем указывать значения $\omega(\lambda)$ для конечного числа значений λ, подразумевая, что оно может быть любым, удовлетворяющим требуемому неравенству.

Определение. Разложение $\omega \in \Omega(e)$, которое может быть представлено в виде $\omega = \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\bar{\mathbf{S}}} \begin{pmatrix} e_k \\ \lambda_k \end{pmatrix}$ (n конечно), называется *конечнозначным* и обозначается

$$\begin{pmatrix} e_1, \ldots, e_n \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Из определения автоматически следует, что $e = \mathbf{S} e_k$. Набор элементов e_k называется *основанием* разложения.

Множество всех конечнозначных разложений единицы обозначим через H, а сами разложения будем теперь обозначать буквами x, y, z, ...

1.31. Отметим некоторые почти очевидные факты.

a) Если $\begin{pmatrix} e \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ \lambda' \end{pmatrix}$ как элементы $\Omega(e)$ и $e > \mathbf{0}$, то $\lambda = \lambda'$ (вытекает сразу из определения равенства разложений).

b) Если

$$x = \begin{pmatrix} e_1, \ldots, e_n \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1, \ldots, e_n \\ \lambda'_1, \ldots, \lambda'_n \end{pmatrix},$$

то $\lambda_i = \lambda'_i$ для всех i, при которых $e_i > \mathbf{0}$. Действительно,

$$e_i \wedge x = \begin{pmatrix} e_i \\ \lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_i \\ \lambda'_i \end{pmatrix},$$

а тогда можно воспользоваться предложением a).

c) Разложение нуля $\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \lambda \end{pmatrix}$ при любом λ есть функция $\omega(\mu) \equiv \mathbf{0}$; следовательно, по определению соединения разложений,

$$\begin{pmatrix} e_1, \ldots, e_n, \mathbf{0}, & \ldots, \mathbf{0} \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, & \ldots, \lambda_{n+p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1, \ldots, e_n \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \end{pmatrix}$$

при любых $\lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_{n+p}$, т. е. присоединение к основанию нулей с любыми соответствующими им числами λ_i не изменяет разложения.

1.32. Любое конечное множество конечнозначных разложений может быть приведено к одному основанию, т. е. записано с помощью одинаковых e_k.

Доказательство. Достаточно провести рассуждение для двух разложений.

Пусть $x, y \in H$, причём

$$x = \begin{pmatrix} e_1, \ldots, e_n \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} e'_1, \ldots, e'_m \\ \lambda'_1, \ldots, \lambda'_m \end{pmatrix}.$$

Положим $e_{ij} = e_i \wedge e_j'$. По 1.23 гл. III $\underset{i,j}{\mathbf{S}} e_{ij} = \mathbf{1}$. При этом по 1.17

$$x = \underset{i}{\bar{\mathbf{S}}} \begin{pmatrix} e_i \\ \lambda_i \end{pmatrix} = \underset{i}{\bar{\mathbf{S}}} \underset{j}{\bar{\mathbf{S}}} \begin{pmatrix} e_{ij} \\ \lambda_i \end{pmatrix}.$$

На основании ассоциативного закона для соединений в булевской алгебре (1.24а) гл. III) отсюда сразу следует, что

$$x = \underset{i,j}{\bar{\mathbf{S}}} \begin{pmatrix} e_{ij} \\ \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Аналогично,

$$y = \underset{i,j}{\bar{\mathbf{S}}} \begin{pmatrix} e_{ij} \\ \lambda_i' \end{pmatrix},$$

т. е. x и y приведены к одному основанию, ч. и тр. д.

Элементы из H вида $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \lambda \end{pmatrix}$ будем обозначать $\lambda \mathbf{1}$ (при $\lambda = 1$ будем писать просто $\mathbf{1}$, и $\mathbf{0}$ при $\lambda = 0$).

1.33. Для того чтобы разложение единицы x было конечнозначным, необходимо и достаточно, чтобы вся числовая ось $-\infty < \lambda < +\infty$ распадалась на конечное число промежутков постоянства функции $x(\lambda)$.

Доказательство. Пусть $x \in H$. Тогда

$$x = \bar{\mathbf{S}} \begin{pmatrix} e_i \\ \lambda_i \end{pmatrix},$$

откуда, по определению соединения разложений и элементарного разложения,

$$x(\lambda) = \underset{\lambda_i < \lambda}{\mathbf{S}} e_i,$$

т. е. $x(\lambda)$ остаётся постоянной в каждом из промежутков между двумя соседними по величине λ_i.

Обратно, пусть существуют такие числа λ_i: $-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$ $\ldots < \lambda_n < +\infty$, что $x(\lambda) = \text{const}$ в каждом из промежутков

$$(-\infty, \lambda_0),\ (\lambda_0, \lambda_1),\ \ldots,\ (\lambda_{n-1}, \lambda_n),\ (\lambda_n, +\infty),$$

а именно,

$$x(\lambda) = \begin{cases} \mathbf{0} \text{ при } & -\infty < \lambda < \lambda_0, \\ e_i \quad \text{„} & \lambda_{i-1} < \lambda < \lambda_i \ (i = 1, \ldots, n), \\ \mathbf{1} \quad \text{„} & \lambda_n < \lambda < +\infty. \end{cases}$$

Тогда $\mathbf{0} \leqslant e_1 \leqslant e_2 \leqslant \ldots \leqslant e_n \leqslant \mathbf{1}$. Положим

$$\overset{*}{e}_1 = e_1,\ \overset{*}{e}_i = e_i - e_{i-1}\ (i = 2, \ldots, n),\ \overset{*}{e}_{n+1} = \mathbf{1} - \overset{*}{e}_n.$$

Разложение $\overset{*}{e}_i \wedge x$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ — элементарное, именно, $\overset{*}{e}_i \wedge x = \begin{pmatrix} \overset{*}{e}_i \\ \lambda_i \end{pmatrix}$, а по 1.17 $x = \underset{i}{\bar{\mathbf{S}}} (\overset{*}{e}_i \wedge x)$.

1.34. Укажем процесс построения функций элементов H соответствующим произвольным вещественным функциям. Пусть $F(\lambda, \mu, \ldots)$ — любая вещественная функция от конечного числа вещественных аргументов, определённая при всех значениях $\lambda, \mu, \ldots$. Пусть $x, y, \ldots$ — такое же число произвольных элементов из H, поставленных во взаимно однозначное соответствие с $\lambda, \mu, \ldots$ и приведённых к одному основанию:

$$x = \underset{i=1}{\overset{n}{\bar{\mathbf{S}}}} \begin{pmatrix} e_i \\ \lambda_i \end{pmatrix}, \quad y = \underset{i=1}{\overset{n}{\bar{\mathbf{S}}}} \begin{pmatrix} e_i \\ \mu_i \end{pmatrix}, \ldots$$

Положим

$$F(x, y, \ldots) = \underset{i=1}{\overset{n}{\bar{\mathbf{S}}}} \begin{pmatrix} e_i \\ F(\lambda_i, \mu_i, \ldots) \end{pmatrix}$$

Таким образом, $F(x, y, \ldots) \in H$.

Покажем, что определение функции $F(x, y, \ldots)$ не зависит от способа представления аргументов $x, y, \ldots$ в виде соединения элементарных разложений.

Так как любые элементы из H (в конечном числе) путём «дробления» можно привести к одному основанию, то достаточно рассмотреть случай, когда в одном представлении аргументов основание «раздроблено более мелко», чем в другом. Итак, пусть

$$x = \underset{i}{\bar{\mathbf{S}}} \begin{pmatrix} e_i \\ \lambda_i \end{pmatrix} = \underset{i,j}{\bar{\mathbf{S}}} \begin{pmatrix} e_{ij} \\ \lambda_i \end{pmatrix},$$

$$y = \underset{i}{\bar{\mathbf{S}}} \begin{pmatrix} e_i \\ \mu_i \end{pmatrix} = \underset{i,j}{\bar{\mathbf{S}}} \begin{pmatrix} e_{ij} \\ \mu_i \end{pmatrix},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

причём $e_i = \underset{j}{\mathbf{S}} e_{ij}$ при каждом i. Тогда, если исходить из первого представления для $x, y, \ldots$, мы получим:

$$F(x, y, \ldots) = \underset{i}{\bar{\mathbf{S}}} \begin{pmatrix} e_i \\ F(\lambda_i, \mu_i, \ldots) \end{pmatrix},$$

а из второго

$$F(x, y, \ldots) = \underset{i,j}{\bar{\mathbf{S}}} \begin{pmatrix} e_{ij} \\ F(\lambda_i, \mu_i, \ldots) \end{pmatrix}.$$

Ясно, что правые части обоих равенств совпадают (ср. 1.32), т. е. определение функции $F(x, y, \ldots)$ действительно не зависит от способа представления аргументов.

1.35. a) Если $F(\lambda, \mu, \ldots) = C$ (C — постоянная) при всех $\lambda, \mu, \ldots$, то $F(x, y, \ldots) = C\mathbf{1}$ при всех $x, y, \ldots \in H$.

Доказательство.

$$F(x, y, \ldots) = \bar{\mathbf{S}}\begin{pmatrix} e_i \\ F(\lambda_i, \mu_i, \ldots) \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{S}}\begin{pmatrix} e_i \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ C \end{pmatrix} = C\mathbf{1}.$$

b) Если $e \in \mathfrak{E}$, то элементы $e' \in \mathfrak{E}$, для которых $\mathbf{0} \leqslant e' \leqslant e$, образуют булевскую алгебру $\mathfrak{E}'$, единицей которой является e. Множество $\Omega(e)$ можно рассматривать как множество всех разложений единицы алгебры $\mathfrak{E}'$. Тогда функцию $F(\lambda, \mu, \ldots)$ можно распространить на множество конечнозначных разложений $H(e) \subset \Omega(e)$. Обозначим это распространение через F_e. Таким образом, если

$$x = \bar{\mathbf{S}}\begin{pmatrix} e'_i \\ \lambda_i \end{pmatrix}, \; y = \bar{\mathbf{S}}\begin{pmatrix} e'_i \\ \mu_i \end{pmatrix}, \ldots, \text{ где } \mathbf{S}e'_i = e,$$

то

$$F_e(x, y, \ldots) = \bar{\mathbf{S}}\begin{pmatrix} e'_i \\ F(\lambda_i, \mu_i, \ldots) \end{pmatrix}.$$

Тогда для любых $x, y, \ldots \in H$

$$F_e(e \wedge x, e \wedge y, \ldots) = e \wedge F(x, y, \ldots)$$

Действительно, если

$$x = \bar{\mathbf{S}}\begin{pmatrix} e_i \\ \lambda_i \end{pmatrix}, \; y = \bar{\mathbf{S}}\begin{pmatrix} e_i \\ \mu_i \end{pmatrix}, \ldots, \text{ где } \mathbf{S}e_i = \mathbf{1},$$

то

$$e \wedge x = \bar{\mathbf{S}}\begin{pmatrix} e \wedge e_i \\ \lambda_i \end{pmatrix}, e \wedge y = \bar{\mathbf{S}}\begin{pmatrix} e \wedge e_i \\ \mu_i \end{pmatrix}, \ldots,$$

а отсюда

$$F_e(e \wedge x, e \wedge y, \ldots) = \bar{\mathbf{S}}\begin{pmatrix} e \wedge e_i \\ F(\lambda_i, \mu_i, \ldots) \end{pmatrix} =$$

$$= e \wedge \bar{\mathbf{S}}\begin{pmatrix} e_i \\ F(\lambda_i, \mu_i, \ldots) \end{pmatrix} = e \wedge F(x, y, \ldots).$$

Для дальнейшего весьма важно следующее свойство функций $F(x, y, \ldots)$,

1.36. Теорема о сохранении соотношений в H. *Если некоторое число соотношений вида*

$$F_1(\lambda, \mu, \ldots) = F_2(\lambda, \mu, \ldots), \qquad G_1(\lambda, \mu, \ldots) = G_2(\lambda, \mu, \ldots), \ldots$$

для вещественных функций от вещественных аргументов влечёт ещё одно соотношение такого же вида

$$\Phi_1(\lambda, \mu, \ldots) = \Phi_2(\lambda, \mu, \ldots),$$

то то же имеет место при замене вещественных аргументов на абстрактные $x, y, \ldots \in H$.

Доказательство. Будем опять считать, что элементы $x, y, \ldots \in H$ во всех формулах приведены к одному основанию. Пусть $F_1(x, y, \ldots) = F_2(x, y, \ldots)$, т. е.

$$\underset{i}{\overline{\mathbf{S}}}\begin{pmatrix} e_i \\ F_1(\lambda_i, \mu_i, \ldots) \end{pmatrix} = \underset{i}{\overline{\mathbf{S}}}\begin{pmatrix} e_i \\ F_2(\lambda_i, \mu_i, \ldots) \end{pmatrix}.$$

Из этого равенства следует (по 1.31b)), что если $e_i > \mathbf{0}$, то $F_1(\lambda_i, \mu_i, \ldots) = F_2(\lambda_i, \mu_i, \ldots)$. Аналогично $G_1(\lambda_i, \mu_i, \ldots) = G_2(\lambda_i, \mu_i, \ldots), \ldots$ Таким образом, по условию, для всех i, при которых $e_i > \mathbf{0}$, $\Phi_1(\lambda_i, \mu_i, \ldots) = \Phi_2(\lambda_i, \mu_i, \ldots)$.
Но

$$\Phi_j(x, y, \ldots) = \underset{i}{\overline{\mathbf{S}}}\begin{pmatrix} e_i \\ \Phi_j(\lambda_i, \mu_i, \ldots) \end{pmatrix} \qquad (j = 1, 2).$$

Следовательно, $\Phi_1(x, y, \ldots) = \Phi_2(x, y, \ldots)$, ч. и тр. д.

Следствия. 1° Если $F_1(\lambda, \mu, \ldots) = F_2(\lambda, \mu, \ldots)$ тождественно, то и $F_1(x, y, \ldots) = F_2(x, y, \ldots)$ тождественно.

2° Если $F(\lambda, \mu, \ldots)$ — сложная функция, т. е.

$$F(\lambda, \mu, \ldots) = G[\varphi(\lambda, \mu, \ldots), \psi(\lambda, \mu, \ldots), \ldots],$$

то

$$F(x, y, \ldots) = G[\varphi(x, y, \ldots), \psi(x, y, \ldots), \ldots].$$

Действительно, по определению сложной функции для чисел, из

$$\varphi(\lambda, \mu, \ldots) = \lambda', \ \psi(\lambda, \mu, \ldots) = \mu', \ldots$$

и

$$G(\lambda', \mu', \ldots) = \nu$$

следует

$$F(\lambda, \mu, \ldots) = \nu.$$

Но тогда по доказанной теореме то же верно и для абстрактных аргументов.

Следует отметить также, что если $F(\lambda) = \lambda$ для чисел, то $F(x) = x$ для $x \in H$.

1.37. Исходя из вещественных функций $\lambda + \mu$, $\alpha\lambda$ (α — вещественное число), $\lambda \vee \mu$, в H можно определить методом, указанным в 1.34, абстрактные функции $x + y$, αx, $x \vee y$, т. е. ввести в H понятие суммы, произведения на вещественное число, верхней грани. На основании теоремы 1.36 (а также 1.35) все эти операции обладают обычными свойствами, известными для чисел. В частности, в H будут выполнены все аксиомы линейного множества. Проверим, например, ассоциативность сложения.

Для вещественных чисел имеет место тождество $(\lambda+\mu)+\nu=\lambda+(\mu+\nu)$. Тогда с помощью теоремы 1.36 и следствия 2° о сложной функции мы сразу заключаем, что аналогичное тождество $(x+y)+z=x+(y+z)$ верно и для элементов множества H.

Так как $H\subset\Omega$, то в нём определено упорядочение. При этом ясно, что

$$x=\bar{\mathbf{S}}\begin{pmatrix}e_i\\ \lambda_i\end{pmatrix}\geqslant y=\bar{\mathbf{S}}\begin{pmatrix}e_i\\ \mu_i\end{pmatrix}$$

в том случае, если $\lambda_i\geqslant\mu_i$ при всех i, для которых $e_i>\mathbf{0}$. Но тогда определения верхней грани $x\vee y$ в смысле упорядочения в структуре Ω и через распространение функции вещественных аргументов $F(\lambda,\ \mu)=\lambda\vee\mu$ совпадают. Отсюда следует, что неравенству $x\geqslant y$ можно дать и такое определение:

$x\geqslant y$ означает, что $x\vee y=x$ (причём $x\vee y$ понимается как распространённая функция). Таким образом, неравенство выражается в виде равенства двух функций. А тогда при проверке свойств неравенства можно пользоваться теоремой 1.36. В частности, отсюда следует, что H есть K-линеал.

1.38. Пусть $x,\ y\in H$,

$$x=\begin{pmatrix}e_1,\ \ldots,\ e_n\\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}e_1,\ \ldots,\ e_n\\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_n\end{pmatrix}.$$

Тогда соотношение $\rho(x,\ y)=\varepsilon$ равносильно $|\lambda_i-\mu_i|\leqslant\varepsilon$ при всех i, для которых $e_i>\mathbf{0}$, причём $|\lambda_i-\mu_i|=\varepsilon$ хоть при одном из этих i.

Доказательство. Ясно, что сдвинутые разложения $x^{\pm\varepsilon}$ определяются таблицами

$$x^{\pm\varepsilon}=\begin{pmatrix}e_1,\ \ldots,\ & e_n\\ \lambda_1\pm\varepsilon,\ \ldots,\ & \lambda_n\pm\varepsilon\end{pmatrix},$$

а неравенство $x^{-\varepsilon}\leqslant y\leqslant x^{\varepsilon}$ означает, что $\lambda_i-\varepsilon\leqslant\mu_i\leqslant\lambda_i+\varepsilon$ (если $e_i>\mathbf{0}$). При этом если бы во всех этих неравенствах стоял знак $<$, то мы имели бы $\rho(x,\ y)<\varepsilon$.

Отметим, что условие $\rho(x,\ y)\leqslant\varepsilon$ равносильно неравенству $|x-y|\leqslant\varepsilon\mathbf{1}$.

Будем называть разложение $\omega\in\Omega(e)$ ограниченным, если $\omega(\lambda)$ отлична от $\mathbf{0}$ и от e только на конечном промежутке, т. е. существуют λ' и λ'' такие, что $\omega(\lambda')=\mathbf{0}$ и $\omega(\lambda'')=e$.

1.39. Теорема о плотности H в Ω. *Множество конечнозначных разложений H плотно в Ω в смысле почти равномерной сходимости.*

Доказательство. Пусть $\omega\in\Omega$. Нужно доказать, что существуют $x_n\in H$ такие, что $x_n\to\omega$ почти равномерно.

Пусть сначала $\omega \in \Omega(e)$ — ограниченное разложение, т. е. существуют λ' и λ'' такие, что $\omega(\lambda') = \mathbf{0}$ и $\omega(\lambda'') = e$. Положим

$$x_n(\lambda) = \omega\left(\frac{1}{n}[n\lambda]\right)^{*)} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \quad (*)$$

Так как величина $[n\lambda]$ принимает лишь конечное число различных значений в промежутке (λ', λ''), то по 1.33 x_n — конечнозначное разложение для e. Далее, из монотонности функции $\omega(\lambda)$, очевидно, следует, что

$$\omega\left(\lambda - \frac{1}{n}\right) \leqslant x_n(\lambda) \leqslant \omega(\lambda),$$

т. е.

$$\omega^{\frac{1}{n}}(\lambda) \leqslant x_n(\lambda) \leqslant \omega(\lambda).$$

А это означает, что

$$\omega \leqslant x_n \leqslant \omega^{\frac{1}{n}},$$

т. е. $\rho(x_n, \omega) \leqslant \frac{1}{n}$. Таким образом, $x_n \to \omega$ равномерно.

Пусть теперь ω — произвольный элемент из Ω. Возьмём счётное множество попарно дизъюнктных $e_k \in \mathfrak{E}$ такое, что $\mathop{\mathbf{S}}\limits_{1}^{\infty} e_k = \mathbf{1}$ и $\omega_k = e_k \wedge \omega \in \Omega(e_k)$ отлично от $\mathbf{0}$ и от e_k только на конечном промежутке значений λ. В качестве набора элементов e_k можно взять, например, все элементы вида

$$\omega(s+1) - \omega(s) \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Тогда, по доказанному, для каждого k найдутся такие конечнозначные $x_{kn} \in \Omega(e_k)$, что $x_{kn} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \omega_k$ равномерно.

Теперь положим

$$x_n = \bar{\mathbf{S}}\left\{\bar{\mathbf{S}}_{|k| \leqslant n} x_{kn}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} - \mathop{\mathbf{S}}\limits_{|k| \leqslant n} e_k \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

(x_n — соединение конечного числа x_{kn} и ещё одного элементарного разложения). Ясно, что $x_n \in H$ и при этом если $|k| \leqslant n$, то $e_k \wedge x_n = x_{kn}$, следовательно, для каждого k, $x_n \longrightarrow \omega$ равномерно на e_k. По определению это означает, что $x_n \longrightarrow \omega$ почти равномерно, что и требуется доказать.

Замечание 1°. В первой части доказательства x_n построены так, что

$$\omega \leqslant x_n \leqslant \omega^{\frac{1}{n}}.$$

---

*) $[\alpha]$ — целая часть числа α.

Тогда во второй части доказательства можно считать, что

$$\omega_k \leqslant x_{kn} \leqslant \omega_k^{\frac{1}{n}}.$$

Составляя x_n с помощью соединений, получаем:

$$\bar{\mathbf{S}}\left\{\bar{\mathbf{S}}\omega_k, \begin{pmatrix}\mathbf{1}-\mathbf{S}e_k\\ 0\end{pmatrix}\right\} \leqslant x_n \leqslant \bar{\mathbf{S}}\left\{\bar{\mathbf{S}}\,\omega_k^{\frac{1}{n}}, \begin{pmatrix}\mathbf{1}-\mathbf{S}e_k\\ 0\end{pmatrix}\right\}.$$

Положим $e = \underset{|k|\leqslant n}{\mathbf{S}} e_k$. Тогда эти неравенства перепишутся так:

$$\bar{\mathbf{S}}\{e \wedge \omega,\ (\mathbf{1}-e) \wedge \boldsymbol{0}\} \leqslant x_n \leqslant \bar{\mathbf{S}}\{e \wedge \omega^{\frac{1}{n}},\ (\mathbf{1}-e) \wedge \boldsymbol{0}\}.$$

Последними неравенствами мы воспользуемся ниже (1.47).

Замечание 2°. Если $\omega, \omega' \in \Omega$ и при этом $\omega \leqslant \omega'$, то конечнозначные разложения такие, что $x_n \to \omega$ и $y_n \to \omega'$ почти равномерно, можно построить с соблюдением неравенства $x_n \leqslant y_n$.

Действительно, прежде всего заменим $\omega'(\lambda)$ на разложение

$$\bar{\omega}(\lambda) = \sup_{\mu<\lambda} \omega'(\mu),$$

эквивалентное ему. Действительно при любых $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$

$$\omega'(\lambda_1) \leqslant \bar{\omega}(\lambda_2) \leqslant \omega'(\lambda_3),$$

а потому $\bar{\omega} = \omega'$. Кроме того, из неравенства $\omega'(\lambda_1) \leqslant \omega(\lambda_2)$ при $\lambda_1 < \lambda_2$ вытекает, что $\bar{\omega}(\lambda) \leqslant \omega(\lambda)$ при всех λ.

Воспользуемся теперь доказательством теоремы 1.39. Если ω и $\bar{\omega}$ — ограниченные разложения, а x_n и y_n построены для них так, как это указано в первой части доказательства (см. формулу (*)), то ясно, что

$$y_n(\lambda) \leqslant x_n(\lambda)$$

при всех λ, т. е. $x_n \leqslant y_n$.

В общем случае нужно взять разложения x_n, построенные для ω в доказательстве теоремы 1.39, и аналогично определить y_n для $\bar{\omega}$, понимая под e_k общий набор единичных элементов, на которых $\omega_k = e_k \wedge \omega$ и $\bar{\omega}_k = e_k \wedge \bar{\omega}$ ограничены. Существование такого общего набора доказывается как в 1.24.

1.4. K-пространство разложений единицы. Начнём с распространения непрерывных функций с H на всё Ω. Мы будем формулировать наши результаты для функций двух аргументов, но их общность для любого числа аргументов будет очевидна.

1.41. Лемма. *Пусть $F(\lambda, \mu)$ — непрерывная функция вещественных аргументов, а $F(x, y)$ — распространение этой функ-*

ции на H. Тогда, если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ элементов из H почти равномерно сходятся в себе, то $\{F(x_n, y_n)\}$ тоже почти равномерно сходится в себе.

Доказательство. Пусть сначала $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ равномерно сходятся в себе. Каждое x_n и y_n, как конечнозначное разложение, ограничено по модулю некоторым элементом вида $\alpha\mathbf{1}$ *), а тогда из определения равномерной сходимости и 1.38 следует существование такой постоянной M, что

$$|x_n|,\ |y_n| \leqslant M\mathbf{1} \text{ при всех } n.$$

Теперь по заданному $\varepsilon > 0$ подбираем модуль непрерывности $\delta > 0$ функции $F(\lambda, \mu)$ в квадрате $-M \leqslant \lambda, \mu \leqslant M$, т. е. выбираем δ так, чтобы из соотношений

$$|\lambda_1 - \lambda_2| \leqslant \delta,\ |\mu_1 - \mu_2| \leqslant \delta,\ |\lambda_1|,\ |\lambda_2|,\ |\mu_1|,\ |\mu_2| \leqslant M$$

следовало

$$|F(\lambda_1, \mu_1) - F(\lambda_2, \mu_2)| \leqslant \varepsilon.$$

Тогда по теореме о сохранении соотношений в H (1.36) для x', x'', y', $y'' \in H$ из

$$|x' - x''| \leqslant \delta\mathbf{1},\ |y' - y''| \leqslant \delta\mathbf{1},\ |x'|,\ |x''|,\ |y'|,\ |y''| \leqslant M\mathbf{1}$$

следует

$$|F(x', y') - F(x'', y'')| \leqslant \varepsilon\mathbf{1}.$$

Отсюда уже ясно, что $\{F(x_n, y_n)\}$ равномерно сходится в себе (см. 1.38).

Так как доказанный результат применим к любой алгебре Буля, то легко видеть, что если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ равномерно сходятся в себе на некотором $e \in \mathfrak{E}$, то и $\{F(x_n, y_n)\}$ равномерно сходится в себе на этом e (см. 1.35b)).

Пусть теперь $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся в себе почти равномерно. Тогда существуют попарно дизъюнктные $e_k \in \mathfrak{E}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\mathbf{S}e_k = \mathbf{1}$, на которых обе последовательности сходятся равномерно (1.24). По уже доказанному последовательность $\{F(x_n, y_n)\}$ равномерно сходится на каждом e_k, и, значит, сходится в себе почти равномерно.

На основании теоремы 1.39 о плотности H в Ω и доказанной сейчас леммы мы можем распространить определение функции $F(x, y)$ (непрерывной) на всё Ω. Именно, пусть $x, y \in \Omega$. По теореме 1.39 существуют $x_n, y_n \in H$ такие, что $x_n \to x$ и $y_n \to y$ почти равномерно. Тогда по лемме $\{F(x_n, y_n)\}$ сходится почти равномерно в себе, а следовательно, на основании полноты Ω (1.26) существует (единствен-

---

*) Если $x = \overline{\mathbf{S}}\begin{pmatrix} e_i \\ \lambda_i \end{pmatrix}$, то $|x| \leqslant \max|\lambda_i| \cdot \mathbf{1}$.

ное) $\omega \in \Omega$ такое, что $F(x_n, y_n) \to \omega$ почти равномерно. Положим $\omega = F(x, y)$ и это равенство примем за определение F на Ω.

Если одновременно существуют другие последовательности x_n' и y_n' ($x_n', y_n' \in H$), почти равномерно сходящиеся, соответственно, к x и y, и $F(x_n', y_n') \to \omega'$, то образуя «смешанную» последовательность, $F(x_1, y_1)$, $F(x_1', y_1')$, $F(x_2, y_2), \ldots$ мы сразу получим, что она сходится благодаря единственности предела (1.25, следствие), что $\omega' = \omega$. Таким образом, определение функции $F(x, y)$ однозначно.

Непосредственно из определения функций ясно, что 1.35a) сохраняется для любых $x, y \in \Omega$. Проверим также, что и 1.35b) остаётся верным в Ω, а именно:

1.42. Если $e \in \mathfrak{E}$, а $F_e(x, y)$ — распространение вещественной функции $F(\lambda, \mu)$ на $\Omega(e)$, то для любых $x, y \in \Omega$

$$F_e(e \wedge x, e \wedge y) = e \wedge F(x, y).$$

Доказательство. Так как H плотно в Ω (теорема 1.39), то существуют $x_n, y_n \in H$ такие, что $x_n \to x$ и $y_n \to y$ почти равномерно. А тогда по 1.27

$$e \wedge x_n \to e \wedge x, \quad e \wedge y_n \to e \wedge y$$

почти равномерно. Тогда по определению функции F_e, используя еще 1,35 b), имеем

$$F_e(e \wedge x, e \wedge y) = \lim F_e(e \wedge x_n, e \wedge y_n) =$$
$$= \lim e \wedge F(x_n, y_n) = e \wedge \lim F(x_n, y_n) = e \wedge F(x, y),$$

где предел понимается в смысле почти равномерной сходимости, ч. и тр. д.

Следствие. *Если* $\mathbf{1} = \mathop{\mathbf{S}}\limits_k e_k$, *то*

$$F(x, y) = \mathop{\bar{\mathbf{S}}}\limits_k F_{e_k}(e_k \wedge x, e_k \wedge y).$$

Это — прямое следствие из 1.42 и 1.17.

1.43. Теорема о сохранении соотношений в Ω. *Теорема* 1.36 *о сохранении соотношений в* H *остаётся верной для любых* $x, y \in \Omega$, *если функции* $F_j, G_j, \ldots, \Phi_j$ $(j = 1, 2)$ *непрерывны.*

Доказательство. Пусть

$$F_1(x, y) = F_2(x, y), \; G_1(x, y) = G_2(x, y), \ldots \tag{5}$$

($x, y \in \Omega$). Допустим сначала, что можно подобрать $x_n, y_n \in H$ так, чтобы $x_n \to x$ и $y_n \to y$ равномерно. Тогда $|x_n|, |y_n| \leqslant M\mathbf{1}$ при

всех n. По условию из

$$F_1(\lambda, \mu) = F_2(\lambda, \mu), \quad G_1(\lambda, \mu) = G_2(\lambda, \mu), \ldots$$

следует $\Phi_1(\lambda, \mu) = \Phi_2(\lambda, \mu)$. В таком случае с помощью принципа Больцано легко установить, что по любому $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta_\varepsilon > 0$ так, чтобы для точек квадрата $-M \leqslant \lambda, \mu \leqslant M$ из

$$|F_1(\lambda, \mu) - F_2(\lambda, \mu)| \leqslant \delta_\varepsilon, \ |G_1(\lambda, \mu) - G_2(\lambda, \mu)| \leqslant \delta_\varepsilon, \ldots$$

следовало

$$|\Phi_1(\lambda, \mu) - \Phi_2(\lambda, \mu)| \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда, по теореме 1.36, из

$$x', y' \in H, \ |x'|, \ |y'| \leqslant M\mathbf{1},$$

$$F_1(x', y') - F_2(x', y') \ | \leqslant \delta_\varepsilon \mathbf{1}, \ |G_1(x', y') - G_2(x', y')| \leqslant \delta_\varepsilon \mathbf{1}, \ldots$$

будет следовать, что

$$|\Phi_1(x', y') - \Phi_2(x', y')| \leqslant \varepsilon \mathbf{1}.$$

По ходу доказательства леммы 1.41 мы установили, что при наших предположениях последовательности

$$\{F_j(x_n, y_n)\}, \ \{G_j(x_n, y_n)\}, \ldots (j = 1, 2)$$

сходятся равномерно. Тогда из (5) следует, что

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_n, y_n) - F_2(x_n, y_n) \to \mathbf{0}, \\ G_1(x_n, y_n) - G_2(x_n, y_n) \to \mathbf{0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

равномерно. Теперь уже ясно, что и $\Phi_1(x_n, y_n) - \Phi_2(x_n, y_n) \to \mathbf{0}$ равномерно, т. е. $\Phi_1(x, y) = \Phi_2(x, y)$.

Переход к общему случаю производится так же, как в 1.41. Именно, мы на основании доказанного уже легко получаем, что существует такое разбиение $\mathbf{S}e_k = \mathbf{1}$, что $\Phi_1(x, y) = \Phi_2(x, y)$ на каждом e_k, т. е.

$$e_k \wedge \Phi_1(x, y) = e_k \wedge \Phi_2(x, y).$$

Но тогда из 1.17 сразу следует, что $\Phi_1(x, y) = \Phi_2(x, y)$, ч. и тр. д.

Замечание. После того как теорема о сохранении соотношений перенесена из H в Ω, в Ω автоматически оказываются верными и оба следствия из неё (см. 1.36). Действительно, эти следствия выводились из теоремы 1.36 без использования каких-либо специфических свойств множества H.

1.44. Так же, как это сделано выше для H, мы можем теперь через соответствующие функции ввести в Ω понятия $x + y$, αx, $x \geqslant y$, причём сохранятся все обычные свойства. Таким образом, Ω будет линеаризовано. Нулевым элементом будет $\mathbf{0}$.

Покажем, что новое определение неравенства $x \geqslant y$ для элементов Ω (т. е. соотношение $x \vee y = x$) равносильно прежнему (1.12).

Пусть $x \geqslant y$ в смысле старого определения. Подбираем x_n, $y_n \in H$ и $e_k \in \mathfrak{E}(\mathbf{S}e_k = \mathbf{1})$ так, чтобы $x_n \to x$, $y_n \to y$ равномерно на каждом e_k и чтобы при этом было $x_n \geqslant y_n$ (см. замечание 2° к теореме 1.39), т. е. $x_n = x_n \vee y_n$, благодаря совпадению в H обоих определений неравенства. Но тогда

$$x_n = x_n \vee y_n \to x \vee y \quad \text{почти равномерно,}$$

т. е. $x \vee y = x$, а это означает, что $x \geqslant y$ в смысле нового определения.

Обратно, если $x \geqslant y$ в новом смысле, а конечнозначные элементы $x_n \to x$, $y_n \to y$ почти равномерно, то

$$x_n \vee y_n \to x \vee y = x.$$

Но $x_n \vee y_n \geqslant y_n$, где $\geqslant$ можно понимать в обоих смыслах *). Тогда, после предельного перехода в неравенстве (на основании 1.25), получаем $x \geqslant y$ в старом смысле.

Доказав равносильность обоих определений неравенств, мы можем при проверке свойств неравенств пользоваться теоремой 1.43 о сохранении соотношений.

Предлагаем читателю в качестве упражнения доказать, что $x \vee y$ (а также $x \wedge y$), определённое обычным способом и через функцию, совпадают.

1.45. Теорема. *Множество Ω разложений единицы с введёнными в нём линеаризацией и упорядочением является K-пространством.*

Доказательство. Нужно проверить, что Ω удовлетворяет пяти аксиомам K-пространства. Аксиома I содержится в определении неравенства $x > \boldsymbol{0}$; аксиомы III и V проверены в 1.13. Проверим аксиому II.

Из неравенств $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ для чисел следует $x + y \geqslant 0$. По теореме о сохранении соотношений в Ω (1.43) то же верно и для элементов Ω. Однако нужно показать, что если $x > \boldsymbol{0}$ и $y > \boldsymbol{0}$, то невозможно $x + y = \boldsymbol{0}$. Но, действительно, в противном случае мы бы получили $-y = x > \boldsymbol{0}$, т. е. y и $-y$ одновременно $\geqslant \boldsymbol{0}$. Тогда по той же теореме 1.43 должно было бы быть $y = \boldsymbol{0}$ (как для чисел), что противоречит условию $y > \boldsymbol{0}$.

Аксиома IV проверяется ещё проще. Если $x > \boldsymbol{0}$ и $\alpha > 0$, то по теореме 1.43 $\alpha x \geqslant \boldsymbol{0}$, но знак равенства исключается по общим свойствам линейного множества (см. гл. I 1.1, 10)).

Итак, Ω — K-пространство.

---

*) Мы используем то, что в H уже доказано совпадение $\vee$ в двух смыслах.

1.46. Для любого $x \in \mathfrak{Q}$ сдвинутый элемент есть $x^h = x + h\mathbf{1}$, т. е. операция сдвига имеет простой алгебраический смысл.

Доказательство. Для $x \in H$ это очевидно, так как

$$\text{если } x = \overline{\mathbf{S}}\begin{pmatrix} e_i \\ \lambda_i \end{pmatrix}, \text{ то } x^h = \overline{\mathbf{S}}\begin{pmatrix} e_i \\ \lambda_i + h \end{pmatrix}.$$

Чтобы установить 1.46 для любого $x \in \mathfrak{Q}$, достаточно заметить, что если $x_n \to x$ почти равномерно, то $x_n^h \to x^h$ в том же смысле. Действительно для равномерной сходимости это следует из 1.22 d), а тогда обычным путём это переносится и на почти равномерную сходимость.

Теперь, если $x_n \to x$ ($x_n \in H$) почти равномерно, то $x_n^h = x_n + h\mathbf{1} \to x + h\mathbf{1}$ почти равномерно *), следовательно, благодаря единственности предела (1.25, следствие), $x^h = x + h\mathbf{1}$.

1.47. Для любого $x \in \mathfrak{Q}$ существуют такие конечнозначные $x_n \in H$, что $x_n \to x$ почти равномерно и

$$-x_- \leqslant x_n \leqslant \left(x + \frac{1}{n}\mathbf{1}\right)_+ \text{ **)}.$$

Доказательство. Покажем, что требуемому условию удовлетворяют те x_n, которые построены при доказательстве теоремы 1.39 о плотности H в $\mathfrak{Q}$.

В замечании 1° к этой теореме отмечено, что

$$\overline{\mathbf{S}}\{e \wedge x, (\mathbf{1} - e) \wedge \mathbf{0}\} \leqslant x_n \leqslant \overline{\mathbf{S}}\{e \wedge x^{\frac{1}{n}}, (\mathbf{1} - e) \wedge \mathbf{0}\}.$$

Но

$$\overline{\mathbf{S}}\{e \wedge x^{\frac{1}{n}}, (\mathbf{1} - e) \wedge \mathbf{0}\} \leqslant \overline{\mathbf{S}}\{e \wedge (x^{\frac{1}{n}} \vee \mathbf{0}), (\mathbf{1} - e) \wedge (x^{\frac{1}{n}} \vee \mathbf{0})\} =$$
$$= x^{\frac{1}{n}} \vee \mathbf{0} = (x^{\frac{1}{n}})_+ = \left(x + \frac{1}{n}\mathbf{1}\right)_+$$

(последнее — на основании 1.46). Аналогично

$$\overline{\mathbf{S}}\{e \wedge x, (\mathbf{1} - e) \wedge \mathbf{0}\} \geqslant \overline{\mathbf{S}}\{e \wedge (x \wedge \mathbf{0}), (\mathbf{1} - e) \wedge (x \wedge \mathbf{0})\} =$$
$$= x \wedge \mathbf{0} = -x_-.$$

1.5. База K-пространства $\mathfrak{Q}$. В этом пункте мы установим основной результат настоящего параграфа, именно, мы докажем, что K-пространство $\mathfrak{Q}$ разложений единицы содержит единицу, а его база изоморфна исходной алгебре Буля $\mathfrak{E}$. Предварительно проведём некоторый анализ K-пространства $\mathfrak{Q}$.

---

*) Если $x_n \to x$, $y_n \to y$ ($x_n, y_n \in H$), то $x_n + y_n \to x + y$ по определению суммы $x + y$.

**) Здесь $_+$ и $_-$ обозначают, как обычно, положительную и отрицательную части элементов K-пространства $\mathfrak{Q}$.

Нулевым элементом $\boldsymbol{0} \in \Omega$ является разложение $\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ 0\end{pmatrix}$, т. е.

$$\boldsymbol{0}(\lambda) = \begin{cases}\mathbf{0} \text{ при } \lambda < 0,\\ \mathbf{1} \text{ при } \lambda > 0.\end{cases}$$

Тогда согласно определению неравенства $x > \boldsymbol{0}$ означает, что $x(\lambda) = \mathbf{0}$ при всех $\lambda < 0$ и $x(\lambda_0) < \mathbf{1}$ хоть при одном $\lambda_0 > 0$.

Выясним смысл дизъюнктности для положительных элементов пространства Ω. Для $x \geqslant \boldsymbol{0}$ введём элемент алгебры $\mathfrak{E}$

$$e_x = C \inf_{\lambda > 0} x(\lambda) = Cx(+0)$$

и назовём его следом элемента x в алгебре $\mathfrak{E}$.

1.51. a) $x \,\mathrm{d}\, y$ $(x, y \geqslant \boldsymbol{0})$ равносильно $e_x \,\mathrm{d}\, e_y$.

b) e_x — наименьший из $e \in \mathfrak{E}$, для которых возможно представление

$$x = \mathbf{S}\left\{e \wedge x, \begin{pmatrix}Ce\\ 0\end{pmatrix}\right\}. \tag{6}$$

Доказательство. a) следует из выражения для нижней грани:

$$(x \wedge y)\ (\lambda) = x(\lambda) \vee y(\lambda)$$

(см. доказательство предложения 1.13 (*).

Действительно, соотношение $x \wedge y = \boldsymbol{0}$ при $x, y \geqslant \boldsymbol{0}$ равносильно соотношению $x(\lambda) \vee y(\lambda) = \mathbf{1}$ для $\lambda > 0$, что в свою очередь равносильно соотношению

$$x(+0) \vee y(+0) = \mathbf{1} \tag{7}$$

(последнее легко проверяется с помощью дистрибутивности точных граней. Но соотношение (7) равносильно соотношению $e_x \wedge e_y = \mathbf{0}$.

b) имеем:

$$(e \wedge x)(\lambda) = e \wedge x(\lambda), \quad \begin{pmatrix}Ce\\ 0\end{pmatrix}(\lambda) = \begin{cases}\mathbf{0} & \text{при } \lambda < 0,\\ Ce & \text{при } \lambda > 0.\end{cases}$$

Если e — любой элемент из $\mathfrak{E}$, для которого выполнено (6), то, по определению соединения разложений, мы получаем для $\lambda > 0$:

$$x(\lambda) = \mathbf{S}\{[e \wedge x(\lambda)]\, Ce\} = [e \wedge x(\lambda)] \vee Ce =$$
$$= (e \vee Ce) \wedge [x(\lambda) \vee Ce] = x(\lambda) \vee Ce,$$

откуда $Ce \leqslant x(\lambda)$ и, следовательно, $Ce \leqslant x(+0)$, или $e \geqslant Cx(+0) = e_x$.

С другой стороны, принимая во внимание, что $Ce_x = x(+0) \leqslant x(\lambda)$ при $\lambda > 0$, мы аналогичным рассуждением проверяем, что (6) выполнено для $e = e_x$.

1.52. a) Пусть x — любой элемент из Ω. Компонента Ω_x, порождаемая x или, что то же самое, порождаемая $|x|$, состоит из всех элементов $y \in \Omega$, для которых $e_{|y|} \leqslant e_{|x|}$.

b) $\mathbf{1}$ — единица в Ω.

Доказательство. a) В дизъюнктное дополнение элемента x входят все z, дизъюнктные с x, т. е. для которых $e_{|z|}$ d $e_{|x|}$ (1.51 a)) или $e_{|z|} \leqslant Ce_{|x|}$. Но компонента Ω_x есть дизъюнктное дополнение дизъюнктного дополнения элемента x (см. замечание в 2.11 гл. III). Следовательно, $y \in \Omega_x$ в том и только в том случае, когда y дизъюнктен каждому z, т. е. когда $e_{|y|}$ d $Ce_{|x|}$, или $e_{|y|} \leqslant e_{|x|}$.

b) Так как $\mathbf{1}(+0) = \mathbf{0}$ *), то $e_{\mathbf{1}} = \mathbf{1}$; следовательно, по a), $\Omega_{\mathbf{1}} = \Omega$, т. е. $\mathbf{1}$ обладает свойством единицы в Ω. В дальнейшем мы и примем $\mathbf{1}$ за единицу в Ω.

1.53. Основная теорема. *Для любой полной алгебры Буля $\mathfrak{E}$ база K-пространства Ω, составленного из разложений единицы, изоморфна $\mathfrak{E}$.*

Доказательство. Пусть $e \in \mathfrak{E}$. Обозначим через Ω_e множество всех $x \in \Omega$, для которых $e_{|x|} \leqslant e$. В частности, в Ω_e входит разложение $x^* = \begin{pmatrix} e, & Ce \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$, причём $e = e$. Но тогда по 1.52a) Ω_e есть компонента, порождаемая разложением x^*. С другой стороны, так как в K-пространстве с единицей каждая компонента порождается некоторым элементом (3.13b) гл. III), то по тому же 1.52a) каждая компонента пространства Ω совпадает с одним из Ω_e. При этом если $e_1 \nleqslant e_2$, то

$$\begin{pmatrix} e_1, & Ce_1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \bar{\in} \Omega_{e_2},$$

следовательно, $\Omega_{e_1} \neq \Omega_{e_2}$. Но если $e_1 \neq e_2$, то невозможно одновременно $e_1 \leqslant e_2$ и $e_2 \leqslant e_1$ и на основании только что сказанного $\Omega_{e_1} \neq \Omega_{e_2}$. Следовательно, соответствие $\Omega_e \longleftrightarrow e$ взаимно однозначное. При этом из $e_1 \leqslant e_2$ следует $\Omega_{e_1} \leqslant \Omega_{e_2}$ и обратно. Таким образом, множество компонент пространства Ω изоморфно алгебре $\mathfrak{E}$. Отсюда вытекает, вследствие изоморфизма между булевской алгеброй компонент и базой K-пространства с единицей, что база пространства Ω изоморфна алгебре $\mathfrak{E}$, ч. и тр. д.

1.54. Выясним теперь смысл проектирования в Ω. Пусть $e \in \mathfrak{E}$. Всякое $x \geqslant \mathbf{0}$ $(x \in \Omega)$ можно представить в виде $x = \mathbf{S}(y, z) = y \vee z$, где

$$\left.\begin{aligned} y(\lambda) &= \begin{cases} \mathbf{0} & \text{при } \lambda < 0, \\ [e \wedge x(\lambda)] \vee Ce & \text{при } \lambda > 0, \end{cases} \\ z(\lambda) &= \begin{cases} \mathbf{0} & \text{при } \lambda < 0, \\ [Ce \wedge x(\lambda)] \vee e & \text{при } \lambda > 0. \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

*) По определению

$$\mathbf{1}(\lambda) = \begin{cases} \mathbf{0} \text{ при } \lambda < 1, \\ \mathbf{1} \text{ при } \lambda > 1. \end{cases}$$

Действительно, ясно, что y, $z \in \mathfrak{Q}$ и при этом $y(+0) \geqslant Ce$, т. е. $e_y \leqslant e$, следовательно $y \in \mathfrak{Q}_e$. Аналогично $z \in \mathfrak{Q}_{Ce}$. Для проверки равенства $x = y \vee z$ достаточно показать (1.13), что при $\lambda > 0$

$$x(\lambda) = y(\lambda) \wedge z(\lambda).$$

Но, действительно, благодаря дистрибутивности,

$$\{[e \wedge x(\lambda)] \vee Ce\} \wedge \{[Ce \wedge x(\lambda)] \vee e\} = \{x(\lambda) \vee Ce\} \wedge \{x(\lambda) \vee e\} = \\ = x(\lambda) \vee (Ce \wedge e) = x(\lambda).$$

Теперь по теореме о единственности представления 2.25 гл. II заключаем, что

$$y = \mathrm{Pr}_{\mathfrak{Q}_e} x.$$

Таким образом, формула (8) позволяет находить проекцию элемента x на любую компоненту.

В частности, из (8) простым подсчетом получается, что

$$\mathrm{Pr}_{\mathfrak{Q}_e} \mathbf{1} = \begin{pmatrix} e, & Ce \\ 1, & 0 \end{pmatrix},$$

т. е. база $\mathfrak{E}(\mathfrak{Q})$ состоит из элементов вида $\begin{pmatrix} e, & Ce \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$. Проектор $\left(\begin{pmatrix} e, & Ce \\ 1, & 0 \end{pmatrix}\right)$, переводящий $\mathfrak{Q}$ в $\mathfrak{Q}_e$, будем обозначать P_e.

Если отождествить единичные элементы пространства $\mathfrak{Q}$ с соответствующими им при изоморфизме элементами алгебры $\mathfrak{E}$, то след e_x, введённый в начале этого пункта (для $x \geqslant \mathbf{0}$), совпадет со следом e_x, определённым в главе III (3.4).

1.55. Если снова считать базу пространства $\mathfrak{Q}$ отождествленной с исходной алгеброй $\mathfrak{E}$, то характеристикой (см. 4.1 гл. III) любого элемента $x \in \mathfrak{Q}$ будет некоторое разложение единицы алгебры $\mathfrak{E}$, т. е. опять некоторый элемент из $\mathfrak{Q}$. Покажем, что семейство $\{e_\lambda\}$, где $e_\lambda = x(\lambda)$, является характеристикой элемента x, т. е. каждый элемент из $\mathfrak{Q}$ является своей собственной характеристикой с точностью до изоморфизма базы пространства $\mathfrak{Q}$ с алгеброй $\mathfrak{E}$.

В настоящем параграфе мы ограничимся случаем, когда $x \geqslant \mathbf{0}$, а общий случай будет рассмотрен ниже (см. 2.19а)).

Пусть $e_\mu = x(\mu)$, $y = P_{e_\mu} x$, $z = P_{\mathbf{1} - e_\mu} x = (\mathbf{1} - P_{e_\mu}) x$. Тогда по формуле (8)

$$y(\lambda) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{при } \lambda < 0, \\ [e_\mu \wedge x(\lambda)] \vee Ce_\mu & \text{при } \lambda > 0. \end{cases}$$

Следовательно, если $\mu \geqslant 0$:

$$y(\lambda) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{при } \lambda < 0, \\ x(\lambda) \vee Ce_\mu & \text{при } 0 \leqslant \lambda \leqslant \mu, \\ \mathbf{1} & \text{при } \lambda > \mu. \end{cases}$$

С другой стороны, $\mu e_\mu = \begin{pmatrix} e_\mu, & Ce_\mu \\ \mu, & 0 \end{pmatrix}$, т. е.

$$(\mu e_\mu)(\lambda) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{при } \lambda < 0, \\ Ce_\mu & \text{при } 0 < \lambda \leqslant \mu, \\ \mathbf{1} & \text{при } \lambda > \mu, \end{cases}$$

Таким образом,

$$y(\lambda) \geqslant (\mu e_\mu)(\lambda)$$

при всех λ, т. е. $y = P_{e_\mu} x \leqslant \mu e_\mu$.

Аналогично проверяется, что $z = P_{\mathbf{1}-e_\mu} x \geqslant \mu(\mathbf{1} - e_\mu)$. Если $\mu < 0$, то $e_\mu = \mathbf{0}$ и оба неравенства тривиальны. Таким образом, семейство $\{e_\mu\}$ является характеристикой для x (ср. гл. III).

§ 2. Расширение K-пространств

В настоящем параграфе мы выделим класс K-пространств, так называемых расширенных, и укажем процесс, которым каждое K-пространство может быть погружено в некоторое расширенное.

2.1. Погружение произвольного K-пространства с единицей в K-пространство разложений единицы. Пусть X — произвольное K-пространство с единицей, $\mathfrak{E}(X)$ — его база — полная алгебра Буля, и $\Omega(X)$ — K-пространство разложений единицы алгебры $\mathfrak{E}(X)$, построенное в предыдущем параграфе. Каждому элементу $x \in X$ сопоставим его характеристику $\omega \in \Omega(X)$, где $\omega(\lambda) = e_\lambda^x$. Обозначим подмножество пространства $\Omega(X)$, состоящее из всех характеристик, через Ω'. В дальнейшем мы докажем, что X и Ω' изоморфны. Предварительно мы установим некоторые вспомогательные предложения.

2.11. a) Если $\omega(\lambda) = e_\lambda^x$, $\omega'(\lambda) = e_\lambda^y$, где $x, y \in X$, и если $x \leqslant y$, то $\omega \leqslant \omega'$ (в том смысле, как это было определено в Ω).

b) Если $\omega(\lambda) = e_\lambda^x$, то $\omega^h(\lambda) = e_\lambda^{x+h\mathbf{1}}$, т. е. $e_\lambda^x + h\mathbf{1}$ — характеристика элемента $x + h\mathbf{1}$.

Доказательство. a) Положим, как в гл. III (4.1), для любого $x \in X$

$$e_\lambda^+(x) = ((\lambda\mathbf{1} - x)_+)\,\mathbf{1},$$

т. е. $e_\lambda^+(x)$ — след элемента $(\lambda\mathbf{1} - x)_+$. Тогда если $x \leqslant y$, то $e_\lambda^+(y) \leqslant e_\lambda^+(x)$. Теперь для произвольных $\lambda_1 < \lambda_3 < \lambda_2$ имеем благодаря монотонности характеристик и неравенству (2) пункта 4.1 гл. III:

$$e_{\lambda_1}(y) \leqslant e_{\lambda_3}^+(y) \leqslant e_{\lambda_3}^+(x) \leqslant e_{\lambda_2}(x),$$

т. е. $\omega \leqslant \omega'$.

b) Очевидно, если учесть 1.46.

2.12. Пусть $e \in \mathfrak{E}$, X_e — подпространство, порождённое элементом e, $x \in X$, $y = (e)x$. Так как $y \in X_e$, то для него можно определить характеристику в X_e, в котором e принято за единицу. Такая характеристика $e'_\lambda(y)$ может быть определена по формуле

$$e'_\lambda(y) = e \wedge e^x_\lambda.$$

Доказательство. По 3.23 c) гл. III элементы $e \wedge e^x_\lambda \in \mathfrak{E}(X_e)$. Имеем (см. 2.32 d), 2.22 e) — f) и 3.23 a) гл. III):

$$(e \wedge e^x_\lambda) y = (e)(e^x_\lambda) x \leqslant (e)(\lambda e^x_\lambda) = \lambda (e \wedge e^x_\lambda),$$

т. е. проектор $(e \wedge e^x_\lambda)$ удовлетворяет первому из неравенств (1) пункта 4.1 гл. III, определяющих характеристику. Аналогично проверяется и второе из неравенств.

2.13. (Обратное к 2.11a)). При тех же обозначениях, что в 2.11a), из $\omega \leqslant \omega'$ следует $x \leqslant y$.

Доказательство. Допустим, что $x \not\leqslant y$. По лемме 3.51 гл. III существует такой $e_0 \in \mathfrak{E}$, что

$$x' = (e_0) x > (e_0) y = y'.$$

По теореме 3.52 гл. III существуют $e \in \mathfrak{E}(X_{e_0})$ $(e > \mathbf{0})$ и число $\alpha > 0$ такие, что $x' > y' + \alpha e$. Положим $x'' = (e)x$, $y'' = (e)y$. Тогда по свойствам проекторов

$$x'' \geqslant y'' + \alpha e.$$

Обозначим через ω_e и ω'_e характеристики элементов x'' и y'' (соответственно) в подпространстве X_e (в котором e принято за единицу). Тогда по 2.11 a) — b) $\omega_e \geqslant (\omega'_e)^\alpha$. Но из неравенства $\omega \leqslant \omega'$ следует, что $\omega_e \leqslant \omega'_e$ (см. 2.12 и определение неравенства для разложений). Сопоставляя с предыдущим неравенством, мы получаем, что $(\omega'_e)^\alpha \leqslant \omega'_e$.

Пусть теперь $\lambda_2 < \lambda_1 < \lambda_2 + \alpha$. Тогда $\omega'_e(\lambda_1) \leqslant (\omega'_e)^\alpha(\lambda_2 + \alpha) = \omega'_e(\lambda_2)$. Отсюда следует, что $\omega'_e(\lambda_1) = \omega'_e(\lambda_2)$ и, следовательно, получаем, что $\omega'_e(\lambda) = \mathrm{const}$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, что невозможно.

Следствие. Соответствие между элементами пространства X и их характеристиками — взаимно однозначное, сохраняющее упорядочение.

2.14. Если ω — характеристика элемента x, то $\omega_+ = \omega \vee \mathbf{0}$ — характеристика элемента x_+, а — $\omega_- = \omega \wedge \mathbf{0}$ — характеристика элемента x_-.

Доказательство. По определению символа $\vee$ в Ω,

$$\omega_+(\lambda) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{при } \lambda < 0, \\ \omega(\lambda) & \text{при } \lambda > 0. \end{cases}$$

Для доказательства предложения 2.14 достаточно проверить неравенства (1) пункта 4.1 гл. III для $\lambda > 0$, так как для $\lambda < 0$ они очевидны. Обозначим через P_λ проектор $(\omega_+(\lambda)) = (\omega(\lambda))$. Тогда, по определению характеристики элемента x, $P_\lambda x \leqslant \lambda\omega(\lambda)$ или

$$P_\lambda x_+ - P_\lambda x_- \leqslant \lambda\omega_+(\lambda).$$

Но так как $P_\lambda x_+ \,\mathrm{d}\, P_\lambda x_-$, то отсюда сразу следует, что $P_\lambda x_+ \leqslant \leqslant \lambda\omega_+(\lambda)$ *).

С другой стороны,

$$(\mathbf{1} - P_\lambda)\, x \geqslant \lambda\,[\mathbf{1} - \omega(\lambda)]$$

или

$$(\mathbf{1} - P_\lambda)\, x_+ - (\mathbf{1} - P_\lambda)\, x_- \geqslant \lambda\,[\mathbf{1} - \omega_+(\lambda)]$$

и, опять благодаря дизъюнктности элементов в левой части,

$$(\mathbf{1} - P_\lambda)\, x_+ \geqslant \lambda\,[\mathbf{1} - \omega_+(\lambda)].$$

Аналогично проверяется второе из утверждений 2.14.

2.15. Назовём элемент $x \in X$ *конечнозначным*, если он представим в виде $x = \sum_1^n \lambda_i e_i$, где $e_i \in \mathfrak{E}(X)$. При этом всегда можно предполагать, что $e_i \,\mathrm{d}\, e_j$ при $i \neq j$ и $\mathbf{S} e_i = \mathbf{1}$. Характеристика такого конечнозначного элемента эквивалентна конечнозначному разложению единицы

$$\omega = \overline{\mathbf{S}} \begin{pmatrix} e_i \\ \lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1, \ldots, e_n \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \end{pmatrix}$$

и, обратно, каждое конечнозначное разложение такого вида является характеристикой единственного конечнозначного элемента $x = \sum_1^n \lambda_i e_i$. Таким образом, множество конечнозначных разложений единицы $H \subset \Omega'$, а соответствие между элементами $x \in X$ и их характеристиками порождает взаимно однозначное соответствие между множеством конечнозначных элементов пространства X и множеством H. При этом из определения основных операций в H сразу следует, что это соответствие — изоморфизм (см. 1.37).

2.16. Лемма. *Пусть x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — конечнозначные элементы пространства X, ограниченные в совокупности в X, $\omega_n(\lambda) = e_\lambda^{x_n}$ — их характеристики и $\omega_n \longrightarrow \omega \in \Omega(X)$ почти равномерно. Тогда существует такой элемент $x \in X$, что $x_n \xrightarrow{(o)} x$ и ω — характеристика для x.*

---

*) Если $y - z \leqslant u$ и $\geqslant \mathbf{0}$ и $y \,\mathrm{d}\, z$, то проектируя обе части неравенства на подпространство $X_{\mathbf{e}y}$, получим $y \leqslant \mathrm{Pr}\, u \leqslant u$.

Доказательство. По определению почти равномерной сходимости существуют $e_k \in \mathfrak{E}$ такие, что $\mathbf{S}e_k = \mathbf{1}$ и $\omega_n \longrightarrow \omega$ равномерно на каждом e_k. Положим

$$x_n^k = (e_k)\, x_n.$$

Это означает, что (см. 3.23a) гл. III)

$$\text{если} \quad x_n = \sum_1^m \lambda_i e_i^*, \quad \text{то} \quad x_n^k = \sum_1^m \lambda_i (e_k \wedge e_i^*),$$

т. е. x_n^k — конечнозначные элементы компоненты X_{e_k}, порождённой элементом e_k. Если e_k принять за единицу в X_{e_k}, то характеристика для x_n^k в X_{e_k} по 2.12 эквивалентна $e_k \wedge \omega_n(\lambda)$. Тогда по 1.38

$$|x_n^k - x_p^k| \leqslant \rho\,(e_k \wedge \omega_n,\ e_k \wedge \omega_p)\,\mathbf{1} \xrightarrow[n,\,p\to\infty]{} \mathbf{0}.$$

Вследствие полноты K-пространства существует $x^{(k)} \in X_{e_k}$ такой, что $x_n^k \xrightarrow[n\to\infty]{(o)} x^{(k)}$. Так как все x_n в совокупности ограничены: $|x_n| \leqslant y$, то $|x^{(k)}| \leqslant (e_k)\,y \leqslant y$, т. е. $x^{(k)}$ тоже ограничены в совокупности, следовательно, имеет смысл $x = \mathbf{S}x^{(k)} \in X$. При этом по признаку сходимости 3.53 гл. III $x_n \xrightarrow{(o)} x$.

С другой стороны, по определению элементов $x^{(k)}$

$$|x_n^k - x^{(k)}| \leqslant \varepsilon_n e_k, \quad \text{где } \varepsilon_n \to 0.$$

Это неравенство равносильно такому:

$$x^{(k)} - \varepsilon_n e_k \leqslant x_n^k \leqslant x^{(k)} + \varepsilon_n e_k.$$

Пусть ω' — характеристика для x. Тогда $e_k \wedge \omega'$ — характеристика для $x^{(k)}$ в X_{e_k}. По 2.11a) неравенство между элементами переносится на их характеристики, следовательно, (2.11b) и 2.12)

$$e_k \wedge (\omega')^{-\varepsilon_n} \leqslant e_k \wedge \omega_n \leqslant e_k \wedge (\omega')^{\varepsilon_n},$$

т. е. $\rho\,(e_k \wedge \omega_n,\ e_k \wedge \omega') \leqslant \varepsilon_n$. Тогда $\omega_n \to \omega'$ почти равномерно. Вследствие единственности предела в пространстве разложений отсюда следует, что $\omega' = \omega$.

Таким образом, лемма показана.

2.17. Лемма. *Для каждого $x \in X$ существует последовательность таких конечнозначных элементов $x_n \xrightarrow{(o)} x$, что последовательность их характеристик сходится почти равномерно к характеристике элемента x. При этом x_n можно выбрать так, что $-x_- \leqslant x_n \leqslant (x + \frac{1}{n}\mathbf{1})_+$.*

Доказательство. Пусть ω — характеристика элемента x. По теореме о плотности множества H в Ω существуют такие конечнозначные $\omega_n \in H$, что $\omega_n \to \omega$ почти равномерно, и при этом ω_n можно считать ограниченными в совокупности (1.47), точнее $\omega \wedge \boldsymbol{0} \leqslant \omega_n \leqslant (\omega + \frac{1}{n}\boldsymbol{1}) \vee \boldsymbol{0}$. Но $(\omega + \frac{1}{n}\boldsymbol{1}) \vee \boldsymbol{0}$ — характеристика для $(x + \frac{1}{n}\mathbf{1})_+$, а $\omega \wedge \boldsymbol{0}$ — характеристика для $-x_-$ (2.11b) и 2.14); тогда конечнозначные элементы $x_n \in X$, характеристиками которых служат ω_n, по 2.13 удовлетворяют неравенствам $-x_- \leqslant x_n \leqslant (x + \frac{1}{n}\mathbf{1})_+ \leqslant (x + \mathbf{1})_+$, и, значит, ограничены в совокупности. По предыдущей лемме (2.16) существует $y = (o)\text{-}\lim x_n$ и ω — характеристика для y. Но вследствие взаимной однозначности соответствия между элементами и их характеристиками $y = x$, ч.и тр. д.

2.18. Теорема о погружении K-пространства с единицей. *Всякое K-пространство с единицей изоморфно нормальному подпространству $\Omega' \subset \Omega(X)$, причём Ω' полно в $\Omega(X)$* *). *Этот изоморфизм осуществляется сопоставлением каждому элементу $x \in X$ его характеристики.*

Доказательство. Однозначность соответствия между X и Ω' и сохранение при этом упорядочения уже установлены в 2.13. Проверим соответствие линейных операций.

Пусть $z = x + y$, ω и ω' — характеристики элементов x и y (соответственно), $\omega^* = \omega + \omega'$. По лемме 2.17 существуют конечнозначные элементы $x_n \xrightarrow{(o)} x$, $y_n \xrightarrow{(o)} y$ такие, что их характеристики соответственно $\omega_n \to \omega$, $\omega'_n \to \omega'$ почти равномерно. Но вследствие изоморфизма между H и множеством конечнозначных элементов $\omega_n + \omega'_n$ есть характеристика суммы $x_n + y_n$. По определению суммы в $\Omega(X)$, $\omega_n + \omega'_n \to \omega + \omega'$ почти равномерно; в то же время $x_n + y_n \xrightarrow{(o)} z$. Тогда по лемме 2.16 $\omega + \omega'$ есть характеристика для z.

Аналогично проверяется, что при любом вещественном α разложение $\alpha\omega$ есть характеристика для αx. Таким образом, изоморфизм между X и Ω' доказан. Отсюда следует, что Ω' — подпространство пространства $\Omega(X)$. Докажем, что Ω' — нормальное подпространство.

Пусть сначала $\boldsymbol{0} \leqslant \omega' \leqslant \omega$, где $\omega \in \Omega'$, $\omega' \in \Omega(X)$. Покажем, что $\omega' \in \Omega'$. По теореме о плотности множества H в Ω (1.39) существуют ω_n, $\omega'_n \in H$ такие, что $\omega_n \to \omega$, $\omega'_n \to \omega'$ почти равномерно, и при этом по 1.47 ω'_n можно считать ограниченными в совокупности, именно, $\omega'_n \leqslant \omega' + \boldsymbol{1} \leqslant \omega + \boldsymbol{1}$. Но ω'_n суть характеристики некоторых конечнозначных элементов $y_n \in X$, а ω — характеристика элемента $x \in X$; следовательно, благодаря изоморфизму между характеристи-

*) «Полно» в смысле определения 2.21 гл. II.

ками и элементами, $\mathbf{0} \leqslant y_n \leqslant x + \mathbf{1}$. А тогда по лемме 2.16 $y_n \xrightarrow{(o)} y \in X$ и ω' — характеристика для y, т. е. $\omega' \in \Omega'$.

Пусть теперь $\mathbf{0} \leqslant |\omega'| \leqslant |\omega|$, причём $\omega \in \Omega'$. Это означает, что ω — характеристика некоторого $x \in X$. Но тогда по 2.14 $|\omega| = \omega_+ + \omega_-$ — характеристика для $|x| = x_+ + x_-$ (благодаря уже доказанному изоморфизму между X и Ω'), т. е. $|\varphi| \in \Omega'$. Следовательно, $\omega' | \in \Omega'$, тогда $\omega'_+, \omega'_- \in \Omega'$ (так как $\mathbf{0} \leqslant \omega'_+, \omega'_- \leqslant |\omega'|$), и, значит, $\omega' = \omega'_+ - \omega'_- \in \Omega'$.

Нормальность подпространства Ω' доказана.

Так как единица $\mathbf{1} \in \Omega(X)$ является характеристикой для $\mathbf{1} \in X$, то $\mathbf{1} \in \Omega'$, и, следовательно, в $\Omega(X)$ не может существовать ни одного $\omega \neq \mathbf{0}$, который был бы дизъюнктен Ω'. Следовательно, Ω' полно в $\Omega(X)$.

2.19. a) Следствие 1. *Если в K-пространстве Ω, построенном по заданной алгебре Буля $\mathfrak{E}$, база $\mathfrak{E}(\Omega)$ отождествлена с $\mathfrak{E}$, то любой элемент $x \in \Omega$ является своей характеристикой.*

Доказательство. В 1.55 это уже доказано прямым подсчётом для $x \geqslant \mathbf{0}$. Пусть теперь x — произвольный элемент пространства Ω и ω — его характеристика. По изоморфизму между элементами и их характеристиками $\omega = \omega_+ - \omega_-$, где ω_+, ω_- — характеристики элементов x_+, x_- (соответственно). По уже доказанному в 1.55 $\omega_+ = x_+$, $\omega_- = x_-$, а тогда $\omega = x$, ч. и тр. д.

b) Следствие 2. *В любом K-пространстве X с единицей среди характеристик его элементов встречаются всевозможные ограниченные разложения единицы. При этом такие разложения суть характеристики ограниченных элементов пространства X* (3.6 гл. III).

Доказательство. Пусть Ω' — образ пространства X в $\Omega(X)$ при установленном выше изоморфизме. Возьмём такое $\omega \in \Omega(X)$, что $\omega(\lambda') = \mathbf{0}$, $\omega(\lambda'') = \mathbf{1}$. Тогда по определению неравенства в Ω

$$\lambda'\mathbf{1} \leqslant \omega \leqslant \lambda''\mathbf{1}.$$

Но $\lambda'\mathbf{1}$, $\lambda''\mathbf{1} \in \Omega'$ как характеристики элементов $\lambda'\mathbf{1}$ и $\lambda''\mathbf{1}$, а тогда по нормальности подпространства Ω' и $\omega \in \Omega'$, т. е. ω — характеристика некоторого $x \in X$ и при этом

$$\lambda'\mathbf{1} \leqslant x \leqslant \lambda''\mathbf{1}.$$

2.2. Расширенные K-пространства.

Определение. K-пространство называется *расширенным*, если оно есть пространство с единицей и среди характеристик его элементов встречаются все разложения его единицы.

Пространство Ω, построенное в предыдущем параграфе по заданной базе $\mathfrak{E}$, является расширенным. Это следует сразу из 2.19a), так как любой элемент из Ω является своей характеристикой с точ-

ностью до изоморфизма базы пространства $\mathfrak{Q}$ с $\mathfrak{E}$, а среди элементов пространства $\mathfrak{Q}$ встречаются все разложения единицы. Теорема о погружении 2.18 частично оправдывает название «расширенное», которое ниже будет обосновано полностью.

Если K-пространство X — расширенное, то при погружении его в $\mathfrak{Q}(X)$ его образ $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}(X)$. Таким образом, каждое расширенное пространство изоморфно K-пространству, составленному по некоторой полной алгебре Буля из разложений ее единицы. Поэтому при изучении расширенных K-пространств можно ограничиться K-пространствами типа $\mathfrak{Q}$.

Установим некоторые свойства расширенных пространств.

2.21. Если X и Y — расширенные K-пространства и их базы изоморфны между собой, то и они сами тоже изоморфны. Изоморфизм осуществляется, если сопоставить друг с другом элементы, характеристики которых совпадают с точностью до изоморфизма баз $\mathfrak{E}(X)$ и $\mathfrak{E}(Y)$.

Действительно, при таком сопоставлении X изоморфно $\mathfrak{Q}(X)$, $\mathfrak{Q}(X)$ изоморфно $\mathfrak{Q}(Y)$, а $\mathfrak{Q}(Y)$ изоморфно Y.

Отсюда, очевидно, вытекает, что подпространства ограниченных элементов пространств X и Y изоморфны между собой.

2.22. Компонента расширенного K-пространства тоже — расширенное K-пространство.

Доказательство. Пусть X' — компонента расширенного K-пространства X, $e = \mathrm{Pr}_{X'}\mathbf{1}$; e примем за единицу в X'.

Пусть $\omega \in \mathfrak{Q}(e)$, возьмём любое $\omega' \in \mathfrak{Q}(\mathbf{1} - e)$. Тогда $\omega^* = \bar{\mathbf{S}}(\omega, \omega') \in \mathfrak{Q}$, т. е. ω^* является характеристикой некоторого $x \in X$. Но по 2.12 $\omega = e \wedge \omega^*$ будет характеристикой для $\mathrm{Pr}_{X'}x \in X'$ и так как ω — произвольный элемент из $\mathfrak{Q}(e)$, то X' — расширенное K-пространство.

2.23. Полное соединение расширенных K-пространств есть расширенное K-пространство.

Доказательство. Пусть $X = \bar{\mathbf{S}}_\alpha X_\alpha$, где X_α — расширенные K-пространства. Каждое X_α есть некоторое $\mathfrak{Q}_\alpha$, построенное по базе $\mathfrak{E}_\alpha$. Пусть $\mathfrak{E} = \bar{\mathbf{S}}\mathfrak{E}_\alpha$ — полное соединение алгебр $\mathfrak{E}_\alpha$ (см. 1. 3 гл. III). Любое разложение $\omega(\lambda)$ единицы алгебры $\mathfrak{E}$ можно представить в виде $\omega = \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{1}_\alpha \wedge \omega)$, где $\mathbf{1}_\alpha$ — единица алгебры $\mathfrak{E}_\alpha$, и, следовательно, $\omega \in \bar{\mathbf{S}}_\alpha \mathfrak{Q}_\alpha = X$. Таким образом, пространство X — расширенное.

2.24. Теорема (признак расширенности). *Для того чтобы K-пространство было расширенным, необходимо и достаточно, чтобы любое множество его попарно дизъюнктных элементов было ограничено.*

Доказательство. а) Необходимость. Пусть X — расширенное K-пространство; можно считать, что X есть некоторое $\mathfrak{Q}$,

построенное по базе $\mathfrak{E}$. Пусть $\omega_\xi \in \Omega(\xi \in \Xi)$ и $\omega_\xi \mathrm{d} \omega_\eta$ при $\xi \neq \eta$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\omega_\xi \geqslant \boldsymbol{0}$. Положим $e'_\xi = (\omega_\xi)\boldsymbol{1}$. Тогда e'_ξ, как единичный элемент пространства Ω, имеет вид

$$e'_\xi = \begin{pmatrix} e_\xi, & Ce_\xi \\ 1, & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{где } e_\xi \in \mathfrak{E}.$$

При этом e_ξ попарно дизъюнктны. Положим $\omega'_\xi = e_\xi \wedge \omega_\xi$. Тогда $\omega'_\xi \in \Omega(e_\xi)$.

Теперь составим соединение

$$\omega = \bar{\mathbf{S}}\{\bar{\mathbf{S}}\omega'_\xi, \boldsymbol{0}^*\},$$

где $\boldsymbol{0}^*$ — нулевой элемент из $\Omega(\mathbf{1} - \mathbf{S}e_\xi)$. По построению $\omega \in \Omega$ и $\omega \geqslant \boldsymbol{0}$. Покажем, что $\omega_\xi \leqslant \omega$ при всех $\xi \in \Xi$. Для этого достаточно установить, что $\omega(\lambda) \leqslant \omega_\xi(\lambda)$ при $\lambda > 0$.

Так как $Ce'_\xi \mathrm{d} \omega_\xi$, то (1.51a)) след элемента Ce'_ξ, равный Ce_ξ, дизъюнктен с $C\omega_\xi(+0)$, т. е.

$$\omega_\xi(+0) \geqslant Ce_\xi. \tag{1}$$

Тогда, основываясь на неравенстве (1) и монотонности $\omega(\lambda)$, имеем при $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned}
\omega(\lambda) &= \mathbf{S}\left\{\mathop{\mathbf{S}}_{\eta}[\omega'_\eta(\lambda)], \boldsymbol{0}^*(\lambda)\right\} = \\
&= \mathbf{S}\left\{\mathop{\mathbf{S}}_{\eta}[e_\eta \wedge \omega_\eta(\lambda)], \mathbf{1} - \mathop{\mathbf{S}}_{\eta} e_\eta\right\} = \\
&= \mathbf{S}\left\{e_\xi \wedge \omega_\xi(\lambda), \mathop{\mathbf{S}}_{\eta \neq \xi}[e_\eta \wedge \omega_\eta(\lambda)], \mathbf{1} - \mathop{\mathbf{S}}_{\eta} e_\eta\right\} \leqslant \\
&\leqslant \mathbf{S}\left\{e_\xi \wedge \omega_\xi(\lambda), \mathop{\mathbf{S}}_{\eta \neq \xi} e_\eta, \mathbf{1} - \mathop{\mathbf{S}}_{\eta} e_\eta\right\} = \mathbf{S}\left\{e_\xi \wedge \omega_\xi(\lambda), Ce_\xi\right\} = \\
&= \mathbf{S}\left\{e_\xi \wedge \omega_\xi(\lambda), Ce_\xi \wedge \omega_\xi(\lambda)\right\} = \omega_\xi(\lambda).
\end{aligned}$$

b) Достаточность. Прежде всего покажем, что если в K пространстве X выполнено условие теоремы, то X содержит единицу. Действительно, во всяком случае, X может быть разложено на подпространства X_α с единицей (теорема 3.31 гл. III). Пусть $\mathbf{1}_\alpha$ — единица подпространства X_α. Так как все $\mathbf{1}_\alpha$ попарно дизъюнктны, то в X существует $\sup \mathbf{1}_\alpha$. А так как система компонент X_α полна в X, то элемент $\mathbf{1} = \sup \mathbf{1}_\alpha$ обладает свойством единицы в X.

Отобразим X в $\Omega(X)$ и покажем, что его образ исчерпывает все $\Omega(X)$.

Пусть ω — любое разложение $\mathbf{1}$. Положим

$$e_n = \omega(n) - \omega(n-1) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Тогда e_n попарно дизъюнктны и $\mathbf{S}e_n = \mathbf{1}$. Обозначим через X_n компоненту пространства X, порождённую элементом e_n. Имеем $\omega_n = e_n \wedge \omega \in \Omega(e_n)$ и при этом $\omega_n(\lambda) = \boldsymbol{0}$ при $\lambda < n - 1$, $\omega_n(\lambda) = e_n$ при $\lambda > n$. Следовательно (2.19 b)), ω есть характеристика некото-

рого $x_n \in X_n$, вычисленная в X_n (где единицей служит e_n). Но так как x_n попарно дизъюнктны, то в X существует элемент $x = \mathbf{S} x_n$. При этом очевидно, что характеристика этого элемента x равна $\overline{\mathbf{S}}\omega_n = \omega$, т. е. $\omega \in \Omega'$ *).

Теорема полностью доказана.

Из доказанной теоремы сразу ясно, что пространства S и s — расширенные, так как они, очевидно, удовлетворяют условию этой теоремы.

2.25. Лемма. *Пусть X — расширенное K-пространство, компоненты X_α образуют его разложение, $x_n \in X$, $x_n = \mathbf{S}_\alpha x_n^\alpha$, где $x_n^\alpha \in X_\alpha$, и $x_n^\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{(o)} x^\alpha$ при каждом α. Тогда*

$$x_n \xrightarrow{(o)} x = \mathbf{S} x^\alpha.$$

Доказательство. При каждом α последовательность $\{x_n^\alpha\}$ ограничена в X_α и $y_\alpha = \sup |x_n^\alpha|$ попарно дизъюнктны. Тогда, по теореме 2.24, существует $y = \mathbf{S} y_\alpha \in X$. При этом $|x_n| \leqslant y$ при всех n. По той же теореме существует $x = \mathbf{S} x^\alpha$.

По признаку сходимости (3.53, гл. III) для каждого α существуют такие $e_{n,\alpha}^\varepsilon \nearrow e_\alpha$ ($e_\alpha = \mathrm{Pr}_{X_\alpha} \mathbf{1}$), что $(e_{n,\alpha}^\varepsilon)\ |x_m^\alpha - x^\alpha| \leqslant \varepsilon \mathbf{1}$ (при $m \geqslant n$). При этом

$$(e_{n,\alpha}^\varepsilon)\ |x_m^\alpha - x^\alpha| = (e_{n,\alpha}^\varepsilon)\ |x_m - x|.$$

Если положить $e_n^\varepsilon = \mathbf{S}_\alpha e_{n,\alpha}^\varepsilon$, то (2.21 g) гл. III)

$$(e_n^\varepsilon)\ |x_m - x| = \mathbf{S}_\alpha \{(e_{n,\alpha}^\varepsilon)\ |x_m - x|\} \leqslant \varepsilon \mathbf{1} \qquad (m \geqslant n).$$

При этом

$$\sup_n e_n^\varepsilon = \sup_{n,\alpha} e_{n,\alpha}^\varepsilon = \sup_\alpha e_\alpha = \mathbf{1},$$

а тогда, по тому же признаку сходимости, $x_n \xrightarrow{(o)} x$, ч. и тр. д.

2.26. В расширенных K-пространствах в условиях признаков (o)-сходимости 3.53 и 4.18 гл. III можно опустить требование ограниченности последовательности $\{x_n\}$. Ограниченность будет следовать из основного условия признаков.

В 3.53 достаточно рассмотреть случай, когда устанавливается сходимость к нулю.

Пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ существуют единичные элементы $e_n^\varepsilon \nearrow \mathbf{1}$, для которых

$$(e_n^\varepsilon)\ |x_m| \leqslant \varepsilon \mathbf{1} \qquad (\text{при } m \geqslant n)$$

---

*) Действительно, $(\omega_n(\lambda))\, x_n \leqslant \lambda \omega_n(\lambda)$ при всех n. Беря соединения по n, получаем (2.21 g) гл. III):

$$(\omega(\lambda))\, x = \mathbf{S}\{(\omega_n(\lambda))\, x\} = \mathbf{S}\{(\omega_n(\lambda))\, x_n\} \leqslant \lambda \mathbf{S}\,[\omega_n(\lambda)] = \lambda \omega(\lambda).$$

Положим $e_n = e_n^* - e_{n-1}^*$ $(n > 1)$, $e_1 = e_1^*$. Тогда $\mathbf{1} = \mathbf{S} e_n$. При любом n и $m \geqslant n$

$$(e_n) \mid x_m \mid \leqslant \varepsilon e_n.$$

Отсюда следует, так как элементов $x_1, \ldots, x_{n-1}$ — конечное число, что

$$y_n = \sup_k (e_n) \mid x_k \mid < +\infty.$$

По теореме 2.24 существует $y = \sup y_n < +\infty$. Ясно, что

$$\mid x_k \mid = \mathop{\mathbf{S}}_n \{ (e_n) \mid x_k \mid \} \leqslant y,$$

т. е. x_k ограничены в совокупности.

Так как теорема 4.18 гл. III сводится к теореме 3.53 той же главы без использования ограниченности, то наше утверждение верно и для 4.18.

2.3. О неограниченных множествах в расширенных пространствах. Установим некоторые вспомогательные предложения, которыми мы воспользуемся в дальнейшем.

2.31. Пусть X — расширенное K-пространство, $x_\alpha \in X$ $(\alpha \in A)$, и при этом $\sup x_\alpha = +\infty$. Тогда существует единичный элемент $e_0 > \mathbf{0}$ $(e_0 \in \mathfrak{E}(X))$, для которого при любом k

$$\sup_\alpha [(e_0) x_\alpha \wedge k e_0] = k e_0. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $\omega_\alpha(\lambda)$ — характеристика элемента x_α, а $\omega(\lambda) = \inf \omega_\alpha(\lambda)$. Функция $\omega(\lambda)$, очевидно, монотонна и $\inf \omega(\lambda) = \mathbf{0}$. Если бы $\sup \omega(\lambda) = \mathbf{1}$, то $\omega(\lambda)$ было бы характеристикой некоторого $x \in X$ и при этом выполнялось бы неравенство $x_\alpha \leqslant x$ при всех α, что противоречит неограниченности множества $\{x_\alpha\}$. Итак, $\sup \omega(\lambda) = e < \mathbf{1}$. Положим $e_0 = \mathbf{1} - e$ и покажем, что e_0 — искомый единичный элемент.

Положим

$$x'_\alpha = (e_0) x_\alpha.$$

Характеристика элемента x'_α в подпространстве X_{e_0}, порождённом единичным элементом e_0 (если e_0 принять за единицу в X_{e_0}), имеет вид $\omega'_\alpha = e_0 \wedge \omega_\alpha$, а характеристику ω' для $\sup_\alpha (x'_\alpha \wedge k e_0)$ легко определить через характеристики элементов x'_α и $k e_0$. Именно, при $\lambda < k$,

$$\omega'(\lambda) = \inf_\alpha [\omega'_\alpha(\lambda) \vee e_\lambda(k e_0)] = \inf_\alpha [\omega'_\alpha(\lambda) \vee \mathbf{0}] = \inf_\alpha [e_0 \wedge \omega_\alpha(\lambda)] =$$
$$= e_0 \wedge \inf_\alpha \omega_\alpha(\lambda) = e_0 \wedge \omega(\lambda) \leqslant e_0 \wedge (\mathbf{1} - e_0) = \mathbf{0},$$

т. е. $\omega'(\lambda) = \mathbf{0}$. При $\lambda > k$ аналогично

$$\omega'(\lambda) = \inf_\alpha [\omega'_\alpha(\lambda) \vee e_0] = e_0.$$

Следовательно, $\omega'(\lambda)$ совпадает с характеристикой для $k e_0$, чем и доказывается равенство (2).

Замечание. Если все $x_\alpha \geqslant \mathbf{0}$, то из (2) вытекает более простое равенство

$$\sup_\alpha (x_\alpha \wedge ke_0) = ke_0.$$

Действительно, $(e_0)\, x_\alpha \leqslant x_\alpha$; поэтому

$$ke_0 = \sup_\alpha [(e_0)\, x_\alpha \wedge ke_0] \leqslant \sup_\alpha (x_\alpha \wedge ke_0) \leqslant ke_0.$$

В K-пространстве измеримых функций S предложение 2.31 означает тривиальный факт, а именно: если множество функций $x_\alpha(t)$ не имеет конечной почти всюду верхней границы, то $\sup\limits_\alpha x_\alpha(t) = +\infty$ на множестве положительной меры, которое играет роль e_0.

2.32. Пусть X и $x_\alpha \in X$ удовлетворяют всем условиям предложения 2.31, а e_0 — единичный элемент, для которого выполнено (2) при любом k. Пусть y — любой элемент из X. Тогда при любом k

$$\sup_\alpha [(e_0)(x_\alpha - y) \wedge ke_0] = ke_0.$$

Доказательство. Допустим, что при некотором k_0

$$\sup_\alpha [(e_0)(x_\alpha - y) \wedge k_0 e_0] \leqslant k_0 e_0 - z, \tag{3}$$

где $z > \mathbf{0}$. При этом можно считать, что $z \in X_{e_0}$, так как в противном случае, z можно было бы заменить на $(e_0)\, z$. По теореме 3.52 гл. III найдутся $e' > \mathbf{0}$ и $\gamma > 0$ такие, что $\gamma e' \leqslant z$. Тогда $e' \in X_{e_0}$, следовательно, $e' \leqslant e_0$.

Так как для характеристики e_λ^y имеем $\sup(e' \wedge e_\lambda^y) = e'$, то при некотором $\lambda > 0$ $e'' = e' \wedge e_\lambda^y > \mathbf{0}$. Применяя проектор (e'') к обеим частям неравенства (3) и пользуясь известными нам свойствами проекторов, получаем:

$$\sup_\alpha \{[(e'')\, x_\alpha - (e'')\, y] \wedge k_0 e''\} \leqslant k_0 e'' - (e'')\, z.$$

Отсюда, так как $(e'')\, y \leqslant \lambda e''$ (по определению характеристики) и $\gamma e'' \leqslant (e'')\, z$, получаем:

$$\sup_\alpha \{[(e'')\, x_\alpha - \lambda e''] \wedge k_0 e''\} \leqslant k_0 e'' - \gamma e'',$$

или, вынося $-\lambda e''$ из-под знака sup и $\wedge$:

$$\sup_\alpha \{(e'')\, x_\alpha \wedge (k_0 + \lambda)\, e''\} - \lambda e'' \leqslant (k_0 - \gamma)\, e''.$$

Но (2) предположено выполненным при любом k. А тогда

$$\sup_\alpha \{(e'')\, x_\alpha \wedge (k_0 + \lambda)\, e''\} = (k_0 + \lambda)\, e''$$

и из предыдущего неравенства получаем: $k_0 e'' \leqslant (k_0 - \gamma)\, e''$, что при $e'' > \mathbf{0}$ невозможно.

Замечание. Если $y \leqslant x_\alpha$ при всех α, то в формулировке предложения 2.32 можно отбросить проектор (e_0), т. е. можно утверждать, что

$$\sup_\alpha [(x_\alpha - y) \wedge ke_0] = ke_0.$$

Проверяется так же, как замечание к 2.31.

2.33. Пусть X и $x_\alpha \in X$ удовлетворяют тем же условиям, что и в 2.31. Тогда существует единичный элемент $e_0 > \mathbf{0}$, для которого

$$\sup_\alpha [(e_0)(x_\alpha - x_\beta) \wedge ke_0] = ke_0 \tag{4}$$

при любых $\beta \in A$ и k.

Доказательство. Если e_0 — элемент, существование которого доказано в 2.31, то на основании 2.32 при каждом $y = x_\beta$ он же удовлетворяет условию (4).

2.34. Если X — расширенное K-пространство и $x_n \nearrow +\infty$ $(x_n \in X)$, то существует $e_0 \in \mathfrak{E}(X)$, $e_0 > \mathbf{0}$, для которого

$$\lim_{n\to\infty} [(x_n - x_m) \wedge ke_0] = ke_0$$

при любых $m = 1, 2, \ldots$ и k.

Доказательство. В 2.33 доказано существование $e_0 > \mathbf{0}$, для которого

$$\sup_n [(e_0)(x_n - x_m) \wedge ke_0] = ke_0$$

при любых m и k. Так как x_n образуют монотонную последовательность, то в левой части равенства $\sup\limits_n$ можно заменить на $\sup\limits_{n \geqslant m}$; но тогда $x_n - x_m \geqslant \mathbf{0}$ и оператор (e_0), согласно замечанию к 2.32, можно отбросить. Таким образом, мы получим:

$$\sup_{n \geqslant m} [(x_n - x_m) \wedge ke_0] = ke_0,$$

откуда сразу следует наше утверждение.

2.4. Расширение K-пространств.

Определение. Пусть X и Y — два K-пространства. Y называется *расширением* пространства X, если X изоморфно нормальному подпространству $Y' \subset Y$, полному в Y.

2.41. Если X — K-пространство с единицей, а Y — его расширение, то в Y существует бесконечное множество элементов, обладающих свойством единицы. При этом, независимо от выбора единицы в Y, базы пространств X и Y изоморфны между собой.

Доказательство. По определению расширения, X изоморфно нормальному подпространству $Y' \subset Y$, полному в Y. Пусть $y = \varphi(x)$ — этот изоморфизм. Ясно, что $\mathbf{1}_Y = \varphi(\mathbf{1}_X)$ обладает свойством единицы в Y'; таким образом, компонента пространства Y', порождённая элементом $\mathbf{1}_Y$, совпадает с Y', а тогда, вследствие полноты $Y' \mathrm{B} Y$, $\mathbf{1}_Y$ — единица в Y.

Далее независимо от выбора единицы в Y булевские алгебры компонент пространств X и Y' изоморфны между собой (2.12 гл. III). Каждая компонента пространства Y' порождает компоненту пространства Y, причём это соответствие между компонентами пространств Y' и Y — изоморфизм. Но множество компонент K-пространства с единицей изоморфно его базе, и, таким образом, изоморфизм баз пространств X и Y установлен.

2.42. Каждое K-пространство X обладает расширением, являющимся расширенным K-пространством.

Доказательство. Для случая, когда X есть K-пространство с единицей, это доказано в теореме о погружении 2.18. Пусть X — произвольное K-пространство. Разложим его на подпространства X_α с единицей. Для каждого X_α построим расширенное пространство $\Omega_\alpha = \Omega(X_\alpha)$. Их полное соединение $\Omega = \bar{\mathbf{S}}\Omega_\alpha$, по 2.23, тоже — расширенное K-пространство. Докажем, что оно является расширением пространства X.

Каждый элемент $x \in X$ имеет вид $x = \mathbf{S}x_\alpha$, где $x_\alpha \in X_\alpha$. Пусть ω_α — характеристики для x_α в X_α; тогда элементу x сопоставим разложение $\omega = \bar{\mathbf{S}}\omega_\alpha \in \Omega$. Ясно, что это соответствие устанавливает изоморфизм между X и некоторым множеством $\Omega' \subset \Omega$. Проверим, что Ω' — нормальное подпространство пространства Ω. Для этого достаточно проверить, что Ω' удовлетворяет условию нормальности 1.25 гл. II.

Пусть $\omega \in \Omega$, $\omega' \in \Omega'$ и $|\omega| \leqslant |\omega'|$. Тогда $\omega = \bar{\mathbf{S}}\omega_\alpha$, $\omega' = \bar{\mathbf{S}}\omega'_\alpha$ (ω_α, $\omega'_\alpha \in \Omega_\alpha$) и при этом $|\omega_\alpha| \leqslant |\omega'_\alpha|$. То, что $\omega' \in \Omega'$, означает, что каждое ω'_α является характеристикой некоторого $x'_\alpha \in X_\alpha$, причём $\mathbf{S}x'_\alpha \in X$. Но образ X_α в Ω_α — нормальное подпространство пространства Ω_α, поэтому ω_α входит в этот образ, т. е. ω_α — характеристика некоторого $x_\alpha \in X_\alpha$. При этом $|x_\alpha| \leqslant |x'_\alpha|$; а тогда существует $x = \mathbf{S}x_\alpha \in X$ и ω — его образ в Ω, т. е. $\omega \in \Omega'$.

Проверим полноту Ω' в Ω. Пусть $\omega \in \Omega$ и $\omega \, \mathrm{d} \, \Omega'$. Но $\omega = \bar{\mathbf{S}}\omega_\alpha$; следовательно, каждое ω_α дизъюнктно образу пространства X_α в Ω_α и вследствие полноты этого образа $\omega_\alpha = \boldsymbol{0}$. Отсюда и $\omega = \boldsymbol{0}$.

2.43. Для любого K-пространства X существует такое расширенное K-пространство, которое является расширением любого расширения пространства X (в частности, самого X).

Доказательство. Если X — K-пространство с единицей, то требуемым свойством обладает $\Omega(X)$. Действительно, если Y — любое расширение пространства X, то по 2.41 базы пространств X и Y изоморфны, а тогда $\Omega(X)$ является расширением для Y по теореме о погружении (2.18).

Если X — произвольное K-пространство, то требуемым свойством обладает K-пространство Ω, построенное при доказательстве предложения 2.42. Действительно, пусть Y — расширение пространства X. Для простоты отождествим между собой элементы пространств X и Y, соответствующие друг другу при изоморфизме между X и $Y' \subset Y$. Обозначим через Y_α наименьшую компоненту пространства Y, содержащую X_α. Компоненты Y_α образуют разложение пространства Y, а так как базы X_α и Y_α изоморфны, то $\Omega(Y_\alpha) = \Omega_\alpha$. Следовательно, по построению в 2.42 Ω — расширение пространства Y.

2.44. Если два расширенных K-пространства являются расширениями одного и того же K-пространства X, то они изоморфны между собой.

Доказательство. Достаточно доказать, что всякое расширение Y K-пространства X, являющееся расширенным пространством, изоморфно тому расширению пространства X, существование которого доказано в 2.43. Обозначим последнее через Ω. По 2.43 Ω — расширение пространства Y, следовательно, по 2.41 базы у Y и Ω изоморфны между собой. Тогда изоморфизм пространств Y и Ω вытекает из 2.21.

Определение. Расширение K-пространства X, являющееся расширенным пространством, называется *максимальным расширением* пространства X.

Доказанное в 2.43 и 2.44 может быть теперь сформулировано в виде следующей теоремы:

2.45. Теорема о максимальном расширении. *Для любого K-пространства X существует его максимальное расширение, определяемое единственным образом с точностью до изоморфизма. Это максимальное расширение является расширением любого расширения пространства X.*

Если X содержит единицу, то его максимальным расширением является K-пространство $\Omega(X)$, составленное из разложений единицы. При этом каждому элементу x в $\Omega(X)$ сопоставляется его характеристика.

§ 3. Непрерывные функции в K-пространствах

3.1. Определение и (o)-непрерывность функций.

3.11. В § 1 мы показали, что в пространстве Ω разложений единицы алгебры Буля $\mathfrak{E}$ можно считать определённой любую функцию $F(x, y, \ldots)$, если $F(\lambda, \mu, \ldots)$ — вещественная непрерывная функция. По теореме 2.45 любое K-пространство X изоморфно подпространству Ω' некоторого Ω. Пусть соответствие $x \longleftrightarrow \omega = \bar{x}$ $(x \in X,\ \omega \in \Omega')$ осуществляет этот изоморфизм. Функцию $F(x, y, \ldots)$ естественно считать определённой и в X, если положить $F(x, y, \ldots)$ равным тому элементу $x' \in X$, для которого

$$\bar{x}' = F(\bar{x}, y, \ldots).$$

Однако, если образ пространства X не исчерпывает всё Ω, то функция $F(x, y, \ldots)$ при этом может быть определена не для всех $x, y, \ldots$. Именно, $F(x, y, \ldots)$ не будет иметь смысла в X, если $F(\bar{x}, \bar{y}, \ldots) \in \Omega \setminus \Omega'$. Если же X — расширенное K-пространство, то наше определение функции $F(x, y, \ldots)$ имеет смысл для любых значений аргументов.

Теорема 1.43 о сохранении соотношений в Ω остаётся верной и в X, если дополнительно предположить, что рассматриваемые функции имеют смысл в X.

Погружение X в Ω вообще возможно осуществить разными способами; способ погружения зависит от способа разложения про-

странства X на подпространства с единицей и от выбора единицы в каждом из них. Каждому способу соответствует своё определение функции $F(x, y, \ldots)$. В частности, для K-пространства с единицей определение функции зависит от выбора единицы, так как от выбора единицы зависит характеристика любого элемента *).

Например, если $\mathbf{1}$ — единица в X, то элемент $\mathbf{1}' = 2\mathbf{1}$ имеет характеристикой элементарное разложение $\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\2\end{pmatrix}$. Следовательно, так как $F\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{1}\\F(2)\end{pmatrix}$, то $F(\mathbf{1}') = F(2)\,\mathbf{1}$. Если же за единицу принять $\mathbf{1}'$, то его характеристикой будет $\begin{pmatrix}\mathbf{1}'\\1\end{pmatrix}$, а отсюда $F(\mathbf{1}') = F(1)\,\mathbf{1}' = 2F(1)\,\mathbf{1}$.

Ниже мы увидим, что определение однородных функций первой степени не зависит от выбора единицы.

Для простоты дальнейшее изложение будем вести для функций двух аргументов.

3.12. Пусть $F(\lambda, \mu)$ — вещественная непрерывная функция, а

$$M_{\alpha,\beta} = \max_{|\lambda| \leqslant \alpha,\ |\mu| \leqslant \beta} |F(\lambda, \mu)|.$$

Тогда если $|\omega| \leqslant \alpha\mathbf{1}$, $|\zeta| \leqslant \beta\mathbf{1}$ $(\omega, \zeta \in \Omega)$, то

$$|F(\omega, \zeta)| \leqslant M_{\alpha,\beta}\mathbf{1}.$$

Доказательство. Мы знаем, что при проверке неравенств можно пользоваться теоремой о сохранении соотношений в Ω (1.44). А тогда наше предложение — прямое следствие этой теоремы.

3.13. Если X — K-пространство с единицей, то функция $F(x, y)$ имеет смысл для любых ограниченных элементов. В частности, если $|x| \leqslant \alpha\mathbf{1}$, $|y| \leqslant \beta\mathbf{1}$, то

$$|F(x, y)| \leqslant M_{\alpha,\beta}\mathbf{1}.$$

Доказательство. Из 3.12 следует, что если x, y — ограниченные элементы пространства X (а тогда $\bar{x}, \bar{y}$ — ограниченные элементы пространства Ω), то $F(\bar{x}, \bar{y})$ — тоже ограниченный элемент в Ω. Но это означает, что $F(\bar{x}, \bar{y})$ — разложение, отличное от $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ только на конечном промежутке **), т. е. ограниченное разложение. По 2.19b) такое разложение встречается среди характеристик элементов пространства X, следовательно, $F(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega'$. А тогда $F(x, y)$ имеет смысл. Неравенство $|F(x, y)| \leqslant M_{\alpha,\beta}\mathbf{1}$ уже доказано в 3.12.

---

*) Мы всё время подразумеваем, что погружение K-пространства X с единицей в $\Omega(X)$ осуществлено сопоставлением элементам их характеристик.

**) Если $|\omega| \leqslant M\mathbf{1}$, то $\omega(\lambda) = \mathbf{0}$ при $\lambda < -M$ и $\omega(\lambda) = \mathbf{1}$ при $\lambda > M$.

3.14. Пусть X — K-пространство с единицей, $e \in \mathfrak{E}(X)$, X_e — компонента, порождённая элементом e. Обозначим через F_e функцию, определяемую вещественной функцией $F(\lambda, \mu)$ в X_e как в самостоятельном пространстве (с e в качестве единицы). Тогда если x, y таковы, что $F(x, y)$ принадлежит X, то

$$F_e[(e)x, (e)y] = (e)[F(x, y)] \text{ *)}.$$

Доказательство. Функцию F_e можно рассматривать на всём $\Omega(e)$; в частности, в $\Omega(e)$ имеет смысл $F_e[\overline{(e)x}, \overline{(e)y}]$ (как выше $\bar{x}$ обозначает элемент Ω, соответствующий $x \in X$). Нужно показать, что характеристика элемента $(e)[F(x, y)]$ в X_e совпадает с $F_e[\overline{(e)x}, \overline{(e)y}]$. Но по 2.12

$$\overline{(e)x} = e \wedge \bar{x}, \quad \overline{(e)y} = e \wedge \bar{y}, \quad \overline{(e)[F(x, y)]} = e \wedge F(\bar{x}, \bar{y}),$$

а тогда требуемое равенство характеристик содержится в 1.42.

Следствие. Если $\mathbf{1} = \mathsf{S}_k e_k$, то

$$F(x, y) = \mathsf{S}_k F_{e_k}[(e_k)x, (e_k)y].$$

Вытекает сразу из доказанного предложения так как $x = \mathsf{S}\{(e_k)x\}$ для любого $x \in X$.

3.15. Теорема об (o)-непрерывности функций. *Если X — расширенное K-пространство, а $F(x, y)$ — непрерывная функция, определённая в X, то из $x_n \xrightarrow{(o)} x$, $y_n \xrightarrow{(o)} y$ следует, что*

$$F(x_n, y_n) \xrightarrow{(o)} F(x, y).$$

Доказательство. Последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ограничены: $|x_n|$, $|y_n| \leqslant z \in X$. Положим $e_k = e_k^z - e_{k-1}^z$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогда $(e_k)z \leqslant ke_k$ и, тем более,

$$|(e_k)x_n| \leqslant ke_k, \quad |(e_k)y_n| \leqslant ke_k.$$

В таком случае, по 3.13,

$$F_{e_k}[(e_k)x_n, (e_k)y_n] \leqslant M_{k,k}e_k. \tag{5}$$

По $\varepsilon > 0$ и $k = 1, 2, \ldots$ найдём модуль непрерывности $\delta_\varepsilon^{(k)}$ функции $F(\lambda, \mu)$ в квадрате $-k \leqslant \lambda, \mu \leqslant k$. Затем на основании признака сходимости 3.53 гл. III найдём единичные элементы $e_n^* \nearrow e_k$, зависящие от ε и k, такие, что при $m \geqslant n$

$$|(e_n^*)(x_m - x)| \leqslant \delta_\varepsilon^{(k)} e_n^*, \quad |(e_n^*)(y_m - y)| \leqslant \delta_\varepsilon^{(k)} e_n^*.$$

---

*) Без индекса e эта формула не верна, а именно, имеет место равенство

$$F[(e)x, (e)y] = (e)[F(x, y)] + F(0, 0)(\mathbf{1} - e).$$

Тогда, по определению модуля непрерывности и по теореме о сохранении соотношений, применённой к $X_{e_n^*}$:

$$|F_{e_n^*}[(e_n^*)x_m, (e_n^*)y_m] - F_{e_n^*}[(e_n^*)x, (e_n^*)y]| \leqslant \varepsilon e_n^*.$$

Иначе, используя 3.14 для $X = X_{e_k}$ и $e = e_n^*$, это неравенство можно представить так:

$$(e_n^*)|F_{e_k}[(e_k)x_m, (e_k)y_m] - F_{e_k}[(e_k)x, (e_k)y]| \leqslant \varepsilon e_n^*$$

$(m \geqslant n)$. Последнее вместе с (5) означает, что для последовательности значений функции $\{F_{e_k}[(e_k)x_n, (e_k)y_n]\}$ выполнены условия упомянутого признака (o)-сходимости, т. е.

$$F_{e_k}[(e_k)x_n, (e_k)y_n] \xrightarrow{(o)} F_{e_k}[(e_k)x, (e_k)y],$$

или

$$(e_k)F(x_n, y_n) \xrightarrow{(o)} (e_k)F(x, y).$$

Но $\mathfrak{S}e_k = \mathbf{1}$ (так как $z \geqslant \mathbf{0}$, то можно считать $e_0 = \mathbf{0}$). А тогда заключение теоремы следует сразу из леммы 2.25.

3.16. Замечание. Если X — не расширенное пространство, то теорема 3.15 остаётся верной при дополнительном предположении, что $\{F(x_n, y_n)\}$ ограничены в совокупности в X. Тогда $F(x, y)$ имеет смысл в X и

$$F(x_n, y_n) \xrightarrow{(o)} F(x, y) \text{ в } X.$$

Действительно, пусть Ω — максимальное расширение пространства X, а Ω' — образ X в Ω. Во всяком случае, по доказанной теореме, $F(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \xrightarrow{(o)} F(\bar{x}, \bar{y})$. Но по 1.27d) гл. II $F(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega'$ и (o)-сходимость $F(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ к $F(\bar{x}, \bar{y})$ имеет место и в Ω', т. е. $F(x_n, y_n) \xrightarrow{(o)} F(x, y)$ в X.

3.2. Монотонные функции. Пусть $F(\lambda)$ — строго возрастающая непрерывная вещественная функция от вещественного аргумента и

$$\lim_{\lambda \to -\infty} F(\lambda) = A, \quad \lim_{\lambda \to +\infty} F(\lambda) = B.$$

Если A и B конечны, то соответствующая функция $F(x)$ имеет смысл для любого $x \in X$ даже и в не расширенном K-пространстве с единицей, так как по теореме о сохранении соотношений 1.43 $A\mathbf{1} \leqslant F(x) \leqslant B\mathbf{1}$ при всех x.

Точнее, если A и B конечны, то для любого $x \in X$

$$A\mathbf{1} < F(x) < B\mathbf{1}.$$

Действительно, подберём единичные элементы $e_n \nearrow \mathbf{1}$ так, чтобы

$$(e_n)|x| \leqslant ne_n\ ^{*)}.$$

---

*) За e_n можно взять значение $e_n^{|x|}$ характеристики $|x|$,

Тогда, по следствию из 3.14,

$$F(x) = \mathbf{S} F_{e_n}[(e_n)x] \leqslant \mathbf{S}[F(n)e_n] < B\mathbf{1}.$$

Аналогично устанавливается, что $F(x) > A\mathbf{1}$.

Так как из $\lambda \leqslant \mu$ следует $F(\lambda) \leqslant F(\mu)$, то по той же теореме 1.43 из $x \leqslant y$ будет следовать $F(x) \leqslant F(y)$, т. е. монотонность сохраняется и для $F(x)$.

Обозначим через $F^{-1}(\lambda)$ обратную функцию; она имеет смысл на интервале (A, B) и также непрерывна и возрастает. Пусть $A < A_1 < B_1 < B$. Положим $a_1 = F^{-1}(A_1)$, $b = F^{-1}(B_1)$ и введём функцию

$$\Phi^{(A_1, B_1)}(\lambda) = \begin{cases} a_1 & \text{при } -\infty < \lambda < A_1, \\ F^{-1}(\lambda) & \text{при } A_1 \leqslant \lambda \leqslant B_1, \\ b_1 & \text{при } B_1 < \lambda < +\infty. \end{cases}$$

Тогда для $a_1 \leqslant \lambda \leqslant b_1$ имеем:

$$\Phi^{(A_1, B_1)}[F(\lambda)] = \lambda.$$

Отсюда следует, что для $a_1\mathbf{1} \leqslant x \leqslant b_1\mathbf{1}$

$$\Phi^{(A_1, B_1)}[F(x)] = x,$$

т. е. функция $\Phi^{(A_1, B_1)}$ играет роль обратной по отношению к F, но не во всём пространстве X. Аналогично для $A_1\mathbf{1} \leqslant x \leqslant B_1\mathbf{1}$

$$F[\Phi^{(A_1, B_1)}(x)] = x.$$

Далее будем для простоты считать X расширенным.

3.21. Если $x = \sup x_\alpha$, то

$$F(x) = \sup F(x_\alpha).$$

Доказательство. Предположим сначала, что $|x_\alpha| \leqslant M\mathbf{1}$ при всех α Тогда $|x| \leqslant M\mathbf{1}$,

$$F(-M)\mathbf{1} \leqslant F(x_\alpha) \leqslant F(M)\mathbf{1},$$
$$F(-M)\mathbf{1} \leqslant F(x) \leqslant F(M)\mathbf{1}.$$

Положим $y = \sup F(x_\alpha)$. Вследствие монотонности нашей функции $y \leqslant F(x)$. Установим обратное неравенство.

Имеем $F(x_\alpha) \leqslant y$. Пусть $A_1 = F(-M)$, $B_1 = F(M)$. Тогда при всех α

$$x_\alpha = \Phi^{(A_1, B_1)}[F(x_\alpha)] \leqslant \Phi^{(A_1, B_1)}(y).$$

Следовательно,

$$x \leqslant \Phi^{(A_1, B_1)}(y),$$

а отсюда

$$F(x) \leqslant F[\Phi^{(A_1, B_1)}(y)] = y.$$

Итак, $y = F(x)$.

Пусть теперь $\{x_\alpha\}$ — произвольное ограниченное сверху и снизу множество, $x = \sup x_\alpha \cdot z = \inf x_\alpha$. Существуют попарно дизъюнктные $e_n \in \mathfrak{E}(X)$

такие, что $\mathbf{S}e_n = \mathbf{1}$ и $(e_n)x$, $(e_n)z$ — ограниченные элементы. Применяя уже доказанный результат к каждому подпространству X_{e_n}, мы получим:

$$F_{e_n}[(e_n)x] = \sup_\alpha F_{e_n}[(e_n)x_\alpha].$$

Беря соединения, имеем (см. следствие из 3.14, а также 2.25 гл. III):

$$\sup_\alpha F(x_\alpha) = \sup_\alpha \mathbf{S}F_{e_n}[(e_n)x_\alpha] = \mathbf{S}\sup_\sigma F_{e_n}[(e_n)x_\alpha] = \mathbf{S}F_{e_n}[(e_n)x] = F(x).$$

В частности,

$$F(x \vee y) = F(x) \vee F(y).$$

Наконец, если множество $\{x_\alpha\}$ не ограничено снизу, то, обозначая через x^* один из x_σ, имеем:

$$F(x) = F[\sup_\alpha (x_\alpha \vee x^*)] = \sup_\alpha F(x_\alpha \vee x^*) = \sup_\alpha [F(x_\alpha) \vee F(x^*)] = \sup_\sigma F(x_\sigma),$$

ч. и тр. д.

Аналогично доказывается, что

$$F(\inf x_\alpha) = \inf F(x_\alpha).$$

3.22. Если x_n ограничены в совокупности и

$$y_n = F(x_n) \overset{(o)}{\to} F(x),$$

то и $x_n \overset{(o)}{\to} x$. (Аналог теоремы из классического анализа о непрерывности функции, обратной к монотонной и непрерывной).

Доказательство. Если x_n образуют монотонную последовательность, например $x_n \searrow x^*$, то по непрерывности и монотонности функции $F(x_n) \searrow F(x^*)$, т. е. $F(x^*) = F(x)$, а отсюда, по теореме о сохранении соотношений, $x^* = x$.

Для любых x_n полагаем:

$$z_n = \sup(x_n, x_{n+1}, \ldots), \quad u_n = \inf(x_n, x_{n+1}), \ldots);$$

тогда на основании 3.21

$$F(z_n) = \sup(y_n, y_{n+1}, \ldots), \quad F(u_n) = \inf(y_n, y_{n+1}, \ldots).$$

Следовательно,

$$F(x) = \lim F(z_n) = \lim F(u_n).$$

Но так как z_n и u_n образуют монотонные последовательности, то, по уже доказанному, $z_n \xrightarrow{(o)} x$ и $u_n \xrightarrow{(o)} x$, т. е. $x_n \xrightarrow{(o)} x$, ч. и тр. д.

Укажем ещё одно вспомогательное предложение, в котором условие, что X расширенное, существенно.

3.23. Если $\sup x_\alpha = +\infty$, то существует единичный элемент $e_0 > \mathbf{0}$, для которого

$$\sup_\alpha \left[(e_0) F\left(\frac{1}{m} x_\alpha\right)\right] = Be_0 \tag{6}$$

при любом $m = 1, 2, \ldots$ $(B = \lim_{\lambda \to +\infty} F(\lambda) < +\infty)$.

Доказательство. По 2.31 существует единичный элемент $e_0 > 0$, для которого при любом k

$$\sup_\alpha [(e_0) x_\alpha \wedge ke_0] = ke_0.$$

Умножая на $\frac{1}{m}$ и обозначая $\frac{k}{m}$ снова через k, получим:

$$\sup_\alpha \left[(e_0)\left(\frac{1}{m} x_\alpha\right) \wedge ke_0\right] = ke_0.$$

Вычислим от обеих частей равенства функцию F_{e_0}, применяя при этом 3.21 (и 3.14):

$$F_{e_0}(ke_0) = F(k) e_0;$$

$$F_{e_0}\left\{\sup_\alpha \left[(e_0)\left(\frac{1}{m} x_\alpha\right) \wedge ke_0\right]\right\} = \sup_\alpha \left\{F_{e_0}\left[(e_0)\left(\frac{1}{m} x_\alpha\right)\right] \wedge F_{e_0}(ke_0)\right\} =$$

$$= \sup_\alpha \left\{(e_0)\left[F\left(\frac{1}{m} x_\alpha\right)\right] \wedge F(k) e_0\right\}.$$

Таким образом,

$$\sup_\alpha \left\{(e_0)\left[F\left(\frac{1}{m} x_\alpha\right)\right] \wedge F(k) e_0\right\} = F(k) e_0,$$

откуда

$$\sup_\alpha \left\{(e_0)\left[F\left(\frac{1}{m} x_\alpha\right)\right]\right\} \geqslant F(k) e_0.$$

Так как это верно при любом k, то

$$\sup_\alpha (e_0)\left[F\left(\frac{1}{m} x_\alpha\right)\right] \geqslant Be_0.$$

Но обратное неравенство очевидно, так как $F\left(\frac{1}{m} x_\alpha\right) \leqslant B\mathbf{1}$. Следовательно, (6) доказано.

Установленные здесь предложения будут использованы в следующей главе для функции $\operatorname{arctg} x$. Для неё $A = -\frac{\pi}{2}$, $B = \frac{\pi}{2}$.

3.3. Умножение элементов в K-пространствах. Пользуясь распространением непрерывных функций на K-пространства, можно ввести в этих последних операцию умножения элемента на элемент. Таким образом, к операции сложения, наличие которой входит в определение линейного множества, в K-пространствах добавляется вторая основная операция алгебры.

Определение. Пусть $F(\lambda, \mu) = \lambda\mu$. Тогда эта непрерывная функция вещественных аргументов порождает абстрактную функцию $F(x, y)$ ($x, y \in X$, где X — произвольное K-пространство), которую мы будем обозначать xy и называть *произведением* элементов x и y. При этом в расширенном пространстве произведение xy имеет смысл для любых x и y, а не в расширенном для некоторых пар x и y произведение xy может оказаться не определённым.

В дальнейшем считаем X расширенным K-пространством.

3.31. Если e, $e_1 \in \mathfrak{E}(X)$, то $\lambda e \cdot \mu e_1 = \lambda\mu(e \wedge e_1)$.

Доказательство. Положим $e_2 = e \wedge c_1$, $e_3 = e \vee e_1$. Имеем $\mathbf{1} = \mathbf{S}(e_2, e - e_2, e_1 - e_2, Ce_3)$. Характеристики для λe и μe_1, приведённые к общему основанию, имеют вид:

$$\overline{\lambda e} = \begin{pmatrix} e_2, & e - e_2, & e_1 - e_2, & Ce_3 \\ \lambda, & \lambda, & 0, & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{\mu e_1} = \begin{pmatrix} e_2, & e - e_2, & e_1 - e_2, & Ce_3 \\ \mu, & 0, & \mu, & 0 \end{pmatrix}.$$

Из определения произведения в Ω сразу следует, что

$$\overline{\lambda e} \cdot \overline{\mu e_1} = \begin{pmatrix} e_2, & Ce_2 \\ \lambda\mu, & 0 \end{pmatrix} = \overline{(\lambda\mu)\, e_2},$$

т. е. $(\lambda e)(\mu e_1) = \lambda\mu(e \wedge e_1)$.

Из теоремы о сохранении соотношений и свойств произведения вещественных чисел сразу вытекает ряд свойств абстрактного произведения.

3.32. a) $xy = yx$;

b) $(xy)z = x(yz)$;

c) $(\alpha x)y = \alpha(xy)$ (α — число);

d) $x(y + z) = xy + xz$;

e) если x, $y \geqslant \mathbf{0}$, то $xy \geqslant \mathbf{0}$;

f) если $|x_1| \leqslant |x|$, $|y_1| \leqslant |y|$, то $|x_1 y_1| \leqslant |xy|$;

g) $x\mathbf{1} = x$, $x\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Отметим, что из d) следует

h) $x(\mathop{\mathbf{S}}\limits_{i=1}^{n} y_i) = \mathop{\mathbf{S}}\limits_{i=1}^{n} xy_i$.

3.33. Если $x_n \xrightarrow{(o)} x$, $y_n \xrightarrow{(o)} y$, то $x_n y_n \xrightarrow{(o)} xy$.

Следует из теоремы 3.15 об (o)-непрерывности функций.

3.34. Применение проектора (e) ($e \in \mathfrak{E}(X)$) к любому $x \in X$ равносильно умножению x на e, т. е. $(e)\, x = xe$.

Доказательство. Если $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ — конечнозначный элемент, то (3.31 и 3.32 d), а также 3.23a) гл. III)

$$xe = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i e_i)\, e = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i \wedge e) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [(e)\, e_i] = (e)\Big[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\Big] = (e)\, x.$$

Если x — любой, то по лемме 2.17 существуют конечнозначные элементы $x_n \xrightarrow{(o)} x$. А тогда по 3.33 и по непрерывности проекторов (2.22e) гл. III)

$$xe = (o)\text{-}\lim x_n e = (o)\text{-}\lim (e)\, x_n = (e)\, x.$$

Следствие. Если $\mathbf{1} = \mathbf{S} e_n$, то $x = \mathbf{S} x e_n$.

3.35. Для того чтобы $xy = \mathbf{0}$, необходимо и достаточно, чтобы было $x \, \mathrm{d} \, y$.

Доказательство. Так как для чисел соотношения $|\lambda| \wedge |\mu| = 0$ и $\lambda\mu = 0$ равносильны, то то же верно и для элементов X.

3.36. a) След произведения равен произведению следов, т. е. $e_{xy} = e_x e_y = e_x \wedge e_y$. (Иначе говоря $(xy) = (x)(y)$).

b) $(xy)_+ = x_+ y_+ + x_- y_-$; $(xy)_- = x_+ y_- + x_- y_+$.

c) Если $x \neq \mathbf{0}$, то $x^2 > \mathbf{0}$.

Доказательство. a) Так как $(\mathbf{1} - e_x) \, \mathrm{d} \, x$, то $x(\mathbf{1} - e_x) = \mathbf{0}$ (3.35), а тогда $(xy)(\mathbf{1} - e_x) = y[x(\mathbf{1} - e_x)] = \mathbf{0}$, т. е. $(\mathbf{1} - e_x) \, \mathrm{d} \, xy$. Таким образом, компонента, порождённая xy, входит в компоненту, порождённую e_x, т. е. $e_{xy} \leqslant e_x$. Аналогично, $e_{xy} \leqslant e_y$, следовательно, $e_{xy} \leqslant e_x \wedge e_y = e_x e_y$. Если допустить здесь строгое неравенство, то $e = e_x e_y - e_{xy} > \mathbf{0}$. При этом, так как $e \, \mathrm{d} \, e_{xy}$, то $e \, \mathrm{d} \, xy$, и тогда (3.34, 3.35) $(xy)e = \mathbf{0}$. С другой стороны, $e \leqslant e_y$, т. е. e не дизъюнктно с y, а тогда $ye = (e)y \neq \mathbf{0}$. Но $(e)y \in X_e \subset X_{e_x}$. Следовательно, $(e)y$ не дизъюнктно с x, а тогда (3.35) $x(ye) \neq \mathbf{0}$. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

b) Имеем

$$xy = (x_+ y_+ + x_- y_-) - (x_+ y_- + x_- y_+).$$

Из 3.35 и 3.32 b) и d) следует, что элементы, стоящие в скобках, дизъюнктны, а тогда остаётся применить 1.62 гл. I.

c) По a) $e_{x^2} = e_x \neq \mathbf{0}$, следовательно, $x^2 \neq \mathbf{0}$. С другой стороны (3.32e) и 3.35),

$$x^2 = (x_+ - x_-)(x_+ - x_-) = x_+^2 + x_-^2 \geqslant \mathbf{0},$$

откуда $x^2 > \mathbf{0}$.

3.37. Пусть $x_\xi \in X (\xi \in \Xi)$, $x = \sup x_\xi$, $y \geqslant \mathbf{0}$ — произвольный элемент из X. Тогда

$$\sup_\xi (x_\xi y) = xy.$$

Аналогично для нижней грани.

Доказательство. Пусть сначала y — конечнозначный, $y = \mathop{\mathbf{S}}\limits_{i=1}^{n} (\lambda_i e_i)$. Тогда (3.32c), h), 3.34)

$$xy = \mathop{\mathbf{S}}\limits_i [(\lambda_i e_i) x] = \mathop{\mathbf{S}}\limits_i \{\lambda_i [(e_i) x]\} = \mathop{\mathbf{S}}\limits_i \{\lambda_i (e_i) [\sup x_\xi]\} =$$

$$= \mathop{\mathbf{S}}\limits_i \sup_\xi [\lambda_i (e_i) x_\xi] = \sup_\xi \mathop{\mathbf{S}}\limits_i [\lambda_i (e_i) x_\xi] = \sup_\xi x_\xi y.$$

Для любого $y \geqslant \mathbf{0}$, очевидно, $x_\xi y \leqslant xy$. Следовательно, $\sup (x_\xi y) \leqslant xy$. По лемме 2.17 существуют конечнозначные $y_n \xrightarrow{(o)} y$, притом

такие, что $\mathbf{0} \leqslant y_n \leqslant y + \frac{1}{n}\mathbf{1}$. Предположим сначала, что все $x_\xi \geqslant \mathbf{0}$. По уже доказанному

$$xy_n = \sup_\xi (x_\xi y_n) \leqslant \sup_\xi x_\xi \left(y + \frac{1}{n}\mathbf{1}\right) \leqslant \sup_\xi (x_\xi y) + \frac{1}{n} x.$$

При $n \to \infty$ получаем отсюда:

$$xy = (o)\text{-}\lim xy_n \leqslant \sup_\xi (x_\xi y).$$

Таким образом, равенство $\sup(x_\xi y) = xy$ доказано для положительных x_ξ.

Если x_ξ — любые, но $z = \inf x_\xi > -\infty$, то $x - z = \sup_\xi (x_\xi - z)$, причём все $x_\xi - z \geqslant \mathbf{0}$. Тогда, по доказанному,

$$(x - z)y = \sup_\xi [(x_\xi - z)y] = \sup(x_\xi y) - zy.$$

Но $(x - z)y = xy - zy$, следовательно, $xy = \sup(x_\xi y)$.

В частности, для любых элементов x_1, x_2

$$(x_1 \vee x_2)y = x_1 y \vee x_2 y.$$

Если же x_ξ не ограничены снизу, то рассуждаем, как в конце доказательства 3.21. Именно, $x = \sup(x_\xi \vee x_1)$, причём множество $\{x_\xi \vee x_1\}$ ограничено снизу. А тогда

$$xy = \sup_\xi [(x_\xi \vee x_1)y] = \sup_\xi (x_\xi y \vee x_1 y) = \sup_\xi (x_\xi y).$$

Следствие. Если $x_\xi \geqslant \mathbf{0}$, $y_\eta \geqslant \mathbf{0}$ (x_ξ, $y_\eta \in X$, $\xi \in \Xi$, $\eta \in \mathrm{H}$), $x = \sup x_\xi$, $y = \sup y_\eta$, то

$$xy = \sup_{\xi, \eta} x_\xi y_\eta.$$

Доказательство. По уже доказанному

$$\sup_{\xi, \eta} x_\xi y_\eta = \sup_\xi \sup_\eta x_\xi y_\eta = \sup_\xi (x_\xi y) = xy.$$

Предложение для соединений, аналогичное 3.37, имеет более простой вид.

3.38. При любом $y \in X$

$$y(\mathbf{S}x_\xi) = \mathbf{S}(x_\xi y).$$

Доказательство. Имеем

$$y(\mathbf{S}x_\xi) = (y_+ - y_-)(\sup x_\xi^+ - \sup x_\xi^-),$$

или на основании 3.37

$$y(\mathbf{S}x_\xi) = [\sup x_\xi^+ y_+ + \sup x_\xi^- y_-] - [\sup x_\xi^+ y_- + \sup x_\xi^- y_+]. \qquad (7)$$

Но $x_\xi^+ y_+$ входит в подпространство X_{y_+} (3.36a)), а $x_\xi^- y_-$ в X_{y_-}, следовательно (1.65 гл. I)

$$\sup x_\xi^+ y_+ \, \mathrm{d} \sup x_\xi^- y_- .$$

Кроме того, $x_\xi^+ y_+ \, \mathrm{d} \, x_\eta^+ y_+$, $x_\xi^- y_- \, \mathrm{d} \, x_\eta^- y_-$ при $\xi \neq \eta$. А тогда первая скобка в (7) равна (см. 3.36b))

$$\mathbf{S}_\xi \mathbf{S}(x_\xi^+ y_+, \; x_\xi^- y_-) = \sup(x_\xi^+ y_+ + x_\xi^- y_-) = \sup(x_\xi y)_+ .$$

Аналогично преобразуется вторая скобка в (7), и мы получаем:

$$y(\mathbf{S} x_\xi) = \sup(x_\xi y)_+ - \sup(x_\xi y)_- = \mathbf{S}(x_\xi y).$$

3.39. Пусть $x, y \geqslant \mathbf{0}$. Тогда по теореме 3.55 гл. III об аппроксимации элементов конечнозначными

$$x = \sup_{\mathbf{0} \leqslant \sum \lambda_i e_i \leqslant x} \sum_i \lambda_i e_i, \quad y = \sup_{\mathbf{0} \leqslant \sum \mu_i e_i \leqslant y} \sum_i \mu_i e_i .$$

Но отсюда по 3.38

$$xy = \sup \sum_i \lambda_i \mu_i e_i .$$

Замечание. Определение произведения, как и вообще определение функции, зависит от выбора единицы в X. Можно доказать, что если единица уже выбрана, а в X определена функция $F(x, y)$, удовлетворяющая условиям:

1) $F(x+y, z) = F(x, z) + F(y, z)$,

$$F(z, x+y) = F(z, x) + F(z, y);$$

2) $F(x, \mathbf{1}) = F(\mathbf{1}, x) = x$;

3) $x, y \geqslant \mathbf{0}$ влечёт $F(x, y) \geqslant \mathbf{0}$,

то $F(x, y)$ совпадает с произведением xy.

В K-пространстве S умножение элементов соответствует обычному умножению функций. Если же за единицу в S выбрать любую почти всюду положительную функцию $z(t)$, то произведение xy будет изображаться функцией $\frac{1}{z(t)} x(t) y(t)$, т. е. получается произведение функций с некоторым «весом». Это легко следует, например, из 3.39.

Аналогично в s умножение элементов производится покоординатно.

3.4. Степень и корень. Если $F(\lambda) = \lambda^n$, то $F(x)$ будем записывать в виде x^n (n — целое положительное). Из теоремы о сохранении соотношений следует, что x^n есть произведение n сомножителей x, а также, что x^n можно определить индуктивно, как $x^n = x^{n-1} x$.

Так как для чисел из $\lambda^n = 0$ следует $\lambda = 0$, то то же верно и для элементов, т. е. $x^n = \mathbf{0}$ только при $x = \mathbf{0}$. По 3.36a) $e_{x^n} = e_x$, или $(x^n) = (x)$, т. е. x^n входит в подпространство, порождённое x (2.32b) гл. III); поэтому если $x \, \mathrm{d} \, y$, то $x^n \, \mathrm{d} \, y^m$ при любых n, m.

Для любого x

$$x^n = (x_+)^n + (-1)^n (x_-)^n \tag{8}$$

так как это верно для чисел).

3.41. Теорема о существовании корня. *Для всякого $x \geqslant \mathbf{0}$ и натурального n существует единственный положительный элемент, обозначаемый $\sqrt[n]{x}$, такой, что $(\sqrt[n]{x})^n = x$.*

Доказательство. Возьмём вещественную функцию

$$F(\lambda) = \begin{cases} \sqrt[n]{\lambda} & \text{при } \lambda \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } \lambda < 0 \end{cases}$$

и через неё определим абстрактную функцию $F(x)$. Значение этой функции для $x \geqslant \mathbf{0}$ обозначим $\sqrt[n]{x}$. Тогда из тождества $(\sqrt[n]{\lambda})^n = \lambda$ при $\lambda \geqslant 0$ следует $(\sqrt[n]{x})^n = x$ при $x \geqslant \mathbf{0}$.

Из равенства $\lambda^n = \mu^n$ при $\lambda, \mu \geqslant 0$ для чисел следует $\lambda = \mu$. Тогда и для элементов из $x^n = y^n$ и $x, y \geqslant \mathbf{0}$ следует $x = y$, т. е. единственность корня доказана.

3.42. Если $x^n = x$ и n — чётное, то $x = e_x$, т. е. $x \in \mathfrak{E}(X)$.

Доказательство. Так как $x^n \geqslant \mathbf{0}$ при всяком чётном n (по формуле (8)), то $x \geqslant \mathbf{0}$. Имеем по 3.34

$$xe_x = (e_x)\,x = (x)\,x = x.$$

Следовательно, $\mathbf{0} = x^n - x = x^n - xe_x = x(x^{n-1} - e_x)$. Отсюда $x\,\mathrm{d}\,(x^{n-1} - e_x)$. Но это возможно лишь при $x^{n-1} - e_x = \mathbf{0}$, так как $x^{n-1}, e_x \in X_x$. А тогда $x = \sqrt[n-1]{e_x} = e_x$ (единичный элемент в любой степени равен самому себе — 3.31).

3.43. В нерасширенном пространстве степень x^n может не существовать для некоторых неограниченных элементов. Однако корень любой степени существует для всякого $x \geqslant \mathbf{0}$ в любом K-пространстве с единицей.

Пусть Ω — максимальное расширение пространства X, Ω' — образ X в Ω. Для всякого $x \geqslant \mathbf{0}$, $\sqrt[n]{\bar{x}}$ (где $\bar{x}$ — характеристика элемента x) существует в Ω. Так как для чисел $\sqrt[n]{\lambda} \leqslant \lambda + 1$ $(\lambda \geqslant 0)$, то и $\sqrt[n]{\bar{x}} \leqslant \bar{x} + \mathbf{1} \in \Omega'$. Вследствие нормальности подпространства Ω', $\sqrt[n]{\bar{x}} \in \Omega'$, т. е. $\overline{\sqrt[n]{x}}$ имеет смысл в X.

3.5. Однородные функции. Теперь мы докажем, что однородная функция первой степени $F(x, y)$ не зависит от выбора единицы в X. Сначала установим некоторые вспомогательные предложения.

Пусть в K-пространстве X (как и выше, расширенном) компоненты образуют булевскую алгебру $\mathfrak{E}$. Тогда при любом выборе единицы в X его база изоморфна $\mathfrak{E}$. Если базу пространства X отождествить с $\mathfrak{E}$, то характеристика e_λ для любого $x \in X$ становится элементом K-пространства Ω разложений единицы алгебры $\mathfrak{E}$.

Пусть $\mathbf{1}$ и $\boldsymbol{1}$ — два элемента, обладающие свойством единицы в X, $\bar{x}$ — характеристика элемента $x \in X$ при выборе $\mathbf{1}$ в качестве единицы в X, $\bar{\bar{x}}$ — то же при выборе $\boldsymbol{1}$. Произведение xy для любых $x, y \in X$ считается определённым при выборе $\mathbf{1}$ за единицу.

3.51 $\overline{\bar{x}\boldsymbol{1}} = \bar{x}$.

Доказательство. Достаточно показать, что проекторы P_λ^+, определяющие характеристику (см. доказательство предложения 4.11 гл. III) в обоих случаях совпадают. Но для характеристики $\bar{x}$

$$P_\lambda^+ = ((\lambda\mathbf{1} - x)_+),$$

а для $\overline{\overline{x\mathbf{1}}}$ (см. 3.36 a) — b))

$$P_\lambda^+ = ((\lambda\mathbf{1} - x\mathbf{1})_+) = ((\lambda\mathbf{1} - x)_+\mathbf{1}) = ((\lambda\mathbf{1} - x)_+)(\mathbf{1}) = ((\lambda\mathbf{1} - x)_+),$$

т. е. совпадение обоих проекторов P_λ^+ доказано.

3.52. Если $\overline{\overline{y}} = \overline{x}$, то $y = x\mathbf{1}$.

Действительно, $\overline{\overline{y}} = \overline{\overline{x\mathbf{1}}}$, а элемент определяется по характеристике однозначно.

3.53. Если $F(\lambda, \mu)$ — однородная функция первой степени, а $F(x, y)$ получена её распространением на X, в котором за единицу выбран $\mathbf{1}$, то при любых x, y, z

$$F(xz, yz) = zF(x, y).$$

Это вытекает из тождества

$$F(\alpha\lambda, \alpha\mu) = \alpha F(\lambda, \mu)$$

на основании теоремы о сохранении соотношений.

3.54. Теорема об однородных функциях. *Если $F(\lambda, \mu)$ — однородная функция первой степени, то $F(x, y)$ не зависит от выбора единицы в X.*

Доказательство. Обозначим через $F(x, y)$ (соответственно, $F^{\mathbf{1}}(x, y)$) распространение функции $F(\lambda, \mu)$ на X, где за единицу взят элемент $\mathbf{1}$ (соответственно $\mathbf{1}$). Таким образом,

$$\overline{F(x, y)} = F(\overline{x}, \overline{y}); \quad \overline{\overline{F^{\mathbf{1}}(x, y)}} = F(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}).$$

Допустим сначала, что $\mathbf{1} \geqslant \alpha\mathbf{1}$, где $\alpha > 0$. Введём функцию

$$\Phi(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} & \text{при } \lambda \geqslant \alpha, \\ \dfrac{1}{\alpha} & \text{при } \lambda < \alpha, \end{cases}$$

распространим её на X (единица — $\mathbf{1}$) и положим $\mathbf{1}^{-1} = \Phi(\mathbf{1})$. Так как из $\lambda \geqslant \alpha$ следует $\lambda\Phi(\lambda) = 1$, а $\mathbf{1} \geqslant \alpha\mathbf{1}$, то $\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^{-1} = \mathbf{1}$.

Теперь имеем с помощью 3.51

$$\overline{F(x\mathbf{1}^{-1}, y\mathbf{1}^{-1})} = F(\overline{x\mathbf{1}^{-1}}, \overline{y\mathbf{1}^{-1}}) = F(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}) = \overline{\overline{F^{\mathbf{1}}(x, y)}}.$$

Тогда по 3.52 и 3.53

$$F^{\mathbf{1}}(x, y) = \mathbf{1}F(x\mathbf{1}^{-1}, y\mathbf{1}^{-1}) = F(x, y).$$

Если $\mathbf{1}$ — произвольная единица, то $X_{\mathbf{1}} = X$, $\Omega_{\overline{\mathbf{1}}} = \Omega$. Используя понятие следа, введённое в 1.5 для элементов Ω, и предложение 1.52 a), мы заключаем, что след любого элемента Ω, в частности след характеристики $\mathbf{1}$, меньше или равен следу $\overline{\mathbf{1}}$. Таким образом, $C\overline{\mathbf{1}}(+0) \leqslant C\overline{\mathbf{1}}(+0)$. Но $\overline{\mathbf{1}}(+0) = \mathbf{0}$, а потому и $\overline{\mathbf{1}}(+0) = \mathbf{0}$, т. е. $\lim\limits_{\lambda \to +0} e_\lambda^{\mathbf{1}} = \mathbf{0}$.

Положим

$$e_n = \overline{\mathbf{1}}\left(\frac{1}{n-1}\right) - \overline{\mathbf{1}}\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

$$e_1 = \mathbf{1} - \overline{\mathbf{1}}(1).$$

Тогда $\mathbf{S}e_n = \mathbf{1}$, а $\mathbf{1}_n = (e_n)\mathbf{1} \geqslant \frac{1}{n} e$. По уже доказанному

$$F^{\mathbf{1}_n}_{e_n}[(e_n)x, (e_n)y] = F_{e_n}[(e_n)x, (e_n)y].$$

По 3.14 это означает, что

$$(e_n)F^{\mathbf{1}}(x, y) = (e_n)F(x, y).$$

Беря соединения по n, мы получим:

$$F^{\mathbf{1}}(x, y) = F(x, y),$$

ч. и тр. д.

3.6. Интегральное представление функций. Введённый в предыдущей главе интегральный аппарат для представления элементов может быть обобщён и использован для представления функций K-пространство X опять считаем расширенным.

3.61. Пусть $x, y \in X$, e^x_λ и e^y_λ — их характеристики. Тогда по теореме 4.21 гл. III об интегральном представлении элементов

$$x = (o)\text{-}\lim \sum_n \lambda_n (e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}) = (o)\text{-}\lim \mathbf{S}_n \{\lambda_n (e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}})\},$$

$$y = (o)\text{-}\lim \sum_p \mu_p (e^y_{\mu_p} - e^y_{\mu_{p-1}}) = (o)\text{-}\lim \mathbf{S}_p \{\mu_p (e^y_{\mu_p} - e^y_{\mu_{p-1}}\}.$$

По (o)-непрерывности функций (теорема 3.15) и по следствию из 3.34

$$F(x, y) = (o)\text{-}\lim F[\mathbf{S}_{n,p} \{\lambda_n (e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}})(e^y_{\mu_p} - e^y_{\mu_{p-1}})\},$$
$$\mathbf{S}_{n,p} \{\mu_p (e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}})(e^y_{\mu_p} - e^y_{\mu_{p-1}})\}].$$

Отсюда, по следствию из 3.14,

$$F(x, y) = (o)\text{-}\lim \mathbf{S}_{n,p} F_{(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}})(e^y_{\mu_p} - e^y_{\mu_{p-1}})}[\lambda_n (e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}})(e^y_{\mu_p} - e^y_{\mu_{p-1}}),$$
$$\mu_p (e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}})(e^y_{\mu_p} - e^y_{\mu_{p-1}})].$$

Теперь, применяя само предложение 3.14 и равенство $F(\lambda\mathbf{1}, \mu\mathbf{1}) = F(\lambda, \mu)\mathbf{1}$, имеем:

$$F(x, y) = (o)\text{-}\lim \mathbf{S}_{n,p} F(\lambda_n, \mu_p)(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}})(e^y_{\mu_p} - e^y_{\mu_{p-1}}). \tag{9}$$

Последнее соотношение записывается с помощью интеграла в виде

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda, \mu)\, de^x_\lambda\, de^y_\mu.$$

Так же, как в главе III, при определении этого интеграла можно вместо коэффициентов λ_n и μ_p в интегральной сумме брать любые l_n и m_p, такие, что

$$\lambda_{n-1} \leqslant l_n \leqslant \lambda_n, \quad \mu_{p-1} \leqslant m_p \leqslant \mu_p.$$

Аналогично устанавливается интегральное представление для функций любого числа аргументов.

Отметим одно простое свойство интегрального представления функций.

3.62. Сокращение индексов:

$$F(x, x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda, \lambda)\, de_{\lambda}^{x}.$$

Действительно, так как $(e_{\lambda_n}^{x} - e_{\lambda_{n-1}}^{x})\, \mathrm{d}\,(e_{\lambda_p}^{x} - e_{\lambda_{p-1}}^{x})$ при $n \neq p$, то при $y = x$ и $\mu_n = \lambda_n$ из формулы (9) следует:

$$F(x, x) = (o)\text{-}\lim \mathop{\mathrm{S}}_{n} F(\lambda, \lambda)\,(e_{\lambda_n}^{x} - e_{\lambda_{n-1}}^{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda, \lambda)\, de_{\lambda}^{x}.$$

3.63. Из теоремы о сохранении соотношений в X сразу вытекают некоторые свойства интегралов, не лишённые самостоятельного интереса:

a) если $F(\lambda, \mu, \nu) = G(\lambda, \mu)\, H(\nu)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda, \mu, \nu)\, de_{\lambda}^{x}\, de_{\mu}^{y}\, de_{\nu}^{z} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda, \mu)\, de_{\lambda}^{x}\, de_{\mu}^{y} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} H(\nu)\, de_{\nu}^{z};$$

b) если $F(\lambda, \mu, \nu) = G(\lambda, \mu)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda, \mu, \nu)\, de_{\lambda}^{x}\, de_{\mu}^{y}\, de_{\nu}^{z} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda, \mu)\, de_{\lambda}^{x}\, de_{\mu}^{y}.$$

Действительно, a) означает равенство

$$F(x, y, z) = G(x, y)\, H(z),$$

а b) — равенство

$$F(x, y, z) = G(x, y),$$

которые являются прямыми следствиями теоремы о сохранении соотношений.

§ 4. Расширение K-линеала

В этом параграфе мы выясним, при каких условиях K-линеал можно дополнить новыми элементами до K-пространства. В пространстве R_1 вещественных чисел K-линеалом является, например, множество рациональных чисел, а оно дополняется до R_1 с помощью введения иррациональных чисел. Мы используем здесь тот же хорошо известный метод сечений, который служит для определения иррациональных чисел; некоторые детали рассуждений будут поэтому опущены.

4.1 Погружение K-линеала в K-пространство. Основную роль здесь будет играть принцип Архимеда (1.38 гл. I), который выполняется в любом K-пространстве, но не в любом K-линеале (1.86 гл. I).

4.11. Теорема о расширении K-линеала. *Если в K-линеале X выполняется принцип Архимеда, то X является линейным подмножеством некоторого K-пространства Y. При этом первоначальное упорядочение в X совпадает с тем, которое порождается в нём как в подмножестве пространства Y.*

Доказательство. Назовём классом каждое непустое ограниченное сверху подмножество $X' \subset X$, удовлетворяющее следующему условию: если $x \in X$ и $x \leqslant z$ для всякого z, являющегося верхней границей множества X', то $x \in X'$.

Примером класса может служить множество X_y, состоящее из всех элементов $x \leqslant y$, где y — заданный элемент пространства X. Такие классы назовём собственными, а прочие — несобственными. Множество всех классов обозначим через Y.

Теперь линеаризуем Y. Пусть $X', X'' \in Y$. Обозначим через X^* множество всех элементов вида $x = x' + x''$, где $x' \in X'$, $x'' \in X''$. Ясно, что X^* ограничено сверху. Действительно, пусть z_1 и z_2 — верхние границы для X' и X'' соответственно. Тогда $z = z_1 + z_2$ — верхняя граница для X^*. Но при этом X^* может ещё не быть классом. Присоединим к X^* все элементы $x \in X$, которые $\leqslant$ любой верхней границы множества X^*. Тогда получится множество $\overline{X}$, которое будет классом и которое мы и примем по определению за сумму $X' + X''$.

Умножение класса на вещественное число α определим так: если $X' \in Y$ и $\alpha > 0$, то $\alpha X'$ состоит из всех элементов вида $\alpha x'$, где $x' \in X'$. Если $\alpha = 0$, то $\alpha X' = X_0$, где X_0 состоит из всех $x \leqslant 0$. Если $\alpha < 0$, то $\alpha X'$ состоит из всех элементов вида αz, где z — верхняя граница для X'. Легко видеть, что во всех случаях $\alpha X'$ — класс. Проверим это, например, для случая, когда $\alpha < 0$.

Для любых $x' \in X'$ и z имеем $x' \leqslant z$, следовательно $\alpha z \leqslant \alpha x'$, т. е. $\alpha X'$ ограничено сверху и все элементы вида $\alpha x'$ $(x' \in X')$ суть его верхние границы. Пусть $x \leqslant \alpha x'$ при любом $x' \in X'$; тогда $\frac{1}{\alpha} x \geqslant x'$, т. е. $\frac{1}{\alpha} x$ есть одно из z или $x = \alpha z$. А тогда $x \in \alpha X'$.

При введённом определении сложения и умножения Y становится линейным множеством. Условия 1) — 7) пункта 1.1 гл. I проверяются без особого труда. Проверим, например, ассоциативность сложения.

Пусть X', X'' и X''' — классы. Обозначим через X^* множество всех элементов вида $x = x' + x'' + x'''$ $(x' \in X'$, $x'' \in X''$, $x''' \in X''')$ и дополним его до класса $\overline{X}$ так, как это было сделано при определении сложения. Покажем, что $\overline{X} = (X' + X'') + X'''$. Обозначим правую часть равенства через $\overline{X}_1$. Ясно, что $\overline{X} \subset \overline{X}_1$. С другой стороны, пусть $x \in \overline{X}_1$; это означает, что $x \leqslant z$, где z — любая верхняя граница множества $\{y + x'''\}$ $(y \in X' + X''$, $x''' \in X''')$. Так как $y \in X' + X''$, то $y \leqslant u$, где u — любая верхняя граница множества $\{x' + x''\}$ $(x' \in X'$, $x'' \in X'')$. Пусть v — любая верхняя граница множества X^*, т. е. $x' + x'' + x''' \leqslant v$. Считая x''' фиксированным, мы видим, что $x' + x'' \leqslant v - x'''$, т. е. $v - x'''$ — одно из возможных u. А тогда $y \leqslant v - x'''$, или $y + x''' \leqslant v$, т. е. v есть одно из z; следовательно, $x \leqslant v$ и $x \in \overline{X}$. Итак, $\overline{X} = \overline{X}_1$.

Нулевым элементом в Y является X_0.

Действительно, пусть $\overline{X} = X' + (-X')$. Если $x' \in X'$ и $y \in (-X')$, то $x' \leqslant -y$ или $x' + y \leqslant 0$. Значит, все положительные элементы являются верхними границами множества $\{x' + y\}$. Предположим, что среди верхних границ этого множества есть элемент $z \not\geqslant 0$. Тогда $-z_- = z \wedge 0 < 0$ также является верхней границей, т. е. $x' + y \leqslant -z_-$ для всех $x' \in X'$ и $y \in (-X')$, или $x' + z_- \leqslant -y$. Отсюда следует, что $x + nz_- \leqslant -y$ при любом n, что противоречит принципу Архимеда.

Введём упорядочение в Y, а именно, положим $X' > 0$ $(X' \in Y)$, если среди $x' \in X'$ есть $x' > 0$. Тогда выполнение аксиом I, II и IV K-пространства очевидно. При этом неравенство $X' > X''$ равносильно теоретико-множественному включению $X' \supset X''$ (при отсутствии равенства).

Действительно, пусть $X' > X''$. Это означает, что если z — верхняя граница множества $\{x' - y''\}$, где $x' \in X'$ и y'' — верхняя граница для X'', то $z \geqslant u > \mathbf{0}$. Но все элементы $y' - x''$ (y' — верхняя граница для X', $x'' \in X''$) являются такими z, следовательно, $y' - x'' \geqslant u$, или $x'' \leqslant y' - u < y'$, откуда и следует, что $x'' \in X'$, т. е. $X'' \subset X'$. Так как при этом $X' - X'' \neq \mathbf{0}$, то $X' \neq X''$ в теоретико-множественном смысле.

Пусть, обратно, $X' \supset X''$ и пусть $x' - y'' \leqslant z$. Тогда $y'' + z$ есть одно из y'. Но каждый y' есть одновременно один из y'', следовательно, $y'' + nz$ при любом n является верхней границей для X'', т. е. $y'' + nz \geqslant x''$. Отсюда $nz \geqslant x'' - y''$, т. е. $nz_- \leqslant nz_+ + (y'' - x'')$. Но вследствие дизъюнктности элементов z_- и z_+ отсюда следует, что $nz_- \leqslant y'' - x''$ и по принципу Архимеда $z_- = \mathbf{0}$. Значит, $X' - X'' \geqslant \mathbf{0}$. Но равенство исключено, следовательно, $X' > X''$.

Проверяем аксиомы III и V. Пусть $X' \in Y$ и пусть $z > \mathbf{0}$ — верхняя граница для X'. Рассмотрим класс X_z (состоящий из всех $x \leqslant z$). Ясно, что $X_z \supset X'$, т. е. $X_z \geqslant X'$ и $Y_z > \mathbf{0}$. Таким образом, аксиома III выполнена.

Пусть $X'_\alpha \in Y$ и $X'_\alpha \leqslant X' \in Y$ при всех $\alpha \in A$. Тогда существуют $z \in X$ такие, что если $x \in X'_\alpha$ хоть при одном α, то $x \leqslant z$. Обозначим через X^* теоретико-множественную сумму всех X'_α и затем дополним X^* до $\overline{X}$ так же, как это сделано при определении сложения. Ясно, что $X'_\alpha \leqslant \overline{X}$ при всех α и что $X = \sup X'_\alpha$, т. е. аксиома V выполнена.

Легко видеть, что если все операции, определённые для классов, применить к собственным классам, то они будут полностью соответствовать тем же операциям, применимым к наибольшим элементам этих классов. А тогда достаточно отождествить собственные классы с их наибольшими элементами и погружение X в Y будет доказано.

Отметим, что грани конечного числа элементов $x \in X$, вычисленные в X и в Y, имеют один и тот же смысл.

Таким образом, принцип Архимеда является достаточным условием для возможности погружения K-линеала в K-пространство. Но так как принцип Архимеда выполнен во всяком K-пространстве, то он выражает одновременно и необходимое условие для возможности указанного погружения.

4.12. Следствие. (Теорема о сохранении соотношений в K-линеале — А. И. Юдин.) *Пусть все функции, входящие в формулировку теоремы* 1.43 *о сохранении соотношений, получаются из аргументов с помощью конечного числа действий сложения, умножения на вещественные числа и взятия* sup *и* inf, *а аргументы принадлежат K-линеалу X, в котором выполнен принцип Архимеда. Тогда значения этих функций тоже принадлежат X и для них справедлива теорема о сохранении соотношений.*

Действительно, погрузим X в K-пространство Y, построенное по ходу доказательства теоремы 4.11. При этом все упомянутые выше действия, применённые к элементам X, не выводят из X. Но в Y теорема о сохранении соотношений, как мы знаем, верна, а тогда она верна и в X.

ГЛАВА V

РЕГУЛЯРНЫЕ K-ПРОСТРАНСТВА

Наиболее важным и интересным в приложениях классом K-пространств является класс регулярных K-пространств. Условия, налагаемые на регулярные K-пространства, формулируются исключительно в терминах полуупорядочения без привлечения каких-либо понятий метрического характера. Как будет показано в дальнейшем, существует далеко идущая аналогия между свойствами регулярных K-пространств и множества вещественных чисел. Так, например, многие основные свойства предела, не имеющие места в произвольных K-пространствах, выполняются в регулярных K-пространствах. Это обстоятельство позволяет рассматривать элементы регулярного K-пространства, как своего рода „обобщённые числа". Некоторые математические построения существенно обобщаются при замене, в надлежащих случаях, вещественных чисел элементами регулярного K-пространства, причём методы доказательств и даже формулировки результатов при этом изменяются мало. Примеры такого рода обобщений будут приведены в дальнейшем.

§ 1. Основные свойства регулярных K-пространств

1.1. Аксиома регулярности. Определение. K-пространство X называется *регулярным*, если в нём выполняется следующая аксиома:

Аксиома регулярности. Если $\{E_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность ограниченных сверху множеств элементов пространства X и если существует (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{n\to\infty} [\sup E_n] = x\ ^{*}),$$

то из каждого множества E_n можно выделить такое конечное подмножество E_n' что, как и прежде,

$$\lim_{n\to\infty} [\sup E_n'] = x.$$

---

*) В этой главе мы почти везде опускаем букву (o) в обозначении (o)-предела.

Отсюда вытекает и двойственное предложение, а именно:

1.11. Если $\{E_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ — последовательность ограниченных снизу множеств элементов регулярного K-пространства X и существует (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{n\to\infty} [\inf E_n] = x,$$

то из каждого множества E_n можно выделить такое конечное подмножество E_n', что

$$\lim_{n\to\infty} [\inf E_n'] = x.$$

1.2. Свойства предела в регулярных K-пространствах. Следующее предложение выражает основное свойство предела в регулярных K-пространствах.

1.21. Теорема о диагональной последовательности. *Если в регулярном K-пространстве X*

$$\lim_{k\to\infty} x_i^k = x_i \text{ и } \lim_{i\to\infty} x_i = x$$

(причём не исключено, что $x=\infty$), *то существует такая последовательность индексов $k_1 < k_2 < \ldots < k_i < \ldots$, что*

$$\lim_{i\to\infty} x_i^{(k_i)} = x.$$

Доказательство. Введём в рассмотрение элементы

$$y_i^{(k)} = \sup(x_i^{(k)}, x_i^{(k+1)}, \ldots) \text{ и } z_i^{(k)} = \inf(x_i^{(k)}, x_i^{(k+1)}, \ldots)\ (i, k=1, 2, \ldots).$$

Очевидно, что $y_i^{(1)} \geqslant y_i^{(2)} \geqslant \ldots$ и $z_i^{(1)} \leqslant z_i^{(2)} \leqslant \ldots$; далее,

$$\inf_k \{y_i^{(k)}\} = x_i, \ \sup_k \{z_i^{(k)}\} = x_i \text{ и } y_i^{(k)} \geqslant x_i^{(k)} \geqslant z_i^{(k)}.$$

Так как

$$\lim_{i\to\infty} x_i = x,$$

то в силу 1.11 существуют конечные подмножества

$$E_i = \{y_i^{(l_1)}, y_i^{(l_2)}, \ldots, y_i^{(l_i)}\} \quad (l_1 < l_2 < \ldots < l_i;\ i=1, 2, \ldots)$$

такие, что

$$\lim_{i\to\infty} [\inf E_i] = x.$$

Но с увеличением индекса k элементы $y_i^{(k)}$ монотонно убывают, поэтому $\inf E_i = y_i^{(l_i)}$ и

$$\lim_{i\to\infty} y_i^{(l_i)} = x.$$

Аналогично, применяя аксиому регулярности, выделим последовательность индексов $\{m_i\}$ так, чтобы

$$\lim_{i\to\infty} z_i^{(m_i)} = x.$$

Подберём, наконец, индексы k_i так, чтобы $k_i > l_i$ и $k_i > m_i$ (причём можно предположить, что $k_1 < k_2 < \ldots < k_i < \ldots$). Тогда из неравенств

$$y_i^{(l_i)} \geqslant y_i^{(k_i)} \geqslant z_i^{(k_i)} \geqslant z_i^{(m_i)}$$

следует, что

$$\lim_{i\to\infty} y_i^{(k_i)} = \lim_{i\to\infty} z_i^{(k_i)} = x$$

и вместе с тем

$$\lim_{i\to\infty} x_i^{(k_i)} = x.$$

Замечание. В K-пространствах общего вида теорема о диагональной последовательности, вообще говоря, не имеет места. Приведём соответствующие примеры:

1) Пусть m — K-пространство ограниченных последовательностей вещественных чисел $\{\xi_i\}$, $|\xi_i| \leqslant C$, $i = 1, 2, \ldots$, с естественной линеаризацией и полуупорядочением. Положим для всякого $n = 1, 2, \ldots$

$$x_n = \{\xi_i^{(n)}\}, \text{ где } \xi_i^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{при } 1 \leqslant i \leqslant n, \\ 1 & \text{при } i > n \end{cases}$$

Легко видеть, что $x_n \searrow \mathbf{0}$. Благодаря этому и $kx_n \to \mathbf{0}$ при $n \to \infty$ для всякого $k = 1, 2, \ldots$. Однако при всяком выборе последовательности индексов $n_1 < n_2 < \ldots$, последовательность $\{kx_{n_k}\}$ неограничена в m и не может стремиться к нулю.

2) Пусть F — K-пространство всевозможных вещественных функций, заданных в промежутке $[a, b]$, с обычной линеаризацией и полуупорядочением (1.22 гл. I). Как известно, соотношение $x_n \to x$ в F означает, что $x_n(t) \to x(t)$ при всех $t \in [a, b]$ (2.35 гл. I).

Пусть $x_n(t) \to x(t)$ — последовательность функций первого класса классификации Бэра, стремящаяся к предельной функции $x(t)$ — второго класса. Найдутся последовательности непрерывных функций

$$x_n^{(k)}(t) \to x_n(t) \text{ при } k \to \infty.$$

Но ни при каком выборе последовательности индексов $\{k_n\}$ последовательность непрерывных функций $x_n^{(k_n)}(t)$ не может иметь своим пределом функцию второго класса $x(t)$ *).

*) См., например, И. П. Натансон [1], стр. 272.

1.22. Теорема об устойчивости сходимости. *Если $\{x_n\}$ — последовательность элементов регулярного K-пространства X и*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \mathbf{0},$$

то существует такая последовательность вещественных чисел $\{\lambda_n\}$, что

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n x_n = \mathbf{0}.$$

В связи с этим говорят, что сходимость в регулярном K-пространстве «*устойчива*».

Доказательство. Положим

$$y_n = \sup(|x_n|, |x_{n+1}|, \ldots);$$

тогда $y_n \searrow \mathbf{0}$. Рассмотрим последовательности

$$\{ky_n\} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Так как при всяком фиксированном k

$$\lim_{n\to\infty} ky_n = \mathbf{0},$$

то по теореме о диагональной последовательности (1.21) существует такая последовательность индексов $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, что

$$\lim_{k\to\infty} ky_{n_k} = \mathbf{0}.$$

Положим теперь

$$\lambda_n = k \quad \text{при} \quad n_k \leqslant n < n_{k+1};$$

тогда, очевидно,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty,$$

а вместе с тем

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n y_n = \lim_{k\to\infty} ky_{n_k} = \mathbf{0}$$

и тем более

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n x_n = \mathbf{0}.\ ^{*)}$$

1.23. Теорема об аннулирующей последовательности. *Какова бы ни была последовательность $\{x_n\}$ элементов регулярного K-пространства X, найдётся такая последовательность вещественных чисел $\{\lambda_n\}$, что*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n x_n = \mathbf{0}.$$

Доказательство. Для всякого $n = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} x_n = \mathbf{0}$$

---

*) Из определения чисел λ_n видно, что они образуют монотонную последовательность.

и по теореме о диагональной последовательности существует такая последовательность натуральных чисел $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{k_n} x_n = \mathbf{0}.$$

Теперь достаточно положить $\lambda_n = \frac{1}{k_n}$, и теорема доказана.

Можно сказать, что последовательность чисел $\{\lambda_n\}$ *«аннулирует»* последовательность элементов $\{x_n\}$.

1.24. Теорема о сходимости с регулятором. *Пусть $\{x_n\}$ — последовательность элементов регулярного K-пространства X. Для того чтобы имело место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

необходимо и достаточно, чтобы существовал элемент $r \in X$ — «регулятор сходимости» последовательности $\{x_n\}$ — обладающий следующим свойством:

каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдётся N_ε такое, что

$$|x_n - x| < \varepsilon r \text{ при } n \geqslant N_\varepsilon.$$

Иначе говоря, сходимость в регулярном K-пространстве есть *«сходимость с регулятором»*.

Доказательство. a) Необходимость. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = \mathbf{0};$$

так как сходимость в X устойчива (1.22), то найдётся монотонно возрастающая до бесконечности последовательность положительных чисел λ_n такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n |x_n - x| = \mathbf{0}.$$

В таком случае последовательность

$$\{\lambda_n |x_n - x|\} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

ограничена сверху некоторым элементом $r \in X$. Этот элемент и является искомым регулятором сходимости последовательности $\{x_n\}$. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$; найдётся число N_ε такое, что при $n \geqslant N_\varepsilon$, $\frac{1}{\lambda_n} < \varepsilon$ и, следовательно,

$$|x_n - x| < \frac{r}{\lambda_n} < \varepsilon r.$$

b) Достаточность. Пусть ε_n — наименьшее число, удовлетворяющее неравенству

$$|x_n - x| \leqslant \varepsilon_n r;$$

по предположению,

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Имеем:

$$\mathbf{0} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} |x_n - x| \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} |x_n - x| \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \varepsilon_n r = \mathbf{0},$$

откуда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Теорема 1.24 может быть существенно обобщена.

1.25. Теорема об общем регуляторе сходимости для последовательности предельных переходов. *Если*

$$\lim_{k\to\infty} x_n^{(k)} = x_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

т. е. дано счётное множество сходящихся последовательностей элементов регулярного K-пространства X, то существует элемент $r \in X$, — «общий регулятор сходимости для последовательности предельных переходов», — обладающий тем свойством, что

$$|x_n^{(k)} - x_n| < \varepsilon r \text{ при } k \geqslant K(\varepsilon, n).$$

Доказательство. В силу 1.24 для каждого $n = 1, 2, \ldots$ существует такой регулятор сходимости r_n, что

$$|x_n^{(k)} - x_n| < \alpha r_n \text{ при } k \geqslant K'(\alpha, n).$$

По теореме об аннулирующей последовательности 1.23, найдётся последовательность чисел $\{\lambda_n\}$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n r_n = \mathbf{0},$$

так что последовательность $\{\lambda_n r_n\}$ ограничена. Пусть

$$\lambda_n r_n < r \text{ при всех } n = 1, 2, \ldots$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$, полагая $\alpha = \lambda_n \varepsilon$, получим:

$$|x_n^{(k)} - x_n| < \alpha r_n = \varepsilon \lambda_n r_n < \varepsilon r \text{ при } k \geqslant K'(\lambda_n \varepsilon, n) = K(\varepsilon, n),$$

ч. и тр. д.

1.26. Теорема об устойчивости сходимости рядов. *Если $x_n \geqslant \mathbf{0}$ и ряд $\sum x_n$ сходится, то существуют такие числа $\lambda_n \nearrow +\infty$, что ряд $\sum \lambda_n x_n$ тоже сходится.*

Доказательство. Пусть y^* — регулятор сходимости к $\mathbf{0}$ остатка $\sum_{n=p}^{\infty} x_n$ ряда. Подберём p_k $(k = 1, 2, \ldots)$, $p_k < p_{k+1}$, так,

чтобы

$$\sum_{n=p_k}^{\infty} x_n < \frac{1}{k^3} y^*,$$

а затем положим

$$\lambda_n = k \text{ при } p_k \leqslant n < p_{k+1}$$

Тогда, отбрасывая первые $p_1 - 1$ членов ряда $\sum \lambda_n x_n$, имеем

$$\sum_{n=p_1}^{\infty} \lambda_n x_n = \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{n=p_k}^{p_{k+1}-1} x_n < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} y^* < +\infty.$$

1.27. Если $x_n \xrightarrow{(o)} x$, то существует такая частичная последовательность $\{x_{n_i}\}$, что $\sum_i |x_{n_i} - x| < +\infty$.

Доказательство. Зададим $\varepsilon_i > 0$ так, чтобы $\sum \varepsilon_i < +\infty$, и подберём n_i так, что $|x_{n_i} - x| \leqslant \varepsilon_i y^*$, где y^* — регулятор сходимости x_n к x. Эти x_{n_i} и удовлетворят требуемому условию.

1.3. Соотношения между некоторыми свойствами предела. В настоящем пункте рассматриваемые пространства не предполагаются непременно регулярными. Однако в них могут иметь место те или иные предложения, установленные в предыдущем пункте для регулярных пространств. Между этими предложениями могут быть установлены некоторые связи.

1.31. Если (o)-сходимость в K-пространстве X есть сходимость с регулятором, то она устойчива, и обратно.

Доказательство. Пусть в X имеет место сходимость с регулятором и $x_n \to \mathbf{0}$ в X. Если r — регулятор сходимости последовательности $\{x_n\}$, то при $n \geqslant n_k$ $|x_n| < \frac{1}{k} r$ $(k=1, 2, \ldots; n_1 < n_2 < \ldots)$; полагая $\lambda_n = k$ при $n_k \leqslant n < n_{k+1}$, будем иметь:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty \text{ и } |\lambda_n x_n| < r \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Но в таком случае $|\sqrt{\lambda_n} x_n| < \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} r$, откуда

$$\lim_{n\to\infty} |\sqrt{\lambda_n}\, x_n| = \mathbf{0} \text{ и } \lim_{n\to\infty} \sqrt{\lambda_n}\, x_n = \mathbf{0}.$$

Так как $\sqrt{\lambda_n} \to +\infty$, то сходимость в X устойчива.

Заметим теперь, что, как видно из доказательства теоремы о сходимости с регулятором (1.24), последняя является следствием

теоремы об устойчивости сходимости (1.22). Таким образом, можно сказать, что предложения 1.22 и 1.24 равносильны, разумея под этим, что каждое из свойств (o)-сходимости, установленных в этих двух предложениях, влечет за собой другое в произвольных K-пространствах.

1.32. Теорема об общем регуляторе сходимости для последовательности предельных переходов (1.25) вытекает из теорем о сходимости с регулятором (1.24) и об аннулирующей последовательности (1.23). Справедливо и обратное утверждение: из 1.25 следуют 1.24 и 1.23.

Первая часть утверждения явствует из доказательства теоремы 1.25. Докажем вторую.

Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность элементов K-пространства X, в котором имеет место теорема 1.25. Так как

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} x_n = \mathbf{0} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

то существует элемент $r \in X$ — общий регулятор сходимости, — обладающий свойством:

$$\left|\frac{1}{k} x_n\right| < \varepsilon r \text{ при } k \geqslant K_{\varepsilon, n}.$$

Зададимся убывающей до нуля последовательностью вещественных чисел ε_n. Для каждого n найдётся натуральное число k_n такое, что

$$\left|\frac{1}{k_n} x_n\right| < \varepsilon_n r;$$

отсюда следует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{k_n} |x_n| = \mathbf{0}, \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k_n} x_n = \mathbf{0}.$$

Таким образом, установлено, что теоремы 1.23 и 1.24 в совокупности равносильны теореме 1.25.

1.33. Теорема о диагональной последовательности равносильна теореме о существовании общего регулятора сходимости для последовательности предельных переходов.

В самом деле, доказательство теоремы 1.25 опирается только на теоремы 1.23 и 1.24, являющиеся следствиями теоремы о диагональной последовательности, так что и 1.25 является следствием той же теоремы. Покажем теперь обратное, т. е., что из 1.25 следует 1.21.

Пусть

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i, \quad \lim_{i\to\infty} x_i = x \quad (-\infty \leqslant x \leqslant +\infty)$$

и r — общий регулятор сходимости последовательностей

$$\{x_i^{(k)}\} \quad (i, k = 1, 2, \ldots).$$

Зададимся убывающей до нуля последовательностью вещественных чисел $\{\varepsilon_i\}$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots$ найдётся индекс k_i $(k_1 < k_2 < \ldots)$ такой, что

$$|x_i^{(k_i)} - x_i| < \varepsilon_i r.$$

Имеем

$$x_i^{(k_i)} = (x_i^{(k_i)} - x_i) + x_i;$$

но $x_i^{(k_i)} - x_i \to \mathbf{0}$, а $x_i \to x$ при $i \to \infty$, поэтому

$$\lim_{i \to \infty} x_i^{(k_i)} = x,$$

и утверждение доказано.

1.34. Теоремы об устойчивости сходимости (или о сходимости с регулятором) и об аннулирующей последовательности в совокупности равносильны теореме о диагональной последовательности.

Следует из 1.31, 1.32 и 1.33.

Отметим ещё одно полезное вспомогательное предложение.

1.35. Теорема о диагональной последовательности имеет место в K-пространстве X, если X удовлетворяет следующему условию:

Пусть $x_n^{(k)} \searrow \mathbf{0}$ при $k \to \infty$ и любом n; тогда существует такая последовательность индексов $k_1 < k_2 < \ldots$, что $x_n^{(k_n)} \to \mathbf{0}$ при $n \to \infty$.

Иначе говоря, ослабленная в указанном смысле теорема о диагональной последовательности равносильна полной.

Справедливость утверждения следует из того, что теоремы об устойчивости сходимости и об аннулирующей последовательности (в совокупности равносильные теореме о диагональной последовательности) были доказаны использованием теоремы о диагональной последовательности именно в том частном случае, когда $x_n^{(k)} \searrow \mathbf{0}$ при $k \to \infty$.

1.4. K-пространства счётного типа. Все установленные выше свойства предела в регулярных K-пространствах установлены только с помощью теоремы о диагональной последовательности. Эта последняя в свою очередь вытекает из аксиомы регулярности, применённой к случаю, когда все множества E_n — счётные. Некоторые другие свойства регулярных K-пространств не являются следствиями теоремы о диагональной последовательности, и мы выведем их с использованием аксиомы регулярности для несчётных множеств. Перейдём к их рассмотрению.

1.41. Теорема. *Если E — ограниченное сверху множество элементов регулярного K-пространства X, то существует такое счётное подмножество $E' \subset E$, что*

$$\sup E' = \sup E.$$

Доказательство. Применяя аксиому регулярности к случаю, когда все $E_n = E$, выделим счётное множество $\{E_n'\}$ таких конечных

подмножеств множества E, что

$$\lim_{n\to\infty}[\sup E'_n] = E.$$

Положим

$$E' = \bigcup_{n=1}^{\infty} E'_n.$$

Очевидно, E' — счётное подмножество множества E и вместе с тем

$$\sup E \geqslant \sup E' = \sup\left(\bigcup_n E'_n\right) = \sup_n\{\sup E'_n\} \geqslant \lim_{n\to\infty}[\sup E'_n] = \sup E,$$

откуда следует, что

$$\sup E' = \sup E.$$

Справедливо и двойственное предложение:

1.42. Если E — ограниченное снизу множество элементов регулярного K-пространства X, то существует такое счётное подмножество $E'' \subset E$, что

$$\inf E'' = \inf E.$$

Для случая, когда E — ограниченное множество, из 1.41 и 1.42 следует существование такого счётного подмножества $E^* \subset E$, что

$$\sup E^* = \sup E \text{ и } \inf E^* = \inf E.$$

1.43. Теорема. *Всякое вполне упорядоченное в порядке возрастания и ограниченное сверху множество элементов регулярного K-пространства X содержит не более счётного множества различных элементов.*

Доказательство. Пусть

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_\omega \leqslant \ldots \leqslant x_\alpha \leqslant \ldots \quad (\alpha < \Omega)$$

— ограниченная сверху, монотонно возрастающая, упорядоченная по типу Ω последовательность элементов K-пространства X (Ω — наименьшее порядковое число третьего класса). По предыдущей теореме найдётся счётная подпоследовательность $\{x_{\alpha_n}\}$, обладающая тем свойством, что

$$\sup_n\{x_{\alpha_n}\} = \sup_{\alpha<\Omega}\{x_\alpha\}.$$

Если α_0 — число, непосредственно следующее за всеми α_n, то $\alpha_0 < \Omega$*) и при всех $\beta \geqslant \alpha_0$

$$\sup_{\alpha<\Omega}\{x_\alpha\} \geqslant x_\beta \geqslant x_{\alpha_0} \geqslant \sup_n\{x_{\alpha_n}\} = \sup_{\alpha<\Omega}\{x_\alpha\},$$

*) См. П. С. Александров [2] стр. 88.

откуда следует, что $x_\beta = x_{\alpha_0}$. Таким образом, начиная с некоторого α_0 первого или второго числового класса,

$$x_{\alpha_0} = x_{\alpha_0+1} = \ldots,$$

так что в последовательности $\{x_\alpha\}$ не более счётного множества различных элементов.

Аналогичное предложение имеет место и для ограниченной снизу монотонно убывающей последовательности элементов регулярного K-пространства X.

Введём следующее

Определение. Если в K-пространстве X всякое ограниченное множество различных попарно дизъюнктных элементов не более чем счётно, то X называется K-пространством *счётного типа*.

1.44. Теорема. *Регулярное K-пространство X есть пространство счётного типа.*

Доказательство. Пусть $E = \{x_\alpha\}$ — ограниченное множество попарно дизъюнктных различных элементов пространства X. Так как элементы K-пространства дизъюнктны одновременно с своими абсолютными величинами, то, не ограничивая общности доказательства, можно предположить, что все $x_\alpha > \mathbf{0}$.

По теореме 1.41 существует счётное подмножество $E' \subset E$ такое, что $\sup E' = \sup E$. Если бы в множестве E содержался элемент x_{α_0}, не принадлежащий E', то из дизъюнктности x_{α_0} с множеством E' следовало бы, что

$$\sup E \geqslant \sup E' \vee x_{\alpha_0} = \sup E' + x_{\alpha_0} > \sup E'$$

или $\sup E > \sup E'$, что противоречит определению E'. Итак, $E' = E$ и E — счётное множество.

1.45. Предложения 1.41, 1.42 и 1.43 выполняются в любом K-пространстве X счётного типа (а не только в регулярном).

Доказательство. а) Покажем, что в X имеет место 1.43. Пусть сначала X — счётного типа с единицей и $\{e_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega)$ — упорядоченная по типу Ω последовательность единичных элементов из X. Покажем, что, начиная с некоторого $\alpha_0 < \Omega$,

$$e_{\alpha_0} = e_{\alpha_0+1} = \ldots$$

Рассмотрим с этой целью множество разностей

$$E = \{e_{\alpha+1} - e_\alpha\} \quad (\alpha < \Omega).$$

В силу известных свойств единичных элементов все элементы из E попарно дизъюнктны и, так как X — счётного типа, то E — не более чем счётное множество, что возможно только в том случае, если, начиная с некоторого $\alpha_0 < \Omega$, $e_{\alpha+1} - e_\alpha = \mathbf{0}$ или

$$e_{\alpha_0} = e_{\alpha_0+1} = \ldots$$

Пусть теперь $\{x_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega)$ — монотонно возрастающая не обязательно ограниченная трансфинитная последовательность любых элементов K-пространства X счётного типа с единицей. Можно предположить, что все $x_\alpha \geqslant \mathbf{0}$ (в противном случае можно было бы рассмотреть последовательность $x_2 - x_1 \leqslant x_3 - x_1 \leqslant \ldots$). Если $\{r_i\}$ — совокупность всех рациональных чисел и $e_\lambda(x_\alpha)$ — характеристика элемента x_α, то

$$Ce_{r_i}(x_1) \leqslant Ce_{r_i}(x_2) \leqslant \ldots \leqslant Ce_{r_i}(x_\alpha) \leqslant \ldots (\alpha < \Omega, \quad i = 1, 2, \ldots)\ ^{*)}$$

По доказанному, для каждого $i = 1, 2, \ldots$ найдётся такое число $\alpha_i < \Omega$, что, начиная с него,

$$Ce_{r_i}(x_{\alpha_i}) = Ce_{r_i}(x_{\alpha_i+1}) = \ldots$$

Пусть α^* — первое порядковое число, следующее за всеми α_i. Очевидно, $\alpha^* < \Omega$ и, начиная с него, одновременно для всех $i = 1, 2, \ldots$

$$Ce_{r_i}(x_{\alpha^*}) = Ce_{r_i}(x_{\alpha^*+1}) = \ldots \text{ и } e_{r_i}(x_{\alpha^*}) = e_{r_i}(x_{\alpha^*+1}) = \ldots$$

Но из совпадения характеристик e_λ двух каких-либо элементов пространства X при всех рациональных r следует совпадение и самих этих элементов (4.22 гл. III); поэтому

$$x_{\alpha^*} = x_{\alpha^*+1} = \ldots$$

и в последовательности $\{x_\alpha\}$ — не более счётного множества различных элементов.

Пусть, наконец, $\{x_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega)$ — ограниченная сверху монотонно возрастающая последовательность элементов произвольного K-пространства X счётного типа. Можно предположить, что все $x_\alpha \geqslant \mathbf{0}$. (в противном случае можно было бы рассмотреть последовательность $x_2 - x_1 \leqslant x_3 - x_1 \leqslant \ldots$). Если $x^* = \sup\limits_\alpha \{x_\alpha\}$, то подпространство X^*, порождённое элементом x^*, содержит все элементы x_α и, так как X^* — пространство с единицей (очевидно, также счётного типа), то в последовательности $\{x_\alpha\}$ — не более счётного множества различных элементов, ч. и тр. д.

b) Покажем, что в X имеет место 1.41. Пусть $E = \{x_\alpha\}$ $(\alpha < \vartheta)$ — ограниченное сверху множество элементов K-пространства X счётного типа. Полагая

$$y_\alpha = \sup_{\beta \leqslant \alpha} \{x_\beta\} \quad (\alpha < \vartheta),$$

---

*) Ce означает, как и раньше, дополнение элемента e, т. е. $Ce = \mathbf{1} - e$. Неравенство $Ce_\lambda(x) \leqslant Ce_\lambda(y)$ вытекает из $x \leqslant y$, если характеристику для y определять по формуле

$$e_\lambda(y) = P_\lambda^+ \mathbf{1}$$

(Определение проектора P_λ^+ — см. 4.11 в гл. III).

получим монотонно возрастающую ограниченную сверху последовательность элементов из X. В силу доказанного в a), найдётся число α первого или второго числового класса, начиная с которого

$$y_\alpha = y_{\alpha+1} = \ldots$$

Множество $E' = \{x_\beta\}$ $(1 \leqslant \beta \leqslant \alpha)$ — не более чем счётное, содержится в E и, очевидно, $\sup E' = \sup E$, так что в X имеет место 1.41.

Таким образом, в силу a) во всяком K-пространстве счётного типа выполняется 1.43, а в силу b) 1.43 влечет за собой 1.41. Так как доказательство предложения 1.44 опирается только на 1.41, то отсюда следует, что свойства K-пространств счётного типа, установленные в 1.45, характеризуют этот класс пространств.

1.46. Замечание. В формулировках теорем 1.41—1.43 речь идёт о множествах, непременно ограниченных в том или ином смысле. Естественно выделить класс пространств, для которых были бы верны предложения, аналогичные теоремам 1.41—1.43, без предположения ограниченности соответствующих множеств. Такой класс пространств будет рассмотрен в дальнейшем (§ 3).

Возвращаясь к понятию регулярного K-пространства, напомним, что два его основных свойства — существование диагональной последовательности и принадлежность к счётному типу — вытекает из аксиомы регулярности. Обратно, имеет место следующая теорема.

1.47. Теорема. *K-пространство X счётного типа, в котором имеет место теорема о диагональной последовательности, регулярно.*

Доказательство. Пусть $\{E_n\}$ — последовательность ограниченных сверху множеств элементов пространства X и существует (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{n\to\infty} [\sup E_n] = x.$$

Так как X — счётного типа, то, в силу 1.45, в каждом E_n можно выделить такое счётное подмножество

$$E'_n = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots\},$$

что

$$\sup E'_n = \sup E_n.$$

Положим

$$y_n^{(k)} = x_1^{(n)} \vee x_2^{(n)} \vee \ldots \vee x_k^{(n)} \quad (n, k = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно,

$$\lim_{k\to\infty} y_n^{(k)} = \sup E'_n = \sup E_n$$

и так как, по условию,

$$\lim_{n\to\infty} [\sup E_n] = x,$$

то по теореме о диагональной последовательности существует такая последовательность индексов $k_1 < k_2 < \ldots$, что

$$\lim y_n^{(k_n)} = x.$$

Если теперь ввести в рассмотрение конечные множества

$$\overline{E}_n = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)}\}.$$

то $\overline{E}_n \subset E_n$ и

$$\sup \overline{E}_n = y_n^{(k_n)},$$

так что

$$\lim_{n\to\infty} [\sup \overline{E}_n] = x$$

и X — регулярное K-пространство.

1.48. Замечание. Постулируя гипотезу континуума, можно показать, что K-пространство, в котором имеет место теорема о диагональной последовательности, — счётного типа. Более того, если X — K-пространство с устойчивой сходимостью, то X — счётного типа.

Доказательство. Допустим, что в X содержится ограниченное множество $E = \{x_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega)$ попарно дизъюнктных положительных элементов, и пусть

$$T = \{(m_1^{(\alpha)}, m_2^{(\alpha)}, \ldots, m_n^{(\alpha)}, \ldots)\} \quad (\alpha < \Omega)$$

— совокупность всевозможных монотонно возрастающих до бесконечности последовательностей натуральных чисел (мощность совокупности T, в силу гипотезы континуума, предполагается равной $\aleph_1$, поэтому T может быть упорядочено по типу Ω). Положим

$$y_n = \sup_{\alpha<\Omega} \left\{\frac{1}{m_n^{(\alpha)}} x_\alpha\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, $y_n \leqslant \sup E$ и $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n \geqslant \ldots > \mathbf{0}$. Покажем, что $y_n \searrow \mathbf{0}$.

Действительно, если бы $y_n \to y > \mathbf{0}$, то, так как

$$(x_\alpha) y_n = \frac{1}{m_n^{(\alpha)}} x_\alpha \geqslant (x_\alpha) y$$

и для некоторого $\alpha = \alpha_0$, $(x_{\alpha_0}) y > \mathbf{0}$, мы бы имели

$$\frac{1}{m_n^{(\alpha_0)}} x_{\alpha_0} \geqslant (x_{\alpha_0}) y > \mathbf{0},$$

что невозможно, ибо $m_n^{(\alpha_0)} \to \infty$. Итак, $y_n \searrow \mathbf{0}$ и, согласно предположению, найдётся последовательность чисел $\lambda_n \to +\infty$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n y_n = \mathbf{0}.$$

Можно предположить, что $\{\lambda_n\}$ — монотонно возрастающая до бесконечности последовательность натуральных чисел, так что в T содержится после-

довательность $\{m_n^{(\beta)}\}$, совпадающая с последовательностью $\{\lambda_n\}$. Но тогда при всех n

$$(x_\beta)\,\lambda_n y_n = m_n^{(\beta)} \cdot \frac{1}{m_n^{(\beta)}} x_\beta = x_\beta > \mathbf{0},$$

что невозможно.

1.49. Простым и важным примером регулярного K-пространства является пространство S измеримых функций, заданных, например, на отрезке $[a, b]$. S, очевидно, счётного типа; вместе с тем в S имеет место теорема Фреше, состоящая в том, что если

$$\lim_{k \to \infty} x_n^{(k)}(t) = x_n(t)$$

и

$$\lim_{n \to \infty} x_n(t) = x(t) \text{ почти всюду в } [a, b],$$

то существует последовательность индексов $k_1 < k_2 < \ldots$ такая, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n^{(k_n)}(t) = x(t) \text{ почти всюду в } [a, b].$$

Принимая во внимание, что (o)-сходимость в S есть сходимос почти всюду в $[a, b]$, заключаем, что в S имеет место теорема о диагональной последовательности, так что по 1.47 S — регулярное K-пространство.

В таком случае в S имеют место все предложения, установленные выше для регулярных K-пространств. В частности, если $x_n(t) \to x(t)$ почти всюду в $[a, b]$ $(x_n, x \in S)$, то существует функция $x_0 \in S$, обладающая тем свойством, что

$$|x_n(t) - x(t)| < \alpha x_0(t) \text{ при } n \geqslant N_\alpha \text{ почти всюду в } [a, b].$$

В этом состоит теорема о регуляторе сходимости для случая K-пространства измеримых функций.

Пусть теперь $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малые положительные числа. Найдётся число M такое, что

$$\operatorname{mes} Q = \operatorname{mes} \mathscr{E}[x_0(t) > M] < \delta. \tag{1}$$

Если $E = [a, b] \setminus Q$, то, полагая $\alpha = \frac{\varepsilon}{M}$, будем иметь вследствие (1)

$$|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon \text{ для почти всех } t \in E \text{ и } n \geqslant N_\alpha,$$

т. е. последовательность $\{x_n(t)\}$ на множестве E, мера которого сколь угодно близка к $b - a$, сходится равномерно к $x(t)$. Это и есть известная теорема Д. Ф. Егорова *), играющая большую роль в теории функций вещественной переменной.

---

*) См., например, И. П. Натансон [1], стр. 89.

Другим примером регулярного K-пространства может служить s — пространство всевозможных последовательностей вещественных чисел. Легко видеть, что оно — счётного типа и что в нём также имеет место теорема о диагональной последовательности, а тогда оно регулярно в силу 1.47. Впрочем, регулярность пространства s будет непосредственно вытекать из предложения 2.15 следующего параграфа. Другие примеры и некоторые классы регулярных K-пространств будут даны в дальнейшем.

§ 2. Некоторые условия регулярности K-пространств

В настоящем параграфе будут указаны некоторые условия регулярности K-пространства, его максимального расширения, соединений регулярных пространств и т. д. В частности, регулярным оказывается и расширенное K-пространство с устойчивой сходимостью (счётного типа, если не опираться на гипотезу континуума).

2.1. Разложение и соединение регулярных K-пространств.

2.11. Правильное подпространство X_0 регулярного K-пространства X есть регулярное K-пространство.

Доказательство. Пусть $\{E_n\}$ — последовательность ограниченных сверху множеств элементов из X_0 и существует

$$\lim_{n\to\infty} [\sup E_n] = x \quad \text{в} \quad X_0.$$

Ввиду правильности подпространства X_0, $\sup E_n$ в X_0 совпадает с $\sup E_n$ в X и соотношение $\sup E_n \to x$ в X_0 влечёт за собой $\sup E_n \to x$ в X.

Так как X — регулярное K-пространство, то, по аксиоме регулярности, существуют такие конечные подмножества $E_n' \subset E_n$, что

$$\lim_{n\to\infty} [\sup E_n'] = x \quad \text{в} \quad X.$$

Но ввиду правильности подпространства X_0 $\sup E_n'$ в X совпадает с $\sup E_n'$ в X_0 и соотношение $\sup E_n' \to x$ в X влечёт за собой $\sup E_n' \to x$ в X_0, откуда и следует, что X_0 — регулярное K-пространство.

Заметим, что нормальное подпространство регулярного K-пространства, вообще говоря, не регулярно. Это будет следовать из примера, рассматриваемого ниже (см. 3.13).

Замечание. Из 2.11 также следует, что подпространство X_E регулярного K-пространства, порождённое каким-либо множеством $E \subset X$ (компонента), регулярно. В частности, подпространство, порождённое любым элементом из X, регулярно.

2.12. Для того чтобы K-пространство X было регулярным, достаточно (и необходимо), чтобы всякое его подпространство X_E, порождённое (каким-либо) счётным множеством $E \subset X$, было регулярным.

Доказательство. Пусть X удовлетворяет условию предложения. Покажем, что X — счётного типа. Действительно, если M — ограниченное множество попарно дизъюнктных элементов из X (можно предположить, что элементы множества M положительны), то подпространство пространства X, порождённое элементом $\sup M$, по условию регулярно, а так как M в нём содержится, то M — не более чем счётное множество и, таким образом, X — счётного типа.

Пусть $x_n^{(k)} \to x_n$ при $k \to \infty$ и $x_n \to x$ при $n \to \infty$ (в X). Множество E всех элементов $\{x_n^{(k)}\}$ $(n, k = 1, 2, \ldots)$ — счётное и X_E регулярно. Поэтому найдётся последовательность индексов $k_1 < k_2 < \ldots$ такая, что $x_n^{(k_n)} \to x$ в X_E. Но X_E — правильное подпространство пространства X, следовательно, $x_n^{(k_n)} \to x$ и в X. Тем самым установлено, что в X имеет место теорема о диагональной последовательности. Принимая во внимание 1.47, заключаем, что X регулярно.

2.13. Пусть $\{X_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ — произвольная система K-пространств и X^* — их полное соединение. Элементами пространства X^* служат всевозможные функции $\varphi(\alpha)$, заданные на множестве A, со значениями в X_α (2.41 гл. II). Рассмотрим те из них, значения которых отличны от нуля не более чем при счётном множестве значений α. Совокупность всех таких функций, обозначим её через X, представляет собой нормальное подпространство пространства X^* и вместе с тем некоторое соединение пространств X_α. Назовём его *счётным соединением* системы K-пространств X_α $(\alpha \in A)$.

Ясно, что счётное соединение счётной системы K-пространств совпадает с её полным соединением. Кроме того, из определения легко следует

2.14. Счётное соединение любой системы K-пространств счётного типа есть K-пространство счётного типа.

Возвращаясь к вопросу о регулярных K-пространствах, заметим, что произвольное соединение таких пространств может не быть регулярным пространством. Однако справедлива следующая теорема.

2.15. Теорема. *Счётное соединение любой системы регулярных K-пространств есть регулярное K-пространство.*

Доказательство. 1) Пусть сначала X — счётное (и вместе с тем полное) соединение счётного множества регулярных K-пространств X_i $(i = 1, 2, \ldots)$. Покажем, что в X имеет место теорема о диагональной последовательности. В силу 1.35 эту теорему достаточно проверить в ослабленной форме.

Пусть $x_n^{(k)} \searrow \mathbf{0}$ при $k \to \infty$; следует показать существование такой последовательности индексов $\{k_n\}$, что $x_n^{(k_n)} \to \mathbf{0}$ при $n \to \infty$. Так как $X = \overline{\mathbf{S}} X_i$, то система подпространств $\{X_i'\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, где X_i' изоморфно X_i, образует разложение пространства X (см. первую теорему о соединениях K-пространств, 2.44 гл. II). Если через P_i обозначим операцию проектирования в подпространство X_i', то, принимая во внимание непрерывность и монотонность операции проектирования, будем иметь $P_i(x_n^{(k)}) \searrow \mathbf{0}$ при $k \to \infty$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Так как значения операции P_i принадлежат подпространству X_i', являющемуся регулярным K-пространством, то найдётся последовательность индексов $k_1^{(i)} < k_2^{(i)} < \ldots$ такая, что

$$\lim_{n \to \infty} P_i\left(x_n^{(k_n^{(i)})}\right) = \mathbf{0};$$

при этом можно предполагать, что $k_n^{(i+1)} \geqslant k_n^{(i)}$, так как элементы $x_n^{(k)}$ монотонно убывают с возрастанием k.

Рассмотрим теперь «диагональную» последовательность индексов $k_n = k_n^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Очевидно,

$$\lim_{n \to \infty} P_i\left(x_n^{(k_n)}\right) = \mathbf{0} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Остаётся показать, что $x_n^{(k_n)} \to \mathbf{0}$ при $n \to \infty$. Но, в самом деле, допустим, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n^{(k_n)} = x_0 > \mathbf{0}.$$

Найдётся $i = i_0$ такое, что $P_{i_0}(x_0) > \mathbf{0}$, а тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, P_{i_0}(x_n^{(k_n)}) = P_{i_0}(x_0) > \mathbf{0},$$

вопреки доказанному. Итак, $x_0 = \mathbf{0}$ и $x_n^{(k_n)} \to \mathbf{0}$.

Так как X — счётного типа (2.14), то в силу теоремы 1.47 X — регулярное K-пространство.

2) Пусть теперь X — счётное соединение любой системы регулярных K-пространств X_α ($\alpha \in A$). Всякий элемент $x \in X$ допускает не более счётного множества составляющих $x_\alpha \in X_\alpha$, отличных от нуля; поэтому если $E \subset X$ — произвольное счётное множество, то найдутся пространства X_{α_n} ($n=1, 2, \ldots$), счётное соединение которых X^* содержит E. По доказанному, X^* — регулярное K-пространство, а тогда и X_E — подпространство пространства X, порождённое множеством E, регулярно (см. замечание к 2.11). Применяя 2.12, заключаем, что X — регулярное K-пространство, и теорема доказана.

2.16. Пусть F — пространство всех вещественных функций $x(t)$, заданных на некотором множестве T, удовлетворяющих условию: имеется не более счётного множества значений $x(t)$, отличных от нуля. Легко видеть, что F изоморфно счётному соединению некоторого множества пространств вещественных чисел (очевидно, регулярных). Из доказанной теоремы следует, что F — регулярное K-пространство.

2.17. Для того чтобы регулярное K-пространство X было пространством с единицей, необходимо и достаточно, чтобы всякое (хотя бы и неограниченное) множество попарно дизъюнктных элементов пространства X было не более чем счётно.

Доказательство. a) Необходимость. Пусть X — регулярное K-пространство с единицей и $E = \{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$, $x_\alpha \neq 0$) — какое-либо множество его попарно дизъюнктных элементов. Для каждого $\alpha \in A$ найдутся единичный элемент $e_\alpha > \mathbf{0}$ и число $\lambda_\alpha > 0$ такие, что $|x_\alpha| \geqslant \lambda_\alpha e_\alpha$ (см. 3.52 гл. III). Так как элементы x_α попарно дизъюнктны, то попарно дизъюнктными будут и элементы e_α. Но множество $E' = \{e_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) ограничено, а X — будучи регулярным — есть K-пространство счётного типа; поэтому E' — не более чем счётное множество. Таким же будет и множество E, равномощное с E'.

b) Достаточность. Пусть X — регулярное K-пространство, удовлетворяющее условию предложения, и $X = \mathbf{S} X_\alpha$ — его разложение на подпространства с единицей. Так как единицы подпространств X_α попарно дизъюнктны, то множество $\{X_\alpha\}$ не более чем счётно (можно считать, что $\alpha = 1, 2 \ldots$). По теореме об аннулирующей последовательности найдётся такая последовательность чисел $\lambda_\alpha \searrow 0$, что $\lambda_\alpha x_\alpha \to \mathbf{0}$, где x_α — единица подпространства X_α. В таком случае существует элемент x_0 такой, что $\lambda_\alpha x_\alpha \leqslant x_0$ для всех $\alpha \in A$, и нетрудно проверить, что x_0 обладает свойствами единицы пространства X.

2.18. Теорема. *Для того чтобы максимальное расширение $\widetilde{X}$ регулярного K-пространства X было регулярным, необходимо и достаточно, чтобы X было пространством с единицей.*

Доказательство. a) Необходимость. Пусть $\widetilde{X}$ — регулярное K-пространство. Как и всякое расширенное пространство, $\widetilde{X}$ содержит единицу. В таком случае, в силу 2.17, всякое множество попарно дизъюнктных элементов пространства $\widetilde{X}$ не более чем счётно. Это же справедливо и отно-

сительно X, так как X — нормальное подпространство пространства $\widetilde{X}$. Но тогда, опять в силу 2.17, X — пространство с единицей.

b) Достаточность. Пусть регулярное K-пространство X с единицей. Легко видеть, что $\widetilde{X}$ — максимальное расширение пространства X — счётного типа. Покажем теперь, что в $\widetilde{X}$ имеет место теорема о диагональной последовательности. Для этого по 1.35 достаточно показать, что если $x_n^{(k)} \searrow \mathbf{0}$ при $k \to \infty$, то найдётся такая последовательность индексов $\{k_n\}$, что $x_n^{(k_n)} \to \mathbf{0}$. Введём элементы

$$y_n^{(k)} = \operatorname{arctg} x_n^{(k)} \qquad (n, k = 1, 2, \ldots).$$

Так как при всяком $x \in \widetilde{X}$

$$|\operatorname{arctg} x| \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{1}_{\widetilde{X}},$$

а единицы пространств X и $\widetilde{X}$ можно считать совпадающими, то элементы $y_n^{(k)}$ принадлежат X и, по непрерывности arctg (теорема 3.15 гл. IV), $y_n^{(k)} \to \mathbf{0}$ в X при $k \to \infty$. Ввиду регулярности пространства X найдётся последовательность индексов $\{k_n\}$, для которой $y_n^{(k_n)} \to \mathbf{0}$ в X и тем более в $\widetilde{X}$. Но тогда по 3.22 гл. IV $x_n^{(k_n)} \to \mathbf{0}$. Остаётся заметить, что K-пространство счётного типа, в котором имеет место теорема о диагональной последовательности, регулярно (1.47).

2.2. Некоторые условия регулярности K-пространств с единицей. Установим прежде всего одно свойство сходящейся последовательности элементов K-пространства с единицей специального вида.

2.21. Если X — K-пространство с единицей, для единичных элементов которого справедлива теорема о диагональной последовательности, и $x_n \searrow \mathbf{0}$ в X, то существует последовательность единичных элементов $e_k \searrow \mathbf{0}$ такая, что при $n \geqslant n_k$

$$x_n \leqslant \frac{1}{k}(\mathbf{1} - e_k) + (e_k)\, x_1.$$

Заметим, что признак (o)-сходимости, установленный в главе III (теорема 3.53), слабее указанного сейчас, так как в нём проекторы P_n^{ε} зависят от ε.

Доказательство. Так как $x_n \searrow \mathbf{0}$, то для их характеристик $e_\lambda(x_n)$ имеем $e_{\frac{1}{k}}(x_n) \to \mathbf{1}$ при $n \to \infty$ и при всех $k = 1, 2, \ldots$ (4.18 гл. III). По теореме о диагональной последовательности (имеющей место, по условию, для единичных элементов пространства X) найдётся последовательность индексов $n_1 < n_2 < \ldots$ такая, что

$$\lim e_{\frac{1}{k}}(x_{n_k}) = \mathbf{1}$$

или, полагая $Ce_{\frac{1}{k}}(x_{n_k}) = \overline{e}_k$:

$$\lim_{k \to \infty} \overline{e}_k = \mathbf{0}.$$

По свойствам характеристик и проекторов (4.1 и 2.32 f) гл. III)

$$x_{n_k} \leqslant \frac{1}{k}(\mathbf{1} - \overline{e}_k) + (\overline{e}_k)\, x_1 \quad (\text{так как } x_{n_k} \leqslant x_1).$$

Если теперь $n \geqslant n_k$, то $x_n \leqslant x_{n_k}$ и тем более

$$x_n \leqslant \frac{1}{k}(\mathbf{1} - \bar{e}_k) + (\bar{e}_k)\, x_1.$$

При замене $\bar{e}_k$ превосходящим его единичным элементом неравенство не нарушается*); поэтому, полагая $e_k = \sup(\bar{e}_k, \bar{e}_{k+1}, \ldots)$, будем иметь $e_k \searrow \mathbf{0}$ и

$$x_n \leqslant \frac{1}{k}(\mathbf{1} - e_k) + (e_k)\, x_1 \qquad (n \geqslant n_k).$$

2.22. Следствие. Предложение, установленное в 2.21, имеет место в регулярном K-пространстве с единицей.

Действительно, в таком пространстве теорема о диагональной последовательности выполняется в полном объёме и, в частности, для единичных элементов.

2.23. Если в расширенном K-пространстве X для единичных элементов имеет место теорема о диагональной последовательности, то, какова бы ни была последовательность элементов $x_n \in X$, найдётся последовательность вещественных чисел $\lambda_n \to 0$ такая, что $\lambda_n x_n \to \mathbf{0}$. Иначе говоря, в X имеет место теорема об аннулирующей последовательности.

Доказательство. Рассмотрим последовательности

$$\left\{\frac{1}{k} x_n\right\} \quad (k, n = 1, 2, \ldots).$$

Так как при всяком фиксированном n и $k \to \infty$ $\frac{1}{k} x_n \to \mathbf{0}$, то по свойству характеристик (4.18 гл. III)

$$\lim_{k \to \infty} e_{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{k} |x_n|\right) = \mathbf{1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

По условию, существует последовательность индексов $k_1 < k_2 < \ldots$ такая, что

$$\lim_{n \to \infty} e_{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{k_n} |x_n|\right) = \mathbf{1}. \tag{1}$$

Положим теперь $\lambda_n = \frac{1}{k_n}$ и покажем, что $\lambda_n x_n \to \mathbf{0}$. В самом деле, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, имеем при достаточно большом

$$e_\varepsilon(\lambda_n |x_n|) \geqslant e_{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{k_n} |x_n|\right).$$

Но тогда, благодаря соотношению (1),

---

*) Действительно, пусть $e_k \geqslant \bar{e}_k$. Так как

$$x_n = (\mathbf{1} - \bar{e}_k)\, x_n + (\bar{e}_k)\, x_n,$$

то

$$(\mathbf{1} - e_k)\, x_n \leqslant \frac{1}{k}\,(\mathbf{1} - e_k)\,(\mathbf{1} - \bar{e}_k) = \frac{1}{k}\,(\mathbf{1} - e_k),$$

а $(e_k)\, x_n \leqslant (e_k)\, x_1$, так что

$$x_n \leqslant \frac{1}{k}\,(\mathbf{1} - e_k) + (e_k)\, x_n.$$

$$\lim_{n\to\infty} e_\varepsilon(\lambda_n|x_n|) = \mathbf{1},$$

откуда по второму признаку сходимости (см. 2.26 гл. IV), благодаря произвольности ε, и следует, что $\lambda_n x_n \to \mathbf{0}$.

2.24. Теорема. *Расширенное K-пространство X счётного типа и с устойчивой сходимостью — регулярно.*

Доказательство. Покажем сначала, что для единичных элементов пространства X имеет место теорема о диагональной последовательности. Пусть $e_n^{(k)} \searrow \mathbf{0}$ при $k\to\infty$ и $e_n^{(k)} \leqslant e_{n+1}^{(k)}$ *) ($e_n^{(k)}$ — единичные элементы пространства X). Определим элементы x_k, полагая

$$x_k = e_1^{(k)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i+1}(e_{i+1}^{(k)} - e_i^{(k)}) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Разности $e_{i+1}^{(k)} - e_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ — попарно дизъюнктные единичные элементы пространства X, так что это определение элементов x_k имеет смысл. Легко видеть, что $x_k \to \mathbf{0}$.

Действительно, в качестве возможных значений для характеристик элементов x_k имеем:

$$e_{\frac{1}{n}}(x_k) = \mathbf{1} - e_{n-1}^{(k)}{}^{**}) \quad (n = 3, 4, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots),$$

следовательно, $e_{\frac{1}{n}}(x_k) \to \mathbf{1}$ при всяком фиксированном n и $k\to\infty$.

Так как сходимость в X устойчива, то существует последовательность чисел $\lambda_k \to +\infty$ такая, что $\lambda_k x_k \to \mathbf{0}$. Для каждого натурального n подберём индекс k_n, полагая его равным такому значению k, для которого $\lambda_k > n$ (такое k непременно найдётся, так как $\lambda_k \to +\infty$). Очевидно,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{k_n} x_{k_n} = \mathbf{0}.$$

Следовательно, в силу второго признака сходимости (см. 4.18 гл. III), при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} Ce_\varepsilon(\lambda_{k_n} x_{k_n}) = \mathbf{0}.$$

Но

$$\lambda_{k_n} x_{k_n} \geqslant n x_{k_n} \geqslant n e_1^{(k_n)} + \sum_{i=1}^{n-1} (e_{i+1}^{(k)} - e_i^{(k_n)}) \geqslant e_n^{(k_n)}.$$

Отсюда ясно, что при $0 < \varepsilon < 1$

$$e_n^{(k_n)} \leqslant Ce_\varepsilon(\lambda_k x_k);$$

---

*) Если бы последнее соотношение не имело места, то можно было бы вместо элементов $e_n^{(k)}$ рассмотреть элементы $\overline{e}_n^{(k)} = e_1^{(k)} \vee e_2^{(k)} \vee \ldots \vee e_n^{(k)}$.

**) Действительно,

$$(e_{n-1}^{(k)})\, x_k = e_1^{(k)} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{i+1}(e_{i+1}^{(k)} - e_i^{(k)}) \geqslant \frac{1}{n-1} e_{n-1}^{(k)} \geqslant \frac{1}{n} e_{n-1}^{(k)},$$

$$(Ce_{n-1}^{(k)})\, x_k = \sum_{i=n-1}^{\infty} \frac{1}{i+1}(e_{i+1}^{(k)} - e_i^{(k)}) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=n-1}^{\infty} (e_{i+1}^{(k)} - e_i^{(k)}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n}(\mathbf{1} - e_{n-1}^{(k)}).$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty} e_n^{(k_n)} = \mathbf{0},$$

так что в X для единичных элементов имеет место теорема о диагональной последовательности. В таком случае в силу 2.23 в X выполняется теорема об аннулирующей последовательности, а так как сходимость в X устойчива, то в X имеет место и теорема о диагональной последовательности (см. 1.34). Принимая во внимание, что X — счётного типа, заключаем, что X — регулярное K-пространство (1.47). Теорема доказана.

Замечание. Ранее было установлено (с помощью гипотезы континуума), что устойчивость сходимости влечёт за собой принадлежность пространства к счётному типу. Таким образом, опираясь на гипотезу континуума, можно утверждать, что расширенное K-пространство с устойчивой сходимостью — регулярно.

2.25. Теорема. *Расширенное K-пространство X счётного типа, в котором имеет место теорема об аннулирующей последовательности, — регулярно.*

Доказательство. 1) Снова докажем сначала, что для единичных элементов пространства X имеет место теорема о диагональной последовательности. Пусть $e_n^{(k)} \searrow \mathbf{0}$ при $k\to\infty$. Положим

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} k\,(e_n^{(k)} - e_n^{(k+1)}) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Элементы $e_n^{(k)} - e_n^{(k+1)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ попарно дизъюнктны. Такими же будут и элементы $k\,(e_n^{(k)} - e_n^{(k+1)})$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Так как X — расширенное пространство, то x_n — его конечные элементы (теорема 2.24 гл. IV). По условию, в X имеет место теорема об аннулирующей последовательности, поэтому найдутся числа $\lambda_n \to 0$ такие, что $\lambda_n x_n \to \mathbf{0}$. Можно предположить, что $\lambda_n = \frac{1}{k_n}$, где k_n — натуральные числа, монотонно возрастающие до бесконечности. Для характеристик имеем:

$$Ce_1(\lambda_n x_n) = Ce_1\left(\frac{1}{k_n} x_n\right) = Ce_1\left(\mathop{\mathrm{S}}_{k} \frac{k}{k_n}(e_n^{(k)} - e_n^{(k+1)})\right) \geqslant \mathop{\mathrm{S}}_{k>k_n} (e_n^{(k)} - e_k^{(k+1)}) =$$

$$= \sum_{k>k_n} (e_n^{(k)} - e_n^{(k+1)}) = e_n^{(k_n+1)}.$$

Но из $\lambda_n x_n \to \mathbf{0}$ вытекает, что $Ce_1(\lambda_n x_n) \to \mathbf{0}$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} e_n^{(k_n)} = \mathbf{0},$$

и наше утверждение доказано.

2) Покажем теперь, что сходимость в X есть сходимость с регулятором. Пусть $x_n \searrow \mathbf{0}$. В силу 1) и 2.21 существует последовательность единичных элементов $e_k \searrow \mathbf{0}$ такая, что при $n \geqslant n_k$

$$x_n \leqslant \frac{1}{k}(\mathbf{1} - e_k) + (e_k)\,x_1.$$

Элементы $e_i' = e_i - e_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ попарно дизъюнктны, поэтому попарно дизъюнктными будут и порождённые ими подпространства $\overline{X}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Но так как

$$e_k = \sum_{i=k}^{\infty} e'_i = \mathop{\mathbf{S}}_{i \geqslant k} e'_i,$$

то подпространства $\overline{X}_i$ $(i = k, k+1, \ldots)$ образуют разложение компоненты $X_k = X_{e_k}$, а потому

$$(e_k)\, x_1 = \mathop{\mathbf{S}}_{i \geqslant k} (e'_i)\, x_1.$$

Положим

$$x_0 = \mathop{\mathbf{S}}_{i} i\, (e'_i)\, x_1 + \mathbf{1}.$$

Элементы $(e'_i)\, x_1$ попарно дизъюнктны. Это же справедливо относительно элементов $i\,(e'_i)\, x_1$, и так как X — расширенное пространство, то $x_0 < +\infty$.

Для $n \geqslant n_k$ имеем:

$$x_n \leqslant \frac{1}{k}(\mathbf{1} - e_k) + (e_k)\, x_1 \leqslant \frac{1}{k}\mathbf{1} + \mathop{\mathbf{S}}_{i \geqslant k} (e'_i)\, x_1 \leqslant \frac{1}{k}\mathbf{1} + \mathop{\mathbf{S}}_{i \geqslant k} \frac{i}{k} (e'_i)\, x_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k}\mathbf{1} + \frac{1}{k} \mathop{\mathbf{S}}_{i \geqslant 1} i\,(e'_i)\, x_1 = \frac{1}{k} x_0.$$

Отсюда следует, что x_0 — регулятор сходимости последовательности $\{x_n\}$ и сходимость в X есть сходимость с регулятором. Вместе с тем X — счётного типа и в X имеет место теорема об аннулирующей последовательности. В таком случае, в силу 1.34 и 1.47, X — регулярное K-пространство.

Замечание. Если постулировать гипотезу континуума, то нет необходимости предполагать, что X — счётного типа. Действительно, наличие регулятора сходимости в X (что равносильно устойчивости сходимости в X) доказана без использования этого предположения, а из устойчивости сходимости следует и то, что X — счётного типа (1.48). Таким образом, расширенное K-пространство, в котором имеет место теорема об аннулирующей последовательности, — регулярно.

В заключение настоящего параграфа заметим, что многие K-пространства, не будучи регулярными, допускают регулярное расширение и потому близки по своим свойствам к регулярным. Естественно поставить вопрос: при каких условиях K-пространство допускает регулярное расширение? Можно показать, что

2.26. Для того чтобы K-пространство X допускало регулярное расширение, необходимо и достаточно, чтобы в X выполнялась следующая ослабленная аксиома регулярности:

Если $\{E_n\}$ — последовательность ограниченных сверху множеств положительных элементов и существует предел

$$\lim_{n \to \infty} [\sup E_n] = x,$$

то существуют такие конечные подмножества $E'_n \subset E_n$, что

$$\lim_{n \to \infty} [\sup E'_n] = x.$$

§ 3. K^+-пространства

Большую роль в теории операций и функционалов в K-пространствах играют K^+-пространства, являющиеся специальным случаем K-пространств. В определение K^+-пространства входит понятие (o)-аннулируемого множества. В дальнейшем понадобится также более общее понятие (t)-аннулируемого множества.

3.1. Основные определения.

3.11. Определение. a) Множество E элементов K-пространства X называется *(o)-аннулируемым*, если каковы бы ни были последовательность $\{x_n\}$ элементов из E и последовательность чисел $\lambda_n \to 0$, непременно $\lambda_n x_n \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$.

b) Множество E элементов K-пространства X называется *(t)-аннулируемым*, если каковы бы ни были последовательность $\{x_n\}$ элементов из E и последовательность чисел $\lambda_n \to 0$ непременно $\lambda_n x_n \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$.

Очевидно, что всякое ограниченное множество элементов произвольного K-пространства (o)-аннулируемо (тем более и (t)-аннулируемо).

3.12. Введём понятие K^+-пространства.

Определение. K-пространство X называется *K^+-пространством*, если всякое (o)-аннулируемое множество $E \subset X$ ограничено в X.

3.13. Примером K^+-пространства может служить M — K-пространство почти всюду ограниченных измеримых функций, заданных в промежутке $[a, b]$.

Если $E \subset M$ не ограничено, то для каждого натурального n найдётся ограниченная измеримая функция $x_n(t)$, принадлежащая E, такая, что

$$\operatorname{mes}_t \mathscr{E}\,[\,|x_n(t)| > n] > 0.$$

В таком случае

$$\operatorname{mes}_t \mathscr{E}\left[\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\, x_n(t)\right| > \sqrt{n}\,\right] > 0$$

и последовательность $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\, x_n(t)\right\}$ не стремится в M к нулю при $n \to \infty$ в смысле (o)-сходимости в M (так как она не является даже ограниченной в M). Таким образом, множество E не является (o)-аннулируемым. Отсюда и следует, что M — K^+-пространство.

В то же время, K-пространство M не регулярно. Действительно, если $x_n(t)$ — характеристическая функция интервала $\left(a, a + \frac{b-a}{n}\right)$, то $x_n \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$ при $n \to \infty$. Но элементы $\lambda_n x_n$ при любых $\lambda_n \to \infty$ в совокупности не ограничены, а потому последовательность $\{\lambda_n x_n\}$ не может (o)-сходиться к $\mathbf{0}$. Таким образом, (o)-сходимость в M не устойчива и в силу теоремы 1.22 M не регулярно.

K^+-пространством является также и m — K-пространство ограниченных последовательностей вещественных чисел. Читатель легко проверит это самостоятельно.

Приведём одно достаточное условие для того, чтобы K-пространство было K^+-пространством.

3.14. *Пусть в K-пространстве X выполняется условие: если* $\sup E_n = +\infty$ $(E_n \subset X,\ n = 1, 2, \ldots)$, *то в каждом E_n можно выделить конечное подмножество E_n так, чтобы*

$$\sup_n\ [\sup E_n'] = +\infty.$$

Тогда X есть K^+-пространство.

Доказательство. Пусть E — (o)-аннулируемое множество элементов из X; следует показать, что E ограничено. Не уменьшая общности, можно считать, что E состоит из положительных элементов. Допустим, что $\sup E = +\infty$. Через E_n обозначим множество тех элементов $x \in X$, для которых $nx \in E$. Очевидно, $\sup E_n = +\infty$, и по условию найдутся такие конечные подмножества $E_n' \subset E_n$, что

$$\sup_n \{\sup E_n'\} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ [\sup E_n'] = +\infty.$$

Пусть

$$E_k' = \{x_1^{(k)},\ x_2^{(k)}, \ldots,\ x_{n_k}^{(k)}\} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Положим

$$x_{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}+s} = k x_s^{(k)} \quad \text{и} \quad \lambda_{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}+s} = \frac{1}{k}$$

для $1 \leqslant s \leqslant n_k$. Тогда элементы x_n и числа λ_n определены для всех $n = 1, 2 \ldots$ Далее, так как $x_s^{(k)} \in E_k$, то все $x_n \in E$; вместе с тем, очевидно, $\lambda_n \to 0$. Но соотношение $\lambda_n x_n \to 0$ не имеет места. Действительно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \lambda_n x_n = \lim_{n\to\infty}\ [\sup(\lambda_n x_n,\ \lambda_{n+1} x_{n+1}, \ldots)] \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{k\to\infty}\left[\sup\left(\frac{1}{k} x_{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}+1}, \ldots, \frac{1}{k} x_{n_1+n_2+\ldots+n_k}\right)\right] =$$

$$= \overline{\lim_{k\to\infty}}\ [\sup E_k'] = +\infty,$$

что приводит к противоречию с (o)-аннулируемостью множества E.

Итак, E ограничено и X — K^+-пространство.

3.2. K^+-пространства счётного типа.

3.21. Теорема. *Всякое несчётное множество E попарно дизъюнктных (отличных от нуля) элементов K^+-пространства X счётного типа содержит счётное неограниченное подмножество.*

Доказательство. Допустим, что всякое счётное подмножество $E' \subset E$, $E' = \{x_n\}$, ограничено. Тогда $x_n \to \mathbf{0}$, так как элементы x_n попарно дизъюнктны и ограничены в совокупности (4.14 гл. I). В таком случае E — (o)-аннулируемое множество и, в силу определения K^+-пространства, — ограничено, что невозможно, так как X — счётного типа. Итак, среди счётных подмножеств множества E существует неограниченное.

3.22. Всякая вполне упорядоченная монотонно возрастающая по следовательность элементов K^+-пространства X счётного типа содер жит не более счётного множества различных элементов.

Доказательство. Пусть

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_\alpha \leqslant \ldots \qquad (x_\alpha \in X,\ \alpha < \Omega)$$

(можно предполагать, что все $x_\alpha \geqslant \mathbf{0}$). Представим X в виде соединения подпространств X_β с единицей

$$X = \mathop{\mathbf{S}}_{\beta \in \mathrm{B}} X_\beta$$

и покажем, что не более счётного множества подпространств X_β не дизъюнктны с последовательностью $\{x_\alpha\}$. Действительно, допустим противное; тогда найдётся несчётное множество подпространств X_{β_γ} и элементов x_{α_γ} таких, что

$$y_\gamma = \mathrm{Pr}_{X_{\beta_\gamma}} x_{\alpha_\gamma} > \mathbf{0}.$$

Элементы y_γ попарно дизъюнктны и образуют несчётное множество. В силу 3.21 найдется счётное неограниченное подмножество $\{y_{\gamma_n}\}$. Пусть α_0 — порядковое число, непосредственно следующее за всеми α_{γ_n} $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$y_{\gamma_n} = \mathrm{Pr}_{X_{\beta_{\gamma_n}}} x_{\alpha_{\gamma_n}} \leqslant \mathrm{Pr}_{X_{\beta_{\gamma_n}}} x_{\alpha_0} \leqslant x_{\alpha_0},$$

что противоречит неограниченности множества $\{y_{\gamma_n}\}$. Итак, только счётное множество подпространств X_β — пусть это будут X_{β_1}, $X_{\beta_2}, \ldots$ — не дизъюнктны с последовательностью $\{x_\alpha\}$.

Пусть X^* — наименьшая компонента K-пространства X, содержащая все подпространства X_{β_n} Так как каждое X_{β_n} — счётного типа и содержит единицу, то и X^* — также счётного типа и содержит единицу (свойством единицы компоненты X^* будет обладать, например, соединение единиц подпространств X_{β_n}). При этом вся последовательность $\{x_\alpha\}$ принадлежит X^*. Но, как было установлено по ходу доказательства 1.45а) всякая, хотя бы и неограниченная сверху, монотонно возрастающая последовательность элементов K-пространства с единицей счётного типа содержит не более счётного множества различных элементов; поэтому и последовательность $\{x_\alpha\}$ содержит не более счётного множества различных элементов.

3.23. Во всяком несчётном множестве $E=\{x_\alpha\}$ $(\alpha<\vartheta)$ элементов K^+-пространства X счётного типа содержится такое счётное подмножество E', что

$$\sup E' = \sup E.$$

Доказательство. Если E ограничено сверху, то справедливость утверждения следует из 1.45. Пусть E не ограничено сверху, а всякое счётное подмножество множества E — ограничено сверху. Методом трансфинитной индукции построим последовательность

$$y_1<y_2<\ldots<y_\beta<\ldots \quad (\beta<\Omega)$$

элементов пространства X следующим образом. Положим $y_1=x_1$, и если элементы y_γ для $\gamma<\beta$ уже определены, то положим

$$y_\beta = \sup_{\gamma<\beta}\{y_\gamma\} \vee x_{\alpha_\beta},$$

где x_{α_β} — первый элемент последовательности E, обладающий тем свойством, что

$$\sup_{\gamma<\beta}\{y_\gamma\} \vee x_{\alpha_\beta} > \sup_{\gamma<\beta}\{y_\gamma\}.$$

Такой элемент непременно найдётся, так как по предположению

$$\sup_{\gamma<\beta}\{y_\gamma\} < +\infty,$$

в то время как $\sup E=+\infty$. Таким образом, в X построена несчётная возрастающая последовательность элементов, что противоречит предложению 3.22. Противоречие является результатом допущения того, что все счётные подмножества множества E ограничены сверху. Следовательно, найдётся такое счётное подмножество $E'\subset E$, что

$$\sup E' = \sup E = +\infty.$$

3.24. Замечание. Можно доказать, что для любого K-пространства свойства, сформулированные в 3.21, 3.22 и 3.23, равносильны.

3.3. Регулярные K^+-пространства. Укажем некоторые достаточные условия того, что регулярное K-пространство есть K^+-пространство.

3.31. Теорема. *Расширенное регулярное K-пространство есть K^+-пространство.*

Доказательство. Пусть X — расширенное регулярное K-пространство и $E=\{x_\alpha\}$ $(\alpha\in A)$ — (o)-аннулируемое множество его элементов. Следует показать, что оно ограничено. Допустим, что оно не ограничено сверху, и рассмотрим множества

$$E_n=\left\{\operatorname{arctg}\frac{1}{n}x_\alpha\right\} \quad (\alpha\in A,\ n=1,2,\ldots).$$

По свойству непрерывных монотонных функций в расширенных пространствах (3.23 гл. IV), найдётся единичный элемент $e_0>0$ такой, что

$$\sup_\alpha\left\{(e_0)\operatorname{arctg}\frac{1}{n}x_\alpha\right\}=\frac{\pi}{2}e_0 \quad (n=1,2,\ldots).$$

Пусть X_0 — подпространство пространства X, порождённое элементом e_0, и $E_0 = \{y_\alpha\}$, где y_α — проекция x_α в X_0. Тогда

$$\sup_\alpha \left\{\operatorname{arctg} \frac{1}{n} y_\alpha\right\} = \frac{\pi}{2} e_0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

(см. 3.14 гл. IV). Очевидно, что X_0 — регулярное K-пространство (2.11) и E_0 — его (o)-аннулируемое подмножество. В силу аксиомы регулярности найдутся такие конечные множества

$$E_n' = \left\{\operatorname{arctg} \frac{1}{n} y_i^{(n)}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, k_n, \quad n = 1, 2 \ldots),$$

что $E_n' \subset E_0$ и

$$\lim_{n\to\infty} [\sup E_n'] = \frac{\pi}{2} e_0.$$

Отсюда заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\left[\sup_i \frac{1}{n} y_i^{(n)}\right] = \frac{\pi}{2} e_0$$

(3.21 гл. IV). Но тогда

$$y^* = \sup_{i,n} \frac{1}{n} y_i^{(n)} = +\infty;$$

иначе, если $y^* < +\infty$, мы бы имели $\frac{\pi}{2} e_0 \leqslant \operatorname{arctg} y^*$, что невозможно (3.2 гл. IV), так как e_0 — единица подпространства X_0. Положим теперь

$$y_{k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}+s} = y_s^{(n)} \text{ и } \lambda_{k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}+s} = \frac{1}{n} \quad \text{для } 1 \leqslant s \leqslant k_n.$$

Элементы y_i и числа λ_i определены, очевидно, для всех $i = 1, 2, \ldots$, причём $y_i \in E_0$ и $\lambda_i \to 0$ при $i \to \infty$. Но $\lambda_i y_i$ не стремится к нулю при $i \to \infty$, так как

$$\sup_i \{\lambda_i y_i\} = \sup_n \left\{\frac{1}{n} y_1^{(n)} \vee \frac{1}{n} y_2^{(n)} \vee \ldots \vee \frac{1}{n} y_{k_n}^{(n)}\right\} = \infty.$$

Таким образом, множество E_0 оказывается не (o)-аннулируемым, вопреки предположению. Противоречие является результатом предположения о неограниченности множества E сверху. Следовательно, E сверху ограничено. Аналогично покажем, что E ограничено и снизу. Теорема доказана.

ГЛАВА VI

K-ПРОСТРАНСТВА С МЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ И НОРМИРОВАННЫЕ K-ПРОСТРАНСТВА

Все рассмотренные выше классы K-пространств удовлетворяли некоторым условиям, формулировавшимся только в терминах алгебры и соотношений порядка. В настоящей главе на рассматриваемые K-пространства налагаются некоторые условия метрического характера: в K-пространстве предполагается определённой некоторая «метрическая функция», значения которой в наиболее простом и важном случае — вещественные числа. Пространства этого вида регулярны и обладают многими другими важными свойствами. При надлежащем определении «расстояния» K-пространство с метрической функцией оказывается «метрическим пространством», (t)-сходимость в котором равносильна сходимости по расстоянию. Частным случаем K-пространств с метрической функцией являются «нормированные» K-пространства, имеющие весьма большое значение в приложениях функционального анализа.

§ 1. K-пространства с метрической функцией

1.1. Общие свойства K-пространств с метрической функцией. Определение. K-пространство X называется пространством с *метрической функцией*, если в нём для положительных элементов $x \geqslant \mathbf{0}$ определена вещественная «метрическая функция» $\rho(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\rho(x) \geqslant 0$; $\rho(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \mathbf{0}$;
2) если $\mathbf{0} \leqslant x < y$, то $\rho(x) \leqslant \rho(y)$;
3) если $x_n \to x$ монотонно, то $\rho(x_n) \to \rho(x)$;
4) если $x_n \nearrow +\infty$, то невозможно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{p\to\infty} \rho(x_{n+p} - x_n) = 0.$$

Распространим определение функции ρ на всё пространство, полагая для всякого $x \in X$ $\rho(x) = \rho(|x|)$.

1.11. Введём также понятие метрической функции группы элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. С этой целью положим

$$\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \rho(|x_1| \vee |x_2| \vee \ldots \vee |x_n|).$$

1.12. Метрическая функция $\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть (o)-непрерывная функция своих аргументов.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай одного аргумента. Пусть $x_i \to x$; тогда $|x_i| \to |x|$ и полагая, как обычно,

$$y_k = \sup(|x_k|, |x_{k+1}|, \ldots) \text{ и } z_k = \inf(|x_k|, |x_{k+1}|, \ldots),$$

будем иметь: $y_k \searrow |x|$, $z_k \nearrow |x|$ и $y_k \geqslant |x_k| \geqslant z_k$. По условию 3 $\rho(y_k) \to \rho(x)$, $\rho(z_k) \to \rho(x)$ и по условию 2 $\rho(y_k) \geqslant \rho(x_k) \geqslant \rho(z_k)$. Отсюда и следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x_k) = \rho(x).$$

В случае группы из n элементов, если $x_i^{(k)} \to x_i$ при $k \to \infty$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то

$$\lim_{k\to\infty} (|x_1^{(k)}| \vee |x_2^{(k)}| \vee \ldots \vee |x_n^{(k)}|) = |x_1| \vee |x_2| \vee \ldots \vee |x_n|$$

и, по доказанному,

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) = \rho(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Понятие метрической функции группы элементов позволяет дать простой и удобный критерий сходимости последовательности элементов к нулю, именно:

1.13. Для того чтобы в пространстве X с метрической функцией имело место соотношение $x_n \to \mathbf{0}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n,\, m\to\infty} \rho(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m) = 0.$$

Доказательство. а) Необходимость. Пусть $x_n \to \mathbf{0}$; тогда $|x_n| \to \mathbf{0}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \sup(|x_n|, |x_{n+1}|, \ldots) = \mathbf{0}.$$

По непрерывности метрической функции

$$\lim_{n\to\infty} \rho[\sup(|x_n|, |x_{n+1}|, \ldots)] = 0,$$

так что для некоторого $n = N$

$$\rho[\sup(|x_N|, |x_{N+1}|, \ldots)] < \varepsilon.$$

Принимая во внимание монотонность метрической функции (условие 2), тем более будет:

$$\rho(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m) < \varepsilon \text{ при } n, m \geqslant N.$$

b) Достаточность. Пусть

$$\lim_{n,\, m \to \infty} \rho(x_n, \ldots, x_m) = 0.$$

Тогда при $n, m \geqslant N$

$$\rho(x_n, \ldots, x_m) < \varepsilon.$$

Положим

$$\bar{x}_n = |x_1| \vee |x_2| \vee \ldots \vee |x_n|.$$

Так как

$$|x_1| \vee \ldots \vee |x_{n+p}| \leqslant [|x_1| \vee \ldots \vee |x_n|] + [|x_n| \vee \ldots \vee |x_{n+p}|]$$

или

$$\bar{x}_{n+p} - \bar{x}_n \leqslant |x_n| \vee \ldots \vee |x_{n+p}|,$$

то ввиду монотонности функции ρ

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{p \to \infty} \rho(\bar{x}_{n+p} - \bar{x}_n) \leqslant \lim_{n \to \infty} \lim_{p \to \infty} \rho(x_n, \ldots, x_{n+p}) = 0,$$

откуда следует, если принять во внимание условие 4, что

$$\sup(|x_1|, |x_2|, \ldots) = \lim_{n \to \infty} \bar{x}_n < +\infty.$$

Имеем при $n \geqslant N$:

$$\rho[\sup(|x_n|, |x_{n+1}|, \ldots)] = \lim_{m \to \infty} \rho(x_n, \ldots, x_m) \leqslant \varepsilon$$

и ввиду произвольной малости ε

$$\lim_{n \to \infty} \rho[\sup(|x_n|, |x_{n+1}| \ldots)] = 0. \tag{1}$$

С помощью условий 1 и 3 отсюда легко заключить, что

$$\lim_{n \to \infty} [\sup(|x_n|, |x_{n+1}|, \ldots)] = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Действительно, если бы

$$\lim_{n \to \infty} [\sup(|x_n|, |x_{n+1}|, \ldots)] = y > \mathbf{0},$$

то

$$\lim_{n \to \infty} \rho[\sup(|x_n|, |x_{n+1}|, \ldots)] = \rho(y) > 0,$$

вопреки только что установленному соотношению (1).

Итак, справедливость соотношения (2) доказана, а тогда

$$\lim_{n \to \infty} |x_n| = \mathbf{0} \text{ и } \lim_{n \to \infty} x_n = \mathbf{0}.$$

1.14. В K-пространстве X с метрической функцией имеет место теорема о диагональной последовательности (1.21 гл. V).

Доказательство. Ввиду 1.35 гл. V достаточно показать, что если $x_n^{(k)} \searrow \mathbf{0}$ при $k \to \infty$, то существует такая последовательность индексов $k_1 < k_2 < \ldots$, что $x_n^{(k_n)} \to \mathbf{0}$, при $n \to \infty$.

Пусть $\varepsilon_n \to 0$. Так как $x_1^{(k)} \to \mathbf{0}$, то найдется k_1 такое, что $\rho(x_1^{(k_1)}) < \varepsilon_1$. Далее, при $k \to \infty$ будет

$$\rho(x_1^{(k_1)}, x_2^{(k)}) \to \rho(x_1^{(k_1)}) < \varepsilon_1 \text{ и } \rho(x_2^{(k)}) \to 0.$$

Отсюда следует существование такого индекса k_2, что

$$\rho(x_1^{(k_1)}, x_2^{(k_2)}) < \varepsilon_1 \text{ и } \rho(x_2^{(k_2)}) < \varepsilon_2.$$

Продолжая этот процесс, найдём такую последовательность индексов $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$, что будут выполнены неравенства

$$\rho(x_n^{(k_n)}, \ldots, x_{n+p}^{(k_{n+p})}) < \varepsilon_n \quad (n = 1, 2, \ldots, p = 1, 2, \ldots).$$

В таком случае в силу 1.13

$$\lim_{n \to \infty} x_n^{(k_n)} = \mathbf{0},$$

ч. и тр. д.

1.15. Всякое несчётное множество попарно дизъюнктных (отличных от нуля) элементов K-пространства X с метрической функцией содержит счётное неограниченное подмножество.

Доказательство. Пусть $E = \{x_\alpha\}$ — несчётное множество попарно дизъюнктных элементов пространства X. Очевидно, существует число $\varepsilon > 0$ такое, что множество E_ε тех элементов из E, для которых $\rho(x_\alpha) > \varepsilon$, несчётно. Выделим из E_ε счётное подмножество $E' = \{y_n\}$. Если бы E' было ограниченным, то ввиду попарной дизъюнктности его элементов мы имели бы $y_n \to \mathbf{0}$ (4.14 гл. I), что несовместимо с неравенством $\rho(y_n) > \varepsilon$. Итак, E' — счётное неограниченное подмножество множества E.

1.16. a) K-пространство X с метрической функцией — счётного типа.

Доказательство. Утверждение вытекает непосредственно из предложения 1.15, на основании которого несчётное множество попарно-дизъюнктных элементов не может быть ограничено.

Кроме того, для K-пространства X с метрической функцией справедливы следующие утверждения:

b) Всякое (хотя бы и неограниченное сверху множество $E \subset X$ содержит такое счётное подмножество E', что

$$\sup E' = \sup E.$$

c) Всякая вполне упорядоченная монотонная (хотя бы и неограниченная) последовательность элементов из X содержит не более счётного множества различных элементов.

Эти утверждения вытекают из доказанного только что предложения 1.15 и замечания 3.24 гл. V

Определение. K-линеал X, в котором аксиома V выполнена в ослабленной форме, а именно: всякое *счётное* ограниченное сверху множество $E \subset X$ имеет верхнюю грань $\sup E$, называется *K^--пространством.*

Как было отмечено в гл. I, в пространствах этого вида имеет смысл введённое для K-пространств понятие предела и сохраняются его обычные свойства.

1.17. Пусть X — K^--пространство, для положительных элементов которого определена метрическая функция ρ, удовлетворяющая следующим условиям:

1) Если $\mathbf{0} \leqslant x < y$, то $\rho(x) < \rho(y)$;

2) Если $x_n \nearrow x$, то $\rho(x_n) \to \rho(x)$.

Тогда аксиома V выполняется в X в полном объёме.

Доказательство. Пусть E — произвольное ограниченное сверху множество элементов из X и x^* — его произвольная верхняя граница. Не умаляя общности доказательства, можно предположить, что E содержит нулевой элемент пространства X (этого всегда можно достичь переходом к разностям $x - x_0$, где x_0 — фиксированный элемент из E, а x — любой элемент из E). Рассмотрим множество всех элементов вида

$$y = \mathbf{0} \vee x_1 \vee x_2 \vee \ldots, \vee x_n \tag{3}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — произвольные элементы из E. Очевидно, всегда $y \leqslant x^*$ и, следовательно, $\rho(y) \leqslant \rho(x^*)$. Итак, множество чисел $\rho(y)$ ограничено сверху; пусть ρ_0 — его верхняя грань.

Существует такая последовательность $\{y_n\}$, что $\rho(y_n) \to \rho_0$; при этом, очевидно, можно предположить, что $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots$. (В противном случае данную последовательность можно было бы заменить на $\bar{y}_n = y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_n$.) Так как $y_n \leqslant x^*$, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y'.$$

В силу условия 2 $\rho(y') = \rho_0$. Покажем теперь, что $y' = \sup E$.

Пусть x — произвольный элемент из E. Существует предел

$$\lim_{n\to\infty} (y_n \vee x) = y' \vee x,$$

и так как элемент $y_n \vee x$ — вида (3), то $\rho(y_n \vee x) \leqslant \rho_0$ и, следовательно, $\rho(y' \vee x) \leqslant \rho_0$. С другой стороны, $y' \vee x \geqslant y'$; при этом знак неравенства исключается, так как в противном случае, в силу условия 1, $\rho(y' \vee x) > \rho(y') = \rho_0$, что противоречит доказанному. Итак, $y' \vee x = y'$, и $x \leqslant y'$. Так как x — произвольный элемент из E,

то y' — верхняя граница для E. Вместе с тем $y' \leqslant x^*$, так что $y' = \sup E$, ч. и тр. д.

Замечание. Если X — K-пространство, в котором определена метрическая функция, удовлетворяющая только условию 1 этого пункта, то всякая монотонная трансфинитная последовательность элементов из X содержит не более счётного множества различных элементов.

В самом деле, если

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_\alpha \leqslant \ldots \quad (\alpha < \Omega)$$

(причём можно, не умаляя общности доказательства, предположить, что все $x_\alpha \geqslant \mathbf{0}$), то в трансфинитной последовательности вещественных чисел

$$\rho(x_1) \leqslant \rho(x_2) \leqslant \ldots \leqslant \rho(x_\alpha) \leqslant \ldots \quad (\alpha < \Omega)$$

содержится не более счётного множества различных элементов, т. е. начиная с некоторого числа α первого или второго числового класса

$$\rho(x_\alpha) = \rho(x_{\alpha+1}) = \ldots,$$

откуда ввиду условия 1

$$x_\alpha = x_{\alpha+1} = \ldots,$$

ч. и тр. д. Из доказанного следует, что в X имеют место все предложения 1.15 и 1.16 (ср. 3.24 гл. V).

Существенное значение имеет следующая теорема.

1.18. Теорема. *K-пространство X с метрической функцией регулярно.*

Действительно, X — пространство счётного типа (1.16а)) и вместе с тем в нём имеет место теорема о диагональной последовательности (1.14). Остаётся применить теорему 1.47 гл. V.

Обратное предложение, вообще говоря, неверно. Так, например, счётное соединение несчётного множества K-пространств с метрической функцией представляет собой регулярное K-пространство (2.15 гл. V), между тем, как счётное соединение несчётного множества пространств с метрической функцией не есть пространство с метрической функцией, так как в нём, как нетрудно видеть, содержится несчётное множество попарно дизъюнктных элементов, всякое счётное подмножество которого ограничено (ср. 1.15). Однако имеет место следующее предложение.

1.19. Счётное соединение счётного множества K-пространств с метрической функцией есть пространство с метрической функцией.

Действительно, пусть X — соединение пространств X_n $(n=1,2,\ldots)$ и ρ_n — метрическая функция в X_n. Положим для любого $x \in X$

$$\rho(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(x_n)}{1+\rho_n(x_n)},$$

где

$$x = \bigoplus_n x_n, \quad x_n \in X_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Легко проверить, что ρ обладает всеми свойствами метрической функции в X.

1.2. *KM*-пространства.

1.21. Определение. K-пространство X с метрической функцией ρ, удовлетворяющей помимо условий 1—4 (см. 1.1) добавочному условию:

5) Если $x \geqslant \mathbf{0}$, $x_n \geqslant \mathbf{0}$ и $\rho(x_n) \to 0$, то

$$\rho(x, x_n) = \rho(x \vee x_n) \to \rho(x),$$

называется *KM-пространством.*

1.22. Теорема. *В KM-пространстве X соотношения* $x_n \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$ *и* $\rho(x_n) \to 0$ *равносильны.*

Доказательство. Из 1.13 легко следует, что соотношение $x_n \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$ влечёт за собой $\rho(x_n) \to 0$. Пусть теперь $\rho(x_n) \to 0$ и $\varepsilon_n \to 0$ (ε_n — положительные вещественные числа). Найдём такой индекс n_1, чтобы

$$\rho(x_{n_1}) < \varepsilon_1.$$

Далее, найдём индекс $n_2 > n_1$, для которого

$$\rho(x_{n_2}) < \varepsilon_2 \quad \text{и} \quad \rho(x_{n_1}, x_{n_2}) < \varepsilon_1.$$

Последнее возможно, так как в силу условия 5

$$\rho(x_{n_1}, x_n) \to \rho(x_{n_1}) < \varepsilon_1 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Продолжая этот процесс, мы подберём последовательность индексов $n_1 < n_2 < \ldots$ так, что будут выполняться неравенства

$$\rho(x_{n_i}, x_{n_{i+1}}, \ldots, x_{n_{i+j}}) < \varepsilon_i \quad (j = 1, 2, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots).$$

Теперь, применяя 1.13, мы заключаем, что $x_{n_i} \to \mathbf{0}$ при $i \to \infty$.

Таким же образом, из всякой подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$, принимая во внимание, что $\rho(x_{n_k}) \to 0$, мы выделим частичную последовательность $x_{n_{k_i}} \to \mathbf{0}$. Отсюда и следует, что $x_n \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$. Теорема доказана.

Следствие 1. *В KM-пространстве X для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$ *такое, что из* $\rho(x) < \delta$ *и* $\rho(y) < \delta$ *следует* $\rho(x + y) < \varepsilon$.

Доказательство. Допустим противное; тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ найдутся последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ такие, что

$$\rho(x_n) < \frac{1}{n}, \ \rho(y_n) < \frac{1}{n}, \quad \text{а} \quad \rho(x_n + y_n) \geqslant \varepsilon \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Но в силу доказанной теоремы $x_n \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$ и $y_n \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$, а тогда $x_n + y_n \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$ и $\rho(x_n + y_n) \to 0$, что приводит к противоречию. Утверждение доказано.

Следствие 2. *В КМ-пространстве X для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что из $\rho(x) < \delta$, $\rho(y) < \delta$ и $\rho(z) < \delta$ следует $\rho(x+y+z) < \varepsilon$.*

Доказательство. По следствию 1 $\rho(x+y+z) < \varepsilon$, если $\rho(x+y) < \delta$ и $\rho(z) < \delta$. Подберём теперь δ'' так, чтобы из $\rho(x) < \delta''$ и $\rho(y) < \delta''$ вытекало $\rho(x+y) < \delta'$. Возьмём, наконец, $\delta = \min(\delta', \delta'')$. Тогда при $\rho(x) < \delta$, $\rho(y) < \delta$ и $\rho(z) < \delta$ имеем: $\rho(x+y+z) < \varepsilon$, ч. и тр. д.

1.23. Теорема о метрической полноте *КМ*-пространства. *В КМ-пространстве X имеет место принцип сходимости Коши, т. е. для существования элемента $x \in X$ такого, что*

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n - x) = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n,\, m\to\infty} \rho(x_n - x_m) = 0.$$

Доказательство. a) Необходимость. Пусть $\rho(x_n - x) \to 0$, тогда $x_n - x \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$ (1.22) и $x_n \xrightarrow{(t)} x$. Но

$$x_n - x_m = (x_n - x) + (x - x_m),$$

откуда

$$(t)\text{-}\lim_{n,\, m\to\infty} (x_n - x_m) = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \lim_{n,\, m\to\infty} \rho(x_n - x_m) = 0.$$

b) Достаточность. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность элементов из X, для которой

$$\lim_{n,\, m\to\infty} \rho(x_n - x_m) = 0.$$

Зададимся числом ε_1, $0 < \varepsilon_1 < 1$, и по нему подберём число $\delta_1 < \varepsilon_1$ так, чтобы $\rho(x+y) < \varepsilon_1$ при $\rho(x) < \delta_1$ и $\rho(y) < \delta_1$, что возможно в силу следствия 1 из предыдущей теоремы. Найдётся индекс n_1 такой, что

$$\rho(x_n - x_m) < \delta_1 \quad \text{при } n,\ m \geqslant n_1.$$

Пусть теперь индексы n_i и числа δ_i и ε_i для $i < k$ уже определены. Возьмём $\varepsilon_k < \min\left(\delta_{k-1}, \frac{1}{k}\right)$ и, как выше, по ε_k подберём соответствующее $\delta_k < \varepsilon_k$. Далее, найдётся столь большой индекс n_k, что

$$\rho(x_n - x_m) < \delta_k \quad \text{при } n,\ m \geqslant n_k.$$

Таким образом, при всех $k = 1, 2, \ldots$

$$\rho(x_{n_k} - x_{n_{k+1}}) < \delta_k < \varepsilon_k.$$

Покажем теперь, что

$$\rho(|x_{n_k}-x_{n_{k+1}}|+\ldots+|x_{n_{k+s}}-x_{n_{k+s+1}}|)<\varepsilon_k. \tag{4}$$

В самом деле, это неравенство, очевидно, справедливо при $s=0$ и любом k. Допустим теперь, что оно верно при всех $s'<s$ и произвольном k; тогда

$$\rho(|x_{n_k}-x_{n_{k+1}}|)<\delta_k,\ \rho(|x_{n_{k+1}}-x_{n_{k+2}}|+\ldots+$$
$$+|x_{n_{k+s}}-x_{n_{k+s+1}}|)<\varepsilon_{k+1}<\delta_k,$$

откуда и следует соотношение (4).

Положим

$$z_k=|x_{n_1}-x_{n_2}|+\ldots+|x_{n_k}-x_{n_{k+1}}|.$$

Элементы z_k монотонно возрастают и в силу (4)

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{s\to\infty}\rho(z_{k+s}-z_s)=0,$$

откуда, по свойству 4 метрической функции, последовательность $\{z_k\}$ ограничена, так что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_{n_k}-x_{n_{k+1}}|$ сходится (4.1 гл. I). Положим

$$x=x_{n_1}+\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}}-x_{n_k}).$$

Последний ряд также (o)-сходится (4.12 гл. I); тогда $x_{n_k}\to x$ и $\rho(x_{n_k}-x)\to 0$. Отсюда легко заключить, что и $\rho(x_n-x)\to 0$, ч. и тр. д.

1.24. Теорема о метризуемости KM-пространства. *Во всяком KM-пространстве X можно определить «расстояние» $r(x,y)$ между любыми двумя его элементами x и y, удовлетворяющее аксиомам:*

1) $r(x,y)\geqslant 0$; *при этом* $r(x,y)=0$ *тогда и только тогда, когда* $x=y$;

2) $r(x,y)=r(y,x)$;

3) $r(x,y)\leqslant r(x,z)+r(y,z)$ (*аксиома треугольника*),

причём так, что соотношение $r(x_n,x)\to 0$ *равносильно* $x_n\xrightarrow{(t)}x$, *т. е. сходимость «по расстоянию» в* X *совпадет с* (t)-*сходимостью.*

Доказательство. Зададимся числом $\varepsilon_1>0$ и подберём такое число $\varepsilon_2>0$ (можно предположить, что $\varepsilon_2<\frac{\varepsilon_1}{2}$), что из $\rho(x)<\varepsilon_2$, $\rho(y)<\varepsilon_2$ и $\rho(z)<\varepsilon_2$ следует $\rho(x+y+z)<\varepsilon_1$. Существование числа ε_2 вытекает из следствия 2 теоремы 1.22. Если числа

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ уже определены, то выбираем число $\varepsilon_n > 0$ $\left(\varepsilon_n < \frac{\varepsilon_{n-1}}{2}\right)$ так, чтобы из $\rho(x) < \varepsilon_n$, $\rho(y) < \varepsilon_n$ и $\rho(z) < \varepsilon_n$ следовало $\rho(x+y+z) < \varepsilon_{n-1}$. Полученная таким образом последовательность чисел $\varepsilon_n \searrow 0$.

Введем вспомогательную функцию

$$\rho'(z) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ в случае, когда } \varepsilon_{k+1} \leqslant \rho(z) < \varepsilon_k \\ 1 \text{ если } \rho(z) \geqslant \varepsilon_1 \\ 0 \text{ если } z = 0 \end{cases}$$

Ясно, что функция $\rho'(z)$ определена для всех $z \in X$ и что соотношения $z_n^{(t)} \to 0$ и $\rho'(z_n) \to 0$ — равносильны. Далее, очевидно, что из $\rho'(x) < \varepsilon$, $\rho'(y) < \varepsilon$ и $\rho'(z) < \varepsilon$ следует $\rho'(x+y+z) < 2\varepsilon$.

Определим теперь в X расстояние между любыми двумя его элементами, полагая

$$r(x, y) = \inf_{\substack{u_0, u_1, \ldots, u_n \\ (u_0 = x,\, u_n = y)}} \left\{\sum_{k=1}^{n} \rho'(u_{k-1} - u_k)\right\},$$

где $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ — любая цепочка элементов, вставленная между x и y, т. е. $u_0 = x$, $u_n = y$, а $u_1, \ldots, u_{n-1}$ произвольны.

Нетрудно проверить, что расстояние в X обладает следующими свойствами:

1) $r(x, y) = r(y, x)$;
2) $r(x, y) \leqslant r(x, z) + r(y, z)$;
3) $r(x+z, y+z) = r(x, y)$.

Покажем теперь, что

$$\frac{1}{2}\rho'(x-y) \leqslant r(x, y) \leqslant \rho'(x-y).$$

Отсюда будет следовать, что $r(x_n, x) \to 0$ равносильно $\rho'(x_n - x) \to 0$ или $x_n^{(t)} \to x$, т. е. сходимость по расстоянию совпадает с топологической сходимостью, и что для $r(x, y)$ выполнена первая аксиома метрического пространства.

Неравенство $r(x, y) \leqslant \rho'(x-y)$ следует из самого определения r. Остается показать, что $r(x, y) \geqslant \rho'(x-y)$.

Для этого достаточно показать, что для любой цепочки $(u_0 = x, u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n = y)$

$$l = \rho'(x-u_1) + \rho'(u_1 - u_2) + \ldots + \rho'(u_{n-1} - y) \geqslant \frac{1}{2}\rho'(x-y).$$

Рассуждая по индукции, допустим, что это уже доказано для любой цепочки $(x = u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}, u_k = y)$, где число звеньев $k < n$. Затем подберём число h так, чтобы $0 \leqslant h < n$ и

$$l_1 = \sum_{k=1}^{h} \rho'(u_{k-1} - u_k) \leqslant \frac{1}{2}l, \quad l_2 = \sum_{k=h+2}^{h} \rho'(u_{k-1} - u_k) \leqslant \frac{1}{2}l$$

(если $h=0$ или $h=n-1$, то одна из этих сумм будет пустой). Тогда, по предположению индукции

$$l_1 \geqslant \frac{1}{2}\rho'(x-u_h), \quad l_2 \geqslant \frac{1}{2}\rho'(u_{h+1}-y),$$

откуда

$$\rho'(x-u_h) \leqslant l, \quad \rho'(u_{h+1}-y) \leqslant l.$$

Так как, кроме того, $\rho'(u_h-u_{h+1}) \leqslant l$, то по свойствам функции ρ',

$$\rho'(x-y) \leqslant 2l.$$

Теорема полностью доказана.

Замечание 1. Соотношение $r(x+z, y+z) = r(x, y)$ означает, что метрика, определенная в X, транзитивна.

Замечание 2. Если $\rho(x)$ метрическая функция в KM-пространстве X, то функция

$$\rho_1(x) = \sup_{|y| \leqslant x} \{\rho(y)\} \qquad (x \in X)$$

обладает свойствами 1—4 метрической функции и свойством 5 в усиленной форме, именно:

$$\rho_1(x+y) \leqslant \rho_1(x) + \rho_1(y).$$

Доказательство этого утверждения предоставляем читателю.

1.3. Условия ограниченности множества в K-пространствах с метрической функцией. Установим некоторые критерии ограниченности множества в пространстве с метрической функцией.

1.31. Пусть X — K-пространство, в котором определена метрическая функция ρ, удовлетворяющая условиям 1—3 из 1.1 и усиленному условию 4:

4′) Если $x_n \nearrow +\infty$, то $\rho(x_n) \nearrow +\infty$*).

Тогда необходимым и достаточным условием ограниченности множества $E \subset X$ является ограниченность числового множества

$$H = \{\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n)\} \quad (x_i \in E).$$

Доказательство. a) Необходимость. Пусть множество E ограничено. Тогда ограниченным будет и множество модулей элементов из E. Если x^* — его верхняя граница, то для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из E будем иметь $|x_i| \leqslant x^*$ и

$$\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \rho(|x_1| \vee |x_2| \vee \ldots \vee |x_n|) \leqslant \rho(x^*),$$

так что $\rho(x^*)$ является верхней границей множества H.

b) Достаточность. Пусть множество H ограничено. Докажем, что множество E также ограничено.

---

*) Очевидно, что условие 4 вытекает из 4′, так как, если $x_n \nearrow +\infty$, то $(x_{n+p}-x_n) \nearrow +\infty$ при $p \to \infty$ и поэтому $\lim\limits_{p\to\infty} \rho(x_{n+p}-x_n) = +\infty$.

Обозначим через X_E наименьшую компоненту K-пространства X, содержащую E, и покажем, что X_E — K-пространство с единицей. Во всяком случае по теореме 3.31 гл. III X_E разлагается на компоненты с единицей. Если этих компонент — конечное число, то ясно, что соединение их единиц будет единицей K-пространства X.

Пусть разложение X_E состоит из счётного множества компонент x_n. Обозначим через $\mathbf{1}_n$ единицу K-пространства X_n. По теореме об аннулирующей последовательности (1.23 гл. V)*) существуют такие положительные числа $\lambda_n \to 0$, что $\lambda_n \mathbf{1}_n \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$. Положим $x^* = \sup\limits_n \lambda_n \mathbf{1}_n$. Легко видеть, что x^* обладает свойством единицы в X_E.

Допустим теперь, что разложение X_E состоит из несчётного множества компонент X_α $(\alpha \in A)$. В этом случае для каждого $\alpha \in A$ найдётся такой элемент $x_\alpha \in E$, что

$$\mathrm{Pr}_{X_\alpha} |x_\alpha| = y_\alpha > \mathbf{0}.$$

В силу 1.15 среди элементов y_α найдётся счётное неограниченное множество $\{y_{\alpha_n}\}$. Тем более

$$\sup |x_{\alpha_n}| = +\infty,$$

т. е. при $n \to \infty$

$$|x_{\alpha_1}| \vee \ldots \vee |x_{\alpha_n}| \nearrow +\infty.$$

Тогда по условию 4′

$$\rho(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}) = \rho(|x_{\alpha_1}| \vee \ldots \vee |x_{\alpha_n}|) \to \infty,$$

что противоречит ограниченности множества H. Итак, наличие в разложении X_E несчётного множества компонент невозможно, следовательно, по установленному выше, X_E — K-пространство с единицей. Пусть $A = \sup H$, $\mathbf{1}$ — единица K-пространства X_E. Обозначим через E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ множество элементов $|x| \wedge n\mathbf{1}$, где $x \in E$. Множества E_n ограничены. Положим $y_n = \sup E_n$. По теореме 1.41 гл. V существует такое счётное множество элементов $x_n^{(k)} \in E_n$, что

$$y_n = \sup_k x_n^{(k)},$$

т. е.

$$x_n^{(1)} \vee \ldots \vee x_n^{(k)} \nearrow y_n$$

при $k \to \infty$. Но тогда по условию 3 для метрической функции

$$\rho(x_n^{(1)} \vee \ldots \vee x_n^{(k)}) \to \rho(y_n).$$

---

*) K-пространство X регулярно по теореме 1.18.

Так как каждый $x_n^{(k)}$ имеет вид $x_n^{(k)} = |\bar{x}_n^{(k)}| \wedge n\mathbf{1}$, где $\bar{x}_n^{(k)} \in E$, то

$$\rho(x_n^{(1)} \vee \ldots \vee x_n^{(k)}) \leqslant \rho(\bar{x}_n^{(1)}, \ldots, \bar{x}_n^{(k)}) \leqslant A,$$

откуда $\rho(y_n) \leqslant A$.

Положим $y = \sup y_n$. Так как $y_n \nearrow y$, то из неравенства $\rho(y_n) \leqslant A$ и условия 4′ сразу следует, что $y < +\infty$. С другой стороны, для любого $x \in E$

$$|x| \vee n\mathbf{1} \leqslant y$$

при любом n.

Но так как по определению характеристики

$$(e_n^{|x|})|x| \leqslant n e_n^{|x|},$$

то (см. 2.22a), 2.24d) и 4.13b) гл. III)

$$|x| \geqslant |x| \wedge n\mathbf{1} \geqslant (e_n^{|x|})|x| \wedge n\mathbf{1} = (e_n^{|x|})|x| \xrightarrow{(o)} (\mathbf{1})|x| = |x|,$$

откуда $|x| \wedge n\mathbf{1} \nearrow x$ при $n \to \infty$, а потому $|x| \leqslant y$ для любого $x \in E$. Таким образом, ограниченность E доказана.

1.32. При условиях предыдущего предложения X есть K^+-пространство.

Доказательство. Пусть $\sup E_n = +\infty$ ($E_n \subset X$, $n = 1, 2, \ldots$); тогда в силу 1.31 найдутся конечные подмножества $\bar{E}_n \subset E_n$, $\bar{E}_n = \{x_1^{(n)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)}\}$ такие, что

$$\rho(x_1^{(n)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)}) > n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Положим

$$E' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{E}_n.$$

Множество E' также в силу 1.31 не ограничено, так что

$$\sup E' = \sup_n [\sup \bar{E}_n] = +\infty.$$

В таком случае, по теореме 3.14 гл. V, X — K^+-пространство.

1.33. Пусть в KM-пространстве X метрическая функция ρ удовлетворяет добавочному условию:

существуют такие числа h и H, $1 < h \leqslant H < +\infty$, что

$$h\rho(x) \leqslant \rho(2x) \leqslant H\rho(x) \text{ для всякого } x \in X.$$

Тогда необходимым и достаточным условием (t)-аннулируемости множества $E \subset X$ (3.11b) гл. V) является ограниченность множества чисел $\{\rho(x)\}$ ($x \in E$).

Доказательство. Из добавочного условия, наложенного на функцию ρ, следуют неравенства

$$\rho(2^n x) \geqslant h^n \rho(x) \quad \text{и} \quad \rho(2^n x) \leqslant H^n \rho(x).$$

Допустим теперь, что множество $\{\rho(x)\}$ $(x \in E)$ ограничено, а множество E не (t)-аннулируемо. В таком случае, найдутся последовательность $\{x_n\}$ элементов из E и последовательность чисел $\lambda_n \to 0$, для которых соотношение $\lambda_n x_n \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$ не выполняется. Так как в KM-пространстве (t)-сходимость совпадает с «метрической» сходимостью, то $\rho(\lambda_n x_n)$ не стремится к нулю, и $\rho(\lambda_{n_i} x_{n_i}) > \varepsilon > 0$ для бесконечного множества индексов n_i. Подберём числа $k_i \to \infty$ так, чтобы $\frac{1}{2^{k_i}} > \lambda_{n_i}$. Тогда

$$\rho\left(\frac{1}{2^{k_i}} x_{n_i}\right) > \varepsilon \quad \text{и} \quad \rho(x_{n_i}) \geqslant h^{k_i} \rho\left(\frac{1}{2^{k_i}} x_{n_i}\right) > h^{k_i} \varepsilon,$$

откуда следует, что $\rho(x_{n_i}) \to \infty$ и множество $\{\rho(x)\}$ $(x \in E)$ не ограничено, вопреки предположению. Итак, E (t)-аннулируемо.

Если предположить, что множество $\{\rho(x)\}$ $(x \in E)$ не ограничено, то существует последовательность $\{x_n\}$ элементов из E, для которой $\rho(x_n) \to \infty$. Тогда найдётся такая последовательность чисел $i_n \to \infty$, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\rho(x_n)}{H^{i_n}} = +\infty.$$

Но вследствие добавочного свойства функции ρ,

$$\lim_{n \to \infty} \rho\left(\frac{1}{2^{i_n}} x_n\right) \geqslant \lim_{n \to +\infty} \frac{\rho(x_n)}{H^n} = +\infty,$$

так что соотношение $\frac{1}{2^{i_n}} x_n \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$ не выполняется и E — не (t)-аннулируемое множество.

Предложение полностью доказано.

1.4. Некоторые конкретные KM-пространства. К числу наиболее интересных KM-пространств относятся некоторые K-пространства, элементами которых служат измеримые функции и числовые последовательности. Рассмотрим прежде всего K-пространство S всех измеримых функций $x(t)$, заданных на некотором множестве E положительной меры (3.1 гл. I).

1.41. S — KM-пространство.

Доказательство. Введём для положительных элементов $x \in S$ метрическую функцию ρ, полагая

$$\rho(x) = \int_E \frac{x(t)}{1 + x(t)}\, dt \qquad (x \in S,\ x \geqslant \mathbf{0}).$$

Не опираясь на рассуждения из главы I, мы можем ещё раз доказать, что в S выполнены все аксиомы K-пространства. Действительно, аксиомы I—IV и ослабленная аксиома V (для счётных множеств)

очевидны, т. е. S—K^--пространство. Но так как метрическая функция ρ удовлетворяет условиям предложения 1.17, то согласно этому предложению S есть K-пространство.

Теперь проверим, что S — KM-пространство. Ясно, что ρ удовлетворяет условиям 1—3, налагаемым на метрическую функцию (см. 1.1). Проверим выполнение условия 4. Пусть $x_n \nearrow +\infty$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = +\infty$ на некотором множестве e положительной меры и, очевидно,

$$\lim_{p\to\infty} \rho(x_{n+p} - x_n) = \lim_{p\to\infty} \int\limits_E \frac{|x_{n+p}(t) - x_n(t)|}{1 + |x_{n+p}(t) - x_n(t)|}\, dt \geqslant \operatorname{mes} e.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{p\to\infty} \rho(x_{n+p} - x_n) \geqslant \operatorname{mes} e > 0,$$

ч. и тр. д.

Условие 5 (см. 1.21), как нетрудно видеть, выполняется в усиленной форме, а именно:

$$\rho(x_1 + x_2) \leqslant \rho(x_1) + \rho(x_2),$$

что следует из числового неравенства

$$\frac{a+b}{1+a+b} \leqslant \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b},$$

так что S действительно представляет собой KM-пространство.

Следствие. S — регулярное K-пространство.

Действительно, регулярность пространства S вытекает из теоремы 1.18 (это же было установлено ранее другим путём, см. 1.49 гл. V).

Как мы знаем (3.12 гл. I), топологическая сходимость в S совпадает со сходимостью по мере. Этот результат легко следует и из общей теории KM-пространств.

Действительно, в таких пространствах (t)-сходимость совпадает с метрической (1.22). Поэтому соотношение $x_n \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$ равносильно $\rho(x_n) \to 0$, откуда на основании неравенства

$$\rho(x_n) = \int\limits_E \frac{x_n(t)}{1 + x_n(t)}\, dt \geqslant \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \operatorname{mes} \underset{t}{E}(x_n(t) \geqslant \varepsilon),$$

заключаем, что $x_n(t) \to 0$ по мере. Наоборот, из сходимости $x_n(t)$ к 0 по мере легко следует, что $\rho(x_n) \to 0$.

1.42. S — K^+-пространство.

Действительно, S — расширенное K-пространство (см. 2.24 гл. IV), и, кроме того, оно регулярно (следует из 1.41). Отсюда в силу теоремы 3.31 гл. V и следует, что S — K^+-пространство. Впрочем, этот факт нетрудно установить и непосредственно.

1.43. K-пространство s, элементами которого служат всевозможные последовательности вещественных чисел (см. 3.3 гл. I) есть также KM-пространство.

Достаточно положить

$$\rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{1+\xi_k} \qquad (x = (\xi_1, \xi_2, \ldots),\ x \geqslant \mathbf{0})$$

и ρ будет обладать всеми свойствами метрической функции в KM-пространстве. Отсюда вытекает регулярность s.

Так же как и S, s — K^+-пространство. Мы уже видели, что (t)-сходимость в s совпадает с (o)-сходимостью (3.31 гл. I). Это, впрочем, имеет место во всяком дискретном расширенном пространстве.

Среди подпространств пространства S следует выделить широкий класс пространств типа L_T.

1.44. Определение. Пусть $T(u)$ — вещественная функция неотрицательного вещественного аргумента u, удовлетворяющая условиям:

1) $T(u) > 0$ для $u > 0$, $T(0) = 0$;
2) $T(u)$ непрерывна;
3) $T(u_2) > T(u_1)$ для $u_2 > u_1$;
4) существует постоянная A такая, что $T(2u) \leqslant AT(u)$. Через L_T обозначим множество элементов $x \in S$, для которых

$$\rho_T(x) = \int_E T(|x(t)|)\,dt < +\infty.$$

Частным случаем множества L_T является всё пространство измеримых функций S. Действительно, полагая $T(u) = \frac{u}{1+u}$, будем для всякого $x \in S$ иметь:

$$\rho(x) = \int_E \frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}\,dt < +\infty.$$

Указанная для пространства S функция $T(u)$ ограничена. Легко видеть, что и обратно: если $T(u)$ ограничена, то множество L_T включает все измеримые функции.

1.45. Теорема. *L_T — KM-пространство.*

Доказательство. Покажем сначала, что L_T — нормальное подпространство пространства S.

Заметим, прежде всего, что из условия 4 следует, что

$$T(2^n u) \leqslant A^n T(u).$$

Если теперь $x \in L_T$ и λ — произвольное вещественное число, то найдётся натуральное число n такое, что $2^n > |\lambda|$, и тогда

$$\rho_T(\lambda x) \leqslant \rho_T(2^n x) \leqslant A^n \rho_T(x),$$

откуда следует, что $\rho_T(\lambda x) < +\infty$ и $\lambda x \in L_T$.

Если x_1 и x_2 — элементы из L_T, то

$$\rho_T(|x_1| \vee |x_2|) \leqslant \rho_T(x_1) + \rho_T(x_2).$$

Далее

$$\rho_T(x_1 + x_2) \leqslant \rho_T[2(|x_1| \vee |x_2|)] \leqslant A[\rho_T(x_1) + \rho_T(x_2)],$$

следовательно, $x_1 + x_2 \in L_T$. Таким образом, L_T — линейное подмножество пространства S.

Если $|x_1| \leqslant x$, где $x \in L_T$, то, очевидно, $\rho_T(x_1) \leqslant \rho_T(x)$, и $x_1 \in L_T$, так что L_T — нормальное подпространство пространства S.

Рассматривая ρ_T как метрическую функцию, без труда проверим выполнение в L_T первых четырёх свойств метрической функции, причём, если функция $T(u)$ не ограничена, то свойство 4 выполняется в усиленной форме:

4′) если $x_n \nearrow +\infty$, то $\rho_T(x_n) \to +\infty$.

Пятое свойство метрической функции (см. 1.21) вытекает из неравенств

$$\rho_T(x) \leqslant \rho_T(x, x_n) \leqslant \rho_T(x) + \rho_T(x_n),$$

из которых явствует, что

$$\rho_T(x, x_n) \to \rho_T(x), \quad \text{если } \rho_T(x_n) \to 0.$$

Итак, L_T — KM-пространство. Теорема доказана.

Заметим также, что L_T — K^+-пространство. Действительно, если $T(u)$ не ограничена, то в L_T свойство 4 метрической функции выполняется в усиленной форме 4′ (см. 1.31), а тогда L_T — K^+-пространство в силу 1.32. Если же $T(u)$ ограничена, то как было отмечено выше, L_T совпадает с S, а S — K^+-пространство (см. 1.42).

1.46. Так как L_T — нормальное подпространство пространства S, то соотношение $x_n \xrightarrow{(o)} x$ в L_T означает, что $x_n(t) \to x(t)$ почти всюду и существует $x_0 \in L_T$ такой, что $|x_n(t)| \leqslant x_0(t)$ почти всюду ($n = 1, 2, \ldots$). Из регулярности KM-пространства следует, что в L_T имеет место, в частности, теорема о диагональной последовательности: если $x_n^{(k)} \xrightarrow{(o)} x_n$ в L_T и $x_n \xrightarrow{(o)} x$ в L_T, то существует последовательность индексов $\{k_n\}$ такая, что $x_n^{(k_n)} \xrightarrow{(o)} x$ в L_T.

Далее, сходимость в L_T есть сходимость с регулятором; поэтому, если $x_n \xrightarrow{(o)}$ в L_T, то найдётся регулятор сходимости $r \in L_T$ такой, что $|x_n - x| < \varepsilon r$ при $n \geqslant N_\varepsilon$. В таком случае

$$\left|\frac{x_n(t) - x(t)}{r(t)}\right| < \varepsilon \quad \text{почти всюду } (r(t) > 0)$$

и отношение $\dfrac{x_n(t) - x(t)}{r(t)} \to 0$ равномерно почти всюду.

1.47. Если функция T наряду со свойствами 1 — 4 обладает дополнительным свойством:

5) Существует постоянная $k > 0$ такая, что $T(2u) > (1+k)T(u)$, то в L_T выполняется соотношение

$$h\rho_T(x) \leqslant \rho_T(2x) \leqslant H\rho_T(x) \quad (h = 1+k,\ H = K)$$

(см. 1.33). В этом случае в L_T имеют место все предложения, установленные в 1.3.

Отметим, в частности, класс пространств L^p $(p > 0)$, для которых $T(u) = u^p$.

Случай $p \geqslant 1$ будет особо рассмотрен в следующем параграфе, посвящённом нормированным пространствам.

§ 2. Нормированные K-пространства

Рассмотрение конкретных функциональных пространств привело С. С. Банаха к введению основного понятия функционального анализа— понятия линейного нормированного пространства или пространства Банаха.

Благодаря работам С. С. Банаха и ряда других математиков, в особенности советских, общая теория линейных нормированных пространств выросла в самостоятельную далеко продвинутую и содержательную математическую дисциплину, получившую разнообразные применения во многих вопросах классической математики.

Однако при конкретном рассмотрении важных для анализа пространств функций и последовательностей существенное значение имеют понятия положительности, неравенства, положительной операции и др., не находящие себе места в теории нормированных пространств. В связи с этим большой интерес представляет изучение K-пространств, являющихся одновременно нормированными пространствами. Среди них особенно важны «KB-пространства», в которых норма и полуупорядочение согласованы между собой наилучшим образом.

Между содержанием настоящего и предыдущего параграфов существует тесная связь, поскольку норма в K-пространствах обладает многими (а часто и всеми) свойствами метрической функции.

Сначала мы остановимся на понятии просто линейного нормированного пространства.

2.1. Линейные нормированные пространства.

Определение. Линейное множество X называется *линейным нормированным пространством*, если всякому его элементу x отнесено вещественное число, — его норма, — обозначаемое $\|x\|$, так, что выполняются следующие аксиомы:

1) $\|x\| \geqslant 0$; при этом $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \mathbf{0}$;
2) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$;
3) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ (λ — вещественное число).

Понятие предела в нормированном пространстве X вводится следующим образом: элемент x называется *(b)-пределом* последовательности $\{x_n\}$ $(x_n \in X)$, если

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Будем также говорить, что $\{x_n\}$ *(b)-сходится к* x или $\{x_n\}$ *сходится к* x *по норме*, и обозначать это обстоятельство так:

$$x_n \xrightarrow{(b)} x \quad \text{или} \quad x = (b)\text{-}\lim x_n.$$

Легко видеть, что у (b)-сходящейся последовательности может быть только один предел.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *(b)-сходящейся в себе*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое N_ε, что $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ при $m, n \geqslant N_\varepsilon$.

Если всякая (b)-сходящаяся в себе последовательность элементов пространства X имеет предел, то X называется *полным* пространством. Полное линейное нормированное пространство называется пространством *типа* (B) (пространством Банаха).

§ 2.11. В линейном нормированном пространстве X обычным образом вводится понятие сходящегося ряда; именно, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad (x_n \in X)$$

называется (b)-сходящимся, если существует

$$(b)\text{-}\lim_{n \to \infty} s_n = (b)\text{-}\lim_{n \to \infty} (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = x.$$

Если X — полное пространство (типа (B)), то из сходимости ряда норм

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$$

следует и сходимость ряда элементов

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Действительно,

$$\|s_{n+p} - s_n\| = \|x_{n+1} + \ldots + x_{n+p}\| \leqslant \|x_{n+1}\| + \ldots + \|x_{n+p}\|$$

и потому

$$\lim_{n, p \to \infty} \|s_{n+p} - s_n\| \leqslant \lim_{n, p \to \infty} \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| = 0,$$

откуда благодаря полноте пространства X и следует существование предела

$$(b)\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = x.$$

2.12. Важными примерами пространств типа (B) являются:

a) Пространство C непрерывных функций $x(t)$, заданных в промежутке $[a, b]$, с нормой

$$\|x\| = \max_t |x(t)|.$$

Соотношение $x_n \xrightarrow{(b)} x$ в C означает, что $x_n(t) \to x(t)$ равномерно в промежутке $[a, b]$.

b) Пространство L^p $(p \geqslant 1)$ функций $x(t)$, суммируемых с p-й степенью в промежутке $[a, b]$, с нормой

$$\|x\| = \left\{\int_a^b |x(t)|^p\, dt\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Соотношение $x_n \xrightarrow{(b)} x$ в L^p означает, что $x_n(t) \to x(t)$ в среднем p-го порядка.

c) Пространство l^p $(p \geqslant 1)$ последовательностей чисел $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$, для которых ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p$$

сходится и норма элемента определяется так:

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

d) Пространство V функций $x(t)$ ограниченного изменения в промежутке $[a, b]$ с нормой

$$\|x\| = |x(a)| + \operatorname{var}_a^b x(t).$$

Сходимость в V есть сходимость «по изменению».

Все приведённые выше пространства являются полными.

2.13. Замечание. Неполные линейные нормированные пространства могут быть «пополнены» путём присоединения к ним новых «идеальных» или «несобственных» элементов.

Пусть X — неполное линейное нормированное пространство. Если $\{x_n\}$ — сходящаяся в себе последовательность элементов из X, не имеющая предельного элемента в X, то отнесём ей «идеальный» элемент x, который будем называть её «пределом». Дополним простран-

ство X всеми такими пределами. Норму присоединённого элемента x определим соотношением

$$\|x\| = \lim_{n \to \infty} \|x_n\|.$$

Два присоединённых элемента x и y отождествим, если $\|x_n - y_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, где x — предел x_n, а y — предел y_n.

Под суммой двух присоединённых элементов x и y будем понимать присоединённый элемент, отвечающий сходящейся в себе последовательности $\{x_n + y_n\}$, где последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют своими «пределами» элементы x и соответственно y. Произведение вещественного числа λ на присоединённый элемент x определим как «предел» сходящейся в себе последовательности $\{\lambda x_n\}$, где последовательность $\{x_n\}$ имеет своим «пределом» элемент x.

Можно показать, что с присоединением идеальных элементов пространство X превращается в новое пространство X_1, являющееся линейным нормированным и уже полным пространством.

Так, например, если в множестве C^p непрерывных функций, заданных в промежутке $[a, b]$, определить норму элемента x соотношением

$$\|x\| = \left\{ \int_a^b |x(t)|^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}},$$

то C^p будет линейным нормированным и неполным пространством. Пополнив C^p по методу, указанному выше, получим всё пространство L^p.

2.2. *KB*-линеал.

2.21. Определение. K-линеал X, представляющий собой одновременно линейное нормированное пространство, причём из неравенства $|x| \leqslant |y|$ следует $\|x\| \leqslant \|y\|$ (монотонность нормы), называется *KB-линеалом.*

Заметим, что из монотонности нормы в KB-линеале непосредственно следует, что $\|x\| = \||x|\|$.

Примером KB-линеала может служить K-линеал C, нормированный так, как указано выше.

Отметим некоторые свойства KB-линеала, используемые в дальнейшем.

2.22. $x \vee y$ и $x \wedge y$ — (b)-непрерывные функции своих аргументов, т. е. из $x_n \xrightarrow{(b)} x$ и $y_n \xrightarrow{(b)} y$ вытекает, что

$$x_n \vee y_n \xrightarrow{(b)} x \vee y$$

и

$$x_n \wedge y_n \xrightarrow{(b)} x \wedge y.$$

Доказательство. Согласно формуле, выведенной в 1.57 гл. I,

$$|(x_n \vee y_n) - (x \vee y_n)| + |(x_n \wedge y_n) - (x \wedge y_n)| = |x_n - x|,$$
$$|(x \vee y_n) - (x \vee y)| + |(x \wedge y_n) - (x \wedge y)| = |y_n - y|.$$

Отсюда следует, что

$$|(x_n \vee y_n) - (x \vee y)| \leqslant |(x_n \vee y_n) - (x \vee y_n)| + |(x \vee y_n) - (x \vee y)| \leqslant$$
$$\leqslant |x_n - x| + |y_n - y|,$$

а потому

$$\|(x_n \vee y_n) - (x \vee y)\| \leqslant \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0.$$

Аналогично проводится доказательство и для нижней грани.

2.23. (b)-предельный переход в неравенстве. Если $x_n \xrightarrow{(b)} x$, $y_n \xrightarrow{(b)} y$ и $x_n \leqslant y_n$, то $x \leqslant y$.

Доказательство. Имеем $x_n \vee y_n = y_n \xrightarrow{(b)} y$. С другой стороны, по предыдущему (2.22), $x_n \vee y_n \xrightarrow{(b)} x \vee y$. Следовательно, $x \vee y = y$, т. е. $x \leqslant y$.

KB-линеал может, в частности, быть и K-пространством. Тогда в нём можно рассматривать три вида сходимости: (o)-сходимость, (t)-сходимость и (b)-сходимость. Один такой класс пространств будет рассмотрен в следующем пункте.

2.3. K-пространства ограниченных элементов. В главе III (3.6) было введено понятие ограниченного элемента и отмечено, что во всяком K-пространстве с единицей множество ограниченных элементов представляет собой его нормальное подпространство. Рассмотрим теперь K-пространство X с единицей, все элементы которого — ограниченные, т. е. для всякого $x \in X$ имеется такое вещественное число λ, что

$$|x| \leqslant \lambda \mathbf{1}. \tag{1}$$

Такое K-пространство мы назовём *K-пространством ограниченных элементов*.

Если наименьшее число λ, удовлетворяющее неравенству (1), принять за норму элемента x и обозначить $\|x\|$, то, очевидно, будем иметь:

$$|x| \leqslant \|x\| \mathbf{1}. \tag{1'}$$

2.31. Теорема. *K-пространство ограниченных элементов X есть пространство типа (B).*

Доказательство. Для всякого $x \in X$ $\|x\| \geqslant 0$; при этом, если $\|x\| = 0$, то в силу (1′) $|x| = \mathbf{0}$ и, следовательно, $x = \mathbf{0}$. Обратно, если $x = \mathbf{0}$, то $|x| \leqslant \lambda \mathbf{1}$ при всяком $\lambda > 0$ и, по определению нормы, $\|x\| = 0$.

Далее,

$$|\lambda x| = |\lambda| |x| \leqslant |\lambda| \|x\| \mathbf{1},$$

откуда $\|\lambda x\| \leqslant |\lambda| \|x\|$. Заменим x на λx и λ на $\frac{1}{\lambda}$ (предполагая $\lambda \neq 0$; для $\lambda = 0$ наше утверждение очевидно); тогда $\|x\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda x\|$ или $\|\lambda x\| \geqslant |\lambda| \|x\|$. Сопоставляя два неравенства, получаем:

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$$

Проверим выполнение третьей аксиомы нормы. Имеем:

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \leqslant \|x\| \mathbf{1} + \|y\| \mathbf{1} = (\|x\| + \|y\|) \mathbf{1},$$

откуда следует, что $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Таким образом, X — линейное нормированное пространство. Остаётся доказать, что пространство X — полное (в смысле (b)-сходимости).

Пусть последовательность $\{x_n\}$ (b)-сходится в себе, т. е.

$$\lim_{n, p \to \infty} \|x_{n+p} - x_n\| = 0.$$

Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ найдётся N такое, что при $n \geqslant N$ и всех $p = 1, 2, \ldots$

$$\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon \text{ и, следовательно, } |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon \mathbf{1},$$

т. е. для последовательности $\{x_n\}$ выполнено условие теоремы об (o)-полноте K-пространства (2.21) гл. I. По этой теореме существует такой $x \in X$, что $x_n \xrightarrow{(o)} x$. Переходя в неравенстве

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon \mathbf{1}$$

к пределу при $p \to \infty$, получаем: $|x_n - x| \leqslant \varepsilon \mathbf{1}$, откуда $\|x_n - x\| \leqslant \varepsilon$ $(n \geqslant N)$. Ввиду произвольности ε это означает, что $x_n \xrightarrow{(b)} x$.

2.32. Если X — K-пространство ограниченных элементов, то:

a) $\|x\| = \||x|\|$ для всех $x \in X$;

b) $|x| \leqslant |y|$ влечёт $\|x\| \leqslant \|y\|$; таким образом, X — KB-линеал;

c) Если $x \geqslant \mathbf{0}$ и $y \geqslant \mathbf{0}$, то $\|x \vee y\| = \max(\|x\|, \|y\|)$.

Доказательство. a) следует из того, что элементы x и $|x|$ одновременно удовлетворяют или не удовлетворяют неравенству (1)*).

b) Имеем $|x| \leqslant |y| \leqslant \|y\| \mathbf{1}$, откуда $\|x\| \leqslant \|y\|$.

c) Так как

$$x \leqslant \|x\| \mathbf{1} \text{ и } y \leqslant \|y\| \mathbf{1}, \text{ то } x \vee y \leqslant \max(\|x\|, \|y\|) \mathbf{1},$$

откуда

$$\|x \vee y\| \leqslant \max(\|x\|, \|y\|).$$

---

*) Впрочем, a) вытекает из b) (ср. 2.21).

С другой стороны, принимая во внимание b), имеем $\|x \vee y\| \geqslant \|x\|$ и $\|x \vee y\| \geqslant \|y\|$, откуда

$$\|x \vee y\| \geqslant \max(\|x\|, \|y\|).$$

Сопоставление полученных неравенств доказывает наше утверждение.

2.33. Если X — K-пространство ограниченных элементов, то

a) $x_n \xrightarrow{(b)} x$ влечёт $x_n \xrightarrow{(o)} x$;

b) ограниченность множества $E \subset X$ равносильна ограниченности множества норм $\{\|x\|\}$ его элементов;

c) ограниченность множества равносильна его (o)-аннулируемости и его (t)-аннулируемости;

d) X — K^+-пространство.

Доказательство. a) Пусть $\|x_n - x\| \to 0$; так как

$$|x_n - x| \leqslant \|x_n - x\| \mathbf{1}, \text{ то } |x_n - x| \xrightarrow{(o)} \mathbf{0} \text{ и } x_n \xrightarrow{(o)} x.$$

b) Пусть $E = \{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ — ограниченное множество элементов пространства X; тогда $|x_\alpha| \leqslant x_0$ при всех $\alpha \in A$ и следовательно $\|x_\alpha\| \leqslant \|x_0\|$ (см. 2.32 b)). Обратно, если $\|x_\alpha\| \leqslant M$ $(\alpha \in A)$, то $|x_\alpha| \leqslant \leqslant \|x_\alpha\| \mathbf{1} \leqslant M \mathbf{1}$, и множество E ограничено.

c) Пусть E — (o)-аннулируемое множество из X. Допустим, что нормы элементов, составляющих E, не ограничены в совокупности; тогда найдутся элементы $x_n \in E$ такие, что $\|x_n\| \to \infty$. Положим $\lambda_n = \dfrac{1}{\sqrt{\|x_n\|}}$; очевидно, $\lambda_n \to 0$ и, так как E — (o)-аннулируемое множество, то $\lambda_n x_n \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$, так что последовательность $\{\lambda_n x_n\}$ ограничена. Но

$$\|\lambda_n x_n\| = \frac{\|x_n\|}{\sqrt{\|x_n\|}} = \sqrt{\|x_n\|} \to \infty,$$

что противоречит доказанному утверждению b). Итак, нормы элементов множества E в совокупности ограничены, и по b), E — ограниченное множество. Обратное утверждение тривиально.

Так же просто доказывается равносильность (t)-аннулируемости и ограниченности множества $E \subset X$.

d) следует из c). Действительно, всякое (o)-аннулируемое множество $E \subset X$ ограничено, а это и означает, что X — K^+-пространство.

2.34. Важным примером K-пространства ограниченных элементов является пространство M, состоящее из почти всюду ограниченных измеримых функций (см. 3.13 гл. V). Согласно определению нормы в K-пространстве ограниченных элементов,

$$\|x\| = \operatorname{vrai\,max} |x(t)|,$$

где через $\operatorname{vrai\,max} |x(t)|$ обозначается наименьшее из чисел λ, для которых почти всюду $|x(t)| \leqslant \lambda$.

Отметим, какой смысл имеют в M различные виды сходимости. Именно:

$x_n \xrightarrow{(o)} x$ (соответственно $x_n \xrightarrow{(t)} x$) означает, что $x_n(t) \to x(t)$ почти всюду (соответственно, по мере) и почти всюду $|x_n(t)| \leqslant C$, где C — некоторая постоянная; $x_n \xrightarrow{(b)} x$ означает, что $x_n(t) \to x(t)$ равномерно почти всюду.

2.4. *KB*-пространства. Наиболее интересным и важным классом нормированных K-пространств является класс KB-пространств.

2.41. Определение. Если в K-пространстве X для элементов $x \geqslant \mathbf{0}$ определено вещественное число — норма x (обозначаемая $\|x\|$), удовлетворяющая аксиомам:

I. $\|x\| \geqslant 0$ и $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \mathbf{0}$;

II. $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$;

III. $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|$ $(\lambda \geqslant 0)$;

IV. если $x < y$, то $\|x\| \leqslant \|y\|$;

V. если $x_n \searrow \mathbf{0}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$;

VI. если $x_n \nearrow +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = +\infty$,

то X называется *KB-пространством.*

2.42. Если в KB-пространстве X для всякого $x \in X$ положить $\|x\| = \||x|\|$, то x окажется линейным нормированным пространством.

В самом деле, так как x обращается в нуль одновременно с $|x|$, то в X выполняется первое свойство нормы. Из неравенства

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|$$

следует, что

$$\|x+y\| \leqslant \||x|+|y|\| \leqslant \||x|\| + \||y|\| = \|x\| + \|y\|.$$

Наконец, для любых λ и x

$$\|\lambda x\| = \||\lambda| \|x|\| = |\lambda| \|x\|.$$

Более того, X — полное пространство (типа (B)). Это будет вытекать из следующего предложения.

2.43. Теорема. *Если в KB-пространстве X определить метрическую функцию ρ, полагая $\rho(x) = \|x\|$, то X обращается в KM-пространство.*

Доказательство. Условия 1 и 2, налагаемые на метрическую функцию, следуют из аксиом I и IV KB-пространства. Из аксиомы II легко вытекает неравенство

$$\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leqslant \|x_n - x\|,$$

если $x_n \to x$ монотонно, то в силу аксиомы V $\|x_n - x\| \to 0$, а тогда по указанному сейчас неравенству $\|x_n\| \to \|x\|$, так что ρ удовлетворяет и условию 3 метрической функции. Из аксиомы VI вытекает усиленное условие 4′ (см. 1.31). Тем более верно условие 4.

Наконец, условие 5 очевидным образом следует из аксиомы II.

Из доказанной сейчас теоремы следует, что KB-пространство X обладает всеми свойствами KM-пространства, в частности:

2.44. a) X — регулярное K-пространство.

b) Всякое несчётное множество попарно дизъюнктных элементов из X содержит счётное неограниченное подмножество.

c) Если для группы элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ положить

$$\|x_1, x_2, \ldots, x_n\| = \|(|x_1| \vee |x_2| \vee \ldots \vee |x_n|)\|,$$

то соотношения $x_n \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$ и

$$\lim_{n, m \to \infty} \|x_n, \ldots, x_m\| = 0$$

равносильны.

d) $x_n \xrightarrow{(t)} x$ равносильно $x_n \xrightarrow{(b)} x$, т. е. (t)-сходимость в X совпадает со сходимостью по норме.

e) X полно относительно (b)-сходимости, т. е. X — пространство типа (B).

Так как норма в X удовлетворяет аксиоме VI, то для X верны предложения 1.31 и 1.32, а из равенства $\|2x\| = 2\|x\|$ вытекает применимость к X предложения 1.33. Таким образом, для KB-пространств имеет место следующее предложение.

2.45. a) KB-пространство есть K^+-пространство (1.32);

b) множество $E \subset X$ ограничено тогда и только тогда, когда ограничено множество чисел

$$\{\|x_1, \ldots, x_n\|\} \quad (x_i \in E);$$

c) множество $X \subset E$ (t)-аннулируемо тогда и только тогда, когда ограничено множество чисел $\{\|x\|\}$ $(x \in E)$ (т. е. (t)-аннулируемость равносильна ограниченности по норме).

2.46. Если множество $E \subset X$ состоит из элементов $x \geqslant \mathbf{0}$ и ограничено, а $x_0 = \sup E$, то

$$\|x_0\| = \sup_{x_i \in E} \|x_1, \ldots, x_n\|.$$

Доказательство. С одной стороны, для любых $x_i \in E$, по определению нормы группы,

$$\|x_1, \ldots, x_n\| \leqslant \|x_0\|,$$

следовательно,

$$\sup_{x_i \in E} \|x_1, \ldots, x_n\| \leqslant \|x_0\|. \tag{2}$$

С другой стороны, так как X регулярно, то существуют такие $x_i \in E$ $(i = 1, 2, \ldots)$, что

$$x_0 = \sup_i x_i = (o)\text{-}\lim_{n \to \infty} (x_1 \vee \ldots \vee x_n)$$

(см. 1.41 гл. V). А тогда

$$\|x_0\| = \lim_{n\to\infty} \|x_1 \vee \ldots \vee x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_1, \ldots, x_n\|,$$

откуда следует, что в (2) знак неравенства невозможен, ч. и тр. д.

Следствие. Если, дополнительно, E удовлетворяет следующему условию: для любых $x_1, x_2 \in E$ найдётся такой $x \in E$, что $x \geqslant x_1 \vee x_2$, то

$$\|x_0\| = \sup_{x\in E} \|x\|.$$

Доказательство. Из поставленного условия вытекает, что для любой группы элементов $x_1, \ldots, x_n \in E$ существует элемент $x \in E$, для которого $x_1 \vee \ldots \vee x_n \leqslant x$, следовательно,

$$\|x_1, \ldots, x_n\| \leqslant \|x\|.$$

А тогда, по доказанному выше предложению,

$$\|x_0\| \leqslant \sup_{x\in E} \|x\|.$$

Но обратное неравенство очевидно; тем самым требуемое равенство доказано.

2.47. Теорема. *Пусть X — K-линеал и, вместе с тем, — пространство типа (B). Если норма в X удовлетворяет условиям:*

1) $\|x\| = \||x|\|$;

2) *если $x \geqslant \mathbf{0}$ и $y \geqslant \mathbf{0}$, то $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ (т. е. норма аддитивна для положительных слагаемых), то X — KB-пространство.*

Доказательство. Пусть $x > y \geqslant \mathbf{0}$. Тогда

$$\|x\| = \|y\| + \|x-y\| > \|y\|,$$

т. е. норма строго монотонна, и, таким образом, X — KB-линеал.

Отметим попутно, что для $x \geqslant y \geqslant \mathbf{0}$

$$\|x-y\| = \|x\| - \|y\|.$$

Покажем теперь, что если $x_n \geqslant \mathbf{0}$ и образуют возрастающую последовательность, причём $\|x_n\| \leqslant C < +\infty$, то существует

$$\sup_n \{x_n\} < +\infty.$$

Действительно, благодаря монотонности нормы существует

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| \leqslant C.$$

Но так как

$$\|x_m - x_n\| = \|x_m\| - \|x_n\| \quad (m \geqslant n),$$

то $\|x_m - x_n\| \to 0$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ (b)-сходится в себе. Благодаря (b)-полноте пространства X существует такой элемент $x \in X$, что $x_n \xrightarrow{(b)} x$.

Из неравенства $x_m \geqslant x_n$ (при $m \geqslant n$), переходя к пределу при $m \to \infty$, мы получаем, что $x \geqslant x_n$ (см. 2.23). С другой стороны, если $x_n \leqslant y$ при всех n, то, также переходя к пределу, получаем $x \leqslant y$. Следовательно, $x = \sup\limits_n \{x_n\}$.

Теперь докажем, что всякое счётное ограниченное сверху множество $E = \{x_n\} \subset X$ имеет верхнюю грань.

Можно считать, что $x_1 = \mathbf{0}$, так как в противном случае мы могли бы заменить x_n на $x_n - x_1$.

Пусть все $x_n \leqslant x^*$. Положим

$$x_n' = x_1 \vee \ldots \vee x_n.$$

Тогда x_n' образуют монотонную последовательность, $x_n' \geqslant \mathbf{0}$ и $\|x_n'\| \leqslant \|x^*\|$. По уже доказанному, отсюда следует существование конечного $\sup\limits_n \{x_n'\}$, но он одновременно будет и $\sup\limits_n \{x_n\}$.

Таким образом, X есть K^--пространство, а норма в нём строго монотонна. Кроме того, если $x_n \nearrow x$ $(x_n \geqslant \mathbf{0})$, то $\|x_n\| \nearrow \|x\|$. Действительно, мы видели, что для монотонной последовательности $\sup\limits_n \{x_n\} = (b)\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, а так как норма — (b)-непрерывная функция *), то $\|x\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$. Итак, X удовлетворяет условиям 1.17, а потому X есть K-пространство.

Легко видеть, что норма в X удовлетворяет всем аксиомам KB-пространства. Последние две проверяются так: Если $x_n \searrow \mathbf{0}$, то $(-x_n) \nearrow \mathbf{0}$, или $x_1 - x_n \nearrow x_1$ $(x_1 - x_n \geqslant \mathbf{0})$, поэтому $\|x_1 - x_n\| \nearrow \|x_1\|$. Но

$$\|x_1 - x_n\| = \|x_1\| - \|x_n\|.$$

Следовательно, $\|x_n\| \to 0$. Если $x_n \nearrow +\infty$, то ограниченность норм невозможна по доказанному выше.

Теорема полностью доказана.

2.5. V-пространства. Многие интересные сходимости в важных конкретных пространствах не могут быть получены как сходимости по норме. Однако, вводя более сложную нормировку, близкую к нормировке Банаха и обладающую многими ее свойствами, мы сможем изучить сходимости, отличающиеся от обычной сходимости по норме.

2.51. Определение. Пусть X — линейное множество, каждому конечному комплексу $K = (x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ элементов которого отне-

---

*) Если $x_n \xrightarrow{(b)} x$, то

$$|\,\|x_n\| - \|x\|\,| \leqslant \|x_n - x\| \to 0.$$

сено неотрицательное вещественное число $\|K\| = \|(x_1, \ldots, x_\nu)\|$ — норма комплекса, удовлетворяющее следующим условиям:

1. Если $x_i = x_j$, то

$$\|(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_\nu)\| = \|(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_j, \ldots, x_\nu)\| = \\ = \|(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_\nu)\|,$$

т. е. норма комплекса не меняется при выбрасывании из него одного из двух равных элементов.

Через $\|x\|$ будем обозначать норму комплекса (x), состоящего из единственного элемента x, и называть её будем просто нормой элемента x.

2. $\|x\| = 0$ влечёт за собой $x = \mathbf{0}$.

3. Если $K_1 = (x_1, \ldots, x_{\nu_1})$, $K_2 = (y_1, \ldots, y_{\nu_2})$ и

$$(K_1, K_2) = (x_1, \ldots, x_{\nu_1}, y_1, \ldots, y_{\nu_2}),$$

то

$$\|(K_1, K_2)\| \leqslant \|K_1\| + \|K_2\|.$$

4. Если $K_1 = (x_1, \ldots, x_\nu)$, $K_2 = (y_1, \ldots, y_\nu)$, — два комплекса с равным числом элементов и $K = (x_1 + y_1, \ldots, x_\nu + y_\nu)$, то

$$\|K\| \leqslant \|K_1\| + \|K_2\|.$$

5. Для любого вещественного числа λ

$$\|(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_\nu)\| = |\lambda| \|(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)\|.$$

Линейное множество X, в котором определена норма комплекса, удовлетворяющая условиям 1—5, называется *V-пространством.*

Заметим, что из условия 5 следует, что норма нулевого элемента $\mathbf{0}$ равна нулю.

Норма элемента $\|x\|$ удовлетворяет всем аксиомам линейного нормированного пространства, поэтому V-пространство X представляет собой частный случай линейного нормированного пространства. Отсюда, в частности, следует, что в X можно рассматривать сходимость по норме. Но наряду с такой сходимостью можно ввести и другую, а именно, дадим следующее определение.

2.52. Определение. Последовательность элементов $\{x_n\}$ V-пространства X (v)-сходится к элементу $x \in X$ (в обозначении: $x_n \xrightarrow{(v)} x$ или $(v)\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$), если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует N такое, что при всяких $n \geqslant N$ и $p \geqslant 0$

$$\|(x_n - x, \ldots, x_{n+p} - x)\| < \varepsilon.$$

Легко показать, что (v)-предел обладает обычными свойствами предела, например:

a) Если $x_n \xrightarrow{(v)} x$ и $y_n \xrightarrow{(v)} y$, то $x_n + y_n \xrightarrow{(v)} x + y$.

b) Если $x_n \xrightarrow{(v)} x$ и $\alpha_n \to \alpha$, то $\alpha_n x_n \xrightarrow{(v)} \alpha x$.

2.53. Если X — KB-пространство или даже KB-линеал, то полагая норму комплекса равной норме группы элементов, составляющей комплекс,

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)\| = \|x_1, x_2, \ldots, x_n\| = \|(|x_1| \vee |x_2| \ldots \vee |x_\nu|)\|,$$

легко проверить, что X — V-пространство.

Действительно, если $x_i = x_j$, то

$$|x_1| \vee \ldots \vee |x_i| \vee \ldots \vee |x_j| \vee \ldots \vee |x_\nu| = \\ = |x_1| \vee \ldots \vee |x_{i-1}| \vee |x_{i+1}| \vee \ldots \vee |x_j| \vee \ldots \vee |x_\nu|.$$

Отсюда следует аксиома 1 V-пространства.

Из $\|x\| = 0$ следует $x = \mathbf{0}$, т. е. в X имеет место аксиома 2.

Аксиома 3 следует из неравенства

$$|x_1| \vee \ldots \vee |x_{\nu_1}| \vee |y_1| \vee \ldots \vee |y_{\nu_2}| \leqslant [|x_1| \vee \ldots \vee |x_{\nu_1}|] + \\ + [|y_1| \vee \ldots \vee |y_{\nu_2}|].$$

Так как

$$x_1 + y_1| \vee \ldots \vee |x_\nu + y_\nu| \leqslant [|x_1| \vee \ldots \vee |x_\nu|] + [|y_1| \vee \ldots \vee |y_\nu|],$$

то в X имеет место и аксиома 4.

Наконец, аксиома 5 вытекает из соотношения

$$|\alpha x_1| \vee \ldots \vee |\alpha x_\nu| = |\alpha| (|x_1| \vee \ldots \vee |x_\nu|).$$

2.54. Пусть X — KB-пространство, в котором определена норма комплекса как в 2.53. Тогда (v)-сходимость в X совпадает с (o)-сходимостью. (Это вытекает из 2.44 с)).

2.6. Некоторые конкретные KB-пространства. В предыдущем параграфе (1.47) мы уже упоминали о пространствах L^p, элементами которых являются функции, суммируемые с p-й степенью. Сейчас мы будем предполагать, что $p \geqslant 1$. Если положить для $x \in L^p$

$$\|x\| = \left\{ \int_E |x(t)|^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}},$$

то легко проверить, что $\|x\|$ удовлетворяет всем требованиям, накладываемым на норму в KB-пространстве. В частности, аксиома треугольника является следствием известного неравенства

$$\left\{ \int_E |x(t) + y(t)|^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{ \int_E |x(t)|^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_E |y(t)|^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Среди пространств числовых последовательностей аналогом L^p являются пространства l^p $(p \geqslant 1)$, определение которых дано в 2.12. Здесь также, если для $x = \{\xi_n\}$ положить

$$\|x\| = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}},$$

норма будет удовлетворять всем аксиомам KB-пространства.

Отметим, что в L и l (мы отбрасываем индекс p в случае, когда $p = 1$) норма аддитивна (см. 2.47).

2.61. Пространство V функций ограниченного изменения. В главе I (3.2) уже было показано, что V — K-пространство, но при этом проверка выполнения аксиомы V была не особенно легкой. Сейчас мы легко убедимся в том, что V является KB-пространством, если норма в нём определена так, как указано в 2.12:

$$\|x\| = x(a) + \operatorname*{var}_a^b x(t).$$

Действительно, V, очевидно, — K-линеал и в то же время — полное нормированное пространство. Для положительных элементов $\|x\| = x(b)$. Ясно, что $\|x\|$ удовлетворяет требованиям теоремы 2.47, откуда и следует, что V — KB-пространство.

(t)-сходимость в V совпадает с (b)-сходимостью, т. е. со сходимостью «по изменению»; (o)-сходимость может быть охарактеризована как (v)-сходимость (см. 2.54) или как сходимость с регулятором (1.24 гл. V), т. е. $x_n \xrightarrow{(o)} x$ означает, что существует такой $x_0 \in V$ $(x_0 \geqslant \mathbf{0})$, что

$$\left.\begin{aligned} &|x_n(a) - x(a)| \leqslant \varepsilon_n x_0(a), \\ &|[x_n(t_1) - x_n(t_2)] - [x(t_1) - x(t_2)]| \leqslant \varepsilon_n |x_0(t_1) - x_0(t_2)|, \end{aligned}\right\} \quad (n \geqslant N_\varepsilon)$$

где t_1 и t_2 — любые, а $\varepsilon_n \searrow 0$.

2.62. Пространство A абсолютно непрерывных функций. Подмножество KB-пространства V, состоящее из всех абсолютно непрерывных функций $x(t)$, для которых $x(a) = 0$, обозначим через A. Каждая такая функция является неопределенным интегралом некоторой функции $g(t) \in L$ (L предполагается построенным на том же промежутке $[a, b]$), т. е.

$$x(t) = \int_a^t g(\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

При этом соответствие $x \longleftrightarrow g$ (3) между A и L взаимно однозначно и линейно, т. е. из $x_1 \longleftrightarrow g_1$ и $x_2 \longleftrightarrow g_2$ вытекает, что

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \longleftrightarrow \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$, а также сохраняет упорядочение, т. е. из $x \geqslant \mathbf{0}$ вытекает $g \geqslant \mathbf{0}$ и обратно. Таким образом, A и L изоморфны.

Из известной формулы

$$\operatorname*{var}_a^b x(t) = \int_a^b |g(t)|\,dt$$

вытекает, что при изоморфизме, определяемом формулой (3), сохраняется и норма, т. е. $\|x\|$ в A равна $\|g\|$ в L. Таким образом, A и L допускают полное отождествление и как K-пространства и как нормированные пространства. В частности, A есть KB-пространство.

В то же время ясно, что если $x, y \in V$, $|x| \leqslant |y|$ и $y(t)$ абсолютно непрерывна, то и $x(t)$ — абсолютно непрерывна; таким образом, A удовлетворяет условию нормальности, следовательно, A — нормальное подпространство пространства V. Этот результат можно усилить следующим образом.

2.63. A есть компонента пространства V.

Доказательство. Нужно доказать, что A — правильное подпространство пространства V. Пусть $E \subset A$, E ограничено сверху в V, и $x_0 = \sup E$. Следует показать, что $x_0 \in A$. Для этого достаточно показать, что E имеет хоть одну верхнюю границу в A, так как если x_0 содержится между двумя элементами из A, то вследствие нормальности подпространства A x_0 сам должен принадлежать A.

Допустим, что E не ограничено сверху в A. Тогда (см. 2.44 а), 2.45 а) гл. VI и 3.23 гл. V) существует такое счётное подмножество $\{x_n\} \subset E$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что $\sup\limits_n \{x_n\} = +\infty$ в A. Положим

$$x_n' = (x_1 \vee \ldots \vee x_n) - x_1.$$

Тогда $x_n' \nearrow +\infty$ в A $(x_n' \geqslant \mathbf{0})$ и потому $\|x_n'\| \nearrow +\infty$. Но $x_n' \leqslant x_0 - x_1$, следовательно, $\|x_n'\| \leqslant \|x_0 - x_1\|$.

Полученное противоречие доказывает ограниченность сверху множества E в A.

2.64. Множество V^p $(p > 1)$. Отнесём к множеству V^p $(p > 1)$ все функции $x(t)$, заданные на промежутке $[a, b]$, для которых $x(a) = 0$ и при любом разбиении

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

отрезка $[a, b]$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|x(t_i) - x(t_{i-1})|^p}{(t_i - t_{i-1})^{p-1}} \leqslant C < +\infty$$

(C — постоянная). Если точную верхнюю границу таких сумм обозначить через M, то $M^{\frac{1}{p}}$ называется (p)-*изменением* функции $x(t)$ на промежутке $[a, b]$ и обозначается $(p)\text{-}\operatorname{var}\limits_a^b x(t)$.

Покажем, что если $x \in V^p$ при некотором $p > 1$, то $x \in A$. Пользуясь известным неравенством Гёльдера

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \left(\text{где } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right),$$

мы легко получаем для любой системы неналегающих промежутков (t_i, t_i') $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$\sum_{i=1}^{n} |x(t_i') - x(t_i)| = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x(t_i') - x(t_i)|}{(t_i' - t_i)^{\frac{p-1}{p}}} (t_i' - t_i)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{|x(t_i') - x(t_i)|^p}{(t_i' - t_i)^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^{n} (t_i' - t_i)\right]^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant (p)\text{-}\operatorname{var}\limits_a^b x(t) \left[\sum_{i=1}^{n} (t_i' - t_i)\right]^{\frac{1}{q}},$$

отсюда и следует абсолютная непрерывность функции $x(t)$.

2.65. Для того чтобы $x \in V^p$, необходимо и достаточно, чтобы

$$x(t) = \int_a^t g(\tau)\, d\tau, \tag{3}$$

где $g \in L^p$. При этом

$$(p)\text{-}\operatorname{var}\limits_a^b x(t) = \left\{\int_a^b |g(t)|^p\, dt\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{4}$$

Доказательство. а) Необходимость. Пусть $x \in V^p$. Разделим промежуток $[a, b]$ на n равных частей точками $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ и определим функцию

$$g_n(t) = \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \qquad \text{при } t_{i-1} < t \leqslant t_i.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

По известной теореме о дифференцировании неопределённого интеграла Лебега,

$$g_n(t) \to g(t) \text{ почти всюду в } [a, b].$$

Кроме того,

$$\int_a^b |g_n(t)|^p\, dt = \sum_{i=1}^n \frac{|x(t_i) - x(t_{i-1})|^p}{(t_i - t_{i-1})^{p-1}} \leqslant [(p)\text{-}\operatorname{var}_a^b x(t)]^p.$$

Но тогда и

$$\int_a^b |g(t)|^p\, dt \leqslant [(p)\text{-}\operatorname{var}_a^b x(t)]^p. \tag{5}$$

b) Достаточность. Пусть $g \in L^p$. Тогда используя интегральное неравенство, аналогичное уже применявшемуся выше неравенству для сумм, имеем для любых $t_1 < t_2$:

$$|x(t_2) - x(t_1)|^p \leqslant [\int_{t_1}^{t_2} |g(t)|\, dt]^p \leqslant \int_{t_1}^{t_2} |g(t)|^p\, dt (t_2 - t_1)^{\frac{p}{q}}$$

$\left(\text{где } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \text{ следовательно, } \frac{p}{q} = p - 1\right)$. Отсюда для любого разбиения промежутка $[a, b]$

$$\sum_{i=1}^n \frac{|x(t_i) - x(t_{i-1})|^p}{(t_i - t_{i-1})^{p-1}} \leqslant \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |g(t)|^p\, dt = \int_a^b |g(t)|^p\, dt. \tag{6}$$

Таким образом, $x \in V^p$; сопоставляя (5) и (6), мы получаем (4).

Теперь будем считать, что V^p линеаризовано и упорядочено как подмножество пространства V. Норму в V^p определим по формуле

$$\|x\| = (p)\text{-}\operatorname{var}_a^b x(t).$$

Тогда имеет место следующее предложение.

2.66. $V^p (p > 1)$ — KB-пространство, изоморфное L^p.

Доказательство. Соотношение (3) устанавливало изоморфизм между A и L. При этом по 2.65 образом L^p будет V^p. Благодаря (4) элементы из V^p и L^p, соответствующие друг другу, имеют равные нормы. А тогда, так как L^p — KB-пространство, то и V^p — тоже KB-пространство.

Замечание. Так как L^p при $p > 1$ — нормальное подпространство пространства L, то V^p — нормальное подпространство пространства A (но не компонента).

Отметим некоторые свойства функций с ограниченным изменением, используемые в дальнейшем.

2.67. Если $x \in V^p$ $(p > 1)$, а

$$y(t) = \operatorname*{var}_{a \leqslant \tau \leqslant t} x(\tau),$$

то $y \in V^p$ и при этом

$$(p)\text{-}\operatorname*{var}_a^b y(t) = (p)\text{-}\operatorname*{var}_a^b x(t).$$

Доказательство. Известно, что

$$y(t) = \int_a^t |x'(\tau)|\, d\tau.$$

Так как $x' \in L^p$, то $y \in V^p$. При этом по 2.65

$$(p)\text{-}\operatorname*{var}_a^b y(t) = \left\{\int_a^b |x'(\tau)|^p\, d\tau\right\}^{\frac{1}{p}} = (p)\text{-}\operatorname*{var}_a^b x(t).$$

Замечание. Ниже (в главе VIII) нам потребуется аналогичное предложение для абстрактных функций. Приведённое только что доказательство не сможет быть применено к абстрактным функциям, так как оно использует предложение 2.65; поэтому наметим другое доказательство, не опирающееся на предложение 2.65.

Очевидно,

$$(p)\text{-}\operatorname*{var}_a^b x(t) \leqslant (p)\text{-}\operatorname*{var}_a^b y(t).$$

Подберём такое разбиение отрезка $[a, b]$, для которого

$$\left\{\sum_i \frac{[\Delta y(t_i)]^p}{(\Delta t_i)^{p-1}}\right\}^{\frac{1}{p}} > (p)\text{-}\operatorname*{var}_a^b y(t) - \varepsilon.$$

Для каждого из промежутков $[t_i, t_{i+1}]$ подберём разбиение $t_i = \tau_i^{(0)} < \tau_i^{(1)} < \ldots < \tau_i^{(k_i)} = t_{i+1}$, для которого сумма

$$\sum_j |\Delta x(\tau_i^{(j)})|$$

достаточно близка к $\Delta y(t_i)$, например, так, чтобы

$$\left\{\sum_i \frac{1}{(\Delta t_i)^{p-1}} \left[\sum_j |\Delta x(\tau_i^{(j)})|\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}} > (p)\text{-}\operatorname*{var}_a^b y(t) - 2\varepsilon.$$

Оценивая внутреннюю сумму, легко получить, что

$$\left[\sum_j |\Delta x(\tau_i^{(j)})|\right]^p \leqslant \sum_j \frac{|\Delta x(\tau_i^{(j)})|^p}{(\Delta\tau_i^{(j)})^{p-1}}\left(\sum_j \Delta\tau_i^{(j)}\right)^{p-1} = \sum_j \frac{|\Delta x(\tau_i^{(j)})|^p}{(\Delta\tau_i^{(j)})^{p-1}}(\Delta t_i)^{p-1}.$$

Следовательно,

$$(p)\text{-}\operatorname{var}_a^b x(t) > (p)\text{-}\operatorname{var}_a^b y(t) - 2\varepsilon,$$

откуда и вытекает равенство (p)-изменений.

2.68. Пусть $x \in A$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, а $y(t)$ — кусочно-линейная функция, для которой

$$y(t_i) = x(t_i) \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

(т. е. графиком функции $y(t)$ служит ломаная, вписанная в график функции $x(t)$). Если $\max(\Delta t_i) \to 0$, то

$$\operatorname{var}_a^b [x(t) - y(t)] \to 0.$$

Доказательство. Пусть сначала $x(t)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной C. Тогда $|x'(t)| \leqslant C$ почти всюду. Из определения функции $y(t)$ следует, что $y'(t) = \frac{1}{\Delta t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}} x'(t)\,dt$ при $t_i < t < t_{i+1}$, откуда $|y'(t)| \leqslant C$ почти всюду, причём $y'(t) \to x'(t)$ почти всюду при $\max(\Delta t_i) \to 0$.

Следовательно,

$$\operatorname{var}_a^b [x(t) - y(t)] = \int_a^b |x'(t) - y'(t)|\,dt \to 0.$$

В общем случае по произвольно заданному $\varepsilon > 0$ подберём C так, чтобы

$$\int_e |x'(t)|\,dt < \varepsilon, \quad \text{где} \quad e = \mathop{\mathcal{E}}_t(|x'(t)| > C).$$

Теперь положим

$$x_1(t) = \int_{[a,t]\setminus e} x'(\tau)\,d\tau, \quad x_2(t) = \int_{[a,t]\cap e} x'(\tau)\,d\tau.$$

Тогда $x_1(t)$ удовлетворяет условию Липшица, а $\operatorname{var}_a^b x_2(t) < \varepsilon$.

Всякую вписанную в $x(t)$ кусочно-линейную функцию $y(t)$ можно представить в виде

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t),$$

где $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — кусочно-линейные функции, вписанные в $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Тогда

$$\operatorname*{var}_a^b y_2(t) \leqslant \operatorname*{var}_a^b x_2(t) < \varepsilon,$$

а по доказанному для функций, удовлетворяющих условию Липшица,

$$\operatorname*{var}_a^b [x_1(t) - y_1(t)] \to 0 \text{ при } \max\ (\Delta t_i) \to 0.$$

Так как

$$\operatorname*{var}_a^b [x(t) - y(t)] \leqslant \operatorname*{var}_a^b [x_1(t) - y_1(t)] + \operatorname*{var}_a^b [x_2(t) - y_2(t)],$$

а ε произвольно, то ясно, что

$$\operatorname*{var}_a^b [x(t) - y(t)] \to 0 \text{ при } \max\ (\Delta t_i) \to 0.$$

2.69. Если дополнительно к условиям предложения 2.68 $x \in V^p$ $(p > 1)$, то

$$(p)\text{-}\operatorname*{var}_a^b [x(t) - y(t)] \to 0 \text{ при } \max\ (\Delta t_i) \to 0.$$

Доказательство. Так же, как и выше, заключаем, что $y'(t) \to x'(t)$ почти всюду при $\max\ (\Delta t_i) \to 0$. С другой стороны, очевидно, что

$$(p)\text{-}\operatorname*{var}_a^b y(t) \leqslant (p)\text{-}\operatorname*{var}_a^b x(t),$$

тогда

$$\int_a^b |y'(t)|^p\, dt = [(p)\text{-}\operatorname*{var}_a^b y(t)]^p \leqslant [(p)\text{-}\operatorname*{var}_a^b x(t)]^p.$$

Отсюда, по известной теореме о предельном переходе под знаком интеграла Лебега,

$$(p)\text{-}\operatorname*{var}_a^b [x(t) - y(t)] = \left\{ \int_a^b |x'(t) - y'(t)|^p\, dt \right\}^{\frac{1}{p}} \to 0$$

при $\max\ (\Delta t_i) \to 0$.

ЧАСТЬ II

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ В ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ГЛАВА VII

АДДИТИВНЫЕ ОПЕРАЦИИ

Предметом настоящей главы является изучение некоторых классов операций, переводящих одно пространство в другое. Отдельные примеры операций, преобразующих K-пространство в себя, мы уже имели выше — операция проектирования (гл. II и III), функции от элементов (гл. IV).

Здесь мы будем рассматривать только аддитивные операции, и в большинстве случаев непрерывные в том или ином смысле. Существенную роль играет также понятие положительной операции. Основное содержание главы — это определение нескольких важных, естественно возникающих классов таких операций, изучение взаимоотношений между этими классами, а также свойств самих операций, образующих эти классы. Некоторые понятия будут вводиться не только для K-пространства, но и для более общего случая — K-линеала или K-группы.

§ 1. Регулярные операции

1.1. Общие определения. Пусть X и Y — два K-линеала и пусть для каждого $x \in X$ определена однозначная функция $y = U(x)$, значения которой суть элементы из Y. Такая функция называется *операцией*, отображающей X в Y.

Если Y — пространство вещественных чисел, то операция $y = U(x)$ называется *функционалом*.

Операция $y = U(x)$ называется:

аддитивной, если для любых $x_1, x_2 \in X$

$$U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2); \tag{1}$$

однородной, если для любого $x \in X$ и любого числа α

$$U(\alpha x) = \alpha U(x); \tag{2}$$

положительной, если $U(x) \geqslant 0$ для любого $x \geqslant 0$.

Отметим некоторые простые свойства операций.

1.11. Если $U(x)$ аддитивна, то

a) $U(\mathbf{0})=\mathbf{0}$;

b) $U(rx)=rU(x)$ для любого рационального числа r.

c) Аддитивная операция вполне определяется своими значениями для положительных x, т. е. если $U_1(x)$ и $U_2(x)$ аддитивны и $U_1(x)=U_2(x)$ для $x\geqslant\mathbf{0}$, то $U_1(x)=U_2(x)$ для всех x.

Доказательство. a) Из определения аддитивности сразу следует:

$$U(x)=U(x+\mathbf{0})=U(x)+U(\mathbf{0}),$$

т. е. $U(\mathbf{0})=\mathbf{0}$.

b) Если n — целое положительное, то

$$U(nx)=\underbrace{U(x)+\ldots+U(x)}_{n\text{ слагаемых}}=nU(x).$$

При $r=\frac{1}{n}$, используем равенство $U(x)=U\left(n\cdot\frac{1}{n}x\right)=nU\left(\frac{1}{n}x\right)$, откуда $U\left(\frac{1}{n}x\right)=\frac{1}{n}U(x)$.

Если $r=\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа, то, по уже доказанному,

$$U\left(\frac{p}{q}x\right)=pU\left(\frac{1}{q}x\right)=\frac{p}{q}U(x).$$

Наконец, если r — отрицательное рациональное число, то

$$\mathbf{0}=U(\mathbf{0})=U(rx+|r|x)=U(rx)+U(|r|x)=U(rx)+|r|U(x),$$

откуда $U(rx)=-|r|U(x)=rU(x)$.

Если $r=0$, то b) очевидно.

c) следует из того, что для любого x

$$U(x)=U(x_+-x_-)=U(x_+)+U(-x_-)=U(x_+)-U(x_-).$$

1.12. Пусть для $x\geqslant\mathbf{0}$ определена операция $U(x)$, удовлетворяющая условию аддитивности (1) для любых x_1, $x_2\geqslant\mathbf{0}$. Положим для любого $x\in X$

$$U(x)=U(x_+)-U(x_-).$$

Определённая таким образом во всем X операция $U(x)$ аддитивна.

Доказательство. Сначала покажем, что если $x=y-z$, где y, $z\geqslant\mathbf{0}$, то $U(x)=U(y)-U(z)$.

Так как x_+ — наименьший положительный элемент, который больше или равен x, то $x_+ \leqslant y$, следовательно, $y = x_+ + v$, где $v \geqslant \mathbf{0}$. Но тогда

$$z = y - x = x_+ + v - (x_+ - x_-) = x_- + v.$$

Отсюда

$$U(y) = U(x_+) + U(v), \quad U(z) = U(x_-) + U(v).$$

Следовательно,

$$U(y) - U(z) = U(x_+) - U(x_-) = U(x).$$

Используя доказанное равенство, имеем для любых $x, y \in X$:

$$\begin{aligned} U(x) + U(y) &= U(x_+) - U(x_-) + U(y_+) - U(y_-) = \\ &= U(x_+ + y_+) - U(x_- + y_-) = \\ &= U(x_+ + y_+ - x_- - y_-) = U(x + y), \end{aligned}$$

ч. и тр. д. *).

1.13. Если операция $U(x)$ положительна и аддитивна, то:

a) из $x_1 \geqslant x_2$ следует $U(x_1) \geqslant U(x_2)$;

b) $U(x)$ однородна;

c) $|U(x)| \leqslant U(|x|)$.

Доказательство. a) следует из равенства

$$U(x_1) = U(x_2) + U(x_1 - x_2).$$

так как $U(x_1 - x_2) \geqslant \mathbf{0}$.

b) По 1.11b) $U(x)$ удовлетворяет условию однородности (2) для рациональных α. Для любого α и $x \geqslant \mathbf{0}$ подбираем такие рациональные r_1 и r_2, чтобы $r_1 < \alpha < r_2$. Тогда $r_1 x \leqslant \alpha x \leqslant r_2 x$, следовательно,

$$r_1 U(x) = U(r_1 x) \leqslant U(\alpha x) \leqslant U(r_2 x) = r_2 U(x);$$

в то же время $r_1 U(x) \leqslant \alpha U(x) \leqslant r_2 U(x)$, так как $U(x) \geqslant \mathbf{0}$. Но r_1 и r_2 могут быть сколь угодно близки друг к другу, а потому ясно, что

$$U(\alpha x) = \alpha U(x).$$

Если x — произвольный, то

$$U(\alpha x) = U(\alpha x_+) - U(\alpha x_-) = \alpha [U(x_+) - U(x_-)] = \alpha U(x).$$

c) Имеем

$$|U(x)| = |U(x_+) - U(x_-)| \leqslant U(x_+) + U(x_-) = U(|x|).$$

---

* Из 1.11c) вытекает, что распространение операции с множества положительных элементов на всё X с сохранением свойства аддитивности возможно единственным способом.

1.2. Регулярные операции.

Определение. Операция $U(x)$ называется *регулярной*, если она представима в виде

$$U(x) = U_1(x) - U_2(x), \tag{3}$$

где $U_1(x)$ и $U_2(x)$ — положительные аддитивные операции.

Ясно, что регулярная операция аддитивна, а из 1.13 сразу следует, что регулярная операция однородна.

Регулярные операции можно охарактеризовать иначе. Для этого введём ещё одно

Определение. Положительная аддитивная операция $y = U_1(x)$ называется *мажорантой* для операции $y = U(x)$, если $U_1(x) \geqslant U(x)$ для любого $x \geqslant \mathbf{0}$.

1.21. Для того чтобы аддитивная операция была регулярна, необходимо и достаточно, чтобы она имела мажоранту.

Доказательство. Если $U(x)$ имеет мажоранту $U_1(x)$, то представление

$$U(x) = U_1(x) - [U_1(x) - U(x)]$$

показывает, что $U(x)$ регулярна, так как $U_1(x)$ и $U_1(x) - U(x)$ — положительные аддитивные операции.

Обратно, если $U(x)$ регулярна, т. е. представима в виде (3), где $U_1(x)$ и $U_2(x)$ положительны и аддитивны, то $U_1(x)$, очевидно, является мажорантой для $U(x)$.

Замечание. Если аддитивная операция $U(x)$ имеет регулярную «мажоранту» $U_1(x)$, т. е. $U_1(x)$ регулярна и $U_1(x) \geqslant U(x)$ для $x \geqslant \mathbf{0}$, то $U(x)$ регулярна.

Действительно, $U_1(x)$ имеет положительную мажоранту, а тогда эта мажоранта будет мажорантой и для $U(x)$.

1.22. Пусть теперь Y — K-пространство, а X попрежнему — любой K-линеал. Множество всех регулярных операций $y = U(x)$, отображающих X в Y, обозначим H_r. В дальнейшем мы часто будем называть регулярную операцию *операцией класса* H_r.

Линеаризуем H_r. Если $U_1, U_2 \in H_r$, то сумму $U = U_1 + U_2$ определим как операцию, для которой при всех x

$$U(x) = U_1(x) + U_2(x).$$

Если $U_1 \in H_r$, а α — число, то произведение $U = \alpha U_1$ определим по формуле

$$U(x) = \alpha U_1(x) \text{ для любого } x.$$

Ясно, что в обоих случаях $U \in H_r$ и что H_r становится линейным множеством. Нулевым элементом в H_r будет операция $U(x) \equiv \mathbf{0}$ *).

Положительными элементами в H_r ($U \geqslant \mathbf{0}$) будем считать операции, положительные в смысле определения, данного в 1.1. При этом будем называть U существенно положительной ($U > \mathbf{0}$), если $U \geqslant \mathbf{0}$ и

*) Нулевой элемент множества H_r мы будем обозначать, как обычно $\mathbf{0}$.

$U \neq \mathbf{0}$. Легко видеть, что если $U > \mathbf{0}$, то существует $x > \mathbf{0}$, для которого $U(x) > \mathbf{0}$. Действительно, если бы $U(x) = \mathbf{0}$ для всех $x \geqslant \mathbf{0}$, то, по аддитивности, мы имели бы $U(x) \equiv \mathbf{0}$.

Теперь мы докажем основную теорему о множестве H_r.

1.23. Теорема об H_r. *Множество H_r регулярных операций, отображающих K-линеал X в K-пространство Y, является K-пространством.*

Доказательство. Выполнение в H_r аксиом I, II и IV K-пространства очевидно. Аксиома III выполняется благодаря существованию мажоранты. Остаётся проверить выполнение аксиомы V.

Пусть $U_\xi \in H_r$ ($\xi \in \Xi$) и $U_\xi \leqslant U_0 \in H_r$ при всех ξ. Положим для $x \geqslant \mathbf{0}$

$$U(x) = \sup_{\substack{x_1 + \ldots + x_n = x \\ x_1, \ldots, x_n \geqslant \mathbf{0} \\ \xi_1, \ldots, \xi_n \in \Xi}} [U_{\xi_1}(x_1) + \ldots + U_{\xi_n}(x_n)], \tag{4}$$

где верхняя грань берётся относительно всех конечных систем $x_1, \ldots, x_n$ и $\xi_1, \ldots, \xi_n$, удовлетворяющих поставленным условиям.

С одной стороны,

$$U_{\xi_1}(x_1) + \ldots + U_{\xi_n}(x_n) \leqslant U_0(x_1) + \ldots + U_0(x_n) = U_0(x),$$

откуда $U(x) \leqslant U_0(x)$. С другой стороны, беря $n = 1$, $x_1 = x$, $\xi_1 = \xi$ (произвольному $\xi \in \Xi$), получаем $U(x) \geqslant U_\xi(x)$ при всех $\xi \in \Xi$.

Проверим аддитивность операции $U(x)$ для положительных x. Пусть $x = y + z$, где $y, z \geqslant \mathbf{0}$, и пусть $y = y_1 + \ldots + y_m$, $z = z_1 + \ldots + z_n$, где все y_i, $z_j \geqslant \mathbf{0}$. Тогда по определению,

$$U(x) \geqslant [U_{\xi_1}(y_1) + \ldots + U_{\xi_m}(y_m)] + [U_{\xi_1'}(z_1) + \ldots + U_{\xi_n'}(z_n)]$$

(ξ_i, $\xi_j' \in \Xi$ выбраны произвольно). Переходя в каждой из скобок, независимо от другой, к верхней грани, получим:

$$U(x) \geqslant U(y) + U(z). \tag{5}$$

Пусть, наоборот, $x = x_1 + \ldots + x_n$, где все $x \geqslant \mathbf{0}$ и, кроме того, $x = y + z$ ($y, z \geqslant \mathbf{0}$). Тогда благодаря возможности двойного разбиения элементов (1.42 гл. I) существуют такие $y_1, \ldots, y_n$, $z_1, \ldots, z_n \geqslant \mathbf{0}$ (y_i, $z_i \in X$), что

$$x_i = y_i + z_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$
$$y = y_1 + \ldots + y_n, \quad z = z_1 + \ldots + z_n.$$

Отсюда

$$U_{\xi_1}(x_1) + \ldots + U_{\xi_n}(x_n) = [U_{\xi_1}(y_1) + \ldots + U_{\xi_n}(y_n)] + \\ + [U_{\xi_1}(z_1) + \ldots + U_{\xi_n}(z_n)] \leqslant U(y) + U(z).$$

Переходя к верхней грани в левой части, получим:

$$U(x) \leqslant U(y) + U(z),$$

а это вместе с (5) и даёт требуемое равенство.

Благодаря 1.12 операция $U(x)$ распространяется на всё X с сохранением аддитивности. Так как $U(x) \leqslant U_0(x)$ при $x \geqslant \mathbf{0}$, то $U(x)$ имеет регулярную мажоранту, следовательно, $U \in H_r$ (см. замечание к 1.21).

В качестве U_0 могла быть взята любая верхняя граница множества $\{U_\xi\}$, и попрежнему $U_\xi \leqslant U \leqslant U_0$; следовательно, $U = \sup U_\xi$. Теорема доказана.

Замечание. Из проведённого доказательства аддитивности операции $U(x)$ следует, что если $U_\xi(x)$ аддитивны, а операция $U(x)$, определённая для $x \geqslant \mathbf{0}$ по формуле (4), оказывается конечной ($U(x) < +\infty$) для каждого x, то $U(x)$ аддитивна.

Действительно, в этой части рассуждения принадлежность U_ξ классу H_r не использована, а существование U_0 использовано только для заключения, что $U(x) < +\infty$.

Так как H_r — K-пространство, то для каждого $U \in H_r$ имеют смысл U_+, U_-, $|U|$. Выясним их значение как операций.

1.24. Так как $U_+ = U \vee \mathbf{0}$, то по формуле (4) имеем для $x \geqslant \mathbf{0}$:

$$U_+(x) = \sup_{\substack{x_1 + x_2 = x \\ x_1,\, x_2 \geqslant \mathbf{0}}} [U(x_1) + \mathbf{0}] = \sup_{\mathbf{0} \leqslant x' \leqslant x} U(x') \tag{6}$$

Аналогично $U_- = (-U) \vee \mathbf{0}$, следовательно, для $x \geqslant \mathbf{0}$

$$U_-(x) = \sup_{\mathbf{0} \leqslant x' \leqslant x} [-U(x')] = -\inf_{\mathbf{0} \leqslant x' \leqslant x} U(x'). \tag{7}$$

Наконец, $|U| = U \vee (-U)$ и по той же формуле (4) для $x \geqslant \mathbf{0}$,

$$|U|(x) = \sup_{\substack{x_1 + x_2 = x \\ x_1,\, x_2 \geqslant \mathbf{0}}} [U(x_1) - U(x_2)]. \tag{8}$$

1.25. Если $U \in H_r$, то для любого x

$$|U(x)| \leqslant |U|(|x|);$$

при этом $|U|$ — наименьшая из операций $U^* \in H_r$, для которых при всех x

$$|U(x)| \leqslant U^*(|x|). \tag{9}$$

Доказательство. Если $x \geqslant \mathbf{0}$, то, так как $U \leqslant |U|$ и $-U \leqslant |U|$, имеем:

$$U(x) \leqslant |U|(x), \quad -U(x) \leqslant |U|(x),$$

Следовательно, $|U(x)| \leqslant |U|(x)$. Для любого x

$$|U(x) \leqslant |U(x_+)| + |U(x_-)| \leqslant |U|(x_+) + |U|(x_-) = |U|(|x|).$$

С другой стороны, если $U^* \in H_r$ — любая операция, для которой выполнено (9), то для $x \geqslant \mathbf{0}$ $|U(x)| \leqslant U^*(x)$, следовательно, $U(x) \leqslant U^*(x)$ и $-U(x) \leqslant U^*(x)$, т. е. $U \leqslant U^*$, $-U \leqslant U^*$. А тогда $|U| = U \vee (-U) \leqslant U^*$.

Вместо формулы (8) для операции $|U|$ можно дать и другое выражение.

1.26. Для любого $x \geqslant \mathbf{0}$

$$|U|(x) = \sup_{|x'| \leqslant x} U(x') = \sup_{|x'| \leqslant x} |U(x')|.$$

Доказательство. Прежде всего

$$\sup_{|x'| \leqslant x} U(x') = \sup_{|x'| \leqslant x} [U(x') \vee U(-x')] =$$

$$= \sup_{|x'| \leqslant x} \{U(x') \vee [-U(x')]\} = \sup_{|x'| \leqslant x} |U(x')|,$$

а из 1.25 следует, что эта верхняя грань имеет конечное значение $V(x) \leqslant |U|(x)$. Докажем обратное неравенство.

Пусть $x = x_1 + x_2$, где $x_1, x_2 \geqslant \mathbf{0}$. Тогда $|x_1 - x_2| \leqslant x$ и

$$U(x_1) - U(x_2) = U(x_1 - x_2) \leqslant V(x).$$

Отсюда по формуле (8) $|U|(x) \leqslant V(x)$. Таким образом, $V(x) = |U|(x)$, ч. и тр. д.

1.27. Теорема. (Признак регулярности). *Для того чтобы аддитивная операция $U(x)$ была регулярной, необходимо и достаточно, чтобы для всякого ограниченного множества $E \subset X$ его образ $U(E)$ был ограничен в Y. Это условие равносильно выполнению для любого $x \geqslant \mathbf{0}$ неравенства*

a) $\sup_{|x'| \leqslant x} |U(x')| = \sup_{|x'| \leqslant x} U(x') < +\infty$

или выполнению (для любого $x \geqslant \mathbf{0}$) более слабого неравенства

b) $\sup_{\mathbf{0} \leqslant x' \leqslant x} U(x') < +\infty$.

Доказательство. Равносильность первой формулировки теоремы и выполнения неравенства a) очевидна. Необходимость выполнения неравенства a) для любого $x \geqslant \mathbf{0}$ доказана в 1.26. Докажем достаточность выполнения неравенства b).

Положим для $x \geqslant \mathbf{0}$

$$V(x) = \sup_{\mathbf{0} \leqslant x' \leqslant x} U(x').$$

По условию $V(x) < +\infty$. Но $V(x)$ совпадает с операцией, определяемой по формуле (4) для множества, состоящего из U и $\mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ — нуль K-пространства H_r), и по замечанию к 1.23, раз $V(x) < +\infty$, то она аддитивна. Согласно 1.12 $V(x)$ распространяется на всё X с сохранением аддитивности. Кроме того, ясно, что при $x \geqslant \mathbf{0}$

$V(x) \geqslant U(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ и $V(x) \geqslant U(x)$. Таким образом, $U(x)$ имеет мажоранту, значит, $U \in H_r$, ч. и тр. д.

1.28. Если $U = \inf U_\xi$ ($U_\xi \in H_r$), то, исходя из формулы (4) и соотношения $U = -\sup(-U_\xi)$, мы легко получим для $x \geqslant \mathbf{0}$ аналогичную формулу

$$U(x) = \inf_{\substack{x_1 + \ldots + x_n = x \\ x_1, \ldots, x_n \geqslant \mathbf{0} \\ \xi_1, \ldots, \xi_n \in \Xi}} [U_{\xi_1}(x_1) + \ldots + U_{\xi_n}(x_n)]. \tag{10}$$

Мы не будем в этой главе полностью выяснять смысл понятия дизъюнктности в H_r и ограничимся лишь одним достаточным признаком.

1.29. Пусть X разлагается на два K-линеала X_1 и X_2, т. е. X_1 и X_2 — два дизъюнктных линейных нормальных подмножества из X и при этом любой $x \in X$ представим в виде $x = \mathbf{S}(x_1\ x_2) = x_1 + x_2$, где $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ *). Если $U_1(x) = \mathbf{0}$ при $x \in X_2$, а $U_2(x) = \mathbf{0}$ при $x \in X_1$ (U_1, $U_2 \in H_r$), то $U_1 \mathrm{d}\, U_2$.

Доказательство. Из формулы (8) сразу вытекает, что $|U_1|(x) = \mathbf{0}$ при $x \in X_2$ и $|U_2|(x) = \mathbf{0}$ при $x \in X_1$. А теперь по формуле (10), для $U = |U_1| \wedge |U_2|$ и $x \geqslant \mathbf{0}$ имеем:

$$U(x) = \inf_{\substack{x_1 + x = x \\ x_1, x_2 \geqslant \mathbf{0}}} [|U_1|(x_1) + |U_2|(x_2)].$$

В частности, если $x_1 \in X_2$, $x_2 \in X_1$, то $|U_1|(x_1) = |U_2|(x_2) = \mathbf{0}$, следовательно, $U(x) = \mathbf{0}$. Таким образом, $U = \mathbf{0}$, т. е. $U_1 \mathrm{d}\, U_2$.

1.3. (o)-сходимость в K-пространстве регулярных операций. В H_r, как во всяком K-пространстве, имеет смысл понятие (o)-сходимости. При этом соотношение $U_n \xrightarrow{(o)} U$ в общем случае не равносильно точечной сходимости, означающей, что $U_n(x) \xrightarrow{(o)} U(x)$ для всех $x \in X$ (см. 3.12 гл. VIII). Сейчас мы займёмся выяснением связи между этими двумя сходимостями. Отметим сначала одно вспомогательное предложение.

1.31. Если $U_n(x)$ — аддитивные операции со значениями в одном и том же K-пространстве Y и если при каждом $x \in X$ существует конечный (o)-$\lim U_n(x)$ (или (t)-$\lim U_n(x)$), обозначаемый $U(x)$, то $U(x)$ — аддитивная операция.

Это вытекает непосредственно из общих свойств предела:

$$U(x_1 + x_2) = \lim U_n(x_1 + x_2) + \lim [U_n(x_1) + U_n(x_2)] = \\ = \lim U_n(x_1) + \lim U_n(x_2) = U(x_1) + U(x_2).$$

---

*) Если X — K-пространство, то X_1 и X_2 — его компоненты.

1.32. Из (o)-сходимости в H_r вытекает точечная (o)-сходимость последовательности операций, т. е. если $U_n \in H_r$ $(n=1, 2, \ldots)$, $U \in H_r$ и $U_n \xrightarrow{(o)} U$, то при всех x

$$U_n(x) \xrightarrow{(o)} U(x).$$

Доказательство. Пусть сначала $U_n \searrow U$. Тогда при каждом $x \geqslant \mathbf{0}$ существует такой элемент $V(x) \in Y$, что

$$U_n(x) \searrow V(x) \geqslant U(x).$$

Но если существует $\lim U_n(x)$ при всех $x \geqslant \mathbf{0}$, то, по аддитивности операций $U_n(x)$, он существует и для прочих x. Таким образом, $V(x)$ имеет смысл для всех x, $U_n(x) \xrightarrow{(o)} V(x)$ при всех x и $V(x)$ аддитивна (1.31). Так как $V \leqslant U_n \in H_r$, то $V \in H_r$; кроме того, $V \geqslant U$.

С другой стороны, так как $V \leqslant U_n$ при всех n, то $V \leqslant U = \inf U_n$, следовательно $V = U$.

Аналогично доказывается наше предложение и для возрастающей последовательности U_n (при $x \geqslant \mathbf{0}$).

В общем случае если $U_n \xrightarrow{(o)} U$, то существуют такие $V_n \searrow U$ и $W_n \nearrow U$, что $V_n \geqslant U_n \geqslant W_n$. Тогда, по уже доказанному, при $x \geqslant \mathbf{0}$ имеем:

$$V_n(x) \searrow U(x), \quad W_n(x) \nearrow U(x),$$

а так как $V_n(x) \geqslant U_n(x) \geqslant W_n(x)$, то и $U_n(x) \xrightarrow{(o)} U(x)$. Но отсюда уже следует то же соотношение и для всех x, ч. и тр. д.

Обратное заключение верно в общем случае только для монотонных последовательностей, а именно:

1.33. Если $U_n \in H_r$, причём U_n образуют монотонную последовательность, и если существует конечный $(o)\text{-}\lim U_n(x) = U(x)$ для каждого $x \in X$*), то $U \in H_r$ и $U_n \xrightarrow{(o)} U$.

Доказательство. Пусть, например, $U_{n+1} \leqslant U_n$ при всех n. Тогда при $x \geqslant \mathbf{0}$

$$U_n(x) \searrow U(x),$$

Следовательно, $U \leqslant U_n$ и потому $U \in H_r$. Но тогда существует конечный $(o)\text{-}\lim U_n = V$ и по 1.32 $U_n(x) \to V(x)$, т. е. $V = U$.

1.4. Уточнение типа K-пространства H_r в одном частном случае. Если Y принадлежит какому-нибудь специальному классу K-пространств, например Y регулярно, то H_r не обязательно будет K-пространством того же типа (см. 3.12 гл. VIII). Однако в одном случае мы можем установить предложение о принадлежности H_r к тому же классу, что и Y, а именно:

---

*) Достаточно — для $x \geqslant \mathbf{0}$. Тогда $U(x)$ автоматически распространяется на всё X с сохранением предельного соотношения.

1.41. Теорема. *Если Y — K^+-пространство, то и H_r — K^+-пространство.*

Доказательство. Пусть $E=\{U_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ — (o)-аннулируемое множество из H_r, т. е. при любых $\xi_n\in\Xi$ и $\lambda_n\to 0$

$$\lambda_n U_{\xi_n}\xrightarrow{(o)}\mathbf{0}$$

(см. 3,11 гл. V). Нужно доказать, что E ограничено.

Предположим сначала, что все $U_\xi\geqslant\mathbf{0}$. Не уменьшая общности, можно считать, что в E входят верхние грани всех его конечных подмножеств. Действительно, если это не так, то присоединим их к E и покажем, что свойство (o)-аннулируемости множества E при этом не нарушается. Пусть

$$U_i=U_i^{(1)}\vee\ldots\vee U_i^{(k_i)},\ \text{где}\ U_{(i}^{j)}\in E\qquad (i=1,2,\ldots;j=1,\ldots,k_i)$$

а $\lambda_i\to 0$. Тогда также и последовательность

$$\underbrace{|\lambda_1|,\ldots,|\lambda_1|}_{k_1\ \text{раз}},\ \underbrace{|\lambda_2|,\ldots,|\lambda_2|}_{k_2\ \text{раз}},\ldots\to 0.$$

Следовательно, благодаря (o)-аннулируемости множества E последовательность

$$|\lambda_1|\,U_1^{(1)},\ldots,|\lambda_1|\,U_1^{(k_1)},\ |\lambda_2|\,U_2^{(1)},\ldots,|\lambda_2|\,U_2^{(k_2)},\ldots\xrightarrow{(o)}\mathbf{0}.$$

Но

$$|\lambda_i|\,U_i=|\lambda_i|\,U_i^{(1)}\vee\ldots\vee|\lambda_i|\,U_i^{(k_i)},$$

а тогда ясно, что $\lambda_i U_i\xrightarrow{(o)}\mathbf{0}$. Свойство (o)-аннулируемости сохранилось и после дополнения множества E.

Из 1.32 и (o)-аннулируемости множества E следует, что для любого $x\in X$,

$$\lambda_n U_{\xi_n}(x)\xrightarrow{(o)}\mathbf{0}\quad(\xi_n\in\Xi,\ \lambda_n\to 0).$$

Таким образом, множество $\{U_\xi(x)\}$ (o)-аннулируемо, а так как Y — K^+-пространство, то $U_\xi(x)$ ограничены в совокупности для каждого $x\in X$.

Теперь введём операцию $U(x)$, определяемую для $x\geqslant\mathbf{0}$ по формуле (4). Согласно замечанию к 1.23 достаточно доказать, что $U(x)<+\infty$, и отсюда уже будет следовать, что $U(x)$ аддитивна, а так как, кроме того $U(x)\geqslant\mathbf{0}$ для $x\geqslant\mathbf{0}$, то $U\in H_r$; при этом $U_\xi\leqslant U$ для всех $\xi\in\Xi$. Но если $x=x_1+\ldots+x_n$, где $x_1,\ldots,x_n\geqslant\mathbf{0}$, и если $\xi_1,\ldots,\xi_n\in\Xi$, а

$$U^*=U_{\xi_1}\vee\ldots\vee U_{\xi_n}\in E,$$

то

$$U_{\xi_1}(x_1)+\ldots+U_{\xi_n}(x_n)\leqslant U^*(x_1)+\ldots+U^*(x_n)=U^*(x)\leqslant\sup_{\xi\in\Xi}U_\xi(x),$$

откуда и следует, что

$$U(x)\leqslant\sup_\xi U_\xi(x)<+\infty.$$

Ограниченность множества E доказана.

В общем случае, из (o)-аннулируемости множества $E=\{U_\xi\}$ очевидно следует (o)-аннулируемость множества $E^*=\{|U_\xi|\}$. Но, по доказанному, E^* ограничено, а тогда и E ограничено.

Понятия аддитивной, положительной и регулярной операции имеют смысл и в случае, если значения аргумента операции принадлежат не K-линеалу, а K-группе. В этом случае остаются в силе все результаты, установленные в настоящем параграфе, за исключением только однородности положительной операции, (а также 1.11 b)). В частности, множество регулярных операций H_r остаётся K-пространством. Понятие однородности теряет смысл, так как в K-группе нет умножения на число.

§ 2. Линейные операции

2.1. Классы непрерывных операций. Теперь мы будем предполагать, что X, так же как и Y, — K-пространство. Используя (o)- и (t)-сходимости в X и в Y, можно определить различные виды непрерывности операций.

Определение. Операция $y=U(x)$ называется (oo)-непрерывной (соответственно: (tt)-, (to)- или (ot)-непрерывной), если

$$\text{из } x_n \xrightarrow{(o)} x \text{ следует } U(x_n) \xrightarrow{(o)} U(x)$$

(соответственно:

$$\text{из } x_n \xrightarrow{(t)} x \text{ следует } U(x_n) \xrightarrow{(t)} U(x),$$

$$\text{из } x_n \xrightarrow{(t)} x \text{ следует } U(x_n) \xrightarrow{(o)} U(x),$$

$$\text{из } x_n \xrightarrow{(o)} x \text{ следует } U(x_n) \xrightarrow{(t)} U(x).)$$

Следующее предложение устанавливает связь между различными типами непрерывности.

2.11. a) (to)-непрерывность операции влечёт её (oo)-непрерывность.

b) (oo)-непрерывность влечёт (tt)-непрерывность.

c) (tt)-непрерывность совпадает с (ot)-непрерывностью.

Доказательство. a) очевидно. Докажем сначала c).

Очевидно, из (tt)-непрерывности вытекает (ot)-непрерывность. Остаётся показать обратное. Пусть $U(x)$ (ot)-непрерывна и пусть $x_n \xrightarrow{(t)} x$. Из произвольной подпоследовательности индексов $\{n_i\}$ можно выделить такую частичную $\{n_{i_k}\}$, что

$$x_{n_{i_k}} \xrightarrow{(o)} x,$$

а тогда вследствие (ot)-непрерывности

$$U(x_{n_{i_k}}) \xrightarrow{(t)} U(x).$$

Таким образом, $\{U(x_n)\}$ сходится к $U(x)$ в смысле $(*)$-сходимости по отношению к (t)-сходимости (2.3 гл. I). Но такая $(*)$-сходимость совпадает с (t)-сходимостью, т. е.

$$U(x_n) \xrightarrow{(t)} U(x).$$

Таким образом, $U(x)$ (tt)-непрерывна.

Теперь b) легко выводится из c), так как (oo)-непрерывность очевидно влечёт (ot)-непрерывность.

Итак, в дальнейшем мы будем рассматривать в K-пространствах общего типа три класса непрерывных операций.

2.12. Если в K-пространстве Y (которому принадлежат значения операции) (t)-сходимость совпадает с (o)-сходимостью, то все три класса непрерывных операций совпадают. Это очевидно, так как в данном случае (to)-непрерывность по определению совпадает с (tt)-непрерывностью.

В частности, сформулированное предложение имеет место для функционалов.

Определение. Если аддитивная операция непрерывна в одном из указанных выше смыслов, то она называется *линейной*. При этом класс (tt)-непрерывных линейных операций обозначается H_t^t; аналогично два другие класса обозначаются H_o^o и H_t^o *). По 2.11 $H_o^t = H_t^t$ а для остальных классов

$$H_t^o \subset H_o^o \subset H_t^t.$$

Так как в пространстве вещественных чисел (o)-сходимость совпадает с (t)-сходимостью, то для функционалов классы H_t^o, H_o^o и H_t^t совпадают; функционал, линейный в смысле этих определений, называется (o)-*линейным*. В общем же случае перечисленные три класса не совпадают, как это будет видно из примеров, рассматриваемых ниже, в главе VIII.

2.13. Если аддитивная операция $U(x)$ непрерывна в смысле какого-нибудь из данных выше определений в некоторой точке $x_0 \in X$, то она линейна в том же смысле.

Доказательство. Пусть, например, из $x_n' \xrightarrow{(o)} x_0$ следует $U(x_n') \xrightarrow{(o)} U(x_0)$ и пусть $x_n \xrightarrow{(o)} x$. Тогда $x_n - x + x_0 \xrightarrow{(o)} x_0$, а значит,

$$U(x_n - x + x_0) \xrightarrow{(o)} U(x_0).$$

Отсюда

$$U(x_n) = U(x_n - x + x_0) + U(x) - U(x_0) \xrightarrow{(o)} U(x),$$

ч. и тр. д.

---

*) Эти три класса операций могут быть определены и в K-группах. Достаточно лишь потребовать, чтобы в последних выполнялась аксиома V для счётных множеств.

Благодаря доказанному предложению в дальнейшем при проверке линейности аддитивной операции мы часто будем ограничиваться проверкой непрерывности при $x = \mathbf{0}$.

2.14. Всякая операция $U(x)$ класса H_t^t (а следовательно, и классов H_o^o и H_t^o) однородна.

Доказательство. Равенство $U(rx) = rU(x)$ доказано в 1.11 b) для любой аддитивной операции и рациональных r. Если α иррационально, то существуют рациональные $r_n \to \alpha$. Тогда

$$r_n x \xrightarrow{(o)} \alpha x, \quad r_n U(x) \xrightarrow{(o)} \alpha U(x).$$

Следовательно, благодаря непрерывности операции U

$$\alpha U(x) = (o)\text{-}\lim r_n U(x) = (o)\text{-}\lim U(r_n x) = U[(o)\text{-}\lim r_n x] = U(\alpha x).$$

2.2. Класс $\mathbf{H}_t^t$. В регулярных K-пространствах можно установить некоторые специальные критерии для операций класса H_t^t.

2.21. Теорема. (Признак принадлежности операции классу $\mathbf{H}_t^t$.) *Если аддитивная операция $y = U(x)$ отображает регулярное K-пространство X в произвольное K-пространство Y, то для того чтобы $U \in H_t^t$, необходимо и достаточно, чтобы образ $U(E)$ всякого (t)-аннулируемого множества $E \subset X$, был тоже (t)-аннулируемым множеством**).

Доказательство. a) Необходимость. Пусть $U \in H_t^t$ и множество $E \subset X$ (t)-аннулируемо. Возьмём $y_n \in U(E)$ и $\lambda_n \to 0$. Существуют такие $x_n \in E$, что $y_n = U(x_n)$. Так как E (t)-аннулируемо, то $\lambda_n x_n \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$. Но тогда по (t)-непрерывности

$$\lambda_n y_n = U(\lambda_n x_n) \xrightarrow{(t)} \mathbf{0},$$

т. е. $U(E)$ (t)-аннулируемо. Отметим, что необходимость доказана без использования регулярности пространства X.

b) Достаточность. Пусть $U(x)$ — аддитивная операция и условие теоремы выполнено. Пусть $x_n \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$ и $\{n_i\}$ — произвольная возрастающая подпоследовательность индексов. Тогда существует такая частичная последовательность $\{n_{i_k}\}$, что $x_{n_{i_k}} \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$. Благодаря устойчивости сходимости в регулярном K-пространстве (теорема 1.22 гл. V) существуют такие натуральные $\lambda_k \to +\infty$, что $\lambda_k x_{n_{i_k}} \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$. Значит, множество $\{\lambda_k x_{n_{i_k}}\}$ ограничено и, следовательно, (o)- и (t)-аннулируемо. А тогда по условию и множество

*) Достаточно предположить Y K-линеалом с аксиомой V для счётных множеств (K^--пространством).

$\{U(\lambda_k x_{n_{i_k}})\}$ (t)-аннулируемо. Но $U(\lambda_k x_{n_{i_k}}) = \lambda_k U(x_{n_{i_k}})$ (1.11 b)), и так как $\frac{1}{\lambda_k} \to 0$, то из (t)-аннулируемости следует, что

$$U(x_{n_{i_k}}) = \frac{1}{\lambda_k} U(\lambda_k x_{n_{i_k}}) \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}.$$

Вследствие произвольности выбора n_i отсюда вытекает, что и $U(x_n) \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$, т. е. $U \in H_t^t$.

2.22. Замечание. Если X — KM-пространство, то оно регулярно (1.18 гл. VI), следовательно, к нему применим предыдущий критерий. Если же метрическая функция $\rho(x)$ в X удовлетворяет дополнительному условию, указанному в 1.33 гл. VI, а именно: существуют такие числа h и H, что $1 < h \leqslant H < \infty$ и

$$h\rho(x) \leqslant \rho(2x) \leqslant H\rho(x)$$

при всяком $x \in X$, то (t)-аннулируемость множества $E \subset X$ равносильна ограниченности множества чисел $\rho(x)$ $(x \in E)$ (1.33 гл. VI). Поэтому, если Y — KM-пространство с таким же дополнительным условием для метрической функции, то условию теоремы 2.21 можно придать следующую равносильную форму: для любой сферы конечного радиуса из X ее образ содержится в сфере конечного радиуса в Y, т. е. для любого R

$$\sup_{\rho(x) \leqslant R} \rho[U(x)] < +\infty$$

легко видеть, что последнее условие благодаря дополнительному требованию, наложенному на метрическую функцию, равносильно ограниченности метрической функции для образа единичной сферы, т. е. условию

$$\sup_{\rho(x) \leqslant 1} \rho[U(x)] < +\infty.$$

Доказательство этого утверждения мы предоставляем читателю.

2.23. Перейдем теперь к KB-пространствам. Как мы знаем, в них (t)-сходимость совпадает с (b)-сходимостью (2.44d) гл. VI), а поэтому класс H_t^t совпадает с классом H_b^b линейных операций, непрерывных по норме. т. е. таких, что

$$\text{из } x_n \xrightarrow{(b)} x \quad \text{следует } U(x_n) \xrightarrow{(b)} U(x).$$

Таким образом, в KB-пространствах $H_t^t = H_b^b$.

Для принадлежности аддитивной операции к классу H_b^b в любых линейных нормированных пространствах имеет место следующий критерий.

2.24. Теорема. *Если X и Y — линейные нормированные пространства, а $y = U(x)$ — аддитивная операция, то для того чтобы $U \in H_b^b$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$C = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|U(x)\| < +\infty. \tag{1}$$

Доказательство. a) Необходимость. Предположим, что условие теоремы не выполнено, т. е. $C = +\infty$. Тогда существуют $x_n \in X$ с нормой $\|x_n\| \leqslant 1$, для которых $\|U(x_n)\| \geqslant n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Но тогда $\left\|\frac{1}{n} x_n\right\| \leqslant \frac{1}{n}$, следовательно, $\frac{1}{n} x_n \xrightarrow{(b)} \mathbf{0}$, а в то же время благодаря однородности аддитивной операции по отношению к рациональным множителям *)

$$\left\|U\left(\frac{1}{n} x_n\right)\right\| = \frac{1}{n} \|U(x_n)\| \geqslant 1,$$

т. е. $U\left(\frac{1}{n} x_n\right) \not\xrightarrow{(b)} \mathbf{0}$, что противоречит непрерывности операции U.

b) Достаточность. Достаточно проверить непрерывность $U(x)$ при $x = \mathbf{0}$. Так же, как в 2.14, устанавливается, что из принадлежности операции классу H_b^b вытекает её однородность. А тогда для любого $x \in X (x \neq \mathbf{0})$ имеем:

$$\|U(x)\| = \left\|U\left(\|x\| \frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \|x\| \left\|U\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant C\|x\|$$

(так как $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$). Следовательно, если $x_n \xrightarrow{(b)} \mathbf{0}$, то и $U(x_n) \xrightarrow{(b)} \mathbf{0}$, ч. и тр. д.

Замечание. Очевидно, условие доказанной теоремы равносильно существованию такой постоянной M, что для всех $x \in X$

$$\|U(x)\| \leqslant M\|x\|,$$

причём постоянная C из формулы (1) — наименьшая из всех возможных M. Постоянная C называется *(b)-нормой* операции U и обозначается $\|U\|_b$.

Признак, установленный в доказанной сейчас теореме, может применяться, в частности, и к KB-пространствам для проверки принадлежности аддитивной операции к классу H_t^t. Также имеет смысл в этом случае и понятие (b)-нормы. Однако в KB-пространствах, и даже в KB-линеалах (b)-норма для положительной операции может быть определена через значения $U(x)$ только на положительной части единичной сферы, а именно:

2.25. Если X и Y — KB-линеалы, операция U положительна и $U \in H_b^b$, то

$$\|U\|_b = \sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ x \geqslant \mathbf{0}}} \|U(x)\|.$$

Доказательство. Для любого x по 1.13c) $|U(x)| \leqslant U(|x|)$, следовательно, благодаря монотонности нормы, $\|U(x)\| \leqslant \|U(|x|)\|$. Так как при этом $\|x\| = \||x|\|$, то наше утверждение доказано.

---

*) Это доказано в 1.11b) для операций, заданных на любых линейных множествах, так как упорядочение не используется в доказательстве.

2.3. Класс H_o^o. Повторяя почти дословно доказательство признака принадлежности операции классу H_t^t (теорема 2.21) с заменой (t)-аннулируемости и (t)-сходимости на (o)-аннулируемость и (o)-сходимость, мы получим аналогичную теорему.

2.31. Теорема. (Признак принадлежности операции классу H_o^o.) *Если аддитивная операция $y = U(x)$ преобразует регулярное K-пространство X в произвольное K-пространство Y, то для того чтобы $U \in H_o^o$, необходимо и достаточно, чтобы образ $U(E)$ всякого (o)-аннулируемого множества $E \subset X$ был тоже (o)-аннулируемым множеством.*

Замечание. Из доказательства теорем 2.21 и 2.31 следует, что в условии обеих теорем достаточно потребовать, чтобы образ каждого ограниченного множества был аннулируем в соответствующем смысле.

Так же, как в 2.21, при доказательстве необходимости условия теоремы 2.31 регулярность пространства X не используется.

Так как в K^+-пространствах (o)-аннулируемость равносильна ограниченности, то имеет место следующая теорема.

2.32. Теорема. *Если X регулярно, а Y — K^+-пространство, то для того чтобы аддитивная операция $y = U(x)$ принадлежала классу H_o^o, необходимо и достаточно, чтобы образ $U(E)$ всякого ограниченного множества $E \subset X$ был ограничен в Y.*

Доказательство. Необходимость этого условия вытекает сразу из теоремы 2.31, а достаточность — из замечания к ней. Впрочем, достаточность легко устанавливается прямым путём.

Пусть $x_n \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$. Благодаря устойчивости (o)-сходимости в X (1.22 гл. V), существуют такие натуральные $k_n \to +\infty$, что $k_n x_n \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$. Тогда множество $\{k_n x_n\}$ ограничено, следовательно, по условию, и множество $\{U(k_n x_n)\}$ ограничено, т. е. $|U(k_n x_n)| \leqslant y_0 < +\infty$. Но

$$|U(x_n)| = \frac{1}{k_n} |U(k_n x_n)| \leqslant \frac{1}{k_n} y_0 \xrightarrow{(o)} \mathbf{0};$$

поэтому $U(x_n) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$, т. е. $U \in H_o^o$.

2.33. Замечание. Если X — K-пространство с метрической функцией, причём $x_n \nearrow +\infty$ влечёт $\rho(x_n) \nearrow +\infty$, и Y — K-пространство того же типа, то X и Y — регулярные K^+-пространства (см. 1.18 и 1.32 гл. VI), в которых действует признак ограниченности множества, установленный в пункте 1.31 гл. VI. Тогда из 2.32 следует, что для принадлежности аддитивной операции $y = U(x)$ классу H_o^o необходимо и достаточно, чтобы для любого $R > 0$

$$\sup_{\rho(x_1, \ldots, x_n) < R} \rho[U(x_1), \ldots, U(x_n)] < +\infty.$$

2.4. Соотношения между классами H_o^0 и H_r. Прежде всего отметим следующую фундаментальную теорему.

2.41. Теорема о совпадении H_o^0 с H_r. *Если X регулярно, а Y — K^+-пространство, то $H_o^0 = H_r$.*

Эта теорема вытекает из совпадения условий в теоремах 1.27 (признак регулярности операции) и 2.32 (признак принадлежности к H_o^0).

В частности, теорема 2.41 имеет место для функционалов, т. е. *в любом регулярном K-пространстве класс (o)-линейных функционалов совпадает с классом регулярных функционалов.*

Однако существуют примеры регулярных функционалов, которые не будут (o)-линейными. Например, в K-пространстве m ограниченных последовательностей обобщённый предел Банаха (см. гл. IX, 1.51) является положительным аддитивным функционалом. В то же время для

$$x_n = \{\xi_n^{(k)}\}, \text{ где } \xi_n^{(k)} = \begin{cases} 1 \ (k \geqslant n), \\ 0 \ (k < n), \end{cases}$$

имеем:

$$x_n \xrightarrow{(o)} \mathbf{0},$$

$$f(x_n) = \lim_{k \to \infty} \xi_n^{(k)} = 1 \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Равенство в теореме 2.41 переходит во включения разного смысла, если ослабить условие, накладываемое на одно из пространств X или Y.

2.42. Теорема. *Если X регулярно, а Y — произвольное K-пространство, то $H_r \subset H_o^0$.*

Доказательство. Пусть $U \in H_r$. Согласно замечанию к теореме 2.31 достаточно проверить, что если множество $E \subset X$ ограничено, то его образ $U(E)$ — (o)-аннулируемое множество. Но в теореме 1.27 (признак регулярности) доказано, что $U(E)$ даже ограничено.

2.43. Теорема. *Если X — произвольное K-пространство, а Y — K^+-пространство, то $H_o^0 \subset H_r$. В частности, это верно для функционалов в любом K-пространстве.*

Доказательство. Пусть $U \in H_o^0$ и E — ограниченное множество из X. По теореме 1.27 достаточно проверить, что $U(E)$ тоже ограничено, а так как Y — K^+-пространство, то ограниченность множества $U(E)$ равносильна его (o)-аннулируемости. Но мы уже отмечали выше, что в доказательстве необходимости условия теоремы 2.31 регулярность пространства X не используется; следовательно, в части необходимости эта теорема верна и для нашего случая, а тогда сразу получается, что $U(E)$ (o)-аннулируемо.

Сопоставляя теоремы 2.42 и 2.43, мы опять приходим к теореме 2.41 о совпадении классов H_o^0 и H_r.

2.44. Если $U(x)$ — положительная аддитивная операция и если из $x_n \searrow \mathbf{0}$ следует, что $U(x_n) \searrow \mathbf{0}$, то $U \in H_o^0$. (X и Y — любые K-пространства.)

Доказательство. Из поставленного условия сразу следует, что если $x_n \nearrow \mathbf{0}$, то $U(x_n) \nearrow \mathbf{0}$, так как $U(x_n) = -U(-x_n)$ и $-x_n \searrow \mathbf{0}$.

Пусть теперь $x_n \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$ любым способом. Тогда существуют такие монотонные последовательности $x_n' \searrow \mathbf{0}$ и $x_n'' \nearrow \mathbf{0}$, что $x_n' \geqslant x_n \geqslant x_n''$. Вследствие положительности операции U, $U(x_n') \geqslant U(x_n) \geqslant U(x_n'')$, а так как $U(x_n') \searrow \mathbf{0}$ и $U(x_n'') \nearrow \mathbf{0}$, то $U(x_n) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$, ч. и тр. д.

Используя это предложение, мы сможем доказать ещё один критерий принадлежности операции классу H_o^0.

2.45. Теорема. (Признак принадлежности положительной операции классу H_o^0.) *Пусть $y = U(x)$ — аддитивная положительная операция (X и Y — любые K-пространства). Для того чтобы $U \in H_o^0$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности попарно дизъюнктных элементов $x_n > \mathbf{0}$, ограниченных в совокупности*

$$U\left(\mathop{\mathbf{S}}_{k=n}^{\infty} x_k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{(o)} \mathbf{0}. \tag{2}$$

Доказательство. a) Необходимость. Если x попарно дизъюнктны и ограничены в совокупности, то ряд $\sum_1^\infty x_n$ сходится (4.14 гл. I), а тогда

$$\mathop{\mathbf{S}}_{k=n}^{\infty} x_k = \sum_{k=n}^{\infty} x_k \xrightarrow[n\to\infty]{(o)} \mathbf{0}.$$

Следовательно, так как $U \in H_o^0$, соотношение (2) должно быть выполнено.

b) Достаточность. Благодаря 2.44 достаточно установить, что $U(x_n) \searrow \mathbf{0}$ для $x \searrow \mathbf{0}$.

Если $x \searrow \mathbf{0}$, то $U(x_n) \geqslant \mathbf{0}$ и образуют монотонную последовательность. Следовательно, существует такой $y \geqslant \mathbf{0}$, что $U(x_n) \searrow y$. Нужно доказать, что $y = \mathbf{0}$.

Обозначим через X_1 компоненту пространства X, порождённую элементом x_1. Как мы знаем, x_1 играет роль единицы в X_1 (3.12 гл. III); мы обозначим его через $\mathbf{1}$. Так как X_1 — подпространство пространства X, то $x_n \searrow \mathbf{0}$ и в X_1.

Пусть целое число $k > 0$ выбрано произвольно, а e_n — след элемента $(\mathbf{1} - kx_n)_+$ в X_1. Тогда $e_n \nearrow \mathbf{1}$ (см. 4.19 гл. III); монотонность

последовательности e_n вытекает из монотонности последовательности x_n. Положим для $n=1, 2, \ldots$

$$e_n' = e_n - e_{n-1}$$

(при этом считаем $e_0 = \mathbf{0}$). Тогда e_n' попарно дизъюнктны, а

$$\mathbf{S} e_n' = \sum_n e_n = \mathbf{1}.$$

Каждый x_n можно представить в виде

$$x_n = (e_n) x_n + (\mathbf{1} - e_n) x_n = (e_n) x_n + (\mathop{\mathbf{S}}_{l=n+1}^{\infty} e_l') x_n =$$
$$= (e_n) x_n + \mathop{\mathbf{S}}_{l=n+1}^{\infty} (e_l') x_n \quad (3)$$

(см. 2.31 f) и 2.21 g) гл. III). По определению следа $(e_n)(\mathbf{1} - kx_n) = (\mathbf{1} - kx_n)_+$ (ср. также 2.31 d) гл. III), откуда $(e_n)(\mathbf{1} - kx_n) \geqslant \mathbf{0}$ или

$$(e_n)(kx_n) \leqslant (e_n)\mathbf{1} \leqslant \mathbf{1}.$$

Следовательно, благодаря положительности и аддитивности операции U,

$$kU[(e_n) x_n] = U[(e_n)(kx_n)] \leqslant U(\mathbf{1}).$$

С другой стороны, в силу условий теоремы

$$U(\mathop{\mathbf{S}}_{l=n+1}^{\infty} (e_l') x_n) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}.$$

Тогда из (3) сразу следует, что для $y = (o)\text{-}\lim U(x_n)$

$$ky \leqslant U(\mathbf{1}).$$

Так как это верно при любом $k = 1, 2, \ldots$, то отсюда следует, что $y = \mathbf{0}$, и доказательство теоремы завершено.

Перейдем к исследованию пересечения H_o^0 и H_r, которая в общем случае может не совпадать ни с H_o^0, ни с H_r.

2.46. Лемма. *Пусть $U_\xi \in H_o^0 \cap H_r$ ($\xi \in \Xi$) (X и Y — произвольные K-пространства), и пусть множество $\{U_\xi\}$ ограничено сверху в H_r. Тогда*

$$U = \sup_\xi U_\xi \in H_o^0.$$

Доказательство. Пусть сначала $U > \mathbf{0}$. Воспользуемся предыдущим критерием и будем рассуждать от противного. Пусть $x_n > \mathbf{0}$ попарно дизъюнктны и в совокупности ограничены, но

$$U(\mathop{\mathbf{S}}_{k=n}^{\infty} x_k) \searrow y > \mathbf{0}.$$

Положим $x_n' = \mathop{\mathbf{S}}\limits_{k=n}^{\infty} x_k$. Тогда

$$x_1' - x_n' = \sum_{k=1}^{\infty} x_k - \sum_{k=n}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{n-1} x_k \text{ d } x_n',$$

т. е. $x_1' = \mathbf{S}(x_1' - x_n', x_n')$, и отсюда по теореме о единственности представления

$$x_n' = (x_n') x_1'. \tag{4}$$

Таким образом, если x_1' принять за единицу в подпространстве X_1, порождённом элементом x_1', то x_n' — единичные элементы пространства X_1.

Положим для любого $x \in X$

$$V(x) = (o)\text{-}\lim_{n \to \infty} U[(x_n') x].$$

$V(x)$ существует для любого $x \geqslant \mathbf{0}$ и при этом $\mathbf{0} \leqslant V(x) < +\infty$ вследствие монотонности последовательности проекторов (x_n') и положительности операции U. Но тогда, по аддитивности операции U и проекторов, $V(x)$ существует и для любого $x \in X$. При этом $V(x)$ аддитивна (1.31), следовательно, $V \in H_r$ и $V \geqslant \mathbf{0}$. Кроме того, с помощью (4) получаем:

$$V(x_1') = (o)\text{-}\lim_{n \to \infty} U[(x_n') x_1'] = (o)\text{-}\lim_{n \to \infty} U(x_n') = y > \mathbf{0}$$

и, таким образом, $V > \mathbf{0}$.

Покажем теперь, что при всех $\xi \in \Xi$

$$U_\xi \leqslant U - V,$$

что будет противоречить равенству $U = \sup U_\xi$.

Так как $U_\xi \leqslant U$, то для любого $x \geqslant \mathbf{0}$

$$U_\xi(x) - U_\xi[(x_n') x] = U_\xi[x - (x_n') x] \leqslant U[x - (x_n') x] = \\ = U(x) - U[(x_n') x]. \tag{5}$$

По свойствам проекторов

$$(x_n') x = (x_n') [(x_1') x];$$

а тогда в силу 3.43 гл. III,

$$(x_n') x \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}. \tag{6}$$

Теперь переходим в неравенстве (5) к пределу при $n' \to \infty$. Пользуясь непрерывностью операции U_ξ и соотношением (6), получаем:

$$U_\xi(x) \leqslant U(x) - V(x),$$

Итак, $U_\xi \leqslant U - V$, т. е. противоречие получено. Следовательно, $U \in H_0^0$.

Перейдём теперь к общему случаю, т. е. не будем предполагать, что $U \geqslant \mathbf{0}$. Так как $U_+ = U \vee \mathbf{0} = \sup\limits_\xi (U_\xi \vee \mathbf{0})$, то по уже доказанному $U_+ \in H_0^0$.

Пусть $x_n \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$ и $x_n \geqslant \mathbf{0}$. Тогда

$$U_\xi(x_n) \leqslant U(x_n) \leqslant U_+(x_n).$$

Так как $U_\xi \in H_0^0$ и $U_+ \in H_0^0$, то $U_\xi(x_n) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$ и $U_+(x_n) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$. А тогда и $U(x_n) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$. Если же $x_n \to \mathbf{0}$, но x_n — любые, то $(x_n)_+ \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$, $(x_n)_- \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$ и

$$U(x_n) = U(x_n)_+ - U(x_n)_- \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}.$$

Тем самым $U \in H_0^0$.

2.47. Теорема. *Если $U \in H_0^0 \cap H_r$, то $|U|$, U_+ и $U_- \in H_0^0$ (X и Y — любые K-пространства).*

Доказательство. Так как

$$|U| = U \vee (-U), \quad U_+ = U \vee \mathbf{0}, \quad U_- = (-U) \vee \mathbf{0},$$

то доказываемая теорема вытекает сразу из леммы 2.46.

Замечание. Легко видеть, что доказательства теоремы 2.45 и леммы 2.46 дословно переносятся на случай, когда X — K-группа, удовлетворяющая аксиоме V для счётных множеств *). Следовательно, в этом случае верна и теорема 2.47. Этим обстоятельством мы существенно воспользуемся в следующей главе.

2.48. Теорема. *Для любых K-пространств X и Y пересечение $H_0^0 \cap H_r$ есть компонента пространства H_r. Если Y — K^+-пространство, то само H_0^0 есть компонента пространства H_r. В частности, последнее верно для функционалов.*

Доказательство. Ясно, что $H_0^0 \cap H_r$ — линейное подмножество пространства H_r. Правильность этого подмножества доказана в лемме 2.46. Остаётся доказать его нормальность.

Пусть $U \in H_0^0 \cap H_r$, $V \in H_r$ и $|V| \leqslant |U$. По теореме 2.47 $|U| \in H_0^0$. Для $x_n \searrow \mathbf{0}$ имеем $\mathbf{0} \leqslant V_+(x_n) \leqslant |V|(x_n) \leqslant |U|(x_n) \searrow \mathbf{0}$, следовательно, по 2.44 $V_+ \in H_0^0$; аналогично, $V_- \in H_0^0$, а тогда и $V = V_+ - V_- \in H_0^0$.

Вторая часть теоремы вытекает из 2.43.

Замечание. Доказанная теорема означает, что H_r разлагается на две компоненты: $H_0^0 \cap H_r$ и её дизъюнктное дополнение, т. е.

---

*) Как мы отмечали в главе I, в такой K-группе имеет смысл понятие (o)-сходимости, следовательно, можно рассматривать непрерывные операции.

всякая операция $U \in H_r$ единственным образом представима в виде $U = \mathbf{S}(U_1, U_2) = U_1 + U_2$, где $U_1 \in H_o^o \cap H_r$, а U_2 d $H_o^o \cap H_r$.

2.49. Если $U \in H_t^t$ и $U \geqslant \mathbf{0}$, то $U \in H_o^o$, т. е. всякая положительная операция класса H_t^t входит одновременно и в H_o^o.

Доказательство. Если $x_n \searrow \mathbf{0}$, то $U(x_n) \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$; но так как $U(x_n)$ образуют монотонную последовательность, то из (t)-сходимости вытекает, что $U(x_n) \searrow \mathbf{0}$, и $U \in H_o^o$ по 2.44.

2.5. Некоторые дополнения к предыдущим теоремам. Предложение 2.44 можно для функционалов значительно усилить, а именно:

2.51. Если для аддитивного функционала f из $x_n \searrow \mathbf{0}$ следует, что $f(x_n) \to 0$, то функционал $f(x)$ регулярен и (o)-линеен (т. е. $f \in H_o^o = H_t^t = H_t^o$). Это предложение справедливо и в случае, если X — K-группа, в которой аксиома V выполнена по крайней мере для счётных множеств. Попутно будет доказано, что и $|f|$ (o)-линеен.

Доказательство. Сначала докажем, что $f \in H_r$. Предположим, что f не регулярен. Тогда для него не выполняется условие признака регулярности 1.27, т. е. существует $x_0 > \mathbf{0}$, для которого

$$\sup_{\mathbf{0} \leqslant x \leqslant x_0} f(x) = +\infty \text{ *)}. \tag{7}$$

Но тогда существует такой $\bar{x}$, что $\mathbf{0} \leqslant \bar{x} \leqslant x_0$, а $f(\bar{x}) \geqslant |f(x_0)| + 1$. Так как любой x, заключённый между $\mathbf{0}$ и x_0, представим в виде $x = x' + x''$, где $\mathbf{0} \leqslant x' \leqslant \bar{x}$, $\mathbf{0} \leqslant x'' \leqslant x_0 - \bar{x}$ (1.42), гл. I, то из (7) следует, что

$$\text{либо} \sup_{\mathbf{0} \leqslant x \leqslant \bar{x}} f(x) = +\infty, \text{ либо} \sup_{\mathbf{0} \leqslant x \leqslant x_0 - \bar{x}} f(x) = +\infty.$$

Обозначим через x_1 тот из элементов $\bar{x}$, $x_0 - \bar{x}$, для которого

$$\sup_{\mathbf{0} \leqslant x \leqslant x_1} f(x) = +\infty.$$

При этом, так как $f(\bar{x}) \geqslant |f(x_0)| + 1$, а

$$|f(x_0 - \bar{x})| \geqslant f(\bar{x}) - |f(x_0)| \geqslant 1,$$

то $f(x_1) \geqslant 1$. Продолжая этот процесс, мы построим последовательность $\{x_n\}$, для которой $x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \mathbf{0}$, а $f(x_n) \geqslant n$. Но тогда $f(x_n) \to \infty$. С другой стороны, существует такой x, что $x_n \searrow x$ или $x_n - x \searrow \mathbf{0}$. Отсюда, по предположению, должно следовать, что $f(x_n - x) \to 0$ или $f(x_n) \to f(x)$, что противоречит стремлению $f(x_n)$ к ∞. Регулярность функционала f доказана.

Теперь докажем непрерывность функционала f. Достаточно доказать непрерывность функционалов f_+ и f_-; мы проведём рассуждение для f_+. Для проверки непрерывности функционала f_+ достаточно на основании 2.44 доказать, что из $x_n \searrow \mathbf{0}$ следует $f_+(x_n) \searrow 0$.

---

*) Достаточно проверить ограниченность $f(x)$ для любого ограниченного множества положительных элементов.

Допустим, что это не так, т. е. существуют $x_n \searrow \mathbf{0}$, для которых $f_+(x_n) \searrow \varepsilon > 0$. Подберём $\varepsilon_n \searrow 0$ так, чтобы

$$2n\varepsilon_n + 3\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Переходя в случае надобности к подпоследовательности, можно считать, что при всех n

$$f_+(x_n) < \varepsilon + \varepsilon_n, \quad f(x_n) \leqslant \varepsilon_n.$$

Так как по формуле (6) 1.24

$$f_+(x_n) = \sup_{\mathbf{0} \leqslant x' \leqslant x_n} f(x'),$$

то найдётся x'_n, для которого

$$\mathbf{0} \leqslant x'_n \leqslant x_n, \qquad f(x'_n) \geqslant f_+(x_n) - \varepsilon_n. \tag{8}$$

Покажем, что

$$|f|(|x'_n - x'_k|) \leqslant 3\varepsilon_k + 2\varepsilon_n \quad (n > k). \tag{9}$$

Действительно, благодаря (8) получаем:

$$f_-(|x'_n - x'_k|) \leqslant f_-(x'_n + x'_k) = f_+(x'_n + x'_k) - f(x'_n + x'_k) \leqslant$$
$$\leqslant f_+(x_n + x_k) - f(x'_n + x'_k) < \varepsilon_n + \varepsilon_k;$$
$$f_+(|x'_n - x'_k|) \leqslant f_+(x_k - x'_n) + f_+(x_k - x'_k) \leqslant$$
$$\leqslant 2f_+(x_k) - f(x'_n) - f(x'_k) = [f_+(x_k) - f(x'_n)] + [f_+(x_n) - f(x'_n)] +$$
$$+ [f_+(x_k) - f_+(x_n)] \leqslant \varepsilon_k + \varepsilon_n + (\varepsilon + \varepsilon_k) - \varepsilon = 2\varepsilon_k + \varepsilon_n.$$

Так как $|f| = f_+ + f_-$, то (9) доказано.

Положим теперь

$$x^*_n = x'_1 \wedge \ldots \wedge x'_n.$$

Тогда $x^*_n \searrow \mathbf{0}$. Но

$$f(x^*_n) = f(x'_n) + f(x^*_n - x'_n) = f(x'_n) + f[(x'_1 - x'_n) \wedge \ldots \wedge (x'_{n-1} - x'_n) \wedge \mathbf{0}].$$

По 1.25 и с помощью (9) имеем:

$$|f[(x'_1 - x'_n) \wedge \ldots \wedge (x'_{n-1} - x'_n) \wedge \mathbf{0}]| \leqslant |f|\left[\sum_{k=1}^{n-1} |x'_k - x'_n|\right] =$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} |f|(|x'_k - x'_n|) \leqslant 3\sum_{1}^{n-1} \varepsilon_k + 2(n-1)\varepsilon_n. \tag{10}$$

Следовательно,

$$f(x^*_n) \geqslant f(x'_n) - 3\sum_{1}^{n-1} \varepsilon_k - (2n-2)\varepsilon_n,$$

откуда, по (8),

$$f(x^*_n) \geqslant \varepsilon - \varepsilon_n - 3\sum_{1}^{n-1} \varepsilon_k - (2n-2)\varepsilon_n \geqslant \varepsilon - 3\sum_{1}^{n} \varepsilon_k - 2n\varepsilon_n > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, $x_n^* \searrow \mathbf{0}$, а $f(x_n^*) > \frac{\varepsilon}{2}$, что опять противоречит условию нашего предложения. Полученное противоречие и завершает доказательство.

Приведём ещё одно обобщение теоремы 2.41 (о совпадении H_o^0 с H_r).

2.52. Пусть X — K-линеал. Будем говорить, что $x_n \xrightarrow{(\sigma)} x$, если существует такой $r \in X$ (регулятор сходимости), что

$$|x_n - x| < \varepsilon r \text{ при } n \geqslant N_\varepsilon.$$

Тогда можно рассмотреть класс H_σ^0 аддитивных и (σo)-непрерывных операций, отображающих X в K-пространство Y. При этом может быть доказано следующее предложение.

2.53. Если Y — K^+-пространство, то $H_\sigma^0 = H_r$.

Из этого предложения сразу вытекает теорема 2.41, так как если X — регулярное K-пространство, то (σ)-сходимость совпадает с (o)-сходимостью (теорема 1.24, гл. V).

2.54. Введём в рассмотрение ещё один класс непрерывных операций: H_b^0. К этому классу мы причислим аддитивные и (bo)-непрерывные операции $y = U(x)$, отображающие линейное нормированное пространство X в K-пространство Y. (bo)-непрерывность согласно уже принятым нами обозначениям означает, что из $x_n \xrightarrow{(b)} x$ следует $U(x_n) \xrightarrow{(o)} U(x)$.

В частности, класс H_b^0 можно рассматривать, если X—KB-линеал. В KB-линеале (σ)-сходимость влечёт сходимость по норме, поэтому из 2.53 вытекает, что $H_b^0 \subset H_r$, если Y — K^+-пространство.

В пространствах C, M (2.12, 2.34 гл. VI) (σ)-сходимость, очевидно, совпадает с (b)-сходимостью; поэтому, также по 2.53, если X есть C или M, а Y — K^+-пространство, то $H_b^0 = H_r$.

Приведём одну теорему, используемую в дальнейшем.

2.55. Теорема о разложении элемента K-группы. *Пусть X — K-группа, удовлетворяющая аксиоме* V *для счётных множеств, и f — (o)-линейный функционал в X. Тогда любой положительный $x \in X$ $(x \geqslant \mathbf{0})$ можно представить в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1, x_2 \geqslant \mathbf{0}$, так, что $f_+(x_2) = f_-(x_1) = 0$ (регулярность функционала f следует из* 2.51).

Доказательство. Пусть $f_+(x) = a$. Из определения $f_+(x)$ (1.24) следует существование таких $z_n \in X$, что $\mathbf{0} \leqslant z_n \leqslant x$, $a - \frac{1}{2^n} \leqslant f(z_n) \leqslant a$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Положим

$$x_1 = \overline{\lim}\, z_n.$$

Тогда $\mathbf{0} \leqslant x_1 \leqslant x$. Из равенства

$$z_n + z_{n+1} = (z_n \vee z_{n+1}) + (z_n \wedge z_{n+1})$$

(см. 1.41 гл. I) следует, что

$$f(z_n \vee z_{n+1}) = f(z_n) + f(z_{n+1}) - f(z_n \wedge z_{n+1}) \geqslant$$
$$\geqslant 2a - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} - a = a - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

По индукции получаем, что для любого $m > n$

$$f(z_n \vee \ldots \vee z_m) \geqslant a - \frac{1}{2^n} - \ldots - \frac{1}{2^m}.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$ и учитывая непрерывность функционала f, имеем:

$$f[\sup(z_n, z_{n+1}, \ldots)] \geqslant a - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Переходя ещё раз к пределу при $n \to \infty$, получаем:

$$f(x_1) \geqslant a.$$

Но, с другой стороны,

$$f(x_1) \leqslant \sup_{0 \leqslant x' \leqslant x} f(x') = f_+(x) = a,$$

а потому

$$f(x_1) = a = f_+(x).$$

Тогда $f_+(x_1) \leqslant f_+(x) = f(x_1)$. Однако знак $<$ здесь невозможен, значит, $f_+(x_1) = f(x_1)$, следовательно, $f_-(x_1) = 0$.

Теперь положим $x_2 = x - x_1$. Тогда

$$f_+(x_2) = f_+(x) - f_+(x_1) = 0,$$

чем и завершается доказательство теоремы.

2.6. Операции класса H_0^0 в KB-пространствах. Если X и Y — KB-пространства, то они являются регулярными K^+-пространствами (2.44—2.45 гл. VI). Следовательно, к ним применима теорема 2.41, по которой $H_0^0 = H_r$. Для операций этого класса в KB-пространствах можно установить признак, основанный на использовании нормы группы элементов (см. 2.44c) гл. VI).

2.61. Теорема. *Для того чтобы аддитивная операция $y = U(x)$ принадлежала классу H_0^0, необходимо и достаточно существование такой постоянной M, что*

$$\|U(x_1), \ldots, U(x_n)\| \leqslant M\|x_1, \ldots, x_n\| \tag{11}$$

для любых $x_1, \ldots, x_n \in X$. При этом наименьшая из возможных постоянных M равна $|||U|||_b$.

Доказательство. a) Необходимость. Пусть $U \in H_0^0$. Тогда для любых $x_1, \ldots, x_n \in X$

$$\|U(x_1), \ldots, U(x_n)\| = \||U(x_1)| \vee \ldots \vee |U(x_n)|\| \leqslant$$
$$\leqslant \||U|(|x_1| \vee \ldots \vee |x_n|)\| \leqslant \||U|\|_b \|x_1 \ldots, x_n\|,$$

т. е. $|||U|||_b$ является одной из возможных постоянных M.

b) Достаточность. Пусть существует некоторая постоянная M, для которой условие теоремы выполнено. Для любого $x \geqslant 0$ множество

$$\{U(x')\}_{|x'| \leqslant x}$$

ограничено по признаку 2.45b) гл. VI, так как, если $|x_1|, \ldots, |x_n| \leqslant x$, то

$$\|U(x_1), \ldots, U(x_n)\| \leqslant M\|x_1, \ldots, x_n\| = \\ = M\||x_1| \vee \ldots \vee |x_n|\| \leqslant M\|x\|.$$

Но тогда по признаку 2.32 $U \in H_o^0$.

Теперь вследствие предложения 1.26 и регулярности пространства Y существуют такие x_n, что $|x_n| \leqslant x$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и

$$|U|(x) = \sup_n |U(x_n)| = (o)\text{-}\lim_{n\to\infty} [|U(x_1)| \vee \ldots \vee |U(x_n)|].$$

Вследствие непрерывности нормы как частного случая метрической функции (1.12 гл. VI)

$$\||U|(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|U(x_1), \ldots, U(x_n)\| \leqslant M\|x\|,$$

откуда $\||U|\|_b \leqslant M$. Значит, $\||U|\|_b$ — минимальная постоянная в (11), и теорема полностью доказана.

Так как в KB-пространствах (o)-сходимость совпадает с (v)-сходимостью (2.54 гл. VI), то класс H_o^0 совпадает с классом H_v^0 — аддитивных (vv)-непрерывных операций. Вследствие этого наименьшую постоянную в формулировке теоремы 2.61 мы назовём (v)-*нормой* операции $U(x)$ и обозначим $\|U\|_v$. Таким образом,

$$\|U\|_v = \||U|\|_b.$$

Легко видеть, что (v)-норма может быть определена и так:

$$\|U\|_v = \sup_{\|x_1, \ldots, x_n\| \leqslant 1} \|U(x_1), \ldots, U(x_n)\|\text{*)}.$$

2.62. Если норма в X удовлетворяет дополнительному условию *аддитивности*, а именно:

$$\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\| \text{ для } x_1, x_2 \geqslant \mathbf{0},$$

то $H_o^0 = H_t^t$ и для любой операции $U \in H_o^0$

$$\|U\|_v = \|U\|_b.$$

Доказательство. Возьмём $U \in H_t^t = H_b^b$ и докажем, что $U \in H_o^0$ и что нормы совпадают. Положим для $x \geqslant \mathbf{0}$

$$V(x) = \sup_{\substack{x_1 + \ldots + x_n = x \\ x_1, \ldots, x_n \geqslant \mathbf{0}}} [|U(x_1)| + \ldots + |U(x_n)|] \tag{12}$$

и докажем, что $V(x) < +\infty$.

---

*) Верно также замечание, аналогичное 2.25.

Обозначим через E множество всех элементов $y=\sum_{i=1}^{n}|U(x_i)|$, входящих в правую часть формулы (12). Тогда для любого $y\in E$, благодаря аддитивности нормы

$$\|y\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\|U(x_i)\|\leqslant\|U\|_b\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|=\|U\|_b\,\|x\|. \tag{13}$$

Покажем, что если $y_1,\ldots,y_n\in E$, то найдётся такой $y^*\in E$, что $y_1\vee\ldots\vee y_n\leqslant y^*$. Достаточно проверить это для $n=2$.

Итак, пусть y_1, $y_2\in E$. Это означает, что

$$y_1=\sum_{i=1}^{n}|U(x_i')|,\quad y_2=\sum_{k=1}^{p}|U(x_k'')|,$$

где $x_1'+\ldots+x_n'=x_1''+\ldots+x_p''=x$, а все x_i', $x_k''\geqslant\mathbf{0}$. Посредством двойного разбиения элементов (1.42 гл. I), проведённого индуктивно по p, мы можем найти такие $x_{ik}\geqslant\mathbf{0}$ $(i=1,\ldots,n;$ $k=1,\ldots,p)$, что

$$x_i'=\sum_{k=1}^{p}x_{ik}\quad(i=1,\ldots,n),\quad x_k''=\sum_{i=1}^{n}x_{ik}\quad(k=1,\ldots,p).$$

Тогда

$$x=\sum_{i,\,k}x_{ik},$$

а

$$y^*=\sum_{i,\,k}|U(x_{ik})|\in E.$$

При этом

$$y_1=\sum_{i=1}^{n}|U(x_i')|=\sum_{i=1}^{n}\Big|\sum_{k=1}^{p}U(x_{ik})\Big|\leqslant\sum_{i,\,k}|U(x_{ik})|=y^*$$

и, аналогично, $y_2\leqslant y^*$, т. е. $y_1\vee y_2\leqslant y^*$.

Теперь для любых $y_1,\ldots,y_n\in E$ из (13) вытекает, что

$$\|y_1,\ldots,y_n\|\leqslant\|y^*\|\leqslant\|U\|_b\,\|x\|<+\infty.$$

Следовательно, E ограничено (2.45b) гл. VI), а

$$\|V(x)\|\leqslant\|U\|_b\|x\|$$

(2.46 гл. VI). Так как $V(x)<+\infty$, то для U выполнено условие признака регулярности 1.27a) *), а тогда $U\in H_r=H_o^0$. Кроме того, для любого $x\geqslant\mathbf{0}$ $|U|(x)\leqslant V(x)$ (1.26), откуда

$$\||U|(x)\|\leqslant\|U\|_b\,\|x\|$$

---

*) Если $|x'|\leqslant x$, то $x_+'+x_-'\leqslant x$, а тогда

$$|U(x')|\leqslant|(x_+')|+|U(x_-')|\leqslant V(x).$$

Отсюда уже следует, что $\||U|\|_b \leqslant \|U\|_b$ (2.25) и, значит,

$$\|U\|_v \leqslant \|U\|_b.$$

Но из определения (b)- и (v)-норм сразу вытекает обратное неравенство, и, таким образом, совпадение норм доказано.

Свойством аддитивности обладает, например, норма в L, V и l (2.6 гл. VI).

2.7. Операции в K-пространствах ограниченных элементов. В гл. VI были изучены K-пространства с единицей, состоящие из ограниченных элементов. Там было установлено, что в K-пространстве ограниченных элементов (t)-аннулируемость и (o)-аннулируемость множества равносильны его ограниченности (2.33c) гл. VI). В частности, пространство ограниченных элементов — K^+-пространство.

Укажем некоторые уточнения предыдущих теорем.

2.71. Если X — K-пространство ограниченных элементов, а Y — произвольное K-пространство, то в условии признака регулярности 1.27 достаточно потребовать, чтобы образ $U(E)$ множества $E=\{x\}$ $(\|x\| \leqslant 1)$ (т. е. единичной сферы $\|x\| \leqslant 1$) был ограничен в Y.

Действительно, любое ограниченное множество $E_1 \subset X$ ограничено некоторым элементом вида $n\mathbf{1}$ (n — натуральное). Но тогда каждый $x_1' \in E_1$ имеет вид $x' = nx$, где $x \in E$ (E — единичная сфера). Поэтому

$$\sup U(E_1) \leqslant n \sup U(E) < +\infty.$$

2.72. Если X — произвольное K-пространство, а Y — K-пространство ограниченных элементов, то $H_t^t \subset H_r$.

Доказательство. Пусть $U \in H_t^t$. Возьмём ограниченное множество $E \subset X$. Ограниченность множества E влечёт его (t)-аннулируемость. Так как необходимость условия теоремы 2.21 доказана для произвольного K-пространства X, то $U(E)$ должно быть (t)-аннулируемым. Но в Y (t)-аннулируемость равносильна ограниченности (2.33c) гл. VI), следовательно, $U(E)$ ограничено. А тогда $U \in H_r$ по теореме 1.27.

2.73. Если X — регулярное K-пространство, а Y — K-пространство ограниченных элементов, то $H_t^t = H_o^o = H_r$.

Доказательство. По 2.72 $H_t^t \subset H_r$, а по теореме 2.41 (и 2.33d) гл. VI) $H_r = H_o^o$. Но для любых K-пространств $H_o^o \subset H_t^t$; поэтому $H_t^t = H_o^o = H_r$.

2.8. Класс H_b^o. Прежде чем переходить к классу H_t^o мы рассмотрим класс H_b^o аддитивных (bo)-непрерывных операций, отображающих линейное нормированное пространство в K-пространство. Как мы поясняли выше, (bo)-непрерывность означает, что из $x_n \xrightarrow{(b)} x$ следует $U(x_n) \xrightarrow{(o)} U(x)$.

Для функционалов класс H_b^o совпадает с H_b^b (так как в пространстве вещественных чисел (o)-сходимость совпадает со сходимостью по норме). Такие функционалы называются (b)-*линейными*.

Операции класса H_b^o мы также будем относить к числу линейных. Как и для прочих ранее рассматривавшихся классов, для про-

верки (bo)-непрерывности аддитивной операции достаточно установить, что из $x_n \xrightarrow{(b)} \mathbf{0}$ следует $U(x_n) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$. Операции класса H_b^0 однородны.

2.81. Теорема. (Признак принадлежности классу H_b^0.) *Для того чтобы аддитивная операция $y = U(x)$ (X — линейное нормированное пространство, Y — K-пространство), принадлежала классу H_b^0, необходимо и достаточно, чтобы образ единичной сферы $S \subset X$ (S состоит из x, для которых $\|x\| \leqslant 1$) был (o)-аннулируем в Y.*

Доказательство. Необходимость условия доказывается буквально так же, как в теореме 2.21, если учесть, что сфера S (b)-аннулируема, т. е. из $x_n \in S$ и $\alpha_n \to 0$ следует $\alpha_n x_n \xrightarrow{(b)} \mathbf{0}$.

Достаточность. Пусть $x_n \xrightarrow{(b)} \mathbf{0}$. Подберём такие рациональные числа $r_n \to 0$, что $\|x_n\| < r_n$. Положим

$$x_n' = \frac{1}{r_n} x_n.$$

Тогда $\|x_n'\| < 1$, т. е. $x_n' \in S$. Но

$$U(x_n) = r_n U(x_n'),$$

и, вследствие (o)-аннулируемости множества $U(S)$, $U(x_n) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$.

Следствие. *Если X — K-пространство ограниченных элементов, а Y — любое K-пространство, то $H_r \subset H_b^0$.*

Доказательство. Если $U \in H_r$, то по 2.71 образ единичной сферы ограничен, значит, и (o)-аннулируем. Таким образом, для U выполнено условие теоремы 2.81, т. е. $U \in H_b^0$.

2.82. Теорема. *Если Y — K^+-пространство, а X — линейное нормированное пространство, то для принадлежности аддитивной операции $y = U(x)$ классу H_b^0 необходима и достаточна ограниченность образа единичной сферы:*

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} |U(x)| < +\infty.$$

Эта теорема вытекает непосредственно из предыдущей, так как в K^+-пространстве (o)-аннулируемость равносильна ограниченности.

Следствие 1. *Если X — KB-линеал, а Y — K^+-пространство, то $H_b^0 \subset H_r$* *).

Доказательство. Возьмём $U \in H_b^0$ и покажем, что $U \subset H_r$. Пусть $E \subset X$ — ограниченное множество и $x_0 = \sup_{x \in E} |x|$. Тогда $\|x\| \leqslant \|x_0\|$ для любого $x \in E$; следовательно,

$$|U(x)| \leqslant \|x_0\| \sup U(S)$$

---

*) Это предложение уже было установлено в 2.54.

(S — единичная сфера в X), т. е. $U(E)$ ограничено. Таким образом, U удовлетворяет признаку регулярности 1.27, т. е. $U \in H_r$.

Следствие 2. *Если X — K-пространство ограниченных элементов, а Y — K^+-пространство, то $H_b^o = H_r$.*

Действительно, K-пространство ограниченных элементов — частный случай KB-линеала, а потому, по двум предыдущим следствиям, имеем одновременные включения $H_r \subset H_b^o$ и $H_b^o \subset H_r$.

2.83. Теорема. *Если X — KB-линеал, полный относительно (b)-сходимости, а Y — любое K-пространство, то $H_r \subset H_b^t$, т. е. каждая регулярная операция $y = U(x)$ (bt)-непрерывна. Последнее означает, что из $x_n \xrightarrow{(b)} x$ вытекает $U(x_n) \xrightarrow{(t)} U(x)$.*

Доказательство. Достаточно провести рассуждение для $U \geqslant \mathbf{0}$.

Пусть $x_n \xrightarrow{(b)} \mathbf{0}$. Существуют такие положительные числа $\lambda_n \to +\infty$, что $\lambda_n x_n \xrightarrow{(b)} \mathbf{0}$. Следовательно, для некоторых $n_k \nearrow +\infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{n_k} \| x_{n_k} \| < +\infty,$$

а тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{n_k} | x_{n_k} |$ (b)-сходится (2.11 гл. VI). Пусть x — его сумма. Благодаря возможности (b)-предельного перехода в неравенствах (2.23 гл. VI)

$$\lambda_{n_k} | x_{n_k} | \leqslant x$$

при всех $k = 1, 2, \ldots$. Отсюда

$$| U(x_{n_k}) | \leqslant U(| x_{n_k} |) \leqslant \frac{1}{\lambda_{n_k}} U(x) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0},$$

следовательно, $U(x_{n_k}) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$. Таким образом, из последовательности $\{U(x_n)\}$ можно выделить (o)-сходящуюся к $\mathbf{0}$ подпоследовательность. Так как наше рассуждение может быть проведено и для любой частичной последовательности $\{x_n'\}$, выделенной из $\{x_n\}$, то тем самым доказано, что $U(x_n) \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$, т. е. $U \in H_b^t$.

2.84. Теорема. *Если X — KB-линеал, полный относительно (b)-сходимости, то класс (b)-линейных функционалов совпадает с классом регулярных функционалов.*

Это вытекает из сопоставления теоремы 2.83 и следствия 1 из теоремы 2.82, так как в пространстве вещественных чисел (t)-сходимость и (o)-сходимость (а также (b)-сходимость) совпадают и, следовательно, $H_b^t = H_b^o$.

В частности, эта теорема имеет место в K-пространстве ограниченных элементов, что, впрочем, уже установлено выше (2.82, следствие 2).

Введём определение абстрактной нормы для операций класса H_b^o со значениями в K^+-пространстве, а именно, положим

$$\|U\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |U(x)|,$$

и этот элемент $\|U\|$ (его конечность установлена в 2.82) назовём *абстрактной нормой* операции U.

Для функционала $\|F\| = \|F\|_b$, т. е. абстрактная норма совпадает с (b)-нормой.

Выясним некоторые свойства абстрактной нормы в случае, если X — KB-линеал (а тогда $H_b^o \subset H_r$ — см. 2.82, следствие 1).

В этом случае для проверки принадлежности операции U к классу H_b^o достаточно установить, что

$$y_0 = \sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ x \geqslant 0}} |U(x)| < +\infty$$

Действительно, для любого x с $\|x\| \leqslant 1$, так как

$$\|x_+\|, \quad \|x_-\| \leqslant \||x|\| = \|x\| \leqslant 1,$$

имеем:

$$|U(x)| \leqslant |U(x_+)| + |U(x_-)| \leqslant 2y_0.$$

Однако для положительной операции можно дать следующее уточнение, аналогичное предложению 2.25 для (b)-нормы.

2.85. Если $U \in H_b^o$ и $U \geqslant 0$, то

$$\|U\| = \sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ x \geqslant 0}} U(x).$$

Доказательство. Так как для любого x

$$|U(x)| \leqslant U(|x|) \text{ (см. 1.13c)) и } \|x\| = \||x|\|,$$

то

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} |U(x)| = \sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ x \geqslant 0}} U(x).$$

2.86. Теорема. 1) *Если $U \in H_b^o$, то U_+, U_-, $|U| \in H_b^o$ и при этом*

$$\||U|\| = \|U\|; \quad \|U_+\|, \|U_-\| \leqslant \|U\|.$$

2) *H_b^o — нормальное подпространство пространства H_r.*

Доказательство. 1) Имеем

$$\sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ x \geqslant 0}} |U|(x) = \sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ x \geqslant 0}} \sup_{|x'| \leqslant x} |U(x')| = \sup_{\|x'\| \leqslant 1} |U(x')| = \|U\|.$$

Таким образом, $|U| \in H_b^o$ и $\||U|\| = \|U\|$ (см. 2.85).

Так как $\mathbf{0} \leqslant U_+$, $U_- \leqslant |U|$, то, очевидно, U_+, $U_- \in H_b^0$, а из 2.85 сразу следует, что

$$\|U_+\|,\ \ U_-\| \leqslant \||U|\| = \|U\|.$$

2) Ясно, что H_b^0 — линейное подмножество пространства H_r. Кроме того, если $\mathbf{0} \leqslant U \leqslant U_0$, где $U_0 \in H_b^0$, $U \in H_r$, то $U \in H_b^0$. Действительно, если $x_n \xrightarrow{(b)} \mathbf{0}$, то $|x_n| \xrightarrow{(b)} \mathbf{0}$ и $U_0(|x_n|) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$, а $|U(x_n)| \leqslant \leqslant |U|(|x_n|) \leqslant U_0(|x_n|)$; следовательно, и $U(x_n) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$. Теперь из первой части теоремы сразу следует, что H_b^0 удовлетворяет условию нормальности, значит, H_b^0 — нормальное подпространство пространства H_r.

Замечание. Абстрактную норму $\|U\|$ можно рассматривать и в случае, если Y—произвольное K-пространство, (а X—линейное нормированное пространство). Однако тогда уже не всякая операция класса H_b^0 будет иметь конечную абстрактную норму. В то же время по теореме 2.81 всякая аддитивная операция с конечной абстрактной нормой принадлежит классу H_b^0. Таким образом, класс аддитивных операций с конечной абстрактной нормой в общем случае составляет часть класса H_b^0.

Доказанные выше следствия из теоремы 2.82, а также свойства абстрактной нормы 2.85 — 2.86 сохраняются и в общем случае, если в их формулировках класс H_b^0 заменить классом аддитивных операций с конечной абстрактной нормой. Это замечание будет использовано в дальнейшем.

Рассмотрим теперь случай, когда X — произвольное линейное нормированное пространство, а Y — KB-пространство. В этом случае имеем следующий признак.

2.87. Теорема. *Для того чтобы аддитивная операция $y = U(x)$ принадлежала классу H_b^0, необходимо и достаточно, чтобы*

$$C = \sup_{\|x_i\| \leqslant 1} \|U(x_1), \ldots, U(x_n)\| < +\infty. \tag{14}$$

Доказательство. В KB-пространствах ограниченность множества элементов равносильна ограниченности множества норм всевозможных групп из этих элементов (2.45b) гл. VI). Поэтому доказываемое условие равносильно признаку 2.82.

Вследствие однородности операции U, очевидно, что C — наименьшая из постоянных M, для которых

$$\|U(x_1), \ldots, U(x_n)\| \leqslant M \max_i \|x_i\|.$$

Эта постоянная C называется *(bv)-нормой* операции $U(x)$ и обозначается $\|U\|_b^v$. Такое обозначение объясняется совпадением класса H_b^o с классом H_b^v аддитивных (bv)-непрерывных операций.

2.88. Если X — KB-линеал, то $\|U\|_b^v = \|\|U\|\|$.

Доказательство. Возьмём произвольные $x_1, \ldots, x_n$ из единичной сферы пространства X. Тогда

$$\|U(x_1), \ldots, U(x_n)\| = \||U(x_1)| \vee \ldots \vee |U(x_n)|\| \leqslant \|\|U\|\|,$$

откуда $\|U\|_b^v \leqslant \|\|U\|\|$.

Обратно, из регулярности KB-пространства Y вытекает существование таких x_n с $\|x_n\| \leqslant 1$, что

$$\|\|U\|\| = \sup_n |U(x_n)| = (o)\text{-}\lim_{n\to\infty} \sup_1^n |U(x_i)|$$

(теорема 1.41 гл. V). Но тогда

$$\|\|U\|\| = \lim \|U(x_1), \ldots, U(x_n)\| \leqslant \|U\|_b^v.$$

Из полученных двух неравенств и следует требуемое равенство.

2.89. Заметим, что если X и Y — KB-пространства и $U \in H_b^o$, то $U \in H_o^o \subset H_t^t = H_b^b$ и для U имеют смысл все три числовых нормы, причём

$$\|U\|_b \leqslant \|U\|_v \leqslant \|U\|_b^v .$$

Эти неравенства вытекают сразу из определения норм.

Так как для функционалов абстрактная норма совпадает с (b)-нормой, то по 2.88 (bv)-норма тоже совпадает с (b)-нормой: поэтому для функционалов имеет место равенство

$$\|F\|_b = \|F\|_v = \|F\|_b^v .$$

2.9. Класс H_t^o. Для операций класса H_t^o мы имеем возможность установить критерий, аналогичный признакам 2.21 и 2.31 для классов H_t^t и H_o^o, только если наложить на K-пространство X дополнительное требование чтобы (t)-сходимость в нём была устойчива. Тогда для принадлежности аддитивной операции классу H_t^o будет необходимо и достаточно, чтобы образ любого (t)-аннулируемого множества из X был (o)-аннулируем в Y.

Однако, кроме KB-пространств, где (t)-сходимость совпадает с (b)-сходимостью и поэтому устойчива, мы не можем указать какой-нибудь ещё широкий класс K-пространств, где (t)-сходимость также была бы устойчива. А если X — KB-пространство, то $H_t^o = H_b^o$ и для принадлежности операции к этому классу уже установлены признаки 2.81 — 2.82, имеющие весьма простую форму. Поэтому мы не останавливаемся на общих признаках для класса H_t^o.

Если X — любое K-пространство, а Y — K^+-пространство, то $H_0^0 \subset H_r$ (2.43). Тем более $H_t^0 \subset H_r$, следовательно, для $U \in H_t^0$ имеет смысл $|U|$.

2.91. Если X — любое K-пространство, Y — регулярное K^+-пространство, а $U \in H_t^0$, то и $|U| \in H_t^0$.

Доказательство. Пусть $x_n \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$; сначала предположим, что $x_n \geqslant \mathbf{0}$. По определению модуля в H_r (см. 1.26)

$$|U|(x_n) = \sup_{|x'| \leqslant x_n} U(x').$$

Поэтому

$$\sup_{|x'| \leqslant x_n} [U(x') - |U|(x_n)] = \mathbf{0}.$$

Вследствие регулярности пространства Y существуют такие $x_1^{(n)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что

$$|x_i^{(n)}| \leqslant x_n \quad (i = 1, \ldots, k_n; \quad n = 1, 2, \ldots)$$

и

$$(o)\text{-}\lim_{n \to \infty} \{[U(x_1^{(n)}) \vee \ldots \vee U(x_{k_n}^{(n)})] - |U|(x_n)\} = \mathbf{0}. \tag{15}$$

Так как $x_n \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$, то последовательность

$$x_1^{(1)}, \ldots, x_{k_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_{k_2}^{(2)}, \ldots \xrightarrow{(t)} \mathbf{0};$$

тогда вследствие (to)-непрерывности операции $U(x)$

$$U(x_1^{(1)}), \ldots, U(x_{k_1}^{(1)}), U(x_1^{(2)}), \ldots, U(x_{k_2}^{(2)}), \ldots \xrightarrow{(o)} \mathbf{0},$$

а потому

$$U(x_1^{(n)}) \vee \ldots \vee U(x_{k_n}^{(n)}) \xrightarrow[n \to \infty]{(o)} \mathbf{0}$$

и из (15) вытекает, что

$$|U|(x_n) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}.$$

Если теперь $x_n \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$ и x_n — любые, то и $|x_n| \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$. Тогда, по уже доказанному, $|U|(|x_n|) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$ и из неравенства $||U|(x_n)| \leqslant |U|(|x_n|)$ (1.13c)) сразу вытекает, что $|U|(x_n) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$. Таким образом, доказано что $|U| \in H_t^0$.

2.92. Теорема. *Если X — любое K-пространство, а Y — регулярное K^+-пространство, то H_t^0 — нормальное подпространство пространства H_0^0.*

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству второй части теоремы 2.86.

Замечания. 1° В теореме 2.48 при более слабых предположениях относительно Y было доказано, что H_0^0 — компонента пространства H_r. Для H_t^0 аналогичный результат не верен (см. 5.23 гл. VIII).

2° Если Y только регулярно, но не обязательно K^+-пространство, то, повторяя доказательство предложений 2.91 и 2.92, мы сможем установить лишь, что $H_t^o \cap H_r$ — нормальное подпространство пространства $H_o^o \cap H_r$.

Для лучшего обозрения установленных в этом параграфе результатов о соотношениях между различными классами операций, соберём их в нижеследующей таблице с двумя входами. Здесь, как и выше, X — пространство, которому принадлежат значения аргумента, а Y — пространство, куда входят значения операции. В каждой клетке таблицы указано соотношение классов, полученное для соответствующей комбинации типов X и Y.

X \ Y	K-пространство	K^+-пространство	K-пространство ограниченных элементов	Пространство вещественных чисел
K-пространство	$H_t^o \subset H_o^o \subset H_t^t$ (2.11)	$H_o^o \subset H_r$ (2.43)	$H_t^t \subset H_r$ (2.72)	$H_t^o = H_o^o = H_t^t \subset H_r$ (2.12, 2.43)
Регулярное K-пространство	$H_r \subset H_o^o$ (2.42)	$H_o^o = H_r$ (2.41)	$H_t^t = H_o^o = H_r$ (2.73)	$H_t^o = H_o^o = H_t^t = H_r$ (2.12, 2.41)
KB-линеал		$H_b^o \subset H_r$ (2.82, сл. 1)	$H_b^b \subset H_b^o \subset H_r$ (2.82, сл. 1)	$H_b^b = H_b^o \subset H_r$ (2.8; 2.82, сл. 1)
KB-линеал, полный относительно (b)-сходимости	$H_r \subset H_b^t$ (2.83)	$H_b^o \subset H_r$ (2.82, сл. 1)	$H_b^b \subset H_b^o \subset H_r \subset H_b^t$ (2.82, сл. 1; 2.83)	$H_b^b = H_b^o = H_r$ (2.84)
K-пространство ограниченных элементов	$H_r \subset H_b^o$ (2.81, следствие)	$H_o^o \subset H_b^o = H_r$ (2.82, сл. 2)	$H_o^o \subset H_b^o = H_r \subset H_b^t$ (2.82, сл. 2; 2.83)	$H_o^o \subset H_b^b = H_b^o = H_r$ (2.84)

§ 3. Мультипликативные операции

Пользуясь действием сложения, определённым в K-пространстве, мы ввели в рассмотрение операции, обладающие свойством аддитивности. Но в главе IV было показано, что в K-пространстве можно определить и второе основное действие — умножение элемента на элемент. А тогда есте-

ственно появляется второй класс операций — мультипликативные, которые мы и рассмотрим в настоящем параграфе. Для простоты мы будем предполагать, что X и Y — K-пространства с единицей.

3.1. Класс H_m.

Определение. Операция $y = U(x)$ называется *мультипликативной*, если для каждой пары элементов $x_i \in X$ $(i = 1, 2)$, для которой произведение x_1x_2 существует, произведение $U(x_1)U(x_2)$ также существует и при этом

$$U(x_1x_2) = U(x_1)\,U(x_2). \tag{1}$$

3.11. Мультипликативная операция положительна.

Доказательство. Для всякого $x \geqslant \mathbf{0}$ существует $\sqrt{x}$ (3.41 гл. IV). Следовательно,

$$U(x) = U\,[(\sqrt{x})^2] = [U(\sqrt{x})]^2 \geqslant \mathbf{0},$$

так как квадрат любого элемента положителен.

Дадим ещё одно общее определение, относящееся к операциям в любых K-пространствах: операция $y = U(x)$ называется *дизъюнктной*, если из $x_1 \,\mathrm{d}\, x_2$ следует, что

$$U(x_1)\,\mathrm{d}\,U(x_2).$$

В настоящем параграфе мы увидим, что между мультипликативными и дизъюнктными операциями существует тесная связь.

3.12. Если операция $U(x)$ мультипликативна и $U(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (в частности если $U(x)$ также аддитивна), то она дизъюнктна.

Доказательство. Если $x_1 \,\mathrm{d}\, x_2$, то $x_1x_2 = \mathbf{0}$ (3.35 гл. IV), а тогда,

$$U(x_1)\,U(x_2) = U(x_1x_2) = U(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

т. е. $U(x_1)\,\mathrm{d}\,U(x_2)$.

В дальнейшем мы будем рассматривать операции одновременно аддитивные и мультипликативные.

3.13. Теорема (Признак мультипликативности.) *Для того чтобы операция $y = U(x)$ класса H_t^t была мультипликативной, необходимо и достаточно, чтобы образ базы $\mathfrak{E}(X)$ содержался в базе $\mathfrak{E}(Y)$, т. е. из $e \in \mathfrak{E}(X)$ должно следовать $U(e) \in \mathfrak{E}(Y)$.*

Доказательство. a) Необходимость условия следует из одной мультипликативности. Действительно, пусть $e \in \mathfrak{E}(X)$. Тогда $e^2 = e$, следовательно,

$$y = U(e) = U(e^2) = [U(e)]^2 = y^2,$$

а потому $y \in \mathfrak{E}(Y)$ (3.42 гл. IV).

b) Достаточность. Установим сначала, что если $e_1, e_2 \in \mathfrak{E}(X)$ и $e_1 \,\mathrm{d}\, e_2$, то $U(e_1)\,\mathrm{d}\,U(e_2)$. Действительно, в этом случае $e_1 + e_2 = e_1 \vee e_2 \in \mathfrak{E}(X)$, следовательно, $U(e_1) + U(e_2) \in \mathfrak{E}(Y)$. Но сумма двух единичных элементов может быть единичным элементом только в случае их дизъюнктности. В самом деле, если $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 \in \mathfrak{E}(Y)$, то $\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 \leqslant \mathbf{1}_Y$, а тогда $\tilde{e}_1 \leqslant \mathbf{1}_Y - \tilde{e}_2$, откуда $\tilde{e}_1 \,\mathrm{d}\, \tilde{e}_2$.

Теперь нужно установить равенство (1) в предположении, что x_1x_2 существует. Пусть сначала $x_i = e_i \in \mathfrak{E}(X)$ $(i = 1, 2)$ и $e = e_1e_2 = e_1 \wedge e_2$. Тогда

$$U(e_1)\,U(e_2) = U\,[e + (e_1 - e)]\,U\,[e + (e_2 - e)] =$$
$$= U(e) + U(e_1 - e)\,U(e) + U(e)\,U(e_2 - e) + U(e_1 - e)\,U(e_2 - e),$$

Но в трёх последних слагаемых значения аргумента попарно дизъюнктны между собой, а поэтому, благодаря установленной выше дизъюнктности значений операции, их произведения обращаются в нуль; таким образом,

$$U(e) = U(e_1)\,U(e_2).$$

Для конечнозначных элементов

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \quad x_2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i \quad (e_i \mathrm{d}\, e_j \text{ при } i \neq j),$$

(которые всегда можно считать приведёнными к общему основанию) имеем, благодаря аддитивности и однородности операции U:

$$U(x_1)\,U(x_2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U(e_i) \sum_{i=1}^{n} \mu_i U(e_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i U(e_i) = U\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i e_i\Big) = U(x_1 x_2).$$

В общем случае существуют конечнозначные $x_1^{(n)} \xrightarrow{(o)} x_1$, $x_2^{(n)} \xrightarrow{(o)} x_2$, причём

$$|x_1^{(n)}| \leqslant |x_1| + \mathbf{1}, \quad |x_2^{(n)}| \leqslant |x_2| + \mathbf{1}$$

(лемма 2.17 гл. IV). Тогда $|x_1^{(n)} x_2^{(n)}| \leqslant |x_1 x_2| + |x_1| + |x_2| + \mathbf{1}$, следовательно по непрерывности произведения (3.33 гл. IV),

$$x_1^{(n)} x_2^{(n)} \xrightarrow{(o)} x_1 x_2.$$

Отсюда

$$U(x_1 x_2) = (t)\text{-}\lim U(x_1^{(n)} x_2^{(n)}).$$

Кроме того,

$$U(x_1^{(n)})\,U(x_2^{(n)}) = U(x_1^{(n)} x_2^{(n)}),$$

$$U(x_1^{(n)}) \xrightarrow{(t)} U(x_1), \quad U(x_2^{(n)}) \xrightarrow{(t)} U(x_2).$$

Поэтому существует подпоследовательность индексов $\{k_n\}$, для которой

$$U(x_1^{(k_n)}) \xrightarrow{(o)} U(x_1), \quad U(x_2^{(k_n)}) \xrightarrow{(o)} U(x_2),$$

$$U(x_1^{(k_n)} x_2^{(k_n)}) \xrightarrow{(o)} U(x_1 x_2).$$

Так как всякая (o)-сходящаяся последовательность ограничена, то произведение $U(x_1)\,U(x_2)$ существует и по (o)-непрерывности произведения

$$U(x_1 x_2) = U(x_1)\;U(x_2)$$

(замечание 3.16 к теореме 3.15 гл. IV).

Теорема полностью доказана.

Замечание. Так как положительная операция класса H_t^t принадлежит классу H_o^o (2.49), то по 3.11 мультипликативные операции класса H_t^t входят в H_o^o. В дальнейшем мультипликативные операции этого класса называются просто *линейными мультипликативными*. Класс этих операций обозначается H_m.

Так как каждая мультипликативная операция положительна, то

$$H_m \subset H_o^o \cap H_r.$$

Однако класс H_m значительно уже, чем $H_o^o \cap H_r$. Например, если $X = Y$ — пространство вещественных чисел, то класс H_m состоит из двух функций: $f(x) = x$ и $f(x) = 0$.

3.2. Некоторые свойства операций класса H_m.

3.21. Для конечного или счётного соединения элементов $x_n \in X$ и любой $U \in H_m$

$$U(\mathbf{S}x_n) = \mathbf{S}[U(x_n)].$$

Доказательство. Пусть $x = \mathbf{S}x_n$. Если n принимает только конечное множество значений, то благодаря аддитивности и дизъюнктности операции U

$$U(x) = U\left(\sum x_n\right) = \sum U(x_n) = \mathbf{S}[U(x_n)].$$

Если же множество $\{x_n\}$ — бесконечное, то нужно использовать и непрерывность операции U, а именно:

$$U(x) = U\left(\sum_1^\infty x_n\right) = U\left[(o)\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_1^n x_k\right] = (o)\text{-}\lim_{n\to\infty} U\left(\sum_1^n x_k\right) =$$

$$= (o)\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_1^n U(x_k) = \sum_1^\infty U(x_n) = \mathbf{S}[U(x_n)],$$

ч. и тр. д.

Пусть $U \in H_m$; положим для $e \in \mathfrak{E}(X)$

$$\varphi(e) = U(e).$$

По теореме 3.13 $\varphi(e) \in \mathfrak{E}(Y)$; кроме того, функция $\varphi(e)$ монотонна, т. е.

$$\varphi(e_1) \leqslant \varphi(e_2) \quad \text{при} \quad e_1 \leqslant e_2$$

(так как $U \geqslant \mathbf{0}$, а $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$). Имеет место следующая лемма.

3.22. Лемма. *Пусть $x_1, x_2 \in X$, $\{e_\lambda^{x_1}\}$, $\{e_\lambda^{x_2}\}$ — их характеристики, $F(\lambda, \mu)$ — любая вещественная непрерывная функция от вещественных аргументов. Тогда для $U \in H_m$*

$$U[F(x_1, x_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda, \mu)\, d\varphi(e_\lambda^{x_1})\, d\varphi(e_\mu^{x_2}).$$

Доказательство. Мы ввели в пункте 3.61 гл. IV интегральное представление функций, а именно:

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda, \mu)\, de_\lambda^{x_1}\, de_\mu^{x_2} =$$

$$= (o)\text{-}\lim \mathbf{S}_{n,p} \left\{F(\lambda_n, \mu_p)\left(e_{\lambda_n}^{x_1} - e_{\lambda_{n-1}}^{x_1}\right)\left(e_{\mu_p}^{x_2} - e_{\mu_{p-1}}^{x_2}\right)\right\}.$$

Тогда по 3.21

$$U[F(x_1, x_2)] =$$
$$= (o)\text{-}\lim \mathop{\mathbf{S}}_{n,\,p} \left\{F(\lambda_n, \mu_p)\,\varphi\left(e_{\lambda_n}^{x_1} - e_{\lambda_{n-1}}^{x_1}\right)\varphi\left(e_{\mu_p}^{x_2} - e_{\mu_{p-1}}^{x_2}\right)\right. =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda, \mu)\, d\varphi\left(e_\lambda^{x_1}\right) d\varphi\left(e_\mu^{x_2}\right),$$

ч. и тр. д.

3.23. Теорема. *Если $U \in H_m$, то для любого конечного или счётного ограниченного множества $E \subset X$*

$$U(\sup E) = \sup_{x \in E} U(x). \tag{2}$$

Доказательство. Предположим, сначала, что E состоит из двух элементов x_1 и x_2. Тогда с помощью интегрального представления функций (3.61 гл. IV) получаем

$$x_1 \vee x_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda \vee \mu)\, de_\lambda^{x_1}\, de_\mu^{x_2},$$

а тогда (3.22)

$$U(x_1 \vee x_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda \vee \mu)\, d\varphi(e_\lambda^{x_1})\, d\varphi(e_\mu^{x_2}).$$

С другой стороны

$$U(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\varphi(e_\lambda^{x_1}), \qquad U(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu\, d\varphi(e_\mu^{x_2}),$$

следовательно (так же, как в 3.61 гл. IV)

$$U(x_1) \vee U(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda \vee \mu)\, d\varphi(e_\lambda^{x_1})\, d\varphi(e_\mu^{x_2}).$$

Таким образом,

$$U(x_1 \vee x_2) = U(x_1) \vee U(x_2).$$

По индукции этот результат распространяется на случай любого конечного множества E.

Пусть теперь $E = \{x_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $x = \sup x_n$. Положим $x_n' = x_1 \vee \ldots \vee x_n$. Тогда $x_n' \nearrow x$, следовательно,

$$U(x_n') = U(x_1) \vee \ldots \vee U(x_n) \nearrow U(x),$$

т. е. $U(x) = \sup\limits_n U(x_n)$, ч. и тр. д.

Следствие. Так как $|x| = x \vee (-x)$, то

$$U(|x|) = U(x) \vee [-U(x)] = |U(x)| \; (U \in H_m).$$

Аналогичные утверждения имеют место для нижней грани.

3.24. Если X — K-пространство счётного типа, то заключение теоремы 3.23 верно для любого ограниченного множества $E \subset X$.

Доказательство. В K-пространстве счётного типа любое ограниченное множество E содержит счётное подмножество $E' \subset E$ с той же верхней гранью (1.45 гл. V). Поэтому

$$\sup_{x \in E} U(x) \geqslant \sup_{x \in E'} U(x) = U(\sup E') = U(\sup E).$$

Но обратное неравенство очевидно вследствие положительности операции U, а потому имеет место равенство (2).

3.25. Если $U \in H_m$, а X — K-пространство счётного типа, то образ $Y_1 = U(X)$ есть подпространство пространства Y. При этом если Y_2 — компонента пространства Y, порождённая множеством Y_1, то

$$\mathrm{Pr}_{Y_2} \mathbf{1}_Y \in Y_1.$$

Таким образом, $\mathrm{Pr}_{Y_2} \mathbf{1}_Y$ играет роль единицы в Y_1.

Доказательство. Ясно, что Y_1 — линейное подмножество пространства Y. Если $y \in Y_1$, т. е. $y = U(x)$ $(x \in X)$, то $|y| = U(|x|) \in Y_1$, (см. следствие из теоремы 3.23), т. е. в Y_1 существует элемент $y^* \geqslant \mathbf{0}$, для которого $y \leqslant y^*$.

Пусть $E \subset Y_1$ и существует такой $y_0 \in Y_1$, что $y \leqslant y_0$ для всех $y \in E$, и пусть $y_0 = U(x_0)$. Положим $y^* = \sup E$ (здесь верхняя грань берётся в Y) и покажем, что $y^* \in Y_1$. Введём

$$z = \sup_{x \in U^{-1}(E)} (x \wedge x_0)$$

($U^{-1}(E)$ — полный прообраз множества E). По 3.24

$$U(z) = \sup_{x \in U^{-1}(E)} [U(x) \wedge U(x_0)] = \sup_{y \in E} y \wedge y_0 = y^*,$$

т. е. $y^* \in Y_1$. Таким образом, Y_1 — подпространство.

Так как $U \in H_m$, то $e^* = U(\mathbf{1}) \in \mathfrak{E}(Y)$ (3.13). Из интегрального представления

$$U(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\varphi(e_\lambda^x)$$

(3.22) вытекает, так как $\varphi(e) \leqslant e^*$ при любом $e \in \mathfrak{E}(X)$, что $Y_1 = U(X) \subset Y_{e^*}$ (Y_{e^*} — компонента пространства Y, порождённая элементом e^*). Но $e^* \in Y_1 \subset \subset Y_{e^*}$, а Y_2 — наименьшая компонента, содержащая Y_1, значит, $Y_2 = Y_{e^*}$. Отсюда (e^*) — проектор на Y_2, т. е. $e^* = (e^*)\mathbf{1}_Y = \mathrm{Pr}_{Y_2} \mathbf{1}_Y \in Y_1$, и e^* — единица в Y_{e^*}, следовательно, и в Y_1. Доказательство закончено.

Если операция $y = U(x)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между X и $U(X)$, то в $U(X)$ определяется обратная операция $x = U^{-1}(y)$ (очевидно — аддитивная). Операция $U(x)$ в этом случае называется *обратимой*.

3.26. Если обратимая операция $U \in H_m$, а $U(X) = Y$, то и обратная операция $U^{-1} \in H_m$.

Доказательство. Сначала докажем, что $U^{-1} > \mathbf{0}$. Пусть $y > \mathbf{0}$, но предположим, что $x = U^{-1}(y) \not\geqslant \mathbf{0}$, т. е. $x_- > \mathbf{0}$. Тогда $U(x_-) > \mathbf{0}$ вследствие положительности и обратимости операции U. Так как по 3.12 $U(x_+) \, \mathrm{d} \, U(x_-)$, то $U(x_-) = y_-$, и так как $y > \mathbf{0}$, то невозможно, чтобы $U(x_-) > \mathbf{0}$. Таким образом, положительность операции U^{-1} доказана.

Теперь докажем, что $U^{-1} \in H_0^0$. По 2.44 достаточно проверить, что из $y_n \searrow \mathbf{0}$ следует $U^{-1}(y_n) \searrow \mathbf{0}$. Во всяком случае, благодаря положительности операции U^{-1},

$$x_n = U^{-1}(y_n) \searrow x.$$

В таком случае

$$y_n = U(x_n) \searrow U(x),$$

т. е. $U(x) = \mathbf{0}$. Но вследствие обратимости операции U тогда и $x = \mathbf{0}$.

Наконец, проверим, что для U^{-1} выполнен признак 3.13 принадлежности классу H_m. Пусть $e \in \mathfrak{E}(Y)$, $x = U^{-1}(e)$. При этом $x \geqslant \mathbf{0}$, следовательно, существует $\sqrt{x}$. Так как $U \in H_m$, то

$$U(\sqrt{x}) \geqslant \mathbf{0} \quad \text{и} \quad [U(\sqrt{x})]^2 = U(x) = e,$$

т. е. $U(\sqrt{x}) = \sqrt{e} = e$ (см. 3.31 гл. IV). Таким образом, $U(x) = U(\sqrt{x})$, значит, вследствие обратимости операции U, $x = \sqrt{x}$, а это возможно лишь при $x \in \mathfrak{E}(X)$ (3.42 гл. IV).

3.27. Если обратимая операция $U \in H_m$, а X — K-пространство счётного типа, то $U^{-1} \in H_m$.

Действительно, равенство $U(X) = Y$ было использовано в доказательстве предыдущего предложения только для того, чтобы считать $U(X)$ K-пространством с единицей. Сейчас же можно вместо равенства $U(X) = Y$ сослаться на 3.25. При этом легко видеть, что если за единицу в $U(X)$ принять элемент, указанный в 3.25, то базой в $U(X)$ будет пересечение $\mathfrak{E}(Y) \cap U(X)$. А тогда, если в $U(X)$, как в самостоятельном K-пространстве с единицей, определить умножение элементов, оно будет совпадать с умножением, имеющим смысл в $U(X)$ как в подпространстве пространства Y.

3.3. Некоторые характеристические свойства проекторов. Мы уже знаем, что в K-пространстве с единицей проектор (e) на компоненту X_e, порождённую единичным элементом e, имеет вид

$$(e)\, x = xe$$

(3.34 гл. IV). Отсюда видно, что $(e) \in H_m$, т. е. проектор — линейная мультипликативная операция, отображающая X в X. Действительно,

$$(e)(x_1 x_2) = (x_1 x_2)\, e = (x_1 x_2)\, e^2 = (x_1 e)(x_2 e) = (e)\, x_1 \cdot (e)\, x_2.$$

Выясним, чем характеризуются проекторы в классе H_m.

3.31. Для того чтобы операция $U \in H_m$ (в случае, когда $X = Y$) была проектором, необходимо и достаточно, чтобы из $x \geqslant \mathbf{0}$ следовало $U(x) \leqslant x$.

Доказательство. Необходимость условия вытекает из известного свойства проекторов (2.22а) гл. III).

Для доказательства достаточности покажем прежде всего, что $U[U(x)] = U(x)$.

Пусть сначала $x = e \in \mathfrak{E}(X)$. Тогда $U(e) = e_1 \leqslant e$, причём $e_1 \in \mathfrak{E}(X)$. Отсюда

$$U(e) = U[e_1 + (e - e_1)] = U[U(e)] + U(e - e_1)$$

Но $(e - e_1)\ \mathrm{d}\ e_1 = U(e)$; и так как $\mathbf{0} \leqslant U(e - e_1) \leqslant e - e_1$, то $U(e - e_1)\ \mathrm{d}\ U(e)$. В то же время $U(e - e_1) \leqslant U(e)$. Следовательно, $U(e - e_1) = \mathbf{0}$ и $U(e) = U[U(e)]$.

Для конечнозначного элемента $x = \sum \lambda_i e_i$ имеем

$$U[U(x)] = U[\sum \lambda_i U(e_i)] = \sum \lambda_i U[U(e_i)] = \sum \lambda_i U(e_i) = U(x).$$

Для любого $x \in X$ то же равенство получается с помощью предельного перехода, если подобрать конечнозначные $x_n \xrightarrow{(o)} x$.

Теперь мы видим, что U удовлетворяет всем требованиям, характеризующим проекторы (2.23 гл. III).

Замечание. Условие $U(x) \leqslant x$ было использовано в доказательстве достаточности только для единичных элементов.

3.32. Если $X = Y$, а $U \in H_m$ и если U коммутирует с любым проектором в X, т. е.

$$U[(e)x] = (e)[U(x)],$$

то U — проектор.

Доказательство. Для всякого $e \in \mathfrak{E}(X)$

$$U(e) = U[(e)\mathbf{1}] = (e)[U(\mathbf{1})] = e\,U(\mathbf{1}) \leqslant e\mathbf{1} = e.$$

(так как $U(\mathbf{1}) \in \mathfrak{E}(X)$, то $U(\mathbf{1}) \leqslant \mathbf{1}$).

3.4. Дизъюнктные операции. Установим результат, в известном смысле обратный предложениям 3.11 и 3.12.

3.41. Теорема. *Всякая дизъюнктная положительная операция $y = U(x)$ класса H_0^0 становится линейной мультипликативной при подходящем выборе единицы в Y*).*

Доказательство. Возьмём в качестве новой единицы в Y элемент

$$\mathit{1} = U(\mathbf{1}_X) + \mathbf{1}_Y - e^* = S[U(\mathbf{1}_X),\ \mathbf{1}_Y - e^*],$$

где $\mathbf{1}_X$ — единица пространства X, $\mathbf{1}_Y$ — первоначальная единица пространства Y и e^* — след элемента $U(\mathbf{1}_X)$. Действительно,

$$(\mathit{1}) = \mathbf{S}[(U(\mathbf{1}_X)),\ (\mathbf{1}_Y - e^*)] = \mathbf{S}[(e^*),\ (\mathbf{1}_Y - e^*)] = (\mathbf{1}_Y)$$

(см. 2.31f) и 3.4 гл. III). Таким образом, подпространство, порождённое элементом $\mathit{1}$, совпадает с подпространством, порождённым элементом $\mathbf{1}_Y$, т. е. с Y. Следовательно, $\mathit{1}$ обладает свойством единицы в Y.

Так как выбор единицы не влияет на (o)-сходимость, то при переходе к новой единице класс H_0^0 не изменяется. Благодаря дизъюнктности операции U, для любого $e \in \mathfrak{E}(X)$ имеем $U(e)\,\mathrm{d}\,U(\mathbf{1}_X - e)$, следовательно,

$$\mathit{1} = \mathbf{S}[U(e),\ U(\mathbf{1}_X - e),\ \mathbf{1}_Y - e^*].$$

Но тогда $U(e)$ входит в новую базу пространства Y (3.23b) гл. III), т. е. является единичным элементом при новом выборе единицы. Таким образом, по теореме 3.13 U войдёт в класс H_m.

Замечание. Из доказанной теоремы вытекает, что все основные результаты п° 3.2 (3.21, 3.23 3.24, первая часть утверждения 3.25) сохраняются для дизъюнктных положительных операций класса H_0^0.

Также остаются в силе предложения 3.26 и 3.27 в том смысле, что U^{-1} оказывается тоже положительной, дизъюнктной и (oo)-непрерывной.

3.42. Если $U \in H_r$ и дизъюнктна, то $|U|$, U_+ и U_- тоже дизъюнктны.

---

*) Мы ограничиваемся случаем, когда в Y имеются элементы, обладающие свойством единицы. Однако можно сформулировать нашу теорему и в несколько более общем виде.

Доказательство. Пусть $x_1 \mathrm{d} x_2$. Тогда, так как

$$|U|(|x_1|) = \sup_{|x'| \leqslant |x_1|} |U(x')|, \ |U|(|x_2|) = \sup_{|x''| \leqslant |x_2|} |U(x'')|,$$

то, по 1.65 гл. I, $|u|(|x_1|) \mathrm{d} |u|(|x_2|)$. Но

$$||U|(x_1)| \leqslant |U|(|x_2|), \ ||U|(x_2)| \leqslant |U|(|x_2|).$$

Следовательно, $|U|(x_1) \mathrm{d} |U|(x_2)$. Таким образом, $|U|$ — дизъюнктная операция. Дизъюнктность операций U_+ и U_- может быть выведена аналогично или, ещё проще, из неравенств $0 \leqslant U_+, U_- \leqslant |U|$. Например для U_+:

$$|U_+(x_1)| \leqslant U_+(|x_1|) \leqslant |U|(|x_1|), \quad |U_+(x_2)| \leqslant \mu_+(|x_2|) \leqslant |U|(|x_2|);$$

следовательно, если $x_1 \mathrm{d} x_2$, то $U_+(x_1) \mathrm{d} U_+(x_2)$.

Мы видим, что благодаря теореме 3.41 изучение более общего класса операций — линейных дизъюнктных свелось к изучению их частного случая — операций класса H_m, что, конечно, упрощает исследование.

ГЛАВА VIII

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Для приложения теории операций к решению различных вопросов математического анализа важно знать выражение операций в различных конкретных пространствах, так называемые общие формы операций. Для получения таких конкретных общих форм полезно сначала установить более общие результаты, а именно найти общие формы операций, конкретизируя лишь одно из пространств: значений аргумента или значений операции. Наконец, некоторый интерес представляет нахождение ещё более общего выражения операций, если не конкретизировать ни одного из названных пространств. С рассмотрения такой общей задачи мы и начинаем настоящую главу.

§ 1. Общее интегральное представление линейных операций

1.1. Регулярные операции в K-пространстве ограниченных элементов. Предварительно мы остановимся на аддитивных функциях, заданных на булевской алгебре.

Определение. Пусть $\mathfrak{E}$ — произвольная булевская алгебра, Y — K-пространство. Функция $\varphi(e)$, заданная для всех $e \in \mathfrak{E}$, значения которой принадлежат Y, называется *аддитивной*, если

$$\varphi(e_1 + e_2) = \varphi(e_1) + \varphi(e_2) \text{ при } e_1 \, \mathrm{d} \, e_2.$$

Из этого условия вытекает, что $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Функция $\varphi(e)$ называется *положительной*, если $\varphi(e) \geqslant \mathbf{0}$ для любого $e \in \mathfrak{E}$. Из аддитивности и положительности вытекает монотонность функции, т. е.

$$\varphi(e_1) \geqslant \varphi(e_2) \text{ при } e_1 \geqslant e_2$$

(ср. 1.13 а) гл. VII).

Функция $\varphi(e)$ называется *ограниченной*, если

$$\Phi = \sup_{e \in \mathfrak{E}} |\varphi(e)| < +\infty.$$

Если функция $\varphi(e)$ аддитивна и положительна, то $\Phi = \varphi(\mathbf{1})$, т. е. она ограничена.

Возьмём теперь K-пространство X с единицей и пусть $\mathfrak{E}$ — его база. Конечнозначные элементы пространства X, т. е. элементы вида

$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, где $e_i \in \mathfrak{E}$, образуют, очевидно, K-линеал, который мы обозначим через L. Пусть Y — произвольное K-пространство.

1.11. Каждая аддитивная функция $\varphi(e)$, заданная на $\mathfrak{E}$, со значениями в Y, порождает аддитивную операцию, отображающую L в Y, именно

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(e_i) \quad \text{для} \quad x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Наоборот, всякая аддитивная операция U, отображающая L в Y, представляется в указанном виде, если положить $\varphi(e) = U(e)$ для $e \in \mathfrak{E}$.

Эти утверждения совершенно очевидны, если заметить, что благодаря аддитивности φ значение суммы $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(e_i)$ не зависит от способа представления x в виде линейной комбинации элементов базы.

1.12. Для регулярности операции U, рассмотренной в 1.11, необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(e)$ была ограниченной.

Доказательство. Если $U \in H_r$, то существует модуль $|U|$. А тогда для любого $e \in \mathfrak{E}$ имеем:

$$|\varphi(e)| = |U(e)| \leqslant |U|(e) \leqslant |U|(\mathbf{1}),$$

т. е. $\varphi(e)$ ограничена.

Пусть, наоборот, известна ограниченность $\varphi(e)$. Каждый элемент $x > \mathbf{0}$ из L можно представить в виде $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, где все $\alpha_i > 0$, а e_i попарно дизъюнктны. При этом можно считать, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$. Тогда

$$|U(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(e_i)\right| =$$

$$= \left|\alpha_1 \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right) + (\alpha_2 - \alpha_1)\varphi\left(\sum_{i=2}^{n} e_i\right) + \ldots + (\alpha_n - \alpha_{n-1})\varphi(e_n)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_1 \Phi + (\alpha_2 - \alpha_1)\Phi + \ldots + (\alpha_n - \alpha_{n-1})\Phi = \alpha_n \Phi = \|x\| \Phi,$$

где $\Phi = \sup_{e \in \mathfrak{E}} |\varphi(e)|$, а $\|x\|$ определяется в L так же, как в K-пространстве ограниченных элементов (см. 2.3 гл. VI). Теперь, по признаку регулярности (1.27а) гл. VII), мы сразу заключаем, что U регулярна.

Замечание. Если из L выделить подмножество G элементов $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ с целочисленными коэффициентами α_i, то G будет K-группой, в которой выполняется аксиома V. Оба предложения 1.11 и 1.12 верны и для операций на G.

1.13. Благодаря предложению 1.12 множество всех ограниченных аддитивных функций на $\mathfrak{E}$ (со значениями в Y) находится во взаимооднозначном соответствии с множеством H_r регулярных операций, отображающих L (или G) в Y. Ясно, что это соответствие — изоморфизм (если множество функций $\varphi(e)$ линеаризовано естественным образом). В таком случае множество ограниченных аддитивных функций $\varphi(e)$ — K-пространство, так как, по теореме 1.23 гл. VII, H_r — K-пространство. Выясним смысл φ_+, φ_- и $|\varphi|$.

Так как $\varphi_+(e)$ — функция, порождающая операцию U_+, то с помощью 1.24 гл. VII имеем, рассматривая операции на G,

$$\varphi_+(e) = U_+(e) = \sup_{\mathbf{0} \leqslant x \leqslant e} U(x) = \sup_{\substack{\mathbf{0} \leqslant e' \leqslant e \\ e' \in b}} U(e') = \sup_{\substack{\mathbf{0} \leqslant e' \leqslant e \\ e' \in b}} \varphi(e')$$

(если $\mathbf{0} \leqslant x \leqslant e$ и $x \in G$, то $x \in \mathfrak{E}$).

Аналогично

$$\varphi_-(e) = -\inf_{\mathbf{0} \leqslant e' \leqslant e} \varphi(e'),$$

а по 1.26 гл. VII

$$|\varphi|(e) = \sup_{\mathbf{0} \leqslant e' \leqslant e} |\varphi(e')|.$$

Легко видеть, что $|\varphi|$ — наименьшая из аддитивных положительных функций φ^*, для которых $|\varphi(e)| \leqslant \varphi^*(e)$ при любом $e \in \mathfrak{E}$ (ср. 1.25 гл. VII).

Таким образом, класс ограниченных аддитивных функций на $\mathfrak{E}$ совпадает с классом функций, представимых в виде разности двух положительных аддитивных функций. При этом φ_+, φ_- и $|\varphi|$ играют роль, соответственно, положительного, отрицательного и полного изменения φ.

Так как всякая полная булевская алгебра является базой некоторого K-пространства, то последние выводы справедливы для функций, заданных на любой полной булевской алгебре. Однако другим путём эти выводы могут быть получены и для функций на произвольной булевской алгебре, не обязательно полной.

1.14. Определение. Аддитивная функция $\varphi(e)$ называется *(oo)-непрерывной* (или просто *(o)-непрерывной*), если из $e_n \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$ следует, что $\varphi(e_n) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$. Аналогично могут быть определены другие типы непрерывности.

Легко видеть, что если $\varphi(e)$ положительна, то для установления ее (o)-непрерывности достаточно проверить, что $\varphi(e_n) \searrow \mathbf{0}$, когда $e_n \searrow \mathbf{0}$. Кроме того, предоставляем читателю проверить, что если $\varphi(e)$ (o)-непрерывна, то из $e_n \xrightarrow{(o)} e$ следует, что $\varphi(e_n) \xrightarrow{(o)} \varphi(e)$.

1.15. Если ограниченная аддитивная функция $\varphi(e)$ (o)-непрерывна, то $\varphi_+(e)$, $\varphi_-(e)$ и $|\varphi|(e)$ тоже (o)-непрерывны.

Доказательство. На группе G конечнозначных элементов с целочисленными коэффициентами, определённой в замечании к 1.12, рассмотрим регулярную операцию

$$U\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(e_i),$$

порождённую заданной функцией $\varphi(e)$. Покажем, что если $\varphi(e)$ (o)-непрерывна, то $U \in H_o^0$.

Пусть $x_n \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$. Достаточно рассмотреть случай, когда $x_n > \mathbf{0}$. Каждый x_n имеет вид

$$x_n = \mathop{\mathrm{S}}_{k=1}^{p} k e_k^{(n)} = \sum_{k=1}^{p} k e_k^{(n)}.$$

Количества слагаемых в представлениях элементов x_n должны быть ограничены в совокупности, так как x_n сами ограничены некоторым элементом из G.

При любом $k = 1, 2, \ldots, p$

$$e_k^{(n)} \leqslant k e_k^{(n)} \leqslant x_n,$$

а потому $e_k^{(n)} \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$ при $n \to \infty$; следовательно, по непрерывности φ,

$$\varphi(e_k^{(n)}) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0} \quad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Но тогда

$$U(x_n) = \sum_{k=1}^{p} k\varphi(e_k^{(n)}) \xrightarrow[n \to \infty]{(o)} \mathbf{0}.$$

Таким образом, $U \in H_o^0$.

По теореме 2.47 гл. VII (имеющей силу в K-группе G — см. замечание к 2.47 гл. VII) U_+, U_- и $|U|$ принадлежат классу H_o^0. Но так как, например, $\varphi_+(e) = U_+(e)$, то (o)-непрерывность φ_+ следует сразу из (o)-непрерывности U_+. Аналогично устанавливается (o)-непрерывность φ_- и $|\varphi|$.

1.16. Определение. Пусть $\varphi(e)$ — аддитивная ограниченная функция, заданная на базе $\mathfrak{E}$ K-пространства X. Для произвольного $x \in X$ полагаем по определению

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\varphi(e_\lambda^x) = (o)\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_n l_n \varphi(e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x).$$

Здесь интегральная сумма, стоящая в правой части равенства, составляется, как обычно, для произвольного разбиения оси $-\infty < \lambda < \infty$, а

$$\varepsilon = \sup_n (\lambda_n - \lambda_{n-1}), \quad \lambda_{n-1} \leqslant l_n \leqslant \lambda_n.$$

При этом требуется, чтобы для данного x любая интегральная сумма имела конечное значение.

1.17. Будем теперь считать X K-пространством ограниченных элементов. В этом случае в интегральной сумме из определения 1.16 имеется лишь конечное число отличных от нуля слагаемых.

Теорема. *Общий вид регулярной операции $y = U(x)$ даётся интегралом*

$$U(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\varphi(e_\lambda^x), \tag{1}$$

где $\varphi(e)$ — любая ограниченная аддитивная функция.

Доказательство. a) Пусть $U \in H_r$. Положим, как и выше, для любого $e \in \mathfrak{E}$

$$\varphi(e) = U(e).$$

Тогда $\varphi(e)$ — ограниченная аддитивная функция.

По теореме об интегральном представлении элементов (4.21 гл. III) каждый x представим в виде

$$x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, de_\lambda^x.$$

Но так как x — ограниченный элемент, то в интегральной сумме имеется лишь конечное число слагаемых, отличных от нуля.

Пусть

$$\sigma = \sum_n l_n (e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x)$$

— интегральная сумма, для которой $|\sigma - x| \leqslant \varepsilon \mathbf{1}$. Тогда

$$|U(\sigma) - U(x)| \leqslant |U|(|\sigma - x|) \leqslant |U|(\varepsilon \mathbf{1}) = \varepsilon |U|(\mathbf{1}),$$

откуда, вследствие произвольности ε,

$$U(x) = \lim U(\sigma) = \lim \sum_n l_n \varphi(e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x),$$

а это по определению и означает, что

$$U(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\varphi(e_\lambda^x).$$

b) Пусть теперь дана ограниченная аддитивная функция $\varphi(e)$. Для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим две такие интегральные суммы

$$\sigma_1 = \sum_n l_n (e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x), \quad \sigma_2 = \sum_p m_p (e_{\mu_p}^x - e_{\mu_{p-1}}^x),$$

что

$$|\sigma_1 - x| \leqslant \varepsilon \mathbf{1}, \quad |\sigma_2 - x| \leqslant \varepsilon \mathbf{1}.$$

Тогда $|\sigma_1 - \sigma_2| \leqslant 2\varepsilon \mathbf{1}$. Так как согласно 1.12 φ порождает регулярную операцию $V(x)$ на K-линеале L, а именно $V(\sum_i \alpha_i e_i) = \sum_i \alpha_i \varphi(e_i)$, то

$$\left|\sum_n l_n \varphi\left(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}\right) - \sum_p m_p \varphi\left(e^x_{\mu_p} - e^x_{\mu_{p-1}}\right)\right| =$$
$$= |V(\sigma_1 - \sigma_2)| \leqslant |V|(|\sigma_1 - \sigma_2|) \leqslant 2\varepsilon \cdot |V|(\mathbf{1}) = 2\varepsilon |\varphi|(\mathbf{1}).$$

Таким образом, любая последовательность интегральных сумм последнего вида при $\varepsilon \to 0$ оказывается сходящейся в себе. Следовательно, благодаря (o)-полноте K-пространства существует

$$(o)\text{-}\lim \sum_n l_n \varphi\left(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\varphi\left(e^x_\lambda\right).$$

Итак, существование интеграла (1) для любого x доказано.

Теперь докажем аддитивность операции $U(x)$, определённой равенством (1). Так как основное равенство (3) (см. ниже), входящее в определение аддитивности, будет доказано вне зависимости от выбора характеристик входящих в него элементов, то отсюда, в частности, будет следовать, что величина интеграла (1) не зависит от выбора характеристики элемента x *). Будем сначала считать функцию $\varphi(e)$ положительной.

Пусть $x = x_1 + x_2$. Возьмём произвольное разбиение оси $-\infty < \lambda < \infty$ с помощью чисел λ_n и положим

$$e_{nkl} = \left(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}\right) \wedge \left(e^{x_1}_{\lambda_k} - e^{x_1}_{\lambda_{k-1}}\right) \wedge \left(e^{x_2}_{\lambda_l} - e^{x_2}_{\lambda_{l-1}}\right).$$

Ясно, что

$$\sum_{k,l} e_{nkl} = e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}} \tag{2}$$

и аналогичные формулы получаются при суммировании по другим парам индексов. Из свойств характеристики вытекает, что

$$\lambda_{n-1} e_{nkl} \leqslant (e_{nkl}) x \leqslant \lambda_n e_{nkl}, \quad \lambda_{k-1} e_{nkl} \leqslant (e_{nkl}) x_1 \leqslant \lambda_k e_{nkl},$$
$$\lambda_{l-1} e_{nkl} \leqslant (e_{nkl}) x_2 \leqslant \lambda_l e_{nkl}$$

(см. 4.14 а) гл. III). Из этих неравенств и из равенства $(e_{nkl}) x = (e_{nkl}) x_1 + (e_{nkl}) x_2$ следует, что если $e_{nkl} \neq \mathbf{0}$, то

$$\lambda_{k-1} + \lambda_{l-1} \leqslant \lambda_n, \quad \lambda_{n-1} \leqslant \lambda_k + \lambda_l.$$

Отсюда, полагая $\varepsilon = \sup_n (\lambda_n - \lambda_{n-1})$, имеем:

$$\lambda_k + \lambda_l - 2\varepsilon \leqslant \lambda_n \leqslant \lambda_k + \lambda_l + \varepsilon.$$

---

*) Читателю следует вспомнить, что характеристика определяется не однозначно (4.11 гл. III).

Умножая члены этого неравенства на $\varphi(e_{nkl})$ и суммируя по всем значениям индексов n, k и l, с помощью (2) и упомянутых выше аналогичных ему соотношений получаем:

$$\sum_k \lambda_k \varphi(e^{x_1}_{\lambda_k} - e^{x_1}_{\lambda_{k-1}}) + \sum_l \lambda_l \varphi(e^{x_2}_{\lambda_l} - e^{x_2}_{\lambda_{l-1}}) - 2\varepsilon\varphi(\mathbf{1}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_n \lambda_n \varphi(e^{x}_{\lambda_n} - e^{x}_{\lambda_{n-1}}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k \lambda_k \varphi(e^{x_1}_{\lambda_k} - e^{x_1}_{\lambda_{k-1}}) + \sum_l \lambda_l \varphi(e^{x_2}_{\lambda_l} - e^{x_2}_{\lambda_{l-1}}) + \varepsilon\varphi(\mathbf{1}).$$

Все встречающиеся здесь суммы являются интегральными и содержат лишь конечное число слагаемых, отличных от нуля. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем:

$$U(x) = U(x_1) + U(x_2).$$

Для произвольной ограниченной аддитивной функции $\varphi(e)$ имеем, очевидно:

$$U(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\varphi(e^x_\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\varphi_+(e^x_\lambda) - \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\varphi_-(e^x_\lambda).$$

Так как аддитивность операций, определённых двумя последними интегралами, уже доказана, а их положительность очевидна, то отсюда следует и аддитивность и регулярность операции U.

1.2. Линейные операции в произвольном K-пространстве с единицей. Теперь перейдём к случаю, когда X — произвольное K-пространство с единицей. В предыдущих рассуждениях ограниченность элементов пространства X была существенно использована для заключения, что все рассматриваемые интегральные суммы конечны. Поэтому не возникал вопрос — имеет ли интегральная сумма смысл. Если же x — неограниченный элемент, то при определении интеграла (1) как предела интегральных сумм мы специально требовали, чтобы все интегральные суммы для данного x имели смысл.

Аддитивную функцию φ (или аддитивную операцию U) мы всегда могли внести под знак конечной суммы. Но чтобы иметь право вносить её под знак бесконечного ряда, придётся поставить условие (o)-непрерывности этой функции. При таком условии, если $e = \mathop{\mathrm{S}}\limits_1^\infty e_n = \sum_1^\infty e_n$, то

$$\varphi(e) = \varphi\left[(o)\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_1^n e_k\right] = (o)\text{-}\lim_{n\to\infty} \varphi\left(\sum_1^n e_k\right) =$$

$$= (o)\text{-}\lim \sum_1^n \varphi(e_k) = \sum_1^\infty \varphi(e_k).$$

1.21. Существование интеграла (1). Пусть x — произвольный элемент K-пространства, $\varphi(e)$ — положительная аддитивная

функция; требование непрерывности $\varphi(e)$ пока не ставится. Составим нижнюю и верхнюю интегральные суммы для одного и того же разбиения оси $-\infty < \lambda < \infty$:

$$\sigma' = \sum_n \lambda_{n-1}\varphi(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}), \quad \sigma'' = \sum_n \lambda_n \varphi(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}),$$

и допустим, что одна из этих сумм, например σ', имеет смысл, т. е. соответствующий ряд (o)-сходится. Покажем, что тогда и σ'' тоже имеет смысл.

Действительно, формальное почленное вычитание σ' из σ'' даёт положительный ряд

$$\sum_n (\lambda_n - \lambda_{n-1})\varphi(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}),$$

который мажорируется рядом

$$\sum_n \varepsilon\varphi(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}) \leqslant \varepsilon\varphi(\mathbf{1})\ ^{*)}$$

(где $\varepsilon = \sup\limits_n(\lambda_n - \lambda_{n-1})$) и, следовательно, (o)-сходится. А тогда и ряд для σ'' тоже (o)-сходится. При этом

$$\sigma'' - \sigma' \leqslant \varepsilon\varphi(\mathbf{1}).$$

Применяя обычное рассуждение с объединением множеств точек дробления, мы легко убедимся в том, что любая нижняя сумма σ' меньше или равна любой верхней σ'', откуда $-\infty < \sup\sigma' \leqslant \inf\sigma'' < +\infty$. Но принимая во внимание предыдущую оценку и учитывая, что ε произвольно мало, мы видим, что $\sup\sigma' = \inf\sigma''$. Это и есть предел интегральных сумм, т. е. интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\,\varphi(e^x_\lambda) \tag{1}$$

существует. Итак, если хоть одна из интегральных сумм для данного элемента x имеет смысл, то существование интеграла (1) обеспечено.

Замечание. Каждая сходящаяся интегральная сумма представляет собой абсолютно сходящийся ряд. Действительно, пусть

$$\sigma = \sum l_n \varphi(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}),$$

и $l_n \geqslant 0$ при $n > n_0$, $l_n < 0$ при $n < n_0$. Имеем:

$$\sigma = \sum_{n_0}^{\infty} l_n \varphi(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}) + \sum_{-\infty}^{n_0-1} l_n \varphi(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}),$$

---

*) $\sum\limits_n \varphi(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}) = (o)\text{-}\lim\limits_{N_1, N_2 \to +\infty} \sum\limits_{-N_1}^{N_2} \varphi(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}) =$

$= (o)\text{-}\lim \varphi(e^x_{\lambda_{N_2}} - e^x_{\lambda_{-N_1-1}}) \leqslant \varphi(\mathbf{1})$.

причём каждый из последних двух рядов сходится; первый ряд состоит из положительных членов, второй — из отрицательных, поэтому и ряд

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |l_n| \varphi(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}})$$

сходится.

1.22. Если $\varphi(e)$ и $\varphi_1(e)$ — положительные аддитивные функции, причём $\varphi(e) \leqslant \varphi_1(e)$, и для некоторого x интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\varphi_1(e^x_\lambda)$$

существует, то существует также интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\varphi(e^x_\lambda).$$

Доказательство. Действительно, для любого разбиения оси $-\infty < \lambda < \infty$ имеем неравенство

$$\sum |l_n| \varphi(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}) \leqslant \sum |l_n| \varphi_1(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}),$$

откуда благодаря предыдущему замечанию вытекает, что интегральная сумма

$$\sum l_n \varphi(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}})$$

имеет смысл.

1.23. Предыдущее предложение остается верным, если $\varphi_1(e)$ — положительная аддитивная функция, а $\varphi(e)$ — любая аддитивная функция, удовлетворяющая условию $|\varphi(e)| \leqslant \varphi_1(e)$ при любом $e \in \mathfrak{E}$.

Действительно, в этом случае (см. 1.13)

$$0 \leqslant \varphi_+(e), \ \varphi_-(e) \leqslant |\varphi|(e) \leqslant \varphi_1(e).$$

Тогда по 1.22 из существования интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\varphi_1(e^x_\lambda)$$

вытекает существование интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\varphi_+(e^x_\lambda) \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\varphi_-(e^x_\lambda),$$

а вместе с ними и интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\varphi(e^x_\lambda),$$

равного их разности.

1.24. Пусть теперь функция $\varphi(e)$ положительна, аддитивна и (oo)-непрерывна, а интеграл

$$U(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\varphi\,(e_\lambda^x) \tag{1}$$

существует при любом $x \in X$. Тогда $U(x)$ — аддитивная положительная операция.

Доказательство. Положительность U очевидна. Чтобы установить её аддитивность, достаточно повторить рассуждение, проведённое в доказательстве теоремы 1.17, опираясь на (o)-непрерывность функции φ при внесении её под знак бесконечной суммы.

1.25. Если $\varphi(e)$ — ограниченная, аддитивная и (o)-непрерывная функция и для любого $x \in X$ существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\,|\varphi|\,(e_\lambda^x),$$

то интеграл (1) (см. 1.24) также существует при любом $x \in X$ и выражает регулярную операцию в X.

Это следует из 1.24 и 1.15, если интеграл (1) представить в виде разности

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\,\varphi_+\,(e_\lambda^x) - \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\varphi_-\,(e_\lambda^x).$$

(Существование этих двух интегралов вытекает из 1.22.)

Однако сейчас мы не сможем доказать теорему, аналогичную теореме 1.17, устанавливающей общий вид операций класса H_r. Такого типа теорему мы получим в следующем пункте лишь для класса $H_o^o \cap H_r$.

1.3. Непрерывность интегральной операции. Опять предполагаем функцию $\varphi(e)$ положительной, аддитивной и (o)-непрерывной, а под $U(x)$ понимаем интеграл (1), предполагая, что он существует для любого $x \in X$.

Введём следующее обозначение: если $x \in X$, а e — любой элемент базы пространства X, то полагаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\varphi\,(e_\lambda^x \wedge e) = (o)\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_n l_n \varphi\,[(e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x) \wedge e],$$

где λ_n, l_n и ε имеют тот же смысл, что и в интегральных суммах, встречавшихся выше (см. определение 1.16).

Если подпространство X_e, порождённое элементом e, рассматривать как самостоятельное пространство, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\varphi \, (e_\lambda^x \wedge e)$$

можно определить как интеграл, построенный для $(e)\,x$ как элемента пространства X_e, в соответствии с определением 1.16. Отсюда вытекает, что этот интеграл обладает всеми свойствами интеграла, построенного в 1.16.

Из аддитивности функции φ легко следует, что если $\mathbf{1} = \mathbf{S}\,(e', e'')$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\varphi \, (e_\lambda^x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\varphi \, (e_\lambda^x \wedge e') + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\varphi \, (e_\lambda^x \wedge e'').$$

1.31. Пусть $x \geqslant \mathbf{0}$. Если $e^{(n)} \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$ $(e^{(n)} \in \mathfrak{E}(X))$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\varphi \, (e_\lambda^x \wedge e^{(n)}) \xrightarrow[n \to \infty]{(o)} \mathbf{0} \tag{4}$$

Доказательство. Вследствие положительности φ

$$\mathbf{0} \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\varphi \, (e_\lambda^x \wedge e^{(n)}) \leqslant \sum_p \lambda_p \varphi \, [(e_{\lambda_p}^x - e_{\lambda_{p-1}}^x) \wedge e^{(n)}].$$

Каждый член ряда, стоящего в правой части, (o)-стремится к нулю при $n \to \infty$, а весь ряд мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_p \lambda_p \varphi \, (e_{\lambda_p}^x - e_{\lambda_{p-1}}^x).$$

Отсюда, с помощью рассуждений, обычно применяемых в математическом анализе, легко заключить, что соотношение (4) имеет место *).

1.32. (oo)-непрерывность операции U. При тех же предположениях относительно функции $\varphi(e)$, операция $U \in H_o^0$.

Доказательство. Достаточно доказать непрерывность $U(x)$ при $x = \mathbf{0}$, причём при доказательстве можно ограничиться случаем, когда $x_n \searrow \mathbf{0}$ (2.44 гл. VII).

---

*) Действительно, фиксируя произвольное p_0 и переходя к пределу при $n \to \infty$ в первых p_0 членах ряда, мы получим, что

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\varphi \, (e_\lambda^x \wedge e^{(n)}) \leqslant \sum_{p_0+1}^{\infty} \lambda_p \varphi \, (e_{\lambda_p}^x - e_{\lambda_{p-1}}^x).$$

Если теперь принять $p_0 \to \infty$, то мы сразу получим требуемое заключение.

Итак, пусть $x_n \searrow \mathbf{0}$. Тогда $U(x_n) \searrow y \geqslant \mathbf{0}$. Нужно доказать, что $y = \mathbf{0}$.

По признаку (o)-сходимости (4.18 гл. III) при любом $\varepsilon > 0$.

$$e_\varepsilon^{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{(o)} \mathbf{1}. \tag{5}$$

Имеем:

$$U(x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\varphi\, (e_\lambda^{x_n} \wedge e_\varepsilon^{x_n}) + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\varphi\, [e_\lambda^{x_n} \wedge (\mathbf{1} - e_\varepsilon^{x_n})] \tag{6}$$

В первом интеграле интегрирование совершается фактически по промежутку $(0, \varepsilon)$. Если 0 и ε включить в число точек деления, то верхняя интегральная сумма для первого интеграла может быть записана в виде

$$\sum_{0<\lambda_p\leqslant\varepsilon} \lambda_p \varphi\, (e_{\lambda_p}^{x_n} - e_{\lambda_{p-1}}^{x_n}),$$

откуда ясно, что эта сумма $\leqslant \varepsilon\varphi(\mathbf{1})$. Но тогда та же оценка справедлива и для интеграла.

С другой стороны, благодаря положительности φ и неравенству $x_n \leqslant x_1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\varphi\, [e_\lambda^{x_n} \wedge (\mathbf{1} - e_\varepsilon^{x_n})] \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\varphi\, [e_\lambda^{x_1} \wedge (\mathbf{1} - e_\varepsilon^{x_n})],$$

откуда в силу 1.31 и соотношения (5) имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\varphi\, [e_\lambda^{x_n} \wedge (\mathbf{1} - e_\varepsilon^{x_n})] \xrightarrow[n\to\infty]{(o)} \mathbf{0}.$$

Теперь из (5), устремляя n к ∞, заключаем, что $y \leqslant \varepsilon\varphi(\mathbf{1})$. Вследствие произвольности ε отсюда следует, что $y = \mathbf{0}$.

1.33. Теорема. *Общий вид операций $y = U(x)$ класса $H_0^\sigma \cap H_r$ даётся интегралом*

$$U(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\varphi\, (e_\lambda^x), \tag{1}$$

где $\varphi(e)$ — ограниченная, аддитивная и (o)-непрерывная функция и такая, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\,|\varphi|\, (e_\lambda^x) \tag{7}$$

(по полному изменению функции $\varphi(e)$) должен существовать для любого $x \in X$.

Доказательство. Из существования интеграла (7) для всех $x \in X$ вытекает существование интеграла (1) и по 1.25 $U(x)$ — регулярная операция, а по 1.15 и 1.32 $U \in H_0^0$. Таким образом, $U \in H_0^0 \cap H_r$.

Пусть, обратно, дана операция $U \in H_0^0 \cap H_r$. Благодаря её непрерывности и аддитивности имеем:

$$U(x) = U[\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, de_\lambda^x] = U[(o)\text{-}\lim \sum_n l_n (e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x)] =$$

$$= (o)\text{-}\lim \sum_n l_n U(e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x) = (o)\text{-}\lim \sum_n l_n \varphi(e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\varphi(e_\lambda^x),$$

где

$$\varphi(e) = U(e).$$

При этом $\varphi(e)$ — аддитивная и (oo)-непрерывная функция. Кроме того,

$$|\varphi(e)| = |U(e)| \leqslant |U|(e) \leqslant |U|(\mathbf{1}),$$

т. е. $\varphi(e)$ ограничена.

Но $|U| \in H_0^0$ (2.47 гл. VII); поэтому аналогично

$$|U|(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\varphi^*(e_\lambda^x), \text{ где } \varphi^*(e) = |U|(e).$$

Так как $|\varphi(e)| \leqslant \varphi^*(e)$, то по замечанию в 1.13 $|\varphi|(e) \leqslant \varphi^*(e)$, следовательно, интеграл (7) существует для любого $x \in X$.

Теорема доказана.

Замечание. Так как, очевидно, для $x \geqslant \mathbf{0}$

$$|U(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\varphi(e_\lambda^x) \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d|\varphi|(e_\lambda^x),$$

то

$$|U|(x) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d|\varphi|(e_\lambda^x),$$

откуда $|U|(e) \leqslant |\varphi|(e)$. Вместе с полученным выше обратным неравенством это даёт, что $|U|(e) = |\varphi|(e)$, т. е.

$$|U|(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d|\varphi|(e_\lambda^x).$$

1.34. Так как класс линейных мультипликативных операций $H_m \subset H_0^0 \cap H_r$ (см. замечание к теореме 3.13 гл. VII), то по этой же теореме общий вид

операций класса H_m даётся интегралом (1), причём функция $\varphi(e)$ удовлетворяет всем условиям предыдущей теоремы, а ее значения принадлежат базе пространства Y.

1.4. Класс H_t^0. Поставим вопрос, при каких условиях интеграл (1), в котором функция $\varphi(e)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.33, изображает операцию класса H_t^0. Так как $\varphi(e) = U(e)$, то из $e_n \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$ должно следовать $\varphi(e_n) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$, т. е. функция $\varphi(e)$ должна быть (to)-непрерывной. Однако этого условия недостаточно, что видно из следующего примера.

1.41. Пусть $X = Y$ — любое дискретное K-пространство с единицей. Тогда тождественная операция $y = x$ принадлежит классу $H_o^0 \cap H_r$. Если при этом (t)-сходимость в X не совпадает с (o)-сходимостью (например, если $X = Y = l^p$), то тождественная операция не входит в класс H_t^0. Но так как для элементов базы дискретного пространства (t)-сходимость совпадает с (o)-сходимостью (см. 5.24 гл. III), то функция $\varphi(e) = e$ (to)-непрерывна.

Однако одну теорему мы сможем установить и для класса H_t^0. Наметим ход рассуждений.

1.42. Используя метод доказательства 1.15, можно установить, что если Y — регулярное K^+-пространство, а $\varphi(e)$ аддитивна, ограничена и (to)-непрерывна, то её изменения $\varphi_+(e)$ и $\varphi_-(e)$ тоже (to)-непрерывны. Вместо ссылки на теорему 2.47 гл. VII, сделанной по ходу доказательства 1.15, придётся сослаться на предложение 2.91 гл. VII, также верное в группе G конечнозначных элементов с целочисленными коэффициентами. Теперь, внося весьма несущественные изменения в доказательство предложения 1.32, можно установить следующий результат для положительной аддитивной (to)-непрерывной функции $\varphi(e)$:

если $x_n \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$ и x_n в совокупности ограничены, то

$$U(x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\varphi(e_\lambda^{x_n}) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}.$$

Читатель легко сможет восстановить все доказательства. Отсюда мы уже сразу приходим к следующей теореме:

1.43. Теорема. *Для того чтобы интегральная операция* (1), *рассматриваемая в K-пространстве ограниченных элементов X со значениями в регулярном K^+-пространстве Y, принадлежала классу H_t^0, необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(e)$ была (to)-непрерывной.*

Действительно, эта теорема вытекает непосредственно из предыдущих рассуждений (1.42), если учесть, что в K-пространстве ограниченных элементов (t)-сходимость влечёт ограниченность (2.33c) гл. VI).

1.44. Покажем, что для функций φ с числовыми значениями (to)-непрерывность равносильна абсолютной аддитивности, т. е. свойству

$$\varphi\left(\mathop{\mathbf{S}}_{1}^{\infty} e_n\right) = \sum_{1}^{\infty} \varphi(e_n).$$

Действительно, абсолютная аддитивность, очевидно, вытекает из (to)-непрерывности. Обратно, если φ абсолютно аддитивна, то $\varphi(e_n) \to 0$ при $e_n \searrow \mathbf{0}$. Рассмотрим аддитивный функционал

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\varphi(e_\lambda^x) = \sum_i \alpha_i \varphi_i(e_i)$$

на K-группе G, состоящей из конечнозначных элементов $x = \sum_i \alpha_i e_i$ с целыми коэффициентами.

Проверим, что $f(x_n) \to 0$, если $x_n \searrow \mathbf{0}$. Каждый x_n имеет вид

$$x_n = \mathop{\mathrm{S}}_{k=1}^{p} (k e_k^{(n)}) = \sum_{k=1}^{p} k e_k^{(n)}.$$

Так как $e_p^{(n)} \searrow \mathbf{0}$ при $n \to \infty$, то $\varphi(e_p^{(n)}) \to 0$. Аналогично,

$$e_p^{(n)} + e_{p-1}^{(n)} \searrow \mathbf{0} \quad \text{при } n \to \infty,$$

а потому

$$\varphi(e_{p-1}^{(n)}) = \varphi(e_p^{(n)} + e_{p-1}^{(n)}) - \varphi(e_p^{(n)}) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

По индукции мы получим, что

$$\varphi(e_k^{(n)}) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Но тогда

$$f(x_n) = \sum_{k=1}^{p} k\, \varphi(e_k^{(n)}) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Согласно 2.51 гл. VII отсюда следует, что функционал f (o)-линеен. Но так как для функционалов $H_o^o = H_t^o$, то функция φ должна быть (to)-непрерывной.

§ 2. Операции в пространстве M

2.1. Общие результаты в M. Применим результаты предыдущего параграфа к изучению операций в пространстве M почти всюду ограниченных измеримых функций $x(t)$, заданных на измеримом множестве E (2.34 гл. VI). K-пространство Y значений операции остаётся произвольным.

2.11. Базу в M образуют характеристические функции всевозможных измеримых множеств $e \subset E$*). Поэтому между базой пространства M и совокупностью всех измеримых множеств $e \subset E$ (множества, отличающиеся друг от друга на множество меры 0, отождествляются) устанавливается естественный изоморфизм, а функция φ, игравшая основную роль в предыдущем параграфе, может быть рассматриваема как аддитивная функция измеримого множества $\varphi(e)$. Тогда определение интеграла 1.16 автоматически приводит к известному интегралу Радона, в котором интегрирующая функция имеет абстрактные значения:

$$\int_E x(t)\, d\varphi(e).$$

*) Как обычно, мы считаем, что за единицу в M принята функция, тождественно равная единице.

Действительно, как это видно из определения характеристики e_λ^x, соответствующие e_λ^x подмножества множества E, которые мы также обозначаем через e_λ^x, характеризуются тем, что

$$x(t) \leqslant \lambda \quad \text{при} \quad t \in e_\lambda^x,$$
$$x(t) \geqslant \lambda \quad \text{при} \quad t \overline{\in} e_\lambda^x$$

(ср. 4.1 гл. III). В частности, если каждое значение характеристики — наименьшее возможное (e_λ^+), то в первом соотношении почти всюду в e_λ^x имеет место строгое неравенство $x(t) < \lambda$. А тогда интегральная сумма

$$\sum_n l_n \varphi(e_{\lambda_n}^x \setminus e_{\lambda_{n-1}}^x)$$

превращается в сумму Лебега-Радона, а её предел, по определению, — абстрактный интеграл Радона

$$\int_E x(t)\, d\varphi(e). \tag{1}$$

Так как всякое множество $e \subset E$ с $me = 0$ сопоставлено нулевому элементу базы пространства M, то для него $\varphi(e) = \mathbf{0}$.

Учитывая, что M — K-пространство ограниченных элементов, мы заключаем, что к нему применима теорема 1.17, согласно которой интеграл (1), где $\varphi(e)$ — ограниченная аддитивная функция измеримого множества, причём $\varphi(e) = \mathbf{0}$ при $me = 0$, даёт общую форму операций класса H_r в M.

По теореме 2.84 гл. VII в M совпадают классы (b)-линейных и регулярных функционалов. Поэтому установленный сейчас результат содержит и общую форму (b)-линейных функционалов в M. В этом случае функция $\varphi(e)$ должна обладать всеми указанными свойствами и иметь численные значения. При этом легко убедиться в том, что норма функционала равна полному изменению функции φ *).

2.12. Как известно, (o)-сходимость в M есть сходимость почти всюду последовательности функций, ограниченных в совокупности (см. 2.34 гл. VI). Для последовательности единичных элементов условие ограниченности выполняется автоматически. Поэтому (o)-сходимость последовательности единичных элементов означает, что для соответствующей последовательности измеримых множеств e_n существует предел в теоретико-множественном смысле с точностью до

---

*) Для функционала $F(x) = \int_E x(t)\, d\varphi(e)$ имеем:

$$\|F\| = \|F\| = \||F|\| = |F|(\mathbf{1}) = |\varphi|(E).$$

(Ср. замечание к 1.33 и к 2.86 гл. VII)

множества меры нуль. Это понятие предела и войдёт в определение (oo)-непрерывности функции множества $\varphi(e)$.

(t)-сходимость к нулю для последовательности единичных элементов означает, что мера соответствующих множеств стремится к нулю. Легко видеть, в чём заключается смысл (t)-сходимости к произвольному пределу e.

Определив конкретный смысл (oo)-непрерывности в M, мы легко сможем переформулировать для M теорему 1.33.

2.13. Теорема. *Общий вид операций $y = U(x)$ класса H_0^0 в K-пространстве M даётся интегралом Радона* (1), *где $\varphi(e)$ — ограниченная, аддитивная функция измеримого множества, причём*

$$|\varphi|(e) \searrow \mathbf{0}, \text{ если } e_1 \supset e_2 \supset \ldots \text{ и } me_n \searrow 0\ ^{*)}.$$

2.14. Аналогично из теоремы 1.43 получается

Теорема. *Для того чтобы интеграл* (1) *представлял операцию класса H_t^0 (Y — регулярное K^+-пространство), необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(e)$ была абсолютно непрерывной функцией множества, т. е.*

$$\varphi(e_n) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}, \text{ если } me_n \longrightarrow 0.$$

2.15. Замечание. Так как для функционалов классы H_0^0 и H_t^0 совпадают, то условия, наложенные на $\varphi(e)$ в теоремах 2.13—2.14, равносильны для функций с численными значениями.

Кроме того, по 1.44 эти условия равносильны абсолютной аддитивности функции $\varphi(e)$, т. е. свойству

$$\varphi\left[\bigcup_1^\infty e_n\right] = \sum_1^\infty \varphi(e_n), \text{ если } e_i \cap e_j = \Lambda \text{ при } i \neq j,$$

и условию

$$\varphi(e) = 0 \quad \text{при} \quad me = 0.$$

2.16. Теорема (Г. М. Фихтенгольц). *Общий вид (o)-линейных функционалов в M даётся интегралом Лебега*

$$f(x) = \int_E x(t)\,\psi(t)\,dt,$$

где $\psi(t)$ — произвольная суммируемая функция.

Доказательство. Покажем, что в случае, если Y — пространство вещественных чисел, интеграл (1) сводится к интегралу Лебега.

---

*) Требование существования интеграла по $|\varphi|$ для любого $x \in M$ выполняется автоматически, так как M — K-пространство ограниченных элементов. Непрерывность φ равносильна непрерывности $|\varphi|$, но для $|\varphi|$ при проверке непрерывности достаточно ограничиться монотонными последовательностями $\{e_n\}$.

Действительно, всякая абсолютно непрерывная функция множества представима в виде:

$$\varphi(e) = \int_e \psi(t)\,dt,$$

где $\psi(t)$ суммируема на E. Тогда для любого разбиения числовой оси

$$\left| \int_E x(t)\psi(t)\,dt - \sum_n l_n \varphi(e^x_{\lambda_n} \setminus e^x_{\lambda_{n-1}}) \right| =$$

$$= \left| \sum_n \int_{e^x_{\lambda_n} \setminus e^x_{\lambda_{n-1}}} [x(t) - l_n]\,\psi(t)\,dt \right| \leqslant \left[\sup(\lambda_n - \lambda_{n-1})\right] \int_E |\psi(t)|\,dt,$$

откуда следует, что

$$\int_E x(t)\psi(t)\,dt = \lim \sum_n l_n \varphi(e^x_{\lambda_n} \setminus e^x_{\lambda_{n-1}}) = \int_E x(t)\,d\varphi(e).$$

Обратное утверждение, т. е. что всякий интеграл Лебега

$$\int_E x(t)\psi(t)\,dt$$

изображает (o)-линейный функционал в M, очевидно.

Все доказанные в этом номере результаты справедливы и для пространства ограниченных измеримых функций, заданных в многомерном пространстве.

Аналогично исследованию, проведённому для M, можно было бы рассмотреть функционалы в K^--пространстве всех ограниченных функций, заданных на произвольном множестве. Мы не будем останавливаться на этом, а рассмотрим случай, когда X состоит из всех функций, ограниченных и измеримых (B), заданных на некотором ограниченном множестве E (измеримом (B)) эвклидова пространства R_n.

Обозначим такое пространство X через F_B. При обычных упорядочении и линеаризации F_B будет K^--пространством, т. е. аксиома V будет выполняться в нём для счётных множеств.

2.17. Общий вид регулярных функционалов $f(x)$ в F_B даётся интегралом Радона

$$f(x) = \int_E x(t)\,d\varphi(e),$$

где $\varphi(e)$ — ограниченная аддитивная функция, заданная для всех подмножеств $e \subset E$, измеримых (B).

Это предложение является прямым следствием теоремы 1.17, так как последняя, как легко проверить, сохраняет силу для F_B, вследствие того, что хотя F_B — K^--пространство, но возможность интегрального представления его элементов очевидна.

Замечание. Полученный результат легко распространяется на K^--пространство F_B^*, состоящее из всех ограниченных бэровских функций, заданных на всём R_n, но отличных от нуля каждая лишь на ограниченном подмножестве множества R_n.

Действительно, если положить для любого ограниченного измеримого (B) множества $e \subset R_n$

$$\varphi(e) = f(x_e),$$

где x_e — характеристическая функция множества e, а f — регулярный функционал в F_B^*, то f будет представим в виде интеграла Радона:

$$f(x) = \int_{R_n} x(t)\, d\varphi(e),$$

причём φ должна быть ограничена на любой ограниченной части пространства R_n. Обратно, всякий такой интеграл, очевидно, изображает регулярный функционал в F_B^*.

2.18. Если $x(t)$ непрерывна, то интеграл Радона в предыдущем предложении сводится к интегралу Гюнтера-Стилтьеса

$$\int_{R_n} x(t)\, d\varphi(I),$$

где I — интервалы из R_n, а интеграл понимается как предел сумм

$$\sum_k x(t_k)\, \varphi(I_k),$$

составленных для произвольного разбиения пространства R_n на интервалы.

В одномерном случае интеграл Гюнтера-Стилтьеса превращается в обычный интеграл Стилтьеса *).

Доказательство. Предполагая, что колебание функции $x(t)$ на каждом из интервалов I_k меньше ε, имеем:

$$\left| \int_{R_n} x(t)\, d\varphi(e) - \sum_k x(t_k)\, \varphi(I_k) \right| =$$

$$= \left| \sum_k \int_{I_k} x(t)\, d\varphi(e) - \sum_k x(t_k)\, \varphi(I_k) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k \left| \int_{I_k} x(t)\, d\varphi(e) - x(t_k)\, \varphi(I_k) \right| =$$

$$= \sum_k \left| \int_{I_k} [x(t) - x(t_k)]\, d\varphi(e) \right| \leqslant \sum_k \varepsilon\, |\varphi|(I_k) = \varepsilon\, |\varphi|(I),$$

*) При разбиении пространства R_n на интервалы границы могут быть отнесены к любым из соседних между собой интервалов. Так, например, в одномерном случае можно под I понимать полусегменты $[\alpha, \beta)$.

где I — такой интервал, вне которого $x(t) = 0$. Вследствие произвольности e

$$\lim \sum_k x(t_k)\,\varphi(I_k) = \int_{R_n} x(t)\,d\varphi(e).$$

Результатами, полученными в 2.17—2.18, мы воспользуемся в дальнейшем.

2.2. Интеграл Хеллингера. Для дальнейшего изучим ещё один тип абстрактного интеграла.

Пусть $f(t)$ — вещественная функция, а $g(t)$ — абстрактная функция от вещественного аргумента, со значениями в K-пространстве Y; обе функции определены на некотором отрезке $a \leqslant t \leqslant b$. Составим сумму Хеллингера

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{[f(t_{i+1}) - f(t_i)]\,[g(t_{i+1}) - g(t_i)]}{t_{i+1} - t_i} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta f(t_i)\,\Delta g(t_i)}{\Delta t_i},$$

где $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Если при $\max \Delta t_i \to 0$ сумма Хеллингера (t)-стремится к некоторому конечному пределу $y_0 \in Y$, то этот элемент y_0 обозначается

$$\int_a^b \frac{df(t)\,dg(t)}{dt} \tag{2}$$

и называется *интегралом Хеллингера.*

Если $f(t)$ абсолютно непрерывна, то имеет место равенство

$$\int_a^b \frac{df(t)\,dg(t)}{dt} = (t)\text{-}\lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t)\,dt \cdot \Delta g(t_i),$$

причём существование предела влечёт существование интеграла.

В частности, если $f'(t)$ непрерывна и существует интеграл Стилтьеса

$$\int_a^b f'(t)\,dg(t),$$

то

$$\int_a^b \frac{df(t)\,dg(t)}{dt} = \int_a^b f'(t)\,dg(t).$$

Последнее вытекает сразу из определения интеграла Стилтьеса, если к интегралу

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t)\,dt$$

применить теорему о среднем значении.

2.21. Пусть функция $f(t)$ кусочно-линейна, т. е. сегмент $[a, b]$ разбивается с помощью точек $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ на конечное число сегментов, на каждом из которых $f(t)$ линейна. Пусть, кроме того, $g(t)$ (t)-непрерывна (т. е. из $t^{(k)} \to t$ вытекает $g(t^{(k)}) \xrightarrow{(t)} g(t)$. Тогда интеграл Хеллингера (2) существует и при этом

$$\int_a^b \frac{df(t)\,dg(t)}{dt} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta f(t_i)\,\Delta g(t_i)}{\Delta t_i}.$$

Доказательство не составляет никакого труда и мы предоставляем его читателю.

2.22. Определение. Функция $g(t)$ называется *абсолютно (t)-непрерывной*, если для любой последовательности конечных систем попарно непересекающихся интервалов $\{(t_i, t_i')\}$

$$\text{из } \sum_i (t_i' - t_i) \to 0 \text{ следует } \sum_i |g(t_i') - g(t_i)| \xrightarrow{(t)} 0.$$

Это — прямое обобщение понятия абсолютной непрерывности вещественной функции.

Положим

$$g^*(t) = \operatorname*{var}_a^t g(t) = \sup \sum_i |g(t_{i+1}) - g(t_i)|, \tag{3}$$

где верхняя грань вычисляется по всевозможным конечным разбиениям отрезка $[a, t]$. Если при всех $t \in [a, b]$ $g^*(t) < +\infty$, то $g(t)$ называется *функцией ограниченного изменения*, а $g^*(t)$ — ее *полным изменением*.

2.23. Пусть Y — KB-пространство. Если $g(t)$ абсолютно (t)-непрерывна, то она есть функция ограниченного изменения и её полное изменение $g^*(t)$ тоже абсолютно (t)-непрерывная функция.

Доказательство. Так как в KB-пространствах (t)-сходимость совпадает со сходимостью по норме, то определению абсолютной (t)-непрерывности можно придать обычный вид:

$$\text{из } \sum_i |t_i' - t_i| \leqslant \delta(\varepsilon) \text{ следует } \left\| \sum_i |g(t_i') - g(t_i)| \right\| \leqslant \varepsilon \tag{4}$$

(для конечных систем неналегающих интервалов).

Обозначим через E множество значений всех сумм, входящих в правую часть формулы (3), и допустим, что $\sup E = +\infty$. Тогда (2.45b) гл. VI)

$$\sup_{y_1, \ldots, y_k \in E} \|y_1, \ldots, y_k\| = +\infty. \tag{5}$$

Для любых $y_1, y_2 \in E$ найдётся $y \in E$ такой, что $y \geqslant y_1, y_2$. Достаточно в качестве y взять сумму, составленную для разбиения, полученного путём объединения множеств всех точек деления, с помощью которых вычислены y_1 и y_2. А так как $\|y_1, \ldots, y_k\| = \|y_1 \vee \ldots \vee y_k\|$, то из (5) следует, что $\sup\limits_{y \in E} \|y\| = +\infty$. Но это противоречит условию (4). Таким образом, $g^*(t) < +\infty$.

Абсолютная непрерывность функции $g^*(t)$ вытекает из (4) (с тем же $\delta(\varepsilon)$, что и для $g(t)$) благодаря следствию из 2.46 гл. VI. Действительно, для любой системы непересекающихся интервалов $\{(t_i, t_i')\}$ имеем:

$$\sum_i [g^*(t_i') - g^*(t_i)] =$$

$$= \sup_{t_i = t_0^{(i)} < t_1^{(i)} < \ldots < t_{n_i}^{(i)} = t_i'} \sum_i \sum_{k=1}^{n_i} |g(t_k^{(i)}) - g(t_{k-1}^{(i)})|\,^{*)},$$

причём множество E сумм, стоящих в правой части этого равенства, обладает тем свойством, что если $y_1, y_2 \in E$, то найдётся такой $y \in E$, что $y \geqslant y_1, y_2$. А тогда, по указанному следствию,

$$\|\sum_i [g^*(t_i') - g^*(t_i)]\| = \sup \|\sum_i \sum_{k=1}^{n_i} |g(t_k^{(i)}) - g(t_{k-1}^{(i)})|\|.$$

2.24. Пусть $f(t)$ удовлетворяет условию Липшица, то есть $|f(t_2) - f(t_1)| \leqslant C|t_2 - t_1|$, а $g(t)$ абсолютно (t)-непрерывна, причём Y — KB-пространство. Тогда интеграл

$$\int_a^b \frac{df(t)\,dg(t)}{dt} \tag{2}$$

существует и

$$\left|\int_a^b \frac{df(t)\,dg(t)}{dt}\right| \leqslant \int_a^b \frac{df^*(t)\,dg^*(t)}{dt} \tag{6}$$

$$\left(f^*(t) = \operatorname*{var}_a^t f(t), \quad g^*(t) = \operatorname*{var}_a^t g(t)\right).$$

---

*) Аддитивность полного изменения, как функции интервала, почти очевидна.

Доказательство. Рассмотрим последовательность сумм Хеллингера σ_k, для которой $\max \Delta t_i \to 0$ *). Каждая такая сумма представима в виде

$$\sigma_k = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta f_k(t_i)\,\Delta g(t_i)}{\Delta t_i},$$

где $f_k(t)$ кусочно-линейна, причём

$$f_k(t_i) = f(t_i) \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Отсюда ясно, что $f_k(t)$ удовлетворяет условию Липшица с той же постоянной C, что и $f(t)$.

Положим

$$\eta_k = 2 \operatorname*{var}_a^b (f - f_k), \quad \varepsilon_k = \sup(\eta_k, \eta_{k+1}, \ldots).$$

Тогда $\varepsilon_k \searrow 0$ (см. 2.68 гл. VI). Возьмём два индекса l и k, $l > k$. Перемешаем все точки деления t_i, отвечающие этим двум индексам, обозначим их снова через t_i и разобьём все промежутки (t_i, t_{i+1}) на две группы: к первой отнесём те, для которых

$$|\Delta[f_k(t_i) - f_l(t_i)]| \leqslant \sqrt{\varepsilon_k}\,\Delta t_i,$$

а ко второй — все остальные. Тогда с помощью условия Липшица мы легко получаем следующую оценку:

$$|\sigma_k - \sigma_l| = \left| \sum_i \frac{\Delta(f_k - f_l)(t_i)\,\Delta g(t_i)}{\Delta t_i} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\varepsilon_k} \operatorname*{var}_a^b g + 2C \sum{}' |g(t_{i+1}) - g(t_i)|, \tag{7}$$

где штрих при знаке суммы указывает, что суммирование распространяется только на промежутки второй группы. Но для этих промежутков

$$\sum{}' \Delta t_i < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k}} |\Delta(f_k - f_l)(t_i)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k}} \operatorname*{var}_a^b (f_k - f_l) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k}} [\operatorname{var}(f_k - f) + \operatorname{var}(f - f_l)] \leqslant \sqrt{\varepsilon_k}. \tag{8}$$

Тогда по абсолютной (t)-непрерывности функции $g(t)$ $\sum' |\Delta g(t_i)| \xrightarrow{(t)} 0$, значит, по (7) $\|\sigma_k - \sigma_l\| \to 0$ при $k, l \to \infty$. Вследствие (b)-полноты KB-пространства отсюда вытекает существование предела сумм Хеллингера, т. е. интеграл $\int_a^b \frac{df(t)\,dg(t)}{dt}$ существует.

---

*) Для упрощения записи мы не указываем в обозначении зависимость t_i от k.

Неравенство (6) очевидно для сумм Хеллингера, а тогда, после перехода к пределу, оно сохраняется и для интегралов.

2.25. Пусть $z = V(y)$ — операция класса H_t^t, отображающая Y в какое-нибудь K-пространство Z, и пусть

$$y = \int_a^b \frac{df(t)\,dg(t)}{dt}.$$

Тогда

$$V(y) = \int_a^b \frac{df(t)\,dV[g(t)]}{dt},$$

т. е. операции V и $\int$ можно переставить между собой.

Доказательство. Имеем:

$$V(y) = V\left[(t)\text{-}\lim \sum_i \frac{\Delta f(t_i)\,\Delta g(t_i)}{\Delta t_i}\right] =$$

$$= (t)\text{-}\lim \sum_i \frac{\Delta f(t_i)\,\Delta V[g(t_i)]}{\Delta t_i} = \int_a^b \frac{df(t)\,dV[g(t)]}{dt}.$$

Остановимся ещё на некоторых свойствах абстрактных функций ограниченного изменения.

2.26. Для того чтобы функция $g(t)$ имела ограниченное изменение, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде разности двух возрастающих функций.

Это следует из определения так же, как для вещественных функций.

2.27. Если K-пространство Y счётного типа, то множество точек разрыва функции ограниченного изменения $g(t)$ не более чем счётно.

Доказательство. Достаточно доказать это предложение для монотонной функции. Пусть $g(t)$ — возрастающая функция. Легко видеть, что для любого конечного числа её точек разрыва $\tau_1, \ldots, \tau_n$

$$\sum_{i=1}^{n} [g(\tau_i + 0) - g(\tau_i - 0)]\ ^{*)} \leqslant g(b) - g(a).$$

Если взять счётное множество точек разрыва τ_i, то, переходя в предыдущем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, мы получим аналогичное неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} [g(\tau_i + 0) - g(\tau_i - 0)] \leqslant g(b) - g(a).$$

---

*) Для возрастающей функции

$$g(\tau + 0) = \inf_{t > \tau} g(t), \quad g(\tau - 0) = \sup_{t < \tau} g(t).$$

Допустим, что $g(t)$ имеет несчётное множество точек разрыва. Расположим их в трансфинитную последовательность $\{\tau_\alpha\}$ и положим для всех $\alpha < \Omega$ (т. е. для всех α первых двух классов)

$$y_\alpha = \sum_{\beta < \alpha} [g(\tau_\beta + 0) - g(\tau_\beta - 0)].$$

Ясно, что y_α образуют строго возрастающую несчётную последовательность, что, однако, невозможно в K-пространстве счётного типа (1.45 гл. V).

2.3. Представление операций класса H_0^0 посредством интеграла Хеллингера. Будем теперь предполагать, что M состоит из функций, заданных на отрезке $[a, b]$.

2.31. Теорема. *Общий вид операций $y = U(x)$ класса H_0^0, отображающих M в произвольное КВ-пространство Y, даётся интегралом Хеллингера*

$$y = U(x) = \int_a^b \frac{df(t)\,dg(t)}{dt}, \tag{9}$$

где $f(t) = \int_a^t x(\tau)\,d\tau$, а $g(t)$ абсолютно (t)-непрерывна.

Доказательство. По 2.24 интеграл (9) при выполнении указанных условий существует, а тогда он, очевидно, изображает аддитивную операцию. Проверим её (oo)-непрерывность.

Пусть $x_n \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$. Это означает, что $x_n(t) \to 0$ почти всюду и $|x_n(t)| \leqslant C$ при всех n. Тогда $\int_a^b |x_n(t)|\,dt \to 0$, т. е. если $f_n(t) = \int_a^t x_n(\tau)\,d\tau$, то $\operatorname{var}_a^b f_n \to 0$. Положим $\varepsilon_n = \operatorname{var} f_n$.

Рассмотрим произвольную сумму Хеллингера σ для функции $f_n(t)$. Так как $f_n(t)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной C, то, повторяя для σ рассуждение из 2.24, мы придём к неравенству (7) с заменой $\sigma_k - \sigma_l$ на σ и $2C$ на C и к оценке (8) для промежутков второй группы:

$$|\sigma| \leqslant \sqrt{\varepsilon_n}\operatorname{var}_a^b g + C\sum{}' |\Delta g(t_i)|,$$

$$\sum{}' \Delta t_i \leqslant \sqrt{\varepsilon_n}.$$

Зададим $\varepsilon > 0$. Если n таково, что $\sqrt{\varepsilon_n} \leqslant \delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon)$ определяется из условия абсолютной (t)-непрерывности функции $g(t)$ (см. (4)), то

$$\|\sigma\| \leqslant \sqrt{\varepsilon_n}\,\|\operatorname{var} g\| + C\varepsilon,$$

А тогда та же оценка верна и для интеграла

$$\int_a^b \frac{df_n(t)\,dg(t)}{dt},$$

откуда следует, что этот интеграл $\xrightarrow{(t)} 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, $U \in H_t^t$. То же рассуждение применимо к положительной операции

$$U^*(x) = \int_a^b \frac{df(t)\,dg^*(t)}{dt},$$

где

$$g^*(t) = \operatorname*{var}_a^t g(\tau),$$

а тогда по 2.49 гл. VII эта последняя операция принадлежит классу H_0^0. Но так как

$$f^*(t) = \operatorname*{var}_a^t f(\tau) = \int_a^t |x(\tau)|\,d\tau,$$

то из неравенства (6) сразу следует, что

$$|U(x)| \leqslant U^*(|x|),$$

а потому и $U \in H_0^0$.

Пусть, обратно, дана операция $U \in H_0^0$. Тогда существует $|U| \in H_0^0 \subset H_t^t$. Положим $g(t) = U(x_t)$, где

$$x_t(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } a \leqslant \tau \leqslant t, \\ 0 & \text{при } t < \tau \leqslant b\ ^{*}). \end{cases} \tag{10}$$

Тогда для любой системы непересекающихся интервалов (t_i, t_i')

$$\sum_i |g(t_i') - g(t_i)| = \sum_i |U(x_{t_i'} - x_{t_i})| \leqslant \sum_i |U|(x_{t_i'} - x_{t_i}) =$$
$$= |U|[\sum (x_{t_i'} - x_{t_i})].$$

Вследствие (tt)-непрерывности операции $|U|$ отсюда вытекает, что из

*) Обозначение x_t для функции, определяемой формулой (10), сохраняется в пределах всей главы VIII.

$\sum_i (t_i' - t_i) \to 0$ следует $\sum |g(t_i') - g(t_i)| \xrightarrow{(t)} 0$, т. е. $g(t)$ абсолютно (t)-непрерывна. Тогда по 2.24 интеграл (9) существует для любого $x \in M$. При этом, по уже доказанному, он изображает некоторую операцию класса H_0^0. Но по 2.21 равенство

$$U(x) = \int_a^b \frac{df(t)\,dg(t)}{dt}$$

очевидно для ступенчатых функций $x(t)$. А так как множество ступенчатых функций плотно в M в смысле (o)-сходимости, то две операции класса H_0^0, совпадающие на этом множестве, совпадают тождественно во всём пространстве M.

Замечание. Покажем, что $|U| = U^*$, т. е.

$$|U|(x) = \int_a^b \frac{df(t)\,dg^*(t)}{dt}.$$

Действительно, из приведённого доказательства следует, что $|U| \leqslant U^*$. С другой стороны, по доказанному, операция $|U|$ представима в виде интеграла:

$$|U|(x) = \int_a^b \frac{df(t)\,d\bar{g}(t)}{dt},$$

где

$$\bar{g}(t) = |U|(x_t).$$

Отсюда следует, что для любого приращения $\Delta t > 0$

$$|\Delta g(t)| \leqslant \Delta \bar{g}(t),$$

а тогда и для $g^*(t)$ (полного изменения функции $g(t)$) имеем:

$$\Delta g^*(t) \leqslant \Delta \bar{g}(t).$$

Отсюда $U^*(x) \leqslant |U|(x)$ для любого $x \geqslant 0$, следовательно, $U^* \leqslant |U|$. Этим и доказывается равенство $U^* = |U|$.

2.32. Применим доказанную теорему к установлению более простой общей формы (o)-линейного функционала в M, другим способом полученной выше в 2.16. В этом случае $g(t)$ — вещественная абсолютно непрерывная функция, следовательно,

$$g(t) = g(a) + \int_a^t \psi(\tau)\,d\tau,$$

где $\psi \in L$. Беря $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, положим:

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} x(\tau)\, d\tau \quad \text{при} \quad t_i \leqslant t < t_{i+1}.$$

Тогда при $\max \Delta t_i \to 0$

$$\bar{x}(t) \to x(t) \text{ почти всюду в } [a, b]$$

и $|\bar{x}(t)| \leqslant \|x\|$.

Для интеграла Хеллингера (9) мы получаем:

$$\int_a^b \frac{df(t)\, dg(t)}{dt} = \lim \sum_i \frac{\Delta f(t_i)\, \Delta g(t_i)}{\Delta t_i} = \lim \sum_i \bar{x}(t_i)\, \Delta g(t_i) =$$

$$= \lim \int_a^b \bar{x}(t)\, \psi(t)\, dt = \int_a^b x(t)\, \psi(t)\, dt.$$

Таким образом, общий вид (o)-линейного функционала в M даётся полученным интегралом Лебега.

Замечание. Попутно мы доказали, что если $f(t)$ удовлетворяет условию Липшица, а $g(t)$ — произвольная абсолютно непрерывная функция, то

$$\int_a^b \frac{df(t)\, dg(t)}{dt} = \int_a^b f'(t)\, g'(t)\, dt.$$

Существование интеграла Хеллингера, стоящего в левой части равенства, уже доказано в 2.24.

2.33. Теперь рассмотрим случай, когда $Y = L$ (L предполагается тоже заданным на отрезке $[a, b]$). Общий вид операций $y = U(x)$ класса H_0^o в этом случае даётся интегралом Хеллингера

$$y(s) = \int_a^b \frac{df(t)\, dG(s, t)}{dt}, \tag{11}$$

где интеграл понимается как предел сумм Хеллингера в смысле сходимости в среднем первого порядка на отрезке $a \leqslant s \leqslant b$, причём функция $G(s, t)$ должна удовлетворять следующим условиям:

a) $G(s, t)$ суммируема по s при любом t и ограниченного изменения по t при любом s;

b) $\int_a^b \operatorname{var}_{a \leqslant \tau \leqslant t} G(s, \tau)\, ds$ — абсолютно непрерывная функция от t,

Доказательство. Пусть $U \in H_0^0$ и пусть сначала $U \geqslant 0$. Тогда $U(x)$ представима по формуле (9) в виде интеграла Хеллингера, где $g(t)$ абсолютно (t)-непрерывна и монотонна. Пусть $\{\tau_j\}$ — счётное всюду плотное множество точек из $[a, b]$, в которое включены и концы этого сегмента. Так как значения $g(t)$ принадлежат L, то $g(\tau_j)$ изображается функцией $\varphi_j(s)$ из L $(j = 1, 2, \ldots)$. При этом существует множество S меры 0 такое, что при всех $s \overline{\in} S$

$$\tau_{j_1} \geqslant \tau_{j_2} \quad \text{влечёт} \quad \varphi_{j_1}(s) \geqslant \varphi_{j_2}(s).$$

Положим $\varphi_j(s) = 0$ при $s \in S$; тогда предыдущее условие монотонности будет иметь место при всех s.

Теперь положим при $a \leqslant s,\ t \leqslant b$

$$G(s, t) = \sup_{\tau_j \leqslant t} \varphi_j(s).$$

Ясно, что если $b = \tau_{j_0}$, то при любом t $G(s, t) \leqslant \varphi_{j_0}(s)$, т. е. $G(s, t)$ суммируема по s при любом t и монотонна по t при любом s. Кроме того, $G(s, \tau_j)$ является изображением элемента $g(\tau_j)$, а тогда благодаря непрерывности функции $g(t)$ $G(s, t)$ изображает $g(t)$ при всех t.

Из определения интеграла (9) сразу следует, что если $U(x) = y$, то

$$y(s) = \lim \sum_i \frac{\Delta f(t_i)\, \Delta G(s, t_i)}{\Delta t_i},$$

где предел нужно понимать в смысле сходимости в среднем в пространстве L.

Если $U \in H_0^0$, но не положительна, то $U = U_+ - U_-$ ($H_0^0 \subset H_r$ по 2.43 гл. VII и 2.45а) гл. VI). А тогда то же интегральное представление легко получить и для любой $U \in H_0^0$. При этом $G(s, t)$, очевидно, будет удовлетворять условию а). Из построения функции $G(s, t)$ вытекает, что $\operatorname{var} g(t)$ как элемент пространства L изображается функцией $\operatorname{var} G(s, t)$.

Из абсолютной (t)-непрерывности функции $g(t)$ вытекает абсолютная (t)-непрерывность её вариации $\operatorname{var}_a^t g(\tau)$. А для этой последней условие абсолютной (t)-непрерывности, записанное в форме (4), принимает вид: из

$$\sum (t_i' - t_i) \leqslant \delta(\varepsilon)$$

следует

$$\int_a^b \left\{ \sum_i \operatorname{var}_{t_i}^{t_i'} G(s, t) \right\} ds \leqslant \varepsilon,$$

т. е.

$$\int_a^b \operatorname{var}_{a \leqslant \tau \leqslant t} G(s, \tau)\, ds$$

— абсолютно непрерывная функция от t; таким образом, условие b) тоже выполнено.

Обратное заключение, т. е. что всякая операция указанного вида принадлежит классу H_0^0, — очевидно, так как интеграл (11) при выполнении требований а) — b) может быть представлен в виде интеграла (9) из теоремы 2.31.

§ 3. Операции в пространствах L^p

3.1. Общее представление операций класса H_0^0 в L. Операциями в пространстве L мы займёмся подробнее ввиду большой их важности. Напомним, что в пункте 1.62 гл. VII для пространств с аддитивной нормой, к числу которых принадлежит L, доказано совпадение классов H_t^t и H_0^0. При рассмотрении операций в L мы ограничимся случаем, когда L состоит из функций, заданных на сегменте $[a, b]$.

3.11. Теорема. *Общий вид операций $y = U(x)$ класса $H_t^t = H_0^0 = H_b^b$, отображающих L в произвольное КВ-пространство Y, даётся интегралом Хеллингера*

$$y = U(x) = \int_a^b \frac{df(t)\,dg(t)}{dt}, \tag{1}$$

где

$$f(t) = \int_a^t x(\tau)\,d\tau,$$

и $g(t)$ удовлетворяет по норме условию Липшица

$$\|g(t_2) - g(t_1)\| \leqslant C\,|t_2 - t_1|. \tag{2}$$

Если при этом постоянная C — наименьшая возможная, то $\|U\|_b = C$.

Доказательство. Пусть $x \in L$, $f(t) = \int_a^t x(\tau)\,d\tau$. Каждую сумму Хеллингера σ, по 2.21, можно заменить суммой Хеллингера от некоторой кусочно-линейной функции $f_\sigma(t)$, если $f_\sigma(t_i) = f(t_i)$ для всех i.

Рассмотрим разность между двумя суммами Хеллингера

$$\|\sigma_1 - \sigma_2\| = \left\| \sum_i \frac{\Delta(f_{\sigma_1} - f_{\sigma_2})(t_i)\,\Delta g(t_i)}{\Delta t_i} \right\| \leqslant C \sum_i |\Delta(f_{\sigma_1} - f_{\sigma_2})(t_i)| \leqslant$$

$$\leqslant C \operatorname*{var}_a^b (f_{\sigma_1} - f_{\sigma_2}) \leqslant C\,[\operatorname*{var}_a^b (f_{\sigma_1} - f) + \operatorname*{var}_a^b (f - f_{\sigma_2})],$$

а это выражение, как известно (см. 2.68 гл. VI), стремится к нулю, если разбиение, для которого составлены σ_1 и σ_2, неограниченно размельчается.

Вследствие (b)-полноты пространства Y отсюда следует существование предела сумм Хеллингера, т. е. интеграла (1). Аналогично получаем оценку

$$\|\sigma\| \leqslant C \operatorname{var}_a^b f = C\|x\|,$$

откуда $U \in H_b^b = H_o^o$, а

$$\|U\|_b \leqslant C. \tag{3}$$

Пусть, обратно, дана операция $U \in H_o^o$. Если эту операцию рассмотреть в M, то она также будет принадлежать классу H_o^o. Тогда по теореме 2.31 для $x \in M$ она представима по формуле (1), где $g(t) = U(x_t)$ (см. (10) § 2). Если $x = x_{t_2} - x_{t_1}$, то

$$\|U(x)\| = \|g(t_2) - g(t_1)\| \leqslant \|U\|_b |t_2 - t_1|, \tag{4}$$

т. е. $g(t)$ удовлетворяет условию (2).

Если x — произвольный элемент из L, то существует последовательность $x_n \in M$ такая, что $x_n \xrightarrow{(o)} x$. Тогда $U(x_n) \xrightarrow{(o)} U(x)$. Но по доказанному выше интеграл (1) представляет операцию класса H_o^o в L. Следовательно, благодаря непрерывности операции U и интеграла (1) равенство между ними сохраняется для всех $x \in L$. Из (3) и (4) сразу получается значение нормы $\|U\|_b$.

3.12. Повторяя рассуждения пункта 2.32, мы получим из доказанного в 3.11, что общий вид (o)-линейных функционалов в L (они же — (b)-линейные, так как (b)-сходимость в KB-пространствах совпадает с (t)-сходимостью) даётся интегралом Лебега

$$f(x) = \int_a^b x(t)\psi(t)\,dt,$$

где $\psi(t)$ — почти всюду ограниченная измеримая функция. При этом $\|f\| = \operatorname{vrai\,max} |\psi(t)|$.

При доказательстве этого предложения немного сложнее, чем в 2.32, проверить допустимость предельного перехода под знаком интеграла Лебега. Но, опираясь на 2.62 и 2.68 гл. VI, легко убедиться в том, что $\bar{x} \xrightarrow{(b)} x$ *), а тогда для некоторой частичной последовательности разбиений $\bar{x} \xrightarrow{(o)} x$, т. е. $\bar{x}(t) \to x(t)$ почти всюду и $\bar{x}(t)$ в совокупности ограничены суммируемой функцией. А тогда

$$\int_a^b \bar{x}(t)\psi(t)\,dt \to \int_a^b x(t)\psi(t)\,dt.$$

---

*) Обозначение $\bar{x}$ — см. 2.32.

Отсюда следует, что K-пространство регулярных функционалов в L (для функционалов в L $H_0^0 = H_r$, см. 2.41 гл. VII) изоморфно M. Известно, что M не регулярно (3.13 гл. V). Мы имеем пример, когда и X и Y — регулярные K^+-пространства, а K-пространство H_r не регулярно (ср. 1.4 гл. VII).

Функционалы в L служат также примером, подтверждающим, что в H_r (o)-сходимость не равносильна точечной сходимости (1.3 гл. VII). Действительно, нетрудно показать, что для того чтобы

$$f_n(x) = \int_a^b x(t)\,\psi_n(t)\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

при любом $x \in L$, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

1) ψ_n ограничены в совокупности в M;

2) $\int_a^t \psi_n(\tau)\,d\tau \to 0$ при любом t.

Это будет вытекать, например, из общего предложения 1.47 гл. X. Но очевидно, что из указанных двух условий не вытекает (o)-сходимость функций ψ_n к $\mathbf{0}$ в M.

3.13. Рассмотрим теперь случай, когда $Y = V$. Для упрощения формулировок будем понимать под V пространство функций ограниченного изменения $y(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, удовлетворяющих дополнительному условию: $y(a) = 0$. Это ограничение не имеет принципиального значения.

Теорема. *Общий вид операций $y = U(x)$ класса $H_t^t = H_0^0 = H_b^b$, отображающих L в V, даётся формулой*

$$y(s) = \int_a^b K(s, t)\,x(t)\,dt, \tag{5}$$

где:

a) *$K(s, t)$ поверхностно измерима в квадрате $a \leqslant s,\ t \leqslant b$;*

b) *при фиксированном s $K(s, t)$ — ограниченная измеримая функция от t;*

c) *$K(a, t) = 0$;*

d) *при фиксированном t $K(s, t)$ — функция ограниченного изменения от s и*

$$C = \sup_t \operatorname*{var}_{a \leqslant s \leqslant b} K(s, t) < +\infty.$$

При этом $C = \|U\|_b = \|U\|_v$.

Доказательство. Пусть $U \in H_0^0$. Тогда по теореме 3.11 она представима интегралом Хеллингера (1), в котором функция $g(t)$ удовлетворяет условию Липшица (2). Значения $g(t)$ принадлежат V. Следовательно, $g(t)$ при каждом t представляется в виде $L(s, t)$, где $L(s, t)$ — ограниченного изменения по s. При этом можно считать

$g(a) = \mathbf{0}$, т. е. $L(s, a) \equiv 0$. Кроме того, так как при любом t $g(t) \in V$, то $L(a, t) \equiv 0$.

Рассмотрим сначала случай, когда $U \geqslant \mathbf{0}$. Тогда $g(t)$ — монотонная функция. Следовательно, функция $L(s, t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) если $t_2 \geqslant t_1$, то $L(s, t_2) - L(s, t_1)$ — неубывающая, неотрицательная функция от s;

2) благодаря условию Липшица

$$L(s, t_2) - L(s, t_1) \leqslant L(b, t_2) - L(b, t_1) = \\ = \|g(t_2) - g(t_1)\| \leqslant \|U\|_b (t_2 - t_1). \quad (6)$$

Каждое значение функции $y(s)$ можно рассматривать как функционал в Y, а тогда по 2.25

$$y(s) = \int_a^b \frac{df(t)\, dL(s, t)}{dt}. \quad (7)$$

Из (6) видно, что $L(s, t)$ как функция от t при любом s удовлетворяет условию Липшица. Следовательно, существует производная $L'_t(s, t)$, входящая в M. А тогда из замечания к 2.32 следует, что интеграл (7) преобразуется в интеграл Лебега вида (5).

Функция $L'_t(s, t)$ при каждом s определена для почти всех t. Если мы положим заново во всём квадрате $a \leqslant s$, $t \leqslant b$

$$K(s, t) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\left[L\left(s, t + \frac{1}{n}\right) - L(s, t)\right] \quad (\text{при } a \leqslant t < b), \\ K(s, b) = 0, \quad (8)$$

то функция $K(s, t)$ будет определена во всем квадрате $a \leqslant s$, $t \leqslant b$ и при этом на всех прямых $s = \text{const}$ $K(s, t)$ будет почти всюду равна $L'_t(s, t)$, а потому, по сказанному выше, будет справедливо и равенство (5).

Так как функция $L(s, t)$ монотонна по обоим аргументам, то она поверхностно измерима. А тогда и $K(s, t)$ поверхностно измерима. Кроме того, из (8) и условия 1) сразу следует, что $K(s, t)$ при любом t — неубывающая функция от s. Так как

$$y(a) = \int_a^b K(a, t)\, x(t)\, dt = 0$$

для любого $x \in L$, то $K(a, t) \equiv \mathbf{0}$. Кроме того, из (6) и (8) следует, что $|K(s, t)| \leqslant \|U\|_b$. Таким образом,

$$\sup_t \operatorname{var}_s K(s, t) = \sup_t K(b, t) \leqslant \|U\|_b.$$

Итак, для $U \geqslant \mathbf{0}$ доказана возможность её представления в виде интеграла (5) с выполнением условий a) — d).

Отметим, что в формуле (8) верхний предел можно было бы заменить нижним.

Пусть теперь U — произвольная операция класса H_0^0. Тогда, по уже доказанному,

$$[U_+(x)](s)=\int_a^b K_1(s,t)\,x(t)\,dt,\quad [U_-(x)](s)=\int_a^b K_2(s,t)\,x(t)\,dt,$$

где $K_1(s,t)$ и $K_2(s,t)$ удовлетворяют всем тем же условиям, что и функция $K(s,t)$, определённая выше. При этом можно считать, что $K_1(s,t)$ определена с помощью формулы (8) со знаком верхнего предела, а $K_2(s,t)$ — со знаком нижнего предела. Положим

$$K(s,t)=K_1(s,t)-K_2(s,t);\quad K^*(s,t)=K_1(s,t)+K_2(s,t).$$

Тогда мы, очевидно, получим, что

$$[U(x)](s)=\int_a^b K(s,t)\,x(t)\,dt,\quad [|U|(x)](s)=\int_a^b K^*(s,t)\,x(t)\,dt.$$

Если положить

$$L^*(s,t)=\int_a^t K^*(s,\tau)\,d\tau,$$

то $|U|(x)$ можно представить по формуле (7) с заменой $L(s,t)$ на $L^*(s,t)$ (см. замечание к 2.32). Повторяя проведённое выше рассуждение, мы определим по формуле (8) со знаком $\overline{\lim}$ новое ядро $\overline{K}(s,t)$ так, что

$$[|U|(x)](s)=\int_a^b \overline{K}(s,t)\,x(t)\,dt,$$

причём

$$\operatorname*{var}_s \overline{K}(s,t)\leqslant \||U|\|_b.$$

Благодаря неравенству

$$\overline{\lim}(\alpha_n+\beta_n)\geqslant \overline{\lim}\,\alpha_n+\underline{\lim}\,\beta_n$$

имеем:

$$\overline{K}(s,t)\geqslant K_1(s,t)+K_2(s,t)=K^*(s,t).$$

Так как все эти функции — не убывающие по отношению к s, то

$$\operatorname*{var}_s K(s,t)\leqslant \operatorname*{var}_s K^*(s,t)=K^*(b,t)\leqslant \overline{K}(b,t)=$$
$$=\operatorname*{var}_s \overline{K}(s,t)\leqslant \||U|\|_b=\|U\|_v=\|U\|_b \qquad (9)$$

(см. 2.62 гл. VII).

Обратно, для всякой операции $y = U(x)$, заданной формулой (5), мы имеем следующую оценку:

$$\|y\| = \operatorname*{var}_{a \leqslant s \leqslant b} y(s) = \sup \sum_i |y(s_{i+1}) - y(s_i)| =$$

$$= \sup \sum_i \left| \int_a^b [K(s_{i+1}, t) - K(s_i, t)]\, x(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup \int_a^b \left[\sum_i |K(s_{i+1}, t) - K(s_i, t)| \right] |x(t)\, dt \leqslant C \|x\|, \qquad (10)$$

откуда и следует, что $U \in H_b^b = H_o^o$. Сравнивая (9) с (10), мы получаем, что $\|U\|_b = C$.

Теорема полностью доказана.

3.14. Для того чтобы интеграл (5) представлял операцию класса H_o^o, значения которой принадлежат A (пространству абсолютно непрерывных функций), необходимо и достаточно, чтобы кроме условий теоремы 3.13, было выполнено следующее: $\int_a^\tau K(s, t)\, dt$ — абсолютно непрерывная функция от s при любом τ $(a \leqslant \tau \leqslant b)$.

Необходимость условия очевидна, так как $U(x_\tau) \in A$ и выражается интегралом $\int_a^\tau K(s, t)\, dt$. Обратно, если это условие выполнено, то интеграл (5) попадает в A для всякой ступенчатой функции из L. Но всякий элемент $x \in L$ представим как предел по норме последовательности ступенчатых функций $x_n \in L$, а тогда из сходимости $U(x_n)$ к $U(x)$ по норме в пространстве V следует, что $U(x) \in A$ (см. 2.63 гл. VI) *).

3.15. Вследствие изоморфизма между L и A мы получаем, что общий вид операций $y = U(x)$ класса $H_t^t = H_o^o = H_b^b$, отображающих L в L, даётся формулой

$$y(s) = \frac{d}{ds} \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt, \qquad (11)$$

где $K(s, t)$ удовлетворяет всем условиям 3.13 и дополнительному условию 3.14. Норма операции $\|U\|_b$ определяется так же, как в 3.13.

Легко видеть, что интеграл вида (5) при некоторых условиях тоже выражает операцию класса H_b^b, отображающую L в L. Однако не всякая операция этого класса может быть представлена в виде (5),

---

*) Легко видеть, что если последовательность элементов, входящих в некоторую компоненту K-пространства, (t)-сходится к пределу, то и предел принадлежит той же компоненте.

т. е. формула (11) в общем случае не может быть заменена более простой формулой (5). Действительно, рассмотрим тождественную операцию $U(x)=x$. Если предположить, что она представима в виде (5), т. е.

$$x(s)=\int_a^b K(s,\ t)\,x(t)\,dt,$$

то при любом τ для почти всех s мы будем иметь:

$$\int_a^\tau K(s,\ t)\,dt=\begin{cases}1 & \text{при } s\leqslant\tau,\\ 0 & \text{при } s>\tau.\end{cases}$$

Полагая $x(t)\equiv 1$, мы видим, что $K(s,\ t)$ должна быть суммируема по t при почти всех s, а в этом случае интеграл $\int_a^\tau K(s,t)\,dt$ изображает непрерывную функцию от τ. Однако это противоречит тому, что он почти всюду принимает значения 0 или 1.

3.16. Пусть в формуле (5) функция $K(s,\ t)$ поверхностно измерима. Тогда для того чтобы интеграл (5) изображал операцию класса $H_t^t=H_0^0=H_b^b$, отображающую L в L, необходимо и достаточно, чтобы

$$C_1=\operatorname{vrai\,max}_t\int_a^b|K(s,\ t)|\,ds<+\infty.$$

При этом $C_1=\|U\|_b$.

Доказательство. а) Необходимость. Мы уже отмечали выше, что $K(s,\ t)$ должна быть суммируема по t для почти всех s. При этом, полагая $x=x_{t_2}-x_{t_1}$, мы сразу видим, что для любых t_1 и t_2

$$\int_a^b\left|\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}K(s,\ t)\,dt\right|ds\leqslant\|U\|_b. \tag{12}$$

Если s таково, что $K(s,t)$ суммируема по t, то для почти всех t

$$n\int_t^{t+\frac{1}{n}}K(s,\ \tau)\,d\tau\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}K(s,\ t). \tag{13}$$

Но так как $K(s,\ t)$ поверхностно измерима, то измерим и интеграл из формулы (13) как функция от s и t. А тогда соотношение (13) имеет место почти всюду в квадрате $a\leqslant s,\ t\leqslant b$, в частности, при каждом t, не принадлежащем некоторому исключительному мно-

жеству T меры 0, и для почти всех s. Теперь из (12) и (13) сразу следует, что

$$\int_a^b |K(s, t)|\, ds \leqslant \|U\|_b \qquad \text{при } t \overline{\in} T,$$

откуда $C_1 \leqslant \|U\|_b$.

b) Достаточность условия получается из следующей оценки:

$$\|y\| = \int_a^b \left| \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt \right| ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \int_a^b |K(s, t)|\, |x(t)|\, ds\, dt = \int_a^b |x(t)| \left(\int_a^b |K(s, t)|\, ds \right) dt \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \|x\|,$$

т. е. $U \in H_b^b$. При этом доказано, что $C_1 = \|U\|_b$.

3.2. Отображение L в L^p $(p > 1)$.

3.21. Теорема. *Общий вид операций $y = U(x)$ класса $H_t^t = H_0^0 = H_b^b$, отображающих L в L^p $(p > 1)$, даётся формулой* (5), *где $K(s, t)$ поверхностно измерима и*

$$C = \operatorname{vrai\,max}_t \int_a^b |K(s, t)|^p\, ds < +\infty. \tag{14}$$

При этом $C^{\frac{1}{p}} = \|U\|_b$.

Доказательство. Пусть условие (14) выполнено. Тогда

$$\|y\| = \left\{ \int_a^b \left| \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt \right|^p ds \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \left[\int_a^b |K(s, t)|^p\, |x(t)|^p\, ds \right]^{\frac{1}{p}} dt^{*)} \leqslant C^{\frac{1}{p}} \int_a^b |x(t)|\, dt = C^{\frac{1}{p}} \|x\|.$$

Таким образом, $U \in H_b^b$ и

$$\|U\|_b \leqslant C^{\frac{1}{p}}. \tag{15}$$

---

*) Мы используем здесь следующее неравенство:

$$\left[\int_a^b \left| \int_c^d \varphi(s, t)\, dt \right|^p ds \right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_c^d \left[\int_a^b |\varphi(s, t)|^p\, ds \right]^{\frac{1}{p}} dt,$$

где $\varphi(s, t)$ — поверхностно измеримая функция $(a \leqslant s \leqslant b,\ c \leqslant t \leqslant d)$ и $p > 1$. См. Харди, Литтльвуд и Полиа [1], стр. 179, неравенство 202.

Пусть, обратно, дана операция $U \in H_0^0 = H_b^b$. Тогда U представима по формуле (1), где $g(t)$ удовлетворяет по норме условию Липшица (см. 3.11). Значения $g(t)$ принадлежат L^p. Таким образом, $g(t)$ представляется в виде функции $L(s, t)$, причём:

1) $L(s, t)$ принадлежит L^p при фиксированном t;

2) $\int\limits_a^b |L(s, t_2) - L(s, t_1)|^p \, ds \leqslant [\|U\|_b]^p |t_2 - t_1|^p$.

Возьмём произвольные точки $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Тогда

$$\int\limits_a^b \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|L(s, t_{i+1}) - L(s, t_i)|^p}{(t_{i+1} - t_i)^{p-1}} \right\} ds \leqslant [\|U\|_b]^p \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i = \\ = [\|U\|_b]^p (b - a). \quad (16)$$

Пользуясь этим неравенством и тем, что при добавлении новых точек деления сумма, стоящая под знаком интеграла, которую мы обозначим через v, не уменьшается, нетрудно показать, что если рассмотреть все разбиения, для которых $t_1, \ldots, t_{n-1}$ — рациональные точки, то можно указать такое множество S меры 0, что при каждом $s \overline{\in} S$ все суммы v, составленные по указанным «рациональным» разбиениям, в совокупности ограничены. Отсюда следует, что $L(s, t)$ при каждом $s \overline{\in} S$ равномерно непрерывна вдоль множества рациональных точек t из отрезка $[a, b]$ (включая и концы отрезка). Тогда можно для любого t положить

$$L^*(s, t) = \lim_{t_k \to t} L(s, t_k),$$

где t_k — рациональны, а $s \overline{\in} S$. Но благодаря непрерывности функции $g(t)$

$$L(s, t) = \lim_{t_k \to t} L(s, t_k) \text{ при почти всех } s,$$

а потому при каждом t

$$L^*(s, t) = L(s, t) \text{ почти всюду},$$

т. е. $L^*(s, t)$ является изображением абстрактной функции $g(t)$.

Так как $L^*(s, t)$ непрерывна по t при $s \overline{\in} S$, то, из упомянутой выше ограниченности сумм v, составленных по рациональным разбиениям, следует, что $L^*(s, t)$ принадлежит классу v^p при каждом $s \overline{\in} S$ (см. 2.64 гл. VI), а тогда, по 2.69 гл. VI,

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|L^*(s, t_{i+1}) - L^*(s, t_i)|^p}{(t_{i+1} - t_i)^{p-1}} \right\}^{\frac{1}{p}} \to (p)\text{-}\operatorname*{var}_{a \leqslant t \leqslant b} L^*(s, t)$$

при $\max(t_{i+1}-t_i) \to 0$. Поэтому, беря рациональные t_i и переходя к пределу в неравенстве (16), мы получим:

$$\int_a^b (p)\text{-var}_t L^*(s, t)\, ds \leqslant [\|U\|_b]^p (b-a).$$

Для почти всех s $K(s, t) = \frac{d}{dt} L^*(s, t)$ принадлежит L^p. Аналогично тому, как это сделано в 3.13, можно доопределить $K(s, t)$ во всём квадрате $a \leqslant s, t \leqslant b$. При этом $L^*(s, t)$, будучи измеримой по s и непрерывной по t, поверхностно измерима, а тогда и $K(s, t)$ поверхностно измерима. Кроме того, из условия 2) мы сразу получаем, что для почти всех t

$$\int_a^b |K(s, t)|^p\, ds \leqslant [\|U\|_b]^p. \tag{17}$$

Остаётся доказать равенство (5). Пусть сначала $x(t)$ — функция, ограниченная почти всюду. Благодаря интегральному представлению (1) для $y = U(x)$ имеем:

$$y(s) = \lim \sum_i \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} x(t)\, dt \cdot \Delta L^*(s, t_i),$$

где предел следует понимать в смысле (t)-сходимости в пространстве L^p. Но тогда можно выбрать последовательность разбиений отрезка $[a, b]$

$$a = t_0^{(k)} < t_1^{(k)} < \ldots < t_{n_k}^{(k)} = b$$

так, что $\max \Delta t_i^{(k)} \longrightarrow 0$ и что

$$y(s) = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=0}^{n_k - 1} \frac{1}{\Delta t_i^{(k)}} \int_{t_i^{(k)}}^{t_{i+1}^{(k)}} x(t)\, dt \cdot \Delta L^*(s, t_i^{(k)})$$

уже в смысле (o)-сходимости в L^p.

Теперь сумма, стоящая в правой части, стремится к $y(s)$ для почти всех s. Повторяя рассуждение из 2.32, мы легко получим для почти всех s

$$y(s) = \int_a^b x(t) K(s, t)\, dt.$$

Таким образом, формула (5) установлена для ограниченных x. Но так как $U \in H_0^0$ и интеграл (5) также изображает операцию этого класса, а множество ограниченных функций плотно в L, то равенство (5) верно для любого $x \in L$.

Попутно, сопоставляя неравенства (15) и (17), мы получаем равенство $\|U\|_b = C^{\frac{1}{p}}$.

3.3. Операции класса H_0^0 в пространстве L^p ($p > 1$). Введём некоторые определения. Пусть Y — KB-пространство, $y_1, \ldots, y_n \in Y$. Положим

$$\rho_p(y_1, \ldots, y_n) = \sup_{\sum_k |\xi_k|^p = 1} \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k y_k \right\|.$$

Из неравенства Гёльдера легко следует, что если Y — пространство вещественных чисел, то

$$\rho_p(y_1, \ldots, y_n) = \left[\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right]^{\frac{1}{q}}, \quad \text{где } q = \frac{p}{p-1} \text{ *)}.$$

Пусть теперь $g(t)$ — абстрактная функция со значениями в Y. Будем говорить, что эта функция принадлежит классу A_p^*, если

$$R_p = \sup_{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b} \rho_p \left[\frac{|\Delta g(t_0)|}{(\Delta t_0)^{\frac{1}{p}}}, \ldots, \frac{|\Delta g(t_{n-1})|}{(\Delta t_{n-1})^{\frac{1}{p}}}\right] < \infty.$$

3.31. Теорема. *Общий вид операций $y = U(x)$ класса H_0^0, отображающих L^p в KB-пространство Y, даётся интегралом Хеллингера* (1), *где функция $g(t)$ принадлежит классу A_p^*.*

При этом $\|U\|_b = R_p$.

Доказательство. Пусть $U \in H_0^0$ в L^p. Тогда $U \in H_0^0$ в M. Следовательно, по 2.31, $U(x)$ для $x \in M$ представима по формуле (1), где $g(t)$ абсолютно (t)-непрерывна.

Для произвольного $x \in L^p$ любая сумма Хеллингера σ может быть представлена как интеграл Хеллингера для некоторой ступенчатой функции $x(t)$, причём $x_\sigma \xrightarrow{(b)} x$, когда $\max(\Delta t_i) \to 0$ (см. 2.65 и 2.69 гл. VI). Но тогда $U(x_\sigma) \xrightarrow{(b)} U(x)$, т. е. существует предел сумм Хеллингера и, таким образом,

$$U(x) = \int_a^b \frac{df(t)}{dt} \frac{dg(t)}{dt}.$$

---

*) См. Харди, Литтльвуд и Полиа [1], предложение 15 (стр. 40).

Докажем, что $g(t)$ принадлежит классу $\overset{*}{A}_p$. Для этого рассмотрим операцию $|U|$, которая также принадлежит классу $H_0^0 \subset H_t^t = H_b^b$. Для $x \in M$ она также представима в виде

$$|U|(x) = \int_a^b \frac{df(t)\,dg^*(t)}{dt}.$$

При этом для любых $t_1 < t_2$

$$|g(t_2) - g(t_1)| \leqslant g^*(t_2) - g^*(t_1).$$

Пусть $x(t)$ — ступенчатая функция, определяемая следующим образом:

$$x(t) = \xi_i (\Delta t_i)^{-\frac{1}{p}} \quad \text{при} \quad t_i < t < t_{i+1} \ (a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b).$$

Так как $\| \, |U|(x) \| \leqslant \| \, |U| \, \|_b \, \|x\|$, то

$$\| \, |U|(x) \| = \left\| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta f(t_i)\,\Delta g^*(t_i)}{\Delta t_i} \right\| = \left\| \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (\Delta t_i)^{-\frac{1}{p}} \Delta g^*(t_i) \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta g^*(t_i)}{(\Delta t_i)^{\frac{1}{p}}} \xi_i \right\| \leqslant \| \, |U| \, \|_b \|x\| = \| \, |U| \, \|_b \left[\sum_{i=0}^{n-1} |\xi_i|^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Так как числа ξ_i произвольны, то отсюда следует, что

$$\rho_p \left[\frac{\Delta g^*(t_0)}{(\Delta t_0)^{\frac{1}{p}}}, \ldots, \frac{\Delta g^*(t_{n-1})}{(\Delta t_{n-1})^{\frac{1}{p}}} \right] \leqslant \| \, |U| \, \|_b.$$

А тогда и $R_p \leqslant \| \, |U| \, \|_b = \|U\|_v$.

Пусть, обратно, дана функция $g(t)$, удовлетворяющая условию теоремы. Докажем, что интеграл (1) существует для любого $x \in L^p$. С этой целью составим для произвольного $x \in L^p$ две суммы Хеллингера σ_1 и σ_2. Каждая из них представима в виде

$$\sigma_j = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta f_j(t_i^{(j)})\,\Delta g(t_i^{(j)})}{\Delta t_i^{(j)}} \qquad (j = 1, 2),$$

где функция $f_j(t)$ кусочно-линейна, причём $f_j(t_i^{(j)}) = f(t_i^{(j)})$. Объединяя точки деления $t_i^{(j)}$ в одно множество и обозначая их через t_i,

и, вводя число $q=\frac{p}{p-1}$, мы можем оценить разность $\sigma_1-\sigma_2$ следующим образом:

$$\|\sigma_1-\sigma_2\|=\left\|\sum_i \frac{|\Delta(f_1-f_2)(t_i)\,\Delta g(t_i)|}{(\Delta t_i)^{\frac{1}{p}}(\Delta t_i)^{\frac{1}{q}}}\right\|\leqslant$$

$$\leqslant \rho_p\left[\frac{\Delta g(t_0)}{(\Delta t_0)^{\frac{1}{p}}},\ldots,\frac{\Delta g(t_{n-1})}{(\Delta t_{n-1})^{\frac{1}{p}}}\right]\left\{\sum_i \frac{|\Delta(f_1-f_2)(t_i)|^p}{(\Delta t_i)^{\frac{p}{q}}}\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant R_p\cdot(p)\text{-var}(f_1-f_2).$$

Если $\max(\Delta t_i)\to 0$, то $(p)\text{-var}(f_1-f_2)\longrightarrow 0$ (см. 2.69 гл. VI). Следовательно, интеграл Хеллингера (1) существует. Докажем, что он выражает операцию класса H_0^0. Для этого воспользуемся признаком 2.61 гл. VII.

Рассмотрим комплекс элементов пространства L^p, состоящий из ступенчатых функций: $x_1(t),\ldots,x_k(t)$. Рассуждая так же, как и выше, мы получим следующую оценку нормы комплекса:

$$\left\|\int_a^b \frac{df_1(t)\,dg(t)}{dt},\ldots,\int_a^b \frac{df_k(t)\,dg(t)}{dt}\right\|^{*)}=$$

$$=\left\|\sum_i \frac{\Delta f_1(t_i)\Delta g(t_i)}{\Delta t_i},\ldots,\sum_i \frac{\Delta f_k(t_i)\,\Delta g(t_i)}{\Delta t_i}\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_i\left\|\frac{\max\limits_j|\Delta f_j(t_i)|\cdot|\Delta g(t_i)|}{(\Delta t_i)^{\frac{1}{q}}(\Delta t_i)^{\frac{1}{p}}}\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\rho_p\left[\frac{|\Delta g(t_0)|}{(\Delta t_0)^{\frac{1}{p}}},\ldots,\frac{|\Delta g(t_{n-1})|}{(\Delta t_{n-1})^{\frac{1}{p}}}\right]\left\{\sum_i\frac{\max\limits_j|\Delta f_j(t_i)|^p}{(\Delta t_i)^{\frac{p}{q}}}\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant R_p\|x_1,\ldots,x_k\|_{L_p}.$$

Так как норма комплекса — непрерывная функция его элементов, то переходом к пределу мы получим то же неравенство для комплекса, составленного из любых элементов пространства L^p. Значит, интеграл (1) представляет операцию класса H_0^0 и $\|U\|_v\leqslant R_p$. Сопо-

---

*) $f_j(t)=\int_a^t x_j(\tau)\,d\tau\quad(j=1,\ldots,k)$.

ставляя с полученным выше противоположным неравенством, мы видим, что $\|U\|_v = R_p$.

3.32. Общий вид (o)-линейных (а вместе с тем и (b)-линейных) функционалов в L^p даётся интегралом Лебега

$$F(x) = \int_a^b x(t)\psi(t)\,dt,$$

где $\psi \in L^q$ и $\|F\| = \|\psi\|_{L_q}$ $\left(q = \frac{p}{p-1}\right)$.

Доказательство. Применим теорему 3.31 к случаю функционалов. Тогда абстрактная функция $g(t)$ класса A_p^* превращается в вещественную функцию класса V^q. Следовательно,

$$g(t) = g(a) + \int_a^t \psi(\tau)\,d\tau,$$

где $\psi \in L^q$ (2.65 гл. VI). Повторяя рассуждение из 3.12, мы легко покажем, что

$$F(x) = \int_a^b \frac{df(t)\,dg(t)}{dt} = \int_a^b x(t)\psi(t)\,dt.$$

Кроме того,

$$\|F\| = R_p = (q)\text{-var}\, g(t) = \left[\int_a^b |\psi(t)|^q\,dt\right]^{\frac{1}{q}} = \|\psi\|_{L^q}.$$

Отметим, что для абстрактных функций класса A_p^* может быть построена теория ортогональных разложений по типу теории рядов Фурье для функций из L^2.

§ 4. Операции в пространстве C

Как известно, C не является K-пространством; но C — KB-линеал, поэтому в C имеет смысл класс H_b^o (если Y — произвольное K-пространство) *).

Введём понятие существенного изменения функции (ess var $g(t)$). Мы будем понимать под этим изменение данной функции $g(t)$, «исправленной» в точках разрыва, а именно, если перед вычислением изменения положить во всех внутренних точках разрыва

$$g(t) = g(t-0) \quad \text{или} \quad g(t) = g(t+0),$$

*) В пункте 2.54 гл. VII установлено, что если $X = C$, а Y — K^+-пространство, то $H_b^o = H_r$.

т. е. считать, что в каждой внутренней точке $g(t)$ непрерывна хотя бы с одной стороны.

Для вещественных функций при определении существенного изменения достаточно считать, что $g(t)$ в каждой внутренней точке заключено между $g(t-0)$ и $g(t+0)$.

Иначе, если K-пространство, которому принадлежат значения функции $g(t)$, — счетного типа, то существенное изменение можно определить по формуле

$$\operatorname*{ess\,var}_{a\leqslant t\leqslant b} g(t) = \sup \sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)|,$$

где $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ и $t_1, \ldots, t_{n-1}$ — точки непрерывности функции $g(t)$ (см. 2.27).

4.1. Общая теорема об операциях класса H_b^0.

4.11. Теорема. *Общий вид операций $y = U(x)$ класса H_b^0, отображающих C в K^+-пространство Y счётного типа, даётся интегралом Стилтьеса*

$$U(x) = \int_a^b x(t)\, dg(t), \tag{1}$$

где $g(t)$ — абстрактная функция ограниченного изменения со значениями в Y).*

При этом абстрактная норма

$$|U| = \operatorname{ess\,var} g(t). \tag{2}$$

В частности, эта теорема верна для (b)-линейных функционалов в C.

Доказательство. Существование интеграла Стилтьеса (1) в случае, когда $x(t)$ непрерывна, а $g(t)$ — ограниченного изменения, доказывается обычным способом и мы не будем повторять это доказательство. При этом для интегральной суммы мы имеем:

$$\left|\sum_i x(t_i)\,\Delta g(t_i)\right| \leqslant \sum_i |\Delta g(t_i)|\,\|x\| \leqslant \|x\| \operatorname*{var}_a^b g,$$

а тогда и

$$\left|\int_a^b x(t)\, dg(t)\right| \leqslant \|x\| \operatorname*{var}_a^b g.$$

---

*) Интеграл следует понимать как предел интегральных сумм в смысле (ρ)-сходимости в Y.

Но если существование интеграла уже известно, то для его вычисления достаточно рассматривать те суммы Стилтьеса, для которых все t_i — точки непрерывности функции $g(t)$. А тогда таким же путём мы приходим к неравенству

$$\left|\int_a^b x(t)\,dg(t)\right| \leqslant \|x\| \operatorname*{ess\,var}_a^b g.$$

Так как аддитивность интеграла очевидна, то, значит, интеграл (1) представляет операцию класса H_b^0 и при этом

$$\|U\| \leqslant \operatorname{ess\,var} g. \tag{3}$$

Пусть, обратно, дана операция $U \in H_b^0$. По теореме о распространении операций, доказываемой в следующей главе (1.22 гл. IX), операция U продолжима на M с сохранением своего класса и абстрактной нормы. Положим

$$g(t) = U(x_t),$$

где x_t определяется по формуле (10) § 2 (см. 2.31). Покажем, что $g(t)$ — функция ограниченного изменения.

Действительно, для любого разбиения отрезка $[a, b]$

$$\sum_i |g(t_{i+1}) - g(t_i)| = \sum_i |U(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_i |U|(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) = |U|(\mathbf{1}) = \||U|\| = \|U\|$$

(см. 2.86 гл. VII); таким образом,

$$\operatorname*{var}_a^b g(t) \leqslant \|U\|. \tag{4}$$

Теперь для любого $x \in C$ положим

$$\bar{x}_n = \sum_{i=0}^{n-1} x(\tau_i)(x_{\tau_{i+1}} - x_{\tau_i}),$$

где

$$\tau_i = a + \frac{i}{n}(b-a) \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Тогда $\bar{x}_n \in M$ и $\bar{x}_n \xrightarrow{(b)} x$. Поэтому

$$U(\bar{x}_n) \xrightarrow{(o)} U(x).$$

Но

$$U(\bar{x}_n) = \sum_{i=0}^{n-1} x(\tau_i)[g(\tau_{i+1}) - g(\tau_i)] \to \int_a^b x(t)\,dg(t)$$

(существование интеграла обеспечено), а потому

$$U(x) = \int_a^b x(t)\,dg(t).$$

Сопоставляя неравенства (3) и (4), мы заключаем, что

$$\|U\| = \operatorname*{var}_a^b g(t) = \operatorname*{ess\,var}_a^a g(t).$$

Но это установлено лишь для функции $g(t)$, построенной специальным образом.

Пусть операция $U(x)$ представлена в виде интеграла (1) с какой-нибудь другой функцией $\bar{g}(t)$ (тоже ограниченного изменения), причём $\bar{g}(a) = 0$. Тогда

$$\int_a^b x(t)\,d\,[g(t) - \bar{g}(t)] = 0$$

для любого $x \in C$. Легко видеть, что это возможно, только если $g(t) = \bar{g}(t)$ во всех точках одновременной непрерывности функций $g(t)$ и $\bar{g}(t)$. А тогда

$$\operatorname*{ess\,var}_a^b \bar{g}(t) = \operatorname*{ess\,var}_a^b g(t).$$

Теорема полностью доказана.

4.12. Применим полученный результат к случаю, когда $Y = L^p$ $(p \geqslant 1)$. Согласно 2.27 множество точек разрыва функции $g(t)$ не более чем счётно. Повторяя рассуждение из пункта 2.33, мы построим функцию $G(s, t)$, обладающую следующими свойствами:

a) $G(s, t)$ принадлежит L^p при любом t;

b) $G(s, t)$ ограниченного изменения по t при любом s;

c) $[g(t)](s) = G(s, t)$ в тех точках t, где $g(t)$ непрерывна, а также при $t = a$ и $t = b$.

Так как при составлении интегральных сумм Стилтьеса можно ограничиться теми разбиениями, для которых $t_1, \ldots, t_{n-1}$ — точки непрерывности функции $g(t)$, то

$$\int_a^b x(t)\,dg(t)$$

представляется как предел в смысле (o)-сходимости в L^p суммы

$$\sum_i x(t_i)\,\Delta G(s, t_i).$$

Но из b) следует, что интеграл

$$\int_a^b x(t)\, d_t\, G(s,\ t)$$

существует при всех s, а тогда

$$\left[\int_a^b x(t)\, dg(t)\right](s) = \int_a^b x(t)\, d_t\, G(s,\ t).$$

Кроме того, $\operatorname{var} g(t) < +\infty$, а тогда при указанном в 2.33 построении функции $G(s,\ t)$

$$K = \int_a^b [\operatorname{var}_t G(s,\ t)]^p\, ds < +\infty.$$

Теперь можно сформулировать следующий результат.

4.13. Общий вид операций $y = U(x)$ класса H_b^0, отображающих C в $L^p (p \geqslant 1)$, даётся интегралом Стилтьеса

$$y(s) = \int_a^b x(t)\, d_t G(s,\ t), \tag{5}$$

где:

a) $G(s, t)$ принадлежит L^p при любом t;

b) $G(s, t)$ — ограниченного изменения по t при любом s;

c) $\int_a^b [\operatorname{var}_t G(s, t)]^p\, ds < +\infty.$

Возможность представления любой операции класса H_b^0 в указанной форме доказана в 4.12.

Обратно, если дана операция (5), удовлетворяющая всем перечисленным условиям, то она представляет измеримую функцию от s для любого $x \in C$. Это вытекает сразу из условия a), если представить интеграл как предел интегральных сумм. Кроме того, для любого $x \in C$

$$|\, y(s)\, | \leqslant \operatorname{var}_t G(s,\ t)\, \|\, x\, \|\,.$$

Следовательно, благодаря условию c) $y \in L^p$, а

$$\|U\| \leqslant y^*, \quad \text{где } y^*(s) = \operatorname{var}_t G(s, t).$$

Таким образом, предложение 4.13 доказано.

§ 5. Операции в дискретных пространствах

5.1. Операции, заданные в дискретных пространствах. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда X — дискретное K-пространство с единицей, в котором не более чем счётное множество ортов $\{e_n\}$. Именно к этому типу принадлежат все встречавшиеся ранее конкретные дискретные пространства. В этом случае

$$\mathbf{1} = \mathbf{S} e_n \quad \text{или} \quad \mathbf{1} = \sum e_n,$$

где сумма ряда понимается в смысле (o)-сходимости. Для произвольного x имеем:

$$x = \sum \alpha_n e_n,$$

где $\alpha_n = (x)_{e_n}$ — составляющая элемента x по орту e_n, т. е. $(e_n)x = \alpha_n e_n$ (см. 5.22 гл. III).

5.11. Пусть $\varphi(e)$ — аддитивная функция, заданная на базе $\mathfrak{E}(X)$, и $\varphi(e_n) = y_n$. Для того чтобы эта функция была ограничена, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_n |y_n| < +\infty. \tag{1}$$

Доказательство. Достаточность этого условия очевидна. Обратно, если $\varphi(e)$ — ограниченная функция, то существует аддитивная функция $|\varphi|(e)$, причём $|\varphi(e)| \leqslant |\varphi|(e)$. В частности, $|y_n| \leqslant |\varphi|(e_n)$, откуда при любом k

$$\sum_1^k |y_n| \leqslant \sum_1^k |\varphi|(e_n) = |\varphi|\left(\sum_1^k e_n\right) \leqslant |\varphi|(\mathbf{1}).$$

Замечание. Из определения функций φ_+, φ_-, $|\varphi|$ (см. 1.13) видно, что

$$\varphi_+(e_n) = (y_n)_+, \quad \varphi_-(e_n) = (y_n)_-, \quad |\varphi|(e_n) = |y_n|.$$

Рассмотрим теперь операцию $y = U(x)$, отображающую X в произвольное K-пространство Y, и положим $y_n = U(e_n)$. Если $U \in H_o^o$, то для любого $x = \sum \alpha_n e_n$

$$U(x) = U\left(\sum \alpha_n e_n\right) = \sum \alpha_n U(e_n) = \sum \alpha_n y_n.$$

5.12. Теорема. *Если X состоит из ограниченных элементов, то общий вид операций $y = U(x)$ класса $H_o^o \cap H_r$ даётся формулой*

$$U(x) = \sum_n \alpha_n y_n, \tag{2}$$

где y_n удовлетворяют условию (1).

Доказательство. Необходимость условия (1) уже установлена выше (5.11). Пусть, обратно, дана операция (2) и выполнено условие (1). Положим $\varphi(e) = U(e)$, т. е. $\varphi\left(\sum_i e_{n_i}\right) = \sum_i y_{n_i}$ для любого набора индексов n_i. Тогда $\varphi(e)$ (oo)-непрерывна, аддитивна и ограничена. Следовательно, существует операция $V(x)$ класса $H_o^o \cap H_r$, заданная во всём X по интегральной формуле

$$V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\varphi(e_\lambda^x)$$

(см. 1.33). Напомним, что существование этого интеграла для любого элемента x из K-пространства ограниченных элементов доказано в 1.17. Операции $U(x)$ и $V(x)$ совпадают на базе $\mathfrak{E}(X)$. Так как для любого $x \in X$ все $|\alpha_n| \leqslant \|x\|$, то (o)-сходимость ряда (2) обеспечена благодаря (1). А тогда для любого $x \in X$ благодаря непрерывности операции V, имеем:

$$U(x) = \sum \alpha_n y_n = \sum \alpha_n V(e_n) = V(x),$$

т. е. $U \in H_0^0 \cap H_r$.

Если отказаться от требования ограниченности всех элементов пространства X, то формулировка предыдущей теоремы изменится следующим образом.

5.13. Теорема. *Общий вид операций $y = U(x)$ класса $H_0^0 \cap H_r$ даётся формулой* (2), *причем ряд* (2) *должен абсолютно сходиться для любого $x \in X$.* (X предполагается любым дискретным K-пространством счётного типа с единицей).

Доказательство. Если $U \in H_0^0 \cap H_r$, то существует $|U|$ того же класса, причём $|U|(e_n) = |y_n|$ (см. замечание к 1.33). А тогда для любого x

$$|U|(|x|) = \sum_n |\alpha_n| |y_n|,$$

откуда и следует абсолютная сходимость ряда (2).

Обратно, пусть условие абсолютной сходимости выполнено. Положим для любого $e \in \mathfrak{E}(X)$

$$\varphi(e) = \sum y_{n_i},$$

где суммирование распространяется на индексы n_i, входящие в разложение $e = \sum e_{n_i}$. Ясно, что $\varphi(e)$ — ограниченная, аддитивная и (oo)-непрерывная функция, а $|\varphi|(e_n) = |y_n|$.

Возьмём любой $x \in X (x = \sum \alpha_n e_n)$ и составим для него интегральную сумму

$$\sigma = \sum \lambda_k |\varphi| (e^x_{\lambda_k} - e^x_{\lambda_{k-1}}).$$

При этом для любого λ можно считать, что

$$e^x_\lambda = \sum_i e_{n_i},$$

где суммирование распространяется на те индексы n_i, для которых $\alpha_{n_i} \leqslant \lambda$. Если положить $\tilde{\lambda} = \sup(\lambda_k - \lambda_{k-1})$, то мы получим:

$$\sigma = \sum_k \lambda_k |\varphi| \Big(\sum_{\lambda_{k-1} < \alpha_n \leqslant \lambda_k} e_n \Big) = \sum_k \lambda_k \sum_{\lambda_{k-1} < \alpha_n \leqslant \lambda_k} |y_n| =$$

$$= \sum_k \sum_{\lambda_{k-1} < \alpha_n \leqslant \lambda_k} (\alpha_n + \theta_n \tilde{\lambda}) |y_n| = \sum_n (\alpha_n + \theta_n \tilde{\lambda}) |y_n|,$$

где $0 \leqslant \theta_n < 1$.

Теперь из абсолютной сходимости ряда (2) и условия (1) вытекает, что сумма σ имеет смысл, а тогда интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\,|\varphi|\,(e_\lambda^x)$ существует (см. 1.21). Тогда по 1.33 существует и интеграл

$$V(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\varphi\,(e_\lambda^x)$$

и изображает операцию класса $H_o^o \cap H_r$.

Совпадение $U(x)$ с $V(x)$ устанавливается так же, как в 5.12. Теорема доказана *).

Приведём один простой результат для KB-пространств.

5.14. Пусть X — дискретное KB-пространство с единицей с аддитивной нормой **), а Y — произвольное KB-пространство. Тогда для абсолютной сходимости ряда (2) для любого $x \in X$ необходимо и достаточно, чтобы

$$C = \sup_n \frac{\|y_n\|_Y}{\|e_n\|_X} < +\infty.$$

При этом, если под U понимать операцию, определяемую рядом (2), то

$$\|U\|_b = \|U\|_v = C.$$

Доказательство. Для каждого n

$$\|y_n\| \leqslant \|U\|_b \|e_n\|,$$

откуда $C \leqslant \|U\|_b$. Обратно,

$$\|U(x)\| = \|\sum_n \alpha_n y_n\| \leqslant C \sum_n |\alpha_n| \|e_n\| = C\|x\|,$$

откуда и следует, что $U \in H_b^b = H_t^t = H_o^o$ и что $C = \|U\|_b = \|U\|_v$ (см. 2.62 гл. VII).

5.2. Операции, заданные в l^p. Рассмотрим конкретный случай, когда $X = l^p$ $(p \geqslant 1)$ (см. 2.12c) гл. VI), а Y — произвольное KB-пространство.

Если $p = 1$, то можно применить 5.13 и 5.14. За единицу в l можно выбрать любой элемент $\{\alpha_k\}$, для которого $\alpha_k > 0$ (и $\sum\limits_1^\infty \alpha_k < \infty$).

В частности, для (b)-линейных функционалов в l $(H_b^b = H_o^o)$ мы получим представление

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k y_k \qquad (x = \{\xi_k\}),$$

*) Предоставляем читателю провести доказательство этой теоремы без ссылки на общие результаты § 1.

**) Легко видеть, что такое K-пространство — счётного типа.

где числа y_k должны быть в совокупности ограничены (т. е. $\{y_k\} \in m$). При этом $\|F\| = \sup |y_k|$.

Действительно, $y_k = F(\alpha_k^{-1} e_k)$ $(e_k = \{0, \ldots, 0, \alpha_k, 0, \ldots\})$. Тогда условие 5.14 принимает вид

$$\sup \frac{|\alpha_k y_k|}{\|e_k\|} = \sup |y_k| = \|F\| < +\infty.$$

5.21. Пусть теперь $p > 1$, а $\mathbf{1}_{l^p} = \{\alpha_k\}$ $\left(\sum_k |\alpha_k|^p < \infty\right)$. Общий вид операций $y = U(x)$ класса H_0^0, отображающих l^p в произвольное KB-пространство Y, даётся формулой

$$U(x) = \sum_n \xi_n y_n \qquad (x = \{\xi_n\}). \tag{3}$$

Положим

$$C = \rho_p(|y_1|, \ldots, |y_n|, \ldots) = \\ = (o)\text{-}\lim_{n \to \infty} \rho_p(|y_1|, \ldots, |y_n|) < +\infty\ ^{*)}. \tag{4}$$

Тогда $\|U\|_v = C$.

Доказательство. Обозначим через f_n элемент из l^p, у которого n-я координата равна 1, а все остальные равны 0. Тогда каждый $x = \{\xi_n\}$ можно представить в виде

$$x = \sum_n \xi_n f_n.$$

Пусть $U \in H_0^0$; если $y_n = U(f_n)$, то

$$U(x) = \sum \xi_n y_n,$$

т. е. U представима по формуле (3).

Легко видеть, что $|U|(f_n) = |y_n|$, следовательно,

$$|U|(x) = \sum_n \xi_n |y_n|.$$

Для любого n

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k |y_k|\right\| \leqslant \||U|\|_b \quad \text{при} \quad \sum_1^n |\xi_k|^p = 1,$$

следовательно, $\rho_p(|y_1|, \ldots, |y_n|) \leqslant \||U|\|_b$, а тогда и $C \leqslant \||U|\|_b$. С другой стороны,

$$\||U|\|_b = \sup_{\sum_1^\infty |\xi_n|^p = 1} \left\|\sum_1^\infty \xi_n |y_n|\right\|,$$

а тогда ясно, что $C = \||U|\|_b = \|U\|_v < +\infty$.

---

*) Определение ρ_p см. в п°. 3.3.

Пусть, обратно, дана операция (3), удовлетворяющая условию (4). Согласно 5.13, достаточно проверить абсолютную сходимость ряда (3) для любого $x \in l^p$ (или только для x из единичной сферы). Имеем при $\|x\| \leqslant 1$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| |y_k| \right\| \leqslant \rho_p(|y_1|, \ldots, |y_n|) \leqslant C.$$

Так как суммы $\sum_{k=1}^{n} |\xi_k| |y_k|$ образуют монотонную последовательность при возрастании n, то из ограниченности норм по свойствам KB-пространств вытекает (o)-сходимость ряда $\sum_{1}^{\infty} |\xi_n| |y_n|$ (см. 2.41 гл. VI, свойство VI нормы).

Таким образом, наше утверждение доказано.

Замечание. Применяя доказанное предложение к случаю функционалов, мы легко найдём, что общее выражение (b)-(и одновременно (o)-)-линейных функционалов в l^p $(p > 1)$ даётся формулой

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n y_n,$$

где последовательность чисел $\{y_n\} \in l^q$ $\left(q = \frac{p}{p-1}\right)$ и при этом

$$\|F\| = \left[\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right]^{\frac{1}{q}}.$$

5.22. Рассмотрим в качестве другого примера случай, когда $X = Y = l^2$. Тогда $y_n \in l^2$, и, как элемент из l^2, имеет вид: $y_n = \{a_{in}\}_i$, где $\sum_{i=1}^{\infty} a_{in}^2 < +\infty$. Следовательно,

$$\lambda_n = \rho_2(|y_1|, \ldots, |y_n|) = \sup_{\sum_1 \xi_k^2 = 1} \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k |y_k| \right\| =$$

$$= \sup \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \xi_k\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sup \left[\sum_{k,l=1}^{n} \xi_k \xi_l \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ik} a_{il}|\right]^{\frac{1}{2}} = \sup \left[\sum_{k,l=1}^{n} h_{kl} \xi_k \xi_l\right]^{\frac{1}{2}},$$

где

$$h_{kl} = \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ik} a_{il}|.$$

По 5.21 числа λ_n должны быть ограничены в совокупности. Так как квадратичные формы $\sum_{k,l=1}^{n} h_{kl}\xi_k\xi_l$ положительны, то предыдущее условие равносильно ограниченности в совокупности характеристических чисел этих квадратичных форм. При этом, если через γ_n обозначить наибольшее характеристическое число квадратичной формы $\sum_{k,l=1}^{n} h_{kl}\xi_k\xi_l$, то $\lambda_n = \sqrt{\gamma_n}$. А тогда из 5.21 следует, что

$$\|U\|_r = \lim \sqrt{\gamma_n}. \tag{5}$$

Итак, общий вид операций $y = U(x)$ класса H_o^o, отображающих l^2 в l^2, даётся формулой

$$y = U(x) = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_i, \ldots\},$$

где

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k \qquad (x = \{\xi_k\}),$$

причём характеристические числа указанных выше квадратичных форм должны быть в совокупности ограничены. При этом норма $\|U\|_r$ определяется по формуле (5).

Совершенно аналогичный результат можно получить для операций класса H_b^b из l^2 в l^2, только в определении чисел h_{kl} не будет знака модуля, т. е. h_{kl} будут иметь вид

$$h_{kl} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}a_{il}.$$

5.23. Приведём теперь пример, показывающий, что класс операций H_t^o может не быть компонентой в H_o^o (см. 2.92 гл. VII, замечание 1°).

Рассмотрим тождественную операцию $U(x) = x$ из l^2 в l^2. Ясно, что $U \in H_o^o$, но $U \overline{\in} H_t^o$, так как (o)-сходимость и (t)-сходимость в l^2 не совпадают. Положим для каждого $x \in l^2$ $(x = \{\xi_k\})$

$$U_n(x) = \{\xi_1, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots\}.$$

Так как значения U_n принадлежат конечномерному подпространству пространства l^2, а в конечномерном подпространстве (t)-сходимость, очевидно, совпадает с (o)-сходимостью, то $U_n \in H_t^o$ при любом n. В то же время U_n образуют монотонную последовательность и при любом $x \in l^2$

$$U_n(x) \xrightarrow{(o)} U(x).$$

Тогда по 1.33 гл. VII $U_n \xrightarrow{(o)} U$. Так как предел последовательности операций из H_t^o не принадлежит в данном случае H_t^o, то H_t^o не может быть компонентой в H_o^o.

5.24. Отметим ещё один частный случай операций класса $H_b^b (= H_t^t)$, используемый в дальнейшем, а именно, рассмотрим операции класса H_b^b, отображающие n-мерное пространство с эвклидовой метрикой

$$\|x\| = \left[\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2\right]^{\frac{1}{2}} \text{ для } x = \{\xi_k\}$$

(такое пространство естественно обозначить l_n^2) в n-мерное пространство l_m^2 с аналогичной метрикой.

Рассуждая так же, как в 5.22, мы легко установим, что общий вид таких операций даётся формулой

$$y = U(x) = \{\eta_1, \ldots, \eta_m\},$$

где

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k \quad (i = 1, \ldots, m;\ x = \{\xi_k\}),$$

причём $\|U\|_b$ равна наибольшему из характеристических чисел квадратичной формы

$$\sum_{k,\, l=1}^{n} h_{kl}\xi_k\xi_l,$$

где

$$h_{kl} = \sum_{i=1}^{m} a_{ik}a_{il}.$$

Легко видеть, что

$$\|U\|_b \leqslant \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Действительно, для любого x

$$\|U(x)\| = \left[\sum_{i=1}^{m} \eta_i^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\right]^{\frac{1}{2}} \|x\|.$$

5.3. Операции со значениями в дискретных пространствах. Пусть теперь Y — дискретное K-пространство с единицей, в котором множество ортов $\{e_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ может иметь какую угодно мощность. Если $y = U(x)$ (X — произвольное K-пространство) — операция одного

из классов H_t^t, H_o^o или H_t^o, то каждая составляющая $[U(x)]_{e_\xi} = \beta_\xi$ — (o)-линейный функционал в X (см. 5.23 гл. III):

$$\beta_\xi = F_\xi(x).$$

Таким образом, операция $U(x)$ представима в виде

$$y = U(x) = \mathop{\mathbf{S}}_{\xi} \{F_\xi(x) e_\xi\}. \tag{6}$$

Если при этом $U \in H_r$, то существует $|U|$. Тогда из определения модуля и из свойств проекций сразу следует, что для $x \geqslant \mathbf{0}$

$$(e_\xi)[|U|(x)] = \sup_{|x'| \leqslant x} (e_\xi)[U(x')] = \sup_{|x'| \leqslant x} F_\xi(x') e_\xi = |F_\xi|(x) e_\xi.$$

Таким образом, для любого $x \in X$

$$|U|(x) = \mathop{\mathbf{S}}_{\xi} \{|F_\xi|(x) e_\xi\}. \tag{7}$$

5.31. Теорема. *Общий вид операций $y = U(x)$ класса $H_0^o \cap H_r$ даётся формулой* (6), *где F_ξ — любые (o)-линейные функционалы в X, для которых множество*

$$\{|F_\xi|(x) e_\xi\}$$

ограничено при любом $x \in X$.

Доказательство. Необходимость условия доказана выше (см. формулу (7)).

Пусть, обратно, условие теоремы выполнено и пусть $x_n \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$. Тогда $|x_n| \leqslant x_0 \in X$ и мы имеем:

$$F_\xi(x_n) \longrightarrow 0 \text{ при всех } \xi \in \Xi,$$

$$\mathop{\mathbf{S}}_{\xi} \{F_\xi(x_n) e_\xi\} \leqslant \mathop{\mathbf{S}}_{\xi} \{|F_\xi|(x_0) e_\xi\}.$$

По 5.23 гл. III отсюда следует, что $U(x_n) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$, т. е. $U \in H_o^o$. При этом имеет смысл и операция, определяемая формулой (7), следовательно, $U \in H_r$.

Пусть теперь X — линейное нормированное пространство, а $U \in H_b^o$. Тогда для $U(x)$ имеет место та же формула (6), в которой F_ξ — (b)-линейные функционалы. Так как верхнюю грань в Y можно вычислять по составляющим (ср. 2.25 гл. III), то

$$\|U\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |U(x)| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \mathop{\mathbf{S}}_{\xi} \{|F_\xi(x)| e_\xi\} = \mathop{\mathbf{S}}_{\xi} \{\|F_\xi\| e_\xi\}.$$

Абстрактная норма имеет смысл во всяком случае, если Y — K^+-пространство (см. 2.82 гл. VII).

5.32. Теорема. *Если X — линейное нормированное пространство, а Y — дискретное K^+-пространство (с единицей), то общий*

вид операций $y = U(x)$ класса H_b^o даётся формулой (6), *где F_ξ — любые (b)-линейные функционалы, для которых множество*

$$\{\|F_\xi\| e_\xi\} \tag{8}$$

ограничено.

Действительно, необходимость условия показана выше, а его достаточность очевидна, так как при его выполнении операция U имеет абстрактную норму.

5.33. Применим доказанный результат к случаю, когда $X = l^q$ $(q > 1)$, $Y = l^p$ $(p \geqslant 1)$. Тогда всякая операция $y = U(x)$, класса H_b^o представляется так же, как в 5.22, по формуле

$$\left.\begin{aligned} &y = U(x) = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_i, \ldots\}, \\ \text{где} \quad &\eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k \quad (x = \{\xi_k\}). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Пусть координаты пространства единицы l^p суть α_k. Тогда координаты любого $y \in l^p$ будут отличаться от соответствующих составляющих коэффициентами α_k. Если положить

$$F_i(x) = \eta_i \alpha_i^{-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

то F_i должны быть (b)-линейными функционалами, а их нормы должны удовлетворять условию теоремы 5.32. Норма $\|F_i\|$ подсчитывается с помощью 5.21:

$$\|F_i\| = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^{\frac{q}{q-1}}\right]^{\frac{q-1}{q}} \alpha_i^{-1}.$$

Так как i-я координата e_i равна α_i, а прочие равны нулю, то ограниченность в l^p множества (8) означает, что

$$C = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^{\frac{q}{q-1}}\right]^{\frac{q-1}{q}p} < +\infty. \tag{10}$$

Таким образом, условие (10) является необходимым и достаточным для того, чтобы операция (9) принадлежала классу H_b^o.

Значение $\|U\|_b^v$ легко находится с помощью 2.88 гл. VII, а именно

$$\|U\|_b^v = \|\|U\|\| = \|\underset{i}{\mathbf{S}}\{\|F_i\| e_i\}\| = C^{\frac{1}{p}},$$

где C определяется по формуле (10).

Для случая $p=q=2$ условие (10) принимает особенно простой вид, а именно:

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}^2 < +\infty.$$

§ 6. Операции со значениями в L^p

6.1. Общие теоремы. Некоторые общие теоремы приобретают довольно простой вид, если конкретизировать пространство значений операции и оставить абстрактным пространство аргумента. Один такой случай мы сейчас и рассмотрим. Нам будет удобнее формулировать наши результаты сначала для пространств V^p, а затем перенести их на L^p. Для простоты мы считаем в дальнейшем, что функции $y(s)$ из V^p $(a \leqslant s \leqslant b)$ удовлетворяют дополнительному условию: $y(a)=0$.

6.11. Введём одно

Определение. Пусть $f(s)$ — абстрактная функция от вещественного аргумента s, значения которой суть функционалы в некотором пространстве X (полуупорядоченном или нормированном). Будем писать аргумент s в виде индекса: f_s. Эта функция называется *слабо абсолютно непрерывной*, если вещественная функция $f_s(x)$ абсолютно непрерывна для каждого $x \in X$. Аналогично f_s — функция с *ограниченным слабым* (p)-*изменением*, если $f_s(x)$ имеет ограниченное (p)-изменение при любом $x \in X$.

6.12. Теорема. *Общий вид операций $y=U(x)$ класса H_b^b, отображающих произвольное пространство X типа (B) в V^p $(p \geqslant 1)$, даётся формулой*

$$y(s)=f_s(x), \tag{1}$$

где f_s $(a \leqslant s \leqslant b)$ — абстрактная функция, значения которой суть (b)-линейные функционалы в X, имеющая ограниченное слабое (p)-изменение. При этом $f_a=0$.

Доказательство. Необходимость условия очевидна (без использования полноты пространства X), так как $y(s)$ при фиксированном s — (b)-линейный функционал в X. Покажем, что если это условие выполнено, то операция (1) принадлежит классу H_b^b. Так как аддитивность и принадлежность значений $U(x)$ пространству V^p очевидны, то достаточно доказать, что множество значений $U(x)$ ограничено по норме в сфере $\|x\| \leqslant 1$ (см. 2.24 гл. VII).

Допустим, что $\|U(x)\|$ принимает сколь угодно большие значения в сфере $\|x\| \leqslant 1$. Тогда $\|U(x)\|$ не ограничена в любой сфере. Действительно, если допустить, что $\|U(x)\| \leqslant M$, в некоторой сфере $S=S(x_0, r)$, состоящей из таких элементов x, что $\|x-x_0\| \leqslant r$, то при $\|x\| \leqslant 1$ имеем:

$$U(x)=U\left(\frac{x'-x_0}{r}\right), \text{ где } x' \in S.$$

А тогда

$$\|U(x)\| \leqslant \frac{1}{r}\left[\|U(x')\|+\|U(x_0)\|\right]^{*)} \leqslant \frac{1}{r}\left[M+\|U(x_0)\|\right],$$

т. е. $U(x)$ ограничена по норме и в единичной сфере.

---

*) Однородность U вытекает из её определения.

Выберем теперь x_1 так, чтобы $\|x_1\| \leqslant 1$, а $\|U(x_1)\| > 1$. По определению нормы в V^p существует такое разбиение $a = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = b$, что

$$\sum_{i=0}^{m-1} \frac{|f_{s_{i+1}}(x_1) - f_{s_i}(x_1)|^p}{(s_{i+1} - s_i)^{p-1}} > 1.$$

Так как все функционалы f_{s_i} (b)-непрерывны, то существует сфера $S_1 = S(x_1, r_1) \subset X$ с центром в x_1 и с радиусом r_1, во всякой точке которой

$$\|U(x)\| \geqslant \sum_{i=0}^{m-1} \frac{|f_{s_{i+1}}(x) - f_{s_i}(x)|^p}{(s_{i+1} - s_i)^{p-1}} > 1.$$

Внутри сферы S_1 выберем точку x_2 так, чтобы $\|U(x_2)\| > 2$. Аналогично можно указать сферу $S_2 = S(x_2, r_2) \subset S_1$, во всех точках которой $\|U(x)\| > 2$. Продолжая этот процесс до бесконечности, мы построим последовательность сфер $S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_n \supset \ldots$ таких, что $\|U(x)\| > n$ для всех $x \in S_n$. Так как пространство X полно по норме, то существует точка x^*, общая для всех этих сфер; но в этой точке $\|U(x^*)\| = \infty$, что невозможно. Таким образом, ограниченность $U(x)$ по норме в единичной сфере доказана.

Пусть теперь X — KB-пространство. В KB-пространстве множества (b)-линейных и (o)-линейных функционалов совпадают и это множество — тоже K-пространство. Пусть опять f_s $(a \leqslant s \leqslant b)$ — функция, значения которой суть функционалы в X. Если f_s — функция ограниченного изменения, то положим

$$|f|_s = \operatorname*{var}_a^s f_\sigma = \sup_{a = \sigma_0 < \ldots < \sigma_k = s} \sum_{i=0}^{k-1} |f_{\sigma_{i+1}} - f_{\sigma_i}|.$$

6.13. Теорема. *Общий вид операций $y = U(x)$ класса H_0^0, отображающих KB-пространство X в V^p, даётся формулой* (1), *где f_s — абстрактная функция ограниченного изменения ($f_a = \mathbf{0}$) и при этом $|f|_s$ имеет ограниченное слабое (p)-изменение* *).

Доказательство. Пусть $U \in H_0^0$. Тогда $U \in H_b^b$, следовательно, U представима по формуле (1). Кроме того, существует операция

$$|U|(x) = \varphi_s(x).$$

При этом $|U(x)| \leqslant |U|(|x|)$, т. е. если $s_1 < s_2$, то

$$|f_{s_2}(x) - f_{s_1}(x)| \leqslant \varphi_{s_2}(|x|) - \varphi_{s_1}(|x|).$$

По 1.25 гл. VII из этого неравенства вытекает, что

$$|f_{s_2} - f_{s_1}| \leqslant \varphi_{s_2} - \varphi_{s_1}.$$

Отсюда сразу следует, что f_s — функция ограниченного изменения и, кроме того,

$$|f|_{s_2} - |f|_{s_1} \leqslant \varphi_{s_2} - \varphi_{s_1}.$$

---

*) При $p = 1$ второе условие вытекает из первого.

Так как по 6.12 φ_s должна иметь ограниченное слабое (p)-изменение, то и $|f|_s$ обладает тем же свойством.

Обратно, если условия теоремы выполнены для f_s, то положим

$$U_1(x) = |f|_s(x).$$

Так как U_1 аддитивна и положительна, то, следовательно, $U_1 \in H_0^0$ $(U_1(x) \in V^p)$. Кроме того,

$$|f_{s_2}(x) - f_{s_1}(x)| \leqslant |f_{s_2} - f_{s_1}|(|x|) \leqslant [|f|_{s_2} - |f|_{s_1}](|x|),$$

т. е. $|U(x)| \leqslant U_1(|x|)$. Таким образом, $U \in H_0^0$. При этом если опять представить операцию-модуль в виде $|U|(x) = \varphi_s(x)$, то из очевидного неравенства $|U| \leqslant U_1$ следует, что $\varphi_{s_2} - \varphi_{s_1} \leqslant |f|_{s_2} - |f|_{s_1}$. Сопоставляя с полученным выше обратным неравенством, мы видим, что $|U|(x) = |f|_s(x)$.

6.14. Для исследования класса H_b^0 введём опять одно

Определение. Абстрактная функция f_s называется функцией с *ограниченным* (p)*-изменением по норме*, если

$$K = \sup_{a=s_0<s_1<\ldots<s_m=b} \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\|f_{s_{i+1}} - f_{s_i}\|^p}{(s_{i+1}-s_i)^{p-1}} \right\}^{1} < +\infty.$$

При этом обозначаем $K = (p)\text{-}\operatorname{var}\limits_{a \leqslant s \leqslant b} f_s$.

6.15. Теорема. *Общий вид операций $y = U(x)$ класса H_b^0, отображающих произвольное линейное нормированное пространство X в V^p, даётся формулой* (1), *где f_s — функция с ограниченным* (p)*-изменением по норме* ($f_a = \mathbf{0}$). *При этом*

$$\|U\|_b^v = (p)\text{-}\operatorname{var} f_s. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $U \in H_b^0$. Представим её по формуле (1). По теореме 2.82 гл. VII операция U имеет абстрактную норму $\|U\| = y_0 \in V^p$. Из определения абстрактной нормы вытекает, что при $s_2 > s_1$

$$|f_{s_2}(x) - f_{s_1}(x)| \leqslant [y_0(s_2) - y_0(s_1)]\,\|x\|. \tag{3}$$

Отсюда следует, что для любого разбиения

$$\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\|f_{s_{i+1}} - f_{s_i}\|^p}{(s_{i+1}-s_i)^{p-1}} \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} \frac{|y_0(s_{i+1}) - y_0(s)|^p}{(s_{i+1}-s_i)^{p-1}} \leqslant \|y_0\|^p = [\|U\|_b^v]^p,$$

т. е. функция f_s имеет ограниченное (p)-изменение по норме и

$$(p)\text{-}\operatorname{var} f_s \leqslant \|U\|_b^v.$$

Обратно, пусть U — операция, удовлетворяющая условиям теоремы. Положим

$$y_{0(s)} = \sup_{a=s_0<s_1<\ldots<s_m=s} \sum_{i=0}^{m-1} \|f_{s_{i+1}} - f_{s_i}\|. \tag{4}$$

Легко видеть, что $y_0 \in V^p$ и $(p)\text{-var}\, y_0(s) = (p)\text{-var}\, f_s$ (ср. 2.67 гл. VI, замечание), а также что выполняется неравенство (3). Таким образом, существует $\|U\| \leqslant y_0$ и $\|U\|_b^v = \|\|U\|\| \leqslant \|y_0\| = (p)\text{-var}\, f_s$.

Из полученных двух неравенств противоположного смысла и вытекает равенство (2).

6.16. Если в формулировках 6.12, 6.13 и 6.15 заменить пространство V^p пространством A абсолютно непрерывных функций, то условие ограниченности слабого (p)-изменения f_s нужно заменить условием *слабый абсолютной непрерывности* (т. е. требованием, чтобы $f_s(x)$ была абсолютно непрерывна при любом x), а условие ограниченности (p)-изменения по норме — условием абсолютной непрерывности по норме; последнее означает, что для неналагающих интервалов

$$\text{из} \sum |s_i' - s_i| \leqslant \delta(\varepsilon) \quad \text{следует} \quad \sum \|f_{s_i'} - f_{s_i}\| \leqslant \varepsilon.$$

По отношению к классам H_b^b и H_0^0 это — прямое следствие из 6.12, 6.13, а для класса H_b^0 требуются некоторые дополнительные рассуждения, весьма сходные с доказательством теоремы 6.15, которые читатель легко сможет воспроизвести.

6.2. Операции со значениями в L^p $(p \geqslant 1)$. Опираясь на изоморфизм между V^p и L^p $(p > 1)$ и между A и L мы можем вывести непосредственно из предыдущих теорем следующие результаты.

6.21. Общий вид операций $y = U(x)$ класса H_b^b, отображающих пространство X типа (B) в L^p $(p \geqslant 1)$, даётся формулой

$$y(s) = \frac{d}{ds} f_s(x), \tag{5}$$

где f_s — функция с ограниченным слабым (p)-изменением (при $p > 1$) или слабо абсолютно непрерывная (при $p = 1$). Как и выше, значения f_s суть (s)-линейные функционалы в X $(f_a = \mathbf{0})$.

6.22. Общий вид операций $y = U(x)$ класса H_0^0, отображающих KB-пространство X в L^p $(p \geqslant 1)$, даётся формулой (5), где f_s — функция ограниченного изменения $(f_a = \mathbf{0})$, а её полное изменение $|f|_s$ имеет ограниченное слабое (p)-изменение (при $p > 1$) или слабо абсолютно непрерывна (при $p = 1$).

6.23. Общий вид операций $y = U(x)$ класса H_0^0, отображающих линейное нормированное пространство X в L^p $(p \geqslant 1)$ даётся формулой (5) где f — функция с ограниченным (p)-изменением по норме (при $p > 1$) или абсолютно непрерывная по норме (при $p = 1$) $(f_a = \mathbf{0})$. При этом $\|U\|_b^v = (p)\text{-var}\, f_s$.

6.3. Операции в сепарабельных пространствах. Исследуем операции класса H_b^0 специально в случае, когда X — сепарабельное линейное нормированное пространство; это означает, что X содержит счётное множество, всюду плотное в смысле сходимости по норме.

6.31. Определение. Абстрактная функция f_s, рассматривавшаяся выше, называется *слабо измеримой*, если вещественная функция $f_s(x)$ измерима для любого $x \in X$.

6.32. Теорема. *Общий вид операций $y = U(x)$ класса H_b^0, отображающих сепарабельное пространство типа (B) в L^p $(p \geqslant 1)$, даётся формулой*

$$y(s) = f_s(x), \tag{6}$$

где абстрактная функция f_s слабо измерима, а вещественная функция $\|f_s\| \in L^p$.

При этом

$$\|U\|_b^v = \left[\int_a^b \|f_s\|^p\, ds\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{7}$$

Доказательство. Если $U \in H_b^0$, то по 6.23 для $y = U(x)$ имеем

$$y(s) = \frac{d}{ds}\varphi_s(x),$$

где φ_s имеет ограниченное (p)-изменение по норме (при $p > 1$). Отсюда, как и для вещественных функций, сразу получается что φ_s абсолютно непрерывна по норме. При $p = 1$ то же самое вытекает непосред твенно из 6.23. Покажем, что из этого следует, что φ_s почти всюду удовлетворяет по норме условию Липшица (с по тоянной, зависящей от точки).

Введём функцию $y_0(s)$ по формуле (4). Ясно, что $y_0(s)$ абсолютно непрерывна, а тогда во всех точках, где существует конечная производная $y_0'(s)$, $y_0(s)$ удовлетворяет условию Липшица. Но тогда и φ_s удовлетворяет условию Липшица с той же постоянной, т. е. $\|\varphi_{s+h} - \varphi_s\| \leqslant C_s|h|$ при всех достаточно малых h.

Пусть $N = \{x_n\}$ — счётное всюду плотное множество в X. Во всём промежутке $a \leqslant s \leqslant b$, за исключением некоторого множества меры нуль, при всех n существует

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi_{s+h}(x_n) - \varphi_s(x_n)}{h} \tag{8}$$

и функция φ_s удовлетворяет условию Липшица с постоянной C_s. Пусть x — произвольный элемент из X. Тогда

$$\left|\frac{\varphi_{s+h}(x) - \varphi_s(x)}{h} - \frac{\varphi_{s+h'}(x) - \varphi_s(x)}{h'}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{\varphi_{s+h}(x - x_n) - \varphi_s(x - x_n)}{h}\right| + \left|\frac{\varphi_{s+h}(x_n) - \varphi_s(x_n)}{h} - \right.$$

$$\left. - \frac{\varphi_{s+h'}(x_n) - \varphi_s(x_n)}{h'}\right| + \left|\frac{\varphi_{s+h'}(x_n - x) - \varphi_s(x_n - x)}{h'}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2C_s\|x - x_n\| + \alpha,$$

где через α обозначено среднее слагаемое, а $x_n \in N$. За счёт x_n норму $\|x - x_n\|$ можно сделать сколь угодно малой, а при фиксированном n $\alpha \to 0$ благодаря существованию предела (8). Отсюда следует, что предел (8) существует и при замене x произвольным $x \in X$. А тогда этот предел является (b)-линейным функционалом в X (см. 1.34 гл. X). Обозначим его f_s. Тогда $U(x) = f_s(x)$, т. е. (6) доказано.

Из определения нормы и того, что x_n образуют всюду плотное множество, сразу следует, что

$$\|f_s\| = \sup_n \frac{|f_s(x_n)|}{\|x_n\|}.$$

Мы уже знаем по 2.82 гл. VII, что существует такой $y_0 \in L^p$ ($y_0 = \|U\|$, что $|f_s(x)| \leqslant y_0(s)\|x\|$ для любого x. А тогда $\|f_s\| \leqslant y_0(s)$, откуда $\|f_s\| \in L^p$ и при этом

$$\left[\int_a^b \|f_s\|^p\, ds\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \|U\|_b^v. \tag{9}$$

Обратно, если дана операция (6), удовлетворяющая всем условиям доказываемой теоремы, то $f_s(x) \in L^p$ при любом $x \in X$, так как $|f_s(x)| \leqslant \|f_s\|\|x\|$, и благодаря этому же неравенству данная операция принадлежит классу H_b^0. При этом

$$\|U\|_b^v \leqslant \left[\int_a^b \|f_s\|^p\, ds\right]^{\frac{1}{p}},$$

что вместе с (9) даёт (7), ч. и тр. д.

Применим доказанный результат к случаю, когда $X = L^r$ $(r \geqslant 1)$. Сначала рассмотрим случай $r > 1$.

6.33. Общий вид операций $y = U(x)$ класса $H_b^0 = H_t^0$, отображающих L^r $(r > 1)$ в L^p $(p \geqslant 1)$, даётся формулой

$$y(s) = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt, \tag{10}$$

где функция $K(s, t)$ поверхностно измерима в квадрате $a \leqslant s,\ t \leqslant b$ и

$$C = \left\{\int_a^b \left[\int_a^b |K(s, t)|^{\frac{r}{r-1}} dt\right]^{\frac{p(r-1)}{r}} ds\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{11}$$

При этом

$$\|U\|_b^v = C. \tag{12}$$

Доказательство. L^r сепарабельно, так как, например, множество ступенчатых функций с рациональными значениями, построенных на интервалах с рациональными концами, — счётное и всюду плотное.

Согласно теореме 6.32 и предложению 3.32 всякая операция $U \in H_b^0$ представима по формуле (10) с некоторым ядром $K^*(s, t)$, причём для $K^*(s, t)$ должны быть выполнены условия (11)—(12). Остаётся показать, что можно заменить $K^*(s, t)$ поверхностно измеримой функцией $K(s, t)$ так, чтобы величина интеграла (10) при этом для почти всех s осталась без изменения. Для этого положим

$$K_n(s, t) = n \int_{t_i}^{t_{i+1}} K^*(s, \tau)\, d\tau, \quad \text{если } t_i \leqslant t < t_{i+1},$$

где

$$t_i = a + \frac{i}{n}(b - a),$$

и

$$K(s, t) = \overline{\lim_{n \to \infty}}\, K_n(s, t),$$

Так как при фиксированном t $K_n(s, t)$ есть значение $U[n(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})]$, то $K_n(s, t)$ поверхностно измерима. А тогда и $K(s, t)$ поверхностно измерима. Но при почти всех s $K^*(s, t)$ суммируема по t. Следовательно, при каждом таком s $K^*(s, t) = \lim K_n(s, t)$ для почти всех t; значит, для $y = U(x)$

$$y(s) = \int_a^b K^*(s, t)\, x(t)\, dt = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt$$

и $K(s, t)$ удовлетворяет всем поставленным условиям.

Обратно, если дана операция $U(x)$ (10) и все условия выполнены, то интеграл (10) представляет измеримую функцию от s для любого $x \in L^r$. Следовательно, абстрактная функция f_s, определяемая ядром $K(s, t)$, слабо измерима и $\|f_s\| \in L^p$. Таким образом, выполнены условия теоремы 6.32, т. е. $U \in H_b^0$, а норма определяется по формуле (12).

Аналогично получается следующий результат.

6.34. Общий вид операций $y = U(x)$ класса H_b^0, отображающих L в L^p ($p \geqslant 1$), даётся формулой (10), где $K(s, t)$ поверхностно измерима и

$$\|U\|_b^v = \left[\int_a^b \operatorname{vrai\,max}_t |K(s, t)|^p\, ds\right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Чтобы не увеличивать размера настоящей главы, мы ограничились лишь некоторыми конкретными примерами для иллюстрации общих теорем. Впрочем, и общие теоремы приведены здесь далеко не полностью, не разобраны все различные классы линейных операций. Подробное изложение этих вопросов можно найти в специальных работах, посвящённых аналитическому представлению операций.

ГЛАВА IX

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ

В этой главе рассматривается важный вопрос теории линейных операций — о возможности распространения такой операции с данного пространства в более широкое, с сохранением линейности (а, иногда, также положительности). Необходимо сразу указать на то, что в теории нормированных пространств имеется лишь общая теорема о распространении функционалов, играющая основную роль в этой теории, а сколько-нибудь общие теоремы о распространении операций отсутствуют. Напротив, для операций в полуупорядоченных пространствах могут быть получены, как мы увидим ниже, теоремы о распространении для довольно общих классов операций. Более того, эти теоремы способствуют выяснению вопроса о возможности распространения операций в нормированных пространствах. Они имеют также ряд непосредственных применений в анализе и теории функций.

§ 1. Распространение операций класса H_b^o

Для этого класса операций вопрос о распространении допускает наиболее полное решение; именно для операций этого класса могут быть получены такого же вида теоремы, как для функционалов.

1.1. Теорема о распространении операций с линейного множества.

1.11. Теорема. *Пусть X — произвольное линейное множество, а Y — K-пространство, и пусть заданы две операции, со значениями в Y:*

a) *операция $y = p(x)$, определенная на всем X и удовлетворяющая условиям:*

$$p(x + x') \leqslant p(x) + p(x'),$$
$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \text{если} \quad \lambda \geqslant 0;$$

b) *операция $y = U_1(x)$, определённая на линейном подмножестве X_1 множества $X (X_1 \subset X)$, аддитивная, однородная и удовлетворяющая неравенству*

$$U_1(x) \leqslant p(x).$$

Тогда операция $U_1(x)$ может быть распространена на всё множество X с сохранением указанных свойств, т. е. существует операция $y = U(x)$, определённая в X, совпадающая с $U_1(x)$ на X_1 и удовлетворяющая неравенствам

$$-p(-x) \leqslant U(x) \leqslant p(x).$$

Доказательство. Пусть $X_1 \neq X$. Возьмём некоторый элемент $x_1 \in X \setminus X_1$ и обозначим через X_2 множество элементов вида

$$\bar{x} = x + \alpha x_1,$$

где α — вещественное число, а $x \in X_1$. Очевидно, x и α определяются по $\bar{x}$ единственным образом (действительно, если бы было два представления $\bar{x} = x + \alpha x_1 = x' + \alpha' x_1$, то мы имели бы $x_1 = \frac{1}{\alpha' - \alpha}(x - x') \in X_1$ вопреки предположению).

Пусть теперь x', x'' — любые элементы из X_1; имеем

$$U_1(x'') - U_1(x') = U_1(x'' - x') \leqslant p(x'' - x') =$$
$$= p[(x'' + x_1) + (-x' - x_1)] \leqslant p(x'' + x_1) + p(-x' - x_1),$$

или

$$-p(-x' - x_1) - U_1(x') \leqslant p(x'' + x_1) - U_1(x'').$$

Полагая теперь

$$m = \sup_{x' \in X_1} [-p(-x' - x_1) - U_1(x')]; \; M = \inf_{x'' \in X_1} [p(x'' + x_1) - U_1(x'')],$$

находим по предыдущему (см. 1.36е) гл. I), что $m \leqslant M$. Возьмём теперь любой $y_1 \in Y$, удовлетворяющий неравенствам $m \leqslant y_1 \leqslant M$. Тогда для x', $x'' \in X_1$ будем иметь:

$$-p(-x' - x_1) - U_1(x') \leqslant y_1 \leqslant p(x'' + x_1) - U_1(x''). \qquad (1)$$

Определим операцию U на X_2, полагая

$$U(\bar{x}) = U_1(x) + \alpha y_1, \text{ если } \bar{x} = x + \alpha x_1, \text{ где } x \in X_1.$$

Аддитивность и однородность операции U ясна непосредственно из её определения; установим, что для неё справедливы неравенства

$$-p(-\bar{x}) \leqslant U(\bar{x}) \leqslant p(\bar{x}).$$

Пусть сначала $\alpha > 0$. Положим $x'' = \frac{x}{\alpha}$; тогда найдём:

$$y_1 \leqslant p\left(\frac{x}{\alpha} + x_1\right) - U_1\left(\frac{x}{\alpha}\right) \text{ или } U_1(x) + \alpha y_1 \leqslant p(\bar{x}),$$

т. е.

$$U(\bar{x}) \leqslant p(\bar{x}).$$

В случае $\alpha < 0$ мы придём к тому же результату, принимая $x' = \frac{x}{\alpha}$ в левой части неравенства (1). Заменяя в установленном уже неравенстве $\bar{x}$ на $-\bar{x}$, получаем: $U(-\bar{x}) \leqslant p(-\bar{x})$, что приводит ко второму требуемому неравенству

$$-p(-\bar{x}) \leqslant U(\bar{x}).$$

Далее вполне упорядочим множество $X \setminus X_1$; получим последовательность

$$x_1, x_2, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\alpha, \ldots \quad (\alpha < \alpha_0).$$

При этом можно считать, что в ней сохранены лишь линейно независимые элементы — этого можно добиться, выбрасывая последовательно все элементы, являющиеся линейными комбинациями предшествующих. Пусть X_α обозначает линейную оболочку, построенную на множестве X_1 и на всех элементах x_β ($\beta < \alpha$). Нам достаточно доказать теперь (по индукции) возможность распространения операции $U_1(x)$ на любое множество X_α, так как само X совпадает с X_{α_0}. Для $\alpha = 1, 2$ это уже доказано, а распространение с X_α на $X_{\alpha+1}$ может быть произведено так, как сделано выше распространение с X_1 на X_2; наконец, если α — число 2-го рода (предельное), то, очевидно, $X_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta$ и раз произведено распространение на все X_β для $\beta < \alpha$, то тем самым произведено распространение и на X_α с выполнением требуемых условий.

Замечание. Частный случай этой теоремы, когда Y есть множество вещественных чисел, т. е. когда речь идёт о функционалах, был установлен С. Банахом. Наше рассуждение в существенном совпадает с рассуждением Банаха. То же самое относится и к следующим ниже теоремам.

1.12. Пусть на множестве X задана операция $p(x)$, удовлетворяющая условиям предыдущей теоремы; тогда на множестве X существует аддитивная и однородная операция $U(x)$, удовлетворяющая неравенствам

$$-p(-x) \leqslant U(x) \leqslant p(x),$$

и при этом, если $p(x) \not\equiv \mathbf{0}$, то и $U(x) \not\equiv \mathbf{0}$.

Доказательство. Возьмём любое $x_0 \in X$ (если $p(x) \not\equiv \mathbf{0}$, то x_0 возьмём так, чтобы $p(x_0) \neq \mathbf{0}$). За X_1 примем множество элементов вида λx_0, где λ — вещественное число. Определим U_1 на X_1, положив

$$U_1(\lambda x_0) = \lambda p(x_0).$$

Легко проверить, что для U_1 на множестве X_1 выполнены все условия предыдущей теоремы. Аддитивность и однородность операции U_1 очевидны, а неравенство $U_1(x) \leqslant p(x)$ проверяется так: если $\lambda > 0$, то $U_1(\lambda x_0) = \lambda p(x_0) = p(\lambda x_0)$, т. е. $U_1(\lambda x_0) = p(\lambda x_0)$; если же

$\lambda < 0$, то так как $\mathbf{0} \leqslant p(x_0) + p(-x_0)$, имеем $p(-x_0) \geqslant -p(x_0)$, и потому

$$U_1(\lambda x_0) = \lambda p(x_0) = (-\lambda)(-p(x_0)) \leqslant -\lambda p(-x_0) = p(\lambda x_0).$$

Применяя теорему 1,11, мы можем продолжить U_1 на всё X, что и даст требуемую операцию U.

1.2. Распространение операций класса H_b^0. На основе общей теоремы 1.11 мы получаем прежде всего следующую теорему,

1.21. Теорема о распространении операций с конечной абстрактной нормой. *Если X — нормированное пространство, $X_1 \subset X$ — линейное подмножество его, Y — K-пространство и $y = U(x)$ — операция класса H_b^0 из X_1 в Y, имеющая конечную абстрактную норму $|U|$ (т. е. удовлетворяющая неравенству $|U(x)| \leqslant |U| \, \|x\|$ при $x \in X_1$), то она может быть распространена на всё X с сохранением аддитивности, однородности и абстрактной нормы.*

Доказательство. Применим теорему 1.11, полагая $p(x) = |U| \, \|x\|$. Очевидно, $p(x)$ удовлетворяет всем требуемым условиям. Поэтому получаем, что операция U может быть распространена на всё X с сохранением неравенства

$$-|U| \, \|x\| \leqslant U(x) \leqslant |U| \, \|x\|$$

(в данном случае $-p(-x) = -|U| \, \|x\|$), а потому будет $|U(x)| \leqslant |U| \, \|x\|$, откуда и видно, что $|U|$ остаётся неизменной.

1.22. Замечание. Если Y — K^+-пространство, то всякая операция класса H_b^0 из X (или из X_1) в Y имеет конечную абстрактную норму (2.82 гл. VII). Поэтому на основании 1.21 в этом случае можем утверждать, что всякая операция класса H_b^0 со значениями в Y (в частности, функционал) может быть распространена с линейного подпространства нормированного пространства на всё пространство.

Установим теперь следующую важную теорему о существовании операции, отличной от нуля на произвольном заданном элементе.

1.23. Теорема. *Для всякого x_0 с $\|x_0\| = 1$ и всякого $y_0 > \mathbf{0}$, $y_0 \in Y$, можно построить такую операцию $y = U(x)$ класса H_b^0, что*

$$U(x_0) = y_0; \quad |U| = y_0. \tag{2}$$

Доказательство. Воспользуемся предыдущей теоремой, приняв в качестве X_1 множество точек λx_0 и полагая здесь $U(\lambda x_0) = \lambda y_0$. Тогда

$$|U(\lambda x_0)| = y_0 |\lambda| = y_0 \|\lambda x_0\|,$$

т. е. $|U|_{X_1} = y_0$. Далее, U можно распространить, сохранив ту же норму.

Приведём формулировку того же предложения специально для случая функционалов.

1.24. Для всякого элемента x_0 нормированного пространства X можно указать такой (b)-линейный функционал f, что

$$f(x_0) = \|x_0\| \text{ и } \|f\| = 1. \tag{3}$$

Это предложение получается из 1.23, если за Y взять множество вещественных чисел, x_0 заменить в нём на $\frac{x_0}{\|x_0\|}$ и принять $y_0 = 1$.

Укажем два следствия из последнего предложения.

1.25. Если элемент x_0 таков, что для всякого (b)-линейного функционала f будет $f(x_0) = 0$, то непременно $x_0 = \mathbf{0}$.

1.26. Если для всякого (b)-линейного функционала f будет $|f(x_0)| \leqslant K\|f\|$, то тогда непременно $\|x_0\| \leqslant K$.

Действительно, выбрав f так, как указано в 1.24, найдём:

$$\|x_0\| \leqslant K.$$

1.3. Условия распространимости операций с произвольного множества.

1.31. Пусть M — любое подмножество нормированного пространства X и каждому x из M соотнесено определённое y из K-пространства Y. Тогда, для того чтобы в X существовала операция $y = U(x)$ (класса H_b^0) с конечной абстрактной нормой, принимающая на M заданные значения y, необходимо и достаточно, чтобы

$$y_0 = \sup_{\substack{x_1, \ldots, x_n \in M \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n}} \frac{\left|\sum_1^n \lambda_i y_i\right|}{\left\|\sum_1^n \lambda_i x_i\right\|} < +\infty, \tag{4}$$

где верхняя грань взята относительно всех систем элементов x_1, $x_2, \ldots, x_n$ из M и относительно всех систем вещественных чисел λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ таких, что $\|\sum_1^n \lambda_i x_i\| \neq 0$ (y_i обозначают заданные элементы из Y, отвечающие элементам x_i).

Необходимость. Пусть операция $y = U(x)$ существует, тогда

$$\left|\sum_1^n \lambda_i y_i\right| = \left|\sum_1^n \lambda_i U(x_i)\right| = \left|U\left(\sum_1^n \lambda_i x_i\right)\right| \leqslant |U| \left\|\sum_1^n \lambda_i x_i\right\|,$$

откуда видно, что y_0 конечно и $\leqslant |U|$.

Достаточность. Пусть y_0 конечно. Тогда

$$\left|\sum_1^n \lambda_i y_i\right| \leqslant y_0 \left\|\sum_1^n \lambda_i x_i\right\|. \tag{5}$$

Если $\|\sum_1^n \lambda_i x_i\| \neq 0$, то это неравенство вытекает сразу из определения y_0, если же $\|\sum_1^n \lambda_i x_i\| = 0$, то оно также сохраняется — по непрерывности. Действительно, в этом случае, взяв $\bar{x} \in M$ $(\bar{x} \neq \mathbf{0})$ и произвольное $\alpha \neq 0$, можем написать по (5):

$$|\sum_1^n \lambda_i y_i + \alpha \bar{y}| \leqslant y_0 \|\sum_1^n \lambda_i x_i + \alpha \bar{x}\| = y_0 |\alpha| \|\bar{x}\|,$$

что при $\alpha \to 0$ даёт в пределе требуемое неравенство и для данного случая.

Примем в качестве X_1 множество элементов вида $x' = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, где $x_i \in M$, λ_i вещественные и n — любое.

Заметим, что один и тот же элемент x' может иметь два различных представления

$$x' = \sum_1^n \lambda_i x_i, \quad x' = \sum_1^n \bar{\lambda}_i x_i,$$

но тогда

$$\sum (\lambda_i - \bar{\lambda}_i) x_i = \mathbf{0}$$

и

$$|\sum (\lambda_i - \bar{\lambda}_i) y_i| \leqslant y_0 \|\sum (\lambda_i - \bar{\lambda}_i) x_i\| = \mathbf{0},$$

а потому

$$\sum \lambda_i y_i = \sum \bar{\lambda}_i y_i.$$

Положим теперь $U(x') = \sum \lambda_i y_i$, если $x' = \sum \lambda_i x_i$. По только что сказанному ясно, что операция U однозначно определена, так как значение $U(x')$ не зависит от выбора представления для x'. Далее, операция U на X_1 аддитивна, однородна и имеет норму y_0. По теореме о распространении операции с конечной абстрактной нормой (1.21), она может быть распространена на всё X с сохранением нормы.

1.32. Пусть X_1 — линейное подмножество нормированного пространства X и пусть x_0 — элемент из X, расположенный на расстоянии $d > 0$ от X_1, и $y_0 \in Y$, где Y—K-пространство. Тогда существует линейная операция $y = U(x)$, определённая в X, со значениями из Y, удовлетворяющая условиям:

1) $U(x_0) = y_0$, 2) $U(x) = 0$ для $x \in X_1$, 3) $\|U\| = \frac{|y_0|}{d}$.

Доказательство. Пусть H — множество элементов из X, представимых в виде $x = x' + \alpha x_0$, где α — вещественное число и $x' \in X_1$. Тогда H есть линейное множество и так как $x_0 \bar{\in} X_1$, то

представление x в виде $x' + \alpha x_0$ единственно. Определим на H линейную операцию $U_1(x)$, положив

$$U_1(x) = \alpha y_0 \quad \text{для} \quad x = x' + \alpha x_0.$$

Так как

$$\|x\| = \|x' + \alpha x_0\| = |\alpha| \left\| \frac{1}{\alpha} x' + x_0 \right\| \geqslant |\alpha| d,$$

то $|U_1(x)| = |\alpha| |y_0| \leqslant \frac{|y_0|}{d} \|x\|$, откуда $\|U_1\|_H \leqslant \frac{y_0}{d}$. С другой стороны, существуют $x_n \in X_1$ такие, что $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n - x_0\| = d$; тогда

$$|U_1(x_n - x_0)| = |y_0| \leqslant \|x_n - x_0\| \|U_1\|_H,$$

откуда $|y_0| \leqslant d \|U_1\|_H$. Следовательно, $\|U_1\|_H = \frac{|y_0|}{d}$.

Пользуясь теперь теоремой 1.21, получаем, что в X существует линейная операция $y = U(x)$ такая, что $\|U\|_X = \|U\|_H = \frac{|y_0|}{d}$ и $U(x) = U_1(x)$ на H, в частности, следовательно, $U(x) = 0$ для $x \in X_1$ (условие 2) и $U(x_0) = y_0$ (условие 1).

Как следствие доказанной теоремы получаем следующее предложение.

1.33. Пусть X_1 — любое подмножество нормированного пространства X и x_0 — произвольный элемент из X. Тогда, для того чтобы существовала такая последовательность $\{g_n\}$ линейных комбинаций элементов из X_1, что $x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} g_n$, необходимо и достаточно, чтобы равенство $f(x) = 0$ для всех $x \in X_1$ влекло за собой $f(x_0) = 0$, каков бы ни был (b)-линейный функционал f, определённый в X.

Необходимость. Равенство $f(x) = 0$ для всех $x \in X_1$ влечёт за собой $f(g_n) = 0$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$ откуда $f(x_0) = 0$.

Достаточность. Если элемент x_0 не представим в виде $x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} g_n$, то он находится на конечном расстоянии от множества X_1 и по предыдущей теореме существует функционал f_0 такой, что $f_0(x) = 0$ на X_1 и $f_0(x_0) = 1$.

1.4. Системы элементов. Биортогональность.

1.41. Множество M элементов линейного нормированного пространства X назовём *фундаментальным*, если множество линейных комбинаций элементов из M лежит всюду плотно в X, т. е. линейное замыкание множества M есть всё пространство X. Множество M назовём *тотальным*, если равенство $f(x) = 0$ (f — (b)-линейный функционал в X) для всех x из M влечёт за собой, что $f(x) \equiv 0$. Из предыдущей теоремы легко получаем такое следствие.

1.42. Для того чтобы множество M было фундаментальным, необходимо и достаточно, чтобы оно было тотальным.

1.43. Назовём множество элементов $N = \{x_\xi\}$ *минимальным*, если после выбрасывания любого элемента из него линейное замыкание

множества уменьшается, т. е. если никакой элемент $x_\xi \in N$ не представим в виде $x_\xi = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$, где g_n — линейные комбинации прочих элементов из N.

1.44. Назовём множество $N = \{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$, *допускающим биортогонализацию*, если существует множество функционалов $P = \{f_\eta\}$ $(\eta \in \Xi)$ таких, что

$$f_\eta(x_\xi) \begin{cases} = 0, & \text{если } \xi \neq \eta, \\ = 1, & \text{если } \xi = \eta. \end{cases}$$

1.45. Для того чтобы множество N допускало биортогонализацию, необходимо и достаточно, чтобы оно было минимальным.

Необходимость. Пусть множество N допускает биортогонализацию; тогда невозможно, чтобы N не было минимальным. Действительно, если бы $x_\xi = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$ где g_n — линейные комбинации прочих элементов из N, то, так как $f_\xi(g_n) = 0$, мы имели бы $f_\xi(x_\xi) = 0$, что невозможно.

Достаточность. Пусть множество N минимально; тогда каждое x_ξ находится на конечном расстоянии $d > 0$ от линейного замыкания $L = \{g\}$ остальных элементов множества N. В таком случае по теореме 1.32 существует функционал f_ξ такой, что $f_\xi(x_\xi) = 1$ и $f_\xi(g) = 0$ для $g \in L$. Наличие множества таких функционалов $\{f_\xi\}$ и устанавливает биортогонализуемость множества N.

1.46. Замечание. Для того чтобы функционалы f_ξ могли быть выбраны в предыдущей теореме так, чтобы их нормы $\|f_\xi\|$ были ограничены в совокупности, достаточно, очевидно, существование постоянной $d > 0$ такой, что

$$\|x_\xi - \sum_{\xi_i \neq \xi} \lambda_i x_{\xi_i}\| \geqslant d$$

для любых λ_i и $\xi_i \neq \xi$. Это же условие, очевидно, и необходимо, так как если нормы всех f_ξ ограничены числом M, то в силу равенства

$$f_\xi(x_\xi - \sum \lambda_i x_{\xi_i}) = 1,$$

невозможно, чтобы было

$$\|x_\xi - \sum \lambda_i x_{\xi_i}\| < d = \frac{1}{M}.$$

Из предыдущего предложения в качестве следствия можно получить следующую теорему.

1.47. (С. С. Левин.) Для того чтобы к системе функций $\{\varphi_i\}$ из L^2 существовала биортогональная система $\{\psi_j\}$, необходимо и достаточно, чтобы система $\{\varphi_i\}$ была минимальной.

Это предложение следует сразу из теоремы 1.45, если принять во внимание, что функционал в пространстве L^2 имеет вид $f(x) = \int\limits_E x(t)\psi(t)\,dt$, где ψ — функция из L^2.

1.5. Обобщённый предел. Пусть Y — некоторое K-пространство и $X = \{x\}$ есть множество последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, где $\xi_i \in Y$ и $\sup\limits_i |\xi_i| < +\infty$.

Мы покажем сейчас, что можно определить для каждой последовательности x предел, который для сходящихся последовательностей равен обычному пределу и который удовлетворяет некоторым естественным условиям, перечисленным ниже. Для этой цели воспользуемся теоремой о распространении операций.

Введём операцию $p(x)$, полагая

$$p(x) = \inf_n \overline{\lim_{s\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_{s+i}.$$

Покажем, что для $p(x)$ удовлетворены условия теоремы 1.11. Очевидно, что для $\lambda \geqslant 0$ будет $p(\lambda x) = \lambda p(x)$. Далее, для любого m имеем:

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^{nm} \xi'_{s+i} = \overline{\lim_{s\to\infty}} \frac{1}{m}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi'_{s+i} + \ldots + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi'_{s+(m-1)n+i}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{s\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi'_{s+i}.$$

Отсюда

$$p(x' + x'') = \inf_{n,m} \overline{\lim_{s\to\infty}} \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^{nm} (\xi'_{s+i} + \xi''_{s+i}) \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{n,m}\left[\overline{\lim_{s\to\infty}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi'_{s+i} + \overline{\lim_{s\to\infty}} \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \xi''_{s+i}\right] = p(x') + p(x'').$$

Отметим, что

$$-p(-x) = \sup_n \underline{\lim_{s\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_{s+i}.$$

Теперь на основании теоремы 1.12 можем утверждать, что существует аддитивная и однородная операция $y = F(x)$, определённая для всех x и удовлетворяющая неравенствам

$$-p(-x) \leqslant F(x) \leqslant p(x).$$

Положим

$$\operatorname*{Lim}_{s\to\infty} \xi_s = F(x).$$

Относительно этого предела мы можем высказать следующее предложение:

1.51. Для каждой ограниченной последовательности $x = \{\xi_s\}$ элементов K-пространства может быть определён *обобщенный предел* $\operatorname{Lim}_{s\to\infty} \xi_s$, относящий ей некоторый элемент того же пространства и обладающий следующими свойствами:

$$1^\circ \ \operatorname{Lim}_{s\to\infty} (\lambda' \xi_s' + \lambda'' \xi_s'') = \lambda' \operatorname{Lim}_{s\to\infty} \xi_s' + \lambda'' \operatorname{Lim}_{s\to\infty} \xi_s'';$$

$$2^\circ \ \overline{\lim_{s\to\infty}}\, \xi_s \geqslant \operatorname{Lim}_{s\to\infty} \xi_s \geqslant \underline{\lim_{s\to\infty}}\, \xi_s;$$

$$3^\circ \ \operatorname{Lim}_{s\to\infty} \xi_{s+1} = \operatorname{Lim}_{s\to\infty} \xi_s.$$

Свойства 1° и 2° следуют сразу из определения $\operatorname{Lim}_{s\to\infty} \xi_s$: свойство 1° — из аддитивности и однородности операции F, а свойство 2° — из неравенств $-p(-x) \leqslant F(x) \leqslant p(x)$, а также очевидных соотношений $p(x) \leqslant \overline{\lim_{s\to\infty}}\, \xi_s$ и $-p(-x) \geqslant \underline{\lim_{s\to\infty}}\, \xi_s$. Остаётся установить свойство 3°. Пусть $\xi_s' = \xi_{s+1}$ и $|\xi_s| \leqslant y_0$. Рассмотрим последовательность $\bar{x} = \{\xi_s' - \xi_s\}_{s=1,2,\ldots}$; утверждаем, что

$$\operatorname{Lim}_{s\to\infty} (\xi_s' - \xi_s) = \mathbf{0}.$$

Действительно,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\xi_{s+i}' - \xi_{s+i}) \right| = \left| \frac{1}{n} (\xi_{s+n+1} - \xi_{s+1}) \right| \leqslant \frac{2}{n} y_0$$

и, следовательно, $p(\bar{x}) = -p(-\bar{x}) = 0$, а потому и $F(\bar{x}) = \operatorname{Lim}_{s\to\infty} (\xi_s' - \xi_s) = \mathbf{0}$.

В частности, для случая, когда Y есть пространство вещественных чисел, получается предел, существующий для каждой ограниченной числовой последовательности. Этот предел — предел Банаха — нашёл применение в теории меры Хаара и во многих других вопросах. Проведённое только что более общее рассмотрение может быть применено к различным объектам, в частности, например, оно позволяет всякой последовательности измеримых функций $\{x_n(t)\}$, ограниченной для почти каждого t, отнести «предельную» измеримую функцию, с выполнением условий 1°—3°. Этот результат нельзя получить непосредственным применением предела Банаха к последовательности $\{x_n(t)\}$, так как мы не могли бы гарантировать измеримость предельной функции.

§ 2. Распространение положительных операций

2.1. Особенности распространения положительных операций. Рассмотрим K-пространство ограниченных элементов (см. 2.3 гл. VI). В таких пространствах, как мы сейчас покажем, при распространении операций сохраняется положительность.

2.11. Пусть X — K-пространство (или K-линеал)*) ограниченных элементов и в линейном подмножестве его $X_1 \subset X$, в которое входит единица ($\mathbf{1} \in X_1$), задана положительная аддитивная операция $U(x)$ со значениями в K-пространстве Y. Тогда эта операция — типа H_b^0 и может быть продолжена на всё X с сохранением положительности и нормы, причём

$$\|U\|_{X_1} = \|U\|_X = U(\mathbf{1}). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть x — любой элемент из X_1. Согласно определению нормы в X имеем:

$$-\|x\|\,\mathbf{1} \leqslant x \leqslant \|x\|\,\mathbf{1}.$$

Отсюда, благодаря положительности и однородности операции U (1.13b) гл. VII), получаем:

$$-\|x\|\,U(\mathbf{1}) \leqslant U(x) \leqslant \|x\|\,U(\mathbf{1}),$$

т. е.

$$|U(x)| \leqslant U(\mathbf{1})\,\|x\|.$$

Это показывает, что $\|U\|_{X_1} \leqslant U(\mathbf{1})$ (следовательно, $U \in H_b^0$), а полагая $x = \mathbf{1}$, убеждаемся в том, что имеет место равенство $\|U\|_{X_1} = U(\mathbf{1})$.

По теореме о распространении операции с конечной абстрактной нормой (1.21) U можно продолжить на всё X с сохранением нормы:

$$\|U\|_X = \|U\|_{X_1} = U(\mathbf{1}),$$

причём операция U будет аддитивной и однородной.

Мы утверждаем, что при таком продолжении операция U останется положительной.

Действительно, пусть $x > \mathbf{0}$. Не умаляя общности, можно считать, что $\|x\| \leqslant 1$, т. е. $\mathbf{0} \leqslant x \leqslant \mathbf{1}$. Тогда $\mathbf{0} \leqslant \mathbf{1} - x \leqslant \mathbf{1}$ и потому $\|\mathbf{1} - x\| \leqslant 1$. Отсюда

$$U(\mathbf{1}) - U(x) = U(\mathbf{1} - x) \leqslant U(\mathbf{1})\,\|\mathbf{1} - x\| \leqslant U(\mathbf{1})$$

и, следовательно, $U(x) \geqslant \mathbf{0}$.

2.12. Определение. Пусть X — произвольный K-линеал и $X_1 \subset X$ — его линейное подмножество. Будем говорить, что X_1 *мажорирует* X, если для каждого $x \in X$ существует такое $x_1 \in X_1$, что $|x| \geqslant x_1$.

---

*) Под K-линеалом ограниченных элементов мы понимаем K-линеал с единицей, для каждого элемента которого выполняется неравенство $|x| \leqslant \lambda\mathbf{1}$ при подходящем вещественном λ.

2.13. Теорема о распространении положительных операций. *Пусть X — K-линеал и X_1 — его линейное подмножество, мажорирующее X. Пусть, далее, $U(x)$ — аддитивная и положительная операция, определённая в X_1 и отображающая X_1 в K-пространство Y. Тогда операция U может быть распространена на всё X с сохранением аддитивности и положительности.*

Доказательство. Пусть $\bar{x} \in X \setminus X_1$. Так как X_1 мажорирует X, то существуют такие элементы $x_1, x_2 \in X_1$, что $\bar{x}_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Благодаря положительности операции U имеем:

$$U(x_1) \leqslant U(x_2),$$

$$\sup_{x_1 \leqslant \bar{x}} U(x_1) \leqslant \inf_{x_2 \geqslant \bar{x}} U(x_2),$$

причём оба элемента, фигурирующих в неравенстве, конечны.

Возьмем $\bar{y} \in Y$, заключенный между полученными границами, так что

$$U(x_1) \leqslant \bar{y} \leqslant U(x_2), \text{ если } x_1 < \bar{x} < x_2 \text{ и } x_1, x_2 \in X_1.$$

Теперь для элементов x' вида

$$x' = x_0 + \lambda \bar{x} \quad (x_0 \in X_1)$$

положим

$$U(x') = U(x_0)\lambda + \bar{y}$$

(в частности, $U(\bar{x}) = \bar{y}$). При таком распространении операция U остаётся аддитивной и положительной. В доказательстве нуждается лишь последнее. Пусть

$$x' \geqslant \mathbf{0}, \quad x' = x_0 + \lambda \bar{x}.$$

Предположим для определённости, что $\lambda > 0$; тогда $\bar{x} \geqslant -\frac{1}{\lambda} x_0$. Возьмём произвольное рациональное $\varepsilon > 0$ и подберём рациональное λ' так, чтобы было $\left|\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda}\right| < \varepsilon$. Тогда

$$\bar{x} \geqslant -\frac{1}{\lambda'} x_0 - \varepsilon |x_0|.$$

Поэтому, по определению $\bar{y}$, будем иметь:

$$\bar{y} \geqslant -\frac{1}{\lambda'} U(x_0) - \varepsilon U(|x_0|)$$

и, ввиду произвольности ε,

$$\bar{y} \geqslant -\frac{1}{\lambda} U(x_0), \text{ откуда } U(x') = \lambda \bar{y} + U(x_0) \geqslant \mathbf{0},$$

т. е. U действительно положительна. С помощью трансфинитной индукции, как это было сделано выше (1.11), распространим операцию U на всё X.

Замечание. Очевидно, доказанная сейчас теорема содержит утверждение предыдущей теоремы в части, касающейся возможности распространения.

2.2. Наличие достаточного числа положительных функционалов и операций в KB-линеалах. На основании предыдущих результатов мы можем получить следующее предложение, усиливающее теорему 1.23 о наличии достаточного числа операций в том отношении, что указанные операции могут быть взяты положительными.

2.21. Если X — KB-линеал, x_0 — любой элемент его $> \mathbf{0}$ и y_0 — любой элемент $> \mathbf{0}$ K-пространства Y, то существует положительная операция $y = V(x)$ класса H_b^0, отображающая X в Y и такая, что

$$V(x_0) = y_0; \quad \|V\| = \frac{y_0}{\|x_0\|}.$$

Доказательство. Обозначим через X_0 множество элементов x вида αx_0 (α — вещественное) и через X_1 — множество элементов x, удовлетворяющих условию $|x| \leqslant \lambda x_0$ при каком-либо положительном λ (λ зависит от x).

Если мы теперь определим на X_0 операцию U_0, положив

$$U_0(\alpha x_0) = \alpha y_0,$$

то она будет положительна, $\|U_0\| = \frac{y_0}{\|x_0\|}$, и так как X_1 — K-линеал ограниченных элементов *), то по 2.11 U_0 можно распространить на X_1 с сохранением положительности и нормы; получим операцию $U_1(x)$. Наконец, $U_1(x)$ по 1.21 может быть распространена с сохранением нормы на всё X. Полученная операция $U(x)$ класса H_b^0 имеет конечную абстрактную норму, а потому регулярна (см. замечание к 2.86 гл. VII). Рассмотрим её положительную часть — операцию $U_+ = V$ — и докажем, что она будет требуемой. Действительно, V положительна, класса H_b^0 и, наконец,

$$V(x_0) = \sup_{\mathbf{0} \leqslant x \leqslant x_0} U(x) = \sup_{\mathbf{0} \leqslant x \leqslant x_0} U_1(x) = U_1(x_0) = U_0(x_0) = y_0.$$

Мы при этом воспользовались тем, что раз $\mathbf{0} \leqslant x \leqslant x_0$, то $x \in X_1$ и операция U совпадает с U_1, а последняя положительна.

Приведём формулировку того же предложения для случая функционалов.

---

*) x_0 обладает свойством единицы в X_1.

2.22. Если X — KB-линеал и x_0 — некоторый элемент его $> \mathbf{0}$, то в X существует (b)-линейный положительный функционал f такой, что

$$f(x_0) = \|x_0\|; \ \|f\| = 1 \ \left(\text{либо } f(x_0) = 1; \ \|f\| = \frac{1}{\|x_0\|}\right).$$

Пользуясь теми же соображениями, с помощью которых были получены эти предложения, установим ещё следующий важный результат, который мы сформулируем только для случая функционалов.

2.23. Если X — KB-линеал и элемент x^0 таков, что все положительные (b)-линейные функционалы в X на x_0 не отрицательны:

$$f(x^0) \geqslant 0, \text{ если } f > \mathbf{0},$$

то $x^0 \geqslant \mathbf{0}$.

Доказательство. Предположим противное; тогда, $x_-^0 > \mathbf{0}$. Обозначим через X_0 пространство, составленное из элементов вида $\lambda x_+^0 + \mu x_-^0$, и определим на нём функционал f, положив

$$f(\lambda x_+^0 + \mu x_-^0) = \mu.$$

Это будет положительный (b)-линейный функционал на X_0. По 2.11 его можно распространить с сохранением положительности и нормы на пространство X_1, составленное из элементов, удовлетворяющих условию $|x| \leqslant \lambda |x^0| = \lambda (x_+^0 + x_-^0)$ при надлежащем λ. Наконец, его можно по 1.21 распространить с сохранением нормы на всё X. Этот распространённый функционал f будет регулярным; обозначим через φ его положительную часть: $\varphi = f_+$. Тогда, пользуясь положительностью функционала f на X_1, будем иметь:

$$\varphi(x_+^0) = \sup_{\mathbf{0} \leqslant x' \leqslant x_+^0} f(x') = f(x_+^0) = 0,$$

$$\varphi(x_-^0) = \sup_{\mathbf{0} \leqslant x' \leqslant x_-^0} f(x') = f(x_-^0) = 1,$$

а следовательно,

$$\varphi(x^0) = \varphi(x_+^0) - \varphi(x_-^0) = -1,$$

в то время как $\varphi > \mathbf{0}$. Но это противоречит условию.

2.3. Сопряжённые пространства. Рефлексивность. Если X — линейное нормированное пространство, то множество (b)-линейных функционалов в нём само, очевидно, есть линейное множество, а если в качестве нормы элемента в нём принять норму функционала $\|f\|$, то множество функционалов превращается в линейное нормированное пространство,

В соответствии с этим дадим следующее определение.

2.31. Нормированное пространство, образуемое естественно линеаризованным множеством линейных функционалов, когда в качестве нормы принята норма функционала, называется пространством, *сопряжённым* к данному пространству X, и обозначается X^*: $X^* = \{f\}$.

Отметим, что каково бы ни было пространство X, пространство X^* всегда оказывается полным *).

С другой стороны, мы видели (1.23 гл. VII), что если пространство X есть K-линеал, то множество регулярных функционалов образует K-пространство.

В частности, в том случае, когда X есть KB-линеал, класс (b)-линейных функционалов представляет нормальное подпространство класса регулярных функционалов и этот класс X^* одновременно представляет K-пространство и нормированное пространство. При этом можно утверждать и некоторую согласованность в нём нормы и упорядочения, именно:

2.32. Если X — KB-линеал, то сопряжённое ему пространство X^* также есть KB-линеал и в то же время K-пространство.

О том, что X^* есть полное нормированное пространство и K-пространство, мы уже говорили. Необходимо проверить ещё условие монотонности нормы:

$$\text{если } |f_1| > |f_2|, \quad \text{то } \|f_1\| \geqslant \|f_2\|.$$

Но для любого f $\|f\| = \||f|\|$ (2.86 гл. VII), а потому условие монотонности достаточно проверить для случая, когда $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \mathbf{0}$.

Последнее же очевидно, если воспользоваться тем фактом, что норма положительного функционала в KB-линеале может вычисляться на множестве положительных элементов (2.25 гл. VII):

$$\|f_1\| = \sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ x \geqslant \mathbf{0}}} f_1(x) \geqslant \sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ x \geqslant \mathbf{0}}} f_2(x) = \|f_2\|.$$

Если X — нормированное пространство, то $X^* = \{f\}$ также есть нормированное пространство, и потому в нем возможно рассматривать (b)-линейные функционалы $F(f)$. Множество таких функционалов образует в свою очередь нормированное пространство, сопряжённое к X^*.

2.33. Пространство (b)-линейных функционалов в сопряжённом пространстве называют вторым сопряжённым к исходному пространству и обозначают X^{**}:

$$X^{**} = (X^*)^* = \{F\}.$$

---

*) Действительно, пусть $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ при $n, m \geqslant N$. Тогда, так как $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\| \|x\|$, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. При этом беря в предыдущем неравенстве $m \to \infty$, находим: $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \|x\|$. Отсюда видно, что f — линейный функционал и $\|f_n - f\| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant N$, что и устанавливает полноту пространства X^*.

Среди функционалов $F \in X^{**}$ выделим особо функционалы, порождённые элементами из X, именно, функционалы вида

$$F_x(f) = f(x).$$

Каждый такой функционал аддитивен, так как

$$F_x(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = F_x(f_1) + F_x(f_2),$$

и (b)-линеен, так как

$$|F_x(f)| = |f(x)| \leqslant \|x\| \, \|f\|,$$

откуда ясно, что $\|F_x\| \leqslant \|x\|$. Следовательно, все они суть элементы из X^{**}. При этом нетрудно видеть, что

$$\|F_x\| = \|x\|. \tag{2}$$

Действительно, достаточно взять функционал f_0 так, чтобы $|f_0(x)| = \|f_0\| \, \|x\|$ (см. 1.24); тогда

$$\|F_x\| \, \|f_0\| \geqslant |F_x(f_0)| = |f_0(x)| = \|f_0\| \, \|x\|,$$

откуда $\|F_x\| \geqslant \|x\|$, а вместе с полученным прежде обратным неравенством это приводит к равенству (2).

Множество функционалов F_x, порождённых всеми элементами из X, обозначим X_0^{**}.

Соотнося элементу $x \in X$ функционал F_x, мы устанавливаем соответствие между X и X_0^{**}. Это соответствие есть, очевидно, линейный гомоморфизм, т. е.

$$F_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} = \lambda_1 F_{x_1} + \lambda_2 F_{x_2}.$$

Далее, из того, что $\|F_x\| = \|x\|$, следует взаимная однозначность соответствия. В самом деле, если $x \neq x'$, то $F_x \neq F_{x'}$, так как

$$\|F_x - F_{x'}\| = \|F_{x - x'}\| = \|x - x'\| \neq 0.$$

В силу всего сказанного соответствие между X и X_0^{**} представляет собой линейную изометрию. Итак, имеем

2.34. Подпространство X_0^{**} второго сопряжённого пространства, образованное функционалами, порождёнными элементами из X, линейно изометрично пространству X.

2.35. Может оказаться, что множество X_0^{**} совпадает со всем пространством X^{**}, т. е. все функционалы F порождены элементами из X. В этом случае пространство X называется *рефлексивным*. Из 2.34 вытекает, что тогда второе сопряжённое пространство X^{**} линейно изометрично самому пространству X.

Примерами рефлексивных пространств являются L^p, l^p $(p > 1)$.

Перейдём теперь к случаю, когда X есть KB-линеал. Тогда X^* также KB-линеал. Более того, согласно 2.32, X^{**} будет также KB-линеалом.

Далее, в этом случае при рассмотренном выше соответствии

$$x \longleftrightarrow F_x$$

между X и X_0^{**} сохраняется и упорядочение.

Действительно, если $x \geqslant \mathbf{0}$, то, очевидно, $F_x(f) = f(x) \geqslant 0$ для $f \geqslant \mathbf{0}$ и, следовательно, $F_x \geqslant \mathbf{0}$. Обратно, если $F_x \geqslant \mathbf{0}$, то при любом $f \geqslant \mathbf{0}$ будет

$$f(x) = F_x(f) \geqslant 0,$$

а из этого на основании 2.23 следует, что и сам элемент $x \geqslant \mathbf{0}$. Следовательно, X и X_0^{**} изоморфны как K-линеалы. Итак, приходим к важному заключению:

2.36. *Если X — KB-линеал, то линейная изометрия между X и X_0^{**}, определённая соответствием $x \longleftrightarrow F_x$, сохраняет и упорядочение, т. е. X и X_0^{**} изоморфны как KB-линеалы. В частности, если X рефлексивно, то X и X_0^{**} изоморфны как KB-линеалы.*

§ 3. Общие условия для возможности распространения операций класса H_b^b

Этот параграф посвящён исследованию условий, при которых (b)-линейные операции в нормированном пространстве допускают распространение на любое более широкое пространство.

Хотя сам вопрос по своей постановке относится к теории операций в нормированных пространствах, однако, как показали излагаемые ниже результаты Г. П. Акилова, исследование этого вопроса может быть существенно продвинуто при использовании теорем об операциях в K-пространствах.

3.1. Некоторые достаточные условия. Введём, прежде всего, следующие определения.

3.11. Пусть Y — нормированное пространство. Будем говорить, что Y *обладает свойством* E (кратко: $Y \in E$), если, каковы бы ни были нормированные пространства X_0 и $X \supset X_0$, любая операция U класса H_b^b, отображающая X_0 в Y, может быть распространена на пространство X с сохранением нормы.

Таким образом, тот факт, что Y обладает свойством E, обеспечивает распространимость операции, значения которой попадают в Y. Приведённая выше теорема о продолжении функционалов и операций (см. 1.21) показывает, что таково, в частности, пространство $Y = R_1$ вещественных чисел.

Введём аналогичное определение и относительно пространства X.

3.12. Будем говорить, что нормированное пространство X_0 *допускает распространение операций*, если, каково бы ни было содержа-

щее его нормированное пространство X, каждая операция класса H_b^b, отображающая X_0 в произвольное нормированное пространство Y, может быть распространена на X с сохранением нормы.

Ниже будет выяснено взаимоотношение между этими двумя классами пространств.

Далее, мы введём один класс пространств, относительно которого будет доказано, что пространства этого класса обладают свойством E. Предварительно дадим следующее определение.

3.13. Определение. Пусть X — KB-линеал и одновременно K-пространство и S — единичная сфера пространства X, т. е. совокупность элементов $x \in X$ с $\|x\| \leqslant 1$. *Характеристикой* пространства X будем называть число

$$\rho = \frac{1}{\|\sup S\|}, \tag{1}$$

если $\sup S$ конечен, и $\rho = 0$ — в противном случае.

Определим значение характеристики для некоторых пространств.

В конечномерном пространстве l_n^p $(p \geqslant 1)$ с нормой

$$\|x\| = \|(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(n)})\| = \left[\sum_{i=1}^{n} |\xi^{(i)}|^p\right]^{\frac{1}{p}},$$

очевидно, $\sup S = (1, 1, \ldots, 1)$ и потому

$$\rho = \frac{1}{\|\sup S\|} = \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} = n^{-\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

В бесконечномерном пространстве l^p единичная сфера не ограничена, так как последовательность элементов единичной сферы

$$(1, 0, 0, \ldots), \quad (0, 1, 0, \ldots), \quad (0, 0, 1, \ldots), \ldots$$

не может быть ограничена элементом из l^p. Поэтому для l^p следует считать $\rho = 0$.

В пространстве L^p $(p \geqslant 1)$ единичная сфера также не ограничена. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть функции

$$x_{k,n}(t) = \begin{cases} n^{\frac{1}{p}} \text{ при } \frac{k}{n} \leqslant t \leqslant \frac{k+1}{n} \\ 0 \text{ вне указанного промежутка; } ^{*)} \end{cases}$$

это — элементы сферы K, так как $\int\limits_0^1 x_{k,n}^p\, dt = 1$. Ясно, что $\sup S$, превосходя все функции $x_{k,n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, должен быть $\geqslant n^{\frac{1}{p}}$

*) Для простоты мы ограничиваемся случаем, когда пространство L^p состоит из функций, заданных на отрезке [0,1].

во всём отрезке и, так как n произвольно, $\sup S = +\infty$. Итак, и для L^p следует принять $\rho = 0$.

3.14. *Пространством типа* $\mathfrak{M}$ будем называть K-пространство, являющееся одновременно KB-линеалом, с характеристикой, равной 1 ($\rho = 1$).

Пространством типа $\mathfrak{M}$ будет, например, пространство всех ограниченных функций, определённых на некотором множестве T, с $\|x\| = \sup\limits_{t \in T} |x(t)|$.

Примером пространства типа $\mathfrak{M}$ может служить и всякий другой KB-линеал, состоящий из ограниченных элементов, являющийся одновременно K-пространством, если в нём $\|\mathbf{1}\| = 1$.

3.15. Всякое пространство типа $\mathfrak{M}$ обладает свойством E.

Доказательство. Пусть Y — пространство типа $\mathfrak{M}$, а X и X_0 ($X_0 \subset X$) — нормированные пространства. Пусть U_0 — линейная операция (класса H_b^b), отображающая X_0 в Y; нужно показать возможность её распространения с сохранением нормы.

Рассмотрим единичную сферу S пространства Y; по условию, полагая $\sup S = \bar{y}$, имеем $\|\bar{y}\| = 1$. Из основного неравенства $\|U_0(x)\| \leqslant \|U_0\| \|x\|$ *), следует, что

$$\left\| \frac{|U_0(x)|}{\|U_0\| \|x\|} \right\| \leqslant 1; \quad \frac{|U_0(x)|}{\|U_0\| \|x\|} \in S; \quad \frac{|U_0(x)|}{\|U_0\| \|x\|} \leqslant \bar{y}; \; |U_0(x)| \leqslant \bar{y} \|U_0\| \|x\|.$$

Последнее неравенство показывает, что абстрактная норма операции U_0 конечна и удовлетворяет неравенству $|U_0| \leqslant \|U_0\| \bar{y}$. По теореме о распространении операции с конечной абстрактной нормой (1.21) она может быть распространена на всё X и для полученной операции $U(x)$ имеем:

$$|U| = |U_0| \leqslant \|U_0\| \bar{y}; \quad \|U\| \leqslant \||U|\| \leqslant \|U_0\|,$$

что и доказывает наше утверждение.

На основании доказанной только что теоремы легко устанавливается следующая теорема, известная ранее, но доказывавшаяся гораздо более сложным путём.

3.16. Каково бы ни было нормированное пространство Y, существует пространство $\bar{Y} \supset Y$, обладающее свойством E и, следовательно, такое, что если X_0 и X ($X \supset X_0$) — любые нормированные пространства и $y = U_0(x)$ — операция из X_0 в Y, то имеется операция $y = U(x)$ из X в $\bar{Y}$, совпадающая с U_0 на X_0 и имеющая ту же норму.

Доказательство. Действительно, пусть Q обозначает множество $\{f\}$ (b)-линейных функционалов в Y с $\|f\| = 1$, и M_Q — множество ограниченных функций на Q. Каждому элементу $y \in Y$, соответствует такая функция, а именно $f(y) = \varphi_y(f)$; при этом раз-

*) В этом параграфе под $\|U\|$ понимается (b)-норма операции U.

ным y соответствуют различные функции и $\|y\| = \|\varphi_y\|_{M_Q}$ (см. 1.24). Поэтому Y можно рассматривать как подпространство пространства M_Q типа $\mathfrak{M}$; но последнее обладает свойством E, и потому M_Q и может быть принято в качестве $\overline{Y}$.

Теперь перейдём к установлению условий того, чтобы пространство, рассматриваемое как область задания аргумента, допускало распространение операций.

Прежде всего условие возможности распространения заменим некоторым эквивалентным ему.

Назовём *проекцией* линейного нормированного пространства X в его подпространство $X_0 (\subset X)$ линейное отображение P из X в X_0 с нормой 1 ($\|P\| = 1$), сохраняющее элементы X_0 неизменными: $Px = x$ для $x \in X_0$. Тогда имеем:

3.17. Для того чтобы нормированное пространство X_0 допускало распространение операций на пространство $X (X \supset X_0)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала проекция с X на X_0.

Для установления необходимости условия достаточно применить возможность распространения операций с сохранением нормы к тождественной операции $I(x) = x$, переводящей X_0 в себя. Тогда её распространение — операция $P(x)$ — переводит X в X_0, также имеет норму 1 и, очевидно, сохраняет элементы из X_0 неизменными, т. е. представляет проекцию X в X_0.

Обратно, если дано существование проекции P пространства X в X_0, то для произвольной операции U_0 из X_0 в Y её распространение на X задается равенством

$$U(x) = U_0 P(x).$$

Теперь мы имеем возможность установить, что класс пространств, допускающих распространение операций, совпадает с классом E.

3.18. Теорема. *Для того чтобы нормированное пространство X_0 допускало распространение операций, необходимо и достаточно, чтобы оно обладало свойством E.*

Необходимость. Пусть Y — пространство, допускающее распространение операций. Согласно 3.16, всегда существует пространство $\overline{Y} \supset Y$, обладающее свойством E. Но раз Y допускает распространение, то имеется, по предыдущему, проекция P пространства $\overline{Y}$ на Y.

Покажем теперь, что само пространство Y обладает свойством E, т. е., что если Y — область значений операции, то последняя распространима. Действительно, пусть X и $X_0 \subset X$ — нормированные пространства и $y = U_0(x)$ — линейная операция из X_0 в Y. Если U_0 рассматривать как операцию из X_0 в $\overline{Y}$, то она может быть распространена на всё X; получим операцию $U_1(x)$ из X в $\overline{Y}$ с $\|U_1\| = \|U_0\|$ и такую, что $U_1(x) = U_0(x)$ при $x \in X_0$. Тогда операция

$$U(x) = PU_1(x)$$

и будет распространением операции U_0 на X, так как

$$\|U\|_b \leqslant \|P\|_b \|U_1\|_b = \|U_0\|$$

и при $x \in X_0$

$$U(x) = PU_1(x) = PU_0(x) = U_0(x).$$

Достаточность. Пусть X_0 — пространство, обладающее свойством E, и $X \supset X_0$. Тогда тождественная операция I из X_0 в X_0 может быть распространена на X, т. е. можно построить операцию P из X в X_0 с $\|P\| = 1$ и такую, что $P(x) = I(x) = x$ при $x \in X_0$. Иначе говоря, для любого пространства $X \supset X_0$ имеется проекция на X, а тогда X_0 допускает распространение операций (3.17).

Ввиду доказанной сейчас теоремы в дальнейшем безразлично, говорить ли о пространствах, обладающих свойством E, или о пространствах, допускающих распространение операций.

В предыдущем рассуждении (доказательство необходимости) при установлении того факта, что Y обладает свойством E, мы использовали только то, что имеется пространство $\overline{Y} \supset Y$, обладающее свойством E, и существует проекция с $\overline{Y}$ на Y. Поэтому можно отметить следующее предложение:

Для того чтобы пространство Y обладало свойством E, необходимо и достаточно, чтобы существовали содержащее Y пространство Y^*, обладающее свойством E, и проекция P пространства Y^* на Y.

Нами будет использовано ниже такое следствие этого предложения.

3.19. Пусть X — нормированное пространство и X_0 — такое его подпространство, что имеется проекция X на X_0. Тогда если X_0 не обладает свойством E, то и X не обладает этим свойством.

3.2. Пример операции, не допускающей распространения. Прежде чем перейти к установлению необходимых условий для возможности распространения операций, рассмотрим конкретный случай, когда такое распространение невозможно. Покажем, именно, что тождественная операция, переводящая C в себя, не распространима на пространство M и что, следовательно, пространство C не обладает свойством E. Этот пример интересен в том отношении, что C есть KB-линеал с характеристикой $\rho = 1$ и не является пространством типа $\mathfrak{M}$ только вследствие невыполнения в нём аксиомы V, что указывает на существенность требования аксиомы V для пространства аргумента.

Рассмотрим функции $\chi(t)$ из M и $x_n(t)$ из C, определённые так:

$$\chi(t) = \begin{cases} -1 \text{ при } 0 \leqslant t < \frac{1}{2}, \\ 0 \text{ при } t = \frac{1}{2}, \\ 1 \text{ при } \frac{1}{2} < t \leqslant 1, \end{cases}$$

$$x_n(t)=\begin{cases} 2 \text{ при } 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}-\frac{1}{n}, \\ n(1-2t) \text{ при } \frac{1}{2}-\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{n}, \\ -2 \text{ при } \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$$

Очевидно, $\|\chi\|=1$. Если бы тождественная операция из C в C была продолжима на M, т. е. существовала бы проекция P пространства M на C, то для $x=P(\chi)$ мы имели бы:

$$\|x\|\leqslant\|P\|\|\chi\|=1.$$

Легко видеть, далее, что

$$\|\chi+x_n\|=1.$$

Поэтому (так как $x_n\in C$ и, значит, $P(x_n)=x_n$)

$$\|x+x_n\|=\|P(\chi+x_n)\|\leqslant\|\chi+x_n\|=1.$$

Возьмём некоторое значение $t\left(0\leqslant t<\frac{1}{2}\right)$. Если n настолько велико, что $t<\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$, то, с одной стороны,

$$x(t)+x_n(t)\geqslant-\|x\|+2\geqslant 1,$$

а с другой стороны,

$$x(t)+x_n(t)\leqslant\|x+x_n\|\leqslant 1.$$

Поэтому при достаточно больших n $x(t)+x_n(t)=1$ и, следовательно, $x(t)=1-x_n(t)=-1$ для $0\leqslant t<\frac{1}{2}$. Аналогично устанавливается, что $x(t)=1$ для $\frac{1}{2}<t\leqslant 1$. Но это противоречит тому, что $x\in C$.

На основании полученных ниже необходимых условий мы обнаружим ряд других конкретных пространств, не допускающих распространения *произвольной* линейной операции.

3.3. Некоторые необходимые условия для распространимости операций. Введём прежде всего следующее определение.

3.31. Определение. KB-линеал X называется *квазиравномерно выпуклым* пространством, если существует такое $\eta>0$, что для всякой пары дизъюнктных положительных элементов x_1 и x_2 из X с $\|x_1\|=\|x_2\|=1$ имеет место неравенство

$$\|x_1+x_2\|\leqslant 2-\eta.\text{*)} \tag{3}$$

---

*) Это понятие близко к понятию равномерно выпуклого пространства, встречающемуся в теории нормированных пространств. Так называют пространства, обладающие свойством: каждому $\varepsilon>0$ соответствует $\zeta(\varepsilon)>0$,

Если KB-линеал обладает этим свойством, то число η, для которого написанное неравенство удовлетворено, будем называть *допустимым*.

Отметим, что так как, очевидно, $\|x_1+x_2\| \geqslant \|x_1\| = 1$, т. е. $1 \leqslant 2-\eta$, то допустимое η непременно $\leqslant 1$. Наконец, обратим внимание на то, что неравенство, предположенное для дизъюнктных положительных элементов, верно и для любых дизъюнктных, так как $\||x|\| = \|x\|$.

3.32. Примеры. Установим теперь свойство квазиравномерной выпуклости для некоторых частных видов пространств и выясним допустимые значения η для них.

Пример 1. Пространство l^p $(p>1)$. Пусть x_1 и x_2 — два дизъюнктных элемента из l^p:

$$x_1 = (\xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \ldots); \quad x_2 = (\xi_2^{(1)}, \xi_2^{(2)}, \ldots);$$

$$\|x_1\| = \Big[\sum_i |\xi_1^{(i)}|^p\Big]^{\frac{1}{p}} = 1; \quad \|x_2\| = \Big[\sum_i |\xi_2^{(i)}|^p\Big]^{\frac{1}{p}} = 1.$$

Тогда числа $\xi_1^{(i)}$ и $\xi_2^{(i)}$ не могут быть одновременно отличны от нуля при одинаковых i, поэтому всегда $|\xi_1^{(i)}+\xi_2^{(i)}|^p = |\xi_1^{(i)}|^p + |\xi_2^{(i)}|^p$ и

$$\|x_1+x_2\| = \Big[\sum |\xi_1^{(i)}+\xi_2^{(i)}|^p\Big]^{\frac{1}{p}} = \Big[\sum |\xi_1^{(i)}|^p + \sum |\xi_2^{(i)}|^p\Big]^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}},$$

откуда видно, что

$$\eta = 2 - 2^{\frac{1}{p}}$$

является допустимым η.

Очевидно, всё сказанное применимо и к конечномерному пространству l_n^p.

Пример 2. Пространство L^p $(p>1)$. Если x_1 и x_2 — дизъюнктные его элементы, то соответствующие функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ отличны от нуля на множествах e_1 и e_2 без общих точек и потому

$$\|x_1+x_2\| = \Big[\int |x_1(t)+x_2(t)|^p\,dt\Big]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \Big[\int_{e_1} |x_1(t)|^p\,dt + \int_{e_2} |x_2(t)|^p\,dt\Big]^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}},$$

так что и в этом случае можно принять $\eta = 2 - 2^{\frac{1}{p}}$.

так что если $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ и $\|x_1 - x_2\| \geqslant \varepsilon$, то $\|x_1+x_2\| \leqslant 2-\zeta(\varepsilon)$. Легко видеть, что если KB-линеал равномерно выпуклый, то он и квазиравномерно выпуклый. Действительно, если $x_1 \,\mathrm{d}\, x_2$, то $\|x_1 - x_2\| = \||x_1 - x_2|\| = \||x_1| + |x_2|\| \geqslant \|x_1\| = 1$ и потому в качестве η можно принять $\zeta(1)$.

Читатель без труда убедится в том, что пространства M и m — также квазиравномерно выпуклые, с допустимым $\eta = 1$, а пространства L и l не являются таковыми.

Установим теперь следующее вспомогательное предложение о квазиравномерно выпуклых пространствах.

3.33. Пусть X — рефлексивное квазиравномерно выпуклое пространство. Если f_1 и f_2 — два положительных дизъюнктных (b)-линейных функционала на X, а η — допустимое число, то

$$\|f_1\| + \|f_2\| \leqslant (2-\eta)\|f_1 + f_2\|. \tag{4}$$

Доказательство. Так как f_1 и f_2 дизъюнктны, а сопряжённое пространство X^* есть K-пространство, то существует разложение его на компоненты E_1, E_2: $X^* = \mathrm{S}(E_1, E_2)$ такие, что $f_1 \in E_1$, $f_2 \in E_2$. Каждая из этих компонент является нормированным пространством и потому имеются функционалы F_1 в E_1 и F_2 в E_2 такие, что

$$F_1(f_1) = \|f_1\|; \; F_2(f_2) = \|f_2\|; \; \|F_1\| = \|F_2\| = 1. \tag{5}$$

Распространим эти функционалы на всё X^*, положив

$$\overline{F}_1(f) = F_1(f'), \; \overline{F}_2(f) = F_2(f''), \quad \text{если} \quad f = f' + f'', \; f' \in E_1, \; f'' \in E_2.$$

Очевидно, попрежнему будет $\|\overline{F}_1\| = \|\overline{F}_2\| = 1$. При этом $\overline{F}_1 \, \mathrm{d} \, \overline{F}_2$, так как эти функционалы отличны от нуля на дизъюнктных компонентах (1.29 гл. VI').

Так как пространство X предположено рефлексивным, то все функционалы в X^* порождены элементами из X, т. е. в X найдутся такие элементы x_1 и x_2, что

$$\overline{F}_1(f) = F_{x_1}(f) = f(x_1); \; \overline{F}_2(f) = F_{x_2}(f) = f(x_2).$$

При этом в силу изоморфизма между X и X^{**}, имеем:

$$\|x_1\| = \|\overline{F}_1\| = 1; \; \|x_2\| = \|\overline{F}_2\| = 1; \; x_1 \, \mathrm{d} \, x_2.$$

Теперь

$$\|f_1\| + \|f_2\| = F_1(f_1) + F_2(f_2) = \overline{F}_1(f_1) + \overline{F}_2(f_2) = (\overline{F}_1 + \overline{F}_2)(f_1 + f_2) =$$
$$= (f_1 + f_2)(x_1 + x_2) \leqslant \|f_1 + f_2\| \, \|x_1 + x_2\| \leqslant (2-\eta)\|f_1 + f_2\|.$$

Докажем ещё одно вспомогательное предложение:

3.34. Если X — KB-линеал и ρ — его характеристика, то при всех таких x, что $x \geqslant \mathbf{0}$ и $\|x\| = 1$, справедлива следующая оценка для колебания $f(x)$ как функции от f на области Q^+ (где Q^+ состоит из функционалов $f \geqslant \mathbf{0}$ с $\|f\| = 1$):

$$\omega(x) = \sup_{f, f_1 \in Q^+} |f(x) - f_1(x)| \geqslant 1 - \rho. \tag{6}$$

Действительно, пусть $\omega(x)=\alpha$. Если $\alpha=1$, то утверждение тривиально; считаем поэтому далее, что $\alpha<1$. Имеем:

$$|f_1(x)-f(x)|\leqslant\alpha$$

при любых f, $f_1\geqslant\mathbf{0}$ с $\|f\|=\|f_1\|=1$. Но f_1 можно выбрать так, чтобы $f_1(x)=1$ (см. 2.22); тогда при произвольном f имеем:

$$f_1(x)-f(x)\leqslant\alpha,$$

откуда

$$f(x)\geqslant f_1(x)-\alpha=1-\alpha,\quad\text{или}\quad f\left(\frac{x}{1-\alpha}\right)\geqslant 1.$$

Поэтому, если положить $\bar{x}=\frac{x}{1-\alpha}$, то для любого x' с $\|x'\|\leqslant 1$ имеем $f(\bar{x})\geqslant 1\geqslant f(x')$ или $f(\bar{x}-x')\geqslant 0$. Так как это верно для любого $f\geqslant\mathbf{0}$, то (см. 2.23) получаем, что

$$\bar{x}\geqslant x'.$$

Следовательно, элемент $\bar{x}$ превосходит все элементы единичной сферы S; $\sup S\leqslant\bar{x}$; $\|\sup S\|\leqslant\|\bar{x}\|$ и потому

$$\rho=\frac{1}{\|\sup S\|}\geqslant\frac{1}{\|\bar{x}\|}=1-\alpha,$$

ч. и тр. д.

Теперь переходим к изложению основной теоремы, устанавливающей необходимое условие распространимости операций.

3.35. Теорема о необходимом условии распространимости операций. *Если для квазиравномерно выпуклого рефлексивного пространства X_0 с характеристикой ρ имеется допустимое число η, большее ρ, то X_0 не обладает свойством E.*

Доказательство. Пространство X_0 можно рассматривать (см. доказательство предложения 3.16) как подпространство пространства M_Q ограниченных функций, определённых на Q, — отождествляя $x_0\in X_0$ с функцией $f(x_0)=F_{x_0}(f)$.

Рассмотрим в M_Q функцию

$$\varphi(f)=\|f^+\|-\|f^-\|. \tag{7}$$

Имеем $\|\varphi\|=1$. Это следует из того, что $\|f^+\|\leqslant\|f\|=1$ (см. 2.86 гл. VII) и также $\|f^-\|\leqslant 1$, а потому $|\varphi(f)|\leqslant 1$ и

$$\|\varphi\|_{M_Q}=\sup_{\|f\|=1}|\varphi(f)|=1.$$

Исключено, что $\varphi\in X_0$, т. е. что $\varphi(f)=F_{x_0}(f)=f(x_0)$. Действительно, в противном случае для $x\geqslant\mathbf{0}$ ($\|x\|=1$) мы, при $f\geqslant\mathbf{0}$, имели бы $f(x_0)=\varphi(f)=\|f\|\geqslant f(x)$, следовательно, по 2.23 $x_0\geqslant x$. Но тогда $x_0\geqslant\sup S$ и так как $\|x_0\|=\|\varphi\|=1$, то оказалось бы,

что характеристика для X_0 равна $\rho \geqslant 1$ и допустимое $\eta > 1$, что невозможно (см. 3.31).

Примем теперь в качестве X множество элементов из M_Q вида

$$\alpha\varphi + x = \alpha\varphi + F_x, \quad x \in X_0.$$

Очевидно, $X_0 \subset X$ и при этом X существенно шире, чем X_0 (ибо $\varphi \overline{\in} X_0$).

Пространство X_0 погружено в M_Q и операция P_0, устанавливающая это соответствие $x \longleftrightarrow F_x\,(F_x(f) = f(x))$, линейна и имеет норму, равную 1. Мы покажем, что эта операция, переводящая $X^{**} = X_0$ в X_0, не может быть распространена на X с сохранением нормы.

Предположим противное, т. е. что такое распространение P имеется. Тогда эта операция для элемента $\alpha\varphi + F_x \in X$ должна иметь вид

$$P(\alpha\varphi + F_x) = \alpha x_0 + x, \quad \text{где } x \in X_0 \text{ и } x_0 = P(\varphi) \in X_0.$$

При этом для любого $x \in X_0$ $\|x_0 - x\| = \|P(\varphi - x)\| \leqslant \|P\|\,\|\varphi - x\| = \|\varphi - x\|$, а потому для любого $f \in Q$ $(\|f\| = 1)$ имеем $|f(x_0) - f(x)| \leqslant \|\varphi - x\|$, т. е.

$$f(x) - \|\varphi - x\| \leqslant f(x_0) \leqslant f(x) + \|\varphi - x\|. \tag{8}$$

Возьмём теперь любое $f_1 \in Q^+ \subset Q$. Существует элемент $x_1 \in X_0$ с $\|x_1\| = 2$ и такой, что

$$F_{x_1}(f_1) = f_1(x_1) = 2.$$

Действительно, в X_0^* имеется функционал F с $\|F\| = 2$ и такой, что $F(f_1) = 2$; но по рефлексивности пространства X_0 он имеет вид $F(f) = F_{x_1}(f)$, что и приводит к требуемому заключению. При этом можем считать, что $x_1 \geqslant \mathbf{0}$, так как этого можно было добиться, заменяя x_1 на x_1^+, ибо $\|x_1^+\| \leqslant \|x_1\| = 2$ и

$$2 \geqslant f_1(x_1^+) \geqslant f_1(x_1) = 2.$$

Положим теперь $\psi = \varphi - x_1$ и оценим $\|\psi\| = \|\varphi - x_1\|$. Для любого $f > \mathbf{0}$ имеем $0 < f(x_1) \leqslant 2\|f\|$ и потому

$$|\psi(f)| = |\|f\| - f(x_1)| \leqslant \|f\|.$$

Для произвольного f, используя установленное только что неравенство и 3.33, находим:

$$|\psi(f^+) - \psi(f^-)|^{*)} \leqslant |\psi(f^+)| + |\psi(f^-)| \leqslant \|f^+\| + \|f^-\| \leqslant$$
$$\leqslant (2 - \eta)\|f^+ + f^-\| = (2 - \eta)\|f\|.$$

---

*) Может случиться, что f^+ или $f^- \overline{\in} Q$. Тогда полагаем $\psi(f^+) = \psi\left(\frac{f^+}{\|f^+\|}\right)\|f^+\|$, если $f^+ > \mathbf{0}$ и $\psi(f^+) = 0$ для $f^+ = \mathbf{0}$. Аналогичный смысл имеет $\psi(f^-)$.

Но $\|\psi\| = \|\varphi - x_1\|$ определяется как норма элемента пространства M_Q, а потому имеем:

$$\|\psi\| = \|\varphi - x_1\| = \sup_{\|f\|=1} |\varphi(f) - f(x_1)| = \sup_{\|f\|=1} |(\|f^+\| - \|f^-\|) -$$
$$-(f^+(x_1) - f^-(x_1)) = \sup_{\|f\|=1} |(\|f^+\| - f^+(x_1)) - (\|f^-\| - f^-(x_1))| =$$
$$= \sup_{\|f\|=1} |f^+(z) - f^-(z)| \leqslant 2 - \eta.$$

Отсюда, беря в левой части неравенства (8) $x = x_1$ и $f = f_1$, получаем:

$$f_1(x_0) \geqslant f_1(x_1) - \|\varphi - x_1\| \geqslant 2 - (2 - \eta) = \eta,$$

а беря в правой части неравенства (8) $x = \mathbf{0}$ и опять $f = f_1$, находим, что $f_1(x_0) \leqslant \|\varphi\| = 1$. Итак,

$$1 \geqslant f_1(x_0) \geqslant \eta. \tag{9}$$

Но вспоминая, что $f_1 \in Q^+$ произвольно, заключаем отсюда, что $x_0 > \mathbf{0}$ (так как $\eta > 0$). Отсюда же находим, что при любом $f \in Q$

$$f(x_0) = |f^+(x_0) - f^-(x_0)| \leqslant 1,$$

что даёт $\|x_0\| \leqslant 1$.

Рассмотрим теперь элемент $u = \frac{x_0}{\|x_0\|}$. Очевидно, $u > \mathbf{0}$, $\|u\| = 1$. Далее, пользуясь правой частью неравенства (9) и тем, что $\|u\| = 1$, имеем:

$$\frac{\eta}{\|x_0\|} \leqslant f_1(u) \leqslant 1.$$

Так как аналогичное неравенство будет выполнено и для $f_2 \in Q^+$, то

$$\omega(u) = \sup_{f_1, f_2 \in Q^+} |f_1(u) - f_2(u)| \leqslant 1 - \frac{\eta}{\|x_0\|}.$$

Но на основании 3.34 имеем $\omega(u) \geqslant 1 - \rho$, а потому заключаем, что

$$\rho \geqslant \frac{\eta}{\|x_0\|} \geqslant \eta.$$

В то же время по условию допустимое η могло быть выбрано $> \rho$. Тем самым мы приходим к противоречию.

Рассмотрим применение полученного необходимого условия к исследованию конкретных пространств.

Для пространств l^p $(p > 1)$ имеем $\eta = 2 - 2^{\frac{1}{p}}$, а $\rho = 0$, следовательно условие $\eta > \rho$ выполнено. Для пространства L^p числа η и ρ имеют те же самые значения. Поэтому получаем

3.36. Пространства l^p и L^p $(p < 1)$ не обладают свойством E, т. е. вообще говоря, не допускают распространения операций.

Для конечномерных пространств l_n^p можем принять $\eta = 2 - 2^{\frac{1}{p}}$ и $\rho = n^{-\frac{1}{p}}$. Неравенство $\eta > \rho$ примет вид

$$2 - 2^{\frac{1}{p}} > n^{-\frac{1}{p}}$$

и будет выполнено при достаточно больших n, в частности для $p = 2$, начиная с $n = 3$. Таким образом, эти пространства не обладают свойством E. Можно показать, что пространства l_n^p не обладают свойством E и при любых $n \geqslant 2$. Укажем также без доказательства тот факт, что пространства с аддитивной нормой, т. е. такие, что $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\| (x_1, x_2 \geqslant \mathbf{0})$, содержащие не менее трёх линейно независимых элементов, в частности L и l, не обладают свойством E.

§ 4. Распространение операций класса H_0^0

4.1. Непрерывность одного класса положительных операций. Установим прежде всего следующую теорему, дающую достаточное условие для непрерывности положительных операций.

4.11. Теорема. *Пусть X — K-пространство и X_1 — его подмножество, представляющее собой K-линеал и мажорирующее X и вместе с каждым элементом x содержащее x_+ и x_- *). Пусть, далее, в X_1 определена операция U, отображающая его в регулярное K-пространство Y, — аддитивная, положительная ($U \geqslant \mathbf{0}$) и удовлетворяющая следующему условию:*

$$\text{если } x_n \in X_1 \text{ и } x_n \searrow \mathbf{0} \text{ в } X, \text{ то } U(x_n) \searrow \mathbf{0}.$$

*При этих предположениях операция U полностью (o)-непрерывна, т. е. если $x_n \in X_1$, $x \in X_1$ и $x_n \xrightarrow{(o)} x$ в X, то $U(x_n) \xrightarrow{(o)} U(x)$ **).*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $x_n \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$. При этом, не умаляя общности, можно предполагать, что $x_n > \mathbf{0}$. Действительно, пусть для положительных x_n утверждение доказано. Тогда при любых x_n, ввиду того, что $|x_n| \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$, вместе с $x_n \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$, будем иметь $U(|x_n|) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$, и так как $|U(x_n)| \leqslant U(|x_n|)$, то и $U(x_n) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$.

Положим теперь (для $m \geqslant n$)

$$g_{n,m} = x_n \vee \ldots \vee x_m \, (\in X_1),$$
$$\lim_{m \to \infty} U(g_{n,m}) = y_n, \quad \lim_{n \to \infty} y_n = y_0. \tag{1}$$

---

*) Из этого условия уже вытекает, что X_1 — K-линеал и что грани любого конечного множества, вычисленные в X_1, совпадают с его гранями в X. Например, для множества из двух элементов имеем: $x_1 \vee x_2 = x_1 + (x_2 - x_1)_+$.

**) Эта теорема обобщает предложение 2.44 гл. VII.

Заметим, что y_n непременно конечны, так как x_n, а вместе с ней $g_{n,m}$ ограничены некоторым элементом из X, а потому, — так как X_1 мажорирует X, — и элементом $\bar{x}_1 \in X_1$ и, следовательно, $U(g_{n,m}) \leqslant U(\bar{x}_1)$.

Достаточно доказать, что $y_0 = \mathbf{0}$, ибо тогда, принимая во внимание неравенство $U(x_n) \leqslant y_n$, будем иметь:

$$\lim_{n\to\infty} U(x_n) = \mathbf{0}.$$

Пусть y^* — общий регулятор для предельных соотношений (1), определяющих y_n и y_0. Подберём $m_1 < m_2 < \ldots$ $(m_n \geqslant n)$ так, чтобы

$$\left.\begin{array}{l} U(g_{1,m_1}) \geqslant y_1 - \frac{\varepsilon}{2} y^*, \\ U(g_{2,m_2}) \geqslant y_2 - \frac{\varepsilon}{4} y^*, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Положим теперь

$$\bar{g}_1 = g_{1,m_1}; \quad \bar{g}_2 = g_{1,m_1} \wedge g_{2,m_2}; \ldots \qquad (3)$$

Полученная последовательность — убывающая;

$$\bar{g}_1 \geqslant \bar{g}_2 \geqslant \ldots,$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{g}_n = \mathbf{0}$, так как

$$\bar{g}_n \leqslant g_{n,m_n} \leqslant \sup(x_n, x_{n+1}, \ldots) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}.$$

Поэтому, ввиду предположения, сделанного относительно U,

$$U(\bar{g}_n) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}.$$

С другой стороны, мы имеем:

$$\begin{aligned} U(\bar{g}_n) &= U(g_{1,m_1} \wedge g_{2,m_2} \wedge \ldots \wedge g_{n,m_n}) \geqslant \\ &\geqslant U(g_{1,m_n} \wedge g_{2,m_n} \wedge \ldots \wedge g_{n,m_n}) - U(g_{1,m_n} - g_{1,m_1}) - \\ &- U(g_{2,m_n} - g_{2,m_2}) - \ldots - U(g_{n-1,m_n} - g_{n-1,m_{n-1}}) \geqslant \\ &\geqslant U(g_{n,m_n}) - \frac{\varepsilon}{2} y^* - \ldots - \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} y^* \geqslant y_n - \frac{2^n - 1}{2^n} \varepsilon y^*. \end{aligned}$$

Переходя к пределу, получаем: $\mathbf{0} \geqslant y_0 - \varepsilon y^*$, откуда (ввиду произвольности ε) $y_0 = 0$.

Дадим два примера применения этой теоремы. Прежде всего используем её для установления теоремы Хелли о предельном переходе в интегралах Стилтьеса.

4.12. Если $x_n(t)$ — непрерывные ограниченные в совокупности функции в промежутке $[a, b]$ и

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b),$$

где $x(t)$ также непрерывна, а $g(t)$ — функция ограниченного изменения, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t)\,dg(t) = \int_a^b x(t)\,dg(t).$$

Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться предыдущей теоремой, принимая в ней

$$X_1 = C; \quad X = F_0; \quad U(x) = \int_a^b x(t)\,dg(t),$$

где F_0 — K-пространство ограниченных функций на промежутке $[a, b]$. Все условия будут удовлетворены, в частности, если $x_n \to \mathbf{0}$ в F_0 убывая, и x_n непрерывны, то в силу известной теоремы Дини они сходятся к нулю равномерно, а тогда, очевидно,

$$\lim_{n\to\infty} U(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t)\,dg(t) = 0.$$

4.13. Пусть T — компактное метрическое пространство. Обозначим через C_T пространство непрерывных функций $x(t)$, определённых на T, с

$$\|x\| = \sup_{t\in T} |x(t)|.$$

Это пространство — KB-линеал, полный относительно (b)-сходимости, и содержится в K-пространстве ограниченных функций M_T, заданных на T. Тогда условия слабой сходимости к $\mathbf{0}$ последовательности $x_n(t)$ в пространстве C_T, т. е. необходимые и достаточные условия для того, чтобы при любом функционале F в C_T было $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = 0$, будут следующие:

$$1^\circ\ \|x_n\| \leqslant M; \quad 2^\circ\ \lim_{n\to\infty} x_n(t) = 0 \text{ при всех } t \in T.$$

Необходимость условий очевидна; условие 1° всегда необходимо для слабой сходимости (см., например, 1.26 гл. X *), а для проверки условия 2° достаточно рассмотреть функционал $F_t(x) = x(t)$.

*) $F(x_n)$ при фиксированном n есть функционал от F, и его норма равна $\|x_n\|$.

Обратно, всякий (b)-линейный функционал в C_T можно представить как разность двух положительных (2.84 гл. VII). Поэтому достаточно рассмотреть положительный функционал $F(x)$. Но для убывающей последовательности функций $x_n(t)$, стремящейся к нулю, в силу того, что в компактном пространстве она сходится равномерно *), имеем $F(x_n) \to 0$, а тогда, согласно теореме 4.11, и для всякой последовательности элементов $x_n \in C_T$, (o)-сходящейся к $\mathbf{0}$, т. е. удовлетворяющей условиям 1° и 2° (ср. условия (o)-сходимости в пространстве всех вещественных функций — 2.35 гл. I, а также предложение 1.27 d) гл. II, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = 0.$$

4.2. Распространение положительной операции на замыкание области её задания.

4.21. Теорема о распространении положительной операции на замыкание области её задания. *Пусть X — K-пространство, а $X_1 = \{z\}$ его подмножество, представляющее собой K-линеал, мажорирующее X и вместе с каждым элементом z содержащее z_+ и z_-. Пусть, далее, U — аддитивная положительная операция, переводящая X_1 в регулярное K-пространство Y, обладающая тем свойством, что если $z^{(k)} \in X_1$ и $z^{(k)} \searrow \mathbf{0}$ в X, то $U(z^{(k)}) \searrow \mathbf{0}$.*

Тогда существует замкнутое подмножество X_1^* ($X_1 \subset X_1^* \subset X$), такое, что

a) *X_1^* — замкнутый K-линеал в X.*

b) *U распространяется на X_1^* с сохранением аддитивности, положительности и (oo)-непрерывности; именно,*

$$\text{если } x^{(k)} \in X_1^* \text{ и } x^{(k)} \xrightarrow{(o)} x \text{ в } X, \text{ то } x \in X_1^* \text{ и } U(x^{(k)}) \xrightarrow{(o)} U(x).$$

c) *X_1^* содержит $\overline{X_1}$ — замыкание множества X_1 или борелеву надстройку над X_1 (наименьшее (o)-замкнутое множество, содержащее X_1; см. 2.43 гл. I).*

d) *Распространение операции U на множество X_1^* единственно. Именно, если U возможно распространить на замкнутый K-линеал X_2 ($X_1 \subset X_2 \subset X$) с сохранением аддитивности и (oo)-непрерывности, то значения полученной операции $U_2(x)$ в точках множества $X_2 \cap X_1^*$ должны совпадать со значениями U.*

Доказательство этой теоремы потребует некоторых предварительных построений и лемм. Именно, мы введём два класса элементов G

---

*) Действительно, в противном случае нашлись бы $\varepsilon > 0$, t_k и $n_k \to \infty$ такие, что $x_{n_k}(t_k) > \varepsilon$. Выбирая частичную сходящуюся последовательность $t_{k_i} \to t$, мы имели бы при любом n и всех достаточно больших i: $x_n(t_{k_i}) \geqslant x_{n_{k_i}}(t_{k_i}) > \varepsilon$, а потому и $x_n(t) \geqslant \varepsilon$, вопреки предположению, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = 0$.

и H, содержащих X_1, и предварительно определим операцию U для элементов этих классов.

4.22. Образуем множество $G = \{g\}$ элементов вида

$$g = \lim_{n\to\infty} z_n,$$

где $z_n \in X_1$ и последовательность $\{z_n\}$ — возрастающая.

Через H обозначим множество элементов вида $h = -g$, где $g \in G$. Очевидно, $X_1 \subset G \cap H$.

4.23. a) Если $g \in G$ и $\lambda > 0$, то $\lambda g \in G$; если $g \in G$ и $\lambda < 0$, то $\lambda g \in H$.

b) Если $g', g'' \in G$, то

$$g' + g'' \in G; \quad g' \wedge g'' \in G; \; g' \vee g'' \in G.$$

c) Если $z_n \nearrow g$ и $z_n' \nearrow g$, то существуют

$$\lim_{n\to\infty} U(z_n) = \lim_{n\to\infty} U(z_n').$$

Доказательство. a) Если $z_n \nearrow g$ и $\lambda > 0$, то $\lambda z_n \nearrow \lambda g$ и потому $\lambda g \in G$.

Если $\lambda < 0$, то $\lambda g = -[(-\lambda) g] \in H$, так как $-\lambda > 0$ и $(-\lambda) g \in G$.

b) Имеются $z_n', z_n'' \in X_1$ такие, что $z_n' \nearrow g'$, $z_n'' \nearrow g''$. Тогда

$$z_n' + z_n'' \nearrow g' + g'', \quad z_n' \wedge z_n'' \nearrow g' \wedge g'', \quad z_n' \vee z_n'' \nearrow g' \vee g'',$$

откуда и следует требуемое утверждение.

c) Написанные пределы существуют, так как последовательности $U(z_n)$ и $U(z_n')$ — возрастающие и их элементы не превосходят $U(z_0)$, где $z_0 \geqslant g$, $z_0 \in X_1$.

Далее имеем $z_n - z_n' \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$, а тогда по 4.11

$$\lim_{n\to\infty} U(z_n) - \lim_{n\to\infty} U(z_n') = \lim_{n\to\infty} U(z_n - z_n') = \mathbf{0}.$$

4.24. Согласно 4.23 c), $\lim\limits_{n\to\infty} U(z_n)$ не зависит от выбора последовательности $\{z_n\}$, определяющей g ($z_n \nearrow g$). Этот предел мы и примем за значение $U(g)$. Очевидно, это определение не находится в противоречии с определением U на $X_1 \subset G$. Положим также $U(h) = -U(-h)$, если $h \in H$, пользуясь тем, что $-h \in G$.

4.25. a) Если $g', g'' \in G$, то

$$U(g' + g'') = U(g') + U(g'').$$

b) Если $g \in G$, то

$$U(\lambda g) = \lambda U(g).$$

c) Если $g', g'' \in G$ и $g' \geqslant g''$, то

$$U(g') \geqslant U(g'').$$

d) Если $g \in G$, $h \in H$, $g \geqslant h$, то

$$U(g) \geqslant U(h).$$

e) Если $g^{(k)} \in G$, $g^{(k)} \nearrow g$, то $g \in G$ и

$$U(g) = \lim_{k \to \infty} U(g^{(k)}).$$

Доказательство. a) Пусть $z_n' \nearrow g'$, $z_n'' \nearrow g''$. Тогда $z_n' + z_n'' \nearrow g' + g''$ и

$$U(g' + g'') = \lim_{n \to \infty} U(z_n' + z_n'') =$$

$$= \lim_{n \to \infty} U(z_n') + \lim_{n \to \infty} U(z_n'') = U(g') + U(g'').$$

b) Если $\lambda > 0$ и $z_n \nearrow g$, то $\lambda z_n \nearrow \lambda g$ и

$$U(\lambda g) = \lim_{n \to \infty} U(\lambda z_n) = \lambda \lim_{n \to \infty} U(z_n) = \lambda U(g).$$

Если $\lambda < 0$, то $\lambda g \in H$ и, по определению,

$$U(\lambda g) = -U(-\lambda g) = -(-\lambda) U(g) = \lambda U(g).$$

c) Если $z_n' \nearrow g'$, $z_n'' \nearrow g''$, то $z_n' \vee z_n'' \nearrow g' \vee g'' = g'$, а потому

$$U(g') = \lim_{n \to \infty} U(z_n' \vee z_n'') \geqslant \lim_{n \to \infty} U(z_n'') = U(g'').$$

d) Пусть $z_n \nearrow g$ и $z_n' \searrow h$. Имеем: $z_n' \leqslant z_n \vee z_n' = z_n + (z_n' - z_n)_+$; но $(z_n' - z_n)_+ \xrightarrow{(o)} (h - g)_+ = \mathbf{0}$. Поэтому

$$U(h) = \lim_{n \to \infty} U(z_n') \leqslant \lim_{n \to \infty} U(z_n + (z_n' - z_n)_+) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} U(z_n) + \lim_{n \to \infty} U((z_n' - z_n)_+) = \lim_{n \to \infty} U(z_n) = U(g).$$

e) Построим $z_n^{(k)} \nearrow g^{(k)} (n \to \infty)$ и положим

$$z_n = z_n^{(1)} \vee z_n^{(2)} \vee \ldots \vee z_n^{(n)}.$$

Тогда

$$z_n \leqslant z_{n+1};\ z_n \leqslant g^{(1)} \vee \ldots \vee g^{(n)} = g^{(n)} \leqslant g;\ z_n \geqslant z_n^{(k)} \text{ при } n \geqslant k.$$

Отсюда ясно, что $\lim\limits_{n \to \infty} z_n \geqslant g^{(k)}$, а потому $z_n \nearrow g$, следовательно, на основании c)

$$\lim_{k \to \infty} U(g^{(k)}) \leqslant U(g) = \lim_{n \to \infty} U(z_n) \leqslant \lim_{n \to \infty} U(g^{(n)})$$

4.26. Для любого элемента $x \in X$ положим

$$\overline{U}(x) = \inf_{\substack{g \geqslant x \\ g \in G}} U(g); \quad \underline{U}(x) = \sup_{\substack{h \leqslant x \\ h \in H}} U(h). \tag{4}$$

Так как для каждого элемента $x \in X$ имеются такие элементы z', $z'' \in X_1$, что $z' \leqslant x \leqslant z''$, то ясно, что множества элементов g и h, участвующих в определении $\overline{U}(x)$ и $\underline{U}(x)$, не пусты и эти последние конечны ($\geqslant U(z')$ и $\leqslant U(z'')$).

Далее, на основании 4.25 d) ясно, что всегда

$$\overline{U}(x) \geqslant \underline{U}(x).$$

Обозначим через X_1^* множество тех элементов x, для которых имеем здесь знак равенства, и положим для них, по определению,

$$U(x) = \overline{U}(x) = \underline{U}(x).$$

Приведём следующий критерий принадлежности элемента x множеству X_1^*.

4.27. Если $x \in X_1^*$, то найдётся такой y^*, а затем для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие g и h, $g \in G$, $h \in H$, что

$$h \leqslant x \leqslant g; \quad U(g) - U(h) < \varepsilon y^*; \tag{5}$$

обратно, если такой y^* найдётся для любого $\varepsilon > 0$, то $x \in X_1^*$ и при этом, если элемент y таков, что $U(h) \leqslant y \leqslant U(g)$ при любом $\varepsilon > 0$ и соответствующем выборе g и h, то $U(x) = y$.

Доказательство. Пусть $x \in X_1^*$. Благодаря регулярности пространства Y из множеств элементов g и h, определяющих $\overline{U}(x)$ и $\underline{U}(x)$ (см. (4)), мы можем выбрать счётные подмножества так, что

$$h_n \leqslant x \leqslant g_n, \quad \inf_n U(g_n) = \sup_n U(h_n) = U(x).$$

Если принять $h_n' = h_1 \vee h_2 \vee \ldots \vee h_n$, $g_n' = g_1 \wedge g_2 \wedge \ldots \wedge g_n$, то (так как $U(g_n') \leqslant \inf\limits_{k=1,\ldots,n} U(g_k)$, $U(h_n') \geqslant \sup\limits_{k=1,\ldots,n} U(h_k)$) будем иметь:

$$\lim_{h \to \infty} U(g_n') = \lim_{h \to \infty} U(h_n') = U(x).$$

Обозначим через y^* общий регулятор сходимости для обоих предельных переходов; тогда при любом $\varepsilon > 0$ и при достаточно большом n будет

$$U(g_n') \leqslant U(x) + \frac{\varepsilon}{2} y^*, \quad U(h_n') \geqslant U(x) - \frac{\varepsilon}{2} y^*,$$

следовательно

$$U(g_n') - U(h_n') \leqslant \varepsilon y^*.$$

Итак, наличие требуемого y^* доказано.

Обратно, если y^*, а также g и h, удовлетворяющие указанным условиям, имеются, то, очевидно,

$$U(h) \leqslant \underline{U}(x) \leqslant \overline{U}(x) \leqslant U(g), \quad \overline{U}(x) - \underline{U}(x) \leqslant U(g) - U(h) < \varepsilon y^*$$

и потому $x \in X_1^*$ и $\overline{U}(x) = \underline{U}(x) = U(x)$; при этом, если элемент y таков, что $U(g) \geqslant y \geqslant U(h)$, то $|U(x) - y| < \varepsilon y^*$ и потому $U(x) = y$.

4.28. a) Если $x, x' \in X_1^*$, то $x + x' \in X_1^*$ и

$$U(x + x') = U(x) + U(x').$$

b) Если $x \in X_1^*$, то $-x \in X_1^*$ и

$$U(-x) = -U(x).$$

c) Если $x \in X_1^*$, то $\lambda x \in X_1^*$ и

$$U(\lambda x) = \lambda U(x).$$

d) Если $x, x' \in X_1^*$ и $x \geqslant x'$, то

$$U(x) \geqslant U(x').$$

e) Если $x_n \in X_1^*$ и $x_n \nearrow x$ (или $x_n \searrow x$), то $x \in X_1^*$ и

$$\lim_{n \to \infty} U(x_n) = U(x).$$

f) $G \subset X_1^*$ и $H \subset X_1^*$.

g) Если $x \in X_1^*$, то x_+, x_-, $|x| \in X_1^*$.

Доказательство. a) По 4.27 найдутся y^*, y'^* и затем, по любому $\varepsilon > 0$, $h, h' \in H$, $g, g' \in G$ такие, что

$$h \leqslant x \leqslant g; \; h' \leqslant x' \leqslant g'; \; U(g) - U(h) < \varepsilon y^*; \; U(g') - U(h') < \varepsilon y'^*.$$

Но тогда $h + h' \in H$, $g + g' \in G$ и

$$h + h' \leqslant x + x' \leqslant g + g'; \qquad U(g + g') - U(h + h') < \varepsilon (y^* + y'^*),$$

откуда следует, опять по 4.27, что $x + x' \in X_1^*$. При этом так как $U(h + h') \leqslant U(x) + U(x') \leqslant U(g + g')$, то должно быть

$$U(x + x') = U(x) + U(x').$$

b) Если $x \in X_1^*$, то по 4.26 имеем:

$$\underline{U}(-x) = \sup_{\substack{h \leqslant -x \\ h \in H}} U(h) = -\inf_{\substack{-h \geqslant x \\ h \in H}} U(-h) = -\inf_{\substack{g \geqslant x \\ g \in G}} U(g) = -\overline{U}(x);$$

аналогичным образом $\overline{U}(-x) = -\underline{U}(x)$, и так как $\underline{U}(x) = \overline{U}(x)$, то $U(-x) = \underline{U}(-x)$, следовательно $(-x) \in X_1^*$ и $U(-x) = -U(x)$.

c) Если $\lambda > 0$, то утверждение легко доказывается подобно a) либо b), а случай $\lambda < 0$ приводится к $\lambda > 0$ с помощью b).

d) Если $x \geqslant x'$, то, очевидно,

$$U(x) = \sup_{\substack{h \leqslant x \\ h \in H}} U(h) \geqslant \sup_{\substack{h \leqslant x' \\ h \in H}} U(h) = U(x').$$

e) Так как последовательность $\{x_n\}$ — возрастающая и ограниченная (элементом из X_1), то существует

$$\lim_{h \to \infty} U(x_n) = y.$$

Нужно доказать, что $x \in X_1^*$ и

$$U(x) = y.$$

Для каждого x_n, согласно 4.27, существует свой регулятор y^*; но мы можем считать, что y^* выбрано общим для всех x_n, а также пригодным в качестве регулятора сходимости для предельного перехода $U(x_n) \to y$ *). По $\varepsilon > 0$ для x_n найдутся $g_n \in G$, $h_n \in H$ такие, что

$$h_n \leqslant x_n \leqslant g_n; \quad U(g_n) - U(h_n) < \frac{\varepsilon}{2^n} y^*.$$

Положим

$$g^{(n)} = g_1 \vee g_2 \vee \ldots \vee g_n; \quad g = \sup_n g_n = \lim_{n \to \infty} g^{(n)}.$$

Тогда, очевидно, $g \geqslant x$. Далее, по выбору g_1 имеем:

$$U(g^{(1)}) = U(g_1) \leqslant U(x_1) + \frac{\varepsilon}{2} y^*.$$

Покажем по индукции, что и для любого n

$$U(g^{(n)}) \leqslant U(x_n) + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \varepsilon y^*.$$

Действительно,

$$U(g^{(n+1)}) = U(g^{(n)} \vee g_{n+1}) = U(g^{(n)} + (g_{n+1} - g^{(n)})_+) \leqslant$$
$$\leqslant U[g^{(n)} + (g_{n+1} - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_n)] \leqslant$$
$$\leqslant [U(x_n) + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \varepsilon y^*] + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} y^* + [U(x_{n+1}) - U(x_n)] =$$
$$= U(x_{n+1}) + \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \varepsilon y^*.$$

---

*) Читатель легко может проверить, что общий регулятор существует, повторив доказательство теоремы об общем регуляторе сходимости (1.25 гл. V).

Переходя к пределу в доказанном неравенстве по $n \to \infty$ и учитывая 4.25 e) и ещё что $U(g^{(n)}) \geqslant U(x_n)$, получаем:

$$y \leqslant U(g) \leqslant y + \varepsilon y^*.$$

С другой стороны, при достаточно большом $n = n_0$ должно быть

$$U(x_{n_0}) \geqslant y - \frac{\varepsilon}{2} y^*.$$

А тогда, полагая $h = h_{n_0}$, имеем:

$$U(h) = U(h_{n_0}) \geqslant U(x_{n_0}) - \frac{\varepsilon}{2^{n_0}} y^* \geqslant y - \varepsilon y^*.$$

Из полученных неравенств вытекает, что

$$h \leqslant x \leqslant g; \quad U(h) \leqslant y \leqslant U(g); \quad U(g) - U(h) \leqslant 2\varepsilon y^*.$$

Это показывает, что $x \in X_1^*$ и

$$U(x) = y = \lim_{n \to \infty} U(x_n).$$

Случай $x_n \searrow x$ сводится к предыдущему. Действительно, тогда $(-x_n) \nearrow (-x)$ и на основании уже доказанного

$$U(x) = -U(-x) = -\lim_{n \to \infty} U(-x_n) = \lim_{n \to \infty} U(x_n).$$

f) Так как, очевидно, $X_1 \subset X_1^*$ (для $x \in X_1$ можно принять $g = h = x$), то из e) сразу вытекает, что $G \subset X_1^*$ и $H \subset X_1^*$.

g) Достаточно доказать, что $x_+ \in X_1^*$. Подобрав для $x \in X_1^*$ элементы y^*, g, h в соответствии с 4.27, имеем, очевидно:

$$h_+ \in H, \ g_+ \in G; \ h_+ \leqslant x_+ \leqslant g_+; \ U(g_+) - U(h_+) = U(g_+ - h_+) \leqslant$$
$$\leqslant U(g - h) < \varepsilon y^*$$

[так как $g_+ - h_+ \leqslant (g_+ - h_+) + (h_- - g_-) = g - h$]. Отсюда сразу получаем, что по 4.27

$$x_+ \in X_1^*.$$

4.29. Остаётся убедиться в справедливости всех утверждений, высказанных в теореме 4.21.

Очевидно, $X_1^* \supset X_1$. То обстоятельство, что X_1^* есть линейное множество, следует из 4.28 a), b), c); то, что это K-линеал, — из 4.28 g).

Тот факт, что X_1^* — замкнутое множество, следует из 4.28e). Определённая в нём операция U аддитивна (4.28a), однородна (4.28c)), положительна (4.28d)) и (oo)-непрерывна (4.28e), так как для положительной операции достаточно рассмотреть случай монотонного предельного перехода (4.11).

Остаётся установить единственность распространения. Пусть $U_1(x)$ — другая положительная операция класса H_o^o, распространяющая U с X_1 на некоторое замкнутое множество X_2 $(X_1 \subset X_2 \subset X)$.

Прежде всего, если $g \in G$, $x_n \nearrow g$, $x_n \in X_1 \subset X_2$, то мы должны иметь $g \in X_2$ и $U_1(g) = \lim\limits_{n\to\infty} U_1(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} U(x_n) = U(g)$. Таким же образом, если $h \in H$, то $h \in X_2$ и $U_1(h) = U(h)$. Пусть теперь $x \in X_1^* \cap X_2$. Как мы видели выше при доказательстве предложения 4.27, можно найти такие монотонные последовательности $g_n' \in G$, $h_n' \in H$, $h_n' \leqslant x \leqslant g_n'$, что

$$\lim_{n\to\infty} U(h_n') = \lim_{n\to\infty} U(g_n') = U(x).$$

Но мы должны иметь, в силу положительности операции U_1, неравенства

$$U(h_n') = U_1(h_n') \leqslant U_1(x) \leqslant U_1(g_n') = U(g_n'),$$

откуда ясно, что $U_1(x) = U(x)$.

4.3. Замечания и дополнения к предыдущей теореме.

4.31. Для любого $x \in X_1^*$ можно указать также элементы x', $x'' \in \overline{X_1} = B(X_1)$ (2.43, гл. I), что

$$x' \leqslant x \leqslant x''; \quad U(x') = U(x'') = U(x);$$

при этом элементы x', x'' могут быть взяты не выше второго класса т. е. получаются из элементов множества X_1 с помощью не более чем двух предельных переходов.

Действительно, если рассмотреть построенные выше для $x \in X_1^*$ элементы $h_n' \in H$, $g_n' \in G$ такие, что

$$h_n' \leqslant x \leqslant g_n'; \quad \lim_{n\to\infty} U(g_n') = \lim_{n\to\infty} U(h_n') = U(x),$$

то, полагая $x' = \lim\limits_{n\to\infty} h_n'$, $x'' = \lim\limits_{n\to\infty} g_n'$ сразу получаем наше утверждение.

4.32. Условие, что множество X_1 мажорирует X, можно в 4.21 отбросить. Разница будет в том, что множество X_1^* будет тогда замкнутым в смысле ограниченной (o)-сходимости, точнее, если $x_n \in X_1^*$, $x_n \xrightarrow{(o)} x$ и $|x_n| \leqslant x_0$, $x_0 \in X_1$, то $x \in X_1^*$. Операция U будет непрерывна в том же смысле, т. е. при указанных условиях $U(x_n) \xrightarrow{(o)} U(x)$.

Для установления этого предложения достаточно построить вспомогательное пространство $X' \subset X$, состоящее из элементов пространства X, ограниченных элементами множества X_1, т. е. таких элементов $x \in X$, что $|x| \leqslant x_0$, где x_0 — некоторый элемент из X_1, и применить теорему 4.21 к этому пространству. Очевидно, (o)-сходимость в X' будет именно ограниченная (o)-сходимость в X, что и приводит к указанным выше изменениям в формулировке теоремы 4.21.

4.33. Теорема 4.21 остаётся справедливой и в том случае, если X — K-группа, в которой пятая аксиома K-пространств выполнена в полном объёме.

В доказательство не требуется вносить никаких изменений и нужно лишь исключить пункты, связанные с проверкой свойств, относящихся к умножению на скаляры.

4.34. Оказывается возможным также построить по данной операции U пространство, подобное пространству L. Наметим это построение.

Пусть Ω — максимальное расширение пространства X. Обозначим через Ω' множество таких положительных элементов $\omega' \in \Omega$, которые представимы в виде $\omega' = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $x_n \in X_1^*$, $x_n \geqslant \mathbf{0}$, $x_n \nearrow \omega'$, $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n) < +\infty$, а также элементов, представимых в виде $\omega = \omega_1' - \omega_2'$, где ω_1' и ω_2' — положительные элементы из Ω'.

Для положительных элементов $\omega \in \Omega'$ можно принять

$$U(\omega) = \lim_{n\to\infty} U(x_n),$$

причём легко проверить, что выбор определяющей последовательности x_n, удовлетворяющей поставленным выше условиям, не влияет на значение $U(\omega)$. Для неположительного $\omega \in \Omega'$ положим $U(\omega) = U(\omega_+) - U(\omega_-)$. Можно проверить, что Ω' представляет замкнутый K-линеал в пространстве Ω, а $U(\omega)$ — (o)-непрерывную операцию на нём. Наконец, если в Ω' отождествить элементы $\omega' = \omega''$, для которых $U(|\omega' - \omega''|) = 0$, то Ω' превратится в K-пространство $\overline{\Omega}$, в котором величина $\rho(\omega) = U(|\omega|)$ может играть роль метрической функции, хотя она имеет значения, принадлежащие пространству Y, а не числовые. При этом будут соблюдены все условия 1—5, наложенные на метрическую функцию в пп. 1.11 и 1.21 гл. VI, что позволяет установить, что $\overline{\Omega}$ — регулярное пространство. Это пространство аналогично пространству L суммируемых по Лебегу функций.

4.35. В теореме 4.21 устанавливается возможность распространения положительной операции U. Если операция U регулярна и её модуль $U^* = |U|$ монотонно непрерывен, то распространение U также возможно. Для этого достаточно распространить операции U_+ и U_- на некоторые множества X_1^* и X_2^*, а тогда U будет распространено на множество $X_3^* = X_1^* \cap X_2^*$ с сохранением (o)-непрерывности, причём такое распространение, во всяком случае на множестве $\overline{X_1}$, определяется единственным образом.

4.4. Применения к теории меры и интеграла. Мы покажем сейчас, что установленные выше общие теоремы о распространении операций класса H_0^0 позволяют в применении к конкретным пространствам легко получить основные факты теории интегралов Лебега и Стилтьеса — Лебега, а также теории меры.

4.41. Применим прежде всего теорему 4.21 к случаю, когда X есть пространство всех ограниченных функций $x(t)$, заданных в n-мерном эвклидовом пространстве $T=\{t\}$ и отличных от нуля каждая лишь на ограниченной части пространства, а X_1 — подмножество непрерывных функций из X. В качестве операции U примем заданный на X_1 функционал, равный интегралу Римана

$$F(x)=\int_T x(t)\,dt.$$

Все условия теоремы будут удовлетворены. В частности, если $x_n \in X_1$, $x_n \searrow \mathbf{0}$, то так как непрерывные функции $x_n(t)$ отличны от нуля лишь на компактном подмножестве пространства T, в силу упоминавшейся уже теоремы Дини, функции $x_n(t)$ будут стремиться к $\mathbf{0}$ равномерно, а в таком случае

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n)=\lim_{n\to\infty}\int_T x_n(t)\,dt=0.$$

На основании доказанной теоремы функционал $F(x)$ может быть распространён на множество X^* функций, включающее в себя все ограниченные функции классификации Бэра, отличные от нуля на ограниченной части пространства. Функции из множества X^* можно назвать измеримыми (L) и значение функционала $F(x)$ принять для них за значение интеграла

$$\int_T x(t)\,dt=F(x).$$

Легко убедиться в том, что это определение совпадает с обычным определением интеграла Лебега (для ограниченных функций на ограниченной части пространства). Прежде всего, из положительности, аддитивности и (o)-непрерывности функционала (теорема 4.21), а также его определения сразу вытекают следующие свойства интеграла:

1. Если $x(t)$ — непрерывная функция, то интеграл $\int_T x(t)\,dt$ совпадает с её обычным интегралом Римана.

2. $\int_T x(t)\,dt \geqslant 0$, если $x(t)\geqslant 0$.

3. $\int_T [\lambda_1 x_1(t)+\lambda_2 x_2(t)]\,dt=\lambda_1\int_T x_1(t)\,dt+\lambda_2\int_T x_2(t)\,dt.$

4. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)=x(t)$ и $|x_n(t)|\leqslant x_0(t)$; $x_0, x_n\in X_1^*$, то $x\in X_1^*$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\int_T x_n(t)\,dt=\int_T x(t)\,dt.$

5. Если $x_1, x_2 \in X_1^*$, $\int\limits_T x_1(t)\,dt = \int\limits_T x_2(t)\,dt$ и $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, то $x \in X_1^*$.

6. Если $\tau = \tau(t)$ есть изометрическое преобразование пространства T, то

$$\int\limits_T x(\tau(t))\,dt = \int\limits_T x(t)\,dt$$

(это свойство получается на основании справедливости соответствующего равенства для непрерывных функций).

На основании этих свойств убеждаемся сразу в том, что (по свойству 4) ограниченные функции второго класса Бэра интегрируемы, а тогда по свойству 5 и всякая функция, интегрируемая в смысле Лебега, должна войти в X_1^*. Проводя рассуждения в обратном порядке, убедимся в том, что всякая функция, принадлежащая X_1^*, интегрируема по Лебегу.

Понятие интеграла может быть распространено далее обычным образом на функции, неограниченные или отличные от нуля на неограниченном множестве.

4.42. На основании построенного понятия интеграла может быть введено и понятие меры. Ограниченное множество $E \subset T$ будем называть измеримым, если его характеристическая функция $\varphi_E(t)$ принадлежит X_1^*, и примем по определению

$$mE = \int\limits_T \varphi_E(t).$$

Тогда на основании свойств интеграла в применении к характеристическим функциям легко проверяются основные свойства меры:

1. Положительность: $mE \geqslant 0$.
2. Абсолютная аддитивность: если $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots$ и $E_i \cap E_j = \Delta\,(i \neq j)$, то $mE = mE_1 + mE_2 + \ldots$
3. $mE = mE'$, если E и E' конгруэнтны.
4. Если $mE = 0$ и $E' \subset E$, то $mE' = 0$.
5. $mD = 1$, если D — единичный куб пространства.

На основании определения меры и перечисленных свойств её легко установить тождественность этой меры с мероопределением Лебега. Действительно, если E — конечная система интервалов, то, аппроксимируя $\varphi_E(t)$ непрерывными функциями, легко убеждаемся в том, что mE равна сумме объёмов (мер) интервалов. Отсюда, по аддитивности, находим, что и мера любого открытого множества равна сумме объёмов интервалов, из которых оно может быть составлено. После этого легко перейти уже к случаю любых измеримых множеств.

4.43. Рассмотрим теперь случай, когда $\Phi(I)$ — положительная аддитивная функция интервала I эвклидова пространства T. В одномерном случае, например, $\Phi(I) = \Phi((\alpha, \beta)) = g(\beta) - g(\alpha)$, где g — неубывающая функция. Тогда для всех непрерывных функций, отличных от нуля на ограниченных подмножествах пространства T, определён интеграл Стилтьеса:

$$\int_T x(t)\, d\Phi(I) = F(x).$$

Покажем, что для всех ограниченных (B)-множеств может быть определена абсолютно аддитивная функция $\overline{\Phi}(e)$ такая, что для непрерывных функций значение интеграла Радона

$$\int_T x(t)\, d\overline{\Phi}(e) = \int_T x(t)\, d\Phi(I).$$

Это — известная теорема Радона о распространении функции интервала.

Для доказательства её достаточно к функционалу $F(x)$ применить теорему о распространении 4.21, все условия которой соблюдены. На основании её можно считать этот функционал определённым во всяком случае для всех ограниченных бэровских функций, отличных от нуля на ограниченной части пространства, и при этом положительным и (o)-непрерывным. Но такой функционал, как известно (см. 2.17 гл. VIII, замечание), выражается интегралом Радона

$$F(x) = \int_T x(t)\, d\overline{\Phi}(e),$$

где $\overline{\Phi}(e)$ — абсолютно аддитивная функция. Это и приводит сразу к заключению теоремы Радона.

4.5. Распространение функций множества. В качестве ещё одного применения теоремы 4.21 получим следующую известную теорему о распространении функций множества.

4.51. Пусть K — некоторое кольцо подмножеств *) множества E и $\Phi(e)$ — положительная и абсолютно аддитивная функция множества (т. е. если $e_n \in K$, $e_1 \supset e_2 \supset \ldots$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} e_n = \Lambda$, то $\Phi(e_n) \to 0$), определённая для всех $e \in K$. Тогда Φ может быть распространена на борелеву надстройку $B(K)$ над классом K с сохранением положительности и абсолютной аддитивности.

Доказательство. Воспользуемся теоремой распространения 4.21, приняв за X множество всех функций, заданных на E и

---

*) Кольцом множеств называется множество множеств, включающее вместе с каждыми двумя множествами их сумму и пересечение.

принимающих целочисленные значения, а за X_1 — совокупность функций вида $x(t) = \sum_{i=1}^{n} l_i \varphi_{e_i}(t)$, где $e_i \in K$, l_i — целые, а $\varphi_e(t)$ обозначает характеристическую функцию множества e. Определим ещё $U(x)$ в X_1, положив

$$U\left(\sum_{i=1}^{n} l_i \varphi_{e_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} l_i \Phi(e_i).$$

Тогда будут соблюдены все условия замечания 4.33 к теореме 4.21 и, применяя её, придём сразу к требуемому результату.

§ 5. Проблема моментов

5.1. Постановка проблемы. Классическая *проблема моментов* состоит в разыскании функции g, монотонной или ограниченного изменения, удовлетворяющей условиям

$$\int_a^b t^k \, dg(t) = \mu_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

и характеризации последовательности $\{\mu_k\}$, для которой эта задача разрешима. Проблема моментов может ставиться также как вопрос о разыскании суммируемой функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей условиям

$$\int_a^b t^k \varphi(t) \, dt = \mu_k \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots), \tag{2}$$

причём на функцию $\varphi(t)$ могут накладываться те или иные дополнительные условия, например, $\varphi \in L^p$ $(p > 1)$ или vrai $\max |\varphi(t)| < +\infty$. В частности, если функция $g(t)$ разыскивается монотонная или функция $\varphi(t)$ — неотрицательная, то говорят о *положительной проблеме моментов*.

Наконец, можно ставить проблему моментов и многомерную (например, двумерную); в этом случае речь идёт о разыскании в области G функции множества $\Phi(e)$ или соответственно суммируемой функции двух переменных $\varphi(t, s)$ удовлетворяющей условиям

$$\int_G t^k s^l \, d\Phi(e) = \mu_{k,l}, \tag{1a}$$

или соответственно

$$\int_G t^k s^l \varphi(t, s) \, dt \, ds = \mu_{k,l}, \tag{2a}$$

где $\{\mu_{k,l}\}_{k,l=0,1,2,\ldots}$ — заданная система чисел.

Проблема моментов рассматривалась П. Л. Чебышевым, А. А. Марковым, Стилтьесом и другими.

Если рассматривать проблему моментов в случае конечного интервала и поставить даже более общую проблему о нахождении функции $g(t)$ из условий

$$\int_a^b x_k(t)\,dg(t) = \mu_k, \tag{3}$$

где $x_k(t)$ — данные непрерывные функции, то её можно считать частным случаем следующей задачи функционального анализа:

Найти линейный функционал F в пространстве E, принимающий заданные значения μ_k на элементах x_k:

$$F(x_k) = \mu_k. \tag{4}$$

Действительно, если принять во внимание общий вид линейного функционала в C (4.11 гл. VIII), то ясно, что нахождение функционала F для случая $E = C$ равносильно нахождению функции g из условий (3). Таким же образом нахождение $\varphi \in L^p$ или почти всюду ограниченной из условий

$$\int_a^b x_k(t)\,\varphi(t)\,dt = \mu_k \tag{5}$$

равносильно нахождению линейного функционала в L^q $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$, соответственно в L, решающего ту же задачу (4).

К последней задаче могут быть применены общие предложения о функционалах в линейных нормированных пространствах, что приводит, как к следствию, к некоторым результатам для общей проблемы моментов в случае конечного интервала. С другой стороны, применяя теоремы о распространении операций класса H_0^0, можно получить ряд результатов для положительной проблемы моментов в случае конечного и бесконечного интервалов.

5.2. Применение теорем функционального анализа к общей проблеме моментов для конечного интервала. Прежде всего мы можем получить единственность решения классической (степенной) проблемы моментов и условия единственности общей проблемы.

5.21. Необходимым и достаточным условием для единственности решения проблемы моментов (3) (соответственно (5) для случаев $\varphi \in L^p$ и $\varphi \in M$), есть фундаментальность системы функций $\{x_k(t)\}$ в C (соответственно в L^q $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ или в L), т. е. требование, чтобы каждая функция $x(t)$ в этих пространствах представлялась

как предел сходящейся (в смысле сходимости в данном пространстве) последовательности линейных комбинаций функций x_k.

Действительно, общая проблема (4) имеет единственное решение в том случае, когда функционал F, равный 0 на элементах $\{x_k\}$, непременно равен 0 тождественно, т. е. когда множество $\{x_k\}$ тотально; но для последнего необходимо и достаточно, чтобы оно было фундаментальным (1.42).

Так как множество степеней $\{t^k\}$, $k=0, 1, 2, \ldots$, фундаментально и в C, и в L^q и в L, то отсюда получаем

5.22. Если решение проблемы моментов (1) с $q \in V$ или (2) с $\varphi \in L^p$ $(p>1)$ либо $\varphi \in M$ существует, то оно единственно.

Далее, в 1.31 было по существу дано необходимое и достаточное условие существования решения для общей проблемы (4). Его можно переформулировать для каждой из частных проблем, например для $E=C$ и $E=L^q$; получаем

5.23. Для существования функции $g \in V$, решающей проблему (3), необходимо и достаточно существование такого M, чтобы

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} h_\nu \mu_\nu\right| \leqslant M \max_{a \leqslant t \leqslant b} \left|\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu x_\nu(t)\right|$$

при произвольных h_ν.

5.24. Для существования функции $\varphi \in L^p$ $(p>1)$, решающей проблему (4), необходимо и достаточно существование такого M, чтобы

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} h_\nu \mu_\nu\right| \leqslant M \left[\int_a^b \left|\sum_{\nu=0}^{n} h_\nu x_\nu(t)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Наконец, специально для степенной проблемы моментов (1) приведём более конкретный критерий разрешимости.

5.25. Теорема (Ф. Хаусдорф). *Для того чтобы проблема* (1) $(a=0,\ b=1)$ *имела решение — функцию g ограниченного изменения, необходимо и достаточно, чтобы числа μ_i удовлетворяли условию*

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left|\Delta^{n-k}\mu_k\right| \leqslant M,$$

где $\Delta^0\mu_k=\mu_k$; $\Delta^{m+1}\mu_k=\Delta^m\mu_k-\Delta^m\mu_{k+1}$ *и, следовательно,* $\Delta^m\mu_k=$ $=\sum_{i=0}^{m} C_m^i(-1)^i\mu_{k+i}$. *При этом* $\operatorname{var} g \leqslant M$.

Необходимость. Пусть проблема моментов имеет решение, т. е. в C существует функционал F, удовлетворяющий условию

$$F(t^k)=\int_0^1 t^k\,dg(t)=\mu_k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Тогда $F(t^{k+1}) = \mu_{k+1}$ и поэтому

$$F(t^k(1-t)) = \mu_k - \mu_{k+1} = \Delta\mu_k,$$

и аналогично

$$F(t^k(1-t)^m) = \Delta^m\mu_k.$$

Отсюда, полагая $\theta_k = \operatorname{sign}\Delta^{n-k}\mu_k$, имеем:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k |\Delta^{n-k}\mu_k| = \sum_{k=0}^{n} \theta_k C_n^k \Delta^{n-k}\mu_k = \sum_{k=0}^{n} \theta_k C_n^k F(t^k(1-t)^{n-k}) =$$

$$= F\Big(\sum_{k=0}^{n} \theta_k C_n^k t^k (1-t)^{n-k}\Big) \leqslant \|F\| \, \Big\|\sum_{k=0}^{n} \theta_k C_n^k t^k (1-t)^{n-k}\Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \|F\| \, \Big\|\sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k (1-t)^{n-k}\Big\| = \|F\|.$$

Достаточность. Пусть условие выполнено. Рассмотрим многочлены С. Н. Бернштейна для функции $x(t)$:

$$B_n(x, t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k (1-t)^{n-k} x\left(\frac{k}{n}\right).$$

Строим функционал F, по определению полагая $F(t^k) = \mu_k$, и в соответствии с этим, если $P(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k$, то

$$F(P) = \sum_{k=0}^{m} a_k F(t^k) = \sum_{k=0}^{m} a_k \mu_k.$$

Тогда, как выше,

$$F(t^k(1-t)^m) = F\Big(\sum_{i=0}^{m} C_m^i t^{k+i}(-1)^i\Big) = \sum_{i=0}^{m} C_m^i (-1)^i \mu_{k+i} = \Delta^m\mu_k.$$

Отсюда

$$|F(B_n(x, t))| = \left|F\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k (1-t)^{n-k} x\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n} C_n^k x\left(\frac{k}{n}\right)(-1)^{n-k}\Delta^{n-k}\mu_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left|x\left(\frac{k}{n}\right)\right| |\Delta^{n-k}\mu_k| \leqslant M\|x\|.$$

В частности, воспользуемся этим фактом для случая, когда $x(t) = P(t)$ — некоторый многочлен, скажем, степени m. В таком случае $B_n(P, t)$ — также многочлен степени $\leqslant m$ *).

При этом так как при $n \to \infty$ $B_n(P, t) \to P(t)$ равномерно **), то и коэффициенты многочлена $B_n(P, t)$ при $n \to \infty$ стремятся к коэффициентам многочлена $P(t)$, а потому на основании определения функционала F имеем:

$$F(P(t)) = \lim_{n \to \infty} F(B_n(P, t)),$$

что позволяет произвести предельный переход в полученном ранее неравенстве и даёт

$$|F(P(t))| \leqslant M \|P\|.$$

Последнее неравенство показывает, что функционал F, определённый на множестве многочленов, имеет норму $\leqslant M$. Поэтому он продолжим на всё C с той же нормой. Но в таком случае функционал F, по общей теореме о представлении функционалов в C (ср. 4.11 гл. VIII), представим в виде

$$F(x) = \int_0^1 x(t)\, dg(t) \qquad (\operatorname{var} g \leqslant M).$$

---

*) Тот факт, что если $P(t)$ — многочлен степени m, то $B_n(P, t)$ — многочлен степени $\leqslant m$, устанавливается, например, так.

Дифференцируя выражение $B_n(P, t)$ и заменяя затем в первой части суммы индекс суммирования k на $k+1$, получаем:

$$B_n'(P, t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[k t^{k-1} (1-t)^{n-k} - (n-k) t^k (1-t)^{n-k-1}\right] P\left(\frac{k}{n}\right) =$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k t^k (1-t)^{n-1-k} \left[P\left(\frac{k+1}{n}\right) - P\left(\frac{k}{n}\right)\right].$$

Аналогично, по индукции получим, что

$$B_n^{(s)}(P, t) = n(n-1)\ldots(n-s+1) \sum_{k=0}^{n-s} C_{n-s}^k t^k (1-t)^{n-s-k} (-1)^s \Delta^s P\left(\frac{k}{n}\right).$$

Из этого выражения видно, что если P — многочлен степени m, то, так как для него $(m+1)$-я разность $\Delta^{m+1} P\left(\frac{k}{n}\right) = 0$, $(m+1)$-я производная его многочлена Бернштейна $B_n^{(m+1)}(P, t) = 0$ и, следовательно, $B_n(P, t)$ — многочлен степени $\leqslant m$.

**) См. И. П. Натансон [2], стр. 23.

Тогда, в частности,

$$\mu_k = F(t^k) = \int_0^1 t^k dg(t).$$

5.3. Положительная проблема моментов. Применение теории операций в полуупорядоченных пространствах позволяет с лёгкостью получить классические теоремы, относящиеся к так называемой положительной проблеме моментов. Их мы получим, установив предварительно одну общую теорему, относящуюся к этой задаче и рассматривающую сразу многомерный случай (формулировка дана для случая плоскости).

5.31. Теорема. *Для того чтобы существовала вполне аддитивная положительная функция $\Phi(e)$, удовлетворяющая условию: $\Phi(e) = 0$, если $e \cap G = \Lambda$, т. е. спектр которой расположен в данном замкнутом множестве G, и такая, что*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} t^k s^l d\Phi(e) = \mu_{k,l},$$

необходимо и достаточно, чтобы для всякого многочлена

$$P(s,t) = \sum_{k,l} a_{k,l} t^k s^l,$$

не отрицательного в G, было

$$P(\{\mu_{k,l}\}) = \sum_{k,l} a_{k,l}\mu_{k,l} \geqslant 0.$$

Необходимость. Умножая неравенство $P(s, t) \geqslant 0$ на $d\Phi(e)$ и интегрируя, находим сразу:

$$\sum_{k,l} a_{k,l}\mu_{k,l} = \iint_G P(s, t)\, d\Phi(e) \geqslant 0.$$

Достаточность. Возьмём в качестве пространства X множество функций $x(s, t)$, определённых на G и не превосходящих каждая некоторого многочлена $|x(s, t)| \leqslant P(s, t)$; легко проверить, что это K-пространство. Через X_1 обозначим множество самих многочленов и через X_c — всех непрерывных на G функций из X. X_c — K-линеал и X_1 — линейное подмножество его. Если x — многочлен:

$$x(t, s) = \sum_{k,l} a_{k,l} t^k s^l,$$

то положим

$$f(x) = \sum_{k,l} a_{k,l}\mu_{k,l}$$

(т. е. в разложении x по степеням $t^k s^l$ заменяется на $\mu_{k,l}$).

Тогда f — аддитивный положительный функционал, определённый на линейном множестве X_1. На основании теоремы 2.13 он может быть распространён с сохранением этих свойств на K-линеал X_c. На X_c он обладает непрерывностью, т. е. если $x_n(t, s) \to 0$ убывая, то $f(x_n) \to 0$.

Действительно, имеем $x_1(t, s) \leqslant P_1(t, s)$, где $P_1(t, s)$ — многочлен. Положим

$$P_0(t, s) = P_1(t, s)(s^2 + t^2)$$

и, взяв произвольное $\varepsilon > 0$, подберём такое m, чтобы было

$$f(P_0) < \varepsilon m^2.$$

Так как $x_n(t, s) \to 0$ убывая, то в общей части множества G и круга $s^2 + t^2 \leqslant m^2$ сходимость будет равномерной и потому $x_n(t, s) \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant N$. Тогда при $n \geqslant N$ на всём множестве G

$$x_n(t, s) \leqslant \varepsilon + \frac{1}{m^2} P_0(t, s),$$

и, так как функционал f положителен,

$$f(x_n) \leqslant \varepsilon f(1) + \frac{1}{m^2} f(P_0) < \varepsilon(\mu_{0,0} + 1),$$

откуда и ясно, что $f(x_n) \to 0$.

Далее, так как X_c — K-линеал и соблюдены условия теоремы 4.21, то функционал $f(x)$ можно распространить на множество X_1^*, содержащее все измеримые (B) функции из X. После этого, если e обозначает множество, измеримое (B), и φ_e — его характеристическую функцию, то полагая

$$\Phi(e) = f(\varphi_e \cap G),$$

получим абсолютно аддитивную функцию множества, удовлетворяющую условиям теоремы.

Ясно, что $\Phi(e) = 0$, если $e \cap G = \Delta$.

На основании теоремы об интегральном представлении операций (1.33 гл. VIII, ср. также 2.17 гл. VIII), заключаем, что

$$f(x) = \int x(t)\, d\Phi(e)^{*)}.$$

---

*) Впрочем, в этом легко убедиться и непосредственно. Если $x \in X$, $x \geqslant 0$, то, составляя сумму Радона для этой функции при разбиении $0 = l_0 < l_1 < \ldots$, $l_{i+1} - l_i \leqslant \lambda$ и полагая $e_i = \mathscr{E}(l_i \leqslant x(s, t) < l_{i+1})$, имеем $\sum_{i=0}^{n} l_i \Phi(e_i) =$

В частности, используя доказанное равенство для функций $t^k s^l$, находим:

$$\mu_{k,l} = f(t^k s^l) = \int t^k s^l d\Phi(e),$$

ч. и тр. д.

5.32. Теорема. *Для того чтобы существовала монотонная функция, решающая проблему моментов*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k dg(t) = \mu_k,$$

необходимо и достаточно, чтобы при любом n квадратичная форма

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_i a_j \mu_{i+j}$$

была неотрицательна, или, что то же самое, чтобы были неотрицательны определители

$$\Delta_n = |\mu_{i+j}|_{i,j=0}^{n} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Доказательство. По теореме 5.31, чтобы проблема моментов была разрешима, нужно, чтобы для всякого многочлена $P(t)$, не отрицательного на $(-\infty, +\infty)$, было $P(\{\mu_k\}) \geqslant 0$.

Поэтому, если $Q(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ — произвольный многочлен, то, полагая $P(t) = Q^2(t) = \sum_{i,j=0}^{n} a_i a_j t^{i+j}$, мы должны иметь

$$P(\{\mu_k\}) = \sum_{i,j=0}^{n} a_i a_j \mu_{i+j} \geqslant 0,$$

что доказывает необходимость условия теоремы.

$= f(\sum_{i=0}^{n} l_i \varphi_{e_i}) \leqslant f(x)$. Поэтому также конечна $\sum_{i=0}^{\infty} l_i \Phi(e_i) \leqslant f(x)$. С другой стороны, $\sum_{i=0}^{\infty} (l_{i+1} - l_i) \Phi(e_i) \leqslant \lambda \Phi(G)$. Отсюда легко заключить, что обе суммы Радона сходятся к $f(x)$, т. е. $\int_G x(s, t)\, d\Phi(e) = f(x)$.

Обратно, если неотрицательность форм дана, то так как всякий многочлен $P(t)$, не отрицательный в $(-\infty, +\infty)$, может быть представлен в виде

$$P(t)=\sum_{l=1}^{m} Q_l^2(t) \text{ *)},$$

имеем для него $P(\{\mu\})=\sum_{l=1}^{m} Q_l^2(\{\mu\})\geqslant 0$. В таком случае по теореме 5.31 проблема моментов разрешима, т. е.

$$\mu_k=\int_{-\infty}^{+\infty} t^k d\Phi(e),$$

где $\Phi(e)$ — абсолютно аддитивная функция множества. Однако, поскольку функция t^k непрерывна, интеграл Радона может быть заменён интегралом Стилтьеса (2.18 гл. VIII), что и приводит к утверждению теоремы.

5.33. Теорема. *Необходимое и достаточное условие разрешимости положительной проблемы моментов Стилтьеса*

$$\int_0^{\infty} t^n dg(t)=\mu_n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

есть неотрицательность форм

$$\sum_{i,j=0}^{n} \mu_{i+j} a_i a_j \quad \text{и} \quad \sum_{i,j=0}^{n} \mu_{i+j+1} a_i a_j. \tag{6}$$

Необходимость условия вытекает из того, что, поскольку многочлены

$$P(t)=Q^2(t)=\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i\Big)^2=\sum_{i,j=0}^{n} a_i a_j t^{i+j} \quad \text{и} \quad P_1(t)=\sum_{i,j=0}^{n} a_i a_j t^{i+j+1}$$

не отрицательны в $(0, +\infty)$, должны быть неотрицательны и формы

$$P(\{\mu\})=\sum_{i,j=0}^{n} \mu_{i+j} a_i a_j \quad \text{и} \quad P_1(\{\mu\})=\sum_{i,j=0}^{n} \mu_{i+j+1} a_i a_j.$$

---

*) Возможность представления многочлена $P(t)$ в указанной форме видна сразу из рассмотрения его разложения на множители, которое имеет вид

$$P(t)=A\prod_{i=1}^{k}(t-t_i)^2\prod_{j=1}^{l}(t^2+p_j t+q_j)=A\prod_{i=1}^{k}(t-t_i)^2\prod_{j=1}^{l}[(t-\rho_j)^2+\delta_j^2],$$

так как вследствие неотрицательности многочлена все вещественные корни его — чётной кратности.

Можно доказать, что здесь, так же как и в рассмотренном ниже случае, можно было бы получить представление только с двумя слагаемыми.

Обратно, так как каждый многочлен $P(t)$, не отрицательный в $(0, +\infty)$, представим в виде

$$P(t) = \sum_{i=1}^{k} Q_i^2(t) + \sum_{j=1}^{l} tR_j^2(t) \text{ *)},$$

то из предположенной неотрицательности форм (6) следует, что $P(\{\mu_k\}) \geqslant 0$. А тогда опять заключаем на основании теоремы 5.31, что проблема моментов разрешима.

5.4. Положительная проблема моментов для конечного интервала.

5.41. Теорема. *Для того чтобы существовала монотонно возрастающая функция $g(t)$, решающая проблему*

$$\int_0^1 t^k\, dg(t) = \mu_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

необходимо и достаточно, чтобы при любых m и k было

$$\Delta^m \mu_k \geqslant 0.$$

Необходимость. Очевидно,

$$\Delta^m \mu_k = \sum_{s=0}^{m} C_m^s (-1)^s \mu_{k+s} = \sum_{s=0}^{m} C_m^s (-1)^s \int_0^1 t^{k+s}\, dg(t) =$$

$$= \int_0^1 t^k (1-t)^m dg(t) \geqslant 0.$$

Достаточность. Пусть $P(t) \geqslant 0$ в промежутке $(0, 1)$. Для многочлена Бернштейна, составленного для $P(t)$, имеем:

$$B_n(P, \{\mu_k\}) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k P\left(\frac{k}{n}\right) \Delta^{n-k} \mu_k \geqslant 0.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ и принимая во внимание, что при этом коэффициенты многочлена $B_n(P, t)$ стремятся к соответствующим коэффициентам многочлена $P(t)$, имеем:

$$P(\{\mu_k\}) = \lim_{n \to \infty} B_n(P, \{\mu_k\}) \geqslant 0.$$

---

*) Возможность такого представления следует из того, что положительные вещественные корни многочлена $P(t)$ непременно должны быть кратными, а потому его разложение на множители имеет вид

$$P(t) = A \prod_{i=1}^{m} (t + \alpha_i) \prod_{j=1}^{n} (t - \beta_i)^2 \prod_{k=1}^{p} [(t - \rho_k)^2 + \delta_k^2] \qquad (\alpha_i, \beta_i \geqslant 0),$$

откуда, раскрывая произведения и квадратные скобки, приходим к требуемому заключению.

Поэтому на основании теоремы 5.31 заключаем, что проблема моментов имеет решение — функцию $\Phi(e)$; но опять, так как множитель t^k непрерывен, интеграл Радона можем заменить интегралом Стилтьеса по соответствующей функции $g(t)$.

5.42. Отметим, что также на основании теоремы 5.31 и таким же образом устанавливается двумерный аналог теоремы 5.41, состоящий в том, что для существования положительной аддитивной функции интервала $\Phi(e)$, удовлетворяющей условиям

$$\int_0^1 \int_0^1 t^k s^l \, d\Phi(e) = \mu_{k,l},$$

необходимо и достаточно, чтобы $\Delta^{m,n}\mu_{k,l} \geqslant 0$.

5.43. На основании теоремы 5.41 легко также дать критерий существования решения проблемы моментов (2) с ограниченной измеримой функцией $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant M$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы, кроме условия $\Delta^m \mu^{(k)} \geqslant 0$, выполнялось условие

$$\Delta^m \mu^{(k)} \leqslant M \Delta^m \frac{1}{k+1} = \frac{M \cdot 1 \cdot 2 \ldots m}{(k+1)(k+2)\ldots(k+m+1)}$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots; \; m = 1, 2, \ldots).$$

Необходимость условия вытекает из того, что если решение имеется, то должно быть

$$\Delta^m \mu^{(k)} = \int_0^1 t^k (1-t)^m \varphi(t)\, dt \leqslant M \int_0^1 t^k (1-t)^m \, dt = M \Delta^m \frac{1}{k+1},$$

так как для $\varphi(t) = 1$ момент $\mu^{(k)} = \dfrac{1}{k+1}$.

Достаточность. Первое из условий обеспечивает существование решения проблемы в виде

$$\int_0^1 t^k \, dg(t) = \mu_k.$$

При этом, так как проблема со значениями моментов $\left\{\dfrac{M}{k+1} - \mu^{(k)}\right\}$ имеет, очевидно, решением функцию $g_1(t) = Mt - g(t)$, но, с другой стороны, в силу второго условия, её решение должно быть положительно, то по единственности заключаем, что именно решение $g_1(t)$ должно быть монотонной функцией. Это показывает, что функция $g(t)$ удовлетворяет условию Липшица, а тогда $g'(t) = \varphi(t)$ — ограниченная измеримая функция и интеграл Стилтьеса может быть превращён в интеграл Лебега:

$$\int_0^1 t^k \, dg(t) = \int_0^1 t^k \varphi(t)\, dt = \mu_k.$$

ГЛАВА X

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ

В теории линейных операций в нормированных пространствах и применениях этой теории к анализу весьма важное значение имеют теоремы о последовательностях линейных операций, в особенности, теорема С. Банаха об ограниченности норм всюду сходящейся последовательности операций и теорема Банаха — Штейнгауза, дающая необходимые и достаточные условия сходимости. В этой главе доказываются теоремы о последовательностях линейных операций в полуупорядоченных пространствах, в частности, аналогичные названным, а также даются некоторые их применения.

§ 1. Общие теоремы о сходимости последовательности операций

1.1. Ограниченные последовательности операций. Будем предполагать здесь и повсюду в этом параграфе, где не указан специально тип пространств, что X и Y — регулярные K-пространства.

1.11. Последовательность операций $\{U_n\}$ класса $H_t^t(H_o^o)$ будем называть *(t)-ограниченной* (*(o)-ограниченной*), если при (t)-аннулируемости (соответственно (o)-аннулируемости) множества $E \subset X$ таким же будет и соединение его образов $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n(E)$ *).

1.12. Замечание. Если X и Y — KB-пространства, то последовательность операций $\{U_n\}$ класса $H_b^b = H_t^t$ (t)-ограничена, если ограничена последовательность их норм $\{\|U\|_b\}$ (см. 2.45c) гл. VI и 2.24 гл. VII).

Можно установить следующее предложение.

1.13. Для того чтобы операции U_n образовывали (t)-ограниченную ((o)-ограниченную) последовательность, необходимо и достаточно, чтобы они были равностепенно непрерывны в точке $x = \mathbf{0}$. Точнее говоря, чтобы при $x \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$ ($x_k \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$) мы имели $U_{n_k}(x_k) \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$ ($U_{n_k}(x_k) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$), каковы бы ни были натуральные n_k.

---

*) Определения (t)- и (o)-аннулируемости — см. 3.11 гл. V.

Доказательство. Проведём рассуждение для случая (t)-ограниченности, в случае (o)-ограниченности оно лишь упрощается.

Необходимость. Докажем, что если $x_k \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$, то $U_{n_k}(x_k) \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$. Выберем частичную последовательность $x_{k_j} \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$ и подберём множители $\lambda_j \to \infty$ так, что $\lambda_j x_{k_j} \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$ (1.22 гл. V). Так как последовательность $\{U_n\}$ (t)-ограничена и множество $\{\lambda_j x_{k_j}\}$ ограничено, то множество $\{U_{n_{k_j}}(\lambda_j x_{k_j})\}$ (t)-аннулируемо. А тогда, поскольку $\frac{1}{\lambda_j} \to 0$, имеем $U_{n_{k_j}}(x_{k_j}) \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$. Итак, из последовательности $\{U_{n_k}(x_k)\}$ можно выбрать частичную, (t)-сходящуюся к $\mathbf{0}$. То же самое было бы возможно и по отношению к любой её подпоследовательности, поэтому и сама последовательность $U_{n_k}(x_k) \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$.

Достаточность. Пусть $E \subset X$ — (t)-аннулируемое множество. Нужно показать, что множество $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n(E)$ будет (t)-аннулируемо. Возьмём последовательность его элементов $U_{n_k}(x_k)$, $x_k \in E$. Для любых $\mu_k \to 0$ имеем $\mu_k U_{n_k}(x_k) = U_{n_k}(\mu_k x_k) \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$, так как $\mu_k x_k \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$ и операции U_n равностепенно непрерывны при $x = \mathbf{0}$. Ввиду произвольности чисел $\mu_k \to 0$ это и доказывает (t)-аннулируемость множества $\bigcup\limits_{n} U_n(E)$.

1.14. Замечание. Отметим, что множество операций $\{U\}$ будет, очевидно, (o)-ограничено, если оно ограничено как множество в пространстве регулярных операций H_r (а $H_r \subset H_0^0$ по теореме 2 42 гл. VII), иначе говоря, если имеется такая операция $U^* \in H_r$, что для любой операции множества $\{U\}$ имеем:

$$|U(x)| \leqslant U^*(x) \qquad \text{при } x \geqslant \mathbf{0}.$$

Это условие, однако, лишь достаточно, но не необходимо. Например последовательность функционалов в $L^2 : f_n(x) = \int\limits_0^1 \sqrt{n}\, e^{-nt} x(t)\, dt$ будет (o)-ограничена, не будучи ограничена в пространстве регулярных фукционалов, в данном случае изоморфном L^2.

Отметим попутно, что, как легко проверить, пользуясь предложением 1.26 гл. VII и регулярностью пространства Y, если операции U регулярны, множество $\{U\}$ и множество $\{|U|\}$ будут (o)-ограничены одновременно.

1.2. Условие (t)-ограниченности последовательности операций.

1.21. Теорема. *Для того чтобы последовательность операций $\{U_n\}$ класса H_t^t была (t)-ограничена, необходимо и достаточно, чтобы при каждом $x \in X$ множество $\{U_n(x)\}$ было (t)-аннулируемо.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна, достаточность докажем, пользуясь известным методом Лебега. Пусть после-

довательность $\{U_n\}$ не (t)-ограничена. Тогда найдутся $\bar{x}_k \in X$ и целые n_k такие, что последовательность $\{\bar{x}_k\}$ (t)-аннулируема, а $\{U_{n_k}(\bar{x}_k)\}$ не (t)-аннулируема. Благодаря последнему существуют такие $\mu_k \to 0$, что $U_{n_k}(\mu_k x_k)$ не будут $\xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$ при $k \to \infty$.

Можем считать $\mu_k > 0$. Положим $V_k = \sqrt{\mu_k} U_{n_k}$. Тогда для всякого $x \in X$ $V_k(x) \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$, но попрежнему последовательность $\{V_k\}$ не (t)-ограничена, а именно, найдётся такая последовательность $x_k \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$, что $V_k(x_k)$ не $\xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$ (достаточно взять $x_k = \sqrt{\mu_k}\, \bar{x}_k$).

Можем считать, что и для всякой частичной последовательности $V_{k_i}(x_{k_i})$ не будет $\xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$, так как, если это условие не выполняется для всей последовательности, то оно непременно выполнено для некоторой подпоследовательности, ибо в противном случае вся последовательность (t)-стремилась бы к нулю.

Переходя к частичной последовательности индексов k и m, можно добиться того, чтобы:

1) $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < +\infty$

(см. 1.27 гл. V), а также, согласно сказанному выше, если только от (t)-сходимости перейти к (o)-сходимости на основании 2.36 гл. I;

2) $V_m(x_k) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$ при $m \to \infty$ для всех k и

3) $V_m(x_k) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$ при $k \to \infty$ при всех m.

Благодаря этому найдётся такой y^* (регулятор сходимости), что $|V_m(x_k)| \leqslant \varepsilon y^*$ при $m \geqslant M(\varepsilon, k)$ и $|V_m(x_k)| \leqslant \varepsilon y^*$ при $k \geqslant K(\varepsilon, m)$.

Примем теперь $k_1 = 1$ и, считая, что $k_1, \ldots, k_{i-1}$ определены, подберём k_i так, чтобы

$$|V_{k_1}(x_{k_i})| \leqslant \frac{1}{2^i} y^*, \ldots, |V_{k_{i-1}}(x_{k_i})| \leqslant \frac{1}{2^i} y^*$$

и

$$|V_{k_i}(x_{k_1})| \leqslant \frac{y^*}{i2^i}, \ldots, |V_{k_i}(x_{k_{i-1}})| \leqslant \frac{y^*}{i2^i}.$$

Выбрав так номера $k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, \ldots$, положим $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_{k_i}$.

Тогда

$$|V_{k_i}(x) - V_{k_i}(x_{k_i})| \leqslant \sum_{j=1}^{i-1} |V_{k_i}(x_{k_j})| + \sum_{j=i+1}^{\infty} |V_{k_i}(x_{k_j})| \leqslant$$

$$\leqslant (i-1)\frac{y^*}{i2^i} + \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} y^* < \frac{1}{2^{i-1}} y^*$$

и потому, так как $V_{k_i}(x_{k_i})$ не $\xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$, то и $V_{k_i}(x)$ не $\xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$, вопреки вышесказанному.

1.22. Если X — пространство типа (B), а Y — регулярное K-пространство и $\{U_n\}$ — последовательность операций класса H_b^t, то для того чтобы она была (t)-ограничена, т. е. чтобы множество $\bigcup_n U_n(S)$, где S — единичная сфера ($x \in S$, если $\|x\| \leqslant 1$), было (t)-аннулируемым, необходимо и достаточно, чтобы при каждом $x \in X$ множество $\{U_n(x)\}$ было (t)-аннулируемо.

Доказательство проводится совершенно аналогично предыдущему, с тем единственным отличием, что вместо (t)-аннулируемости и (t)-сходимости в X нужно говорить об ограниченности по норме и, соответственно, (b)-сходимости, а условие 1) нужно заменить на

1а) $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < +\infty$.

1.23. Замечание 1. Если X—регулярное K-пространство и Y — типа (B), то теорема, аналогичная 1.21, верна и для операций класса H_t^b.

1.24. Замечание 2. Для случая (o)-ограниченности теорема, аналогичная теореме 1.21, вообще говоря, не верна. Она верна (и тривиальна), если операции U_n положительны, а X — K^+-пространство.

1.25. В случае, когда X — пространство типа (B), а Y — KB-пространство, из 1.22 следует, что если при каждом $x \in X$ последовательность $\{\|U_n(x)\|\}$ ограничена, то последовательность операций $\{U_n\}$ (t)-ограничена, следовательно, ограничены их нормы (1.12):

$$\|U_n\|_b < K.$$

То же утверждение остаётся верным и может быть доказано аналогичным рассуждением и в случае, если Y — произвольное линейное нормированное пространство и U_n — линейные операции класса H_b^b. Это — известная теорема С. Банаха.

1.26. Отметим также, что если X—пространство типа (B), а $f_n(x)$ — последовательность линейных функционалов, которая ограничена при каждом $x \in X$, то из 1.25 следует, что нормы этих функционалов ограничены в совокупности.

1.3. Теоремы о линейности предельной операции.

1.31. Теорема о линейности предельной операции. *Если последовательность операций $U_n(x)$ класса H_t^t (t)-сходится в каждой точке:*

$$(t)\text{-}\lim_{n\to\infty} U_n(x) = U(x),$$

то и предельная операция $U(x)$ — класса H_t^t.

Доказательство. Последовательность $\{U_n(x)\}$ (t)-сходится в каждой точке, а потому (t)-аннулируема при каждом x, а в таком случае, по теореме 1.21, последовательность $\{U_n\}$ будет (t)-ограничена; следовательно, по теореме 1.13 операции U_n равностепенно непрерывны при $x = \mathbf{0}$.

Для того чтобы установить принадлежность операции U к классу H_t^t, нужно показать, что она переводит (t)-аннулируемое множество в (t)-аннулируемое (2.21 гл. VII).

Пусть $\{x_n\}$ — (t)-аннулируемая последовательность; покажем, что и $\{U(x_n)\}$ (t)-аннулируема, т. е. $\lambda_n U(x_n) \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$ при $\lambda_n \to 0$.

Имеем $U_k(x_n) \xrightarrow[k\to\infty]{(t)} U(x_n)$ при каждом n, а переходя к частичной последовательности (2.36 гл. I), получаем:

$$(o)\text{-}\lim_{i\to\infty} U_{k_i}(x_n) = U(x_n).$$

Обозначим через y^* общий регулятор для этой последовательности предельных переходов. Тогда мы можем подобрать i_n для каждого n так, чтобы

$$|U_{k_{i_n}}(x_n) - U(x_n)| < y^*$$

или

$$|U_{k_{i_n}}(\lambda_n x_n) - \lambda_n U(x_n)| < |\lambda_n| y^*,$$

откуда видно, что написанная в скобках разность $\xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$ при $n \to \infty$. С другой стороны, так как $\lambda_n x_n \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$ и операции U_k равностепенно непрерывны при $x = \mathbf{0}$, то

$$(t)\text{-}\lim_{n\to\infty} U_{k_{i_n}}(\lambda_n x_n) = \mathbf{0}.$$

А тогда и $\lambda_n U(x_n) \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$, ч. и тр. д.

1.32. Если (o)-ограниченная последовательность операций $U_n(x)$ класса H_o^o (t)-сходится в каждой точке, то предельная операция также принадлежит классу H_o^o.

Здесь равностепенная непрерывность операции U_n вытекает из (o)-ограниченности, которая дана по условию, а дальнейшее рассуждение то же, что и в доказательстве предыдущей теоремы.

Если X и Y — KB-пространства, то предложение 1.32 может быть переформулировано следующим образом.

1.33. Пусть последовательность операций $U_n \in H_o^o$ (t)-сходится в каждой точке $x \in X$. Если для любого ограниченного множества $E \subset X$

$$\rho = \sup_n \sup_{x_i \in E} \|U_n(x_1), \ldots, U_n(x_k)\| < \infty,$$

то предельная операция принадлежит классу H_o^o.

Доказательство. Пусть $U(x) = (t)\text{-}\lim U_n(x)$ при всех $x \in X$. Покажем, что для любого ограниченного множества $E \subset X$ его образ $U(E)$ тоже ограничен (2.32 гл. VII).

Пусть E ограничено, $x_1, \ldots, x_k \in E$. По непрерывности нормы группы (1.12 гл. VI; норма группы — частный случай метрической

функции группы, а (t)-непрерывность нормы вытекает из ее (o)-непрерывности, как для функции с числовыми значениями)

$$\|U(x_1), \ldots, U(x_k)\| = \lim_{n\to\infty} \|U_n(x_1), \ldots, U_n(x_k)\| \leqslant \rho,$$

откуда и следует ограниченность $U(E)$ (2.45 b) гл. VI).

1.34. Если X — пространство типа (B), а $\{f_n\}$ — последовательность (b)-линейных функционалов в X, сходящаяся при каждом $x \in X$: $f_n(x) \to f(x)$, то f — также (b)-линейный функционал в X.

Доказательство. По 1.26 нормы функционалов f_n в совокупности ограничены: $\|f_n\| \leqslant K$, а тогда

$$|f(x)| = \lim |f_n(x)| \leqslant K\|x\|.$$

Аналогичное утверждение имеет место и для операций класса H_b^b, если Y — произвольное линейное нормированное пространство (см. 1.25).

1.4. Условия сходимости последовательности операций. Здесь мы дадим в нескольких вариантах условия сходимости последовательности линейных операций (достаточные, а также необходимые и достаточные). Среди них наиболее существенно 1.42. Предложение 1.47 представляет собой по существу теорему Банаха — Штейнгауза, упоминавшуюся во введении к этой главе.

1.41. Пусть Y — K-пространство, полное относительно (t)-сходимости *), и пусть $\{U_n\}$ — (t)-ограниченная последовательность операций класса H_t^t, которая (t)-сходится на некотором множестве D, плотном в X. Тогда последовательность $\{U_n(x)\}$ (t)-сходится всюду в X.

Доказательство. В силу полноты пространства Y достаточно показать, что если $p_i \to \infty$ и $q_i \to \infty$, то $[U_{p_i}(x) - U_{q_i}(x)] \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$. Очевидно, достаточно показать, что это последнее соотношение выполняется для некоторой частичной последовательности индексов $i_j \to \infty$.

Возьмём $x_n \xrightarrow{(o)} x$, $x_n \in D$. Подберём $\lambda_n \to \infty$ такие, чтобы $\lambda_n(x_n - x) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$. Так как $U_{p_i}(x_n) \xrightarrow[i\to\infty]{(t)} U(x_n)$ и $U_{q_i}(x_n) \xrightarrow[i\to\infty]{(t)} U(x)$ при всех n, то с помощью замены последовательности индексов i на частичную можно достигнуть того (2.36 гл. I), чтобы для всех n существовали (o)-пределы

$$(o)\text{-}\lim_{i\to\infty} U_{p_i}(x_n) = (o)\text{-}\lim_{i\to\infty} U_{q_i}(x_n) = U(x_n).$$

---

*) Мы имеем в виду здесь полноту в следующем смысле: если для любых $p_i \to \infty$ и $q_i \to \infty$ будет $(y_{p_i} - y_{q_i}) \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$, то последовательность $\{y_n\}$ (t)-сходится к некоторому y.

Тогда найдётся такой y^*, что $|U_{p_i}(x_n) - U(x_n)| < \varepsilon y^*$ и $|U_{q_i}(x_n) - U(x_n)| < \varepsilon y^*$ при $i \geqslant J(\varepsilon, n)$. Через n_i обозначим наибольшее $n \leqslant i$ такое, что $i \geqslant J\left(\frac{1}{n}, n\right)$. Ясно, что $n_i \to \infty$ при $i \to \infty$. Имеем теперь:

$$|U_{p_i}(x) - U_{q_i}(x)| \leqslant |U_{p_i}(x) - U_{p_i}(x_{n_i})| + |U_{q_i}(x) - U_{q_i}(x_{n_i})| +$$
$$+ |U_{p_i}(x_{n_i}) - U_{q_i}(x_{n_i})| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\lambda_{n_i}} |U_{p_i}[\lambda_{n_i}(x - x_{n_i})]| + \frac{1}{\lambda_{n_i}} |U_{q_i}[\lambda_{n_i}(x - x_{n_i})]| + \frac{2}{n_i} y^*.$$

Так как множество $\{\lambda_{n_i}(x - x_{n_i})\}$ (t)-аннулируемо и $\frac{1}{\lambda_{n_i}} \to 0$ при $i \to \infty$, а последовательность операций $\{U_n\}$ (t)-ограничена, то при $i \to \infty$ первые два слагаемых $\xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$, третье также, что и доказывает существование предела (t)-$\lim U_n(x)$.

Для случая (o)-сходимости аналогичное предложение даётся в следующей теореме.

1.42. Теорема. *Если последовательность операций $\{U_n\}$ класса H_t^t такова, что для всякого $x \in X$ множество элементов $\{U_n(x)\}$ (t)-аннулируемо (ограничено), и если на множестве D, плотном* в X, *последовательность $\{U_n(x)\}$ (t)-сходится ((o)-сходится), то тогда последовательность $\{U_n(x)\}$ (t)-сходится ((o)-сходится) для всех $x \in X$. В случае (t)-сходимости предполагаем, что Y* полно относительно (t)-сходимости *).

Доказательство. Для случая (t)-сходимости теорема сразу следует из теорем 1.21 и 1.41.

Случай (o)-сходимости. Пусть, наоборот, имеется такой $\bar{x}$, что последовательность $\{U_n(\bar{x})\}$ не является (o)-сходящейся; так как множество $\{U_n(\bar{x})\}$ ограничено, то полагая

$$\bar{y} = \overline{\lim}\, U_n(\bar{x}) - \underline{\lim}\, U_n(\bar{x}),$$

имеем:

$$\mathbf{0} < \bar{y} < +\infty.$$

Возьмём $x_i \xrightarrow{(o)} \bar{x}$, $x_i \in D$ и такие, что $\sum_i |x_i - \bar{x}| < +\infty$. Так как $U_n(x_i) \xrightarrow{(t)} U_n(\bar{x})$ при $i \to \infty$, то, переходя, если надо, диагональным процессом к частичной последовательности (2.36 гл. I), можно

---

*) (o)-полнота в несколько ином смысле имеет место, даже если Y — произвольное K-пространство (теорема 2.21 гл. I).

считать, что $U_n(x_i) \xrightarrow{(o)} U_n(\bar{x})$ при $i \to \infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Положим

$$S_{n,m}(x) = [U_n(x) \vee U_{n+1}(x) \vee \ldots \vee U_m(x)] - \\ - [U_n(x) \wedge U_{n+1}(x) \wedge \ldots \wedge U_m(x)].$$

Имеем:

a) $(o)\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} (o)\text{-}\lim\limits_{m\to\infty} S_{n,m}(\bar{x}) = \bar{y}$; b) $(o)\text{-}\lim\limits_{m,n\to\infty} S_{n,m}(x_p) = \mathbf{0}$;

c) $(o)\text{-}\lim\limits_{p,q\to\infty} S_{n,m}(x_p - x_q) = \mathbf{0}$; d) $(o)\text{-}\lim\limits_{p\to\infty} S_{n,m}(x_p) = S_{n,m}(\bar{x})$.

Действительно, a) и d) очевидны. Далее, так как при каждом p существует $(o)\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} U_n(x_p)$, т. е. $\overline{\lim}\, U_n(x_p) = \underline{\lim}\, U_n(x_p)$, то равенство b), очевидно, имеет тот смысл, что при каждом p

$$\sup_{m,\, n \geqslant k} S_{n,m}(x_p) \underset{k\to\infty}{\searrow} \mathbf{0}.$$

Аналогичный смысл имеет и равенство c). Действительно, пусть y_0 — общий регулятор для предельных переходов $U_n(x_p) \to U_n(\bar{x})$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда для фиксированных m и n

$$|U_i(x_p - x_q)| \leqslant \varepsilon y_0 \text{ при } p, q \geqslant P(\varepsilon, m, n),\ i = n, n+1, \ldots, m.$$

Отсюда следует, что

$$S_{n,m}(x_p - x_q) \leqslant 2\varepsilon y_0 \text{ при } p,\ q \geqslant P(\varepsilon).$$

Подберём теперь общий регулятор y^* для всех предельных переходов a) — d). Зададим $\varepsilon_k > 0$ и такие, что $K = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\varepsilon_k < +\infty$.

Возьмём такие n_1 и m_1, что $|S_{n_1, m_1}(\bar{x}) - \bar{y}| < \varepsilon_1 y^*$. Подберём, далее, p_1 так, что $|S_{n_1, m_1}(x_{p_1}) - \bar{y}| < 2\varepsilon_1 y^*$ и $S_{n_1, m_1}(x_p - x_q) < \varepsilon_1 y^*$ при $p, q \geqslant p_1$.

Продолжая таким образом, определим n_k, m_k и p_k $(p_k > p_{k-1})$ так, что

$$|S_{n_k, m_k}(x_{p_k}) - \bar{y}| < 2\varepsilon_k y^*; \quad S_{n_k, m_k}(x_{p_i}) < \varepsilon_i y^* \quad (i = 1, 2, \ldots, k-1);$$
$$S_{n_i, m_i}(x_p - x_q) < \varepsilon_k y^* \quad (i = 1, \ldots k) \text{ при } p, q \geqslant p_k.$$

Ряд $\sum\limits_k |x_{p_k} - x_{p_{k-1}}|$ сходится. Подберём $\lambda_k \to \infty$ $(0 < \lambda_{k-1} < \lambda_k < k-1)$ и такие, чтобы ряд $\sum\limits_k \lambda_k |x_{p_k} - x_{p_{k-1}}|$ сходился (1.26 гл. V).

Положим

$$x = \lambda_1 x_{p_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k (x_{p_k} - x_{p_{k-1}}).$$

Пользуясь тем, что, для любых x, x_1 и x_2, $S_{n,m}(x_1+x_2) \leqslant S_{n,m}(x_1)+$ $+S_{n,m}(x_2)$, а $S_{n,m}(-x)=S_{n,m}(x)$, мы легко найдём, что

$$|S_{n,m}(x_1)-S_{n,m}(x_2)| \leqslant S_{n,m}(x_1-x_2).$$

Так как

$$x=-\sum_{i=1}^{k-1}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\,x_{p_i}+\lambda_k x_{p_k}+\sum_{i=k+1}^{\infty}\lambda_i(x_{p_i}-x_{p_{i-1}}),$$

то имеем:

$$|S_{n_k,m_k}(x)-S_{n_k,m_k}(\lambda_k x_{p_k})| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k-1}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\,S_{n_k,m_k}(x_{p_i})+\sum_{i=k+1}^{\infty}\lambda_i\,S_{n_k,m_k}(x_{p_i}-x_{p_{i-1}}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k-1} i\varepsilon_i y^* + \sum_{i=k+1}^{\infty}(i-1)\,\varepsilon_{i-1}y^* = Ky^*,$$

откуда

$$|S_{n_k,m_k}(x)-\lambda_k\bar{y}| \leqslant Ky^* + 2\lambda_k\varepsilon_k y^* < 3Ky^*.$$

Отсюда, так как $\bar{y}>\mathbf{0}$ и $\lambda_k\to\infty$, ясно, что последовательность $\{U_n(x)\}$ не ограничена, вопреки предположению.

1.43. Следствие. *Если X — регулярное K-пространство, имеющее плотное счётное подмножество $D\subset X$, и $\{f_n\}$ — последовательность (o)-линейных функционалов в X, ограниченная в каждой точке, то из нее можно выбрать частичную, сходящуюся всюду в X.*

Действительно, с помощью диагонального процесса можно из последовательности функционалов f_n выбрать частичную f_{n_k}, которая будет сходиться в точках счётного множества D; но тогда по 1.42 она будет сходиться и всюду в X.

1.44. Замечание. Следует отметить, что при предположениях теоремы 1.42 предельная операция $U(x)$ будет класса H_t^t, но она будет не обязательно принадлежать H_o^o, даже если все U_n будут из H_o^o (см. ниже, 3.32).

1.45. Замечание. Напомним, что если Y — KB-пространство, то в теореме 1.42 требование (t)-аннулируемости (ограниченности) множества $\{U_n(x)\}$ при каждом $x\in X$ можно заменить условием ограниченности числового множества норм $\|U_n(x)\|$ (соответственно норм групп элементов $\|U_1(x), \ldots, U_n(x)\|$) (2.45b) — c) гл. VI).

1.46. Теорема. *Если X — пространство типа (B), Y — регулярное K-пространство и $\{U_n\}$ — последовательность операций класса H_b^t, множество значений которых при каждом x (t)-аннулируемо (ограничено), и если на множестве D, плотном в X, эта последовательность (t)-сходится ((o)-сходится), то тогда последовательность $\{U_n(x)\}$ (t)-сходится ((o)-сходится) для всех $x\in X$. В случае (t)-сходимости предполагаем, что в Y выполнен признак Коши относительно (t)-сходимости.*

В случае (t)-сходимости теорема следует из 1.22 и теоремы, аналогичной теореме 1.41. В случае (o)-сходимости можно повторить доказательство теоремы 1.42 с той лишь разницей, что последовательность x_i нужно выбрать так, чтобы $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i - \bar{x}\| < +\infty$, а затем λ_k — так, чтобы $\sum_k \lambda_k \|x_{p_k} - x_{p_{k-1}}\| < +\infty$.

1.47. Если X — пространство типа (B), а Y — KB-пространство (или произвольное пространство типа (B)), и $y = U_n(x)$ — последовательность операций класса H_b^b, то для сходимости её по норме в каждой точке необходимо и достаточно, чтобы:

1) $\|U_n\|$ были ограничены в совокупности;

2) последовательность $\{U_n(x)\}$ сходилась на плотном множестве D.

Необходимость условия 1) следует из 1.25, а условия 2) — тривиальна.

Достаточность для случая, когда Y — KB-пространство, следует, например, из 1.46, а в случае, когда Y — произвольное пространство типа (B), легко устанавливается рассуждением, подобным использованному в 1.41.

1.48. Пусть $D \subset X$ — плотное множество в X, и притом мажорирующее X, т. е. для всякого $x \in X$ найдётся $x_0 \in D$, $x_0 \geqslant |x|$. Пусть, далее, $\{U_n\}$ — последовательность положительных аддитивных операций, которая на множестве D (t)- (или (o))-сходится. Тогда последовательность $\{U_n\}$ таким же образом сходится всюду на X.

Доказательство. Для любого $x \in X$ подбираем $x_0 \in D$ так, чтобы $|x| \leqslant x_0$. Тогда $|U_n(x)| \leqslant U_n(x_0)$.

Теперь сходимость $\{U_n\}$ на всём X сразу следует из теоремы 1.42 при той же оговорке о (t)-полноте y) *).

§ 2. Некоторые теоремы о сходимости функционалов

Приведённые в § 1 теоремы о последовательностях операций применимы, в частности, к функционалам. Однако для функционалов, как показал А. Н. Балуев, некоторые предложения могут быть доказаны при более общих предположениях или в усиленной форме. Такие предложения и будут рассмотрены в этом параграфе.

2.1. Линейность предельного функционала. Линейность предельной операции для линейных операций была доказана выше в случае, когда X — регулярное K-пространство (1.31). Для функционалов аналогичное предложение верно без предположения регулярности K-пространства X.

2.11. Если последовательность $\{f_n(x)\}$ (o)-линейных функционалов в K-пространстве (или K-группе **.) X сходится при всех $x \in X$:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x),$$

то предельный функционал $f(x)$ также (o)-линеен.

---

*) В регулярном K-пространстве всякая положительная аддитивная операция входит в класс H_0^0 (2.42 гл. VII).

**) Имеется в виду K-группа, удовлетворяющая аксиоме V для счётных множеств.

Доказательство. В силу 2.51 гл. VII, достаточно доказать монотонную непрерывность, т. е. что если $x_n \searrow \mathbf{0}$, то $f(x_n) \to 0$.

Предположим противное, т. е. что $x_n \searrow \mathbf{0}$, но $f(x_n)$ не стремится к нулю. Тогда, переходя, если нужно, к частичной последовательности, можем считать, что $|f(x_n)| > a > 0$ при всех n.

Определим теперь последовательно числа n_k и p_k следующим образом. Положим $n_1 = 1$; тогда, так как $f_p(x_{n_1}) \to f(x_{n_1})$ при $p \to \infty$, можно выбрать p_1 так, чтобы

$$|f_{p_1}(x_{n_1}) - f(x_{n_1})| < \varepsilon.$$

Если уже определены $n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1}$ и $p_1 < p_2 < \ldots < p_{k-1}$, то подбираем n_k так, чтобы

$$|f_{p_i}|(x_n) < \varepsilon \text{ при } n \geqslant n_k \quad (i = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Далее подбираем p_k так, чтобы

$$|f_{p_k}(x_{n_i}) - f(x_{n_i})| < \frac{\varepsilon}{k} \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Удобно изменить обозначения, полагая $x_{n_i} = \bar{x}_i$ и $f_{p_i} = \bar{f}_i$. Тогда имеем:

$$|\bar{f}_k(\bar{x}_i) - f(\bar{x}_i)| < \frac{\varepsilon}{k} \quad \text{при } i \leqslant k,$$

$$|\bar{f}_i|(\bar{x}_k) < \varepsilon \quad \text{при } k > i.$$

Положим теперь

$$x = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + (\bar{x}_3 - \bar{x}_4) + \ldots$$

Этот ряд сходится, так как $x_k \searrow \mathbf{0}$. Покажем, что на элементе x последовательность функционалов $\bar{f}_i$ расходится. Для этого запишем x в виде

$$x = \sum_{i=1}^{2k-1} (-1)^{i-1} \bar{x}_i - \bar{x}_{2k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} (\bar{x}_{2i-1} - \bar{x}_{2i}) = \sigma_1 - \bar{x}_{2k} + \sigma_2$$

и оценим разность $\bar{f}_{2k}(x) - \bar{f}_{2k-1}(x)$. Имеем:

$$|\bar{f}_{2k}(\sigma_1) - \bar{f}_{2k-1}(\sigma_1)| \leqslant |\bar{f}_{2k}(\sigma_1) - f(\sigma_1)| + |\bar{f}_{2k-1}(\sigma_1) - f(\sigma_1)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{2k-1} |\bar{f}_{2k}(\bar{x}_i) - f(\bar{x}_i)| + \sum_{i=1}^{2k-1} |\bar{f}_{2k-1}(\bar{x}_i) - f(\bar{x}_i)| < (2k-1)\frac{\varepsilon}{2k} +$$
$$+ (2k-1)\frac{\varepsilon}{2k-1} < 2\varepsilon;$$

$$|\bar{f}_{2k}(\bar{x}_{2k}) - \bar{f}_{2k-1}(\bar{x}_{2k})| \geqslant |f(\bar{x}_{2k})| - |\bar{f}_{2k}(\bar{x}_{2k}) - f(\bar{x}_{2k})| - |\bar{f}_{2k-1}(\bar{x}_{2k})| >$$
$$> a - \frac{\varepsilon}{2k} - \varepsilon > a - 2\varepsilon;$$

$$|\bar{f}_{2k}(\sigma_2)| \leqslant |\bar{f}_{2k}|(\bar{x}_{2k+1}) < \varepsilon; \quad |\bar{f}_{2k-1}(\sigma_2)| \leqslant |\bar{f}_{2k-1}|(\bar{x}_{2k+1}) < \varepsilon.$$

Сопоставляя эти неравенства, получаем:

$$|\bar{f}_{2k-1}(x) - \bar{f}_{2k}(x)| \geqslant |\bar{f}_{2k-1}(\bar{x}_{2k}) - \bar{f}_{2k}(\bar{x}_{2k})| - |\bar{f}_{2k-1}(\sigma_1) - \bar{f}_{2k}(\sigma_1)| -$$
$$- |\bar{f}_{2k-1}(\sigma_2)| - |\bar{f}_{2k}(\sigma_2)| > a - 2\varepsilon - 2\varepsilon - 2\varepsilon = a - 6\varepsilon,$$

откуда и явствует расходимость последовательности $\{\overline{f}_i(x)\}$, так как ε могло быть выбрано $< \frac{a}{6}$.

2.2. Условия ограниченности и равностепенной непрерывности последовательности функционалов. Из предложения 1.21 вытекает, в частности, что в регулярном пространстве последовательность функционалов, ограниченная в каждой точке, будет (o)-ограничена. Однако для функционалов сходное предложение можно доказать и без требования регулярности и даже для K-группы.

2.21. Теорема. *Если последовательность (o)-линейных функционалов $\{f_n(x)\}$ ограничена в каждой точке: $\sup\limits_n |f_n(x)| < +\infty$, то $\sup\limits_n |f_n|(x) < +\infty$ при любом $x \geqslant \mathbf{0}$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдётся такой $x_0 > \mathbf{0}$, что $\sup\limits_n |f_n|(x_0) + \infty$. Положим $a_1 = \sup\limits_n |f_n(x_0)|$ и найдём такой номер n_1, что

$$|f_{n_1}|(x_0) > 2 + a_1.$$

Тогда, так как $|f_{n_1}^+(x_0) - f_{n_1}^-(x_0)| \leqslant a_1$, а $f_{n_1}^+(x_0) + f_{n_1}^-(x_0) = |f_{n_1}|(x_0)$, имеем:

$$f_{n_1}^+(x_0) > 1, \quad f_{n_1}^-(x_0) > 1.$$

Пользуясь теоремой 2.55 гл. VII, разобьём x_0 на положительные слагаемые: $x_0 = x_0^{(1)} + x_0^{(2)}$ так, что

$$f_{n_1}(x_0^{(1)}) = f_{n_1}^+(x_0), \quad -f_{n_1}(x_0^{(2)}) = f_{n_1}^-(x_0).$$

Обозначим через x_1 тот из элементов $x_0^{(i)}$ $(i = 1, 2)$, для которого $\sup\limits_n |f_n|(x_0^{(i)}) = +\infty$, ибо хоть для одного из них это выполняется. Тогда имеем:

$$\mathbf{0} < x_1 \leqslant x_0, \ |f_{n_1}(x_1)| > 1, \ \sup_n |f_n|(x_1) = +\infty.$$

Поступая с x_1 аналогично тому, как мы поступили с x_0, найдём такой x_2, что

$$\mathbf{0} < x_2 \leqslant x_1, \ |f_{n_2}(x_2)| > 2, \ \sup_n |f_n|(x_2) = +\infty.$$

Продолжая процесс, определим убывающую последовательность элементов x_k и подпоследовательность функционалов f_{n_k} так, что

$$|f_{n_k}(x_k)| \to +\infty.$$

При этом, не умаляя общности, можем считать, что $\inf\limits_k x_k = \mathbf{0}$, так как если бы $\inf\limits_k x_k = x \neq \mathbf{0}$, то можно было бы заменить все x_k на $x_k - x$, не нарушая соотношения $|f_{n_k}(x_k)| \to \infty$.

Найдём теперь такое число k_1, что $|f_{n_{k_1}}(x_{k_1})| > 1$ и затем, пользуясь непрерывностью $f_{n_{k_1}}$ и $|f_{n_{k_1}}|$, подберем $p_1 > k_1$, чтобы

$$|f_{n_{k_1}}(x_{k_1} - x_{p_1})| > 1, \ |f_{n_{k_1}}|(x_{p_1}) < \varepsilon.$$

Далее, выберем $k_2 > p_1$ так, чтобы $|f_{n_{k_2}}(x_{k_1} - x_{p_1} + x_{k_2})| > 2$, а затем $p_2 > k_2$, для которого

$$|f_{n_{k_2}}(x_{k_1} - x_{p_1} + x_{k_2} - x_{p_2})| > 2, \quad |f_{n_{k_2}}|(x_{p_2}) < \varepsilon.$$

Продолжая это построение, определим последовательность чисел $k_1 < p_1 < k_2 < p_2 < k_3 < \ldots$ такого рода, что, вводя обозначения $f_{n_{k_i}} = \bar{f}_i$, $x_{k_i} - x_{p_i} = \bar{x}_i$, имеем:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{x}_i \text{ сходится}; \quad |\bar{f}_i(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \ldots + \bar{x}_i)| > i; \quad |\bar{f}_i|(x_{p_i}) < \varepsilon.$$

Положим $z = \sum_1^{\infty} \bar{x}_i$. Тогда

$$|\bar{f}_i(z)| \geqslant |\bar{f}_i(\bar{x}_1 + \ldots + \bar{x}_i)| - |\bar{f}_i|(\bar{x}_{i+1} + \ldots) > i - \varepsilon,$$

так как

$$\bar{x}_{i+1} + \bar{x}_{i+2} + \ldots = x_{k_{i+1}} - x_{p_{i+1}} + x_{k_{i+2}} - x_{p_{i+2}} + \ldots \leqslant x_{k_{i+1}} \leqslant x_{p_i},$$

а $|\bar{f}_i|(x_{p_i}) < \varepsilon$.

Таким образом, $|\bar{f}_i(z)| \to +\infty$ вопреки условию. Теорема установлена.

Из доказанной теоремы непосредственно получаем и такой результат.

2.22. Следствие. *Если последовательность (o)-линейных функционалов сходится в каждой точке, то и последовательность их модулей ограничена в каждой точке.*

Теперь перейдём к доказательству усиленного предложения о равностепенной непрерывности.

2.23. Если последовательность $\{f_n\}$ (o)-линейных функционалов сходится к нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ для всех $x \in X$, то последовательность $\{|f_n|\}$ равностепенно непрерывна в $\mathbf{0}$, т. е. при $x_n \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$

$$\lim_{n\to\infty} |f_n|(x_n) = 0\,^{*)}.$$

Доказательство. Общий случай легко сводится к такому, когда $x_n \searrow \mathbf{0}$. Предположим, что $|f_n|(x_n)$ не стремится к нулю. Тогда найдутся число $a > 0$ и последовательность таких n_k, что

$$|f_{n_k}|(x_{n_k}) > 2a \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Переходя к частичной последовательности и пользуясь непрерывностью функционалов $|f_n|(x)$, найдём такие n_{k_i}, что

$$|f_{n_{k_i}}|(x_{n_{k_i}} - x_{n_{k_{i+1}}}) > 2a \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Изменив обозначения, а именно, обозначая $f_{n_{k_i}}$ через f_i и полагая $y_i = x_{n_{k_i}} - x_{n_{k_{i+1}}}$, получим последовательность $\{f_i\}$ (o)-непрерывных функцио-

---

*) Легко видеть, что это условие, будучи выполненным не только для данной последовательности, но и для любой ее частичной, равносильно определению равностепенной непрерывности, данному выше (1.13).

налов и последовательность неотрицательных элементов $\{y_i\}$ такого рода что

$$|f_n|(y_n) > 2a, \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k \leqslant x_1, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \text{ для любого } x \in X.$$

Положим ещё $R_n = y_n + y_{n+1} + \ldots$; тогда $R_n \searrow \mathbf{0}$.

Далее, для каждого y_n, опираясь на определение модуля функционала (1.26 гл. VII), найдём такое y_n', $\mathbf{0} \leqslant y_n' \leqslant y_n$, что

$$|f_n(y_n')| > a.$$

Возьмём $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \frac{a}{4}$. Положив $n_1 = 1$, найдём $m_1 > n_1$ так, чтобы

$$|f_{n_1}|(R_{m_1}) < \varepsilon.$$

Полагая далее $z_1 = y_{n_1}' - (y_{n_1}' \wedge R_{m_1})$, получим:

$$|f_{n_1}(z_1)| \geqslant |f_{n_1}(y_{n_1}')| - |f_{n_1}|(y_{n_1}' \wedge R_{m_1}) > a - \varepsilon.$$

Продолжая так, определим последовательность $n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \ldots$, удовлетворяющую условиям

$$|f_{n_i}(z_1 + \ldots + z_{i-1})| < \varepsilon, \text{ где } z_j = y_{n_j}' - (y_{n_j}' \wedge R_{m_j}),$$

$$|f_{n_i}|(R_{m_i}) < \varepsilon.$$

Тогда

$$|f_{n_i}(z_i)| \geqslant |f_{n_i}(y_{n_i}')| - |f_{n_i}|(y_{n_i}' \wedge R_{m_i}) > a - \varepsilon.$$

Так как $z_i \leqslant y_i$, то $\sum_{i=1}^{\infty} z_i \leqslant x_1$. Положим

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} z_i.$$

Тогда при $i \geqslant 2$ будем иметь:

$$|f_{n_i}(z)| \geqslant |f_{n_i}(z_i)| - |f_{n_i}(z_1 + \ldots + z_{i-1})| -$$
$$- |f_{n_i}|(z_{i+1} + \ldots) > a - \varepsilon - \varepsilon - \varepsilon > \frac{a}{4},$$

что противоречит условию теоремы.

2.24. Если (o)-линейные функционалы $f_n(x) \to f(x)$ при всех x, а $x_n \xrightarrow{(o)} x_0$, то

$$f_n(x_n) \to f(x_0).$$

Действительно,

$$f_n(x_n) - f(x_0) = (f_n - f)(x_n - x_0) + f(x_n - x_0) + (f_n - f)(x_0);$$

но первое слагаемое $\to 0$ в силу того, что последовательность $\{f_n - f\}$ равностепенно непрерывна (по 2.23), второе — благодаря непрерывности функционала f (2.11) и третье — по условию.

2.3. Функционалы в K-пространстве ограниченных элементов. Мы будем предполагать здесь, что X — K-пространство ограниченных элементов (2.3 гл. VI). Установим на основании предыдущего некоторые предложения о слабой сходимости последовательности функционалов в таких пространствах.

Известно, что каждому регулярному функционалу f в пространстве ограниченных элементов можно сопоставить функцию единичных элементов $\Phi(e) = f(e)$, которая абсолютно аддитивна в случае (o)-непрерывности функционала, и сам функционал выражается через неё в виде интеграла

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\Phi(e_\lambda^x),$$

где e_λ^x — характеристика элемента x (1.33 и 1.44 гл. VIII).

Обратно, каждая абсолютно аддитивная функция $\Phi(e)$ с числовыми значениями оказывается и (oo)-непрерывной (а также и (to)-непрерывной — см. 1.44 гл. VIII). А тогда каждая абсолютно аддитивная функция $\Phi(e)$ порождает (o)-линейный функционал f.

Имеем следующие предложения относительно слабой сходимости, которую будем обозначать $f_n \to f$ или $\Phi_n \to \Phi$ и понимать под этим сходимость на всех элементах, например, $\Phi_n(e) \to \Phi(e)$ при $e \in \mathfrak{E}$.

2.31. a) Слабый предел последовательности абсолютно аддитивных функций есть абсолютно аддитивная функция.

b) Изменения абсолютно аддитивных функций, образующих слабо сходящуюся последовательность, ограничены в совокупности:

$$|\Phi_n|(\mathbf{1}) \leqslant K.$$

c) Если e_λ^x — характеристика элемента x, а $e_\lambda^{x_n}$ — характеристика элемента x_n и $x_n \xrightarrow{(o)} x$, а $\Phi_n \to \Phi$ то

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\Phi_n(e_\lambda^{x_n}) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\Phi(e_\lambda^x).$$

Доказательство. a) Пусть $\Phi_n \to \Phi$. Каждой абсолютно аддитивной функции Φ_n отвечает (o)-линейный функционал f_n. Из слабой сходимости функций Φ_n следует сходимость функционалов f_n на единичных элементах. Если мы рассмотрим K-группу $X_1 \subset X$, составленную из элементов $x \in X$ вида $x = \sum_{i=1}^{n} l_i e_i$, где l_i — целые числа, а $\mathbf{S} e_i = \mathbf{1}$, то последовательность $\{f_n\}$, очевидно, будет сходиться и на всех элементах из X_1, а тогда предельный функционал $f(x)$ будет (o)-линеен (2.11). В таком случае соответствующая ему функция единичного элемента $\Phi(e) = f(e)$ будет абсолютно аддитивна; но она и представляет собой предел функций $\Phi_n(e)$, так как

$$\Phi(e) = f(e) = \lim f_n(e) = \lim \Phi_n(e).$$

b) На основании предыдущего рассуждения и теоремы 2.21 получаем, что $|f_n|(\mathbf{1}) = |\Phi_n|(\mathbf{1})$ (см. замечание к 1.33 гл. VIII) ограничены в совокупности.

c) Пространство X можно рассматривать как полуупорядоченное и в то же время как пространство типа (B) (2.31 гл. VI). Тогда $f_n(x)$ — (o)-линейный и (b)-линейный функционал в X; при этом $\|f_n\| = \||f_n|\| = |\Phi_n|(\mathbf{1})$. По доказанному в b), $\|f_n\|$ ограничены в совокупности. Последовательность функционалов $f_n(x)$ сходится на всех конечнозначных элементах, и так как это — плотное множество, то и на всех $x \in X$ (1.47). А в таком случае по 2.24 справедливо и утверждение c).

§ 3. Применения теорем о сходимости линейных операций

3.1. Операции со значениями в S.

3.11. Теорема. *Пусть X — регулярное K-пространство или линейное нормированное пространство, $\{U_n(x)\}$ — последовательность линейных операций класса H_t^t (соответственно H_b^t), отображающих X в пространство S измеримых функций $y(t)$, т. е.*

$$y_n(t) = U_n(x, t);$$

пусть при этом:

1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, U_n(x, t)$ *конечен для почти всех t при каждом $x \in X$;*

2) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(x, t)$ *существует при почти всех t для x из некоторого множества D, плотного в X.*

Тогда последовательность $\{U_n(x, t)\}$ сходится для почти всех при каждом $x \in X$.

Доказательство. Заменяя x на $-x$, видим, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, U_n(x, t)$ конечен для почти всех t. Следовательно, для каждого $x \in X$ множество функций $\{U_n(x, t)\}$ ограничено в S; применяя поэтому 1.42 или 1.46, приходим сразу к заключению теоремы.

3.2. Сходимость разностных отношений к производной. Пусть $x(t)$ — функция, определённая и суммируемая на отрезке $[a, b]$. Пусть I — подвижный интервал, помещённый около точки s, $|I|$ — его длина. Поставим вопрос о сходимости разностных отношений неопределённого интеграла от функции $x(t)$

$$U_I(x, s) = \frac{1}{|I|}\int\limits_I x(t)\, dt$$

к $x(s)$, когда $|I| \to 0$. Мы рассматриваем эти разностные отношения как линейные операции.

Положим

$$x^*(s) = \sup_I |U_I(x, s)|.$$

Тогда при $x \in L^p$ $(p > 1)$ функция x^* также принадлежит L^p *). Следовательно, если операции $U_I(x)$ рассматривать как операции из L^p в L^p, то при каждом x их значения образуют ограниченное множество. Далее, очевидно, что для непрерывных функций $x(t)$ (образующих плотное множество в L^p) последовательность $\{U_I(x, s)\}$ будет равномерно сходиться к $x(s)$. Поэтому, применяя теорему 1.46, приходим к следующему результату.

3.21. Если функция x — класса L^p $(p > 1)$, то разностные отношения её первообразной (o)-сходятся к x в пространстве L^p.

---

*) См. Харди, Литтльвуд и Полиа [1], стр. 358, неравенство 398.

Аналогично доказывается, что если $\int_a^b |x(t)| \lg |x(t)| dt < \infty$, то те же разностные отношения (o)-сходятся к $x(s)$ в L.

Если $x \in L$, то эти разностные отношения не обязательно (o)-сходятся к ней в L. Простым примером этого является функция $x(t)$, определённая в $(0, 1]$ так:

$$x(t) = \frac{n!}{n \lg^2 n} \quad \text{при} \quad \frac{1}{(n+1)!} < t \leqslant \frac{1}{n!} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому представляет интерес следующая теорема.

3.22. Если $x \in L$, то функции $U_I(x, s)$ будут (o)-сходиться к $x(s)$ в пространстве L_T *), где $T(u) = \frac{u}{[3 + (\lg_2 u)_+]^{1+\varepsilon}} (0 < \varepsilon < 1)$.

Доказательство. Благодаря теореме 1.46 достаточно установить, что x^*, определённое выше, входит в L_T. Положим $E_N = \mathscr{E}[x^*(s) > N]$. Каждую точку множества E_N можно окружить интервалом I таким, что $\int_I |x(t)| dt > N|I|$. Из этих интервалов можно выделить интервалы попарно без общих точек с суммой длин $\geqslant \frac{1}{4} mE_N$. Пусть S — их теоретико-множественная сумма **); тогда, очевидно, имеем

$$\frac{1}{4} mE_N \leqslant mS \leqslant \frac{1}{N} \int_S |x(t)| dt \leqslant \frac{1}{N} \int_a^b |x(t)| dt.$$

Отсюда, пользуясь монотонностью $T(u)$,

$$\int_a^b T[x^*(t)] dt \leqslant b - a + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_{2^{k-1}} \setminus E_{2^k}} T[x^*(t)] dt \leqslant$$

$$\leqslant b - a + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(3 + \lg_2 2^k)^{1+\varepsilon}} mE_{2^{k-1}} \leqslant$$

$$\leqslant b - a + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{k^{1+\varepsilon}}\right) \int_a^b |x(t)| dt.$$

---

*) Определение пространства L_T — см. 1.44 гл. VI.

**) Для построения S достаточно взять в E_N замкнутое подмножество F с $mF > \frac{3}{4} mE_N$ и выбрать для него конечное покрытие из указанных интервалов I, а затем выбрать из них последовательно наибольшие среди тех, которые не имеют общих точек с предыдущими; тогда

$$mS \geqslant \frac{1}{3} mF > \frac{1}{4} mE_N.$$

3.23. Из доказанной теоремы получается, между прочим, что неопределённый интеграл Лебега имеет почти всюду своей производной подинтегральную функцию.

3.3. Применение к ортогональным рядам. Пусть l^2 — пространство последовательностей $x=\{a_k\}$ с $\sum a_k^2<+\infty$. Пусть $\{\varphi_k(t)\}$ — система ортогональных и нормированных функций в $a\leqslant t\leqslant b$ $(\varphi_k\in L^2)$. Рассмотрим последовательность операций, отображающих l^2 в L^2:

$$y=U_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+\lg k}\varphi_k \quad (\lg k=\lg_2 k).$$

Каждая операция $U_n\in H_o^o$, так как её значения принадлежат конечномерному подпространству пространства L^2.

3.31. Последовательность операций $y=U_n(x)$ (o)-сходится в L^2 для каждого $x\in l^2$.

Доказательство Так как (o)-сходимость на элементах вида $x=\{a_1,\ldots,a_n,0,0,\ldots\}$ очевидна, то достаточно установить ограниченность последовательности $\{U_n(x)\}$ при каждом $x\in l^2$ (1.42).

Положим

$$S_{h,j}(x)=U_{h2^j+2^{j-1}}(x)-U_{h2^j}(x),$$

$$T(x)=|U_1(x)|+\sum_{j=1}^{\infty}S_{\frac{1}{2},j}(x)|+\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}(j+\lg h)\,|S_{h,j}(x)|^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда:

1) $T(x)\in L^2$. Действительно,

$$\|T(x)\|_{L^2}\leqslant\|U_1(x)\|+\sum_{j=1}^{\infty}\|S_{\frac{1}{2},j}(x)\|+$$

$$+\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}(j+\lg h)\,\|S_{h,j}(x)\|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant|a_1|+\sum_{j=1}^{\infty}\left[\sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j}\frac{a_k^2}{(1+\lg k)^2}\right]^{\frac{1}{2}}+\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=h2^j+1}^{h2^j+2^{j-1}}\frac{a_k^2}{1+\lg k}\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant|a_1|+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left[\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant|a_1|+\left[\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant 4\,\|x\|_{l^2}.$$

2) $|U_n(x)| \leqslant T(x)$ для всех $x \in X$ и $n = 1, 2, \ldots$ Действительно, пусть

$$n = \theta_1 + \theta_2 2 + \theta_3 2^2 + \ldots + \theta_r 2^{r-1} + 2^r \quad (\theta_i = 0;\ 1).$$

Тогда при некоторых целых h_j имеем:

$$|U_n(x)| = \left|U_{2^r}(x) + \sum_{j=1}^{r} \theta_j S_{h_j, j}(x)\right|.$$

Применяя теперь неравенство Буняковского и пользуясь тем, что $2^r \leqslant h_j 2^j$, находим:

$$|U_n(x)| \leqslant |U_{2^r}(x)| + \left\{ r \sum_{j=1}^{r} |S_{h_j, j}(x)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant |U_1(x)| + \sum_{j=1}^{r} |S_{\frac{1}{2}, j}(x)| + \left\{ \sum_{j=1}^{r} (j + \lg h_j) |S_{h_j, j}(x)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant T(x).$$

Итак, ограниченность последовательности $\{U_n(x)\}$ доказана, а тем самым установлено и наше утверждение. Легко видеть, что доказанное сейчас предложение представляет собой известную теорему Меньшова-Радемахера *) об ортогональных рядах в несколько усиленной формулировке. В нашем доказательстве мы использовали также основную идею доказательства этой теоремы.

3.32. Замечание. Несмотря на то, что все $U_n \in H_0^0$ (и даже $U_n \in H_t^0$), предельная операция $U(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1 + \lg k} \varphi_k$, хотя и будет по теореме 1.31 операцией класса H_t^t, но в общем случае не будет класса H_0^0.

В самом деле, очевидно, что если операция $|U|$ существует, то она должна выражаться следующим образом:

$$y = |U|(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1 + \lg k} |\varphi_k|;$$

но при $a_k \geqslant 0$ имеем:

$$\sqrt{b-a}\, \|y\|_{L^2} \geqslant \int_a^b |y(s)|\, ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1 + \lg k} \int_a^b |\varphi_k(s)|\, ds \geqslant \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1 + \lg k},$$

если, например, $|\varphi_k(s)| \leqslant M$, так как $\int_a^b |\varphi_k(s)|\, ds \geqslant \frac{1}{M} \int_a^b \varphi_k^2(s)\, ds = \frac{1}{M}$.

Между тем последний ряд не обязательно сходится при $\sum a_k^2 < +\infty$.

Отсюда, между прочим, вытекает и отмеченный выше факт, что последовательность операций $\{U_n\}$, которая (o)-сходится или ограничена в каждой точке, может не быть (o)-ограничена как последовательность (ср. 1.24 и 1.32)

*) См. Д. Е. Меньшов [1].

ГЛАВА XI

ВПОЛНЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ И СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В K-пространствах можно рассматривать различные виды аддитивных функционалов Среди них заслуживают внимания аддитивные функционалы, непрерывные в некотором квалифицированном смысле,— вполне линейные. Теория таких функционалов способствует более полному исследованию свойств и строения K-пространств общего вида. Совокупность всех вполне линейных функционалов в K-пространстве представляет собою компоненту пространства (o)-линейных функционалов, а тем самым и пространства H_r регулярных функционалов. С помощью теорем о распространении вполне линейных функционалов возможно установить связь между K-пространствами различных типов. При этом выявляется особое значение KB-пространств с аддитивной нормой.

§ 1. Вполне линейные функционалы

В настоящем параграфе рассматриваются основные свойства вполне линейных функционалов, взаимоотношения между различными классами аддитивных функционалов, вопросы распространения вполне линейных функционалов и условия существования нетривиальных вполне линейных функционалов.

1.1. Основные свойства вполне линейных функционалов.

Определение. Аддитивный функционал $f(x)$, заданный в K-пространстве X, называется *вполне линейным*, если, какова бы ни была вполне упорядоченная монотонно убывающая до нуля последовательность элементов из X:

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_\alpha \geqslant \ldots \quad (\alpha < \vartheta), \quad \inf_\alpha \{x_\alpha\} = \mathbf{0},$$

для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдётся порядковое число $\alpha_0 < \vartheta$ такое, что

$$|f(x_\alpha)| < \varepsilon \text{ при } \alpha > \alpha_0.$$

Из определения вполне линейного функционала легко следует, что сумма двух вполне линейных функционалов и произведение вполне

линейного функционала на вещественное число — вполне линейные функционалы. Также очевидно, что всякий вполне линейный функционал будет вместе с тем и (o)-линейным и, следовательно, регулярным функционалом.

1.11. Критерий вполне-линейности положительного функционала. *Для того чтобы положительный аддитивный функционал $f(x)$, заданный в K-пространстве X, был вполне линейным, необходимо и достаточно, чтобы, какова бы ни была вполне упорядоченная монотонно возрастающая ограниченная сверху последовательность положительных элементов из X:*

$$\mathbf{0} \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_\alpha \leqslant \ldots \quad (\alpha < \vartheta), \quad \sup_\alpha \{x_\alpha\} = x,$$

непременно

$$\sup_\alpha \{f(x_\alpha)\} = f(x).$$

Доказательство. a) Необходимость. Пусть $f(x)$ — положительный вполне линейный функционал в X и

$$\mathbf{0} \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_\alpha \leqslant \ldots \quad (\alpha < \vartheta), \quad \sup_\alpha \{x_\alpha\} = x.$$

Последовательность элементов $\{x - x_\alpha\}$ $(\alpha < \vartheta)$ монотонно убывает до нуля и, по определению вполне линейного функционала, для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся α_0 такое, что $|f(x - x_\alpha)| < \varepsilon$ или $|f(x) - f(x_\alpha)| < \varepsilon$ при $\alpha > \alpha_0$. Вместе с тем из положительности функционала f следует, что $f(x_\alpha) \leqslant f(x)$ при всех $\alpha < \vartheta$, и так как, по доказанному, $f(x) < f(x_\alpha) + \varepsilon$, где ε сколь угодно мало, то

$$f(x) = \sup_\alpha \{f(x_\alpha)\}.$$

b) Достаточность. Пусть

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_\alpha \geqslant \ldots (\alpha < \vartheta), \quad \inf_\alpha \{x_\alpha\} = \mathbf{0}.$$

Последовательность $\{x_1 - x_\alpha\}$ монотонно возрастает, $x_1 - x_\alpha \geqslant \mathbf{0}$ и $\sup_\alpha \{x_1 - x_\alpha\} = x_1$. По условию,

$$\sup_\alpha \{f(x_1 - x_\alpha)\} = f(x_1),$$

или

$$\sup_\alpha \{f(x_1) - f(x_\alpha)\} = f(x_1).$$

Отсюда

$$\sup_\alpha \{-f(x_\alpha)\} = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \inf_\alpha \{f(x_\alpha)\} = \mathbf{0},$$

так что $f(x)$ — вполне линейный функционал.

1.12. Пусть f — положительный вполне линейный функционал в K-пространстве X, E — ограниченное множество положительных элементов из X и $y = \sup E$. Если $f(x) = 0$ для всякого $x \in E$, то $f(y) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим сначала произвольное конечное множество E и покажем, что $f(y) = 0$ для $y = \sup E$. Пусть $E = \{y_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда $y = y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_n \leqslant y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ и $0 \leqslant f(y) \leqslant f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_n) = 0$, откуда $f(y) = 0$.

Допустим теперь, что для всякого множества E, мощность которого меньше $\aleph_\alpha$, утверждение доказано, и пусть мощность E равна $\aleph_\alpha$. Вполне упорядочим множество E по типу Ω_α. Пусть $E = \{y_\xi\}$ $(\xi < \Omega_\alpha)$ и пусть

$$z_\xi = \sup_{\eta < \xi} \{y_\eta\} \quad (\xi < \Omega_\alpha).$$

Тогда, очевидно,

$$z_1 \leqslant z_2 \leqslant \ldots \leqslant z_\xi \leqslant \ldots \quad \text{и} \quad \sup_\xi \{z_\xi\} = y.$$

В силу предположения индукции

$$f(z_\xi) = 0 \text{ при всех } \xi < \Omega_\alpha,$$

а по 1.11

$$f(y) = \sup_\xi \{f(z_\xi)\} = 0,$$

ч. и тр. д.

Доказанное предложение позволяет установить ещё один критерий вполне-линейности положительного функционала.

1.13. Для того чтобы положительный аддитивный функционал $f(x)$, заданный в K-пространстве X, был вполне линейным, необходимо и достаточно выполнение следующего условия:
если

$$x = \mathop{\mathbf{S}}_\alpha x_\alpha \geqslant \mathbf{0} \quad (\alpha < \vartheta,\ x_\alpha \in X),$$

то $f(x_\alpha) > 0$ только для счётного множества Λ значений α и

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \Lambda} f(x_\alpha).$$

Доказательство. а) Необходимость. Пусть $f(x)$ — положительный вполне линейный функционал в X и $x = \mathop{\mathbf{S}}_\alpha x_\alpha \geqslant \mathbf{0}$. Ввиду положительности и аддитивности функционала

$$f(x_{\alpha_1}) + f(x_{\alpha_2}) + \ldots + f(x_{\alpha_n}) \leqslant f(x)$$

для всякого конечного набора $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n}$ элементов x_α; поэтому множество тех α, для которых $f(x_\alpha) > \varepsilon$, конечно, а тогда

множество A тех α, для которых $f(x_\alpha) > 0$, — не более чем счётное. Пусть $A = \{\alpha_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Так как

$$x = \mathop{\mathbf{S}}_{\alpha \in A} x_\alpha + \mathop{\mathbf{S}}_{\alpha \overline{\in} A} x_\alpha = \sum_n x_{\alpha_n} + \sup_{\alpha \overline{\in} A} \{x_\alpha\},$$

то благодаря линейности функционала и 1.12,

$$f\left(\sum_n x_{\alpha_n}\right) = \sum_n f(x_{\alpha_n}), \quad f\left(\sup_{\alpha \overline{\in} A} \{x_\alpha\}\right) = 0,$$

и

$$f(x) = \sum_n f(x_{\alpha_n}).$$

b) Достаточность. Пусть

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_\alpha \geqslant \ldots \quad (\alpha < \vartheta) \text{ и } \inf_\alpha \{x_\alpha\} = \mathbf{0}.$$

Элементы x_α принадлежат компоненте $X_1 \subset X$, порождённой элементом x_1. X_1 — K-пространство с единицей (свойством единицы в X_1 обладает, например, элемент x_1).

Рассмотрим характеристики $e_\lambda^{x_\alpha}$, полагая

$$e_\lambda^{x_\alpha} = ((\lambda \mathbf{1} - x_\alpha)_+) \mathbf{1}.$$

Тогда при любом $\lambda > 0$

$$e_\lambda^{x_1} \leqslant e_\lambda^{x_2} \leqslant \ldots \leqslant e_\lambda^{x_\alpha} \leqslant \ldots \quad \text{и} \quad \sup_\alpha \{e_\lambda^{x_\alpha}\} = \mathbf{1}\ ^{*)}.$$

В таком случае разности $e_\lambda^{x_{\alpha+1}} - e_\lambda^{x_\alpha}$ представляет собой попарно дизъюнктные единичные элементы компоненты X_1 и

$$\mathop{\mathbf{S}}_{\xi \geqslant \alpha} (e_\lambda^{x_{\xi+1}} - e_\lambda^{x_\xi}) = \mathbf{1} - e_\lambda^{x_\alpha}.$$

А тогда система попарно дизъюнктных единичных элементов

$$e_\alpha, \ e_{\alpha+1} - e_\alpha, \ \ldots,$$

где $e_\alpha = e^{x_\alpha}$, полна в X_1.
Отсюда следует, что подпространства

$$X_{e_\alpha}, \ X_{e_{\alpha+1} - e_\alpha}, \ \ldots$$

---

*) По определению характеристики и по свойствам проекторов

$$x_\alpha \geqslant (\mathbf{1} - e_\lambda^{x_\alpha}) x_\alpha \geqslant \lambda (\mathbf{1} - e_\lambda^{x_\alpha}).$$

Отсюда

$$\mathbf{0} \leqslant \inf_\alpha (\mathbf{1} - e_\lambda^{x_\alpha}) \leqslant \frac{1}{\lambda} \inf x_\alpha = \mathbf{0}.$$

образуют разложение компоненты X_1. В силу свойств разложений и операции проектирования

$$x_\alpha = (e_\alpha) x_\alpha + \underset{\xi \geqslant \alpha}{\mathbf{S}} (e_{\xi+1} - e_\xi) x_\alpha \leqslant (e_\alpha) x_1 + \underset{\xi \geqslant \alpha}{\mathbf{S}} (e_{\xi+1} - e_\xi) x_1,$$

так как $x_1 \geqslant x_\alpha$. Используя свойства характеристик и условие предложения, получаем:

$$f(x_\alpha) \leqslant \lambda f(x_1) + \sum_{\xi \in A} f[(e_{\xi+1} - e_\xi) x_1] \quad (A = \{\alpha_n\},\ n = 1, 2, \ldots).$$

При достаточно большом n, т. е. если α достаточно велико, последняя сумма сколь угодно мала, как остаток сходящегося ряда, и ввиду произвольности λ $f(x_\alpha)$ сколь угодно мало при $\alpha > \alpha_0$. Таким образом, утверждение полностью доказано.

1.14. Теорема. *В K-пространствах счётного типа классы (o)-линейных и вполне линейных функционалов совпадают.*

Доказательство. Пусть X — K-пространство счётного типа $f(x)$ — (o)-линейный функционал в X и

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_\alpha \geqslant \ldots \quad (\alpha < \vartheta),\ \inf_\alpha \{x_\alpha\} = \mathbf{0}.$$

В силу свойства K-пространств счётного типа (1.43—1.45 гл. V), найдётся счётная подпоследовательность

$$x_{\alpha_1} \geqslant x_{\alpha_2} \geqslant \ldots \geqslant x_{\alpha_n} \geqslant \ldots,\ \inf_n \{x_{\alpha_n}\} = \mathbf{0},$$

откуда $(o)\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_{\alpha_n} = \mathbf{0}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{\alpha_n}) = 0$, так что при достаточно большом n и $\alpha > \alpha_n$, $|f(x_\alpha)| < \varepsilon$, и $f(x)$ — вполне линейный функционал в X. То обстоятельство, что всякий вполне линейный функционал в X будет вместе с тем и (o)-линейным, — уже отмечено выше.

Нижеследующие предложения посвящены вопросу о взаимоотношениях между некоторыми классами аддитивных функционалов в K-пространствах.

Как было установлено в 2.48 гл. VII, множество (o)-линейных функционалов, определённых в X, представляет собой K-пространство и притом правильно и нормально содержащееся в K-пространстве H_r регулярных функционалов в X. Справедливо также и аналогичное предложение, относящееся к вполне линейным функционалам в X.

1.15. Теорема. *Совокупность вполне линейных функционалов в K-пространстве X (при обычных линеаризации и полуупорядочении) представляет собой компоненту K-пространства H_r регулярных функционалов в X.*

Доказательство теоремы совершенно аналогично доказательству теоремы 2.48 гл. VII; следует только вместо критерия (o)-линейности положительного функционала 2.45 гл. VII использовать критерий вполне-линейности положительного функционала, установленный в 1.13.

Следствие. *Совокупность вполне линейных функционалов в X представляет собой компоненту K-пространства (o)-линейных функционалов в X.*

Введём некоторые новые понятия.

1.16. Определение. (o)-линейный функционал $f(x)$, заданный в K-пространстве X, называется *сингулярным*, если никакой (o)-линейный функционал $f'(x)$, удовлетворяющий условию $|f'| \leqslant |f|$, не вполне линеен.

Регулярный функционал $f(x)$, заданный в X, называется *вполне разрывным*, если никакой регулярный функционал $f'(x)$, удовлетворяющий условию $|f'| \leqslant |f|$, не является (o)-линейным.

Из самого определения сингулярного и вполне разрывного функционалов легко вытекают следующие предложения:

1.17. a) Всякий сингулярный функционал в X дизъюнктен всякому вполне линейному.

b) Всякий (o)-линейный функционал в X, дизъюнктный всем вполне линейным, является сингулярным.

c) Всякий вполне разрывный в X функционал дизъюнктен всякому (o)-линейному.

d) Всякий регулярный функционал в X, дизъюнктный всем (o)-линейным, вполне разрывен.

e) Совокупности сингулярных и вполне разрывных функционалов в X являются компонентами K-пространства регулярных функционалов в X (в силу 1.33 гл. II).

1.18. Теорема о разложении регулярного функционала. *Пусть X — K-пространство и H_r, H_0, H^*, H_s и H_d — K-пространства соответственно регулярных, (o)-линейных, вполне линейных, сингулярных и вполне разрывных функционалов в X. Тогда:*

a) *компоненты H^*, H_s и H_d образуют разложение H_r*

$$H_r = \mathbf{S}(H^*, H_s, H_d);$$

b) *компоненты H^* и H_s образуют разложение H_0:*

$$H_0 = \mathbf{S}(H^*, H_s);$$

c) *всякий регулярный функционал $f_r \in H_r$ единственным образом представляется в виде суммы вполне линейного $f \in H^*$, сингулярного $f_s \in H_s$ и вполне разрывного $f_d \in H_d$ функционалов:*

$$f_r = f + f_s + f_d;$$

d) *всякий (o)-линейный функционал $f_0 \in H_0$ единственным образом представляется в виде суммы вполне линейного $f \in H^*$ и сингулярного $f_s \in H_s$ функционалов:*

$$f_0 = f + f_s.$$

Во всех случаях некоторые из составляющих могут быть нулями.

Доказательство. Как было отмечено выше (1.17d)), регулярные функционалы, дизъюнктные всем (o)-линейным, вполне разрывны. Поэтому H_d — компонента H_r и вместе с тем дизъюнктное дополнение к H_0 (также являющейся компонентой H_r) до H_r.

Отсюда

$$H_r = \mathbf{S}(H_0, H_d).$$

Далее, всякий (o)-линейный функционал, дизъюнктный всем вполне линейным, сингулярен (1.17b)). Поэтому H_s — компонента H_0 и вместе с тем дизъюнктное дополнение к H^* (также являющейся компонентой H_0) до H_0. Отсюда

$$H_0 = \mathbf{S}(H^*, H_s).$$

В таком случае имеем:

$$H_r = \mathbf{S}(H^*, H_s, H_d).$$

Утверждения c) и d) вытекают из теоремы о разложении 2.24 гл. II.

Заметим, что предложение о представлении регулярного функционала является аналогом известной теоремы математического анализа о представлении функции ограниченного изменения в виде суммы абсолютно непрерывной функции, сингулярной функции и функции скачков.

1.2. Элементы положительности и условия дизъюнктности вполне линейных функционалов. Важное свойство вполне линейных функционалов устанавливается в следующем предложении. Именно это свойство вполне линейных функционалов оправдывает введение их в теорию K-пространств.

1.21. Теорема об элементе положительности. *Если $f \geqslant \mathbf{0}$ — вполне линейный функционал в K-пространстве X и $x > \mathbf{0}$ — элемент из X, то существует и притом единственный элемент $x_f \in X$, удовлетворяющий условиям:*

1) $\mathbf{0} \leqslant x_f \leqslant x$;

2) $f(x') > 0$ *для всякого* $x' \in X$, *для которого* $\mathbf{0} < x' \leqslant x_f$;

3) $f(x - x_f) = 0$.

В частности, если $f(x) > 0$, то $x_f > \mathbf{0}$.

Элемент x_f будем называть *элементом положительности* функционала f, соответствующим элементу x.

Доказательство. Если $f(x) = 0$, то $x_f = \mathbf{0}$, очевидно, удовлетворяет всем требованиям теоремы.

Пусть теперь $f(x) > 0$. Обозначим через E совокупность всех элементов $y \in X$, для которых

$$\mathbf{0} \leqslant y \leqslant x \text{ и } f(y) = 0.$$

Положим $y^* = \sup E$. Тогда $y^* \leqslant x$ и по 1.12 $y^* \in E$. Отсюда следует, что, на самом деле, $y^* < x$. Действительно, если бы $y^* = x$, то $f(x) = 0$ вопреки сделанному предположению.

Положим $x_f = x - y^*$ и пусть элемент x' удовлетворяет неравенствам $\mathbf{0} < x' \leqslant x_f$. Покажем, что $f(x') > 0$. В самом деле, в противном случае, $f(x') = 0$, $x' \in E$ и $x' \leqslant y^*$. Но тогда из неравенств $x' \leqslant x - x_f$ и $x' \leqslant x_f$ следует $2x' \leqslant x$, и так как $f(2x') = 0$, то $2x' \in E$ и снова из неравенств $2x' \leqslant x - x_f$ и $x' \leqslant x_f$ следует $3x' \leqslant x$, и т. д. После n шагов получим неравенство $nx' \leqslant x$ и так как это верно для всякого натурального n, то мы приходим к противоречию с принципом Архимеда. Итак, $f(x') > 0$. Наконец, $f(x - x_f) = 0$, так как $x - x_f = y^*$, а $f(y^*) = 0$, как было отмечено ранее.

1.22. Замечание. Определённые в предыдущей теореме элементы x_f и $x - x_f$ дизъюнктны. Действительно, если бы $x_f \wedge (x - x_f) = x^* > \mathbf{0}$, то, с одной стороны, мы имели бы $f(x^*) > 0$, а с другой, $0 \leqslant f(x^*) \leqslant f(x - x_f) = 0$, откуда $f(x^*) = 0$.

1.23. Пусть $f_1 > \mathbf{0}$ и $f_2 > \mathbf{0}$ — вполне линейные функционалы в K-пространстве X и $x > \mathbf{0}$ — элемент из X такой, что $f_1(x) > 0$ и $f_2(x) > 0$. Если $x_0 = x_{f_1} \wedge x_{f_2}$, где x_{f_1} и x_{f_2} — элементы положительности функционалов f_1 и f_2 (соответственно) для элемента x, и $f_0 = f_1 \wedge f_2$, то $x_0 = x_{f_0}$, т. е. элемент x_0 является элементом положительности функционала f_0, отвечающим элементу x.

Доказательство. Пусть сначала $x_0 > 0$. Следует показать, что для всякого элемента x', удовлетворяющего условию $\mathbf{0} < x' \leqslant x_0$, $f_0(x') > 0$ и что $f_0(x - x_0) = 0$. Допустим, что $f_0(x') = 0$. Как известно (1.28 гл. VII),

$$f_0(x') = \inf_{\substack{x_1 + x_2 = x' \\ x_1 \geqslant \mathbf{0},\ x_2 \geqslant \mathbf{0}}} [f_1(x_1) + f_2(x_2)],$$

так что в силу сделанного допущения найдутся последовательности $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ элементов из X такие, что $y_n \geqslant \mathbf{0}$, $z_n \geqslant \mathbf{0}$, $y_n + z_n = x'$ и

$$f_0(x') = \lim_{n \to \infty} [f_1(y_n) + f_2(z_n)] = 0.$$

Так как функционалы f_1 и f_2 положительны, то последнее соотношение возможно лишь в том случае, если

$$\lim_{n \to \infty} f_1(y_n) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \to \infty} f_2(z_n) = 0.$$

Тогда для всякого натурального k найдётся индекс n_k такой, что

$$f_1(y_{n_k}) \leqslant \frac{1}{2^k};$$

отсюда

$$f_1[y_{n_k} \vee y_{n_{k+1}} \vee \cdots \vee y_{n_{k+m}}] \leqslant f_1(y_{n_k}) + \cdots + f_1(y_{n_{k+m}}) < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Полагая

$$\bar{y}_k = \sup(y_{n_k}, y_{n_{k+1}}, \ldots)$$

и переходя в предыдущем неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получим:

$$f_1(\bar{y}_k) \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Но $\bar{y}_1 \geqslant \bar{y}_2 \geqslant \ldots$ и если $\inf\{\bar{y}_k\} = x^*$, то $f_1(x^*) = 0$, откуда, принимая во внимание, что $\mathbf{0} \leqslant x^* \leqslant x' \leqslant x_0 \leqslant x_{f_1}$, заключаем, что $x^* = \mathbf{0}$, так что

$$\lim_{k \to \infty} \bar{y}_k = \lim_{k \to \infty} y_{n_k} = \mathbf{0}.$$

Подобным же образом можно из всякой подпоследовательности $\{y_{n_i}\}$ выделить частичную $\{y_{n_{i_j}}\}$, сходящуюся к нулю, а это означает, что $y_n \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$. Аналогично покажем, что $z_n \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$ и, следовательно, $x' = \mathbf{0}$, что приводит к противоречию.

Итак, $f_0(x) > 0$ для всякого x, $\mathbf{0} < x \leqslant x_0$. Наконец, из соотношений

$$x - x_0 = x - (x_{f_1} \wedge x_{f_2}) \leqslant [x - (x_{f_1} \wedge x_{f_2})] + [x - x_{f_1} \vee x_{f_2})] = \\ = (x - x_{f_1}) + (x - x_{f_2})$$

и положительности функционала f_0 следует, что

$$0 \leqslant f_0(x - x_0) \leqslant f_0(x - x_{f_1}) + f_0(x - x_{f_2}) \leqslant f_1(x - x_{f_1}) + f_2(x - x_{f_2}) = 0,$$

так как $f_0 \leqslant f_1$ и $f_0 \leqslant f_2$.

Пусть теперь $x_0 = \mathbf{0}$. Покажем, что $f_0(x) = 0$. Допустим противное; тогда $f_0(x) > 0$ и, следовательно, $x_{f_0} > \mathbf{0}$ (1.21). Но из $f_0 \leqslant f_1$ и $f_0 \leqslant f_2$ с очевидностью следует, что $x_{f_0} \leqslant x_{f_1}$ и $x_{f_0} \leqslant x_{f_2}$, так что $x_0 = x_{f_1} \wedge x_{f_2} \geqslant x_{f_0} > \mathbf{0}$, что противоречит условию. Утверждение полностью доказано.

1.24. Теорема (Условие дизъюнктности вполне линейных функционалов). *Для того чтобы вполне линейные функционалы f_1 и f_2, заданные в K-пространстве X, были дизъюнктны, необходимо и достаточно, чтобы X разлагалось на такие компоненты X_1 и X_2, что $f_1(x) = 0$ при $x \in X_2$, а $f_2(x) = 0$ при $x \in X_1$.*

Доказательство. а) Необходимость. Пусть сначала f_1 и f_2 положительны. Через E обозначим множество элементов положительности функционала f_1, соответствующих всевозможным положительным элементам из X. Если $x, y \in E$, то и $x + y \in E$ и $\lambda x \in E$ при любом положительном вещественном числе λ. Действительно, если $\mathbf{0} < z \leqslant x + y$, то по крайней мере один из элементов $z_1 = z \wedge x$ и $z_2 = z \wedge y$ больше нуля (ср. 1.66 гл. I). Пусть, на-

пример, $z_1 > \mathbf{0}$. В таком случае, по определению элемента положительности, $f_1(z_1) > 0$ и, тем более, $f_1(z) > 0$, так что $x + y$ есть элемент положительности функционала f_1. Аналогично покажем, что и λx — элемент положительности функционала f_1.

Пусть теперь M — подмножество множества E, ограниченное в X, и $y = \sup M > \mathbf{0}$. Если $\mathbf{0} < z \leqslant y$, то найдётся такой элемент $x \in E$, что $x \wedge z = z_1 > \mathbf{0}$*), и так как x — элемент положительности функционала f_1, то $f_1(z_1) > 0$ и, тем более, $f_1(z) > 0$. Отсюда следует, что y — элемент положительности функционала f_1.

Наконец, если $\mathbf{0} < y < x$ и $x \in E$, то, очевидно, и $y \in E$. Теперь ясно, что совокупность элементов $x \in X$, для которых $|x| \in E$, образует компоненту пространства X. Обозначим её через X_1, а её дизъюнктное дополнение через X_2; тогда

$$X = \mathbf{S}(X_1, X_2).$$

Для всякого элемента $x \in X_2$, $f_1(x) = 0$. В самом деле, если бы $f_1(x) \neq 0$, то по крайней мере одно из чисел $f_1(x^+)$ и $f_1(x^-)$ было бы больше нуля. Пусть, например, $f_1(x^+) > 0$; тогда элемент положительности $(x^+)_{f_1} > \mathbf{0}$ и $(x^+)_{f_1} \in X_1$, что невозможно.

Если теперь $x \in X_1$, то $f_2(x) = 0$. Действительно, если бы было, например, $f_2(x^+) > 0$, то тогда $(x^+)_{f_2} > \mathbf{0}$ служил бы элементом положительности обоих функционалов f_1 и f_2, что невозможно благодаря их дизъюнктности в силу 1.23. Итак, $f_1(x) = 0$ для $x \in X_2$, а $f_2(x) = 0$ для $x \in X_1$.

Пусть теперь f_1 и f_2 — произвольные дизъюнктные вполне линейные функционалы в X. Одновременно с f_1 и f_2 дизъюнктны и их модули $|f_1|$ и $|f_2|$, являющиеся положительными функционалами. В таком случае, по доказанному,

$$X = \mathbf{S}(X_1, X_2),$$

причём $|f_1|$ равен нулю в X_2, а $|f_2|$ — в X_1. Так как всегда $|f(x)| \leqslant |f|(|x|)$, то f_1 обращается в нуль в X_2, а f_2 — в X_1, ч. и тр. д.

b) Достаточность была доказана для любых регулярных операций (1.29 гл. VII). Однако в общем случае это условие не является необходимым.

1.25. Если X — K-пространство с единицей, то для дизъюнктности положительных вполне линейных функционалов f_1 и f_2, заданных в X, необходимо и достаточно, чтобы элементы положительности $\mathbf{1}_{f_1}$ и $\mathbf{1}_{f_2}$, соответствующие единице $\mathbf{1}$ пространства X, были дизъюнктны.

Доказательство. Заметим прежде всего, что если (o)-линейный функционал $f \geqslant \mathbf{0}$, $e \in \mathfrak{E}(X)$ и $f(e) = 0$, то $f(x) = 0$ для любого

*) Действительно, если бы $z \,\mathrm{d}\, E$, то тем более, $z \,\mathrm{d}\, M$ и $z \,\mathrm{d}\, \sup M$ (1.65 гл. I), что приводит к противоречию с неравенством $\mathbf{0} < z \leqslant y$.

$x \in X_e$. Действительно, благодаря положительности функционала f, $f(e') = 0$ при $e' \leqslant e$, $e' \in \mathfrak{E}(X)$, а тогда $f(x) = 0$ для любого конечнозначного $x \in X_e$. Но всякий $x \in X_e$ представим как предел последовательности конечнозначных элементов из X_e, а потому, по непрерывности функционала f, и $f(x) = 0$.

Пусть теперь $\mathbf{1}_f \, \mathrm{d} \, \mathbf{1}_{f_2}$, X_1 — компонента пространства X, порождённая элементом $\mathbf{1}_{f_1}$, и X_2 — её дизъюнктное дополнение. Так как $\mathbf{1} = \mathbf{S}(\mathbf{1}_{f_1}, \mathbf{1} - \mathbf{1}_{f_1})$ (см. 1.22), то

$$\mathrm{Pr}_{X_2} \mathbf{1} = \mathbf{1} - \mathbf{1}_{f_1},$$

и так как $f_1(\mathbf{1} - \mathbf{1}_{f_1}) = 0$, то, по сделанному выше замечанию, $f_1(x) = 0$ на всём X_2. Аналогично $f_2(x) = 0$ на X_1, и по теореме 1.24 $f_1 \, \mathrm{d} \, f_2$.

Обратно, если $f_1 \, \mathrm{d} \, f_2$, то по той же теореме 1.24

$$X = S(X_1, X_2),$$

причём $f_1(x) = 0$ на X_2, а $f_2(x) = 0$ на X_1. В таком случае $\mathbf{1}_{f_1} \in X_1$, а $\mathbf{1}_{f_2} \in X_2$, откуда $\mathbf{1}_{f_1} \, \mathrm{d} \, \mathbf{1}_{f_2}$.

1.26. Теорема. *Если в K-пространстве X существует существенно положительный (o)-линейный функционал $f_1(x)$, т. е. такой, что $f_1(x) > 0$ для каждого $x > \mathbf{0}$ $(x \in X)$, то X — K-пространство счётного типа и f_1 обладает свойством единицы в H_0 — K-пространстве (o)-линейных функционалов в X.*

Доказательство. Так как $\rho(x) = f_1(x)$ $(x \geqslant \mathbf{0})$ удовлетворяет условию строгой монотонности метрической функции, то, по 1.45 гл. V и замечанию к 1.17 гл. VI, X — счётного типа, следовательно, классы (o)-линейных и вполне линейных функционалов в X совпадают.

Благодаря существенной положительности функционала f_1, единственная компонента пространства X, на которой $f_1(x) = 0$, — нулевая, т. е. состоящая только из $\mathbf{0} \in X$. Поэтому на основании теоремы 1.24 если $f \, \mathrm{d} \, f_1$, то $f(x) = 0$ на всём X.

1.3. K-пространства с достаточным числом вполне линейных функционалов. Если в K-пространстве X для всякого элемента $x \neq \mathbf{0}$ существует вполне линейный функционал f такой, что $f(x) \neq 0$, то будем говорить, что в X существует достаточное число вполне линейных функционалов. В частности, тогда для всякого $x > \mathbf{0}$ найдётся такой $f > \mathbf{0}$, что $f(x) > 0$ (см. ниже). Настоящий номер посвящён исследованию строения таких пространств. В основе соответствующих рассуждений лежит теорема об элементе положительности вполне линейного функционала (1.21).

1.31. Теорема. *Всякое K-пространство X с достаточным числом вполне линейных функционалов может быть разложено на компоненты X_α $(\alpha \in \mathrm{A})$ счётного типа и с единицей так, что в каждой компоненте X_α будет определён существенно положительный вполне линейный функционал f_α, т. е. функционал $f_\alpha \in H^*$, обладающий следующим свойством: $f_\alpha(x) > 0$ для всякого $x > \mathbf{0}$ $(x \in X_\alpha)$.*

Доказательство. Методом трансфинитной индукции выделим в X полную систему $\{x_\alpha\}$ $(\alpha < \vartheta)$ попарно дизъюнктных положительных элементов пространства X так, чтобы каждый элемент x_α был элементом положительности некоторого вполне линейного функционала $f_\alpha > \mathbf{0}$. С этой целью рассмотрим вполне упорядоченное множество $T = \{x'_\xi\}$ $(\xi < \Xi)$ всех положительных элементов из X и для элемента x'_1 подберём вполне линейный функционал $f_1 > \mathbf{0}$ так, чтобы $f_1(x'_1) > 0$. Такой функционал непременно найдётся. В самом деле, по условию существует функционал $f' \in H^*$ такой, что $f'(x'_1) \neq 0$. В таком случае невозможно, чтобы $f'_+(x'_1) = f'_-(x'_1) = 0$, следовательно, $|f'|(x'_1) > 0$ и достаточно положить $f_1 = |f'|$. По теореме 1.21 для элемента x'_1 существует элемент положительности $(x'_1)_{f_1}$ функционала f_1. Положим $x_1 = (x'_1)_{f_1}$.

Допустим теперь, что для всех $\beta < \alpha$ элементы x_β и соответствующие им функционалы f_β уже определены, но система $\{x_\beta\}$ $(\beta < \alpha)$ не полна в X. Тогда в T найдётся первый элемент, дизъюнктный всем x_β с $\beta < \alpha$. Пусть это будет x'_{ξ_α}. Для него также найдётся положительный функционал f_α такой, что $f_\alpha(x'_{\xi_\alpha}) > 0$. В качестве x_α выберем элемент положительности функционала f_α для элемента x'_{ξ_α}. Ясно, что x_α дизъюнктен всем элементам x_β с $\beta < \alpha$.

Таким образом, система $\{x_\alpha\}$ построена.

Через X_α обозначим подпространство пространства X, порождённое элементом x_α. В таком случае система компонент $\{X_\alpha\}$ $(\alpha < \vartheta)$ образует разложение пространства X*). Вместе с тем f_α представляет собой существенно положительный вполне линейный функционал в X_α. Действительно, элемент x_α обладает свойствами единицы в X_α и $f_\alpha(e) > 0$ для всякого единичного элемента $e > \mathbf{0}$ $(e \in X_\alpha)$, в силу свойств элемента положительности. Если же x — произвольный положительный элемент из X_α, то найдутся: единичный элемент $e > \mathbf{0}$ $(e \in X_\alpha)$ и число $\lambda > 0$ такие, что $x \geqslant \lambda e$, и тогда, ввиду положительности функционала f_α, $f_\alpha(x) \geqslant \lambda f_\alpha(e) > 0$. Тем самым, f_α — существенно положительный функционал в X_α. Его вполне-линейность в X_α очевидна.

Остаётся показать, что X_α — счётного типа, но это следует из того (см. замечание к 1.17 гл. VI), что соотношение $\mathbf{0} \leqslant x < y$ $(x, y \in X_\alpha)$ влечёт за собой $f_\alpha(x) < f_\alpha(y)$, так как $f_\alpha(y) = f_\alpha(x) + f_\alpha(y - x)$ и $f_\alpha(y - x) > 0$ поскольку $y - x > \mathbf{0}$.

Теорема полностью доказана.

В связи с этой теоремой естественно обратиться к изучению K-пространств с единицей, в которых определён существенно положительный (o)-линейный (или вполне линейный) функционал. Как будет сейчас показано, такие пространства тесно связаны с KB-пространствами, рассмотренными в гл. VI.

1.32. Теорема. *Всякое K-пространство X с единицей, в котором задан существенно положительный (o)-линейный функционал $f(x)$, допускает расширение Y, представляющее собой KB-пространство с нормой, аддитивной для положительных слагаемых***).

---

*) Действительно, из дизъюнктности элементов x_α следует дизъюнктность порождённых ими компонент X_α (1.34 гл. II). Вместе с тем из дизъюнктности элемента $x \in X$ всем компонентам X_α вытекает, что x дизъюнктен всем элементам x_α, но система $\{x_\alpha\}$ полна в X, следовательно, $x = \mathbf{0}$ и система $\{X_\alpha\}$ образует разложение X.

**) Близкое по содержанию предложение содержится в гл. IX (4.34).

Доказательство. Пусть $\widetilde{X}$ — максимальное расширение пространства X. Для положительных элементов из $\widetilde{X}$ определим неотрицательную (конечную или бесконечную) вещественную функцию $N(x)$, полагая

$$N(x) = \sup_{\substack{\mathbf{0} \leqslant x' \leqslant x \\ x' \in X}} \{f(x')\} \quad (x \geqslant \mathbf{0},\ x \in \widetilde{X}).$$

Через Y_+ обозначим совокупность положительных элементов $x \in \widetilde{X}$, для которых $N(x) < +\infty$. Положим в этом случае

$$\| x \| = N(x) \quad (x \geqslant \mathbf{0},\ x \in Y_+).$$

Ясно, что $\| x \| > 0$ для $x > \mathbf{0}$ и $\| \mathbf{0} \| = 0$.

1) Пусть $x \in Y_+$ и $y \in Y_+$; покажем, что $x + y \in Y_+$ и $\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$.

В самом деле, если $\mathbf{0} \leqslant z \leqslant x + y$, $z \in X$, то в силу 1.42 гл. I найдутся элементы x' и y' такие, что $\mathbf{0} \leqslant x' \leqslant x$, то $\mathbf{0} \leqslant y' \leqslant y$ и $z = x' + y'$ (очевидно, $x', y' \in X$). Тогда, по определению нормы,

$$f(z) = f(x' + y') = f(x') + f(y') \leqslant \| x \| + \| y \|$$

и, переходя к верхней грани,

$$\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|.$$

Отсюда, в частности, следует, что $x + y \in Y_+$.

С другой стороны, найдутся элементы x' и y' такие, что $\mathbf{0} \leqslant x' \leqslant x$, $\mathbf{0} \leqslant y' \leqslant y$ $(x', y' \in X)$ и $f(x') > \| x \| - \frac{\varepsilon}{2}$, $f(y') > \| y \| - \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$f(x' + y') > \| x \| + \| y \| - \varepsilon$$

и, переходя к верхней грани,

$$\| x + y \| > \| x \| + \| y \| - \varepsilon.$$

Отсюда, ввиду произвольности числа ε, заключаем, что

$$\| x + y \| \geqslant \| x \| + \| y \|,$$

что в сопоставлении с ранее установленным обратным неравенством даёт:

$$\| x + y \| = \| x \| + \| y \|.$$

2) Пусть $x \in Y_+$ и λ — вещественное число $\geqslant 0$. Покажем, что $\lambda x \in Y_+$ и $\| \lambda x \| = \lambda \| x \|$.

Если $\lambda = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $\lambda > 0$; тогда

$$\sup_{\substack{\mathbf{0} \leqslant z \leqslant \lambda x \\ z \in X}} \{f(z)\} = \sup_{\substack{\mathbf{0} \leqslant z' \leqslant x \\ z' \in X}} \{\lambda f(z')\} = \lambda \| x \|,$$

ч. и тр. д.

3) Если $y \in Y_+$ и $\mathbf{0} \leqslant x < y$, то $x \in Y_+$ и $\| x \| < \| y \|$.

Это утверждение следует из определения нормы в Y_+ и её аддитивности.

4) Если $x = \sum_n x_n \geqslant \mathbf{0}$ $(x_n \in Y_+)$, то $\| x \| = \sum_n \| x_n \|$.

В самом деле, в X найдётся элемент y, $\mathbf{0} \leqslant y \leqslant x$, такой, что

$$\| y \| > \| x \| - \varepsilon.$$

Полагая $y_n = y \wedge x_n$, получим с помощью дистрибутивного закона

$$y = \mathop{\mathbf{S}}_n y_n \text{ и } \| y \| = f(y) = \sum_n f(y_n) = \sum_n \| y_n \|,$$

так как элементы y и y_n принадлежат X. Из неравенств $y_n \leqslant x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ следует, что

$$\| x \| - \varepsilon < \| y \| = \sum_n \| y_n \| \leqslant \sum_n \| x_n \|.$$

Но для любого конечного m $\sum_{n=1}^{m} x_n \leqslant x$; отсюда (в силу аддитивности нормы) $\sum_{n=1}^{m} \| x_n \| = \| \sum_{n=1}^{m} x_n \| \leqslant \| x \|$ и, следовательно (переходя к пределу по $m \to \infty$),

$$\sum_n \| x_n \| \leqslant \| x \|.$$

Таким образом, получаем, что

$$\| x \| - \varepsilon \leqslant \sum_n \| x_n \| \leqslant \| x \|.$$

Ввиду произвольности ε заключаем, что

$$\sum_n \| x_n \| = \| x \|.$$

5) Через Y обозначим совокупность элементов $x \in \widetilde{X}$, для которых $|x| \in Y_+$. Из доказанного следует, что Y — нормальное подпространство пространства $\widetilde{X}$, содержащее X (см. 1.26 гл. II). Далее, ясно, что X нормально содержится в Y и полно в нём, т. е. Y есть расширение пространства X. Полагая $\| x \| = \| |x| \|$ для всякого элемента $x \in Y$, получим, что Y — KB-линеал и K-пространство с нормой, аддитивной для положительных слагаемых. Из 4) благодаря критерию (o)-непрерывности (2.45 гл. VII), легко следует, что норма $\| x \|$ непрерывна в Y. В частности, если $x_n \searrow \mathbf{0}$ в Y, то $\| x_n \| \to 0$.

6) Пусть $x_n \nearrow +\infty$ в Y $(x_n \geqslant \mathbf{0})$. Покажем, что $\| x_n \| \to +\infty$.

Допустим сначала, что $x_n \nearrow +\infty$ в $\widetilde{X}$. Тогда в силу 2.31 гл. IV найдётся единичный элемент $e > \mathbf{0}$ $(e \in X)$ такой, что

$$\lim_{n \to \infty} [x_n \wedge ke] = ke \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Но в этом случае

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n \| \geqslant \lim_{n \to \infty} \| x_n \wedge ke \| = k \| e \|,$$

причём $\| e \| > 0$. Так как это верно при любом натуральном k, то

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n \| = +\infty.$$

Предположим теперь, что $x_n \nearrow x < +\infty$ в $\widetilde{X}$, но $x \overline{\in} Y$, и допустим, что $\| x_n \| \to M < +\infty$ при $n \to \infty$. В этом случае, если $\mathbf{0} \leqslant x' \leqslant x$ $(x' \in X)$, то

$$x' = x' \wedge x = x' \wedge \sup_n \{x_n\} = \sup_n \{x' \wedge x_n\} = \lim_{n\to\infty} [x' \wedge x_n].$$

Так как $x' \in X$, то ввиду непрерывности функционала f в X и свойств нормы в Y,

$$f(x') = \lim_{n\to\infty} f[x' \wedge x_n] \leqslant \lim_{n\to\infty} \| x' \wedge x_n \| \leqslant \lim_{n\to\infty} \| x_n \| = M.$$

Это верно для всякого элемента x', удовлетворяющего указанным выше условиям и потому, переходя к верхней грани, получим $N(x) \leqslant M$, т. е. $x \in Y$ и x_n не стремится к бесконечности в Y, вопреки предположению. Следовательно, $\| x_n \| \to +\infty$, и утверждение доказано.

Теперь мы видим, что норма в Y удовлетворяет всем условиям, налагаемым на норму в KB-пространстве, так что Y — KB-пространство и притом с нормой, аддитивной для положительных слагаемых.

Следствие. *Если в K-пространстве X с единицей определён существенно положительный (o)-линейный функционал $f(x)$, то его можно распространить с сохранением линейности и существенной положительности на некоторое расширение пространства X, являющееся KB-пространством с нормой, аддитивной для положительных слагаемых.*

Действительно, полагая для всякого $y \in Y$,

$$f^*(y) = \| y_+ \| - \| y_- \|,$$

без труда проверим, что $f^*(y)$ — существенно положительный линейный функционал в Y, совпадающий с $f(x)$ на X, т. е. являющийся распространением функционала f на всё Y. Очевидно также, что такое распространение может быть осуществлено только единственным образом.

1.33. В KB-пространстве X с единицей всегда имеется существенно положительный линейный функционал одновременно (o)-, (b)- и вполне линейный.

Доказательство. Выделим полное в X множество попарно дизъюнктных единичных элементов $E = \{e\}$ так, чтобы каждый элемент $e \in E$ был элементом положительности некоторого линейного функционала в X. Существование такого множества E легко следует из теоремы об элементе положительности линейного функционала и из наличия в X достаточного числа таких функционалов (см. 2.22 гл. IX). X — счётного типа, поэтому E — счётное множество.

Пусть $E = \{e_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и f_n — положительный линейный функционал в X, для которого e_n служит элементом положительности. Полагая

$$f(x) = \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{f_n(x)}{\| f_n \|} \qquad (x \in X),$$

получим линейный и существенно положительный функционал в X. Действительно, ввиду полноты множества E в X для всякого единичного элемента $e \in X$ найдётся $e_n \in E$ такой, что $e \wedge e_n = e_0 > \mathbf{0}$. По определению элемента положительности, $f_n(e_0) > 0$, а тогда и $f(e_0) > 0$ и, тем более, $f(e) > 0$. Если x — произвольный положительный элемент из X, то $x \geqslant \lambda e$, где $e > \mathbf{0}$ и $\lambda > 0$, и $f(x) \geqslant \lambda f(e) > 0$.

1.34. Всякое KB-пространство X с единицей допускает расширение Y, представляющее собой KB-пространство с нормой, аддитивной для положительных слагаемых.

Непосредственно вытекает из 1.32 и 1.33.

Доказанные предложения позволяют легко установить условия существования вполне линейных функционалов в K-пространствах.

1.35. Теорема. *Для того чтобы в K-пространстве X существовало достаточное число вполне линейных функционалов, необходимо и достаточно, чтобы X разлагалось на компоненты X_α, каждая из которых допускает расширение Y_α, представляющее собой KB-пространство с аддитивной для положительных слагаемых нормой.*

Доказательство. a) Необходимость. По теореме 1.31 X разлагается на компоненты X_α, в каждой из которых существует существенно положительный вполне линейный функционал. А тогда по теореме 1.32 каждое X_α допускает расширение указанного типа.

b) Достаточность. Пусть $X = \mathop{\mathbf{S}}\limits_{\alpha} X_\alpha$ и каждое X_α допускает расширение Y_α, являющееся KB-пространством с нормой, аддитивной для положительных слагаемых. Если $x > \mathbf{0}$ — произвольный элемент из X, то по теореме о разложении (2.24 гл. II)

$$x = \mathop{\mathbf{S}}\limits_{\alpha} x_\alpha \quad (x_\alpha \in X_\alpha, x_\alpha \geqslant \mathbf{0}),$$

причём для некоторого $\alpha = \alpha_0$ непременно $x_{\alpha_0} > \mathbf{0}$. В Y_{α_0} имеется существенно положительный (o)-линейный (и вместе с тем вполне линейный) функционал f_{α_0}; достаточно, например, положить

$$f_{\alpha_0}(x) = \| x_+ \| - \| x_- \| \quad (x \in Y_{\alpha_0}).$$

Этот же функционал будет существенно положительным и линейным и в X_{α_0} — нормальном подпространстве пространства Y_{α_0}. Действительно, если $x_n \xrightarrow{(o)} x$ в X_{α_0}, то тем более $x_n \xrightarrow{(o)} x$ в Y_{α_0} и, значит, $f_{\alpha_0}(x_n) \to f_{\alpha_0}(x)$, следовательно, f_{α_0} непрерывен в X_{α_0}. Аддитивность же и существенная положительность функционала f_{α_0} в X_{α_0} очевидны. Распространим теперь функционал f_{α_0} на всё X, полагая для всякого $x \in X$

$$\overline{f}(x) = f_{\alpha_0}[\mathrm{Pr}_{X_{\alpha_0}} x].$$

Из свойств операции проектирования легко следует, что $\overline{f}$ — вполне линейный положительный функционал в X. Так как

$$\overline{f}(x) = f_{\alpha_0}(x_{\alpha_0}), \quad \text{где } x_{\alpha_0} = \mathrm{Pr}_{X_{\alpha_0}} x,$$

причём $x_{\alpha_0} > \mathbf{0}$, то $\overline{f}(x_{\alpha_0}) > 0$. Тем самым в X существует достаточное число линейных функционалов.

Следствие 1. *Во всяком дискретном K-пространстве X существует достаточное число вполне линейных функционалов.*

Действительно, X разлагается на компоненты, изоморфные K-пространству вещественных чисел (5.21 гл. III), которое является частным случаем KB-пространства с аддитивной нормой.

Следствие 2. *Если X — K-пространство счётного типа, то условия теоремы 1.35 необходимы и достаточны для того, чтобы в X существовало достаточное число (o)-линейных функционалов.*

Действительно, классы (o)-линейных и вполне линейных функционалов в K-пространствах счётного типа совпадают (см. 1.14).

1.36. Если в K-пространстве X существуют вполне линейные функционалы (хотя бы и в недостаточном числе), то X есть соединение двух компонент, из которых одна удовлетворяет условиям предыдущей теоремы, т. е. в ней существует достаточное число вполне линейных функционалов, а в другой вообще нет нетривиальных (не равных тождественно нулю) вполне линейных функционалов.

Доказательство. Пусть E — совокупность всех элементов положительности K-пространства X, отвечающих всевозможным вполне линейным положительным функционалам в X. Через X_1 обозначим компоненту пространства X, порождённую множеством E, и через X_2 — её дизъюнктное дополнение. Легко видеть, что E полно в X_1; поэтому для всякого элемента $x \in X_1$, $x > \mathbf{0}$, найдётся элемент $y \in E$ такой, что $x \wedge y = z > \mathbf{0}$. Если $f > \mathbf{0}$ — вполне линейный функционал, для которого y служит элементом положительности, то $f(z) > 0$ и тем более $f(x) > 0$; и так как x — произвольный положительный элемент из X_1, то в X_1 существует достаточное число вполне линейных функционалов.

Пусть теперь $x_0 \in X_2$, $x_0 > \mathbf{0}$. Если бы в X_2 существовал вполне линейный положительный функционал f, для которого $f(x_0) > 0$, то, полагая

$$\bar{f}(x) = f[\mathrm{Pr}_{X_2} x] \qquad (x \in X),$$

мы получили бы положительный вполне линейный функционал во всём X, причём $\bar{f}(x_0) = f(x_0) > 0$. Если y — элемент положительности функционала $\bar{f}$ для элемента x_0, то $\mathbf{0} < y \leqslant x_0$ и $y \in X_2$. Вместе с тем, по определению множества E, $y \in E$ и, следовательно, $y \in X_1$. Отсюда, однако, следовало бы, что $y = \mathbf{0}$, а это противоречило бы неравенству $f(y) = \bar{f}(x_0) > 0$. Итак, в X_2 не существует нетривиальных вполне линейных функционалов. Остаётся заметить, что компоненты X_1 и X_2 образуют разложение пространства X.

1.37. Если X — расширенное K-пространство, а x_f — элемент положительности вполне линейного положительного функционала $f(x)$, то x_f представляется в виде соединения конечного числа дискретных элементов.

Доказательство. Допустим, что x_f может быть представлен в виде соединения бесконечного множества существенно положительных элементов:

$$x_f = \mathop{\mathrm{S}}_{n=1}^{\infty} x_n \ (x_n > \mathbf{0}).$$

Каковы бы ни были числа λ_n, «ступенчатый» элемент $\bar{x} = \sum_1^{\infty} \lambda_n x_n \in X$. Но из $\mathbf{0} < x_n \leqslant x_f$ вытекает, что $f(x_n) > 0$, а тогда, полагая $\lambda_n = \dfrac{1}{f(x_n)}$, мы получим:

$$f(\bar{x}) = \sum_1^{\infty} \lambda_n f(x_n) = +\infty,$$

что невозможно.

1.38. Если в расширенном K-пространстве X существует достаточное число вполне линейных функционалов, то X — дискретное K-пространство.

Доказательство. Допустим противное; тогда в X содержится непрерывная компонента X_c (5.31 гл. III). Пусть $x \in X_c$, $x > \mathbf{0}$; по условию найдётся вполне линейный функционал $f > \mathbf{0}$, для которого $f(x) > 0$. Пусть x_f — его элемент положительности, соответствующий элементу x. Тогда по 1.37 $x_f = \mathop{\mathrm{S}}_1^n x_i$, где x_i — дискретные элементы и $\mathbf{0} < x_i \leqslant x$. Но это противоречит определению непрерывности пространства X_c.

1.39. Если в расширенном K-пространстве X существует существенно положительный (o)-линейный функционал $f(x)$, то X конечномерно.

Доказательство. По 1.26 X — счётного типа, и так как (o)-линейные вполне линейные функционалы в X совпадают, то по 1.38 X дискретно.

В то же время $\mathbf{1}$ — элемент положительности функционала f и по 1.37 $\mathbf{1}=\sum_1^n e_i$, где e_i — орты. Таким образом, в X существует лишь конечное число ортов, откуда и следует конечномерность пространства X (5.2 гл. III).

1.4. О распространении вполне линейных функционалов. Отметим некоторые предложения, относящиеся к распространению вполне линейных функционалов. В дальнейшем, говоря о распространении вполне линейных функционалов, мы будем всё время иметь в виду распространение с сохранением свойства вполне-линейности. Нам понадобится сначала одно вспомогательное предложение.

1.41. Пусть Y — расширение K-пространства X, $y_0 \in Y$, $(y_0 > \mathbf{0})$, но $y_0 \overline{\in} X$, и пусть $E=\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in \mathrm{A})$ — множество всех положительных элементов из X, удовлетворяющих условию $x_\alpha < y_0$; тогда

$$\sup_Y E = y_0.$$

Доказательство. Очевидно, $y^* = \sup_Y E \leqslant y_0$. Если $y^* < y_0$, то ввиду полноты X в Y найдётся элемент $x' > \mathbf{0}$ $(x' \in X)$ такой, что $(y_0 - y^*) \wedge x' = x_0 > \mathbf{0}$. Так как X нормально содержится в Y, то $x_0 \in X$ и $y_0 - y^* \geqslant x_0$. Отсюда $y^* + x_0 \leqslant y_0$ и тем более $x_\alpha + x_0 \leqslant y_0$. В таком случае

$$\sup_{\alpha \in \mathrm{A}} \{x_\alpha + x_0\} \leqslant y^* \quad \text{и} \quad y^* + x_0 \leqslant y^*,$$

откуда $x_0 \leqslant \mathbf{0}$, что противоречит неравенству $x_0 > \mathbf{0}$. Итак, $y^* = y_0$, и наше утверждение доказано.

1.42. Теорема о распространении вполне линейных функционалов. *Пусть X — K-пространство и Y — некоторое его расширение. Тогда*

a) *Если f — положительный вполне линейный функционал в X и F — его распространение на всё Y, то F — также положительный функционал и для всякого $y \in Y$, $y \geqslant \mathbf{0}$,*

$$F(y) = \sup_{\substack{\mathbf{0} \leqslant x \leqslant y \\ x \in X}} \{f(x)\}. \tag{1}$$

b) *Для того чтобы положительный вполне линейный функционал f, заданный в X, мог быть распространён на всё Y, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $y \in Y$, $y \geqslant \mathbf{0}$,*

$$F(y) = \sup_{\substack{\mathbf{0} \leqslant x \leqslant y \\ x \in X}} \{f(x)\} < +\infty.$$

c) *Если f и f' — два положительных вполне линейных функционала в X, причём f допускает распространение на всё Y и $f' \leqslant f$, то f' также допускает распространение на всё Y.*

d) *Если вполне линейный функционал f, заданный в X, допускает распространение F на всё Y, то это распространение единственно и при этом F_+, F_- и $|F|$ служат распространениями на Y, соответственно для f_+, f_- и $|f|$.*

Доказательство. a) Пусть F — распространение вполне линейного функционала $f \geqslant \mathbf{0}$ с X на Y. Если $y \in X$, $y \geqslant \mathbf{0}$, то соотношение (1) очевидно. Далее, если соотношение (1) выполняется для некоторого $y \geqslant \mathbf{0}$ $(y \in Y)$ и $x \geqslant \mathbf{0}$ — элемент из X, то

$$F(x+y) = F(x) + F(y) = f(x) + \sup_{\substack{\mathbf{0} \leqslant x' \leqslant y \\ x' \in X}} \{f(x')\} =$$

$$= \sup_{\substack{\mathbf{0} \leqslant x' \leqslant y \\ x' \in X}} \{f(x+x')\} = \sup_{\substack{\mathbf{0} \leqslant x'' \leqslant x+y \\ x'' \in X}} \{f(x'')\} \text{ *)}$$

и соотношение (1) имеет место для элемента $x+y$.

Рассмотрим вполне упорядоченное множество $E = \{x_\alpha\}$ положительных элементов из X, меньших или равных y. В силу 1.41 $\sup E = y$ в Y, и если положить

$$y_\alpha = \sup_{\beta < \alpha} \{x_\beta\},$$

то

$$y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_\alpha \leqslant \ldots \quad \text{и} \quad \sup_\alpha \{y_\alpha\} = \sup E = y.$$

Соотношение (1) имеет место для всякого y_n $(n = 1, 2, \ldots)$, так как $y_n \in X$. Допустим теперь, что оно справедливо для y_β с $\beta < \alpha$, и покажем, что оно выполняется и для y_α.

Пусть сначала α — трансфинитное число первого рода $\alpha = \gamma + 1$. Тогда

$$y_\alpha = y_\gamma \vee x_\gamma = y_\gamma + x_0, \qquad \text{где } \mathbf{0} \leqslant x_0 \leqslant x_\gamma;$$

но $x_\gamma \in X$, а тогда $x_0 \in X$ и, по доказанному, соотношение (1) имеет место для y_α. Если же α — второго рода, то рассмотрим монотонно убывающую последовательность $T = \{y_\alpha - y_\beta\}$ $(\beta < \alpha)$. Очевидно, $\inf T = \mathbf{0}$ и, по определению вполне линейного функционала,

$$|F(y_\alpha) - F(y_\beta)| = |F(y_\alpha - y_\beta)| < \varepsilon \qquad \text{при } \beta > \beta_0.$$

Так как соотношение (1) предположено справедливым для y_β, то $\mathbf{0} \leqslant F(y_{\beta'}) \leqslant F(y_{\beta''})$ при $\beta' < \beta''$, а тогда, вследствие произвольности ε, $F(y_\alpha) \geqslant \mathbf{0}$ и

$$F(y_\alpha) = \sup_{\beta < \alpha} \{F(y_\beta)\}.$$

В таком случае, по предположению индукции,

$$F(y_\alpha) = \sup_{\beta < \alpha} \{ \sup_{\substack{\mathbf{0} \leqslant x \leqslant y_\beta \\ x \in X}} \{f(x)\}\} \leqslant \sup_{\substack{\mathbf{0} \leqslant x \leqslant y_\alpha \\ x \in X}} \{f(x)\}.$$

---

*) Последний переход с использованием возможности двойного разбиения (1.42 гл. I).

Но для всякого $x \in X$, $\mathbf{0} \leqslant x \leqslant y_\alpha$, $f(x) \leqslant F(y_\alpha)$; поэтому $\sup\limits_{\substack{\mathbf{0} \leqslant x \leqslant y_\alpha \\ x \in X}} \{f(x)\} \leqslant F(y_\alpha)$. Тем самым $F(y_\alpha) = \sup\limits_{\substack{\mathbf{0} \leqslant x \leqslant y_\alpha \\ x \in X}} \{f(x)\}$, ч. и тр. д.

Из доказанного утверждения следует также, что F определяется однозначно заданием $f \geqslant \mathbf{0}$, т. е. распространение $f \geqslant \mathbf{0}$ на Y возможно только единственным способом.

b) Необходимость условия содержится в a). Покажем его достаточность. Пусть для всякого $y \in Y$, $y \geqslant \mathbf{0}$,

$$F(y) = \sup_{\substack{\mathbf{0} \leqslant x \leqslant y \\ x \in X}} \{f(x)\} < +\infty.$$

Для произвольного $y \in Y$ положим

$$F(y) = F(y_+) - F(y_-).$$

Тогда функционал F будет определён во всём Y. Из положительности и аддитивности функционала f легко следует положительность и аддитивность функционала F (ср. 1.22 гл. VII). Далее, ясно, что $F(x) = f(x)$ для элементов $x \in X$, так что F есть распространение функционала f на Y.

Для доказательства вполне-линейности функционала F в Y воспользуемся критерием 1.13. Пусть

$$y = \mathop{\mathbf{S}}_{\alpha} y_\alpha \geqslant \mathbf{0} \qquad (y_\alpha \in Y).$$

Ввиду аддитивности и положительности функционала F найдётся не более конечного числа значений α, для которых $F(y_\alpha) > \varepsilon$, где ε — заданное положительное число. Поэтому множество A значений α, для которых $F(y_\alpha) > 0$, не более чем счётное. Положим

$$y' = \mathop{\mathbf{S}}_{\alpha \overline{\in} A} y_\alpha \text{ и } y'' = \mathop{\mathbf{S}}_{\alpha \overline{\in} A} y_\alpha;$$

тогда $y = y' + y''$ и $F(y) = F(y') + F(y'')$. Покажем прежде всего, что $F(y'') = 0$. Действительно, по определению $F(y'')$, найдётся элемент $x \in X$, $\mathbf{0} \leqslant x \leqslant y''$, такой, что

$$f(x) > F(y'') - \varepsilon.$$

В силу закона дистрибутивности

$$x = \mathop{\mathbf{S}}_{\alpha \overline{\in} A} (x \wedge y_\alpha),$$

откуда, принимая во внимание положительность и вполне-линейность функционала f и то, что из $0 \leqslant f(x \wedge y_\alpha) \leqslant F(y_\alpha) = 0$, при $\alpha \overline{\in} A$ следует $f(x \wedge y_\alpha) = 0$, получаем:

$$f(x) = \sum_{\alpha \overline{\in} A} f(x \wedge y_\alpha) = 0 \quad \text{и} \quad F(y') < \varepsilon.$$

Отсюда, ввиду произвольности ε, $F(y') = 0$.

Пусть теперь $A = \{\alpha_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$; тогда, благодаря положительности и аддитивности функционала F,

$$F(y) = F(y'') \geqslant \sum_1^n F(y_{\alpha_i})$$

и ряд $\sum_1^\infty F(y_{\alpha_i})$ сходится. По определению $F(y'')$ найдётся такой элемент $x \in X$, $0 \leqslant x \leqslant y''$, что

$$f(x) > F(y'') - \frac{\varepsilon}{2},$$

и по закону дистрибутивности

$$x = \sum_1^\infty (x \wedge y_{\alpha_i}).$$

В силу вполне-линейности функционала f

$$f(x) = \sum_1^\infty f(x \wedge y_{\alpha_i}),$$

и при достаточно большом $n \geqslant N$

$$f\left(\sum_{i=n+1}^\infty (x \wedge y_{\alpha_i})\right) = F\left[\sum_{i=n+1}^\infty (x \wedge y_{\alpha_i})\right] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но

$$y'' - x = \sum_{i=1}^\infty [y_{\alpha_i} - (x \wedge y_{\alpha_i})] \geqslant \sum_{i=n+1}^\infty [y_{\alpha_i} - (x \wedge y_{\alpha_i})] =$$

$$= \sum_{i=n+1}^\infty y_{\alpha_i} - \sum_{i=n+1}^\infty (x \wedge y_{\alpha_i}),$$

и поэтому

$$F\left(\sum_{i=n+1}^\infty y_{\alpha_i}\right) - F\left(\sum_{i=n+1}^\infty (x \wedge y_{\alpha_i})\right) \leqslant F(y'' - x) < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$F(y'') - \sum_{i=1}^n F(y_{\alpha_i}) = F\left(\sum_{i=n+1}^\infty y_{\alpha_i}\right) < \varepsilon.$$

Это означает, что

$$F(y) = F(y'') = \sum_{1}^{\infty} F(y_{\alpha_i}),$$

и F — вполне линейный функционал.

c) Пусть $f \geqslant \mathbf{0}$ — вполне линейный функционал в X, допускающий распространение F на Y, и $f' \leqslant f$, где $f' \geqslant \mathbf{0}$ — вполне линейный функционал в X. Покажем, что f' может быть распространён на Y. Действительно, для всякого $y \in Y$, $y \geqslant \mathbf{0}$ имеем:

$$F'(y) = \sup_{\substack{\mathbf{0} \leqslant x \leqslant y \\ x \in X}} \{f'(x)\} \leqslant \sup_{\substack{\mathbf{0} \leqslant x \leqslant y \\ x \in X}} \{f(x)\} = F(y) < +\infty,$$

откуда в силу b) и следует, что F' есть распространение функционала f' на всё Y. Очевидно также, что $F' \leqslant F$.

d) Пусть f — вполне линейный функционал в X и F — его распространение на Y. Как известно (1.24) гл. VII,

$$f_+(x) = \sup_{\mathbf{0} \leqslant x' \leqslant x} \{f(x')\} \quad \text{и} \quad F_+(x) = \sup_{\mathbf{0} \leqslant x' \leqslant x} \{F(x')\} \quad (x \geqslant \mathbf{0},\ x \in X).$$

Но $f(x') = F(x')$ в X, поэтому f_+ и F_+ совпадают в X, т. е. F_+ есть распространение функционала f_+ на Y. Такое распространение, как было установлено ранее, единственно. Таким же образом докажем, что F_- — единственное распространение функционала f_- на Y, а следовательно, F и $|F|$ — единственные распространения функционалов f и $|f|$ на всё Y. Теорема доказана.

Замечание. Пусть $f \geqslant \mathbf{0}$ — вполне линейный функционал в X и $\widetilde{X}$ — максимальное расширение пространства X. Выделим в $\widetilde{X}$ множество Y элементов $y \in \widetilde{X}$, для которых

$$\Phi(|y|) = \sup_{\substack{\mathbf{0} \leqslant x \leqslant |y| \\ x \in X}} \{f(x)\} < +\infty.$$

Легко видеть, что Y — расширение пространства X и в силу доказанной теоремы f допускает единственное распространение F на Y, причём для элементов $y \geqslant \mathbf{0}$ $(y \in Y)$

$$F(y) = \Phi(y).$$

Отметим также следующее очевидное следствие теоремы 1.42: если F — вполне линейный функционал в Y, равный нулю в X (Y — расширение пространства X), то F равен нулю и во всём Y.

1.43. Теорема. *Если Y — расширение пространства X, то K-пространство Y^* вполне линейных функционалов в Y изоморфно нормальному подпространству K-пространства X^* вполне линейных функционалов в X.*

Доказательство. Пусть X' — совокупность всех функционалов $f \in X^*$, допускающих (единственное, по доказанному) распро-

странение $F \in Y^*$ на Y. Если $f_1, f_2 \in X'$, F_1 и F_2 — их распространения на Y, то, очевидно, $F_1 + F_2$ есть распространение $f_1 + f_2$ и λF_1 — распространение λf_1 на Y (λ — вещественное число). Далее, если $f \in X'$, $f' \in X^*$ и $|f'| \leqslant |f|$, то и $f' \in X'$ (см. 1.42 c)—d)), так что X' — нормальное подпространство пространства X^*. Наконец, если $f > \mathbf{0}$ ($f \in X'$) и F — его распространение, то и $F > \mathbf{0}$, и обратно (см. 1.42a) и следствие теоремы 1.42). Таким образом, соответствие $f \longleftrightarrow F$ ($f \in X'$, $F \in Y^*$) сохраняет линейные соотношения и полуупорядочение и является изоморфизмом; следовательно, Y^* изоморфно нормальному подпространству пространства X^*.

1.44. Пусть $\mathfrak{E}$ — база K-пространства X с единицей, причём для элементов из $\mathfrak{E}$ имеет место теорема о диагональной последовательности. Если φ — существенно положительная аддитивная вещественная функция, заданная в $\mathfrak{E}$, т. е. функция, удовлетворяющая условиям:

1) $\varphi(e) > 0$ для всякого $e > \mathbf{0}$ ($e \in \mathfrak{E}$);

2) если $e_1 \mathrm{d} e_2$ ($e_1, e_2 \in \mathfrak{E}$), то $\varphi(e_1 + e_2) = \varphi(e_1) + \varphi(e_2)$, то в $\mathfrak{E}$ может быть определена существенно положительная аддитивная и непрерывная функция ψ такая, что $\psi(e) \leqslant \varphi(e)$ для всех $e \in \mathfrak{E}$.

Доказательство. Пусть $\{e_n\}$ — произвольная убывающая до нуля последовательность единичных элементов пространства X. Отнесём этой последовательности неотрицательное вещественное число

$$\alpha = \alpha(e_1, e_2, \ldots) = \lim_{n \to \infty} \varphi(e_n).$$

Точную верхнюю границу чисел α, отвечающих всевозможным последовательностям $e_n \searrow \mathbf{0}$, обозначим через α^*. Ясно, что каждое $\alpha \leqslant \varphi(\mathbf{1})$ и потому $\alpha^* \leqslant \varphi(\mathbf{1})$. Докажем, что существует последовательность единичных элементов $e_n^* \searrow \mathbf{0}$ такая, что

$$\alpha(e_1^*, e_2^*, \ldots) = \alpha^*.$$

С этой целью выберем последовательности элементов $\{e_n^{(k)}\}$ $(n, k = 1, 2, \ldots)$ так, чтобы

$$\alpha_n = \alpha(e_n^{(1)}, e_n^{(2)}, \ldots, e_n^{(k)}, \ldots) > \alpha^* - \frac{1}{n}.$$

Не умаляя общности доказательства можно предположить, что $e_n^{(k)} \leqslant e_{n+1}^{(k)}$ (в противном случае достаточно было бы положить $\bar{e}_n^{(k)} = e_1^{(k)} \vee e_2^{(k)} \vee \ldots \vee e_n^{(k)}$ и последовательности $\{\bar{e}_n^{(k)}\}$ обладали бы всеми нужными свойствами). По сделанному предположению о диагональной последовательности, существует последовательность индексов $k_1 < k_2 < \ldots$ такая, что

$$\lim_{n \to \infty} e_n^{(k_n)} = \mathbf{0}.$$

Положим

$$e_n^* = \sup(e_n^{(k_n)}, e_{n+1}^{(k_{n+1})}, \ldots) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, $e_n^* \searrow \mathbf{0}$. Так как элементы $e_n^{(k)}$ монотонно возрастают с увеличением n (при фиксированном k), то, каково бы ни было натуральное число m,

$e_n^* \geqslant e_n^{(k_n)} \geqslant e_m^{(k_n)}$ при $n \geqslant m$. Но $\{e_m^{(k_n)}\}$ ($n = 1, 2, \ldots$; m фиксировано) есть подпоследовательность последовательности $\{e_m^{(k)}\}$; поэтому

$$\alpha^* - \frac{1}{m} < \alpha\,(e_m^{(1)}, e_m^{(2)}, \ldots) = \alpha\,(e_m^{(k_1)}, e_m^{(k_2)}, \ldots) \leqslant \alpha\,(e_1^*, e_2^*, \ldots),$$

и так как это верно при всяком $m = 1, 2, \ldots$, то

$$\alpha\,(e_1^*, e_2^*, \ldots) \geqslant \alpha^*.$$

С другой стороны, по самому определению числа α^*,

$$\alpha\,(e_1^*, e_2^*, \ldots) \leqslant \alpha^*,$$

так что, действительно,

$$\alpha^* = \alpha\,(e_1^*, e_2^*, \ldots).$$

Зададим в $\mathfrak{E}$ функцию φ', положив

$$\varphi'(e) = \lim_{n \to \infty} \varphi\,(e \cdot e_n^*)\ ^{*)} \quad (e \in \mathfrak{E}).$$

Определение функции φ' имеет смысл, так как $e_n^* \searrow \mathbf{0}$, $e \cdot e_n^* \searrow \mathbf{0}$, а функция φ аддитивна и положительна. Очевидно также, что $\varphi'(e) \geqslant \mathbf{0}$ при всех $e \in \mathfrak{E}$.

Покажем, что φ' — аддитивная функция. Действительно, если $e' \,\mathrm{d}\, e''$, то по дистрибутивности сложения и умножения

$$\varphi'(e' + e'') = \lim_{n \to \infty} \varphi\,[(e' + e'') \cdot e_n^*] = \lim_{n \to \infty} \varphi\,[e' \cdot e_n^*] + \\ + \lim_{n \to \infty} \varphi\,[e'' \cdot e_n^*] = \varphi'(e') + \varphi''(e'').$$

Убедимся теперь в том, что $\varphi'(e) < \varphi(e)$ при всяком $e > \mathbf{0}$. В самом деле, из $e_n^* \searrow \mathbf{0}$ следует, что $e \cdot e_n^* < e$ при достаточно больших $n \geqslant n_0$, откуда, ввиду существенной положительности функции φ,

$$\varphi\,[e \cdot e_n^*] < \varphi(e) \qquad (n \geqslant n_0).$$

С увеличением n последнее неравенство только усиливается, поэтому и в пределе при $n \to \infty$ $\varphi'(e) < \varphi(e)$.

Положим

$$\psi(e) = \varphi(e) - \varphi'(e) \qquad (e \in \mathfrak{E}).$$

Из аддитивности функций φ и φ' следует аддитивность и их разности ψ. Далее, из неравенства $\varphi'(e) < \varphi(e)$ ($e > \mathbf{0}$) следует и существенная положительность функции ψ. Остаётся показать, что ψ непрерывна в $\mathfrak{E}$. Допустим противное; тогда найдётся последовательность единичных элементов $e_n \searrow \mathbf{0}$ такая, что

$$\lim_{n \to \infty} \psi(e_n) > \varepsilon > 0\ ^{**)}.$$

Так как $\psi(e_n)$ убывает с возрастанием n, то

$$\psi(e_n) = \varphi(e_n) - \lim_{k \to \infty} \varphi\,[e_n \cdot e_k^*] > \varepsilon \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

---

*) Об умножении элементов в K-пространстве и его свойствах см. 3.3 гл. IV.
**) Ср. 1. 14 гл. VIII.

В таком случае для всякого n найдётся индекс k_n такой, что

$$\varphi(e_n) - \varphi[e_n \cdot e_k^*] > \varepsilon \quad \text{при } k \geqslant k_n.$$

Заметим, что если последнее неравенство справедливо при $k = k_0$, то оно будет иметь место и для всех $k > k_0$, так как e_k^* с увеличением k убывают. Поэтому индексы k_n могут быть выбраны так, что $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$. Элементы $e_n - e_n \cdot e_{k_n}^*$ и $e \cdot e_{k_n}^*$ дизъюнктны и, по аддитивности функции φ,

$$\varphi[e_n - e_n \cdot e_{k_n}^*] = \varphi(e_n) - \varphi(e_n \cdot e_{k_n}^*) > \varepsilon \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Далее, так как

$$e_{k_n}^* \cdot [e_n - e_n \cdot e_{k_n}^*] = e_{k_n}^* \cdot e_n - e_n e_{k_n}^* = \mathbf{0},$$

т. е. $e_{k_n}^* \, \mathrm{d} \, [e_n - e_n \cdot e_{k_n}^*]$, то, по аддитивности функции φ,

$$\varphi[e_n - e_n \cdot e_{k_n}^* + e_{k_n}^*] = \varphi[e_n - e_n \cdot e_{k_n}^*] + \varphi(e_{k_n}^*) > \varepsilon + \alpha^*,$$

так как, по самому построению последовательности $\{e_n^*\}$, $\varphi(e_{k_n}^*) \geqslant \alpha^*$.

Положим

$$\tilde{e}_n = e_n - e_n \cdot e_{k_n}^* + e_{k_n}^* \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, $\tilde{e}_n \to \mathbf{0}$ и если $\bar{e}_n = \sup(\tilde{e}_n, \tilde{e}_{n+1}, \ldots)$, то $\bar{e}_n \searrow \mathbf{0}$ и $\bar{e}_n \geqslant \tilde{e}_n$. Теперь при всех $n = 1, 2, \ldots$

$$\varphi(\bar{e}_n) \geqslant \varphi(\tilde{e}_n) > \varepsilon + \alpha^* \quad \text{и} \quad \lim_{n \to \infty} \varphi(\bar{e}_n) \geqslant \varepsilon + \alpha^*,$$

что противоречит определению числа α^*. Таким образом, $\psi(e_n) \searrow \mathbf{0}$ для всякой последовательности $e_n \searrow \mathbf{0}$ и ψ непрерывна в $\mathfrak{E}$. Утверждение доказано.

1.45. Теорема. *Если в K-пространстве X с единицей существует существенно положительный аддитивный функционал f и для единичных элементов пространства X имеет место теорема о диагональной последовательности, то в X можно определить существенно положительный (o)-линейный функционал Φ такой, что $\Phi \leqslant f$.*

Доказательство. Положим $\varphi(e) = f(e)$ для всякого единичного элемента $e \in X$. Ясно, что φ — аддитивная и существенно положительная функция, определённая на базе пространства X. По предыдущему (1.44), существует аддитивная существенно положительная и непрерывная функция ψ, удовлетворяющая условию $\psi(e) \leqslant \varphi(e)$ для всех единичных элементов $e \in X$. С её помощью определим в X функционал

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\psi(e_\lambda^x).$$

Покажем, что этот интеграл имеет смысл при всех $x \in X$. Действительно, если $x \geqslant \mathbf{0}$, то для нижней интегральной суммы имеем (если

взять $e^x_{\lambda_0} = \mathbf{0}$, что всегда возможно):

$$\sum_1^\infty \lambda_{n-1}\varphi(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}) \leqslant \sum_1^\infty \lambda_{n-1}\varphi(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}) \leqslant$$
$$\leqslant f\left[\sum_1^\infty \lambda_{n-1}(e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}})\right] \leqslant f(x).$$

Отсюда уже следует существование интеграла для $x \geqslant \mathbf{0}$ и неравенство $\Phi(x) \leqslant f(x)$ (ср. 1.21 гл. VIII). Но тогда $\Phi(x)$ существует и для любого $x \in X$; а по теореме 1.33 гл. VIII $\Phi(x)$ является (o)-линейным функционалом в X.

§ 2. K-пространства, сопряжённые K-пространству ограниченных элементов

Выше было установлено, что всякое K-пространство ограниченных элементов представляет собой KB-линеал и вместе с тем K-пространство (2.3 гл. VI). В таком случае, в пространстве ограниченных элементов X можно рассматривать регулярные (o)-линейные и (b)-линейные функционалы. В силу теоремы 2.84 гл. VII классы регулярных и (b)-линейных функционалов в X совпадают, а по 2.43 гл. VII класс (o)-линейных функционалов содержится в классе регулярных функционалов. Пусть X^* — сопряжённое пространство (b)-линейных функционалов, заданных в X. Как было показано в гл. IX (2.32), X^* — KB-линеал (полный, как нормированное пространство) и K-пространство.

2.1. Первое сопряжённое пространство.

2.11. Теорема. *В пространстве X^*, сопряжённом K-пространству ограниченных элементов X, норма аддитивна для положительных слагаемых, т. е.*

$$\textit{если } f_1 \geqslant \mathbf{0} \textit{ и } f_2 \geqslant \mathbf{0}, \quad \textit{то} \quad \|f_1 + f_2\| = \|f_1\| + \|f_2\|,$$
$$\textit{причём } \|f\| = |f|(\mathbf{1}) \quad \textit{для всякого } f \in X^*.$$

Доказательство. Пусть сначала $f \geqslant \mathbf{0}$ $(f \in X^*)$. По определению нормы (b)-линейного функционала,

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \{|f(x)|\}.$$

Но в пространстве ограниченных элементов $|x| \leqslant \|x\|\mathbf{1}$, поэтому если $\|x\| \leqslant 1$, то $|x| \leqslant \mathbf{1}$. Таким образом, среди элементов пространства X с нормой, не превосходящей единицы, наибольшим будет единица пространства X; отсюда, принимая во внимание положительность функционала f, получаем, что $|f(x)| \leqslant f(|x|) \leqslant f(\mathbf{1})$ для всякого x, для которого $\|x\| \leqslant 1$. Так как $\|\mathbf{1}\| = 1$, то, следовательно, $\|f\| = f(\mathbf{1})$.

Если f — произвольный (b)-линейный функционал в X, то, так как X^* — KB-линеал,

$$\|f\| = \| |f| \| = |f|(\mathbf{1}),$$

и второе утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь $f_1 \geqslant \mathbf{0}$ и $f_2 \geqslant \mathbf{0}$ $(f_1, f_2 \in X^*)$. Тогда, по доказанному и принимая во внимание аддитивность линейного функционала, будем иметь:

$$\|f_1 + f_2\| = [f_1 + f_2](\mathbf{1}) = f_1(\mathbf{1}) + f_2(\mathbf{1}) = \|f_1\| + \|f_2\|,$$

т. е. норма в X^* аддитивна для положительных слагаемых. Теорема доказана.

2.12. Следствие. *X^* — KB-пространство.*

Действительно, X^* удовлетворяет условиям теоремы 2.47 гл. VI.

2.13. Теорема. *Пусть X — K-пространство ограниченных элементов, в котором задан существенно положительный (o)-линейный функционал f_1. Тогда, если f_1 принять за единицу в H_0 (K-пространстве (o)-линейных функционалов в X), то базы пространств X и H_0 изоморфны.*

Доказательство. То, что f_1 может быть принят за единицу в H_0, уже доказано выше (1.26). Покажем, что база пространства H_0 состоит из функционалов вида $f_e(x) = f_1(xe)$, где $e \in \mathfrak{E}(X)$.

Из 1.24 следует, что при любом $e \in \mathfrak{E}(X)$ $f_e \, \mathrm{d} f_{\mathbf{1}-e}$, так как эти функционалы отличны от нуля на дизъюнктных компонентах. Кроме того, $f_{\mathbf{1}-e} = f_1 - f_e$, а потому $f_e \in \mathfrak{E}(H_0)$ (3.21b) гл. III).

Пусть теперь $f^* > \mathbf{0}$ — произвольный единичный элемент из H_0; покажем, что существует единичный элемент $e^* \in X$ такой, что $f^* = f_{e^*}$. Для этого обозначим через e^* элемент положительности функционала f^*, отвечающий единице пространства X, и рассмотрим разность

$$f_0 = f^* - (f^* \wedge f_{e^*}).$$

Так как f^* и f_{e^*} — единичные элементы из H_0, то, очевидно, f_0 — также единичный элемент пространства H_0. Допустим, что $f_0 > \mathbf{0}$. Через e' обозначим элемент положительности функционала f_0, отвечающий единице пространства X. Тогда из $f_0 \leqslant f^*$ очевидным образом следует $e' \leqslant e^*$. С другой стороны, f^* и f_{e^*} имеют один и тот же элемент положительности, отвечающий единице пространства X. Следовательно, по 1.23 $f^* \wedge f_{e^*}$ имеет своим элементом положительности также e^*. Но функционалы f_0 и $f^* \wedge f_{e^*}$ дизъюнктны, поэтому соответствующие им элементы положительности e' и e^*, опять по 1.23, также дизъюнктны, что, однако, несовместимо с ранее полученным неравенством $e' \leqslant e^*$. Противоречие явилось результатом допущения, что $f_0 > \mathbf{0}$; следовательно, $f_0 = \mathbf{0}$ и

$$f^* = f^* \wedge f_{e^*}.$$

Совершенно аналогично покажем, что

$$f_{e^*} = f^* \wedge f_{e^*},$$

так что $f^* = f_{e^*}$. Таким образом, соответствие $e \longleftrightarrow f_e$ (e—единичный элемент пространства X, а f_e — единичный элемент пространства H_0) взаимно однозначно и сохраняет полуупорядочение, т. е. является изоморфизмом.

Отметим очевидное следствие доказанной теоремы.

Следствие. *Максимальные расширения пространств X и H_0 изоморфны* (см. 2.45 гл. IV).

2.14. Первая теорема об общем представлении (o)-линейных функционалов. *Пусть X — K-пространство ограниченных элементов, и f_1 — существенно положительный функционал в нём. Если f_1 принять за единицу в K-пространстве H_0 (o)-линейных функционалов в X, то любой функционал f, являющийся ограниченным элементом в H_0, имеет вид*

$$f(x) = f_1(xy),$$

где y — некоторый элемент из X, и такое представление единственно.

Доказательство. Мы уже установили, что подпространство ограниченных элементов пространства H_0 изоморфно X. Покажем, что в качестве y можно взять тот элемент пространства X, который при изоморфизме соответствует f.

Если $f \in \mathfrak{E}(H_0)$, то представление $f(x) = f_1(xe)$, где $e \in \mathfrak{E}(X)$ и $f = f_e$, установлено по ходу доказательства теоремы 2.13.

Если $f = \sum_1^n \alpha_k f^{(k)}$, где $f^{(k)} = f_{e_k} \in \mathfrak{E}(H_0)$, то

$$f(x) = \sum_1^n \alpha_k f^{(k)}(x) = \sum_1^n \alpha_k f_1(xe_k) = f_1\left(x \sum_1^n \alpha_k e_k\right).$$

Пусть теперь f — произвольный ограниченный элемент пространства H_0, т. е. $|f| \leqslant Cf_1$. По лемме 2.17 гл. IV существуют такие конечнозначные элементы $f^{(n)} \in H_0$, что $f^{(n)} \xrightarrow{(o)} 1$. По уже доказанному

$$f^{(n)}(x) = f_1(xy_n),$$

где $y_n \in X$ — конечнозначный элемент, соответствующий $f^{(n)}$ при изоморфизме между X и подпространством ограниченных элементов пространства H_0. Из этого изоморфизма вытекает также, что $y_n \xrightarrow{(o)} y$, где y — элемент из X, соответствующий при изоморфизме функционалу f.

Так как из $f^{(n)} \xrightarrow{(o)} f$ вытекает точечная сходимость $f^{(n)}(x) \to f(x)$ (1.32 гл. VII), то благодаря непрерывности функционала f_1 и произведения имеем:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = \lim_{n\to\infty} f_1(xy_n) = f_1(xy),$$

т. е. возможность указанного представления доказана.

Докажем, что это представление единственно. Для этого достаточно показать, что если $y \neq \mathbf{0}$, то $f \neq \mathbf{0}$. Но действительно, полагая $x = y$, получим $f(y) = f_1(y^2) > 0$ вследствие существенной положительности функционала f_1.

2.15 Вторая теорема об общем представлении (o)-линейных функционалов. *Если X — произвольное K-пространство с единицей, в котором имеется существенно положительный (o)-линейный функционал f_1, то представление*

$$f(x) = f_1(xy),$$

где y — ограниченный элемент пространства X, также имеет место для любого $f \in H_0$, являющегося ограниченным элементом пространства H_0 (где f_1 принято за единицу), а тогда подпространства ограниченных элементов пространств X и H_0 изоморфны.

Доказательство. Пусть $|f| \leqslant Cf_1$ $(f \in H_0)$. Будучи (o)-линейным функционалом в X, f — тем более (o)-линейный функционал в подпространстве X_0, состоящем из ограниченных элементов пространства X, а тогда по теореме 2.14 существует такой $y \in X_0$, что

$$f(x) = f_1(xy) \quad \text{при всех } x \in X_0.$$

Для любого $x \in X$ существуют такие $x_n \in X_0$, что $x_n \xrightarrow{(o)} x$ в X, а тогда $x_n y \xrightarrow{(o)} xy$ в X (так как $y \in X_0$) и потому

$$f(x) = \lim f(x_n) = \lim f_1(x_n y) = f_1(xy).$$

Изоморфизм $f \longleftrightarrow y$ $(f \in H_0,\ y \in X)$ между подпространствами ограниченных элементов пространств X и H_0 вытекает непосредственно из доказанного представления.

2.16. Теорема. *K-пространство X ограниченных элементов, в котором существует достаточное число вполне линейных функционалов, нормально содержится в максимальном расширении своего первого сопряжённого пространства X*).*

Доказательство. По теореме 1.31 X может быть разложено на компоненты X_α $(\alpha \in A)$ с единицей так, что в каждой X_α существует существенно положительный вполне линейный функционал f_α. Пусть Y — компо-

---

*) Здесь и иногда в дальнейшем мы отождествляем для простоты элементы пространства X с теми элементами пространства X^*, которые им соответствуют при изоморфизме.

нента пространства X^*, порождённая множеством $\{f_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$, и Y_α — компонента, порождённая функционалом f_α. Функционалы f_α можно предположить попарно дизъюнктными и потому множество компонент Y_α $(\alpha \in A)$ образует разложение пространства Y (2.31 гл. II). По теореме 2.15 X_α изоморфно подпространству ограниченных элементов пространства Y_α и, следовательно, нормально содержится в нём. В таком случае, X, представляющее собой соединение пространств X_α, нормально содержится в полном соединении пространств Y_α. Но $Y = \mathbf{S}_\alpha Y_\alpha$ тоже нормально содержится в полном соединении пространств Y_α, т. е. $\overline{\mathbf{S}}_\alpha Y_\alpha$ — расширение пространства Y и, следовательно, $\overline{\mathbf{S}} Y_\alpha$ нормально содержится в максимальном расширении пространства Y.

С другой стороны, Y — компонента пространства X^*, следовательно, максимальное расширение пространства Y нормально содержится в максимальном расширении пространства X^*, а тогда и X нормально содержится в максимальном расширении пространства X^*.

Справедливо и обратное предложение.

2.17. Теорема. *Если K-пространство X ограниченных элементов нормально содержится в максимальном расширении своего первого сопряжённого пространства X^*, то в X существует достаточное число вполне линейных функционалов.*

Доказательство. Следует показать, что для всякого элемента $x > \mathbf{0}$ $(x \in X)$ найдётся вполне линейный функционал $f > \mathbf{0}$ такой, что $f(x) > 0$. Но действительно, в X^* найдётся элемент y, удовлетворяющий условиям $\mathbf{0} < y \leqslant x$. Если Y — подпространство пространства X^*, порождённое элементом y, и X' — совокупность элементов из X, принадлежащих Y, то X' — нормальное подпространство пространства X. Но Y, будучи компонентой KB-пространства с нормой, аддитивной для положительных слагаемых, само является пространством такого же вида, и потому в Y существует существенно положительный (o)-линейный (и вместе с тем вполне линейный) функционал f^* (достаточно, например, положить

$$f^*(y) = \|y_+\| - \|y_-\| \qquad (y \in Y)).$$

f^* будет также существенно положительным (o)-линейным функционалом и в X' — нормальном подпространстве пространства Y. Положим теперь

$$f(x) = f^*((y)x) \qquad (x \in X).$$

Из линейности функционала f^* и проектора (y) следует, что f — (o)-линейный функционал во всём X; притом $f(x) \geqslant 0$ для $x \geqslant \mathbf{0}$ ввиду положительности функционала f^* и операции проектирования, так что $f \geqslant \mathbf{0}$. Далее,

$$f(x) \geqslant f(y) = f^*((y)y) = f^*(y) > 0.$$

Если, наконец, $\{x_\alpha\}$ — монотонно убывающая до нуля последовательность элементов из X, то $(y)x_\alpha$ также монотонно убывает до нуля в X' и содержит не более счётного множества различных элементов, так что $f^*((y)x_\alpha) < \varepsilon$ при достаточно большом α. Отсюда следует, что f — вполне линейный функционал, удовлетворяющий условиям теоремы. Так как x — произвольный существенно положительный элемент из X, то в X существует достаточное число вполне линейных функционалов.

2.2. Линейные функционалы в KB-пространствах с нормой, аддитивной для положительных слагаемых. То обстоятельство, что K-пространство, сопряжённое K-пространству ограниченных элементов, есть KB-пространство с нормой, аддитивной для положительных слагаемых, оправдывает рассмотрение некоторых свойств

линейных функционалов в таких пространствах. Этому рассмотрению и посвящён настоящий номер.

2.21. Теорема. *Если X — KB-пространство с единицей и нормой, аддитивной для положительных слагаемых, то его сопряжённое пространство X^* изоморфно подпространству X_0 ограниченных элементов пространства X.*

Доказательство. Пусть H_0 — K-пространство всех (o)-линейных функционалов в X_0. Так как в X, а следовательно, и в X_0 существует существенно положительный (o)-линейный функционал f_1, определяемый, например, равенством

$$f_1(x) = \|x_+\| - \|x_-\| \qquad (x \in X),$$

то H_0 — пространство с единицей (за единицу в H_0 возьмём f_1). По теореме 2.15 X_0 изоморфно подпространству пространства X^*, состоящему из ограниченных элементов. Покажем, что это подпространство совпадает с X^*.

Действительно, если $f \in X^*$, то для $x \geqslant \mathbf{0}$ $(x \in X)$

$$|f|(x) \leqslant \| |f| \| \ \|x\| = \| |f| \| f_1(x),$$

откуда $|f| \leqslant \| |f| \| f_1$, т. е. f — ограниченный элемент пространства X^*.

Теперь из 2.15 сразу следует изоморфизм K-пространств X^* и X_0.

2.22. Пусть X — KB-пространство с нормой, аддитивной для положительных слагаемых, и X^* — его сопряжённое K-пространство (пространство одновременно (o)-линейных, вполне линейных, (b)-линейных и регулярных функционалов в X). Если X_0 — компонента пространства X и X_0^* — совокупность всех линейных функционалов в X, обращающихся в нуль в X_0' — дизъюнктном дополнении к X_0, то X_0^* — компонента пространства X^*.

Доказательство. 1) Покажем прежде всего, что функционалы $f \in X^*$ и $|f|$ одновременно принадлежат или не принадлежат X_0^*.

В самом деле, пусть $f \in X_0^*$; имеем $|f| = f \vee (-f)$ и для всякого $x \geqslant \mathbf{0}$ $(x \in X)$ (см. 1.24 гл. VII)

$$|f|(x) = \sup_{\substack{x' + x'' = x \\ x',\, x'' \geqslant 0}} [f(x') - f(x'')].$$

Если $x \in X_0'$, то $x', x'' \in X_0'$ и так как $f \in X_0^*$, то $f(x') = f(x'') = 0$, так что $|f|(x) = 0$. Если $x = x_+ - x_-$ принадлежит X_0', то x_+ и x_- также принадлежат X_0', и так как $x_+, x_- \geqslant \mathbf{0}$, то, по доказанному, $|f|(x_+) = 0$, $|f|(x_-) = 0$ и $|f|(x) = 0$, откуда $|f| \in X_0^*$.

Пусть теперь, обратно, $|f| \in X_0^*$; тогда для всякого $x \geqslant \mathbf{0}$ $(x \in X_0')$ $|f|(x) = 0$; но $f_+ \leqslant |f|$ и $f_- \leqslant |f|$, поэтому $f_+(x) = f_-(x) = 0$ и $f(x) = 0$. Так как x_+ и x_- принадлежат X_0' одновременно с x, то для любого $x \in X_0'$ $f(x) = f(x_+) - f(x_-) = 0$ и $f \in X_0^*$.

2) Пусть $|f'| \leqslant |f|$, $f \in X_0^*$, $f' \in X^*$; тогда $f' \in X_0^*$.

Действительно, из 1) следует, что $|f| \in X_0^*$; поэтому, если $x \in X_0'$, $x \geqslant \mathbf{0}$, то $0 \leqslant |f'|(x) \leqslant |f|(x) = 0$ и $|f'|(x) = 0$; это же справедливо и для любого $x \in X_0$, так как $|f'|(x) = |f'|(x_+) - |f'|(x_-) = 0$. Таким образом, $|f'| \in X_0^*$. Тогда по 1) $f' \in X_0^*$.

3) Если множество $E = \{f_\alpha\}$ $(\alpha \in \mathrm{A})$ содержится в X_0^*, то и $\sup E = f_0$ принадлежит X_0^*.

В силу 1) множество $E^* = \{|f_\alpha|\}$ $(\alpha \in \mathrm{A})$ также содержится в X_0^*. Покажем, что $f^* = \sup E^*$ принадлежит X_0^*. Как известно, для $x \geqslant \mathbf{0}$

$$f^*(x) = \sup_{\substack{x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x \\ x_1 \geqslant \mathbf{0},\, x_2 \geqslant \mathbf{0},\, \ldots,\, x_n \geqslant \mathbf{0}}} [|f_{\alpha_1}|(x_1) + |f_{\alpha_2}|(x_2) + \ldots + |f_{\alpha_n}|(x_n)];$$

но если $x \in X_0'$, то и $x_i \in X_0'$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, так что $|f_{\alpha_i}|(x_i) = 0$ и потому $f^*(x) = 0$. Это же справедливо и для любого $x \in X_0'$, следовательно, $f^* \in X_0^*$. Но $|f_0| \leqslant f^*$; следовательно, по 2) $f_0 \in X_0^*$.

4) X_0^* — линейное подмножество пространства X^*. Действительно, если $f_1 \in X_0^*$, $f_2 \in X_0^*$ и λ — вещественное число, то из $f_1(x) = f_2(x) = 0$ следует $[f_1 + f_2](x) = 0$ и $[\lambda f_1](x) = 0$, откуда $f_1 + f_2 \in X_0^*$ и $\lambda f_1 \in X_0^*$.

Итак, X_0^* — линейное подмножество пространства X^*, удовлетворяющее условиям нормальности и правильности, т. е. — компонента пространства X^*, ч. и тр. д.

2.23. Пусть X—KB-пространство с нормой, аддитивной для положительных слагаемых, X_1 и X_2 — две его дизъюнктные компоненты, X_1' и X_2' — их дизъюнктные дополнения и X_1^* и X_2^* — множества линейных функционалов в X, обращающихся в нуль, соответственно в X_1' и X_2'. Тогда X_1^* и X_2^* — дизъюнктные компоненты пространства X^*.

Доказательство. В 2.22 уже доказано, что X_1^* и X_2^* — компоненты пространства X^*. Их дизъюнктность вытекает из предложения 1.29 гл. VII, если X разложить на X_1 и его дизъюнктное дополнение X_1' и заметить, что $X_1 \subset X_2'$.

2.24. Теорема. *Пусть X — KB-пространство с нормой, аддитивной для положительных слагаемых, $\{X_\alpha\}$ $(\alpha \in \mathrm{A})$ — система компонент, образующая его разложение, X^* — K-пространство,*

сопряжённое с X, и X^*_α — совокупность всех линейных функционалов в X, обращающихся в нуль в X'_α — дизъюнктном дополнении к X_α. Тогда $\{X^*_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ — система компонент пространства X^*, образующая его разложение.

Доказательство. В силу 2.22 каждое X^*_α есть компонента пространства X^*; в силу 2.23 X^*_α и X^*_β дизъюнктны при $\alpha \neq \beta$, так что остаётся лишь показать, что система $\{X^*_\alpha\}$ полна в X^*.

Пусть $f \in X^*$, $f > \mathbf{0}$; найдётся элемент $x \in X$, $x > \mathbf{0}$, такой, что $f(x) > 0$, и если x_f — элемент положительности функционала f, отвечающий элементу x, то по теореме о разложении

$$x_f = \mathop{\mathbf{S}}_{\alpha} x_\alpha \quad (x_\alpha \geqslant \mathbf{0},\ x_\alpha \in X_\alpha)$$

и $x_{\alpha_0} > \mathbf{0}$ для некоторого $\alpha = \alpha_0$, так что $f(x_{\alpha_0}) > 0$. Введём в рассмотрение функционал

$$f'(x) = f\,[\mathrm{Pr}_{X_{\alpha_0}} x] \qquad (x \in X).$$

Легко проверить, что f' — линейный функционал в X, притом обращающийся в нуль на X'_{α_0} и совпадающий с f в X_{α_0}. По определению совокупности $X^*_{\alpha_0}$ $f' \in X^*_{\alpha_0}$; при этом f не дизъюнктен f', так как элемент x_{α_0}, очевидно, служит элементом положительности для них обоих. Итак, всякий линейный функционал $f > \mathbf{0}$ $(f \in X^*)$ не дизъюнктен некоторому функционалу $f' \in X^*_\alpha$; но это и означает, что система $\{X^*_\alpha\}$ полна в X^*. Теорема доказана.

2.3. Применения теорем об общем представлении (*o*)-линейных функционалов к конкретным пространствам. С помощью теорем 2.14—2.15 мы установим некоторые результаты, полученные ранее (в главе VIII) другим путём.

2.31. Общая форма (*o*)-линейного функционала в M (ср. 2.16 гл. VIII). M — K-пространство ограниченных элементов, а интеграл Лебега

$$f_1(x) = \int_a^b x(t)\,dt \tag{1}$$

представляет собой существенно положительный функционал в M. Поэтому к M применима теорема 2.14, следовательно, если $|f| \leqslant Cf_1$, то

$$f(x) = f_1(xy) = \int_a^b x(t)\,y(t)\,dt,$$

где $y \in M$.

Пусть f — любой (o)-линейный функционал в M. Если $f > \mathbf{0}$, то существуют ограниченные $f^{(n)} \nearrow f$ (например, $f^{(n)} = f \wedge nf_1$). Каждый $f^{(n)}$ имеет вид

$$f^{(n)}(x) = \int_a^b x(t)\, y_n(t)\, dt,$$

где $y_n \in M$ и, очевидно, образуют монотонную последовательность. Положим

$$y(t) = \lim_{n \to \infty} y_n(t).$$

Тогда по теореме о предельном переходе под знаком интеграла для монотонной последовательности для $x \geqslant \mathbf{0}$ имеем:

$$\int_a^b x(t)\, y_n(t)\, dt \to \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt;$$

но $f^{(n)}(x) \to f(x)$ (см. 1.32 гл. VII), следовательно,

$$f(x) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt. \tag{2}$$

Благодаря аддитивности функционала то же представление имеет место и для любого $x \in M$.

Так как

$$f(\mathbf{1}) = \int_a^b y(t)\, dt,$$

то, значит, $y(t)$ — суммируемая функция, т. е. $y \in L$.

Если f — любой функционал в M, то, полагая $f = f_+ - f_-$, мы сразу убеждаемся в том, что формула (2) сохраняется и, как и выше, $y \in L$.

Обратное утверждение очевидно, т. е. ясно, что формула (2) при любом $y \in L$ представляет (o)-линейный функционал в M. Это и есть общая форма таких функционалов.

2.32. Общая форма линейного функционала в L (ср. 3.12 гл. VIII) (здесь, как мы знаем, классы (b)-линейных и (o)-линейных функционалов совпадают).

В качестве f_1 можно опять взять интеграл (1). Тогда к L применима теорема 2.15, т. е. любой ограниченный функционал представим по формуле (2), где $y \in M$, так как подпространством ограниченных элементов в L является M. Но L — KB-пространство с аддитивной нормой для положительных слагаемых, поэтому в силу теоремы 2.21 его сопряжённое пространство состоит только из

ограниченных элементов и, таким образом, представление по формуле (2) с $y \in M$ доказано для любого f.

Обратное очевидно, т. е. это и есть общая форма линейного функционала в L.

Найдём норму функционала f. Из очевидного неравенства $|f(x)| \leqslant \|y\|_M \|x\|_L$ следует, что $\|f\| \leqslant \|y\|_M$. Зададим теперь $\varepsilon > 0$ и обозначим через e множество тех t, для которых

$$|y(t)| \geqslant \|y\|_M - \varepsilon.$$

Затем положим

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{mes} e} \operatorname{sign} y(t) & \text{при } t \in e, \\ 0 & \text{при } t \overline{\in} e. \end{cases}$$

Тогда $\|x\|_L = 1$, а

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{mes} e} \int\limits_e |y(t)|\, dt \geqslant \|y\|_M - \varepsilon.$$

Отсюда сразу следует, что

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \geqslant \|y\|_M - \varepsilon,$$

а вследствие произвольности ε $\|f\| \geqslant \|y\|_M$, что вместе с обратным неравенством, полученным выше, даёт $\|f\| = \|y\|_M$.

2.33. Общая форма линейного функционала в L^p $(p > 1)$ (ср. 3.32 гл. VIII). К L^p $(p > 1)$ опять применима теорема 2.15, т. е. каждый ограниченный (относительно f_1, определяемого так же, как и в предыдущих случаях) функционал f представим по формуле (2). Повторяя рассуждение из 2.31, мы легко убедимся в том, что то же представление имеет место и для любого функционала, причём $y(t)$, во всяком случае, суммируема.

Найдём необходимое и достаточное условие, которому должна удовлетворять функция $y(t)$. Положим

$$x_n(t) = \begin{cases} |y(t)|^{q-1} \operatorname{sign} y(t), & \text{если } |y(t)| \leqslant n, \\ 0\ , & \text{если } |y(t)| > n, \end{cases}$$

где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Тогда, если принять во внимание, что $(q-1)p = q$, получим:

$$f(x_n) = \int\limits_{E(|y(t)| < n)} |y(t)|^q\, dt \leqslant \|f\|\, \|x_n\| = \|f\| \left[\int\limits_{E(|y(t)| < n)} |y(t)|^q\, dt \right]^{\frac{1}{p}},$$

откуда

$$\left[\int\limits_{E(|y(t)| < n)} |y(t)|^q\, dt \right]^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|.$$

Так как это верно при любом n, то отсюда следует, что

$$y \in L^q \quad \text{и} \quad \|y\|_{L^q} \leqslant \|f\|.$$

Обратно, если

$$f(x) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt,$$

где $y \in L^q$, то для любого $x \in L^p$

$$|f(x)| \leqslant \left[\int_a^b |x(t)|^p\, dt\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b |y(t)|^q dt\right]^{\frac{1}{q}} = \|y\|_{L^q} \|x\|_{L^p},$$

т. е. f — линейный функционал в L^p и $\|f\| \leqslant \|y\|_{L^q}$.

Таким образом, формула (2) с $y \in L^q$ даёт общее представление линейных функционалов в L^p, и $\|f\| = \|y\|_{L^q}$.

2.4. Строение второго сопряжённого пространства. Предложения, установленные в n° 2.2, позволяют легко решить вопрос о структуре второго сопряжённого пространства для пространства ограниченных элементов.

2.41. Теорема. *Пусть X — K-пространство ограниченных элементов, $Y = X^*$ — его первое сопряжённое пространство (b)-линейных функционалов и $\{Y_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ — система компонент с единицей, образующая разложение пространства Y. Тогда второе сопряжённое пространство X^{**} изоморфно соединению K-пространств $\overline{Y}_\alpha$ $(\alpha \in A)$, каждое из которых представляет собой подпространство ограниченных элементов K-пространства Y_α.*

Доказательство. По теореме 2.11 Y — KB-пространство с нормой, аддитивной для положительных слагаемых. Всякая его компонента Y_α, очевидно, также — пространство этого вида. В силу теоремы 2.24 X^{**} разлагается на компоненты Y_α^* $(\alpha \in A)$, каждая из которых представляет собой совокупность линейных функционалов в Y, обращающихся в нуль в Y'_α — дизъюнктном дополнении к Y_α.

Покажем теперь, что Y_α^* изоморфна K-пространству, сопряжённому Y_α, т. е. K-пространству линейных функционалов в Y_α.

Действительно, если f—линейный функционал в Y_α, то его можно распространить на всё Y с помощью соотношения

$$f'(y) = f[\mathrm{Pr}_{Y_\alpha} y] \quad (y \in Y);$$

при этом f' совпадает с f в Y_α и равен нулю в Y'_α. Обратно, если f' — линейный функционал в Y, обращающийся в нуль в Y_α, то ему соответствует функционал f в Y_α, равный f' на Y_α. Соответствие $f \longleftrightarrow f'$ взаимно однозначно, сохраняет линейные соотношения и

полуупорядочение и является, таким образом, изоморфизмом. Благодаря теореме 2.21 Y_α^* оказывается изоморфным подпространству $\overline{Y}_\alpha$ ограниченных элементов пространства Y_α, так что

$$X^{**} = \underset{\alpha}{\mathbf{S}}\overline{Y}_\alpha = \underset{\alpha}{\mathbf{S}}Y_\alpha.$$

2.42. Теорема. *Второе сопряжённое пространство X^{**} для K-пространства X ограниченных элементов есть K-пространство ограниченных элементов.*

Доказательство. Пусть Y — первое сопряжённое к X пространство. Как установлено в 2.11, Y есть KB-пространство с нормой, аддитивной для положительных слагаемых, и если положить

$$f_1(y) = \|y_+\| - \|y_-\| \quad (y \in Y),$$

то f_1 — существенно положительный линейный функционал в Y. В таком случае f_1, рассматриваемый как элемент пространства X^{**} (или Y^*), обладает свойствами единицы в X^{**}. Пусть теперь f — произвольный элемент из X^{**}; так как (o)-линейные функционалы в Y будут вместе с тем и (b)-линейными, то для всякого $y \geqslant \mathbf{0}$ $(y \in Y)$

$$|f|(y) \leqslant \||f|\| \; \|y\| = \||f|\| \, f_1(y),$$

откуда

$$|f| \leqslant \| |f| \| \, f_1$$

и f — ограниченный элемент пространства X^{**}. Таким образом, X^{**} — K-пространство ограниченных элементов.

Связь между первым и вторым сопряжёнными к X пространствами устанавливается следующим предложением.

2.43. Теорема. *Если X — K-пространство ограниченных элементов, то его второе сопряжённое пространство X^{**} изоморфно подпространству ограниченных элементов максимального расширения первого сопряжённого пространства X^*.*

Доказательство. Обозначим X^* через Y. В силу 2.41, если $\{Y_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ — система компонент (с единицей) пространства Y, образующая его разложение, то Y^* (или X^{**}) разлагается на компоненты, изоморфные $\overline{Y}_\alpha$ — подпространствам ограниченных элементов пространств Y_α. Следовательно, максимальное расширение пространства Y^* изоморфно полному соединению

$$\widetilde{Y} = \overline{\mathbf{S}}\widetilde{Y}_\alpha,$$

где $\widetilde{Y}_\alpha$ — максимальное расширение пространства Y_α. Так как по 2.42 Y^* — K-пространство ограниченных элементов, то Y^* изоморфно подпространству ограниченных элементов пространства $\widetilde{Y}$. Но $\widetilde{Y}$ —

максимальное расширение пространства Y (2.23 гл. IV); тем самым теорема доказана.

В главе IX (2.36) было установлено, что всякий KB-линеал X изоморфен и изометричен части X_0^{**} второго сопряжённого пространства. Так как K-пространство ограниченных элементов представляет собой KB-линеал, то по отношению к нему верна и эта теорема. Однако из указанной теоремы вовсе не следует, что X содержится в X^{**} нормально. В том случае, когда это имеет место, X обладает весьма важным свойством, выражаемым следующей теоремой.

2.44. Теорема. *Если K-пространство ограниченных элементов X изоморфно нормальному подпространству своего второго сопряжённого пространства X^{**}, то в X существует достаточное число вполне линейных функционалов.*

Доказательство. Пусть x_0 — произвольный существенно положительный элемент из X. Следует показать, что в X существует вполне линейный положительный функционал f такой, что $f(x_0) > 0$. По теореме 2.41

$$X^{**} = \mathop{\mathbf{S}}_{\alpha} \overline{Y}_\alpha,$$

где $Y = X^*$ — первое сопряжённое к X пространство, $Y = \mathop{\mathbf{S}}_{\alpha} Y_\alpha$ и $\overline{Y}_\alpha$ — подпространство ограниченных элементов пространства Y_α. При изоморфизме φ между X и нормальным подпространством пространства X^{**} элементу $x_0 \in X$ отвечает элемент $y_0 > \mathbf{0}$, $y_0 \in X^{**}$. По теореме о разложении

$$y_0 = \overline{\mathbf{S}}\,[(y_0)_\alpha] \qquad ((y_0)_\alpha \geqslant \mathbf{0},\ \ y_\alpha \in Y_\alpha).$$

Так как $y_0 > \mathbf{0}$, то среди составляющих $(y_0)_\alpha$ найдётся по крайней мере одна, пусть это будет $(y_0)_{\alpha_0}$, отличная от нуля. Положим для всякого $x \in X$, $x \geqslant \mathbf{0}$,

$$f(x) = \| \overline{\mathrm{P}}\mathrm{r}_{\overline{Y}_{\alpha_0}} \varphi(x) \|_Y$$

и для произвольного $x \in X$, $x = x_+ - x_-$,

$$f(x) = f(x_+) - f(x_-).$$

Определение функционала f имеет смысл. В самом деле, $\varphi(x)$ — элемент пространства X^{**}, следовательно, элемент соединения $\overline{Y}_\alpha$. Тогда его можно спроектировать на составляющую $\overline{Y}_{\alpha_0}$ и тем самым получить некоторый элемент из Y_{α_0}, так как $\overline{Y}_{\alpha_0}$ нормально содержится в Y_{α_0}. Но Y — KB-пространство и потому можно рассматривать норму проекции $\varphi(x)$ как элемента из Y.

Так как норма в Y аддитивна для положительных слагаемых, то из определения функционала f легко следует его аддитивность и положительность. Пусть теперь $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in \mathrm{A})$ — вполне упорядоченная монотонно убывающая до нуля последовательность элементов из X. Так как X содержится в X^{**} нормально, то последовательность $\{\varphi(x_\alpha)\}$ $(\alpha < \vartheta)$ также монотонно убывает до нуля в X^{**},

В таком случае и последовательность её проекций в $\overline{Y}_{\alpha_0}$ (компоненту пространства X^{**}) будет монотонно убывать до нуля в $\overline{Y}_{\alpha_0}$ и вместе с тем в Y_{α_0} и в Y. По «полной линейности» нормы в Y *) при достаточно большом α нормы этих проекций окажутся сколь угодно малыми, что и доказывает вполне-линейность функционала f. Заметим, наконец, что

$$f(x_0) = \| \mathrm{Pr}_{\overline{Y}_{\alpha_0}} \varphi(x_0) \|_Y = \| \mathrm{Pr}_{\overline{Y}_{\alpha_0}} (y_0)_{\alpha_0} \| = \| (y_0)_{\alpha_0} \| > 0,$$

так как $(y_0)_{\alpha_0} \in \overline{Y}_{\alpha_0}$ и $(y_0)_{\alpha_0} > \mathbf{0}$. Теорема доказана.

2.45. Замечание. Нетрудно проверить и предложение, обратное доказанной теореме, именно:

Если в K-пространстве X ограниченных элементов существует достаточное число вполне линейных функционалов, то X нормально содержится в своём втором сопряжённом пространстве X^{**}.

Таким образом, возможность нормального погружения X в X^{**} представляет собой необходимое и достаточное условие того, чтобы в X существовало достаточное число вполне линейных функционалов.

§ 3. K-пространства с обобщённой аддитивной нормой

Класс K-пространств с обобщённой аддитивной (для положительных слагаемых) нормой обобщает естественным образом класс K-пространств с достаточным числом вполне линейных функционалов. Наличие в K-пространстве обобщённой аддитивной нормы позволяет исследовать его строение методами, аналогичными применённым в предыдущих параграфах. При этом оказывается, что для всякого такого пространства X существует KB-пространство Y, максимальное расширение которого изоморфно максимальному расширению пространства X.

Класс K-пространств с обобщённой аддитивной нормой замкнут относительно операций соединения и расширения пространств и допускает, как это будет показано в дальнейшем, реализацию с помощью измеримых функций, заданных на бикомпактах с абсолютно аддитивной мерой. Таким свойством обладают только пространства этого класса.

В одном и том же K-пространстве X с обобщённой аддитивной нормой существует бесконечное множество обобщённых норм. Совокупность всех таких норм изоморфна положительной части максимального расширения пространства X.

3.1. Определение и основные свойства K-пространств с обобщённой аддитивной нормой.

3.11. Определение. Пусть для положительных элементов K-пространства X определено неотрицательное вещественное число $\| x \|$, конечное или равное $+\infty$, — *обобщённая норма* элемента $x \in X$, удовлетворяющее условиям:

1) $\| x \| > 0$, если $x > \mathbf{0}$, и $\| \mathbf{0} \| = 0$;
2) $\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$ $(x \geqslant \mathbf{0},\ y \geqslant \mathbf{0})$;
3) Каков бы ни был элемент $x > \mathbf{0}$, найдётся элемент y такой, что $\mathbf{0} < y \leqslant x$ и $\| y \| < +\infty$;

---

*) Так как Y — KB-пространство с аддитивной нормой, то функционал

$$\Phi(y) = \| y_+ \| - \| y_- \|$$

(o)-линеен и вместе с тем вполне линеен, а потому из $y_\alpha \searrow \mathbf{0}$ следует, что $\| y_\alpha \| \searrow 0$.

4) если последовательность $\{x_\alpha\}$ $(x_\alpha \geqslant \mathbf{0})$ монотонно возрастает и

$$\sup_\alpha \{x_\alpha\} = x,$$

то

$$\sup_\alpha \{\| x_\alpha \|\} = \| x \|.$$

В таком случае X называется K-пространством с обобщённой аддитивной нормой.

В частном случае, если $\| x \| < +\infty$ для всех $x \in X$ $(x \geqslant \mathbf{0})$, будем говорить, что X — K-пространство с аддитивной нормой.

3.12. Если последовательность $\{x_\alpha\}$ монотонно убывает до нуля в K-пространстве X с обобщённой аддитивной нормой и $\| x_1 \| < +\infty$, то

$$\inf_\alpha \{\| x_\alpha \|\} = \mathbf{0}.$$

Доказательство. Последовательность $\{x_1 - x_\alpha\}$ монотонно возрастает и

$$\sup_\alpha \{x_1 - x_\alpha\} = x_1.$$

В таком случае в силу свойства 4 нормы (3.11)

$$\sup_\alpha \{\| x_1 - x_\alpha \|\} = \| x_1 \|.$$

Но из аддитивности нормы в X вытекает её монотонность, следовательно, $\| x_\alpha \| < +\infty$ и вместе с тем

$$\| x_1 - x_\alpha \| = \| x_1 \| - \| x_\alpha \|,$$

а тогда

$$\sup_\alpha \{\| x_1 \| - \| x_\alpha \|\} = \| x_1 \| \quad \text{и} \quad \inf_\alpha \{\| x_\alpha \|\} = 0.$$

3.13. Всякое нормальное подпространство X_0 K-пространства X с обобщённой аддитивной нормой есть K-пространство того же вида.

Доказательство. Если положить для $x \geqslant \mathbf{0}$ $(x \in X_0)$

$$\| x \|_{X_0} = \| x \|_X,$$

то, очевидно, норма в X_0 будет обладать всеми свойствами 1—4 (3.11).

3.14. Теорема. *Пусть X — расширенное K-пространство с обобщённой аддитивной нормой и Y — совокупность элементов $y \in X$, для которых*

$$\| |y| \| < +\infty.$$

Если для любого $y \in Y$ положить

$$\| y \|_Y = \| |y| \|_X,$$

то Y будет KB-пространством с нормой, аддитивной для положительных слагаемых. При этом Y — нормальное подпространство пространства X, полное в X.

Доказательство. Нетрудно проверить, что Y — линейное подмножество пространства X, удовлетворяющее условию нормальности. Из свойства 3 нормы в X следует, что Y полно в X. Норма в Y конечна и аддитивна для положительных слагаемых. В таком случае она и строго монотонна. Пусть $y_n \searrow \mathbf{0}$ в Y; тогда в силу 3.12 $\| y_n \| \to 0$. Если же $y_n \searrow +\infty$ в Y и $y_n \nearrow x$ $(x \in Y)$, то $\| x \| = +\infty$ и по свойству 4 нормы $\| y_n \| \to +\infty$.

Пусть, наконец, $y_n \nearrow +\infty$ в X. Тогда найдётся такой элемент $y_0 > \mathbf{0}$ ($y_0 \in Y$), что при всех $k = 1, 2, \ldots$

$$(o)\text{-}\lim_{n\to\infty} (y_n \wedge ky_0) = ky_0$$

(см. 2.31 гл. IV, замечание*)). Отсюда с помощью свойства 4 нормы вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \| y_n \wedge ky_0 \| = k \| y_0 \| \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \| y_n \| > k \| y_0 \| .$$

Но $\| y_0 \| > 0$, и так как последнее неравенство справедливо при всех натуральных k, то $\| y_n \| \to +\infty$.

Заметим, наконец, что функционал

$$\Phi(y) = \| y_+ \| - \| y_- \| \quad (y \in Y)$$

регулярен в Y и потому $\| \lambda y \| = \lambda \| y \|$ для $y \geqslant \mathbf{0}$ и $\lambda \geqslant 0$.

Таким образом, Y — KB-пространство с аддитивной для положительных слагаемых нормой, нормально и полно содержащееся в X.

3.15. Теорема. *Всякое расширение K-пространства с обобщённой аддитивной нормой есть K-пространство того же вида.*

Доказательство. Пусть Y — некоторое расширение K-пространства X с обобщённой аддитивной нормой и y — произвольный положительный элемент из Y. Положим

$$\| y \|_Y = \sup_{\substack{\mathbf{0} \leqslant x \leqslant y \\ x \in X}} \{ \| x \|_X \}.$$

Покажем, что эта норма в Y удовлетворяет условиям 1—4 определения 3.11.

1) Пусть $y > \mathbf{0}$ ($y \in Y$). Так как X полно в Y и нормально содержится в нём, то найдётся элемент $x \in X$ такой, что $\mathbf{0} < x \leqslant y$. По условию 1 $\| x \|_X > 0$; следовательно, тем более $\| y \|_Y > 0$. Очевидно, далее, что $\| \mathbf{0} \|_Y = 0$.

2) Пусть $y_1 \geqslant \mathbf{0}$, $y_2 \geqslant \mathbf{0}$ ($y_1, y_2 \in Y$) и $\| y_1 \|_Y < +\infty$, $\| y_2 \|_Y < +\infty$. Если $\mathbf{0} \leqslant x \leqslant y_1 + y_2$ ($x \in X$), то найдутся элементы x_1 и x_2 такие, что $\mathbf{0} \leqslant x_1 \leqslant y_1$, $\mathbf{0} \leqslant x_2 \leqslant y_2$ и $x_1 + x_2 = x$. Ясно, что x_1 и x_2 принадлежат X. Имеем:

$$\| y_1 + y_2 \|_Y = \sup_{\substack{\mathbf{0} \leqslant x \leqslant y \\ x \in X}} \{ \| x \| \} = \sup_{\substack{x_1 + x_2 = x \\ \mathbf{0} \leqslant x_1 \leqslant y_1 \\ \mathbf{0} \leqslant x_2 \leqslant y_2}} \{ \| x_1 \| + \| x_2 \| \} \leqslant \| y_1 \|_Y + \| y_2 \|_Y .$$

С другой стороны, найдутся элементы x' и x'' такие, что $\mathbf{0} \leqslant x' \leqslant y_1$, $\mathbf{0} \leqslant x'' \leqslant y_2$ и

$$\| x' \|_X > \| y_1 \|_Y - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \| x'' \|_X > \| y_2 \|_Y - \frac{\varepsilon}{2} .$$

Тогда

$$\| y_1 + y_2 \|_Y \geqslant \| x' + x'' \|_X = \| x' \|_X + \| x'' \|_X > \| y_1 \|_Y + \| y_2 \|_Y - \varepsilon$$

---

*) В главе IV такое соотношение установлено для некоторого $e_0 \in \mathfrak{E}(X)$. Но легко видеть, что тогда это соотношение справедливо и для всякого $x \in X$ такого, что $\mathbf{0} < x \leqslant e_0$. Благодаря полноте и нормальности Y в X среди x, удовлетворяющих указанному неравенству, найдутся элементы из Y.

и ввиду произвольности ε

$$\|y_1 + y_2\|_Y \geqslant \|y_1\|_Y + \|y_2\|_Y.$$

Сопоставление полученных неравенств приводит к равенству

$$\|y_1 + y_2\|_Y = \|y_1\|_Y + \|y_2\|_Y.$$

Если же хотя бы одно из чисел $\|y_1\|_Y$ и $\|y_2\|_{Y_2}$, бесконечно, то, очевидно, $\|y_1 + y_2\|_Y = +\infty$, и снова

$$\|y_1 + y_2\|_Y = \|y_1\|_Y + \|y_2\|_Y.$$

3) Пусть $y > \mathbf{0}$ $(y \in Y)$; найдётся элемент $x \in X$ такой, что $\mathbf{0} \leqslant x \leqslant y$. По условию 3 существует элемент x', $\mathbf{0} < x' \leqslant x$, для которого $\|x'\|_X < +\infty$, но для элементов из X нормы в X и Y, очевидно, совпадают. Поэтому и $\|x'\|_Y < +\infty$, и так как $\mathbf{0} < x' \leqslant y$, то норма в Y удовлетворяет условию 3.

4) Пусть последовательность $\{y_\alpha\}$ $(y_\alpha \geqslant \mathbf{0},\ y_\alpha \in Y)$ монотонно возрастает и

$$\sup_\alpha \{y_\alpha\} = y.$$

По определению нормы в Y для любого $A < \|y\|$ найдётся $x \in X$, $\mathbf{0} \leqslant x \leqslant y$, такой, что $\|x\| > A$. Последовательность $\{x \wedge y_\alpha\}$ монотонно возрастает в X и

$$\sup_\alpha \{x \wedge y_\alpha\} = x \wedge y = x;$$

в таком случае, по свойству 4 нормы в X,

$$\sup_\alpha \{\|x \wedge y_\alpha\|\} = \|x\| > A$$

и, тем более,

$$\sup_\alpha \{\|y_\alpha\|_Y\} > A,$$

откуда ввиду произвольности A

$$\sup_\alpha \{\|y_\alpha\|_Y\} \geqslant \|y\|_Y.$$

Обратное неравенство очевидно и тем самым норма в Y обладает также свойством 4. Итак, Y — K-пространство с обобщённой аддитивной нормой.

3.16. Всякое соединение K-пространств с обобщённой аддитивной нормой есть K-пространство того же вида.

Доказательство. Пусть $\{X_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ — произвольное множество K-пространств с обобщённой аддитивной нормой и Y — их соединение. Определим в Y обобщённую норму, положив

$$\|y\| = \sum_\alpha \|x_\alpha\|_{X_\alpha} \quad \text{для } x = \overline{\mathbf{S}}_\alpha x_\alpha \quad (x_\alpha \geqslant \mathbf{0},\ \ x_\alpha \in X_\alpha)$$

(при этом определении мы считаем $\|y\| = +\infty$, если множество слагаемых отличных от нуля, — несчётное, а также если оно — счётное, но ряд расходится).

Из определения нормы в Y легко следует выполнение условий 1—3. Нетрудно проверить и условие 4.

Пусть $\{y_\xi\}$ $(\xi < \Xi)$ — монотонно возрастающая последовательность положительных элементов из Y и

$$\sup_\xi \{y_\xi\} = y.$$

Имеем:

$$y_\xi = \overline{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}\, x_\alpha^{(\xi)} \text{ и } y = \overline{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}\, x_\alpha \quad (x_\alpha^{(\xi)},\ x_\alpha \geqslant \mathbf{0} \text{ и } \in X_\alpha),$$

причём

$$\sup_\xi \{x_\alpha^{(\xi)}\} = x_\alpha, \quad \text{откуда} \quad \sup\{\|x_\alpha^{(\xi)}\|\} = \|x_\alpha\|_{X_\alpha}$$

так как X_α — K-пространство с обобщённой аддитивной нормой.

Возьмём произвольное число $A < \|y\|$. Очевидно, найдётся такое счётное множество индексов $\{\alpha_n\}$, что $\sum_n \|x_{\alpha_n}\| > A$. Подберём числа $B_n > 0$ так, чтобы

$$B_n < \|x_{\alpha_n}\| \quad \text{и} \quad \sum_n B_n > A.$$

Для каждого n найдётся такое ξ_n, что $\|x_{\alpha_n}^{(\xi_n)}\| > B_n$, причём можно считать, что $\xi_n \leqslant \xi_{n+1}$. В таком случае

$$\sup_\xi \{\|y_\xi\|\} \geqslant \sup_n \{\|y_{\xi_n}\|\} \geqslant \sup_n \left\{\sum_p \|x_{\alpha_p}^{(\xi_n)}\|\right\} \geqslant \sum_n \|x_{\alpha_n}^{(\xi_n)}\| > \sum_n B_n > A.$$

Вследствие произвольности A

$$\sup_\xi \{\|y_\xi\|\} \geqslant \|y\|.$$

Обратное неравенство очевидно.

3.17. Теорема. *Для всякого K-пространства X с обобщённой аддитивной нормой существует KB-пространство Y (с нормой, аддитивной для положительных слагаемых), максимальное расширение которого изоморфно максимальному расширению пространства X.*

Доказательство. По теореме 3.15 максимальное расширение $\widetilde{X}$ K-пространства X есть K-пространство с обобщённой аддитивной нормой, а по теореме 3.14 в $\widetilde{X}$ можно выделить полное в $\widetilde{X}$ и нормально в нём содержащееся подпространство Y, являющееся KB-пространством с нормой, аддитивной для положительных слагаемых. Ясно, что максимальным расширением пространства Y будет $\widetilde{X}$, и таким образом теорема доказана.

Доказанное предложение устанавливает тесную связь между K-пространствами с обобщённой аддитивной нормой и KB-пространствами с нормой, аддитивной для положительных слагаемых. Можно сказать, что всякое K-пространство с обобщённой аддитивной нормой может быть получено из KB-пространств с нормой, аддитивной для положительных слагаемых, с помощью операций расширения пространств и образования нормального подпространства.

3.18. Теорема. *Во всяком KB-пространстве X можно определить обобщённую аддитивную норму так, что X окажется K-пространством с обобщённой аддитивной нормой.*

Доказательство. Разложим X на компоненты X_α с единицей. По теореме 1.34 X_α допускает расширение, представляющее собой KB-пространство с нормой, аддитивной для положительных слагаемых. В таком случае в силу 3.13 X_α — K-пространство с обобщённой аддитивной нормой, а по

3.16 и X являющееся соединением пространств X_α, есть K-пространство с обобщённой аддитивной нормой.

3.19. Теорема. *Всякое K-пространство X, допускающее достаточное число вполне линейных функционалов, есть K-пространство с обобщённой аддитивной нормой.*

Доказательство. По теоремам 1.31 и 1.34, X разлагается на компоненты X_α, допускающие расширения, являющиеся KB-пространствами, следовательно, в силу предыдущей теоремы, пространствами с обобщённой аддитивной нормой. Тогда каждое X_α — пространство этого же вида и их соединение X — также пространство того же вида.

3.2. Элементарные K-пространства. Понятие элементарного K-пространства позволяет полнее изучить структуру K-пространств с обобщённой аддитивной нормой и тесно связано с понятием KM-пространства, введённым в VI главе. Существует большая аналогия между свойствами пространств измеримых функций, заданных в промежутке $[a, b]$, и свойствами элементарных K-пространств. В элементарных K-пространствах можно рассматривать сходимость «по мере». В них имеет место абстрактный аналог теоремы Д. Ф. Егорова и т. д. В случае, когда элементарное K-пространство сепарабельно, оно оказывается изоморфным либо некоторому пространству измеримых функций, заданных в $[a, b]$, либо пространству (конечных или бесконечных) последовательностей вещественных чисел, либо их соединению. Всё это даёт основание рассматривать теорию элементарных K-пространств как абстрактную теорию пространств функций, измеримых в смысле Лебега.

3.21. Определение. K-пространство X с единицей называется *элементарным*, если в его подпространстве ограниченных элементов $\overline{X}$ существует существенно положительный (o)-линейный функционал Φ.

Из определения элементарного K-пространства легко следует, что оно — счётного типа, так что функционал Φ — вполне линейный. Далее ясно, что компонента элементарного пространства, а также полное соединение счётного множества элементарных пространств — элементарные K-пространства *).

3.22. Элементарное K-пространство X есть пространство с обобщённой аддитивной нормой.

Доказательство. Благодаря наличию функционала Φ $\overline{X}$ — K-пространство с нормой, аддитивной для положительных слагаемых. Его максимальное расширение Y по теоремам 3.15 и 3.18 — K-пространство с обобщённой аддитивной нормой. Но X — нормальное подпространство пространства Y и, следовательно, по 3.13 само является K-пространством с обобщённой аддитивной нормой.

3.23. Теорема. *Максимальное расширение $\widetilde{X}$ элементарного K-пространства X есть KM-пространство.*

Доказательство. Определим в $\widetilde{X}$ метрическую функцию ρ, положив для $x \geqslant 0$

$$\rho(x) = \Phi(\operatorname{arctg} x),$$

---

*) Если $X = \overline{\mathbf{S}} X_n$, где X_n — элементарные K-пространства, и Φ_n — существенно положительный (o)-линейный функционал в $\overline{X}_n$, то

$$\Phi(x) = \sum_1^\infty \frac{\Phi_n(\overline{\mathrm{Pr}}_{X_n} x)}{2^n \Phi_n(\mathbf{1}_{X_n})} \qquad (x \in \overline{X})$$

будет требуемым функционалом в $\overline{X}$. При этом мы считаем, что $\mathbf{1}_X = \overline{\mathbf{S}} \mathbf{1}_{X_n}$

где Φ — существенно положительный (o)-линейный функционал в $\tilde{X}$ — подпространстве ограниченных элементов пространства X. Определение функции ρ имеет смысл, так как $\mathbf{0} \leqslant \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}\mathbf{1}$, и потому $\operatorname{arctg} x$ представляет собой ограниченный элемент пространства X, каков бы ни был $x \in \tilde{X}$.

Из свойств функции $\operatorname{arctg} x$ и функционала Φ легко вытекают следующие свойства функции ρ:

1. $\rho(\mathbf{0}) = 0$ и, если $x > \mathbf{0}$, то $\rho(x) > 0$.
2. Если $\mathbf{0} \leqslant x \leqslant y$, то $\rho(x) \leqslant \rho(y)$.

Действительно, $\operatorname{arctg} x \leqslant \operatorname{arctg} y$, а Φ — положительный аддитивный функционал.

3. Если $x_n \xrightarrow{(o)} x$ $(x_n \geqslant \mathbf{0})$, то $\rho(x_n) \to \rho(x)$, что вытекает из непрерывности арктангенса и функционала Φ.
4. Если $x \geqslant \mathbf{0}$ и $y \geqslant \mathbf{0}$, то $\rho(x+y) \leqslant \rho(x) + \rho(y)$.

Действительно, $\operatorname{arctg}(x+y) \leqslant \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$, а Φ — положительный аддитивный функционал.

5. Если $x_n \nearrow +\infty$ $(x_n \geqslant \mathbf{0})$, то невозможно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{p\to\infty} \rho(x_{n+p} - x_n) = 0.$$

В самом деле, по 2.34 гл. IV найдётся такой единичный элемент $e_0 > \mathbf{0}$, что при всяком $n = 1, 2, \ldots$ и любом $k > 0$

$$\lim_{p\to\infty} [(x_{n+p} - x_n) \wedge k e_0] = k e_0.$$

Тогда благодаря монотонности $\operatorname{arctg} x$

$$\lim_{p\to\infty} \operatorname{arctg}(x_{n+p} - x_n) \geqslant \operatorname{arctg}(k e_0) = \alpha e_0,$$

где $\alpha = \operatorname{arctg} k > 0$ (ср. 1.34 гл. IV).

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{p\to\infty} \rho(x_{n+p} - x_n) = \Phi\left[\lim_{n\to\infty} \lim_{p\to\infty} \operatorname{arctg}(x_{n+p} - x_n)\right] \geqslant \Phi(\alpha e_0) > 0.$$

Таким образом, ρ обладает всеми свойствами метрической функции в KM-пространстве. Теорема доказана.

Следствие. *В элементарном K-пространстве X для единичных элементов имеет место теорема о диагональной последовательности.*

Действительно, максимальное расширение пространства X, будучи KM-пространством, регулярно, а сходимость последовательности единичных элементов в максимальном расширении пространства X равносильна её сходимости в X.

3.24. В элементарном K-пространстве X соотношения $e_n \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$ и $\Phi(e_n) \to 0$ равносильны ($e_n \in \mathfrak{E}(X)$, Φ — существенно положительный (o)-линейный функционал в подпространстве ограниченных элементов X).

Доказательство. Если $e_n \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$, то, по непрерывности функционала Φ, $\Phi(e_n) \to 0$. Обратно, пусть $\Phi(e_n) \to 0$; выделим из последовательности $\{e_n\}$ подпоследовательность $\{e_{n_k}\}$ так, чтобы

$$\Phi(e_{n_k}) < \frac{1}{2^k} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Положим, далее,

$$\overline{e}_k = \sup(e_{n_k}, e_{n_{k+1}}, \ldots).$$

Очевидно,

$$\bar{e}_1 \geqslant \bar{e}_2 \geqslant \ldots \geqslant \bar{e}_k \geqslant \ldots$$

и существует предел

$$(o)\text{-}\lim_{k\to\infty} \bar{e}_k = e_0.$$

Так как

$$e_{n_k} \vee e_{n_{k+1}} \vee \ldots \vee e_{n_{k+m}} \leqslant e_{n_k} + e_{n_{k+1}} + \ldots + e_{n_{k+m}},$$

то ввиду положительности и аддитивности функционала Φ

$$\Phi(e_{n_k} \vee \ldots \vee e_{n_{k+m}}) \leqslant \Phi(e_{n_k}) + \ldots + \Phi(e_{n_{k+m}}).$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$ и имея в виду, что

$$\lim_{m\to\infty} (e_{n_k} \vee \ldots \vee e_{n_{k+m}}) = \bar{e}_k,$$

получим:

$$\Phi(\bar{e}_k) \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} \quad \text{и} \quad \lim_{k\to\infty} \Phi(\bar{e}_k) = \Phi(e_0) = 0,$$

откуда, принимая во внимание существенную положительность функционала Φ, заключаем, что $e_0 = \mathbf{0}$ и $\bar{e}_k \searrow \mathbf{0}$. Но, очевидно, $\mathbf{0} \leqslant e_{n_k} \leqslant \bar{e}_k$, так что $e_{n_k} \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$.

Таким же образом из всякой подпоследовательности $\{e_{n_i}\}$ можно извлечь частичную, (o)-сходящуюся к нулю, а это и означает, что $e_n \xrightarrow{(t)} 0$.

3.25. Теорема. *Если $x_n \xrightarrow{(o)} x$ в элементарном K-пространстве X, то каково бы ни было число $\delta > 0$, найдётся единичный элемент $e \in X$ такой, что $\Phi(e) < \delta$ и в подпространстве $X_{\mathbf{1}-e}$, порождённом элементом $\mathbf{1}-e$, последовательность $x_n \to x$ равномерно, т. е.*

$$|(\mathbf{1}-e)(x_n - x)| < \varepsilon \mathbf{1} \qquad \text{при } n \geqslant N_\varepsilon.$$

Доказательство. Если $x_n \xrightarrow{(o)} x$, то $|x_n - x| \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$. Не ограничивая общности доказательства, можно предположить, что $|x_n - x| \searrow \mathbf{0}$. Так как для единичных элементов пространства X имеет место теорема о диагональной последовательности, то в силу 2.21 гл. V найдётся последовательность единичных элементов $e_k \searrow \mathbf{0}$ такая, что

$$|x_n - x| \leqslant \frac{1}{k}(\mathbf{1} - e_k) + (e_k)|x_1 - x| \qquad (n \geqslant N_k).$$

По непрерывности функционала Φ, начиная с некоторого $k = k_0$, $\Phi(e_k) < \delta$, и если положить $e = e_{k_0}$, то $\Phi(e_{k_0}) < \delta$ и

$$|(\mathbf{1}-e)(x_n - x)| \leqslant (\mathbf{1}-e)|x_n - x| \leqslant \frac{1}{k}(\mathbf{1}-e) \quad (n \geqslant N_k,\ k = 1, 2, \ldots).$$

Замечание. Если в качестве X взять S (K-пространство измеримых функций, заданных на множестве T), то, полагая

$$\Phi(x) = \int_T x(t)\,dt$$

для всякой суммируемой функции $x(t)$, получим существенно положительный (o)-линейный функционал в $\overline{S} = M$. Из доказанного предложения вытекает известная теорема Д. Ф. Егорова о сходящейся почти всюду последовательности измеримых функций.

По аналогии с известным в теории функций вещественной переменной определением сходимости «по мере», введём следующее

Определение. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ элементов элементарного K-пространства X *сходится «по мере»* к элементу $x \in X$, если для всякого $\lambda > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \Phi [Ce_\lambda (| x_n - x |)] = 0,$$

где Φ — существенно положительный (o)-линейный функционал в $\overline{X}$.

3.26. Теорема. *В расширенном элементарном K-пространстве X (t)-сходимость совпадает со сходимостью «по мере»**).

Доказательство. Пусть $x_n \xrightarrow{(t)} x$; тогда $| x_n - x | \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$ и $Ce_\lambda (| x_n - x |) \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$ (так как $\lambda Ce_\lambda \leqslant (Ce_\lambda) | x_n - x |$). В силу 3.24

$$\lim_{n \to \infty} \Phi [Ce_\lambda (| x_n - x |)] = 0,$$

и последовательность $\{x_n\}$ сходится к x «по мере».

Пусть теперь, обратно, x_n сходится к x «по мере». Тогда $\Phi [Ce_\lambda (| x_n - x |)] \to 0$ при любом $\lambda > 0$, откуда, принимая во внимание 3.24,

$$(t)\text{-}\lim_{n \to \infty} Ce_\lambda (| x_n - x |) = \mathbf{0},$$

и $| x_n - x | \xrightarrow{(t)} \mathbf{0}$ (см. 4.18 гл. III и 2.26 гл. IV), т. е. $x_n \xrightarrow{(t)} x$.

Связь между понятиями K-пространства с обобщённой аддитивной нормой и элементарного K-пространства выражается следующим предложением.

3.27. Теорема. *Всякое K-пространство X с обобщённой аддитивной нормой разлагается на элементарные компоненты, следовательно, может быть представлено в виде соединения некоторого множества элементарных K-пространств. Обратно, всякое соединение элементарных K-пространств есть K-пространство с обобщённой аддитивной нормой.*

Доказательство. Пусть X — произвольное K-пространство с обобщённой аддитивной нормой. В силу свойства 3 этой нормы найдётся множество $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ попарно дизъюнктных положительных элементов пространства X, полное в X, нормы которых конечны. X разлагается на компоненты X_α, порождённые элементами x_α. Покажем, что каждая компонента X_α есть элементарное K-пространство. В качестве единицы в X_α выберем x_α и рассмотрим подпространство $\overline{X}_\alpha$ ограниченных элементов пространства X_α. Определим в нём функционал Φ, положив

$$\Phi (x) = \| x \|_X$$

для $x \geqslant \mathbf{0}$ $(x \in X_\alpha)$ и

$$\Phi (x) = \Phi (x_+) - \Phi (x_-)$$

для произвольного $x \in X$. Так как для $x \in X_\alpha$ $| x | \leqslant \lambda x_\alpha$, то определение функционала Φ имеет смысл. Далее ясно, что Φ — аддитивный и существенно

---

*) Эта теорема является абстрактным аналогом известной теоремы Ф. Рисса из теории функций вещественной переменной.

положительный функционал в $\overline{X}_\sigma$ (свойства 2 и 1 нормы в X). Наконец, из 3.12 следует, что Φ — вполне линейный и тем более (o)-линейный функционал в $\overline{X}_\alpha$. Тем самым установлено, что X_α — элементарное K-пространство и X разлагается на элементарные компоненты.

Пусть теперь X — соединение элементарных K-пространств X_α $(\alpha \in \Lambda)$. По 3.22 X_α — K-пространство с обобщённой аддитивной нормой, а соединение таких пространств в силу 3.16 есть пространство того же типа.

Отметим ещё некоторые предложения, используемые в дальнейшем.

3.28. Если в K-пространстве X с обобщённой аддитивной нормой и единицей норма единицы конечна, то X — элементарное K-пространство.

Доказательство. Если x — положительный ограниченный элемент пространства X, $\mathbf{0} \leqslant x \leqslant \lambda \mathbf{1}$, то в силу монотонности и однородности обобщённой нормы

$$\| x \| \leqslant \lambda \| \mathbf{1} \| < +\infty.$$

Если теперь для всякого ограниченного элемента пространства X положить

$$\Phi(x) = \| x_+ \| - \| x_- \|,$$

то благодаря аддитивности и непрерывности нормы Φ будет (o)-линейным функционалом в подпространстве $\overline{X}$ ограниченных элементов пространства X. Вместе с тем из свойства 1 обобщённой нормы следует, что $\Phi(x) > 0$ для всякого $x > \mathbf{0}$ $(x \in \overline{X})$, т. е. Φ — существенно положительный функционал. Тем самым установлено, что X — элементарное K-пространство.

3.29. Для всякого элементарного K-пространства X существует KB-пространство Y с аддитивной нормой и единицей, максимальное расширение которого изоморфно максимальному расширению пространства X.

Доказательство. По теореме 3.15 максимальное расширение $\widetilde{X}$ K-пространства X есть K-пространство с обобщённой нормой. При этом можно предполагать, что норма ограниченного элемента пространства X (и вместе с тем $\widetilde{X}$) конечна. По теореме 3.14 в $\widetilde{X}$ можно выделить полное в $\widetilde{X}$ и нормально в нём содержащееся подпространство Y, являющееся KB-пространством с аддитивной нормой. Из доказательства теоремы 3.14 следует, что Y состоит из всех элементов пространства $\widetilde{X}$, норма которых конечна, в частности, единица пространства X (и $\widetilde{X}$) принадлежит Y и обладает свойством единицы в Y. Ясно, что максимальные расширения пространств X и Y изоморфны, так как $\widetilde{X}$ — расширение пространства Y.

ГЛАВА XII

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Теория абстрактных линейных пространств и операций в них может быть использована также для построения абстрактной теории функциональных уравнений, охватывающей различные частные виды уравнений математического анализа: алгебраические, интегральные, дифференциальные.

Здесь мы рассмотрим специально применение теории полуупорядоченных пространств и операций в них для установления некоторых фактов из теории функциональных уравнений, которые не допускали общего рассмотрения без использования этой теории.

Мы остановимся на исследовании сходимости процесса последовательных приближений. Как известно, именно процесс последовательных приближений был одним из первых методов, использованных при установлении теорем существования решения для дифференциальных уравнений. При этом сходимость такого процесса устанавливалась путём сопоставления приближений для двух уравнений: данного и более простого — превосходящего (мажорантного). Этот метод мажорант (Коши) в дальнейшем был использован и для других классов уравнений, например, бесконечных систем алгебраических уравнений.

Используя теорию полуупорядоченных пространств, удаётся дать общую теорию метода мажорант доказательства существования решения и установления сходимости процесса последовательных приближений. Попутно проводится рассмотрение и некоторых других вопросов: единственность, исследование свойств решения, приближённое решение и др.

Как применение этой общей теории мы получаем некоторые известные и новые теоремы об отдельных классах уравнений: о бесконечных системах, об интегральных уравнениях (линейных и нелинейных) и др.

Изложение общей теории оказывается удобным строить для пространств, нормированных элементами K-пространства. Этот класс пространств охватывает и пространства типа (B) и K-пространства. Мы начнём с определения таких пространств и построения начал теории операций в них.

§ 1. Пространства, нормированные элементами полуупорядоченного пространства, и операции в них

1.1. Пространства типа (B_K).

1.11. Пусть имеются некоторое линейное множество X и K-пространство Z. Говорят, что X *нормировано посредством* Z, если каждому элементу $x \in X$ соотнесён элемент $z = \|x\| \in Z$ — *абстрактная норма* элемента x, причём соблюдены следующие аксиомы:

1. $\|x\| > \mathbf{0}$, если $x \neq \mathbf{0}$; $\|\mathbf{0}\| = \mathbf{0}$.
2. $\|x_1 + x_2\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\|$.
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
4. Если $\|x\| = z_1 + z_2$, $z_1, z_2 \in Z$, $z_1, z_2 \geqslant \mathbf{0}$, то существуют такие элементы $x_1, x_2 \in X$, что $x_1 + x_2 = x$ и

$$\|x_1\| = z_1; \ \|x_2\| = z_2.$$

Наличие абстрактной нормы позволяет определить сходимость в X.

1.12. Последовательность $\{x_n\}$ сходится к элементу $x \in X$, если $\|x_n - x\| \xrightarrow{(0)} \mathbf{0}$ в Z. В таком случае мы пишем

$$(bk)\text{-}\lim_{n \to \infty} x_n = x \quad \text{или} \quad x_n \xrightarrow{(bk)} x.$$

1.13. Если X полно в отношении (bk)-сходимости, т. е. из того, что $\|x_n - x_m\| \xrightarrow{(0)} \mathbf{0}$ при $n, m \to \infty$, следует существование (bk)-предела у последовательности $\{x_n\}$, то мы будем называть X *пространством типа* (B_K).

1.14. Класс пространств типа (B_K) включает в себя и пространства типа (B) и K-пространства, причём в первом случае нормирующее пространство $Z = R_1$, а $\|x\| = \|x\|$, а во втором Z совпадает с X и $\|x\| = |x|$.

По отношению к пространствам типа (B) данное утверждение совершенно тривиально, так как условия 1—3 в 1.11 совпадают с обычными условиями для нормы, а выполнение условия 4 также очевидно. Требование же полноты для пространств типа (B) предполагается выполненным.

Для K-пространств соблюдение первых трёх условий, если принять $\|x\| = |x|$, следует на основании известных свойств модуля (1.52 гл. I). Чтобы установить свойство 4, нужно показать, что если x есть элемент K-пространства X и $|x| = z_1 + z_2$, где $z_1, z_2 \in X$; $z_1, z_2 \geqslant 0$, то можно построить разложение $x = x_1 + x_2$ такое, что $|x_1| = z_1$, $|x_2| = z_2$.

Имеем: $x_+ \leqslant |x| = z_1 + z_2$ и $x_- \leqslant z_1 + z_2$. Согласно 1.42 гл. I найдутся разложения

$$x_+ = x_1' + x_2'; \quad \mathbf{0} \leqslant x_1' \leqslant z_1, \quad \mathbf{0} \leqslant x_2' \leqslant z_2;$$
$$x_- = x_1'' + x_2''; \quad \mathbf{0} \leqslant x_1'' \leqslant z_1, \quad \mathbf{0} \leqslant x_2'' \leqslant z_2.$$

Тогда требуемое разложение получается, если принять

$$x_1 = x_1' - x_1'', \quad x_2 = x_2' - x_2''.$$

Действительно,

$$x = x_+ - x_- = (x_1' + x_2') - (x_1'' + x_2'') = x_1 + x_2.$$

Далее, так как $x_+ \, \mathrm{d} \, x_-$, то $x_1' \, \mathrm{d} \, x_1''$ и $x_2' \, \mathrm{d} \, x_2''$, а потому

$$|x_1| = |x_1'| + |x_2''| = |x_1'| \vee |x_1''| \leqslant z_1; \quad |x_2| \leqslant z_2.$$

Но, с другой стороны, $z_1 + z_2 = |x| \leqslant |x_1| + |x_2|$. Поэтому непременно

$$|x_1| = z_1, \ |x_2| = z_2,$$

и свойство 4 установлено.

Наконец, так как в данном случае (bk)-сходимость совпадает с (o)-сходимостью в $X(=Z)$, то требование полноты относительно неё следует из справедливости признака Коши для (o)-сходимости (2.21 гл. I).

1.2. Примеры пространств типа (B_K). Каждое полное нормированное пространство, а также каждое K-пространство представляют согласно 1.14 примеры пространств типа (B_K). Однако можно указать большое число естественно строящихся и полезных примеров пространств типа (B_K) не такого рода.

1.21. Множество C непрерывных в $[0,1]$ функций можно следующим образом нормировать посредством n-мерного векторного пространства $Z = R_n$.

Разобьём промежуток $[0, 1]$ точками $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$ и положим

$$\zeta_i = \max_{t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i} |x(t)| \quad (i = 1, 2, \ldots, n); \quad \|x\| = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n).$$

Тогда C превращается в пространство типа (B_K). Хотя (bk)-сходимость есть равномерная, так же как и при обычной числовой норме, но такая абстрактная норма полнее характеризует функцию $x(t)$ — элемент пространства C.

1.22. Если в качестве X принять совокупность измеримых функций с суммируемым квадратом и нормировать это пространство посредством $Z = R_n$, полагая

$$\|x\| = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n), \quad \text{где} \quad \zeta_i^2 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} x^2(t)\, dt \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

то опять превратим его в пространство типа (B_K), в котором сходимость совпадает со сходимостью в L^2.

1.23. Множество элементов пространства l^2, т. е. последовательностей $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$, превращается в пространство типа (B_K), если его нормировать посредством пространства R_{n+1}, принимая

$$\|x\| = \left(|\xi_1|, |\xi_2|, \ldots, |\xi_n|, \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} \xi_i^2}\right).$$

1.24. Таким же образом множество ограниченных последовательностей $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ может быть превращено в пространство типа (B_K), если принять

$$\|x\| = \left(|\xi_1|, |\xi_2|, \ldots, |\xi_n|, \sup_{i \geqslant n+1} |\xi_i|\right) \in R_{n+1}.$$

1.25. Множество ограниченных функций двух переменных $x(s, t)$, определённых в квадрате $[0, 1; 0, 1]$, может быть превращено в пространство типа (B_K), если принять

$$\|x\| = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(s, t)|,$$

т. е. в качестве нормирующего пространства принять F_0 — пространство ограниченных функций одного переменного.

Здесь (bk)-сходимость означает равномерную сходимость по одной переменной при условии равномерной ограниченности последовательности.

1.26. Пусть X есть совокупность измеримых функций двух переменных $x(s, t)$ с суммируемым квадратом в квадрате $[0, 1; 0, 1]$. Тогда это пространство может быть нормировано посредством пространства $Z = L^2$, если принять

$$\|x\| = z, \text{ где } z(s) = \left\{\int_0^1 x^2(s, t)\, dt\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Выполнение для нормы условий 1 — 3 очевидно. Условие 4 проверяется так: если $\|x\| = z_1 + z_2$, $z_1, z_2 \geqslant \mathbf{0}$, то достаточно принять

$$x_1(s, t) = \frac{z_1(s)}{z_1(s) + z_2(s)}\, x(s, t), \qquad x_2(s, t) = \frac{z_2(s)}{z_1(s) + z_2(s)}\, x(s, t)$$

(если $z_1(s) + z_2(s) = 0$, то нужно считать $x_1(s, t) = x_2(s, t) = 0$).

(bk)-сходимость здесь хотя и не совпадает со сходимостью в среднем последовательности $x_n(s, t)$ как функции двух переменных, но последняя является $(*)$-сходимостью (2.3 гл. I) по отношению к (bk)-сходимости. Отсюда легко заключить о полноте пространства X относительно (bk)-сходимости.

1.3. Регулярные операции в пространствах типа (B_K). Пусть X и Y — два пространства, нормированные посредством K-пространств Z и W соответственно.

1.31. Аддитивная операция $y = U(x)$, переводящая X в Y, называется *регулярной*, если имеется такая положительная аддитивная операция $w = V(z)$ из Z в W, что при всех x

$$\|U(x)\| \leqslant V(\|x\|);$$

при этих условиях операцию V будем называть *мажорантой* для U.

1.32. Замечание. В случае, если X и Y — K-пространства и совпадают со своими нормирующими, определение 1.31 совпадает с определением регулярной операции в K-пространствах (ср. 1.25 гл. VII), причём в качестве мажоранты V может быть принят модуль данной операции $|U|$, а также любая операция $\geqslant |U|$.

Отметим также, что если X и Y — нормированные пространства ($Z = W = R_1$), то мажорантная операция имеет вид $w = cz$ (c — вещественное $\geqslant 0$) и, следовательно, класс регулярных операций есть класс операций, удовлетворяющих условию $\|U(x)\| \leqslant c\|x\|$, т. е. совпадает с классом (b)-непрерывных (H_b^b).

1.33. Регулярная операция однородна, т. е.

$$U(\lambda x) = \lambda U(x)$$

для произвольного вещественного λ.

Доказательство. Если λ рационально, то это вытекает из аддитивности операции U. Если λ иррационально, то, взяв рациональные λ_n так, чтобы $|\lambda - \lambda_n| < \frac{1}{n}$, можем написать:

$$\|U(\lambda x) - \lambda U(x)\| \leqslant \|U[(\lambda - \lambda_n)x]\| + \|(\lambda - \lambda_n)U(x)\| \leqslant$$
$$\leqslant V(|\lambda - \lambda_n|\|x\|) + |\lambda - \lambda_n| V(\|x\|) \leqslant \frac{2}{n} V(\|x\|),$$

откуда следует, что $\|U(\lambda x) - \lambda U(x)\| = \mathbf{0}$ и $U(\lambda x) = \lambda U(x)$.

1.34. Теорема. *Среди всех мажорант регулярной операции U существует наименьшая, т. е. такая мажоранта V_0, что $V_0 \leqslant V$ для любой другой мажоранты V операции U.*

Доказательство. Пусть $\{V_\tau\}_{\tau \in T}$ множество всех мажорант для операции U; положим

$$V_0 = \inf_{\tau \in T} V_\tau,$$

где нижняя грань взята в смысле упорядочения в пространстве ($Z \to W$) регулярных операций из Z в W. Согласно смыслу нижней грани в этом пространстве для $z \geqslant \mathbf{0}$ операция V_0 определяется так:

$$V_0(z) = \inf_{\substack{\tau_1, \ldots, \tau_n \\ z = z_1 + \ldots + z_n;\ z_i \geqslant 0}} [V_{\tau_1}(z_1) + V_{\tau_2}(z_2) + \ldots + V_{\tau_n}(z_n)].$$

Докажем, что она также представляет собой мажоранту для U.

Возьмём произвольное $x \in X$; пусть $\|x\| = z$. Из условия 4 легко следует, что для произвольного разбиения $z = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$; $z_k \geqslant \mathbf{0}$; $k = 1, 2, \ldots, n$ существует такое разбиение $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, что $\|x_k\| = z_k$; $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда для произвольных $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ и $z_1, \ldots, z_n$; $z_i \geqslant \mathbf{0}$, используя указанное выше разбиение элемента x, имеем:

$$\|U(x)\| \leqslant \|U(x_1)\| + \|U(x_2)\| + \ldots + \|U(x_n)\| \leqslant$$
$$\leqslant V_{\tau_1}(\|x_1\|) + V_{\tau_2}(\|x_2\|) + \ldots + V_{\tau_n}(\|x_n\|) = V_{\tau_1}(z_1) +$$
$$+ V_{\tau_2}(z_2) + \ldots + V_{\tau_n}(z_n).$$

Переходя к нижней грани по $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, получаем

$$\|U(x)\| \leqslant V_0(z) = V_0(\|x\|),$$

т. е. V_0 — мажоранта для U и притом, очевидно, наименьшая.

1.35. Определение. Наименьшая мажоранта V_0 для данной регулярной операции U называется её *абстрактной нормой* и обозначается $\|U\|$: $V_0 = \|U\|$.

Множество регулярных операций, переводящих X в Y, является, очевидно, линейным; при этом, если принять в нём норму согласно определению 1.35, то оно окажется нормированным посредством K-пространства $(Z \to W)$; при этом для абстрактной нормы будут выполнены условия 1 — 3. Полнота относительно (bk)-сходимости, как нетрудно видеть, также будет иметь место. Таким образом, в случае, если окажется выполненным и условие 4, множество регулярных операций $(X \to Y)$ будет представлять собой пространство типа (B_K).

1.4. Непрерывность регулярных операций и функционалов в пространствах типа (B_K). Наряду с регулярными операциями можно рассматривать аддитивные и (bk)-непрерывные операции, переводящие X в Y, т. е. такие, что $x_n \xrightarrow{(bk)} x$ влечёт $U(x_n) \xrightarrow{(bk)} U(x)$. Это определение непрерывности пригодно, впрочем, и для нелинейных (неаддитивных) операций.

Упомянем, что подобно тому, как это было сделано в гл. VII (2.13—2.14), легко показать, что (bk)-непрерывность в $\mathbf{0}$ и аддитивность влекут за собой непрерывность всюду и однородность операции.

Отметим прежде всего два известных уже нам случая, когда (bk)-непрерывные операции совпадают с регулярными.

1.41. Если X и Y — нормированные пространства $(Z = W = R_1)$, либо X и Y — K-пространства $(X = Z, Y = W)$, причем X регулярно, а Y есть K^+-пространство, то класс (bk)-непрерывных операций совпадает с классом регулярных.

Действительно, в первом случае, как уже отмечалось (1.32), регулярные операции суть не что иное, как операции класса H_b^b, а во

втором класс регулярных операций совпадает с классом H_o^o (2.41 гл. VII), а это и будет в данном случае класс (bk)-непрерывных операций.

Включение в одну сторону имеет место при довольно общих условиях:

1.42. Если для данной регулярной операции U её мажоранта V (o)-непрерывна (т. е. (oo)-непрерывна), то операция U (bk)-непрерывна; в частности, регулярная операция (bk)-непрерывна всегда, если Z — регулярное пространство.

Действительно, если $x_n \xrightarrow{(bk)} \mathbf{0}$, то $|x_n| \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$; следовательно, ввиду неравенства $|U(x_n)| \leqslant V(|x_n|)$ и (o)-непрерывности мажоранты V, заключаем, что $|U(x_n)| \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$, т. е. $U(x_n) \xrightarrow{(bk)} \mathbf{0}$. В случае, когда Z — регулярное K-пространство, положительная операция V заведомо (o)-непрерывна (2.42 гл. VII), а потому применима первая часть доказываемого предложения.

Обратное утверждение, что (bk)-непрерывная операция регулярна, вообще говоря, не имеет места; однако следует отметить два частных случая, для которых оно верно.

1.43. Если X — нормированное пространство $(Z = R_1)$, а W — — K^+-пространство, то (bk)-непрерывные операции регулярны, т. е. для всякой такой операции U имеет место неравенство

$$|U(x)| \leqslant |U| \|x\|,$$

где $|U|$ в данном случае — элемент пространства W.

Пусть U — (bk)-непрерывная операция; тогда, полагая

$$w_0 = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |U(x)|,$$

имеем $w_0 < +\infty$. Действительно, множество пространства W, верхняя грань которого рассматривается, (o)-аннулируемо, так как если $\|x_n\| \leqslant 1$ и $\mu_n \to 0$, то

$$\mu_n |U(x_n)| = |U(\mu_n x_n)| \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$$

по (bk)-непрерывности операции U. Но так как W есть K^+-пространство, то это множество и ограничено. Очевидно, что так определённое w_0 и есть значение абстрактной нормы $|U|$.

Отметим попутно любопытное следствие из последнего рассуждения.

1.44. Следствие. Если X — нормированное пространство $(Z = R_1)$, а Y — K^+-пространство, то класс регулярных операций совпадает с классом H_b^o; при этом $|U|$ имеет тот же смысл, что и определявшаяся в 2.8 гл. VII для операций этого класса абстрактная норма.

В довольно общем случае совпадение классов имеет место по отношению к функционалам.

1.45. Класс регулярных функционалов в пространствах типа (B_K) совпадает с классом (bk)-непрерывных, если нормирующее пространство Z регулярно.

Доказательство. То, что всякий регулярный функционал (bk)-непрерывен, следует сразу из 1.42.

Пусть теперь дан (bk)-непрерывный функционал. Чтобы доказать его регулярность, определим в Z следующий функционал:

$$\varphi(z) = \sup_{\|x'\|+\|x''\|\leqslant z} [|f(x')|+|f(x'')|] \qquad \text{для } z \geqslant \mathbf{0}.$$

Функционал $\varphi(z)$ конечен при любом z. В противном случае нашлись бы такие пары x'_n, x''_n, $\|x'_n\|+\|x''_n\|\leqslant z$, что

$$|f(x'_n)|+|f(x''_n)|\geqslant n,$$

откуда

$$\frac{1}{n}|f(x'_n)|+\frac{1}{n}|f(x''_n)|\geqslant 1.$$

Но это невозможно, так как $\frac{1}{n}x'_n \xrightarrow{(bk)} \mathbf{0}$ и $\frac{1}{n}x''_n \xrightarrow{(bk)} \mathbf{0}$, и потому, по (bk)-непрерывности функционала f

$$\left[\frac{1}{n}|f(x'_n)|+\frac{1}{n}|f(x''_n)|\right] \longrightarrow 0.$$

Проверим теперь аддитивность функционала φ. Пусть $z = z_1+z_2, z_1, z_2 \geqslant \mathbf{0}$. Тогда, если $\|x'\|+\|x''\|\leqslant z = z_1+z_2$, можно (по 1.42 гл. I) представить $\|x'\|$ и $\|x''\|$ в виде $\|x'\| = z'_1+z'_2$, $\|x''\| = z''_1+z''_2$, где $z'_1, z'_2, z''_1, z''_2 \geqslant \mathbf{0}$ и $z'_2+z''_1\leqslant z_1$, $z'_2+z''_2\leqslant z_2$. Далее, по условию 4 можно x' и x'' представить в виде $x' = x'_1+x'_2$, $x'' = x''_1+x''_2$, где

$$\|x'_1\| = z'_1, \quad \|x'_2\| = z'_2, \quad \|x''_1\| = z''_1, \quad \|x''_2\| = z''_2.$$

В таком случае

$$|f(x')|+|f(x'')|\leqslant [|f(x'_1)|+|f(x'_2)|]+[|f(x''_1)|+|f(x''_2)|] =$$
$$= [|f(x'_1)|+|f(x''_1)|]+[|f(x'_2)|+|f(x''_2)|]\leqslant \varphi(z_1)+\varphi(z_2),$$

откуда, переходя к верхней грани, имеем:

$$\varphi(z)\leqslant \varphi(z_1)+\varphi(z_2).$$

Обратно, пусть даны произвольные элементы x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, удовлетворяющие неравенствам

$$\|x'_1\|+\|x''_1\|\leqslant z_1, \quad \|x'_2\|+\|x''_2\|\leqslant z_2.$$

Рассмотрим числа $f(x'_1)$, $f(x''_1)$, $f(x'_2)$, $f(x''_2)$. Разобьём их на две группы так, чтобы в каждой оказались числа одного знака. Пусть, например, $f(x'_1)\geqslant 0$

и $f(x_2'') \geqslant 0$, а $f(x_1'') < 0$ и $f(x_2') < 0$. Положим в таком случае $x' = x_1' + x_2''$ и $x'' = x_1'' + x_2'$. Тогда будем иметь:

$$[|f(x_1')| + |f(x_1'')|] + [|f(x_2')| + |f(x_2'')|] = |f(x_1' + x_2'')| + |f(x_1'' + x_2')| = \\ = |f(x')| + |f(x'')| \leqslant \varphi(z).$$

Отсюда, переходя к верхней грани, получаем:

$$\varphi(z_1) + \varphi(z_2) \leqslant \varphi(z),$$

что вместе с ранее доказанным обратным неравенством устанавливает аддитивность функционала φ. Так как, с другой стороны, неравенство

$$|f(x)| \leqslant \varphi(\|x\|)$$

вытекает сразу из определения функционала φ, то φ есть мажоранта для f, а следовательно, функционал f регулярен.

1.5. Условие существования операции, обратной для данной регулярной.

1.51. Определение. Если $y = U(x)$ — аддитивная операция, отображающая пространство X типа (B_K) в пространство Y того же типа, то говорят, что она имеет *обратную* U^{-1}, определённую в подпространстве $Y' \subset Y$, если уравнение

$$U(x) = y \tag{1}$$

имеет единственное решение $x = U^{-1}(y)$ при любом $y \in Y'$. Это означает, что тождественно

$$UU^{-1}(y) = y \quad (y \in Y'); \quad U^{-1}U(x) = x \quad (U(x) \in Y').$$

Если для некоторой операции U^{-1} выполнено только первое из этих двух соотношений, она называется *правой обратной*, если только второе, то — *левой обратной*.

На основании определения непосредственно устанавливается, что если прямая операция аддитивна, то и обратная (двусторонняя) аддитивна. Легко также проверяется, что наличие правой обратной обеспечивает существование решения уравнения (1) при любой правой части $y \in Y'$, а наличие левой обратной обеспечивает единственность решения уравнения (1), если последнее существует.

Например, для установления последнего предложения предположим, что имеются два решения: $U(x) = y$ и $U(x') = y$. Тогда $U(x - x') = \mathbf{0} = U(\mathbf{0})$ и применяя к обеим частям операцию U^{-1} слева, получим $x - x' = \mathbf{0}$, т. е. $x = x'$.

Дадим теперь достаточное условие существования регулярной обратной операции.

1.52. Теорема. *Пусть аддитивная операция U удовлетворяет условию*

$$\|U(x)\| \geqslant Q(\|x\|) \quad (x \in X), \tag{2}$$

где Q — аддитивная операция из Z в W, имеющая положительную обратную в W (т. е. такую, что $Q^{-1}(w) > \mathbf{0}$ при $w > \mathbf{0}$).

Тогда существует регулярная обратная операция U^{-1}, определённая на множестве $U(X)$, причём

$$\|U^{-1}\| \leqslant Q^{-1}.$$

Доказательство. При сделанных предположениях соответствие между X и $U(X)$, осуществляемое операцией U, взаимно однозначно. Действительно, если $U(x_1) = U(x_2)$, или $U(x_1 - x_2) = \mathbf{0}$, то $\mathbf{0} = \|U(x_1 - x_2)\| \geqslant Q(\|x_1 - x_2\|)$, откуда $\|x_1 - x_2\| \leqslant Q^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, т. е. $x_1 = x_2$. В таком случае на $U(X)$ определена обратная операция $U^{-1}(y)$. При этом, пользуясь условием (2), имеем:

$$\|y\| = \|U(U^{-1}(y))\| \geqslant Q(\|U^{-1}(y)\|),$$

откуда, применяя операцию Q^{-1} к обеим частям, получаем:

$$\|U^{-1}(y)\| \leqslant Q^{-1}(\|y\|);$$

это и показывает, что Q^{-1} есть мажоранта для U^{-1}, т. е. U^{-1} регулярна и

$$\|U^{-1}\| \leqslant Q^{-1}.$$

В частном случае, когда X и Y — нормированные пространства ($Z = W = R_1$), операция Q имеет вид $w = mz$ (m вещественно), и чтобы она имела положительную обратную, должно быть $m > 0$. Таким образом, в этом случае теорема 1.52 принимает вид:

1.53. *Если X и Y — нормированные пространства и для аддитивной операции U выполнено соотношение*

$$\|U(x)\| \geqslant m\|x\| \quad (m > 0),$$

*то она имеет (b)-линейную (класса H_b^b) обратную (в области $U(X)$) и при этом $\|U^{-1}\|_b \leqslant \frac{1}{m}$ *).*

Укажем теперь следующее важное применение теоремы 1.52 к вопросу о разрешимости функциональных уравнений.

Пусть операция U переводит пространство X в себя, т. е. $X = Y$, и соответственно $W = Z$, и пусть I обозначает тождественную операцию из X в X: $I(x) = x$, и, аналогичным образом, J_Z — тождественную операцию в Z.

Тогда справедливо следующее предложение.

1.54. Пусть X — пространство типа (B_K) и U — регулярная операция, переводящая X в себя, причём она такова, что обратная опе-

---

*) Ср. С. Банах [2], гл. X, § 1.

рация $[J_Z - \|U\|]^{-1}$ существует и положительна. Тогда существует регулярная обратная операция $[I - U]^{-1}$ и

$$\|[I-U]^{-1}\| \leqslant [J_Z - \|U\|]^{-1}. \tag{3}$$

Иначе говоря, уравнение

$$x - U(x) = y$$

однозначно разрешимо при любом $y \in X$ и это решение как функция от y представляет регулярную операцию.

Это предложение очевидным образом следует из 1.52, так как ввиду неравенства

$$\|(I-U)x\| \geqslant \|x\| - \|U(x)\| \geqslant \|x\| - \|U\|\|x\| = [J_Z - \|U\|(\|x\|)]$$

можно принять $Q = J_Z - \|U\|$.

Отметим опять частный случай его, относящийся к нормированным пространствам.

1.55. Если X — нормированное пространство и операция U такова, что $\|U\| < 1$, то операция $I - U$ имеет обратную и

$$\|[I-U]^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|U\|}.$$

§ 2. Метод последовательных приближений для нелинейных функциональных уравнений

2.1. Вспомогательная теорема об уравнениях в K-пространствах.

2.11. Теорема. *Пусть Z — K-пространство и пусть для уравнения*

$$z = V(z) \tag{1}$$

выполнены следующие условия ($z' \geqslant \mathbf{0}$ обозначает некоторый фиксированный элемент из Z):

1) *$V(z)$ определена для $\mathbf{0} \leqslant z \leqslant z'$;*

2) *$V(z)$ монотонна для $\mathbf{0} \leqslant z \leqslant z'$, т. е. если $\mathbf{0} \leqslant z \leqslant z + \Delta z \leqslant z'$, то*

$$V(z) \leqslant V(z + \Delta z);$$

3) *$V(z)$ монотонно непрерывна; точнее, если $\mathbf{0} \leqslant z_n \leqslant z'$ и $z_n \nearrow z$ (либо $z_n \searrow z$), то $V(z_n) \nearrow V(z)$ (соответственно $V(z_n) \searrow V(z)$);*

4) *$V(\mathbf{0}) \geqslant \mathbf{0}$;*

5) *$V(z') \leqslant z'$.*

Тогда уравнение (1) имеет решение z^* ($\mathbf{0} \leqslant z^* \leqslant z'$), которое может быть получено процессом последовательных приближений.

Доказательство. Положим $z_0 = \mathbf{0}$ и определим z_n индуктивно по формуле

$$z_{n+1} = V(z_n). \tag{2}$$

Докажем, что при любом n справедливы неравенства

$$\mathbf{0} \leqslant z_0 \leqslant z_1 \leqslant \ldots \leqslant z_n \leqslant z'.$$

Для $n=0$ это верно; покажем, предполагая, что для данного n неравенства установлены, возможность перехода к $n+1$. Действительно, пользуясь условием 2), имеем:

$$z_{n+1} = V(z_n) \geqslant V(z_{n-1}) = z_n \geqslant \mathbf{0},$$
$$z_{n+1} = V(z_n) \leqslant V(z') \leqslant z'.$$

На основании установленных неравенств ясно, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z^* \leqslant z'$, а переходя к пределу при $n \to \infty$ в соотношении (2) и пользуясь монотонной непрерывностью функции V, получаем:

$$V(z^*) = z^*,$$

т. е. z^* — решение уравнения (1) и оно получено процессом последовательных приближений.

2.12. Замечание. Если бы мы приняли $z_0' = z'$ и последующие приближения определили равенствами

$$z_{n+1}' = V(z_n'),$$

то тогда бы $\lim\limits_{n\to\infty} z_n' = z'^*$ также существовал и представлял решение уравнения (1). При этом полученное таким образом решение может и не совпадать с ранее найденным z^*, однако непременно $z'^* \geqslant z^*$.

2.2. Теорема существования для уравнений в пространствах типа (B_K).

2.21. Определение. Пусть X—пространство типа (B_K), нормированное посредством K-пространства Z. Пусть U—операция, преобразующая X в себя. Будем говорить, что операция V, определённая для $\mathbf{0} \leqslant z \leqslant z'$ и принимающая значения из Z, представляет *мажоранту для* U в области $\|x\| \leqslant z'$, если выполнены следующие условия:

1) $\|U(\mathbf{0})\| \leqslant V(\mathbf{0})$.

2) $\|U(x+\Delta x) - U(x)\| \leqslant V(z+\Delta z) - V(z)$

при

$$\|x\| \leqslant z, \ \|\Delta x\| \leqslant \Delta z, \ z + \Delta z \leqslant z'.$$

Замечание. В случае, если $V(z)$—монотонная и выпуклая функция в том смысле, что $\Delta V(z) \geqslant \mathbf{0}$ и $\Delta V(z)$ возрастает при возрастании z, т. е.

$$V(z_1 + \Delta z) - V(z_1) \geqslant V(z + \Delta z) - V(z) \text{ при } z_1 \geqslant z,$$

условие 2) может быть заменено более простым:

2a) $\|U(x+\Delta x) - U(x)\| \leqslant V(\|x\| + \|\Delta x\|) - V(\|x\|)$.

2.22. Теорема существования решения. *Если U—операция, переводящая пространство X типа (B_K) в себя, определённая в области $\|x\| \leqslant z'$ и мажорируемая в этой области операцией V, удовлетворяющей условиям* 1)—5) *из* 2.11, *то уравнение*

$$x = U(x) \tag{3}$$

имеет решение x^*, которое может быть найдено процессом последовательных приближений, и при этом

$$\|x^*\| \leqslant z^* \leqslant z'.$$

Доказательство. Положим $x_0 = \mathbf{0}$ и определим x_n индуктивно формулой

$$x_{n+1} = U(x_n).$$

Покажем, что при произвольных k и $l > k$

$$\|x_l - x_k\| \leqslant z_l - z_k. \tag{4}$$

Так как $\|x_1 - x_0\| = \|x_1\| = \|U(\mathbf{0})\| \leqslant V(\mathbf{0}) = z_1 = z_1 - z_0$, то неравенство (4) справедливо при $k < l \leqslant 1$ (т. е. для $k = 0$, $l = 1$). Предположим, что (4) установлено для $k < l \leqslant n$, из чего следует, в частности, что $\|x_l\| \leqslant z_l$, и докажем, что оно сохраняется при $k < l \leqslant n+1$. Действительно, имеем (если $0 < k \leqslant n$):

$$\|x_{n+1} - x_k\| = \|U(x_{k-1} + (x_n - x_{k-1})) - U(x_{k-1})\| \leqslant$$
$$\leqslant V(z_{k-1} + (z_n - z_{k-1})) - V(z_{k-1}) = z_{n+1} - z_k.$$

Аналогичным образом, если $k = 0$, то, пользуясь уже доказанным, имеем:

$$\|x_{n+1} - x_0\| = \|x_{n+1}\| \leqslant \|x_{n+1} - x_1\| + \|x_1\| \leqslant$$
$$\leqslant z_{n+1} - z_1 + z_1 = z_{n+1} = z_{n+1} - z_0.$$

Таким образом, справедливость неравенства (4) доказана при $l = n+1$, а значит, и при любых $k < l \leqslant n+1$.

Так как $z_n \xrightarrow{(o)} z^*$, то $\|z_n - z_m\| \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$ при $n, m \to \infty$, а тогда, на основании (4), ввиду (bk)-полноты пространства X, заключаем, что существует

$$(bk)\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x^* = x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots$$

Так как $\|x_n\| \leqslant z_n$, то в пределе получается, что

$$\|x^*\| \leqslant z^* \leqslant z'.$$

Наконец, так как

$$\|U(x^*) - U(x_n)\| \leqslant V(z^*) - V(z_n) = z^* - z_{n+1},$$

то, переходя к пределу, находим:

$$U(x^*) = (bk)\text{-}\lim_{n\to\infty} U(x_n) = (bk)\text{-}\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*,$$

т. е. x^* — искомое решение.

2.23. Решения z^* и x^* уравнений (1) и (3), полученные последовательными приближениями, начиная со значения $\mathbf{0}$, будем называть *главными решениями* этих уравнений.

2.24. Следствие. *Если для любых x и Δx выполняется неравенство*

$$|U(x+\Delta x) - U(x)| \leqslant \alpha |\Delta x|,$$

где $0 < \alpha < 1$, *то уравнение*

$$x = U(x) + x_0 \tag{5}$$

имеет решение при любом x_0 *).

Действительно, положим

$$V(z) = |U(\mathbf{0}) + x_0| + \alpha z; \quad z' = \frac{|U(\mathbf{0}) + x_0|}{1-\alpha}.$$

Тогда $V(z') = z'$, $V(\mathbf{0}) = |U(\mathbf{0}) + x_0| \geqslant \mathbf{0}$ и соблюдены остальные условия из 2.11. Далее, $V(z)$ служит мажорантой для функции $U(x) + x_0$. Следовательно, выполнены условия теоремы 2.22 и на основании её заключаем, что уравнение (5) имеет решение x^*, причём

$$|x^*| \leqslant \frac{|U(\mathbf{0}) + x_0|}{1-\alpha}.$$

2.3. Единственность решения. Вообще говоря, решение уравнения (3) не единственно; однако в случае, если решение мажорантного уравнения (1) единственно, можно утверждать и единственность решения уравнения (3) в определённой области; более точно:

2.31. Теорема о единственности решения. *Если удовлетворены условия теоремы существования* 2.22 *и при этом* $z^* = z'^*$ (ср. 2.12), *то решение уравнения* (3), *удовлетворяющее условию* $|x| \leqslant z'$, *единственно. Это решение может быть получено последовательными приближениями, начиная с любого значения* x_0' *из области* $|x_0'| \leqslant z'$.

Доказательство. Пусть $|x_0'| \leqslant z_0' = z'$. Положим

$$x_{n+1}' = U(x_n') \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

---

*) В том частном случае, когда X — нормированное пространство ($Z = R_1$), это предложение совпадает с принципом Каччополли-Банаха (см. Немыцкий [2]).

Тогда имеем (используя обозначения из 2.11, 2.12 и 2.22):

$$|x_0' - x_0| = |x_0'| \leqslant z_0' = z_0' - z_0.$$

Покажем, что при всех k

$$|x_k' - x_k| \leqslant z_k' - z_k.$$

Для $k=0$ это неравенство уже получено. Предполагая его справедливость для $k \leqslant n$, покажем, что оно верно для $k=n+1$. Действительно,

$$|x_{n+1}' - x_{n+1}| = |U(x_n') - U(x_n)| = |U(x_n + (x_n' - x_n)) - \\ - U(x_n)| \leqslant V(z_n + (z_n' - z_n)) - V(z_n) = V(z_n') - V(z_n) = \\ = z_{n+1}' - z_{n+1}.$$

Но так как по условию $\lim (z_n' - z_n) = z'^* - z^* = \mathbf{0}$, то

$$(bk)\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n' = (bk)\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x^*.$$

Итак, действительно, начиная с любого значения x_0' с $|x_0'| \leqslant z'$, мы приходим к решению x^*. В частности, если x_0' есть решение уравнения (3), то все $x_n' = x_0'$ и на основании уже доказанного

$$x^* = (bk)\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n' = x_0';$$

это показывает, что не может быть решения уравнения (3), удовлетворяющего условию $|x| \leqslant z'$, которое было бы отлично от x^*.

2.32. Следствие 1. *Если U и V удовлетворяют условиям теоремы существования* 2.22, *то, во всяком случае, можно утверждать, что решение уравнения* (3), *удовлетворяющее условию*

$$|x| \leqslant z^*,$$

единственно.

Это утверждение получается сразу из предыдущей теоремы, если принять в ней $z' = z^*$. Действительно, в этом случае все $z_n' = z^*$, а потому и $z'^* = z^*$, что на основании теоремы 2.31 позволяет сделать заключение о единственности решения уравнения (3).

2.33. Следствие 2. *При условиях предложения* 2.24 *можно утверждать, что решение уравнения* (5) *единственно и может быть получено последовательными приближениями, начиная с любого элемента x_0.*

Действительно, здесь мажорантное уравнение

$$z = |U(\mathbf{0}) + x_0| + \alpha z,$$

очевидно, имеет единственное решение.

2.4. Непрерывность решения. Мы покажем, что если уравнение вида (3) зависит непрерывным образом от параметра (и соблюдены известные условия), то и главное решение его есть непрерывная функция от этого параметра.

2.41. Теорема о непрерывности решения. *Пусть дано уравнение*

$$x = U(x; \lambda), \tag{6}$$

где U — функция от x и λ, определённая для некоторой совокупности Δ значений параметра λ (вещественного или абстрактного, например, элемента метрического или топологического пространства), включающего λ_0 ($\lambda_0 \in \Delta$), и при этом выполнены следующие условия:

1) *уравнение* (1) *является мажорантным для уравнения* (6) *при всех значениях $\lambda \in \Delta$ в области $\|x\| \leqslant 3z'$, причём для V соблюдены условия* 1)—5) *из* 2.11 *с заменой z' на $3z'$ в первых трёх из них.*

2) *$U(x, \lambda)$, как функция от λ, непрерывна в точке λ_0, т. е.*

$$(bk)\text{-}\lim_{\lambda \to \lambda_0} U(x, \lambda) = U(x, \lambda_0) \text{ при } \|x\| \leqslant z'.$$

Тогда главное решение $x^*(\lambda)$ уравнения (6) *сходится к $x^*(\lambda_0)$ при $\lambda \to \lambda_0$, т. е. $x^*(\lambda)$ есть непрерывная функция от λ при $\lambda = \lambda_0$.*

Доказательство. Для любого λ, как и при доказательстве теоремы 2.22, определяются $x_n(\lambda)$ и $x^*(\lambda) = (bk)\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} x_n(\lambda)$. При этом

$$\|x^*(\lambda) - x_n(\lambda)\| \leqslant z^* - z_n; \ \|x_n(\lambda)\| \leqslant z^* \leqslant z'. \tag{7}$$

Покажем прежде всего непрерывность функций $x_n(\lambda)$, т. е. что

$$(bk)\text{-}\lim_{\lambda \to \lambda_0} x_n(\lambda) = x_n(\lambda_0)$$

при любом n. Для $n = 0$ это верно; поэтому достаточно показать возможность перехода от n к $n+1$. Имеем:

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}(\lambda) - x_{n+1}(\lambda_0)\| &= \|U(x_n(\lambda); \lambda) - U(x_n(\lambda_0); \lambda_0)\| \leqslant \\ &\leqslant \|U(x_n(\lambda); \lambda) - U(x_n(\lambda_0); \lambda)\| + \|U(x_n(\lambda_0); \lambda) - U(x_n(\lambda_0); \lambda_0)\| \leqslant \\ &\leqslant V(\|x_n(\lambda_0)\| + \|x_n(\lambda) - x_n(\lambda_0)\|) - V(\|x_n(\lambda_0)\|) + \\ &\qquad + \|U(x_n(\lambda_0); \lambda) - U(x_n(\lambda_0); \lambda_0)\|.\end{aligned}$$

Мы могли воспользоваться тем, что V — мажоранта, так как, очевидно,

$$\|x_n(\lambda_0)\| + \|x_n(\lambda) - x_n(\lambda_0)\| \leqslant 3z'.$$

В полученном неравенстве правая часть стремится к нулю благодаря непрерывности U по λ, а также благодаря непрерывности мажоранты V и тому, что $\|x_n(\lambda) - x_n(\lambda_0)\| \xrightarrow{(0)} \mathbf{0}$.

Итак, действительно, $x_{n+1}(\lambda) \xrightarrow{(b)k} x_{n+1}(\lambda_0)$ при $\lambda \to \lambda_0$, и, значит, непрерывность функции $x_n(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$ имеет место для всех n.

Далее, на основании первого из неравенств (7) получаем:

$$\|x^*(\lambda) - x^*(\lambda_0)\| \leqslant \|x^*(\lambda) - x_n(\lambda)\| + \|x^*(\lambda_0) - x_n(\lambda_0)\| + \|x_n(\lambda) - x_n(\lambda_0)\| \leqslant 2(z^* - z_n) + \|x_n(\lambda) - x_n(\lambda_0)\|.$$

Отсюда при $\lambda \to \lambda_0$ находим:

$$\overline{\lim_{\lambda \to \lambda_0}} \|x^*(\lambda) - x^*(\lambda_0)\| \leqslant 2(z^* - z_n),$$

и так как n произвольно, а $z_n \xrightarrow{(o)} z^*$, то

$$(bk)\text{-}\lim_{\lambda \to \lambda_0} x^*(\lambda) = x^*(\lambda_0),$$

ч. и тр. д.

§ 3. Случай линейных уравнений. Приближённое решение

В этом параграфе мы рассмотрим специализацию теорем предыдущего параграфа для случая линейных уравнений.

3.1. Основные теоремы о линейных уравнениях. Введём для упрощения формулировок следующее обозначение.

3.11. Если z' — некоторый существенно положительный элемент пространства Z, то через $Z_{z'}$ обозначим множество элементов z из Z, удовлетворяющих условию $|z| \leqslant rz'$ при каком-либо вещественном r, и через $X_{z'}$ — множество элементов x из X, удовлетворяющих условию $|x| \leqslant rz'$ при каком-либо r.

Как и в § 2, начинаем с уравнения в K-пространстве Z.

3.12. Пусть дано уравнение

$$z = K(z) + w, \quad w \in Z, \tag{1}$$

где K — некоторая аддитивная положительная и (o)-непрерывная операция из Z в Z, определённая в области $Z_{z'}$, соответствующей элементу $z' > \mathbf{0}$ такому, что

$$z' - K(z') = w' \geqslant \mathbf{0}. \tag{2}$$

Тогда уравнение (1) при любом w из области $Z_{w'}$ имеет решение, принадлежащее области $Z_{z'}$, которое может быть найдено процессом последовательных приближений, начиная с $z_0 = \mathbf{0}$.

Действительно, если $\mathbf{0} \leqslant w \leqslant w'$, то, полагая $V(z) = K(z) + rw$, видим, что соблюдены все условия теоремы 2.11 с заменой z' на rz'. В частности,

$$V(rz') = K(rz') + rw = rz' - rw' + rw \leqslant rz'.$$

Отсюда и заключаем о существовании решения z^*, удовлетворяющего условию $\mathbf{0} \leqslant z^* \leqslant rz'$, т. е. принадлежащего $Z_{z'}$.

Если дано любое (не положительное) w из области $Z_{w'}$, то, найдя решения уравнений вида (1) с правой частью, равной w_+ и w_-, получим как разность их и решение самого уравнения (1), также, очевидно, принадлежащее области $Z_{z'}$.

3.13. Замечание. Очевидно, главное решение z^* уравнения (1) зависит от w: $z^* = z^*(w)$; при этом оно является положительной и аддитивной функцией своего аргумента. Это явствует из того, что таково, очевидно, $z_0 = \mathbf{0}$ и эти свойства сохраняются при переходе к следующим приближениям по формуле $z_{n+1} = z_{n+1}(w) = K(z_n(w)) + w$.

Это значит, что для оператора $J - K$ в области $Z_{w'}$ определён правый обратный

$$z^*(w) = [J - K]^{-1},$$

положительный, аддитивный, а также, как мы сейчас покажем, — (o)-непрерывный.

Действительно, пусть $w_n \xrightarrow{(o)} w$ в $Z_{w'}$. Тогда последовательность w_n ограничена в $Z_{w'}$ и, следовательно, при подходящем r $|w_n| \leqslant rw'$. Поэтому, если рассматривать в уравнениях

$$z = K(z) + w_n$$

стоящий справа оператор, как зависящий от параметра n, то эти уравнения при всех n имеют общее мажорантное уравнение $z = K(z) + rw'$ и потому на основании теоремы 2.41 о непрерывности главного решения заключаем, что $\lim\limits_{n \to \infty} z^*(w_n) = z^*(w)$. Очевидно, что для оператора $V(z) = K(z) + w_n$ поставленные в 2.41 требования непрерывности удовлетворены.

Переходим теперь к случаю уравнений в пространствах (B_K).

3.14. Пусть K — положительная аддитивная операция, (o)-непрерывная в области $Z_{z'}$, где $z' \geqslant \mathbf{0}$ — такой элемент, что

$$z' - K(z') = w' \geqslant \mathbf{0}. \tag{2}$$

Пусть, далее, H — регулярная аддитивная операция, переводящая пространство X типа (B_K) (нормированное с помощью Z) в себя, определённая в $X_{z'}$ и имеющая K своей мажорантой: $|H| \leqslant K$. Тогда уравнение

$$x - H(x) = y \tag{3}$$

имеет решение для любого y из $X_{w'}$ и это решение x^* находится методом последовательных приближений; при этом, если $|y| \leqslant rw'$, то $|x^*| \leqslant rz'$.

Доказательство. Применим теорему существования 2.22, принимая $U(x) = H(x) + y$, $V(z) = K(z) + rw'$, если $|y| \leqslant rw'$. Все условия этой теоремы будут соблюдены. Действительно, для V

условия 1)—5) из 2.11, очевидно, удовлетворены, и V — мажоранта для U, так как

1) $\|U(\mathbf{0})\| = \|y\| \leqslant rw' = V(\mathbf{0})$;
2) $\|U(x+\Delta x) - U(x)\| = \|H(\Delta x)\| \leqslant K(\|\Delta x\|) =$
$= V(\|x\| + \|\Delta x\|) - V(\|x\|)$

(ср. замечание к 2.21). Применяя теорему 2.22, заключаем, что уравнение (3) обладает решением, причём для него $\|x^*\| \leqslant z^* \leqslant rz'$.

3.15. Замечание. Опять на основании вида формулы

$$x_{n+1}(y) = H(x_n(y)) + y,$$

связывающей последовательные приближения, убеждаемся в том, что все $x_n(y)$, а следовательно, и $x^*(y)$, суть аддитивные операции от y. При этом, если бы мы приняли $w' = \|y\|$, то мажорантность уравнения (2) по отношению к уравнению (3) сохранилась бы, что даёт нам:

$$\|x^*(y)\| \leqslant z^*(\|y\|),$$

т. е. главное решение $x^*(y)$ представляет собой регулярную операцию от y (с непрерывной мажорантой $z^*(w)$). Иначе можем сказать, что для операции $I - H$ в $X_{w'}$ существует обратная, которая имеет мажоранту

$$\|[I-H]^{-1}\| \leqslant [J-K]^{-1}.$$

3.16. В условиях теоремы 3.14 можно утверждать, что решение уравнения (3), принадлежащее подпространству X_{z^*} (где z^* обозначает главное решение уравнения (2)), единственно, и мы приходим к нему, взяв в качестве начального значения любой элемент из X_{z^*}. В частности, если решение уравнения (2) единственно в области $Z_{z'}$, то единственно решение уравнения (3) в области $X_{z'}$.

Это предложение получается сразу из 2.32, подобно тому, как 3.14 было получено из 2.22. Оно показывает, что операция $I - H$, если её рассматривать в X_{z^*}, имеет однозначную обратную $[I-H]^{-1} = x^*(y)$.

3.17. Если для аддитивной операции H выполнено условие

$$\|H(x)\| \leqslant \alpha\|x\|, \quad \text{где } 0 < \alpha < 1,$$

в частности, в случае нормированного пространства X, если $\|H\| < \alpha < 1$, то уравнение (3) имеет единственное решение при произвольном $y \in X$.

Это предложение получается непосредственно из 2.24 и 2.33, если принять $U(x) = H(x) + y$.

3.18. Если уравнение

$$x = H_\lambda(x) + y \quad (\lambda) \tag{4}$$

зависит от параметра λ и для него при всех λ мажорантным служит уравнение (2), т. е. $\|H_\lambda\| \leqslant K$, $\|y(\lambda)\| \leqslant w'$, и если при $\lambda \to \lambda_0$ существуют пределы:

$$(bk)\text{-}\lim_{\lambda \to \lambda_0} H_\lambda(x) = H(x) \quad \text{для } x \in X_{\rho'}, \quad bk\text{-}\lim_{\lambda \to \lambda_0} y(\lambda) = y,$$

то тогда и главное решение $x^*(\lambda)$ уравнения (4) стремится к главному решению предельного уравнения (3):

$$(bk)\text{-}\lim_{\lambda \to \lambda_0} x^*(\lambda) = x^*.$$

Это предложение следует непосредственно из теоремы 2.41, если принять в ней $U(x;\lambda) = H_\lambda(x) + y(\lambda)$, $V(z) = K(z) + w'$.

3.2. Теоремы о приближённом решении функциональных уравнений. Приведём две теоремы, позволяющие дать оценку точности приближённого решения, которое получено в результате решения некоторого уравнения, близкого к данному.

3.21. Пусть уравнение (3) заменяется приближённо более простым уравнением

$$x - H'(x) = y, \tag{5}$$

причём известна оценка для $\|H - H'\|$. Тогда, если x^* обозначает главное решение уравнения (3), а x' — уравнения (5), то имеем оценку

$$\|x^* - x'\| \leqslant (\|[I - H']^{-1}\| \|H - H'\|)(\|x^*\|).$$

Действительно, вычитая (3) из (5), имеем:

$$x' - x^* - H'(x') + H(x^*) = \mathbf{0},$$

или

$$x' - x^* - H'(x' - x^*) = (H' - H)(x^*),$$
$$x' - x^* = ([I - H']^{-1}[H' - H])(x^*),$$

что и приводит сразу к требуемой оценке.

Отметим частный случай её:

3.22. Если $(\|[I - H']^{-1}\| \|H - H'\|)(z) \leqslant \alpha z$ для $z \geqslant \mathbf{0}$, причём $0 < \alpha < 1$, то имеем оценку

$$\|x^* - x'\| \leqslant \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|x'\|,$$

причём существование решения уравнения (3) в этом случае из сделанных предположений следует само собой.

Для установления предложения в такой форме уравнение (3) следует переписать так:

$$x - H'(x) = y + (H - H')(x).$$

Тогда, полагая $\Gamma = [I - H']^{-1}$ (существование этой операции предполагается), имеем:

$$x = \Gamma(y) + \Gamma(H - H')(x).$$

Это уравнение, очевидно, равносильно первоначальному. Между тем, оно заведомо имеет решение в силу сделанного предположения, как это ясно, если применить 3.17 к $\Gamma(H - H')$ в качестве H. При этом на основании прежней оценки из 3.21 имеем:

$$|x - x'| \leqslant \alpha |x|,$$

откуда

$$|x| \leqslant |x'| + |x - x'| \leqslant |x'| + \alpha |x|, \quad |x| \leqslant \frac{1}{1-\alpha} |x'|$$

и, следовательно,

$$|x - x'| \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha} |x'|.$$

Другая теорема о приближённом решении относится специально к случаю полуупорядоченных пространств. Эта теорема устанавливает в известных предположениях возможность построения приближённых решений с избытком и с недостатком.

Итак, пусть X — K-пространство, H — регулярная операция класса H_0^0; $H = H^+ - H^-$. Допустим, что имеются две положительные операции $H' \leqslant H^+$ и $H'' \leqslant H^-$ простого вида, и пусть элементы $\tilde{y}$ и $\bar{y}$ таковы, что $\tilde{y} \leqslant y \leqslant \bar{y}$. Положим $R = |H| - H' - H'' = (H^+ - H') + (H^- - H'')$. Предположим, наконец, что уравнение

$$x - |H|(x) = |y| \tag{6}$$

имеет положительное решение x', для которого известна оценка $x' \leqslant x_1$.

Построим систему

$$\left.\begin{aligned} u - H'(u) + H''(v) &= \bar{y} + R(x_1), \\ v - H'(v) + H''(u) &= \tilde{y} - R(x_1). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Можно утверждать, что её решение и даёт приближения с избытком и с недостатком к главному решению уравнения (3); точнее, докажем следующее предложение.

3.23. Если уравнение

$$z - (H' + H'')(z) = w \tag{8}$$

имеет положительное решение, каково бы ни было $w \geqslant 0$, то и система (7) имеет решение $u = \bar{x}$, $v = \tilde{x}$, причём

$$\tilde{x} \leqslant x^* \leqslant \bar{x},$$

где x^* — главное решение уравнения (3).

Действительно, вычитая из первого уравнения системы (7) второе, а затем складывая их, придём к эквивалентной системе

$$\left.\begin{aligned}(u-v)-(H'+H'')(u-v)&=\bar{y}-\tilde{y}+2R(x_1),\\(u+v)-(H'-H'')(u+v)&=\bar{y}+\tilde{y}.\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

Каждое из этих уравнений можно рассматривать независимо от другого, как уравнение относительно разности $u-v$ или, соответственно, суммы $u+v$. Поскольку $|H'-H''|\leqslant H'+H''$, к обоим этим уравнениям применимы теоремы о существовании и единственности решения, если за мажорантное принимать уравнение (8). Единственность имеет место, так как она всегда обеспечена в области $X_{z*}\supset X_w$, а эта область ввиду произвольности w в данном случае совпадает с X.

Поэтому указанные решения могут быть получены методом последовательных приближений при любых начальных значениях.

Так как система (9) эквивалентна первоначальной системе (7), то последняя также имеет единственное решение $u=\bar{x}$, $v=\tilde{x}$ и, очевидно, применение метода последовательных приближений к ней допустимо. Примем здесь за начальные приближения $u_0=x_1$, $v_0=-x_1$. Дальнейшие приближения определяются так:

$$u_{n+1}=H'(u_n)-H''(v_n)+\bar{y}+R(x_1),$$

$$v_{n+1}=H'(v_n)-H''(u_n)+\tilde{y}-R(x_1),$$

и они сходятся к решениям системы: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\bar{x}$, $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\tilde{x}$.

Нам остаётся проверить неравенства

$$v_n\leqslant x^*\leqslant u_n.\tag{10}$$

Для $n=0$ оно верно, так как $v_0=-x_1\leqslant x^*\leqslant x_1=u_0$, ибо уравнение (6) мажорирует (3). Покажем возможность перехода от n к $n+1$. Имеем:

$$\begin{aligned}v_{n+1}&=H'(v_n)-H''(u_n)+\tilde{y}-R(x_1)\leqslant\\&\leqslant y+H^+(x^*)-H^-(x^*)+(H'-H^+)(x^*)+(H^--H'')(x^*)-R(x_1)=\\&=y+H(x^*)+(H'-H^++H^--H'')(x^*)-R(x_1);\end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned}(H'-H^++H^--H'')(x^*)&\leqslant|(H'-H^++H^--H'')(x^*)|=\\&=|R(x^*)|\leqslant R(|x^*|)\leqslant R(x_1),\end{aligned}$$

то заключаем, что

$$v_{n+1}\leqslant y+H(x^*)=x^*.$$

Совершенно аналогично получим, что $u_{n+1}\geqslant x^*$. Тем самым неравенства (10) установлены для всех n, а переходя к пределу при $n\to\infty$ получаем $\tilde{x}\leqslant x^*\leqslant\bar{x}$.

В следующих четырёх параграфах в качестве применений общей теории мы приводим доказательства ряда известных теорем анализа, а также некоторые новые факты.

§ 4. Некоторые применения к конечным алгебраическим системам

4.1. Оценки для наибольшего собственного значения матрицы.

4.11. Рассмотрим симметричную матрицу порядка n

$$\|a_{i,k}\|_{i,k=1,2,\ldots,n}. \tag{1}$$

Наряду с ней рассмотрим линейную систему

$$x-\lambda H(x)=y, \tag{2}$$

где $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — элемент пространства $X=R_n$, а H — линейная операция из X в X, определяемая матрицей $\|a_{i,k}\|$. Если рассматривать R_n как нормированное пространство с эвклидовым расстоянием $\|x\|=\left(\sum \xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, то согласно предложению 3.17 система уравнений (2) будет иметь единственное решение, если

$$|\lambda|\|H\|<1,$$

где $\|H\|$ есть норма линейной операции H.

С другой стороны, если λ_1 есть наибольшее собственное значение матрицы и x_1 — соответственный собственный вектор, то

$$\frac{1}{\lambda_1}H(x_1)=x_1,$$

т. е. для $\lambda=\frac{1}{\lambda_1}$ система (2) имеет заведомо не единственное решение. Это говорит о том, что непременно

$$\frac{1}{|\lambda_1|}\|H\|\geqslant 1,$$

т. е.

$$|\lambda_1|\leqslant\|H\| \text{ *)}. \tag{3}$$

Это и представляет оценку для наибольшего собственного значения матрицы. В частности, применяя для $\|H\|$ оценку, установленную в пункте 5.24 гл. VIII, находим:

$$|\lambda_1|\leqslant\left[\sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Считая пространство X нормированным по формуле $\|x\|=\max|\xi_i|$ (обозначим нормированное так X через m_n), аналогичными рассуждениями можем получить оценку

$$|\lambda_1|\leqslant\max_i\sum_k|a_{i,k}|. \tag{5}$$

---

*) В действительности мы имеем здесь знак равенства (5.24 гл. VIII), но это соображение скорее может рассматриваться как средство нахождения $\|H\|$, а не $|\lambda_1|$.

4.12. Для наибольшего собственного значения матрицы справедливы оценки (3), (4) и (5).

4.13. Оценки (4) и (5) (оценка (3) не эффективна) могут быть уточнены, если мы будем рассматривать X как пространство типа (B_K). Для этой цели разобьём координаты точки x на группы

$$x = (\xi_1, \ldots, \xi_{k_1}, \xi_{k_1+1}, \ldots, \xi_{k_2}, \ldots, \xi_{k_{l-1}+1}, \ldots, \xi_{k_l})$$

и введём нормировку

$$|x| = z = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l), \text{ где } \zeta_j = \Big[\sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j} \xi_i^2\Big]^{\frac{1}{2}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, l),$$

т. е. в качестве нормирующего пространства Z примем R_l, рассматриваемое как полуупорядоченное пространство. Рассмотрим $H_{j,s}$ — ящичные матрицы, на которые разбивается матрица H; так же будем обозначать и соответствующие отображения одного эвклидова пространства в другое, ими определяемые, а через $\|H_{j,s}\|$ — их нормы (под числом $\|H_{j,s}\|$ можно подразумевать и любые числа $\geqslant$ нормы $H_{j,s}$). Тогда имеем:

$$\Big[\sum_{i=k_{s-1}+1}^{k_s} \Big(\sum_{k=k_{j-1}+1}^{k_j} a_{i,k}\xi_k\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}} \leqslant \|H_{j,s}\| \Big[\sum_{k=k_{j-1}+1}^{k_j} \xi_k^2\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Используя это, оценим абстрактную норму результата операции H:

$$|H(x)| = \Big(\Big[\sum_{i=1}^{k_1}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\xi_k\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}, \ldots, \Big[\sum_{i=k_{l-1}+1}^{k_l}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\xi_k\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\Big).$$

Имеем (для $p = 1, 2, \ldots, l$):

$$\Big[\sum_{i=k_{p-1}+1}^{k_p}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\xi_k\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}} = \Big[\sum_{i=k_{p-1}+1}^{k_p}\Big(\sum_{s=1}^{l}\sum_{k=k_{s-1}+1}^{k_s} a_{i,k}\xi_k\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{l}\Big[\sum_{i=k_{p-1}+1}^{k_p}\Big(\sum_{k=k_{s-1}+1}^{k_s} a_{i,k}\xi_k\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\ {}^{*)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{l} \|H_{s,p}\| \Big[\sum_{k=k_{s-1}+1}^{k_s} \xi_k^2\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

---

*) Здесь мы использовали неравенство $\Big[\sum_i\Big(\sum_s b_{i,s}\Big)^2\Big]^{1/2} \leqslant \sum_s\Big(\sum_i b_{i,s}^2\Big)^{1/2}$ (Харди, Литтльвуд, Полиа [1], стр. 47) для $b_{i,s} = \sum_{k=k_{s-1}+1}^{k_s} a_{i,k}\xi_k$.

Отсюда

$$|H(x)| \leqslant \left(\sum_{s=1}^{l} \|H_{s,1}\|\zeta_s, \ldots, \sum_{s=1}^{l} \|H_{s,l}\|\zeta_s\right) = K(z) = K(|x|), \quad (6)$$

если в пространстве $Z = R_l$ определить операцию K, переводящую его в себя, формулами

$$w = K(z) = (w_1, w_2, \ldots, w_l),$$

где

$$w_j = \sum_{s=1}^{l} \|H_{s,j}\|\zeta_s \quad (j = 1, 2, \ldots, l).$$

Из неравенства (6) ясно, что $|H| \leqslant K$, если под $|H|$ понимать абстрактную норму H как операции из пространства X типа (B_K) в себя.

Уравнение $z - \lambda K(z) = w$ допускает однозначное решение и к нему сходится процесс последовательных приближений, если $|\lambda| < \frac{1}{\Lambda_1}$, где Λ_1 — наибольшее собственное значение матрицы K. При таком значении λ обеспечена сходимость процесса последовательных приближений и для уравнения $x - \lambda H(x) = y$. Отсюда можно заключить, что $|\lambda_1| \leqslant \Lambda_1$.

Итак:

4.14. Если H — некоторая симметричная матрица и мы определим нормы отдельных ящиков её $\|H_{j,s}\|$, а затем построим матрицу $K = \{\|H_{j,s}\|\}_{j,s=1,2\ldots,l}$, то будем иметь неравенство

$$|\lambda_1| \leqslant \Lambda_1,$$

если через λ_1 и соответственно Λ_1 обозначить наибольшие собственные значения матриц H и K.

Таким образом, оценка для собственного значения матрицы H любого порядка получается посредством нахождения (или оценок) норм матриц более низких порядков, для чего достаточно определить их собственные значения. В частности, в случае, если матрицы $H_{j,s}$ — также квадратные и симметричные, имеем $\|H_{j,s}\| = |\lambda_{j,s}|$, где $\lambda_{j,s}$ — наибольшее по модулю собственное значение матрицы $H_{j,s}$ (в случае несимметричности матрицы $H_{j,s}$ норма её выражается несколько сложнее).

4.15. В частности, прилагая сказанное к матрице H четвёртого порядка, получаем, что

$$K = \begin{Vmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} \end{Vmatrix},$$

где

$$\lambda_{1,1} = \frac{|a_{1,1} + a_{2,2}| + \sqrt{(a_{1,1} - a_{2,2})^2 + 4a_{1,2}a_{2,1}}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{2,1} = \frac{|a_{3,1} + a_{4,2}| + \sqrt{(a_{3,1} - a_{4,2})^2 + 4a_{3,2}a_{4,1}}}{2},$$

$$\lambda_{2,2} = \frac{|a_{3,3} + a_{4,4}| + \sqrt{(a_{3,3} - a_{4,4})^2 + 4a_{4,3}a_{3,4}}}{2},$$

Поэтому

$$\Lambda_1 = \frac{|\lambda_{1,1}+\lambda_{2,2}| + \sqrt{(\lambda_{1,1}-\lambda_{2,2})^2 + 4\lambda_{1,2}\lambda_{2,1}}}{2}.$$

Поясним изложенное примером.

4.16. Пример. Рассмотрим матрицу

$$H = \left\| \begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hdashline 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right\|.$$

Матрица K, очевидно, будет

$$K = \left\| \begin{array}{cc} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1+\sqrt{5} \end{array} \right\|$$

и, следовательно,

$$\Lambda_1 = \frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{5}+\sqrt{16-2\sqrt{2}+2\sqrt{5}-2\sqrt{10}}}{2} = 4{,}0073.$$

Это даёт оценку

$$|\lambda_1| \leqslant 4{,}0073.$$

Точное значение λ_1 в этом случае есть $\lambda_1 = -3{,}78801$. Если бы мы воспользовались формулой (4), то получили бы гораздо более грубую оценку $|\lambda_1| \leqslant 4{,}899$.

Эти оценки могут быть особенно полезны при буквенных элементах матрицы.

4.2. Применение к системам нелинейных уравнений. Приведём одну теорему о существовании решения нелинейной системы уравнений, которую мы получим здесь также на основании общих теорем предыдущих параграфов.

4.21. Пусть:

1) $f_i(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — непрерывные возрастающие функции своих аргументов;

2) $f_i(0, 0, \ldots, 0) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

3) $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{1}{t} f_i(t, t, \ldots, t) = 0$ $\qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Тогда система уравнений

$$\zeta_i = f_i(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) + a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

имеет решение, каковы бы ни были $a_i \geqslant 0$.

Доказательство. Примем $Z = R_n$ и через z' обозначим вектор $z' = (H, H, \ldots, H)$, где H — столь большое положительное число, что

$$H - f_i(H, H, \ldots, H) - a_i > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Такой выбор H возможен в силу условия 3). Тогда, если принять

$$V(z) = V(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) = \{f_i(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) + a_i\}_{i=1,2,\ldots,n} \in Z,$$

то будут соблюдены все условия теоремы 2.11, и, применяя её, приходим к нужному заключению.

Теми же теоремами можно воспользоваться для получения известной теоремы анализа о существовании и непрерывности неявной функции, а также для установления сходимости процесса Ньютона для решения систем нелинейных уравнений.

§ 5. Применения к бесконечным системам уравнений

5.1. Класс регулярных систем. Рассмотрим применение общей теории к исследованию некоторого класса бесконечных систем линейных уравнений

$$\xi_i - \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,\,k}\xi_k = \eta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

5.11. Систему (1) будем называть *регулярной*, если выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,\,k}| = 1 - \rho_i < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Если при этом $\rho_i \geqslant \theta > 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, то систему (1) будем называть *вполне регулярной*.

5.12. Для того чтобы применить к этому классу систем развитую выше теорию, возьмём в качестве пространства $X = Z$ пространство m ограниченных последовательностей, рассматриваемое как полуупорядоченное.

В данном случае для элемента $x = \{\xi_i\} \in X$ будет $|x| = |x| = \{|\xi_i|\}$. Определим операции H и K бесконечными матрицами $\|a_{i,\,k}\|$ и соответственно $\||a_{i,\,k}|\|$. Точнее, для $x = \{\xi_i\}$ и $z = \{\zeta_i\}$

$$H(x) = \{\eta_i\}, \text{ где } \eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,\,k}\xi_k,$$

$$K(z) = \{w_i\}, \text{ где } w_i = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,\,k}|\zeta_k.$$

Нетрудно проверить, используя условие (2), что эти операции определены в m и переводят m в себя. При этом операция K служит мажорантой для H, так как

$$|H(x)| = \left\{\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,\,k}\xi_k\right|\right\} \leqslant \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,\,k}|\,|\xi_k|\right\} = K(|x|).$$

Легко устанавливается также (o)-непрерывность операции K. Действительно, если $x_n = \{\xi_i^{(n)}\} \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$ в m, то 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и 2) последовательность x_n ограничена в m, что означает, что $|\xi_i^{(n)}| \leqslant C$. Тогда при каждом i

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,\,k}|\,\xi_k^{(n)}\right| \leqslant C, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,\,k}|\,\xi_k^{(n)} = 0; \tag{3}$$

последнее — так как каждый член ряда при $n \to \infty$ стремится к нулю и ряд сходится равномерно относительно n, ибо мажорируется рядом $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}| C$. Установленные соотношения (3) и означают, что $K(x_n) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$ в m.

Систему уравнений (1) можно рассматривать как одно уравнение

$$x - H(x) = y \tag{4}$$

в пространстве $X = m$, если под H понимать определённую выше операцию и считать $y = \{\eta_i\}$. Если свободные члены удовлетворяют условию

$$|\eta_i| \leqslant r\rho_i, \tag{5}$$

то, полагая $w' = \{r\rho_i\}$, получим для него мажорантное уравнение

$$z - K(z) = w', \text{ т. е. } \quad \zeta_i - \sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}| \zeta_k = r\rho_i \quad (i = 1, 2 \ldots). \tag{6}$$

Это мажорантное уравнение имеет положительное решение $z' = \{r\} = (r, r, \ldots)$. Действительно,

$$z' - K(z') = \{r - \sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}| r\} = \{r\rho_i\} = w'.$$

Поэтому имеются все данные для применения общей теории, что приводит к следующим заключениям.

5.13. a) Если свободные члены регулярной системы (1) удовлетворяют условию (5), то эта система имеет ограниченное решение

$$|\xi_i^*| \leqslant r,$$

которое может быть найдено методом последовательных приближений.

b) Если $rz^* = \{r\zeta_i^*\}$ — главное решение системы (6), то решение системы (1), удовлетворяющее условию $|\xi_i| \leqslant C\zeta_i^*$ ($i = 1, 2, \ldots$; C — постоянная), единственно. В частности, если последовательность $\{\zeta_i^*\}$ ограничена снизу, $\zeta_i^* \geqslant \alpha > 0$, то системы (1) и (6) имеют единственное ограниченное решение (система (6) — решение $z' = \{r\}$), которое может быть найдено последовательными приближениями, начиная с любой ограниченной последовательности начальных значений.

c) Главное решение системы (1) при условии (5) может быть получено также методом редукции, как предельное для конечной системы

$$\overset{n}{\xi}_i - \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\overset{n}{\xi}_k = \eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

т. е.

$$\xi_i^* = \lim_{n\to\infty} \overset{n}{\xi}_i.$$

Действительно,

a) получается из предложения 3.14;

b) следует сразу из 3.16;

c) получается применением 3.18, если заменить конечную систему (7) эквивалентной бесконечной:

$$a'_{i,k} = a_{i,k},\ \eta'_i = \eta_i \text{ для } i \leqslant n;$$

$$\xi_i^n - \sum_{k=1}^{\infty} a'_{i,k}\xi_k^n = \eta'_i,\ \ a'_{i,k} = 0,\ \eta'_i = 0 \text{ для } i > n,$$

а затем рассматривать эту бесконечную систему как зависящую от параметра n. Тогда по 3.18 главное решение предельной системы и будет пределом при $n \to \infty$ решений систем последовательности.

Как следствие отсюда, для случая вполне регулярной системы получаем более просто формулируемое предложение.

5.14. Вполне регулярная система при любых ограниченных свободных членах имеет всегда ограниченное решение и притом единственное. Это решение может быть получено методом последовательных приближений при любых ограниченных начальных значениях, а также методом редукции.

Действительно, так как в этом случае $\rho_i \geqslant \theta > 0$, то условие (5) означает просто ограниченность последовательности $\{\eta_i\}$.

Далее, главное решение $\{\zeta_i^*\}$ системы (6) в этом случае непременно ограничено снизу положительным числом. Действительно, так как $\zeta_i^* \geqslant 0$, то непосредственно ясно, что

$$\zeta_i^* \geqslant r\rho_i \geqslant r\theta,$$

а тогда из 5.13b) сразу следует единственность решения и сходимость при других начальных значениях.

5.15. Отметим, что для не вполне регулярной системы фактически возможно наличие двух ограниченных решений. Так, система

$$\xi_i = \left[1 - \frac{1}{(i+1)^2}\right]\xi_{i+1} + \frac{1}{(i+1)^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

имеет два ограниченных решения

$$\xi_i = 1 \quad \text{и} \quad \xi_i = \frac{1}{i+1}.$$

Используем также наши заключения о регулярных системах для анализа одного класса систем, более общего, чем вполне регулярные.

5.16. Пусть для системы (1) выполнены при некотором N следующие условия:

$$1)\quad \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_{i,k}| < +\infty \qquad i=1,2,\ldots,N,$$

$$2)\quad \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_{i,k}| \leqslant 1-\theta < 1 \qquad i=N+1,\ N+2,\ldots$$

Анализ таких систем, как легко видеть, сводится к анализу конечной системы.

Действительно, перепишем уравнения данной системы, начиная с $(N+1)$-го, в виде

$$\xi_i = \sum_{k=N+1}^{\infty} a_{i,k}\xi_k + \left(\eta_i + \sum_{k=1}^{N} a_{i,k}\xi_k\right) \qquad (i=N+1,\ N+2,\ldots).$$

Это — вполне регулярная система. На основании 5.14 из неё возможно выразить все неизвестные $\xi_{N+1}, \xi_{N+2}, \ldots$ линейно через $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$. Подставив эти выражения в N первых уравнений системы (1), получим относительно неизвестных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ конечную систему из N уравнений, к которой, собственно, и сводится исследование данной бесконечной системы. Каждое решение указанной конечной системы порождает ограниченное решение бесконечной системы (1) и обратно. Опираясь на это, можно получить, что для бесконечных систем, удовлетворяющих условиям 1) — 2), верен ряд (бездетерминантных) теорем, подобных теоремам о конечных системах. Например, такая система может иметь не более конечного числа линейно независимых решений если соответствующая однородная система не имеет ограниченных решений отличных от нулевого, то данная система имеет решения при любых ограниченных свободных членах и обратно.

5.17. В заключение укажем, что теорема 3.23 о приближённом решении уравнений в применении к регулярным системам даёт следующий способ построения приближений с недостатком и с избытком. Именно решения $\overline{\xi}_i$ и $\widetilde{\xi}_i$ системы

$$\begin{aligned} \widetilde{\xi}_i - \sum_{k=1}^{n}{}^{+} a_{i,k}\widetilde{\xi}_k + \sum_{k=1}^{n}{}^{-} a_{i,k}\overline{\xi}_k &= \eta_i - r\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_{i,k}|, \\ \overline{\xi}_i - \sum_{k=1}^{n}{}^{+} a_{i,k}\overline{\xi}_k + \sum_{k=1}^{n}{}^{-} a_{i,k}\widetilde{\xi}_k &= \eta_i + r\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_{i,k}| \end{aligned} \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

(где плюс при знаке суммы указывает, что должны быть взяты лишь слагаемые, в которых множитель $a_{i,k} \geqslant 0$, а минус — что лишь слагаемые с $a_{i,k} < 0$) представляют приближения с недостатком и с избытком для первых n неизвестных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ решений системы (1).

5.2. Другой класс линейных бесконечных систем. Рассмотрим опять бесконечную систему вида

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\xi_k = \eta_i \qquad (i=1,\ 2,\ldots). \quad (1)$$

Однако будем рассматривать $x=\{\xi_i\}$ как элемент нормированного пространства l^p $(p>1)$. Тогда, если для η_i выполнено условие

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^p<+\infty, \tag{8}$$

а для матрицы $\|a_{i,k}\|$ выполнено условие

$$L=\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{i,k}|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1}\right]^{\frac{1}{p}}<+\infty, \tag{9}$$

то данную систему можно рассматривать как уравнение вида

$$x-H(x)=y$$

в пространстве l^p. Действительно, в этом случае операция H, определяемая матрицей $\|a_{i,k}\|$, есть операция типа H_b^o и тем более H_b^b из l^p в l^p, причём норма её

$$\|H\|_b\leqslant\|H\|_b^v=L<+\infty$$

(см. 5.33 гл. VIII). В частности, если $L<1$, то мы находимся в условиях предложения 3.17 и, применяя его, приходим к следующему заключению.

5.21. Если для бесконечной системы (1) выполнены условия

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^p<+\infty,\quad \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{i,k}|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1}<1, \tag{10}$$

то эта система уравнений имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p<+\infty$ и могущее быть найденным методом последовательных приближений, начиная с любой системы начальных значений из l^p, а также может быть получено методом приведения.

В случае, когда $L<+\infty$, но условие $L<1$ не выполнено, можно поступить подобно тому, как было сделано в 5.16. Именно, можно найти такое N, что будем иметь:

$$\sum_{i=N+1}^{\infty}\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}|a_{i,k}|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p}<1.$$

Тогда к системе уравнений, полученной из (1) отбрасыванием первых N уравнений, если в ней рассматривать в качестве неизвестных $\xi_{N+1}, \xi_{N+2}, \ldots$, применимо предложение 5.21, что позволяет выразить все неизвестные ξ_{N+1}, $\xi_{N+2}, \ldots$ через $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ (при этом существенно, что из условия $L<+\infty$ вытекает сходимость рядов $\sum_{i=1}^{\infty}|a_{i,k}|^{\frac{p}{p-1}}$ для $k=1, 2, \ldots, N$). Тогда первые N уравнений системы (1) позволяют построить конечную систему относи-

тельно неизвестных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$, к анализу которой и приводится исследование бесконечной системы (1). Это приводит к следующему заключению.

5.22. При условиях (8) и (9) бесконечная система (1) может иметь не более конечного числа линейно независимых решений (из l^p) и для неё верны также другие бездетерминантные положения, упомянутые в 5.16.

Отметим, в частности, что если $p=2$, то условия (8) и (9) записываются так:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i^2 < +\infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}^2 < +\infty.$$

При этих условиях, следовательно, свойства бесконечной системы (1), рассматриваемой в l^2, подобны свойствам конечной системы.

5.3. Один класс нелинейных бесконечных систем уравнений.

5.31. Рассмотрим две системы уравнений

$$\xi_i = b_i + \sum_{k_1=1}^{\infty} c_{k_1}^{(i)} \xi_{k_1} + \sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} c_{k_1, k_2}^{(i)} \xi_{k_1} \xi_{k_2} + \ldots = f_i(\xi_1, \xi_2, \ldots) \tag{11}$$

и

$$\zeta_i = B_i + \sum_{k_1=1}^{\infty} C_{k_1}^{(i)} \zeta_{k_1} + \sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} C_{k_1, k_2}^{(i)} \zeta_{k_1} \zeta_{k_2} + \ldots = F_i(\zeta_1, \zeta_2, \ldots) \tag{12}$$

$(i = 1, 2 \ldots)$.

Будем предполагать, что вторая система мажорирует первую, т. е. при всех i и $k_1, k_2, \ldots, k_j$

$$|b_i| \leqslant B_i, \quad |c_{k_1, k_2, \ldots, k_j}^{(i)}| \leqslant C_{k_1, k_2, \ldots, k_j}^{(i)}. \tag{13}$$

Предположим, далее, что вторая система имеет положительное решение $z' = (\zeta_1', \zeta_2', \ldots)$. Тогда эти две системы мы можем рассматривать как уравнения (3) и (1) § 2 в K-пространстве s всех бесконечных последовательностей ($X = Z = s$). При этом будут соблюдены все условия теоремы 2.22.

Действительно, если под $V(z)$ понимать операцию, сопоставляющую последовательности $z = \{\zeta_i\}$ последовательность $V(z) = \{F_i(\zeta_1, \zeta_2, \ldots)\}$, то эта операция, будучи определена при $z = z'$, определена для $\mathbf{0} \leqslant z \leqslant z'$. Она (o)-непрерывна в той же области, так как ряды, определяющие функции $F_i(\zeta_1, \zeta_2, \ldots)$, сходятся равномерно.

Что касается операции U, определяемой аналогичным образом с заменой F_i на f_i, то она, очевидно, имеет смысл при $|x| \leqslant z'$. Далее,

$$|U(\mathbf{0})| = \{|b_i|\} \leqslant \{B_i\} = V(\mathbf{0}).$$

Наконец, нужно показать, что если $|x| \leqslant z$, $|\Delta x| \leqslant \Delta z$ и $z + \Delta z \leqslant z'$ то

$$|U(x + \Delta x) - U(x)| \leqslant V(z + \Delta z) - V(z).$$

Иначе говоря, нужно показать, что если $|\xi_k| \leqslant \zeta_k$ и $|\Delta\xi_k| \leqslant \Delta\zeta_k$, то

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k_1, \ldots, k_j=1}^{\infty} c^{(i)}_{k_1, \ldots, k_j} [(\xi_{k_1} + \Delta\xi_{k_1}) \ldots (\xi_{k_j} + \Delta\xi_{k_j}) - \xi_{k_1} \ldots \xi_{k_j}]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k_1, \ldots, k_j=1}^{\infty} C^{(i)}_{k_1, \ldots, k_j} [(\zeta_{k_1} + \Delta\zeta_{k_1}) \ldots (\zeta_{k_j} + \Delta\zeta_{k_j}) - \zeta_{k_1} \ldots \zeta_{k_j}].$$

Но последнее неравенство верно, так как по раскрытии скобок каждое слагаемое слева не превосходит по модулю соответствующего слагаемого в правой части.

Таким образом, соблюдены все условия предложения 2.22. Используя его, а также 2.31 и 2.41, приходим к следующему заключению:

5.32. a) Система (11) имеет решение, удовлетворяющее условию

$$|\xi_i| \leqslant \zeta'_i \quad (i = 1, 2, \ldots); \tag{14}$$

это решение может быть найдено методом последовательных приближений.

b) Если ζ'_i — главное решение системы (12), то решение системы (11), удовлетворяющее условию (14), единственно.

c) Если коэффициенты системы (11) непрерывно зависят от некоторого параметра λ: $b_i = b_i(\lambda)$, $c^{(i)}_{k_1, k_2, \ldots k_j} = c^{(i)}_{k_1, k_2, \ldots, k_j}(\lambda)$, и для всех значений система (12) остаётся мажорантной для (11), то если $\{\xi_i(\lambda)\}$ — главное решение системы (11), функции ξ_i непрерывны.

Из теоремы 2.41 можно было бы (подобно 5.13c)) сделать также заключение о том, что главное решение системы (11) может быть получено как предел (при $N \to \infty$) главных решений конечных систем, например, следующего вида:

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k_1, \ldots, k_j=1}^{N} c^{(i)}_{k_1, \ldots, k_j} \xi_{k_1} \ldots \xi_{k_j} + b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Наконец, укажем ещё одно следствие из 5.32.

5.33. Если существуют такие числа a и b, что

$$F_i(a, b, b, \ldots) \leqslant M \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

то система уравнений

$$\xi_i = \lambda f_i(\lambda, \xi_1, \xi_2, \ldots) \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

имеет решение при $|\lambda| \leqslant \lambda_0 = \operatorname{Min}\left(a, \frac{b}{M}\right)$; это решение непрерывно зависит от λ и обращается в $\mathbf{0}$ при $\lambda = 0$.

Действительно, рассматриваемая система есть система типа (11) с коэффициентами, непрерывно зависящими от λ, для которой мажорантной является система

$$\zeta_i = \lambda_0 F_i(\lambda_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots) + [b - \lambda_0 F_i(\lambda_0, b, b, \ldots)]$$

(выражение в квадратных скобках $\geqslant 0$), имеющая очевидное положительное решение $\zeta_1 = \zeta_2 = \ldots = b$. После этого остаётся лишь применить теорему 5.32.

§ 6. Применения к интегральным уравнениям

6.1. Условия существования решения линейного уравнения. Начнём с установления сходимости метода последовательных приближений для уравнения Фредгольма.

6.11. Если дано интегральное уравнение второго рода

$$x(s)-\lambda\int_a^b H(s,\ t)\,x(t)\,dt=f(s), \tag{1}$$

где $H(s,\ t)$ — измеримая функция и для λ выполнено одно из условий:

a) $$|\lambda|\sup_t\int_a^b|H(s,\ t)|\,df<1,\quad |f(s)|\leqslant C; \tag{2}$$

b) $$|\lambda|\left[\int_a^b\int_a^b H^2(s,\ t)\,ds\,dt\right]^{\frac{1}{2}}<1,\quad \int_a^b f^2(s)\,ds<+\infty, \tag{3}$$

то интегральное уравнение (1) имеет решение, которое может быть найдено способом последовательных приближений. В случае, если $H(s,\ t)$ ограничена, последние равномерно сходятся к решению.

Действительно, интегральную операцию

$$y(s)=\int_a^b H(s,\ t)\,x(t)\,dt;\quad y=H(x)$$

можно рассматривать как линейную операцию из X в X, если под X понимать в случае a) нормированное пространство L суммируемых функций и в случае b) — нормированное пространство L^2.

Благодаря известному нам выражению нормы для операций из L в L (3.16 гл. VIII) из условия a) сразу следует, что

$$|\lambda|\,\|H\|<1.$$

Для операций из L^2 в L^2 имеем:

$$\|y\|=\left[\int_a^b\left|\int_a^b H(s,\ t)\,x(t)\,dt\right|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\left[\int_a^b ds\int_a^b|H(s,\ t)|^2\,dt\cdot\int_a^b|x(t)|^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left[\int_a^b\int_a^b H^2(s,\ t)\,ds\,dt\right]^{\frac{1}{2}}\|x\|,$$

а тогда из условия b) тоже следует, что

$$|\lambda|\|H\| < 1\ ^{*)}.$$

Но при соблюдении такого неравенства, как это вытекает из 3.37, последовательные приближения (b)-сходятся к решению в L и L^2 соответственно. Но если $|H(s, t)| \leqslant C$ и $x_n(s)$ — приближение к $x(s)$, то имеем:

$$|x(s) - x_{n+1}(s)| = \left|\int_a^b H(s, t)[x(t) - x_n(t)]\,dt\right| \leqslant C_1\|x - x_n\|,$$

откуда ясна и равномерная сходимость.

6.12. Полезно отметить, что неравенства a) и b) дают тем самым и оценки сверху для $|\lambda_1|$ — модуля первого (наименьшего) собственного значения.

Теперь приведём для случая бесконечного промежутка теорему, устанавливающую условия существования ограниченного решения.

6.13. Если

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H(s, t)|\,ds = h(t) < 1,$$

то интегральное уравнение

$$x(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} H(s, t)\,x(s)\,ds = f(t),$$

где $|f(t)| \leqslant C[1 - h(t)]$, имеет ограниченное решение $|x^*(t)| \leqslant C$.

Это — непосредственное следствие теоремы 3.14, применённой к K-пространству функций, ограниченных в $(-\infty, +\infty)$, если в качестве мажорантного взять уравнение

$$z(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} |H(s, t)|\,z(s)\,ds = C[1 - h(t)],$$

имеющее положительное решение $z(s) = C$.

6.2. Уточнение области сходимости последовательных приближений. Применение более точной нормировки позволяет уточнить

---

*) Для операций из L^2 в L^2 неравенство

$$\|H\| \leqslant \left[\int_a^b\int_a^b H^2(s, t)\,ds\,dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

вытекает также из 6.33 гл. VIII.

границы области сходимости способа последовательных приближений по сравнению с указанными в 6.1.

Применим нормировку, указанную в примере 1.21:

$$|x| = (\max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} |x(t)|, \ldots, \max_{t_{n-1} \leqslant t \leqslant t_n} |x(t)|);$$

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b.$$

Тогда, если в соответствии с ядром H интегрального уравнения (1) рассмотреть матрицу $K = \| c_{i,k} \|$ с элементами

$$c_{i,k} = (t_k - t_{k-1}) M_{i,k}; \quad M_{i,k} = \max_{\substack{t_{i-1} \leqslant s \leqslant t_i \\ t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k}} |H(s, t)|,$$

а также соответствующую ей операцию K из $Z = R_n$ в себя, то уравнение

$$z - |\lambda| K(z) = \|f\| \tag{4}$$

будет мажорантным для интегрального уравнения (1).

Действительно,

$$\|H(x)\| = \left\{ \max_{t_{i-1} \leqslant s \leqslant t_i} \left| \int_a^b H(s, t) x(t)\, dt \right| \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) M_{i,k} \max_{t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k} |x(t)| \right\} = K(\|x\|),$$

т. е. операция K есть мажоранта для H, ч. и тр. д.

Следовательно, если уравнение (4), представляющее собой конечную алгебраическую систему, имеет положительное решение, то все условия теоремы 3.14 выполнены, что позволяет применить её заключения. Итак:

6.21. Если система уравнений

$$\zeta_i - |\lambda| \sum_{k=1}^{n} c_{i,k} \zeta_k = \eta_i, \tag{5}$$

где $c_{i,k}$ определены, как выше, а

$$\eta_i = \max_{t_{i-1} \leqslant s \leqslant t_i} |f(s)|$$

имеет при данном λ положительное решение, то при данном значении λ для интегрального уравнения (1) применим способ последовательных приближений.

В частности, если через Λ_1 обозначить наибольшее по модулю собственное значение матрицы K, а через λ_1 — наименьшее собственное значение интегрального уравнения, то имеем оценку

$$|\lambda_1| \geqslant \frac{1}{\Lambda_1}. \tag{6}$$

Первая часть утверждения 6.21 доказана выше. Далее, если $|\lambda| < \frac{1}{\Lambda_1}$, то процесс последовательных приближений для мажорантного уравнения сходится, но тогда он сходится и для интегрального уравнения (1), следовательно, первое собственное его значение находится непременно за пределами области $|\lambda| < \frac{1}{\Lambda_1}$, что и устанавливается неравенством (6).

Аналогичным образом, если ввести в X нормировку, подобную приведённой в 1.22:

$$\|x\| = \left(\left[\int_{t_0}^{t_1} x^2(t)\,dt\right]^{\frac{1}{2}}, \ldots, \left[\int_{t_{n-1}}^{t_n} x^2(t)\,dt\right]^{\frac{1}{2}}\right) \in Z = R_n,$$

то матрицу K придётся определить так:

$$\overline{K} = \left\| \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{t_{k-1}}^{t_k} H^2(s, t)\,ds\,dt\right]^{\frac{1}{2}} \right\|, \tag{7}$$

и в этом случае можно получить аналогичное заключение:

6.22. Если $\overline{\Lambda}_1$ — наибольшее собственное значение матрицы $\overline{K}$, то для первого собственного значения интегрального уравнения (1) имеем оценку снизу

$$|\lambda_1| \geqslant \frac{1}{\Lambda_1}.$$

Эта оценка, так же, как и указанная в 6.21, более точна, чем полученная в 6.11 посредством применения обычных норм. Относительно этих оценок можно показать, что при $n \to \infty$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \to 0$ этот способ позволяет сколь угодно точно подойти к значению λ_1.

Проиллюстрируем применение второй из приведённых оценок примером.

6.23. Пример. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(s) - \lambda \int_0^1 H(s, t)\,x(t)\,dt = f(s),$$

где ядро $H(s, t)$ — функция Грина для уравнения струны с закреплёнными концами:

$$H(s, t) = \begin{cases} s(1-t) & \text{при } s \leqslant t, \\ t(1-s) & \text{при } s > t. \end{cases}$$

Тогда, если определить матрицу $\bar{K}$, как указано выше, принимая $n=5$ и $t_i=\frac{1}{5}i$ $(i=0, 1, \ldots, 5)$, то матрица $\bar{K}$ будет

$$\bar{K}=0{,}1\cdot\begin{Vmatrix} 0{,}137275 & 0{,}162207 & 0{,}116237 & 0{,}070553 & 0{,}026667 \\ 0{,}162207 & 0{,}357274 & 0{,}307535 & 0{,}186667 & 0{,}070553 \\ 0{,}116237 & 0{,}307535 & 0{,}435329 & 0{,}307535 & 0{,}116237 \\ 0{,}070553 & 0{,}186667 & 0{,}307535 & 0{,}357274 & 0{,}162207 \\ 0{,}026667 & 0{,}070553 & 0{,}116237 & 0{,}162207 & 0{,}137275 \end{Vmatrix}.$$

Решая соответствующее вековое уравнение, находим, что наибольшее собственное значение его

$$\bar{\Lambda}_1=0{,}1\cdot 1{,}0216=0{,}10216.$$

Это даёт для наименьшего собственного значения интегрального уравнения оценку

$$|\lambda_1|\geqslant\frac{1}{0{,}10216}=9{,}7886,$$

которая меньше чем на 1% отличается от точного его значения $\lambda_1=\pi^2=$ $=9{,}86960$.

Аналогичные рассмотрения могут быть применены и к системе интегральных уравнений.

Рассмотрим систему

$$\xi_i(t)-\sum_{j=1}^{n}\int_{a_j}^{b_j}H_{i,j}(s,\ t)\xi_j(s)\,ds=\eta_i(t) \tag{8}$$

$$(a_i\leqslant t\leqslant b_i;\ i=1,\ 2,\ldots,\ n).$$

Введём для функции $\xi_i(t)$ норму $\|\xi_i\|=\sup\limits_{a_i\leqslant t\leqslant b_i}|\xi_i(t)|$, а для системы функций $x=[\xi_1(t),\ \xi_2(t),\ldots,\ \xi_n(t)]$ — абстрактную норму

$$|x|=(\|\xi_1\|,\ \|\xi_2\|,\ldots,\ \|\xi_n\|)\in Z=R_n.$$

Тогда, если положить

$$\sup_{a_i\leqslant t\leqslant b_i}\int_{a_i}^{b_i}|H_{i,j}(s,t)|\,ds=c_{i,j},$$

то для данной системы интегральных уравнений мажорантной будет алгебраическая система

$$\zeta_i-\sum_{j=1}^{n}c_{i,j}\zeta_j=\|\eta_i\|\qquad(i=1,\ 2,\ldots,\ n). \tag{9}$$

Отсюда

6.24. Если алгебраическая система (9) имеет положительное решение, то система интегральных уравнений (8) также имеет решение.

Заметим, что выше при построении более точных границ для собственных значений одного интегрального уравнения мы, по существу, превращали его в систему интегральных уравнений, разбивая интервал интегрирования на части.

6.3. Приближённое решение интегрального уравнения. Рассмотрим применение к интегральному уравнению общей теоремы 3.22 о приближённом решении.

Пусть интегральное уравнение

$$x(s)-\lambda\int_a^b H(s,\ t)\,x(t)\,dt=f(s) \tag{1}$$

заменяется приближённо интегральным уравнением с более простым ядром

$$\tilde{x}(s)-\lambda\int_a^b h(s,t)\,\tilde{x}(t)\,dt=f(s); \tag{10}$$

при этом ядро h близко к первоначальному, точнее

$$\sup_s\int_a^b |H(s,\ t)-h(s,\ t)|\,dt<\varepsilon. \tag{11}$$

Будем предполагать, что для этого более простого уравнения нам известна резольвента, так что решение его выражается в виде

$$\tilde{x}(s)=f(s)+\lambda\int_a^b \gamma(s,\ t,\ \lambda)\,f(t)\,dt. \tag{12}$$

Если мы теперь воспользуемся теоремой 3.22, приняв нормировку пространства C, то для нормы операции Γ, дающей решение уравнения (10) $\tilde{x}=\Gamma(f)$, имеем оценку (см. (12)).

$$\|\tilde{x}\|=\|\Gamma(f)\|\leqslant\|f\|+|\lambda|\,\|f\|\sup_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b|\gamma(s,\ t,\ \lambda)|\,dt=(1+|\lambda|\,B)\|f\|,$$

откуда $\|\Gamma\|\leqslant 1+|\lambda|\,B$. Если же через H и H' обозначить интегральные операции, определяемые ядрами $H(s,\ t)$ и $h(s,\ t)$, то в силу

условия (11) имеем $\|H-H'\|<\varepsilon$. Поэтому в данном случае можно принять $\alpha=\varepsilon(1+|\lambda|B)$, что даёт на основании теоремы 3.22 оценку

$$\|x-\tilde{x}\|\leqslant\frac{\varepsilon(1+|\lambda|B)}{1-\varepsilon(1+|\lambda|B)}\|\tilde{x}\|, \tag{13}$$

верную, если $\alpha<1$. Итак, приходим к следующему предложению.

6.31. Если близость ядер точного и приближённого уравнений определяется неравенством (11), причём приближённое уравнение разрешимо и для его резольвенты известна оценка

$$\int_a^b|\gamma(s,\ t,\ \lambda)|\,dt\leqslant B\quad(a\leqslant s\leqslant b),$$

а также выполнено условие

$$\alpha=\varepsilon(1+|\lambda|B)<1,$$

то точное уравнение (1) при данном λ разрешимо, и близость приближённого решения к точному указывается неравенством (13).

Эта оценка удобна тем, что в ней используются данные, относящиеся только к приближённому уравнению. Используя для X вместо нормировки пространства C нормировку пространства L или L^2, можно получить другие оценки.

Теорема 3.23 также может быть применена для приближённого решения интегрального уравнения. Она даёт средство построить двусторонние приближения, между которыми заключено решение уравнения.

6.4. Нелинейное интегральное уравнение. Применяя теоремы § 2 к случаю нелинейных интегральных уравнений, можно получить различные теоремы о них, из которых приведём только одну.

6.41. *Пусть функция $K(s,\ t,\ u)$ определена и непрерывна для значений s и t из области G и для таких u, что $|u|\leqslant z_0(s)$. Пусть, далее, существует функция $\Phi(s,\ t,\ u)$, определённая и непрерывная в той же области, что и K, и такая, что удовлетворены неравенства:*

1) $|K(s,\ t,\ 0)|\leqslant\Phi(s,\ t,\ 0)$;

2) $\Phi'_u(s,\ t,\ u)\geqslant 0$; $\Phi''_{u^2}(s,\ t,\ u)\geqslant 0$;

3) $|K'_u(s,\ t,\ u)|\leqslant\Phi'_u(s,\ t,\ |u|)$ *для почти всех u, если* $|u|\leqslant z_0(s)$.

Тогда, если

$$z_0(s)\leqslant\int_G\Phi(s,\ t,\ z_0(t))\,dt, \tag{14}$$

то интегральное уравнение

$$x(s)=\int_G K(s,\ t,\ x(t))\,dt \tag{15}$$

имеет решение, причём $|x(s)|\leqslant z_0(s)$. *При этом если у уравнения*

$$z(s)=\int_G \Phi(s,\ t,\ z(t))\,dt \tag{16}$$

решение, удовлетворяющее условию $z(s)\leqslant z_0(s)$, *единственно, то единственно и решение уравнения* (15), *удовлетворяющее условию* $|x(s)|\leqslant z_0(s)$, *и оно может быть получено методом последовательных приближений, начиная с любой функции* $x_0(s)$ *такой, что* $|x_0(s)|\leqslant z_0(s)$.

Доказательство. Эта теорема следует из 2.22 и 2.32. Рассматриваем x и z как элементы полуупорядоченного пространства ограниченных функций. Операция V определяется функцией Φ, операция U— функцией K. Нужно проверить, что V является мажорантой для U. Но, действительно, опираясь на условия 2) и 3), получаем:

$$\left|\int_G K(s,\ t,\ x(t)+\Delta x(t))\,dt-\int_G K(s,\ t,\ x(t))\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_G\left[\int_{x(t)}^{x(t)+\Delta x(t)}\Phi'_u(s,t,|u|)\,du\right]dt\leqslant\int_G\left[\int_{|x(t)|}^{|x(t)|+|\Delta x(t)|}\Phi'_v(s,t,v)\,dv\right]dt=$$

$$=\int_G\Phi(s,\ t,\ |x(t)|+|\Delta x(t)|)\,dt-\int_G\Phi(s,\ t,\ |x(t)|)\,dt, \tag{17}$$

что и обеспечивает выполнение неравенства 2а) из 2.21. Применение теорем 2.22 и 2.32 сразу приводит теперь к нужному заключению.

6.42. Следствие. *Если функция* $K(s,\ t,\ u)$ *удовлетворяет по* u *условию Липшица*:

$$|K(s,\ t,\ u+\Delta u)-K(s,\ t,\ u)|\leqslant C|\Delta u|,\ \text{когда}\ |u|+|\Delta u|\leqslant L, \tag{18}$$

то уравнение (15) *имеет единственное решение, удовлетворяющее условию* $|x(s)|\leqslant L$, *если соблюдены неравенства*

$$C\cdot mG<1,\ S\cdot mG+LC\cdot mG\leqslant L,\ \text{где}\ S=\sup_G|K(s,t,0)|. \tag{19}$$

Это утверждение следует сразу из 6.41, если принять

$$\Phi(s,\ t,\ u)=S+Cu.$$

Замечание. Если соблюдено только второе из неравенств (19), то можно сделать заключение только о существовании, но не о единственности решения уравнения (15).

§ 7. Применения к обыкновенным дифференциальным уравнениям

7.1. Сходимость метода Пикара.

7.11. Теорема. *Пусть дана система дифференциальных уравнений*

$$\frac{d\xi_i}{dt} = f_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, t), \tag{1}$$

где функции f_i непрерывны по t и удовлетворяют условию Липшица относительно $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, т. е. для достаточно малых, t и $|\xi_i|$, например, при $|t| \leqslant t_0$ и $|\xi_i| + |\Delta\xi_i| \leqslant h$ выполняются неравенства

$$|f_i(\xi_1 + \Delta\xi_1, \xi_2 + \Delta\xi_2, \ldots, \xi_n + \Delta\xi_n, t) - f_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, t)| \leqslant \\ \leqslant C(|\Delta\xi_1| + |\Delta\xi_2| + \ldots + |\Delta\xi_n|). \tag{2}$$

Тогда система (1) *имеет решение $\xi_i = \xi_i(t)$, где функции $\xi_i(t)$ определены для t достаточно малых ($|t| \leqslant \delta$) и удовлетворяют начальным условиям*

$$\xi_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Доказательство. Систему (1) мы можем переписать в форме

$$\xi_i(t) = \int_0^t f_i(\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t), t)\, dt \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Рассматривая систему функций $(\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t))$ в промежутке $[0, \delta]$ (выбор δ будет указан ниже) как элемент K-пространства систем ограниченных функций, можем рассматривать систему (4) как уравнение вида $x = U(x)$. В качестве мажорантного уравнения $z = V(z)$ можно принять систему

$$\zeta_i(t) = \int_0^t C(\zeta_1(t) + \zeta_2(t) + \ldots + \zeta_n(t))\, dt + \\ + \int_0^t |f_i(0, \ldots, 0, t)|\, dt \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Все условия теорем существования и единственности (2.11, 2.22, 2.31) будут выполнены. Действительно, условия 1)—4) из 2.11 выполняются очевидным образом. Условие 5) ($V(z') \leqslant z'$) будет удовлетворено, если мы в качестве $\bar{z}$ (раньше мы обозначали этот элемент через z') возьмём систему функций $\bar{\zeta}_i = \alpha e^{nCt}$, если только α и δ выбрать так, чтобы выполнялись неравенства

$$\int_0^\delta |f_i(0, 0, \ldots, 0, t)|\, dt \leqslant \alpha \quad \text{и} \quad \alpha e^{nC\delta} \leqslant h$$

(последнее условие будет использовано дальше). В самом деле,

$$\int_0^t C(\bar{\zeta}_1(t) + \ldots + \bar{\zeta}_n(t))\, dt + \int_0^t |f_i(0, \ldots, 0, t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant nC\alpha \cdot \frac{1}{nC}(e^{nCt} - 1) + \alpha = \alpha e^{nCt} = \bar{\zeta}_i(t),$$

т. е. $V(\bar{z}) \leqslant \bar{z}$.

Проверим, что V есть мажоранта для U. Если

$$|\xi_i(t)| \leqslant \zeta_i(t), \quad |\Delta\xi_i(t)| \leqslant \Delta\zeta_i(t), \quad \zeta_i(t) + \Delta\zeta_1(t) \leqslant \alpha e^{nCt} \leqslant h,$$

то имеем:

$$\left| \int_0^t f_i(\xi_1(t) + \Delta\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t) + \Delta\xi_n(t), t)\, dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 f_i(\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t), t)\, dt \right| \leqslant \int_0^t C(\Delta\zeta_1(t) + \Delta\zeta_2(t) + \ldots +$$

$$+ \Delta\zeta_n(t))\, dt,$$

что и устанавливает справедливость условия 2) из 2.21, а условие 1) очевидно. Отсюда на основании 2.21 и 2.32 и приходим к нашим утверждениям.

7.12. Замечание 1. Использование теоремы 2.41 позволяет, в случае, если функции f_i зависят ещё от некоторого параметра, сделать заключение о непрерывной зависимости решения от этого параметра, в частности, таким образом легко может быть получена непрерывность зависимости решения от начальных условий. Таким же образом может быть получена непрерывная зависимость решения и от самих функций f_i, если их рассматривать как переменные.

7.13. Замечание 2. Если по каждой переменной ξ_i мы имеем своё значение коэффициента Липшица, то это можно учесть при составлении мажорантной системы. Решение получающейся таким образом дифференциальной системы с постоянными коэффициентами позволило бы уточнить границы области существования решения системы (1).

7.14. Замечание 3. Теорема 7.11 могла быть получена и посредством рассмотрения пространства X как нормированного пространства, с использованием предложения 2.24, что, впрочем, дало бы несколько более грубые границы для области сходимости процесса.

7.2. Применение метода мажорант (Коши) к установлению существования аналитического решения. Эта классическая теорема также может быть получена на основании развитой выше теории.

7.21. Теорема. *Пусть дана система уравнений*

$$\frac{d\xi_i}{dt} = f_i(\xi_1, \ldots, \xi_n, t) =$$

$$= \sum_{k_1, \ldots, k_n, l=0}^{\infty} c_{k_1, \ldots, k_n, l}\, \xi_1^{k_1} \ldots \xi_n^{k_n} t^l \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Тогда, если система

$$\frac{d\zeta_i}{dt} = F_i(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, t) =$$

$$= \sum_{k_1, \ldots, k_n, l=0}^{\infty} C_{k_1, \ldots, k_n, l}\, \zeta_1^{k_1} \ldots \zeta_n^{k_n} t^l \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{7}$$

где $|c_{k_1, \ldots, k_n, l}| \leqslant C_{k_1, \ldots, k_n, l}$, *имеет решение*

$$\zeta_i(t) = \sum_{s=0}^{\infty} h_s^{(i)} t^s, \quad \text{где в} \quad h_s^{(i)} \geqslant 0, \tag{8}$$

сходящееся при $|t| \leqslant R$, *то и система* (6) *имеет решение, удовлетворяющее начальному условию* $\xi_i(0) = \xi_0^i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *и имеющее вид*

$$\xi_i(t) = \xi_0^{(i)} + \sum_{s=1}^{\infty} g_s^{(i)} t^s, \tag{9}$$

где $|g_s^{(i)}| \leqslant h_s^{(i)}$, *если только* $|\xi_0^{(i)}| \leqslant h_0^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Доказательство. Подставляя в системы (6) и (7) формально ряды, определяющие решения, и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в обеих частях равенства, придём к бесконечным системам вида (11), (12) § 5 относительно неизвестных $g_s^{(t)}$ и $h_s^{(t)}$ соответственно. Вторая из этих систем мажорирует первую и так как она имеет положительное решение, то на основании теоремы 5.31 можно утверждать, что и первая система разрешима.

Именно на доказанной теореме сравнения и базируется обычное доказательство существования аналитического решения системы с аналитической правой частью.

ДОПОЛНЕНИЕ

ГЛАВА XIII

КОНКРЕТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ K-ПРОСТРАНСТВ

К числу весьма важных задач общей теории K-пространств относится проблема реализации абстрактного K-пространства в виде множества вещественных функций, заданных на некотором топологическом пространстве. В настоящей главе мы рассмотрим два способа такой реализации K-пространств: один — общий, дающий представление K-пространства с помощью непрерывных функций, и другой, применимый к классу K-пространств, рассмотренному в главе XI (с обобщённой аддитивной нормой), — дающий представление с помощью измеримых функций.

§ 1. Представление булевских алгебр

1.1. Единичные функции на булевской алгебре. Весьма существенное значение для дальнейшего будут иметь вещественные функции некоторого специального вида, определённые на булевской алгебре.

Определение. Пусть $\mathfrak{E}$ — булевская алгебра. Вещественная функция $f(e)$ $(e \in \mathfrak{E})$ называется *единичной*, если

1) $f(e)$ аддитивна, т. е.

$$f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2)$$

при $e_1 \, \mathrm{d} \, e_2$;

2) $f(e)$ принимает только значения 0 и 1;

3) $f(\mathbf{1}) = 1$.

1.11. Как мы уже указывали в гл. VIII (1.1), из аддитивности вытекает, что $f(\mathbf{0}) = 0$, а из положительности и аддитивности вытекает монотонность функции $f(e)$, т. е. неравенство $e_1 \leqslant e_2$ влечёт $f(e_1) \leqslant f(e_2)$.

Из условий 1) и 2) следует, что для любых двух дизъюнктных элементов только на одном из них единичная функция может иметь значение 1. Кроме того, из равенства

$$e_1 \vee e_2 = \mathbf{S}(e_1, Ce_1 \wedge e_2) = e_1 + (Ce_1 \wedge e_2)$$

сразу следует, что, для любых e_1 и e_2,

$$f(e_1 \vee e_2) = f(e_1) + f(Ce_1 \wedge e_2),$$

откуда, благодаря монотонности $f(e)$,

$$f(e_1 \vee e_2) \leqslant f(e_1) + f(e_2). \tag{1}$$

Рассмотрим некоторые вспомогательные понятия, а именно, назовём *цепью* всякое вполне упорядоченное множество $T = \{e_\xi\}$ $(\xi < \vartheta)$, состоящее из элементов алгебры $\mathfrak{E}$ и удовлетворяющее следующим условиям:

a) Для всякого конечного множества элементов $e_{\xi_i} \in T$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$e_{\xi_1} \wedge \ldots \wedge e_{\xi_n} > \mathbf{0}.$$

b) Для любых двух элементов e_ξ, $e_\eta \in T$ из $\xi < \eta$ вытекает, что $e_\xi > e_\xi \wedge e_\eta$.

Из b), в частности, следует, что $e_\xi \neq e_\eta$ при $\xi \neq \eta$.

Тривиальным примером цепи может служить множество, состоящее из одного элемента $e_0 > \mathbf{0}$.

Цепь T назовём *максимальной*, если при любом $e \in \mathfrak{E}$ вполне упорядоченное множество $\{e'_\xi\}$ $(\xi \leqslant \vartheta)$, где $e'_\xi = e_\xi$ при $\xi < \vartheta$, $e'_\vartheta = e$, уже не является цепью.

1.12. Любая цепь может быть дополнена до максимальной.

Доказательство. Пусть $T = \{e_\xi\}$ $(\xi < \vartheta)$ — цепь. Расположим все элементы из $\mathfrak{E}$ в трансфинитную последовательность $\{e'_\eta\}$. Если среди e'_η нет ни одного, присоединение которого к T не нарушает свойств цепи, то T — уже максимальная цепь. В противном случае, присоединяем к T первый из тех e'_η, присоединение которых возможно. С полученной цепью проводим то же рассуждение и продолжаем этот процесс (может быть, трансфинитный) до тех пор, пока не получится максимальная цепь. Так как мощность цепи не превосходит мощности множества $\mathfrak{E}$, то процесс обязательно завершится.

1.13. Пусть $T = \{e_\xi\}$ $(0 \leqslant \xi < \vartheta)$ — максимальная цепь. Элемент $e \in \mathfrak{E}$ отнесём к первой категории, если среди элементов цепи T найдётся конечное число элементов $e_{\xi_1}, \ldots, e_{\xi_n} \in T$ таких, что

$$e_{\xi_1} \wedge \ldots \wedge e_{\xi_n} \leqslant e.$$

Тогда для всякого $e \in \mathfrak{E}$ один и только один из двух элементов e и Ce принадлежит первой категории.

Доказательство. а) Допустим, что оба элемента e и Ce принадлежат к первой категории. Тогда существуют такие порядковые числа

$$\xi_i,\ \eta_j < \vartheta \qquad (i = 1, \ldots, n;\ j = , \ldots, p),$$

что

$$e_{\xi_1} \wedge \ldots \wedge e_{\xi_n} \leqslant e,\ e_{\eta_1} \wedge \ldots \wedge e_{\eta_p} \leqslant Ce.$$

Но, по первому свойству цепи,

$$e_{\xi_1} \wedge \ldots \wedge e_{\xi_n} \wedge e_{\eta_1} \wedge \ldots \wedge e_{\eta_p} > \mathbf{0}.$$

Поэтому

$$e \wedge Ce > \mathbf{0},$$

что невозможно.

b) Допустим, что ни e, ни Ce не принадлежат к первой категории. Тогда для всякого конечного множества элементов $e_{\xi_1}, \ldots, e_{\xi_n} \in T$

$$e_{\xi_1} \wedge \ldots \wedge e_{\xi_n} \wedge e > \mathbf{0}. \tag{2}$$

Действительно, если бы $e_{\xi_1} \wedge \ldots \wedge e_{\xi_n} \wedge e = \mathbf{0}$, т. е. $(e_{\xi_1} \wedge \ldots \wedge e_{\xi_n})\, \mathrm{d}\, e$, то имело бы место неравенство

$$e_{\xi_1} \wedge \ldots \wedge e_{\xi_n} \leqslant Ce,$$

а тогда Ce по определению был бы первой категории.

Кроме того, для любого $e_\xi \in T$

$$e_\xi - (e_\xi \wedge e) > \mathbf{0}, \tag{3}$$

так как иначе мы имели бы $e_\xi \leqslant e$, т. е. e был бы первой категории.

Но из (2) и (3) следует, что вполне упорядоченное множество

$$e_0, e_1, \ldots, e_\xi, \ldots, e,$$

полученное из T присоединением элемента e, является цепью, что противоречит максимальности цепи T.

Наше утверждение полностью доказано.

Замечание. В первой части доказательства (a) фактически доказано, что из двух дизъюнктных элементов только один может быть первой категории.

1.14. Теорема о существовании единичных функций. *Для всякой цепи T элементов алгебры $\mathfrak{E}$ существует такая единичная функция $f(e)$, что $f(e) = 1$ при $e \in T$.*

Доказательство. Дополним цепь T до максимальной (1.12) и обозначим эту максимальную цепь $\{e_\xi\}$ $(0 \leqslant \xi < \vartheta$, через T^*. Теперь положим

$$f(e) = \begin{cases} 1, \text{ если } e \text{ — первой категории,} \\ 0 \text{ для прочих } e \in \mathfrak{E}. \end{cases}$$

Проверим аддитивность функции $f(e)$.

Если $e' \,\mathrm{d}\, e''$, то согласно 1.13 возможны два случая: либо один из этих элементов, например, e' — первой категории, а другой — нет, либо оба не принадлежат к первой категории. В первом случае $(e') = 1$, $f(e'') = 0$, а во втором $f(e') = f(e'') = 0$.

Из определения первой категории сразу следует, что если e' — первой категории, а $e^* \geqslant e'$, то e^* — тоже первой категории; и точно так же, если e^* и e'^* — два элемента первой категории, то

$e^* \wedge e^{**}$ — тоже первой категории. Поэтому в первом из указанных выше двух случаев $e' + e''$ — первой категории, а во втором

$$e' + e'' = C(Ce' \wedge Ce'')$$

не принадлежит к первой категории (так как Ce' и Ce'' — первой категории); следовательно, в обоих случаях

$$f(e' + e'') = f(e') + f(e'').$$

Единица $\mathbf{1}$ — элемент первой категории, поэтому $f(\mathbf{1}) = 1$. Так как каждый элемент цепи T^* также принадлежит к первой категории, то $f(e) = 1$ для всех $e \in T^*$, в частности, для $e \in T$.

Теорема полностью доказана.

Следствие. *Для всякого $e_0 > \mathbf{0}$ ($e \in \mathfrak{E}$) существует такая единичная функция $f(e)$, для которой $f(e_0) = 1$.*

Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему к цепи T, состоящей из одного элемента e_0.

1.2. Краткие сведения из общей теории топологических пространств. В главе 1 (2.41) мы исходили из определения топологического пространства с помощью системы замкнутых множеств. Сейчас нам будет удобнее принять за основную систему открытых множеств, причём мы приведём определение, несколько более узкое, чем в главе I.

1.21. Определение. Множество Q называется *топологическим пространством*, или *T_2-пространством*, если в нём задана система G подмножеств $G \subset Q$, называемых *открытыми*, удовлетворяющая следующим условиям:

1. Всё множество Q и пустое множество Λ входят в G.
2. Сумма любого множества открытых множеств открыта.
3. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.
4. Если $t, s \in Q$ и $t \neq s$, то существуют такие непересекающиеся открытые множества G_1 и G_2, что $t \in G_1$, $s \in G_2$ (аксиома отделимости).

Множества, являющиеся дополнениями к открытым множествам, называются *замкнутыми*. Легко видеть, что система замкнутых множеств в Q удовлетворяет всем требованиям, поставленным в главе I.

Каждое открытое множество G, содержащее данную точку t, называется окрестностью точки t. Окрестность будем иногда обозначать $U(t)$ (или $V(t)$).

Если $A \subset Q$ — произвольное множество, то наименьшее замкнутое множество F, содержащее A, называется *замыканием* множества A (обозначение замыкания: $\overline{A}$). Для замкнутого множества F его замыкание $\overline{F} = F$.

Если A — произвольное множество, то для того чтобы $t \in \overline{A}$, необходимо и достаточно, чтобы любая окрестность $U(t)$ содержала точку $s \in A$.

1.22. Произвольная система открытых множеств G_ξ ($\xi \in \Xi$) называется *покрытием* некоторого множества $A \subset Q$, если для любого $t \in A$ найдётся $\xi \in \Xi$, при котором $t \in G_\xi$.

T_2-пространство называется *бикомпактом*, если из любого его покрытия можно выделить конечное покрытие, т. е. существуют такие индексы $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \Xi$, что $G_{\xi_1} \cup \ldots \cup G_{\xi_n} = Q$.

Тем же свойством обладает и любое замкнутое множество в бикомпакте; поэтому говорят, что в бикомпакте любое замкнутое множество бикомпактно.

В бикомпакте для любой его точки t и любой её окрестности $U(t)$ найдётся такая другая её окрестность $V(t)$, что

$$\overline{V(t)} \subset U(t)$$

(свойство топологической *регулярности* бикомпакта).

Простейшим примером бикомпакта может служить отрезок в одномерном эвклидовом пространстве.

Множество $A \subset Q$ называется *нигде не плотным*, если в любом открытом множестве $G \subset Q$ содержится открытое множество G_1, пересечение которого с A пусто. Множество A называется *множеством* I *категории*, если A есть сумма счётного множества нигде не плотных множеств.

Множество, не являющееся множеством I категории, называется *множеством* II *категории*.

В бикомпакте всякое не пустое открытое множество является множеством II категории.

Если замкнутое множество не является нигде не плотным, то оно содержит некоторое открытое множество.

1.23. Некоторая система открытых множеств G_ξ ($\xi \in \Xi$) называется *базой* топологического пространства Q, если любое открытое множество $G \subset Q$ представимо в виде суммы некоторых из G_ξ:

$$G = \bigcup_{\xi \in \Xi'} G_\xi \quad (\Xi' \subset \Xi).$$

Бикомпакт называется *вполне несвязным*, если *открыто-замкнутые* множества (т. е. множества, одновременно открытые и замкнутые) образуют его базу. В этом случае для любой окрестности $U(t)$ точки t найдётся открыто-замкнутая окрестность $V(t) \subset U(t)$. В дальнейшем, во вполне несвязном бикомпакте под базой мы будем понимать систему всех открыто-замкнутых множеств, а сами эти множества будем называть *базовыми*.

1.24. Будем рассматривать вещественные функции $x(t)$, заданные на бикомпакте Q, значения которых могут быть конечными, $+\infty$ или $-\infty$. Функция $x(t)$ называется *полунепрерывной сверху* (соответственно *снизу*) в точке t_0, если по любому $b > x(t_0)$ (соответственно $a < x(t_0)$) найдётся окрестность $U(t_0)$, во всех точках которой $x(t) < b$ (соответственно $x(t) > a$).

В соответствии с определением условимся считать, что если $x(t_0) = +\infty$ (соответственно, $x(t_0) = -\infty$), то $x(t)$ полунепрерывна сверху (соответственно снизу) в точке t_0.

Если функция одновременно полунепрерывна сверху и снизу в точке t_0, то она называется *непрерывной* в этой точке.

Для того чтобы функция $x(t)$ была полунепрерывной сверху (соответственно снизу) на всём бикомпакте, необходимо и достаточно, чтобы для любого $a(-\infty \leqslant a \leqslant +\infty)$ множество $Q(x(t) \geqslant a)$ (соответственно $Q(x(t) \leqslant a)$) было замкнутым.

Для непрерывности функции необходимо и достаточно одновременное выполнение обоих указанных условий.

Если непрерывная функция принимает только конечные значения, то она ограничена.

Если функции $x_\xi(t)$ $(\xi \in \Xi)$ непрерывны, то функция $x(t) = \sup\limits_\xi x_\xi(t)$ полунепрерывна снизу, а функция $y(t) = \inf\limits_\xi x_\xi(t)$ полунепрерывна сверху.

1.25. Теорема Урысона. *Если F_1 и F_2 — два замкнутых непересекающихся множества в бикомпакте Q, $a - \infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, то существует непрерывная функция $x(t)$, определённая на всём бикомпакте Q и удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $x(t) = a$ *при* $t \in F_1$;
2) $x(t) = b$ *при* $t \in F_2$;
3) $a \leqslant x(t) \leqslant b$ *при всех* $t \in Q$.

1.26. Два топологических пространства Q и Q' называются *гомеоморфными*, если между их точками можно установить взаимнооднозначное соответствие, при котором образ любого открытого множества из Q является открытым множеством в Q' и, обратно, образ открытого множества из Q' есть открытое множество в Q.

1.3. Реализация булевской алгебры в виде кольца множеств. Основное значение в дальнейшем имеет доказанная выше теорема 1.14 о существовании «достаточного» множества единичных функций в произвольной булевской алгебре $\mathfrak{E}$. В множестве Q всех таких функций будет введена топология, в силу которой Q превратится во вполне несвязный бикомпакт. При этом $\mathfrak{E}$ окажется изоморфной совокупности всех базовых множеств бикомпакта Q (представляющей собой булевскую алгебру, если отношение порядка определить как теоретико-множественное включение).

Итак, рассмотрим множество $Q = \{f\}$ всех единичных функций $f(e)$, заданных на $\mathfrak{E}$. Каждому $e \in \mathfrak{E}$ сопоставим множество $E_e \in Q$, состоящее из тех f, для которых $f(e) = 1$. Нулю алгебры $\mathfrak{E}$ сопоставляется пустое множество, а единице, очевидно, — всё Q.

Обозначим через $\mathfrak{U}$ совокупность всех множеств E_e $(e \in \mathfrak{E})$. Определим частичное упорядочение в $\mathfrak{U}$ естественным образом, т. е. полагая $E_{e_1} < E_{e_2}$, если $E_{e_1} \subset E_e$ и $E_{e_1} \neq E_{e_2}$.

1.31. Булевская алгебра $\mathfrak{E}$ изоморфна множеству $\mathfrak{U}$, являющемуся кольцом множеств E_e *).

Доказательство. Мы покажем, что соответствие $e \longleftrightarrow E_e$ взаимно однозначно и что имеют место следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ E_{e_1 \vee e_2} = E_{e_1} \cup E_{e_2};\\ &2)\ E_{Ce} = Q \setminus E_e;\\ &3)\ E_{e_1 \wedge e_2} = E_e \cap E_{e_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Из первой из формул (4) будет вытекать, что соответствие $e \longleftrightarrow E_e$ сохраняет упорядочение, а из первой и последней — что $\mathfrak{U}$ — кольцо.

a) Взаимная однозначность соответствия $e \longleftrightarrow E_e$. Пусть $e_1 \neq e_2$. Тогда элемент $e_3 = e_1 \wedge e_2$ отличен, по крайней мере, от одного из элементов e_1 и e_2. Пусть, например, $e_3 < e_1$. По следствию из теоремы 1.14 существует такая единичная функция $f(e)$, что $f(e_1 \wedge Ce_3) = 1$; отсюда $f(e_1) = 1$, т. е. $f \in E_{e_1}$. С другой стороны, $e_2\ \mathrm{d}\ (e_1 \wedge Ce_3)$, а потому $f(e_2) = 0$ (см. 1.11), т. е. $f \overline{\in} E_{e_2}$. Таким образом, $E_{e_1} \neq E_{e_2}$.

b) Пусть $e = e_1 \vee e_2$; если $f \in E_e$, т. е. $f(e) = 1$, то по формуле (1) невозможно, чтобы $f(e_1) = f(e_2) = 0$. Значит, по крайней мере, одно из этих чисел равно 1, а тогда $f \in E_{e_1} \cup E_{e_2}$. Обратно, если $f \in E_{e_1} \cup E_{e_2}$, то либо $f(e_1) = 1$, либо $f(e_2) = 1$, но тогда $f(e) = 1$, т. е. $f \in E_e$. Равенство $E_e = E_{e_1} \cup E_{e_2}$ доказано.

c) Равенство $E_{Ce} = Q \setminus E_e$ вытекает из определения множества E_{Ce}. Отсюда

$$E_{e_1 \wedge e_2} = E_{C(Ce_1 \vee Ce_2)} = Q \setminus (E_{Ce_1} \cup E_{Ce_2}) =$$
$$= (Q \setminus E_{Ce_1}) \cap (Q \setminus E_{Ce_2}) = E_{e_1} \cap E_{e_2}.$$

Все утверждения доказаны.

Замечание. Из очевидного равенства

$$E_{e_1} \setminus E_{e_2} = E_{e_1} \setminus (E_{e_1} \cap E_{e_2}) = E_{e_1} \cap (Q \setminus E_{e_2}) =$$
$$= E_{e_1} \cap E_{Ce_2} = E_{e_1 \wedge Ce_2}$$

вытекает, что $\mathfrak{U}$ не только кольцо, но и тело, т. е. вместе с двумя множествами в $\mathfrak{U}$ входит и их разность.

Введём в Q топологию следующим образом: множество $G \subset Q$ будем считать открытым, если оно может быть представлено в виде суммы некоторых множеств $E_e \in \mathfrak{U}$. В частности, всякое множе-

*) Напомним, что множество множеств называется кольцом, если вместе с двумя множествами в него входят их сумма и пересечение.

ство E_e, в том числе Q и пустое множество, открыто. Но так как $E_e \in \mathfrak{U}$ влечёт $Q \setminus E_e \in \mathfrak{U}$, то каждое $E_e \in \mathfrak{U}$ открыто-замкнуто.

1.32. Теорема. *При указанном способе введения топологии в Q последнее является вполне несвязным бикомпактом.*

Доказательство. Ясно, что сумма любого множества открытых множеств является открытым множеством. Покажем, что пересечение конечного числа открытых множеств открыто. Достаточно показать это для двух множеств.

Пусть

$$G_1 = \bigcup_{\alpha \in A} E_{e_\alpha}, \quad G_2 = \bigcup_{\beta \in B} E_{e'_\beta} \quad (e_\alpha, e'_\beta \in \mathfrak{E}).$$

Тогда по известной формуле теории множеств (см. также формулы (4))

$$G_1 \cap G_2 = \bigcup_{\alpha, \beta} (E_{e_\alpha} \cap E_{e'_\beta}) = \bigcup_{\alpha, \beta} E_{e_\alpha \wedge e'_\beta},$$

т. е. $G_1 \cap G_2$ открыто по определению.

Проверим аксиому отделимости. Пусть $f_1, f_2 \in Q$, $f_1 \neq f_2$. Тогда найдётся элемент алгебры $e \in \mathfrak{E}$, для которого $f_1(e) \neq f_2(e)$. Но это возможно, лишь если $f_1(e) = 1$, $f_2(e) = 0$ (или наоборот). А тогда $f_1 \in E_e$, $f_2 \in E_{Ce}$ (потому что $f_2(Ce) = f_2(\mathbf{1}) - f_2(e) = 1$). Так как $E_e \cap E_{Ce} = \Lambda$, то доказана отделимость любых двух точек из Q открыто-замкнутыми множествами. Итак, Q — T_2-пространство.

Теперь докажем, что Q — бикомпакт. Так как каждое открытое множество есть сумма некоторых $E_e \in \mathfrak{U}$, то достаточно показать, что из всякого покрытия пространства Q множествами $E_e \in \mathfrak{U}$ можно выделить конечное покрытие. Это же равносильно тому, что из всякой системы множеств $E_e \in \mathfrak{U}$ с пустым пересечением можно выделить конечное число множеств, обладающих тем же свойством.

Пусть $S = \{E_{e_\xi}\}$ $(\xi < \vartheta)$ — вполне упорядоченное множество множеств $E_{e_\xi} \in \mathfrak{U}$ $(e_\xi \in \mathfrak{E})$, причём

$$\bigcap_{\xi < \vartheta} E_{e_\xi} = \Lambda.$$

Не уменьшая общности, можно допустить, что ни одно множество $E_{e_\xi} \in S$ не содержит какого-либо предшествующего ему множества из S. Если бы в S были такие множества, то мы бы удалили их и получили бы при этом новую систему также с пустым пересечением. Таким образом, благодаря изоморфизму между $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{E}$, если $\xi < \eta < \vartheta$, то

$$e_\xi > e_\xi \wedge e_\eta.$$

Допустим теперь, что из S нельзя выделить конечного числа множеств с пустым пересечением. Отсюда следует, что если

$$\xi_i < \vartheta \quad (i = 1, \ldots, n),$$

то

$$e_{\xi_1} \wedge \ldots \wedge e_{\xi_n} > \mathbf{0}.$$

В таком случае множество элементов $T=\{e_\xi\}$ $(\xi<\vartheta)$, соответствующих множествам $E_{e_\xi}\in S$, обладает обоими свойствами, характеризующими цепь. Дополним цепь T до максимальной (1.12), которую обозначим T^*. По теореме о существовании единичных функций (1.14) существует такая функция $f(e)$, что $f(e)=1$ при всех $e\in T^*$, в частности, $f(e_\xi)=1$ для всех $e_\xi\in T$. Это означает, что $f\in E_{e_\xi}$ при всех $\xi<\vartheta$, т. е. пересечение множеств $E_{e_\xi}\in S$ не пусто. Полученное противоречие доказывает бикомпактность пространства Q.

То, что бикомпакт Q — вполне несвязный, вытекает из самого определения открытых множеств в Q, так как множества $E_e\in\mathfrak{U}$ открыто-замкнуты.

1.33. Каждое открыто-замкнутое множество бикомпакта Q совпадает с одним из $E_e\in\mathfrak{U}$.

Доказательство. Пусть M — открыто-замкнутое множество. Будучи открытым, $M=\bigcup E_{e_\alpha}$. Но так как M замкнуто, то, благодаря его бикомпактности, из совокупности множеств E_{e_α} можно выделить конечное число их так, что

$$M=E_{e_{\alpha_1}}\cup\ldots\cup E_{e_{\alpha_n}}=E_{e_{\alpha_1}\vee\ldots\vee e_{\alpha_n}},\text{ т. е. } M\in\mathfrak{U}.$$

Теперь результат 1.31 уточняется следующим образом:

1.34. Теорема о представлении булевских алгебр (М. Стон). *Всякая булевская алгебра изоморфна базе некоторого вполне несвязного бикомпакта (т. е. совокупности всех его открыто-замкнутых множеств).*

1.35. Теорема. (Признак полноты булевской алгебры.) *Для того чтобы база $\mathfrak{U}$ вполне несвязного бикомпакта Q была полной булевской алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы замыкание любого открытого множества в Q было базовым множеством.*

Доказательство. a) Необходимость. Пусть $\mathfrak{U}=\{E\}$ — совокупность базовых множеств бикомпакта Q. Если $G\subset Q$ — открытое множество, то $G=\bigcup E_\xi$ $(\xi\in\Xi)$.

Вследствие полноты алгебры $\mathfrak{U}$ существует наименьшее $E\in\mathfrak{U}$ такое, что $G\subset E$. Но тогда и $\overline{G}\subset E$ (ибо E замкнуто).

Допустим, что $E\setminus\overline{G}\neq\Lambda$. Но любое открытое множество содержит непустое базовое, т. е. $E'\subset E\setminus\overline{G}$, где $E'\in\mathfrak{U}$ $(E'\neq\Lambda)$. А тогда $G\subset E\setminus E'\in\mathfrak{U}$, т. е. E — не наименьшее базовое множество, содержащее G. Таким образом, $\overline{G}=E\in\mathfrak{U}$.

b) Достаточность. Пусть $E_\xi\in\mathfrak{U}$ $(\xi\in\Xi)$. Нужно показать, что существует наименьшее базовое множество E, содержащее всё E_ξ: тогда $E=\sup E_\xi$.

Положим $G=\bigcup\limits_\xi E_\xi$; тогда G — открытое, и, по условию, $\overline{G}\in\mathfrak{U}$. Если же $G\subset E'\in\mathfrak{U}$, то $\overline{G}\subset E'$. Следовательно, $\overline{G}$ и есть наименьшее базовое множество, содержащее всё E_ξ.

1.36. Замечание. Если произвольный бикомпакт Q удовлетворяет условию теоремы 1.35, т. е. замыкание любого открытого его подмножества открыто-замкнуто, то он — вполне несвязный.

Действительно, пусть $f \in Q$ и $U(f)$ — некоторая окрестность точки f. Вследствие топологической регулярности бикомпакта Q $U(f)$ содержит такую окрестность $V(f)$, что $\overline{V(f)} \subset U(f)$. Но $\overline{V(f)}$, по предположению, — открыто-замкнутое множество; следовательно, открыто-замкнутые множества образуют базу бикомпакта Q, т. е. Q — вполне несвязный бикомпакт.

Так как существуют неполные булевские алгебры, то заключение, обратное к 1.36, неверно.

При доказательстве теоремы 1.34 о представлении булевских алгебр мы построили некоторый конкретный бикомпакт Q. Однако независимо от способа построения вполне несвязный бикомпакт, удовлетворяющий условию теоремы 1.34, определяется по данной булевской алгебре однозначно с точностью до гомеоморфизма. Это вытекает из следующего предложения.

1.37. Если базы $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}'$ вполне несвязных бикомпактов Q и Q' изоморфны, как булевские алгебры, то Q и Q' гомеоморфны.

Доказательство. По условию, между базовыми множествами бикомпактов Q и Q' можно установить взаимно однозначное соответствие с сохранением знака включения. Если $E \in \mathfrak{U}$, то соответствующее ему базовое множество из Q' обозначим E'. Каждая точка $t \in Q$ однозначно определяется набором всех $E_\xi \in \mathfrak{U}$, содержащих t, именно,

$$(t) = \bigcap_{t \in E_\xi} E_\xi.$$

Положим

$$F = \bigcap_{\xi\,(t \in E_\xi)} E'_\xi \quad (\xi \text{ — такие, что } t \in E_\xi).$$

Так как пересечение любого конечного числа множеств E'_ξ соответствует при изоморфизме пересечению множеств E_ξ с теми же индексами:

$$E'_{\xi_1} \cap \ldots \cap E'_{\xi_n} = (E_{\xi_1} \cap \ldots \cap E_{\xi_n})',$$

то такое пересечение не пусто; а тогда, по бикомпактности пространства Q', $F \neq \Lambda$ *).

Покажем, что F состоит из одной точки. Допустим, что $t'_1, t'_2 \in F$ и $t'_1 \neq t'_2$. Тогда существуют такие $E'_1, E'_2 \in \mathfrak{U}'$, что

$$t'_1 \in E'_1,\ t'_2 \in E'_2,\ E'_1 \cap E'_2 = \Lambda.$$

---

*) См. доказательство бикомпактности пространства Q в теореме 1.32.

Рассмотрим два набора множеств:

$$\{E'_\xi \cap E'_1\},\ \{E'_\xi \cap E'_2\}\ (\xi \text{ — такие, что } t \in E_\xi).$$

Так же, как и выше, убеждаемся, что

$$\bigcap_\xi (E_\xi \cap E_1) \neq \Lambda \text{ и } \bigcap_\xi (E_\xi \cap E_2) \neq \Lambda;$$

но в то же время благодаря дизъюнктности множеств E_1 и E_2 эти пересечения дизъюнктны. Однако это противоречит тому, что $\bigcap E_\xi$ состоит из одной точки. Таким образом, F состоит из одной точки, которую обозначим t'. При этом ясно, что $\{E'_\xi\}$ (где ξ принимает все значения, при которых $t \in E_\xi$) — полный набор базовых множеств бикомпакта Q', содержащих t'.

Соответствие $t \longleftrightarrow t'$ между точками бикомпакта Q и Q', очевидно, взаимно однозначно. При этом образом множества $E \in \mathfrak{U}$ будет $E' \in \mathfrak{U}'$. Так как открытые множества суть суммы базовых множеств, то образом любого открытого множества будет открытое множество. Таким образом, Q и Q' гомеоморфны.

§ 2. Пространство непрерывных функций

2.1. Ограниченные непрерывные функции. Прежде чем приступать к конкретному представлению K-пространств, мы займёмся изучением пространства непрерывных функций на бикомпакте. Это пространство и будет использовано в дальнейшем для представления.

Пусть Q — произвольный бикомпакт, а $C(Q)$ — множество всех вещественных непрерывных функций $x(t)$ с конечными значениями, заданных на Q ($t \in Q$) *). Определим в $C(Q)$ операции сложения и умножения на вещественное число обычным способом линеаризации множества функций и будем считать функцию положительным элементом в $C(Q)$, если $x(t) \geqslant 0$ при всех $t \in Q$ и $x(t) > 0$ хоть в одной точке. Тогда множество $C(Q)$ есть K-линеал. При этом очевидно, что если $x_1(t)$, $x_2(t) \in C(Q)$, то элемент $x_1 \vee x_2$ есть функция $\max[x_1(t), x_2(t)]$. Но уже в простейшем случае, когда Q — отрезок числовой оси с обычной топологией, $C(Q)$ не является K-пространством, так как в нём не выполняется аксиома **V**.

Поставим вопрос: каким условиям должен удовлетворять бикомпакт Q, чтобы множество $C(Q)$ удовлетворяло аксиоме V, т. е. было K-пространством? Ответ будет дан ниже.

2.11. Определение. Пусть $x(t)$ — произвольная вещественная функция, заданная на бикомпакте Q. Для каждого $t_0 \in Q$ полагаем

$$x_{\max}(t_0) = \inf_{U(t_0)} \sup_{t \in U(t_0)} x(t);$$

здесь $U(t_0)$ — произвольная окрестность точки t_0, и берётся верхняя

*) Иногда мы будем писать просто C, если бикомпакт Q уже указан заранее.

грань значений $x(t)$ в этой окрестности, а затем нижняя грань таких верхних граней по всем окрестностям $U(t_0)$. Определённую таким образом функцию $x_{\max}(t)$ будем называть *функцией-максимумом* для $x(t)$.

Аналогично с помощью формулы

$$x_{\min}(t_0) = \sup_{U(t_0)} \inf_{t \in U(t_0)} x(t)$$

определяется *функция-минимум*.

Очевидно, что если $x(t)$ полунепрерывна сверху, то $x_{\max}(t) = x(t)$, если же $x(t)$ полунепрерывна снизу, то

$$x_{\min}(t) = x(t) \qquad \text{(см. 1.24)}.$$

Отметим, что в определениях 2.11 $x(t)$, а также $x_{\max}(t)$ и $x_{\min}(t)$ могут принимать значения $+\infty$ и $-\infty$.

2.12. Для любой функции её функция-максимум полунепрерывна сверху, а функция-минимум — полунепрерывна снизу.

Доказательство. Проведём рассуждение для функции-максимум.

Возьмём произвольное $a(-\infty < a \leqslant +\infty)$ и пусть $A = \underset{t}{Q}(x_{\max}(t) < a)$. Пусть $t_0 \in A$. По определению существует окрестность $U(t_0)$ такая, что $\sup\limits_{t \in U(t_0)} x(t) < a$. Но тогда $x_{\max}(t) < a$ для всякого $t \in U(t_0)$, следовательно, $U(t_0) \subset A$, т. е. t_0 — внутренняя точка множества A, и A — открытое множество. Так как это верно при любом a, то $x_{\max}(t)$ полунепрерывна сверху.

2.13. Определение. Будем говорить, что бикомпакт Q удовлетворяет *K-условию*, если в нём замыкание любого открытого множества также является открытым (а следовательно, и базовым) множеством (из 1.36 следует, что такой бикомпакт — вполне несвязный).

2.14. Если бикомпакт Q удовлетворяет K-условию, то функция-максимум всякой полунепрерывной снизу функции непрерывна.

Аналогичное утверждение имеет место для функции-минимум полунепрерывной сверху функции.

Доказательство. Пусть $x(t)$ полунепрерывна снизу, $y(t) = x_{\max}(t)$. Тогда по 2.12 $y(t)$ полунепрерывна сверху, и остаётся доказать её полунепрерывность снизу.

Пусть $-\infty \leqslant a < +\infty$ и $A = \underset{t}{Q}(y(t) \leqslant a)$. Нужно доказать, что A замкнуто. Возьмём произвольно $b > a$ и пусть $t_0 \in \overline{A}$. По свойствам замыкания каждая окрестность $U(t_0)$ точки t_0 содержит хоть одну точку $t_1 \in A$. Так как $y(t_1) \leqslant a$, то существует такая окрестность V_U точки t_1, содержащаяся в $U(t_0)$, что $x(t) < b$ во всех точках $t \in V_U$. Определив V_U для каждой $U(t_0)$, положим $V = \bigcup\limits_{U(t_0)} V_U$. Тогда V — открытое множество. По K-условию $\overline{V}$ — тоже открытое

множество. Но $V \subset \underset{t}{Q}(x(t) < b) \subset \underset{t}{Q}(x(t) \leqslant b)$, а так как последнее множество замкнуто, то

$$\overline{V} \subset \underset{t}{Q}(x(t) \leqslant b).$$

С другой стороны, так как каждая $U(t_0)$ пересекается с V, то $t_0 \in \overline{V}$, т. е. $\overline{V}$ — окрестность точки t_0 и, следовательно, $y(t_0) \leqslant b$. Вследствие произвольности $b(> a)$, $y(t_0) \leqslant a$, т. е. $t_0 \in A$. Таким образом, $\overline{A} \subset A$, т. е. A замкнуто.

2.15. Будем в дальнейшем считать, что функция $x(t) \equiv 1$ принята за единицу в C. Тогда, если $e \in C$ и $e \wedge (\mathbf{1} - e) = \mathbf{0}$, то e является характеристической функцией некоторого открыто-замкнутого множества $E \subset Q$, и обратно.

Доказательство. Пусть e изображается функцией $x(t)$ $(t \in Q)$. Тогда $\min[x(t), 1 - x(t)] = 0$ при всех t, следовательно, $x(t)$ может принимать только значения 0 или 1. Вследствие непрерывности функции $x(t)$

$$E = \underset{t}{Q}(x(t) = 1) \text{ и } E_1 = \underset{t}{Q}(x(t) = 0)$$

замкнуты, а так как $E \cup E_1 = Q$, то они одновременно и открыты.

Обратное очевидно.

Следствия. Предположим, что $C(Q)$ — K-пространство, и выведем отсюда некоторые следствия. Из уже доказанного предложения 2.15 вытекает, что база пространства $C(Q)$ состоит из характеристических функций всех открыто-замкнутых множеств бикомпакта Q (см. 3.21 b) гл. III), следовательно, база $\mathfrak{E}[C(Q)]$ изоморфна совокупности $\mathfrak{U}$ открыто-замкнутых множеств бикомпакта Q.

Возьмём $e \in \mathfrak{E}(C)$; e — характеристическая функция базового множества E_e. Тогда подпространство C_e, порождённое элементом e, состоит из всех непрерывных функций $x(t)$, для которых $x(t) = 0$ при $t \overline{\in} E_e$. Действительно, такие и только такие функции дизъюнктны элементу $\mathbf{1} - e$, являющемуся характеристической функцией множества $Q \setminus E_e$. Проектирование в C_e означает следующее:

$$[(e)x](t) = \begin{cases} x(t) & \text{при } t \in E_e, \\ 0 & \text{при } t \overline{\in} E_e. \end{cases}$$

2.16. Если $C(Q)$ — K-пространство, то для всякой функции $x \in C(Q)$ существуют такие три дизъюнктных открыто-замкнутых множества E_+, E_- и E_0, что $Q = E_+ \cup E_- \cup E_0$ и

$$x(t) \begin{cases} \geqslant 0 & \text{при } t \in E_+, \\ \leqslant 0 & \text{при } t \in E_-, \\ = 0 & \text{при } t \in E_0. \end{cases}$$

Доказательство. Обозначим через e_+ и e_- следы элементов x_+ и x_- (соответственно); тогда e_+ — характеристическая функция некоторого открыто-замкнутого множества E_+, а e_- — характеристическая функция открыто-замкнутого множества E_-. Так как $e_+ \mathrm{d}\, e_-$, то E_+ и E_- дизъюнктны.

Из равенства $x_+ = x \vee \mathbf{0}$ следует, что функция $x_+(t)$ определяется по формуле

$$x_+(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } x(t) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x(t) < 0. \end{cases}$$

С другой стороны, $x_+ \in C_{e_+}$, следовательно,

$$\underset{t}{Q}(x(t) > 0) \subset E_+.$$

Аналогично,

$$\underset{t}{Q}(x(t) < 0) \subset E_-.$$

Теперь положим $E_0 = Q \setminus (E_+ \cup E_-)$. Тогда E_0 — тоже открыто-замкнутое множество. При этом ясно, что множества E_+, E_- и E_0 удовлетворяют всем требуемым условиям.

Замечание. Рассматривая функцию $x(t) - a$, где a — любое число, и применяя к ней доказанный результат, мы убедимся в том, что доказанное предложение верно и при замене 0 на a.

2.17. Если $C(Q)$ — K-пространство, то бикомпакт Q вполне несвязный.

Доказательство. Пусть $t_0 \in Q$ и $U(t_0)$ — некоторая окрестность точки t_0. По теореме Урысона (1.25) существует такая непрерывная функция, удовлетворяющая на всём Q неравенствам $-1 \leqslant x(t) \leqslant 1$, что

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t = t_0, \\ -1 & \text{при } t \in Q \setminus U(t_0). \end{cases}$$

Из 2.16 следует, что существует открыто-замкнутое множество E_+, состоящее из всех точек, где $x(t) > 0$, и, может быть, некоторых точек, где $x(t) = 0$. Таким образом, $t_0 \in E_+ \subset U(t_0)$, ч. и тр. д.

2.18. Теорема. *Для того чтобы $C(Q)$ было K-пространством, необходимо и достаточно, чтобы бикомпакт Q удовлетворял K-условию* (2.13).

Доказательство. а) Необходимость. Пусть $C(Q)$ — K-пространство. По 2.15 (следствия) и 2.17 множество характеристических функций базовых множеств $E \subset Q$ составляет базу K-пространства $C(Q)$; следовательно, совокупность $\mathfrak{U}$ базовых множеств представляет собой полную булевскую алгебру, изоморфную базе K-пространства $C(Q)$. Так как по 2.17 Q — вполне несвязный бикомпакт, то необходимость условия теоремы вытекает из признака 1.35 полноты булевской алгебры.

b) Достаточность. Проверим выполнение в $C(Q)$ аксиомы V. Пусть $R=\{x\}\subset C(Q)$ и все $x(t)\leqslant\xi(t)$, где $\xi\in C(Q)$. Положим

$$y(t)=\sup_{x\in R} x(t).$$

Известно, что $y(t)$ полунепрерывна снизу. Тогда по 2.14 $z(t)=y_{\max}(t)$ непрерывна; при этом, очевидно, все $x(t)\leqslant z(t)$.

С другой стороны, из неравенства $y(t)\leqslant\xi(t)$ следует:

$$z(t)=y_{\max}(t)\leqslant\xi_{\max}(t)=\xi(t),$$

т. е. $z=\sup R$. Существование верхней грани доказано.

Теперь мы можем дать новое доказательство одной из основных теорем главы IV (1.53).

2.19. Теорема. *Всякая полная алгебра Буля $\mathfrak{E}$ изоморфна базе некоторого K-пространства с единицей.*

Доказательство. По теореме 1.34 $\mathfrak{E}$ изоморфна совокупности $\mathfrak{U}$ базовых множеств некоторого вполне несвязного бикомпакта Q. Так как $\mathfrak{E}$ полна, Q удовлетворяет K-условию (см. 1.35), а тогда в силу теоремы 2.18 $C(Q)$ — K-пространство. По 2.15 (следствия) база K-пространства $C(Q)$ изоморфна совокупности $\mathfrak{U}$. Следовательно, база K-пространства $C(Q)$ изоморфна $\mathfrak{E}$, ч. и тр. д.

2.2. Неограниченные непрерывные функции. Пусть бикомпакт Q удовлетворяет K-условию. Присоединим к $C(Q)$ все непрерывные функции, заданные на Q и допускающие на нигде не плотных множествах значения $+\infty$ и $-\infty$. Полученное множество функций обозначим $C_\infty(Q)$ (или просто C_∞).

2.21. Для всякой функции $x(t)$ из C_∞ сохраняется предложение 2.16 о разбиении Q на три дизъюнктных базовых множества, на которых соответственно $x(t)\geqslant 0$, $x(t)\leqslant 0$ и $x(t)=0$. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять любое число $a>0$ и применить 2.16 к функции

$$x_a(t)=\begin{cases} x(t), & \text{если } -a\leqslant x(t)\leqslant a,\\ a, & \text{если } x(t)>a,\\ -a, & \text{если } x(t)<-a.\end{cases}$$

Сохраним в C_∞ обычное определение упорядочения и умножения функции на вещественное число (при этом условимся считать $\pm\infty\cdot 0=0$, а при $\alpha\neq 0$ $\pm\infty\cdot\alpha=\pm\infty$, где знак определяется по обычному правилу).

Легко видеть, что аксиомы I, III и IV K-пространства выполнены, а аксиома V проверяется буквально так же, как в 2.18 (доказательство достаточности).

Действие сложения в C_∞ мы определим после введения в этом пространстве непрерывных функций так же, как это было сделано в гл. IV (1.3) для разложений единицы.

Дальнейшие построения справедливы для функций любого числа аргументов, но мы будем проводить их для случая двух аргументов.

Пусть $F(\lambda, \mu)$ — вещественная непрерывная функция, заданная для всех вещественных λ и μ и имеющая конечные значения. Возьмём две функции $x(t)$ и $y(t)$ из $C_\infty(Q)$. Всюду, за исключением, быть может, нигде не плотного множества значений t, где хоть одна из этих функций равна $\pm\infty$, функция $F[x(t), y(t)]$ имеет смысл (и конечна).

2.22. Лемма. *Существует единственная функция $z(t)$ из $C_\infty(Q)$ такая, что*

$$z(t) = F[x(t), y(t)] \tag{1}$$

при всех t, для которых $x(t)$ и $y(t)$ одновременно конечны.

Доказательство. Положим для любого $n = 1, 2, \ldots$

$$G_n = \underset{t}{Q}[-n < x(t), y(t) < n], \quad E_n = \overline{G}_n.$$

Вследствие непрерывности функций $x(t)$ и $y(t)$ G_n — открытое, а тогда E_n — базовое множество.

Положим

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad \Phi = Q \setminus G.$$

Тогда Φ состоит из тех точек $t \in Q$, в которых $x(t)$ или $y(t)$ равна $\pm\infty$, следовательно, Φ замкнуто и нигде не плотно.

Определим функцию

$$u(t) = \begin{cases} F[x(t), y(t)] & \text{при } t \in G, \\ +\infty & \text{при } t \in \Phi, \end{cases}$$

и проверим, что $u(t)$ полунепрерывна сверху. Действительно, если $t_0 \in \Phi$, то полунепрерывность сверху функции $u(t)$ в точке t_0 очевидна. Если же $t_0 \in G$, то $t_0 \in E_n$ при некотором n; это означает, что существует окрестность t_0, в которой $x(t)$ и $y(t)$ ограничены, следовательно, $F[x(t), y(t)]$ имеет смысл и непрерывна.

Теперь положим

$$z(t) = u_{\min}(t).$$

В 2.14 доказано, что на Q функция-минимум всякой полунепрерывной сверху функции непрерывна, т. е. $z(t)$ непрерывна.

Покажем, что для $z(t)$ равенство (1) выполнено при всех $t \in G$. Действительно, мы уже видели, что $u(t)$ во всех точках из G непрерывна, следовательно, $u_{\min}(t) = u(t)$, т. е.

$$z(t) = u(t) = F[x(t), y(t)].$$

Одновременно установлено, что $z \in C_\infty(Q)$.

Существование требуемой функции $z(t)$ доказано. Её единственность вытекает из того, что равенством (1) значения $z(t)$ определены однозначно на всюду плотном множестве.

Определение. Для любых $x, y \in C_\infty$ полагаем $F(x, y)$ равным тому элементу $z \in C_\infty$, существование которого доказано в предыдущей лемме.

В частности, таким образом определяется сумма $z = x + y$; именно, $z(t)$ — единственная функция в C_∞, которая совпадает с суммой $x(t) + y(t)$ во всех точках, где $x(t)$ и $y(t)$ конечны.

2.23. Теорема. *Множество C_∞ есть расширенное K-пространство.*

Доказательство. Выполнение всех условий, входящих в определение линейного множества (1.1 гл. I), и аксиомы II K-пространства — очевидное следствие из определения сложения и умножения на число. Выполнение прочих аксиом уже отмечено выше. Таким образом, C_∞ — K-пространство. Докажем, что оно — расширенное.

Пусть $x_\xi \in C_\infty$ $(\xi \in \Xi)$ и $x_\xi \mathrm{d}\, x_{\xi'}$ при $\xi \neq \xi'$. Докажем, что множество $\{x_\xi\}$ ограничено. Не уменьшая общности, можно считать, что все $x_\xi \geqslant \mathbf{0}$. Положим

$$y(t) = \sup_\xi x_\xi(t).$$

Из попарной дизъюнктности элементов x_ξ вытекает, что для каждого $t \in Q$ неравенство $x_\xi(t) > 0$ возможно лишь при одном значении $\xi \in \Xi$, т. е. для каждого $t \in Q$, $y(t) = x_\xi(t)$ при некотором ξ. Далее положим

$$x(t) = y_{\max}(t).$$

Так как $y(t)$ полунепрерывна снизу, то $x(t)$ непрерывна (2.14). Покажем, что множество

$$A = \underset{t}{Q}(x(t) = +\infty)$$

нигде не плотно.

Возьмём произвольное базовое множество E. Если все $x_\xi(t) = 0$ при $t \in E$, то и $y(t) = 0$ при $t \in E$, следовательно, $x(t) = 0$ на всём E, т. е. $E \cap A = \Lambda$. Если же найдутся $t_0 \in E$ и $\xi \in \Xi$, для которых $x_\xi(t_0) > 0$, то так как $x_\xi \in C_\infty$, можно считать, что $x_\xi(t_0) < +\infty$ *). Тогда, по непрерывности функции $x_\xi(t)$, существует окрестность $U(t_0) \subset E$, в которой $x_\xi(t) > 0$ и $x_\xi(t)$ ограничена. Отсюда следует, что

$$y(t) = x_\xi(t) \quad \text{при } t \in U(t_0).$$

---

*) Если $x(t)$ — функция из C_∞ и $x(t_0) = +\infty$, то благодаря непрерывности $x(t)$ и тому факту, что множество $\underset{t}{Q}(x(t) = +\infty)$ нигде не плотно, в любой окрестности точки t_0 найдутся точки, в которых $0 < x(t) < +\infty$.

Следовательно, $y(t)$ непрерывна при $t \in U(t_0)$ и ограничена. А тогда и

$$x(t) = y_{\max}(t) = y(t) < +\infty \quad \text{при } t \in U(t_0),$$

т. е. $A \cap U(t_0) = \Lambda$. Таким образом, $x \in C_\infty$ и $x_\xi \leqslant x$ при всех $\xi \in \Xi$. По теореме 2.24 гл. IV C_∞ — расширенное K-пространство, ч. и тр. д.

Единицей в C_∞ может служить функция $x(t) \equiv 1$. Заметим также, что C — нормальное подпространство пространства C_∞, содержащее ту же единицу.

2.3. (o)-сходимость в C_∞. Выясним конкретный смысл (o)-сходимости в пространствах $C(Q)$ и $C_\infty(Q)$. При этом, так как C — нормальное подпространство пространства C_∞, то благодаря общим результатам об (o)-сходимости в подпространствах (1.27 гл. II), достаточно рассмотреть C_∞.

Напомним, что смысл точных граней ограниченного множества в C_∞ уже установлен по ходу доказательства теоремы 2.18 (см. замечание об аксиоме V в 2.21).

2.31. Пусть $x_\xi \in C_\infty$, $\sup\limits_\xi x_\xi = +\infty$ (здесь верхняя грань понимается как элемент пространства C_∞). Положим $y(t) = \sup\limits_\xi x_\xi(t)$ $(t \in Q)$. Тогда существует базовое множество $E \subset Q$, на котором $y(t) = +\infty$ всюду, за исключением, может быть, некоторого множества I категории.

Доказательство. Пусть $x(t) = y_{\max}(t)$. По 2.14 $x(t)$ непрерывна, но в то же время $x \overline{\in} C_\infty$. Следовательно, множество $\underset{t}{Q}(x(t) = +\infty)$ не является нигде не плотным и, будучи замкнутым, должно содержать некоторое базовое множество E_0 (см. последнее утверждение в 1.22).

Допустим, что $y(t)$ не удовлетворяет требованию теоремы; тогда множество $A = \underset{t}{Q}(t \in E_0, y(t) < +\infty)$ — II категории. Но $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_n = Q(t \in E_0, y(t) \leqslant n)$, и так как $y(t)$ полунепрерывна снизу, то множества A_n замкнуты. Значит, при некотором n, A_n — II категории, следовательно, содержит некоторое базовое множество E'. Но ясно, что тогда $x(t) \leqslant n$ при $t \in E'$, а это противоречит тому, что $E' \subset E_0$. Наше предложение доказано.

2.32. Теорема. *Пусть $x_\xi \in C_\infty$ $(\xi \in \Xi)$. Для того чтобы множество $\{x_\xi\}$ было ограничено сверху, необходимо и достаточно, чтобы множество функций $\{x_\xi(t)\}$ было ограничено сверху во всех точках пространства Q, за исключением, может быть, некоторого нигде не плотного множества.*

При этом в условии достаточности нигде не плотное множество можно заменить множеством I категории.

Необходимость очевидна, а достаточность вытекает из 2.31, так как базовое множество не может быть представлено в виде суммы двух множеств I категории.

Замечание. Для ограниченности сверху множества $\{x_\xi\}$ в какомнибудь нормальном подпространстве пространства C_∞ необходимо и достаточно, чтобы функция $x(t)$, построенная по ходу доказательства предложения 2.31, принадлежала тому же подпространству.

2.33. Теорема об (o)-сходимости в C_∞. *Пусть $x_n \in C_\infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Для существования конечного $x = (o)\text{-}\lim x_n$ необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный $\lim x_n(t)$ при всех $t \in Q$ за исключением, может быть, некоторого множества I категории. При этом функция $x(t)$ определяется так:*

$$x(t) = (y_{\max})_{\min}(t) = (y_{\min})_{\max}(t), \tag{2}$$

где $y(t) = \overline{\lim}\, x_n(t)$ или $y(t) = \underline{\lim}\, x_n(t)$.

В частности, если x_n образует монотонную последовательность, то формула (2) *упрощается, а именно: если $x_n \nearrow x$, то $x(t) = y_{\max}(t)$, если $x_n \searrow x$, то $x(t) = y_{\min}(t)$.*

Доказательство. a) Необходимость.

1) Предположим сначала, что $x_n \searrow \mathbf{0}$. Тогда $\mathbf{0} \leqslant x_{n+1}(t) \leqslant x_n(t)$ при всех t, следовательно, при всех t существует $\lim x_n(t) = y(t) \geqslant 0$. Покажем, что при этом множество $A = \underset{t}{Q}(y(t) > 0)$ — I категории. Так как $y(t)$ полунепрерывна сверху, то множества $A_n = \underset{t}{Q}(y(t) \geqslant \frac{1}{n})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ замкнуты. Но $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Допустим, что A — не I категории, следовательно, хоть одно из A_n не является нигде не плотным. Но тогда A_n при этом n содержит некоторое базовое множество E. Положим

$$z(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{при } t \in E, \\ 0 & \text{при } t \overline{\in} E. \end{cases}$$

Очевидно, $z \in C_\infty$, $z > \mathbf{0}$, $y(t) \geqslant z(t)$ при всех t, и, значит, $x_n \overset{(o)}{\not\to} \mathbf{0}$. Таким образом, A — I категории.

Ясно, что аналогичный результат мы получим для возрастающей последовательности.

2) Пусть $x_n \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$ произвольно. Тогда существуют две монотонные последовательности x_n', $x_n'' \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$ такие, что $x_n' \geqslant x_n \geqslant x_n''$. Но по предыдущему пункту $x_n'(t) \longrightarrow 0$ и $x_n''(t) \longrightarrow 0$ за исключением множества I категории, а тогда то же верно и для $x_n(t)$.

3) Пусть $x_n \xrightarrow{(o)} x$. Тогда $x_n - x \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$, следовательно, $x_n(t) - x(t) \longrightarrow 0$ всюду, за исключением множества I категории, т. е. последовательность $x_n(t)$ имеет конечный предел всюду, за исключением множества I категории.

Попутно мы доказали, что если $x_n \xrightarrow{(o)} x \in C_\infty$, то $x_n(t) \to x(t)$ всюду, за исключением некоторого множества I категории.

b) Достаточность. Из условия теоремы, благодаря теореме 2.32, вытекает ограниченность множества $\{x_n\}$. Следовательно, существуют конечные $y = \overline{\lim}\, x_n$, $z = \underline{\lim}\, x_n$. Так как

$$y = (o)\text{-}\lim_{n \to \infty} \sup (x_n, x_{n+1}, \ldots),$$

а

$$\sup (x_n, x_{n+1}, \ldots) = (o)\text{-}\lim_{p \to \infty} (x_n \vee \ldots \vee x_{n+p}),$$

то, по уже установленному в конце доказательства необходимости, $y(t) = \overline{\lim}\, x_n(t)$ всюду, за исключением множества I категории, и потому, в силу условия теоремы,

$$x_n(t) \to y(t)$$

всюду, за исключением множества I категории. То же соотношение верно и для $z(t)$, откуда следует, что $y(t) = z(t)$ всюду за исключением множества I категории, т. е., во всяком случае, на всюду плотном множестве. Но тогда, по непрерывности,

$$y(t) \equiv z(t), \text{ т. е. } y = z = (o)\text{-}\lim x_n.$$

Выражение предела (2) устанавливается следующим образом. Если $x_n \nearrow x$, то

$$y(t) = \lim x_n(t) \leqslant x(t).$$

Так как $y(t)$ полунепрерывна снизу, то в силу 2.14 $y_{\max} \in C_\infty$; при этом

$$x_n(t) \leqslant y_{\max}(t) \leqslant x_{\max}(t) = x(t).$$

Таким образом, $y_{\max} = \sup x_n$, т. е. $x_n \nearrow y_{\max}$.

Аналогично, если $x_n \searrow x$, то

$$x(t) = y_{\min}(t), \text{ где } y(t) = \lim x_n(t).$$

В общем случае введём $u_n \nearrow x$, $v_n \searrow x$ так, чтобы $u_n \leqslant x_n \leqslant v_n$. Положим

$$u(t) = \lim u_n(t), \quad v(t) = \lim v_n(t).$$

Тогда, если $y(t) = \overline{\lim}\, x_n(t)$ (или $y(t) = \underline{\lim}\, x_n(t)$), то

$$u(t) \leqslant y(t) \leqslant v(t).$$

Отсюда, по уже доказанному для монотонных последовательностей,

$$x(t) = u_{\max}(t) \leqslant y_{\max}(t) \leqslant v_{\max}(t) = v(t);$$
$$x(t) = x_{\min}(t) \leqslant (y_{\max})_{\min}(t) \leqslant v_{\min}(t) = x(t),$$

т. е. первая из формул (2) доказана. Вторая доказывается аналогично.

2.34. Пусть $x_n \in C_\infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Для того чтобы $x_n \xrightarrow{(o)} +\infty$ необходимо и достаточно,

1) чтобы множество функций $x_n(t)$ было ограничено снизу во всех точках пространства Q за исключением некоторого множества I категории (или даже нигде не плотного);

2) чтобы в Q существовало базовое множество E_0, на котором всюду за исключением множества I категории, $\lim x_n(t) = +\infty$ *).

Доказательство. Условие 1) по теореме 2.32 есть условие ограниченности снизу последовательности $\{x_n\}$.

Будем доказывать условие 2).

a) Необходимость. Если $x_n \nearrow +\infty$, то условие 2) есть прямое следствие предложения 2.31. Если $x_n \xrightarrow{(o)} +\infty$ по произвольному закону, то существуют $y_n \leqslant x_n$ такие, что $y_n \nearrow +\infty$, а тогда условие 2) должно выполняться уже для $\lim y_n(t)$, следовательно, и для $\lim x_n(t)$.

b) Достаточность. Так как по условию 1) множество $\{x_n\}$ ограничено снизу, то элементы

$$y_n = \inf(x_n, x_{n+1}, \ldots) = (o)\text{-}\lim_{p \to \infty} (x_n \wedge \ldots \wedge x_{n+p})$$

конечны. Положим

$$z_n(t) = \inf_{k \geqslant n} x_k(t) = \lim_{p \to \infty} \inf_{n \leqslant k \leqslant n+p} x_k(t).$$

По ходу доказательства теоремы 2.33 было установлено, что

$$\inf_n^{n+p} x_k(t) \to y_n(t)$$

всюду, за исключением некоторого множества I категории, а в таком случае $y_n(t) = z_n(t)$ всюду, за исключением некоторого множества I категории,

*) На исключаемом множестве $\lim x_n(t)$ может, конечно, не существовать.

не зависящего от n. Тогда, благодаря условию 2), на E_0, за исключением множества I категории, $y_n(t) \to +\infty$, т. е. множество $\{y_n\}$ по теореме 2.32 не ограничено сверху, а так как $y_n \leqslant y_{n+1}$ при всех n, то $y_n \nearrow +\infty$; отсюда следует, что $x_n \xrightarrow{(o)} +\infty$.

2.35. Если:

1) $x_n \in C_\infty$ и образуют монотонную последовательность;

2) $x \in C_\infty$;

3) на всюду плотном множестве $x_n(t) \to x(t)$;

то $x_n \xrightarrow{(o)} x$.

Доказательство (для убывающей последовательности).

1) Пусть $x_n \geqslant x_{n+1}$ при всех n и $x_n(t) \to 0$ на всюду плотном множестве. Отсюда следует, что $x_n(t) \geqslant 0$ при всех n и всех t. Существует $y = (o)\text{-}\lim x_n \geqslant \mathbf{0}$. Так как $y \leqslant x_n$ при всех n, то $y(t) = 0$ на всюду плотном множестве, и, следовательно, $y = \mathbf{0}$.

2) Пусть x_n образуют убывающую последовательность и $x_n(t) \to x(t)$ на всюду плотном множестве $A \subset Q$. При всех $t \in A$, за исключением, может быть, некоторого нигде не плотного множества $x_1(t)$ и $x(t)$ имеют конечные значения, а тогда и все $x_n(t)$ имеют конечные значения; поэтому на всюду плотном множестве $x_n(t) - x(t) \to 0$. Следовательно, по предыдущему пункту, $x_n - x \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$, ч. и тр. д.

§ 3. Конкретное представление K-пространств посредством непрерывных функций

3.1. Погружение произвольного K-пространства в пространство непрерывных функций. Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

3.11. Теорема о представлении K-пространства. *Для любого K-пространства X существует такой вполне несвязный бикомпакт Q, что X изоморфно некоторому нормальному подпространству пространства $C_\infty(Q)$. При этом образ X полон в $C_\infty(Q)$.*

Доказательство. Пусть сначала X — расширенное K-пространство, $\mathfrak{E}(X)$ — его база. Построим вполне несвязный бикомпакт Q, база которого изоморфна $\mathfrak{E}(X)$ (1.34). Так как $\mathfrak{E}(X)$ — полная булевская алгебра, то Q удовлетворяет K-условию (см. 1.35). Тогда по теореме 2.23 $C_\infty(Q)$ — расширенное K-пространство, а его база изоморфна базе бикомпакта Q (см. следствия из 2.15). Но если базы расширенных K-пространств X и $C_\infty(Q)$ изоморфны, то X и $C_\infty(Q)$ тоже изоморфны (см. 2.21 гл. IV).

Если X — произвольное K-пространство, то оно обладает максимальным расширением (2.45 гл. IV), которое, по уже доказанному, изоморфно некоторому $C_\infty(Q)$. А тогда X изоморфно некоторому нормальному полному подпространству пространства $C_\infty(Q)$.

3.12. Замечания. 1. Мы уже установили в первой части доказательства теоремы 3.11, что если X — расширенное K-пространство, то оно изоморфно всему C_∞.

2. Если изоморфизм между максимальным расширением K-пространства X и C_∞ устанавливать так, как это указано в теореме 2.21

гл. IV, т. е. сопоставлять друг другу элементы с одинаковыми характеристиками, то образом базы пространства X будет база пространства C_∞. Отсюда вытекает, что неравенства $|x| \leqslant \alpha \mathbf{1}$ (для элемента $x \in X$) и $|x(t)| \leqslant \alpha$ (для соответствующей ему функции из C_∞) равносильны, т. е. подпространство ограниченных элементов пространства X изоморфно пространству ограниченных непрерывных функций $C(Q)$. При этом

$$\max |x(t)| = \|x\|$$

(определение нормы в K-пространстве ограниченных элементов см. в 2.3 гл. VI).

3.13. Представляет интерес прямое построение изоморфизма между K-пространством X с единицей и нормальным подпространством K-пространства $C_\infty(Q)$, где Q — вполне несвязный бикомпакт, состоящий из всех единичных функций f, заданных на базе $\mathfrak{E}(X)$ (см. 1.31—1.32). Укажем вкратце путь такого построения.

Для любых $x \in X$ и $f \in Q$ определим величину

$$x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, df(e_\lambda^x),$$

где e_λ^x — характеристика элемента x. Легко видеть, что $x(f)$ равно верхней грани тех значений λ, для которых $f(e_\lambda^x) = 0$. При этом возможно, что $x(f) = +\infty$, а также $x(f) = -\infty$ (последнее — если $f(e_\lambda^x) = 1$ при всех λ). Далее можно доказать, что $x(f)$ как функция от f принадлежит $C_\infty(Q)$ и что если каждому $x \in X$ сопоставить функцию $x(f)$, то получится взаимно однозначное соответствие между X и некоторым подмножеством пространства $C_\infty(Q)$. При этом устанавливается, что если $x_1(f)$ и $x_2(f)$ имеют конечное значение, то для $x = x_1 + x_2$

$$x(f) = x_1(f) + x_2(f),$$

а также, что $x > \mathbf{0}$ равносильно условию: $x(f) \geqslant 0$ для всех $f \in Q$, причём $x(f) > 0$ хоть для одного $f \in Q$.

Таким образом, X оказывается изоморфным некоторому линейному подмножеству пространства C_∞. Наконец, можно доказать, что образ пространства X есть нормальное подпространство пространства C_∞ (полное в нём).

Отметим одну теорему; она верна для любых бикомпактов, но мы ограничимся её доказательством для бикомпактов, удовлетворяющих K-условию.

3.14. Теорема. *Если Q и Q' — бикомпакты, удовлетворяющие K-условию, а K-пространства $C(Q)$ и $C(Q')$ изоморфны, то Q и Q' гомеоморфны.*

Доказательство. Пусть $X = C(Q)$, а $X' = C(Q')$. Тогда булевские алгебры $\mathfrak{E}(X)$ и $\mathfrak{E}(X')$ изоморфны. Но $\mathfrak{E}(X)$ изоморфна

совокупности всех базовых множеств бикомпакта Q, а $\mathfrak{E}(X')$ — бикомпакта Q. Тогда по 1.37 Q и Q' гомеоморфны, ч. и тр. д.

Отсюда, в частности, следует, что если для K-пространства $C(Q')$ построить бикомпакт Q так, как это сделано в начале настоящего параграфа, то Q будет гомеоморфен Q'.

Можно доказать, что в этом случае каждая единичная функция $f_0(e)$, заданная на $\mathfrak{E}(C)$, имеет вид $f_0(e) = e(t_0)$, где $t_0 \in Q'$.

3.2. Новые доказательства некоторых теорем. Реализация произвольного K-пространства с помощью функций может быть использована для доказательства многих теорем. Приведём три примера.

3.21. Теорема о сохранении соотношений*). *Пусть для вещественных непрерывных функций из равенств*

$$F_1(\lambda, \mu) = F_2(\lambda, \mu), \quad G_1(\lambda, \mu) = G_2(\lambda, \mu)$$

вытекает равенство

$$H_1(\lambda, \mu) = H_2(\lambda, \mu).$$

Тогда то же заключение остаётся верным, если числовые аргументы λ, μ *заменить элементами* $x, y \in C_\infty(Q)$ **).

Доказательство. Возьмём $x, y \in C_\infty(Q)$ и допустим, что

$$F_1(x, y) = F_2(x, y), \quad G_1(x, y) = G_2(x, y).$$

Это означает, что за исключением нигде не плотного множества Φ, на котором $x(t)$ или $y(t)$ обращаются в $\pm\infty$,

$$F_1[x(t), y(t)] = F_2[x(t), y(t)],$$

$$G_1[x(t), y(t)] = G_2[x(t), y(t)].$$

Но тогда по условию теоремы, при $t \overline{\in} \Phi$,

$$H_1[x(t), y(t)] = H_2[x(t), y(t)],$$

а так как элементы $z_1 = H_1(x, y)$ и $z_2 = H_2(x, y) \in C_\infty(Q)$, то, по непрерывности, $z_1(t) \equiv z_2(t)$, т. е. $z_1 = z_2$, ч. и тр. д.

3.22. Теорема об (o)-непрерывности функций***). *Если* $x_n \xrightarrow{(o)} x$, $y_n \xrightarrow{(o)} y$ $(x_n, y_n, x, y \in C_\infty(Q))$, *то*

$$F(x_n, y_n) \xrightarrow{(o)} F(x, y).$$

Доказательство. По ходу доказательства теоремы 2.33 мы установили, что если $x_n \xrightarrow{(o)} x$, $y_n \xrightarrow{(o)} y$, то

$$x_n(t) \longrightarrow x(t), \quad y_n(t) \longrightarrow y(t)$$

на всём Q, за исключением некоторого множества I категории $A \subset Q$. Можно считать, что в A включены также все точки $t \in Q$, где хоть одна из рассматриваемых функций равна $\pm\infty$.

---

*) См. 3.11 гл. IV.

**) Существование функций для абстрактных аргументов доказано в лемме 2.22.

***) См. 3.15 гл. IV.

Положим $z_n = F(x_n, y_n)$, $z = F(x, y)$. Тогда при $t \overline{\in} A$

$$z_n(t) = F[x_n(t), y_n(t)] \longrightarrow F[x_n(t)\, y(t)] = z(t).$$

Таким образом, при $t \overline{\in} A$ существует конечный предел для последовательности функций $z_n(t)$. Тогда по теореме 2.33 существует $u = (o)\text{-}\lim z_n$ и при этом

$$z_n(t) \longrightarrow u(t)$$

всюду, за исключением множества I категории. Но тогда $u(t) = z(t)$ на всюду плотном множестве и, значит, $u = z$.

Теорема доказана.

3.23. Теорема о конечномерных пространствах *). *Если K-пространство X конечномерно и n — число его измерений, то оно изоморфно эвклидову пространству R_n.*

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — линейно независимые элементы из X. Положим $x^* = |x_1| + \ldots + |x_n|$. Тогда для любого $x \in X$ $|x| = \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right| \leqslant \max_i |\alpha_i|\, x^*$, следовательно, x^* играет роль единицы в X и X состоит из ограниченных элементов. Таким образом, X изоморфно пространству $C(Q)$ (см. 3.12) и $C(Q)$ n-мерно.

Докажем, что Q состоит из n точек. Если предположить, что Q состоит из меньшего числа точек, то ясно, что число измерений пространства $C(Q)$ будет меньше n. Допустим, что Q содержит $n+1$ точку $t_1, \ldots, t_{n+1}$.

По теореме Урысона для каждого $i = 1, 2, \ldots, n+1$ существует непрерывная функция

$$x_i(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t = t_i, \\ 0 \text{ при } t = t_j \ (j \neq i). \end{cases}$$

Но тогда ясно, что $x_1 \ldots, x_{n+1}$ — линейно независимые элементы пространства $C(Q)$, что опять невозможно. Итак, $Q = \{t_1, \ldots, t_n\}$.

Возьмём в качестве единицы в $C(Q)$ снова $x(t) \equiv 1$. Тогда определённые выше x_i суть единичные элементы пространства $C(Q)$ и каждый $x \in C(Q)$ имеет вид $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. При этом ясно, что соответствие

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \longleftrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R_n$$

между $C(Q)$ и R_n есть изоморфизм, ч. и тр. д.

§ 4. Конкретное представление K-пространств с обобщённой аддитивной нормой

4.1. Общее представление пространств с обобщённой аддитивной нормой. Теорема о реализации булевской алгебры в виде совокупности открыто-замкнутых множеств некоторого бикомпакта позволяет для некоторых классов K-пространств (рассмотренных в гл. XI) указать возможность конкретного их представления с помощью K-пространств измеримых функций, заданных на некотором бикомпакте с абсолютно аддитивной мерой.

4.11. K-пространство S_Q. Пусть Q — бикомпакт, для борелевских множеств которого определена абсолютно аддитивная мера mE, т. е. для

*) См. 5.25 гл. III.

всякого борелевского множества $E \subset Q$ определено неотрицательное вещественное число mE, называемое мерой множества E, обладающее следующими свойствами:

1) $mQ = 1$;

2) если $G \subset Q$ — не пустое открытое множество, то $mG > 0$;

3) если $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, — попарно непересекающиеся борелевские множества, содержащиеся в Q, то

$$m \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \sum_{n=1}^{\infty} mE_n.$$

Последнее свойство меры именуется её абсолютной аддитивностью.

Через S_Q обозначим совокупность вещественных функций $x(q)$ $(q \in Q)$, измеримых по отношению к mE (эквивалентные функции отождествляются). Нетрудно проверить, что S_Q — линейное множество. Вместе с тем, если соотношение $x > 0$ понимать в том смысле, что $x(q) \geqslant 0$ почти всюду в Q и $x(q)$ не эквивалентна нулю, то S_Q оказывается K-пространством. Более того, в S_Q можно определить метрическую функцию ρ так, что S_Q превращается в KM-пространство. С этой целью достаточно, например, положить

$$\rho(x) = \int_Q \frac{|x(q)|}{1 + |x(q)|}\, dm(E) \qquad (x \in S_Q),$$

где интеграл понимается в смысле Лебега*).

Все свойства метрической функции проверяются в S_Q с помощью тех же соображений, что и в S_E, где E — измеримое множество в R_1 (т. е. в K-пространстве S, рассмотренном выше, см. 1.41, гл. VI). Заметим, наконец, что S_Q — расширенное пространство, так как всякое множество его попарно дизъюнктных элементов, очевидно, ограничено в нём (см. 2.24 гл. IV). S_Q — K-пространство счётного типа.

Легко видеть, что соотношение $x_n \xrightarrow{(o)} x$ в S_Q означает, что $x_n(q) \longrightarrow x(q)$ почти всюду в Q, а $x_n \xrightarrow{(t)} x$ в Q равносильно сходимости $x_n(q)$ к $x(q)$ по мере.

4.12. K-пространство L_Q. Совокупность измеримых функций $x(q)$ $(q \in Q)$, для которых

$$\int_Q |x(q)|\, dm(E) < +\infty,$$

образует нормальное подпространство $L_Q \subset S_Q$, полное в S_Q (следовательно, S_Q есть максимальное расширение K-пространства L_Q.) Ясно, что все ограниченные измеримые в Q функции суммируемы, т. е. принадлежат L_Q.

L_Q становится KB-пространством, если положить

$$\|x\| = \int_Q |x(q)|\, dm(E),$$

---

*) Существование интеграла для всякой ограниченной и измеримой в Q функции, а также обычные его свойства устанавливаются совершенно так же, как и в случае измеримых функций вещественной переменной.

притом норма в L_Q, очевидно, аддитивна для положительных слагаемых. Все эти утверждения проверяются так же, как и в пространстве L_E, которое мы обозначали выше просто L, являющимся простым примером пространства L_Q и его прототипом.

Если в S_Q ввести «норму» положительного элемента с помощью соотношения

$$\|x\| = \int_Q x(q)\, dm(E),$$

то S_Q превращается в K-пространство с обобщённой аддитивной нормой. Действительно, для всякой $x(q)$ $(x > \mathbf{0},\ x \in S_Q)$ найдётся ограниченная измеримая функция $\bar{x}(q)$, $\mathbf{0} < \bar{x} \leqslant x$ такая, что $0 < \|\bar{x}\| < +\infty$. Наконец, очевидно, что $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ для всяких двух положительных элементов из S_Q.

Таким образом, S_Q и вместе с тем всякое его подпространство есть пространство с обобщённой аддитивной нормой. В связи с этим естественно поставить вопрос, не будет ли всякое K-пространство с обобщённой аддитивной нормой изоморфно некоторому нормальному подпространству пространства S_Q, т. е. не может ли оно быть конкретно представлено с помощью некоторого пространства измеримых функций, заданных в Q? С помощью результатов настоящей главы этот вопрос решается в положительном смысле для одного частного класса таких пространств, именно для пространств с обобщённой аддитивной нормой и единицей. Сначала установим следующее важное предложение.

4.13. Теорема. *Всякое КВ-пространство X с аддитивной (для положительных элементов) нормой и единицей* $\mathbf{1}$, *для которого* $\|\mathbf{1}\| = 1$, *изоморфно и изометрично некоторому* L_Q.

Доказательство. Совокупность единичных элементов пространства X представляет собой булевскую алгебру $\mathfrak{E}$, изоморфную совокупности базовых множеств E некоторого вполне несвязного бикомпакта Q (см. 1.35). Для каждого множества $P \subset Q$ определим внешнюю меру, положив

$$m^*P = \inf_{E_e \supset P} \{\|e\|\},$$

где E_e базовое множество, отвечающее элементу $e \in \mathfrak{E}$ при изоморфизме между $\mathfrak{E}$ и базой бикомпакта Q. В частности, для базового множества E_e $m^*E_e = \|e\|$. Ясно, что $m^*P \geqslant 0$ и что из $P_1 \subset P_2$ следует $m^*P_1 \leqslant m^*P_2$. Далее, если $\{P_k\}$ последовательность подмножеств Q, то

$$m^*\left(\bigcup_k P_k\right) \leqslant \sum_k m^*P_k.$$

Действительно, для всякого $k = 1, 2, \ldots$, найдётся базовое множество E_{e_k} удовлетворяющее условиям:

$$E_{e_k} \supset P_k \text{ и } \|e_k\| < m^*P_k + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Пусть $e = \sup_k \{e_k\}$, тогда E_e — базовое множество, содержащее все множества E_{e_k} и, следовательно, множество $\bigcup_k P_k$. По определению внешней меры,

$$m^*\left(\bigcup_k P_k\right) \leqslant \|e\| \leqslant \sum_k \|e_k\| \leqslant \sum_k m^*P_k + \varepsilon$$

и, принимая во внимание произвольность числа ε,

$$m^*(\bigcup_k P_k) \leqslant \sum_k m^* P_k.$$

Таким образом, внешняя мера m^*P удовлетворяет известным условиям Каратеодори *), и потому среди подмножеств Q можно выделить класс измеримых по отношению к m^*P. Именно, множество $P \subset Q$ называется измеримым, если для любой пары множеств M и N, таких что $M \subset P$ и $N \subset CP$, имеет место

$$m^*(M \cup N) = m^*M + m^*N;$$

при этом меру множества P определяют по формуле $mP = m^*P$. Известно, что таким образом определённая мера абсолютно аддитивна.

Легко видеть, что всякое базовое множество $E \subset Q$ измеримо. Действительно, пусть $M \subset E$, $N \subset CE$ и R — базовое множество, содержащее $M \cup N$. Обозначая через e, Ce и r единичные элементы, отвечающие при упомянутом выше изоморфизме соответственно, базовым множествам E, CE и R, имеем: $m^*R = \|r\| = \|e \wedge r\| + \|Ce \wedge r\| = m^*(E \cap R) + m^*(CE \cap R) \geqslant m^*M + m^*N$. Отсюда, ввиду произвольности R,

$$m^*(M \cup N) \geqslant m^*M + m^*N.$$

Принимая во внимание, что обратное неравенство имеет место в силу свойств внешней меры, заключаем, что

$$m^*(M \cup N) = m^*M + m^*N,$$

откуда и следует измеримость множества E.

Покажем, наконец, что для всякого измеримого множества $P \subset Q$ существует эквивалентное ему базовое множество E. В самом деле, найдётся такая последовательность $\{E_{e_k}\}$ базовых множеств, содержащих множество P, что

$$\lim_{k \to \infty} mE_{e_k} = mP.$$

Пусть $e = \inf_k \{e_k\}$, тогда множество E_e — базовое, и $mE_e = mP$.

С другой стороны, множество $F = \bigcap E_{e_k}$ измеримо (как пересечение измеримых), содержит P и $mF = mP$. Отсюда ясно, что $m(E_e \setminus P) = m(P \setminus E_e) = 0$, т. е. множества E_e и P эквивалентны.

Рассмотрим теперь K-пространство L_Q суммируемых функций, заданных на бикомпакте Q. Базой пространства L_Q может служить совокупность характеристических функций измеримых множеств (эквивалентные отождествляются); но из предыдущего ясно, что эта совокупность изоморфна и изометрична базе пространства X, так что базы пространств X и L_Q изоморфны и изометричны. Нетрудно видеть, что KB-пространства с аддитивной нормой и единицей с изоморфными и изометричными базами изоморфны и изометричны, следовательно, X изоморфно и изометрично L_Q, ч. и тр. д.

Следствие 1. *Всякое KB-пространство X с единицей изоморфно и изометрично некоторому K-пространству суммируемых функций, заданных на бикомпакте Q.*

Действительно, в силу 1.34 гл. XI X допускает расширение X^*, представляющее собой KB-пространство с аддитивной нормой. По доказанному, X^* изоморфно и изометрично некоторому L_Q, а тогда X изоморфно и изометрично подпространству $L'_Q \subset L_Q$, нормально и полно содержащемуся в L_Q.

---

*) См., например, С. Сакс [1], гл. II.

Следствие 2. *Максимальное расширение всякого KB-пространства с единицей X изоморфно некоторому S_Q.*

В самом деле, X изоморфно некоторому L'_Q, расширение которого есть L_Q; поэтому максимальные расширения пространств X, L'_Q и L_Q изоморфны. Но максимальное расширение пространства L_Q есть, очевидно, S_Q. Отсюда и максимальное расширение пространства X изоморфно S_Q.

Возвращаясь к K-пространствам с обобщённой аддитивной нормой и единицей, напомним, что всякое такое пространство, для которого $\|\mathbf{1}\| < +\infty$, имеет максимальное расширение, изоморфное максимальному расширению некоторого KB-пространства с единицей (3.28—3.29 гл. XI), поэтому имеет место следующее предложение.

4.14. Всякое K-пространство X с обобщённой аддитивной нормой и единицей, в котором норма единицы конечна, изоморфно нормальному подпространству некоторого S_Q.

Пусть теперь X — произвольное K-пространство с обобщённой аддитивной нормой; его можно разложить на компоненты X_α ($\alpha \in A$), представляющие собой K-пространства с обобщённой аддитивной нормой и единицей, причём $\|\mathbf{1}_{X_\alpha}\| < +\infty$. Сопоставляя это с предыдущим предложением, получаем следующую теорему.

4.15. Теорема. *Всякое K-пространство X с обобщённой аддитивной нормой может быть разложено на компоненты, каждая из которых изоморфна некоторому K-пространству измеримых функций, заданных на вполне несвязном бикомпакте (для каждой компоненты — своём).*

Тем самым полностью решается вопрос о возможности реализации K-пространств с обобщённой аддитивной нормой с помощью пространств измеримых функций.

Из предыдущего также ясно, что всякое соединение K-пространств измеримых функций, заданных на некоторых бикомпактах, есть K-пространство с обобщённой аддитивной нормой. Таким образом, класс K-пространств с обобщённой аддитивной нормой совпадает с классом K-пространств, допускающих представление с помощью пространств измеримых функций, задаваемых на бикомпактах с абсолютно аддитивной мерой.

4.2. Конкретное представление сепарабельных K-пространств с обобщённой аддитивной нормой. Указанное в предыдущих пунктах конкретное представление K-пространств с обобщённой аддитивной нормой пригодно для произвольного K-пространства этого вида. Однако в частных случаях, используя иные соображения, возможно дать более простую и естественную реализацию пространства, не опирающуюся на теорему о реализации булевской алгебры в виде базы вполне несвязного бикомпакта. Так обстоит дело, например, для всех дискретных K-пространств: они изоморфны обычным пространствам вещественных функций, заданных на некоторых абстрактных множествах (см. 5.22 гл. III). Среди непрерывных K-пространств с обобщённой аддитивной нормой можно выделить класс сепарабельных пространств, допускающих особенно простую реализацию с помощью пространств измеримых функций, заданных на отрезке [0, 1].

Определение. K-пространство X называется *сепарабельным*, если в нём содержится счётное всюду плотное множество. Это означает, что в X содержится множество $D = \{x_n\}$ ($n = 1, 2, \ldots$) такое, что для всякого $x \in X$ найдётся последовательность $x_{n_k} \xrightarrow{(o)} x$.

4.21. Пусть X — элементарное, сепарабельное, расширенное K-пространство, причем $\|\mathbf{1}\| = 1$. Тогда база $\mathfrak{E}(X)$ сепарабельна, т. е. в $\mathfrak{E}$ содержится счётное плотное в нём множество.

Доказательство. X — KM-пространство (3.23 гл. XI) и, будучи сепарабельным, представляет собой топологическое пространство со счётной

базой (так, например, совокупность сфер с рациональными радиусами и центрами в точках счётного, плотного в X, множества обладает свойствами счётной базы в X). В таких пространствах, по известной теореме Бэра-Хаусдорфа *), всякая вполне упорядоченная монотонная система замкнутых множеств содержит не более счётного множества различных.

Пусть теперь $\{e_\xi\}$ $(\xi < \gamma)$ — вполне упорядоченная последовательность всех элементов из $\mathfrak{E}$, а $\mathfrak{E}_\alpha = \{e_\xi\}$ $(\xi < \alpha)$. Тогда, очевидно,

$$\mathfrak{E}_1 \subset \mathfrak{E}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{E}_\alpha \subset \ldots \ (\alpha < \gamma)$$

и

$$\overline{\mathfrak{E}}_1 \subset \overline{\mathfrak{E}}_2 \subset \ldots \subset \overline{\mathfrak{E}}_\alpha \subset \ldots \ (\alpha < \gamma),$$

где $\overline{\mathfrak{E}}_\alpha$ — замыкание множества $\mathfrak{E}_\alpha$. Заметим, что $\overline{\mathfrak{E}}_\alpha \subset \mathfrak{E}$, так как предел последовательности единичных элементов есть снова единичный элемент, а в силу теоремы о диагональной последовательности (1.21 гл. V), замыкание всякого множества в регулярном K-пространстве получается присоединением всех предельных элементов. По теореме Бэра-Хаусдорфа, начиная с некоторого числа α первого или второго числового класса,

$$\overline{\mathfrak{E}}_\alpha = \overline{\mathfrak{E}}_{\alpha+1} = \ldots$$

Отсюда следует, что $\overline{\mathfrak{E}}_\alpha$ совпадает с $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{E}_\alpha$ — счётное, плотное в $\mathfrak{E}$, его подмножество.

4.22. Лемма. *Если X — непрерывное K-пространство с сепарабельной базой $\mathfrak{E}$ и $D = \{e_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — плотное в $\mathfrak{E}$ множество единичных элементов, то в $\mathfrak{E}$ содержится упорядоченное по возрастанию множество $E = \{e_t\}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, подобное множеству вещественных чисел отрезка* [0, 1] *обладающее следующим свойством:*

всякий элемент $e_n \in D$ может быть представлен в виде

$$e_n = (e_{r_1''} - e_{r_1'}) + (e_{r_2''} - e_{r_2'}) + \ldots + (e_{r_{k_n}''} - e_{r_{k_n}'}),$$

где $r_1' < r_1'' \leqslant r_2' < r_2'' \leqslant \ldots \leqslant r_{k_n}' < r_{k_n}''$ — рациональные числа отрезка [0, 1].

Доказательство. Введём следующую вспомогательную операцию: пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — какая-либо система попарно дизъюнктных единичных элементов и $e > 0$ — произвольный единичный элемент; систему единичных элементов

$$e_1', e_1'', e_2', e_2'', \ldots, e_n', e_n'', e_n^*, \tag{1}$$

где

$$e_k' = e_k \wedge e,\ e_k'' = e_k - e_k' \ (k = 1, 2, \ldots) \text{ и } e_n^* = e - (e_1' + e_2' + \ldots + e_n'), \tag{2}$$

назовём разбиением данной системы с помощью элемента e.

Из дизъюнктности элементов $e_1, \ldots, e_n$ (1) и определения элементов (2) легко следует их попарная дизъюнктность и равенство

$$e = e_n^* + e_1' + e_2' + \ldots + e_n'. \tag{3}$$

Пусть $D = \{e_n\}$ — счётное множество единичных элементов, всюду плотное в $\mathfrak{E}$. Отправляясь от множества D, определим системы единичных элементов $\mathfrak{E}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ следующим образом.

Положим $\mathfrak{E}_1 = \{e_1\}$, и если системы $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_{n-1}$ уже определены, то систему $\mathfrak{E}_n$ определим как разбиение системы $\mathfrak{E}_{n-1}$ с помощью элемента $e_n \in D$. Пусть

$$\mathfrak{E}_n = (e_1', e_1'', \ldots, e_k', e_k'', \ldots, e_{k_n}', e_{k_n}'', e_n^*).$$

---

*) См., например, П. С. Александров [2], стр. 274.

Введём в рассмотрение множества

$$E_n = (e_1', e_1' + e_1'', e_1' + e_1'' + e_2', \ldots, e_1' + \ldots + e_{k_n}'' + e_n^*) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

В силу свойств операции разбиения элементы, составляющие систему $\mathfrak{E}_n$, попарно дизъюнктны, поэтому элементы множества E_n являются единичными. Каждый элемент системы $\mathfrak{E}_n$ (за исключением первого) равен разности двух элементов из E_n; наконец, элемент $e_n \in D$ может быть представлен в виде

$$e_n = e_n^* + e_1' + \ldots + e_{k_n}'$$

и, следовательно, равен сумме разностей некоторых элементов из E_n. Каждое множество E_n упорядочено по возрастанию (т. е. любые два элемента из E_n сравнимы между собой) и, по определению $\mathfrak{E}_n$ и E_n, $E_n \subset E_{n+1}$, так что теоретико-множественная сумма

$$E^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

представляет собой счётное множество единичных элементов, упорядоченное по возрастанию. Существует максимальное упорядоченное по возрастанию множество единичных элементов пространства X, содержащее E^*, т. е. множество E, обладающее тем свойством, что всякий единичный элемент $e \in X$, не принадлежащий E, несравним, по крайней мере, с одним элементом из E, так что $E \cup \{e\}$ уже не будет упорядоченным множеством. В самом деле, пусть $M = \{e_\xi\}$ $(\xi < \gamma)$ — трансфинитная последовательность всех единичных элементов пространства X. Если E^* не является максимальным, то пусть e_{ξ_1} — первый элемент из M, сравнимый со всеми элементами множества E^*. Множество

$$E_1^* = E^* \cup \{e_{\xi_1}\},$$

очевидно, упорядочено и содержит E^*. Если множества

$$E_1^* \subset E_2^* \subset \ldots \subset E_\beta^* \subset \ldots$$

уже определены для всех $\beta < \alpha$ и их сумма E_α' (также упорядоченное множество, содержащее все E_β с $\beta < \alpha$) не будет максимальной, то найдётся первый элемент e_{ξ_α}, принадлежащий M, не содержащийся в E_α' и сравнимый со всеми элементами из E_α'. Положим

$$E_\alpha = E_\alpha' \cup \{e_{\xi_\alpha}\}.$$

Тем самым определяется последовательность упорядоченных множеств

$$E^* \subset E_1 \subset \ldots \subset E_\alpha \subset \ldots$$

Их сумма E и будет максимальным упорядоченным множеством, содержащим E^*. Так как нуль и единица пространства X сравнимы со всеми единичными элементами из X, то они содержатся в E.

Теперь покажем, что всякий интервал (e', e'') в E *) не пуст и содержит элемент из E^*. Допустим, что интервал (e', e'') не содержит элементов из E^*. Тогда для всяких двух элементов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$, принадлежащих E^* $(\bar{e}_1 < \bar{e}_2)$,

---

*) Под интервалом (e', e'') в E мы понимаем множество всех элементов $e \in E$, заключённых между e' и e'', т. е. $e' < e < e''$.

могут представиться следующие возможности:

1) $\bar{e}_1 < \bar{e}_2 \leqslant e' < e''$,

2) $e' < e'' \leqslant \bar{e}_1 < \bar{e}_2$ и

3) $\bar{e}_1 \leqslant e' < e'' \leqslant \bar{e}_2$.

Других возможностей быть не может, так как интервал (e', e''), по предположению, не содержит элементов из E^*. В первых двух случаях элементы $\bar{e}_2 - \bar{e}_1$ и $e'' - e'$ дизъюнктны. В третьем $\bar{e}_2 - \bar{e}_1 \geqslant e'' - e'$. Всякий элемент $e_n \in D$, как было установлено выше, может быть представлен в виде суммы разностей некоторых пар элементов из E^*. Поэтому, когда все эти разности дизъюнктны с $e'' - e'$, то и их сумма e_n дизъюнктна с $e'' - e'$; если же хотя бы одна из этих разностей не дизъюнктна с $e'' - e'$, то она больше или равна $e'' - e'$ и тем более $e_n \geqslant e'' - e'$. Итак, всякий элемент $e_n \in D$ либо дизъюнктен с $e'' - e'$, либо $\geqslant e'' - e'$. Но по условию леммы X — непрерывное пространство, следовательно, элемент $e'' - e'$ может быть представлен в виде суммы двух дизъюнктных положительных элементов; пусть e^* — один из них. Очевидно, e^* — единичный элемент и $e^* < e'' - e'$. Так как D всюду плотно в $\mathfrak{E}$, то найдётся последовательность $\{e_{n_k}\}$ элементов из D такая, что

$$(o)\text{-}\lim_{k \to \infty} e_{n_k} = e^*.$$

Если бы среди элементов e_{n_k} нашлось бесконечное множество дизъюнктных с $e'' - e'$, то и e^* был бы дизъюнктен с $e'' - e'$, что невозможно ввиду неравенства $\mathbf{0} < e^* < e'' - e'$; следовательно, начиная с некоторого $k = k_0$ все элементы $e_{n_k} \geqslant e'' - e'$, а в таком случае и $e^* \geqslant e'' - e'$, что опять-таки противоречит тому же неравенству. Полученное противоречие явилось результатом предположения о существовании в E интервала, не содержащего элемента из E^*. Следовательно, всякий интервал в E содержит элементы из E^*. Вместе с тем доказано, что множество E лишено «скачков», ибо $E^* \subset E$ и E^* плотно в E.

Покажем теперь, что E не имеет «щелей», т. е. если E разложено на два класса — «нижний» A и «верхний» B, то $\sup A = \inf B$. Действительно, очевидно, $\sup A \leqslant \inf B$. Далее, $\sup A$ сравним со всеми элементами из A и B и, следовательно, со всеми элементами из E; но E — максимальное упорядоченное множество, содержащее E^*, поэтому $\sup A \in E$. Это же справедливо и относительно $\inf B$. Если бы теперь $\sup A < \inf B$, то интервал $(\sup A, \inf B)$ был бы пустым в E, что, по доказанному, невозможно. Следовательно, $\sup A = \inf B$ и E лишено «щелей».

Таким образом, E — упорядоченное множество, лишённое «скачков» и «щелей» и содержащее первый и последний элементы ($\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$), иначе говоря, «замкнутое и непрерывное» множество, и E^* — плотное в нём счётное подмножество. В таком случае, по известному предложению теории упорядоченных множеств*), E подобно отрезку $[0, 1]$ и элементам множества E^* в этом соответствии отвечают рациональные точки отрезка $[0, 1]$. Так как всякий элемент $e_n \in D$ может быть представлен в виде суммы разностей некоторых пар элементов из E^*, а каждая такая разность представляется в виде $e_{r''} - e_{r'}$, где $r' < r''$ — рациональные точки отрезка $[0, 1]$, то

$$e_n = (e_{r''_1} - e_{r'_1}) + \ldots + (e_{r''_{k_n}} - e_{r'_{k_n}}), \tag{4}$$

причём слагаемые в правой части равенства — попарно дизъюнктные единичные элементы. Следовательно, можно считать, что

$$r'_1 < r''_1 \leqslant r'_2 < r''_2 \leqslant \ldots \leqslant r'_{k_n} < r''_{k_n},$$

и лемма доказана.

---

*) См. П. С. Александров [2], стр. 72.

Замечание. Можно всегда предполагать, что D содержит точные границы всех своих конечных подмножеств. Действительно, множество всех таких границ счётно и присоединение его к множеству D не изменит ни его мощности, ни его свойства быть всюду плотным в $\mathfrak{E}$.

4.23. Теорема. *Сепарабельное расширенное непрерывное элементарное K-пространство X, в котором $\|\mathbf{1}\|=1$, изоморфно K-пространству S вещественных измеримых функций, заданных на отрезке* [0, 1].

Доказательство. Достаточно показать, что базы пространств X и S изоморфны. Пусть $E=\{e_t\}$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ — множество единичных элементов пространства X, построенное в предыдущей лемме. Положим

$$s=\varphi(t)=\|e_t\| \quad (0\leqslant t\leqslant 1).$$

$\varphi(t)$ — непрерывная, существенно возрастающая от нуля до единицы вещественная функция аргумента t. В таком случае, соответствие $s=\varphi(t)$, отображающее отрезок [0, 1] на самого себя, взаимно однозначно и сохраняет упорядочение, т. е. является соответствием подобия. Поэтому, заменяя индекс t элемента $e\in E$ через s, будем иметь:

$$\|e_s\|=s.$$

Отнесём всякому единичному элементу $e=e_{s''}-e_{s'}$ $(0\leqslant s'<s''\leqslant 1)$ интервал $\bar{e}=(s', s'')$ отрезка [0, 1]. Очевидно,

$$\|e\|=s''-s'=m\bar{e},$$

где $m\bar{e}$ — лебегова мера, т. е. длина интервала $\bar{e}$.

Единичному элементу $e=\mathop{\mathbf{S}}\limits_n\{e_{\bar{e}_n}-e_{s'_n}\}$ отнесём открытое множество $\bar{e}=\bigcup\limits_n(s'_n, s''_n)$, т. е. теоретико-множественную сумму соответствующих интервалов. Так как элементы $e_{s''_n}-e_{s'_n}$ попарно дизъюнктны, то интервалы (s'_n, s''_n) без общих точек и

$$\|e\|=\sum_n\|e_{s''_n}-e_{s'_n}\|=\sum_n(s''_n-s'_n)=m\bar{e}.$$

Пусть теперь e — произвольный единичный элемент пространства X. В множестве D, всюду плотном в $\mathfrak{E}$, найдётся последовательность элементов $\{e_n\}$ такая, что

$$e=(o)\text{-}\lim_{n\to\infty}e_n=\inf_n[\sup(e_n, e_{n+1}\ldots)]. \tag{5}$$

Отнесём элементу e множество

$$\bar{e}=\bigcap_n\Big(\bigcup_{i=n}^{\infty}\bar{e}_i\Big),$$

где $\bar{e}_i$ — сумма конечного числа интервалов без общих точек, отвечающая в силу (4) элементу $e_i\in D$.

Множество $\bar{e}$, очевидно, измеримо и, таким образом, каждому единичному элементу $e\in X$ поставлено в соответствие измеримое множество $\bar{e}\subset[0, 1]$. Легко видеть, что $\|e\|=m\bar{e}$.

Действительно, в силу разложения (4) $\|e_n\|=m\bar{e}_n$, и если вместо измеримых множеств $\bar{e}_n$ рассматривать их характеристические функции, т. е. элементы из S, то соотношение (5) равносильно тому, что $\bar{e}=(o)\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\bar{e}_n$ в S

(для характеристических функций мы сохраняем те же обозначения, что и для соответствующих им множеств). Отсюда

$$\|e\| = \lim_{n\to\infty} \|e_n\| = \lim_{n\to\infty} m\bar{e}_n = m\bar{e}. \tag{6}$$

1) Покажем, что соответствие $e \to \bar{e}$ не зависит от выбора последовательности элементов из D, сходящейся к e. Действительно, пусть $e_n' \xrightarrow{(o)} e$ ($e_n' \in D$), тогда и $e_n'' = (e_n \vee e_n') \xrightarrow{(o)} e$. В силу сделанного к предыдущей лемме замечания, можно считать, что $\bar{e}_n'' \in D$; следовательно, $\|e_n''\| = m\bar{e}_n''$ и $\|e\| = \lim\limits_{n\to\infty} m\bar{e}_n''$. Очевидно, $\bar{e}_n'' \supset \bar{e}_n$ и $\bar{e}_n'' \supset \bar{e}_n'$, поэтому множество $\bar{e}''$, отвечающее (o)-$\lim\limits_{n\to\infty} e_n''$, содержит множества $\bar{e}$ и $\bar{e}'$ (отвечающие (o)-$\lim\limits_{n\to\infty} e_n'$). Но, по предыдущему, $m\bar{e} = \|e\|$ и таким же образом $m\bar{e}' = \|e\|$; кроме того, согласно указанному выше, $m\bar{e}'' = \|e\|$. Отсюда

$$m\bar{e}'' = m\bar{e}' = m\bar{e},$$

и так как $\bar{e}'' \supset \bar{e}$ и $e'' \supset \bar{e}'$, то множества $\bar{e}''$, $\bar{e}'$ и $\bar{e}$ эквивалентны.

Итак, соответствие $e \to \bar{e}$ однозначно (напомним, что эквивалентные множества отождествляются).

2) Если $e' > e''$, то $\bar{e}' \supset \bar{e}''$ (с точностью до множества меры нуль) и $m\bar{e}' > m\bar{e}''$. Последнее следует из соотношения (6); покажем первое. Пусть $e_n' \to e'$ и $e_n'' \to e''$ ($e_n', e_n'' \in D$); тогда $e_n^* = (e_n' \vee e_n'') \to e'$. Множество $\{e_n^*\} \subset D$ и $e_n', e_n'' \leq e_n^*$, поэтому элементу $e^* = (o)$-$\lim\limits_{n\to\infty} e_n^*$ отвечает множество $\bar{e}^*$, содержащее $\bar{e}'$ и e''; но так как $e^* = e'$, то $\bar{e}^*$ и $\bar{e}'$, по доказанному, эквивалентны, следовательно, $\bar{e}'$ содержит $\bar{e}''$ (с точностью до множества меры нуль) и $\bar{e}'$ не эквивалентно $\bar{e}''$.

3) Если e' и e'' — произвольные различные элементы из $\mathfrak{E}$, то $\bar{e}'$ и $\bar{e}''$ не эквивалентны.

Действительно, $e^* = (e' \vee e') > e'$ (или e'') и, по доказанному, $\bar{e}^*$ не эквивалентно $\bar{e}'$ (или $\bar{e}''$). Следовательно, $\bar{e}'$ не эквивалентно $\bar{e}''$, так как из определения соответствия легко следует, что $e' \vee e'' \to \bar{e}' \cup \bar{e}''$, а сумма двух эквивалентных множеств им эквивалентна. Итак, различным единичным элементам пространства X отвечают различные единичные элементы пространства S.

4) Всякий единичный элемент пространства S является образом некоторого единичного элемента пространства X. Действительно, если g — характеристическая функция открытого множества $G \subset [0, 1]$ и G представляет собой сумму непересекающихся интервалов (α_n, β_n), то единичному элементу $e = \sum\limits_n (e_{\beta_n} - e_{\alpha_n}) \in X$ отвечает единичный элемент $g \in S$. Если g — произвольный единичный элемент пространства S, то найдётся последовательность $g_n \xrightarrow{(o)} g$, где g_n — характеристические функции открытых множеств отрезка $[0, 1]$. По уже доказанному, существуют единичные элементы $e_n \in X$ такие, что $\bar{e}_n = g_n$. Соответствие $e \to \bar{e}$, как было доказано выше, сохраняет соотношения порядка, и если бы последовательность $\{e_n\}$ не была сходящейся, то не сходилась бы и последовательность образов $\{\bar{e}_n\}$. Следовательно, $e_n \to e$ и $\bar{e} = g$, так что всякий единичный элемент пространства S служит образом некоторого единичного элемента пространства X.

Таким образом, соответствие $e \to e$ взаимно однозначно и сохраняет полуупорядочение, т. е. представляет собой изоморфизм. Вместе с тем из самого определения этого соответствия вытекает его изометрия.

Так как X и S — расширенные пространства, то из изоморфизма их баз вытекает изоморфизм самих пространств (2.21 гл. IV).

4.24. Теорема. *Дискретное сепарабельное расширенное K-пространство X изоморфно либо R_n (n-мерному K-пространству), либо s (K-пространству всевозможных числовых последовательностей).*

Доказательство. Всякое расширенное дискретное пространство X изоморфно пространству всевозможных вещественных функций, заданных на некотором абстрактном множестве E (см. 5.22 гл. III). Если X — сепарабельное пространство, то E — не более чем счётное множество. Если при этом E бесконечно, то X изоморфно s, если же E конечно и содержит n элементов, то X изоморфно R_n.

Следствие 1. *Из последних двух предложений вытекает, что смешанное сепарабельное расширенное K-пространство X с обобщённой аддитивной нормой, в котором $\|\mathbf{1}\| < +\infty$, разлагается на компоненты X_1 и X_2, из которых одна изоморфна S, а другая — s или R_n* (см. 3.28 гл. XI).

Следствие 2. *Всякое сепарабельное K-пространство X с обобщённой аддитивной нормой разлагается на элементарные компоненты, изоморфные K-пространствам измеримых функций, нормально содержащимся в $S_{(0,1)}$ или K-пространствам числовых последовательностей, нормально содержащимся в s.*

Действительно, как нетрудно видеть, компонента X_0 сепарабельного K-пространства сепарабельна, а если X_0 — элементарная сепарабельная компонента, то её максимальное расширение, будучи регулярным благодаря теореме 3.23 гл. XI, также сепарабельно. Остаётся применить следствие 1.

Замечание. Если использовать гипотезу континуума, то можно доказать, что всякое сепарабельное K-пространство с обобщённой аддитивной нормой нормально содержится в соединении двух пространств $S_{(0,1)}$ и s

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ЧАСТЬ I

Глава I

Понятие линейного полуупорядоченного пространства и его аксиоматика введены Л. В. Канторовичем [1, 3] в 1935 году. В его работах [1—3, 14] содержится бо́льшая часть результатов главы I. Впервые в настоящей монографии вводится понятие соединения элементов.

Равносильное понятию K-пространства понятие частично упорядоченного модуля было несколько позднее введено Г. Фрейденталем [1].

Дистрибутивный закон точных границ (1.56) был доказан для счётного множества Г. Фрейденталем [1], а в полном объёме — Б. З. Вулихом [5] в 1940 году. Для частично упорядоченных (не обязательно коммутативных) групп дистрибутивный закон доказан Г. Биркгофом [5].

Свойства дизъюнктных элементов (1.6) рассмотрены А. Г. Пинскером в связи с его работами о частично аддитивных функционалах (Пинскер [1, 4]) и разложении K-пространств [12].

Общая теория частично упорядоченных множеств с разных точек зрения изучалась различными авторами, в том числе В. И. Гливенко [1], А. Г. Курошем [1—2] и Г. Биркгофом [1, 3—5], а в последнее время Е. П. Шимбиревой и А. И. Мальцевым (по поводу журнальной литературы см. также Реферативный сборник по алгебре (1948)).

Различные определения предела в частично упорядоченных множествах общего типа встречаются также в работах Г. Биркгофа.

Теорема, аналогичная 2.42, доказана Ф. Хаусдорфом [2] для сходимостных пространств.

Глава II

Вопросы разложения и соединения K-пространств исследовались А. Г. Пинскером и были доложены им в устных сообщениях в Ленинграде в 1938—1940 годах. Результаты этих исследований были опубликованы им в более поздние годы сначала в ряде кратких заметок [6—8], а затем систематически в его работе [12].

В этих работах дано следующее определение разложения K-пространства на компоненты.

Пусть $\{X_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ — система попарно дизъюнктных подпространств K-пространства X. Если для всякого элемента $x \geqslant \mathbf{0}$ существует представление $x = \sup x_\alpha$, где $x_\alpha \in X_\alpha$, $x_\alpha \geqslant \mathbf{0}$, то X разлагается на компоненты X_α.

Это представление оказывается единственным, а составляющая x_α выражается так:

$$x_\alpha = \sup_{\substack{\mathbf{0} \leq y \leq x \\ y \in X_\alpha}} \{y\}$$

Основная теорема гласит: если $\{X_\alpha\}$ — система попарно дизъюнктных компонент K-пространства X, полная в X, то X разлагается на компоненты X_α.

В связи с теорией разложения А. Г. Пинскером систематически исследованы свойства дизъюнктных элементов и множеств, даны определения подпространства и его специальных случаев, введено общее определение проектирования на компоненту и установлены основные свойства проектирования и различные теоремы о разложениях. В главе II отражены также некоторые результаты С. Бохнера и Р. Филлипса [1]. Метод изложения не совпадает полностью с первоначальным изложением А. Г. Пинскера.

Глава III

§ 1. Понятие булевской алгебры возникло из работ Г. Буля [1—2] по математической логике. В частности, Г. Булем было обращено внимание на аналогию между операциями $\vee$ и $\wedge$ и алгебраическими действиями сложения и умножения. В настоящей монографии рассматриваются лишь те свойства булевских алгебр, которые необходимы для теории K-пространств.

§ 2. Теорема 2.11 о том, что множество всех компонент K-пространства есть полная булевская алгебра, при ином, но равносильном определении компоненты доказана Г. Биркгофом [3]. Понятие операции проектирования рассматривалось различными авторами, начиная с Г. Фрейденталя [1]. А. Г. Пинскером в связи с теорией разложения K-пространств (см. указания к гл. II) было предложено общее определение операции проектирования и установлены её свойства (ср. также С. Бохнер и Р. Филлипс [1]).

Принятый здесь порядок изложения предложен Л. В. Канторовичем. Предложение 2.23 (характеристические свойства проекторов) установлено Л. В. Канторовичем и Б. З. Вулихом. Детальное изучение проекторов, порождённых элементами (2.3), имеется у Накано [1].

§ 3. Понятие единицы и единичных элементов в полуупорядоченных пространствах введено Г. Фрейденталем [1]. При этом за определение единицы бралось свойство 3.11, а за определение единичного элемента — свойство 3.21b. Свойства единичных элементов изучены Б. З. Вулихом [5, 11]. Теорема 3.31 о разложении K-пространства на подпространства с единицей доказана А. Г. Пинскером [7]. Понятие следа (под названием характеристического элемента) было введено другими путями Г. Фрейденталем [1] и. Б. З. Вулихом [5, 11]. Теорема 3.52 доказана Г. Фрейденталем [1], признак (o)-сходимости 3.53 и теорема об аппроксимации элементов K-пространства (3.55) установлены Б. З. Вулихом [11].

§ 4. Понятие характеристики введено Г. Фрейденталем [1], причём характеристика e_λ^x определялась как след элемента $(x-\lambda\mathbf{1})_-$. Здесь мы отказываемся от однозначности в определении характеристики, что в ряде случаев упрощает рассуждения. Второй признак (o)-сходимости (4.18) установлен Л. В. Канторовичем. Теорема 4.21 об интегральном представлении элементов принадлежит Г. Фрейденталю [1].

§ 5. Понятия непрерывного и дискретного K-пространства введены и изучены А. Г. Пинскером [5]. Теорема 5.25 о конечномерных K-пространствах доказана впервые А. И. Юдиным [1].

Глава IV

§ 1. Основной результат этого параграфа — построение K-пространства по заданной базе (1.53) — в полном виде излагается здесь, повидимому, впервые. Приведённый метод доказательства этого результата с помощью разложений единицы разработан Л. В. Канторовичем.

§ 2. Понятие максимального расширения для произвольного K-пространства введено А. Г. Пинскером [2—3]. В этих работах им указан прямой метод построения максимального расширения и тем самым доказана теорема

2.45, а также изучен ряд свойств расширенных K-пространств (определяемых как K-пространства, изоморфные со своим максимальным расширением), в том числе — признак расширенности 2.24. Результаты, изложенные в 2.3, также получены А. Г. Пинскером [13].

В настоящем параграфе принято иное изложение основных результатов о расширении K-пространств, отличное от первоначального изложения А. Г. Пинскера.

§ 3. Способ определения абстрактных непрерывных функций от элементов K-пространства (3.1) предложен Л. В. Канторовичем и излагается здесь впервые.

Теорема 3.15 об (o)-непрерывности функций и предложения 3.21—3.23 о монотонных функциях установлены Б. З. Вулихом.

Операция умножения элементов в K-пространствах была введена первоначально прямым путём Б. З. Вулихом [5—6, 11]. Там же установлены основные свойства произведения, в том числе 3.31—3.37, а свойство 3.39 было принято за определение произведения для положительных сомножителей. Ещё ранее С. Стин [1] рассматривал линейные полуупорядоченные кольца, в которых произведение элементов предполагалось определённым аксиоматически. Также аксиоматически введено умножение в полуупорядоченных пространствах в работе И. Верникова, С. Крейна и А. Товбина [1]. Теория линейных нормированных колец построена в работе И. М. Гельфанда [2] (см. также статью И. М. Гельфанда, Д. А. Райкова и Г. Е. Шилова [1]).

Предложения 3.41—3.43 (о степени и о корне) установлены Б. З. Вулихом [6, 11].

Теорема 3.54 об однородных функциях доказана Ф. Риссом [5] для частного класса K-пространств (см. указания к гл. VII). В общем виде эта теорема доказана в настоящей монографии Б. З. Вулихом.

§ 4. Теорема 4.11 о расширении K-линеала принадлежит А. И. Юдину [2]. Ему же принадлежит (Юдин [1]) и теорема 4.12 о сохранении соотношений в K-линеале. В связи со значением, которое приобретает в этом параграфе принцип Архимеда, отметим, что специальному изучению архимедовских частично упорядоченных групп посвящена работа Д. А. Василькова [1].

Глава V

§ 1. Понятие регулярного K-пространства введено Л. В. Канторовичем [3, 5, 14]. Там же установлены основные свойства регулярных пространств (теоремы 1.21 — 1.25).

Взаимные связи между различными свойствами регулярных K-пространств (1.3) исследованы А. Г. Пинскером. Им же введено понятие о K-пространствах счётного типа и установлены их свойства (1.4).

Результаты, содержащиеся в 1.3 и 1.4, публикуются здесь впервые. Предложение, близкое к 1.48, для пространства функций доказано в работе Ю. Ф. Сирвиита [1].

В § 2 излагаются результаты А. Г. Пинскера, частично опубликованные в его работе [3].

§ 3. Понятие K^+-пространства введено Л. В. Канторовичем [19]. K^+-пространства счётного типа исследовались А. Г. Пинскером.

Глава VI

§ 1. K-пространства с метрической функцией введены Л. В. Канторовичем [7, 14]. В этих работах установлены их основные свойства. Предложения 1.15, 1.16 и 1.19 получены А. Г. Пинскером.

Пространства L_T были впервые изучены с точки зрения теории нормированных пространств В. Орличем [1]. Как K-пространства с метрической функцией, L_T были исследованы Л. В. Канторовичем.

§ 2. Общая теория линейных нормированных пространств систематически изложена в монографии С. С. Банаха [2] (см. также Банах [3]). Пространства одновременно нормированные и частично упорядоченные с различными системами аксиом (KB-линеал, KB-пространство) рассматривались Л. В. Канторовичем [5, 13—14] и позднее А. Г. Пинскером (K-пространства ограниченных элементов), М. Г. Крейном, Г. Биркгофом, С. Какутани и др.

V-пространства (2.5) введены Б. З. Вулихом [1, 3—4] под названием K-нормированных пространств.

Классы функций V^p $(p > 1)$ (2.64 и сл.) впервые были введены в математический анализ Ф. Риссом [2].

Отметим, что в работах, посвящённых линейным полуупорядоченным пространствам, до настоящего времени не было твёрдо установленных обозначений различных типов пространств. Так в работах ленинградских математиков K-пространство называется пространством типа S_5 или K_5, K-линеал — пространством типа S_4 или K_4, регулярное K-пространство — S_6 или K_6, K^--пространство — K_5^-, K^+-пространство — K_5^+, регулярное K^+-пространство — K_6, KB-пространство — B_2, KB-линеал — B_1. Термин K-пространство введён в работах А. Г. Пинскера.

ЧАСТЬ II

Глава VII

Значительная часть результатов первых двух параграфов этой главы содержится в работах Л. В. Канторовича [4, 7, 19]. В этих работах введены основные классы аддитивных операций и установлен ряд их свойств, а также установлены некоторые соотношения между различными классами в пространствах того или иного типа (в частности, теоремы 1.23, 2.21, 2.31, 2.41—2.43, 2.81—2.82).

В частном случае класс H_r, составленный из функционалов, заданных на множестве непрерывных функций, рассматривал Ф. Рисс, [4]. Для этого случая им была установлена теорема 1.23, и доказательство этой теоремы в настоящей монографии является обобщением метода Рисса на абстрактный случай. В работе, опубликованной в 1940 году, Рисс [5] обобщил свои результаты на случай функционалов, заданных на абстрактном множестве, удовлетворяющем некоторым специальным условиям.

Теорема 2.24 об операциях класса H_b^b принадлежит С. С. Банаху [2—3].

Теоремы 2.45, 2.47—2.48 и лемма 2.46 были ранее установлены А. Г. Пинскером, но излагаются впервые в настоящей монографии. Теорема 2.47 содержится в работе Л. В. Канторовича [19] при дополнительном предположении, что Y — регулярное K^+-пространство.

Предложение 2.51 было доказано Л. В. Канторовичем [19] в предположении, что данный функционал регулярен. Обобщение этого предложения на случай произвольного аддитивного функционала принадлежат А. Н. Балуеву [1].

Теорема 2.55 и её доказательство в основном принадлежат Г. Биркгофу [4]. Именно, им было доказано, что если X — K-пространство и одновременно KB-линеал, в котором для положительных элементов при всяком $\varepsilon > 0$ из $\|x_1\| \leqslant 1$ и $\|x_1 + x_2\| \leqslant \|x_1\| + \beta(\varepsilon)$ следует, что $\|x_2\| \leqslant \varepsilon$, а f — (o)-линейный функционал, то X разлагается на три компоненты X_1, X_2 и X_3 так, что

$$f_-(x) = 0 \text{ при } x \in X_1,$$

$$f_+(x) = 0 \text{ при } x \in X_2,$$

$$f_+(x) = f_-(x) = 0 \text{ при } x \in X_3.$$

А. Н. Валуев [1] показал, что в формулировке, данной в 2.55, теорема Биркгофа переносится на K-группы.

Теорема Биркгофа в свою очередь является частным случаем теоремы 1.24 гл. XI, так как пространство, удовлетворяющее условию Биркгофа — счётного типа, а потому к нему применима теорема 1.14 гл. XI.

Необходимое и достаточное условие, входящее в формулировку теоремы 2.61, было доказано Б. З. Вулихом [3—4] для (vv)-непрерывных операций в V-пространствах.

Теорема 2.83 о включении $H_r \subset H_b^t$ в полных KB-линеалах установлена Б. З. Вулихом и излагается здесь впервые. Теорема 2.84 о совпадении классов (b)-линейных и регулярных функционалов в полных KB-линеалах принадлежит Г. Биркгофу [4].

Теорема 2.87 была доказана Б. З. Вулихом [3—4] для (bv)-непрерывных операций в V-пространствах.

§ 3. Понятие мультипликативной операции введено Б. З. Вулихом [7, 9, 11]. Там же установлены все свойства мультипликативных операций, изложенные в этом параграфе. Линейным мультипликативным функционалам в нормированных кольцах посвящена работа В. Л. Шмульяна [1].

К теории регулярных операций в K-пространствах примыкают исследования М. Г. Крейна [1—3] о конусах в линейных нормированных пространствах (типа (B)) (см. также монографию Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна [1]). Согласно М. Г. Крейну конусом в пространстве X типа (B) называется выпуклое замкнутое множество K, обладающее тем свойством, что если $x \in K$ $(x \neq \mathbf{0})$, то $\lambda x \in K$ при $\lambda > 0$ и $\lambda x \overline{\in} K$ при $\lambda < 0$. Функционал $f(x)$ называется положительным (относительно K), если $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in K$. Если линейная замкнутая оболочка конуса K совпадает со всем X (конус называется в этом случае воспроизводящим), то множество положительных функционалов является конусом в пространстве H_b^b всех (b)-линейных функционалов в X. М. Г. Крейну принадлежит следующая теорема: для того чтобы произвольный (b)-линейный функционал в X был представим в виде разности двух положительных функционалов, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $\delta > 0$, что если $x_1, x_2 \in K$, $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, то непременно $\|x_1 + x_2\| \geqslant \delta$ (*нормальность* конуса) (см. Крейн М. Г. [2]).

В пространстве с конусом можно ввести частичное упорядочение, полагая $x > \mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда $x \in K$ и $x \neq \mathbf{0}$. Такого рода частичное упорядочение удовлетворяет аксиомам I, II и IV K-пространства. Наоборот, если в нормированном пространстве введено частичное упорядочение, удовлетворяющее аксиомам I, II и IV, то множество всех положительных элементов $(x \geqslant \mathbf{0})$ есть конус.

М. Г. Крейн называет конус K *миниэдральным*, если пересечение двух транслированных конусов K_a и K_b $(a, b \in K)$ есть снова транслированный конус K_c $(c \in K)$. Под K_a мы понимаем множество элементов вида $x + a$, где $x \in K$. Это определение равносильно требованию, чтобы для любых $x_1, x_2 \in K$ существовал элемент $x_1 \vee x_2$. Если конус — миниэдральный и воспроизводящий, то пространство оказывается K-линеалом. Множество положительных элементов KB-линеала представляет пример миниэдрального и нормального конуса.

Наиболее сильные результаты получены М. Г. Крейном и М. А. Рутманом (см. их совместную статью [1]) для пространств, содержащих *телесный* конус, т. е. такой, множество внутренних точек которого не пусто.

В большей части рассматривавшихся выше нормированных K-пространств (например, в L^p, l^p) конус положительных элементов не является телесным. Примером телесного конуса может служить конус положительных элементов KB-линеала ограниченных элементов. В этом случае единица является внутренней точкой конуса. Оказывается, что всякое пространство с нормальным,

миниэдральным и телесным конусом изоморфно KB-линеалу ограниченных элементов. Этот результат по существу доказан в работах М. Г. Крейна и С. Г. Крейна [1—2].

Глава VIII

Вопросам аналитического представления линейных операций посвящён ряд работ, в том числе И. М. Гельфанда [1], Г. М. Фихтенгольца [1—2], Г. М. Фихтенгольца и Л. В. Канторовича [1—2], Л. В. Канторовича [6, 8, 19], Л. В. Канторовича и Б. З. Вулиха [1—2], Н. Денфорда [1], Л. Коэна [1] и др.

§ 1 содержит в основном результаты Б. З. Вулиха, изложенные в частном случае (для мультипликативных операций) в его работе [11]. В другой работе [12] свойства аддитивных функций на булевской алгебре установлены без использования теории операций.

Предложение 1.44 (равносильность абсолютной аддитивности и (to)-непрерывности для функций с числовыми значениями) по существу содержится в работе Л. В. Канторовича [19].

§ 2 содержит результаты Л. В. Канторовича [19]. Общая форма (b)-линейных функционалов в M найдена в работе Г. М. Фихтенгольца и Л. В. Канторовича [1—2]. Общий вид (o)-линейных функционалов в M (2.16) впервые был установлен Г. М. Фихтенгольцем в его работе [2], посвящённой сходимостным пространствам.

§ 3. Общая теорема 3.11 доказана Л. В. Канторовичем [19]. Общий вид линейных функционалов в L (3.12) установлен Г. Штейнгаузом [1]. Теорема 3.13 (операции из L в V), а также предложение 3.16 доказаны в работе Л. В. Канторовича и Б. З. Вулиха [1]; теорема 3.13 была также упомянута И. М. Гельфандом в его диссертации 1935 года. Теорема 3.21 (операции из L в L^p, где $p>1$) установлена Н. Дэнфордом [1].

Теорема 3.31 доказана Л. В. Канторовичем [19]. Общая форма линейных функционалов в L^p (3.32) установлена сначала для $p=2$ М. Фреше [1], а затем для любого p Ф. Риссом [2].

Относительно теории ортогональных разложений для абстрактных функций класса A_p^* см. Л. В. Канторович [19].

§ 4. Теорема 4.11 доказана Л. В. Канторовичем [19]. Для функционалов эта теорема была доказана Ф. Риссом [1].

§ 5. Общие предложения этого параграфа излагаются в настоящей монографии впервые.

Предложение 5.22 (операции из l^2 в l^2) для операций класса H_b^b доказано Хеллингером и Теплицом [1]. Близкие к § 5 по содержанию результаты содержатся в работе И. А. Эзрохи [1].

§ 6. Результаты этого параграфа изложены в работе Л. В. Канторовича и Б. З. Вулиха [1]. Теорема 6.12 для $p=1$ доказана также в работе И. М. Гельфанда [1]. В этой работе содержится большое количество результатов по аналитическому представлению операций в линейных нормированных пространствах, в том числе и некоторые, близкие к изложенным в гл. VIII.

Глава IX

Значительная часть материала этой и следующей глав относится к 1936—1937 годам, но в полном виде не публиковалась (ср. Канторович [16]). Однако многие из результатов были анонсированы в ряде заметок.

§ 1. Возможность обобщения теорем о продолжении функционалов на операции класса H_b^o была указана в заметке Л. В. Канторовича [1]. Доказательства теорем этого параграфа близки к доказательствам соответствующих теорем о функционалах (С. С. Банах [2—3]). В книге Банаха можно найти и дальнейшие литературные указания по поводу этих теорем.

Биортогональные системы функционалов и элементов в другом виде также вводились у С. С. Банаха. Применение к теореме С. С. Левина не встречалось в литературе.

§ 2. Теоремы 2.11 и 2.13 даны в заметках Л. В. Канторовича [4, 11]. Предложения из 2.2 впервые установлены А. Г. Пинскером. Определения сопряжённого и второго сопряжённого пространств для случая нормированного пространства и предложения, относящиеся к этому случаю, имеются у С. С. Банаха [2—3]. Предложение, связанное с упорядочением (2.36), установлено А. Г. Пинскером.

§ 3. Основные результаты этого параграфа принадлежат Г. П. Акилову [1—2]. Теорема 3.16 ранее была доказана более сложным путём Р. Филлипсом [1] и позднее А. Собчиком [1]. Пример непродолжимости операции, приведённый в 3.2, дан в работе Г. М. Фихтенгольца и Л. В. Канторовича [1—2] с другим обоснованием.

О равномерно выпуклых пространствах, с которыми связано определение 3.31, см. Д. Кларксон [1].

§ 4. Основные результаты параграфа: 4.11 и 4.21 приведены (первый с доказательством) в заметке Л. В. Канторовича [17], полностью в [16]. Предложение 4.13 первоначально установлено более сложным образом С. С. Банахом ([2], стр. 224, теорема 8).

§ 5. По поводу проблемы моментов см. И. П. Натансон [2], Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн [1]. В настоящей монографии ряд основных теорем, относящихся к проблеме моментов, устанавливается как приложение общей теории полуупорядоченных пространств.

Условие разрешимости проблемы моментов, данное в 5.23, первоначально получено Хелли. Теорема 5.25 установлена Хаусдорфом [1]. Теорема 5.31 принадлежит Хэвилэнду [1]; ранее для одномерного случая подобная теорема была дана М. Риссом.

Теоремы 5.32, 5.33 и 5.41 были получены первоначально соответственно Гамбургером, Стилтьесом и Хаусдорфом. По поводу литературы см. цитированные выше монографии, содержащие более полное изложение этой проблемы.

Применение понятий теории полуупорядоченных пространств к положительной проблеме моментов дано в заметке Л. В. Канторовича [4], где теорема 5.41 была установлена на основе теоремы 2.13. Последняя теорема положена в основу изложения ряда теорем теории моментов в монографии Тамаркина и Шохата. Однако использование теоремы 4.21 (впервые в работе Л. В. Канторовича [16]) позволило сделать это изложение ещё более коротким.

Глава X

§ 1. Результаты этого параграфа, относящиеся к операциям в полуупорядоченных пространствах, даны в заметке Л. В. Канторовича [10]. По поводу предложений, относящихся к последовательностям в нормированных пространствах, см. С. С. Банах [2—3].

§ 2. Результаты этого параграфа получены в дипломной работе А. Н. Балуева [1].

Предложение 2.31 для случая пространства ограниченных функций дано в работе В. М. Дубровского [1]. Первоначальное доказательство В. М. Дубровского частично использовано А. Н. Балуевым при установлении общих предложений о функционалах.

§ 3. Содержание этого параграфа опубликовано в заметке Л. В. Канторовича [12].

Глава XI

Эта глава посвящена систематическому изложению результатов А. Г. Пинскера, частично опубликованных в работах [6—7, 9].

Предложения 1.21 и 1.25 были установлены независимо Б. З. Вулихом [8, 11] для частного случая K-пространств счётного типа.

Теорема 2.11 доказана в работе М. Г. Крейна [2] и, независимо, А. Г. Пинскером [6]. Теоремы 2.14—2.15 об общем представлении (o)-линейных функционалов доказаны Б. З. Вулихом [8, 11]. Независимо от этих теорем А. Г. Пинскером [6] установлен изоморфизм между пространством X^*, сопряжённым к KB-пространству X с аддитивной нормой и единицей, и подпространством $\overline{X}$ ограниченных элементов пространства X.

Глава XII

В этой главе в основном используется статья Л. В. Канторовича [15, 18], в которой, в результате использования теории K-пространств методу мажорант была придана абстрактная форма. Относительно других общих теорий функциональных уравнений см. С. С. Банах ([2—3], гл. X) и В. Немыцкий [2].

В § 1 ряд предложений публикуется впервые, в частности, предложения из 1.4. Некоторые из вновь публикуемых теорем (1.52, 3.13, 3.23) получены совместно Л. В. Канторовичем и Г. П. Акиловым.

В § 4 также следует отметить впервые публикуемое здесь предложение 4.14.

В § 5 теоремы о регулярных и вполне регулярных системах в большинстве были известны и получены ранее Б. М. Кояловичем, Р. О. Кузьминым, Л. В. Канторовичем и Пелле. По поводу литературы см. Л. В. Канторович и В. И. Крылов [1].

Класс систем, рассмотренных в 5.2, изучался при $p=2$ Кохом, а для любого p Ф. Риссом [3]. Конечные нелинейные системы из 5.31 рассматривались Пелле, бесконечные — Л. В. Канторовичем.

Предложение 5.33 впервые установлено А. Винтнером [1].

§ 6. Результаты 6.2 публикуются здесь впервые. Возможность использования абстрактной нормы для подобных оценок отмечена в статье Л. В. Канторовича [20].

ДОПОЛНЕНИЕ

Глава XIII

§ 1. Теорема 1.14 о существовании единичных функций установлена А. Г. Пинскером [11]. Следствие из неё о существовании единичной функции, равной единице на заданном элементе булевской алгебры, было доказано ранее другим методом Б. З. Вулихом [11].

Теорема 1.34 о представлении булевских алгебр принадлежит М. Стону [1]. Метод доказательства этой теоремы, приведённый в настоящей монографии, предложен А. Г. Пинскером. Теорема 1.35 (признак полноты булевской алгебры) доказана Б. З. Вулихом [10].

§ 2. В этом параграфе даётся подробное изложение результатов, приведённых в краткой статье Б. З. Вулиха [10].

§ 3. Основная теорема этого параграфа (3.11) о представлении K-пространств установлена Б. З. Вулихом [10]. В этой работе теорема 3.11 установлена для K-пространств с единицей, а тогда переход к общему случаю может быть сделан с помощью теоремы А. Г. Пинскера о разложении K-пространства на подпространства с единицей (3.31 гл. III).

Близкая по содержанию теорема доказана в более ранних работах М. Г. Крейна и С. Г. Крейна [1—2]. Именно, ими доказано, что всякий KB-линеал, удовлетворяющий дополнительному условию

$$\|x \vee y\| = \|x\| \vee \|y\| \text{ для } x, y \geqslant 0$$

(пространство типа (M)), изоморфен и изометричен некоторому линейному подмножеству пространства $C(Q)$, где Q — некоторый бикомпакт. Эта тео

рема доказана также С. Какутани [2]. В частности, теорема М. и С. Крейнов применима к K-пространству ограниченных элементов; для этого случая она вытекает из теоремы 3.11 (см. 3.12, замечание 2).

Вопросу конкретного представления полуупорядоченных колец (в которых заранее постулируется наличие действия умножения) посвящена также работа С. Верникова, С. Крейна и А. Товбина [1]. Реализацией линейных нормированных колец занимался И. М. Гельфанд [2].

Теорема 3.14 для любых бикомпактов (без K-условия) доказана М. Стоном [1] и ещё более обобщена в работе М. Г. и С. Г. Крейнов [2].*)

В § 4 излагаются результаты А. Г. Пинскера, частично опубликованные в его работах [9—10]. Конкретное представление пространств типа (L) получено также М. Г. Крейном и С. Г. Крейном [2] и С. Какутани [1].

---

*) Уже после сдачи рукописи книги в печать авторам стало известно из „Mathematical Reviews" (1949 г. № 8) о появлении в 1942—1944 гг. ряда работ Т. Огасавары, в которых рассматриваются некоторые вопросы, частично входящие в содержание главы XIII (§§ 1—3), а частично близко примыкающие к нему.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Акилов Г. П. [1] О распространении линейных операций. ДАН **57** (1947) 643—646.

[2] О распространении линейных операций. Диссертация (рукопись), Лен. университет (1947).

[3] Необходимые условия распространимости линейных операций. ДАН **59** (1948), 417—418.

Александров П. С. [1] Sur les espaces discrets. C. R. Acad. Sci. **200** (1935), 1649—1651.

[2] Введение в общую теорию множеств и функций, ГТТИ (1948).

Александров П. С. и Урысон П. С. [1] Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe (L) soit une classe (D). C. R. Acad. Sci. **177** (1923), 1274—1276.

Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г. [1] О некоторых вопросах теории моментов. Харьков, ГОНТИ (1938).

Балуев А. Н. [1] Об аддитивных функциях множества и функционалах в полуупорядоченных пространствах. Дипломная работа (рукопись). Лен. университет (1949).

Банах С. С. [1] Sur la convergence presque partout des fonctionnelles linéaires. Bull. des Sc. Math. **50** (1926), 27—32 и 36—43.

[2] Théorie des opérations linéaires. Warszawa (1932).

[3] Курс функціонального аналізу. Київ (1948).

Биркгоф Г. — Birkhoff G. [1] On the combination of subalgebras, Proc. Cambr. Math. Soc. **29** (1933), 441—464.

[2] A note on topological groups, Compos. Math. **3** (1936), 427—430.

[3] Dependent probabilities and spaces (L). Proc. of the Nat. Acad. USA (1938), 154—159.

[4] Lattice theory. New York (1940). (2-е издание — New York, 1949)

[5] Lattice-ordered groups. Ann. of Math. **43** (1942), 298—331.

Бохнер С. и Филлипс Р. — Bochner S. and Phillips R. S. [1] Additive set functions and vector lattices. Ann. of Math. **42** (1941), 316—324.

Буль Г. — Boole G. [1] The mathematical analysis of logic. Cambridge (1847).

[2] An investigation into the laws of thought. London (1854).

Васильков Д. А. [1] On the theory of partially ordered linear systems and linear spaces. Ann. of Math. **44** (1943), 580—609.

Верников И. Х., Крейн С. Г. и Товбин А. В. [1] О полуупорядоченных кольцах. ДАН **30** (1941), 778—780.

Винтнер А. — Wintner A. [1] Zur Hillschen Theorie der Variation des Mondes. Math. Zeitschr. **24** (1925—1926), 259—265.

Вулих Б. З. [1] Об одном типе метрических пространств. ДАН **4** (1935), 295—298.

[2] Общие формы некоторых линейных операций. Матем. сборник **2** (44) (1937), 275—305.

[3] On a generalized notion of convergence in a Banach space. Ann. of Math. 38 (1937), 156—174.

[4] K-нормированные пространства. Уч. зап. Пед. инст. им. Герцена **28** (1939), 179—224.
[5] Определение произведения в линейном полуупорядоченном пространстве. ДАН **26** (1940), 847—851.
[6] Свойства произведения и обратного элемента в линейных полуупорядоченных пространствах. ДАН **26** (1940), 852—856.
[7] О линейных мультипликативных операциях. ДАН **41** (1943), 148—151.
[8] О линейных функционалах в линейных полуупорядоченных пространствах. ДАН **52** (1946), 95—98.
[9] О линейных мультипликативных операциях. ДАН **52** (1946), 387—390.
[10] Конкретное представление линейных полуупорядоченных пространств. ДАН **58** (1947), 733—736.
[11] Произведение в линейных полуупорядоченных пространствах и его применение к теории операций. Матем. сборник **22** (1948), 27—78 и 267—317.
[12] О существовании в полуупорядоченных пространствах линейных операций, отличных от тождественного нуля. Уч. зап. Пед. инст. им. Герцена **86** (1949), 217—233.

Гельфанд И. М. [1] Абстрактные функции и линейные операторы. Матем. сборник **4** (46) (1938), 235—286.
[2] Нормированные кольца. Матем. сборник **9** (51) (1941), 3—24.

Гельфанд И. М., Райков Д. А. и Шилов Г. Е. [1] Коммутативные нормированные кольца. Успехи матем. наук I, вып. **2** (1946), 48—146.

Гливенко В. И. [1] Géométrie des systèmes de choses normées. Amer. J. Math. **58** (1936), 799—828.
[2] Основы общей теории структур. М. Уч. зап. Пед. инст., Серия физ-матем. **1** (1937), 3—33.

Дедекинд Р. — Dedekind R. [1] Ueber die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe. Math. Ann. **53** (1900), 371—403.

Дубровский В. М. [1] О некоторых свойствах вполне аддитивных функций множеств. ИАН, Серия матем. **9** (1945), 311—320 (и замечание к этой работе, там же, **11** (1947), №1).

Дэнфорд Н. — Dunford N. [1] Integration and linear operations. Trans. A. M. S. 40 (1936), 474—494.

Какутани С. — Kakutani S. [1] Concrete representation of abstract (L)- spaces and the mean ergodic theorem. Ann. of Math. **42** (1941), 523—537.
[2] Concrete representation of abstract (M)-spaces. Ann. of Math. **42** (1941), 994—1024.

Канторович Л. В. [1] О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций. ДАН **4** (1935), 11—14.
[2] Sur un espace des fonctions à variation bornée et la différentiation d'une série terme à terme. C. R. Acad. Sci. **201** (1935), 1457—1460.
[3] Sur les propriétés des espaces semiordonnés linéaires. C. R. Acad. Sci. **202** [1936], 813—816.
[4] К общей теории операций в полуупорядоченных пространствах. ДАН **1** (1936), 271—274.
[5] Некоторые теоремы о полуупорядоченных пространствах общего типа. ДАН **2** (1936), 7—10.
[6] Основы теории функций вещественного переменного со значениями, принадлежащими полуупорядоченному линейному пространству. ДАН **2** (1936), 359—364.
[7] О некоторых классах линейных операций. ДАН **3** (1936), 9—14.
[8] Общие формы некоторых классов линейных операций. ДАН **3** (1936), 101—106.
[9] Об одном классе функциональных уравнений. ДАН **4** (1936), 211—216.

[10] О последовательностях линейных операций. ДАН 14 (1937), 255—260.
[11] К проблеме моментов для конечного интервала. ДАН 14 (1937), 531—536.
[12] Некоторые теоремы о сходимости почти везде. ДАН 14 (1937), 537—540.
[13] О полуупорядоченных пространствах. ИАН, Серия матем. (1937), 91—110.
[14] Линейные полуупорядоченные пространства. Матем. сборник 2 (44) (1937), 121—168.
[15] О функциональных уравнениях. Уч. зап. Лен. университета 3 (17) (1937), 17—33.
[16] Функциональный анализ на основе теории полуупорядоченных пространств. Конкурсная работа (1937). Курс лекций, читанных в ЛГУ в 1936/37 уч. г. (рукопись).
[17] Sur la continutié et sur le prolongement des opérations linéaires. C. R. Acad. Sci. 206 (1938), 833—835.
[18] The method of successive approximations for functional equaitions. Acta Math. 71 (1939) 63—97.
[19] Линейные операции в полуупорядоченных пространствах. Матем. сборник 7 (49) (1940), 209—284.
[20] Функциональный анализ и прикладная математика. Вестник Лен. университета (1948) № 6, 3—18.

Канторович Л. В. и Вулих Б. З. [1] Sur la représentation des opérations linéaires. Comp. Math. 5 (1938), 119—165.
[2] Sur un théorème de M. N. Dunford. Comp. Math. 5 (1938), 430—432.

Канторович Л. В. и Крылов В. И. [1] Приближённые методы высшего анализа. ГТТИ (1941).

Кларксон Д. — Klarkson J. [1] Uniformly convex spaces. Trans. A. M. S. 40 (1936), 396—414.

Колмогоров А. Н. [1] Основные понятия теории вероятностей. ОНТИ (1936).

Коэн Л. — Cohen L. W. [1] Transformations of spaces of infinitely many dimensions. Ann. of Math. 37 (1936). 326—335.

Крейн М. Г. [1] О линейных операторах, оставляющих инвариантным некоторое коническое множество. ДАН 23 (1939), 749—752.
[2] Основные свойства нормальных конических множеств в пространстве Банаха. ДАН 28 (1940), 13—17.
[3] О минимальном разложении линейного функционала на положительные составляющие. ДАН 28 (1940), 18—22.

Крейн М. Г. и Крейн С. Г. [1] Об одной внутренней характеристике пространства всех непрерывных функций, определённых на хаусдорфовом бикомпактном множестве. ДАН 27 (1940), 427—431.
[2] О пространстве непрерывных функций, определённых на бикомпакте, и его полуупорядоченных подпространствах. Матем. сборник 13 (1943), 3—38.

Крейн М. Г. и Рутман М. А. [1] Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха. Успехи матем. наук 3:1 (1948), 3—95.

Курош А. Г. [1] Разложения в пересечение с неприводимыми компонентами в кольцах и в дуальных группах. Матем. сборн. 42 (1935). 613—616.
[2] Теорема Жордана-Гельдера в произвольных структурах. Сб. памяти акад. Граве (1940), 110—116.
[3] Теория групп. ГТТИ (1944).
[4] Курс высшей алгебры, ГТТИ (1946).

Левин С. С. [1] Интегральные уравнения и функциональные пространства. Матем. сборник 39:4 (1932), 3—72.

Меньшов Д. Е. [1] Sur les séries des fonctions orthogonales. Fund. Math. 4 (1923) 82—105.
Накано Х. — Nacano H. [1] On the product of relative spectra. Ann. of Math. 49 (1948), 281—315.
Натансон И. П. [1] Основы теории функций вещественной переменной. Лен. Университет (1941).
[2] Конструктивная теория функций. ГТТИ (1949).
Немыцкий В. В. [1] Об одном общем классе нелинейных интегральных уравнений. Матем. сборник 41 (1934), 655—658.
[2] Метод неподвижных точек в анализе. Успехи матем. наук 1 (1936), 141—174.
Орлич В. — Orlicz W. [1] Ueber eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B. Bull. Acad. Sci. Polon. (1932), 207—220.
Пелле — Pellet [1] Des équations majorantes. Bull. Soc. Math. de France (1909), 93—101.
Пинскер А. Г. [1] Аналитическое представление некоторых частично-аддитивных функционалов. ДАН 18 (1938), 397—401.
[2] О расширении полуупорядоченных пространств. ДАН 21 (1938), 6—10.
[3] О некоторых свойствах расширенных K-пространств. ДАН 22 (1939), 220—224.
[4] Аналитическое представление некоторых частично-аддитивных функционалов. Диссертация (рукопись), Лен. университет (1939).
[5] О нормированных K-пространствах. ДАН 33 (1941), 12—15.
[6] Универсальные K-пространства. ДАН 49 (1945), 8—11.
[7] Разложение K-пространства на элементарные пространства. ДАН 49 (1945), 169—172.
[8] О сепарабельных K-пространствах. ДАН 49 (1945), 327-328.
[9] Вполне линейные функционалы в K-пространствах. ДАН 55 (1947), 303—306.
[10] О конкретных представлениях линейных полуупорядоченных пространств. ДАН 55 (1947), 383—386.
[11] О конкретных представлениях линейных полуупорядоченных пространств. Уч. зап. Пед. инст. им. Герцена 64 (1948), 17—26.
[12] Разложение полуупорядоченных групп и пространств. Уч. зап. Пед. инст. им. Герцена 86 (1949), 235—284.
[13] Расширение полуупорядоченных групп и пространств. Уч. зап. Пед. инст. им. Герцена 86 (1949), 285—315.
Реферативный сборник по алгебре ГТТИ (1948).
Рисс Ф. — Riesz F. [1] Sur les opérations fonctionnelles linéaires. C. R. Acad. Sci. 149 (1909), 974—977.
[2] Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen. Math. Ann. 69 (1910), 449—497.
[3] Théorie des systèmes des équations à une infinité d'inconnues. Paris (1913).
[4] Sur la décomposition des opérations fonctionnelles. Atti Congresso Bologna 3 (1928), 143—148.
[5] Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires. Ann. of Math. 41 (1940), 174—206.
(Русский перевод — Успехи матем. наук, том I (1946), вып. 2, 147—178.)
Сакс С. [1] Теория интеграла. М. Изд. ин. лит. (1949).
Сирвинт Ю. Ф. [1] Выпуклые множества и линейные функционалы в абстрактном пространстве. ИАН, серия матем. 6 (1942), 143—170 и 189—226.
Собчик А. — Sobczyk A. [1] On the extension of linear transformations. Trans. A. M. S. 55 (1944), 153—169.

Стин С.—Steen S. W. P. [1] An introduction to the theory of operators: (1) Real operators. Modulus. Proc. London Math. Soc. (2) **41** (1936), 361—392.

Стон М.—Stone M. H. [1] Applications of the theory of Boolean rings to general topology. Trans. A. M. S. **41** (1937), 375—481.

Урысон П. С. [1] Sur les classes L de M. Fréchet. Enseign. Math. **25** (1926), 77—83.

Филлипс Р.—Fillips R. [1] On linear transformations. Trans. A. M. S. **48** (1940), 516—541.

Фихтенгольц Г. М. [1] Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions continues. Bull. Acad. Belg. **22** (1936), 26—33.

[2] О линейных функционалах, непрерывных в обобщённом смысле. Матем. сборник **4** (46) (1938), 193—214.

Фихтенгольц Г. М. и Канторович Л. В. [1] Некоторые теоремы о линейных функционалах и операциях. ДАН **3** (1934), 307—312.

[2] Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées. Studia Math. **5** (1935), 69—98.

Фрейденталь Г.—Freudenthal H. [1] Teilweise geordnete Moduln. Proc. Acad. Amsterdam **39** (1936), 641—651.

Фреше М.—Fréchet M. [1] Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires. C. R. Acad. Sci. **144** (1907), 1414—1416.

Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е. и Полиа Г. [1] Неравенства. М. Изд. ин. лит. (1948).

Хаусдорф Ф.—Hausdorff F. [1] Momentprobleme für ein endliches Intervall. Math. Zeitschr. **16** (1923), 220—248.

[2] Gestufte Räume. Fund. Math. 25 (1935), 486—502.

Хеллингер Э. и Теплиц О.—Hellinger E. und Toeplitz O. [1] Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen. Math. Ann. **69** (1910), 289—330.

Хэвиленд—Haviland. [1] On the momentum problem for distributions in more than one dimension. Amer. Journ. of Math. **57** (1935), 562—568 и там же **58** (1936), 164—168.

Шатуновский С. О. [1] Введение в анализ. Одесса (1923); литогр. изд.—Одесса (1907).

Шмульян В. Л. [1] О мультипликативных линейных функционалах в некоторых специальных нормированных кольцах, ДАН **26** (1940), 13—16.

Штейнгауз Г.—Steinhaus H. [1] Additive und stetige Funktionaloperationen. Math. Zeitschr. **5** (1919), 186—221.

Эзрохи И. А. [1] Общие формы линейных операций в пространствах со счётным базисом. ДАН **59** (1948), 1537—1540.

Юдин А. И. [1] Решение двух проблем теории полуупорядоченных пространств. ДАН **23** (1939), 418—422.

[2] О расширении линейных полуупорядоченных пространств. Уч. зап. Лен. университета, Серия мат. наук, вып. **12** (1941), 57—61.

УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютно (t)-непрерывная функция 291
Абстрактная норма операции 258, 459
— — элемента 455.
Аддитивная операция 228
Аддитивность нормы 253
Аксиомы K-пространства 21
Аннулирующая последовательность чисел 167
Архимеда принцип 25

База K-пространства 90
Борелева надстройка 52
Булевская алгебра 72
— — компонент 78
— — полная 74
(b)-линейный функционал 255
(b)-норма 242
(b)-предел 208
(b)-сходимость 209
(bv)-норма 260

Вполне линейный функционал 406
— несвязный бикомпакт 503
— разрывный функционал 411
V-пространство 219
(v)-норма 253

Грань множества верхняя 21
— — нижняя 21
Граница множества 21

Дизъюнктная операция 263
Дизъюнктное дополнение множества 63
Дизъюнктные множества 32
— элементы 32
Дискретное K-пространство 104
Дискретный элемент 104
Дистрибутивный закон для граней 31
Дополнение элемента булевской алгебры 72

Единица K-пространства 39
Единичная функция 499
Единичный элемент 90

Замкнутое множество 50
(*)-сходимость 47

Изоморфизм K-пространств 38
— частично упорядоченных множеств 38
Интеграл Хеллингера 290
Интегральное представление элементов 102

Класс операций H_b^b 241
— — H_b^0 255
— — H_m 264
— — H_o^0 239
— — H_r 231
— — H_t^0 239
— — H_t^t 239
Компонента K-пространства 62
Конечнозначный элемент 135
Корень из элемента 157
K-группа 40
K-линеал 39
K-пространство 21
— ограниченных элементов 212
— с метрической функцией 191
— счётного типа 172
— L^p 220
— l^p 221
— M 214
— S 52
— s 55
— V 54
— Vp 224
K^+-пространство 186
K-пространство 195
KB-линеал 211
KB-пространство 215
KM-пространство 197

Линеаризация множества 19
Линейная операция 239
— мультипликативная операция 264
Линейное множество 19
— нормированное пространство 208
— полуупорядоченное пространство 21

Мажоранта 231, 458
Максимальное расширение K-пространства 146
Метрическая функция 191
Модуль элемента 28
Мультипликативная операция 263

Непрерывное K-пространство 105
Непрерывный элемент 104
Норма элемента 208
n-мерное линейное множество 107

Обобщённая норма 444
Обратимая операция 267
Ограниченная функция на булевской алгебре 271
Ограниченного изменения функция 54
— — — абстрактная 291
— (p)-изменения по норме функция 329
— слабого (p)-изменения функция 327
Ограниченное множество 21
Ограниченный элемент 97
Однородная операция 228
Операция 228
Орт 105
Открытое множество 50
Отрицательная часть элемента 28
Отрицательный элемент 21
(o)-аннулируемое множество 186
(o)-линейный функционал 239
(o)-полнота 46
(o)-предел 42
(o)-сходимость 42
(oo)-непрерывность 238

Подпространство K-пространства 60
— нормальное 61
— порождённое множеством (элементом) 63
— правильное 60
Полная система множеств 66
Полное изменение абстрактной функции 291
— множество элементов 66, 76
Положительная операция 228
Положительная часть элемента 28
Положительный элемент 21
Полуупорядоченная группа 40
Полуупорядоченное множество 37
Почти равномерная сходимость разложений 115
Предел наибольший 41
— наименьший 41
Проектор 80
— порожденный элементом 87
Проекция элемента 64
Произведение элементов 152
Пространство типа (B) 209
— — (B_K) 455
— L_T 206
(p)-изменение 223

Равномерная сходимость разложений 115
Разложение единичного элемента 109
— K-пространства 66
Расширенное K-пространство 138
Расширение K-пространства 144
Регулярная операция 231, 458
Регулярное K-пространство 163
Регулятор сходимости 167
Рефлексивное пространство 349
Ряды из элементов K-пространства 56

Сингулярный функционал 411
Слабо абсолютно непрерывная функция 327
— измеримая функция 330
След элемента 93
Соединение булевских алгебр полное 78
— K-пространств 69
— — полное 69
— — счётное 179
— разложений единичных элементов 112
— элементов булевской алгебры 75
— — K-пространства 34
Составляющая элемента 106
Спектр 104
Степень элемента 156
Структура 37
— полная 37

Топологическое пространство (T_1) 50
— — (T_2) 502
(t)-аннулируемое множество 186
(t)-сходимость 48
(to)-непрерывность 238
(tt)-непрерывность 238

Устойчивость сходимости 166

Функционал 228

Характеристика 98

Частично упорядоченное множество 37

Элемент положительности 412
Элементарное K-пространство 449

Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
12	14—15 св.	новые направления в нём, возникшие	новых направлений в нём, возникших	Авт.
33	6 св.	ограничены сверху	ограничены	„
77	13 сн.	$-e_{N_1}$	$-e_{-N_1}$	Корр.
113	13 „	$\leqslant \omega^{-\delta_1}$	$\leqslant \omega_1^{-\delta_1}$	„
119	2 св	$\begin{pmatrix} e_i^* \\ \lambda_i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e_i^* \\ \lambda_{i-1} \end{pmatrix}$	Авт.
126	7 „	благодаря	и благодаря	Корр.
131	16 „	$e = e$	$e_{x^*} = e$	„
132	6 сн.	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	„
148	9 св.	Ω	$\Omega(e)$	Авт.
148	9 „	$x \in X$	$x \in X_e$	„
182	8 сн.	большом	большом n	Корр.
198	5 св.	$< \delta$	$< \delta'$	Авт.
200	8 сн.	$\rho'(x-y)$.	$\frac{1}{2}\rho'(x-y)$	„
326	14 св.	пространства единицы	единицы пространства	Ред.
344	4 сн.	$\geqslant x_1$	$\leqslant x_1$	Авт.
345	13 „	$U(x_0)\lambda + \overline{y}$	$U(x_0) + \lambda\overline{y}$	Корр.
350	26 „	X_0 **	X **	„
351	4 „	сферы K	сферы S	Авт.
359	8 св.	X **	X_0 **	„
360	5 „	$\lvert f^+(z) - f^-(z) \rvert$	$\lvert \psi(f^+) - \psi(f^-) \rvert$	„
416	6 „	$\mathbf{1}_f$	$\mathbf{1}_{f_1}$	Тип.
464	10 „	$[J_Z - \lVert U \rVert(\lVert x \rVert)]$	$[J_Z - \lVert U \rVert](\lVert x \rVert)$	Корр.
466	8 сн.	$\lVert z_n - z_m \rVert$	$\lvert z_n - z_m \rvert$	„
483	1 „	$\xi_i =$	$\xi_i -$	„
489	4 св.	$\lvert x \rvert$	$\lVert x \rVert$	„
494	12 сн.	$\leqslant \int\limits_G \left[\ldots\right] dt \leqslant$	$\leqslant \int\limits_G \left\lvert \ldots \right\rvert dt \leqslant$	Авт.

11-5-4

Редакторы *З. Я. Шапиро* и *Г. П. Акилов*. Техн. редактор *К. М. Волчок*.

Подписано к печати 20/IV 1950 г. Тираж 3 000 экз. Бумага 60×92 см (1/16).
Бум. л. 17,125. 34,25 печ. л. 41,36 уч.-изд. л. 48336 тип. зн. в печ. л.
Т-00266. Цена 24 руб. 80 коп., переплет 2 руб. Заказ № 1213.

4-я типография им. Евг. Соколовой Главполиграфиздата при Совете Министров СССР,
Ленинград, Измайловский пр., 29.