

Л. В. КАНТОРОВИЧ

ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ<sup>1</sup>

Обзор ряда работ, в которых предложены различные методы построения функции, совершающей конформное отображение. Главным образом рассмотрены методы, разработанные в последние годы в Научно-исслед. ин-те математики и механики (НИИММ) Ленинградского гос. университета. Основные разделы доклада: 1) вариационные методы, 2) формула Кристоффеля-Шварца, 3) метод последовательных приближений, 4) интегральные уравнения, 5) графоаналитический метод П. В. Мелентьева.

В настоящей статье мною рассмотрены некоторые методы, дающие возможность эффективного построения функции, совершающей отображение<sup>2</sup>. При этом я имею в виду, главным образом, те методы, которые были впервые выдвинуты или усовершенствованы сотрудниками Научно-исследовательского института математики и механики (НИИММ) при Ленинградском государственном университете за последние несколько лет [1].

§ 1. Вариационные методы

Могут быть построены различные методы, основанные на вариационных принципах. Рассмотрим прежде всего метод, предложенный Бибербахом в 1914 г.[2]. Пусть дана некоторая область  $D$  в плоскости комплексного переменного  $z$ ; для удобства будем считать, что начало  $z=0$  лежит в ней. Будем рассматривать всевозможные функции  $\omega = f(z)$ , удовлетворяющие условиям:

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = 1 \tag{1}$$

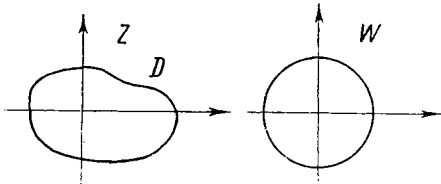
и отображающие конформно область  $D$  на некоторые другие. Площадь отображенной области будет наименьшей в том случае, когда эта область есть круг. Но площадь отображенной области дается интегралом

<sup>1</sup> Доложено 22 марта 1936 г. на сессии Группы математики Академии Наук СССР.

<sup>2</sup> Более подробное изложение рассматриваемых здесь методов дано в гл. 5 книги Л. В. Канторовича и В. И. Крылова «Методы приближенного решения уравнений в частных производных», ОНТИ, 1936. См. также труды НИИММ при ЛГУ, т. II, Конформное отображение односвязных и многосвязных областей.

$$I = \iint_D f'(z) \overline{f'(z)} dx dy. \quad (2)$$

Таким образом: среди всех функций, регулярных в области  $D$  и удовлетворяющих условию (1), наименьшее значение интегралу  $I$  дает та, которая совершает отображение области  $D$  на круг.



Фиг. 1

Для приближенного решения задачи о минимуме интеграла  $I$  может быть с успехом применен метод Рунца. Рассмотрим для этого любые функции  $u_0(z)$ ,  $u_1(z)$ , ...,  $u_n(z)$ , регулярные в области  $D$ , линейно-

независимые и удовлетворяющие условиям:

$$u_0(0) = 1; \quad u_1(0) = \dots = u_n(0) = 0.$$

Составим линейную комбинацию:

$$\varphi_n(z) = u_0(z) + c_1 u_1(z) + \dots + c_n u_n(z).$$

Заметим, что условия (1) будут автоматически удовлетворены, если принять  $f'(z) = \varphi_n(z)$ ;  $f(z) = \int_0^z \varphi_n(z) dz$ . Будем теперь искать постоянные  $c_1, \dots, c_n$ , чтобы сделать интеграл  $I$  минимальным. После подстановки  $\varphi_n(z)$  в интеграл дело сводится к отысканию минимума квадратичной формы, что приводит к системе линейных уравнений:

$$\alpha_{k,0} + \sum_{j=1}^n \alpha_{k,j} c_j = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n); \quad \alpha_{kj} = \iint_D u_j \bar{u}_k dx dy. \quad (A)$$

Если  $c_i$  удовлетворяют уравнениям (A), то  $\int_0^z \varphi_n(z) dz$  дает искомое приближенное значение для отображающей функции.

Во многих случаях бывает удобно принять

$$u_0(z) = 1; \quad u_1(z) = z; \quad \dots \quad u_n(z) = z^n,$$

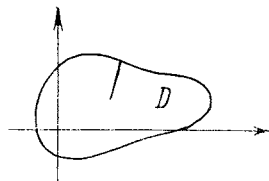
тогда  $\varphi_n(z)$  оказывается полиномом. Наибольшую трудность при применении метода, кроме решения системы (A), представляет обычно весьма утомительное вычисление интегралов, дающих коэффициенты  $\alpha_{k,j}$ , хотя при специальном виде области в него могут быть внесены известные упрощения. Укажем, что вычисления, которые встречаются здесь, эквивалентны вычислениям, необходимым для построения ортогональных полиномов Бохнера-Бергмана для данной области.

Относительно сходимости процесса заметим, что если только  $\varphi_n(z)$  — минимизирующая последовательность, т. е. если  $I(\varphi_n) \rightarrow \min I(\varphi)$ , то функции  $\varphi_n(z)$  сходятся в области к производной отображающей функ-

ции  $f'(z)$ . Для того же, чтобы последовательность  $\varphi_n(z)$  была минимизирующей, достаточно, чтобы функции  $u_n(z)$  образовывали в  $D$  полную систему, т. е. чтобы ими было возможно аппроксимировать любую регулярную функцию. Например это будет выполнено в силу известной теоремы Рунге, если за  $u_n$  взять степени  $z$  для любой односвязной области  $D$ , граница которой служит одновременно границей внешней области, т. е. если не допускаются разрезы, идущие внутрь области (фиг. 2).

На тех же принципах можно обосновать и отображение внешности одной области на другую.

Аналогичный способ может быть основан на другом экстремальном свойстве отображающей функции:



Фиг. 2

*Среди всех функций, регулярных в области  $D$  и удовлетворяющих условиям (1), функция, дающая конформное отображение области  $D$  на круг, дает наименьшее значение интеграла*

$$I_1 = \int_L |f'(z)| ds, \quad (3)$$

равному длине образа контура  $L$  области  $D$ .

Исходя отсюда, можно поступать так же, как в предыдущем случае. Можно искать вместо минимума интеграла (3) минимум интеграла

$$I_1 = \int_L |\varphi(z)|^2 ds = \int_L \varphi(z) \overline{\varphi(z)} ds; \quad (3')$$

после того как функция  $\varphi(z)$  будет найдена,  $f$  определится легко:

$$f(z) = \int_0^z \varphi^2(z) dz.$$

Для нахождения минимума интеграла (3') может быть применен тот же способ Рунге с той разницей, что здесь вместо интегралов по областям придется вести вычисление контурных интегралов, что может оказаться иногда более удобным. Этот способ связан с полиномами Сеге ортогональными по контуру, так же как предыдущий с полиномами Бохнера-Бергмана.

Применение этого минимального принципа для приближенного построения отображающей функции было предложено В. И. Крыловым.

Рассмотрим здесь еще один метод, основанный на связи задачи о конформном отображении с задачей Дирихле.

Известно, что задачу о конформном отображении некоторой области можно привести к нахождению для нее функции Грина; именно, если  $f(z)$  функция, отображающая область на единичный круг, то функция  $\lg |f(z)|$  будет функцией Грина для области  $D$ . Рассмотрим функцию  $u(x, y) = \lg \left| \frac{f(z)}{z} \right|$ . Это есть гармоническая функция, которая удовлетворяет граничному условию

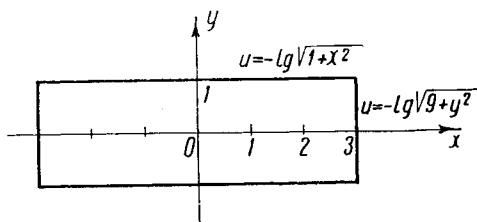
$$u = -\lg r \text{ на контуре.}$$

Нахождение этой функции даст возможность найти  $f(z)$ .

Для нахождения  $u$  можем воспользоваться опять вариационными методами. Именно, нужно минимизировать интеграл

$$\iint_D \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (4)$$

Для решения этой задачи воспользоваться способом Ритца трудно, так как граничные условия не нулевые. Здесь можно использовать мо-



Фиг. 3

дифференциацию его, которая была мною предложена в 1932 г. [3]. Этот метод состоит в том, что задача решения уравнения в частных производных приближенно заменяется задачей решения обыкновенного дифференциального уравнения или системы таких уравнений.

Рассмотрим, например, задачу нахождения функции Грина для прямоугольника со сторонами 2 и 6 (фиг. 3). Ищем решение в виде

$$u = (1 - y^2) \varphi(x) - \lg \sqrt{x^2 + 1},$$

так как тогда при  $y = \pm 1$  граничные условия будут удовлетворены, какова бы ни была  $\varphi(x)$ . Можно теперь подставить это выражение в интеграл (4); получим интеграл, зависящий от функции одного переменного:

$$\iint_D \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 4 \int_0^3 \left[ \frac{4}{3} \varphi^2 + \frac{8}{15} \varphi'^2 - \frac{4}{3} \frac{x}{1+x^2} \varphi' + \frac{x^2}{(x^2+1)^2} \right] dx.$$

Минимизируя этот интеграл, получим для определения функции  $\varphi$  дифференциальное уравнение:

$$\varphi'' - \frac{5}{2} \varphi = \frac{5}{4} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Мы должны найти решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям  $\varphi(3) = \varphi(-3) = \lg \frac{\sqrt{10}}{3}$ . Легко найти, заменяя в выражении для  $\varphi$  интеграл приближенно по формуле Симпсона и определяя постоянную  $C$  из условия  $\varphi(3) = \lg \frac{\sqrt{10}}{3}$ , что

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= C \operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{2}} x + \int_0^x \sqrt{\frac{2}{5}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{5}{2}} (x-t) \cdot \frac{5(1-t^2)}{4(1+t^2)^2} dt \approx \\ &\approx -0.228 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{2}} x + \frac{\sqrt{10}}{3} x \left[ \frac{1}{16} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{5}{2}} x + 4 \frac{16-x^2}{(16+x^2)^2} \operatorname{sh} \frac{3}{4} \sqrt{\frac{5}{2}} x + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{16-4x^2}{(16+4x^2)^2} \operatorname{sh} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} x + 4 \frac{16-9x^2}{(16+9x^2)^2} \operatorname{sh} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{2}} x \right]. \end{aligned}$$

А тогда для  $u$  находим следующее приближенное выражение:

$$u = (1 - y^2) \varphi(x) - \lg \sqrt{x^2 + 1}.$$

В частности, например,  $u(0, 0) = -0.228$ .

После того как  $u$  найдена, легко установить соответствие между областями, отвечающее конформному отображению. Так, линии  $u = \lg \frac{c}{|z|}$  при различных постоянных  $C$  дадут линии, отвечающие концентрическим окружностям.

Тот же способ может быть применен и по отношению к областям других видов (см. фиг. 4), только дифференциальное уравнение будет с постоянными коэффициентами лишь в случае параллелограмма (фиг. 4а); для трапеции, изображенной на фиг. 4б, это будет уравнение Эйлера, а для трапеции, изображенной на фиг. 4с, — уравнение Гаусса.

## § 2. 0 формуле Кристоффеля-Шварца

Вопрос об отображении полигональных областей весьма полно освещен в статье С. Б. Бергмана [7]. Поэтому я имею в виду ограничиться здесь двумя небольшими замечаниями.

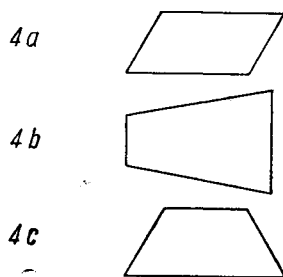
1. Функция, отображающая полуплоскость на внутренность многоугольника, может быть получена в форме интеграла Кристоффеля-Шварца

$$f(z) = c_1 \int_0^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz.$$

Лишь в отдельных случаях интеграл сводится к эллиптическому и можно пользоваться таблицами. Так как подинтегральная функция имеет особенности, приближенные методы вовсе неприложимы непосредственно или дают очень большую погрешность. Я хочу обратить внимание на следующий элементарный прием [4], аналогичный по идее методу улучшения сходимости тригонометрических рядов акад. А. Н. Крылова, который может оказаться здесь полезным. Рассмотрим сначала более простой случай, когда в промежутке имеется лишь одна особая точка. Тогда интеграл можно записать так:

$$I = \int_a^b (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} \varphi_1(z) dz,$$

причем точка  $z = a_1$  не является особой точкой функции  $\varphi_1(z)$ . Разобьем интеграл на два, выделив из  $\varphi_1(z)$ , например, два первых члена ее разложения в ряд Тейлора; получим:



Фиг. 4

$$I = I_1 + I_2 = \int_a^b (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} \left[ \varphi(a_1) + \varphi'(a_1)(z - a_1) \right] dz + \\ + \int_a^b (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} \left[ \varphi(z) - \varphi(a_1) - \varphi'(a_1)(z - a_1) \right] dz.$$

Первый интеграл легко вычисляется точно, для второй точка  $z = a_1$  не будет особой, так как второй множитель содержит  $(z - a_1)^2$  и потому  $I_2$  может быть вычислен с помощью формул приближенного интегрирования. В случае, если в промежутке интегрирования будет несколько особых точек, то можно выделить части ряда Тэйлора соответственно каждой точке, либо разбить промежуток интегрирования и тем свести дело к первому случаю. При пользовании указанным приемом аппарат интегралов Кристоффеля-Шварца оказывается вполне удобным для представления отображающей функции.

2. Если с помощью формулы Кристоффеля-Шварца желают получить отображение на определенный многоугольник, то основную трудность представляет определение постоянных. Их определение приводит вообще к решению системы весьма сложных трансцендентных уравнений. Однако для решения этой системы может быть с успехом применен метод Ньютона, если известны первые приближения для искомых параметров. Исследование применимости метода Ньютона, а также тех условий, которым должны удовлетворять первые приближения, чтобы была обеспечена сходимость процесса, было произведено аспирантом НИИММ Н. П. Стениным.

В результате при решении задачи отображения на полигональную область наиболее удобным мне представляется такой порядок:

1. Найти грубо приближенное отображение полуплоскости на полигон любым методом, например вариационным способом, и по точкам, которые будут отвечать вершинам, найти первые приближения для параметров.

2. Отыскать точные значения параметров, пользуясь методом последовательных приближений Ньютона.

3. После того как параметры определены, а также в процессе их нахождения значение отображающей функции вычислять из ее интегрального представления, применяя метод выделения особенностей.

### § 3. Метод сопряженных тригонометрических рядов и методы последовательных приближений

Пусть мы желаем отобразить единичный круг на область, ограниченную некоторым контуром. Если бы отображающая функция была известна

$$z = x + iy = f(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) \zeta^n,$$

то полагая в ней  $\zeta = e^{it}$  и отделяя вещественную и мнимую части, мы получили бы следующее параметрическое представление контура области:

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt - b_n \sin nt), \\ y &= \sum_{n=1}^{\infty} (-b_n \cos nt + a_n \sin nt). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Напротив, если бы нам было известно такое представление контура — с помощью сопряженных тригонометрических рядов, — то легко было бы получить отображающую функцию. Для нахождения такого представления, если уравнение контура дано, например, в виде

$$x^2 + y^2 + \lambda F(x, y) = 1,$$

где  $F$  — аналитическая функция, можно подставить вместо  $x$  и  $y$  из (5) тригонометрические ряды и в полученном выражении приравнять нулю коэффициенты при всех косинусах и синусах. Тогда получим для нахождения  $a_n$  и  $b_n$  бесконечную систему уравнений, которую можно решать по способу последовательных приближений [5].

Так, например, для эллипса  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = \frac{1}{4}$  таким способом находим отображающую функцию с точностью до 0.02 в виде  $z = 0.99 \zeta + 0.12 \zeta^3 + 0.03 \zeta^5 + 0.01 \zeta^7$ .

Перейдем теперь к методу последовательных приближений.

Предположим, что рассматриваемая область близка к некоторой области, отображение круга на которую известно. Иначе говоря, предполагаем, что уравнение контура, а потому и ограниченная им область  $D_\lambda$  зависит от параметра  $\lambda$ :

$$F(z, \bar{z}, \lambda) = 0,$$

причем при  $\lambda = 0$  отображение на область  $D_0$  дает известная функция  $z = \chi_0(\zeta)$ . Естественно отображающую функцию искать в виде ряда:

$$z = \chi(\zeta, \lambda) = \chi_0(\zeta) + \lambda \chi_1(\zeta) + \lambda^2 \chi_2(\zeta) + \dots$$

Тогда для функций  $\chi(\zeta)$  легко указать определяющие их рекуррентные соотношения. Для определенности проведем вычисление первого приближения. Когда  $\zeta$  принадлежит единичной окружности,  $z$  должно лежать на граничной кривой. Поэтому, подставив выражения  $z$  в уравнение кривой, можем приравнять нулю члены, содержащие первые степени  $\lambda$ , откуда найдем:

$$F'_z(\chi_0, \bar{\chi}_0, 0) \chi_1 + F'_{\bar{z}}(\chi_0, \bar{\chi}_0, 0) \bar{\chi}_1 + F'_\lambda(\chi_0, \bar{\chi}_0, 0) = 0.$$

Далее, так как  $\chi_0(\zeta)$  удовлетворяет уравнению  $F(\chi_0(\zeta), \overline{\chi_0(\zeta)}, 0) = 0$ , то, дифференцируя его по  $it$ , получим:

$$F'_z(\chi_0, \bar{\chi}_0, 0) \zeta \chi'_0 + F'_{\bar{z}}(\chi_0, \bar{\chi}_0, 0) \bar{\zeta} \bar{\chi}'_0 = 0.$$

Отсюда исключением легко находим:

$$2R \left( \frac{\chi_1}{\xi \chi_0'} \right) = \Lambda_1 = - \frac{F'_\lambda(\chi_0, \bar{\chi}_0, 0)}{\chi_0' \xi F'_z(\chi_0, \bar{\chi}_0, 0)}.$$

Далее, восстанавливая функцию по ее действительной части, получим:

$$\chi_1 = \frac{\chi_0' \xi}{2} (\Lambda_1 + i \tilde{\Lambda}_1),$$

где  $\tilde{\Lambda}_1$ —сопряженная к  $\Lambda_1$  функция, которая может быть дана сопряженным рядом или с помощью формулы Шварца.

В ряде конкретных примеров такое построение дает возможность довольно легко действительно построить отображающую функцию. Отображающая функция получается обычно в виде полинома в круге, что весьма полезно, например, в задачах теории упругости.

Способ этот пригоден также, если уравнение области дано в параметрической форме, а также если речь идет об отображении внешних областей.

Мною была установлена также сходимость метода при достаточно малых значениях  $\lambda$ . С помощью аналитического продолжения, однако, оказывается возможным получить отображающую функцию не только для малых значений параметра.

Метод этот может быть применен и для отображения многосвязных областей, но хотя он здесь и дает хорошие результаты, я не имею полного доказательства его сходимости<sup>1</sup>.

Другой метод последовательных приближений для построения отображающей функции в случае отображения области на круг был развит В. И. Крыловым.

Этот метод построен на несколько иной идее. Именно, пусть область дана в комплексной форме. Для определенности предположим, что это есть эллипс

$$z = e^{it} (1 + \lambda^2 e^{-2it}).$$

Функция, отображающая его на круг, была бы такой, что  $|f(z)| = 1$  на контуре. Будем искать полином  $P(z) = z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \dots + a_{2n+1} z^{2n+1}$ , чтобы  $P(z) \cdot \overline{P(z)}$  было постоянным на контуре. Точно этого добиться нельзя, но мы можем вычислить выражение  $P(z) \cdot \overline{P(z)}$  и приравнять в нем нулю коэффициенты при первых степенях  $e^{it}$ . Получаем относительно  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , некоторую систему уравнений второй степени. Эту систему можно решать затем по способу последовательных приближений.

<sup>1</sup> Пользуюсь случаем, чтобы указать на то, что энонсированные по этому вопросу в моей заметке (ДАН, 1934, II, стр. 441) результаты не следует считать установленными.





### § 5. Метод П. В. Мелентьева

Из графических и численных методов я здесь остановлюсь только на комбинированном методе, предложенном инж. П. В. Мелентьевым.

Метод этот основан на том, что для нахождения функции, отображающей круг на область, достаточно найти параметрическое представление последней с помощью сопряженных тригонометрических рядов.

Будем искать функцию вида

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \zeta^{n+1} = \alpha_0 \zeta + \alpha_1 \zeta^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \zeta^{n+1},$$

переводящую единичный круг в данную область так, что 0 переходит в 0 и 1 в точку  $A$  на оси.

Удобно рассмотреть не  $z$ , а отношение:

$$u + iv = w = \frac{z}{\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \zeta^n.$$

Если область близка к окружности, то  $\frac{z}{\zeta}$  близко к постоянной

и, следовательно,  $u$  почти постоянно, а  $v$  мало (фиг. 6).

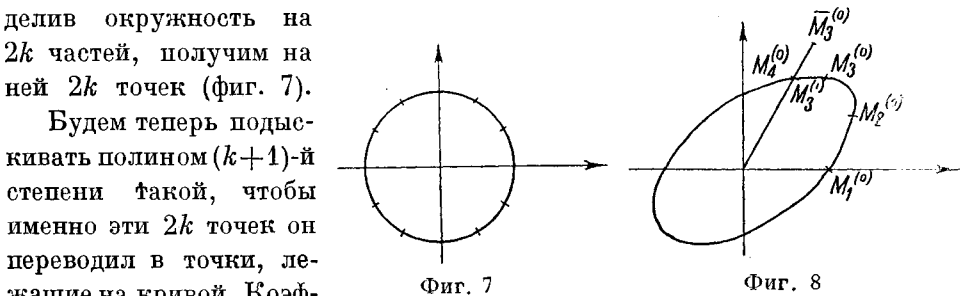
Очевидно  $u$  и  $v$  представляются так же, как  $x$  и  $y$ , сопряженными рядами:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta - b_n \sin n\theta);$$

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta).$$

Для приближенного нахождения такого представления поступаем так. Прежде всего отказываемся от бесконечного ряда и задаемся определенным числом  $k$ . Разделив окружность на  $2k$  частей, получим на ней  $2k$  точек (фиг. 7).

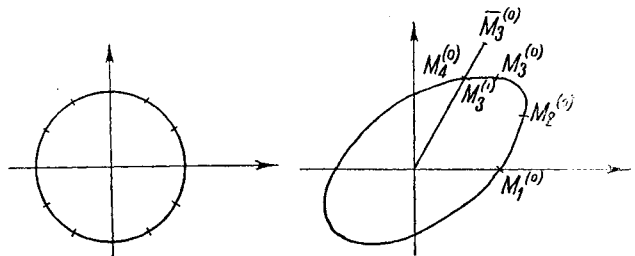
Будем теперь подыскивать полином  $(k+1)$ -й степени такой, чтобы именно эти  $2k$  точек он переводил в точки, лежащие на кривой. Коэффициенты полинома будем находить по способу последовательных приближений. Зададимся



Фиг. 6

Фиг. 7

Фиг. 8



Зададимся

сначала некоторыми (предполагаемыми) положениями, в которые точки, выбранные на окружности, перейдут на кривую; пусть это будут точки  $M_i^0$ . Это даст определенные  $u^{(0)}$  и  $v_i^{(0)}$ . По значениям  $u_i^{(0)}$  составим разложение  $u(\theta)$  в ряд Фурье приемами гармонического анализа, и найдем некоторые значения для коэффициентов  $a_n^{(0)}$  и  $b_n^{(0)}$ . Зная их, сможем вычислить новые значения  $v: \bar{v}_i^{(0)}$ , отличные от первоначальных  $v_i^{(0)}$ . Тогда получим новые положения точек  $\bar{M}_i^{(0)}$ , которые уже не будут лежать на кривой. Снесем их на кривую по кратчайшему расстоянию или по радиус-вектору. Получим точки  $M_i^{(1)}$ , которые дадут новые, вообще говоря, более правильные положения точек  $M_i$ . Это даст новые значения  $u: u_i^{(1)}$ , по ним можно составить новые  $a_n^{(1)}$  и  $b_n^{(1)}$  и т. д.

Предположим, что когда мы будем продолжать этот процесс, точки  $M_i^{(s)}$  будут при  $s \rightarrow \infty$  стремиться к определенным предельным положениям  $M_i^1$ . Тогда мы будем иметь полином, который  $2k$  точек на единичной окружности переводит в точки на кривой. Последнее дает основание предполагать, что полученный полином вообще близок к истинной отображающей функции.

В случае областей, близких к кругу, выбор первых приближений естественен; П. В. Мелентьевым указаны удобные способы подбора первых приближений для многих других случаев, основанные на близости данной области к области, отображаемой на круг с помощью той или иной функции простого вида.

На многих практических деталях я не останавливаюсь здесь подробно.

Метод этот дает весьма хорошие результаты при решении конкретных задач, к сожалению, теоретическое исследование его автором еще не произведено.

Научно-исследовательский  
институт математики и механики  
Ленинградского гос. университета  
им. А. С. Бубнова

#### ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Труды Ленинградского НИИММ, т. II.
- <sup>2</sup> L. Bieberbach, Rend. Circ. Mat., Palermo 1914.
- <sup>3</sup> Л. В. Канторович, Известия Академии Наук, 1933, № 5.
- <sup>4</sup> Л. В. Канторович, Математ. сборн., т. 41, вып. 2.
- <sup>5</sup> Л. В. Канторович, Математ. сборн., т. 40, вып. 3; т. 41, вып. 1.
- <sup>6</sup> С. А. Гершгорин, Математ. сборн., т. 40, вып. 1.
- <sup>7</sup> С. Б. Бергман, Изв. ОМЭН Академии Наук, математ. серия, № 1 (1937).

**L. KANTOROVITCH. LES MÉTHODES EFFECTIVES DANS LA THÉORIE  
DES REPRÉSENTATIONS CONFORMES  
RÉSUMÉ**

Nous donnons l'exposé de certaines méthodes pour résoudre approximativement le problème de la représentation conforme. Nous considérons surtout les méthodes étudiées à l'Institut Mathématique de Leningrad.

1. Les méthodes du calcul des variations. La méthode de Bieberbach [2] est basée sur cette propriété extrémale de la fonction réalisant la représentation conforme d'un domaine donné sur un cercle que l'image du domaine a une aire minimale. Ce fait conduit au problème de trouver le minimum d'une certaine intégrale étendue à un domaine; il peut être résolu approximativement par la méthode de Ritz. Parfois il est plus aisé de réduire le problème à la recherche du minimum d'une certaine intégrale curviligne.

La détermination de la fonction qui réalise la représentation conforme est équivalente à la recherche de la fonction de Green. Pour résoudre ce dernier problème on applique avec profit la méthode des variations proposée par l'auteur [3] et présentant une modification de la méthode de Ritz.

2. La formule de Christoffel-Schwarz. Pour calculer les intégrales il est utile d'appliquer un procédé spécial—le «dégagement de la singularité». Pour définir les paramètres dans la formule on peut profiter de la méthode des approximations successives de Newton; la possibilité de l'appliquer a été démontrée par Stenin.

3. La méthode des approximations successives. On cherche la représentation d'un cercle sur un domaine dont l'équation du contour dépend d'un paramètre. La fonction réalisant cette représentation est développée en série suivant les puissances de ce paramètre. Dans plusieurs cas on obtient des bons résultats numériques [5].

Une autre méthode d'approximations successives pour représenter un domaine sur un cercle est proposée par W. Kryloff.

4. Les équations intégrales. Pour la fonction donnant l'angle polaire d'un point sur la courbe quand on connaît l'angle du point correspondant sur le cercle, S. Gerschgorine [6] a donné une équation intégrale de forme bien commode. La solution numérique de cette équation permet même dans les cas compliqués de trouver la fonction réalisant la représentation conforme. Une méthode analogue pour les domaines multiplement connexes est proposée et étudiée par W. Kryloff.

5. La méthode grapho-analytique de P. M. L. L. On cherche un polynôme de degré  $k+1$  qui transforme  $2k$  points donnés du cercle-unité en  $2k$  points sur le contour du domaine donné. Les coefficients du polynôme s'obtiennent par la méthode des approximations successives. Le polynôme trouvé est une approximation de la fonction réalisant la représentation conforme. Cette méthode est commode et effective dans les applications, mais la convergence n'est pas encore étudiée.