

621.50  
К 203 ✓

20

А. Е. КАПЛЯНСКИЙ и Л. С. ПОЛОТОВСКИЙ

~~621.5~~

~~К 203~~

~~24973/5~~

# ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Ленинград — 1957

021.50  
К203

А. Е. КАПЛЯНСКИЙ и Л. С. ПОЛОТОВСКИЙ

~~621.3  
К-20~~

# ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

~~5  
24973  
1928~~

~~БИБЛИОТЕКА  
Астрономического Совета  
Академии Наук СССР~~

ЛКВВИА  
Академическая  
БИБЛИОТЕКА  
УЧЕБНЫЙ ФОНД

ЛЕНИНГРАДСКАЯ КРАСНОЗНАМЕННАЯ ВОЕННО-ВОЗДУШНАЯ  
ИНЖЕНЕРНАЯ АКАДЕМИЯ имени А. Ф. МОЖАЙСКОГО

Ленинград — 1957

ГОС. ПУБЛИЧНАЯ  
НАУЧ.-ТЕХНИЧЕСКАЯ  
БИБЛИОТЕКА СССР

2410

$\frac{\Sigma}{68}$

~~621.3  
K 203~~

1

28648

Технический редактор Павлова Т. П.

Корректор Плоткина О. М.

Подписано к печати 3.10.57  
Зак. 586

Печ. л. 14,25

Авт. л. 15,2  
Г-508112

Типолитография ЛКВВИА имени А. Ф. Можайского

### Замеченные опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
204	3 снизу	$-i_c \frac{dM_{kp}}{dt}$	$-i_p \frac{dM_{kp}}{dt}$	Типографии
204	7 снизу	$\dots -i_k \frac{dM_{kp}}{dt}$	$\dots - \sum_{p \neq k} i_p \frac{dM_{kp}}{dt}$	Автора

А. Е. Каплянский и Л. С. Полотовский

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый учебник Физических основ электротехники имеет ряд особенностей по сравнению с существующими курсами.

Основные понятия о физических процессах в электрических и магнитных полях известны из курса физики. Тем не менее, вопреки распространенному в настоящее время мнению о том, что изложение теоретических основ электротехники (ТОЭ) следует начинать с теории электрических и магнитных цепей, авторы считают, что первой частью ТОЭ должны быть „Физические основы электротехники“, но изложенные как первая инженерная дисциплина.

В предлагаемом учебнике не повторяется раздел электричества и магнетизма курса физики; основные положения последнего приводятся как известные, но в рационализованной форме и в системе единиц МКСА, и дается лишь их углубление и обобщение. Основное внимание уделяется расчету цепей и простых полей, а также преобразованию энергии, т. е. вопросам, представляющим наибольший интерес для техники. При этом уже в первой части, посвященной, как обычно, электрическому полю, рассматриваются процессы, связанные с током, возникающим при преобразованиях энергии этого поля, так как явление тока известно из курса физики. Подобного рода возможности используются в ряде случаев.

Как известно, в электротехнике широко применяются фиктивные расчетные величины, например: электрическое изображение, магнитная масса, реактивное и полное сопротивление, символическое и операторное изображение, вектор-потенциал и т. д. Считая свой курс электротехнической дисциплиной, авторы широко пользовались этой методикой. Авторы считали также правильным и плодотворным широкое использование метода аналогий, облегчающего усвоение новых вопросов и проведение расчетов. По этому поводу уместно привести слова Ньютона: „... не следует также уклоняться от сходственности в природе, ибо природа всегда и проста и всегда сама с собой согласна“.

С целью сделать учебник более доступным для учащихся его объем сокращен примерно вдвое по сравнению с аналогичными руководствами. Это сокращение выполнено за счет:

1) исключения второстепенных вопросов, которые не входят в программу или практически не излагаются на лекциях за недостатком времени,

2) исключения вопросов, входящих в программу других курсов, например курса электронно-ионных приборов,

3) указанного выше применения метода аналогий и фиктивных расчетных величин.

Учебник написан обоими авторами вместе: после совместного составления плана и выбора метода изложения отдельных вопросов текст, написанный одним соавтором, корректировался другим и окончательно принимался после совместных обсуждений. Авторами первоначального текста были: глав IV и V и § 53 главы IX—А. Е. Каплянский, остальных—Л. С. Полотовский.

Авторы благодарят за ценные советы профессора доктора техн. наук Д. М. Казарновского, кандидата техн. наук А. П. Лысенко и рецензента доцента кандидата техн. наук С. Г. Гинзбурга.

Авторы будут благодарны читателям за сообщение критических замечаний и других указаний, в особенности связанных с опытом использования предлагаемого учебника в преподавании.

АВТОРЫ

Ленинград, февраль 1957 г.

## ВВЕДЕНИЕ

1. Уже в глубокой древности были известны электрические и магнитные явления — механическое взаимодействие наэлектризованных тел и взаимодействие постоянных магнитов.

Термин „электричество“ был введен Гильбертом, опубликовавшим первое исследование электрических и магнитных явлений в 1600 г. Гильберт отрицал связь между этими явлениями, в действительности существующую.

В 1650 г. была создана первая электрическая машина, в которой заряд создавался трением.

В середине XVIII в. М. В. Ломоносов, исследуя атмосферное электричество, пришел к выводу, что оно возникает в результате „трения частичек паров“ в противовес господствующим тогда гипотезам невесомых электрических жидкостей (одной или двух). В это же время им совместно с Г. Рихманом был создан первый электроизмерительный прибор.

В 1758 г. Ф. У. Эпинус выступил с докладом о родстве электрических и магнитных явлений, им же было открыто явление электростатической индукции.

В 1785 г. было установлено первое количественное соотношение для электрических и магнитных явлений—закон Кулона. Теория потенциала, созданная Лагранжем и Лапласом, в 1812 г. была перенесена Пуассоном на электрические и магнитные явления.

В 1800 г. Вольта сообщил о своем открытии нового источника электрической энергии—вольтова столба, а три года спустя В. В. Петров, пользуясь этим источником, открыл электрическую дугу и указал на возможность ее использования для освещения и плавки металлов.

Несмотря на сходство закона взаимодействия между наэлектризованными телами и между намагниченными телами, Кулоном же было указано на существенное различие: электрические заряды могут быть разделены на положительные и отрицательные, а магнитные массы разделить на положительные и отрицательные нельзя.

В 20-х годах XIX в. работами Эрстеда, Ампера и других было доказано, что ток сопровождается магнитным полем; это

явилось первым свидетельством связи электрических и магнитных явлений.

Открытие Фарадеем в 1831 г. явления электромагнитной индукции—возникновения тока в контуре, движущемся в магнитном поле, т. е. явления, обратного установленному Эрстедом и Ампером, окончательно установило непрерывную связь электрических и магнитных явлений. Это открытие было дополнено работами Э. Х. Ленца, установившего закон о направлении индуктированного тока и принцип обратимости электрических машин. На этом закончился первый период развития науки об электричестве, когда электротехники еще не существовало.

Начиная с тридцатых годов прошлого века, происходит интенсивное развитие науки об электричестве и появление электротехники.

В отличие от первого периода, когда причиной всех электрических и магнитных явлений считались заряды и магнитные массы, а поле вокруг них рассматривалось как вспомогательное математическое понятие, теперь поле стало принимать главенствующее значение.

Электрическое поле, как это следовало из закона электромагнитной индукции, могло быть создано изменением магнитного поля, а не только зарядами. Оба поля оказались неразрывно связанными друг с другом и стали рассматриваться как две стороны единого электромагнитного поля.

Этот новый подход к рассмотрению электрических явлений был в основном завершен в 1873 г., когда Максвелл опубликовал „Трактат об электричестве и магнетизме“, в котором была изложена в математической форме теория электромагнитного поля.

Теория Максвелла не была им подтверждена опытом, что и вызвало возражения многочисленных противников. Однако последующими работами—Герца (1887—1889 гг.) по распространению электромагнитных волн, П. Н. Лебедева (1900—1910 гг.) по световому давлению, А. А. Эйхенвальда (1903—1904 гг.) по магнитному полю токов конвекции и смещения, А. Ф. Иоффе (1911 г.) по магнитному полю потока электронов—эта теория была полностью подтверждена.

Согласно современным воззрениям электромагнитное поле представляет собой вид материи и, как всякая материя, характеризуется энергией и массой; для электротехники представляет интерес лишь энергия, ее изменения и преобразование в другие виды энергии.

Наряду с развитием теории электричества с 30-х годов XIX в. происходило развитие электротехники. Уже в 1834 г. Б. С. Якоби был создан первый двигатель постоянного тока и примерно в это же время появились генераторы постоянного тока.

В 1832 г. П. Л. Шилингом был осуществлен первый электромагнитный телеграф, впоследствии усовершенствованный

Б. С. Якоби. В 1838 г. Б. С. Якоби была изобретена гальвано-пластика.

Электрическая энергия была применена для целей освещения П. Н. Яблочковым (1876 г.) в виде электрической свечи, использовавшей электрическую дугу, и А. Н. Лодыгиным (1873 г.), создавшим лампу накаливания, усовершенствованную затем Эдиссоном и Сваном.

В 1874 г. Ф. А. Пироцким, а в 1882 г. Депре были осуществлены первые линии передачи постоянного тока, а в 1880 г. Д. А. Лачиновым была дана теория линии передачи и показана необходимость увеличения напряжения с ростом мощности и дальности передачи.

В 70-х годах была опубликована работа А. Г. Столетова о магнитных свойствах железа, имевшая большое значение для теории электрических машин, и изобретена Н. Н. Бенардосом и Н. Г. Славяновым электрическая сварка.

Источники электрической энергии — вольтов столб и гальванические элементы — давали постоянный ток, и это обусловило развитие вначале электротехники как электротехники постоянного тока. В дальнейшем стал применяться переменный ток, чему способствовало изобретение в 1877 г. П. Н. Яблочковым трансформатора, усовершенствованного в 1882 г. Циперновским и другими, позволявшего легко изменять напряжение переменного тока. Однако отсутствие надежных двигателей переменного тока препятствовало его внедрению и лишь после создания М. О. Доливо-Добровольским системы трехфазного тока и простого трехфазного двигателя переменный ток стал вытеснять постоянный. Передача электрической энергии стала осуществляться также трехфазным током, причем вместе с мощностью и дальностью передач росло напряжение.

В 1919 г. М. О. Доливо-Добровольский обосновал преимущества передачи электрической энергии постоянным током высокого напряжения при очень больших расстояниях и мощностях перед передачей переменным током.

В 1895 г. А. С. Поповым была осуществлена передача сигнала без проводов, послужившая началом развития целой области электротехники — радиотехники.

Прогресс электротехники в XX в. базировался на углублении теории электромагнетизма и ее приложениях к созданию электрических машин, аппаратуры и устройств для передачи энергии на расстояние.

Наше время — время высоких параметров в любой отрасли техники. В электротехнике это означает переход ко все более высоким напряжениям (400 кВ и выше), большим мощностям (созданы генераторы в 200000 кВт), большим скоростям вращения (до 100000 об/мин и выше); при этом все устройства становятся более экономичными по затрате материалов и по коэффициенту полезного действия.

Значение электрической энергии в народном хозяйстве при построении коммунизма лучше всего охарактеризовано в словах основателя Советского государства В. И. Ленина: „Коммунизм— это есть Советская власть плюс электрификация всей страны“.

В настоящее время ни одна область техники не может развиваться дальше без самого широкого использования электрической энергии.

За годы первых пяти пятилеток в СССР во много раз выросла энергетическая база народного хозяйства и создана первоклассная электротехническая промышленность. В решениях XX съезда Коммунистической партии Советского Союза, как на одну из первоочередных задач шестой пятилетки, указывается на необходимость увеличения темпа роста мощных электростанций и широкого внедрения электрической энергии в промышленность, транспорт, связь, сельское хозяйство. Роль электрической энергии в народном хозяйстве еще более увеличивается в связи с огромными работами, проводимыми в нашей стране по внедрению автоматизации и телеуправления во все области производства и широкому использованию атомной энергии для мирных целей.

Современная авиация также широко применяет электрическую энергию для различных целей: навигационных приборов, локации, связи, привода механизмов, управления вооружением и т. д. Широко используется электрическая энергия и на современных аэродромах.

Наряду с использованием во всех отраслях промышленности и сельского хозяйства электрическая энергия все в большей степени внедряется в быт.

Теоретические знания инженера-электрика должны быть весьма глубокими и широкими, только тогда он будет понимать сложные электромагнитные процессы, сможет управлять ими, вести расчет электротехнических устройств и дальше развивать науку и технику. Для этого и изучается курс теоретических основ электротехники.

2. Физические процессы характеризуются рядом величин, которые могут быть сведены к ограниченному числу основных. Число основных величин определяется областью науки. Так, например, в геометрии основной величиной является длина  $L$ , в механике общепринятыми основными величинами являются длина  $L$ , масса  $M$  и время  $T$ . Остальные величины называются производными, так как определяются через основные.

Так, величина скорости  $\left(v = \frac{dl}{dt}\right)$  представляет собой отношение длины и времени. Как известно, связь производных величин с основными определяется формулами размерности; формула размерности скорости

$$|v| = LT^{-1}.$$

Для сопоставления величин, имеющих одинаковую размерность, их сравнивают с величиной, принятой за единицу измерения. В соответствии с числом основных величин выбираются основные единицы; совокупность основных и производных единиц образует систему единиц.

Так как электрические и магнитные явления в принципе не могут быть сведены к чисто механическим, обычно к трем основным величинам, взятым из механики ( $L$ ,  $M$ ,  $T$ ), добавляется четвертая величина, например диэлектрическая или магнитная проницаемость.

В физике наибольшее распространение получили две системы единиц: СГС $\epsilon_0$  и СГС $\mu_0$ , где основными единицами являются сантиметр, грамм, секунда и диэлектрическая или магнитная проницаемость пустоты.

Обе эти системы единиц неудобны для электротехники, что привело к созданию новых единиц — практических, таких, как ампер, кулон, вольт, фарада, генри, джоуль, ватт и т. д. Эти единицы вводились постепенно и не составили целостной системы единиц.

В настоящее время в СССР и ряде зарубежных стран для электротехники принята единая система единиц — МКСА, в которой основными единицами являются метр, килограмм (единица массы), секунда и ампер.

Удобство этой системы единиц заключается в том, что все электрические и магнитные единицы, а также единицы энергии и мощности совпадают с практическими единицами. Для величин неэлектрических в этой системе получаются необычные единицы (так, единица силы — ньютон, равная  $10^2$  г), однако в большинстве электрических расчетов с этими величинами приходится встречаться редко. Все изложение ниже ведется в системе единиц МКСА.

Система единиц МКСА в настоящее время предусматривает так называемую рационализованную форму написания уравнений, предложенную Хевисайдом. Она заключается в том, что множитель  $4\pi$ , входящий в ряд соотношений, исключается из формул, имеющих наибольшее значение в технике; при этом он появляется в других формулах, куда он раньше не входил. При рационализованной форме основные соотношения для электрического и магнитного полей, как это будет видно далее, приобретают симметричный вид.

---

## ГЛАВА I

### ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Во введении было указано, что объективно существует лишь электромагнитное поле, две стороны которого—электрическое и магнитное поля—всегда неразрывно связаны друг с другом.

Однако при известных ограничениях можно рассматривать только электрическое или только магнитное поле. Такой прием отдельного изучения этих полей позволяет наиболее просто и наглядно изучить их особенности. Так, в пространстве, окружающем неподвижное заряженное тело, практически обнаруживается лишь электрическое поле; так как число элементарных частиц велико и движение их хаотическое, то магнитные поля этих элементарных токов уже на малых расстояниях от поверхности заряженного тела взаимно компенсируются и можно считать существующим только электрическое поле.

Под *электростатическим* полем понимается электрическое поле неподвижных в пространстве электрических зарядов.

#### § 1. ЗАКОН КУЛОНА

Основной закон электростатики—закон Кулона, установленный экспериментальным путем, определяет силу взаимодействия  $F$  в однородной среде<sup>1</sup> между двумя *точечными* зарядами  $Q$  и  $Q_1$ , понимая под ними заряды тел, линейные размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними. В рационализованной форме закон Кулона записывается следующим образом:

$$F = \frac{QQ_1}{4\pi\epsilon r^2},$$

здесь  $r$ —расстояние между зарядами,  
 $\epsilon$ —*диэлектрическая проницаемость* среды.

В системе единиц МКСА сила получается в ньютонах ( $n$ ), если заряд взят в кулонах ( $k$ ), расстояние в метрах ( $m$ ), диэлек-

<sup>1</sup> Однородной называется среда, свойства которой одинаковы во всех точках.

трическая проницаемость в фарадах на метр ( $\phi/m$ ), где фарада — единица емкости в системе МКСА.

Так как любая реальная среда состоит, как известно, из отдельных электрических зарядов, то внесенные в среду заряды  $Q$  и  $Q_1$  взаимодействуют не только друг с другом, но и с зарядами самой среды. Это влияние зарядов среды, изменяющее величину силы между зарядами  $Q$  и  $Q_1$ , учитывается введением диэлектрической проницаемости в закон Кулона.

Измерение сил между одними и теми же зарядами, находящимися на одном и том же расстоянии в различных диэлектрических средах, позволяет найти отношение диэлектрических проницаемостей этих сред, но не их абсолютные значения. Поэтому величина проницаемости одной из сред может быть выбрана произвольно; обычно в качестве такой среды выбирается пустота (вакуум). В системе МКСА диэлектрическая проницаемость пустоты принимается равной

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \phi/m;$$

выбор величины  $\epsilon_0$  определяется лишь требованием совпадения наиболее важных для электротехники единиц в системе МКСА с общепринятыми практическими единицами.

В системе СГС $\epsilon_0$

$$\epsilon_0 = 1,$$

а в системе СГС $\nu_0$

$$\epsilon_0 = \frac{10^{-20}}{9} \text{ сек. см.}$$

Для всех других сред, как будет показано ниже, диэлектрическая проницаемость больше, чем для пустоты:

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0,$$

где  $\epsilon_r > 1$  — безразмерная величина, называемая *относительной диэлектрической проницаемостью*. Значение относительной диэлектрической проницаемости совпадает с величиной проницаемости в системе СГС $\epsilon_0$ .

Диэлектрическая проницаемость большинства диэлектриков является величиной постоянной; такие диэлектрики называются *линейными* в отличие от *нелинейных*, у которых  $\epsilon$  зависит от температуры, напряженности поля  $E$  и т. д.

Сила, действующая на заряд  $Q_1$ , направлена по радиусу-вектору  $\vec{r}$ , проведенному из точки расположения заряда  $Q$ ; в векторной форме закон Кулона имеет вид:

$$\vec{F} = \frac{QQ_1}{4\pi\epsilon r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

## § 2. НАПРЯЖЕННОСТЬ ПОЛЯ. СМЕЩЕНИЕ

Электрическое поле впервые было обнаружено по механическому воздействию на заряд; поэтому исторически основной величиной, характеризующей электрическое поле в данной точке, является *напряженность поля*

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{Q_1},$$

где  $Q_1$ —помещенный в эту точку малый заряд, неискажающий поле. В системе МКСА напряженность поля измеряется в в/м.

Из закона Кулона следует, что напряженность поля одного точечного заряда  $Q$  на расстоянии  $r$  от него убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от заряда:

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{Q_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \bar{r}.$$

Согласно принципу наложения поле нескольких зарядов в линейном диэлектрике может рассматриваться как сумма полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности. Тогда результирующая напряженность поля в любой точке равна геометрической сумме напряженностей полей отдельных зарядов:

$$\bar{E} = \Sigma \bar{E}_k.$$

В нелинейных диэлектриках принцип наложения неприменим, так как диэлектрическая проницаемость среды зависит от напряженности поля.

Внутри проводящего тела электростатического поля нет, так как в противном случае в теле должен был возникнуть ток. При сообщении проводящему телу заряда он распределяется под действием сил отталкивания по поверхности этого тела.

Если в заряженном проводнике заменить внутреннюю часть, в которой нет поля, диэлектриком, оставив лишь заряженную поверхность, то снаружи поле не изменится и внутри по-прежнему поле будет равно нулю.

Таким образом, *внутри замкнутой заряженной поверхности поля нет*; этим обстоятельством пользуются для электростатической экранировки, окружая экранируемую часть пространства замкнутой проводящей поверхностью. Электростатическое поле существует лишь в пространстве между проводящими заряженными телами в диэлектрической среде.

Напряженность в любой точке поля заряженных тел также можно определить наложением, для чего поверхности заряженных тел, по которым распределен заряд, мысленно разбиваются на бесконечно малые элементы. Вычисляется напряженность поля каждого элемента, рассматриваемого как точечный, и затем производится их геометрическое суммирование.

Для полной характеристики поля в любой среде совершенно достаточно двух величин: напряженности поля  $E$  и диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ . Однако для удобства расчетов вводят также и другие величины.

Так, вводят *смещение*, называемое также *вектором электрической индукции*

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}.$$

Так как в изотропной<sup>1</sup> среде  $\epsilon$  является скалярной величиной, вектор смещения совпадает по направлению с вектором напряженности поля.

В соответствии с единицами измерения  $\epsilon$  и  $E$  смещение измеряется в системе МКСА в  $\text{ф/м} \cdot \text{в/м} = \text{к/м}^2$ .

Для одного точечного заряда

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

### § 3. ПОТЕНЦИАЛ. НАПРЯЖЕНИЕ

Наряду с векторными величинами удобно ввести скалярную величину, определяющую электрическое поле в данной точке.

Так как напряженность равна силе, действующей на единичный заряд в данной точке поля, то работа перемещения единичного заряда на пути  $d\vec{l}$  равна  $\vec{E} d\vec{l}$ . В поле точечного заряда (рис. 1) эта работа может быть представлена в виде полного дифференциала некоторой функции:

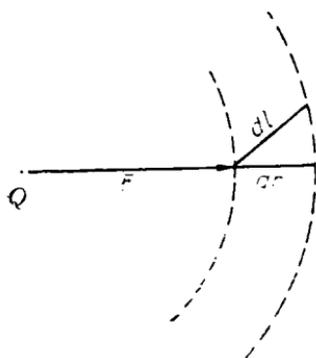


Рис. 1

$$\begin{aligned} \vec{E} d\vec{l} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon r^3} \vec{r} d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} dl \cos(\vec{r} d\vec{l}) = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{dr}{r^2} = d\left(-\frac{Q}{4\pi\epsilon r}\right) = -d\varphi, \end{aligned}$$

откуда

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} + \text{const};$$

функция  $\varphi$ —скалярная величина, называемая *потенциалом* поля точечного заряда. Как видно из выражения для потенциала, он определяется с точностью до произвольной постоянной.

<sup>1</sup> Изотропной называется среда, свойства которой одинаковы во всех направлениях. В анизотропной среде (кристаллы) свойства зависят от направления; так, значения диэлектрической проницаемости вдоль разных кристаллических осей различны.

Чтобы устранить неоднозначность, в теории потенциал бесконечно удаленной точки считают равным нулю:

$$\varphi_{\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon \cdot \infty} + \text{const} = \text{const} = 0,$$

т. е. произвольная постоянная обращается в нуль и потенциал точечного заряда

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}.$$

В технике потенциал в любой точке определяется относительно потенциала земли, т. е. потенциал земли принимают равным нулю; в действительности потенциал земли неизвестен и не остается постоянным.

При перемещении на конечном расстоянии из точки  $a$  в точку  $b$  по пути  $l$  работа

$$\int_a^b \bar{E} d\bar{l} = \int_a^b -d\varphi = \varphi_a - \varphi_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

не зависит от пути, а определяется лишь положением начальной и конечной точек. Это значит, что интеграл от напряженности поля по замкнутому пути—циркуляция вектора  $\bar{E}$ —всегда равен нулю:

$$\oint \bar{E} d\bar{l} = 0.$$

Такое поле носит название *потенциального* или *безвихревого*.

Величина  $U_{ab} = \int_a^b \bar{E} d\bar{l}$  называется *напряжением* между точками  $a$  и  $b$ . Таким образом, в электростатике понятия разности потенциалов  $\varphi_a - \varphi_b$  и напряжения  $U_{ab}$  совпадают. Разность потенциалов исчисляется всегда от начальной точки к конечной.

Все сказанное здесь относительно поля одного точечного заряда остается справедливым для любого электростатического поля, так как в силу принципа наложения это поле может рассматриваться как сумма полей отдельных точечных зарядов; потенциальность, как скалярная величина, находится алгебраическим суммированием потенциалов от этих зарядов. Следовательно, *любое электростатическое поле является потенциальным полем.*

После выбора точки  $x$ , в которой потенциал принимается равным нулю, интеграл

$$\int_a^x \bar{E} d\bar{l} = \varphi_a - \varphi_x = \varphi_a$$

равен потенциалу в точке  $a$ .

Таким образом, потенциал численно равен работе сил поля, совершаемой при перемещении единичного заряда из данной точки в точку, где потенциал равен нулю. Так как в проводящем теле поля нет, то потенциал во всех точках проводника одинаков. Потенциал всегда является непрерывной функцией координат, так как работа на бесконечно малом пути не может быть конечной величиной.

Введение потенциала часто упрощает расчеты поля, так как геометрические действия над векторами напряженности поля заменяются алгебраическими действиями над потенциалами.

В декартовой системе координат

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz ;$$

с другой стороны, по известной формуле для скалярного произведения векторов

$$d\varphi = \vec{E} d\vec{l} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz ,$$

откуда

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} , \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} , \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} . \quad (*)$$

Так как система координат была выбрана произвольно, то составляющая вектора напряженности поля по любому направлению равна взятой с обратным знаком частной производной потенциала по этому направлению:

$$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l} .$$

В векторном виде соотношения (\*) записываются так:

$$\vec{E} = -\vec{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \vec{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \vec{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\text{grad } \varphi ,$$

т. е. напряженность поля равна взятому с обратным знаком градиенту потенциала.

Так как градиент скаляра представляет собой вектор, направленный в сторону наибольшего возрастания скаляра, то вектор напряженности поля в данной точке направлен в сторону наибольшего уменьшения потенциала.

#### § 4. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ПОЛЯ

Электрическое поле может быть изображено графически с помощью линий вектора напряженности (силовых линий) и линий равного потенциала (эквипотенциальных линий).

Силовые линии представляют собой кривые, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора

напряженности поля; эти линии начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных. При графическом изображении поля число линий, приходящихся на единицу площади, перпендикулярной к ним, принимается пропорциональным величине напряженности поля в этой точке.

Эквипотенциальные линии являются следами пересечения поверхностей равного потенциала с плоскостью чертежа.

Из соотношения между напряженностью и потенциалом

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} \vec{n}_0,$$

где  $\vec{n}_0$  — орт нормали к эквипотенциальной поверхности, следует, что силовые линии всегда нормальны к эквипотенциальным поверхностям и линиям.

Точно так же, как и линии вектора напряженности поля, могут быть построены линии вектора смещения; в однородной изотропной среде линии  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  совпадают друг с другом.

## § 5. ОБРАЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Как известно, частицы вещества содержат равные по величине положительные и отрицательные заряды и электрически нейтральны; поэтому образование системы заряженных тел связано с разделением взаимно притягивающихся разноименных зарядов, что сопровождается затратой энергии. Следовательно, в процессе образования поля должны участвовать источники электрической энергии, т. е. преобразователи других видов энергии — химической, тепловой, механической и т. п. — в электрическую. Эти источники характеризуются так называемой *электродвижущей силой* (э. д. с.) — контактной э. д. с., термо-э. д. с., э. д. с. индукции; все эти э. д. с. обычно называются *сторонними э. д. с.*

Величину сторонней э. д. с.  $\mathcal{E}$  связывают с напряженностью стороннего поля  $\vec{E}_{\text{стор}}$ , т. е. поля неэлектростатического происхождения, возникающего в источнике, соотношением

$$\mathcal{E} = \int \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l},$$

причем интегрирование производится по всему пути, лежащему внутри источника.

Чтобы разноименно зарядить два проводящих тела  $A$  и  $B$  и создать тем самым электрическое поле, надо соединить их с зажимами источника электрической энергии (рис. 2). В процессе зарядки по цепи пойдет ток и в электрическом поле будет накоплена энергия за счет энергии источника.

По окончании зарядки ток в цепи прекратится; отсутствие тока в источнике, состоящем всегда из проводящих тел, указывает на равенство нулю напряженности поля внутри источника.

Это происходит из-за наложения внутри источника на электростатическое поле  $\vec{E}_{\text{стат}}$  стороннего поля  $\vec{E}_{\text{стор}}$ :

$$\vec{E}_{\text{стат}} + \vec{E}_{\text{стор}} = 0, \text{ т. е. } \vec{E}_{\text{стор}} = -\vec{E}_{\text{стат}}.$$

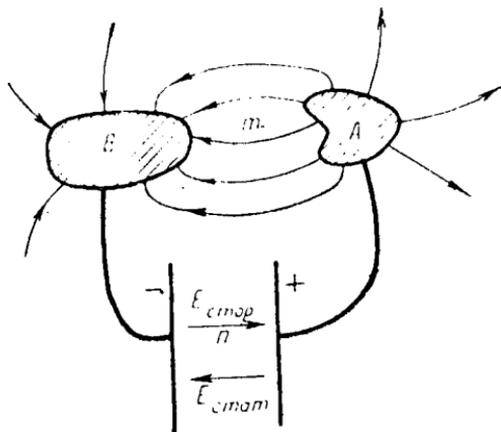


Рис. 2

Если теперь вычислить интеграл вектора  $\vec{E}$  по замкнутому контуру  $AmBnA$ , частично проходящему внутри источника (рис. 2), то

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \int_{AmB} \vec{E}_{\text{стат}} d\vec{l} + \int_{BnA} (\vec{E}_{\text{стат}} + \vec{E}_{\text{стор}}) d\vec{l} = \oint \vec{E}_{\text{стат}} d\vec{l} + \int_{BnA} E_{\text{стор}} d\vec{l}.$$

Так как  $\oint \vec{E}_{\text{стат}} d\vec{l} = 0$ , а  $\int_{BnA} \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}$  равен сторонней э. д. с.  $\epsilon$ ,

то

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \epsilon.$$

Следовательно, соотношение  $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$  справедливо только в пространстве вне источников э. д. с.

## § 6. ПОТОК. ЕМКОСТЬ

Помимо величин, характеризующих электростатическое поле в каждой точке пространства ( $E$ ,  $D$ ,  $\varphi$ ), пользуются также величинами, относящимися к полю в целом или к его части: потоком вектора напряженности поля и потоком вектора смещения.

Как известно, потоком любого вектора  $\bar{A}$  через поверхность  $S$  называется интеграл вида  $\int \bar{A} d\bar{S}$ . Вектор  $d\bar{S}$ , равный по величине элементу поверхности  $dS$ , по направлению совпадает с нормалью к этому элементу поверхности. Для замкнутых поверхностей положительным принимается направление внешней нормали (наружу поверхности); для незамкнутых поверхностей направление положительной нормали должно быть специально оговорено. Поток вектора численно равен числу линий этого вектора, пронизывающих данную поверхность.

Поток  $\Phi_E$  вектора напряженности и поток  $\Phi_D$  вектора смещения будут:

$$\Phi_E = \int \bar{E} d\bar{S} \quad \text{и} \quad \Phi_D = \int \bar{D} d\bar{S}.$$

Необходимо также дать характеристику системы проводящих тел, образующих электростатическое поле при подключении их к источникам энергии (§ 5). Подобная система двух заряженных тел, заряды которых отличаются только знаком ( $Q_1 = -Q_2 = Q$ ), а потенциалы различны ( $\varphi_1 \neq \varphi_2$ ), является заряженным конденсатором. Конденсатор характеризуется отношением заряда к разности потенциалов (напряжению); это отношение называется *емкостью*:

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{Q}{U}.$$

Емкость численно равна заряду каждого из двух тел при напряжении, равном единице. В системе МКСА емкость измеряется в фарадах ( $1 \text{ ф} = \frac{1 \text{ К}}{1 \text{ В}}$ ).

Емкость  $C$  уединенного тела представляет собой отношение заряда тела  $Q$  к его потенциалу  $\varphi$ :

$$C = \frac{Q}{\varphi}.$$

## § 7. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГАУССА

Как было доказано в курсе физики, для однородной изотропной среды с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  из закона Кулона вытекает теорема Гаусса, связывающая величину потока вектора напряженности  $\bar{E}$  через замкнутую поверхность с величиной заряда  $Q$ , заключенного и как угодно распределенного внутри этой поверхности; в рационализованной форме теорема Гаусса записывается следующим образом:

$$\oint \bar{E} d\bar{S} = \frac{Q}{\epsilon}.$$

Теорема Гаусса представляет собой одно из фундаментальных соотношений теории электричества.

Умножая обе части этого равенства на постоянную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$ , можно прийти к такой записи:

$$\epsilon \oint \vec{E} d\vec{S} = \oint \epsilon \vec{E} d\vec{S} = \oint \vec{D} d\vec{S} = Q.$$

В этой форме теорема Гаусса, строго доказанная лишь для электростатического поля в однородной изотропной среде, была принята Максвеллом как постулат, справедливый для любых сред и любых полей, как угодно изменяющихся во времени и пространстве. Правильность этого постулата Максвелла, не могущего быть проверенным непосредственно, подтверждается совпадением выводов теории Максвелла с опытом.

Теорема Гаусса позволяет установить связь между поверхностной плотностью заряда  $\sigma = \frac{dQ}{dS}$  и величиной вектора смещения  $\vec{D}$  у этой поверхности в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  (рис. 3). Для элементарного цилиндра, построенного

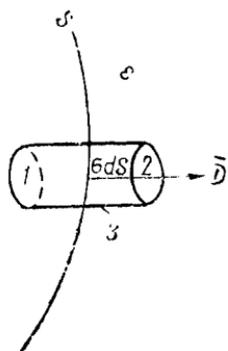


Рис. 3

на элементе поверхности  $dS$  так, что часть его находится вне проводящего тела, а часть внутри его, с образующей, нормальной к элементу поверхности  $dS$ , поток вектора смещения

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = (\vec{D} d\vec{S})_1 + (\vec{D} d\vec{S})_2 + (\vec{D} d\vec{S})_3 = \sigma dS.$$

Так как внутри проводника поля нет, поток через основание, находящееся внутри проводника,

$$(\vec{D} d\vec{S})_1 = 0.$$

Вектор смещения в диэлектрике у поверхности проводника всегда нормален к ней, так как она является эквипотенциальной поверхностью; поэтому элементарный поток через основание, находящееся в диэлектрике,

$$(\vec{D} d\vec{S})_2 = D dS.$$

Поток через боковую поверхность

$$(\vec{D} d\vec{S})_3 = 0,$$

так как  $\cos(\vec{D} d\vec{S})_3 = 0$ . Таким образом,

$$D dS = \sigma dS \quad \text{и} \quad D = \sigma.$$

Следовательно, у поверхности проводника величина вектора смещения равна поверхностной плотности заряда, поэтому заряд, распределенный по любой части поверхности, может быть вычислен интегрированием по этой части поверхности:

$$Q = \int \bar{D} d\bar{S} = \int D dS.$$

Напряженность поля у поверхности проводника

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

При больших напряженностях поля может быть поврежден (пробит) диэлектрик, окружающий проводник. Как известно из курса физики, плотность заряда наибольшая у остриев, углов, краев отверстий. Поэтому с целью уменьшения напряженности поля вблизи проводников в технике высоких напряжений стремятся выполнять эти проводники с плавно изменяющейся формой поверхности.

Теорема Гаусса используется для расчетов симметричных электростатических полей, так как тогда вычисление интеграла не представляет затруднений.

## § 8. ДИЭЛЕКТРИК В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Согласно современным представлениям о строении вещества всякая среда дискретна и состоит из отдельных заряженных частиц; эти частицы находятся в пустоте на больших расстояниях по сравнению с их размерами. Каждая молекула содержит положительные и отрицательные заряды в одинаковом количестве, поэтому суммарный заряд диэлектрика равен нулю.

В отличие от свободных зарядов проводника заряды, из которых состоят молекулы диэлектрика, связаны между собой. Но при внесении диэлектрика во внешнее электрическое поле под действием сил, возникающих в поле ( $\bar{F} = Q\bar{E}$ ), связанные заряды смещаются; этот процесс называется *поляризацией* диэлектрика.

Поляризация диэлектрика протекает по-разному в зависимости от типа молекул. *Полярная* молекула представляет собой диполь—два заряда  $Q$  и  $-Q$  на расстоянии  $l$  (рис. 4). Диполь обладает *электрическим моментом*  $\bar{p}$ , представляющим собой вектор, численно равный  $Ql$  и направленный от отрицательного заряда к положительному. При отсутствии внешнего поля все молекулярные диполи расположены хаотически и суммарный электрический момент всего диэлектрика равен нулю. Под действием сил поля  $F$  отдельные диполи стремятся ориентироваться по направлению внешнего поля, чему препятствуют силы взаимодействия между молекулами. Поэтому под влиянием внешнего

поля молекулярные диполи лишь несколько повернутся в направлении поля (на угол  $\beta$ , рис. 4) и весь диэлектрик приобретет электрический момент  $\Sigma p$ ; такая поляризация называется *ориентационной*.

В *нейтральных* молекулах движущиеся по орбитам электроны могут быть при усреднении во времени заменены равным по величине неподвижным зарядом, совмещенным с положительно заряженным ядром (рис. 5а). Электрический момент такой молекулы равен нулю. Под действием сил поля центры эквивалентных зарядов смещаются, пока силы внешнего поля не уравниваются силами притяжения этих зарядов. Молекула становится диполем, ось которого всегда совпадает с направлением внешнего поля (рис. 5б), и суммарный момент будет равен  $\Sigma p$ . Такая поляризация называется *деформационной*.

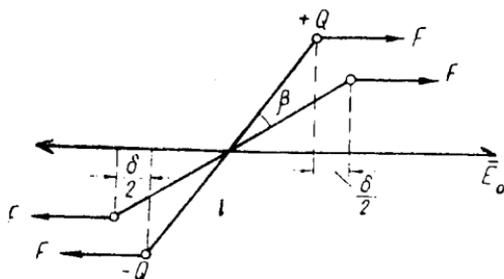


Рис. 4

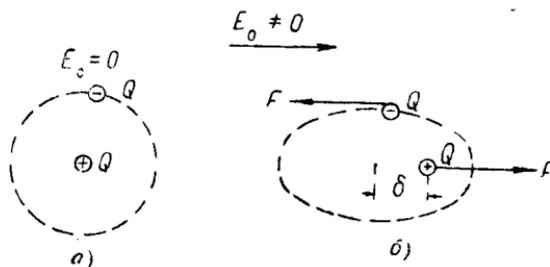


Рис. 5

В обоих видах поляризации результат сводится к смещению связанных зарядов: положительного в направлении поля, отрицательного—против поля. В ориентационной поляризации это смещение  $\delta$  (рис. 4) равно изменению проекции длины диполя на направление поля, в деформационной—длине  $\delta$  образовавшегося диполя (рис. 5б).

При поляризации диэлектрика связанные заряды на его внешних поверхностях, не параллельных линиям внешнего поля  $E_0$ , создают поле поляризации  $E_p$ , направленное против внешнего поля (рис. 6). Результирующая напряженность поля в диэлектрике, рассматриваемого как результат наложения двух полей, существующих в пустоте,

$$E = E_0 - E_p,$$

т. е. меньше напряженности внешнего поля.

Поляризация диэлектрика характеризуется *поляризованностью*  $P$ , представляющей собой электрический момент единицы объема диэлектрика. В относительно слабых полях, с которыми приходится иметь дело в технике, вектор поляризованности пропорционален вектору напряженности поля в диэлектрике

$$\vec{P} = \alpha \vec{E}$$

и совпадает с ним по направлению, т. е. всегда  $\alpha > 0$ . Множитель  $\alpha$  называется *диэлектрической восприимчивостью* диэлектрика.

Электрический момент всего диэлектрика объемом  $v$  равен

$$Pv = \sigma_p Sd,$$

где  $\sigma_p$  — поверхностная плотность связанных зарядов; так как  $v = Sd$ , то

$$\sigma_p = P = \alpha E,$$

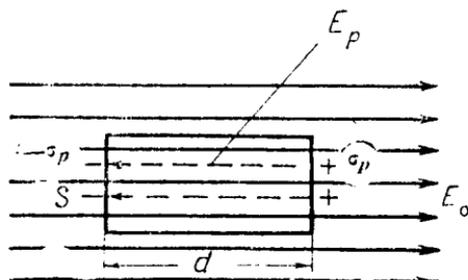


Рис. 6

т. е. поверхностная плотность связанных зарядов, возникших при поляризации, равна поляризованности. Так как размерности смещения, поляризованности и поверхностной плотности совпадают, то  $\alpha$  измеряется в тех же единицах, что  $\epsilon$ , т. е. в *ф. м.*

Для установления зависимости между векторами  $\vec{D}$  и  $\vec{P}$  можно воспользоваться двумя приемами рассмотрения поля.

Первый из них соответствует представлению о существовании электрического поля в непрерывной диэлектрической среде. Влияние этой среды учитывается величиной диэлектрической проницаемости, входящей в знаменатель выражения для напряженности поля.

Согласно второму приему, более соответствующему современному представлению о дискретном строении вещества, поле всегда существует в пустоте, но при внесении в поле диэлектрика на внешнее поле накладывается поле поляризации, направленное против внешнего поля.

Пусть точечный заряд  $Q$  помещен в однородную изотропную среду с проницаемостью  $\epsilon$  (рис. 7), тогда напряженность поля в точке  $M$ , отстоящей на расстоянии  $r$ ,

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}.$$

С другой стороны, рассматривая поле как алгебраическую сумму внешнего поля и поля поляризации, сложный процесс поляризации можно схематически представить рис. 7: разноименные

равные заряды, находившиеся ранее у точки  $M$ , сместились в противоположных направлениях. Результирующая напряженность поля

$$E = E_0 - E_p = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_p.$$

Поле поляризации  $E_p$  удобно вычислить как сумму полей от зарядов трех областей, указанных на рис. 7, в отдельности.

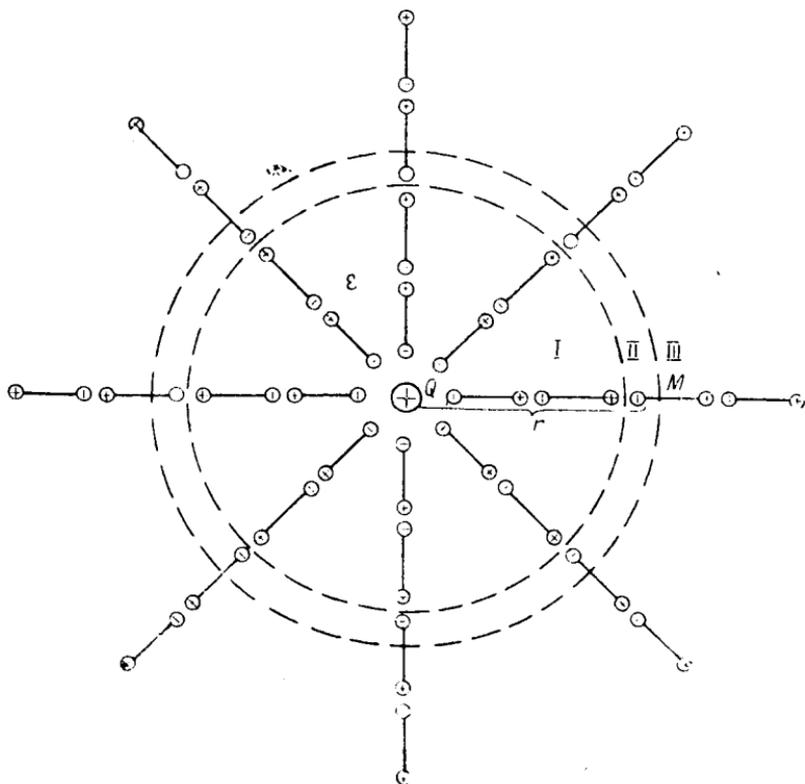


Рис. 7

Сферическая область I содержит симметрично расположенные диполи, сумма зарядов которых равна нулю. Ввиду этой симметрии согласно теореме Гаусса

$$\oint \bar{E} d\bar{S} = E_1 \oint dS = E_1 S = 0,$$

следовательно, напряженность поля  $E_1$  в точке  $M$  равна нулю.

Напряженность поля  $E_{II}$  отрицательных зарядов, находящихся внутри тонкого сферического слоя II (см. § 7), будет

$$E_{II} = \frac{\tau_p}{\varepsilon_0} = \frac{\alpha E}{\varepsilon_0} = \frac{\alpha}{\varepsilon_0} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}.$$

Для области III может быть написано выражение, аналогичное выражению для области I, так как все заряды области III, также симметрично расположенные, лежат вне поверхности интегрирования; следовательно, напряженность поля  $E_{III}$  в точке  $M$  равна нулю и

$$E_p = E_I + E_{II} + E_{III} = \frac{\alpha}{\varepsilon_0} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}.$$

Теперь можно приравнять два выражения для напряженности поля:

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{\alpha}{\varepsilon_0} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2},$$

откуда

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \alpha;$$

так как  $\alpha > 0$ , то  $\varepsilon > \varepsilon_0$ .

Умножение этого равенства на вектор напряженности поля приводит к соотношению

$$\varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \alpha \vec{E}, \text{ или } \vec{D} = \vec{D}_0 + \vec{P},$$

связывающему смещение с поляризованностью; здесь  $D_0 = \varepsilon_0 E$  — значение смещения в пустоте. Принцип наложения позволяет обобщить эти соотношения на любое электростатическое поле.

Так как внешнее поле, действующее на диэлектрик, создается свободными зарядами, распределенными на поверхностях заряженных тел, из предыдущего следует, что напряженность поля  $E$  в диэлектрике создается как свободными зарядами, так и связанными зарядами диэлектрика. Другими словами, линии вектора напряженности поля  $\vec{E}$  начинаются и кончаются на свободных и связанных зарядах.

В отличие от напряженности поля  $E$  смещение  $D$  вызывается только свободными зарядами, т. е. внешним полем. Следовательно, линии вектора смещения  $\vec{D}$  начинаются и кончаются только на свободных зарядах.

## ГЛАВА II

### РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Расчет электрических устройств, в частности на электрическую прочность, связан с расчетом электрического поля; последний заключается в определении величин, характеризующих поле (напряженности, смещения, потенциала), по заданному распределению зарядов в пространстве. Иногда в технике возникает потребность в решении обратной задачи—в определении закона распределения зарядов по заданной напряженности поля.

Затруднение в решении прямой задачи возникает тогда, когда задается суммарный заряд каждого из проводящих тел, но закон распределения заряда по поверхностям этих тел неизвестен.

В технических задачах обычно задаются не заряды тел, а их потенциалы. Соответственно в обратной задаче по заданному полю необходимо определить потенциалы тел, создающих это поле.

В этих задачах часто представляет интерес определение емкостей в заданной системе тел; для их нахождения также необходимо сначала рассчитать электрическое поле.

Общего метода расчета поля, пригодного для любых задач, не существует. Поэтому ниже рассматриваются некоторые частные методы, каждый из которых применим лишь к ограниченному числу задач.

#### § 9. МЕТОД ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ

Если распределение поверхностной плотности заряда  $\sigma$  известно, то расчет поля в однородном диэлектрике может быть произведен, во всяком случае принципиально, путем вычисления потенциала  $d\varphi$  от каждого бесконечно малого элемента поверхности  $dS$ , несущего заряд  $\sigma dS$  и рассматриваемого как точечный заряд:

$$d\varphi = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon r} .$$

Эти потенциалы складываются согласно принципу наложения, что дает

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\sigma dS}{r}.$$

Если заряд распределен по объему диэлектрика с объемной плотностью  $\rho$ , то применение этого метода к элементам объема  $dV$  с зарядом  $\rho dV$  приводит к следующему выражению для потенциала:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho dV}{r}.$$

Использование этого метода особенно эффективно для поля конечного числа точечных зарядов, так как в этом случае вместо интегрирования применяется суммирование конечного числа членов.

### 1. Электрический диполь

Расчет поля диполя (рис. 8) представляет практический интерес, так как во многих случаях тела более сложной формы могут быть заменены диполями (например, антенна).

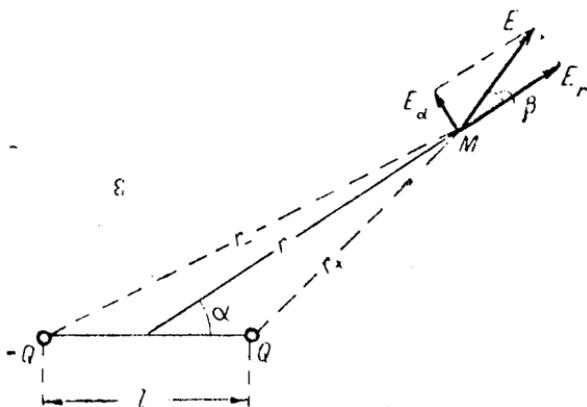


Рис. 8

Потенциал в точке  $M$ , положение которой определяется расстоянием  $r$  от середины диполя и углом  $\alpha$  между  $r$  и осью диполя (рис. 8), может быть определен как алгебраическая сумма потенциалов двух зарядов

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-},$$

где  $r_+$  и  $r_-$  — расстояния зарядов от точки  $M$ .

В технических задачах обычно  $r \gg l$ ; при пренебрежении малыми величинами

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{l \cos \alpha}{r^2} = \frac{p \cos \alpha}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{\overline{p} \overline{r}}{4\pi\epsilon r^3},$$

где  $Ql = p$  — электрический момент диполя.

Напряженность поля может быть вычислена через свои составляющие  $E_r$  — вдоль радиуса вектора  $r$  и  $E_\alpha$  — в направлении, перпендикулярном радиусу-вектору  $r$  (рис. 8).

Согласно изложенному в § 3 о связи между напряженностью поля и потенциалом составляющие

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{p \cos \alpha}{2\pi\epsilon r^3},$$

$$E_\alpha = -\frac{\partial \varphi}{r \partial \alpha} = \frac{p \sin \alpha}{4\pi\epsilon r^3}.$$

Величина вектора напряженности поля

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\alpha^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon r^3} \sqrt{4 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{p}{4\pi\epsilon r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha},$$

а его направление определяется углом  $\beta$ , образованным вектором  $E$  с радиусом-вектором  $r$  (рис. 8), причем

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{E_\alpha}{E_r} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Таким образом, в отличие от поля одного точечного заряда, в котором потенциал обратно пропорционален расстоянию, а напряженность поля обратно пропорциональна квадрату расстояния, для диполя потенциал обратно пропорционален квадрату, а напряженность поля — кубу расстояния.

Из выражения для потенциала диполя следует, что эквипотенциальная поверхность с нулевым значением потенциала представляет собой плоскость, проходящую через середину диполя и нормальную к его оси, так как тогда  $\overline{p} \overline{r} = 0$ .

## 2. Заряженный диэлектрический диск

Диэлектрический тонкий диск радиуса  $r_0$  равномерно заряжен и его суммарный заряд  $Q$  (рис. 9а). Поверхностная плотность заряда  $\sigma = \frac{Q}{2\pi r_0^2}$ . Потенциал в точке  $M$ , лежащей на оси  $X$  на расстоянии  $x$  от центра диска, может быть найден путем суммирования потенциалов от отдельных элементов поверхности диска.

Выделив на диске кольцо радиуса  $\rho$  и шириной  $d\rho$ , можно найти потенциал в точке  $M$ , соответствующий одному бесконечно малому элементу кольца с зарядом  $\sigma dl d\rho$ , где  $dl$ —элемент длины кольца:

$$d^*\varphi = \frac{\sigma dl d\rho}{4\pi\epsilon r} = \frac{\sigma dl d\rho}{4\pi\epsilon \sqrt{x^2 + \rho^2}}.$$

Потенциал, определяемый всем кольцом,

$$d\varphi = \int_{l=0}^{l=2\pi\rho} d^*\varphi = \frac{\sigma\rho d\rho}{2\epsilon \sqrt{x^2 + \rho^2}},$$

а потенциал, соответствующий всему диску,

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_{\rho=0}^{\rho=r_0} d\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon} \int_0^{r_0} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{x^2 + \rho^2}} = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon} (\sqrt{x^2 + r_0^2} - x). \end{aligned}$$

Из-за осевой симметрии вектор напряженности поля  $E$  в точке  $M$  направлен вдоль оси  $X$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} E &= E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + r_0^2}}\right). \end{aligned}$$

В центре диска  $x=0$  и потенциал

$$\varphi_0 = \frac{\sigma r_0}{2\epsilon},$$

а напряженность поля

$$E_0 = \frac{\sigma}{2\epsilon},$$

что соответствует приведенному в § 7, если учитывать, что здесь заряд создает поле с обеих сторон диска.

На рис. 9б представлены графики потенциала и напряженности поля на оси в функции расстояния от центра диска.

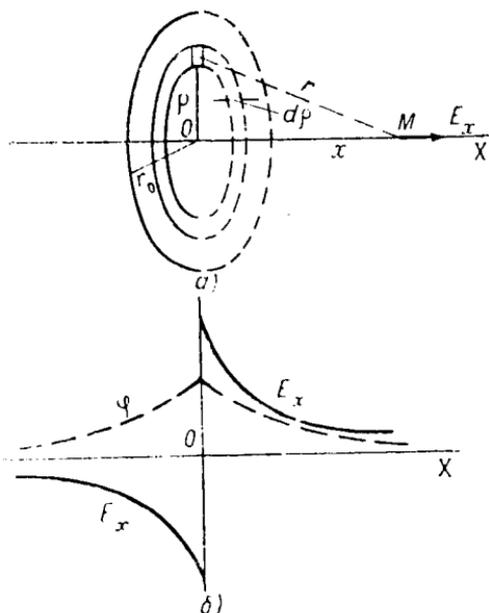


Рис. 9

<sup>1</sup> Здесь  $d^*\varphi$  представляет собой бесконечно малую второго порядка.

Как уже указывалось в § 7, метод расчета поля по теореме Гаусса удобен лишь для заряженных тел, обладающих простой формой симметрии. Такими задачами являются системы из электродов в виде бесконечных плоскостей, concentрических сфер и бесконечно длинных коаксиальных цилиндров.

### 1. Заряженная плоскость

Бесконечная проводящая плоскость (рис. 10) равномерно заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma$  и находится в однородной среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . В силу симметрии поле направлено по нормали к плоскости.

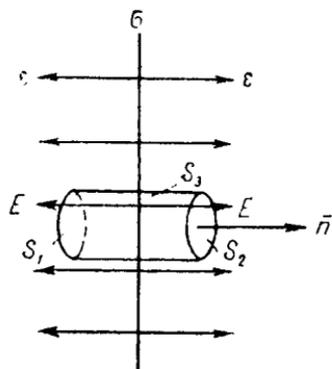


Рис. 10

Применение теоремы Гаусса к прямому цилиндру (рис. 10), построенному на части плоскости площадью  $S$ , дает

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E} d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sigma S}{\varepsilon},$$

где  $S_1$  и  $S_2$  — основания цилиндра,  
 $S_3$  — боковая поверхность цилиндра.

При интегрировании по основанию  $S_1$

$$\int_{S_1} \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_1} E dS = E \int_{S_1} dS = ES_1,$$

аналогично

$$\int_{S_2} \vec{E} d\vec{S} = ES_2.$$

Поток вектора напряженности через боковую поверхность  $S_3$  цилиндра равен нулю, так как вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен вектору  $d\vec{S}_3$ .

Таким образом,

$$ES_1 + ES_2 = \frac{\sigma S}{\varepsilon},$$

и так как по построению  $S_1 = S_2 = S$ , то

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}.$$

Для бесконечной заряженной плоскости напряженность поля не зависит от расстояния до плоскости. При отрицательном

заряде на плоскости поле изменяет свое направление на обратное — к заряженной плоскости.

Потенциал поля заряженной плоскости на расстоянии  $x$  от плоскости

$$\varphi = - \int \bar{E} dx = - \int E dx = - \frac{\sigma}{2\varepsilon} x + A$$

изменяется с расстоянием линейно.

При конечном потенциале самой плоскости (он равен  $A$ ) последний стремится к бесконечности по мере удаления от плоскости в противоречии с принятым ранее условием, что потенциал бесконечно удаленной точки равен нулю. Подобные противоречия наблюдаются всегда при рассмотрении тел бесконечно больших размеров, что само по себе является абстракцией.

Тем не менее результаты, полученные для бесконечной плоскости, имеют физическое значение для плоскости конечных размеров в точках, расстояние которых от плоскости мало по сравнению с расстоянием до краев плоскости.

## 2. Поле у поверхности раздела двух сред

Переход электрического поля из одной среды в другую сопровождается изменением поля как по величине, так и по направлению. На рис. 11а представлено изменение однородного поля

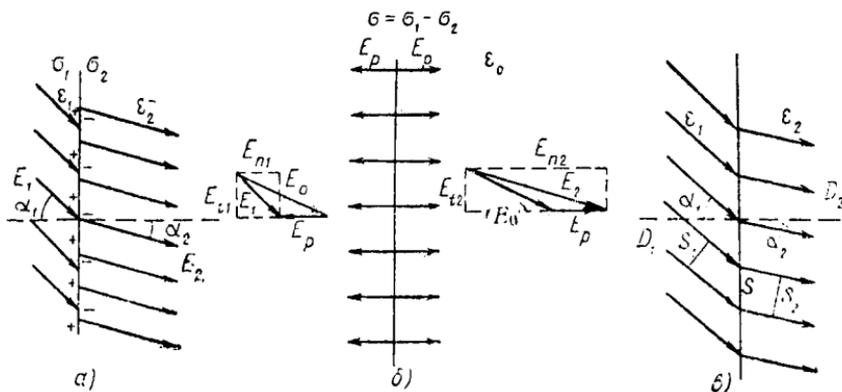


Рис. 11

при переходе его в другую среду для плоской поверхности раздела обеих сред, имеющих диэлектрические проницаемости  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ ; здесь угол падения  $\alpha_1$  больше угла преломления  $\alpha_2$ . Согласно § 8 линии вектора напряженности кончаются и начинаются на связанных зарядах у плоскости раздела.

Поведение электрического поля у поверхности раздела двух сред нагляднее всего определяется рассмотрением поля в среде как суммы поля в пустоте и поля поляризации (§ 8).

В результате поляризации первой среды в ней у поверхности раздела появляются положительные связанные заряды с поверхностной плотностью  $\sigma_1$ , во второй среде — отрицательные с плотностью  $\sigma_2$ .

Чем больше диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$ , тем больше напряженность поля поляризации  $E_p$  и, следовательно, поверхностная плотность  $\sigma$  (§ 8). Таким образом,  $\sigma_1 > \sigma_2$ .

Реальная задача рис. 11а эквивалентна задаче рис. 11б, где в пустоту, в которой было поле  $E_0$ , внесена плоскость, несущая разностный заряд с плотностью  $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ . Тогда на поле  $E_0$  накладывается поле  $E_p = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  заряженной плоскости, нормальное к поверхности раздела.

Сложение первоначального поля  $E_0$  с полем  $E_p$  справа и слева от плоскости раздела (рис. 11б) дает поля  $E_1$  и  $E_2$ , соответствующие разным диэлектрикам рассматриваемой задачи (рис. 11а). Из построения на рис. 11б видно, что поле  $E_p$  изменяет лишь нормальную составляющую первоначального поля, а касательные составляющие в обеих средах равны друг другу:

$$E_{n1} = E_{n2}.$$

Графическое изображение линий вектора смещения на рис. 11в подобно изображению на рис. 11а с той лишь разницей, что линии вектора смещения при переходе из одной среды в другую непрерывны, так как они могут кончаться или начинаться лишь на свободных зарядах (§ 8), которые отсутствуют на поверхности раздела. Ввиду непрерывности число линий смещения, проходящих через нормальное к ним сечение  $S_1$  (рис. 11в) в первой среде, равно числу линий, пронизывающих нормальное сечение  $S_2$  во второй среде:

$$D_1 S_1 = D_2 S_2.$$

Но  $S_1 = S \cos \alpha_1$  и  $S_2 = S \cos \alpha_2$ , а следовательно,

$$D_1 \cos \alpha_1 = D_2 \cos \alpha_2,$$

что означает равенство нормальных составляющих вектора смещения:

$$D_{n1} = D_{n2}.$$

Подставляя  $D = \epsilon E$ , можно переписать условия для касательных и нормальных составляющих в виде:

$$\begin{aligned} E_1 \sin \alpha_1 &= E_2 \sin \alpha_2, \\ \epsilon_1 E_1 \cos \alpha_1 &= \epsilon_2 E_2 \cos \alpha_2, \end{aligned}$$

откуда путем почленного деления получается

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\epsilon_1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\epsilon_2}$$

или окончательно

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Таким образом, электрическое поле, переходя из одной среды в другую, изменяет свое направление.

Результаты, полученные для плоской поверхности раздела, остаются справедливыми для любой формы поверхности, если расстояние от этой поверхности до точки, где определяется поле, мало по сравнению с радиусом кривизны поверхности раздела.

Так как диэлектрическая проницаемость любых сред лежит в пределах  $\varepsilon_0 < \varepsilon < \infty$ , то при любых конечных значениях  $\operatorname{tg} \alpha_1$  выполняется неравенство  $\operatorname{tg} \alpha_2 < \infty$  и, следовательно,  $\alpha_2 < \frac{\pi}{2}$ .

Это означает, что отражение в электрическом поле невозможно. Например, в высоковольтном изоляторе поле, существующее в электрически прочном теле изолятора (фарфор), всегда выходит и в окружающий изолятор воздух — среду, электрически менее прочную, чем фарфор; никакими конструктивными ухищрениями этого избежать нельзя. Поэтому рабочее напряжение изолятора определяется в основном не полем в фарфоровом теле, а полем в воздухе.

При выходе электрического поля из диэлектрика с большой проницаемостью, например сегнетозлектрика (§ 14), в воздух поле практически выходит по нормали к поверхности раздела. Так, при  $\varepsilon_1 = 5000 \varepsilon_0$ ,  $\alpha_1 = 89^\circ$  и  $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \operatorname{tg} \alpha_1 = 1,14 \cdot 10^{-2} \text{ и } \alpha_2 \approx 0^\circ 40'.$$

### 3. Плоский конденсатор

Основным видом конденсаторов, используемых в технике, является плоский конденсатор (рис. 12а). Если расстояние  $d$  между пластинами, т. е. толщина диэлектрика, мало по сравнению с линейными размерами пластин ( $d \ll a$ ,  $d \ll b$ ), то можно считать заряд равномерно распределенным по пластинам и пренебречь искажением поля у краев конденсатора, показанным на рис. 12б.

В технике применяются конденсаторы с диэлектриком, выполненным в виде слоев из различных материалов. Такой конденсатор получается также при появлении воздушного зазора между основным диэлектриком и обкладкой.

При рассмотрении конденсатора с многослойным диэлектриком (рис. 13а) расчет поля удобнее начинать со смещения, определяемого из обобщенной теоремы Гаусса, так как смещение при заданных зарядах не зависит от диэлектрической проницаемости.

Смещение в конденсаторе можно получить путем наложения полей двух плоскостей, заряды которых отличаются только знаком (рис. 12в). Смещение внутри конденсатора

$$D = D' + D'' = -\frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} = \sigma = \frac{Q}{S},$$

вне конденсатора

$$D' - D'' = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{2} = 0,$$

т. е. поля нет.

Напряженности поля в различных диэлектриках двухслойного конденсатора (рис. 13а)

$$E_1 = \frac{Q}{\varepsilon_1 S}, \quad E_2 = \frac{Q}{\varepsilon_2 S}.$$

Потенциал в первой среде ( $0 \leq x \leq d_1$ )

$$\varphi = -\int \bar{E} d\bar{x} = -\frac{Q}{\varepsilon_1 S} x + A_1,$$

во второй среде ( $d_1 \leq x \leq d_1 + d_2$ )

$$\varphi = -\frac{Q}{\varepsilon_2 S} x + A_2.$$

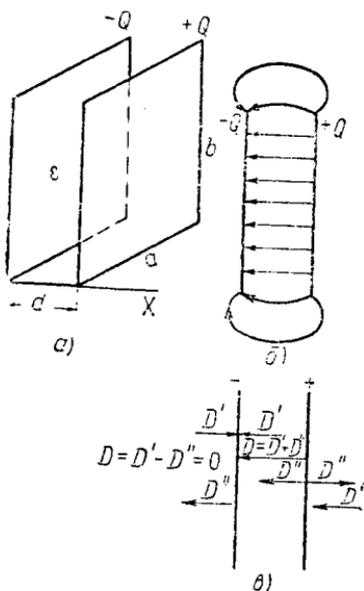


Рис. 12

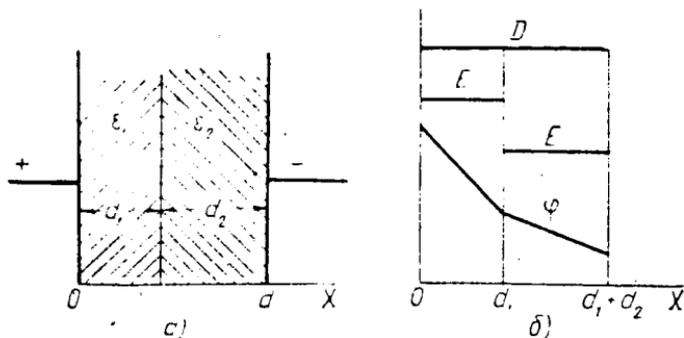


Рис. 13

Из условия непрерывности потенциалов при  $x = d_1$

$$-\frac{Q}{\varepsilon_1 S} d_1 + A_1 = -\frac{Q}{\varepsilon_2 S} d_1 + A_2,$$

откуда

$$A_2 = A_1 - \frac{Qd_1}{S} \left( \frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right),$$

т. е. потенциалы определены с точностью до произвольной постоянной (§ 3).

Кривые смещения, напряженности поля и потенциала в функции  $x$  приведены на рис. 13б для  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ . Разрыв непрерывности напряженности поля и непрерывность смещения на границе различных слоев соответствуют изложенному в пункте 2, так как здесь имеются только нормальные составляющие.

Напряжение на двухслойном конденсаторе

$$U = \int_0^{d_1} \bar{E} d\bar{x} + \int_{d_1}^{d_1+d_2} \bar{E} d\bar{x} = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{Q}{S} \left( \frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right),$$

откуда его емкость

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}}.$$

Подстановка этой формулы емкости в равенство  $Q = CU$  приводит к выражениям напряженности поля в каждом слое через напряжение конденсатора:

$$E_1 = \frac{U}{\varepsilon_1 \left( \frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right)}, \quad E_2 = \frac{U}{\varepsilon_2 \left( \frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right)}.$$

Следует отметить, что многослойный конденсатор можно рассматривать как последовательное соединение однослойных.

Емкость однослойного конденсатора получается как частный случай многослойного:

$$C = \frac{\varepsilon S}{d};$$

это выражение отличается от известного из физики лишь отсутствием множителя  $4\pi$  (см. введение).

Из этого выражения видно, что увеличения емкости конденсатора можно добиваться тремя путями: увеличением диэлектрической проницаемости диэлектрика, увеличением площади пластин и уменьшением толщины диэлектрика.

Первый путь особенно заманчив, так как сейчас созданы диэлектрики (сегнетоэлектрики, см. § 14), проницаемость которых в несколько тысяч раз превышает проницаемость пустоты.

Второй путь широко используется в конденсаторостроении, особенно для конденсаторов с гибким диэлектриком (например, бумажных), где пластины выполняются в виде длинных лент фольги, разделенных диэлектриком и затем свернутых в спираль. Для конденсаторов с твердым диэлектриком (слюда, стекло, керамика) применяется параллельное соединение пластин (рис. 14).

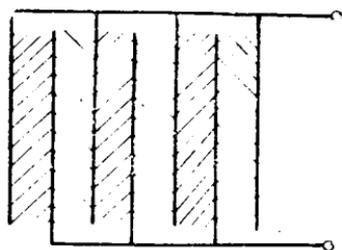


Рис. 14

Третий путь — уменьшение толщины диэлектрика — ограничен электрической прочностью диэлектрика. Уменьшение толщины  $d$  диэлектрика при неизменном рабочем напряжении  $U$  конденсатора влечет за собой увеличение напряженности поля:

$$E = \frac{U}{d}.$$

При достижении напряженностью поля определенной величины, различной для каждого из диэлектриков, последние пробиваются. Толщина диэлектрика в современных конденсаторах весьма мала; так, бумага, идущая для изготовления конденсаторов, имеет толщину 10 микрон.

#### 4. Заряженный шар

1. Проводящий шар. Пусть проводящий шар радиуса  $r_0$  находится в однородной среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ ; заряд шара  $Q$  (рис. 15а). Благодаря симметрии заряд распределяется по поверхности шара равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma = \frac{Q}{4\pi r_0^2}$ ; вне шара вектор  $E$  направлен по радиусу, а величина его неизменна для точек, находящихся на одинаковых расстояниях от центра шара.

Для определения напряженности поля в точке  $M$  на расстоянии  $r$  от центра шара мысленно проводится сфера радиуса  $r$ , концентрическая с проводящим шаром, и к ней применяется теорема Гаусса:

$$\oint \bar{E} d\bar{S} = \oint E dS = E \oint dS = E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon}.$$

Отсюда

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \quad \text{и} \quad D = \frac{Q}{4\pi r^2},$$

т. е. поле вне заряженного шара совпадает с полем точечного заряда той же величины, помещенного в центр шара. Следовательно, потенциал в точке  $M$  вне шара

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} + A;$$

так как при  $r = \infty \varphi = 0$ , то  $A = 0$ . Внутри проводящего шара поле всегда равно нулю.

Зависимости смещения, напряженности поля и потенциала от радиуса  $r$  представлены на рис. 15б.

Потенциал шара

$$\varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon r_0},$$

а его емкость

$$C = \frac{Q}{\varphi_0} = 4\pi\epsilon r_0$$

определяется его радиусом и диэлектрической проницаемостью окружающей среды. Емкость шара, как и вообще всякого уединенного тела, весьма мала. Так, емкость земного шара ( $r_0 = 6370$  км) составляет всего 708 мкф.

2. Диэлектрический шар. Пусть диэлектрический шар радиуса  $r_0$  из материала с проницаемостью  $\epsilon_1$ , помещенный в среду с проницаемостью  $\epsilon_2$ , равномерно заряжен с объемной плотностью  $\rho$  (рис. 16а); заряженным диэлектриком является, например, газ, несущий пространственный заряд.

Суммарный заряд шара

$$Q = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho.$$

Применение теоремы Гаусса к сфере радиуса  $r$  при  $r \geq r_0$ , т. е. вне шара, дает

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r^2} = \frac{\rho r_0^2}{3\epsilon_2 r^2}, \quad D = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{\rho r_0^3}{3r^2}$$

и

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r} = \frac{\rho r_0^2}{3\epsilon_2 r}.$$

Таким образом, вне шара поле не зависит от того, как распределен заряд на шаре—равномерно по поверхности или равномерно по объему.

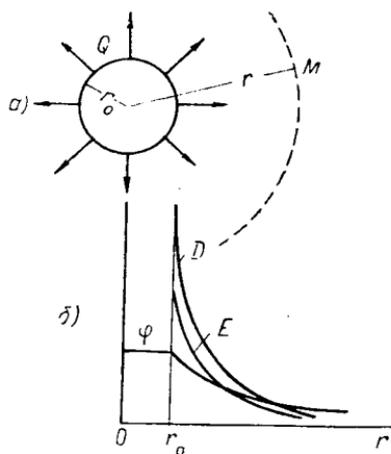


Рис. 15

Внутри шара ( $r \leq r_0$ , пунктир на рис. 16а) теорема Гаусса дает

$$\oint \bar{E} d\bar{S} = E 4\pi r^2 = \frac{4\pi \rho r^3}{3\epsilon_1},$$

откуда

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_1} r \quad \text{и} \quad D = \frac{\rho}{3} r.$$

Потенциал внутри диэлектрического шара

$$\varphi = - \int \bar{E} d\bar{r} = - \frac{\rho}{6\epsilon_1} r^2 + A;$$

постоянная  $A$  определяется из условия непрерывности потенциала на границе раздела двух сред ( $r = r_0$ ):

$$- \frac{\rho}{6\epsilon_1} r_0^2 + A = \frac{\rho r_0^2}{3\epsilon_2},$$

откуда

$$A = \frac{\rho r_0^2}{3} \left( \frac{1}{\epsilon_2} + \frac{1}{2\epsilon_1} \right).$$

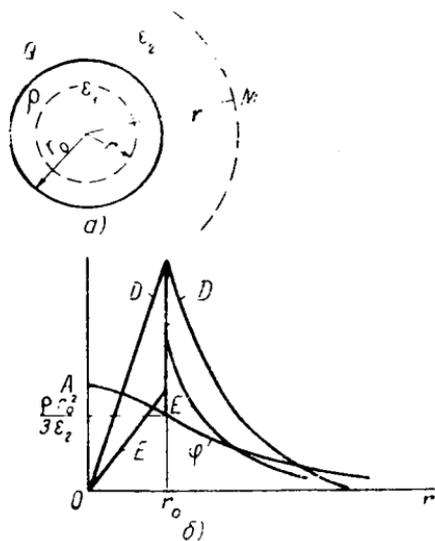


Рис. 16

На рис. 16б представлены графики зависимости смещения, напряженности поля и потенциала от радиуса. На поверхности шара напряженность поля терпит разрыв; на рис. 16б разрыв соответствует случаю  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ .

## 5. Сферический конденсатор

Сферический конденсатор представляет собой две полые проводящие концентрические сферы радиусов  $r_1$  и  $r_2$ , разделенные одним или несколькими слоями диэлектрика (рис. 17а). В отличие от других типов конденсаторов, обладающих значительным краевым эффектом, у него имеется лишь небольшое искажение поля в вырезе внешней сферы у подвода к внутренней сфере. Благодаря практическому отсутствию краевого эффекта сферический конденсатор используется для определения диэлектрической проницаемости жидких диэлектриков, вычисляемой по измеряемой емкости конденсатора, залитого исследуемым диэлектриком.

Применяя теорему Гаусса к расчету поля внутри сферического конденсатора ( $r_1 \leq r \leq r_2$ ), следует, очевидно, учитывать только

заряд внутренней сферы; при условии сферической симметрии это дает

$$\oint \bar{D} d\bar{S} = D_2 \pi r^2 = Q,$$

откуда

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Таким образом, и в сферическом конденсаторе поле может быть рассчитано как от точечного заряда, помещенного в центре.

Внутри внутренней сферы ( $r < r_1$ ) и снаружи внешней сферы ( $r > r_3$ ) поля нет, так как в обоих случаях

$$\oint \bar{E} d\bar{S} = D 4\pi r^2 = 0.$$

Для двухслойного конденсатора напряженность поля и потенциал в первой и второй среде соответственно равны:

при  $r_1 \leq r \leq r_2$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2},$$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r} + A_1$$

при  $r_2 \leq r \leq r_3$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r^2},$$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r} + A_2$$

Связь между постоянными  $A_1$  и  $A_2$  определяется из условия непрерывности потенциала на границе раздела двух диэлектриков: при  $r = r_2$

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r_2} + A_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r_2} + A_2;$$

откуда

$$A_1 = \frac{Q}{4\pi r_2} \left( \frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) + A_2.$$

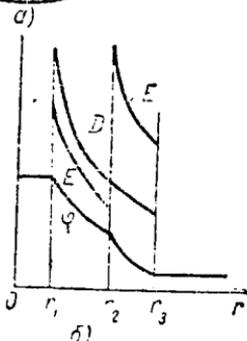
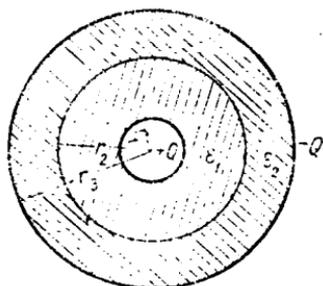


Рис. 17

Зависимости смещения, напряженности поля и потенциала от радиуса графически представлены на рис. 176 для случая, когда  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ . Несмотря на то, что у внутренней сферы (в первой среде) смещение имеет наибольшее значение, напряженность поля при соответствующем соотношении между диэлектрическими проницаемостями может быть меньше, чем во второй среде.

Напряжение на конденсаторе

$$U = \int_{r_1}^{r_2} \bar{E} dr + \int_{r_2}^{r_3} \bar{E} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right),$$

откуда емкость

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi}{\frac{1}{\varepsilon_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{\varepsilon_2} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right)}.$$

Для технических расчетов представляет интерес определение напряженности поля через заданное напряжение на конденсаторе. Замена в выражении для напряженности поля заряда через напряжение  $Q = CU$  дает напряженность поля на расстоянии  $r$  от центра:

$$E = \frac{\text{при } r_1 \leq r \leq r_2}{U} \left| \frac{1}{\varepsilon_1 r^2} \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{\varepsilon_2} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) \right] \right| E = \frac{\text{при } r_2 \leq r \leq r_3}{U} \left[ \frac{1}{\varepsilon_1 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{\varepsilon_2} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right)} \right].$$

Для однослойного конденсатора

$$C = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \quad \text{и} \quad E = \frac{U}{r^2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)},$$

где теперь  $r_2$  — радиус внешней сферы. Максимальная напряженность поля будет у внутренней сферы (при  $r = r_1$ ):

$$E_{max} = U \frac{r_2}{r_1(r_2 - r_1)}.$$

При неизменном напряжении и радиусе внешней сферы  $r_2$  наименьшее значение максимальной напряженности поля получится при

$$\frac{\partial E_{max}}{\partial r_1} = -Ur_2 \frac{r_2 - 2r_1}{r_1^2 (r_2 - r_1)^2} = 0,$$

т. е. при  $r_1 = \frac{r_2}{2}$ .

Иными словами, при этом соотношении радиусов сферический конденсатор обладает наибольшей электрической прочностью.

## 6. Заряженный цилиндр

При расчете поля цилиндра радиуса  $r_0$ , длиной  $l$  и с зарядом  $Q$ , помещенного в среду с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  (рис. 18а), можно не учитывать искажение поля у его концов, если расстояние от оси цилиндра до точки  $M$  мало по сравнению с расстоянием от этой точки до концов цилиндра.

В этом случае поле будет таким же, как поле бесконечно длинного цилиндра, у которого заряд распределен равномерно с линейной плотностью  $\tau = \frac{Q}{l}$ , а напряженность поля благодаря симметрии направлена по радиусу и зависит только от его величины.

При охвате заряженного цилиндра цилиндрической коаксиальной поверхностью радиуса  $r$  (рис. 18а) и длиной  $L < l$  теорема Гаусса дает:

$$\oint \bar{E} d\bar{S} = \int_{S_1} \bar{E} d\bar{S} + \int_{S_2} \bar{E} d\bar{S} + \int_{S_3} \bar{E} d\bar{S} = \frac{\tau L}{\epsilon}.$$

При радиальном направлении вектора напряженности поля потоки через основания цилиндра  $S_1$  и  $S_2$  равны нулю; тогда остается поток через боковую поверхность  $S_3$  и

$$\oint \bar{E} d\bar{S} = \int_{S_3} \bar{E} d\bar{S} = \int_{S_3} E dS = E \int_{S_3} dS = E 2\pi r L = \frac{\tau L}{\epsilon},$$

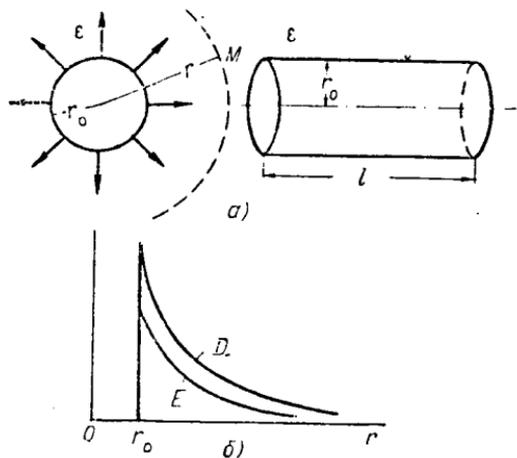


Рис. 18

откуда

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon r} \quad \text{и} \quad D = \frac{\tau}{2\pi r}.$$

Из этих выражений следует, что вне заряженного цилиндра поле не зависит от его радиуса  $r_0$ . Следовательно, расчет поля вне цилиндра можно вести, считая весь заряд сосредоточенным на оси; такая ось, называемая электрической, в рассмотренном случае уединенного цилиндра совпадает с его геометрической осью.

Внутри цилиндра поля нет независимо от того сплошной он или полый (§ 2).

Потенциал поля заряженного цилиндра

$$\varphi = -\int \bar{E} dr = -\int E dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{1}{r} + A$$

аналогично бесконечной плоскости (см. п. 1 этого параграфа) при уходе в бесконечность в направлении радиуса обращается также в бесконечность; все же результаты расчета поля остаются справедливыми при указанном вначале ограничении.

На рис. 186 представлены кривые напряженности поля и смещения в функции расстояния от оси. Напряженность поля имеет наибольшее значение на поверхности цилиндра:

$$E_{max} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon r_0};$$

чтобы избежать повреждения диэлектрика, в технике высоких напряжений для уменьшения напряженности поля увеличивают диаметр провода, выполняя его полым.

## 7. Цилиндрический конденсатор

Цилиндрический конденсатор—исторически первый конденсатор (лейденская банка)—представляет собой два проводящих коаксиальных цилиндра радиусов  $r_1$  и  $r_2$  (рис. 19а), разделенных диэлектриком. Цилиндрическим конденсатором является, например, коаксиальный кабель, жила которого изолирована от обратного провода, являющегося внешним цилиндром. В измерительной технике высоких напряжений используются специальные цилиндрические конденсаторы с воздушной изоляцией, а в радиотехнике—вакуумные цилиндрические конденсаторы. В электротехнике используется также многослойный конденсатор в целях выравнивания поля в кабелях и изоляторах.

Если выполняется условие  $l \gg r_3$ , можно пренебречь искажением поля у краев конденсатора. Внутри конденсатора заряд внешнего цилиндра поля не создает и, как и в предыдущем случае, смещение определяется зарядом  $\tau$  на единицу длины внутреннего цилиндра:

$$D = \frac{\tau}{2\pi r}.$$

Ниже рассматривается конденсатор с двумя слоями диэлектрика (рис. 19). Аналогично сферическому конденсатору снаружи конденсатора ( $r \gg r_3$ ), как и внутри меньшего цилиндра ( $r \leq r_1$ ), поля нет.

Напряженность поля и потенциал в первой и второй среде, соответственно равны:

$$\text{при } r_1 \leq r \leq r_2$$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_1 r},$$

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_1} \ln \frac{1}{r} + A_1$$

$$\text{при } r_2 \leq r \leq r_3$$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_2 r},$$

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_2} \ln \frac{1}{r} + A_2$$

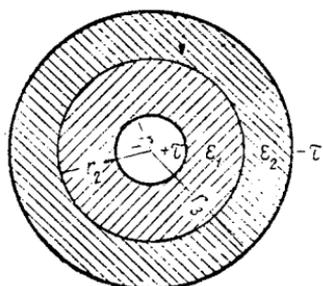
Постоянная  $A_1$  определяется через  $A_2$  из условия непрерывности потенциала на границе раздела обеих сред, т. е. при  $r=r_2$ :

$$\frac{\tau}{2\pi\epsilon_1} \ln \frac{1}{r_2} + A_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_2} \ln \frac{1}{r_2} + A_2,$$

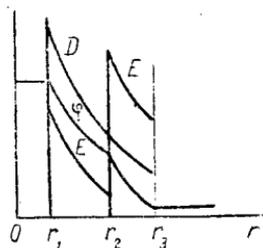
откуда

$$A_1 = \frac{\tau}{2\pi} \left( \frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) \ln \frac{1}{r_2} + A_2.$$

На рис. 196 представлены графики зависимости напряженности поля, смещения и потенциала от  $r$  при  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ . Выбором диэлектрических проницаемостей диэлектриков можно перераспределить напряженность поля в соответствии с их электрической прочностью. Например, при необходимости уравнивать максимальные напряженности поля в обеих средах следует соблюсти равенство  $\epsilon_1 r_1 = \epsilon_2 r_2$ , вытекающее из выражений для  $E$ .



а)



б)

Рис. 19

Напряжение на двухслойном конденсаторе

$$U = \int_{r_1}^{r_2} \bar{E} dr + \int_{r_2}^{r_3} \bar{E} dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_2} \ln \frac{r_3}{r_2},$$

откуда емкость на единицу длины конденсатора

$$C' = \frac{C}{l} = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi}{\frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{r_3}{r_2}}.$$

Замена  $\tau = C'U$  дает выражение напряженности поля через напряжение:

$$E = \frac{\text{при } r_1 \leq r \leq r_2}{U} \left| \frac{\text{при } r_2 \leq r \leq r_3}{U} \right. \\ \left. \frac{1}{\epsilon_1 r \left( \frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{r_3}{r_2} \right)} \right. \left. \frac{1}{\epsilon_2 r \left( \frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{r_3}{r_2} \right)} \right.$$

Для однослойного цилиндрического конденсатора соответственно

$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad \text{и} \quad E = \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}},$$

где теперь  $r_2$ —радиус внешнего цилиндра. Максимальное значение напряженности поля будет у внутреннего цилиндра ( $r=r_1$ ):

$$E_{max} = \frac{U}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Наименьшее значение максимальной напряженности при заданных напряжении и радиусе внешней оболочки будет при

$$\frac{\partial E_{max}}{\partial r_1} = -U \frac{\ln \frac{r_2}{r_1} - 1}{\left( r_1 \ln \frac{r_2}{r_1} \right)^2} = 0,$$

т. е. при  $\frac{r_2}{r_1} = e = 2,718\dots$

Таким образом, цилиндрический конденсатор обладает наибольшей электрической прочностью при  $r_1 = \frac{r_2}{e}$ .

Пропорциональность емкости цилиндрического конденсатора его длине используется для выравнивания поля в конденсатор-

ных вводах высокого напряжения, применяемых в трансформаторах. Такой ввод (рис. 20а) представляет собой многослойный цилиндрический конденсатор, в котором отдельные слои изоляции одинаковой толщины  $d$  разделены фольгой. По мере удаления от центральной электрода длина  $l_k$  обкладок уменьшается таким образом, чтобы максимальная напряженность поля в каждом слое оставалась неизменной.

Так как

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon r l},$$

а заряды последовательно соединенных конденсаторов одинаковы, то

$$E_{max} = \frac{Q}{2\pi\epsilon r_1 l_1} = \frac{Q}{2\pi\epsilon r_2 l_2} = \dots = \frac{Q}{2\pi\epsilon r_k l_k} = \dots = \frac{Q}{2\pi\epsilon r_n l_n},$$

что приводит к соотношениям  $r_1 l_1 = r_2 l_2 = \dots = r_k l_k = \dots = r_n l_n$ . Так как  $r_k = r_1 + (k-1)d$ , то длина каждой обкладки

$$l_k = \frac{r_1}{r_1 + (k-1)d} l_1.$$

Распределение напряженности поля в таком изоляторе представлено на рис. 20б.

## § 11. МЕТОД ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Расчет электрического поля системы заряженных тел (рис. 21а) в диэлектрической среде затруднен тем, что обычно неизвестно распределение заряда по поверхности тел.

Упрощение расчета получается при замене одного из проводящих тел ( $I$  на рис. 21а) системой зарядов (например, двух  $Q'$  и  $Q''$  на рис. 21б), создающих вместе с остальными телами эквипотенциальную поверхность  $S_1$ , совпадающую с поверхностью заменяемого тела. При этом часть пространства, ранее занятая этим проводящим телом, должна быть в эквивалентной задаче (рис. 21б) заменена той же диэлектрической средой. Поле вне поверхности  $S_1$  в обеих задачах—реальной (рис. 21а) и эквивалентной (рис. 21б)—одинаково, поле внутри этой поверхности в эквивалентной задаче фиктивно, так как внутри проводящего тела поля нет.

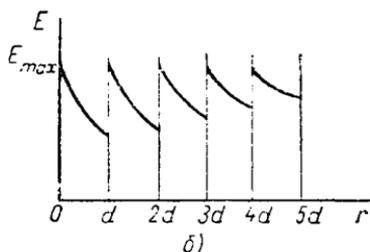
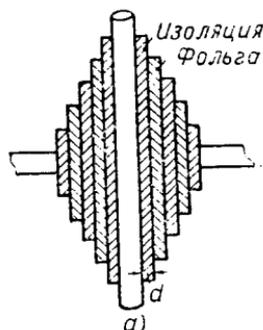


Рис. 20

Система эквивалентных зарядов ( $Q'$  и  $Q''$  на рис. 21б) называется *электрическим изображением*. Метод электрических изображений был предложен В. Томсоном в 1840 г.

В дальнейшем будет показано, как этот прием может быть распространен и на диэлектрические тела.

Ниже рассматриваются несколько задач, решаемых методом электрических изображений.

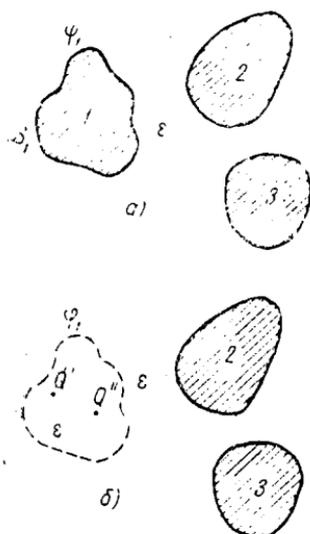


Рис. 21

### 1. Точечный заряд и плоская поверхность проводящей среды

Точечный заряд  $Q$  расположен в диэлектрической среде с проницаемостью  $\varepsilon$  на расстоянии  $a$  от плоской поверхности бесконечной проводящей среды (рис. 22а). На ней под действием заряда  $Q$  возникает заряд, распределенный неравномерно. Требуется определить поле в диэлектрике.

Непосредственный расчет поля суммированием полей отдельных точечных зарядов (§ 9) невозможен, так как закон распределения поверхностной плотности индуцированных на плоскости зарядов неизвестен.

индуцированных на плоскости зарядов неизвестен.

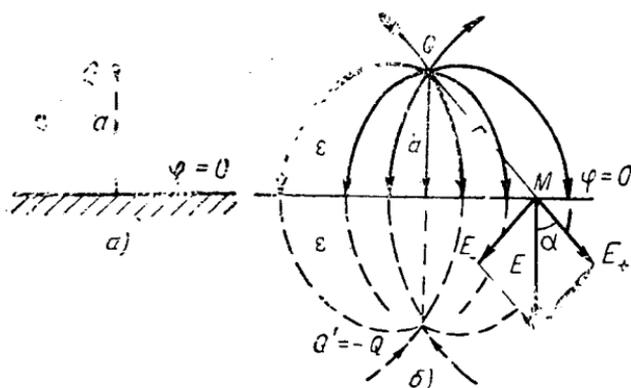


Рис. 22

Согласно методу электрических изображений реальная задача (рис. 22а) заменяется эквивалентной (рис. 22б), в которой проводящая среда заменена диэлектриком; при этом проводящая

плоскость должна быть заменена эквипотенциальной плоскостью с тем же самым значением потенциала. Ниже эквипотенциальной плоскости помещается заряд  $Q'$  такой величины и в такой точке, чтобы он вместе с заданным зарядом  $Q$  создавал в любой точке  $M$  этой плоскости один и тот же потенциал; его удобно принять равным нулю.

В силу симметрии естественно поместить заряд  $Q'$  также на расстоянии  $a$  от плоскости. Тогда его величина определяется из условия

$$\varphi_M = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} + \frac{Q'}{4\pi\epsilon r} = 0,$$

откуда  $Q' = -Q$ .

Таким образом, электрическим изображением заряда  $Q$  в проводящей плоскости является заряд, симметрично расположенный относительно плоскости и отличающийся от заданного заряда только знаком.

Реальная задача теперь свелась к элементарной задаче расчета поля двух разноименных одинаковых по величине зарядов, отстоящих друг от друга на расстоянии  $2a$  в однородной среде с проницаемостью  $\epsilon$ . Поле, изображенное на рис. 22б, в верхнем полупространстве реально, в нижнем — фиктивно.

Для определения поверхностной плотности заряда  $\sigma$  на проводящей плоскости вычисляется напряженность поля  $y$  этой плоскости, направленная по нормали к плоскости (на рис. 22б — вниз):

$$E = E_+ \cos \alpha + E_- \cos \alpha,$$

где  $E_+ = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} = E_-$  — абсолютные значения напряженности поля каждого из зарядов.

Так как (рис. 22б)

$$\cos \alpha = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

где  $x$  — расстояние от точки  $M$  до основания перпендикуляра, опущенного из точки расположения заряда  $Q$  на плоскость, то

$$E = 2 \frac{Q}{4\pi\epsilon (a^2 + x^2)} \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{Qa}{2\pi\epsilon (a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Поверхностная плотность заряда

$$\sigma = -\epsilon E = -\frac{Qa}{2\pi (a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

отрицательный знак взят потому, что поле входит в плоскость, т. е. направлено против положительной нормали к поверхности.

Сила притяжения заряда  $Q$  к проводящей плоскости равна силе притяжения между зарядами  $Q$  и  $Q'$ :

$$F = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon a^2}.$$

Задача носит технический характер: например, электрон, вышедший из катода в вакуумной лампе на малое расстояние (порядка молекулярных размеров), при любой кривизне поверхности катода может рассматриваться как точечный заряд над проводящей плоскостью. Таким образом, видно, что на электрон, вышедший из катода, действует сила притяжения к электрическому изображению, стремящаяся вернуть его на катод. При очень малых расстояниях  $a$  эта сила может быть значительной и преобладать над силой, создаваемой полем анода; этим частично объясняется, почему даже при значительном анодном напряжении часть электронов возвращается на катод.

## 2. Шар в электрическом поле

Эта задача имеет техническое значение для оценки роли проводящих и диэлектрических включений в изолирующей среде. Предварительно целесообразно решить задачу о проводящем шаре в поле точечного заряда, от которой легко перейти к случаю однородного поля и к случаю диэлектрического шара.

1. Точечный заряд и проводящий шар. В поле точечного заряда  $Q$  в однородном диэлектрике с проницаемостью  $\epsilon$  помещен проводящий шар радиуса  $r_0$  на расстоянии  $b$  от заряда (рис. 23). Требуется определить поле в диэлектрике, потенциал шара  $\varphi_0$  и поверхностную плотность заряда  $\tau$  на нем.

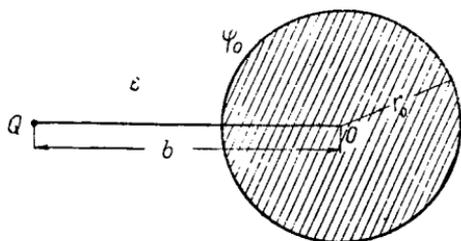


Рис. 23

Непосредственный расчет поля суммированием полей отдельных точечных зарядов здесь также невозможен, так как неизвестен закон распределения поверхностной плотности зарядов, индуцированных на шаре.

Решение задачи методом электрических изображений проводится в два этапа.

Первый из них заключается в рассмотрении заземленного шара, т. е. случая, когда  $\varphi_0 = 0$ . Тогда эквивалентная задача (рис. 24) сводится к расчету поля двух точечных зарядов—за-

данного  $Q$  и электрического изображения  $Q'$  в однородной среде, — обеспечивающих нулевой потенциал на эквипотенциальной сферической поверхности радиуса  $r_0$ . Следовательно, необходимо определить величину и положение заряда  $Q'$ .

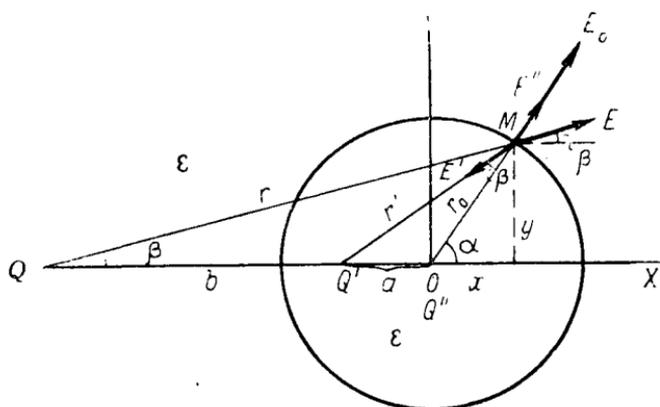


Рис. 24

В силу симметрии заряд  $Q'$  должен находиться на линии  $QO$ . Так как поверхностная плотность зарядов на шаре тем больше, чем ближе данная точка поверхности к точечному заряду  $Q$ , то электрическое изображение  $Q'$  помещается левее центра шара, пусть на расстоянии  $a$  от него (рис. 24).

Для произвольно взятой точки  $M$  на поверхности сферы радиуса  $r_0$  потенциал

$$\varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} + \frac{Q'}{4\pi\epsilon r'} = 0,$$

откуда

$$\frac{Q'}{Q} = -\frac{r'}{r}.$$

Это отношение зарядов при изменении  $r$  и  $r'$  должно оставаться постоянным:

$$\frac{r'}{r} = \text{const} = m.$$

Введение координатной системы, указанной на рис. 24, дает для этого отношения выражение

$$\frac{r'}{r} = \sqrt{\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x+b)^2 + y^2}} = m,$$

откуда после возведения в квадрат и приведения подобных членов

$$x^2(m^2 - 1) + y^2(m^2 - 1) + 2x(m^2b - a) + (m^2b^2 - a^2) = 0.$$

По условию это уравнение должно быть уравнением окружности радиуса  $r_0$  с центром в начале координат (точка  $O$  на рис. 24). Для этого необходимо, чтобы в уравнении отсутствовал член, содержащий  $x$  в первой степени, т. е.

$$m^2b - a = 0,$$

откуда

$$m^2 = \frac{a}{b};$$

тогда

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 - m^2b^2}{m^2 - 1} = ab = r_0^2.$$

Таким образом определилось расстояние

$$a = \frac{r_0^2}{b}$$

и заряд

$$Q' = -mQ = -\sqrt{\frac{a}{b}} Q = -\frac{r_0}{b} Q.$$

Второй этап — шар изолирован и не заряжен; тогда его суммарный заряд равен нулю, а потенциал отличен от нуля и должен быть определен. При внесении изолированного шара в поле точечного заряда отрицательные заряды шара переместятся на его левую сторону, положительные — на правую. Эти последние равны тому заряду  $Q''$ , который в первом этапе отводился в землю; следовательно, для изолированного шара

$$Q' + Q'' = 0,$$

откуда

$$Q'' = -Q' = \frac{r_0}{b} Q.$$

Положение заряда  $Q''$  определяется из следующих соображений. Потенциал сферы радиуса  $r_0$  теперь определяется тремя зарядами:  $Q$ ,  $Q'$  и  $Q''$ . Но, как доказано выше, первые два заряда создают на сфере радиуса  $r_0$  потенциал, равный нулю. Следовательно, потенциал этой сферы определяется только зарядом  $Q''$ , а так как потенциал в любой точке сферы одинаков, то заряд  $Q''$  должен быть равноудален от всех точек этой сферы, т. е. помещен в центре  $O$  (рис. 24). Таким образом, потенциал изолированного шара

$$\varphi_0 = \frac{Q''}{4\pi\epsilon r_0} = \frac{Qr_0}{4\pi\epsilon br_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon b}$$

оказывается равным потенциалу той точки поля точечного заряда, в которую помещен центр шара. Это положение, доказанное для поля точечного заряда, остается справедливым для любого поля, так как оно может рассматриваться как сумма полей точечных зарядов (§ 2).

Сила

$$F = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon(b-a)^2} + \frac{QQ''}{4\pi\epsilon b^2} = \frac{Q^2 r_0}{4\pi\epsilon b} \left[ -\frac{1}{(b-a)^2} + \frac{1}{b^2} \right],$$

действующая на изолированный шар в поле точечного заряда, является силой притяжения, так как первый член всегда больше второго. Это означает, что изолированный проводящий шар всегда втягивается в поле, т. е. стремится переместиться туда, где напряженность поля больше.

Расчет поля вне шара (внутри шара поля нет) сводится теперь к расчету поля трех точечных зарядов; потенциал любой точки

$$\varphi = \varphi_Q + \varphi_{Q'} + \varphi_{Q''}.$$

У поверхности шара (эквипотенциальной поверхности) напряженность поля  $E_0$  направлена по нормали к поверхности, т. е. по направлению радиуса в данной точке, и может быть легко определена через напряженности поля зарядов  $Q$ ,  $Q'$  и  $Q''$ . Так как  $a = \frac{r_0^2}{b}$ , треугольники  $QOM$  и  $Q'OM$  подобны (рис. 24), поэтому углы  $MQO$  и  $Q'MO$  равны друг другу; на рис. 24 они обозначены  $\beta$ .

Положение точки  $M$  на сфере может быть задано углом  $\alpha$  (рис. 24). Тогда суммарная напряженность поля

$$E_0 = E \cos(\alpha - \beta) - E' \cos \beta + E''.$$

Приближенно

$$r = b + r_0 \cos(\alpha - \beta) \quad \text{и} \quad r' = r_0 + a \cos(\alpha - \beta),$$

тогда

$$E_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{\cos(\alpha - \beta)}{[b + r_0 \cos(\alpha - \beta)]^2} - \frac{r_0 \cos \beta}{b[r_0 + a \cos(\alpha - \beta)]^2} + \frac{1}{br_0} \right\},$$

а поверхностная плотность заряда

$$\sigma = \epsilon E_0 = \frac{Q}{4\pi} \left\{ \frac{\cos(\alpha - \beta)}{[b + r_0 \cos(\alpha - \beta)]^2} - \frac{r_0 \cos \beta}{b[r_0 + a \cos(\alpha - \beta)]^2} + \frac{1}{br_0} \right\},$$

причем

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r_0 \sin \alpha}{b + r_0 \cos \alpha}.$$

Поверхностная плотность заряда и напряженность поля обращаются в нуль и меняют знак в точках, соответствующих углу  $\alpha$ , лежащему в зависимости от соотношения  $b$  и  $r_0$  в пределах  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Ввиду симметрии таким свойством будут обладать также все точки окружности, перпендикулярной оси  $X$  и проходящей через указанные две точки.

2. Проводящий шар в однородном поле. Особый интерес для техники представляет задача о шаре в однородном поле. Этот случай может быть получен из предыдущего путем предельного перехода при  $b \gg r_0$ . Тогда  $\beta \approx 0$  и дальнейшее пренебрежение малыми величинами дает

$$E_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{\cos \alpha}{(b + r_0 \cos \alpha)^2} + \frac{r_0^2 + 2ar_0 \cos \alpha + a^2 \cos^2 \alpha - r_0^2}{br_0(r_0 + a \cos \alpha)^2} \right] =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{\cos \alpha}{b^2} - \frac{2 \cos \alpha}{b^2} \right] = 3 \frac{Q}{4\pi\epsilon b^2} \cos \alpha = 3E_a \cos \alpha$$

и

$$c = 3D_a \cos \alpha,$$

где  $E_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon b^2}$  — напряженность поля, принимаемого однородным,

$D_a = \frac{Q}{4\pi b^2}$  — его смещение.

Наибольшее значение напряженности поля (по абсолютной величине) имеет в точках  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 25), соответствующих значениям угла  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi$ .

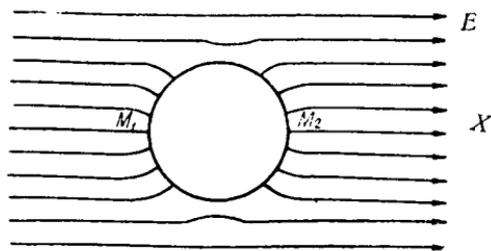


Рис. 25

Точки, в которых напряженность поля и поверхностная плотность заряда обращаются в нуль, соответствуют значениям  $\alpha = \frac{\pi}{2}$

и  $\alpha = \frac{3}{2} \pi$ . Ввиду симметрии нулевая напряженность поля будет во всех точках большого круга, перпендикулярного оси  $X$  (рис. 25).

Таким образом, ничтожные проводящие включения, весьма вероятные в жидких диэлектриках, снижают их электрическую прочность, так как, даже имея форму шара, создают в отдельных местах напряженность поля, втрое большую средней; при неправильной форме проводящих частиц это превышение еще больше.

3. Диэлектрический шар в однородном поле. Решение задачи с проводящим шаром было облегчено тем, что поверхность тела являлась эквипотенциальной и внутри шара поля не было; в аналогичной задаче с диэлектрическим шаром необходимо определить поле как снаружи, так и внутри шара.

Отсутствие поля  $E_i$  внутри проводящего шара можно рассматривать как наложение двух полей—внешнего поля  $E_a$  и поля  $E_s$ , возникшего в результате электризации шара:

$$E_i = E_a - E_s = 0,$$

т. е. поле поверхностных зарядов внутри шара однородно, равно по величине внешнему полю и обратно направлено.

Поле внутри диэлектрического шара также можно рассматривать как результат наложения двух полей: внешнего  $E$  и поля поляризации  $E_p$ , обусловленного связанными зарядами на поверхности шара. Результирующее поле

$$E_i = E_a - E_p \neq 0, \quad \text{откуда } E_p \neq E_a.$$

Можно объединить оба случая, так как поле  $E_n$ , появляющееся в результате реакции среды на внешнее поле, пропорционально последнему:

$$E_n = \kappa E_a;$$

для проводника коэффициент  $\kappa = 1$ , для диэлектрика  $|\kappa| < 1$ , а знак определяется соотношением между  $\epsilon_1$  среды и  $\epsilon_2$  шара.

Связанные заряды на диэлектрическом шаре распределены так же, как свободные заряды на проводящем шаре, но с плотностью  $\kappa\sigma$ . Результирующая напряженность поля  $E_0$  теперь не совпадает по направлению с радиусом и поверхность сферы радиуса  $r_0$  неэквипотенциальна.

Для определения величины  $\kappa$  можно воспользоваться условиями на границе обеих сред и указанной аналогией со случаем проводящего шара.

Напряженность поля вне проводящего шара  $E_0$  является нормальной составляющей напряженности поля, так как тангенциальная составляющая равна нулю; рассматривая эти составляющие как наложение на внешнее однородное поле  $E_a$  поля реакции среды, можно написать:

$$E_{n1} = 3E_a \cos \alpha = (E_a + 2E_a) \cos \alpha, \\ E_{t1} = 0 = (E_a - E_a) \sin \alpha.$$

Здесь первые члены соответствуют внешнему полю, вторые—полю реакции среды.

Рассматривая поле внутри проводящего шара аналогичным образом, можно написать:

$$E_{n2} = 0 = (E_a - E_a) \cos \alpha, \\ E_{t2} = 0 = (E_a - E_a) \sin \alpha.$$

В соответствии с указанной выше аналогией для диэлектрического шара

$$E_{n1} = (E_a + 2\kappa E_a) \cos \alpha, \quad E_{n2} = (E_a - \kappa E_a) \cos \alpha, \\ E_{t1} = (E_a - \kappa E_a) \sin \alpha, \quad E_{t2} = (E_a + \kappa E_a) \sin \alpha.$$

Так как нормальные составляющие вектора напряженности поля относятся друг к другу обратно пропорционально диэлектрическим проницаемостям  $\epsilon_1$  среды и  $\epsilon_2$  шара (§ 10), то

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{1 + 2\kappa}{1 - \kappa} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1},$$

откуда

$$\kappa = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1}.$$

Из этого выражения видно, что  $\kappa$ , оставаясь по абсолютному значению всегда меньше единицы, имеет различный знак в зависимости от разности  $\epsilon_2 - \epsilon_1$ ; при  $\epsilon_1 < \epsilon_2$   $\kappa > 0$  и поле внутри шара слабее, чем снаружи, при  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  поле внутри сильнее.

Значение  $\kappa = 1$ , соответствующее проводящему шару, получается лишь при  $\epsilon_2 = \infty$ . Это означает, что формально проводящая среда в электростатике может рассматриваться как диэлектрик с бесконечно большой проницаемостью.

Из приведенных выражений для нормальных и тангенциальных составляющих видно, что напряженность поля снаружи шара

$$E_1 = \sqrt{E_{n1}^2 + E_{t1}^2} = E_a \times \\ \times \sqrt{(1 + 2\kappa)^2 \cos^2 \alpha + (1 - \kappa)^2 \sin^2 \alpha}$$

составляет с радиусом шара угол  $\psi_1$ , причем

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{E_{t1}}{E_{n1}} = \frac{1 - \kappa}{1 + 2\kappa} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \operatorname{tg} \alpha.$$

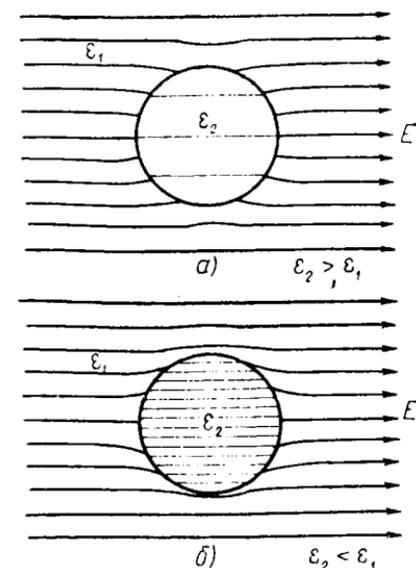


Рис. 26

Внутри шара напряженность поля

$$E_2 = \sqrt{E_{n2}^2 + E_{t2}^2} = E_a (1 - \kappa)$$

не зависит от угла  $\alpha$ , т. е. от положения точки, и поле образует с радиусом угол  $\alpha$ , так как

$$\frac{E_{t2}}{E_{n2}} = \operatorname{tg} \alpha;$$

другими словами, внутри шара поле однородно и совпадает по направлению с внешним полем.

На рис. 26 представлена картина поля при внесении диэлектрического шара в однородное поле; рис. 26а соответствует случаю  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ , когда поле внутри шара слабее внешнего поля, рис. 26б—случаю  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ , когда поле внутри шара усиливается. В последнем случае более вероятен пробой диэлектрического включения.

### 3. Линии передачи

Широко используемые в электротехнике линии передачи представляют собой систему прямых параллельных круговых цилиндров, длина которых настолько велика по сравнению с расстоянием между ними, что искажением электрического поля у концов заряженных проводов можно пренебречь. Поэтому распределение поля в пространстве остается неизменным в любой плоскости, перпендикулярной оси проводов.

Электрическое поле линии может рассматриваться как электростатическое поле лишь при отсутствии тока, т. е. в режиме холостого хода линии.

Расчет поля таких линий может быть произведен с помощью метода электрических изображений.

1. Двухпроводная линия. Пусть два провода одинакового радиуса  $r_0$  подвешены в воздухе на расстоянии  $d$  друг

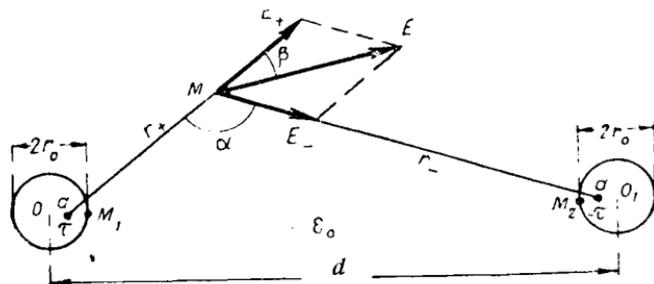


Рис. 27

от друга настолько высоко над землей, что ее влиянием можно пренебречь (рис. 27). Напряжение на линии равно  $U$ , заряд на единицу длины  $\tau$ .

Из-за взаимного влияния заряды распределятся по поверхности проводов неравномерно; наибольшая плотность заряда будет на внутренних сторонах проводов. По аналогии с изложенным выше (см. § 11, п. 2) это неравномерное распределение заряда по поверхности провода может быть заменено по методу электрических изображений рассмотрением электрических осей с теми же зарядами  $\tau$  и  $-\tau$ , сдвинутых от геометрических осей на расстояние  $a = \frac{r_0^2}{d}$ . Потенциал произвольной точки  $M$  вне проводов (см. § 10) на расстояниях  $r_+$  и  $r_-$  от электрических осей

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r_+} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r_-} + A = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_-}{r_+} + A.$$

Так как в бесконечно удаленной точке

$$\varphi_\infty = 0 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln 1 + A,$$

то

$$A = 0 \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_-}{r_+}.$$

Эквипотенциальные линии соответствуют условию  $\frac{r_-}{r_+} = \text{const}$ , что согласно доказанному выше (п. 2 этого параграфа) дает окружности с центрами на линии, соединяющей оси проводов.

Напряженность поля в точке  $M$  равна геометрической сумме напряженностей  $E_+$  и  $E_-$ , создаваемых каждой из электрических осей (см. § 10):

$$E_+ = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r_+} \quad \text{и} \quad E_- = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r_-}.$$

Величина напряженности поля

$$E = \sqrt{E_+^2 + E_-^2 - 2E_+E_- \cos \alpha};$$

так как

$$\cos \alpha = \frac{r_+^2 + r_-^2 - (d - 2a)^2}{2r_+ r_-},$$

то

$$E = \frac{\tau(d - 2a)}{2\pi\epsilon_0 r_+ r_-}.$$

Направление вектора напряженности  $\vec{E}$  в точке  $M$  (рис. 27) определяется углом  $\beta$ , образуемым с направлением  $r_+$ :

$$\sin \beta = \frac{E_-}{E} \sin \alpha = \frac{r_+}{d - 2a} \sin \alpha.$$

Для определения емкости линии необходимо найти выражение для напряжения, связав его с зарядом.

В точке  $M_1$ , лежащей на поверхности левого провода (рис. 27), потенциал

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d - r_0 - a}{r_0 - a},$$

а в точке  $M_2$  на втором проводе

$$\varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0 - a}{d - r_0 - a}.$$

Напряжение на линии

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d - r_0 - a}{r_0 - a},$$

а емкость на единицу длины

$$C' = \frac{\tau}{U} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d - r_0 - a}{r_0 - a}}.$$

У большинства воздушных линий  $d \gg r_0$ , а следовательно,  $a \ll r_0$ . Поэтому, пренебрегая малыми величинами, определяют емкость по формуле

$$C' = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{r_0}}.$$

2. Однопроводная линия с учетом земли. Задача расчета электрического поля заряженного провода кругового сечения радиуса  $r_0$ , подвешенного над землей на высоте  $h$  (рис. 28) при напряжении  $U$  по отношению к земле, сводится к рассмотренной выше. Земля является проводником и может быть заменена вторым проводом, несущим заряд обратного знака; напряжение этого провода равно  $-U$ . Таким образом, теперь  $a = \frac{r_0^2}{2h}$ ,  $d = 2h$  и напряжение между проводами  $2U$ .

Поэтому для однопроводной линии с учетом земли

$$2U = \frac{\tau}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h - r_0 - a}{r_0 - a}$$

и емкость на единицу длины

$$C' = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h - r_0 - a}{r_0 - a}};$$

при  $h \gg r_0$

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h}{r_0}}.$$

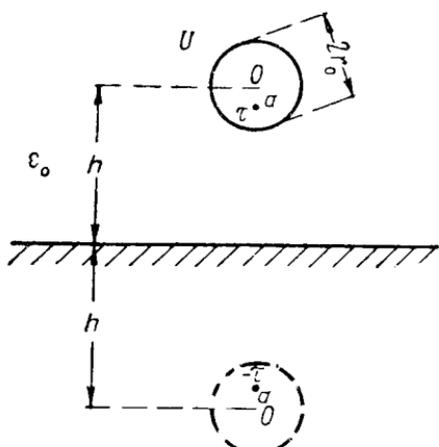


Рис. 28

высоте над землей (рис. 29). Теперь влияние земли нужно учесть двумя изображениями, расположенными симметрично относи-

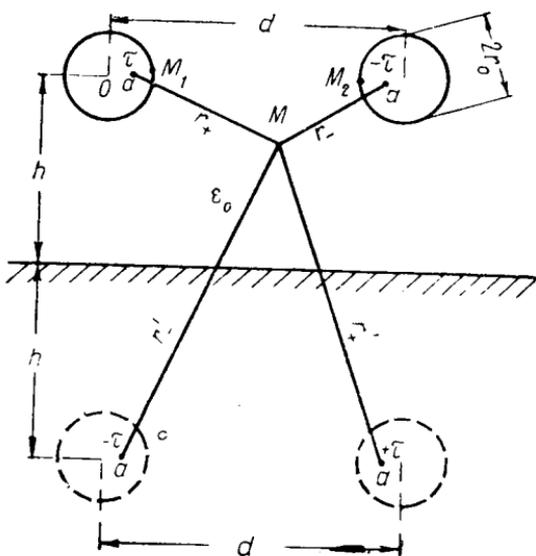


Рис. 29

тельно поверхности земли, в результате чего эта задача сводится к расчету поля четырех электрических осей. Электрические

оси смещены по горизонтали от своих геометрических осей на расстояние  $a = \frac{r_0^2}{d}$  и по вертикали на  $a_1 = \frac{r_0^2}{2h}$ . Но так как в реальных линиях  $h > d$ , то смещением электрических осей по вертикали можно пренебречь.

Тогда потенциал произвольной точки  $M$  складывается из двух потенциалов: одного от проводов, второго от их изображений:

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_-}{r_+} + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r'_-}{r'_+} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_- r'_-}{r_+ r'_+},$$

Потенциал точки  $M_1$  на поверхности первого провода

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{(d - r_0 - a) 2h}{(r_0 - a) \sqrt{4h^2 + (d - r_0 - a)^2}},$$

потенциал в точке  $M_2$  на поверхности второго провода

$$\varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{(r_0 - a) \sqrt{4h^2 + (d - r_0 - a)^2}}{(d - r_0 - a) 2h}.$$

Напряжение на линии

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h(d - r_0 - a)}{(r_0 - a) \sqrt{4h^2 + (d - r_0 - a)^2}},$$

а емкость на единицу длины

$$C' = \frac{\tau}{U} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h(d - r_0 - a)}{(r_0 - a) \sqrt{4h^2 + (d - r_0 - a)^2}}}.$$

Если  $d \gg r_0$ , то

$$C' = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2hd}{r_0 \sqrt{4h^2 + d^2}}}.$$

## § 12. МЕТОД ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Потенциал уединенного заряженного тела пропорционален его заряду (§ 3), потенциал каждого из тел в системе многих заряженных тел зависит от зарядов всех тел. Если диэлектрическая проницаемость среды постоянна, то связь между потен-



Напряжение на линии

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = (\alpha_{11} - \alpha_{12} - \alpha_{21} + \alpha_{22}) \tau = (\alpha_{11} + \alpha_{22} - 2\alpha_{12}) \tau,$$

так как  $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ .

Емкость линии на единицу длины

$$C' = \frac{\tau}{U} = \frac{1}{\alpha_{11} + \alpha_{22} - 2\alpha_{12}}.$$

Для определения собственного потенциального коэффициента  $\alpha_{11}$  нужно положить  $\tau_2 = 0$ , тогда

$$\varphi_1 = \alpha_{11} \tau_1.$$

Так как радиус проводов мал по сравнению с расстоянием между ними, то можно принять, что второй незаряженный провод не изменит поля первого провода, т. е. в этом случае поле будет таким же, как поле однопроводной линии (§ 11); коэффициент  $\alpha_{11}$  будет величиной, обратной с учетом земли, т. е.

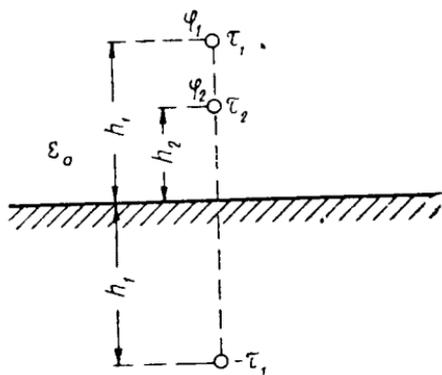


Рис. 30

емкости однопроводной линии

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_1}{r_0}.$$

Аналогично второй собственный потенциальный коэффициент

$$\alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_2}{r_0}.$$

Второй провод, находясь в электрическом поле первого, примет потенциал той точки поля, в которую помещен центр его сечения (§ 11). Поэтому потенциал второго провода определяется первым проводом и его электрическим изображением (§ 11):

$$\varphi_2 = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2} = \alpha_{21} \tau_1$$

откуда

$$\alpha_{21} = \alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2}.$$

После подстановки выражений для потенциальных коэффициентов емкость на единицу длины

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h_1}{r_0} + \ln \frac{2h_2}{r_0} - 2 \ln \frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2}} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln 2 \frac{h_1 h_2 (h_1 - h_2)}{r_0 (h_1 + h_2)}}$$

### § 13. МЕТОД СРЕДНИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Как указывалось выше, основное затруднение при расчете электрического поля заключается в том, что заряд распределяется по эквипотенциальной поверхности проводника неравномерно.

Метод средних потенциалов, предложенный Хоу, состоит в том, что вместо эквипотенциальной поверхности проводника с неравномерно распределенным зарядом рассматривается та же поверхность с равномерно распределенным зарядом и неравномерно распределенным потенциалом, так как вычисление последнего значительно проще вычисления распределения заряда в реальной задаче. Затем вычисляется среднее значение потенциала проводника и через него емкость.

Для проводов, у которых длина весьма велика по сравнению с диаметром, неравномерность распределения заряда по длине

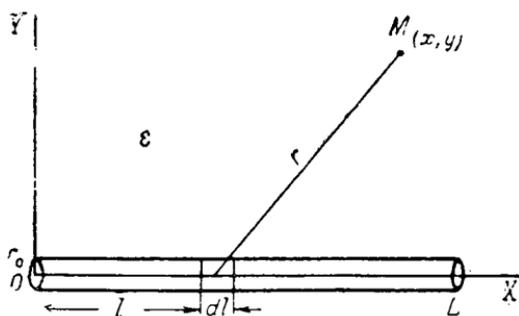


Рис. 31

сказывается только вблизи концов провода и расчет по методу средних потенциалов даст результат, близкий к истине.

Пусть прямой провод длиной \$L\$ и радиусом поперечного сечения \$r\_0 \ll L\$ (рис. 31) находится в диэлектрической среде проницаемостью \$\epsilon\$. Считая по методу средних потенциалов, что заряд \$Q\$ распределен равномерно по

длине провода с погонной плотностью \$\tau = \frac{Q}{L}\$, и введя координатную систему, как указано на рис. 31, можно найти потенциал в произвольной точке \$M\$ с координатами \$x, y\$.

Потенциал в точке \$M\$ от одного бесконечно малого элемента длины провода \$dl\$ будет

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\tau dl}{r},$$

где \$r\$ — расстояние от элемента провода до точки \$M\$.

Согласно принципу наложения потенциал в точке  $M$  от всего провода, будет (приняв  $l - x = t$ )

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_0^L \frac{\tau dl}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon L} \int_0^L \frac{dl}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon L} \int_{-x}^{L-x} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + y^2}} = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon L} [\ln(L-x + \sqrt{(L-x)^2 + y^2}) - \ln(-x + \sqrt{x^2 + y^2})].\end{aligned}$$

На поверхности провода ( $y=r_0$ ) потенциал принимает значение

$$\varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon L} [\ln(L-x + \sqrt{(L-x)^2 + r_0^2}) - \ln(-x + \sqrt{x^2 + r_0^2})]$$

и является функцией одной координаты  $x$ .

Среднее значение потенциала на проводе

$$\begin{aligned}\varphi_{med} &= \frac{1}{L} \int_0^L \varphi_0 dx = \frac{Q}{4\pi\epsilon L^2} \left[ \int_0^L \ln(L-x + \sqrt{(L-x)^2 + r_0^2}) dx - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^L \ln(-x + \sqrt{x^2 + r_0^2}) dx \right].\end{aligned}$$

Интегрирование по частям приводит к

$$\begin{aligned}\varphi_{med} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon L^2} [L \ln(L + \sqrt{L^2 + r_0^2}) - L \ln(-L + \sqrt{L^2 + r_0^2}) - \\ &\quad - 2\sqrt{L^2 + r_0^2} + 2r_0] = \frac{Q}{4\pi\epsilon L^2} \left[ L \ln \frac{\sqrt{L^2 + r_0^2} + L}{\sqrt{L^2 + r_0^2} - L} - \right. \\ &\quad \left. - 2\sqrt{L^2 + r_0^2} + 2r_0 \right].\end{aligned}$$

Так как  $L \gg r_0$ , то можно пренебречь малыми величинами, что дает

$$\varphi_{med} = \frac{Q}{4\pi\epsilon L} \left( \ln \frac{4L^2}{r_0^2} - 2 \right) = \frac{Q}{2\pi\epsilon L} \left( \ln \frac{2L}{r_0} - 1 \right).$$

Емкость такого провода

$$\begin{aligned}C &= \frac{Q}{\varphi_{med}} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{2L}{r_0} - 1} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{L}{r_0} + \ln 2 - 1} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{L}{r_0} - 0,307} \approx \\ &\approx \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{L}{r_0}}.\end{aligned}$$

## § 14. НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИЭЛЕКТРИКИ И КОНДЕНСАТОРЫ

Выше рассматривались линейные диэлектрики (§ 1), диэлектрическая проницаемость которых не зависит от напряженности поля. Связь между смещением и напряженностью поля  $D = \epsilon E$  для них изображается прямой линией (рис. 32). Диэлектрическая проницаемость пропорциональна тангенсу угла  $\alpha$  наклона этой прямой:

$$\epsilon = \frac{D}{E} = k \operatorname{tg} \alpha,$$

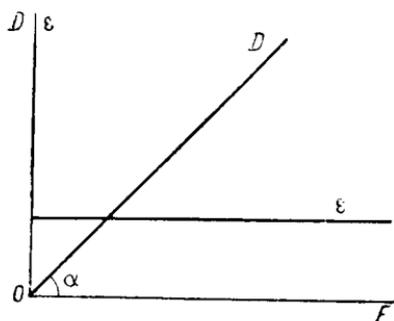


Рис. 32

где  $k$  равно отношению масштабов по осям ординат и абсцисс. У нелинейных диэлектриков проницаемость зависит от напряженности поля; из них особый интерес представляют сегнетоэлектрики, обладающие очень высокой проницаемостью ( $\epsilon_r > 1000$ ). Первым из подобных материалов была детально исследованная в 1930—1934 гг. И. В. Курчатовым и П. П. Кобеко сегнетова соль, давшая название этой группе диэлектриков.

Из-за температурной нестабильности сегнетова соль не использовалась и лишь после открытия Б. М. Вулом в 1944—1946 гг. нового керамического сегнетоэлектрика — метатитаната бария — подобные материалы стали все шире внедряться в технику.

Зависимость смещения от напряженности поля представлена на рис. 33. Для нелинейных материалов возможны два определения диэлектрической проницаемости:

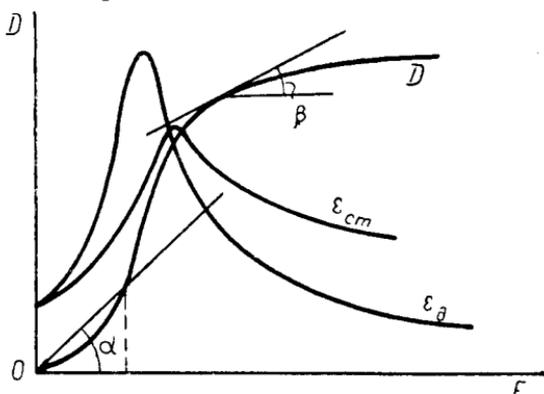


Рис. 33

$$\epsilon_{cm} = \frac{D}{E} = k \operatorname{tg} \alpha,$$

называемая *статической проницаемостью* и пропорциональная тангенсу угла наклона секущей в данной точке, и

$$\epsilon_d = \frac{dD}{dE} = k \operatorname{tg} \beta,$$

называемая *динамической проницаемостью* и пропорциональная тангенсу угла наклона касательной в той же точке. Обе величины являются функциями напряженности поля (рис. 33); первая из них используется для расчета статических режимов при неизменном значении напряженности поля, вторая — для расчета динамических режимов и определяет изменение смещения с изменением напряженности поля.

Так же, как и ферромагнетики, сегнетоэлектрики состоят из отдельных областей, называемых *областями спонтанной поляризации*, каждая из которых самопроизвольно поляризована в некотором направлении. Из-за хаотического расположения этих областей сегнетоэлектрик в целом не обладает электрическим моментом. С ростом внешнего поля увеличивается ориентация поляризации отдельных областей в направлении поля и соответственно растет поляризованность. Однако по мере дальнейшего увеличения поля рост поляризованности замедляется; поляризованность достигает насыщения, когда все области самопроизвольной поляризации будут ориентированы по внешнему полю.

В переменных электрических полях сегнетоэлектрики характеризуются явлением *диэлектрического гистерезиса* (рис. 34), заключающимся в несовпадении кривой  $D(E)$  при возрастании напряженности поля с кривой, соответствующей уменьшению напряженности поля.

Сегнетоэлектрические свойства зависят от температуры и существуют лишь в определенном ее интервале. Пьезоэлектрический эффект (*электрострикция*) сегнетоэлектриков — зависимость поляризации от давления — начинает находить применение в технике наряду с давно используемым пьезоэффектом кварца. После снятия поля в сегнетоэлектрике сохраняется остаточное смещение (рис. 34) и такой образец ведет себя подобно постоянному магниту. Однако поляризация сегнетоэлектрика сохраняется недолго. Но существуют диэлектрики, не являющиеся сегнетоэлектриками, в которых поляризация длительно сохраняется и после снятия внешнего поля, если их не подвергать нагреву. Такие диэлектрики, называемые *электретами* и являющиеся аналогами постоянных магнитов, в последнее время начинают находить себе применение в технике связи и электроизмерительной технике.

В соответствии с используемым диэлектриком конденсаторы по виду характеристик также делятся на линейные (рис. 35) и

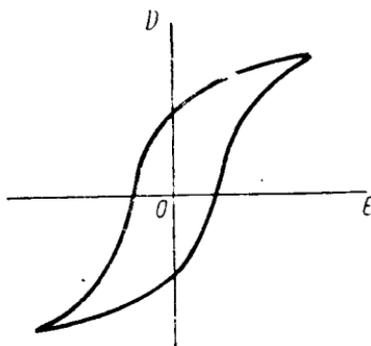


Рис. 34

нелинейные (рис. 36); для последних вводятся понятия *статической емкости*

$$C_{cm} = \frac{Q}{U} = k_1 \operatorname{tg} \alpha_1$$

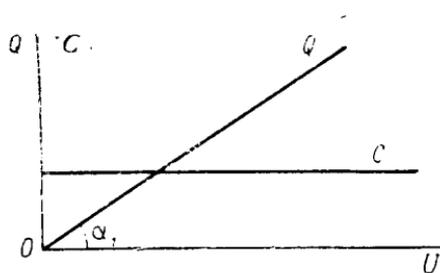


Рис. 35

и *динамической емкости*

$$C_d = \frac{dQ}{dU} = k_1 \operatorname{tg} \beta_1,$$

где  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  (рис. 36)—углы наклона секущей и касательной.

Нелинейные конденсаторы находят все большее применение в автоматике, радиотехнике и т. д.

Расчет электрического поля в нелинейной среде может быть произведен, если известна аналитическая зависимость  $\varepsilon(E)$  или  $D(E)$ . Так как эта зависимость теоретически не выводится, для

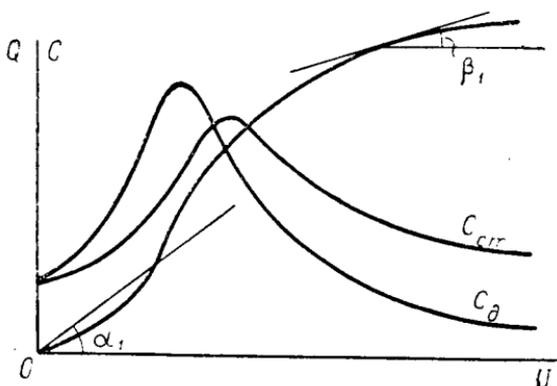


Рис. 36

приближенного решения подбирают по кривой рис. 33 аппроксимирующую функцию, наиболее соответствующую условиям задачи. Чаще пользуются графическим методом, хотя и неточным, но зато простым. Ниже приводятся примеры подобных расчетов.

### 1. Плоский конденсатор с нелинейным диэлектриком

В плоском конденсаторе с площадью пластин  $S$  и толщиной диэлектрика  $d$  даже при нелинейном, но однородном диэлектрике поле однородно и по-прежнему

$$E = \frac{U}{d},$$

но связь напряженности поля с зарядом будет нелинейной и определяется зависимостью  $D(E)$ .

Пусть аппроксимирующая функция для характеристики смещение — напряженность поля (рис. 37) будет

$$D = aE - bE^3,$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные.

Так же, как и в линейном конденсаторе (§ 10), обобщенная теорема Гаусса дает

$$D = \frac{Q}{S};$$

подставляя сюда выражение для  $D$

$$aE - bE^3 = \frac{Q}{S},$$

можно определить напряженность поля через заряд.

Для определения емкости как функции напряжения надо

подставить в это уравнение  $E = \frac{U}{d}$ :

$$a \frac{U}{d} - b \frac{U^3}{d^3} = \frac{Q}{S},$$

откуда статическая емкость

$$C_{cm} = \frac{Q}{U} = \frac{S}{d} \left( a - b \frac{U^2}{d^2} \right),$$

а динамическая емкость

$$C_d = \frac{dQ}{dU} = \frac{S}{d} \left( a - 3b \frac{U^2}{d^2} \right).$$

Кривые емкостей в функции напряжения представлены на рис. 37.

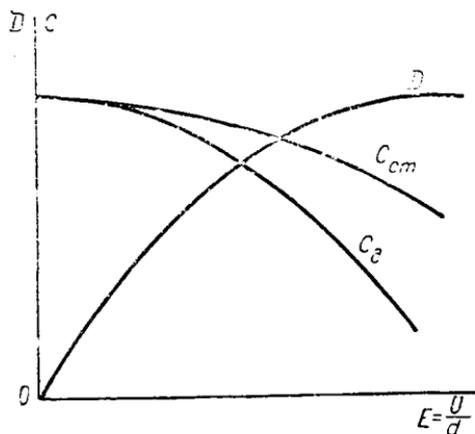


Рис. 37

## 2. Цепь из нелинейных конденсаторов

1. Последовательное соединение. Задача о распределении напряжения между двумя нелинейными конденсаторами, соединенными последовательно (рис. 38), может быть решена аналитически, если известны зависимости емкостей от напряжения. Графически эта задача решается проще, если заданы графически зависимости заряда конденсаторов от напряжения (рис. 38)—так называемые *кулонвольтные характеристики*.

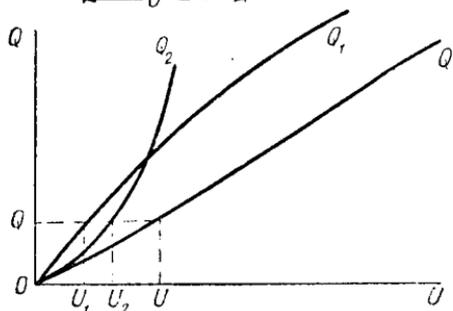
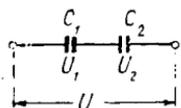


Рис. 38

заданного напряжения цепи находятся напряжения на каждом из конденсаторов.

Другой способ не требует построения суммарной характеристики, но дает ответ только для одного значения напряжения цепи  $U'$ . Первая характеристика строится как обычно, вторая— влево от вертикали, сдвинутой на величину  $U'$  от начала координат (рис. 39). Точка пересечения обеих характеристик соответствует условию  $Q_1 = Q_2$ ; напряжения конденсаторов  $U_1'$  и  $U_2'$  отсчитываются каждое в своей системе координат.

2. Параллельное соединение. Для параллельно соединенных конденсаторов (рис. 40) при заданном напряжении задача решается непосредственно для каждого конденсатора в отдельности. К графическому решению приходится прибегать

При последовательном соединении сумма напряжений на конденсаторах равна приложенному напряжению:

$$U_1 + U_2 = U,$$

а заряды на конденсаторах равны друг другу и общему заряду всей цепи:

$$Q_1 = Q_2 = Q.$$

Задача решается построением кулонвольтной характеристики всей цепи, получаемой путем сложения абсцисс кривых  $Q_1$  и  $Q_2$  при одном значении заряда  $Q$  (рис. 38). По этой кривой для любого

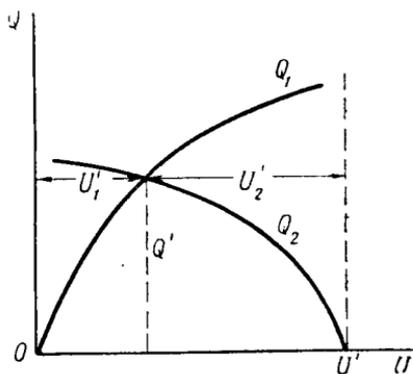


Рис. 39

лишь при определении напряжения на них  $U$  по заданному общему заряду  $Q$ .

Построение суммарной кулонвольтовой характеристики по первому способу отличается от изложенного выше только тем, что в силу условий

$$Q = Q_1 + Q_2$$

и

$$U_1 = U_2 = U$$

складываются ординаты характеристик при постоянных значениях напряжения (рис. 40).

По второму способу характеристика  $Q_2$  строится вниз от горизонтали, соответствующей заданному значению заряда  $Q'$  (рис. 41). Абсцисса точки пересечения дает величину напряжения  $U'$ , а ординаты этой точки, отсчитываемые в различных координатных системах, соответствуют зарядам конденсаторов  $Q_1'$  и  $Q_2'$ .

3. Смешанное соединение. При последовательно-параллельном соединении (рис. 42) конденсаторы  $C_2$  и  $C_3$  соединены параллельно и их общий заряд

$$Q_{23} = Q_2 + Q_3,$$

а напряжения на них одинаковы:

$$U_2 = U_3;$$

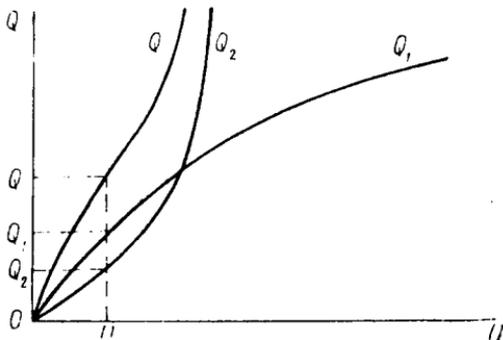
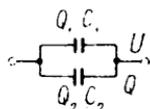


Рис. 40

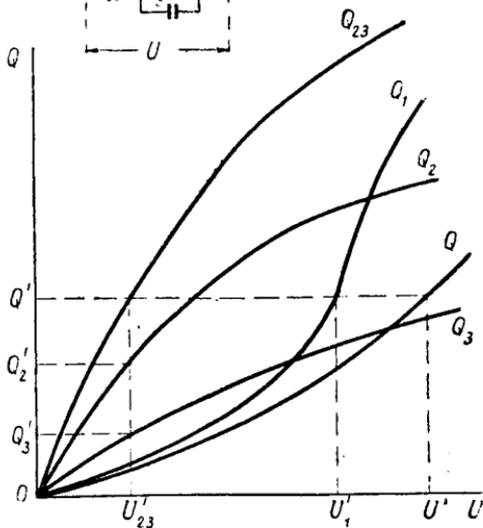
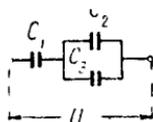


Рис. 42

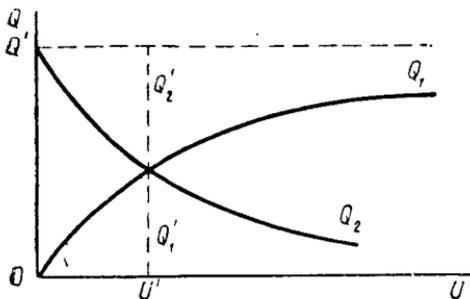


Рис. 41

поэтому кулонвольтная характеристика для участка 2-3 получается путем сложения ординат характеристик  $Q_2$  и  $Q_3$  при одних и тех же значениях напряжения (рис. 42).

Так как конденсатор  $C_1$  последовательно соединен с участком 2-3, то сумма напряжений  $U_1$  и  $U_{23}$  дает напряжение цепи

$$U = U_1 + U_{23},$$

а заряд  $Q_1 = Q_{23}$ . Поэтому кулонвольтная характеристика всей цепи (рис. 42) получается путем сложения абсцисс характеристик  $Q_1$  и  $Q_{23}$  при одинаковых значениях зарядов. По этой характеристике находят заряд  $Q'$ , соответствующий заданному значению напряжения  $U'$ . Так как  $Q' = Q_1' = Q_{23}'$ , то по характеристикам  $Q_1$  и  $Q_{23}$  находят напряжения  $U_1'$  и  $U_{23}'$  как абсциссы, соответствующие  $Q'$ . Точки пересечения ординаты с характеристиками  $Q_2$  и  $Q_3$  определяют значения зарядов  $Q_2'$  и  $Q_3'$ .

---

## ГЛАВА III

### ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ И ЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Энергия, являющаяся одной из характеристик электромагнитного поля, помимо своего теоретического значения представляет наибольший интерес для техники, так как электротехника основана на передаче энергии электромагнитного поля на расстояние и преобразовании ее в другие виды энергии.

В определенных условиях преобразования энергии электромагнитного поля основную роль играет энергия электрического поля, которой и посвящена эта глава.

#### § 15. ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ЗАРЯЖЕННЫХ ТЕЛ

##### 1. Вывод выражения энергии

Пусть в диэлектрической среде с постоянной проницаемостью  $\epsilon$  находятся  $n$  неподвижных проводящих тел (рис. 43); потенциал каждого из тел  $\varphi_k$ , заряд  $Q_k$ , где  $k=1, 2, \dots, n$ .

Для сообщения зарядов этой системе тел они были подключены к источникам электрической энергии (§ 5). Во время зарядки по соединительным проводам идут токи.

Работа, совершаемая источниками, частью идет на сообщение зарядов телам системы, частью—на нагрев соединительных проводов, на образование магнитного

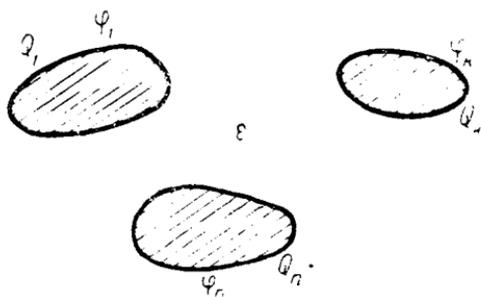


Рис. 43

поля и на излучение энергии электромагнитного поля в окружающее пространство, так как провод с изменяющимся током представляет собой антенну. Первая часть переходит в энергию, запасаемую в системе, вторая часть представляет собой потери.

Предполагая, что зарядка системы совершается бесконечно медленно, т. е. токи зарядки бесконечно малы и постоянны, можно пользоваться зависимостями, установленными для электростатического поля. При этом предположении можно также пренебречь потерями, так как мощность тепловых потерь и энергия магнитного поля, пропорциональные квадрату тока, будут бесконечно малыми второго порядка, а излучение отсутствует.

Тогда работа  $A$  источников равна энергии  $W$ , запасенной в системе заряженных тел.

При увеличении на величину  $dq_\kappa$  заряда тела  $\kappa$ , имеющего потенциал  $\varphi_\kappa$ , согласно определению потенциала источником совершается работа  $\varphi_\kappa dq_\kappa$ ; эта работа равна увеличению энергии тела.

Тогда для всей системы работа источников

$$dA = \sum \varphi_\kappa dq_\kappa,$$

а вся энергия, запасенная в системе,

$$W = A = \sum \int_0^{Q_\kappa} \varphi_\kappa dq_\kappa.$$

Для вычисления  $W$  необходимо связать друг с другом потенциал и заряд тела. В § 12 была установлена связь потенциала каждого из тел с зарядами всех тел через потенциальные коэффициенты  $\alpha_{\kappa\rho}$ :

$$\varphi_\kappa = \alpha_{\kappa 1} q_1 + \alpha_{\kappa 2} q_2 + \dots + \alpha_{\kappa n} q_n.$$

Из закона сохранения энергии вытекает, что порядок сообщения заряда телам системы не влияет на величину энергии; поэтому можно принять, что заряды всех тел изменяются пропорционально друг другу, т. е.  $q_\rho = \beta_{\kappa\rho} q_\kappa$ , где  $\beta_{\kappa\rho}$  — постоянная. Тогда

$$\varphi_\kappa = (\alpha_{\kappa 1} \beta_{\kappa 1} + \alpha_{\kappa 2} \beta_{\kappa 2} + \dots + \alpha_{\kappa n} \beta_{\kappa n}) q_\kappa = \gamma_\kappa q_\kappa,$$

где  $\gamma_\kappa = \sum_{\rho=1}^{p=n} \alpha_{\kappa\rho} \beta_{\kappa\rho}$  — величина постоянная.

Подстановка равенства  $\varphi_\kappa = \gamma_\kappa q_\kappa$  в выражение для энергии дает

$$W = \sum \int_0^{Q_\kappa} \gamma_\kappa q_\kappa dq_\kappa = \sum \frac{\gamma_\kappa Q_\kappa^2}{2} = \frac{1}{2} \sum \varphi_\kappa Q_\kappa.$$

Здесь в окончательном выражении для энергии под  $\varphi_\kappa$  понимается значение потенциала по окончании зарядки. Формула для энергии остается справедливой также для любой скорости зарядки, так как энергия зависит только от конечных значений зарядов и потенциалов.

В системе МКСА энергия измеряется в джоулях (дж).  
В случае уединенного тела его энергия

$$W = \frac{1}{2} \varphi Q = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{Q^2}{2C},$$

здесь  $C$  — емкость тела.

Для конденсатора, т. е. для системы из двух тел,  $Q_1 = -Q_2 = Q$ ,  $\varphi_1 - \varphi_2 = U$  и энергия

$$W = \frac{1}{2} \varphi_1 Q_1 + \frac{1}{2} \varphi_2 Q_2 = \frac{1}{2} Q (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

является квадратичной функцией заряда или напряжения. Из этого выражения вытекает новое — энергетическое определение емкости:

$$C_s = \frac{2W}{U^2}.$$

Для линейных конденсаторов все три значения емкости — статической, динамической и энергетической — совпадают, для нелинейных они различны.

## 2. Доказательство равенства взаимных потенциальных коэффициентов

Пусть система из двух тел не заряжена и потенциалы тел равны нулю. Сперва сообщается заряд первому телу с затратой работы

$$A_1 = \int_0^{Q_1} \varphi_1 dq_1 = \alpha_{11} \int_0^{Q_1} q_1 dq_1 = \frac{\alpha_{11} Q_1^2}{2}.$$

После этого сообщается заряд второму телу, а заряд первого тела поддерживается неизменным ( $Q_1 = \text{const}$ ). Тогда

$$\varphi_2 = \alpha_{21} Q_1 + \alpha_{22} q_2.$$

Работа, затраченная на зарядку второго тела,

$$A_2 = \int_0^{Q_2} \varphi_2 dq_2 = \alpha_{21} Q_1 \int_0^{Q_2} dq_2 + \alpha_{22} \int_0^{Q_2} q_2 dq_2 = \alpha_{21} Q_1 Q_2 + \frac{\alpha_{22} Q_2^2}{2};$$

в первом теле работа не затрачивается, так как хотя потенциал его изменяется, но заряд остается постоянным.

Вся работа, затраченная на зарядку тел и равная энергии системы, будет:

$$A_1 + A_2 = W = \frac{\alpha_{11} Q_1^2}{2} + \frac{\alpha_{22} Q_2^2}{2} + \alpha_{21} Q_1 Q_2.$$

В этом выражении для энергии первые два члена представляют собой собственную энергию обоих тел, последний — их взаимную энергию, т. е. энергию, определяемую взаимным расположением заряженных тел.

Если повторить весь вывод, изменив лишь порядок сообщения зарядов (сначала второму, а затем первому), то выражение для энергии будет отличаться лишь тем, что индексы 1 и 2 поменяются местами:

$$W = \frac{\alpha_{22} Q_2^2}{2} + \frac{\alpha_{11} Q_1^2}{2} + \alpha_{12} Q_2 Q_1.$$

Так как величина энергии системы не зависит от порядка сообщения зарядов телам системы, то из полученных выражений вытекает, что взаимные потенциальные коэффициенты равны друг другу:

$$\alpha_{12} = \alpha_{21}$$

или в общем виде

$$\alpha_{kp} = \alpha_{pk}.$$

В общем случае системы  $n$  тел ее полная энергия также может быть представлена состоящей из суммы собственных энергий отдельных тел и из суммы взаимных энергий:

$$W = \frac{1}{2} \sum \alpha_{kk} Q_k^2 + \sum \alpha_{kp} Q_k Q_p.$$

### 3. Выражение энергии через поверхностную и объемную плотности заряда

Заряд распределяется по поверхности проводящих заряженных тел с поверхностной плотностью  $\sigma$ ; тогда  $Q_k = \int_{S_k} \sigma dS$  и энергия

$$W = \frac{1}{2} \sum \varphi_k Q_k = \frac{1}{2} \sum \varphi_k \int_{S_k} \sigma dS.$$

Так как поверхность проводника является эквипотенциальной, то при интегрировании по поверхности проводника  $k$  его потенциал  $\varphi_k$  остается величиной постоянной и может быть введен под знак интеграла:

$$W = \frac{1}{2} \sum \int_{S_k} \varphi \sigma dS.$$

Это выражение обычно записывают без знака суммы:

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi \sigma dS,$$

причем интегрирование должно проводиться по всем заряженным поверхностям.

Если заряд распределен в диэлектрике с объемной плотностью  $\rho$ , можно воспользоваться выведенной в пункте 1 этого параграфа общей формулой, применив ее к бесконечно малым элементам объема  $dv$  с зарядом  $\rho dv$  и заменив конечное число слагаемых интегралом. Тогда энергия

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi \rho dv ;$$

интегрирование производится по всему объему.

В общем случае при одновременном существовании поверхностного и объемного распределения заряда

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi \sigma dS + \frac{1}{2} \int \varphi \rho dv .$$

#### 4. Емкость двух последовательно соединенных конденсаторов с утечками

Как известно, при последовательном соединении идеальных (без утечки) конденсаторов  $C_1$  и  $C_2$  заряд на них одинаков, а напряжение цепи распределяется обратно пропорционально их емкостям; общая емкость

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

всегда меньше наименьшей из них.

Из-за несовершенства изоляции реальные конденсаторы всегда обладают некоторой утечкой. При последовательном соединении двух реальных конденсаторов (рис. 44а) постоянное напряжение цепи распределяется прямо пропорционально сопротивлениям утечек конденсаторов, так как их утечки оказываются также соединенными последовательно:

$$U_1 = U \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{и} \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2},$$

а заряды их не равны друг другу:

$$Q_1 = C_1 U_1 = U \frac{C_1 R_1}{R_1 + R_2}, \quad Q_2 = U \frac{C_2 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{и} \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C_1 R_1}{C_2 R_2} .$$

Задача нахождения общей емкости легко решается путем использования энергетического определения емкости.

Замена реальной схемы (рис. 44а) ей эквивалентной<sup>1</sup> (рис. 44б) дает

$$R = R_1 + R_2$$

и

$$\frac{CU^2}{2} = \frac{C_1 U_1^2}{2} + \frac{C_2 U_2^2}{2}.$$

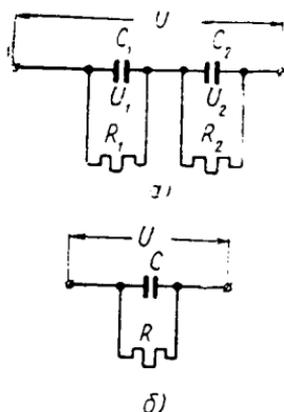


Рис. 44

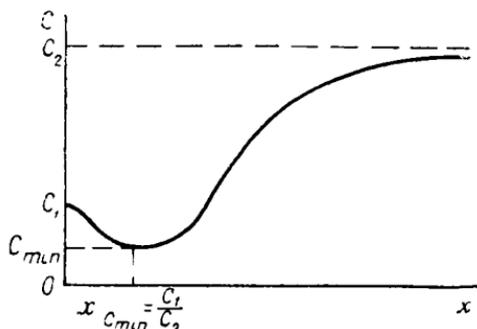


Рис. 45

Подстановка в последнее равенство выражений  $U_1$  и  $U_2$  через  $U$  дает искомую емкость

$$C = \frac{C_1 R_1^2 + C_2 R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} = C_1 \frac{1 + \frac{C_2}{C_1} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^2}.$$

Как видно из этой формулы, емкость двух последовательно соединенных реальных конденсаторов всегда меньше бóльшей из емкостей, но может быть больше наименьшей; зависимость емкости от отношения сопротивлений  $x = \frac{R_2}{R_1}$  представлена на рис. 45. Кривая емкости имеет минимум при

$$\frac{dC}{dx} = C_1 \frac{2 \frac{C_2}{C_1} x(1+x) - 2 \left(1 + \frac{C_2}{C_1} x^2\right)}{(1+x)^3} = 0,$$

<sup>1</sup> В эквивалентных схемах значения общих токов, напряжений, сопротивлений, мощностей, энергий, емкостей и т. д. должны быть одинаковыми.

т. е. при

$$x = \frac{R_2}{R_1} = \frac{C_1}{C_2} .$$

Минимальное значение емкости

$$C_{min} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

совпадает со значением емкости при отсутствии утечек, так как в этом случае распределение напряжений по сопротивлениям совпадает с распределением по емкостям.

### 5. Энергия нелинейного конденсатора

Энергия линейного конденсатора, заряженного до напряжения  $U_0$ , равна той доле работы источника, которая затрачена на его зарядку:

$$W = \int_0^{Q_0} u dq = C \int_0^{U_0} u du = \frac{CU_0^2}{2} = \frac{U_0 Q_0}{2} .$$

Эта работа и энергия равны площади заштрихованного треугольника на кулонвольтной характеристике (рис. 46а).

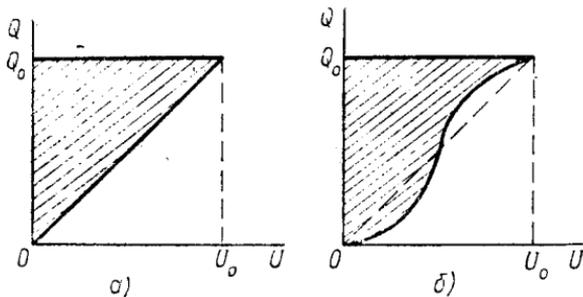


Рис. 46

Работа источника, затраченная на заряд нелинейного конденсатора (§ 14) и равная запасенной в нем энергии, будет

$$W = \int_0^{Q_0} u dq \neq \frac{U_0 Q_0}{2} .$$

Эта работа, определяемая заштрихованной площадью, ограниченной кулонвольтной характеристикой (рис. 46б), может быть больше, равна или меньше площади треугольника в зависимости от вида характеристик и от значения напряжения  $U_0$ .

Таким образом, энергия нелинейного конденсатора может быть вычислена лишь при задании аналитической аппроксимации кулонвольтной характеристики.

При циклическом изменении напряжения на нелинейном конденсаторе в нем проявляется диэлектрический гистерезис (§ 14). Если петлю гистерезиса построить в координатах  $q$ ,  $u$  (рис. 47), то потери энергии за один цикл

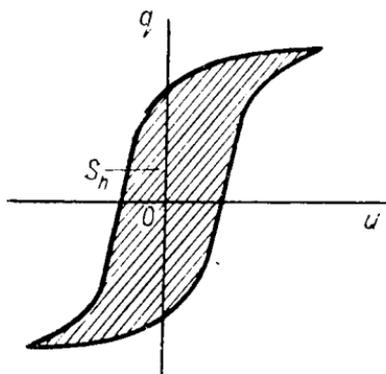


Рис. 47

$$W_h = \oint u dq = S_h$$

равны площади петли гистерезиса в этих координатах. Эти потери, в конечном счете превращающиеся в тепло, в большинстве современных сегнетоэлектриков пока еще значительны; в настоящее время ведется большая работа по устранению этого недостатка.

## § 16. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Выражение для энергии системы заряженных тел, связывая энергию с зарядами и потенциалами этих тел, оставляет открытым вопрос о локализации энергии. Однако, как уже указывалось во введении, энергия, представляя собой одну из характеристик электромагнитного поля, неразрывно связана с самим полем, т. е. энергия всегда распределена в пространстве, занятом полем. Поэтому выведенное в § 15 выражение для энергии необходимо преобразовать, введя в него величины, непосредственно характеризующие электрическое поле, — напряженность поля и смещение.

Проще всего это сделать для системы тел, электрическое поле которой обладает простой формой симметрии, например для плоского конденсатора (§ 10). Для него

$$W = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} \epsilon S E d = \frac{1}{2} D S E d = \frac{1}{2} E D v,$$

где  $v = Sd$  — объем, занятый полем.

Энергия в единице объема — *удельная энергия*

$$W_0 = \frac{W}{v} = \frac{ED}{2} = \frac{\epsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon}.$$

Это выражение, выведенное для однородного поля, остается справедливым для любого поля, так как в пределах бесконечно малого объема любое поле может считаться однородным.

Так как в изотропной среде вектор смещения совпадает по направлению с вектором напряженности поля, то энергия поля в конечном объеме

$$W = \frac{1}{2} \int EDdv = \frac{1}{2} \int \vec{E} \vec{D} dv.$$

Это выражение для энергии, строго выведенное лишь для электростатического поля в изотропной среде, было обобщено Максвеллом для любых сред и для любых полей, как угодно изменяющихся во времени и в пространстве. В этих случаях электрическое поле может создаваться не только зарядами, но и изменением магнитного поля, и энергия может вычисляться лишь через удельную энергию.

### § 17. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В СИСТЕМЕ НЕПОДВИЖНЫХ ТЕЛ

Основным законом, которому подчиняются любые преобразования энергии, является закон сохранения энергии. Согласно этому закону работа  $dA$  источников, питающих систему подвижных заряженных тел, в общем случае идет на изменение энергии системы  $dW$  и на преобразование в другие виды энергии — механическую  $dA_{мех}$ , тепловую  $dA_{тепл}$ , магнитную  $dA_{магн}$ , излучения  $dA_{изл}$ :

$$dA = dW + dA_{мех} + dA_{тепл} + dA_{магн} + dA_{изл}.$$

Каждый из этих членов может иметь различный знак в зависимости от направления процесса преобразования энергии.

Рассмотрение этого равенства дает возможность установить основные закономерности для каждого конкретного случая преобразования энергии.

Пусть система состоит из двух неподвижных ( $dA_{мех} = 0$ ) тел, образующих конденсатор емкостью  $C$ . Такой конденсатор, предварительно заряженный, отключается от источника (тогда  $dA = 0$ ) и замыкается на сопротивление  $R$  (рис. 48). Тогда, пренебрегая излучением,

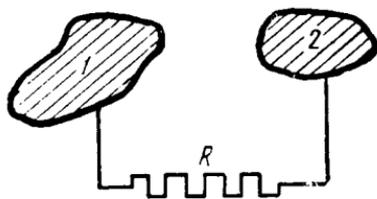


Рис. 48

$$0 = dW + dA_{магн} + dA_{тепл},$$

или

$$-dW = dA_{магн} + dA_{тепл},$$

т. е. энергия конденсатора  $W$  переходит в энергию магнитного поля тока, идущего по сопротивлению, и в тепловую энергию

тока. Процесс преобразования закончится тогда, когда вся энергия, первоначально запасенная в электрическом поле конденсатора и частично перешедшая в энергию магнитного поля, превратится в тепло и рассеется в окружающей среде.

При разряде конденсатора в сопротивлении  $R$  идет ток проводимости  $i_{np}$ . Так как при этом изменяется заряд  $q$  конденсатора, то через конденсатор также идет ток, называемый *током смещения* и равный по величине току проводимости:

$$i_{см} = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}.$$

Из этого выражения видно, что ток смещения идет через конденсатор постоянной емкости лишь при изменении напряжения на нем  $\left(\frac{du}{dt} \neq 0\right)$ , т. е. когда поле в диэлектрике конденсатора изменяется во времени. Очевидно, что это положение можно перенести на любой диэлектрик, находящийся в электрическом поле.

Часто пользуются *вектором плотности тока*  $\vec{\delta}$ , численно равным току, приходящемуся на единицу поперечного сечения, и направленным по нормали к эквипотенциальной поверхности. Ток через произвольную поверхность  $S$  равен потоку вектора плотности тока через эту поверхность:

$$i = \int \vec{\delta} d\vec{S}.$$

Применение этих соотношений к току смещения при указанной выше связи заряда со смещением (§ 7) дает

$$i_{см} = \int \vec{\delta}_{см} d\vec{S} = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \int \overline{D} d\vec{S} = \int \frac{d\overline{D}}{dt} d\vec{S}.$$

Так как интегрирование производилось по произвольно выбранной поверхности, то равенство интегралов приводит к равенству подинтегральных функций:

$$\vec{\delta}_{см} = \frac{d\overline{D}}{dt}.$$

Току смещения, как это экспериментально доказал А. А. Эйхенвальд в 1903 г., соответствует магнитное поле, определяемое теми же законами, что и для тока проводимости.

Однако существование тока смещения не связано с выделением тепла, что объясняется иной природой тока смещения по сравнению с током проводимости, представляющим собой движение свободных зарядов в проводнике.

Плотность тока смещения может быть выражена через поляризованность (§ 8):

$$\bar{\delta}_{e, \kappa} = \frac{d\bar{D}}{dt} = \frac{d\bar{D}_0}{dt} + \frac{d\bar{P}}{dt}.$$

Второе слагаемое весьма просто интерпретируется физически: при изменении поляризации связанные заряды диэлектрика перемещаются на ограниченном расстоянии и это перемещение является током.

Первый член, соответствующий току в пустоте, не может быть пояснен простой физической картиной; никаких зарядов в пустоте нет, а следовательно, нет и движения зарядов. Однако понятие тока смещения в пустоте, введенное Максвеллом, подтверждается совпадением всей его теории с опытом. Ток смещения в пустоте следует рассматривать как свойство электромагнитного поля, заключающееся в создании магнитного поля при изменении электрического поля, что является одним из проявлений единства двух сторон электромагнитного поля — электрического и магнитного полей.

#### § 18. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В МЕХАНИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ

В системе подвижных тел, помимо изменения энергии электрического поля и преобразования в другие виды энергии, происходит также преобразование ее в механическую энергию. В предположении бесконечно медленного процесса (§ 15) закон сохранения энергии (§ 17) примет вид:

$$dA = dW + dA_{\text{мех}}.$$

Так как механическая работа совершается через посредство электрического поля, а оно создается источниками, то по-прежнему элементарная работа источников  $dA = \sum \varphi_{\kappa} dq_{\kappa}$  (§ 15). Следовательно,

$$\sum \varphi_{\kappa} dq_{\kappa} = dW + dA_{\text{мех}}.$$

Из механики известно, что состояние системы тел, как механической системы, может быть описано с помощью обобщенных геометрических координат  $X$ , число которых равно числу степеней свободы. К числу таких обобщенных координат относятся обычные координаты, углы, объемы, поверхности и т. д. В соответствии с обобщенными координатами вводятся обобщенные силы  $F^0$ , произведение которых на изменение обобщенной координаты дает работу, совершаемую при „перемещении“ по обобщенной координате, так что всегда

$$dA_{\text{мех}} = F^0 dX.$$

Если обобщенной координатой является обычная координата, то обобщенной силой—обычная сила; если  $X$ —угол поворота, то  $F^0$ —момент вращения; если  $X$ —объем, то  $F^0$ —давление; если  $X$ —поверхность, то  $F^0$ —поверхностное натяжение.

Пусть в рассматриваемой системе заряженных тел (см. рис. 43) только одно из них изменяет свое положение, причем изменяется лишь одна из обобщенных координат; тогда основное соотношение примет вид:

$$\Sigma \varphi_{\kappa} dq_{\kappa} = dW + F^0 dX.$$

Это равенство, справедливое при любых соотношениях между зарядами и потенциалами тел, легко может быть исследовано лишь в двух частных случаях, рассматриваемых ниже.

### 1. Система отключена от источников

Если система тел отключена от источников, то заряды тел не изменяются ( $dQ_{\kappa} = 0$ ) и

$$dW + F^0 dX = 0,$$

отсюда

$$F^0 dX = -dW;$$

это означает, что механическая работа в системе совершается за счет убыли энергии, запасенной в системе. В такой системе превращение энергии закончится, когда энергия электрического поля системы будет израсходована. В реальных условиях механическая работа будет меньше энергии поля, так как часть этой энергии идет на покрытие неизбежных потерь.

Из этого рассмотрения можно сделать общий вывод, что *система, отключенная от источников, всегда стремится занять положение, соответствующее минимуму энергии ее поля.*

### 2. Система подключена к источникам постоянных потенциалов

При подключении системы к источникам постоянных потенциалов ( $\varphi_{\kappa} = \text{const}$ ) основное соотношение

$$\Sigma \varphi_{\kappa} dq_{\kappa} = dW + F^0 dX$$

может быть преобразовано, так как выражение

$$W = \frac{1}{2} \Sigma \varphi_{\kappa} q_{\kappa}$$

дает при  $\varphi_{\kappa} = \text{const}$

$$dW = \frac{1}{2} \Sigma \varphi_{\kappa} dq_{\kappa}.$$

Таким образом,

$$2dW = \sum \varphi_k dq_k = dW + F^0 dX$$

и

$$dW = F^0 dX,$$

т. е. при совершении системой механической работы энергия системы возрастает на такую же величину, а работа, совершаемая источниками и равная сумме механической работы и увеличения энергии, вдвое больше. Следовательно, система, подключенная к источникам постоянных потенциалов, всегда стремится занять положение, соответствующее максимуму энергии ее поля, другими словами, максимуму зарядов.

Так как в реальной системе может быть сосредоточена лишь конечная энергия, то и в случае  $\varphi_k = \text{const}$  система не может служить для непрерывного преобразования энергии электрического поля в механическую.

### § 19. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Силы, действующие на тела, находящиеся в электрическом поле, могут быть вычислены из соотношений, приведенных в § 18. В случае постоянства зарядов для обобщенной силы получается выражение

$$F^0 = - \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right)_{Q = \text{const}} ;$$

здесь взята частная производная, так как изменение энергии соответствует изменению лишь одной из обобщенных координат.

Выражение для обобщенной силы при постоянстве потенциалов

$$F^0 = \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right)_{\varphi = \text{const}}$$

отличается от приведенного выше знаком. Однако результат вычисления по этим формулам всегда совпадает, так как сила в данный момент определяется значениями зарядов и потенциалов тел в этот момент и не зависит от характера их изменения в дальнейшем. Поэтому при различных режимах в системе обобщенные силы могут вычисляться по любой из приведенных формул.

Силы в электрическом поле действуют не только на проводящие тела, но и на диэлектрические, если их проницаемость отличается от проницаемости окружающей среды. Другими словами, силы в электрическом поле всегда проявляются у поверхности раздела различных сред; ниже рассматриваются два частных случая: диэлектрик-проводник и диэлектрик-диэлектрик.

## 1. Силы, действующие на уединенное проводящее тело

Энергия уединенного проводящего тела, имеющего потенциал  $\varphi$  и обладающего емкостью  $C$  (§ 15),

$$W = \frac{C\varphi^2}{2}.$$

Обобщенная сила, стремящаяся изменить обобщенную координату  $X$ ,

$$F^0 = \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right)_{\varphi = \text{const.}} = \frac{\varphi^2}{2} \frac{\partial C}{\partial X}.$$

В качестве примера уединенного заряженного тела ниже рассматривается проводящий шар радиуса  $r_0$ , находящийся в диэлектрической среде с проницаемостью  $\epsilon$  (рис. 49), электрическое поле которого было исследовано в § 10.

Если за обобщенную координату принять радиус шара, то роль обобщенной силы будет играть обычная сила  $F$ , стремящаяся изменить радиус шара:

$$F = \frac{\varphi^2}{2} \frac{\partial C}{\partial r_0},$$

а так как емкость шара  $C = 4\pi\epsilon r_0$ , то

$$F = 2\pi\epsilon\varphi^2.$$

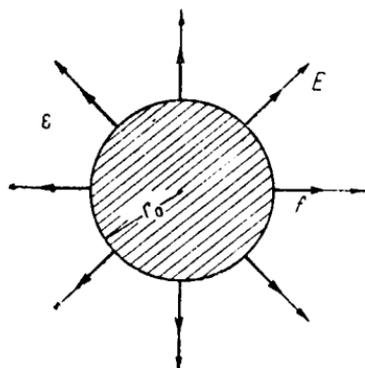


Рис. 49

Положительный знак у силы указывает на то, что она стремится увеличить радиус шара; эта сила приложена ко всей поверхности шара.

При вычислении силы через производную от энергии она всегда представляет собой арифметическую сумму сил, приложенных ко всей поверхности проводника. Из-за симметрии шара эта сила равномерно распределена по его поверхности и сила на единицу поверхности, направленная по радиусу (рис. 49),

$$f = \frac{F}{4\pi r_0^2} = \frac{\epsilon\varphi^2}{2r_0^2};$$

так как потенциал шара  $\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon r_0}$ , а напряженность поля и смещение у поверхности шара соответственно равны

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r_0^2} \text{ и } D = \frac{Q}{4\pi r_0^2},$$

то

$$f = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon r_0^4} = \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi \epsilon r_0^2} \cdot \frac{Q}{4\pi r_0^2} = \frac{1}{2} ED = \frac{cE}{2}.$$

Таким образом, сила на единицу заряженной поверхности равна объемной плотности энергии у этой поверхности. Геометрическая сумма этих сил (равнодействующая) равна нулю; это значит, что на шар в целом не действует сила, стремящаяся его переместить в пространстве.

Увеличение объема шара силами поля полностью соответствует указанным выше (§ 18) положениям о стремлении системы к увеличению энергии при постоянстве потенциалов и к уменьшению при постоянстве зарядов. Действительно, энергия поля заряженного шара

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

растет с увеличением объема, а следовательно, и емкости  $C$  при постоянном потенциале и уменьшается при постоянном заряде.

Полученное выражение для силы на единицу заряженной поверхности может быть обобщено на случай тела произвольной формы, так как сила в данной точке поверхности определяется плотностью заряда и напряженностью поля в этой же точке. Эта сила всегда направлена по нормали к поверхности, т. е. вдоль поля.

## 2. Силы, действующие у поверхности раздела двух диэлектрических сред

В качестве примера рассматривается двухслойный сферический конденсатор (см. рис. 17), емкость которого (§ 10)

$$C = \frac{4\pi}{\frac{1}{\epsilon_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{\epsilon_2} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right)}.$$

Энергия такого конденсатора, заряженного до напряжения  $U$ ,

$$W = \frac{CU^2}{2},$$

а обобщенная сила, стремящаяся изменить обобщенную координату  $X$ ,

$$F^0 = \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right)_{U=\text{const}} = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial X}.$$

За обобщенную координату принимается радиус  $r_2$  сферы, разделяющей оба диэлектрика. Тогда сила

$$F = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial r_2} = \frac{U^2}{2r_2^2} \frac{4\pi \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right)}{\left[ \frac{1}{\varepsilon_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{\varepsilon_2} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) \right]^2},$$

действующая на поверхность раздела, из-за симметрии равномерно распределена по всей поверхности раздела, а сила на единицу поверхности

$$f = \frac{F}{4\pi r_2^2} = \frac{U^2}{2r_2^4} \frac{\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}}{\left[ \frac{1}{\varepsilon_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{\varepsilon_2} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) \right]^2}.$$

Из этого выражения видно, что направление силы не зависит от направления поля, т. е. от знака  $U$ , а определяется только соотношением между диэлектрическими проницаемостями сред: при  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$  сила направлена от центра, при  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$  — к центру конденсатора.

Обобщение полученных результатов позволяет утверждать, что в любом электрическом поле на поверхность диэлектрического тела действуют силы, направленные по нормали к поверхности в сторону среды с меньшей диэлектрической проницаемостью. Иными словами, диэлектрическое тело втягивается в область более сильного поля, если диэлектрическая проницаемость среды меньше проницаемости тела, и выталкивается из поля, если проницаемость среды больше проницаемости тела.

### 3. Силы, действующие в системе двух тел

Для системы из двух тел энергия (§ 15)

$$W = \frac{CU^2}{2},$$

а следовательно, обобщенная сила

$$F^0 = \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right)_{U = \text{const}} = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial X}.$$

Примером системы двух тел может служить *вольтметр электростатической системы*, схематически изображенный на рис. 50.

Вольтметр состоит из неподвижных пластин  $A$  и подвижных  $B$ , укрепленных на оси; с осью прибора скреплена стрелка  $C$ , перемещающаяся по шкале. Под действием измеряемого напряжения, приложенного к пластинам, возникают силы притяжения и момент вращения; подвижная часть поворачивается на угол  $\alpha$ . Спиральная пружина  $D$ , осуществляющей электрический контакт с подвижной частью прибора, создает противодействующий момент; этот момент пропорционален углу поворота:

$$M_{np} = \kappa \alpha.$$

Если принять в качестве обобщенной координаты угол поворота  $\alpha$  подвижной части, то обобщенной силой будет вращающий момент

$$M_{sp} = \frac{U^2}{2} \frac{dC}{d\alpha}.$$

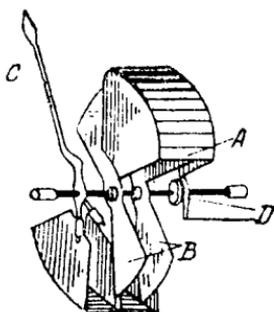


Рис. 50

Вращающий момент не меняет своего знака при изменении знака напряжения, следовательно, электростатический вольтметр может измерять как постоянное, так и переменное напряжение.

Под действием вращающего момента подвижная пластина будет поворачиваться до тех пор, пока вращающий момент не уравновесится противодействующим моментом пружины.

Из уравнения равновесия подвижной части прибора

$$M_{sp} = M_{np}, \quad \text{или} \quad \frac{U^2}{2} \frac{dC}{d\alpha} = \kappa \alpha,$$

видно, что если емкость вольтметра растет пропорционально углу поворота  $\left(\frac{dC}{d\alpha} = \text{const}\right)$ , то шкала электростатического вольтметра будет квадратичной. В измерительных приборах предпочтительна равномерная шкала. Требование равномерной шкалы  $\alpha = \kappa_1 U$  приводит к уравнению

$$\frac{\alpha}{2\kappa_1^2} \frac{dC}{d\alpha} = \kappa, \quad \text{или} \quad \frac{dC}{d\alpha} = \frac{2\kappa_1^2 \kappa}{\alpha},$$

откуда получается необходимая зависимость емкости от угла поворота:

$$C = 2\kappa_1^2 \kappa \ln \alpha + \text{const};$$

требование равномерной шкалы невыполнимо в начальной части, так как логарифм стремится к бесконечности при уменьшении угла  $\alpha$ .

Замечательной особенностью электростатического вольтметра при постоянном напряжении является отсутствие тока, потребляемого прибором в режиме установившегося отклонения.

## § 20. ЕМКОСТНАЯ МАШИНА ПОСТОЯННОГО ТОКА

Машины, в которых производится прямое и обратное преобразование механической энергии в электрическую энергию через посредство электрического поля, можно назвать *емкостными*, так как их работа основана на периодическом изменении емкости.

Емкостная машина (рис. 51) подобна удвоенному электростатическому вольтметру, но без противодействующей пружины.

Машина состоит из двух конденсаторов: статора  $S, S$  и ротора  $R, R$ , вращающегося относительно статора. Каждый конденсатор содержит два полудиска, изолированных друг от друга. Статорные полудиски образуют систему возбуждения. На роторные полудиски наложены щетки  $a, a$ , с помощью которых ротор при работе двигателем или к нагрузке при работе генератором; напряжение на статоре равно  $U_S$ , на роторе  $U_R$ .

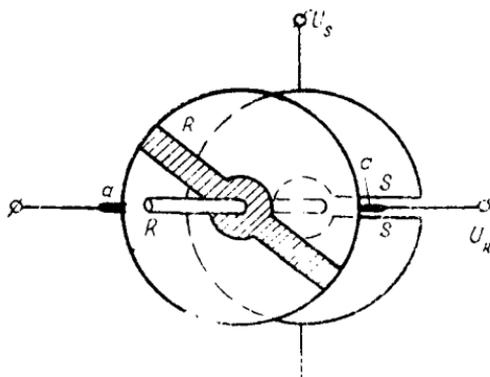


Рис. 51

Если полудиски статора замкнуть накоротко ( $U_S=0$ ), то данное на ротор напряжение распределяется поровну между двумя промежутками статор—ротор и заряд  $q_R'$  каждого роторного полудиска

$$q_R' = C_R U_R,$$

где  $C_R$  — емкость ротора, т. е. емкость между полудисками ротора. При пренебрежении влиянием изолирующего промежутка между полудисками статора эта емкость не зависит от положения ротора относительно статора.

При замыкании накоротко полудисков ротора ( $U_R=0$ ) напряжение статора делится поровну между промежутками статор—ротор, а заряд  $q_R''$  на каждом роторном полудиске, определяемый напряжением статора, будет

$$q_R'' = C_{RS} U_S;$$

величина  $C_{RS}$  может быть названа *взаимоемкостью* между статором и ротором.

Величина взаимоемкости зависит от положения ротора относительно статора. При совпадении изоляционных промежутков статора и ротора она принимает максимальное значение; при повороте ротора на  $\frac{\pi}{2}$  она (так же, как и заряд  $q''_R$ ) обращается в нуль.

При  $U_S \neq 0$  и  $U_R \neq 0$  по принципу наложения заряд на полудиске ротора

$$q_R = q'_R + q''_R = C_R U_R + C_{RS} U_S.$$

Аналогично заряд на полудиске статора

$$q_S = q'_S + q''_S = C_S U_S + C_{RS} U_R,$$

где  $C_S$  — емкость статора, т. е. емкость между полудисками статора при накоротко замкнутых полудисках ротора. Как и емкость ротора, емкость  $C_S$  также может считаться не зависящей от положения ротора относительно статора.

Энергия электрического поля (§ 15) машины

$$W = \frac{q_S U_S}{2} + \frac{q_R U_R}{2} = \frac{C_S U_S^2}{2} + \frac{C_R U_R^2}{2} + C_{RS} U_S U_R.$$

Так как при вращении ротора емкости  $C_S$  и  $C_R$  статора и ротора остаются неизменными, а взаимоемкость  $C_{RS}$  периодически изменяется, то при постоянных напряжениях  $U_S$  и  $U_R$  момент вращения, возникающий в машине и равный производной энергии по углу  $\alpha$  поворота ротора, будет

$$M_{op} = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = U_R U_S \frac{dC_{RS}}{d\alpha}.$$

В цепи ротора возникает ток

$$i_R = \frac{dq_R}{dt} = U_S \frac{dC_{RS}}{dt} = U_S \frac{dC_{RS}}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = U_S \omega \frac{dC_{RS}}{d\alpha},$$

где  $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$  — угловая скорость вращения.

Емкостная машина может работать как в генераторном, так и в двигательном режиме, но независимо от режима в ней всегда возникает момент вращения и ток в цепи ротора.

В генераторе полезным является ток в цепи ротора; проходя по нагрузке, он создает напряжение  $U_R$  ротора, которое вместе с  $U_S$  образует момент вращения. Этот момент в генераторе на-

правлен против направления вращения и его преодолевает первичный двигатель, вращающий генератор. Отдаваемая первичным двигателем механическая энергия преобразуется в генераторе в электрическую.

В двигателе, наоборот, полезным является момент вращения, а ток, создаваемый машиной, преодолевается встречно направленным током источника. Электрическая энергия, отдаваемая источником, преобразуется емкостным двигателем в механическую энергию.

Из выражений для момента вращения и индуктированного тока машины вытекает, что для их постоянства необходимо,

чтобы  $\frac{dC_{RS}}{d\alpha} = \text{const}$ , т. е. взаимемкость  $C_{RS}$  должна непрерывно монотонно изменяться, что физически невозможно. В машине рис. 51 взаимемкость изменяется от нуля до максимального значения дважды за один оборот ротора (рис. 52); для сохранения знаков момента вращения и индуктированного тока необходимо использовать переключение — *коммутацию*, осуществляемую с помощью упомянутых выше двух щеток  $a, a$ , скользящих по ободу роторного диска и включенных на сеть.

Коммутация должна происходить при перемене знака производной  $\frac{dC_{RS}}{d\alpha}$ , т. е. при переходе взаимемкости через максимум, в момент совпадения положения полудисков ротора с полудиска-ми статора. При этом знак момента вращения  $M_{\text{вп}} = U_S U_R \frac{dC_{RS}}{d\alpha}$  сохранится из-за одновременного изменения знака  $U_R$ , а ток ротора  $i_R = U_S \omega \frac{dC_{RS}}{d\alpha}$ , хотя и изменит свой знак, но из-за переключения сохранит свое направление относительно зажимов сети. На рис. 52 представлены графики изменения  $M_{\text{вп}}$  и  $i_R$  при наличии коммутации.

Энергия в положениях, соответствующих максимальной взаимемкости, будет

$$W_1 = \frac{C_S U_S^2}{2} + \frac{C_R U_R^2}{2} - C_{RS \max} U_S U_R,$$

$$W_2 = \frac{C_S U_S^2}{2} + \frac{C_R U_R^2}{2} + C_{RS \max} U_S U_R;$$

разность  $W_2 - W_1$  равна механической работе  $\Delta A$ , совершенной за половину оборота:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = 2C_{RS \max} U_S U_R = \Delta A.$$

На такую же величину изменится энергия системы (§ 18), а из сети двигатель возьмет энергию  $2\Delta A$ . Генератор отдает такую же энергию в сеть, однако половина ее, т. е.  $\Delta A$ , в следующую половину оборота возвращается сетью в генератор, преобразуясь в энергию электрического поля.

Для того чтобы энергия  $\Delta A$ , запасенная в двигателе за половину оборота, была использована, а в генераторе—возвращена из сети, необходимо коммутацию производить с разрывом цепи ротора; в противном случае щетка, перекрывая зазор между полудисками ротора, будет производить разряд между ними и запасенная в системе энергия полезно использована не будет. Если же щетка уже зазора между полудисками, то во время

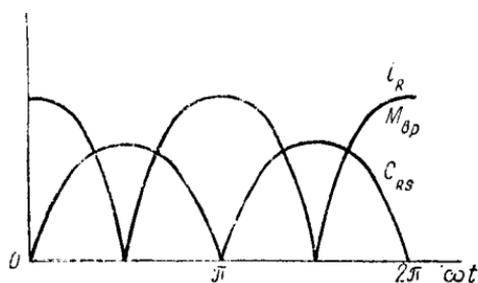


Рис. 52

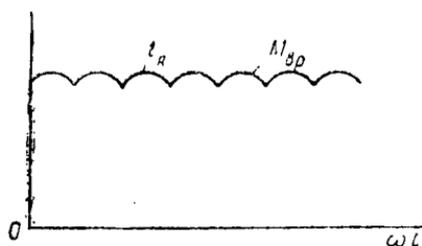


Рис. 53

коммутации, когда происходит перезаряд ротора и его напряжение изменяет свой знак, система возвращает заряд источнику и таким образом энергия, запасенная в электрическом поле, используется полезно.

Сказанное не противоречит установленному выше (§ 18) положению о невозможности непрерывного преобразования энергии электрического поля в механическую энергию в системе тел с постоянными потенциалами (напряжениями). Возбуждаясь от внешнего источника постоянного напряжения, такая машина благодаря коммутации представляет собой систему с переменным напряжением.

В емкостной машине, состоящей из большого числа статорных и роторных дисков, благодаря сдвигу последних друг относительно друга на некоторый угол суммарный момент вращения и индуктированный ток будут иметь лишь незначительные пульсации (рис. 53).

Таким образом, емкостную машину постоянного тока независимо от того, будет ли она работать в режиме генератора или двигателя, осуществить без коммутации невозможно.

В отличие от индуктивных машин, использующих магнитное поле (см. ниже, § 53) и являющихся машинами относительно невысокого напряжения и больших токов, емкостные машины—машины высокого напряжения и малых токов.

## ГЛАВА IV

### ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Как было показано в § 17, в диэлектрике при изменении электрического поля возникает ток смещения. Электрическое поле может вызвать в жидком и газообразном диэлектриках, а также в пустоте *ток конвекции*, представляющий собой перенос электричества движущимися заряженными частицами, используемый, в частности, в электронно-ионных приборах, и заряженными телами, например в емкостной машине (§ 20). Ниже подробно рассматривается третий вид тока — ток проводимости, т. е. ток в проводящей среде.

#### § 21. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СООТНОШЕНИЯ

На примере разряда конденсатора (§ 17) можно видеть, что ток  $i = C \frac{du}{dt}$ , возникающий в проводнике, соединяющем два заряженных тела, имеющих разные потенциалы, затухает, так как напряжение  $u$  между телами и его производная  $\frac{du}{dt}$  уменьшаются, а энергия электрического поля расходуется на нагрев проводника. Чтобы в проводнике поддерживался постоянный ток, выделяющаяся в проводнике энергия должна непрерывно возмещаться за счет других видов энергии: механической в электрических генераторах, химической в гальванических элементах, тепловой в термоэлементах и т. д. Другими словами, необходимо, чтобы в цепи тока действовали сторонние э. д. с., т. е. э. д. с. неэлектростатического происхождения, поддерживающие постоянное электрическое поле (§ 5).

Если соединить зажимы источника сторонней э. д. с. проводником, в последнем образуется постоянное электрическое поле. Воздействуя на свободные заряды проводника, оно вызывает их направленное движение, т. е. создает постоянный ток. Основной

закон постоянного тока—закон Ома дает связь между напряжением  $U$  и током  $I$ :

$$I = \frac{U}{R},$$

где  $R$ —сопротивление проводника, измеряемое в системе МКСА в омах (ом). Для цилиндрического проводника длиной  $l$  и сечением  $S$  в случае однородного поля и среды сопротивление

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где  $\rho$ —удельное сопротивление проводника. В системе МКСА единицей удельного сопротивления является ом·м.

Обычно удельное сопротивление проводников измеряется в более удобных для практики единицах — ом·мм<sup>2</sup>/м.

Удельное сопротивление меди равно 0,0175 ом·мм<sup>2</sup>/м, алюминия примерно в 1,5 раза, стали в 7 раз, марганца (сплавы Mn, Ni, Cu) в 25—100 раз, угля в 400 раз больше, чем меди; удельное сопротивление электролитов зависит от их концентрации и в 1—4 миллиона раз больше, чем меди.

Как известно, удельное сопротивление зависит от температуры; приближенно удельное сопротивление  $\rho_T$  при температуре  $T$  связано с удельным сопротивлением  $\rho_0$  при нулевой температуре линейной зависимостью

$$\rho_T = \rho_0 (1 + \alpha T).$$

Температурный коэффициент сопротивления  $\alpha$  металлов положителен. Для меди и алюминия он равен 0,4% на градус, для стали 0,6%, для марганца  $\alpha \approx 0$ . Для угля он равен -0,03%, для электролитов он также отрицателен и составляет 1—3%.

Величина  $G$ , обратная сопротивлению  $R$ , называется *проводимостью*, а величина  $\gamma$ , обратная  $\rho$ ,—*удельной проводимостью*; для цилиндрического проводника

$$G = \frac{I}{U} = \frac{1}{R} = \frac{1}{\rho} \frac{S}{l} = \gamma \frac{S}{l}.$$

В системе МКСА  $G$  измеряется в 1/ом,  $\gamma$ — в 1/ом·м или в м/ом·мм<sup>2</sup>.

Формула закона Ома для бесконечно малого цилиндрического элемента (длиной  $dl$  и сечением  $dS$ ) в любой точке проводника

$$dI = \frac{dU}{\rho \frac{dl}{dS}} = \frac{\gamma dU dS}{dl}.$$

может быть преобразована следующим образом:

$$\frac{dI}{dS} = \gamma \frac{dU}{dl} \quad \text{или} \quad \bar{\delta} = \gamma \bar{E},$$

где  $\delta = \frac{dI}{dS}$  — плотность тока,  $E = \frac{dU}{dl}$  — напряженность электрического поля.

Это соотношение, носящее название закона Ома в дифференциальной форме, дает связь между напряженностью электрического поля и плотностью тока в любой точке проводника и может быть применено к неоднородному полю в неоднородной среде.

При постоянном во времени электрическом поле ток будет также постоянным и количество электричества, входящее в любой объем, равно количеству электричества, выходящему из него за тот же промежуток времени, иначе были бы местные накопления зарядов. Аналитически указанный *принцип непрерывности тока*, справедливый и для переменного тока, записывается так:

$$\oint \bar{\delta} d\bar{S} = 0.$$

При постоянном токе распределение зарядов в проводнике будет таким же, как и при отсутствии тока, т. е. проводник остается электрически нейтральным и своего электрического поля не создает. Следовательно, созданное в проводнике внешним источником энергии электрическое поле, обычно называемое *стационарным полем*, будет таким же, как электростатическое поле в диэлектрике.

Таким образом, *стационарное поле вне источников энергии также является полем потенциальным*, а для него (§ 3)

$$\oint \bar{E} d\bar{l} = 0, \quad \int_A^B \bar{E} d\bar{l} = \varphi_A - \varphi_B \quad \text{и} \quad \bar{E} = -\text{grad } \varphi,$$

где  $\varphi$  — потенциал соответствующей точки поля.

Графически электрическое поле постоянного тока может быть также изображено с помощью эквипотенциальных поверхностей и силовых линий, причем последние в изотропной среде совпадают с линиями вектора плотности тока.

Если в контур интегрирования включить также источник сторонней э.д.с.  $\epsilon$ , то (§ 5)

$$\oint \bar{E} d\bar{l} = \epsilon.$$

Работа, совершаемая силами электрического поля при переносе за время  $dt$  количества электричества  $dq$  при напряжении  $U$  на участке,

$$dA = Udq.$$

Эта работа расходуется на поддержание тока в проводнике и переходит в тепло. Мощность

$$P = \frac{dA}{dt} = U \frac{dq}{dt} = UI = I^2 R = U^2 G.$$

Это соотношение является законом Ленца—Джоуля. В системе МКСА единицей мощности является  $1 \text{ в} \cdot 1 \text{ а} = 1 \text{ вт}$  (ватт).

Как видно из закона Ленца—Джоуля, с увеличением тока количество тепла, выделяемое в проводнике, и, следовательно, его температура возрастают. Сопротивление проводника при этом изменяется, являясь таким образом функцией тока. Отсюда следует, что зависимость между напряжением и током

$$I = \frac{U}{R}$$

из-за непостоянства  $R$  перестает быть линейной. Однако в большинстве случаев сопротивление проводников с достаточной для практики точностью можно считать постоянным и рассматривать электрическую цепь как *линейную* систему проводников. В тех случаях, когда имеется резкая зависимость сопротивления от тока или от напряжения, цепь должна рассматриваться как *нелинейная* система. В дальнейшем основное внимание уделяется линейным цепям.

## § 22. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ

В приведенной ниже таблице сопоставлены соотношения, характеризующие электростатическое и стационарное поля.

Электростатическое поле	Стационарное поле
-------------------------	-------------------

Вне источников электрической энергии

$$\oint \bar{E} d\bar{l} = 0$$

$$\oint \bar{E} d\bar{l} = 0$$

В контур интегрирования входит источник энергии с э. д. с.  $\epsilon$

$$\oint \bar{E} d\bar{l} = \epsilon$$

$$\oint \bar{E} d\bar{l} = \epsilon$$

Электростатическое поле	Стационарное поле
$\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$ $\int \bar{D} d\bar{S} = Q$ $\oint \bar{D} d\bar{S} = 0$ (если внутри поверхности $Q = 0$ ) $C = \frac{Q}{U}$	$\bar{\delta} = \gamma \bar{E}$ $\int \bar{\delta} d\bar{S} = I$ $\oint \bar{\delta} d\bar{S} = 0$ (всегда) $G = \frac{I}{U}$

Отсюда видна аналогия между соотношениями для обоих полей; математически эти уравнения совершенно аналогичны и одни могут быть получены из других, если произвести замену величин по нижеследующей таблице.

Электростатическое поле	$E$	$\varphi$	$U$	$D$	$\varepsilon$	$Q$	$C$
Стационарное поле	$E$	$\varphi$	$U$	$\delta$	$\gamma$	$I$	$G$

Очевидно, что будут аналогичны и следствия, вытекающие из вышеприведенных зависимостей. Следовательно, решения ряда задач для одного вида поля могут быть использованы для получения готовых решений аналогичных задач для другого вида поля, что дает значительную экономию труда и времени; ниже приведен ряд подобных задач. Вместе с тем следует помнить, что указанная аналогия является формальной: в электростатическом поле не расходуется энергия, тогда как в стационарном поле расходуется энергия на тепло Ленца—Джоуля.

### 1. Поле у поверхности раздела двух сред

Если линии вектора плотности тока в средах с удельной проводимостью  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  составляют с нормалью к поверхности раздела углы соответственно  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  (рис. 54), то по аналогии с электростатическим полем у поверхности раздела двух сред (§ 10)

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Следовательно, линии тока, проходящие из хорошего проводника в плохой ( $\gamma_1 \gg \gamma_2$ ), в этом последнем практически перпендикулярны к поверхности раздела.

Так же, как и в электростатике, где  $\epsilon_1 > 0$  и  $\epsilon_2 < \infty$ , здесь невозможно явление отражения ( $\alpha_2 < \frac{\pi}{2}$ ) и ток, проходя в первой среде, неизбежно выходит во вторую среду, так как здесь  $\gamma_2 < \infty$ , а случай  $\gamma_1 = 0$  исключается, потому что тогда первая среда является диэлектриком и тока в ней быть не может.

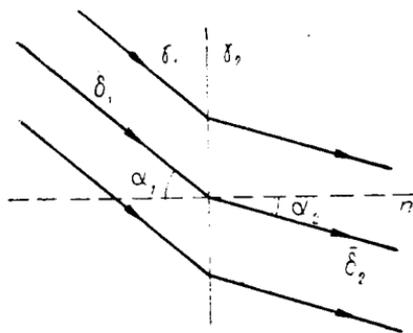


Рис. 54

## 2. Сопротивление изоляции коаксиального кабеля

Конструкция коаксиального кабеля (рис. 55) подобна цилиндрическому конденсатору (рис. 19а). Если длина кабеля равна  $l$ , радиус внутренней его жилы  $r_1$ , внутренний радиус внешней жилы  $r_2$ , а удельная проводимость изоляции кабеля  $\gamma$ , то по аналогии с известной из § 10 формулой для емкости  $C$  цилиндрического конденсатора можно сразу написать выражение для проводимости  $G$  изоляции коаксиального кабеля:

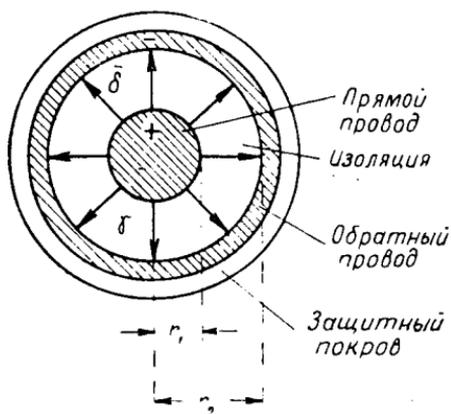


Рис. 55

Отсюда его сопротивление изоляции

$$G = \frac{2\pi\gamma l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Отсюда его сопротивление изоляции

$$R = \frac{1}{G} = \frac{\rho \ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi l}.$$

Таким образом, сопротивление изоляции кабеля обратно пропорционально его длине и может оказаться, что длинный кабель будет иметь относительно низкое сопротивление изоляции, несмотря на достаточно высокое удельное ее сопротивление.

## 3. Сопротивление заземления

В электротехнике часто применяются *заземления*, соединяющие наземные проводники с землей, используемой так же, как проводник. Заземлитель представляет собой металлический

электрод в виде листа, отрезка трубы и т. п., зарытый в землю. Заземление называется рабочим, если земля используется в качестве обратного провода, и защитным, если соединение с землей возникает в случае пробоя изоляции электротехнических устройств.

Спротивлением заземления называется сопротивление земли между заземлителем и воображаемым электродом той же формы, расположенным в земле симметрично относительно заземлителя на бесконечно большом расстоянии.

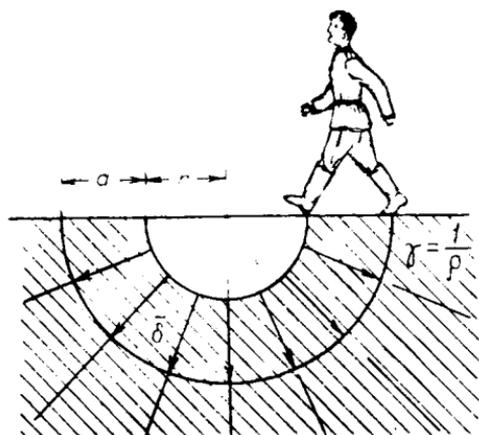


Рис. 56

Для полусферического заземлителя радиуса  $r$  в земле с удельной проводимостью  $\gamma$  (рис. 56) формула для проводимости  $G$  заземления аналогична половине значения емкости  $C_0$  уединенного шара того же радиуса в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  (§ 10):

$$G = 2\pi\gamma r;$$

следовательно, сопротивление заземления

$$R = \frac{1}{G} = \frac{1}{2\pi\gamma r} = \frac{\rho}{2\pi r},$$

где  $\rho$  — удельное сопротивление земли.

Характеристикой безопасности заземленной установки служит *шаговое напряжение*  $U_{ш}$ , которое может получить человек или животное, находящееся вблизи заземлителя. Оно определяется током  $I_s$ , проходящим через заземлитель, и сопротивлением  $R_{ш}$  земли между эквипотенциальными поверхностями на расстоянии  $a$  одного шага:

$$U_{ш} = R_{ш} I_s,$$

наибольшее значение сопротивления  $R_{ш\max}$  будет, очевидно, в непосредственной близости от заземлителя (рис. 56).

Ток  $I_s$  обычно определяется расчетом электрической цепи, проводимость же  $\frac{1}{R_{ш\max}}$  для полусферического заземлителя может быть вычислена по формуле, аналогичной выражению для половины емкости  $C$  шарового конденсатора (§ 10), имеющего радиусы обкладок  $r_1 = r$  и  $r_2 = r + a$ :

$$\frac{1}{\alpha_{ш max}} = \frac{1}{z} \left( 4\pi\gamma \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right) = 2\pi\gamma \frac{r(r+a)}{a};$$

следовательно, максимальное шаговое напряжение

$$U_{ш max} = \frac{\rho a I_0}{2\pi r (r+a)}.$$

### § 23. ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Электрической цепью (рис. 57) называется устройство, состоящее из источников (на рис. 57 показаны окружностями) и приемников электрической энергии (на рис. 57 показаны прямоугольниками) и соединяющих их проводов, образующее замкнутый путь для электрического тока.

Источники электрической энергии, как было указано в § 5, являются преобразователями в этот вид других видов энергии. В приемниках

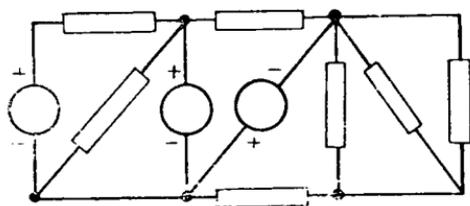


Рис. 57

электрической энергии осуществляется обратное преобразование в другие виды энергии: тепловую в электрической печи, химическую в электролизной ванне, механическую в электрическом двигателе и т. д. Обычно все приемники мысленно заменяются эквивалентными сопротивлениями, потребляющими ту же мощность, что и реальные приемники, и изображаются так, как показано на рис. 58.

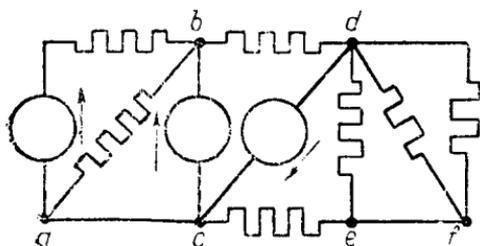


Рис. 58

Электрическая цепь состоит из *ветвей* (например, *ab*, *bc*, *cd* на рис. 58); точки, в которых сходятся не менее трех ветвей, называются *узлами* (например, *a*, *b*, *d* на рис. 58). Так как путь постоянного тока должен быть замкнут, в электрической цепи всегда имеется один или несколько *замкнутых контуров* (например, *abdca*, *cbdc* на рис. 58), в дальнейшем называемых просто контурами.

На основе принципа непрерывности тока для любого узла может быть написан *первый закон Кирхгофа*:

$$\oint \bar{\delta} d\bar{S} = \Sigma I_k = 0,$$

т. е. *алгебраическая сумма токов ветвей, образующих узел, равна нулю*; при этом токи, уходящие от узла, считаются отрицательными, входящие — положительными (или наоборот). Например, для параллельной цепи с одним источником (рис. 59) для каждого из двух узлов цепи можно написать:

$$I - I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad \text{или} \quad I_1 + I_2 + I_3 = I.$$

Деление этого равенства на общее для всех ветвей напряжение  $U$  дает:

$$\frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U} + \frac{I_3}{U} = \frac{I}{U} \quad \text{или} \quad G_1 + G_2 + G_3 = G;$$

следовательно, проводимость всей цепи равна сумме проводимостей параллельно соединенных приемников.

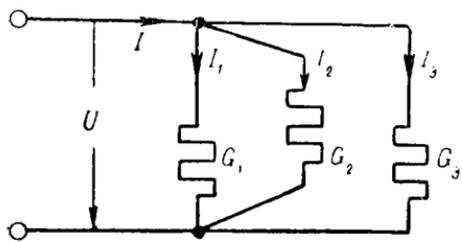


Рис. 59

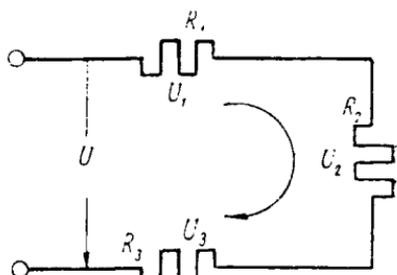


Рис. 60

Если выразить напряжения ветвей, образующих любой контур, через потенциалы узлов, к которым примыкают ветви, то сумма этих напряжений

$$U_{ab} + U_{bc} + \dots + U_{na} = (\varphi_a - \varphi_b) + (\varphi_b - \varphi_c) + \dots + (\varphi_n - \varphi_a) = 0;$$

это и есть *второй закон Кирхгофа*:

$$\Sigma U_k = 0,$$

т. е. *алгебраическая сумма напряжений ветвей, образующих контур, равна нулю*; при этом напряжения ветвей, у которых потенциал первого по направлению обхода узла выше, чем второго, считаются положительными, остальных — отрицательными. Например, для последовательной цепи с одним источником (рис. 60) можно написать:

$$U - U_1 - U_2 - U_3 = 0, \quad \text{или} \quad U_1 + U_2 + U_3 = U.$$

Деление этого равенства на общий для всей цепи ток  $I$  дает

$$\frac{U_1}{I} + \frac{U_2}{I} + \frac{U_3}{I} = \frac{U}{I} \quad \text{или} \quad R_1 + R_2 + R_3 = R;$$

следовательно, сопротивление всей цепи равно сумме сопротивлений последовательно соединенных приемников.

## § 24. ИСТОЧНИКИ НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКА И ИХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

В зависимости от физической сущности источники электрической энергии можно разделить на источники напряжения и источники тока. Так, например, химические источники электрической энергии основаны на возникновении разности потенциалов между различными электродами, помещенными в электролит. Эта разность потенциалов наибольшая при разомкнутой цепи, т. е. при холостом ходе, и называется внутренней э. д. с. или просто э. д. с.  $\mathcal{E}$ . При нагрузке разность потенциалов становится меньше за счет встречной э. д. с. поляризации и падения напряжения во внутреннем сопротивлении и называется внешней э. д. с. или обычно напряжением  $U$ .

В индуктивных электромашинных генераторах э. д. с.  $\mathcal{E}$  возникает из-за явления электромагнитной индукции; при нагрузке напряжение  $U$  генератора становится меньше э. д. с.  $\mathcal{E}$  из-за магнитного поля, создаваемого в генераторе током нагрузки, и из-за внутреннего сопротивления. Таким образом, рассмотренные источники являются *источниками напряжения* (э. д. с.); они обычно мысленно заменяются эквивалентной схемой (рис. 61), состоящей из последовательного соединения источника постоянной э. д. с.  $\mathcal{E}$  и внутреннего сопротивления  $R_s$ , величина которого учитывает обе причины изменения напряжения при нагрузке. Тогда ток  $I$  и напряжение  $U$  при нагрузке внешним сопротивлением  $R$  (рис. 61) будут:

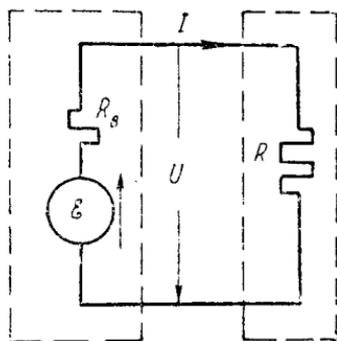


Рис. 61

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_s} \quad \text{и} \quad U = \mathcal{E} - IR_s = IR.$$

Основанные на явлении электростатической индукции емкостные электромашинные генераторы с электрическим полем (рис. 51) при коротком замыкании генерируют наибольший ток

(§ 20). При нагрузке, т. е. включении сопротивления, появляется напряжение и связанное с ним электрическое поле, снижающее генерируемый ток; кроме того, часть тока ответвляется через проводимость изоляции и ток внешней цепи становится еще меньше.

Таким образом, этот источник электрической энергии является *источником тока*; он обычно мысленно заменяется эквивалентной схемой (рис. 62),

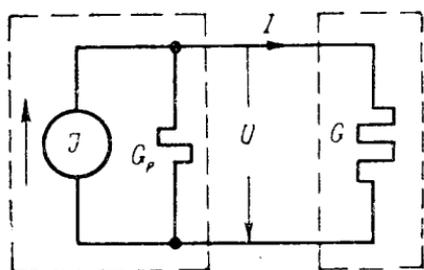


Рис. 62

стоящей из параллельного соединения источника постоянного внутреннего тока  $J$  и внутренней проводимости  $G_p$ , величина которой учитывает обе причины изменения внешнего тока при нагрузке. Тогда напряжение  $U$  и внешний ток  $I$ , т. е. ток во внешней проводимости  $G$  (рис. 62), будут:

$$U = \frac{J}{G + G_p} \quad \text{и} \quad I = J - UG_p = UG.$$

Сравнивая уравнения источников обоих видов, легко видеть, что они обратны друг другу: вместо напряжения в одном уравнении фигурирует ток в другом и наоборот, вместо сопротивлений — проводимости и наоборот.

При расчете цепи физическая сущность реальных источников электрической энергии не существенна и источник напряжения может быть заменен источником тока, ему эквивалентным, т. е. таким, который не вызовет изменения напряжений и токов остальных участков цепи. Аналогично всякий источник тока может быть заменен эквивалентным ему источником напряжения; такие замены в ряде случаев упрощают расчеты. Так как каждый из этих источников определяется двумя параметрами (рис. 61 и 62), условиями эквивалентности могут быть два равенства: равенство их напряжений  $U_0$  при холостом ходе и их токов  $I_k$  при коротком замыкании.

У источника напряжения

$$U_0 = \epsilon; \quad I_k = \frac{\epsilon}{R_s}.$$

У источника тока

$$U_0 = \frac{J}{G_s}; \quad I_k = J.$$

Следовательно,

$$\epsilon = \frac{J}{G_s} \quad \text{и} \quad \frac{\epsilon}{R_s} = J,$$

откуда

$$G_s = \frac{1}{R_s}.$$

Таким образом, источник тока, эквивалентный источнику напряжения, должен генерировать ток, равный току короткого замыкания источника напряжения, и иметь параллельное внутреннее сопротивление, равное последовательному внутреннему сопротивлению источника напряжения.

Поведение цепи определяется также полярностью источников электрической энергии. Полярность любого источника должна быть указана на схеме цепи знаками плюс и минус (рис. 57) или стрелкой, совпадающей с направлением тока или э. д. с. генератора (рис. 58).

---

## ГЛАВА V

### РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Расчет электрической цепи обычно заключается в определении токов, напряжений и мощностей ветвей цепи по заданным их сопротивлениям или проводимостям и по заданным источникам электрической энергии. Эти задачи имеют однозначное решение, которое в случае линейных цепей может быть получено составлением и решением системы уравнений по законам Кирхгофа (первому „закону токов“ для узлов, второму „закону напряжений“ для контуров), закону Ома, связывающему напряжение и ток приемников, и закону Ленца—Джоуля для вычисления мощностей. Помимо этого общего метода применяются вытекающие из тех же законов другие методы, дающие в некоторых случаях менее громоздкое решение за счет упрощения цепи или расчленения задачи на ряд более простых задач.

Ниже рассматриваются различные методы расчета линейных цепей и в заключение те особенности, которые связаны с расчетом нелинейных цепей.

#### § 25. ТЕОРИЯ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ И РАБОТА ИСТОЧНИКА НА НАГРУЗКУ

В качестве первой, наиболее простой задачи представляет практический интерес исследование передачи энергии постоянным током (рис. 63) от источника с постоянным напряжением  $U_1$  через постоянное сопротивление  $R_0$  обоих проводов линии к переменному сопротивлению  $R_2$  нагрузки. Ток цепи

$$I = \frac{U_1}{R_2 + R_0}$$

по мере уменьшения  $R_2$  будет увеличиваться от нуля при холостом ходе ( $R_2 = \infty$ ) до максимального значения  $I_k = \frac{U_1}{R_0}$  при коротком замыкании ( $R_2 = 0$ ). В дальнейшем ток  $I$  принят за независимую переменную и отложен по оси абсцисс графика (рис. 64).

Напряжение на сопротивлении  $R_0$  линии (часто называемое падением напряжения в линии)  $U_0 = IR_0$  растет линейно с током от нуля (холостой ход) до  $U_1$  (короткое замыкание).

Напряжение приемника

$$U_2 = U_1 - U_0 = IR_2 = U_1 \frac{R_2}{R_2 + R_0} = U_1 \frac{1}{1 + \frac{R_0}{R_2}}$$

при холостом ходе равно  $U_1$ , с уменьшением  $R_2$  падает по прямой до нуля при коротком замыкании. График изменения  $U_0$  и  $U_2$  представляет собой прямую (рис. 64), причем  $U_2$  отсчитывается от оси абсцисс, а  $U_0$  — от горизонтали  $U_1 = \text{const}$ .

Мощность, отдаваемая источником энергии в цепь,

$$P_1 = U_1 I$$

растет линейно с током (рис. 64).

Мощность, расходуемая в линии (потери),

$$P_0 = U_0 I = I^2 R_0$$

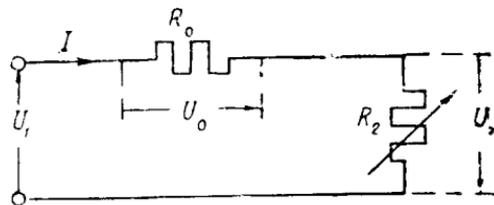


Рис. 63

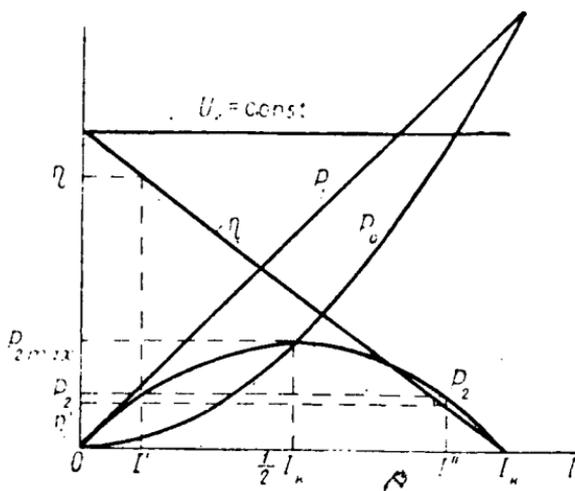


Рис. 64

возрастает пропорционально квадрату тока и при коротком замыкании становится равной мощности источника (рис. 64).

Мощность, потребляемая приемником (полезная мощность),

$$P_2 = U_2 I = I^2 R_2 = \frac{U_1^2 R_0}{(R_2 + R_0)^2}$$

равна нулю при холостом ходе, так как тогда  $I=0$ , и при коротком замыкании, так как тогда  $U_2=0$ . Из исследования  $P_2(R_2)$  на максимум:

$$\frac{\partial P_2}{\partial R_2} = U_1^2 \frac{(R_2 + R_0)^2 - R_2 \cdot 2(R_2 + R_0)}{(R_2 + R_0)^4} = U_1^2 \frac{R_0 - R_2}{(R_2 + R_0)^3} = 0$$

вытекает, что максимум  $P_2$  имеет место при  $R_2 = R_0$ . Следовательно, полезная мощность получает максимальное значение при равенстве сопротивлений приемника  $R_2$  и линии  $R_0$ , равное

$$P_{2 \max} = \frac{U_1^2 R_0}{(2R_0)^2} = \frac{U_1^2}{4R_0};$$

тогда ток, очевидно, равен  $\frac{1}{2} I_k$ . Кривая  $P_2$  также приведена на рис. 64.

Коэффициент полезного действия (к.п.д.)  $\eta$  электропередачи равен отношению полезной мощности к мощности источника:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_2 I}{U_1 I} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{I R_2}{I(R_2 + R_0)} = \frac{R_2}{R_2 + R_0}.$$

Он равен нулю при коротком замыкании и изменяется по линейному закону, стремясь к единице при холостом ходе. При передаче максимальной мощности к. п. д. равен 0,5, при этом напряжение приемника равно половине напряжения источника.

Из рис. 64 видно, что мощность  $P_2 < P_{2 \max}$  может быть передана при двух режимах, отмеченных одним и двумя штрихами, причем в первом режиме к. п. д. и напряжение на приемнике будут больше, а ток—меньше, чем во втором. Следовательно, из всех физически возможных режимов работы технически целесообразными будут режимы в левой части графика до  $P_{2 \max}$  при  $\eta \geq 0,5$ .

Режим передачи максимальной мощности применяется в мало-мощных линиях связи, так как там низкий к.п.д. роли не играет. При передаче больших мощностей ограничиваются более узким диапазоном работы, причем величина допустимого к. п. д. и тем самым потерь определяется экономическими расчетами.

Обычно допустимые потери  $P_0$  выражаются в долях полезной мощности  $P_2$ :

$$P_0 = \kappa P_2,$$

где коэффициент потерь  $\kappa$  находится в пределах 2—10%. При передаче мощности  $P_2$  на расстояние  $l$  (длина проводов  $2l$ ) при напряжении  $U_2$  и, следовательно, токе  $I_2 = \frac{P_2}{U_2}$  эти потери

$$P_0 = \kappa P_2 = I^2 R_0 = \left( \frac{P_2}{U_2} \right)^2 \frac{2l}{S},$$

откуда определяется необходимое сечение проводов

$$S = \frac{2P_2^2 l}{\kappa U_2^3}.$$

Из этого выражения ясна выгода высокого напряжения: при той же передаваемой мощности *сечение провода обратно пропорционально квадрату напряжения*; вместе с тем с ростом напряжения увеличивается стоимость изоляции линии.

На практике применяют тем большее напряжение, чем больше передаваемая мощность  $P_2$  и дальность передачи  $l$ .

Потери в проводах превращаются в тепло и повышают их температуру. В нормах для всех типов и стандартных сечений проводов указан максимально допустимый ток по условиям нагрева. Поэтому полученное по расчету сечение, округленное до ближайшего стандартного, может быть применено лишь в том случае, если допустимый для него ток равен или больше тока линии; в противном случае приходится выбрать большее сечение, для которого ток линии является допустимым.

Первая передача электрической энергии постоянным током была осуществлена Ф. А. Пироцким в Петербурге в 1874 г. от генератора 6 л. с. на расстояние 200 м; в 1877 г. он опубликовал статью „О передаче работы воды, как движителя, на всякое расстояние посредством гальванического тока“. В 1880 г. Д. А. Лачинов в статье „Электромеханическая работа“ показал, что при больших расстояниях можно сохранить высокий к. п. д. передачи, если увеличить напряжение. В 1882 г. Депре построил линию передачи от гидроэлектростанции в Мисбахе до Мюнхена длиной 57 км при напряжении около 1000 в, с полезной мощностью 0,25 л. с. и к. п. д. 60%.

В последующие годы линии постоянного тока получили распространение только для передачи небольших мощностей на малые расстояния; для дальних и мощных электропередач стал широко применяться переменный ток, позволяющий весьма просто в начале линии повышать, а в конце понижать напряжение с помощью трансформаторов. При сверхдальних и сверхмощных передачах возникли трудности и при переменном токе и оказалось целесообразным вернуться к передаче энергии постоянным током, но при сверхвысоком напряжении. В СССР уже ряд лет работает опытная линия передачи постоянного тока вы-

сокого напряжения, а в шестой пятилетке будет осуществлена электропередача постоянным током из Сталинграда в Донбасс.

Рассмотренная выше задача передачи энергии совершенно аналогична задаче о работе источника электрической энергии на переменную нагрузку: от  $R=\infty$  (холостой ход) до  $R=0$  (короткое замыкание). Эквивалентная схема для источника напряжения представлена на рис. 61, где э. д. с. источника  $\mathcal{E}$  и его внутреннее сопротивление  $R_0$  постоянно, а сопротивление  $R$  приемника переменное.

Полученные выше выводы можно целиком перенести на эту задачу, заменив напряжение  $U_1$  на э. д. с.  $\mathcal{E}$  источника, сопротивление  $R_0$  линии на внутреннее сопротивление  $R_0$  источника и обозначив переменную нагрузку вместо  $R_2$  через  $R$ . Следовательно, источник будет отдавать приемнику максимальную мощность при  $R_0=R$ , но при этом такая же мощность будет расходоваться внутри источника. Обычно источники энергии работают в более экономичном режиме, когда сопротивление нагрузки в несколько раз превышает внутреннее сопротивление источника.

## § 26. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ЦЕПЕЙ

Этот метод заключается в замене сложного участка цепи более простым, ему эквивалентным, т. е. не вызывающим изменения напряжений и токов в остальной части цепи.

В случае простых цепей, состоящих из одного источника и приемников, соединенных между собой последовательно (рис. 60) или параллельно (рис. 59), задача решается заменой всех приемников одним, им эквивалентным, сопротивлением или проводимостью которого (§ 23)

$$R = \Sigma R_k \quad \text{или} \quad G = \Sigma G_k,$$

и определением тока  $I$  или напряжения  $U$  по формулам § 24 для источников напряжения или тока:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_0} \quad \text{или} \quad U = \frac{J}{G + G_0}.$$

Затем находятся напряжения на участках последовательной цепи или токи ветвей параллельной цепи:

$$U_k = IR_k \quad \text{или} \quad I_k = UG_k,$$

а по закону Ленца—Джоуля определяются мощности всей цепи и ее участков:

$$P = I^2 R, \quad P_k = I^2 R_k \quad \text{или} \quad P = U^2 G, \quad P_k = U^2 G_k.$$

Несколько источников напряжения, соединенных последовательно (рис. 65а), могут быть заменены одним эквивалентным им источником напряжения (рис. 65б) с э. д. с.  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $R$ , равными

$$\mathcal{E} = \Sigma \mathcal{E}_k, \quad R = \Sigma R_k;$$

здесь э. д. с. следует суммировать алгебраически, сопротивления — арифметически.

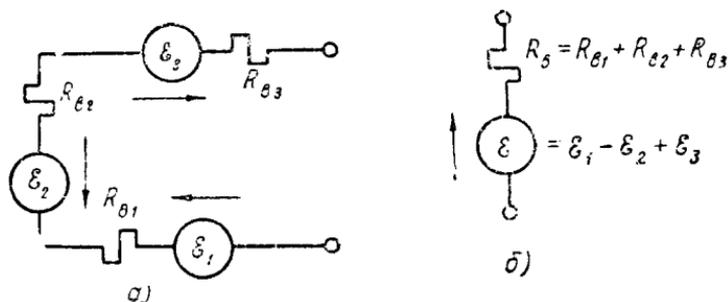


Рис. 65

Аналогично ток  $J$  и внутренняя проводимость  $G$  источника тока (рис. 66б), эквивалентного нескольким источникам тока, соединенным параллельно (рис. 66а), будут

$$J = \Sigma J_k, \quad G = \Sigma G_k;$$

здесь токи суммируются алгебраически, проводимости — арифметически.

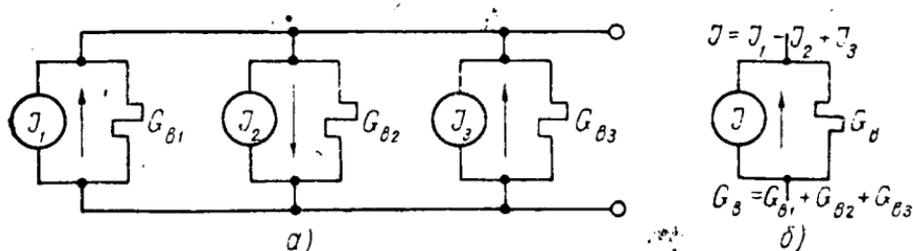


Рис. 66

Если параллельно соединены несколько источников напряжения (рис. 67), целесообразно каждый из них заменить (§ 24) эквивалентным источником тока (рис. 66а), найти один, им всем эквивалентный (рис. 66б), и затем, если в этом есть необходимость, заменить последний эквивалентным источником напряжения. Аналогично можно поступить при последовательном соединении нескольких источников тока. В результате подобные цепи

с несколькими источниками будут сведены к цепям с одним источником.

При расчете цепи со смешанным, т. е. параллельно-последовательным соединением приемников, питаемой одним источником (например, рис. 68а), группа приемников, соединенных параллельно, заменяется одним, им эквивалентным (рис. 68б), с проводимостью

$$G_{12} = G_1 + G_2 ;$$

группа приемников, соединенных последовательно, заменяется одним, им эквивалентным (рис. 68в), с сопротивлением

$$R = R_{12} + R_3, \quad \text{где } R_{12} = \frac{1}{G_{12}} .$$

После замены всей цепи одним приемником определяется его ток  $I$  при заданном напряжении или напряжение при заданном токе. Затем эквивалент-

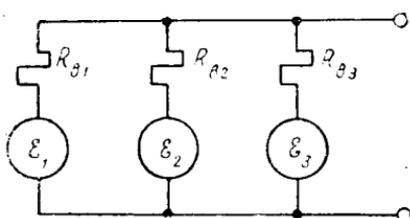


Рис. 67

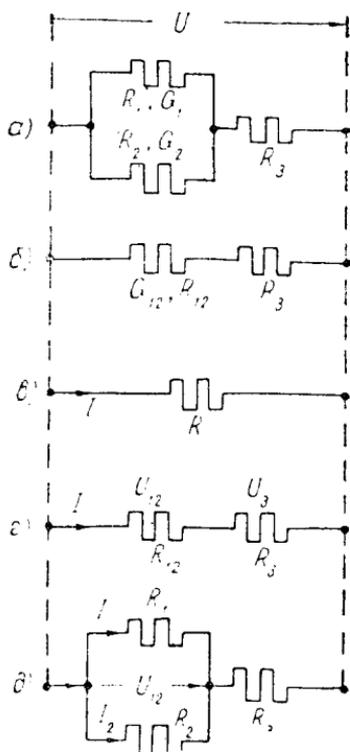


Рис. 68

ный приемник постепенно разворачивается (рис. 68г) в первоначальную цепь (рис. 68д) с попутным определением напряжений и токов отдельных приемников:

$$U_{12} = IR_{12}, \quad U_3 = IR_3, \quad I_1 = U_{12}G_1, \quad I_2 = U_{12}G_2,$$

после чего находят их мощности.

Этот метод неприменим для цепей, которые нельзя свести к сочетанию последовательных и параллельных соединений. Подобные, наиболее простые схемы состоят из так называемых *треугольников* (рис. 69а) и *трехлучевых звезд* (рис. 69б). Примером их может служить *неуравновешенный мост* (рис. 70а); каждый контур этой цепи (1-2-3-1; 2-3-4-2; 1-2-4-1; 1-3-4-1), состоящий из трех ветвей, является *треугольником*, каждый узел — *нулевой точкой* звезды. Расчет таких цепей можно свести к

задаче на смешанное соединение, если заменить один из треугольников эквивалентной ему звездой или одну из звезд эквивалентным ей треугольником. Так, треугольник  $R_{12}R_{23}R_{31}$  заменен на рис. 70б звездой  $R_1R_2R_3$ , звезда  $R_{13}R_{23}R_{24}$  — треугольником  $R'_{13}R'_{34}R'_{41}$  на рис. 70в. Получившиеся цепи являются уже

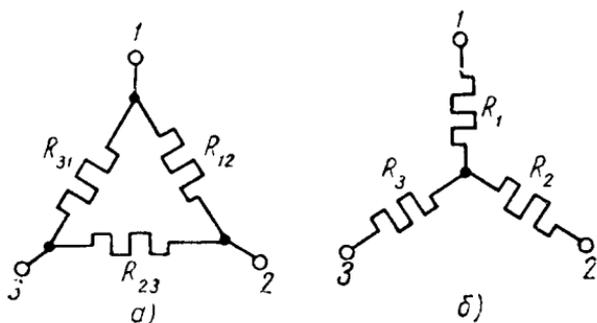


Рис. 69

сочетанием последовательно-параллельных соединений и решаются указанным выше путем; затем совершается обратный переход к исходной цепи.

Для эквивалентности треугольника и звезды (рис. 69) необходимо и достаточно, чтобы сопротивление или проводимость

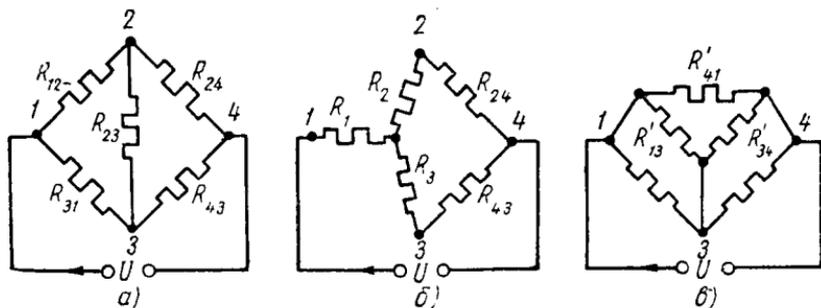


Рис. 70

между каждой парой точек при отключенной третьей точке у обеих цепей были одинаковыми; так, для точек 1, 2 при отключенной точке 3

$$\frac{1}{\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{23} + R_{31}}} = R_1 + R_2,$$

или

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (1)$$

Аналогичные уравнения для точек 2, 3 и 3, 1 можно написать по правилу круговой перестановки:

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad (2)$$

$$R_3 + R_1 = \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (3)$$

Складывая уравнения (1) и (3) и вычитая (2), можно получить переходные формулы от треугольника к звезде:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

и далее, пользуясь круговой перестановкой,

$$R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Для вычисления переходных формул от звезды к треугольнику удобно мысленно замкнуть у обеих цепей две одноименные

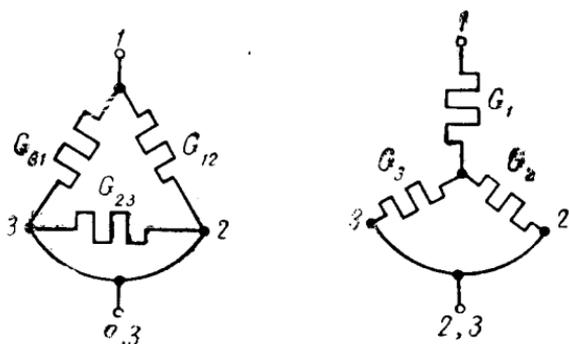


Рис. 71

пары точек и приравнять проводимости между общей точкой и третьей точкой; так, проводимости между точкой 1 и точкой 2, 3 (рис. 71):

$$G_{12} + G_{31} = \frac{1}{\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2 + G_3}},$$

или

$$G_{12} + G_{31} = \frac{G_1(G_2 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3}, \quad (1')$$

и далее по правилу круговой перестановки

$$G_{23} + G_{12} = \frac{G_2(G_3 + G_1)}{G_1 + G_2 + G_3}, \quad (2')$$

$$G_{31} + G_{23} = \frac{G_3(G_1 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3}. \quad (3')$$

Решая аналогично предыдущему систему уравнений (1'), (2'), (3'), можно получить искомые переходные формулы:

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}; \quad G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}; \quad G_{31} = \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

Интересно отметить, что треугольник как контур и звезда как узел в соответствии со сказанным выше (§ 24)—цепи взаимно-обратные. В этом еще раз можно убедиться, сравнивая прямые и обратные переходные формулы, которые совершенно аналогичны, но содержат в первом случае сопротивления, во втором проводимости.

Давая общую оценку методу эквивалентных цепей, можно указать на его простоту, так как в основном здесь оперируют законом Ома; законы Кирхгофа используются неявно, так как на них основано сложение сопротивлений для последовательного соединения и проводимостей для параллельного соединения.

## § 27. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ ПО ЗАКОНАМ КИРХГОФА

### 1. Две формы записи законов Кирхгофа

Выше, в § 23, были даны оба закона Кирхгофа: первый—для узлов и второй—для контуров в следующей симметричной форме записи:

$\sum I_k = 0 \quad (I')$ <p>„Алгебраическая сумма токов ветвей, сходящихся в узле, равна нулю“.</p>		$\sum U_k = 0 \quad (II')$ <p>„Алгебраическая сумма напряжений ветвей, входящих в контур, равна нулю“.</p>
--	--	--

В общем случае каждая ветвь содержит источник и приемник электрической энергии. Если между узлами цепи параллельно включены источник тока и приемник (рис. 72), можно объединить внутреннюю проводимость  $G_g$  с внешней  $G'$ :

$$G_g + G' = G.$$

Если в ветви последовательно включены источник напряжения и приемник (рис. 73), можно объединить внутреннее сопротивление  $R_g$  с внешним  $R'$ :

$$R_g + R' = R.$$

Тогда для тока (рис. 72) или напряжения (рис. 73) ветви на основании закона Ома можно написать:

$$I = J - GU$$

$$U = \epsilon - RI$$

Эти равенства следует понимать алгебраически: знак минус сохраняется, когда источники отдают энергию, т. е. тогда,

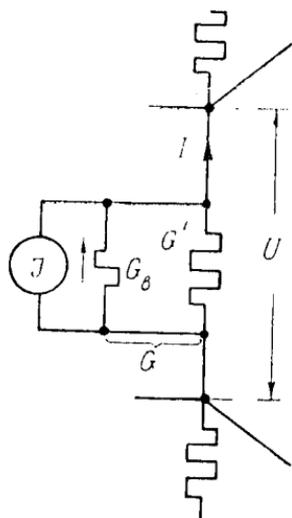


Рис. 72

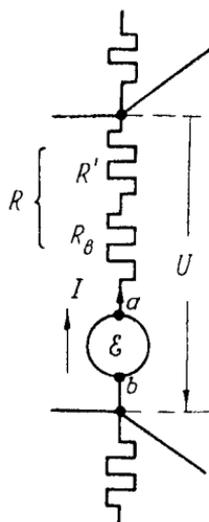


Рис. 73

когда при обходе контура  $J, G$  (рис. 72) совпадают направления  $J$  и  $U$ , а на рис. 73 совпадают направления  $\epsilon$  и  $I$ . По аналогии с падением напряжения  $RI$  величину  $GU$  можно назвать „падением тока“.

Подставляя эти соотношения в приведенную выше первую форму записи законов Кирхгофа, можно получить вторую симметричную форму их записи:

$$\sum J_k = \sum G_k U_k \quad (I'')$$

„Алгебраическая сумма внутренних токов источников тока в ветвях, сходящихся в узле, равна алгебраической сумме падений тока в проводимостях этих ветвей“.

$$\sum \epsilon_k = \sum R_k I_k \quad (II'')$$

„Алгебраическая сумма э. д. с. источников напряжения, входящих в контур, равна алгебраической сумме падений напряжения в сопротивлениях ветвей этого контура“.

Так как обычно источники электрической энергии задаются в виде источников напряжения, первый закон Кирхгофа записывается в первой форме, а второй — во второй, и система этих уравнений получает следующий несимметричный вид:

$$\sum I_k = 0 \quad (I') \quad \left| \quad \sum \mathcal{E}_k = \sum R_k I_k \quad (II')$$

## 2. О числе уравнений по законам Кирхгофа

Обычно заданными являются источники и приемники, а ищутся токи или напряжения ветвей. Поэтому число неизвестных равно числу  $p$  ветвей схемы и, следовательно, столько же независимых уравнений необходимо составить по первому и второму законам Кирхгофа.

Для цепи с  $q$  узлами, переходя от какого-либо узла к соседнему, придется включать в уравнение, составляемое по первому закону Кирхгофа, по крайней мере один „новый“ ток, благодаря чему оно будет независимым. Но так как ветви, сходящиеся в последнем узле, начинались в остальных узлах, уравнение для него не будет содержать новых токов и будет зависимым, т. е. следствием из предыдущих. Следовательно, по первому закону Кирхгофа можно составить  $q-1$  независимых уравнений, а по второму закону надо составить  $p - (q - 1) = p - q + 1$  независимых уравнений. При их составлении надо следить за тем, чтобы в каждом новом уравнении участвовала по крайней мере одна новая ветвь, т. е. составлять уравнения только для *независимых контуров*.

В большинстве случаев приходится иметь дело с цепями, которые можно изобразить на плоскости без пересечения ветвей; примером плоских схем может служить цепь с четырьмя узлами, в которой каждый узел соединен с остальными (см. рис. 81а). В топологии (наука об общих свойствах геометрических фигур) доказывается, что любая плоская фигура, состоящая из  $p$  ветвей и  $q$  узлов, содержит как раз  $p - q + 1$  *элементарных контуров*, т. е. контуров, не содержащих внутренних ветвей. Так, например, цепь рис. 70а с  $p=6$  и  $q=4$  имеет три элементарных контура. Очевидно, что каждый новый элементарный контур удовлетворяет поставленному выше требованию о наличии новой ветви, т. е. все элементарные контуры независимы и, следовательно, уравнения по второму закону, составленные для всех элементарных контуров, будут независимыми, а их число равно необходимому. Поэтому составление уравнений для этих контуров гарантирует от ошибок, возможных при использовании произвольных контуров цепи.

### 3. Применение метода расчета цепей по законам Кирхгофа

При решении обычной задачи расчета цепей методом составления уравнений по законам Кирхгофа в несимметричной записи (I'), (II'') необходимо знать величину и направления всех э.д.с. источников напряжения и внутренних токов источников тока и значения всех внутренних и внешних сопротивлений или проводимостей цепи. Так как при составлении уравнений необходимо учесть направления всех токов, следует произвольно ими задаться. Применяя, как указано, второй закон во второй форме записи, э.д.с. и токи, направления которых совпадают с произвольно выбранным направлением обхода контура, следует считать имеющими положительный знак, остальные—отрицательный.

Решая систему уравнений любым известным из алгебры способом, находят все неизвестные токи ветвей; отрицательный ответ указывает на то, что действительное направление тока обратно предположенному. После определения токов вычисляются напряжения по закону Ома, а по закону Ленца—Джоуля—мощности.

Как уже было указано, достоинством рассмотренного метода является его общность, недостатком—громоздкость составления и решения системы, состоящей из большого числа уравнений.

#### § 28. МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ

Этот метод, предложенный Максвеллом, легко обосновать, предполагая, что в ветви цепи включены источники напряжения (§ 24) последовательно с приемниками (рис. 73). Примером может служить цепь рис. 74, здесь внутренние сопротивления источников объединены с сопротивлениями приемников. Если заданы источники тока, их надо заменить эквивалентными источниками напряжения.

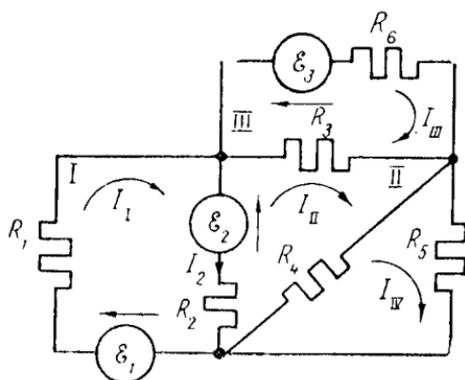


Рис. 74

Каждому независимому контуру приписывается произвольно направленный контурный ток. Для плоских схем удобно в качестве независимых контуров взять элементарные контуры и придать всем контурным токам одно и то же направление, совпадающее с направлением обхода, например, по часовой стрелке (рис. 74). Контурный ток, проходящий также по внешней

ветви, например ток  $I_1$  контура I, является для этой ветви реально существующим. Контурный ток внутреннего контура, например ток  $I_{II}$  контура II, является фиктивной величиной, введенной для удобства расчетов. Реальные токи внутренних ветвей можно найти как разность токов двух контуров, в которые входит эта ветвь; так как для рис. 74 выбранное направление тока  $I_2$  ветви с  $R_2$  совпадает с  $I_1$ , то

$$I_2 = I_1 - I_{II}. \quad (*)$$

Взятая по направлению обхода алгебраическая сумма всех э.д.с., входящих в контур, называется *контурной э.д.с.*, сумма всех сопротивлений контура называется *контурным сопротивлением*. Так, для контуров I и II (рис. 74) контурные э.д.с. и сопротивления соответственно будут:

$$\mathcal{E}_I = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2; \quad \mathcal{E}_{II} = \mathcal{E}_2; \quad R_I = R_1 + R_2; \quad R_{II} = R_2 + R_3 + R_4.$$

Сопротивление общей ветви двух контуров называется *взаимным сопротивлением*, например

$$R_{I,II} = R_{II} = R_2.$$

Тогда вместо уравнения по второму закону Кирхгофа для контура I

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2$$

можно написать:

$$\mathcal{E}_1 - R_1 I_1 + R_2 (I_1 - I_{II}) = R_1 I_1 - R_{II} I_{II}.$$

В общем виде система уравнений для всех  $N - p - q + 1$  независимых контуров при их обходе в одном направлении получит вид:

$$\begin{aligned} R_I I_1 - R_{II} I_{II} - \dots - R_{IN} I_N &= \mathcal{E}_I, \\ -R_{II} I_1 + R_{II} I_{II} - \dots - R_{II, N} I_N &= \mathcal{E}_{II}, \\ \dots & \\ -R_{NI} I_1 - R_{N, II} I_{II} - \dots + R_N I_N &= \mathcal{E}_N. \end{aligned}$$

В этой системе уравнений члены с контурным сопротивлением входят с положительным знаком, члены со взаимным сопротивлением — с отрицательным.

Если в каком-либо контуре нет э.д.с., в правую часть соответствующего уравнения надо подставить нуль; если два контура не имеют общей ветви, вместо соответствующего взаимного сопротивления надо также подставить нуль.

Таким образом, вместо системы  $p$  уравнений, которую надо составить и решить по общему методу, по методу контурных токов составляется система лишь из  $p - q + 1$  уравнений. Так, для цепи рис. 74 вместо шести уравнений — двух по первому и

четырёх по второму законам Кирхгофа — по методу контурных токов составляется лишь следующая система из четырёх уравнений:

$$\begin{aligned}(R_1 + R_2)I_1 - R_2I_{II} &= \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2, \\ -R_2I_1 + (R_2 + R_3 + R_4)I_{II} - R_3I_{III} - R_4I_{IV} &= \mathcal{E}_2, \\ -R_3I_{II} + (R_3 + R_6)I_{III} &= -\mathcal{E}_3, \\ -R_4I_{II} + (R_4 + R_5)I_{IV} &= 0.\end{aligned}$$

После определения контурных токов находят действительные токи ветвей. Токи внешних ветвей совпадают с соответствующим положительным контурным током и противоположны отрицательным. Токи внутренних ветвей, определяемые как разность по выражениям типа (\*), совпадают по направлению с принятым для уменьшаемого в том случае, если искомый ток получится положительным и наоборот.

### § 29. МЕТОД УЗЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Этот метод, предложенный также Максвеллом, легко обосновать, предполагая, что между узлами цепи включены источники тока параллельно с приемниками (рис. 72). Примером может служить цепь рис. 75,

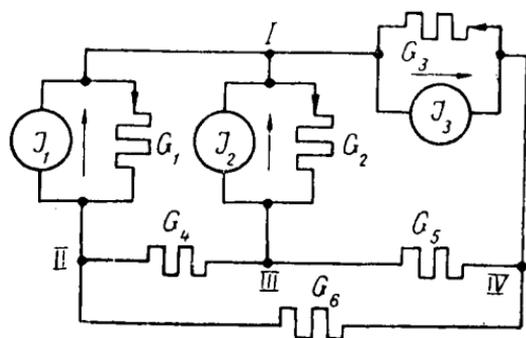


Рис. 75

здесь внутренние проводимости источников объединены с проводимостями приемников.

По аналогии с методом контурных токов вводятся новые понятия, что сделано ниже на примере цепи рис. 75.

Узловой ток  $J_1$ , равный алгебраической сумме внутренних токов  $J_k$  источников тока в ветвях, сходящихся в узле I:

$$J_1 = \sum J_k = J_1 + J_2 - J_3.$$

Узловая проводимость  $G_1$ , равная сумме проводимостей этих ветвей:

$$G_1 = \sum G_k = G_1 + G_2 + G_2.$$

Взаимная проводимость  $G_{II}$ , равная проводимости ветви, соединяющей узлы I и II:

$$G_{II} = G_{III} = G_1, \quad G_{III} = G_{III} = G_2.$$

Узловое напряжение  $U_1$ , равное напряжению узла I относительно одного из узлов, принятого за опорный.

Напряжение  $U_k$  каждой ветви, очевидно, равно разности узловых напряжений узлов, к которым примыкает данная ветвь; например, для рис. 75, учитывая направления внутренних токов,

$$U_1 = U_1 - U_{II}; \quad U_2 = U_1 - U_{III}; \quad U_3 = U_{IV} - U_1. \quad (**)$$

Тогда для узла I (рис. 75) вместо уравнения по первому закону Кирхгофа во второй форме, составленного в соответствии с правилом знаков § 27,

$$J_1 + J_2 - J_3 = G_1 U_1 + G_2 U_2 - G_3 U_3$$

можно написать:

$$\begin{aligned} J_1 &= G_1 (U_1 - U_{II}) + G_2 (U_1 - U_{III}) - G_3 (U_{IV} - U_1) = \\ &= (G_1 + G_2 + G_3) U_1 - G_1 U_{II} - G_2 U_{III} + G_3 U_{IV} = \\ &= G_1 U_1 - G_{1II} U_{II} - G_{1III} U_{III} + G_{1IV} U_{IV}. \end{aligned}$$

Так как один узел принимается за опорный, соответствующий член правой части обращается в нуль.

В общем виде система уравнений для всех  $M = q - 1$  независимых узлов, т. е. для всех узлов, кроме опорного, получит вид:

$$\begin{aligned} G_{1I} U_1 - G_{1II} U_{II} - \dots - G_{1M} U_M &= J_1, \\ -G_{2I} U_1 + G_{2II} U_{II} - \dots - G_{2M} U_M &= J_2, \\ \dots & \\ -G_{MI} U_1 - G_{MII} U_{II} - \dots + G_{MI} U_M &= J_M. \end{aligned}$$

В эту систему уравнений члены с узловой проводимостью входят с положительным знаком, члены со взаимной проводимостью — с отрицательным.

Если к какому-либо узлу не подключены источники тока, в правую часть соответствующего уравнения надо подставить нуль; если два узла не имеют общей ветви, вместо соответствующей взаимной проводимости надо также подставить нуль.

Таким образом, вместо системы  $p$  уравнений, которую надо составить и решить по общему методу, по методу узловых напряжений составляется система лишь из  $q - 1$  уравнений. Так, для цепи рис. 75 вместо шести уравнений — трех по первому и трех по второму законам Кирхгофа — по методу узловых напряжений составляется лишь следующая система из трех уравнений (за опорный взят узел IV):

$$\begin{aligned} (G_1 + G_2 + G_3) U_1 - G_1 U_{II} - G_2 U_{III} &= J_1 + J_2 - J_3, \\ -G_1 U_1 + (G_1 + G_4 + G_6) U_{II} - G_4 U_{III} &= -J_1, \\ -G_2 U_1 - G_4 U_{II} + (G_2 + G_4 + G_5) U_{III} &= -J_2. \end{aligned}$$

Решая эту систему, находят узловые напряжения, затем из выражений вида (\*\*\*) — напряжения ветвей и из закона Ома — токи ветвей.

Из сравнения уравнений, составленных методом контурных токов и узловых напряжений, видно, что они совершенно аналогичны и взаимнообратны: вместо напряжений участвуют токи, вместо сопротивлений — проводимости и наоборот. Целесообразно применять метод, дающий меньшее число уравнений; так, при  $p - q + 1 < q - 1$ , т. е. при  $p < 2(q - 1)$ , следует применить метод контурных токов, при  $p > 2(q - 1)$  — метод узловых напряжений.

Вывод метода узловых напряжений был дан в предположении, что между узлами цепи включены источники тока параллельно с приемниками (рис. 72). Если же заданы источники напряжения, соединенные с приемниками последовательно (рис. 73), можно рассматривать каждую ветвь как источник напряжения с той же э.д.с.  $\mathcal{E}$ , но с внутренним объединенным сопротивлением  $R = R_g + R'$ . Этот источник напряжения может быть заменен эквивалентным ему источником тока (§ 24) с внутренним током

$J = \frac{\mathcal{E}}{R}$  и внутренней проводимостью  $G = \frac{1}{R}$ , благодаря чему задача окажется сведенной к уже рассмотренной.

Особенно выгоден метод узловых напряжений для цепи только с двумя узлами (рис. 76а). В этом случае один из двух узлов

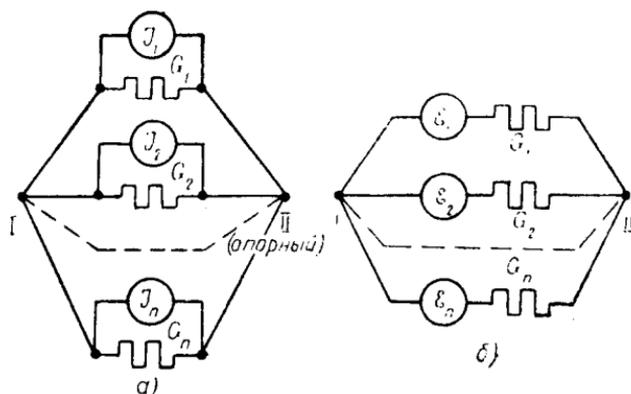


Рис. 76

будет опорным, члены со взаимными проводимостями отсутствуют и из системы уравнений останется одно:

$$G_1 U_1 = J_1 \quad \text{или} \quad U_1 \Sigma G_k = \Sigma J_k,$$

Отсюда сразу определяется узловое напряжение, оно же напряжение всех ветвей

$$U_1 = \frac{\sum J_k}{\sum G_k},$$

а по нему — токи ветвей.

Если выразить все внутренние токи  $J_k$  источников тока через внутренние э.д.с.  $\mathcal{E}_k$  эквивалентных источников напряжения:

$$J_k = \mathcal{E}_k G_k,$$

получится узловое напряжение для схемы рис. 76б

$$U_1 = \frac{\sum \mathcal{E}_k G_k}{\sum G_k},$$

после чего могут быть определены токи ветвей

$$I_k = (\mathcal{E}_k - U_1) G_k.$$

### § 30. МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ

Если для узлов и контуров любой электрической цепи, содержащей источники напряжения с э.д.с.  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$ , написать уравнения по законам Кирхгофа

$$I_1 + I_2 + \dots = 0, \quad R_1 I_1 + R_2 I_2 + \dots = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \dots,$$

получается система линейных уравнений, из которой ток каждой ветви определяется однозначно.

Если поочередно предположить, что в цепи существует только э.д.с.  $\mathcal{E}_1$ , а остальные равны нулю, затем — только э.д.с.  $\mathcal{E}_2$  и т. д., можно для каждой э.д.с. вычислить соответствующие ей токи ветвей, составив уравнения следующего вида:

$$\begin{array}{l|l} I_1' + I_2' + \dots = 0 & R_1 I_1' + R_2 I_2' + \dots = \mathcal{E}_1 \\ I_1'' + I_2'' + \dots = 0 & R_1 I_1'' + R_2 I_2'' + \dots = \mathcal{E}_2 \end{array}$$

и так далее.

Сложение почленно этих уравнений

$$\begin{aligned} (I_1' + I_1'' + \dots) + (I_2' + I_2'' + \dots) + \dots &= 0, \\ (I_1' + I_1'' + \dots) R_1 + (I_2' + I_2'' + \dots) R_2 + \dots &= \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \dots \end{aligned}$$

даст систему, которая также имеет единственное решение для неизвестных  $(I_1' + I_1'' + \dots)$ ,  $(I_2' + I_2'' + \dots)$  и т. д. Из сравнения исходных и только что полученных уравнений, имеющих одина-

ковые коэффициенты и правые части, видно, что решения обеих систем должны совпадать и, следовательно,

$$I_1 = I_1' + I_1'' + \dots, \quad I_2 = I_2' + I_2'' + \dots,$$

т. е. ток каждой ветви цепи равен алгебраической сумме токов этой ветви, протекающих под действием каждой э.д.с. в отдельности. На этом и основан метод наложения. Он состоит в определении и последующем суммировании, т. е. наложении, токов ветвей от каждой э.д.с. в отдельности. При этом остальные э.д.с. приравниваются нулю, т. е. нужно представить себе *замкнутыми накоротко* точки цепи, между которыми действуют эти э.д.с. (например, точки *a* и *b* на рис. 73); тогда от этих источников в цепи остаются только их внутренние сопротивления.

Напряжение на каком-либо участке цепи с сопротивлением *R* равно

$$U = IR = I'R + I''R + \dots = U' + U'' + \dots,$$

т. е. напряжение на участке цепи равно алгебраической сумме напряжений для каждой составляющей тока; следовательно, и при определении напряжений может быть применен метод наложения.

Суммируя токи от отдельных групп э.д.с., можно прийти к заключению, что метод наложения справедлив также и для токов и для напряжений от отдельных групп э.д.с., на которые можно произвольно разбить все э.д.с., действующие в цепи.

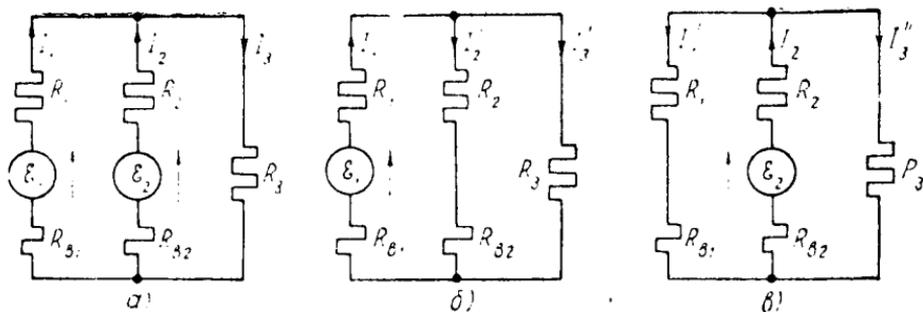


Рис. 77

Метод наложения целесообразно применять в том случае, если, приравнявая нулю все э.д.с., кроме одной (или их группы), упрощают цепь. Например, для цепи рис. 77а при  $E_2 = 0$  или  $E_1 = 0$  получаются соответственно параллельно-последовательные цепи рис. 77б и рис. 77в, легко рассчитываемые методом эквивалентных цепей (§ 26). При этом действительное направление составляющих токов определяется направлением э.д.с. и, выбирая про-

извольно направления результирующих токов, при наложении следует совпадающие с ними по знаку составляющие брать положительными и наоборот. Так, для направлений токов, указанных на рис. 77,

$$I_1 = I_1' - I_1''; \quad I_2 = -I_2' + I_2''; \quad I_3 = I_3' + I_3''.$$

Принцип наложения, как видно из его доказательства, основан на линейном характере уравнений по законам Ома и Кирхгофа при постоянстве коэффициентов уравнений, т. е. сопротивлений цепи.

Очевидно, что принцип наложения справедлив и для случая, когда источниками энергии являются источники тока (рис. 72). Применяя метод наложения в этом случае и считая, например, несуществующим источник в какой-либо ветви, т. е. принимая его внутренний ток  $J=0$ , следует представить себе цепь этого тока *разомкнутой*; тогда от этого источника в цепи остается только его внутренняя проводимость  $G_d$  (рис. 78).

Необходимо отметить, что наложение неприменимо для мощностей, так как они являются квадратичными функциями токов и напряжений.

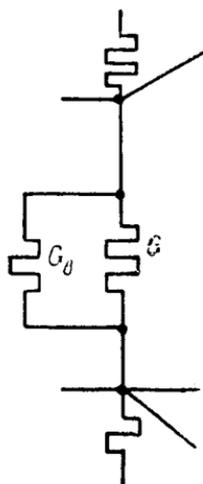


Рис. 78

### § 31. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОГО ИСТОЧНИКА ЭНЕРГИИ

В том случае, когда нужно определить ток какой-либо одной ветви  $ab$  сложной цепи (рис. 79а), можно считать эту ветвь нагрузкой для сложного источника, которым является вся остальная часть цепи, состоящая из отдельных источников напряжения и сопротивлений (заклучена в пунктирную рамку на рис. 79а).

Из схемы простого источника напряжения (рис. 80а) видно, что его э.д.с.  $\mathcal{E}$  равна напряжению  $U_0$  на его зажимах при холостом ходе, т. е. при разомкнутой ветви  $R_{ab}$  (рис. 80б), а внутреннее сопротивление  $R_s$  равно сопротивлению  $R_k$  его цепи при коротком замыкании э.д.с.  $\mathcal{E}$  (рис. 80в); тогда ток ветви  $ab$  (рис. 80а)

$$I_{ab} = \frac{\mathcal{E}}{R_{ab} + R_s} = \frac{U_0}{R_{ab} + R_k}.$$

По аналогии для тока ветви  $ab$ , питаемой сложным источником напряжения (рис. 79а), также можно написать:

$$I_{ab} = \frac{U_0}{R_{ab} + R_{\kappa}},$$

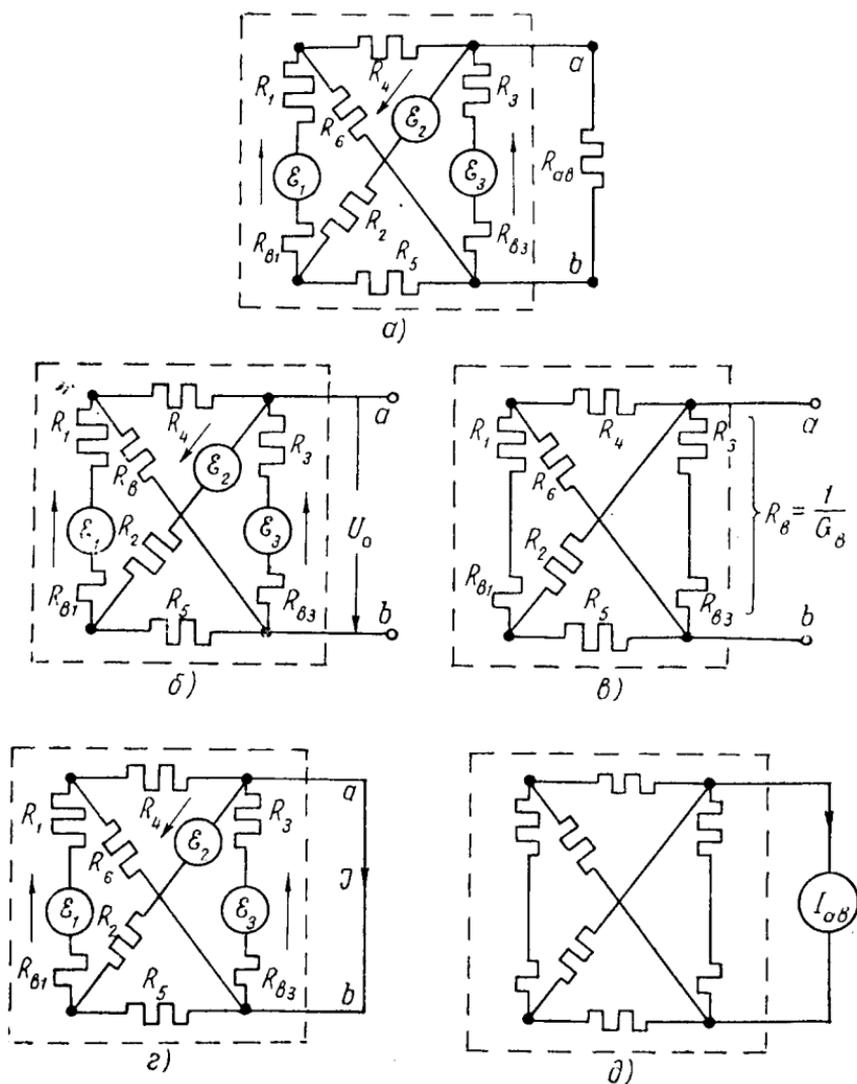


Рис. 79

где  $U_0$  — напряжение между зажимами  $a$  и  $b$  при разомкнутой ветви (рис. 79б), а  $R_{\kappa} = R_{\delta}$  — сопротивление цепи сложного источника относительно точек  $a$  и  $b$  при всех источниках э.д.с., замкнутых

накоротко и всех разомкнутых источниках тока, когда от этих отдельных источников в цепи остаются лишь их внутренние сопротивления (рис. 79в).

Таким образом, для вычисления тока какой-либо ветви цепи по методу эквивалентного источника напряжения необходимо предварительно решить более простые задачи: определение на-

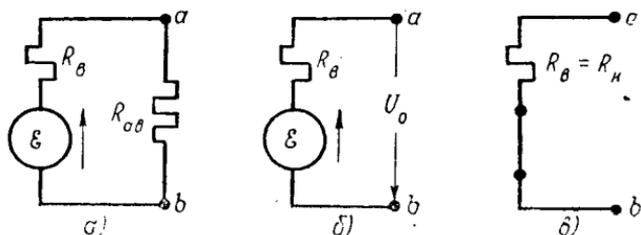


Рис. 80

пряжения  $U_0$  для цепи, имеющей на одну ветвь меньше, чем исходная цепь, и определение сопротивления  $R_κ$  этой упрощенной цепи при отсутствии в ней всех э.д.с. и внутренних токов источников. В замене сложной задачи двумя более простыми и заключается преимущество метода эквивалентного источника.

Примером применения метода эквивалентного источника напряжения может служить задача определения тока  $I_{ab}$  в диагональной ветви неуравновешенного моста (рис. 81а) при пренебрежении внутренним сопротивлением источника, питающего цепь. Размыкание ветви  $ab$  с целью определения напряжения  $U_0$  (рис. 81б) и замыкание накоротко зажимов  $c$  и  $d$  с целью определения сопротивления цепи между точками  $a$  и  $b$  (рис. 81в) превращает сложную исходную цепь в две последовательно-параллельные цепи, легко решаемые методом эквивалентных цепей:

$$U_0 = U_1 - U_3 = U \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right);$$

$$R_κ = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4};$$

тогда искомый ток

$$I_{ab} = \frac{U \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right)}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} + R_{ab}}.$$

Сложный источник может быть представлен также, как источник тока. Из схемы простого источника тока (рис. 82а) видно, что его внутренний ток  $J$  равен току  $I_{\kappa}$  внешней цепи при ее

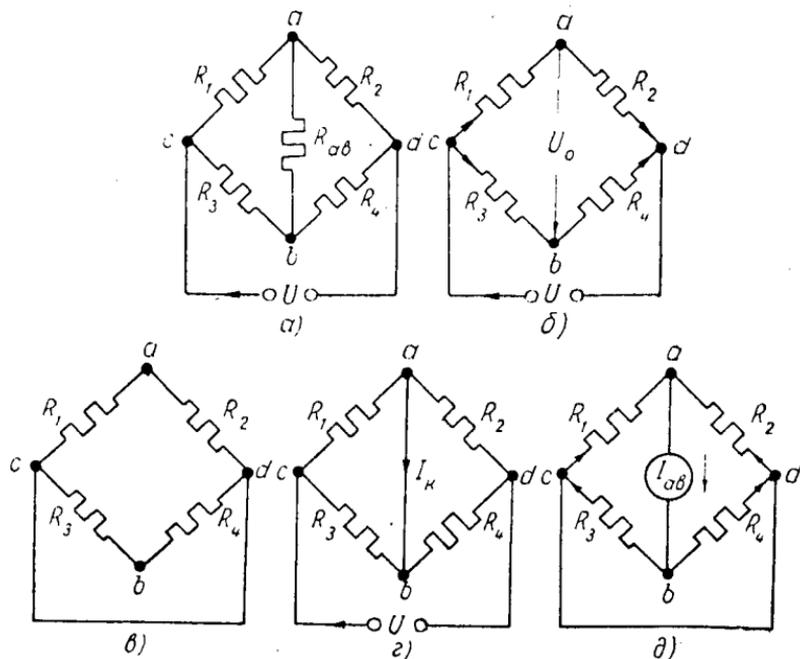


Рис. 81

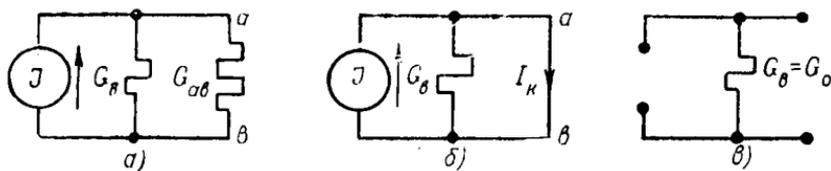


Рис. 82

коротком замыкании (рис. 82б), а внутренняя проводимость  $G_n$  равна его проводимости  $G_0$  при размыкании цепи тока  $J$  (рис. 82в). Тогда напряжение ветви  $ab$  рис. 82а

$$U_{ab} = \frac{J}{G_{ab} + G_n} = \frac{I_{\kappa}}{G_{ab} + G_0}$$

По аналогии для напряжения ветви  $ab$ , питаемой сложным источником тока, также можно написать

$$U_{ab} = \frac{I_k}{G_{ab} + G_0},$$

где  $I_k = J$  — ток ветви  $ab$  при ее коротком замыкании (рис. 79г); внутренняя проводимость  $G_0$  цепи сложного источника относительно точек  $a$  и  $b$  определяется при коротком замыкании э.д.с. всех источников напряжения и размыкании генерирующих ветвей всех источников тока цепи (рис. 79в).

Применение метода эквивалентного источника тока имеет также преимущество упрощения задачи. Например, в задаче о неуравновешенном мосте (рис. 81а) короткое замыкание ветви превращает цепь в параллельно-последовательную (рис. 81г) и вычисление тока  $I_k$  не представляет затруднений.

Методы эквивалентного источника напряжения или тока особенно удобны, если надо определить ток  $I_{ab}$  или напряжение  $U_{ab}$  одной ветви при нескольких значениях ее сопротивления  $R_{ab}$  или проводимости  $G_{ab}$ ; такая задача часто встречается в практике, так как нагрузка обычно бывает переменной (§ 25). Тогда в простых формулах для  $I_{ab}$  и  $U_{ab}$  придется изменять лишь значения  $R_{ab}$  или  $G_{ab}$ , оставляя без изменения остальные, раз навсегда вычисленные для этой цепи величины.

В случае, когда необходимо также определить токи или напряжения остальных ветвей цепи, можно рассматривать ветвь, ток которой найден, как источник тока с внутренним током, равным найденному. Применяя метод наложения в два этапа, можно сначала рассчитать все токи, считая существующими все остальные источники и разомкнув упомянутый выше, тем самым упростив цепь по сравнению с исходной; при этом могут быть использованы данные расчетов, связанные с определением  $U_0$  по методу эквивалентного источника для этой ветви (рис. 79б). Затем э.д.с. всех источников принимаются равными нулю и для цепи рис. 79в, но питаемой током  $I_{ab} = J$  (рис. 79д), также рассчитываются токи всех ветвей, после чего производится наложение.

В качестве примера ниже рассматривается задача определения токов в ветвях неуравновешенного моста (рис. 81а) после того, как определен ток  $I_{ab}$  диагонали. Токи ветвей при разомкнутой диагонали (рис. 81б)

$$I_1' = I_2' = \frac{U}{R_1 + R_2}; \quad I_3' = I_4' = \frac{U}{R_3 + R_4}.$$

Токи ветвей при замкнутом накоротко источнике напряжения  $U$  и наличии источника тока  $I_{ab}$  (рис. 81д):

$$I_1'' = I_{ab} \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad I_2'' = I_{ab} \frac{R_1}{R_1 + R_2}; \quad I_3'' = I_{ab} \frac{R_4}{R_3 + R_4};$$

$$I_4'' = I_{ab} \frac{R_3}{R_3 + R_4}.$$

Далее производится наложение с учетом направлений токов, например:

$$I_1 = I_1' + I_1'' = \frac{U + I_{ab}R_2}{R_1 + R_2}; \quad I_3 = I_3' - I_3'' = \frac{U - I_{ab}R_4}{R_3 + R_4}.$$

## § 32. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ И ИХ РАСЧЕТ

### 1. Характеристики нелинейных элементов электрических цепей

Как известно (§ 21), *линейными* называются те элементы электрической цепи, электрическое сопротивление которых постоянно; для них зависимость напряжения от тока, обычно называемая *вольтамперной характеристикой*, представляет собой прямую, проходящую через начало координат (рис. 83). Вольт-

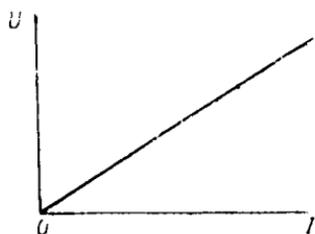


Рис. 83

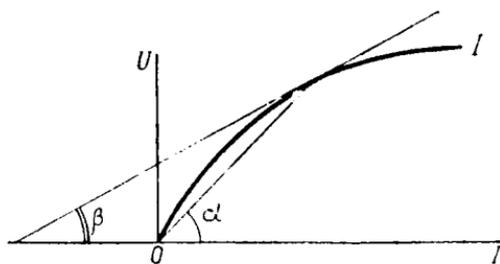


Рис. 84

амперная характеристика *нелинейных* элементов отлична от прямой (рис. 84). По аналогии с нелинейными конденсаторами нелинейные элементы характеризуют статическим и динамическим сопротивлениями или обратными им проводимостями.

*Статическое сопротивление* в какой-либо точке характеристики (рис. 84)

$$R_{cm} = \frac{U}{I} = k \operatorname{tg} \alpha$$

пропорционально тангенсу угла  $\alpha$  наклона секущей в этой точке.

$$R_{\partial} = \frac{dU}{dI} = k \operatorname{tg} \beta$$

пропорционально тангенсу угла  $\beta$  наклона касательной в данной точке характеристики.

Примером нелинейных элементов могут служить лампы накаливания с нитью из вольфрама, имеющего положительный температурный коэффициент сопротивления (характеристика 1, рис. 85), и из угля, температурный коэффициент сопротивления которого отрицателен (характеристика 2, рис. 85). На рис. 86 изображена вольтамперная характеристика бареттера—железной нити, помещенной в сосуд, заполненный водородом; в опреде-

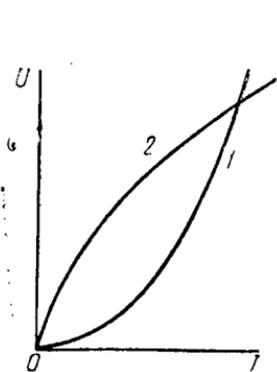


Рис. 85

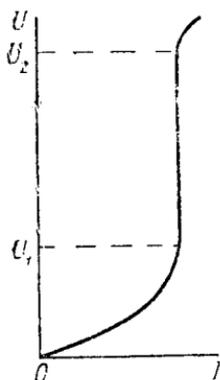


Рис. 86

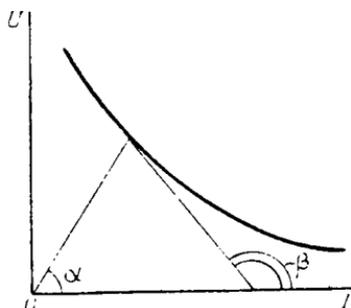


Рис. 87

ленных пределах изменения напряжения (от  $U_1$  до  $U_2$ ) ток не изменяется, что используется для стабилизации тока в цепях. Электрическая дуга имеет падающую вольтамперную характеристику (рис. 87); интересно отметить, что для падающей характеристики динамическое сопротивление  $R_{\partial} = k \operatorname{tg} \beta$  становится отрицательным, тогда как статическое сопротивление  $R_{cm} = k \operatorname{tg} \alpha$  по-прежнему положительно.

Во всех рассмотренных случаях вольтамперная характеристика симметрична относительно осей кривой, т. е. при перемене знака тока вид зависимости  $U(I)$  сохраняется и изменяется лишь знак напряжения. Примером несимметричной вольтамперной характеристики может служить характеристика полупроводникового выпрямителя (рис. 88), при том же значении напряжения пропускающего в одном направлении большой, а в другом—малый ток. Несимметрична также характеристика двух-

лект родной электронной лампы (рис. 89), обратный ток которой равен нулю.

Как видно из приведенных примеров, нелинейными являются многочисленные устройства, широко применяемые в электро-

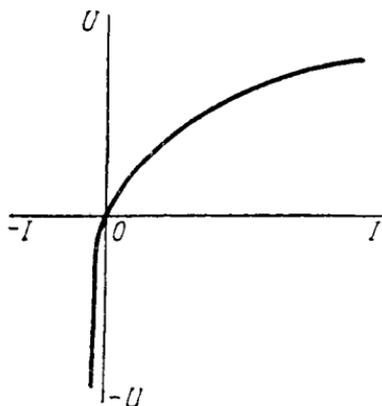


Рис. 88

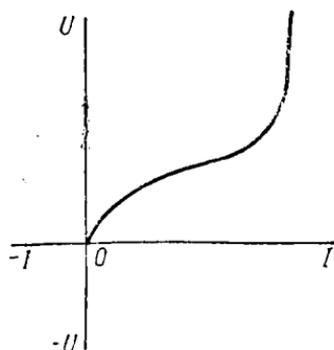


Рис. 89

технике, в связи с чем необходимо уметь рассчитывать электрические цепи с нелинейными элементами.

## 2. Расчет нелинейных цепей приведением к линейным

Такое приведение можно сделать, если нелинейные элементы цепи работают в узком диапазоне напряжений и токов, где соответствующие участки вольт-амперных характеристик близки к прямым.

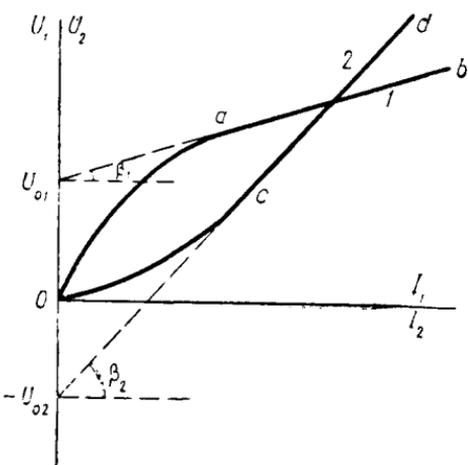


Рис. 90

Пусть это, например, имеет место для участков  $ab$  и  $cd$  характеристик  $I$  и  $2$  (рис. 90) нелинейных элементов  $R_1$  и  $R_2$  цепи рис. 91а. Так как продолжения этих прямых составляют с осью токов углы  $\beta_1$  и  $\beta_2$  и пересекают ось напряжений в точках  $U_{01}$  и  $-U_{02}$ , уравнения прямых получают следующий вид:

$$U_1 = U_{01} + I_1 k \operatorname{tg} \beta_1 = U_{01} + I_1 R_{\partial 1},$$

$$U_2 =$$

$$= -U_{02} + I_2 k \operatorname{tg} \beta_2 = -U_{02} + I_2 R_{\partial 2},$$

где  $R_{\partial 1}$  и  $R_{\partial 2}$  — динамические сопротивления этих элементов, имеющие постоянные значения на участках  $ab$  и  $cd$ .

Следовательно, каждый нелинейный элемент может быть представлен в виде эквивалентной схемы, состоящей из последовательного соединения сопротивления  $R_{01}$  или  $R_{02}$  и источника напряжения  $U_{01}$  или  $-U_{02}$ , включенного навстречу внешнему напряжению, так как последнее должно преодолеть напряжение этого источника. В результате нелинейная цепь рис. 91а заме-

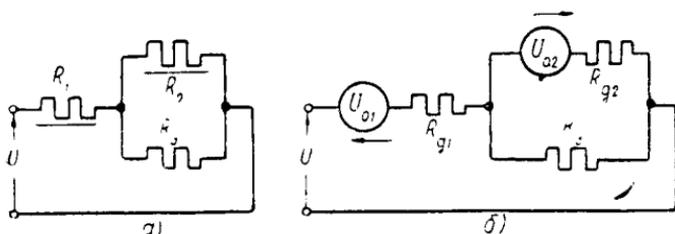


Рис. 91

няется линейной цепью рис. 91б, рассчитываемой обычными методами. Решение, очевидно, будет правильным только в том случае, если токи  $I_1$  и  $I_2$  не выйдут за пределы участков  $ab$  и  $cd$  (рис. 90).

### 3. О расчете нелинейных цепей

Применение закона Ома, дающего при расчете линейных цепей линейную связь между напряжениями и токами ветвей цепи благодаря постоянству их сопротивлений и проводимостей, при расчете нелинейных цепей возможно только в тех случаях, когда известна аналитическая зависимость указанных параметров, в этом случае переменных, от искомым напряжений и токов. Поэтому в большинстве случаев неприемлемым оказывается ряд методов расчета, описанных выше для линейных цепей и связанных с использованием закона Ома; сюда относится составление уравнений по законам Кирхгофа во второй форме записи, методы контурных токов и узловых напряжений. Метод наложения также неприменим, так как для каждой составляющей напряжения (или тока) сопротивления (проводимости) нелинейных ветвей будут различными.

Остаются применимыми законы Кирхгофа в их первой форме (§ 27):

$$\Sigma I_{\kappa} = 0, \quad (I')$$

$$\Sigma U_{\kappa} = 0. \quad (II')$$

При этом оперируют с графически заданными вольтамперными характеристиками нелинейных элементов и суммирование напряжений и токов осуществляется графически. Этот трудоемкий метод имеет одно преимущество: он обходится без сопротивле-

ний или проводимостей—величин вспомогательных, так как при расчете обычно надо определить лишь напряжения и токи. Этот метод аналогичен примененному выше при расчете различных соединений нелинейных конденсаторов (§ 14).

#### 4. Графические методы расчета нелинейных цепей

Вольтамперная характеристика одиночного нелинейного элемента (рис. 84—89) сразу позволяет определить ток по заданному напряжению или напряжение по заданному току.

При *последовательном соединении* любого числа нелинейных и линейных элементов вольтамперная характеристика всей цепи строится путем суммирования ординат характеристик отдельных элементов в соответствии с зависимостью

$$U = U_1 + U_2 + \dots$$

На рис. 92 показано такое построение для двух последовательно соединенных элементов. По характеристике всей цепи для заданного значения напряжения  $U$  определяется соответ-

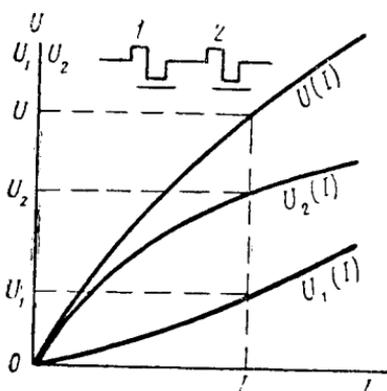


Рис. 92

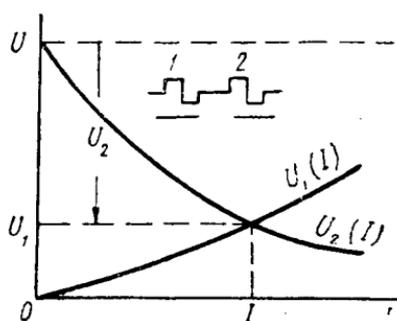


Рис. 93

ствующий ему ток  $I$ , а по нему — напряжения  $U_1$  и  $U_2$  участков цепи.

Если нужно определить ток и напряжения на участках цепи из двух приемников только при одном значении напряжения  $U$  всей цепи, нет надобности строить вольтамперную характеристику всей цепи, следует лишь отложить горизонталь для заданного значения  $U$ , а от нее вниз—характеристику  $U_2(I)$  (рис. 93); ее пересечение с характеристикой  $U_1(I)$  даст, очевидно, рабочую точку и определит тем самым ток  $I$  цепи и напряжения  $U_1$  и  $U_2$  на участках.

При *параллельном соединении* нескольких линейных и нелинейных элементов вольтамперная характеристика всей цепи

строится путем суммирования абсцисс характеристик отдельных элементов в соответствии с зависимостью

$$I = I_1 + I_2 + \dots$$

На рис. 94 показано такое построение для двух параллельно соединенных элементов. По характеристике для всей цепи для

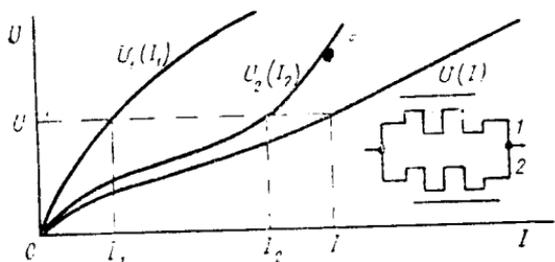


Рис. 94

любого заданного тока  $I$  определяется напряжение  $U$ , а по нему — токи  $I_1$  и  $I_2$  участков цепи. Для определения токов ветвей только при одном значении тока всей цепи можно применить очевидное упрощенное построение, аналогичное рис. 93.

Если сложная цепь содержит одну нелинейную ветвь, ток которой подлежит определению, для расчета может быть применен метод эквивалентного источника (§ 31): вся цепь, кроме нелинейной ветви, заменяется эквивалентным источником напряжения или тока, после чего задача сводится к только что рассмотренной задаче последовательного или параллельного соединения двух элементов — нелинейной ветви и внутреннего сопротивления (проводимости) эквивалентного источника.

При *смешанном соединении*, например при расчете цепи рис. 95, также строится вольтамперная характеристика всей цепи

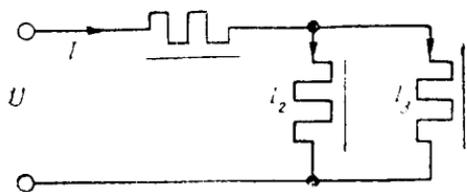


Рис. 95

по характеристикам отдельных элементов (рис. 96). Сначала суммированием абсцисс, т. е. токов  $I_2$  и  $I_3$ , строится характеристика параллельного разветвления  $U_{23}(I_1)$ , затем суммированием ординат этой характеристики и характеристики  $U_1(I_1)$ , т. е. напряжений

$U_{23}$  и  $U_1$ , строится характеристика всей цепи. По ней для заданного напряжения  $U$  всей цепи определяется ее ток  $I_1$ , для него по характеристикам  $U_1(I_1)$  и  $U_{23}(I_1)$  — напряжения  $U_1$  и  $U_{23}$  участков, а для  $U_{23}$  по характеристикам  $U_2(I_2)$  и  $U_3(I_3)$  — токи  $I_2$  и  $I_3$ .



## ГЛАВА VI

### МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Обе стороны электромагнитного поля—электрическое и магнитное поля, как уже было указано выше (гл. I), при известных условиях могут рассматриваться в отдельности.

Постоянное магнитное поле связано с постоянным током, т. е. движущимися зарядами, и поэтому магнитное поле в отдельности можно рассматривать, лишь пренебрегая сопутствующим ему электрическим полем. Именно с такой точки зрения и производится ниже изучение свойств магнитного поля.

Как и электрическое поле, магнитное поле может быть охарактеризовано векторными и скалярными величинами. Несмотря на различие в свойствах электрического и магнитного полей и физически иное поведение различных сред в этих полях, их описывают с помощью аналогичных величин.

Поведение среды в магнитном поле определяется ее *магнитной проницаемостью*  $\mu$ , измеряемой в системе МКСА в генри на метр ( $гн/м$ ), где генри — единица индуктивности в системе МКСА. Для пустоты в этой системе принимается значение магнитной проницаемости  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} гн/м$ , тогда как в системе СГС  $\mu_0 = 1$ , а в СГС  $\mu_0 = \frac{10^{-20}}{9} сек/см$ . Значение магнитной проницаемости  $\mu_s$  для воздуха столь мало отличается от проницаемости пустоты, что во всех технических расчетах принимается  $\mu_s = \mu_0$ . Так же, как и в электрическом поле, в магнитном поле вводится относительная магнитная проницаемость  $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$ ; численное значение этой величины совпадает со значением магнитной проницаемости в системе СГС  $\mu_0$ .

Исторически величины, характеризующие магнитное поле, были введены, когда господствовало представление о магнитных зарядах (массах), рассматриваемых как источники магнитного поля и подобных электрическим зарядам в электрическом поле. Поэтому *напряженность поля*  $H$  определялась как сила, действующая на единичную магнитную массу.

По аналогии с электрическим полем магнитное поле обычно характеризуется двумя векторными величинами: упомянутым вектором напряженности поля  $\vec{H}$  и вектором *магнитной индукции*

$$\vec{B} = \mu \vec{H},$$

измеряемыми в системе МКСА соответственно в амперах на метр ( $a/m$ ) и веберах на квадратный метр ( $вб/м^2$ ). Ниже (§ 49) будет дано иное определение этих величин.

В однородной и изотропной среде оба вектора совпадают по направлению, в анизотропной — не совпадают.

### § 33. ЗАКОН БИО—САВАРА—ЛАПЛАСА

Основным законом магнитного поля является экспериментально установленный закон Био—Савара—Лапласа, дающий количественную связь между током и напряженностью поля. Согласно этому закону напряженность поля в точке  $M$  (рис. 99), соответствующая току  $i$  в элементе длины  $dl$  проводника, будет

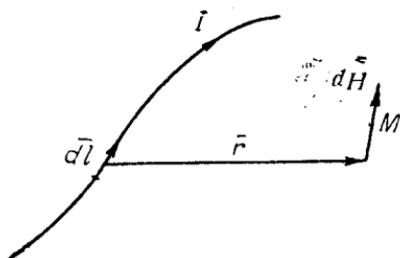


Рис. 99

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{i \left[ d\vec{l} \frac{\vec{r}}{r} \right]}{r^2},$$

здесь  $d\vec{l}$  является вектором, направление которого совпадает с направлением тока, а вектор  $\vec{r}$  направлен от элемента  $d\vec{l}$  с током к точке  $M$ .

Направление вектора  $d\vec{H}$  в соответствии с векторным произведением определяется правилом правого винта: при вращении правого винта от направления тока ( $d\vec{l}$ ) к вектору  $\vec{r}$  поступательное движение винта соответствует направлению вектора  $d\vec{H}$  в данной точке.

Этот закон, установленный впервые для токов проводимости, является справедливым и для токов конвекции и смещения, как это было подтверждено А. А. Эйхенвальдом и А. Ф. Иоффе к началу этого столетия. Закон Био—Савара—Лапласа одинаково применим к переменным и к постоянным токам.

Напряженность поля в точке  $M$  от всего проводника с током, если его величина остается неизменной по всей длине проводника,

$$\vec{H} = \frac{i}{4\pi} \int \frac{\left[ d\vec{l} \frac{\vec{r}}{r} \right]}{r^2}.$$

Строго говоря, интегрирование в законе Био—Савара—Лапласа должно проводиться по замкнутому контуру, так как цепь тока всегда замкнута. Однако можно применять этот закон для отдельных частей замкнутого контура, если остальная часть контура в рассматриваемой точке поля не создает, например заэкранирована.

Закон Био—Савара—Лапласа может быть непосредственно использован для расчета магнитных полей; однако его применение практически ограничено лишь случаями контуров простой формы, так как в противном случае вычисление интеграла представляет большие трудности.

#### § 34. МАГНИТНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ. МАГНИТНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ

Аналогично потенциалу  $\varphi$  в электростатическом поле (§ 3) можно ввести скалярную величину для характеристики магнитного поля — *магнитный потенциал*  $\varphi_m$ :

$$\vec{H} = -\text{grad } \varphi_m.$$

Разность магнитных потенциалов

$$\varphi_{ma} - \varphi_{mb} = \int_a^b \vec{H} d\vec{l},$$

где  $d\vec{l}$  — элемент длины, называется *магнитным напряжением*, или *намагничивающей силой* (н. с.). Магнитный потенциал и магнитное напряжение измеряются в системе МКСА в амперах ( $\frac{a}{m} \text{ м} \equiv a$ ).

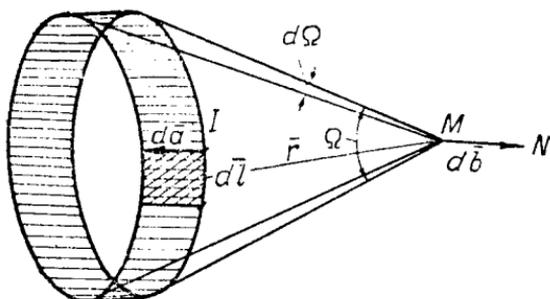


Рис. 100

Магнитный потенциал контура с током (рис. 100) может быть вычислен непосредственно из закона Био—Савара—Лапласа. В магнитном поле контура с током  $I$  (рис. 100) перемещению

из точки  $M$  в точку  $N$  на расстояние  $\overline{db}$  соответствует изменение магнитного потенциала на

$$d\varphi_m = -\overline{H} \overline{db},$$

где  $\overline{H}$ —напряженность поля в точке  $M$ .

Очевидно, такое же изменение потенциала получится в точке  $M$ , если контур переместится параллельно самому себе в обратном направлении на величину  $\overline{da} = -\overline{db}$ , т. е.

$$d\varphi_m = \overline{H} \overline{da}.$$

Подстановка выражения для  $\overline{H}$  по закону Био—Савара—Лапласа дает

$$d\varphi_m = \overline{H} \overline{da} = \frac{I \overline{da}}{4\pi} \int \frac{\left[ \overline{d\vec{l}} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right]}{r^3}.$$

Так как величина перемещения контура  $\overline{da}$  не зависит от переменной интегрирования  $l$ , то  $\overline{da}$  может быть внесена под знак интеграла. Затем, пользуясь правилом перестановки двойного произведения векторов, можно получить

$$\begin{aligned} d\varphi_m &= \frac{I}{4\pi} \int_l \overline{da} \frac{\left[ \overline{d\vec{l}} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right]}{r^2} = \frac{I}{4\pi} \int_l \frac{[\overline{da} \overline{d\vec{l}}] \vec{r}}{r^3} = \\ &= \frac{I}{4\pi} \int_l \frac{d\vec{S} \vec{r}}{r^3} = \frac{I}{4\pi} \int_l \frac{dS \cos(d\vec{S} \vec{r})}{r^2}, \end{aligned}$$

где  $d\vec{S} = [\overline{da} \overline{d\vec{l}}]$  представляет собой элемент площади, описанной элементом длины  $\overline{d\vec{l}}$  контура при его перемещении на  $\overline{da}$  (на рис. 100 заштрихован накрест).

Подинтегральное выражение имеет простой геометрический смысл:  $dS \cos(d\vec{S} \vec{r}) = dS_{\text{эф}}$  представляет собой проекцию элемента поверхности  $dS$  на поверхность сферы радиуса  $r$ , а отношение  $\frac{dS_{\text{эф}}}{r^2}$  является телесным углом, под которым из точки

$M$  виден элемент поверхности  $dS$ . Весь интеграл равен бесконечно малому телесному углу  $d\Omega$ , под которым видна из точки  $M$  бесконечно узкая поверхность (на рис. 100 заштрихована горизонтально), образовавшаяся при перемещении всего контура параллельно самому себе на бесконечно малое расстояние  $\overline{da}$ .

Другими словами,  $d\Omega$  есть изменение телесного угла  $\Omega$ , под которым виден весь контур из точки  $M$ . Следовательно,

$$d\varphi_m = \frac{I}{4\pi} d\Omega, \quad \text{а} \quad \varphi_m = \frac{I}{4\pi} \Omega + \text{const.}$$

Принятие магнитного потенциала бесконечно удаленной точки, где  $\Omega=0$ , равным нулю, обращает в нуль постоянную интегрирования и

$$\varphi_m = \frac{I}{4\pi} \Omega,$$

т. е. магнитный потенциал контура с током определяется током и телесным углом, под которым виден контур из данной точки; телесный угол считается положительным, если при наблюдении из точки  $M$  ток контура направлен против часовой стрелки.

В отличие от электрического потенциала магнитный потенциал является функцией многозначной. Это можно доказать, вычисляя н.с.  $F$  по замкнутому пути, т. е. циркуляцию вектора  $\vec{H}$ ; для принятого на рис. 101 направления тока

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \varphi_{mA} - \varphi'_{mA} = \frac{I}{4\pi} (\Omega' - \Omega),$$

где  $\varphi_{mA}$  и  $\varphi'_{mA}$  — значения магнитного потенциала, а  $\Omega$  и  $\Omega'$  — абсолютные значения телесного угла в точке  $A$  до и после обхода по замкнутому пути.

При обходе по пути  $ABCD$  (рис. 101а), не сцепляющемся с контуром тока, по мере приближения к контуру телесный угол (на рис. 101 условно изображен черным сектором) растет, достигая наибольшего значения в точке  $C$ , а затем уменьшается, принимая в исходной точке  $A$  первоначальное значение; следовательно,

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \varphi_{mA} - \varphi'_{mA} = 0.$$

Таким образом, в этом случае магнитный потенциал, как и электростатический, однозначен и магнитное поле вне пространства, занятого токами, может рассматриваться как потенциальное (безвихревое).

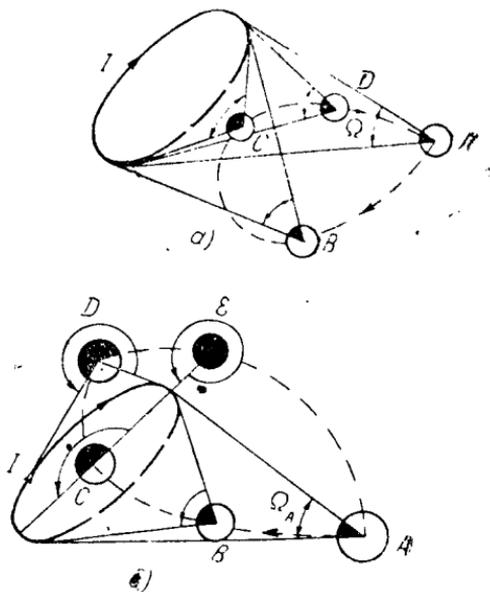


Рис. 101

Обход по пути  $ABCDEA$ , сцепляющемся с контуром (рис. 101б), сопровождается неизменным возрастанием телесного угла. В точке  $C$ , лежащей в плоскости контура внутри него, телесный угол составляет  $2\pi$  стерадиан. По выходе из плоскости контура в точку  $D$  и далее телесный угол при том же направлении его отсчета продолжает расти, становясь больше  $2\pi$ ; в точке  $E$ , лежащей в плоскости контура, но вне его, телесный угол принимает значение, равное  $4\pi$ . С приближением к точке  $A$  телесный угол продолжает расти и в точке  $A$  становится больше исходного на  $4\pi$ .

Таким образом, обход по пути, сцепляющемся с контуром тока, приводит к соотношению

$$\oint \bar{H} d\bar{l} = \varphi_{mA} - \varphi'_{mA} = \frac{I}{4\pi} (\Omega + 4\pi - \Omega) = I,$$

указывающему на вихревой характер магнитного поля. Если обойти контур  $k$  раз, магнитный потенциал становится многозначной функцией, принимая в одной и той же точке значения, отличающиеся на  $kI$ . Многозначный потенциал непригоден для расчета магнитного поля.

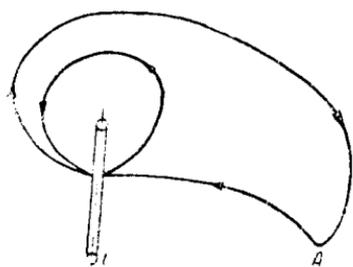


Рис. 102

Чтобы избежать многозначности, препятствующей использованию магнитного потенциала, необходимо, выбирая путь интегрирования, не сцепляющийся с контуром тока, т. е. не пересекающий плоскость контура внутри него. При необходимости перехода на другую сторону этой плоскости путь интегрирования должен обойти контур снаружи, не заходя в особую точку, лежащую внутри контура в его плоскости (рис. 102, стрелкой указано направление обхода).

Так же, как и электрическое поле, магнитное поле может быть изображено графически линиями вектора напряженности поля (силовыми линиями), линиями вектора магнитной индукции (индукционными линиями) и эквипотенциальными поверхностями, нормальными к первым двум.

### § 35. ЗАКОН ПОЛНОГО ТОКА

Равенство (§ 34)

$$\oint \bar{H} d\bar{l} = I,$$

устанавливающее связь между напряженностью магнитного поля

и током в иной форме, чем в законе Био—Савара—Лапласа, называется *законом полного тока*.

В случае многих контуров в соответствии с принципом наложения

$$\oint \bar{H} d\bar{l} = \Sigma I_k = I;$$

в правой части стоит *полный ток*—алгебраическая сумма токов, сцепляющихся с путем интегрирования, причем за положительное принимается направление тока, связанное с направлением обхода правилом правого винта. При многократном сцеплении с каким-либо контуром у тока этого контура появляется соответствующий множитель; например, для случая рис. 103

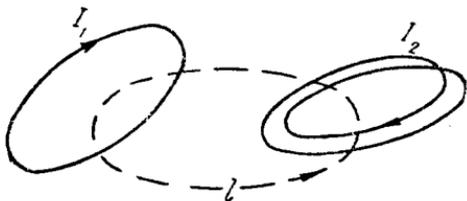


Рис. 103

$$\oint \bar{H} d\bar{l} = I_1 - 2I_2.$$

В правую часть закона полного тока входят все токи, охватываемые путём интегрирования, независимо от их природы, т. е. токи проводимости, смещения и конвекции.

Закон полного тока также используется для расчета магнитного поля, однако и его применение ограничено из-за тех же затруднений, что и при использовании закона Био—Савара—Лапласа.

## § 36. МАГНИТНЫЙ ПОТОК. ПОТОКОСЦЕПЛЕНИЕ

Поток вектора магнитной индукции

$$\Phi = \int \bar{B} d\bar{S}$$

называется *магнитным потоком* и играет важную роль в технических расчетах; в системе МКСА магнитный поток измеряется в веберах (*вб*).

По теореме Гаусса поток вектора смещения через замкнутую поверхность равен свободному электрическому заряду, заключенному внутри этой поверхности. Так как свободных и связанных магнитных зарядов (магнитных масс) не существует, магнитный поток через замкнутую поверхность в любой среде равен нулю:

$$\oint \bar{B} d\bar{S} = 0,$$

что выражает условие непрерывности магнитного потока; это равенство является теоремой Гаусса для магнитного поля.

В расчетах широко используется *потокосцепление*, равное сумме произведений потока на число витков контура, сцепляющихся с этим потоком:

$$\Psi = \Sigma \Phi w;$$

Оно имеет ту же размерность, что и магнитный поток.

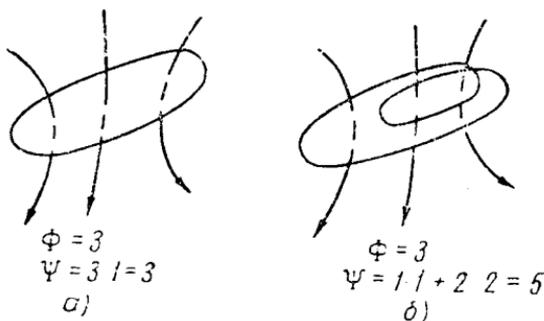


Рис. 104

На рис. 104 пояснено различие между потоком и потокосцеплением, причем число изображенных линий в условном масштабе равно величине потока.

## § 37. ИНДУКТИВНОСТЬ И ВЗАИМОИНДУКТИВНОСТЬ

### 1. Индуктивность

Для уединенного контура потокосцепление пропорционально току, что можно показать на примере контура из  $w$  одинаковых витков. Так как здесь полный ток равен  $wI$ ,

$$\begin{aligned} \Psi &= \Phi w = w \int_{\bar{S}} \bar{B} d\bar{S} = w \mu \int_{\bar{S}} \bar{H} d\bar{S} = \\ &= \frac{\mu w^2 I}{4\pi} \int_{\bar{S}} \int_l \left[ \frac{d\bar{l} \frac{\bar{r}}{r}}{r^2} \right] d\bar{S} = LI; \end{aligned}$$

коэффициент пропорциональности между потокосцеплением и током

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu w^2}{4\pi} \int_{\bar{S}} \int_l \left[ \frac{d\bar{l} \frac{\bar{r}}{r}}{r^2} \right] d\bar{S}$$

называется *коэффициентом самоиндукции*, или *индуктивностью* контура.

Таким образом, индуктивность контура, численно равная потокосцеплению при токе, равном единице, определяется конфигурацией контура, пропорциональна квадрату числа витков и магнитной проницаемости среды, в которой он находится.

В системе МКСА индуктивность измеряется в генри (гн).

## 2. Взаимоиндуктивность

В случае двух контуров, имеющих  $\omega_1$  и  $\omega_2$  витков с токами  $I_1$  и  $I_2$  (рис. 105), поток первого контура, определяемый

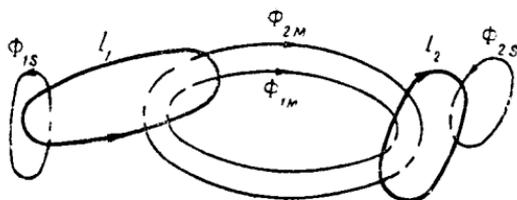


Рис. 105

током этого контура, — *поток самоиндукции*  $\Phi_{11}$  может быть разложен на *поток рассеяния*  $\Phi_{1S}$ , пронизывающий только этот контур, и *поток взаимной индукции*  $\Phi_{1M}$ , пронизывающий также и второй контур:

$$\Phi_{11} = \Phi_{1S} + \Phi_{1M};$$

потокосцепление, соответствующее потоку  $\Phi_{11}$ ,

$$\Psi_{11} = \Phi_{11} \omega_1 = L_1 I_1,$$

а потокосцепление рассеяния

$$\Psi_{1S} = \Phi_{1S} \omega_1.$$

Аналогично для второго контура

$$\Phi_{22} = \Phi_{2S} + \Phi_{2M},$$

$$\Psi_{22} = \Phi_{22} \omega_2 = L_2 I_2,$$

$$\Psi_{2S} = \Phi_{2S} \omega_2.$$

Потокосцепление второго контура, определяемое током первого, если  $r_{12}$  расстояние от элемента длины первого контура до элемента поверхности второго,

$$\Psi_{21} = \Phi_{1M} \omega_2 = \omega_2 \int_{S_2} \bar{B}_1 d\bar{S}_2 = \frac{\omega_1 \omega_2 I_1}{4\pi} \int_{S_2} \int_{l_1} \left[ \frac{d\bar{l}_1 \cdot \bar{r}_{12}}{r_{12}^2} \right] d\bar{S}_2 = M_{21} I_1,$$



## ГЛАВА VII

### РАСЧЕТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

#### § 38. РАСЧЕТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ, НЕ ЗАНЯТОМ ТОКАМИ И ПОСТОЯННЫМИ МАГНИТАМИ. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ

Расчет магнитного поля заключается в определении по заданному распределению токов и постоянных магнитов величин, характеризующих поле: напряженности и индукции; по ним вычисляются индуктивности и взаимоиנדуктивности.

В большом числе практических задач представляет интерес расчет магнитного поля лишь в ограниченной части пространства вне контуров с токами и вне постоянных магнитов. Несмотря на то, что магнитное поле является вихревым полем ( $\oint \bar{H} d\bar{l} \neq 0$ ), можно считать (§ 35), что в указанном объеме магнитное поле потенциально, и вести расчет его аналогично расчету электростатического поля.

Для многих задач расчет магнитного поля вне контуров с токами и вне постоянных магнитов упрощается, если пользоваться понятием фиктивной магнитной массы. Магнитная масса одного знака мыслится распределенной по части поверхности намагниченного тела или одной стороне контура с током (§ 39), по другой части (стороне) которого распределена масса другого знака. Каждая магнитная масса равна магнитному потоку, проходящему через соответствующую часть поверхности:

$$m = \int \bar{B} d\bar{S} = \Phi;$$

так же, как и магнитный поток, магнитная масса в системе МКСА измеряется в веберах. Отличие фиктивной картины поля от реального магнитного потока заключается лишь в том, что, хотя магнитный поток всегда непрерывен, поверхность, на которой расположена магнитная масса, условно принимается за исток или сток магнитного поля. При этом положительная магнитная масса соответствует началу (истоку) магнитного

потока, отрицательная — концу (стоку). В намагниченном теле магнитные массы разных знаков всегда должны рассматриваться одновременно; в этом смысле они подобны связанным зарядам, возникающим при поляризации диэлектрика.

Как и электрические заряды, магнитные массы могут рассматриваться как точечные, если линейные размеры тел, несущих на себе эти массы, малы по сравнению с расстоянием между ними. Для таких точечных масс, находящихся на расстоянии  $r$  в однородной среде с магнитной проницаемостью  $\mu$ , справедлив закон Кулона, т. е. сила взаимодействия между ними

$$F = \frac{m_1 m_2}{4\pi\mu r^2}.$$

На примере прямого постоянного магнита (рис. 106) видно, что замена действительного непрерывного магнитного потока (рис. 106а) магнитным потоком, соответствующим представлению

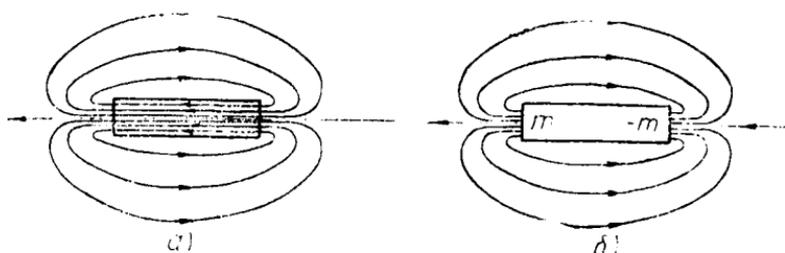


Рис. 106

о двух разноименных магнитных массах (рис. 106б), не вносит никаких изменений в характер магнитного поля вне объема, занятого самим магнитом.

Аналогия между расчетом магнитного поля вне контуров с токами и магнитов — *электростатическая аналогия* — наглядно иллюстрируется следующей таблицей.

Электростатическое поле	Магнитное поле вне токов и постоянных магнитов
$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad (\vec{E} = -\text{grad } \varphi)$ $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ $Q = \int \vec{D} d\vec{S}$ $\oint \vec{D} d\vec{S} = 0$ <p>(при отсутствии зарядов внутри рассматриваемого объема)</p>	$\oint \vec{H} d\vec{l} = 0 \quad (\vec{H} = -\text{grad } \varphi_m)$ $\vec{B} = \mu \vec{H}$ $m = \int \vec{B} d\vec{S}$ $\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$ <p>(всегда)</p>

Таким образом, при одинаковом распределении в пространстве магнитных масс и электрических зарядов, диэлектрической и магнитной проницаемостей решение задачи расчета магнитного поля может быть получено из известного решения аналогичной электростатической задачи путем замены величин, стоящих в первой строке нижеприведенной таблицы, величинами второй строки.

$E$	$\varphi$	$\epsilon$	$D$	$Q$
$H$	$\varphi_m$	$\mu$	$B$	$m$

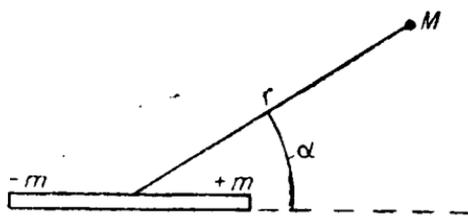


Рис. 107

Ниже рассматривается ряд примеров применения электростатической аналогии.

### 1. Прямой магнит

Прямой магнит (рис. 107), помещенный в однородную среду с магнитной проницаемостью  $\mu$ , может рассматриваться как магнитный диполь, и по аналогии с электрическим диполем (§ 9) магнитный потенциал и напряженность поля такого магнита при  $r \gg l$  соответственно равны

$$\varphi_m = \frac{p_m \cos \alpha}{4\pi\mu r^2} \quad \text{и} \quad H = \frac{p_m}{4\pi\mu r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha},$$

где  $p_m = ml$  — магнитный момент, величина, измеряемая для постоянных магнитов непосредственно (например, с помощью крутильных весов Кулона).

Такой прием замены прямого магнита магнитным диполем широко используется при рассмотрении магнитных компасов.

### 2. Поле у поверхности раздела двух сред

Задача о магнитном поле у поверхности раздела двух сред (рис. 108) при плоской границе раздела полностью аналогична рассмотренной выше задаче для электрического поля (см. § 10).

В соответствии с этим у поверхности раздела двух сред равны касательные составляющие вектора напряженности поля и равны нормальные составляющие вектора магнитной индукции:

$$H_{t1} = H_{t2}, \quad B_{n1} = B_{n2},$$

откуда соотношение между углами

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Подобно электрическому полю и в магнитном поле невозможно явление отражения, так как нет сред с  $\mu = 0$  или  $\mu = \infty$ .

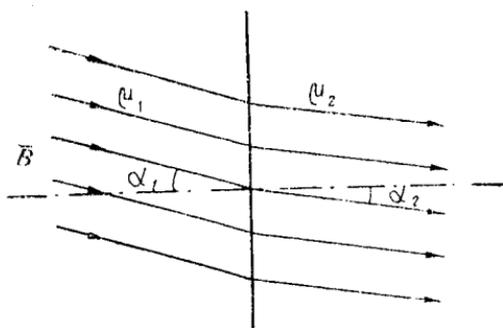


Рис. 108

даже при таком большом угле, как  $\alpha_1 = 85^\circ$ , и при  $\mu_1 = \mu_{Fe} = 1000\mu_0$ ,  $\mu_2 = \mu_0$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\mu_0}{\mu_{Fe}} \operatorname{tg} \alpha_1 = 1,14 \cdot 10^{-2} \quad \text{и} \quad \alpha_2 \approx 0^\circ 40'$$

### 3. Магнитное экранирование

В технике часто встречается необходимость защищать отдельные элементы электротехнических устройств от воздействия внешнего магнитного поля. Эта задача решается различно для постоянного и переменного поля.

При защите от постоянного магнитного поля используется так называемое *магнитное экранирование*, заключающееся в том, что экранируемый объект помещают во внутреннюю полость массивного экрана из ферромагнитного материала (рис. 109), обычно из мягкой стали. Тогда из-за большой магнитной проницаемости материала экрана большая часть поля сосредотачивается в стенке экрана, а во внутренней полости экрана поле ослабевает (рис. 109), хотя никогда не обращается в нуль.

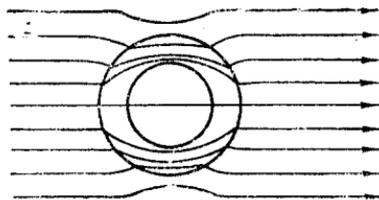


Рис. 109

#### 4. Круговой контур

Полный расчет магнитного поля кругового контура с током (рис. 110а) представляет значительные математические трудности и приводит к эллиптическим интегралам; ниже определяется лишь напряженность поля на оси контура.

Магнитный потенциал в точке  $M$  (рис. 110а), отстоящей на расстоянии  $x$  от плоскости контура радиуса  $r_0$ , определяется телесным углом (§ 34):

$$\varphi_m = \frac{I}{4\pi} \Omega = \frac{I}{4\pi} \frac{S}{r^2},$$

где  $S$ —поверхность сегмента сферы радиуса  $r$ , ограниченного контуром с током. Высота сегмента  $h = r - x$ , его поверхность  $S = 2\pi r h$ .

Так как  $r = \sqrt{r_0^2 + x^2}$ , то

$$\varphi_m = \frac{I}{2} \frac{\sqrt{r_0^2 + x^2} (\sqrt{r_0^2 + x^2} - x)}{r_0^2 + x^2} = \frac{I}{2} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{r_0^2 + x^2}} \right).$$

Ввиду осевой симметрии вектор напряженности поля направлен по оси контура. Следовательно,

$$H = H_x = - \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} = \frac{I}{2} \frac{\sqrt{r_0^2 + x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{r_0^2 + x^2}}}{r_0^2 + x^2} = \frac{I r_0^2}{2(r_0^2 + x^2)^{3/2}}.$$

В центре кругового контура ( $x = 0$ ) напряженность поля принимает наибольшее значение:

$$H_0 = \frac{I}{2r_0}.$$

Зависимость напряженности поля от расстояния до плоскости контура представлена на рис. 110б.

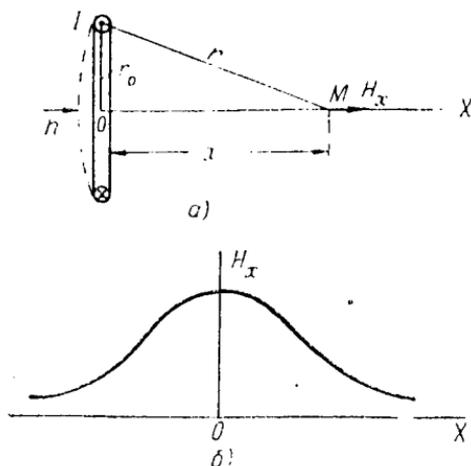


Рис. 110

### § 39. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ КОНТУРА С ТОКОМ ПОСТОЯННОМУ МАГНИТУ

Для контура, обтекаемого током  $I$  (рис. 111), магнитный потенциал в точке  $M$ , удаленной от контура на расстояние  $r$  (§ 34),

$$\varphi_m = \frac{I}{4\pi} \Omega.$$

Пусть контур ограничивают две поверхности  $S$ , расположенные друг от друга на расстоянии  $d$ , равном диаметру провода, причем  $d \ll r$ . Можно мысленно заменить ток *двойным магнитным слоем*, т. е. магнитными масса-

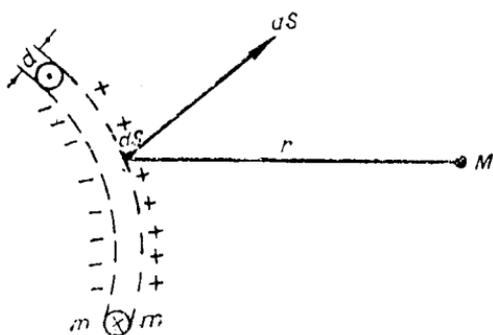


Рис. 111

мами  $m$  разных знаков, равномерно распределенными по поверхностям  $S$  и создающими такое же поле в точке  $M$ . Элемент такого двойного магнитного слоя представляет собой элементарный диполь с магнитным моментом  $\frac{m}{S} dS \cdot d = \frac{p_m}{S} dS$ ,

где  $p_m$  — магнитный момент всего слоя. Магнитный потенциал в точке  $M$ , определяемый элементарным диполем (§ 38),

$$d\varphi_m = \frac{p_m}{S} \frac{dS \cos(d\vec{S}\vec{r})}{4\pi\mu r^2},$$

где  $r$  — расстояние от элементарного диполя до точки  $M$ . Но

$$\frac{dS \cos(d\vec{S}\vec{r})}{r^2} = d\Omega$$

представляет собой телесный угол, под которым виден элемент  $dS$  из точки  $M$ , и

$$d\varphi_m = \frac{p_m}{4\pi\mu S} d\Omega.$$

Потенциал от всего двойного слоя, полагая постоянную интегрирования равной нулю,

$$\varphi_m = \frac{p_m}{4\pi\mu S} \Omega.$$

Из сопоставления этой формулы с выражением для магнитного потенциала контура с током видно, что они совпадают, если положить

$$p_m = \mu IS ;$$

при этом условии контур с током эквивалентен постоянному магниту, имеющему площадь поперечного сечения, равную поверхности, ограниченной контуром, и длину, равную диаметру провода.

Для контура из  $w$  витков магнитный потенциал в точке  $M$  равен

$$\varphi_m = \frac{I}{4\pi} \sum_{k=1}^w \Omega_k ,$$

где  $\Omega_k$  — телесный угол, соответствующий витку  $k$ .

Считая, что все витки одинаковы и расположены очень близко друг к другу, можно положить

$$\varphi_m = \frac{Iw}{4\pi} \Omega ,$$

где  $\Omega$  — телесный угол для среднего витка. Для такого контура магнитный момент равен

$$p_m = \mu IwS .$$

Замена контура с током постоянным магнитом во многих случаях позволяет упростить расчеты магнитных полей и теоретические выводы.

Выражение магнитного потенциала контура с током для точки  $M$  может быть преобразовано (рис. 112):

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \frac{I}{4\pi} \Omega = \frac{I}{4\pi} \Omega_{max} \cos \alpha = \\ &= \frac{IS \cos \alpha}{4\pi r^2} , \end{aligned}$$

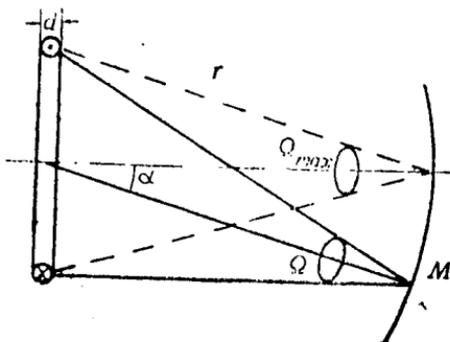


Рис. 112

где  $S$  — часть поверхности сферы радиуса  $r$ , ограниченная контуром.

Для плоского контура при больших расстояниях по сравнению с его линейными размерами поверхность  $S$  можно принять равной площади контура. Следовательно, на больших расстояниях характер поля не зависит от формы контура, определяясь только величиной площади контура. Ввиду этого можно

заменять контур с током постоянным магнитом любой формы лишь бы оставался неизменным магнитный момент.

В главе IX будет разобран в самом общем виде вопрос о вычислении сил взаимодействия в системе контуров с токами. Но уже здесь для удаленных контуров после замены их эквивалентными магнитами может

быть из закона Кулона определена сила взаимодействия между контурами.

Пусть ось  $X$  совпадает с осью катушек, направление токов одинаково, а начало отсчета лежит в центре первой катушки (рис. 113а). После замены контуров эквивалентными им магнитными диполями одинаковой длины  $d$  (рис. 113б) легко находится сила взаимодействия как алгебраическая сумма сил, действующих между каждой из пар магнитных масс:

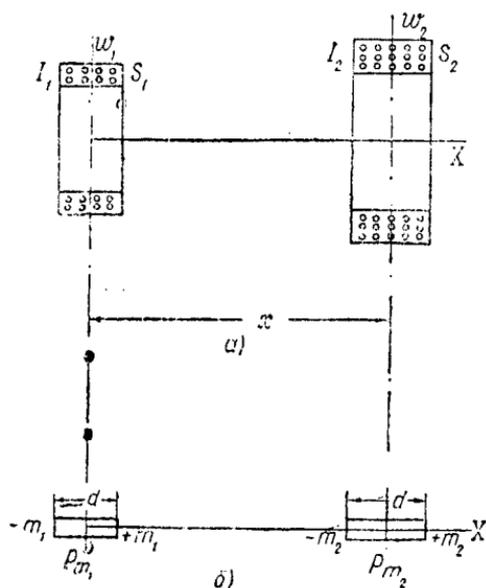


Рис. 113

$$F = \frac{m_1 m_2}{4\pi\mu} \left[ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-d)^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+d)^2} \right] =$$

$$= \frac{p_{m1} p_{m2}}{4\pi\mu d^2} \left[ \frac{2}{x^2} - \frac{1}{(x-d)^2} - \frac{1}{(x+d)^2} \right].$$

Путем простых преобразований и пренебрежения малыми величинами, так как  $x \gg d$ , получается

$$F = - \frac{3p_{m1} p_{m2}}{2\pi\mu x^4}.$$

Замена магнитных моментов по формуле  $p_m = \mu w I S$  приводит к выражению

$$F = - \frac{3\mu I_1 I_2 S_1 S_2 w_1 w_2}{2\pi x^4}.$$

Отрицательный знак в выражении силы указывает, что при одинаковом направлении токов она направлена против положительного отсчета  $x$ , т. е. является силой притяжения.

## § 40. РАСЧЕТ ПОЛЯ ПО ЗАКОНУ БИО—САВАРА—ЛАПЛАСА ИЛИ ПО ЗАКОНУ ПОЛНОГО ТОКА

В случае симметрии контуров возможен непосредственный расчет магнитного поля по закону Био—Савара—Лапласа или по закону полного тока. Этот метод является более общим, так как применим и для областей, занятых токами.

### 1. Прямой провод

Пусть ток  $I$  протекает по бесконечно длинному прямому проводу кругового сечения радиуса  $r_0$ ; провод выполнен из материала с магнитной проницаемостью  $\mu$  и находится в воздухе (рис. 114а).

Ввиду осевой симметрии напряженность поля  $H$  зависит только от расстояния  $r$  от оси провода. По правилу правого винта вектор напряженности совпадает с направлением касательной к окружности радиуса  $r$ . Применение закона полного тока к окружности радиуса  $r$  при  $r \gg r_0$  дает

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \oint H dl =$$

$$= H \oint dl = H 2\pi r = I$$

и

$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

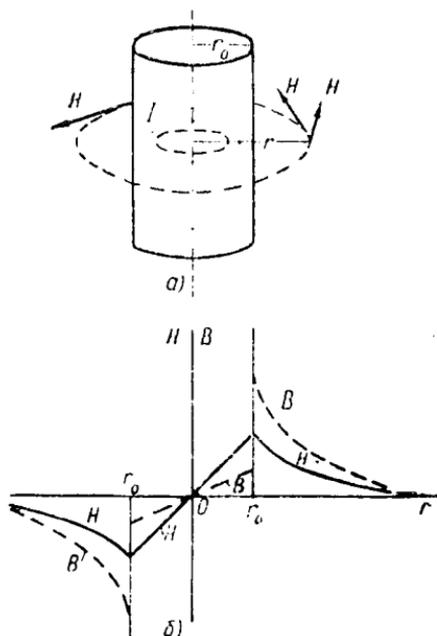


Рис. 114

Из этого выражения видно, что напряженность поля вне провода не зависит от радиуса провода. Следовательно, при расчете поля вне провода можно считать весь ток сосредоточенным на его оси. Кроме того, на величине поля вне провода не сказывается неравномерное распределение тока по его сечению при сохранении осевой симметрии, что имеет место при переменном токе.

При интегрировании по окружности, лежащей внутри провода ( $r \leq r_0$ ), охватывается не весь ток, а лишь его часть  $I_r$ ,

протекающая внутри круга радиуса  $r$ ; при равномерном распределении тока по сечению

$$I_r = I \frac{\pi r^2}{\pi r_0^2} = I \frac{r^2}{r_0^2};$$

тогда

$$H 2\pi r = I \frac{r^2}{r_0^2} \quad \text{и} \quad H = \frac{I}{2\pi r_0^2} r.$$

Магнитная индукция внутри провода ( $r \leq r_0$ )

$$B = \mu H = \frac{\mu I r}{2\pi r_0^2},$$

снаружи ( $r \geq r_0$ )

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Зависимости  $H(r)$  и  $B(r)$  представлены на рис. 114б. На поверхности проводника ( $r=r_0$ ) магнитная индукция при  $\mu \neq \mu_0$  претерпевает разрыв, как это изображено на рис. 114б для случая  $\mu < \mu_0$ . Разрыв магнитной индукции и непрерывность напряженности поля находятся в полном соответствии с выведенными выше условиями у границы двух сред (см. § 38), так как здесь имеются только касательные составляющие этих векторов.

Выведенные выше формулы для бесконечно длинного провода приближенно применимы для участков замкнутого контура в виде прямого провода конечной длины при условии, что расстояние от оси провода до точки, в которой определяется поле, мало по сравнению с расстояниями до концов участка.

Расчет поля прямого провода конечной длины удобнее всего произвести по закону Био—Савара—Лапласа. По этому закону напряженность поля вне прямолинейного провода длиной  $l$  с током  $I$  в точке  $M$  при выбранном направлении осей  $X$  и  $Y$  (рис. 115) будет

$$H = \frac{I}{4\pi} \int_{y=0}^{y=l} \frac{dy \sin(\overline{dyr})}{r^2} = \frac{I}{4\pi} \int_0^l \frac{\sin \alpha dy}{r^2}.$$

При вычислении этого интеграла координаты  $x_M$  и  $y_M$  закрепленной точки  $M$  являются постоянными величинами, переменными же являются ордината  $y$  элемента провода  $dy$ , соответствующего радиусу-вектору  $\bar{r}$ , угол  $\alpha$  и вектор  $\bar{r}$ . Все переменные могут быть сведены к одной — углу  $\alpha$ :

$$r = \frac{x_M}{\sin \alpha}, \quad y - y_M = x_M \operatorname{ctg}(\pi - \alpha), \quad dy = \frac{x_M d\alpha}{\sin^2 \alpha},$$

тогда

$$H = \frac{I}{4\pi x_M} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \, d\alpha;$$

в дальнейшем индекс  $M$  у  $x$  и  $y$  опускается, вводится  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ , после чего

$$\begin{aligned} H &= \frac{I}{4\pi x} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = \\ &= \frac{I}{4\pi x} (\sin \beta_1 + \sin \beta_2). \end{aligned}$$

Для бесконечно длинного провода ( $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \pi$ ) множитель  $(\sin \beta_1 + \sin \beta_2)$  равняется двум и формула совпадает с выведенной выше.

Аналогично для точки, лежащей внутри провода конечной длины ( $x \leq r_0$ ),

$$H = \frac{Ix}{4\pi r_0^2} (\sin \beta_1 + \sin \beta_2).$$

Для вычисления индуктивности необходимо найти потоко-сцепление.

Вне провода ( $x \geq r_0$ ) индукция в точке  $M(x, y)$  на рис. 115

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} (\sin \beta_1 + \sin \beta_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{l-y}{\sqrt{x^2 + (l-y)^2}} \right).$$

Элементарный поток через площадку  $ldx$  (на рис. 115 заштрихована)

$$\begin{aligned} d\Phi_e &= \int_{y=0}^{y=l} B dx dy = \frac{\mu_0 I dx}{4\pi x} \left[ \int_0^l \frac{y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \int_0^l \frac{(l-y) dy}{\sqrt{x^2 + (l-y)^2}} \right] = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi x} [y \sqrt{l^2 + x^2} - x] dx. \end{aligned}$$

Поток вне провода в полосе шириной  $l$

$$\Phi_e = \int_{x=r_0}^{x=\infty} d\Phi_e = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \int_{r_0}^{\infty} \frac{l^2 + x^2}{x} dx - \int_{r_0}^{\infty} dx \right];$$

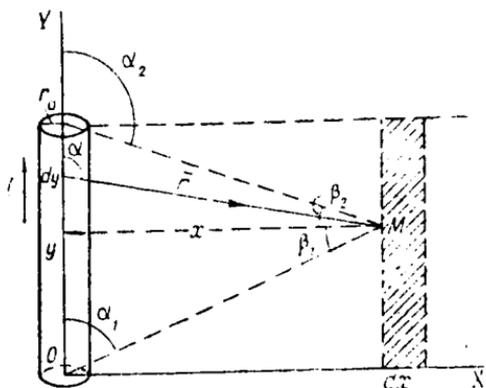


Рис. 115

замена радикала в первом интеграле новой переменной позволяет взять интеграл и вычислить поток

$$\begin{aligned} \Phi_e &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \sqrt{l^2 + x^2} + \frac{l}{2} \ln \frac{\sqrt{l^2 + x^2} - l}{\sqrt{l^2 + x^2} + l} - x \right]_{r_0}^{\infty} = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \frac{l}{2} \ln \frac{(l + \sqrt{l^2 + r_0^2})^2}{r_0^2} - \sqrt{l^2 + r_0^2} + r_0 \right] = \Psi'_e; \end{aligned}$$

поток  $\Phi_e$  равен потокосцеплению  $\Psi_e$ , так как сцепляется с током один раз.

При условии  $l \gg r_0$ , что соответствует большинству практических задач, это внешнее потокосцепление при пренебрежении малыми величинами равно

$$\Psi_e = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{r_0} - 1 \right).$$

Определяемая внешним потокосцеплением так называемая *внешняя индуктивность*

$$L_e = \frac{\Psi_e}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{r_0} - 1 \right).$$

Внутри провода ( $x < r_0$ ) индукция в точке, отстоящей на расстоянии  $x$  от оси,

$$B = \mu H = \frac{\mu I x}{4\pi r_0^2} (\sin \beta_1 + \sin \beta_2).$$

Элементарный поток, пронизывающий площадку  $l dx$  (рис. 115)

$$d\Phi_i = \int_{y=0}^{y=l} B dx dy,$$

что после подстановки выражения для индукции приводит к интегралам, уже вычисленным выше, и дает

$$d\Phi_i = \frac{\mu I}{2\pi r_0^2} [\sqrt{l^2 + x^2} - x] dx.$$

Поток  $d\Phi_i$  охватывает не весь ток, а только его часть  $I_x$ , проходящую внутри круга радиуса  $x$ ; как это было показано выше,

$$\frac{I_x}{I} = \frac{x^2}{r_0^2}.$$

Этот множитель, указывающий, какую долю тока охватывает элементарный поток  $d\Phi_i$ , играет роль числа витков в выражении потокосцепления; тогда

$$d\Psi_i = \frac{x^2}{r_0^2} d\Phi_i = \frac{\mu I}{2\pi r_0^4} [Vl^2 + x^2 - x] x^3 dx.$$

Так как  $l \gg r_0$  и  $x \leq r_0$ , то  $l \gg x$  и приближенно

$$d\Psi_i = \frac{\mu I}{2\pi r_0^4} x^3 dx.$$

Потокосцепление внутри провода

$$\Psi_i = \int_{x=0}^{x=r_0} d\Psi_i = \frac{\mu I l}{8\pi}.$$

Индуктивность, определяемая внутренним потокосцеплением,

$$L_i = \frac{\Psi_i}{I} = \frac{\mu l}{8\pi}$$

называется *внутренней индуктивностью*.

Суммарная индуктивность прямого провода длиной  $l$

$$L = L_e + L_i = \frac{l}{2\pi} \left[ \mu_0 \left( \ln \frac{2l}{r_0} - 1 \right) + \frac{\mu}{4} \right].$$

## 2. Двухпроводная линия

Двухпроводная линия (рис. 116) состоит из двух параллельных проводов одинакового радиуса  $r_0$ , имеющих большую длину  $l$  по сравнению с расстоянием  $d$  между ними. Материал проводов имеет магнитную проницаемость  $\mu$ , окружающая среда —  $\mu_0$ . Токи  $I$  в прямом и обратном проводах отличаются лишь направлением.

В воздухе между проводами ( $r_0 \leq x \leq d - r_0$ ) направления полей, создаваемых обоими токами, согласно правилу правого винта совпадают и напряженности поля и индукции здесь складываются арифметически:

$$H = \frac{I}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right), \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right).$$

Эти же формулы справедливы и для  $x \leq -r_0$  и  $x \geq d + r_0$ . Внутри левого провода ( $-r_0 \leq x \leq r_0$ ) напряженность поля и индукция от обоих проводов будут:

$$H = \frac{I}{2\pi} \left( \frac{x}{r_0^2} + \frac{1}{d-x} \right), \quad B = \frac{\mu I}{2\pi} \left( \frac{x}{r_0^2} + \frac{1}{d-x} \right).$$

Внутри правого провода ( $d - r_0 \leq x \leq d + r_0$ ) соответственно

$$H = \frac{l}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{d-x}{r_0^2} \right), \quad B = \frac{\mu l}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{d-x}{r_0^2} \right).$$

На рис. 116б представлено распределение напряженности поля и индукции вдоль оси  $X$  для  $\mu < \mu_0$ . Посередине между про-

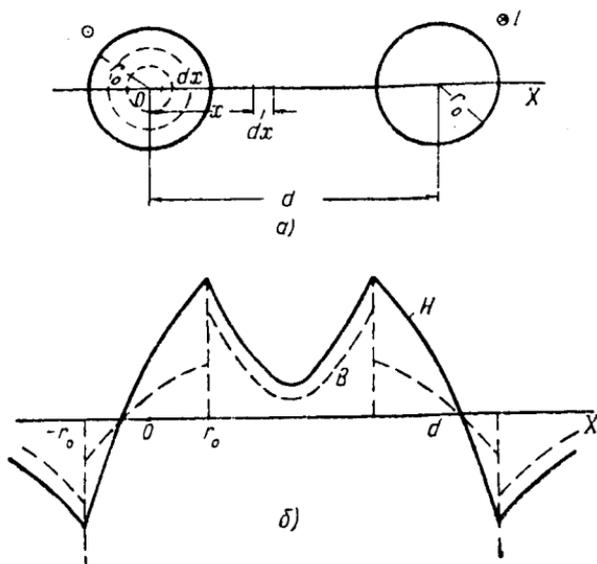


Рис. 116

водами поле минимально, но в нуль не обращается. На внутренней стороне проводов напряженность и индукция больше, чем на внешней.

Для вычисления индуктивности линии необходимо найти потокосцепление. Элементарный поток, проходящий через площадку  $l dx$  в воздухе между проводами,

$$d\Phi_e = B l dx = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) l dx.$$

Весь поток между проводами — внешний поток

$$\Phi_e = \int_{x=r_0}^{x=d-r_0} d\Phi_e$$

одновременно является внешним потокосцеплением, так как сцепляется с контуром один раз. Поэтому

$$\Psi_e = \int_{r_0}^{d-r_0} \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) l dx = \frac{\mu_0 l l}{\pi} \ln \frac{d-r_0}{r_0}.$$

Внешняя индуктивность

$$L_e = \frac{\Psi_e}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d - r_0}{r_0}.$$

Для большинства линий расстояние между проводами  $d$  значительно превышает радиус  $r_0$  проводов. В этом случае внешняя индуктивность

$$L_e = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d}{r_0}.$$

При условии  $d \gg r_0$  поле внутри провода может вычисляться как поле уединенного провода, так как величина поля, создаваемая вторым проводом внутри первого, пренебрежимо мала. Тогда внутренняя индуктивность линии, состоящей из двух проводов, вдвое больше индуктивности одного провода:

$$L_i = \frac{\mu l}{4\pi}.$$

Суммарная индуктивность линии

$$L = L_e + L_i = \frac{l}{\pi} \left( \mu_0 \ln \frac{d}{r_0} + \frac{\mu}{4} \right).$$

При медных или алюминиевых проводах ( $\mu = \mu_0$ ) в большинстве случаев вторым членом можно пренебречь по сравнению с первым и

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d}{r_0}.$$

Для стальных проводов ( $\mu \gg \mu_0$ ) основной частью потока является внутренний поток и индуктивность таких линий почти не будет зависеть от расстояния между проводами.

### 3. Прямоугольная рамка

Индуктивность прямоугольной рамки (рис. 117) из провода радиуса  $r_0$  определяется при условии, что ее высота  $a \gg 2r_0$  и ширина  $b \gg 2r_0$ , что почти всегда соответствует практике. При этих условиях можно вычислять поле внутри провода каждой из сторон, пренебрегая полем, определяемым током других сторон, и находить внутреннюю индуктивность по формуле уединенного провода. Тогда внутренняя индуктивность рамки находится как сумма внутренних индуктивностей всех сторон:

$$L_i = \frac{\mu l}{8\pi} = \frac{\mu(a + b)}{4\pi}.$$

Для определения внешней индуктивности сперва вычисляется поток, пронизывающий рамку и соответствующий току стороны 1. Элементарный поток, пронизывающий бесконечно малую площадку (на рис. 117 заштрихована), вычисляют аналогично приведенному выше для прямого провода (различие лишь в пределах интегрирования):

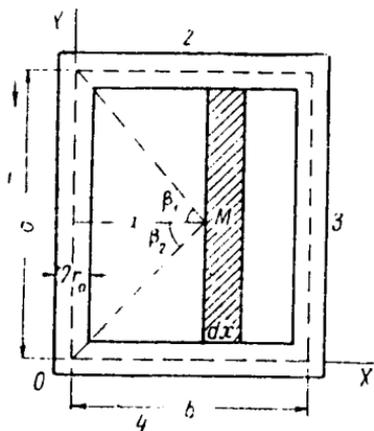


Рис. 117

$$d\Phi_1 = \int_{y=r_0}^{y=a-r_0} B_1 dx dy = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \times \\ \times [1 \sqrt{(a-r_0)^2 + x^2} - \sqrt{r_0^2 + x^2}] dx.$$

Весь поток, соответствующий току стороны 1,

$$\Phi_1 = \int_{x=r_0}^{x=b-r_0} d\Phi_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \int_{r_0}^{b-r_0} \frac{\sqrt{(a-r_0)^2 + x^2}}{x} dx - \int_{r_0}^{b-r_0} \frac{\sqrt{r_0^2 + x^2}}{x} dx \right] = \\ = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ 2\sqrt{(a-r_0)^2 + (b-r_0)^2} - 2\sqrt{(a-r_0)^2 + r_0^2} - 2\sqrt{(b-r_0)^2 + r_0^2} + \right. \\ \left. + 2\sqrt{2}r_0 + (a-r_0) \ln \frac{\sqrt{(a-r_0)^2 + (b-r_0)^2} - (a-r_0)}{\sqrt{(a-r_0)^2 + (b-r_0)^2} + (a-r_0)} - \right. \\ \left. - (a-r_0) \ln \frac{\sqrt{(a-r_0)^2 + r_0^2} - (a-r_0)}{\sqrt{(a-r_0)^2 + r_0^2} + (a-r_0)} - \right. \\ \left. - r_0 \ln \frac{\sqrt{(b-r_0)^2 + r_0^2} - r_0}{\sqrt{(b-r_0)^2 + r_0^2} + r_0} + r_0 \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right].$$

Ввиду принятых соотношений между  $a$ ,  $b$  и  $r_0$  можно, пренебрегая малыми величинами, прийти путем простых преобразований к выражению

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ a \ln \frac{2ab}{r_0(a + \sqrt{a^2 + b^2})} - (a + b - \sqrt{a^2 + b^2}) \right].$$

Вычисление потока, определяемого стороной 2, производится по таким же формулам, в которых только  $x$  и  $y$  и соответственно  $a$  и  $b$  поменялись местами; следовательно,

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ b \ln \frac{2ab}{r_0(b + \sqrt{a^2 + b^2})} - (a + b - \sqrt{a^2 + b^2}) \right].$$

Так как  $\Phi_3 = \Phi_1$  и  $\Phi_4 = \Phi_2$ , то весь внешний поток

$$\Phi_e = 2\Phi_1 + 2\Phi_2 = \Phi_e',$$

пронизывающий рамку одновременно является потокосцеплением, так как он сцепляется с контуром один раз. Отношение этого потокосцепления к току дает внешнюю индуктивность

$$L_e = \frac{\mu_0}{\pi} \left[ a \ln \frac{2ab}{r_0(a + \sqrt{a^2 + b^2})} + b \ln \frac{2ab}{r_0(b + \sqrt{a^2 + b^2})} - 2(a + b - \sqrt{a^2 + b^2}) \right].$$

Окончательно индуктивность рамки

$$L = L_e + L_i = \frac{1}{\pi} \left\{ \mu_0 \left[ a \ln \frac{2ab}{r_0(a + \sqrt{a^2 + b^2})} + b \ln \frac{2ab}{r_0(b + \sqrt{a^2 + b^2})} - 2(a + b - \sqrt{a^2 + b^2}) \right] + \frac{\mu(a + b)}{4} \right\},$$

а для ферромагнитного провода ( $\mu = \mu_0$ )

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left\{ a \ln \frac{2ab}{r_0(a + \sqrt{a^2 + b^2})} + b \ln \frac{2ab}{r_0(b + \sqrt{a^2 + b^2})} - 2 \left[ \frac{7}{8}(a + b) - \sqrt{a^2 + b^2} \right] \right\}.$$

#### 4. Торойд и соленоид

Если на часть кольцевого сердечника — тороида прямоугольного сечения — нанести обмотку (рис. 118), то только часть потока проходит по сердечнику, а остальная часть замыкается в воздухе; эта часть потока называется *потокосцеплением рассеяния*. Торойд (высота  $h$ , радиусы  $r_1$  и  $r_2$ , магнитная проницаемость  $\mu$ ), содержащий  $w$  витков, плотно и равномерно распределенных по всей длине сердечника (рис. 119), замечателен тем, что весь магнитный поток сосредоточен в сердечнике и поток рассеяния практически равен нулю. Линии вектора напряженности поля представляют собой окружности, сцепляющиеся со всеми витками. Ввиду симметрии напряженность поля в каждой точке окружности постоянна; по направлению она совпадает с касательными к окружности.

По закону полного тока для окружности радиуса  $r$  ( $r_1 \leq r \leq r_2$ )

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \oint H dl = H \oint dl = H 2\pi r = Iw,$$

откуда

$$H = \frac{I\omega}{2\pi r},$$

т. е. напряженность поля убывает по мере приближения к наружному краю тороида. Это в равной мере относится и к индукции

$$B = \mu H = \frac{\mu I\omega}{2\pi r}.$$

Поток в теле тороида

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} B h dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu I\omega h}{2\pi r} dr = \frac{\mu h\omega I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

а потокосцепление

$$\Psi = \omega\Phi = \frac{\mu h\omega^2 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

Индуктивность тороида

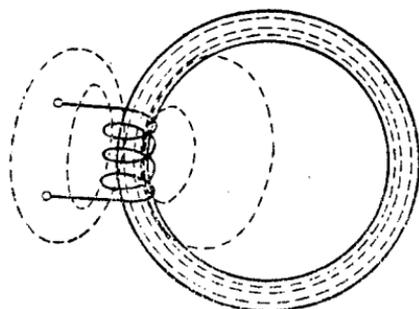


Рис. 118

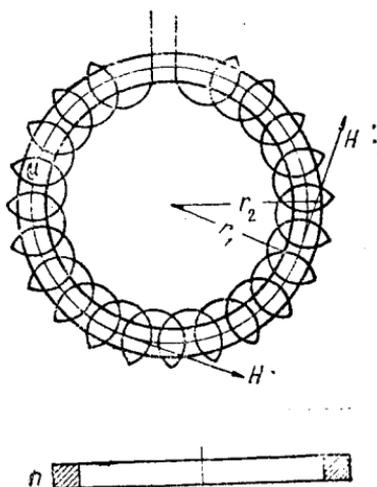


Рис. 119

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu h\omega^2}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Используя разложение логарифма в ряд Маклорена

$$\ln x = 2 \left[ \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \dots \right],$$

после подстановки  $x = \frac{r_2}{r_1}$  при  $r_2 - r_1 \ll r_2$ , что обычно выполняется

ся на практике, можно ограничиться первым членом; тогда индуктивность

$$L = \frac{\mu h \omega^2}{\pi} \frac{\frac{r_2}{r_1} - 1}{\frac{r_2}{r_1} + 1} = \frac{\mu \omega^2 h (r_2 - r_1)}{\pi (r_1 + r_2)} = \frac{\mu \omega^2 S}{l},$$

где  $S = h(r_2 - r_1)$  — сечение сердечника тороида,

$l = \pi(r_1 + r_2)$  — средняя длина магнитной линии.

Если расчет напряженности поля вести приближенно для средней линии  $l$ , то

$$H = \frac{I \omega}{l} = I \omega_0,$$

где  $\omega_0$  — число витков на единицу длины.

Соответственно магнитный поток

$$\Phi = \mu H S = \frac{\mu I \omega S}{l}$$

и индуктивность

$$L = \frac{\omega \Phi}{I} = \frac{\mu \omega^2 S}{l},$$

что совпадает с выведенной выше приближенной формулой.

Обычно в реальных тороидах отношение  $\frac{r_2}{r_1} < 1,5$ , что приводит при этих приближенных формулах к погрешности, не превышающей 1,2%. Таким образом, для большинства технических расчетов можно пользоваться этим приближением, заключающимся в усреднении распределения потока по сечению.

Тороиды широко используются в технике, в трансформаторах, в магнитных усилителях и в электроизмерительных приборах.

Приближенные формулы могут быть применены и для бесконечно длинного соленоида, рассматриваемого как тороид бесконечно большого радиуса. Для соленоида конечной длины с  $\mu = \mu_0$

$$L = \kappa \frac{\mu_0 \omega^2 S}{l},$$

где  $\kappa < 1$  — коэффициент, учитывающий, что в таком соленоиде

не весь поток пронизывает все витки. Он зависит от отношения диаметра  $D$  катушки к ее длине  $l$  (рис. 120). При  $\frac{D}{l}=0,1$   $\kappa=0,96$ ,

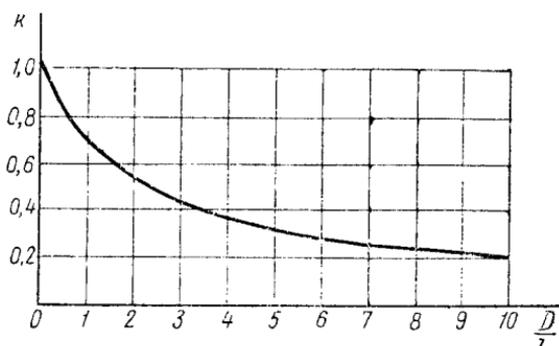


Рис. 120

поэтому при  $\frac{D}{l} < 0,1$  с обычной для техники точностью принимают  $\kappa=1$ .

### 5. Проходной трансформатор тока

Проходной трансформатор тока (рис. 121), предназначенный для измерения переменных токов, представляет собой тороид

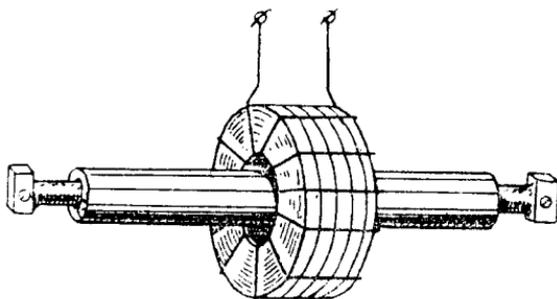


Рис. 121

прямоугольного сечения (рис. 119), несущий на себе обмотку из  $w$  витков, равномерно распределенную по всему сердечнику. Эта обмотка является вторичной обмоткой трансформатора и замыкается на амперметр; первичной обмоткой служит прямой медный штырь, расположенный по оси тороида, по которому проходит ток, подлежащий измерению.

Работа трансформатора основана на явлении взаимной индукции и поэтому наиболее важным является вычисление взаимной индуктивности между первичной и вторичной обмотками.

Так как длина штыря велика по сравнению с высотой  $h$  сердечника, то расчет поля может быть произведен по формулам для бесконечно длинного провода.

При расчете принимается, что распределение тока и магнитного поля такое же, как и при постоянном токе, что достаточно точно выполняется при низкой частоте переменного тока. Из-за аксиальной симметрии напряженность поля зависит лишь от расстояния до оси штыря, а линии напряженности и индукции являются концентрическими окружностями.

Поэтому напряженность поля в теле тороида на расстоянии  $r$  от оси штыря, определяемая его током  $I_1$ ,

$$H = \frac{I_1}{2\pi r}.$$

Поток в тороиде

$$\Phi_1 = \int_{r_1}^{r_2} \mu H h dr = \frac{\mu h I_1}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Потокоцепление  $\Psi_{12}$ , соответствующее току штыря  $I_1$ , при  $\omega$  витках обмотки тороида

$$\Psi_{12} = \omega \Phi_1 = \frac{\mu h \omega I_1}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

откуда взаимная индуктивность между штырем и обмоткой тороида

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{\mu h \omega}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Если ток  $I_2$  проходит по вторичной обмотке (обмотка тороида), то поток в сердечнике тороида, как было показано в предыдущем примере,

$$\Phi_2 = \frac{\mu h \omega I_2}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Так как этот поток сцепляется с первичной обмоткой (штырем) один раз, то потокосцепление  $\Psi_{21} = \Phi_2$  и взаимдуктивность между обмоткой тороида и штырем

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_2} = \frac{\mu h w}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = M_{12}.$$

Равенство  $M_{kp} = M_{pk}$ , показанное здесь на частном примере, в дальнейшем будет доказано в общем виде (§ 44).

### 6. Коаксиальный кабель

В коаксиальном кабеле (рис. 122а) центральная жила радиуса  $r_1$  отделена слоем изоляции от наружного (обратного) провода, внутренний радиус которого  $r_2$ , наружный  $r_3$ ; длина кабеля  $l$  (перпендикулярно плоскости чертежа) обычно велика по сравнению с радиусом  $r_3$ . Токи в жиле и оболочке равны по величине и различны по направлению. Жила и оболочка выполнены из одного материала с магнитной проницаемостью  $\mu$ ; магнитная проницаемость изоляции  $\mu_0$ .

Снаружи кабеля ( $r \geq r_3$ ) поля нет ( $H=0$ ), так как из-за аксиальной симметрии

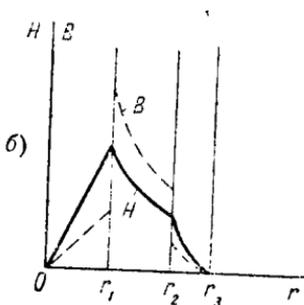
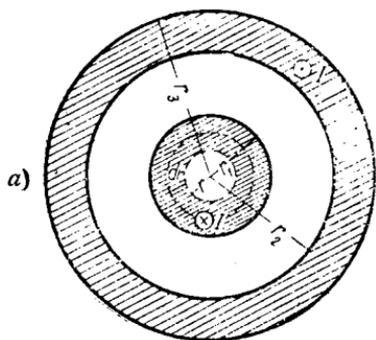


Рис. 122

применение в дальних линиях передачи постоянного тока высокого напряжения (§ 25).

Внутри жилы ( $0 \leq r \leq r_1$ ) при равномерном распределении тока по сечению

$$H = \frac{I}{2\pi r_1^2} r \quad \text{и} \quad B = \frac{\mu I}{2\pi r_1^2} r.$$

$$\oint \bar{H} d\bar{l} = \oint H dl = \\ = H \oint dl = H 2\pi r = I - I = 0.$$

Из-за этой особенности коаксиальных кабелей — сосредоточения всего магнитного поля внутри кабеля — они широко используются в технике высоких частот и могут найти

В толще изоляции ( $r_1 \leq r \leq r_2$ ) поле определяется только током центральной жилы:

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad \text{и} \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Внутри оболочки ( $r_2 \leq r \leq r_3$ ) поле соответствует току центральной жилы и части тока оболочки, проходящего по кольцевому слою с разностью радиусов  $r - r_2$ . Учитывая встречное направление токов в жиле и оболочке и считая, что ток оболочки распределен также равномерно по сечению, напряженность поля

$$H = \frac{I}{2\pi r} - \frac{I(r^2 - r_2^2)}{2\pi(r_3^2 - r_2^2)} \frac{1}{r} = \frac{I}{2\pi} \frac{r_3^2 - r^2}{(r_3^2 - r_2^2)r}$$

и индукция

$$B = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi} \frac{r_3^2 - r^2}{(r_3^2 - r_2^2)r}.$$

График напряженности поля и магнитной индукции в функции расстояния от оси кабеля приведен на рис. 122б для  $\mu < \mu_0$ . Внутреннее потокоцепление центральной жилы ( $0 \leq r \leq r_1$ ) согласно изложенному выше

$$\Psi_1 = \frac{\mu I l}{8\pi}.$$

Для слоя изоляции ( $r_1 \leq r \leq r_2$ ), где поток сцепляется со всем током жилы один раз, внешнее потокоцепление

$$\Psi_2 = \Phi_2 = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

В оболочке ( $r_2 \leq r \leq r_3$ ) элементарный поток

$$d\Phi_3 = \mu H l dr = \frac{\mu I l r_3^2 - r^2}{2\pi r_3^2 - r_2^2} \frac{dr}{r}$$

охватывает весь ток центральной жилы и часть встречного тока оболочки, проходящего по кольцевому слою с разностью радиусов  $r - r_2$ . В соответствии с этим элементарное потокоцепление

$$d\Psi_3 = \left(1 - \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}\right) d\Phi_3 = \frac{(r_3^2 - r^2)^2}{(r_3^2 - r_2^2)^2} \frac{\mu I l dr}{2\pi r}.$$

Тогда потокосцепление в оболочке

$$\begin{aligned}\Psi_3 &= \int_{r_2}^{r_3} d\Psi_3 = \frac{\mu Il}{2\pi} \frac{1}{(r_3^2 - r_2^2)^2} \int_{r_2}^{r_3} (r_3^2 - r^2)^2 \frac{dr}{r} = \\ &= \frac{\mu Il}{2\pi} \left[ \frac{r_3^4}{(r_3^2 - r_2^2)^2} \ln \frac{r_3}{r_2} - \frac{3r_3^2 - r_2^2}{4(r_3^2 - r_2^2)} \right].\end{aligned}$$

Потокосцепление всего кабеля

$$\begin{aligned}\Psi &= \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 = \\ &= \frac{Il}{2\pi} \left\{ \mu_0 \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\mu}{4} + \mu \left[ \frac{r_3^4}{(r_3^2 - r_2^2)^2} \ln \frac{r_3}{r_2} - \frac{3r_3^2 - r_2^2}{4(r_3^2 - r_2^2)} \right] \right\},\end{aligned}$$

откуда индуктивность кабеля

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{l}{2\pi} \left\{ \mu_0 \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\mu}{4} + \mu \left[ \frac{r_3^4}{(r_3^2 - r_2^2)^2} \ln \frac{r_3}{r_2} - \frac{3r_3^2 - r_2^2}{4(r_3^2 - r_2^2)} \right] \right\}.$$

Во многих случаях это выражение может быть упрощено. Если принять одинаковую плотность тока в жиле и оболочке, площади их должны быть равными, т. е.

$$\pi r_1^2 = \pi (r_3^2 - r_2^2) \quad \text{и} \quad r_3^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

При достаточно большом отношении  $\frac{r_2}{r_1}$  радиус  $r_3$  очень мало отличается от  $r_2$  (тонкая оболочка). В этих случаях при раскрытии неопределенности выражения, стоящего в квадратных скобках формулы для индуктивности, при  $\frac{r_3}{r_2} \rightarrow 1$  получается нуль и индуктивность кабеля с достаточной степенью точности для  $\mu = \mu_0$  может быть найдена по простой формуле

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{4} \right).$$

## ГЛАВА VIII

### РАСЧЕТ МАГНИТНОЙ ЦЕПИ

Работа большинства электротехнических устройств (машин, трансформаторов, реле и др.) основана на использовании магнитного поля. Все эти устройства представляют собой сочетание *магнитной цепи*, т. е. совокупности тел, служащих для проведения магнитного потока, с различными обмотками. При конструировании подобных устройств всегда возникает задача расчета их магнитной цепи, сводящаяся к установлению связи между магнитным потоком, намагничивающим ток, числом витков обмотки и геометрическими размерами цепи с учетом магнитных свойств материалов, из которых выполнена магнитная цепь.

Применение для этой цели методов расчета магнитного поля, рассмотренных в главе VII, практически невозможно при сложной конфигурации магнитной цепи. Поэтому здесь используется приближенный метод, основанный на допущении *равномерного распределения потока по сечению магнитопровода*.

В магнитных цепях используются различные материалы, главным образом ферромагнитные. Поэтому предварительно необходимо рассмотреть поведение различных материалов в магнитном поле.

#### § 41. МАТЕРИАЛЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

##### 1. Неферромагнитные материалы

Каждый электрон, движущийся вокруг ядра атома, соответствует элементарному контуру с током и обладает магнитным моментом. При отсутствии внешнего магнитного поля суммарный магнитный момент тела равен нулю, так как магнитные моменты отдельных элементарных контуров, расположенных хаотически, взаимно компенсируются. Во внешнем магнитном поле ориентация элементарных контуров изменяется и тело приобретает магнитный момент.

Не вдаваясь в теорию магнетизма, являющуюся сложной и интересной областью теоретической физики, можно формально

рассматривать явление намагничивания аналогично явлению поляризации диэлектриков в электрическом поле.

Как было показано в § 39, элементарные контуры с током можно заменить эквивалентными, также элементарными магнитами и по аналогии распространить на них изложенное в § 8 для электрических диполей диэлектрика.

Так же, как для диэлектрика, состояние которого определялось вектором поляризации, равным электрическому моменту единицы объема, магнитное состояние среды определяется *намагниченностью*  $\vec{J}$ , равной магнитному моменту единицы объема. Тогда соотношения между всеми величинами, характеризующими магнитное поле и среду, пишутся по аналогии с выведенными для электрического поля (§ 8).

Диэлектрики	Магнетики
$\vec{P} = \alpha \vec{E}$	$\vec{J} = \chi \vec{H}$
$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}$
$\varepsilon = \varepsilon_0 + \alpha$	$\mu = \mu_0 + \chi$

Величина  $\chi$  — аналог диэлектрической восприимчивости  $\alpha$  — называется *магнитной восприимчивостью*. Различие между физической сущностью поляризации диэлектрика и намагничивания магнетика приводит к тому, что в отличие от диэлектриков, у которых всегда  $\alpha > 0$  и, следовательно,  $\varepsilon > \varepsilon_0$ ,  $\chi$  может иметь различный знак; материалы, у которых  $\mu > \mu_0$ , называются *парамагнитными*, у которых  $\mu < \mu_0$ , — *диамагнитными*. У тех и у других магнитная проницаемость мало отличается от ее значения для пустоты; так как она постоянна, диа- и парамагнетики являются *линейными* материалами.

## 2. Ферромагнитные материалы

Особое место занимают ферромагнитные материалы, имеющие важное значение в электротехнике. К их числу относятся железо, никель, кобальт и гадолиний; техническое значение имеют лишь первые три элемента, главным образом в виде их сплавов.

Согласно современным представлениям ферромагнетики состоят из областей, удерживаемых силами сцепления, в которых элементарные магниты ориентированы в одном направлении; эти области называются областями спонтанного (самопроизвольного) намагничивания. Однако в целом материал не обладает магнитным моментом, так как направления намагничивания отдельных областей расположены хаотически. С ростом внешнего поля все большее число областей становится ориентированным по полю.

В отличие от парамагнитных материалов магнитная проницаемость ферромагнетиков весьма велика ( $\mu \gg \mu_0$ ) и является величиной переменной, зависящей от различных факторов: напряженности поля, предыдущего состояния, температуры, давления и т. д. Таким образом, ферромагнетики являются *нелинейными* материалами.

1. Кривая намагничивания. Основной зависимостью, характеризующей поведение материала в магнитном поле, является кривая намагничивания  $B(H)$ . Для неферромагнитных материалов эта зависимость изображается прямой линией (рис. 123), тангенс

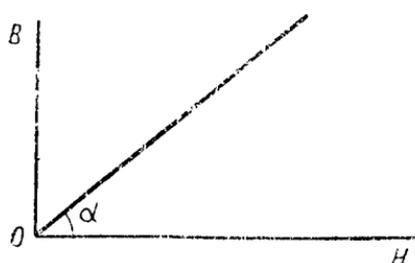


Рис. 123

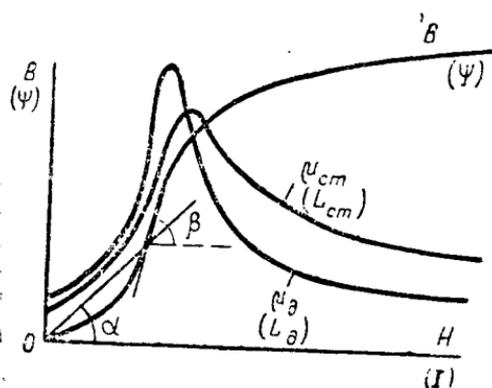


Рис. 124

угла наклона которой определяет магнитную проницаемость

$$\mu = \frac{B}{H} = k \operatorname{tg} \alpha.$$

Для ферромагнетиков кривая намагничивания имеет характерный вид, представленный на рис. 124. Так же, как и для нелинейных диэлектриков (§ 14) и нелинейных сопротивлений (§ 32), здесь следует различать *статическую магнитную проницаемость*

$$\mu_{cm} = \frac{B}{H} = k \operatorname{tg} \alpha$$

и *динамическую магнитную проницаемость*

$$\mu_d = \frac{dB}{dH} = k \operatorname{tg} \beta.$$

На рис. 124 обе проницаемости представлены в функции напряженности поля. Максимальные значения магнитных проницаемостей в некоторых современных материалах, в частности в пермаллое (сплав железа и никеля) и в очень чистом железе, в сотни тысяч раз превышают магнитную проницаемость пустоты.

С возрастанием напряженности поля динамическая проницаемость стремится к  $\mu_0$ ; это соответствует тому, что кривая намагничения  $B(H)$  нигде не становится параллельной оси абсцисс. Когда все области спонтанного намагничения будут ориентированы по внешнему полю, наступает насыщение, т. е.

при  $H > H_s$  намагниченность  $J_s$  становится постоянной (рис. 125). Индукция  $B_s$ , соответствующая  $H_s$ ,

$$B_s = \mu_0 H_s + J_s$$

называется индукцией насыщения.

Теоретически уравнение кривой намагничения до сих пор не выведено, поэтому при аналитических расчетах ее аппроксимируют различными функциями.

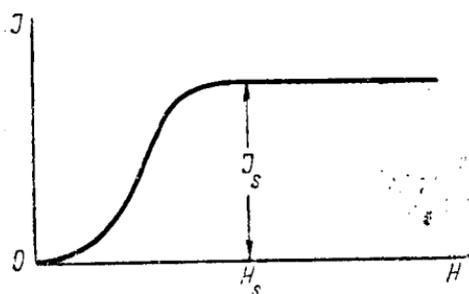


Рис. 125

Большинство технических расчетов проводится не аналитически, а графически с помощью кривых намагничения; на рис. 126 приведены эти кривые для наиболее употребительных материалов.

Кривая  $B(H)$  может быть перестроена для тороида в кривую  $\Psi(I)$ , так как потокосцепление  $\Psi = wBS$ , а ток  $I = \frac{Hl}{w}$ .

На основе кривой  $\Psi(I)$  можно дать два различных определения индуктивности, соответствующих двум определениям магнитной проницаемости: *статическая индуктивность*, определяемая как (рис. 124)

$$L_{cm} = \frac{\Psi}{I} = k_1 \operatorname{tg} \alpha_1,$$

и *динамическая индуктивность*

$$L_d = \frac{d\Psi}{dI} = k_1 \operatorname{tg} \beta_1.$$

Обе индуктивности являются функциями тока (рис. 124).

При наличии ферромагнетиков измерение индуктивности должно производиться различным образом в зависимости от того, какая из индуктивностей определяется, с обязательным указанием величины тока, при котором производилось измерение.

Для линейных материалов обе индуктивности совпадают.

2. Гистерезис. Если взять образец, например тороид, не подвергавшийся воздействию магнитного поля, и намагничивать

его, то кривая первоначального намагничения имеет вид, изображенный на рис. 127 пунктиром. При размагничении, т. е.

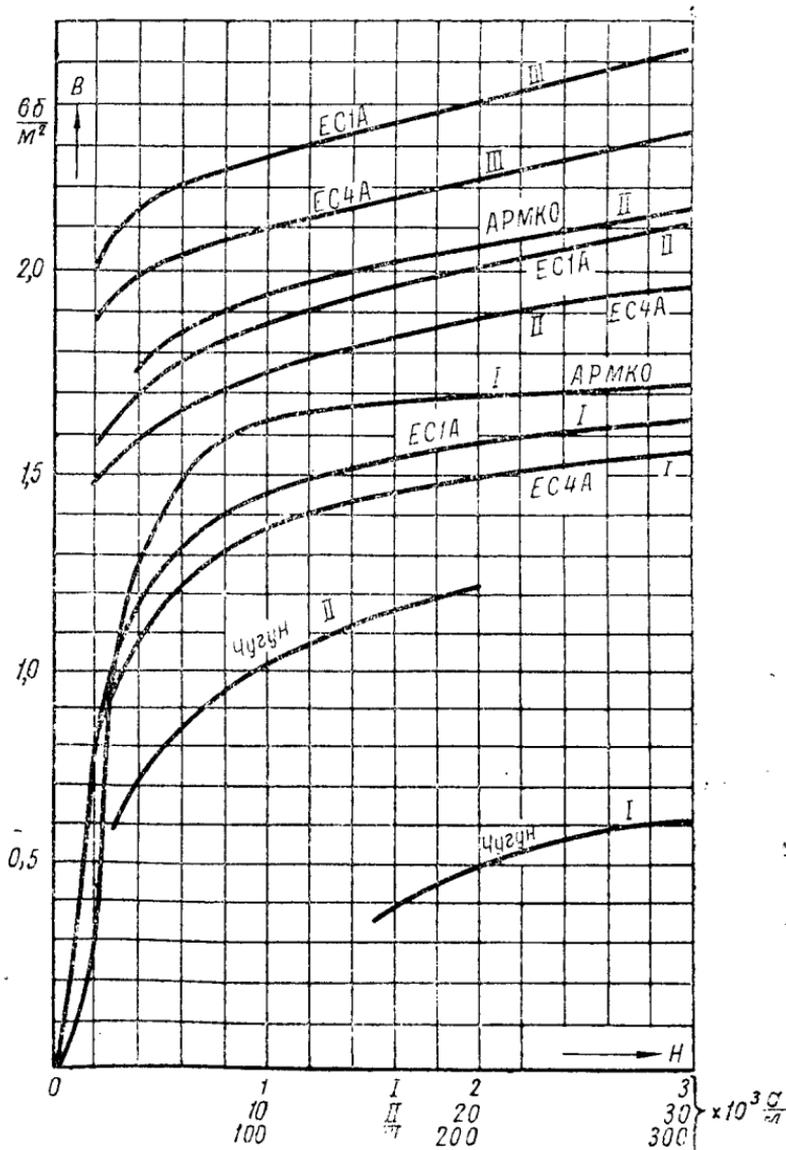


Рис. 126

при уменьшении напряженности поля от  $H_{max}$  до 0, кривая идет выше кривой первоначального намагничения (рис. 127) и при отсутствии поля ( $H=0$ ) индукция в материале равна остаточной индукции  $B_r$ . Величина напряженности поля обратного зна-

ка, необходимая для полного размагничивания, называется *коэрцитивной силой*  $H_c$ . Дальнейшее намагничение в обратном направлении ( $H < 0$ ) вплоть до  $-H_{max}$  приводит к значению индукции  $-B_{max}$ . Переход от  $-B_{max}$  к  $B_{max}$ , соответствующий изменению напряженности поля от  $-H_{max}$  до  $H_{max}$ , совершается по нижней ветви кривой, симметричной верхней ветви.

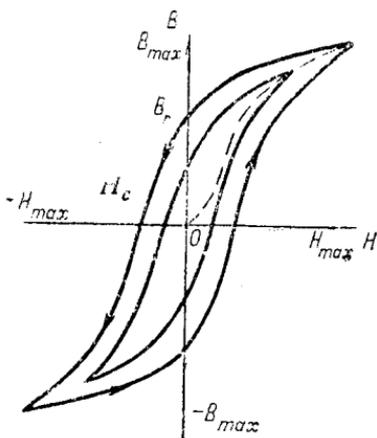


Рис. 127

Отставание индукции от изменения напряженности поля называется *магнитным гистерезисом*; вся кривая носит название *петли гистерезиса*.

Кривая, соединяющая вершины петель гистерезиса, снятых для разных  $H_{max}$ , — *основная кривая* — практически совпадает с кривой первоначального намагничивания.

В зависимости от назначения к ферромагнитным материалам предъявляют различные требования. Так, к материалам, работающим в переменном поле, предъявляется требование малой коэрцитивной силы (легкость перемагничивания), т. е. узкой петли гистерезиса. Подобные материалы — *магнитномягкие* —

используются для сердечников трансформаторов, электрических машин и т. п. Основным видом их является электротехническая сталь, содержащая кремний и выпускаемая в виде листов толщиной 0,35 и 0,5 мм.

Кроме электротехнической стали, в электрических машинах используется также и чугун, в измерительных приборах и аппаратуре автоматики и телемеханики — сплавы типа пермаллой, характеризующиеся, помимо большой магнитной проницаемости, практически полным отсутствием гистерезиса в слабых полях.

Наоборот, от *магнитнотвердых* материалов, применяемых для изготовления постоянных магнитов, требуется большая остаточная индукция и большая коэрцитивная сила; последняя затрудняет размагничивание этих материалов. Значения остаточной индукции и коэрцитивной силы магнитнотвердых материалов лежат в пределах:

$$B_r = 0,5 - 1 \text{ вб/м}^2, \quad H_c = 5000 - 65000 \text{ а/м}.$$

3. Зависимость магнитной проницаемости от температуры и давления. С возрастанием температуры магнитная проницаемость ферромагнетиков уменьшается, причем для каждого из них существует критическая температура  $T_k$  (точка Кюри), при которой материал теряет свои ферромагнитные свойства, превращаясь в обычный парамагнетик (рис. 128).

Для железа точка Кюри соответствует  $768^{\circ}\text{C}$ , для никеля  $358^{\circ}\text{C}$  и кобальта  $1131^{\circ}\text{C}$ . Поэтому при плавке стали в индукционных печах приходится учитывать, что после  $\sim 800^{\circ}\text{C}$  режим печи резко изменяется. В авиационных магнитоэлектрических приборах используется сплав термаллой (Ni 66,5%, Cu 30%, Fe 2%), обладающий точкой Кюри  $T_K = 95^{\circ}\text{C}$ . При уменьшении потока постоянного магнита с увеличением температуры магнитный шунт из термаллоя отводит все меньшую часть потока, поддерживая более постоянным значение рабочего магнитного потока.

Зависимость магнитных свойств от давления приводит к *магнитострикции*; это явление аналогично электрострикции диэлектриков и заключается в намагничении образца при растяжении или сжатии. Этот эффект обратим: образец изменяет свои размеры при намагничении. Магнитострикционный эффект сильнее выражен в сплавах, содержащих кобальт; наиболее широкое применение этот эффект получил в акустической локации, например в эхолотах — приборах для определения морских глубин.

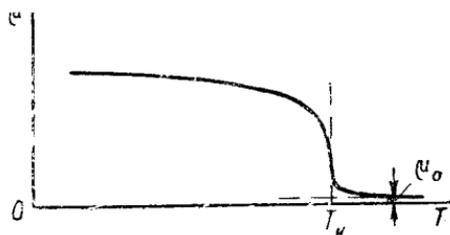


Рис. 128

## § 42. МЕТОДЫ РАСЧЕТА МАГНИТНОЙ ЦЕПИ

### 1. Линейная цепь

Расчет магнитной цепи заключается в определении магнитного потока по заданному току обмотки, числу витков, размерам и материалу магнитопровода.

Сравнивая между собой основные соотношения для постоянного тока и магнитного поля, можно видеть, что соотношения, соответствующие законам Ома и Кирхгофа для стационарного поля (§ 21), аналогичны соотношениям для магнитной цепи.

Стационарное поле	Магнитное поле
$I = \int \bar{\delta} d\bar{S}$	$\Phi = \int \bar{B} d\bar{S}$
$\oint \bar{\delta} d\bar{S} = 0$	$\oint \bar{B} d\bar{S} = 0$
$\oint \bar{E} d\bar{l} = \mathcal{E}$	$\oint \bar{H} d\bar{l} = F$
(при наличии источника) $\bar{\delta} = \gamma \bar{E}$	$\bar{B} = \mu \bar{H}$

При этом току  $I$  соответствует поток  $\Phi$ , э. д. с.  $\mathcal{E}$  — н. с.  $F$ , а сопротивлению в электрической цепи  $R$  должно соответствовать магнитное сопротивление  $R_m$ .

По аналогии с электрической цепью (§ 21) магнитное сопротивление магнитопровода длиной  $l$  и сечением  $S$  из материала с магнитной проницаемостью  $\mu$

$$R_m = \frac{F}{\Phi} = \frac{\oint \vec{H} d\vec{l}}{\Phi} = \frac{l}{\mu S}.$$

Таким образом, переход от электрической цепи к магнитной должен совершаться путем замены величин, стоящих в первой строке нижеприведенной таблицы, величинами второй строки.

Электрическая цепь	$\mathcal{E}$	$I$	$\delta$	$E$	$R$	$\gamma$
Магнитная цепь	$F$	$\Phi$	$B$	$H$	$R_m$	$\mu$

Для неразветвленной магнитной цепи аналог закона Ома принимает вид

$$\Phi = \frac{\Sigma F}{\Sigma R_m};$$

как и в законе для электрической цепи, сумма в числителе алгебраическая, а в знаменателе — арифметическая.

Для разветвленной магнитной цепи аналогами законов Кирхгофа будут: для узла

$$\Sigma \Phi = 0,$$

для замкнутого контура

$$\Sigma F = \Sigma \Phi R_m.$$

Пользуясь этой аналогией, можно при расчете магнитной цепи пользоваться методами, аналогичными изложенным выше (см. гл. V): контурных потоков, преобразования, наложения, узловых магнитных напряжений и т. д.

Однако следует помнить, что аналогия между методами расчета не распространяется на физические процессы. Например, н. с. является чисто расчетной величиной; в магнитном поле нет магнитных масс (зарядов) и н. с. в отличие от э. д. с. ничего не движет. Точно так же магнитный поток в отличие от своего аналога—тока не представляет собой результата движения магнитных масс. Сопротивление электрической цепи в соответст-

вии с законом Ленца—Джоуля определяет затрату энергии, а магнитное сопротивление не связано с затратой энергии: постоянное магнитное поле, раз созданное, не требует энергии для своего поддержания; таким образом, магнитное сопротивление является расчетной величиной. В электрической цепи возможно существование э. д. с. без тока, когда цепь разомкнута и  $R = \infty$ . В магнитной цепи при наличии н. с. магнитный поток всегда существует и замкнут, т. е.  $R_m$  в бесконечность не обращается.

## 2. Нелинейная цепь

Малое магнитное сопротивление и, следовательно, соответственно меньшая н. с. при том же потоке привели, как указано выше, к широкому применению магнитных цепей из ферромагнитных материалов. Однако такие магнитные цепи являются нелинейными; непосредственный аналитический их расчет невозможен, так как магнитная проницаемость является функцией неизвестного потока. Поэтому к таким цепям следует применять методы расчета нелинейных цепей, аналогичные тем, которые были изложены в § 14 и 32.

Для магнитных цепей представляет интерес как прямая задача—нахождение потоков в участках по заданным н. с., так и обратная—определение потребной н. с. по заданному потоку в одном из участков.

1. Последовательное соединение. Решение обратной задачи—нахождение н. с. по заданной индукции в одном из участков, например  $B_0$  в воздушном зазоре электромагнита (рис. 129),—производится следующим образом.

По заданным размерам магнитопровода проводится средняя линия пути потока во всех участках и определяется длина  $l_k$  каждого из них, необходимая для нахождения н. с. отдельных участков. Если магнитопровод выполнен из различных материалов, то разграничение участков не требует пояснений. Если же весь магнитопровод выполнен из одного материала, то разделение на участки производится в соответствии с поперечными размерами и может быть выбрано в известных пределах произвольно. Возможное расхождение незначительно, особенно когда цепь имеет воздушный зазор, на который и приходится большая часть всей н. с.

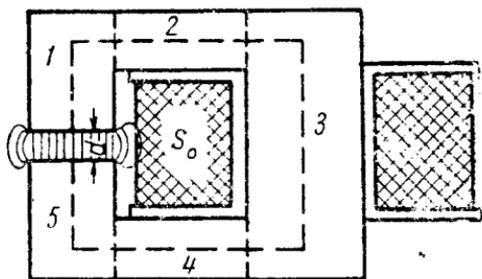


Рис. 129

Затем определяется поток в воздушном зазоре

$$\Phi_a = B_a S_a,$$

где  $S_a$ —его сечение, принимаемое равным сечению стали, например, участков 1 и 5 (рис. 129).

Поток в стали за счет рассеяния у краев воздушного зазора несколько больше:

$$\Phi_c = \sigma \Phi_a,$$

где  $\sigma$ —коэффициент рассеяния; величина его зависит от формы магнитопровода и лежит в пределах от 1,1 до 1,4.

Индукцию в каждом из  $k$  участков определяют по формуле

$$B_k = \frac{\Phi_c}{S_k},$$

и по найденной индукции находят напряженность поля  $H_k$  для каждого из участков по кривым намагничивания соответствующих материалов. Для воздушного зазора напряженность поля

$$H_a = \frac{B_a}{\mu_0}.$$

Затем для отдельных участков находят н. с.

$$F_k = H_k l_k$$

и суммированием — полную н. с.

$$F = \Sigma F_k.$$

Для цепи, изображенной на рис. 129, считая участки 1 и 5, а также 2 и 4 одинаковыми, полная н. с.

$$F = F_a + 2F_1 + 2F_2 + F_3.$$

По найденной н. с. и по заданному напряжению  $U$ , питающему обмотку, приближенно может быть найдено число витков  $\omega$ .

Так как длина витков обмотки различна — внутренних меньше, наружных больше, — то расчет начинается с определения длины среднего витка  $l_{cp}$  по известным размерам магнитопровода и выбранному расположению обмотки. Тогда из закона Ома

$$I = \frac{U}{\frac{\rho l_{cp} \omega}{s}},$$

где  $\rho$ —удельное сопротивление материала обмотки, определяется сечение провода

$$s = \frac{I \omega \rho l_{cp}}{U} = \frac{F \rho l_{cp}}{U}.$$

По сортаменту проводов выбирают ближайшее большее сечение провода  $s_c$ , а задавшись типом изоляции, определяют сечение провода с изоляцией  $s_{\mu s}$ . После этого можно найти число витков как отношение площади окна (за вычетом сечения каркаса катушки и пр.)  $S_0$  к сечению провода с изоляцией:

$$\omega = \alpha \frac{S_0}{s_{\mu s}},$$

здесь  $\alpha$ —коэффициент заполнения, учитывающий воздушные промежутки, остающиеся между проводами при намотке катушки; его величина лежит в пределах от 0,7 до 0,85 и зависит от формы сечения провода (для круглого меньше, для прямоугольного больше). Затем из приведенного выше выражения определяется плотность тока в обмотке

$$\delta = \frac{I}{s_c} = \frac{U}{\rho l_{cp} \omega}.$$

Если полученная плотность тока превышает допустимую по нагреву, то это значит, что размеры магнитной цепи (площадь окна) не позволяют получить заданную индукцию.

Прямая задача—нахождение индукции в воздушном зазоре  $B$ , по заданной н. с.—не может быть решена непосредственно по формуле

$$\Phi = \frac{F}{\Sigma R_{mk}},$$

так как магнитные сопротивления участков зависят от магнитной проницаемости, в свою очередь зависящей от неизвестного потока  $\Phi$ . Эта задача решается аналогично расчетам нелинейных цепей из нелинейных конденсаторов (§ 14) или нелинейных сопротивлений (§ 32), но требует предварительного перехода от кривых  $B(H)$  к кривым  $\Phi(F)$ .

Сначала по известным кривым намагничения для различных участков строят кривые  $\Phi_k(F_k)$ , умножая ординаты кривой намагничения на сечение участка  $S_k$ , а абсциссы—на длину участка  $l_k$ ; эти кривые строят в одной координатной системе. Так, для цепи рис. 129 построены кривые рис. 130. Здесь уже учтена двойная длина участков 1, 5 и 2, 4. Для воздушного зазора получается прямая линия, в уравнении которой учитывается коэффициент рассеяния, т. е. ординаты прямой  $B = \mu_0 H$  множат на  $\frac{S_g}{\sigma}$ , а абсциссы—на длину зазора  $d$ . Так как все участки соединены последовательно, то, складывая абсциссы всех этих кривых при неизменном потоке, по точкам строят суммарную кривую  $\Phi(F)$ . Затем для заданной н. с.  $F'$  по этой кривой находят значение потока  $\Phi'$  в стали. Индукцию в участке находят делением этого потока на сечение.

2. Параллельное соединение. Для параллельного соединения двух участков магнитной цепи (рис. 131) по заданной н. с.  $F$  потоки в участках определяются непосредственно по кривым  $\Phi_1(F)$  и  $\Phi_2(F)$  для каждого из участков в отдельности.

Обратная задача — определение н. с. по заданному суммарному потоку — требует графического построения. Так как при параллельном соединении

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2,$$

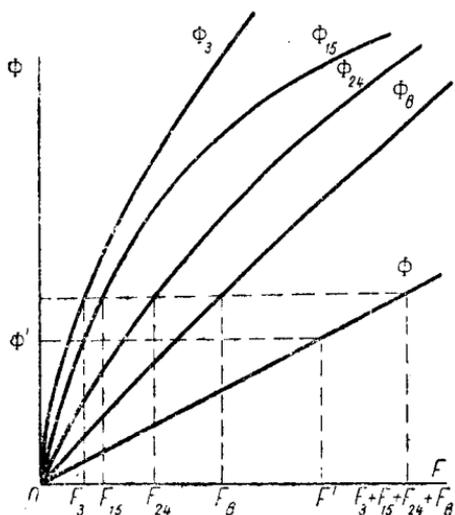


Рис. 130

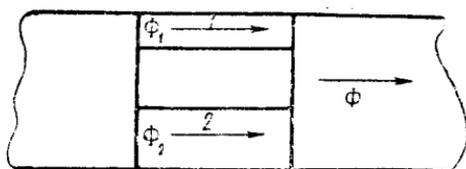


Рис. 131

а н. с.  $F_1 = F_2$ , то характеристика всей цепи  $\Phi(F)$  получается путем суммирования ординат характеристик обоих участков при одних и тех же значениях н. с. (рис. 132). Из этой характеристики

для любого значения потока определяется н. с., а по ней — потоки  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  участков.

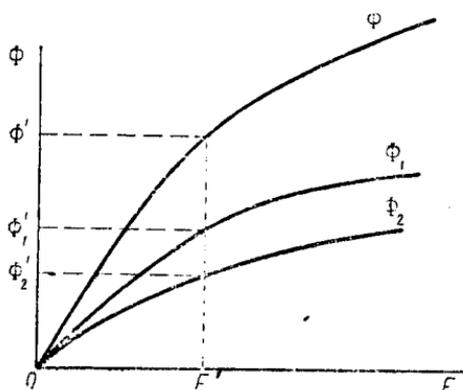


Рис. 132

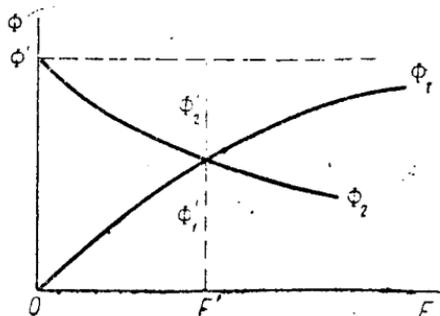


Рис. 133

Для определения н. с. и потоков в участках при одном значении общего потока  $\Phi'$  можно произвести построение аналогично рис. 41 и 93, как показано на рис. 133.

3. Смешанное соединение. Построение графика для цепи, изображенной на рис. 134, производится следующим образом.

Для параллельно соединенных участков 2 и 3 строится суммарная кривая  $\Phi_{23} = \Phi_2 + \Phi_3$  путем сложения ординат кривых  $\Phi_2(F)$  и  $\Phi_3(F)$  при одних и тех же значениях н. с. (рис. 135).

Так как участок 1 соединен последовательно с участком 2, 3 и  $F = F_1 + F_{23}$ , то суммарная кривая получается из кривых  $\Phi_1(F)$  и  $\Phi_{23}(F)$  путем сложения абсцисс при неизменном значении потока.

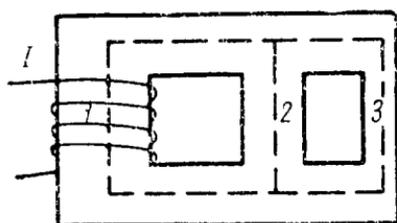


Рис. 134

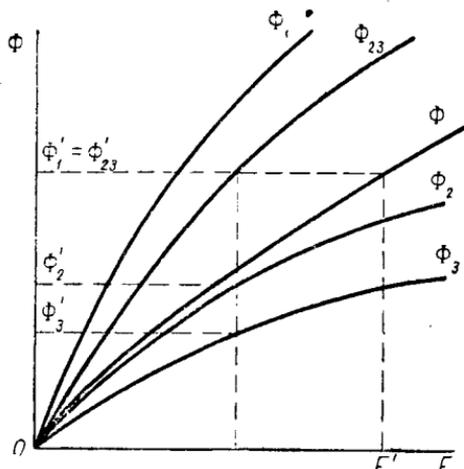


Рис. 135

Для заданного значения н. с.  $F'$  (рис. 135) по кривой  $\Phi(F)$  находятся  $\Phi_1'$  и  $\Phi'_{23}$ , а по ординате, соответствующей значению  $\Phi'_{23}$ , определяются потоки  $\Phi_2'$  и  $\Phi_3'$ .

Индукции участков находятся путем деления соответствующих потоков на поперечные сечения участков.

Здесь может быть использован и другой способ, изложенный выше (§ 14 и 32). Различие от предыдущего заключается в том, что после построения кривой  $\Phi_{23}(F_{23})$  кривая  $\Phi_1$  (рис. 136) строится влево от вертикали, сдвинутой на величину заданной н. с.  $F'$ . Тогда пересечения кривых  $\Phi_1$  и  $\Phi_{23}$  дает значение потока, соответствующее заданной н. с. Пересечение ординаты этой точки с кривыми  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  даст потоки этих участков.

Следует отметить, что учет потоков рассеяния в сложной цепи чрезвычайно усложняет весь расчет.

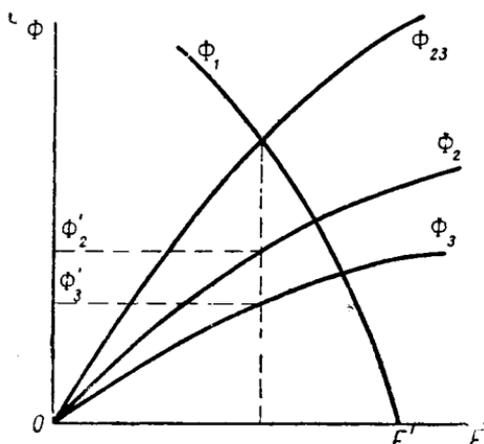


Рис. 136

### § 43. О РАСЧЕТЕ ПОСТОЯННОГО МАГНИТА

Постоянные магниты применяются в измерительных приборах, магнето, электрических машинах без возбуждения постоянным током, поляризованных реле, устройствах автоматики и телемеханики и т. д. Широкому применению постоянных магнитов способствуют большие успехи, достигнутые мировой техникой в деле изготовления высококачественных магнитотвердых материалов, имеющих большое значение коэрцитивной силы  $H_c$  и остаточной индукции  $B_r$ .

Для намагниченного тороида, из которого затем путем

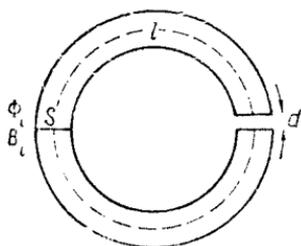


Рис. 137

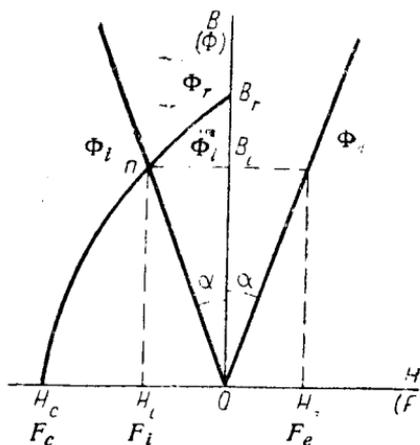


Рис. 138

разреза выполнен постоянный магнит (длина магнита  $l$ , зазор  $d$ , рис. 137), основной характеристикой является часть петли гистерезиса, лежащая во втором квадранте, — *кривая размагничивания* (рис. 138) в координатах  $B(H)$  или  $\Phi(F)$ . При отсутствии зазора поток в тороиде равен  $\Phi_r$ , а напряженность поля равна нулю.

Ниже рассмотрена задача определения индукции  $B_e$  в воздушном зазоре по заданным размерам магнита и кривой размагничивания.

При наличии воздушного зазора и отсутствии обмотки с намагничивающим током по закону полного тока

$$\oint \bar{H} d\bar{l} = F_i + F_e = 0, \quad \text{или} \quad F_e = -F_i,$$

где индекс  $i$  относится к магниту, а  $e$  — к воздушному зазору.

В предположении однородного поля в магните и в зазоре

$$F_e = H_e d, \quad F_i = H_i l,$$

тогда

$$H_e d = -H_i l \quad \text{и} \quad H_e = -H_i \frac{l}{d}.$$

Появление напряженности поля, имеющей разный знак в зазоре и магните, формально может рассматриваться как результат

действия размагничивающего поля магнитных масс, сосредоточенных на концах магнита.

Поток в воздушном зазоре  $\Phi_e$  может быть выражен через н. с.  $F_e$  и магнитное сопротивление  $R_m$  воздушного зазора:

$$\Phi_e = \frac{F_e}{R_m}.$$

Так как  $R_m = \text{const}$ , то зависимость  $\Phi_e(F_e)$  изображается прямой линией. Она лежит в первом квадранте и проходит через начало координат, образуя угол  $\alpha$  с осью ординат, определяемый соотношением

$$k \operatorname{tg} \alpha = R_m;$$

здесь коэффициент  $k$  равен отношению масштабов по осям абсцисс и ординат.

Поток  $\Phi_i$  в магните равен потоку  $\Phi_e$  в зазоре и зависимость

$$\Phi_i(F_i) = \Phi_e(-F_e)$$

изображается прямой, лежащей во втором квадранте и представляющей собой зеркальное отражение прямой  $\Phi_e(F_e)$  в оси ординат.

Величина искомого потока  $\Phi_i$  должна определяться точкой, лежащей и на прямой  $\Phi_i(F_i)$  и на кривой размагничивания, т. е. на их пересечении. Следовательно, искомый поток равен ординате точки  $n$  (рис. 138).

Так как поле принято однородным, индукция в зазоре

$$B_e = \frac{\Phi_i}{S_e};$$

пренебрегая рассеянием, можно считать

$$S_e = S_i, \quad B_e = B_i$$

$$\text{и} \quad R_m = \frac{d}{\mu_0 S_e}.$$

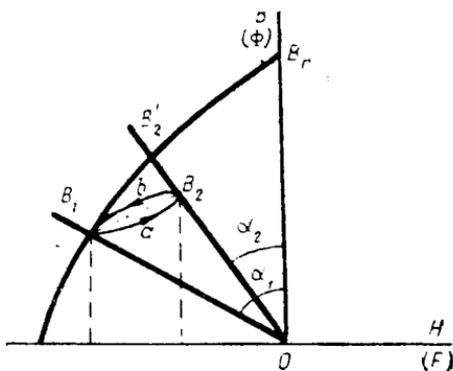


Рис. 139

Таким образом, поток в зазоре всегда меньше остаточного потока  $\Phi_r$ ; поток уменьшается с увеличением угла  $\alpha$ , т. е. магнитного сопротивления  $R_m$ .

Вопрос о наиболее выгодном положении рабочей точки  $n$  на кривой размагничивания, определяемом из энергетических соотношений, разобран ниже (§ 45).

Все изложенное соответствует случаю, когда постоянный магнит намагничивался вместе со всеми деталями, расположен-

ными у концов магнита; эти детали называются арматурой. Если же магнит намагничивался отдельно, а затем вводилась арматура, то соотношения меняются. Так, если магниту без арматуры соответствовала индукция  $B_1$  (рис. 139) при  $k \operatorname{tg} \alpha_1 = R_{m1}$ , то введение арматуры, уменьшив магнитное сопротивление до величины  $R_{m2} = k \operatorname{tg} \alpha_2$ , из-за гистерезиса увеличит индукцию не до точки  $B_2'$ , лежащей на кривой размагничивания, а до  $B_2$ , лежащей на той же прямой  $OB_2'$ , но ниже точки  $B_2'$ . Переход к новому значению индукции будет происходить теперь не по кривой  $B_1B_2$ , а по кривой  $B_1aB_2$ ; обратный переход идет по кривой  $B_2bB_1$ . Кривая  $B_1aB_2bB_1$  носит название *частной петли гистерезиса*. Так как практически эта петля очень узка, то ее часто заменяют *прямой возврата*  $B_1B_2$ .

Так как в технике применяются магниты более сложной формы, поле в которых далеко от однородного и имеет место значительное рассеяние, их расчет значительно сложнее; он освещен в специальной литературе.

---

## ГЛАВА IX

### ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Энергия магнитного поля и ее преобразование в другие виды энергии имеет, помимо своего теоретического значения, громадное значение для практики, так как электротехника использует в основном именно это преобразование. Примером могут служить электрические машины, электроизмерительные приборы, различные электромеханические аппараты, индукционные печи и т. д.

Несмотря на физическое различие между электрическим и магнитным полями, при выводе выражений для энергии может быть использована расчетная аналогия между ними, о которой говорилось выше (см. § 38).

Так же, как и в электростатике, для создания постоянного магнитного поля должна быть затрачена энергия внешних источников, но уже созданное поле не требует энергии для своего существования. При создании магнитного поля лишь часть работы, совершаемой внешними источниками, переходит в энергию поля; остальная часть расходуется на нагрев проводов, на излучение, на механическую работу, совершаемую силами поля.

#### § 44. ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ КОНТУРОВ С ТОКАМИ

##### 1. Вывод выражения энергии

Пусть в системе  $n$  неподвижных контуров с постоянными токами (рис. 140), находящимися в среде с постоянной магнитной проницаемостью, каждый контур питается от своего источника энергии. При установлении токов в неподвижных контурах работа, совершаемая источниками, затрачивается при пренебрежении излучением только на нагрев проводов и на изменение магнитного поля.

Каждый из контуров с током можно мысленно заменить двойным магнитным слоем (§ 39). Тогда работа, затраченная на изменение тока в контуре  $k$  на бесконечно малую величину и

равная изменению энергии контура  $dW_\kappa$ , может быть представлена как работа разнесения бесконечно малых разноименных магнитных масс  $dm_\kappa$  на поверхности двойного слоя. Эта работа по аналогии с электрическим полем составляет

$$dW_\kappa = (\varphi'_{m\kappa} - \varphi''_{m\kappa}) dm_\kappa,$$

где  $\varphi'_{m\kappa} - \varphi''_{m\kappa}$  — разность магнитных потенциалов на поверхностях двойного слоя.

Магнитная масса равна магнитному потоку контура (§ 38):

$$m_\kappa = \int \bar{B} d\bar{S} = \Phi_\kappa \quad \text{и} \quad dm_\kappa = d\Phi_\kappa.$$

Разность магнитных потенциалов  $\varphi'_{m\kappa} - \varphi''_{m\kappa}$ , соответствующая переходу с одной стороны контура на другую, определяется изменением  $\Delta\Omega$  телесного угла на  $4\pi$  (§ 34) и, следовательно,

$$\varphi'_{m\kappa} - \varphi''_{m\kappa} = \frac{i_\kappa}{4\pi} \Delta\Omega = \frac{i_\kappa}{4\pi} 4\pi = i_\kappa;$$

для многовиткового контура

$$\varphi'_{m\kappa} - \varphi''_{m\kappa} = i_\kappa w_\kappa.$$

Таким образом, изменение энергии контура  $\kappa$

$$dW_\kappa = i_\kappa w_\kappa d\Phi_\kappa = i_\kappa d\psi_\kappa$$

соответствует работе, затраченной на изменение потокосцепления контура на величину  $d\psi_\kappa$ , а для всей системы

$$dW = \Sigma dW_\kappa = \Sigma i_\kappa d\psi_\kappa.$$

Если принять пропорциональное увеличение всех токов системы аналогично тому, как это было сделано для зарядов в электрическом поле (§ 15), то энергия системы контуров с токами получится равной

$$W = \frac{1}{2} \Sigma I_\kappa \Psi_\kappa,$$

где  $I_\kappa$  и  $\Psi_\kappa$  — конечные значения токов и потокосцеплений.

Это выражение остается справедливым при любом характере изменения токов контуров, что вытекает из закона сохранения энергии.

Для уединенного контура потокосцепление  $\Psi = LI$  и энергия

$$W = \frac{I\Psi}{2} = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Psi^2}{2L}$$

является квадратичной функцией тока или потока. Это выражение позволяет дать новое определение индуктивности—*энергетическое*:

$$L_s = \frac{2W}{I^2}.$$

В линейных системах вычисление индуктивности по этой формуле дает результат, совпадающий со значением статической и динамической индуктивности (§ 41), в нелинейных системах эти три значения не совпадают.

В случае системы из двух контуров (§ 37)

$$\Psi_1 = L_1 I_1 + M_{12} I_2,$$

$$\Psi_2 = M_{21} I_1 + L_2 I_2.$$

Как будет доказано ниже, взаимные индуктивности  $M_{12} = M_{21}$  и при обозначении их через  $M$  энергия

$$W = \frac{1}{2} I_1 \Psi_1 + \frac{1}{2} I_2 \Psi_2 = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2;$$

она состоит из суммы собственных энергий каждого из контуров и взаимной энергии  $M I_1 I_2$ , зависящей от расположения контуров. В зависимости от направления токов в контурах энергия системы больше суммы собственных энергий контуров при совпадении потоков взаимной индукции или меньше — при встречном направлении потоков взаимной индукции (§ 37). Однако суммарная энергия системы контуров с токами всегда положительна.

Аналогично в общем случае энергия состоит из суммы собственных энергий контуров и их взаимных энергий:

$$W = \frac{1}{2} \sum L_{\kappa} I_{\kappa}^2 + \sum_{\kappa \neq p} M_{\kappa p} I_{\kappa} I_p,$$

она также всегда положительна.

## 2. Доказательство равенства взаимных индуктивностей

Вычисление энергии системы контуров должно привести к одному и тому же результату независимо от порядка изменения токов в них.

Пусть в системе двух контуров сперва изменяется ток в первом контуре при отсутствии тока во втором. Тогда работа, затраченная на установление тока в первом контуре,

$$A_1 = \int_0^{\Psi_1} i_1 d\psi_1 = L_1 \int_0^{I_1} i_1 di_1 = \frac{L_1 I_1^2}{2}.$$

Затем начинает изменяться ток второго контура до своего окончательного значения, а ток в первом контуре поддерживается неизменным. Тогда

$$\begin{aligned} \psi_1 &= L_1 I_1 + M_{12} i_2 & \text{и} & & d\psi_1 &= M_{12} di_2, \\ \psi_2 &= L_2 i_2 + M_{21} I_1 & \text{и} & & d\psi_2 &= L_2 di_2. \end{aligned}$$

Работа, затраченная во втором контуре,

$$A_2 = \int_0^{I_2} i_2 d\psi_2 = \int_0^{I_2} L_2 i_2 di_2 = \frac{L_2 I_2^2}{2},$$

а в первом контуре

$$A_{12} = \int_{i_2=0}^{I_2} I_1 d\psi_1 = \int_{i_2=0}^{I_2} M_{12} I_1 di_2 = M_{12} I_1 I_2.$$

Таким образом, энергия системы

$$W = A_1 + A_2 + A_{12} = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M_{12} I_1 I_2.$$

Если теперь повторить весь вывод, изменив порядок установления токов (сначала во втором контуре, а затем в первом), то получится выражение для энергии, отличающееся от написанного выше лишь тем, что индексы 1 и 2 поменялись местами:

$$W = \frac{L_2 I_2^2}{2} + \frac{L_1 I_1^2}{2} + M_{21} I_2 I_1.$$

Из равенства полученных выражений вытекает, что

$$M_{12} = M_{21},$$

а в общем случае

$$M_{\kappa\rho} = M_{\rho\kappa}.$$

### 3. Энергия нелинейного тороида

Энергия тороида с сердечником из ферромагнитного материала, по обмотке которого проходит ток  $I_0$ , равная

$$W = \int_0^{I_0} i d\psi,$$

аналогично энергии нелинейного конденсатора  $\int_0^{Q_0} u dq$  (§ 15) в зависимости от хода кривой намагничения может быть меньшей, равной или большей энергии  $\frac{1}{2} I_0 \Psi_0$  линейного тороида с теми же конечными значениями тока  $I_0$  и потокосцепления  $\Psi_0$ .

Различие в ходе кривых намагничивания и размагничивания ферромагнитных материалов (см. § 41 и рис. 127) свидетельствует о необратимости процесса перемагничивания ферромагнетика и, следовательно, о неизбежных потерях энергии.

Если перемагничиваемый образец является сердечником тороида со средней длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $S$ , то энергия, затраченная за один цикл перемагничивания, т. е. за один обход по петле гистерезиса,

$$W_h = \oint i d\psi = \oint \frac{Hl}{\omega} d(\omega SB) = \oint lSH dB = v \oint H dB = v S_h,$$

где  $v = Sl$  — объем ферромагнетика, а  $S_h$  — площадь петли гистерезиса.

Так как эта площадь аналитически не вычисляется, то в технике пользуются приближенной формулой, установленной Штейнмецом экспериментальным путем:

$$W_h = \eta B_{max}^n v.$$

Коэффициент Штейнмеца  $\eta$  зависит от материала, показатель степени  $n$  — от материала и от величины максимальной индукции. Для электротехнической стали при  $0,25 < B_{max} < 1 \text{ вб/м}^2$  принимается  $n=1,6$ , а при  $1 < B_{max} < 1,6 \text{ вб/м}^2$  —  $n=2$ .

## § 45. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

### 1. Вывод выражения энергии

Энергия магнитного поля, связанная с самим полем, не сосредоточена в контурах с токами, а подобно электрическому полю распределена по всему объему поля.

Считая однородным поле тороида, энергия тороида, имеющего число витков  $\omega$ , длину средней линии  $l$ , площадь поперечного сечения  $S$ , будет

$$W = \frac{1}{2} I \Phi = \frac{1}{2} \frac{Hl}{\omega} \omega BS = \frac{1}{2} HBSl = \frac{1}{2} HBv,$$

где  $v = Sl$  — объем тороида и одновременно объем, занятый полем. Тогда энергия на единицу объема — удельная энергия

$$W_0 = \frac{W}{v} = \frac{HB}{2} = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu}.$$

В случае неоднородного поля эта формула может быть применена для бесконечно малого объема  $dV$ , в пределах которого поле может считаться однородным.

Для конечного объема  $v$  энергия поля

$$W = \frac{1}{2} \int HBdv.$$

Эти формулы, выведенные для однородной изотропной среды, где векторы  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$  совпадают по направлению, могут быть записаны и так:

$$W_0 = \frac{dW}{dv} = \frac{\vec{H}\vec{B}}{2} \quad \text{и} \quad W = \frac{1}{2} \int \vec{H}\vec{B}dv.$$

В таком виде выражение для энергии было постулировано Максвеллом для любых сред и любых полей, как угодно изменяющихся во времени и в пространстве; это обобщение, не могущее быть выведенным непосредственно, подтверждается совпадением выводов теории Максвелла с опытом.

## 2. Энергия постоянного магнита

Постоянный магнит должен быть спроектирован таким образом, чтобы энергия магнитного поля в воздушном зазоре была максимальной (§ 43).

При отсутствии рассеяния  $S_e = S_i$ ,  $B_e = B_i$ , а в § 43 было показано, что

$$|H_e| = |H_i| \frac{l}{d}.$$

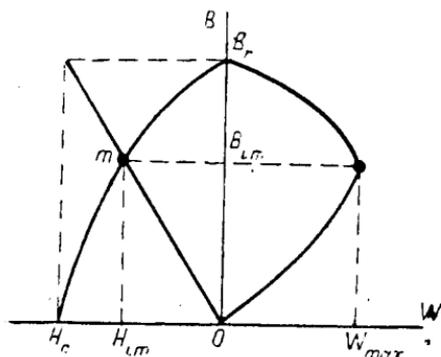


Рис. 141

Тогда энергия, сосредоточенная в малом воздушном зазоре постоянного магнита в виде тороида (рис. 137),

$$W_e = \frac{B_e H_e}{2} S_e d = \frac{B_i H_i}{2} l S = W_i,$$

т. е. энергия магнитного поля в зазоре равна энергии внутри магнита.

Эта энергия, пропорциональная произведению ординаты кривой размагничивания на ее абсциссу, графически представлена как функция индукции  $W(B)$  в первом квадранте рис. 141, где по оси абсцисс отложена энергия.

По данным опыта для всех магнитотвердых материалов с достаточной степенью точности можно принять, что рабочая точка  $m$  (рис. 141), соответствующая максимуму энергии, лежит на пересечении кривой размагничивания с диагональю прямоугольника, построенного на  $B_r$  и  $H_c$ .

## § 46. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭНЕРГИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В МЕХАНИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ

В системе подвижных контуров работа  $dA$  внешних источников равна сумме изменения энергии  $dW$  системы, механической работы  $dA_{\text{мех}}$  и энергии  $dA_n$ , преобразуемой в другие виды:

$$dA = dW + dA_{\text{мех}} + dA_n.$$

Если предположить, что изменение токов и движение контуров происходит бесконечно медленно, то из  $dA_n$  останутся тепловые потери  $dA_{\text{мен.л}}$ , а механическая работа будет совершаться только через посредство магнитного поля. Так как оно создается источниками, то доля работы  $dA - dA_{\text{мен.л}}$  источников, идущая на изменение поля, равна  $\sum i_k d\psi_k$  (§ 44). Следовательно,

$$\sum i_k d\psi_k = dW + dA_{\text{мех}}.$$

Пусть в системе контуров, описываемой с помощью обобщенных координат, возможно изменение лишь одной из них  $X$ ; тогда механическая работа, совершаемая в системе,

$$dA_{\text{мех}} = F^0 dX,$$

где  $F^0$  — обобщенная сила.

Тогда исходное уравнение

$$\sum i_k d\psi_k = dW + F^0 dX$$

может быть исследовано при задании связи между токами и потокосцеплениями.

### 1. Система с постоянными потокосцеплениями

Если при изменениях, происходящих в системе, потокосцепления остаются постоянными ( $\Psi_k = \text{const}$ ), исходное уравнение принимает вид:

$$0 = dW + F^0 dX;$$

источники не совершают работы, связанной с изменениями в системе ( $d\Psi_k = 0$ ), они покрывают лишь расход энергии на нагрев проводов. В этом случае

$$F^0 dX = -dW,$$

т. е. механическая работа совершается за счет убыли энергии системы и процесс заканчивается с израсходованием конечной энергии, запасенной в системе.

Таким образом, если в системе потокосцепления остаются постоянными, то под действием возникающих в ней сил она стремится занять положение, соответствующее *минимуму энергии*, запасенной в магнитном поле.

## 2. Система с постоянными токами

При условии, что источники поддерживают неизменными токи контуров ( $I_k = \text{const}$ ), дифференцирование выражения для энергии системы дает

$$dW = d \left( \frac{1}{2} \sum I_k \psi_k \right) = \frac{1}{2} \sum I_k d\psi_k.$$

Тогда исходное равенство

$$\sum I_k d\psi_k = dW + F^0 dX$$

может быть приведено к виду

$$2dW = dW + F^0 dX,$$

откуда

$$dW = F^0 dX.$$

Это означает, что совершаемая системой механическая работа равна половине энергии, отдаваемой источниками; вторая половина идет на увеличение энергии системы.

Таким образом, система контуров с постоянными токами под действием возникающих в ней сил стремится занять положение, соответствующее максимуму энергии ее магнитного поля. А так как энергия при постоянных токах определяется величиной потокосцеплений, то система стремится занять положение, соответствующее максимуму потокосцеплений.

Так как в реальной системе, занимающей конечный объем, может быть запасена лишь конечная энергия, то такая система при  $I_k = \text{const}$  также не может служить для непрерывного преобразования энергии магнитного поля в механическую.

### § 47. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В УЕДИНЕННОМ КОНТУРЕ

Силы, возникающие в системе контуров с токами, могут быть определены из соотношений, приведенных в § 46. В случае постоянства потокосцеплений для обобщенной силы получается выражение

$$F^0 = - \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right)_{\Psi = \text{const}}$$

В этом выражении должна быть взята частная производная, так как рассматривается изменение энергии, соответствующее изменению лишь одной обобщенной координаты.

При постоянстве токов контуров выражение для обобщенной силы

$$F^0 = \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right)_{I = \text{const}}$$

отличается знаком от полученного выше при неизменных потоко-сцеплениях. Однако результаты вычисления по обеим формулам должны совпадать, так как силы в системе в данный момент времени определяются значениями токов и потоко-сцеплений в этот момент времени и не зависят от того, каким изменениям в дальнейшем они будут подвергаться.

Воспользовавшись приведенным выше выражением энергии уединенного контура

$$W = \frac{LI^2}{2},$$

можно найти обобщенную силу

$$F^o = \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right)_{I = \text{const}} = \frac{I^2}{2} \frac{\partial L}{\partial X},$$

действующую в уединенном контуре; она представляет собой алгебраическую сумму сил, приложенных ко всему контуру.

Ниже рассмотрен ряд примеров уединенного контура.

### 1. Провод конечной длины

Индуктивность прямого провода длиной  $l$ , радиуса  $r_0$ , из материала с магнитной проницаемостью  $\mu$  равна (§ 40)

$$L = \frac{l}{2\pi} \left[ \mu_0 \left( \ln \frac{2l}{r_0} - 1 \right) + \frac{\mu}{4} \right].$$

Соответственно этому сила, действующая на провод и стремящаяся изменить его радиус,

$$F = \frac{I^2}{2} \frac{\partial L}{\partial r_0} = - \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi r_0}.$$

Отрицательный знак указывает на то, что эта сила стремится уменьшить радиус провода, т. е. сжать его. Она является алгебраической суммой сил, приложенных к поверхности провода. Сила на единицу поверхности, т. е. давление, испытываемое проводом (опуская знак),

$$f = \frac{F}{2\pi r_0 l} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r_0^2};$$

так как на поверхности провода

$$H = \frac{I}{2\pi r_0} \quad \text{и} \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0},$$

$$f = \frac{HB}{2}.$$

Следовательно, эта сила аналогично электрическому полю (§ 19) равна энергии на единицу объема.

Геометрическая сумма этих сил — их равнодействующая равна нулю, т. е. провод в целом не испытывает силы, стремящейся его переместить.

Так как поле вокруг провода направлено по концентрическим окружностям, то давление  $f$ , вычисленное выше, направлено перпендикулярно полю.

## 2. Прибор электромагнитной системы

Прибор электромагнитной системы (рис. 142) состоит из неподвижной обмотки  $A$ , в которую при прохождении по ней тока втягивается ферромагнитный сердечник  $B$  в виде фигурной пластинки, укрепленной на оси; на этой же оси укреплена стрелка  $C$ , перемещающаяся по шкале. Противодействующий момент создается спиральной пружиной  $D$ .

Если в качестве обобщенной координаты взять угол поворота  $\alpha$  подвижной системы, то обобщенной силой будет вращающий момент

$$M_{sp} = \frac{I^2}{2} \frac{dL}{d\alpha},$$

где  $L$  — индуктивность неподвижной обмотки, возрастающая при втягивании сердечника.

Из этого выражения видно, что электромагнитный прибор может работать как на постоянном, так и на переменном токе, так как изменение направления (знака) тока не влечет за собой изменения знака вращающего момента.

Из уравнения равновесия подвижной части прибора — равенства вращающего и противодействующего моментов (§ 19)

$$\frac{I^2}{2} \frac{dL}{d\alpha} = \kappa\alpha$$

следует, что если индуктивность обмотки изменяется пропорционально углу поворота подвижной системы, то шкала прибора будет квадратичной, что нежелательно.

Требование равномерной шкалы  $\alpha = \kappa_1 I$  приводит к уравнению

$$\frac{\alpha}{2\kappa_1^2} \frac{dL}{d\alpha} = \kappa, \text{ или } \frac{dL}{d\alpha} = \frac{2\kappa\kappa_1^2}{\alpha};$$

следовательно, индуктивность должна изменяться в функции угла поворота по следующему закону:

$$L = 2\kappa\kappa_1^2 \ln \alpha + \text{const.}$$

Осуществить это равенство для всей шкалы невозможно, так как по мере приближения  $\alpha$  к нулю логарифм стремится к бесконечности. В современных приборах путем придания соответствующей формы сердечнику удастся получить почти равномерную шкалу, за исключением ее начала.

Прибор электромагнитной системы может быть использован как амперметр, если включить его последовательно с приемником; тогда ток обмотки прибора равен измеряемому току. При использовании прибора в качестве вольтметра он включается параллельно приемнику через добавочное сопротивление; тогда ток обмотки прибора пропорционален измеряемому напряжению.

Основным преимуществом прибора электромагнитной системы наряду с простой конструкцией является отсутствие токоподвода в подвижную часть.

### 3. Соленоид

Индуктивность соленоида длиной  $l$ , с числом витков  $w$ , площадью сечения  $S$ , радиуса  $r_0$ , с сердечником магнитной проницаемости  $\mu_0$  (§ 40)

$$L = \kappa \frac{\mu_0 w^2 S}{l} = \kappa \frac{\mu_0 w^2 \pi r_0^2}{l}.$$

Сила, стремящаяся изменить радиус  $r_0$ ,

$$F_{r_0} = \frac{I^2}{2} \frac{\partial L}{\partial r_0} = \frac{\kappa \pi \mu_0 w^2 I^2}{l} r_0$$

пропорциональна радиусу и стремится его увеличить. При этом потокосцепление

$$\Psi = LI = \frac{\kappa \mu_0 w^2 \pi r_0^2 I}{l}$$

также растет, что находится в соответствии с указанным выше стремлением системы при постоянных токах увеличить потокосцепления.

Кроме радиальных сил, в катушке появляется осевая сила

$$F_l = \frac{I^2}{2} \frac{\partial L}{\partial l} = - \frac{\kappa \mu_0 \omega^2 S I^2}{2l^3};$$

отрицательный знак означает, что эта сила стремится уменьшить длину катушки, т. е. соседние витки притягиваются друг к другу.

Эти силы обычно невелики и уравниваются жесткостью катушки. Однако в обмотках мощных реакторов (большое  $r_0$ ) при аварийных режимах, когда ток во много раз превышает номинальное значение, силы оказываются весьма значительными и необходимо особенно прочно укреплять обмотку.

#### § 48. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В СИСТЕМЕ ДВУХ КОНТУРОВ

Энергия системы из двух недеформируемых контуров

$$W = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2$$

изменяется при неизменных токах за счет перемещения контуров друг относительно друга. При этом первые два члена — собственные энергии контуров — остаются постоянными, а меняется только третий член — взаимная энергия, так как взаимоиндуктивность  $M$  при перемещении контуров является переменной величиной. Поэтому обобщенная сила при изменении обобщенной координаты  $X$

$$F^0 = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial X}.$$

Практически важным примером системы двух контуров с токами является измерительный прибор электродинамической системы (рис. 143), состоящий из двух катушек: неподвижной  $A$  и подвижной  $B$ ; с подвижной катушкой скреплена стрелка  $C$ , перемещающаяся по шкале. Ток в подвижную катушку подводится через спиральные пружины  $D$ , служащие также для создания противодействующего момента.

При прохождении токов по обеим катушкам подвижная катушка стремится повернуться на оси так, чтобы ее потокосцепление увеличилось; максимум потокосцепления будет при совпадении осей обеих катушек.

Вращающий момент такого прибора

$$M_{вп} = I_1 I_2 \frac{dM}{d\alpha}$$

пропорционален произведению токов обеих катушек. Электродинамическая система может быть использована в качестве ампер-

метра или вольтметра; так, при последовательном соединении катушек  $I_1 = I_2 = I$ , для вольтметра  $I = \kappa' U$ .

Приборы электродинамической системы могут работать и на переменном токе, так как изменение знака тока (напряжения) не вызывает изменения знака вращающего момента, который пропорционален квадрату измеряемой величины.

Так как противодействующий момент пропорционален углу поворота ( $M_{пр} = \kappa \alpha$ ), то при пропорциональности взаимной индуктивности  $M$  углу поворота  $\alpha$  ( $\frac{dM}{d\alpha} = \text{const}$ ) шкала прибора квадратичная. Требование равномерной шкалы для амперметра  $\alpha = \kappa_1 I$  накладывает на взаимную индуктивность условие, определяемое из уравнения равновесия подвижной части прибора

$$I^2 \frac{dM}{d\alpha} = \kappa \alpha, \quad \text{или} \quad \frac{\alpha^2}{\kappa_1^2} \frac{dM}{d\alpha} = \kappa \alpha.$$

Это условие

$$M = \kappa \kappa_1^2 \ln \alpha + \text{const}$$

невыполнимо в начале шкалы.

## § 49. ПРОВОДНИК С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

### 1. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле

Силы, возникающие в системе контуров с токами, могут также рассматриваться как силы, действующие на данный провод с током, находящийся в магнитном поле других контуров. Это относится также и к уединенному контуру, где каждый из элементов контура с током находится в магнитном поле остальной части контура.

Пусть элемент  $dl$  провода, представляющего часть замкнутого контура с током  $I$  (рис. 144), находится в магнитном поле с индукцией  $B$ . Под действием возникающей силы  $dF$  элемент занял новое положение, переместившись на величину  $d\bar{x}$  в направлении действия силы. По доказанному выше (§ 44) механическая работа равна произведению тока на изменение потоко-сцепления:

$$dA = d\bar{F}d\bar{x} = Id\psi = Id\Phi = I\bar{B}d\bar{S} = I\bar{B}[d\bar{x}d\bar{l}] = I d\bar{x} [d\bar{l} \bar{B}],$$

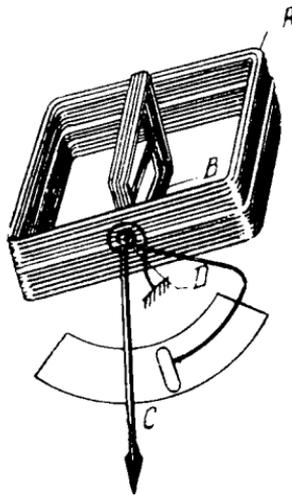


Рис. 143

откуда сила, действующая на элемент длины  $dl$  провода с током,

$$d\vec{F} = I [d\vec{l} \vec{B}].$$

В соответствии с векторным произведением направление силы связано с направлением тока ( $d\vec{l}$ ) и поля ( $\vec{B}$ ) правилом правого винта: вращение правого винта от тока к полю (по меньшему углу) дает направление силы как направление поступательного движения винта.

Для провода конечной длины

$$F = I \int [d\vec{l} \vec{B}].$$

Если прямой провод длиной  $l$  находится в однородном поле, образуя угол  $\alpha$  с направлением поля, то

$$F = Bll \sin \alpha,$$

а как частный случай при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  — прямой провод перпендикулярен направлению поля — сила

$$F = Bll.$$

Следует помнить, что магнитное поле действует непосредственно на ток, а не на провод; передача действия на провод осуществляется за счет связи свободных электронов с веществом провода. Если ток существует без провода, как, например, ток конвекции, то выражения для силы не изменяются, хотя в этом случае их удобнее представить в иной форме, как это будет показано ниже (§ 52).

Из выражения для силы видно, что индукция может быть определена как сила, действующая на элемент длины провода, перпендикулярный полю, с током, равным единице. Соответственно напряженность поля тогда определяется через равенство

$H = \frac{B}{\mu}$  и не имеет простого физического толкования (стр. 135).

## 2. Взаимодействие токов

Силы, возникающие в системе двух контуров с постоянными токами  $I_1$  и  $I_2$ , могут быть определены согласно изложенному выше.

Сила, действующая на второй контур, находящийся в поле первого контура (рис. 145),

$$\bar{F}_{12} = I_2 \oint_{l_2} [d\bar{l}_2 \bar{B}_1],$$

где  $\bar{B}_1$  — индукция в точке, соответствующей элементу длины  $d\bar{l}_2$  второго контура, определяемая током первого контура.

По закону Био—Савара—Лапласа

$$\bar{B}_1 = \frac{\mu I_1}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{[d\bar{l}_1 \bar{r}_{12}]}{r_{12}^3};$$

таким образом,

$$\begin{aligned} \bar{F}_{12} &= \\ &= \frac{\mu I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{[d\bar{l}_2 [d\bar{l}_1 \bar{r}_{12}]]}{r_{12}^3}. \end{aligned}$$

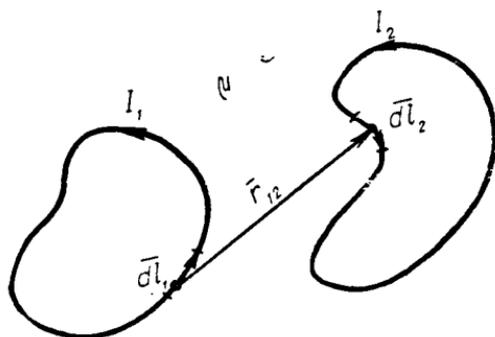


Рис. 145

Аналогично сила, действующая на первый контур, находящийся в поле второго,

$$\bar{F}_{21} = \frac{\mu I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{[d\bar{l}_1 [d\bar{l}_2 \bar{r}_{21}]]}{r_{21}^3},$$

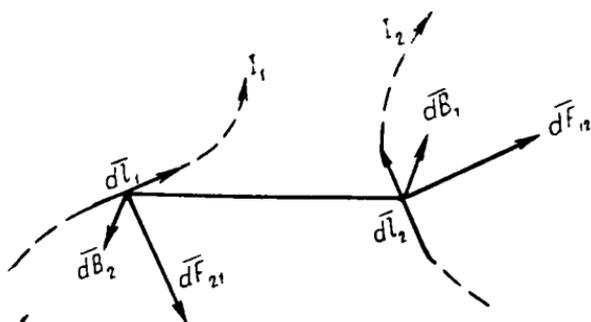


Рис. 146

где  $\bar{r}_{21} = -\bar{r}_{12}$ ; сила  $\bar{F}_{21}$  отличается от  $\bar{F}_{12}$  только знаком в полном соответствии с третьим законом Ньютона.

Следует отметить, что элементарные силы взаимодействия двух элементов длины разных контуров

$$d\vec{F}_{12} = I_2 [d\vec{l}_2 d\vec{B}_1] \quad \text{и} \quad d\vec{F}_{21} = I_1 [d\vec{l}_1 d\vec{B}_2]$$

третьему закону Ньютона могут не удовлетворять, как это видно из рис. 146, где  $d\vec{l}_1 \perp d\vec{l}_2$  и сила  $d\vec{F}_{12} \perp d\vec{F}_{21}$ . Это объясняется тем, что физический смысл имеет лишь замкнутый контур, а не отдельный элемент тока, к которому нельзя применять указанный закон.

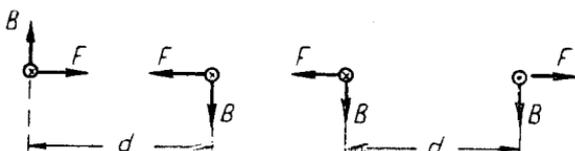


Рис. 147

Для двух параллельных проводов с токами при условии, что расстояние между ними  $d$  мало по сравнению с их длиной  $l$ , сила взаимодействия

$$F = l I_1 B_2 = l I_1 \frac{\mu I_2}{2\pi d} = \mu \frac{I_1 I_2}{2\pi d} l;$$

при одинаковом направлении токов провода притягиваются, при противоположном — отталкиваются (рис. 147).

### 3. Прибор магнитоэлектрической системы

Представление о силах, возникающих в системе контуров, как о силах, действующих на провод с током в магнитном поле, позволяет легко определить силы и в том случае, когда один из контуров в явном виде отсутствует (например в системах, содержащих постоянные магниты).

Это иллюстрируется ниже на приборе магнитоэлектрической системы, схематически представленном на рис. 148а.

Легкая рамка  $A$ , представляющая собой катушку из  $w$  витков, находится в магнитном поле постоянного магнита  $M$ , снабженного полюсными наконечниками и сердечником из мягкой стали. При прохождении тока через рамку последняя поворачивается вместе с укрепленной на ней стрелкой  $C$ , конец которой перемещается по шкале. Противодействующий момент создается спиральными пружинками  $D$ , одновременно служащими токопроводами в подвижную рамку. Обычно в магнитоэлектрических приборах поле в воздушном зазоре (рис. 148б) радиально-одно-

родно; в любом месте в пределах рабочей части индукция равна  $B$ .

В этом случае силы, действующие на рамку высотой  $b$  и шириной  $a$ , равные

$$F = wIBb,$$

направлены всегда по касательной к окружности диаметром  $a$ . Вращающий момент, действующий на рамку,

$$M_{вр} = Fa = wIBab = \kappa I$$

пропорционален току рамки; следовательно, такой прибор при противодействующем моменте  $M_{пр} = \kappa_1 \alpha$  имеет равномерную

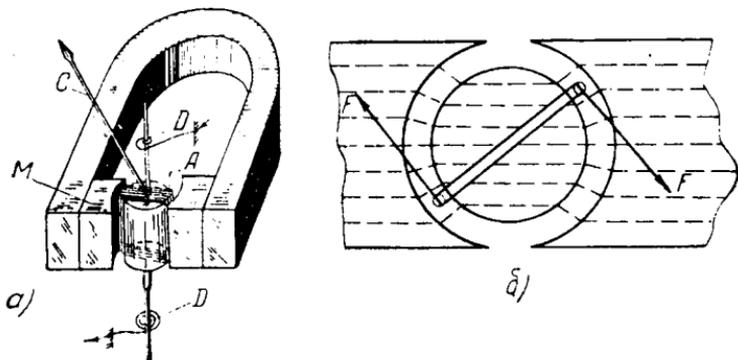


Рис. 148

шкалу и пригоден только для постоянного тока. Так же, как и приборы, рассмотренные выше, магнитоэлектрический прибор может быть использован как амперметр или вольтметр.

## § 50. ПОДЪЕМНАЯ СИЛА МАГНИТА

Подъемная сила магнита, равная силе отрыва от его полюсов якоря из мягкой стали (рис. 149), определяется из приведенного выше выражения для энергии магнитного поля.

Для магнита, имеющего площадь каждого из полюсов  $S$  и индукцию  $B$  при притяннутом якорю, работа подъемной силы на пути  $dx$ , равном бесконечно малому зазору между полюсами и якорем,

$$dA = F dx.$$

Эта работа равна изменению энергии  $dW$  магнита при перемещении якоря, в свою очередь равной энергии, сосредоточенной в этом зазоре.

Если поток равномерно распределен по сечению полюса и рассеянием и изменением магнитной индукции при притяжении якоря можно пренебречь,

$$dW = \frac{B^2}{2\mu_0} 2Sdx = Fdx,$$

откуда подъемная сила

$$F = \frac{B^2 S}{\mu_0}.$$

Сила, действующая на единицу поверхности полюса, т. е. давление

$$f = \frac{F}{2S} = \frac{B^2}{2\mu_0},$$

равно объемной плотности энергии и действует вдоль поля.

Таким образом, показано, что на поверхности тел в магнитном поле действуют силы как вдоль поля, так и в перпендикулярном направлении (§ 47), причем величина давления (величина

силы на единицу поверхности) равна объемной плотности энергии у этой поверхности.

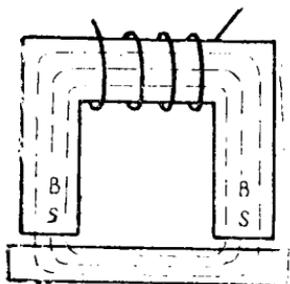


Рис. 149

## § 51. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭНЕРГИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЭНЕРГИЮ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ И ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

Электрическое и магнитное поля являются двумя сторонами единого электромагнитного поля, поэтому возможен переход одного из них в другое: энергия электрического поля может переходить в энергию магнитного поля, а энергия магнитного поля — в энергию электрического.

Первый переход, когда изменение электрического поля во времени определяло возникновение тока смещения, а следовательно, и магнитного поля, был описан в § 17.

Аналогия, существующая между электрическим и магнитным полями, позволяет утверждать, что изменение магнитного поля во времени влечет за собой появление электрического поля.

### 1. Закон электромагнитной индукции

Согласно изложенному выше (§ 46) для каждого контура системы (рис. 140) работа внешнего источника затрачивается на тепло Ленца—Джоуля в контуре и на изменение потокосцепления  $d\psi_k$ :

$$u_{\kappa} i_{\kappa} dt = i_{\kappa}^2 R_{\kappa} dt + i_{\kappa} d\psi_{\kappa},$$

где  $u_{\kappa}$  и  $i_{\kappa}$  — напряжение и ток источника, а  $R_{\kappa}$  — сопротивление контура  $\kappa$ .

Из приведенного уравнения может быть найден ток

$$i_{\kappa} = \frac{u_{\kappa} - \frac{d\psi_{\kappa}}{dt}}{R_{\kappa}}.$$

Это соотношение представляет собой закон Ома для контура  $\kappa$ . В числителе, помимо напряжения источника  $u_{\kappa}$ , появилась еще внутренняя э. д. с.

$$e_{\kappa} = - \frac{d\psi_{\kappa}}{dt},$$

возникшая, как видно из формулы, из-за изменения потокосцепления во времени.

Итак, в замкнутом контуре при изменении его потокосцепления возникает э. д. с. (опуская индекс),

$$e = - \frac{d\psi}{dt};$$

это явление называется *электромагнитной индукцией*, а последнее выражение — *законом электромагнитной индукции* в формулировке Максвелла.

Явление электромагнитной индукции представляет собой по существу преобразование магнитного поля в электрическое поле. Действительно э. д. с. индукции  $e$  в замкнутом контуре есть результат возникшего в контуре электрического поля напряженностью  $E$ , причем

$$\oint \bar{E} d\bar{l} = e.$$

Таким образом, закон электромагнитной индукции связывает между собой изменение магнитного поля с возникающим электрическим полем:

$$\oint \bar{E} d\bar{l} = - \frac{d\psi}{dt}.$$

Максвеллом было постулировано обобщение этого закона, лежащее в основе всей теории электромагнитного поля и заключающееся в утверждении, что *электрическое поле возникает при изменении магнитного поля в любой среде*, а не только в проводящем контуре. Проводящий контур лишь помогает обнаружить возникшее электрическое поле, под воздействием которого в замкнутом контуре возникает ток, измеряемый прибором, включенным в контур.

Закон электромагнитной индукции, открытый Фарадеем в 1831 г., был дополнен Ленцем в 1832—1834 гг. Ленцем было установлено общее правило о направлении э. д. с. индукции, которая всегда направлена так, что вызываемый ею ток создает магнитный поток, препятствующий изменению внешнего потока. Это значит, что при возрастании внешнего потока, когда  $\frac{d\psi}{dt} > 0$ , индуктированный поток направлен против внешнего,

при убывании ( $\frac{d\psi}{dt} < 0$ ) — совпадает с внешним потоком.

Правило Ленца отражается в записи закона электромагнитной индукции отрицательным знаком, стоящим перед производной.

Электрическое поле, определяемое изменением магнитного поля, не связано с электрическими зарядами, как электростатическое поле. Линии электрического поля, возникающего в результате электромагнитной индукции, всегда замкнуты сами на себя. Это поле носит вихревой характер ( $\oint \bar{E} d\bar{l} \neq 0$ ) в отличие от электростатического поля, для которого всегда  $\oint \bar{E} d\bar{l} = 0$ .

## 2. Э. д. с. само- и взаимоиנדукции

Э. д. с., возникающая в контуре  $k$  системы, определяется изменением потокосцепления этого контура:

$$e_k = -\frac{d\psi_k}{dt}.$$

Если заменить потокосцепление через токи всех контуров (§ 37)

$$\psi_k = L_k i_k + \sum_{p \neq k} M_{kp} i_p,$$

то э. д. с. контура  $k$  выразится суммой э. д. с.

$$e_k = -L_k \frac{di_k}{dt} - i_k \frac{dL_k}{dt} - \sum_{p \neq k} M_{kp} \frac{di_p}{dt} - i_c \frac{dM_{kp}}{dt}.$$

Первые два члена являются э. д. с. самоиндукции, остальные — э. д. с. взаимоиנדукции.

Члены вида

$$-i_k \frac{dL_k}{dt} \quad \text{и} \quad -i_c \frac{dM_{kp}}{dt}$$

возникают лишь в подвижных и изменяющихся контурах, когда  $L_k$  и  $M_{kp}$  переменны, например в электрических машинах (§ 53).

В неподвижных и неизменяющихся контурах остаются лишь э. д. с. самоиндукции

$$e_{\kappa\kappa} = -L_{\kappa} \frac{di_{\kappa}}{dt},$$

возникающая в контуре при изменении его тока, и э. д. с. взаимной индукции вида

$$e_{\kappa\rho} = -M_{\kappa\rho} \frac{di_{\rho}}{dt},$$

возникающая в контуре  $\kappa$  при изменении тока в контуре  $\rho$ .

### 3. Соотношение между индуктивностями и взаимной индуктивностью

Пусть в системе двух неподвижных контуров (рис. 150) сторонний источник  $\epsilon_1$  включен только в первый контур, во втором контуре источника нет.

Связь между индуктивностями и взаимной индуктивностью не зависит от сопротивления контуров, поэтому их можно принять равными нулю. Тогда по второму закону Кирхгофа

$$\epsilon_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = 0,$$

$$-L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = 0.$$

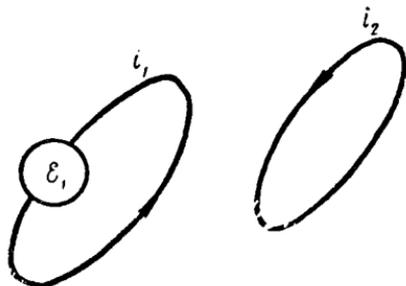


Рис. 150

Исключение  $i_2$  из этих уравнений приводит к

$$\epsilon_1 = \left( L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) \frac{di_1}{dt} = L_1' \frac{di_1}{dt};$$

$L_1'$  представляет собой эквивалентную индуктивность первого контура при короткозамкнутом втором контуре.

Работа, затраченная источником за время  $t'$ , когда ток достигает значения  $i_1'$ , равна

$$\int_0^{t'} \epsilon_1 i_1 dt = \int_0^{i_1'} L_1' i_1 di_1 = \frac{L_1' i_1'^2}{2}.$$

Так как эта работа должна быть положительной, то эквивалентная индуктивность также положительна:

$$L_1' = L_1 - \frac{M^2}{L_2} > 0,$$

откуда

$$L_1 L_2 > M^2.$$

#### 4. Заряд, индуцированный в контуре

При изменении потокосцепления от  $\Psi_1$  до  $\Psi_2$  в замкнутом контуре возникает ток (рис. 151), зависимость которого от времени определяется законом изменения потокосцепления. Однако заряд, протекающий по контуру и представляющий собой площадь, ограниченную кривой тока (рис. 151),

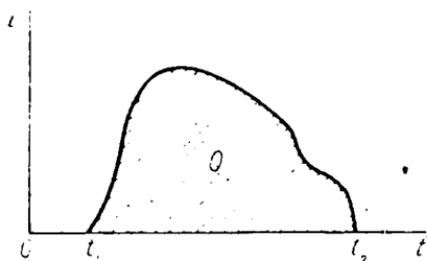


Рис. 151

$$\begin{aligned} Q &= \int_{t_1}^{t_2} i dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{e}{R} dt = \int_{t_1}^{t_2} -\frac{1}{R} \frac{d\psi}{dt} dt = \\ &= \frac{1}{R} \int_{\Psi_2}^{\Psi_1} d\psi = \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{R} = \frac{\Delta\Psi}{R} \end{aligned}$$

определяется лишь разностью начального и конечного значений потокосцепления и не зависит от характера его изменения.

Заряд  $Q$ , возникающий в контуре, а следовательно, изменение потокосцепления, измеряется специальным прибором—баллистическим гальванометром. Так как потокосцепление зависит от числа витков контура, потока, индукции, напряженности поля и магнитной проницаемости, то баллистический гальванометр можно использовать при измерении любой из этих величин.

#### 5. Электромагнитное экранирование

Для защиты от переменного магнитного поля используется так называемое *электромагнитное экранирование*, осуществляемое экраном из проводящего материала. В проводящем теле экрана возникают токи электромагнитной индукции. Магнитное поле этих токов по правилу Ленца препятствует изменению внешнего поля, и во внутренней полости экрана магнитное поле ослабляется. Подобные экраны выполняются из меди или алюминия и особенно часто используются в технике высоких частот; чем выше частота, тем тоньше может быть стенка экрана.

Ферромагнитные экраны в переменных полях одновременно осуществляют магнитное (§ 38) и электромагнитное экранирование.

В постоянном магнитном поле также возможно электромагнитное экранирование, но только при подвижном, например вращающемся, экране, в котором возникают индукционные токи, оказывающие экранирующее действие.

## § 52. ВТОРАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАКОНА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

### 1. Сила, действующая на движущийся заряд в магнитном поле

Приведенная выше формулировка закона электромагнитной индукции была выведена для замкнутых контуров. Однако часто представляет интерес определение э. д. с., возникающей в разомкнутом проводнике, движущемся в магнитном поле. Очевидно, что та же э. д. с. возникнет в неподвижном проводнике, относительно которого движется магнитное поле.

Пусть разомкнутый проводник произвольной формы длиной  $l$  (рис. 152) движется в магнитном поле индукции  $B$  (на рис. 152 поле не показано) со скоростью  $v$  вдоль оси  $X$ . Так как проводник содержит свободные заряды, то каждый из них движется в том же направлении и с той же скоростью. Такой движущийся заряд  $dq$  эквивалентен току  $i = \frac{dq}{dt}$ , текущему в том же направлении. На элемент длиной  $dx$  этого тока действует сила (§ 49)

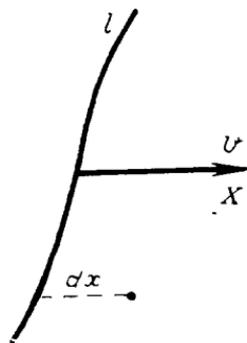


Рис. 152

$$dF = i [d\bar{x}\bar{B}] = \frac{dq}{dt} [d\bar{x}\bar{B}].$$

После введения  $dt$  под знак векторного произведения и замены  $\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{v}$  получается выражение для силы

$$d\bar{F} = dq [\bar{v}\bar{B}],$$

действующей на движущийся в магнитном поле заряд. Эта сила носит название силы Лоренца. Из выражения для силы видно, что на неподвижный электрический заряд ( $v=0$ ) магнитное поле не действует.

## 2. Э. д. с. индукции в движущемся проводнике

Электрическое поле напряженностью  $\vec{E}$  действует на заряд  $dq$  с силой (§ 2)

$$d\vec{F} = \vec{E}dq.$$

Из сопоставления последних двух равенств видно, что при движении проводника в магнитном поле со скоростью  $v$  в проводнике появляется электрическое поле напряженностью

$$\vec{E} = [\vec{v} \vec{B}].$$

Направление этого поля определяется правилом правого винта: вращение винта от вектора скорости к вектору индукции дает направление электрического поля как направление поступательного движения винта.

Под действием составляющей силы  $dF$ , совпадающей с осью проводника, свободные заряды начнут перемещаться вдоль проводника до тех пор, пока созданное ими электрическое поле не уравновесит поле  $\vec{E}$ . Следовательно, на концах проводника возникает э. д. с.

$$e = \int \vec{E} d\vec{l} = \int [\vec{v} \vec{B}] d\vec{l}.$$

Это выражение и есть закон электромагнитной индукции в иной формулировке, часто называемой формулировкой Фарадея.

Из этого выражения следует, что если проводник движется, не пересекая линий индукции, т. е.  $\vec{v}$  параллельно  $\vec{B}$ , то э. д. с.

равна нулю. Таким образом, необходимым и достаточным условием для возникновения э. д. с. в разомкнутом проводнике является пересечение им магнитных линий, как это и было сформулировано Фарадеем.

При правильном использовании обе формулировки приводят к одинаковым результатам. Так, в рамке, перемещающейся параллельно самой себе в однородном магнитном поле (на рис. 153 показаны два положения рамки), э. д. с. индукции согласно фор-

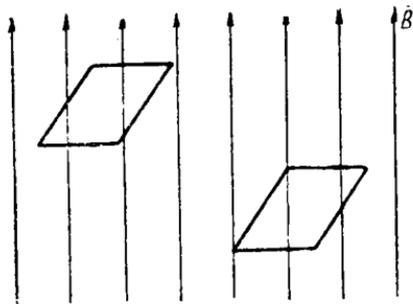


Рис. 153

мулировке Максвелла равна нулю, так как потокосцепление рамки не изменяется.

С точки зрения формулировки Фарадея, э. д. с. в рамке также равна нулю, так как в противоположных сторонах, находящихся в совершенно одинаковых условиях, э. д. с. будут равны, одинаково направлены и при суммировании по контуру дадут нуль.

Таким образом, условие пересечения магнитных линий для замкнутого контура не является достаточным.

В частном случае, широко используемом в технике, когда прямой провод движется в однородном магнитном поле перпендикулярно полю и самому себе, э. д. с. в нем

$$e = Blv.$$

### 3. Экранирование движущихся проводников

При желании использовать экраны, движущиеся относительно магнитного поля, часто допускают ошибку, заключающуюся в пренебрежении принципом непрерывности магнитного потока.

Так, еще в десятых годах этого столетия был предложен прибор для определения скорости корабля относительно земли, тогда как существующие приборы дают лишь скорость относительно воды. Предлагалось измерять пропорциональную скорости  $v$  э. д. с. индукции  $e$ , возникающую в проводнике длиной  $l$ , движущемся вместе с кораблем и пересекающем магнитное поле земли:

$$e = Blv;$$

вертикальная составляющая земного поля  $B$  в любом месте земного шара известна, а следовательно, может быть определена скорость  $v$ .

Однако соединительные провода вместе с основным проводом образуют замкнутый контур и при его движении э. д. с. в нем будет равна нулю, как это было указано выше. Это учитывалось изобретателями прибора, предложившими часть контура поместить в ферромагнитный экран в виде трубы (рис. 154).

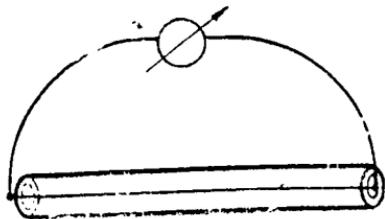


Рис. 154

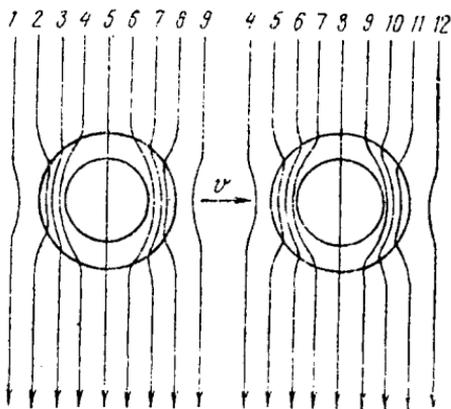


Рис. 155

Тогда, как предполагали изобретатели, измерительный прибор покажет пропорциональную скорости  $v$  разность э. д. с., возникающих в незэкранированном и экранированном участках контура.

Испытание такого прибора не дало положительного результата: э. д. с. оказалась равной нулю.

Причина заключалась в том, что при движении экрана в магнитном поле (рис. 155) из-за непрерывности магнитного потока те из линий, которые раньше (рис. 155а) проходили в правой стенке экрана, перешли в левую (рис. 155б). Поэтому число магнитных линий, пересекающих экранированный провод, будет точно таким же, как и без экрана.

Таким образом, при движении проводника вместе с окружающим его экраном относительно внешнего магнитного поля э. д. с., возникающая в проводнике, будет такой же, как и при отсутствии экрана.

Если же проводник движется внутри экрана, неподвижного относительно внешнего магнитного поля, то э. д. с., возникающая в проводнике, соответствует слабому полю в полости экрана.

### § 53. ИНДУКТИВНАЯ МАШИНА ПОСТОЯННОГО ТОКА

В принципе обычная электрическая машина подобна рассмотренному в § 48 прибору электродинамической системы (рис. 143),

состоящему из неподвижной и подвижной катушек, но машина не имеет пружин, создающих противодействующий момент, и подвижная катушка (ротор) может вращаться. Так как процессы в этой системе вызваны изменением взаимоиндуктивности (§ 48), такая машина может быть названа *индуктивной*.

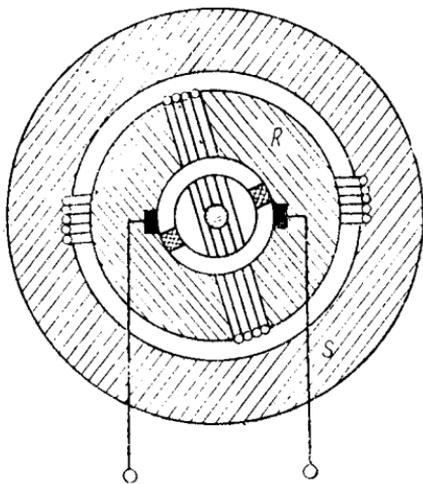


Рис. 156

Схематически такая машина показана на рис. 156.

Обычно катушка статора образует поле возбуждения; катушка ротора подключена к сети или к сопротивлению нагрузки.

Если катушки статора  $S$  и ротора  $R$  обтекаются постоянными токами  $I_S$  и  $I_R$ , потокосцепление катушки ротора (§ 37) и энергия  $W$  системы (§ 44) соответственно равны:

$$\psi_R = L_R I_R + M I_S;$$

$$W = \frac{1}{2} L_S I_S^2 + \frac{1}{2} L_R I_R^2 + M I_S I_R.$$

При вращении ротора индуктивности  $L_S$  и  $L_R$  катушек статора и ротора, если пренебречь влиянием пазов, в которые уложены катушки, останутся неизменными, а взаимоиндуктивность  $M$  между ними периодически меняется. Возникающий в машине момент вращения, равный производной энергии по углу  $\alpha$  поворота ротора,

$$M_{\text{вп}} = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = I_S I_R \frac{dM}{d\alpha},$$

а э. д. с. индукции в катушке ротора (§ 51)

$$e = -\frac{d\psi_R}{dt} = -I_S \frac{dM}{dt} = -I_S \frac{dM}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = -I_S \omega \frac{dM}{d\alpha},$$

где  $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$  — угловая скорость вращения.

В соответствии с принципом обратимости Ленца индуктивная машина может работать и генератором и двигателем, но независимо от режима работы в ней всегда налицо и момент вращения и э. д. с. индукции.

В генераторе используется э. д. с. машины, вызывающая при включении нагрузки ток  $I_R$ , который вместе с током  $I_S$  создает момент вращения. Этот момент в генераторе направлен против направления вращения и его преодолевает первичный двигатель, вращающий генератор. Отдаваемая первичным двигателем механическая энергия преобразуется генератором в электрическую.

В электрическом двигателе, наоборот, полезным является момент вращения, а э. д. с. машины преодолевается встречно направленным напряжением источника. Электрическая энергия, поступающая от источника, преобразуется двигателем в энергию механическую.

Как видно из выражений для момента вращения и э. д. с., они сохраняют постоянное значение только при  $\frac{dM}{d\alpha} = \text{const.}$  Для этого взаимоиндуктивность  $M$  должна непрерывно монотонно изменяться, что физически невозможно. В машине рис. 156 взаимоиндуктивность изменяется от нуля до максимального значения два раза за один оборот ротора; чтобы знаки момента вращения и э. д. с. при этом не менялись, приходится применять переключение с помощью коммутатора (рис. 156). Он представляет собой соединенные с концами катушки ротора два разделенных изоляцией контактных полукольца, по которым скользят щетки, приключенные к сети.

Переключение должно происходить при перемене знака производной  $\frac{dM}{d\alpha}$ , т. е. при переходе взаимной индуктивности через максимум в момент совпадения осей катушек статора и ротора (рис. 157). Момент вращения  $M_{\text{вп}} = I_S I_R \frac{dM}{d\alpha}$  сохранит свой знак благодаря одновременному изменению знака  $I_R$ , а изменившая свой знак э. д. с.  $e = -I_S \omega \frac{dM}{d\alpha}$  оказывается переключенной и относительно зажимов сети также сохранит свой знак. График изменения  $M_{\text{вп}}$  и  $e$  при наличии коммутации показан на рис. 157.

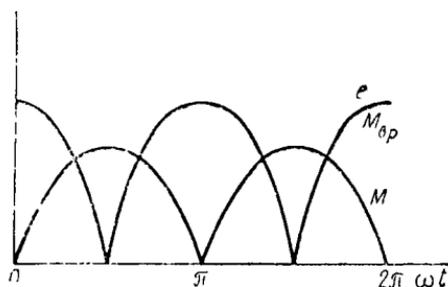


Рис. 157

Энергия в положениях, соответствующих максимальной взаимной индуктивности  $M_{\text{max}}$ , будет:

$$W_1 = \frac{L_S I_S^2}{2} + \frac{L_R I_R^2}{2} - M_{\text{max}} I_S I_R,$$

$$W_2 = \frac{L_S I_S^2}{2} + \frac{L_R I_R^2}{2} + M_{\text{max}} I_S I_R,$$

и разность  $W_2 - W_1$  равна механической работе  $\Delta A$ , совершенной за половину оборота:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = 2M_{\text{max}} I_S I_R = \Delta A.$$

Согласно изложенному (§ 46) на такую же величину  $\Delta A$  изменится энергия системы, а из сети двигатель возьмет энергию  $2\Delta A$ .

Генератор отдает такую же энергию в сеть, однако половина ее, т. е.  $\Delta A$ , возвращается сетью в генератор, преобразуясь в энергию магнитного поля.

Для того чтобы энергия  $\Delta A$ , запасенная в двигателе за половину оборота, была использована, а в генераторе — возвращена из сети, необходимо коммутацию тока якоря производить без размыкания его цепи. Это достигается тем, что ширина изоляции между двумя пластинами коммутатора (рис. 156) делается меньше ширины щетки. Тогда при набегании щетки на вторую половину коммутатора ток в закороченной обмотке, переходя через нулевое значение, изменяет свое направление, т. е. ток обмотки в это время переменный, и энергия, запасенная при увеличении тока от нуля до максимального значения, возвращается в сеть при уменьшении тока от максимума до нуля.

Сказанное не противоречит установленному выше положению о невозможности непрерывного преобразования энергии магнитного поля в механическую в системе контуров с постоянными то-

ками, так как такая машина, питаемая постоянным током от внешнего источника, благодаря коммутации представляет собой систему контуров с переменными токами.

В реальной машине магнитопровод имеет несколько иную конструкцию, а обмотка ротора, именуемого обычно якорем, состоит из ряда последовательно соединенных катушек; коммутатор состоит из большого числа пластин и называется коллектором. В такой машине благодаря сдвигу катушек в пространстве суммарный момент вращения и э. д. с. будут иметь лишь небольшие пульсации (рис. 158).

Таким образом, индуктивную машину постоянного тока независимо от того, работает она генератором или двигателем,

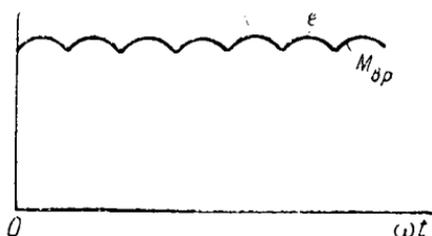


Рис. 158

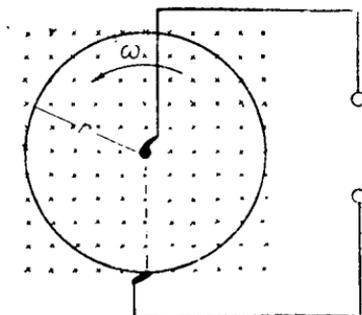


Рис. 159

невозможно осуществить без коллектора. Однако еще в двадцатых годах прошлого столетия была известна машина, на первый взгляд опровергающая это положение, в виде проводящего диска, вращающегося в постоянном магнитном поле (рис. 159); на ось и обод диска наложены щетки. Этот диск был применен Барлоу в качестве двигателя и Фарадеем—в качестве генератора.

В радиусах  $r$  диска, попеременно проходящих под щетками, полем индукции  $B$  индуктируется постоянная э.д.с., которую проще всего вычислить по формулировке Фарадея, взяв среднюю скорость, соответствующую половине радиуса:

$$E = Blv = Br\omega \frac{r}{2} = \frac{B\omega r^2}{2}.$$

Если приключить щетки к нагрузке (для генератора) или к сети (для двигателя), по радиусу будет проходить постоянный ток  $I$  и на него будет действовать постоянная сила

$$F = BI = BIr,$$

создающая постоянный момент вращения. Вместе с тем для контура, состоящего из внешней цепи и радиуса диска, по-

токосцепление остается при вращении диска постоянным и э.д.с., равная в формулировке Максвелла производной от потокосцепления по времени, обращается в нуль.

Объяснение этого кажущегося противоречия заключается в том, что формулировка Максвелла (§ 51) предусматривает физически неизменный контур, т. е. контур, всегда состоящий из одних и тех же проводников. Здесь же радиус диска, являющийся активной частью контура (частью, где возникает э.д.с.), по мере вращения диска заменяется все новыми и новыми радиусами и к такому контуру формулировка Максвелла неприменима.

В скрытом виде в диске имеется и коллектор—сам диск. Под щетки приходят все новые элементы диска, и такой диск представляет собой предельный случай коллектора с бесконечно большим числом пластин. Это подтверждается еще и тем, что диск с радиальными прорезями продолжает давать постоянную э.д.с., хотя и появляются пульсации, соответствующие конечному теперь числу коллекторных пластин.

Подобные машины получили название *униполярных*, а явление наведения э.д.с. в проводниках, движущихся всегда в поле одного направления, — *униполярной индукции*.

Обычные машины являются *биполярными*, так как проводники переходят из-под северного полюса под южный, затем опять под северный и т. д., и в них наводится переменная э.д.с., выпрямляемая коллектором.

#### § 54. СРАВНЕНИЕ ЕМКОСТНЫХ И ИНДУКТИВНЫХ МАШИН

Итак, основной недостаток машин постоянного тока—наличие коллектора и скользящих контактов—неизбежен.

Согласно изложенному выше (§ 20 и 53) в идеальной электрической машине без потерь за половину оборота полностью используется вся энергия  $W$ , запасенная в машине. Тогда мощность машины

$$P = \frac{W}{T} = 2nW,$$

где  $T$  — период вращения, а  $n$  — число оборотов в единицу времени. Это в одинаковой степени относится и к индуктивным и к емкостным машинам.

Обычно, сравнивая между собой эти машины, сопоставляют удельные энергии электрического и магнитного полей. Используя сжатые газы в качестве рабочего диэлектрика, в емкостной машине удается достичь напряженности поля свыше 600 кв см, что соответствует удельной энергии электрического поля

$$W_{0e} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{(6 \cdot 10^7)^2}{2 \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 16 \text{ кдж/м}^3.$$

Удельная энергия магнитного поля при индукции  $B=1$  вб/м<sup>2</sup>

$$W_{0m} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1^2}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 400 \text{ кдж/м}^3$$

в 25 раз превышает удельную энергию в емкостной машине. Отсюда делается вывод о преимуществе индуктивных машин над емкостными.

Это заключение неверно, так как нужно сравнивать не удельные энергии магнитного и электрического полей, а отношения энергии, запасенной в рабочем объеме машины, к объему всей машины.

В индуктивных машинах значительную часть их объема занимает ферромагнитный потокпровод, служащий для замыкания непрерывного магнитного потока. Поток смещения прерывен: он начинается и кончается на заряженных проводниках. Поэтому ёмкостная машина не должна иметь потокпровода и рабочий объем между взаимодействующими поверхностями составляет значительную долю всего объема машины. Таким образом, даже при меньшей удельной энергии электрического поля ёмкостная машина не уступает, а в некоторых случаях стоит выше индуктивной по величине энергии и мощности, приходящихся на единицу полного объема машины.

Индуктивные машины постоянного тока высокого напряжения из-за наличия коллектора осуществить нельзя. Подобные возможности у индуктивных бесколлекторных машин переменного тока выше, но также ограничены. Поэтому при необходимости иметь источник постоянного тока высокого напряжения приходится применять индуктивный генератор, повышающий трансформатор и выпрямитель, т. е. три устройства, каждое из которых рассчитано на полную мощность установки. По сравнению с такой системой емкостный генератор, сразу дающий постоянный ток высокого напряжения, оказывается еще более перспективным.

---

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение той или иной области физики основано на значительном числе опытных данных, связывающих величины, характеризующие изучаемые явления. При этом целесообразно минимально необходимое число соотношений считать основными, а остальные выводить из них.

Выше в качестве основных соотношений взяты закон Кулона, закон Био—Савара—Лапласа, принцип непрерывности магнитного потока и закон сохранения энергии. Из этих основных соотношений были выведены все остальные.

Важнейшими из них являются: теорема Гаусса

$$\oint \bar{D} d\bar{S} = Q,$$

доказанная для электростатического поля в однородной изотропной среде, закон полного тока

$$\oint \bar{H} d\bar{l} = I,$$

доказанный для магнитного поля токов в проводящих контурах, и закон электромагнитной индукции

$$e = \oint \bar{E} d\bar{l} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

доказанный для замкнутых проводящих контуров.

Как указано выше, ряд соотношений был обобщен Максвеллом для более сложных случаев. Так, теорема Гаусса была обобщена для любых сред и переменных полей. Принцип непрерывности магнитного потока, поддающийся опытной проверке лишь вне намагниченных тел, был обобщен на любые тела. Закон полного тока был обобщен для токов всех видов: проводимости, конвекции и смещения в любой среде. Закон электромагнитной индукции был обобщен для любых сред.

В результате были получены основные уравнения электромагнитного поля:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = i, \quad \oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = q, \quad \oint \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Из первых двух уравнений следует, что электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом, образуя единое электромагнитное поле, свойства которого и методы расчета изучаются в третьей части курса.

---

СВЯЗЬ МЕЖДУ ЕДИНИЦАМИ В СИСТЕМАХ МКСА, СГС<sub>ε<sub>0</sub></sub> и СГС<sub>μ<sub>0</sub></sub>

Наименование величины	МКСА		Число единиц, равное единице в системе МКСА, в системах	
	Наименование	Обозначение	СГС <sub>ε<sub>0</sub></sub>	СГС <sub>μ<sub>0</sub></sub>
Сила . . . . .	ньютон	<i>n</i>	10 <sup>5</sup>	10 <sup>5</sup>
Энергия . . . . .	джоуль	<i>дж</i>	10 <sup>7</sup>	10 <sup>7</sup>
Мощность . . . . .	ватт	<i>вт</i>	10 <sup>7</sup>	10 <sup>7</sup>
Заряд . . . . .	кулон	<i>к</i>	3 · 10 <sup>9</sup>	10 <sup>-1</sup>
Смещение . . . . .	—	<i>к/м<sup>2</sup></i>	3 · 10 <sup>5</sup>	10 <sup>-5</sup>
Потенциал, напряжение, э.д.с.	вольт	<i>в</i>	$\frac{10^{-2}}{3}$	10 <sup>8</sup>
Напряженность электрического поля . . . . .	—	<i>в/м</i>	$\frac{10^{-4}}{3}$	10 <sup>6</sup>
Емкость . . . . .	фарада	<i>ф</i>	9 · 10 <sup>11</sup>	10 <sup>-9</sup>
Диэлектрическая проницаемость . . . . .	—	<i>ф/м</i>	9 · 10 <sup>9</sup>	10 <sup>-11</sup>
Ток . . . . .	ампер	<i>а</i>	3 · 10 <sup>9</sup>	10 <sup>-1</sup>
Сопротивление . . . . .	ом	<i>ом</i>	$\frac{10^{-11}}{9}$	10 <sup>9</sup>
Проводимость . . . . .	—	<i>1/ом</i>	9 · 10 <sup>11</sup>	10 <sup>-9</sup>
Напряженность магнитного поля . . . . .	—	<i>а/м</i>	12π · 10 <sup>7</sup>	4π · 10 <sup>-3</sup>
Магнитный поток, магнитная масса . . . . .	вебер	<i>вб</i>	$\frac{10^{-2}}{3}$	10 <sup>8</sup>
Магнитная индукция . . . . .	—	<i>вб/м<sup>2</sup></i>	$\frac{10^{-6}}{3}$	10 <sup>4</sup>
Индуктивность . . . . .	генри	<i>гн</i>	$\frac{10^{-11}}{9}$	10 <sup>9</sup>
Магнитная проницаемость . . . . .	—	<i>гн/м</i>	$\frac{10^{-13}}{9}$	10 <sup>7</sup>
Намагничивающая сила . . . . .	ампер	<i>а</i>	12π · 10 <sup>9</sup>	4π · 10 <sup>-1</sup>

## ДОЛЬНЫЕ И КРАТНЫЕ ЕДИНИЦЫ

При пользовании единицами, большими или меньшими основной, принято определять единицы в десятичной системе, т. е. соотношение с основной единицей выражается числом  $10^n$ , где  $n$  может принимать любые целые значения. Для производных единиц приняты обозначения в виде букв, приписываемых перед обозначением основной единицы.

Соотношение с основной единицей	Обозначения		Произношение
	международные	русские	
$10^6$	M	мг	мега
$10^3$	k	к	кило
$10^2$	h	г	гекто
10	D	дж	дека
$10^{-1}$	d	д	деци
$10^{-2}$	c	с	санти
$10^{-3}$	m	м	милли
$10^{-6}$	$\mu$	мк	микро
$10^{-12}$	p	п	пико

## АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютная практическая электромагнитная система единиц МКСА 3, 9  
 — электромагнитная система единиц СГС  $\rho_0$  9  
 — электростатическая система единиц СГС  $\epsilon_0$  9  
 Ампер 5  
 Аналогия электростатическая 95, 146  
 Бареттер 129  
 Барлоу 213  
 Бенардос Н. Н. 7  
 Бесколлекторные машины 213  
 Био—Савара—Лапласа закон 136, 154  
 Ветвь электрической цепи 99  
 Взаимная индуктивность 143, 187  
 — индукция 205  
 — проводимость 118  
 Взаимное сопротивление контуров 117  
 Взаимодействие токов 198  
 Взаимобратные цепи 102, 113, 120  
 Внутреннее сопротивление 101, 108  
 Внутренняя индуктивность 157, 159  
 — проводимость 102, 109  
 Вольтамперная характеристика 128  
 Восприимчивость диэлектрическая 23  
 — магнитная 170  
 Выпрямитель 129  
 Гаусса теорема 19, 30, 142  
 Генератор емкостный 88  
 — индуктивный 210  
 Герц 6  
 Гильберт 5  
 Гистерезис 65, 78, 174, 188  
 Градиент потенциала 16, 137  
 Двигатель емкостный 88  
 — индуктивный 210  
 Дебре 7, 107  
 Диамагнитные материалы 170  
 Динамическая емкость 66  
 — диэлектрическая проницаемость 65  
 — индуктивность 172  
 — магнитная проницаемость 171  
 Динамическое сопротивление 129  
 Диполь магнитный 147  
 — электрический 27  
 Диэлектрическая восприимчивость 23  
 — проницаемость 11  
 — относительная 12  
 Доливо-Добровольский М. О. 7  
 Дуга электрическая 129  
 Единицы измерения физических величин 9  
 Емкость динамическая 66  
 — статическая 19, 66  
 — энергетическая 73  
 — линий 57, 58, 59, 62  
 — плоского конденсатора 35  
 — сферического конденсатора 40  
 — цилиндрического конденсатора 44  
 Емкостный генератор 88  
 — двигатель 88  
 Заземление 97  
 Закон Био—Савара—Лапласа 136, 154  
 — Кирхгофа второй 100, 113  
 — Кирхгофа первый 100, 113  
 — Кулона 5, 11, 146, 152  
 — Ленца—Джоуля 95  
 — Ома 93  
 — полного тока 140, 153  
 — электромагнитной индукции 202, 207  
 Заряды свободные 25  
 — связанные 22  
 Изотропная среда 14  
 Индуктивность взаимная 143, 187  
 — динамическая 172  
 — линий 157, 159  
 — статическая 142  
 — энергетическая 187  
 Источник тока 102  
 — напряжения 101  
 Иоффе А. Ф. 6, 136  
 Кирхгофа, законы 100, 113  
 Коаксиальный кабель 42, 97, 166  
 Коммутация 90, 211

- Конденсаторный ввод 45  
 Конденсатор плоский 33, 36  
 — сферический 38  
 — цилиндрический 42  
 Контурная э. д. с. 117  
 Контурное сопротивление 117  
 Контурных токов метод 116  
 Коэрцитивная сила 173  
 Коэффициент полезного действия  
 линии передачи 106  
 — потенциальный 60, 73  
 — связи 144  
 Кривая намагничивания 171  
 — размагничивания 182  
 Кулона, закон 5, 11, 146, 152  
 Кулонвольтная характеристика 68  
 Лачинов Д. А. 7, 107  
 Лебедев П. Н. 6  
 Ленин В. И. 8  
 Ленца—Джоуля, закон 95  
 Ленц Э. Х. 6, 204  
 Линейные диэлектрики 64  
 — емкости 65  
 — материалы 170  
 — сопротивления 95, 128  
 — цепи 104  
 Линии передачи 55, 60, 104, 153  
 Лодыгин А. Н. 7  
 Ломоносов М. В. 5  
 Магнитная восприимчивость 170  
 — индукция 136, 198  
 — масса 145  
 — проницаемость 135  
 — цепь 169, 175  
 Магнитное напряжение 137  
 — поле 135  
 — сопротивление 176  
 — экранирование 148  
 Магнитный диполь 147  
 — двойной слой 150  
 — момент 147  
 — потенциал 137, 150  
 — поток 141  
 — — взаимной индукции 143  
 — — самоиндукции 143  
 Магнитострикция 175  
 Магнитоэлектрический прибор 200  
 Магниты постоянные 148, 150, 182,  
 190  
 Максвелл 6, 20, 60, 81, 116, 118, 203,  
 216  
 Метод контурных токов 116  
 — наложения 121, 131  
 — потенциальных коэффициентов 59  
 — средних потенциалов 62  
 — точечных зарядов 26  
 — узловых напряжений 118  
 — эквивалентного источника 123  
 — эквивалентных цепей 108  
 — электрических изображений 145  
 Момент контура с током 151  
 — магнитный 147  
 — электрический 21  
 Наложения метод 121, 131  
 — принципы 15, 27, 32, 63  
 Намагниченность 170  
 Намагничивающая сила 137  
 Напряжение 15  
 Напряженность магнитного поля  
 135, 198  
 — электрического поля 13, 21  
 Нелинейная индуктивность 112  
 — цепь 68, 130, 177  
 Нелинейное сопротивление 128  
 Обобщенные координаты 81, 191  
 — силы 81, 191  
 Объемная плотность энергии  
 магнитного поля 189  
 — — — электрического поля 78  
 Однородная среда 11  
 Ома, закон 93  
 Основная кривая намагничивания 171  
 Остаточная индукция 173  
 Остаточное смещение 65  
 Падение напряжения 105  
 Параллельное соединение 109  
 — — — нелинейных конденсаторов 68  
 — — в нелинейной магнитной цепи  
 180  
 — — в нелинейной электрической  
 цепи 132  
 Парамагнитные материалы 170  
 Петров В. В. 5  
 Пироцкий Ф. А. 7, 107  
 Плоский конденсатор 33, 66  
 Плотность тока 80  
 — — проводимости 94  
 — — смещения 80  
 Поверхности равного потенциала 17  
 Подъемная сила магнита 201  
 Поле магнитное 135  
 — постоянного тока 94  
 — стационарное 94  
 — у поверхности раздела 31, 96, 147  
 — электрическое 11  
 — — электростатическое 11, 15  
 Полного тока закон 140, 153  
 Поляризация диэлектриков 21  
 — остаточная 65  
 Поляризованность 23  
 Попов А. С. 7  
 Последовательное соединение 109  
 — — нелинейных конденсаторов 68  
 — — в нелинейной магнитной цепи  
 172  
 — — в нелинейной электрической  
 цепи 132  
 Постоянные магниты 148, 150, 182,  
 190  
 Постоянный электрический ток 92

- Потенциал магнитный 137, 150  
 — электрический 14, 15, 16  
 Потенциальные коэффициенты 60, 73  
 Потери в диэлектрике 78  
 — в ферромагнетике 188  
 Поток вектора напряженности электрического поля 19  
 — — смещения 19  
 — — взаимной индукции 143  
 — магнитный 141  
 — самоиндукции 143  
 Потокосцепление 142  
 Преобразования энергии поля магнитного 191  
 — — — электрического 78, 81  
 Принцип наложения 15, 27, 32, 63  
 — непрерывности магнитного потока 142  
 — — электрического тока 94  
 Проводимость 93  
 Проницаемость диэлектрическая 11  
 — магнитная 135  
 Прямоугольная рамка 159  
 Пьезоэлектрический эффект 65  
 Разность потенциалов 15  
 Расчет нелинейных цепей емкостных 68  
 — — — магнитных 177  
 — — — электрических 130  
 Рационализованная форма уравнений 9  
 Рихман Г. В. 5  
 Самоиндукция 205  
 Свободный заряд 25  
 Связанный заряд 22  
 Сегнетоэлектрики 64  
 Сила Лоренца 207  
 Силовые линии 16, 140  
 Силы в поле магнитном 192  
 — — — электрическом 83  
 Славянов Н. Г. 7  
 Смещения вектор 14  
 — ток 80  
 Соединение звездой 110  
 — параллельное 100, 108  
 — последовательное 100, 108  
 — смешанное 100  
 — треугольником 110  
 Соленоид 163, 195  
 Сопротивление взаимное контуров 117  
 — динамическое 129  
 — магнитное 176  
 — контурное 117  
 — статическое 128  
 Стационарное поле 94  
 Столетов А. Г. 7  
 Страничное поле 17  
 Страничная э. д. с. 17  
 Сферический конденсатор 38  
 Температурный коэффициент сопротивления 93  
 Теорема Гаусса 19, 30, 142  
 Ток конвекции 92  
 — проводимости 80, 92  
 — смещения 80  
 — электрический 92  
 Томсон 46  
 Торонд 161  
 Трансформатор тока 164  
 Удельная проводимость 93  
 Удельное сопротивление 93  
 Узел электрической цепи 99  
 Узловая проводимость 118  
 Узловое напряжение 119  
 Узловой ток 118  
 Униполярная индукция 214  
 — машина 213  
 Фарадей 6, 204, 208, 213  
 Ферромагнитные материалы 170  
 Характеристики нелинейных элементов 68, 128, 179  
 Хевисайд 9  
 Цели линейные магнитные 175  
 — — электрические 104  
 — нелинейные емкостные 68  
 — — магнитные 177  
 — — электрические 128  
 Цилиндрический конденсатор 42  
 Циперновский 7  
 Шиллинг П. Л. 6  
 Штейнмец 189  
 Эдиссон 7  
 Эйхенвальд А. А. 6, 80, 136  
 Эквивалентная схема 76  
 Эквивалентное сопротивление 108  
 Эквипотенциальные линии 17, 140  
 Экранирование магнитное 148  
 — электромагнитное 206, 209  
 — электростатическое 13  
 Электрическая дуга 129  
 — емкость 19, 66, 73  
 — цепь 99  
 Электрический диполь 27  
 — момент 23  
 — потенциал 14  
 — ток 80, 92  
 Электрическое поле 11  
 Электродвижущая сила 17, 96, 101  
 — — взаимной индукции 204  
 — — самоиндукции 204  
 Электромагнитной индукции закон 202, 207  
 Электромагнитное поле 6, 81, 202  
 — экранирование 206, 209  
 Электронная лампа 130  
 Электростатическое поле 11, 15  
 — экранирование 13  
 Электростатический вольтметр 66  
 Электрострикция 65

Электрет 65  
Энергия магнитного поля 189  
— системы заряженных тел 71  
— системы контуров с токами 185  
— электрического поля 78  
Эпинус Ф. У. 5  
Эрстед 5

Яблочков П. Н. 7  
Явление гистерезиса диэлектриче-  
ского 65  
— — магнитного 174, 189  
— электромагнитной индукции 202  
Якоби Б. С. 6, 7

---

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие . . . . .	3
Введение . . . . .	5
<b>Глава I. Электрическое поле</b>	
§ 1. Закон Кулона . . . . .	11
§ 2. Напряженность поля. Смещение . . . . .	13
§ 3. Потенциал. Напряжение . . . . .	14
§ 4. Графическое изображение поля . . . . .	16
§ 5. Образование электрического поля . . . . .	17
§ 6. Поток. Емкость . . . . .	18
§ 7. Обобщенные теоремы Гаусса . . . . .	19
§ 8. Диэлектрик в электростатическом поле . . . . .	21
<b>Глава II. Расчет электрического поля</b>	
§ 9. Метод точечных зарядов . . . . .	26
1. Электрический диполь . . . . .	27
2. Заряженный диэлектрический диск . . . . .	28
§ 10. Метод расчета по теореме Гаусса . . . . .	30
1. Заряженная плоскость . . . . .	30
2. Поле у поверхности раздела двух сред . . . . .	31
3. Плоский конденсатор . . . . .	33
4. Заряженный шар . . . . .	36
5. Сферический конденсатор . . . . .	38
6. Заряженный цилиндр . . . . .	41
7. Цилиндрический конденсатор . . . . .	42
§ 11. Метод электрических изображений . . . . .	45
1. Точечный заряд и плоская поверхность проводящей среды . . . . .	46
2. Шар в электрическом поле . . . . .	48
3. Линии передачи . . . . .	55
§ 12. Метод потенциальных коэффициентов . . . . .	59
§ 13. Метод средних потенциалов . . . . .	62
§ 14. Нелинейные диэлектрики и конденсаторы . . . . .	64
1. Плоский конденсатор с нелинейным диэлектриком . . . . .	66
2. Цепь из нелинейных конденсаторов . . . . .	68
<b>Глава III. Энергия электрического поля и ее преобразования</b>	
§ 15. Энергия системы заряженных тел . . . . .	71
1. Вывод выражения энергии . . . . .	71
2. Доказательство равенства взаимных потенциальных коэффициентов . . . . .	73

3.	Выражение энергии через поверхностную и объемную плотности заряда . . . . .	74
4.	Емкость двух последовательно соединенных конденсаторов с утечками . . . . .	75
5.	Энергия нелинейного конденсатора . . . . .	77
§ 16.	Распределение энергии электрического поля . . . . .	78
§ 17.	Преобразование энергии электрического поля в системе неподвижных тел . . . . .	79
§ 18.	Прсобразование энергии электрического поля в механическую энергию . . . . .	81
1.	Система отключена от источников . . . . .	82
2.	Система подключена к источникам постоянных потенциалов . . . . .	82
§ 19.	Силы, действующие в электрическом поле . . . . .	83
1.	Силы, действующие на уединенное проводящее тело . . . . .	84
2.	Силы, действующие у поверхности раздела двух диэлектрических сред . . . . .	85
3.	Силы, действующие в системе двух тел . . . . .	86
§ 20.	Емкостная машина постоянного тока . . . . .	88

#### Глава IV. Постоянный электрический ток в проводящей среде

§ 21.	Основные понятия и соотношения . . . . .	92
§ 22.	Электростатическая аналогия . . . . .	95
1.	Поле у поверхности раздела двух сред . . . . .	96
2.	Сопrotивление изоляции коаксиального кабеля . . . . .	97
3.	Сопrotивление заземления . . . . .	97
§ 23.	Законы электрических цепей постоянного тока . . . . .	99
§ 24.	Источники напряжения и тока и их эквивалентность . . . . .	101

#### Глава V. Расчет электрической цепи постоянного тока

§ 25.	Теория линии передачи и работа источника на нагрузку . . . . .	104
§ 26.	Метод эквивалентных цепей . . . . .	108
§ 27.	Расчет цепей по законам Кирхгофа . . . . .	113
1.	Две формы записи законов Кирхгофа . . . . .	113
2.	О числе уравнений по законам Кирхгофа . . . . .	115
3.	Применение метода расчета цепей по законам Кирхгофа . . . . .	116
§ 28.	Метод контурных токов . . . . .	116
§ 29.	Метод узловых напряжений . . . . .	118
§ 30.	Метод наложения . . . . .	121
§ 31.	Метод эквивалентного источника энергии . . . . .	123
§ 32.	Электрические нелинейные цепи и их расчет . . . . .	128
1.	Характеристики нелинейных элементов электрических цепей . . . . .	128
2.	Расчет нелинейных цепей приведением к линейным . . . . .	130
3.	О расчете нелинейных цепей . . . . .	131
4.	Графические методы расчета нелинейных цепей . . . . .	132

#### Глава VI. Магнитное поле

§ 33.	Закон Био—Савара—Лапласа . . . . .	136
§ 34.	Магнитный потенциал. Магнитное напряжение . . . . .	137
§ 35.	Закон полного тока . . . . .	140
§ 36.	Магнитный поток. Потокосцепление . . . . .	141
§ 37.	Индуктивность и взаимоиנדуктивность . . . . .	142
1.	Индуктивность . . . . .	142
2.	Взамоиנדуктивность . . . . .	143

## Глава VII. Расчет магнитного поля

§ 38. Расчет магнитного поля в пространстве, не занятом токами и постоянными магнитами. Электростатическая аналогия . . . . .	145
1. Прямой магнит . . . . .	147
2. Поле у поверхности раздела двух сред . . . . .	147
3. Магнитное экранирование . . . . .	148
4. Круговой контур . . . . .	149
§ 39. Эквивалентность контура с током постоянному магниту . . . . .	150
§ 40. Расчет поля по закону Био—Савара—Лапласа или по закону полного тока . . . . .	153
1. Прямой провод . . . . .	153
2. Двухпроводная линия . . . . .	157
3. Прямоугольная рамка . . . . .	159
4. Торонд и соленоид . . . . .	161
5. Проходной трансформатор тока . . . . .	164
6. Коаксиальный кабель . . . . .	166

## Глава VIII. Расчет магнитной цепи

§ 41. Материалы в магнитном поле . . . . .	169
1. Неферромагнитные материалы . . . . .	169
2. Ферромагнитные материалы . . . . .	170
§ 42. Методы расчета магнитной цепи . . . . .	175
1. Линейная цепь . . . . .	175
2. Нелинейная цепь . . . . .	177
§ 43. О расчете постоянного магнита . . . . .	182

## Глава IX. Энергия магнитного поля и ее преобразования

§ 44. Энергия системы контуров с токами . . . . .	185
1. Вывод выражения энергии . . . . .	185
2. Доказательство равенства взаимоиндуктивностей . . . . .	187
3. Энергия нелинейного тороида . . . . .	188
§ 45. Распределение энергии магнитного поля . . . . .	189
1. Вывод выражения энергии . . . . .	189
2. Энергия постоянного магнита . . . . .	190
§ 46. Преобразование энергии магнитного поля в механическую энергию . . . . .	191
1. Система с постоянными потокоцеплениями . . . . .	191
2. Система с постоянными токами . . . . .	192
§ 47. Силы, действующие в уединенном контуре . . . . .	192
1. Провод конечной длины . . . . .	193
2. Прибор электромагнитной системы . . . . .	194
3. Соленоид . . . . .	195
§ 48. Силы, действующие в системе двух контуров . . . . .	196
§ 49. Проводник с током в магнитном поле . . . . .	197
1. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле . . . . .	197
2. Взаимодействие токов . . . . .	198
3. Прибор магнитоэлектрической системы . . . . .	200
§ 50. Подъемная сила магнита . . . . .	201
§ 51. Преобразование энергии магнитного поля в энергию электрического поля и закон электромагнитной индукции . . . . .	202
1. Закон электромагнитной индукции . . . . .	202
2. Э.д.с. само- и взаимной индукции . . . . .	204
3. Соотношение между индуктивностями и взаимной индуктивностью . . . . .	205

	Стр.
4. Заряд, индуцированный в контуре . . . . .	206
5. Электромагнитное экранирование . . . . .	206
§ 52. Вторая формулировка закона электромагнитной индукции . .	207
1. Сила, действующая на движущийся заряд в магнитном поле . . . . .	207
2. Э.д.с. индукции в движущемся проводнике . . . . .	208
3. Экранирование движущихся проводников . . . . .	209
§ 53. Индуктивная машина постоянного тока . . . . .	210
§ 54. Сравнение ёмкостных и индуктивных машин . . . . .	214
Заключение . . . . .	216
Приложение 1 . . . . .	218
Приложение 2 . . . . .	219
Алфавитный указатель . . . . .	220

---

с 1.1-1961 г.  
№ 3 п. 10.

1928

11  
28648