

Е.КИМ

# МЕЗОННЫЕ АТОМЫ И ЯДЕРНАЯ СТРУКТУРА

А Т О М И З Д А Т

Е. КИМ

# МЕЗОННЫЕ АТОМЫ И ЯДЕРНАЯ СТРУКТУРА

Перевод с английского  
канд. физ.-мат. наук Г. Я. КОРЕНМАНА, В. П. ПОПОВА,  
канд. физ.-мат. наук Е. Л. ЯДРОВСКОГО



МОСКВА АТОМИЗДАТ 1975

# MESIC ATOMS AND NUCLEAR STRUCTURE

Y. N. KIM

*Texas Tech University*

1971

NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY

AMSTERDAM · LONDON

К и м Е. Мезонные атомы и ядерная структура (Голландия, 1971). Пер. с англ. М., Атомиздат, 1975, 224 с.

Книга представляет собой перевод первой в мировой литературе монографии, посвященной систематическому изложению физики мезоатомов. Наибольшее внимание в книге уделено использованию мезоатомов для изучения структуры атомных ядер. Вместе с тем книга дает достаточно полное представление о других направлениях исследований в этой области физики, таких, как мезоатомные процессы, мюонный катализ ядерного синтеза, мезомолекулярные явления, физика мюония и т. п.

Специалисты по физике мезоатомов и структуре атомного ядра найдут в книге обширный справочный материал в систематизированном виде. Начинающим исследователям она позволит быстрее освоить новую область, не освещенную в учебниках и монографиях. Книга представляет интерес также для специалистов в смежных областях, таких, как физика атомных столкновений и квантовая химия, поскольку многие проблемы физики мезоатомов имеют к ним непосредственное отношение. Она полезна преподавателям ядерной физики и студентам, специализирующимся в этой области.

Таблиц 75. Рисунков 36. Библиография 451 название.

## ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКОВ

Физика мезоатомов занимает пограничное положение между несколькими традиционными разделами физики. Изучение структуры атомных ядер, характеристик элементарных частиц, свойств химических соединений — таков далеко не полный перечень вопросов, связывающих это направление со смежными областями науки. В значительной мере именно поэтому физика мезоатомов в последние годы приобретает все большее научное и практическое значение.

Предлагаемая вниманию читателей книга Е. Кима «Мезонные атомы и ядерная структура» представляет собой первую попытку систематизированного изложения физики мезоатомов. Наибольшее внимание в книге уделено использованию мезоатомов для изучения структуры атомных ядер. Вместе с тем книга дает достаточно полное представление о других направлениях мезоатомных исследований (мюонный катализ ядерного синтеза, мезомолекулярные явления, физика мюония и др.). Внимательный читатель, возможно, найдет в книге определенные недостатки, которые, к сожалению, неизбежны из-за новизны излагаемого предмета. Отметим, что автор не обсуждает широкий круг вопросов, связанных с ядерными процессами  $\mu^-$ -захвата и радиационного  $\pi^-$ -захвата. В этих процессах проявляются как ядерная структура, так и характеристики мезоатомов [см. по этому поводу обзоры [23\*, 24\*] (звездочкой помечена литература, добавленная при переводе)].

Со времени выхода в свет настоящей книги на английском языке были получены некоторые новые важные результаты в области изучения мезоатомов, их можно найти в последних обзорах [14\*—16\*, 19\*—26\*] и трудах конференций. Список обзорной литературы приведен в конце введения.

Примечания к тексту книги сделаны лишь в тех случаях, когда, по нашему мнению, требовалось уточнить или разъяснить мысль автора, а также при появлении новых результатов, существенно отличающихся от рассматриваемых по данному вопросу автором.

Физика мезоатомов находится на пороге нового этапа исследований, связанного с созданием «мезонных фабрик» и интенсивных пучков  $K^-$ -мезонов, антипротонов и других «экзотических» частиц. Поэтому книга Е. Кима выходит в свет весьма своевременно и может быть полезна для большого круга читателей.

Перевод предисловия, введения и гл. 1 выполнен Г. Я. Коренманом, гл. 2 — Е. Л. Ядровским, гл. 3—6 и приложений — В. П. Поповым.

Г. Я. КОРЕНМАН  
В. П. ПОПОВ  
Е. Л. ЯДРОВСКИЙ

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Изучение мезонных атомов — сравнительно новая область физики. Интерес к этому предмету недавно стал возрастать, и сейчас уже опубликовано свыше 300 работ по мезонным атомам. В течение нескольких последних лет я делал для себя короткие заметки по различным аспектам физики мезонных атомов. Поскольку сейчас нет книг, целиком посвященных этому предмету, я решил переработать свои заметки в форму книги. После того как рукопись книги была перепечатана, появилось несколько превосходных обзорных статей по мезонным атомам [13—15]. В настоящей книге я попытался не только детально обсудить последние результаты, но и найти педагогический подход для объяснения основных черт теории мезонных атомов. По этим причинам я полагаю, что настоящая книга будет полезна как справочник для работающих в этой области и как учебник для студентов.

Исследования мезонных атомов связаны с физикой элементарных частиц, атомной и ядерной физикой. В этой книге, как видно уже из ее названия, основное внимание сосредоточено на ядерно-физических аспектах изучения мезоатомов, поскольку мезонные атомы наиболее интенсивно изучались как источник информации о ядерной структуре.

Мне приятно выразить свою самую глубокую благодарность проф. Дж. Б. Мариону за советы, которые я получал от него при написании этой книги. Я также признателен доктору В. Х. Виммерсу, который, вместе с проф. Марионом, сыграл важную роль в организации издания этой монографии. Я хочу поблагодарить профессоров Л. В. Альвареца и В. П. Джелепова, предоставивших мне фотографии реакций синтеза, катализированных мюонами, и профессоров Ч. С. Ву, Г. Баккенштосса, К. Виганда, В. Г. Зинова и Р. Д. Эрлиха за копии иллюстраций к их последним работам. Я обязан декану Л. Грэвсу и аспирантуре Техасского технического университета за поддержку при работе над монографией. Благодарю также Р. Х. Кинг, Х. М. Ингл, М. Струве, Дж. М. Дэвиса за изготовление иллюстраций, перепечатку рукописи и составление алфавитного указателя, Р. М. Париш, М. Кхана и Т. Ваака за стилистические замечания по рукописи книги. Наконец, я хотел бы поблагодарить свою жену за постоянную поддержку и внимание.

Приведенный список литературы не является исчерпывающим, и я извиняюсь перед всеми авторами, чьи важные работы мог не упомянуть. Для работ с числом авторов больше двух в тексте указана фамилия только первого автора.

## ВВЕДЕНИЕ

В этой книге термины «мезоны» и «мезоатомы» используются в расширенном смысле и означают, соответственно, любые отрицательно заряженные частицы, такие, как мюоны, мезоны, гипероны и т. п., или атомы, получающиеся при замене электронов в обычных атомах одной из отрицательно заряженных частиц. Существование мезоатомов впервые предсказали Уилер [379, 380] и Ферми и Теллер [183]. Если отрицательный мезон захвачен атомом на высоковозбужденный уровень, образовавшийся таким образом мезоатом может распасться главным образом посредством оже-переходов (с испусканием электронов Оже) и радиационных переходов (с испусканием рентгеновского излучения). Вскоре после предсказаний существования мезоатомов было зарегистрировано мезонное рентгеновское излучение. Для знакомства с ранними исследованиями мезоатомов читатель может обратиться к обзорным статьям Стирнса [1] и Веста [3].

Большая масса мезона по сравнению с массой электрона может привести к существенному изменению характеристик мезоатомов по сравнению с обычными атомами. Например, мезонные орбиты ближе к ядру, поэтому эффекты конечных размеров заряда ядра и поляризации вакуума вызывают значительные сдвиги энергетических уровней. Уже на раннем этапе исследований мезоатомов отрицательные мезоны в мезоатомах рассматривали как ядерные «зонды», а на основе теории были предсказаны многие интересные особенности рентгеновских спектров мезоатомов. Однако проверка многих теоретических предсказаний была недоступна при использовании сцинтилляционных детекторов NaI. Разработанные в 1964 г. германий-литиевые гамма-спектрометрические детекторы высокого разрешения открыли новый этап интенсивных исследований.

Из всех мезоатомов наиболее обстоятельно исследованы мюонные атомы. Между мюоном, который является дираковской частицей, и ядром как распределенным зарядом действуют хорошо изученные электромагнитные силы, что позволяет надежно вычислять характеристики мюонных атомов. Предсказанный Уилетсом [388] и Джекобсоном [246] в 1954 г. динамический  $E2$ -эффект наблюдался

экспериментально. Результаты этих наблюдений показали, что в случае деформированных ядер мюонные рентгеновские спектры можно описать с помощью коллективной модели. Магнитная дипольная сверхтонкая структура в мюонных атомах также наблюдалась экспериментально для ряда нуклидов. Измерены изотопические сдвиги для многих элементов; изомерные сдвиги в мюонных атомах наблюдались впервые в  $^{152}\text{Sm}$  и нескольких других элементах. Был подтвержден эффект поляризации вакуума в мюонных атомах, и вскоре, возможно, удастся обнаружить эффект ядерной поляризации.

Первые систематические измерения рентгеновских спектров мюонных атомов, выполненные Фитчем и Рейнуотером [191], показали, что радиусы распределения зарядов ядер меньше, чем предполагали до этого. С тех пор одна из главных задач изучения рентгеновских спектров мюонных атомов — изучение распределения заряда в сферических и деформированных ядрах.

Недавно на основе анализа спектров мюонного рентгеновского излучения было исследовано распределение заряда с двумя и даже большим числом параметров для многих ядер. В целом полученные результаты хорошо согласуются с результатами измерений с помощью рассеяния электронов.

Пионные и каонные атомы отличаются от мюонных. Во-первых, для их описания вместо уравнения Дирака следует использовать уравнение Клейна—Гордона. Во-вторых, что наиболее важно, в пионных и каонных атомах существует сильное взаимодействие между орбитальной частицей и ядром. В дополнение к изменению схемы каскада сильное взаимодействие приводит к сдвигам уровней энергии и увеличению ширины линий. Поскольку сильное взаимодействие изучено не так хорошо, как электромагнитное, точность анализа рентгеновских спектров пионных и каонных атомов гораздо ниже, чем мюонных атомов. Однако изучение пионных и каонных атомов позволяет исследовать распределение ядерного вещества, тогда как с помощью мюонных атомов можно определить только распределение заряда в ядре. Принято считать, что изучение каонных атомов может дать специфическую информацию о ядерной поверхности. Действительно, недавние исследования пионных и каонных атомов, по-видимому, показывают, что ядерная периферия состоит преимущественно из нейтронов.

В настоящую книгу включено рассмотрение мюонных молекул и мюония. Мюонные молекулы стали известны в связи с открытием катализа мюонами реакций ядерного синтеза. Хотя многие молекулярные явления в мюонных молекулах весьма интересны и имеют важное значение, наше обсуждение в основном ограничено вопросами, связанными с ядерными взаимодействиями. В последней главе кратко обсуждается мюоний, образование которого впервые непосредственно наблюдал Хьюдженс в 1960 г. Изучение физики и химии мюония, остающихся в настоящее время на ранней стадии развития, существенно облегчится, когда начнут работать создаваемые сейчас мезонные фабрики.

К моменту написания книги не существовало какой-либо другой монографии, целиком посвященной обсуждению мезоатомов. Вышли, однако, много обзорных статей, а также труды нескольких конференций с большим числом работ по этой теме. Некоторые из них перечислены ниже.

#### СПИСОК ОБЗОРНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Stearns M. B.** The Spectroscopy of Mesonic Atoms. — «*Progr. Nucl. Phys.*», 1957, v. 6, p. 108.
2. **West D.** Mesonic Atoms. — «*Repts Progr. Phys.*», 1958, v. 21, p. 271.
3. **Backenstoss G.** Die Bedeutung der Mesonenatome in Kernphysik und Elementarteilchenphysik. — «*Z. Naturforsch.*», 1966, Bd 21a, S. 1751.
4. **Hughes V. W.** Muonium. — «*Ann. Rev. Nucl. Sci.*», 1966, v. 16, p. 445.
5. **Wu C. S.** Muonic X-rays and Nuclear Structure. — In: *Intern. Nuclear Physics Conf.* N. Y., Academic Press, 1967, p. 409.
6. **Sens J. C.** Information on Nuclear Structure, Derived from Electronic, Muonic and Pionic Atoms. — In: *High Energy Physics and Nuclear Structure. Proc. 2nd Conf. at Rehovoth.* Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1967, p. 93.
7. **Uretsky J. L.** K-Mesic Atoms, a Review. — In: *High Energy Physics and Nuclear Structure. Proc. 2nd Conf. at Rehovoth.* Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1967, p. 395.
8. **Daniel H.**  $\pi$ -Mesonische Atoms. — «*Naturwiss.*», 1968, Bd 55, S. 314.
9. **Daum C.** Muonic Atoms and Nuclear Charge Distributions. — In: *Interaction of High-Energy Particles with Nuclei.* T. E. O. Ericson ed. N. Y., Academic Press, 1968.
10. **Telegdi V. L.** Mesic Atoms. — In: *Atomic Physics. Proc. 1st Intern. Conf. on Atomic Physics.* N. Y., Plenum Press, 1968, 1969, p. 551.
11. **Burhop E. H. S.** Mesonic Atoms. — In: *High-Energy Physics.* N. Y., Academic Press, 1969, v. 3, p. 110.
12. **Wu C. S., Wilets L.** Muonic Atoms and Nuclear Structure. — «*Ann. Rev. Nucl. Sci.*», 1969, v. 19, p. 527.
13. **Devons S., Duerdoth I.** Muonic Atoms. — In: *Advances Nucl. Phys.*, N. Y., Plenum Press, 1969, v. 2, p. 295.
- 14\*. **Эрикссон Т. Е. О.** Динамика адронных атомов. — В кн.: *Труды IV Междунар. конф. по физике высоких энергий и структуре ядра.* Дубна, ОИЯИ, Д1-6349, 1972, с. 267.
- 15\*. **Бакенштосс Г.** Адронные атомы. — В кн.: *Труды IV Междунар. конф. по физике высоких энергий и структуре ядра.* Дубна, ОИЯИ, Д1-6349, 1972, с. 283.
- 16\*. **Ву Ч. С.** Обзор по мюонным атомам. — В кн.: *Труды IV Междунар. конф. по физике высоких энергий и структуре ядра.* Дубна, ОИЯИ, Д1-6349, 1972, с. 349.
17. **Иваненко Д. Д., Пустовалов Г. Е.** Мезоатомы. — «*Успехи физ. наук*», 1957, т. 61, с. 27.
18. **Зельдович Я. Б., Герштейн С. С.** Ядерные реакции в холодном водороде. I. Мезонный катализ. — «*Успехи физ. наук*», 1960, т. 71, с. 581.
- 19\*. **Герштейн С. С. и др.** Мезоатомные процессы и модель больших мезомолекул. — «*Успехи физ. наук*», 1969, т. 97, с. 1.
- 20\*. **Пономарев Л. И.** Влияние молекулярной структуры веществ на процессы ядерного поглощения мезонов. — В кн.: *Труды IV Междунар. конф. по физике высоких энергий и структуре ядра.* Дубна, ОИЯИ, Д1-6349, 1972, с. 393.
- 21\*. **Гуревич И. И.** Изучение свойств вещества с помощью поляризованных мюонов. — В кн.: *Труды IV Междунар. конф. по физике высоких энергий и структуре ядра.* Дубна, ОИЯИ, Д1-6349, 1972, с. 411.
- 22\*. **Петрухин В. И.** Захват  $\pi$ -мезонов связанным водородом и некоторые вопросы строения вещества. — В кн.: *Труды IV Междунар. конф. по*



- физике высоких энергий и структуре ядра. Дубна, ОИЯИ, Д1-6349, 1972, с. 431.
- 23\*. **Балашов В. В., Коренман Г. Я., Эрамжян Р. А.** Роль экспериментов на совпадения в исследовании  $\mu$ -захвата и радиационного захвата  $\pi$ -мезонов ядрами. — «ЭЧАЯ», 1973, т. 4, вып. 2, с. 585.
- 24\*. **Коренман Г. Я., Эрамжян Р. А.** Проблемы  $\mu$ - и радиационного  $\pi$ -захватов сложными ядрами. Материалы 8-й зимней школы ЛИЯФ. Ч. 2. Л., ЛИЯФ, 1973, с. 402.
- 25\*. **Пономарев Л. И.** Влияние молекулярной структуры на атомный и ядерный захват мезонов. Дубна, ОИЯИ, Р4-7269, 1973.
- 26\*. **Энгфер Р., Валтер Г.-Х., Шнойфли Х.** Изучение свойств атомных ядер с помощью мюонных атомов. — «ЭЧАЯ», 1974, т. 5., вып. 2, с. 382.

#### Труды конференций, содержащие много работ по мезоатомам

1. **Funsten H. D. ed.** Intermediate Energy Physics. Proc. Williamsburg Conf., v. 1, 2. Williamsburg College of William and Mary, 1966.
2. **Brown D. J. e. a.** Proc. Intern. Conf. on Electromagnetic Sizes of Nuclei. Ottawa, Carleton Univ., 1967.
3. **Alexander G. eds.** High-Energy Physics and Nuclear Structure. Proc. 2nd Conf. at Rehovoth. Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1967.
4. **Devons S. ed.** High-Energy Physics and Nuclear Structure. Proc. 3rd Conf. at Columbia Univ., N. Y., Plenum Press, 1969.
5. **Boop F., Kleinpoppen H. eds.** Physics of the One- and Two-Electron Atoms. — Proc. of the Arnold Sommerfeld Centennial Memorial Meeting and of the Physics of the One- and Two-Electron Atoms. Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1969.
- 6\*. **5th Intern. Conf. on High-Energy Physics and Nuclear Structure.** Abstracts of Contributed papers. Uppsala, Uppsala Univ., 1973.
- 7\*. **Труды IV Междунар. конф. по физике высоких энергий и структуре ядра.** Дубна, ОИЯИ, Д1-6349, 1972.
- 8\*. **IV Междунар. конф. по физике высоких энергий и структуре ядра.** Аннотации докладов. Дубна, ОИЯИ, Д1-5986, 1971.

#### Книги, содержащие главы о мезоатомах

1. **Вайсенберг А. О.** Мю-мезон. М., «Наука», 1964.
2. **Davidson J. P.** Collective Models of the Nucleus. N. Y., Academic Press, 1968.

## § 1.1. АТОМНЫЙ ЗАХВАТ МЕЗОНОВ

**Образование мезоатомов**

В своей теоретической работе по захвату отрицательных мезонов в веществе Ферми и Теллер [183] показали, что время, необходимое для того, чтобы мезон образовал мезоатом и после каскада переходов попал в основное состояние, малó (порядка  $10^{-13}$  с для графита) по сравнению с временем жизни мезона. Образование мезоатома проходит следующие этапы. Когда отрицательный мезон замедляется в веществе, он прежде всего теряет энергию на ионизацию\*. Затем он еще больше замедляется из-за столкновений с электронами сравнимых скоростей до тех пор, пока не будет захвачен атомом на высокую боровскую орбиту. После этого мезон совершает ряд оже-переходов и, по достижении нижних орбит, — радиационных переходов, сопровождающихся мезонным рентгеновским излучением. В случае  $\pi^-$ - и  $K^-$ -мезоатомов на нижних уровнях доминирует сильное мезон-нуклонное взаимодействие. Оно обсуждается в гл. 4 и 5.

Ферми и Теллер оценили также относительную вероятность, с которой мюон образует мезоатомную систему с различными элементами химического соединения. В оценке, основанной на атомной модели Томаса—Ферми, они предполагают, что вероятность захвата пропорциональна потерям энергии мюона вблизи различных атомов. При низкой положительной энергии мюона скорость энергетических потерь пропорциональна заряду ядра  $Z$ , поэтому относительная вероятность захвата должна быть пропорциональна заряду ядра и концентрации атомов. Это положение называют  $Z$ -законом Ферми—Теллера.

**Атомный захват  $\mu^-$  и  $\pi^-$ -мезонов  
в химических соединениях**

**Химические эффекты в мюонных атомах.** Сенс и др. [348] экспериментально исследовали захват мюонов в нескольких соединениях, регистрируя электроны от распада связанных мюонов. С помощью

\* При релятивистских скоростях, например, в потоках космических мюонов, вначале доминируют радиационные потери. — *Прим. пер.*

аналогичной техники Латроп и др. [284—286], Астбэри и др. [19], Бакенштосс и др. [28] и Экхауз и др. [148] проверили  $Z$ -закон Ферми—Теллера. Бейджел и др. [32] изучили относительные вероятности атомного захвата мюона в химических соединениях, анализируя для определения захватывающего атома суммарную кривую распада, полученную при регистрации нейтронов от  $\mu$ -захвата. Результаты всех этих экспериментов показывают, что не существует простой  $Z$ -зависимости, справедливой для всех соединений [322].

Позднее в работе [437] определили вероятность атомного захвата отрицательных мюонов в бинарных соединениях типа  $A_mB_n$ , используя другой экспериментальный метод. Они измеряли интенсивность мюонного рентгеновского излучения  $K$ -серии от одного из элементов в чистом состоянии и от того же самого элемента в химическом соединении. Мюоны в мюонных атомах захватываются ядрами с  $K$ -орбиты, поэтому выход продуктов ядерного захвата прямо пропорционален вероятности атомного захвата. Энергия перехода мюона в основное состояние существенно зависит от заряда ядра. В легких ядрах эта энергия перехода пропорциональна  $Z^2$ , что позволяет изучать  $Z$ -зависимость атомного захвата в соединениях элементов с близкими  $Z$ . Для таких соединений трудно определить вероятность атомного захвата при помощи регистрации электронов от распада связанных мюонов. Измерения Зинова и др. [437] показали, что соотношение вероятностей атомного захвата мюонов в окислах периодически меняется с ростом  $Z$ . С другой стороны, соотношение вероятностей атомного захвата в соединениях металлов с галогенами и в сплавах металлов описывается линейной зависимостью  $0,66 Z_1/Z_2$ .

Интересная особенность атомного захвата мюонов в окислах — периодические изменения вероятности захвата, соответствующие периодам в таблице элементов, — показана на рис. 1.1. Вероятность атомного захвата мюонов сильно зависит от типа окислов одного и того же элемента ( $Sb_2O_3$ ,  $Sb_2O_5$  и т. п.). На рис. 1.1 показаны вероятности атомного захвата мюонов только в тех окислах, в которых валентность элемента соответствует номеру группы в периодической таблице.

Периодическая зависимость вероятности атомного захвата в окислах от заряда ядра  $Z$  и зависимость от химического состава предполагают, что заметная доля остановившихся мюонов захватывается из непрерывного спектра сначала на очень высокие энергетические уровни, общие для всей молекулы и лежащие в области внешних валентных электронов. Взаимодействие с валентными электронами в последующем каскаде переходов, по-видимому, ответственно за периодические изменения вероятности захвата в окислах различных элементов и за сильную зависимость от химического состава. Это подтверждается результатами изучения структуры  $K$ -серии мюонного рентгеновского излучения в Ti, V, Cr и их окислах. В табл. 1.1 приведены результаты экспериментов В. Г. Зинова и др. [438].

Таблица 1.1

Отношение интенсивностей  $K_{\beta}$ - и  $K_{\gamma}$ -линий к  
интенсивности  $K_{\alpha}$ -линии [438]

Вещество	$J_{\beta}/J_{\alpha}$	$J_{\gamma}/J_{\alpha}$	$(J_{\beta} + J_{\gamma})/J_{\alpha}$	$E_{\gamma} - E_{\alpha}$ , кэВ
Ti	$0,12 \pm 0,01$	$0,25 \pm 0,01$	$0,37 \pm 0,02$	$309 \pm 5$
TiO <sub>2</sub>	$0,12 \pm 0,01$	$0,14 \pm 0,01$	$0,26 \pm 0,02$	$309 \pm 5$
V	$0,11 \pm 0,01$	$0,28 \pm 0,02$	$0,40 \pm 0,02$	$331 \pm 5$
V <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	$0,09 \pm 0,01$	$0,19 \pm 0,01$	$0,28 \pm 0,02$	$331 \pm 5$
Cr	$0,13 \pm 0,01$	$0,33 \pm 0,02$	$0,46 \pm 0,03$	$363 \pm 5$
Cr <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	$0,11 \pm 0,01$	$0,22 \pm 0,01$	$0,33 \pm 0,01$	$363 \pm 5$
Ti*	$0,094 \pm 0,009$	$0,235 \pm 0,012$	$0,329 \pm 0,019$	$308 \pm 5$
V*2	0,11	0,27	0,38	—
Cr*2	0,12	0,29	0,42	—

\* Из работы [327].

\*\* Интерполяция данных [327].

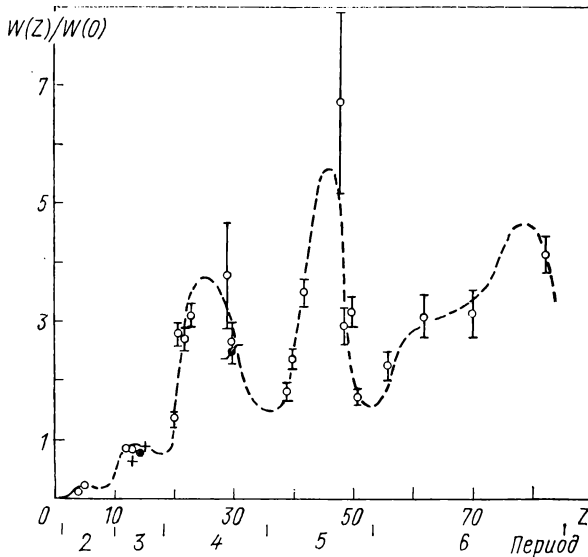


Рис. 1.1. Отношение вероятностей атомного захвата в окислах:

$W(O)$  — вероятность захвата мюонов кислородом;  $W(Z)$  — вероятность захвата другим входящим в окисел элементом с атомным номером  $Z$ ; ○ — В. Г. Зинов и др. [437]; + — Сенс и др. [348]; ● — В. Д. Бобров и др. [412].

Во второй, третьей и четвертой колонках даны отношения интенсивностей  $K_{\beta}$  ( $3p \rightarrow 1s$ )- и  $K_{\gamma}$  ( $np \rightarrow 1s$ ,  $n \geq 4$ )-линий и их суммы к интенсивности  $K_{\alpha}$ -линии. В последней колонке даны разности энергий  $K_{\gamma}$ - и  $K_{\alpha}$ -линий. Из табл. 1.1 видно, что вероятность перехода в основное состояние с высоких уровней существ-

венно зависит от химического состава вещества. С другой стороны, атомы в чистом виде и в окисле отличаются только состоянием внешних валентных электронов, и это небольшое отличие существенно влияет на схему каскада. Это показывает, что мюоны из непрерывного спектра захватываются на энергетические уровни, общие для всей молекулы или соседних атомов. Для системы, состоящей из двух ядер с зарядами  $Z_1$  и  $Z_2$ , в пренебрежении эффектом электронной экранировки все уровни в поле ядра  $Z_1$  с главным квантовым числом

$$n \geq n_0 = \left\{ \frac{Z_1 R}{2 [2(Z_2/Z_1)^{1/2} + 1]} \right\}^{1/2} \quad (1.1)$$

будут общими для всей системы [443]. В уравнении (1.1)  $R$  — межъядерное расстояние в мезоатомных единицах ( $\hbar = e = m_\mu = 1$ ). Обычно  $R \simeq 400 \div 600$ . С помощью этой формулы результаты В. Г. Зинова и др. [438] можно объяснить качественно.

Вероятности атомного захвата мюонов в смесях моноатомных инертных газов (He, Ne, Ar) и полиатомных газов ( $N_2$ ,  $CO_2$ ) были измерены с помощью регистрации мюонного рентгеновского излучения [414]. Из этих газов аргон имеет самый большой заряд ядра и наибольшую энергию рентгеновского излучения. Поэтому он использовался как контрольный материал. В эксперименте не было обнаружено систематической зависимости вероятности захвата от заряда ядра. Это показывает, что вероятность захвата в большой мере зависит от размеров молекулы. Химические эффекты в мюонных рентгеновских спектрах изучались также в работах [125, 261].

**Химические эффекты в пионных атомах.** Сильное взаимодействие между  $\pi^-$ -мезоном и нуклонами ядра изменяет схему радиационных переходов в пионных атомах, так что пионное рентгеновское излучение, отвечающее низшим переходам, нельзя измерить. Более того, его невозможно отличить от  $\gamma$ -излучения, испускаемого после ядерного захвата пионов. Однако для состояний с большими главными квантовыми числами  $n$  поведение пионных атомов должно быть сходным с поведением мюонных атомов. Химические эффекты в пионных атомах первоначально исследовали Таушер и др. [365]. Грин и Кунсельман [220, 221] глубже изучили эти эффекты, используя преимущества  $\pi^-$ -мезонного пучка большой интенсивности на синхрофазотроне в Беркли. Их измерения качественно согласуются с ранними измерениями для мюонных и пионных атомов и показывают, что относительные интенсивности первых высших линий серии, как правило, меньше, если элемент входит в химическое соединение, а не в механическую смесь элементов\*. Результаты их измерений приведены в табл. 1.2. Параметр эффективного заряда  $Z_f$  [314] в третьей колонке зависит от пере-

\* Эти результаты относятся к элементам VI и VII основных групп, входящим в соединения с металлами. — *Прим. пер.*

Таблица 1.2

Некоторые экспериментальные значения отношений интенсивностей пикного рентгеновского излучения [221].

Все пары образцов, для которых приведены отношения, имеют одинаковый химический состав

Образцы	$Z_1/Z_2$	$Z_f$	Переходы	$J_1/J_2^*$		Отношение отношений**
				1-й образец	2-й образец	
ZnS, Zn + S	1,87	0,36	$4f \rightarrow 3d \text{ Zn}/3d \rightarrow 2p \text{ S}$	$2,55 \pm 0,30$	$1,35 \pm 0,15$	$1,90 \pm 0,08$
ZnSe, Zn + Se	0,89	0,30	$4f \rightarrow 3d \text{ Zn}/4f \rightarrow 3d \text{ Se}$	$4,10 \pm 0,50$	$0,74 \pm 0,09$	$5,60 \pm 0,35$
FeS, Fe + S	1,62	0,24	$4f \rightarrow 3d \text{ Fe}/3d \rightarrow 2p \text{ S}$	$2,75 \pm 0,30$	$1,22 \pm 0,15$	$2,25 \pm 0,10$
FeS <sub>2</sub> , Fe + 2S	1,62	0,12	$4f \rightarrow 3d \text{ Fe}/3d \rightarrow 2p \text{ S}$	$2,15 \pm 0,25$	$1,40 \pm 0,15$	$1,55 \pm 0,10$
CdTe, Cd + Te	0,92	0,08	$5g \rightarrow 4f \text{ Cd}/5g \rightarrow 4f \text{ Te}$ $6h \rightarrow 5g \text{ Cd}/6h \rightarrow 5g \text{ Te}$	$0,90 \pm 0,10$ $0,85 \pm 0,11$	$0,82 \pm 0,09$ $0,74 \pm 0,10$	$1,09 \pm 0,07$ $1,15 \pm 0,10$
InSb, In + Sb	0,96	0,03	$5g \rightarrow 4f \text{ In}/5g \rightarrow 4f \text{ Sb}$ $6h \rightarrow 5g \text{ In}/6h \rightarrow 5g \text{ Sb}$	$1,07 \pm 0,11$ $0,94 \pm 0,12$	$1,04 \pm 0,10$ $0,91 \pm 0,12$	$1,03 \pm 0,05$ $1,03 \pm 0,09$
CaCl <sub>2</sub> , CaCl <sub>2</sub> ·(H <sub>2</sub> O)	1,18	0,62	$3d \rightarrow 2p \text{ Ca}/3d \rightarrow 2p \text{ Cl}$	$1,15 \pm 0,12$	$1,22 \pm 0,12$	$0,95 \pm 0,06$
KCl, KCl (H <sub>2</sub> O)	1,12	0,70	$3d \rightarrow 2p \text{ K}/3d \rightarrow 2p \text{ Cl}$	$1,13 \pm 0,11$	$0,81 \pm 0,14$	$1,40 \pm 0,10$
CsCl	3,23	0,73	$5g \rightarrow 4f \text{ Cs}/3d \rightarrow 2p \text{ Cl}$ $6g \rightarrow 5g \text{ Cs}/3d \rightarrow 2p \text{ Cl}$	$1,85 \pm 0,20$ $1,65 \pm 0,15$	— —	— —

\* Отношение интенсивностей двух указанных переходов с учетом того, что ослабление разных линий при выходе из образца различно. Поправки увеличивают погрешность примерно на 5%.

\*\* Отношение отношений интенсивностей в первом и втором образцах. Погрешность значительно уменьшилась, поскольку при получении такого отношения многие неопределенности сократились или уменьшились.

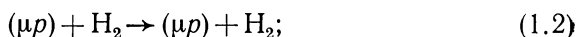
даваемого заряда и определяется как произведение параметра, характеризующего степень ионной связи, на число валентных электронов. Сравнение второй и последней колонок показывает, что существует заметное расхождение между измеренными отношениями вероятностей захвата в химических соединениях и предсказаниями Z-закона Ферми—Теллера. Относительное число захватов связано с химическими эффектами; оказывается, что отношение зарядов и параметр эффективного заряда влияют на атомный захват [23].

### Передача мюонов от атома к атому

Мезоатом водорода в основном состоянии очень мал ( $a_\mu \simeq 2,5 \cdot 10^{-11}$  см) по сравнению с обычными атомами и поэтому может проникать очень близко к центру любой атомной системы.

С системой  $(\mu p)$  в изотопически чистом водороде (протонии) могут происходить следующие процессы [386]:

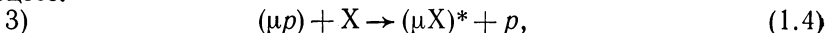
1) упругие столкновения с молекулами водорода



2) образование мюонной молекулы



однако если протоний содержит малую примесь другого элемента X, то возможен также следующий конкурирующий необратимый процесс:



т. е.  $(\mu p)$ -атом может передать мюон атому X, так что образуется мюонный атом  $(\mu X)$  в возбужденном состоянии, который быстро, за время порядка  $10^{-10}$  с, переходит в основное состояние\*. Если  $c_X$  — молекулярная концентрация элемента X в протонии, а  $\lambda_X$  — скорость передачи, то скорость реакции (1.4) равна  $c_X \lambda_X$ . Экспериментальные исследования [58, 59, 119, 147, 319, 320, 325, 342, 408, 425—427] показывают, что вероятность такой передачи очень велика.

С. С. Герштейн [422] выполнил детальные теоретические исследования процесса (1.4) и показал, что можно получить квазиклассическое решение уравнения Шредингера для системы  $(p + X + \mu^-)$ , если кинетическая энергия  $(\mu p)$ -атома  $T_{\mu p}$  удовлетворяет одному из следующих условий:

$$T_{\mu p} \gg 8/Z^2 \text{ эВ}; \quad (1.5a)$$

$$T_{\mu p} \ll 8/Z^2 \text{ эВ}. \quad (1.5b)$$

В обоих случаях существование точек пересечения молекулярных термов, соответствующих обмену зарядом в системе  $(\mu p + X)$ , при-

\* Это и приводит к необратимости процесса (1.4), поскольку при малых скоростях обратный процесс с атомом  $(\mu X)$  в основном состоянии запрещен энергетически, если заряд ядра X больше единицы. — *Прим. пер.*

водит к большому сечению реакции передачи (1.4). В случае (1.5а) скорость передачи  $\lambda_X$  для этой реакции

$$\lambda_X = \text{const } f(Z)/MT, \quad (1.6)$$

где  $T$  — кинетическая энергия  $(\mu p)$ -атома;  $M$  — приведенная масса системы  $(\mu p + X)$ ;  $f(Z)$  — функция атомного номера элемента  $X$ . С другой стороны, в случае (1.5б) скорость передачи можно записать следующим образом:

$$\lambda_X = \text{const } g(Z) Z, \quad (1.7)$$

где  $g(Z)$  — некоторая функция  $Z$  [319]. Для реакции (1.4) при тепловых скоростях  $(\mu p)$ -атома соотношение (1.5а) удовлетворяется для тяжелых элементов ( $Z \geq 20$ ), тогда как соотношение (1.5б) удовлетворяется для легких элементов ( $Z \leq 10$ ).

Плаччи и др. [320] измерили скорость реакций передачи мюона в мишени из сверхчистого газообразного водорода. В этом эксперименте отрицательные мюоны замедлялись в водородном газе, находившемся при температуре 293 К и давлении 10 атм, к которому в известной малой концентрации был добавлен другой элемент  $X$ . Атом  $(\mu p)$ , образованный в такой газовой смеси ( $H_2 + X$ ), может исчезать вследствие реакции (1.4) или процесса распада мюона

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu. \quad (1.8)$$

Скорости других процессов, таких, как ядерный захват мюона протоном [326] и образование мюонной молекулы  $(\mu p p)$  [58, 59, 119], пренебрежимо малы. Скорость передачи мюона ядрам железа, из которого состоит контейнер, также, по оценкам, пренебрежимо мала [325]. Мюон в  $(\mu X)$ -атоме, образованном в результате реакции (1.4), может исчезать вследствие процесса распада (1.8) либо ядерного захвата ядром  $X$ . Поэтому из дифференциального временного распределения электронов распада  $dn_e/dt$  можно определить скорость передачи  $\lambda_X$ . При постоянной кинетической энергии  $(\mu p)$ -атома можно получить

$$\begin{aligned} \frac{dn_e}{dt} = & \frac{A\lambda_0}{\lambda_{cX} - \Phi \frac{p_X}{p_0} \lambda_X} \left\{ \lambda_{cX} \exp \left[ - \left( \lambda_0 + \Phi \frac{p_X}{p_0} \lambda_X \right) t \right] - \right. \\ & \left. - \Phi \frac{p_X}{p_0} \lambda_X \exp \left[ - (\lambda_0 + \lambda_{cX}) t \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где  $A$  — константа;  $\lambda_0 = 4,55 \cdot 10^5 \text{с}^{-1}$  — скорость распада свободного покоящегося мюона;  $\lambda_{cX}$  — скорость поглощения отрицательного мюона ядром  $X$ ;  $\Phi = \rho(p_0)/\rho_{\text{ж}}$  — отношение плотности водорода при давлении  $p_0$  к плотности жидкого водорода;  $p_0$  — полное давление смеси ( $H_2 + X$ );  $p_X$  — парциальное давление



Таблица 1.3

Экспериментальные результаты измерений скорости передачи мюонов от  $(\mu p)$ -атомов к элементам с большим атомным номером [320]

X	Z	$\rho_X, 10^{-3} \text{ атм}$	$\lambda_X, 10^{11} \text{ с}^{-1}$	$\chi^2$	Число точек
Аргон	18	$1,21 \pm 0,05$	$0,73 \pm 0,07$	75	95
Криптон	36	$0,72 \pm 0,04$	$2,84 \pm 0,28$	112	100
Ксенон	54	$2,42 \pm 0,12$	$4,70 \pm 0,47$	98	95
Ксенон	54	$1,21 \pm 0,06$	$4,14 \pm 0,41$	121	100
Ксенон	54	$0,60 \pm 0,03$	$4,30 \pm 0,43$	106	100
Ксенон	54	$0,30 \pm 0,02$	$4,50 \pm 0,45$	139	100

примесного элемента X;  $\lambda_X$  — скорость передачи для реакции (1.4) при плотности молекул X, равной плотности молекул жидкого водорода. В табл. 1.3 приведены значения  $\lambda_X$ , полученные Плаччи и др. [320] из анализа наблюдаемых распределений  $dn_e/dt$  с помощью метода  $\chi^2$ .

Ю. Г. Будяшов и др. [414] исследовали структуру K-серии аргона при атомном захвате мюона в чистом газе и в смеси с водородом. Они обнаружили, что в случае, когда мюон передается атому аргона от  $(\mu p)$ -атома, интенсивность высокоэнергетических линий K-серии (соответствующих переходам  $np \rightarrow 1s$ , где  $n \geq 3$ ) много выше, чем в случае прямого захвата мюона аргоном. Этот результат, предполагающий взаимодействие между мюоном и электронной оболочкой, позволяет понять механизм передачи мюонов в смесях газов.

Согласно теории Герштейна, вероятности передачи мюона различным легким ядрам должны быть одного порядка; заметное исключение составляет гелий. В этом случае точки пересечения лежат далеко, а на больших расстояниях волновые функции атомов  $(\mu p)$  и  $(\mu \text{He})$  перекрываются очень мало. Поэтому процесс передачи  $(\mu p) + \text{He} \rightarrow (\mu \text{He}) + p$  должен иметь исключительно малую вероятность. Это предсказание качественно подтверждено экспериментом. Шифф [342] и А. О. Займидорога и др. [430] нашли, что скорость передачи мюона от водорода к гелию по крайней мере на два—три порядка меньше, чем скорость передачи к неону, а, согласно Плаччи и др. [319], скорость передачи от дейтерия к гелию меньше, чем к неону, как минимум на четыре порядка.

## § 1.2. КАСКАДНЫЕ ПЕРЕХОДЫ

После достижения уровня мезоатома с  $n = 14$  мюон уже находится ниже электронной K-оболочки, так что при рассмотрении процесса каскада можно пренебречь эффектом электронной экранировки. Затем мюонный атом совершает каскад переходов вниз до основного состояния, причем каждый квантовый скачок

происходит, как правило, с испусканием рентгеновского кванта или оже-электрона. Поэтому вычисление скоростей радиационных и оже-переходов является первым шагом, необходимым в любых расчетах каскадных процессов. Детальные расчеты проводили Эйзенберг и Кесслер [159], Барбидж и Де-Борде [82, 134]. Выражения для вероятностей радиационных и оже-переходов нетрудно получить; результаты приведены в Приложении А.

Как видно из формулы (А.1), вероятность радиационного перехода пропорциональна квадрату дипольного матричного элемента и кубу разности энергий начального ( $n_1 l_1$ ) и конечного ( $n_2 l_2$ ) состояний. Из этой формулы можно также заметить, что скорость радиационного перехода пропорциональна  $Z^4$ . (Напомним, что в этих вычислениях не учитывается влияние размеров ядра.) Наиболее важными радиационными переходами являются переходы ( $n_1 l_1$ )  $\rightarrow$  ( $n_2 = l_1, l_2 = l_1 - 1$ ), за исключением переходов из высоких  $s$ -состояний, девозбуждающихся главным образом в  $2p$ -состояние.

В случае оже-переходов в дополнение к  $p$ -переходам ( $\Delta l = \pm 1$ ) возможны также  $s$ -переходы ( $\Delta l = 0$ ). Вероятности оже-переходов слабо зависят от  $Z$  и увеличиваются с ростом  $n$ , причем доминирующими являются переходы ( $n_1, l_1$ ), ( $n_2 = n_1 - 1, l_2 = l_1 - 1$ ). Для данного  $Z$  эффект Оже доминирует на уровнях с большими  $n$ , тогда как для меньших  $n$  более вероятными становятся радиационные переходы. Например, для легчайших элементов процесс Оже доминирует вплоть до  $n_1 = 3$ , тогда как для Ag уже при  $n_1 \leq 6$  вероятность радиационного перехода больше.

Главная трудность расчетов каскадных процессов состоит в том, что мы не имеем априорных сведений о начальном распределении, с которого начинается каскад, и лишь интуитивно отдаем предпочтение статистическому ( $2l + 1$ )-распределению. Согласно расчетам Бэйкера [33], захват пионов в водороде происходит преимущественно в состояния с большими  $n$ , а для фиксированного  $n$  наиболее интенсивно заселяются промежуточные состояния  $l$ . Мэнн и Роуз [295] рассматривали скорость атомного захвата как функцию энергии мюона. Однако результаты расчетов, основанных на их работе, расходятся с данными по наблюдаемым выходам рентгеновского излучения [160]. Кроме того, предложенное Мэнном и Роузом начальное распределение подверглось критике по теоретическим соображениям [132].

- В серии работ Эйзенберга и Кесслера [158—162] проведены расчеты каскадных процессов для мюонных и пионных атомов. Эти авторы нашли, что простые расчеты каскадных переходов с использованием обычных вероятностей радиационных и оже-переходов могут описывать данные по  $K$ - и  $L$ -сериям рентгеновского излучения мюонных и пионных атомов с малыми  $Z$ . При вычислении вероятности процесса Оже предполагалось, что электронная  $K$ -оболочка всегда заполнена. В случае пионных атомов вводился параметр, характеризующий скорость поглощения пиона ядром. Авторы брали

различные значения начальной заселенности уровня  $n = 14$ , но вычисленные значения выходов рентгеновского излучения  $K$ - и  $L$ -серий (абсолютные интенсивности) мюонных атомов оказались нечувствительными к предполагаемой начальной заселенности. С другой стороны, *относительные* выходы  $K_\alpha (L_\alpha)$ -линий, т. е. отношение интенсивности  $K_\alpha (L_\alpha)$ -линий к полной интенсивности  $K (L)$ -серии чувствительны к предполагаемому начальному распределению. Однако пионное излучение  $L$ -серии, которое нечувствительно к ядерному поглощению, зависит от начальной заселенности. Среди нескольких начальных распределений, предполагавшихся в расчетах, наилучшие результаты и для мюонных, и для пионных атомов дает модифицированное статистическое распределение  $(2l + 1) \exp(\alpha l)$  с параметром  $\alpha = 0,2$ . Можно полагать, что такое распределение возникает в процессе каскада за счет постепенного обогащения состояний с высокими орбитальными моментами. Однако изучение относительных интенсивностей  $K$ - и  $L$ -серий мюонного рентгеновского излучения в  $\text{Ca}$  и  $\text{Mg}$  показывает, что экспериментальные данные можно удовлетворительно объяснить простым статистическим распределением в некотором состоянии с высоким  $n$ , если учесть в расчетах эффект разрушения электронной оболочки [362].

В связи с этим рассмотрим кратко проблему «недостающего рентгеновского излучения», представляющую главным образом исторический интерес. В работах Стирнсов [358, 359] и других авторов были проведены систематические измерения рентгеновского излучения  $K$ - и  $L$ -серий различных мюонных и пионных атомов в области значений  $Z$  от 3 до 19. Экспериментально измеренные выходы в легких элементах оказались много меньше ожидаемых из простой каскадной теории, в которой учитываются радиационные и оже-переходы и предполагается, что на уровне  $n = 14$  мюоны имеют статистическое распределение  $(2l + 1)$ . Такая нехватка рентгеновского излучения требует, чтобы вычисленные скорости оже-переходов были примерно в 300 раз больше, чем вычисленные скорости радиационных переходов  $K$ -серии и в 30 раз больше, чем вычисленные скорости радиационных переходов  $L$ -серии. Экспериментальные значения выходов  $K$ - и  $L$ -серий в легчайших мюонных атомах оказались заниженными по сравнению с расчетными примерно в 5 раз. Обычный способ расчета вероятностей радиационных и оже-переходов трудно поставить под сомнение, поскольку он содержит только очень простые вычисления [186]. Для объяснения проблемы «недостающего рентгеновского излучения» было высказано много различных предположений [46, 128, 132, 263, 275, 335]. Однако никакого удовлетворительного объяснения найдено не было, поэтому Латроп и др. [287] измерили выходы мюонного рентгеновского излучения заново. Они обнаружили, что в области, где ранее расхождение теории с экспериментом было особенно резким, выходы значительно больше измеренных Стирнсами. Хотя этим экспериментом проблема нехватки не была полностью решена, весьма вероятно, что она имеет чисто экспериментальное происхождение.

### § 1.3. УРОВНИ ЭНЕРГИИ

Основные характеристики энергетического спектра мезоатома можно получить, решая уравнение Шредингера для мезон-ядерной системы и учитывая только электромагнитное взаимодействие. Энергию  $E_n$  уровня с главным квантовым числом  $n$ , радиус  $n$ -й орбиты и классическую скорость  $v_n$  на этой орбите можно записать с помощью обычных формул Бора с заменой массы приведенной массой системы мезон—ядро:

$$E_n = -\mu c^2 (\alpha Z)^2 / 2n^2; \quad (1.10)$$

$$r_n = \frac{\hbar^2}{\mu e^2} \cdot \frac{n^2}{Z}; \quad (1.11)$$

$$v_n = \alpha c Z / n, \quad (1.12)$$

где  $\mu$  — приведенная масса системы мезон—ядро;  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры. В отличие от  $E_n$  и  $r_n$  величина  $v_n$  не зависит от приведенной массы.

Более точное выражение для энергии можно получить, решая уравнение Дирака для мюонных атомов или релятивистское уравнение Шредингера (уравнение Клейна—Гордона) в случае пионных и каонных атомов. Так как мюон-ядерная система не является предельно релятивистской, уравнение Дирака сводится к радиальному уравнению для двухкомпонентной волновой функции с малой компонентой  $f$  и большой компонентой  $g$  [341]:

$$\frac{df}{dr} = \frac{k}{r} f - \frac{1}{\hbar c} [W - V(r) - \mu c^2] g; \quad (1.13a)$$

$$\frac{dg}{dr} = \frac{1}{\hbar c} [W - V(r) + \mu c^2] f - \frac{k}{r} g \quad (1.13б)$$

и нормировкой

$$\int_0^\infty (f^2 + g^2) dr = 1. \quad (1.14)$$

Здесь

$$k = \begin{cases} l & \text{при } j = l - 1/2; \\ -l - 1 & \text{при } j = l + 1/2; \end{cases} \quad (1.15)$$

$j$  и  $l$  — полный и орбитальный угловые моменты состояния. Отметим, что знак  $k$  отличается от используемого в книге Шиффа [341]. В уравнениях (1.13а), (1.13б)  $W = \mu c^2 - E_0$  — полная энергия мюона;  $E_0$  — энергия связи мюона в электростатическом поле  $V(r)$ .

В случае точечного ядра

$$V(r) = -Ze^2/r, \quad (1.16)$$

тогда систему уравнений (1.13) можно решить аналитически. С точностью до членов четвертого порядка  $[(\alpha Z)^4]$

$$W = \mu c^2 \left[ 1 - \frac{(\alpha Z)^2}{2n^2} - \frac{(\alpha Z)^4}{2n^4} \left( \frac{n}{|k|} - \frac{3}{4} \right) \right]. \quad (1.17)$$

Решение уравнения Дирака в случае конечного распределения заряда будет детально обсуждаться в гл. 2. Относительная величина расщепления уровней  $j = l + 1/2$  и  $j = l - 1/2$ , соответствующих различной ориентации спинов, такая же, как в обычных атомах. Полный разброс энергетических уровней тонкой структуры

$$\Gamma = \frac{\mu c^2 (\alpha Z)^4}{n^3} \cdot \frac{n-1}{2n}. \quad (1.18)$$

Расщепление меняется как  $Z^4$  и пренебрежимо мало при малых  $Z$ .

Если учитывать только электромагнитное взаимодействие, уровни энергии пионных и каонных атомов определяются, в сущности, собственными значениями уравнения Клейна—Гордона с кулоновским потенциалом. (Это справедливо для состояний с большими  $l$ , где адронное взаимодействие между мезоном и ядром очень мало). С точностью до членов четвертого порядка  $[(\alpha Z)^4]$  решение записывается следующим образом:

$$E = -\frac{\mu c^2}{2n^2} (\alpha Z)^2 \left[ 1 + \frac{(\alpha Z)^2}{n^2} \left( \frac{n}{l+1/2} - \frac{3}{4} \right) \right], \quad Z < \frac{137}{2}, \quad (1.19)$$

где  $\mu$  — приведенная масса.

Для  $Z > 137/2$  в случае точечного заряда уравнение Клейна—Гордона не имеет физических решений. Однако такая трудность не возникает, если учитывать конечные размеры ядер [298]. Выражение для энергии с учетом членов порядка  $[(\alpha Z)^6]$  дает формула (3.53) [см. § 3.7].

#### § 1.4. КОНЕЧНЫЕ РАЗМЕРЫ ЯДРА

Для тяжелых ядер средние радиусы орбит мезоатомов в основном состоянии лежат внутри ядер. Например, для мюонного атома свинца в основном состоянии вероятность нахождения мезона внутри ядра равна примерно 0,5. Для мезона, который часть времени находится внутри ядра, «видимый» им заряд ядра меньше истинного, что приводит к повышению уровней энергии мезоатома. Сдвиг уровня энергии относительно значения, полученного из формулы (1.17) или (1.19), можно вычислить в первом порядке теории возмущений:

$$\delta E = -e \int \psi \psi^* \delta V dv, \quad (1.20)$$

где  $\psi$  — волновая функция мезона в поле точечного заряда ядра;  $\delta V$  — разность между истинным потенциалом и потенциалом точечного заряда. Для  $s$ -состояний с произвольным значением  $n$  значение  $\delta E$  можно оценить по формуле

$$\frac{\delta E}{E_Z} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{n^3} \left( \frac{ZR}{r_B} \right)^2, \quad (1.21)$$

где  $E_Z$  — энергия связи  $1s$ -уровня;  $R$  — радиус ядра;  $r_B$  — мезонный боровский радиус. Для  $n = 1$  уравнение (1.21) справедливо при

$Z < 10$ , а для  $n > 1$  его можно использовать при значительно больших значениях  $Z$ . Для оценки энергетического сдвига  $2p$ -уровня можно использовать выражение

$$\frac{\delta E_{2p}}{E_Z} = 0,0018 \left( \frac{ZR}{r_B} \right)^4 - 0,0010 \left( \frac{ZR}{r_B} \right)^5 + \dots \quad (1.22)$$

Энергетический сдвиг  $2p$ -уровня очень мал, поскольку волновая функция  $p$ -состояния в нерелятивистском пределе при  $r = 0$  обращается в нуль.

Для тяжелых элементов влияние конечных размеров ядра очень велико. Например, энергия перехода  $2p \rightarrow 1s$  в мюонном атоме урана равна 6,5 МэВ для ядра конечных размеров, тогда как для точечного заряда она составляет примерно 21,2 МэВ. Влияние конечных размеров на  $1s$ -уровень весьма существенно даже для элементов с относительно небольшими значениями  $Z$ . Отметим, что поправки к энергиям уровней, обусловленные всеми другими факторами, такими, как поляризация вакуума, поляризуемость ядра, электрические и магнитные моменты ядра, изменение вида распределения заряда внутри ядра, составляют несколько процентов.

Поскольку сдвиги энергетических уровней из-за конечных размеров ядра велики, при  $Z > 10$  первый порядок теории возмущений не позволяет точно определить энергии  $1s$ -уровней. Обычная процедура состоит в численном решении релятивистского уравнения Дирака или Клейна—Гордона с потенциалом, отвечающим разумному конечному распределению заряда ядра. Детально это будет обсуждаться в следующей главе.

Однако во многих исследованиях необходимо быстро оценить энергии уровней. Г. Е. Пустовалов [445] вывел формулы, которые позволяют вычислить энергии первых пяти уровней  $1s$ ,  $2s$ ,  $3s$ ,  $2p$  и  $3p$  мезоатомов в нерелятивистском приближении для постоянной плотности распределения заряда внутри ядра. В следующем параграфе эти результаты будут рассмотрены детально.

### **§ 1.5. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ И ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ**

Несмотря на то что решение уравнения Дирака с потенциалом, соответствующим заданному распределению заряда, можно получить с помощью ЭВМ, несомненно, очень полезно уметь быстро получать приближенные значения уровней энергии и приближенные волновые функции соответствующих состояний. В нерелятивистском приближении расчеты уровней энергии и волновых функций были сделаны Г. Е. Пустоваловым [445], а на основе уравнения Дирака приближенные значения энергий уровней были найдены Бете и Негеле [52]. В обоих случаях использовалась теория возмущений. Результаты точных расчетов нормированных волновых функций  $f$  и  $g$  и мюонной плотности  $(f^2 + g^2)/4\pi r^2$   $1s$ -состояния для  $C$ ,  $Ti$ ,  $Zn$ ,  $Sb$  и  $Pb$  приведены в виде таблиц в работе Форда и Уиллса [195].

## Нерелятивистские приближенные формулы

Чтобы иметь отправную точку для расчетов по теории возмущений, рассмотрим однородное распределение заряда ядра. В тяжелых мюонных атомах мюон большей частью находится внутри ядра, поэтому такой атом с однородным распределением заряда напоминает томсоновскую модель атома в виде «пудинга с изюмом», в которой потенциал внутри ядра осцилляторный, а вне его — кулоновский:

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{eZ}{R_0} \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{R_0} \right)^2 \right], & 0 \leq r \leq R_0; \\ \frac{eZ}{r}, & R_0 \leq r \leq \infty, \end{cases} \quad (1.23a)$$

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{eZ}{R_0} \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{R_0} \right)^2 \right], & 0 \leq r \leq R_0; \\ \frac{eZ}{r}, & R_0 \leq r \leq \infty, \end{cases} \quad (1.23b)$$

где  $R$  — радиус однородно распределенного заряда. Радиальная часть уравнения Шредингера с потенциалом (1.23) имеет следующий вид:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[ \frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{2me}{\hbar^2} \Phi(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0. \quad (1.24)$$

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \chi &= r/R_0; & y(\chi) &= \chi^{-1} R(\chi); & \tau &= R_0 Z/a_\mu; \\ E_0 &= -me^4 Z^2/2\hbar^2; & \varepsilon &= E/E_0; & \gamma &= \varepsilon^{-1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

где  $E_0$  — энергия основного состояния мюона в поле точечного заряда;  $\gamma$  может быть интерпретирована как эффективное квантовое число. Ее можно представить в виде:

$$\gamma = n + \Delta n, \quad (1.26)$$

где  $n$  — главное квантовое число;  $\Delta n$  — изменение  $n$  из-за конечных размеров ядра. Этот квантовый дефект является функцией только параметра  $\tau$ . В мезонных атомах  $\Delta n$  всегда положительно. Для записи энергий уровней  $\Delta n$  использовать удобнее, чем  $\varepsilon$ ; соотношение между этими величинами:

$$\varepsilon = (n + \Delta n)^{-2}. \quad (1.27)$$

Г. Е. Пустовалов выбирает следующую интерполяционную формулу для  $\Delta n$ :

$$\Delta n = A_0 + A_1 \tau + A_2 \tau^2 + A_3 \tau^3 + A_4 \tau^4 + A_5 \tau^5 + (C_0 + C_2 \tau^2) \exp(-B_1 \tau - B_2 \tau^2 - B_3 \tau^3 - B_4 \tau^4). \quad (1.28)$$

Значения коэффициентов в (1.28) для  $1s$ -,  $2s$ -,  $3s$ -,  $2p$ - и  $3p$ -уровней приведены в табл. 1.4. Использование формул (1.27) и (1.28) с коэффициентами из табл. 1.4 позволяет вычислить точное значение  $\varepsilon$  по крайней мере до четвертой значащей цифры.

Т а б л и ц а 1.4

Значения коэффициентов в формуле (1.28) для различных уровней энергии [445]

Коэффи- циент	1s	2s	3s	2p	3p
$A_0$	-0,032885	-0,038028	-0,038028	—	—
$A_1$	0,165892	0,179527	0,179527	—	—
$A_2$	0,013883	0,000123	0,000123	-0,0033673	-0,0039119
$A_3$	-0,008312	-0,004548	-0,005011	0,0087840	0,0104438
$A_4$	0,001082	0,000635	0,000715	-0,0019263	-0,0024545
$A_5$	—	—	—	0,0001244	0,0001707
$B_1$	5,0446	4,7209	4,7209	2,6086	2,6698
$B_2$	0,9826	0,6281	0,6281	0,7091	0,7723
$B_3$	-0,5560	-0,4890	-0,4890	0,7000	0,7000
$B_4$	2,9875	1,9286	1,9286	—	—
$C_0$	0,032885	0,038028	0,038028	—	—
$C_2$	—	—	—	0,0033673	0,0039119

Волновые функции внутри ядра можно аппроксимировать выражениями

$$R_{n0}(\chi) = c(1 - a\chi^{3/2}), \quad 0 \leq \chi \leq 1; \quad (1.29a)$$

$$R_{n1}(\chi) = c(1 - a\chi^{3/2})\chi, \quad 0 \leq \chi \leq 1 \quad (1.29b)$$

для  $s$ - и  $p$ -состояний соответственно. Вне ядра приближенные волновые функции  $1s$ -,  $2p$ -,  $2s$ -,  $3p$ - и  $3s$ -состояний можно представить следующим образом:

$$R_{10}(\chi) = cu \exp[b(1 - \chi)]; \quad (1.30a)$$

$$R_{21}(\chi) = cu\chi \exp[b(1 - \chi)]; \quad (1.30b)$$

$$R_{20}(\chi) = c(u - v\chi) \exp[b(1 - \chi)]; \quad (1.30в)$$

$$R_{31}(\chi) = c(u - v\chi)\chi \exp[b(1 - \chi)]; \quad (1.30г)$$

$$R_{30}(\chi) = c(u - v\chi + w\chi^2) \exp[b(1 - \chi)]. \quad (1.30д)$$

Волновые функции (1.29) и (1.30) не нормированы. Параметр  $a$  в формулах (1.29) выбран таким образом, чтобы приближенная волновая функция давала на поверхности ядра правильное значение. Параметры  $u$ ,  $v$ ,  $w$  определены из следующих двух условий: 1) приближенные волновые функции непрерывны на поверхности ядра; 2) нули приближенных волновых функций  $2s$ -,  $3p$ - и  $3s$ -состояний совпадают с нулями волновых функций, найденных численно. Параметры удобно вычислять с помощью следующих формул:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для всех состояний} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau b^{-1} \\ u^{-1} \end{array} \right\} \\ \text{для } 2s\text{- и } 3s\text{-состояний} \quad a \\ \text{для } 3p\text{-состояния} \quad (1 - a)^{-1} \\ \text{для } 3s\text{-состояния} \quad v(a + u - 1)^{-1} \end{array} \right\} = D_0 + D_1 \tau + D_2 \tau^2 + D_3 \tau^3; \quad (1.31)$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{для } 1s\text{- и } 2p\text{-состояний } a = 1 - u; \\ \text{для } 2s\text{- и } 3p\text{-состояний } v = a + u - 1; \\ \text{для } 3s\text{-состояний } w = 1 + v - a - u. \end{array} \right\} \quad (1.32)$$

Значения коэффициентов  $D$  для различных состояний и параметров приведены в табл. 1.5. Различие значений выбранных таким образом приближенных волновых функций и численных волновых функций внутри ядра не превышает 2%. Вне ядра согласие хуже, особенно для  $3s$ -состояния.

Таблица 1.5  
Значения коэффициентов в формуле (1.31) для различных состояний и параметров [445]

Состояние	Параметр	$D_0$	$D_1$	$D_2$	$D_3$
1s	$u^{-1}$	1	0,4501	-0,0424	0,00580
	$\tau b^{-1}$	1	0,3068	0,0212	-0,00977
2p	$u^{-1}$	1	0,2650	0,0187	-0,00220
	$\tau b^{-1}$	2	0,0015	0,0388	-0,00333
2s	$a$	—	0,4425	-0,0848	0,00846
	$u^{-1}$	1	-0,0861	0,0382	-0,00314
3p	$\tau b^{-1}$	2	0,4095	0,0180	-0,01177
	$(1-a)^{-1}$	1	0,2662	0,0296	0,00483
	$u^{-1}$	1	0,1009	-0,0183	0,00237
3s	$\tau b^{-1}$	3	0,0177	0,0496	-0,00289
	$a$	—	0,4469	-0,0718	0,00572
	$u^{-1}$	1	-0,2523	0,0813	-0,00986
	$v(a+u-1)^{-1}$	1	0,1141	-0,0088	0,00050
	$\tau b^{-1}$	3	0,4464	0,0258	-0,01305

### Полуаналитические релятивистские формулы

Полуаналитические релятивистские формулы для энергий мюонных уровней получены Бете и Негеле [52]. Заметив, что ядро с точечным зарядом дает очень плохое приближение (см. § 1.4), они выбрали в качестве исходной точки для расчетов по теории возмущений однородное распределение заряда  $\rho_1$  с конечным радиусом  $R$ . Этот радиус выбирается таким образом, чтобы он соответствовал наблюдаемому значению  $E_1$  энергии связи мюона в  $1s$ -состоянии. Тогда, если произвольное распределение заряда  $\rho_2$  с дираковским собственным значением энергии  $E_2$  не очень отличается от  $\rho_1$ , разность  $E_2 - E_1$  можно вычислить в первом порядке теории возмущений. Имеем

$$E_2 - E_1 = \int (V_2 - V_1) \Phi(r) r^2 dr, \quad (1.33)$$

где  $\Phi(r)$  — распределение заряда мюона, которое можно записать через радиальные функции  $f$  и  $g$ :  $\Phi(r) = f^2(r) + g^2(r)$ ;

$V_1$  и  $V_2$  — электростатические потенциалы, соответствующие распределениям заряда  $\rho_1$  и  $\rho_2$ .

Бете и Негеле получили следующие формулы для энергии возмущения (1.33):

$$E_2 - E_1 = 7,75 \int [\rho_2(\chi) - \rho_1(\chi)] (\chi^2 - 0,4086\chi^4 + 0,1419\chi^6 - 0,0428\chi^8) \chi^2 d\chi \text{ МэВ для } 1s; \quad (1.34a)$$

$$E_2 - E_1 = 0,288 \int [\rho_2(\chi) - \rho_1(\chi)] (\chi^2 + 1,60\chi^4 - 1,00\chi^6 + 0,403\chi^8 - 0,126\chi^{10}) \chi^2 d\chi \text{ МэВ для } 2p_{1/2}; \quad (1.34б)$$

$$E_2 - E_1 = 0,532 \int [\rho_2(\chi) - \rho_1(\chi)] (\chi^4 - 0,577\chi^6 + 0,223\chi^8 - 0,064\chi^{10}) \chi^2 d\chi \text{ МэВ для } 2p_{3/2}, \quad (1.34в)$$

где  $\chi = r/R_0$  ( $R_0$  — радиус однородно распределенного заряда). Формулы (1.34) можно записать в виде быстро сходящегося ряда:

$$E_2 - E_1 = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} D_n \int_0^{\infty} [\rho_2(\chi) - \rho_1(\chi)] \chi^2 (\chi - 1)^n d\chi, \quad (1.35)$$

где\*

$$D_n = \sum_m C_m \binom{2m}{n} \quad (1.36)$$

с минимальным значением индекса суммирования

$$m_{\text{мин}} = n/2 \text{ для четных } n; \quad (1.37a)$$

$$m_{\text{мин}} = \frac{n+1}{2} \text{ для нечетных } n. \quad (1.37б)$$

Для  $1s$ -состояния, например, получим

$$E_2 - E_1 = 7,75 \int_0^{\infty} [\rho_2(\chi) - \rho_1(\chi)] [0,9671(\chi - 1) - 0,1338(\chi - 1)^2 - 0,2452(\chi - 1)^3 + 0,2072(\chi - 1)^4] \chi^2 d\chi \text{ МэВ.} \quad (1.38)$$

С помощью формул (1.34) можно учесть отклонения от однородного распределения заряда ядра. С конкретными примерами читатель может ознакомиться в работе Бете и Негеле [52].

## § 1.6. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА

### Сдвиги уровней вследствие поляризации вакуума

Радикационные поправки к энергии атомного уровня вызваны двумя различными эффектами: 1) собственной энергией электро-

---

\* Константы  $E_0$  и  $C_m$  определяются из степенного разложения и нормировки релятивистской волновой функции [52]. — *Прим. пер.*

на; 2) поляризацией вакуума, обусловленной электростатическим полем ядра. Квантовая электродинамика предсказывает, что некоторые свойства свободного пространства аналогичны свойствам диэлектрической среды. Кулоновское поле ядра слегка смещает друг относительно друга виртуальные электроны и позитроны; этот эффект, который называют поляризацией вакуума, в мезонных атомах исследовали Купер и Хенли [120], С. Козлов и др. [273], Микель-вайт и Корбен [302], Хилл и Форд [231], Г. Е. Пустовалов [444], Глаубер и др. [215], Форд и Уиллс [195, 197], Пирсон [315], Штернгейм [380], Нигам [306], Баррет и др. [40], Фрикке [202] и другие авторы.

В обычном атоме водорода лэмбовский сдвиг уровней энергии электрона обусловлен главным образом его собственной энергией. Так, эффекты собственной энергии изменяют расстояние между уровнями  $2s_{1/2}$  и  $2p_{1/2}$  примерно на 1084 МГц, а поляризация вакуума — примерно на 27 МГц. Иная ситуация в мезонных атомах.

Поляризация вакуума изменяет электростатический потенциал ядра на расстояниях порядка комптоновской длины волны электрона ( $10^{-11}$  см) независимо от массы частицы, вращающейся вокруг ядра. Поэтому большую часть времени мезон находится в области, где электростатический потенциал ядра изменен поляризацией вакуума. На уровнях  $n=1$  при  $Z>1$  и  $n=2$  при  $Z>9$  мюон находится в облаке поляризованного вакуума. С другой стороны, эффект собственной энергии в первом приближении обратно пропорционален квадрату массы орбитальной частицы, а потенциал поляризации вакуума пропорционален  $1/m_e^2$  только в области  $r \gg \lambda_e$ . Поэтому приближение малых расстояний непригодно для вычисления первой поляризационной поправки к энергии связи, хотя вклад поляризации вакуума в энергию перехода можно вычислить таким способом весьма точно [39, 40].

В табл. 1.6 приведены поправки на собственную энергию и поляризацию вакуума. Уточненные значения поправок на собственную энергию были получены с помощью метода Бете и Негеле (см. § 1.5). Для нижних состояний поправки к сдвигам уровней энергии за счет поляризации вакуума существенны во всех мезонных атомах. В случае тяжелых ядер эти поправки существенны также для уровней с большими  $l$ . Например, сдвиг уровня  $3d_{5/2}$  мюонного урана за счет поляризации вакуума составляет около 10 кэВ, тогда как эффект конечных размеров ядра дает примерно 5 кэВ.

Следует отметить, что поправки на поляризацию вакуума не намного больше, чем поправки на поляризацию ядра, которые известны с меньшей точностью. Тем не менее сдвиги уровней вследствие поляризации вакуума необходимо учитывать при определении масс пиона и мюона из спектров мезонных атомов, чтобы согласовать значения массы, получаемые по энергиям различных переходов (см. § 2.8 и 4.7).

Таблица 1.6.

Поправки на собственную энергию  $\Delta E_{L,S}^{(1,2)}$  и поляризацию вакуума  $\Delta E_{v,p}$ , кэВ [39]

Элемент и параметры распределения, Ферми	Виды поправок	$1s_{1/2}$	$2s_{1/2}$	$2p_{1/2}$	$2p_{3/2}$	$3d_{3/2}$	$3d_{5/2}$	$4f_{7/2}$
$^{238}\text{U}$ $r_0 = 1,13$ $a = 0,6$	$\Delta E_{L,S}^{(1)}$	$3,17 \pm 0,13$	$0,74 \pm 0,16$	$0,35 \pm 0,22$	$0,80 \pm 0,17$	$-0,07 \pm 0,01$	$0,09 \pm 0,01$	$0,15 \pm 0,00$
	$\Delta E_{L,S}^{(2)}$	0,39	0,09	0,26	0,24	0,05	0,04	0,00
	$\Delta E_{v,p}$	74,53	23,37	39,90	37,06	14,36	13,32	5,07
	$\delta E_{v,p}$	1,23	1,23	1,22	1,22	1,20	1,20	1,20
$^{209}\text{Bi}$ $r_0 = 1,12613$ $a = 0,5108$	$\Delta E_{L,S}^{(1)}$	$2,99 \pm 0,16$	$0,72 \pm 0,15$	$0,26 \pm 0,16$	$0,62 \pm 0,12$	$-0,05 \pm 0,00$	$0,05 \pm 0,00$	$0,01 \pm 0,00$
	$\Delta E_{L,S}^{(2)}$	0,38	0,09	0,22	0,19	0,03	0,02	0,00
	$\Delta E_{v,p}$	68,17	19,80	33,20	30,60	10,89	10,19	3,80
	$\delta E_{v,p}$	1,11	1,09	1,10	1,10	1,07	1,07	1,04
$^{182}\text{W}$ $r_0 = 1,13$ $a = 0,5$	$\Delta E_{L,S}^{(1)}$	$2,66 \pm 0,16$	$0,65 \pm 0,13$	$0,17 \pm 0,11$	$0,44 \pm 0,08$	$-0,04 \pm 0,00$	$0,03 \pm 0,00$	$0,01 \pm 0,00$
	$\Delta E_{L,S}^{(2)}$	0,34	0,07	0,16	0,16	0,02	0,01	0,00
	$\Delta E_{v,p}$	59,81	16,15	26,19	24,10	7,95	7,53	2,75
	$\delta E_{v,p}$	0,99	0,96	0,98	0,98	0,95	0,95	0,92

Продолжение табл. 1.6

Элемент и параметры распределения, Ферми	Виды поправок	$1s_{1/2}$	$2s_{1/2}$	$2p_{1/2}$	$2p_{3/2}$	$3d_{3/2}$	$3d_{5/2}$	$4f_{7/2}$
$^{146}\text{Nd}$ $r_0=1,13$ $a=0,5$	$\Delta E_{L,S}^{(1)}$	$2,04 \pm 0,16$	$0,50 \pm 0,09$	$0,06 \pm 0,04$	$0,21 \pm 0,03$	$-0,02 \pm 0,00$	$0,01 \pm 0,00$	—
	$\Delta E_{L,S}^{(2)}$	0,26	0,06	0,08	0,06	0,00	0,00	—
	$\Delta E_{v,p}$	45,90	11,01	16,38	15,13	4,52	4,35	1,56
	$\delta E_{v,p}$	0,84	0,81	0,83	0,83	0,81	0,81	0,78
$^{120}\text{Sn}$ $r_0=1,13$ $a=0,5$	$\Delta E_{L,S}^{(1)}$	$1,55 \pm 0,15$	$0,39 \pm 0,06$	$0,02 \pm 0,02$	$0,10 \pm 0,01$	$-0,01 \pm 0,00$	$0,01 \pm 0,00$	—
	$\Delta E_{L,S}^{(2)}$	0,20	0,20	0,04	0,04	0,03	0,00	—
	$\Delta E_{v,p}$	35,48	7,71	10,45	9,73	2,69	2,61	0,88
	$\delta E_{v,p}$	0,67	0,64	0,65	0,65	0,63	0,63	0,60
$^{96}\text{Mo}$ $r_0=1,12$ $a=0,5$	$\Delta E_{L,S}^{(1)}$	$1,17 \pm 0,14$	$0,30 \pm 0,05$	$-0,00 \pm 0,00$	$0,05 \pm 0,00$	—	—	—
	$\Delta E_{L,S}^{(2)}$	0,15	0,03	0,02	0,01	—	—	—
	$\Delta E_{v,p}$	27,34	5,44	6,69	6,29	1,64	1,61	0,52
	$\delta E_{v,p}$	0,55	0,52	0,53	0,53	0,51	0,51	0,50
$^{40}\text{Ca}$ $r_0=1,13$ $a=0,5$	$\Delta E_{L,S}^{(1)}$	$0,21 \pm 0,04$	$0,05 \pm 0,01$	—	—	—	—	—
	$\Delta E_{L,S}^{(2)}$	0,03	0,00	—	—	—	—	—
	$\Delta E_{v,p}$	6,93	1,06	0,92	0,90	0,19	0,18	0,05
	$\delta E_{v,p}$	0,26	0,24	0,25	0,25	0,23	0,23	0,16

## Вычисления

Приведем расчеты поляризации вакуума по Форду и Уиллсу [195, 197]. Обобщая швингеровское приближение малых расстояний [345] на случай сферически-симметричного распределения заряда  $\rho(r)$ , получим приближенный потенциал поляризации вакуума, обусловленный виртуальными электронно-позитронными парами:

$$V_p(r) = \frac{2\alpha}{3\pi} \left[ V_L(r) - \frac{5}{6} V(r) \right], \quad (1.39)$$

где  $V(r)$  — электростатический потенциал;

$$V_L(r) = e^2 \int \ln \left( \frac{C}{\lambda_e} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \right) \frac{\rho(r') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.40)$$

Здесь  $\lambda_e$  — комптоновская длина волны электрона;  $C = 1,781$ . Это приближение неприменимо для уровней  $2s$  и  $2p$  легких элементов вплоть до  $Z = 9$ . Для этих уровней поправки исключительно малы, и ими можно пренебречь.

Из формулы (1.40)

$$V_L(r) = -2\pi \frac{e^2}{r} \int \rho(r') r' \left\{ |r - r'| \left[ \ln \left( \frac{C}{\lambda_e} |r - r'| \right) - 1 \right] - \right. \\ \left. - (r + r') \left[ \ln \left( \frac{C}{\lambda_e} (r + r') \right) - 1 \right] \right\} dr'. \quad (1.41)$$

Потенциал  $V_L(r)$  отрицателен и по абсолютной величине больше, чем  $V(r)$ . Энергетический сдвиг из-за поляризации вакуума

$$\Delta E_{v.p.} = \int (f^2 + g^2) V_p(r) dr < 0, \quad (1.42)$$

где  $f$  и  $g$  — нормированные волновые функции из уравнения Дирака. Поправки на поляризацию вакуума, вычисленные по формуле (1.42) для состояний  $1s$ ,  $2s$ ,  $2p_{1/2}$ ,  $2p_{3/2}$ , приведены в работе Форда и Уиллса [195].

Если формула (1.42) позволяет довольно точно вычислить сдвиг уровня из-за поляризации вакуума, то приближенную оценку можно получить, используя выведенные Г. Е. Пустоваловым [444] аналитические формулы для сдвигов первых шести уровней вследствие поляризации вакуума. Эти формулы здесь не приводятся, поскольку они весьма громоздки.

Смещение уровней энергии в мезонных атомах из-за поляризации вакуума более высоких порядков пренебрежимо мало. Согласно оценкам Уичмана и Кролла [382], для урана ( $Z = 92$ )

$$\Delta E/E \approx 1,6 \cdot 10^{-4}, \quad (1.43)$$

где  $\Delta E$  — главный член в формуле смещения из-за поляризации вакуума высших порядков;  $E$  — невозмущенная энергия\*.

\* Вопрос о высших порядках поляризации вакуума в мезоатомах рассмотрен более точно в недавних работах [402а\*, 402в\*]. — *Прим. пер.*

Формула (1.42), дающая энергетический сдвиг из-за поляризации вакуума, справедлива для фермионов. Точное выражение для бесспиновых частиц дано Шафером [351]. Общий обзор теории лэмбовского сдвига читатель найдет, например, в работе Эриксона [171].

### § 1.7. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЯДРА (ДИСПЕРСИОННЫЙ ЭФФЕКТ)

Мы рассматривали уровни энергии мезонных атомов, предполагая, что мезон движется в статическом поле ядра, т. е. что распределение заряда ядра не изменяется из-за присутствия мезона. Влияние наведенной мезоном поляризации ядра на уровни энергии мезоатома можно рассмотреть, введя возмущающий член в формулу электромагнитного взаимодействия мезон-ядерной системы.

Согласно оценкам Демёйра и Йохайна [136, 251], в мюонном атоме дейтерия энергетический сдвиг  $1s$ -уровня, возникающий из-за поляризации ядра, может полностью компенсировать эффект конечных размеров ядра. В табл. 1.7 приведены оценки отношения эффекта конечных размеров ядра к эффекту ядерной поляризации для  $1s$ -уровней легчайших мюонных атомов. Отрицательный знак показывает, что эти два эффекта действуют в противоположных направлениях.

Таблица 1.7

Отношение эффекта конечных размеров ядра к эффекту ядерной поляризации для  $1s$ -уровней легчайших мюонных атомов [251]

Ядро	Отношение эффекта конечных размеров ядра к эффекту ядерной поляризации ( $1s$ -уровень)	Ядро	Отношение эффекта конечных размеров ядра к эффекту ядерной поляризации ( $1s$ -уровень)
Дейтон Тритий	—1,2 —4,5	$^3\text{He}$ $^4\text{He}$	—8,4 —39

Недавно Чен [100, 101] провел сложные расчеты эффекта ядерной поляризации в мюонных атомах. Приведем его расчеты для мюонных атомов со сферическими ядрами. Ядерная поляризация в мюонных атомах с деформированными ядрами будет обсуждаться в § 2.2.

### Ядерная поляризация в сферических ядрах

Полный гамильтониан  $H$  мюон-ядерной системы можно записать в виде

$$H = H_n + H_\mu + \delta H, \quad (1.44)$$

где  $H_n$  — гамильтониан ядра;  $H_\mu$  — гамильтониан мюона;  $\delta H$  — электромагнитное взаимодействие между мюоном и ядром. Причем

$$H_\mu = \frac{p_\mu^2}{2m} + V(r_\mu); \quad (1.45)$$

$$\delta H = \sum_{l=0}^{\infty} \delta H_l; \quad (1.46)$$

$$\delta H_l = - \sum_p \frac{4\pi e^2}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \sum_m Y_{lm}(\Omega_p) Y_{lm}^*(\Omega_\mu). \quad (1.47)$$

Суммирование по  $p$  в (1.47) охватывает все протоны ядра.

Поскольку поляризационная поправка мала,  $\delta H$  можно рассматривать как возмущающий член. Тогда собственные функции  $|I\mu\rangle$  уравнения Шредингера для невозмущенной системы

$$(H_n + H_\mu) |I\mu\rangle = (E_I + E_\mu) |I\mu\rangle \quad (1.48)$$

можно представить как произведение мюонной и ядерной волновых функций:

$$\left. \begin{aligned} |I\mu\rangle &= |I\rangle |\mu\rangle; \\ H_n |I\rangle &= E_I |I\rangle; \\ H_\mu |\mu\rangle &= E_\mu |\mu\rangle, \end{aligned} \right\} \quad (1.49)$$

где  $E_I$  и  $E_\mu$  — энергии ядра и мюона;  $I$  и  $\mu$  обозначают полные наборы квантовых чисел соответствующих состояний. Можно ввести более детализированные обозначения для собственных функций ядра:

$$|I\rangle = |N_I J_I P_I M_I\rangle, \quad (1.50)$$

где  $J_I$  и  $M_I$  — полный спин и его проекция на ось  $z$ ;  $P_I$  — четность;  $N_I$  указывает на определенное состояние с данными  $J_I$ ,  $P_I$  и  $M_I$ . Для мюона

$$|\mu\rangle = R_\mu(r_\mu) |l_\mu j_\mu m_\mu\rangle, \quad (1.51)$$

где  $R_\mu$  — радиальная волновая функция мюона;  $l_\mu$ ,  $j_\mu$ ,  $m_\mu$  — его орбитальный и полный моменты и проекция полного момента на ось  $z$ . Поправку к энергии, вызванную поляризацией ядра, можно представить следующим образом:

$$\Delta E = \sum_{l=0}^{\infty} \Delta E_l; \quad (1.52)$$

$$\Delta E_l = \sum_{\mu, I \neq I_0} [ |M_{I\mu}^{(l)}|^2 / (E_{I_0} + E_{\mu_0} - E_I - E_\mu) ]; \quad (1.53)$$

$$M_{I\mu}^{(l)} = \langle I_0 \mu_0 | \delta H_l | I \mu \rangle, \quad (1.54)$$

где  $|I_0 \mu_0\rangle$  — невозмущенное состояние, поправка к которому будет вычисляться.



Предположим, что  $|I_0\rangle$  представляет собой основное состояние  $0^+$  ядра с замкнутой оболочкой. Поправку к энергии за счет члена с  $l=0$  можно интерпретировать как изменение энергии мюонного атома, обусловленное симметричным сжатием ядра [120]. В этом случае изменяются только ядерные уровни, тогда как мюонные уровни остаются неизменными. Однако в членах более высоких порядков ( $l \geq 1$ ) ядерные переходы всегда сопровождаются мюонными. Можно оценить поляризационную поправку  $\Delta E_l$ , заменяя знаменатель в (1.53) средней энергией возбуждения, хотя такая процедура вносит значительную неопределенность. В этой связи полезно определить величину

$$S_l = \sum |M|^2, \quad (1.55)$$

которую можно использовать для проверки различных результатов.

Суммирование по промежуточным мюонным состояниям, как дискретным, так и непрерывным, можно провести точно, используя следующий метод базисного спектра. Вычислим поправку первого порядка к волновой функции

$$|\Delta\Psi\rangle = \sum_{\mu} |I_{\mu}\rangle \frac{\langle I_{\mu} | \delta H_l | I_0 \mu_0 \rangle}{E_{I_0} + E_{\mu_0} - E_I - E_{\mu}}, \quad (1.56)$$

решая неоднородное дифференциальное уравнение

$$(E_{I_0} + E_{\mu_0} - E_I - H_{\mu}) |\Delta\Psi\rangle = |I\rangle \langle I | \delta H_l | I_0 \mu_0 \rangle, \quad (1.57)$$

в котором внутриядерные координаты рассматриваются как параметры. Тогда можно найти поправку к энергии

$$\Delta E_l = \langle I_0 \mu_0 | \delta H_l | \Delta\Psi \rangle. \quad (1.58)$$

Главную трудность в расчетах эффекта ядерной поляризации представляют промежуточные состояния ядра. Поскольку полный спектр возбужденных состояний ядра неизвестен, используются различные ядерные модели, и результаты расчетов отличаются друг от друга в широких пределах. Мы будем учитывать промежуточные состояния ядра двумя различными способами. Первый подход состоит в использовании полноты промежуточных ядерных состояний при определенном значении средней ядерной энергии  $\langle E_I \rangle$  в знаменателе уравнения (1.53). Тогда главную часть  $\Delta E_l$  можно записать как среднее по основному состоянию следующего вида:

$$\begin{aligned} & \sum_{I \neq I_0} \langle I_0 | \sum_p f(r_p) | I \rangle \langle I | \sum_{p'} f(r_{p'}) | I_0 \rangle = \\ & = \langle I_0 | \sum_{p, p'} f(r_p) f(r_{p'}) | I_0 \rangle - \langle I_0 | \sum_p f(r_p) | I_0 \rangle^2. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Чтобы вычислить это выражение при  $p \neq p'$ , нужно знать двухчастичную корреляционную плотность  $\rho(r, r')$ . Предполагая, что

$|I_0\rangle$  представляет собой хартри-фоковское основное состояние, из формулы (1.59) получим:

$$\sum_{I \neq I_0} \langle I_0 | \sum_p f(r_p) | I \rangle \langle I | \sum_{p'} f(r_{p'}) | I_0 \rangle = \\ = \sum_i \langle i | f^2(r) | i \rangle - \sum_{i,j} \langle i(r) j(r') | f(r) f(r') | i(r') j(r) \rangle, \quad (1.60)$$

где  $|i\rangle$  и  $|j\rangle$  — одночастичные состояния ниже уровня Ферми. Тогда величины  $\Delta E_i$  и  $S_i$  можно записать в виде суммы одночастичного (обозначенного индексом  $A$ ) и корреляционного двухчастичного (обозначенного индексом  $B$ ) членов:

$$\Delta E_i = \Delta E_{iA} + \Delta E_{iB}; \quad (1.61)$$

$$S_i = S_{iA} + S_{iB}. \quad (1.62)$$

В ранней работе Купера и Хенли [120] учитывался только одночастичный член. Поскольку мы предполагаем, что двухчастичные корреляции обусловлены исключительно принципом Паули, соответствующий член имеет отрицательный знак и до некоторой степени компенсирует одночастичный член. Поэтому учет обменных двухнуклонных членов при усреднении по основному состоянию ядра заметно уменьшает величину, полученную Купером и Хенли.

Определим следующие величины:

$$\rho(r) = (4\pi)^{-1} \sum_i (2j_i + 1) R_i^2(r); \quad (1.63)$$

$$\rho_l(r, r') = \sum_{i,j} R_i(r) R_j(r') R_i(r') R_j(r) \frac{(l_i j_i \| Y_l \| l_j j_j)^2}{2l+1}; \quad (1.64)$$

$$A_{lLJ} = [4\pi/(2l+1)]^2 (l_{\mu_0} j_{\mu_0} \| Y_l \| L J)^2 / (2j_{\mu_0} + 1); \quad (1.65)$$

$$\xi_0 = e^4; \quad \varepsilon_0 = (2m_{\mu}/\hbar^2) \xi_0;$$

$$P_l(r, r_{\mu}) = r_{\mu} R_{\mu_0}(r_{\mu}) (r_{\mu}^{l_{\mu}} / r_{\mu}^{l_{\mu}+1});$$

$$L_{l_{\mu} k} = \frac{d^2}{dr_{\mu}^2} - \frac{l_{\mu}(l_{\mu}+1)}{r_{\mu}^2} - \frac{2m_{\mu}}{\hbar^2} V(r_{\mu}) - k^2; \quad (1.66)$$

$$k^2 = -\frac{2m_{\mu}}{\hbar^2} (E_{I_0} + E_{\mu_0} - \langle E_I \rangle). \quad (1.67)$$

В выражениях (1.63) и (1.64) суммирование проводится по всем протонным одночастичным состояниям  $R_i(r) |l_i j_i m_i\rangle$ , лежащим ниже уровня Ферми. Для приведенных матричных элементов используются обозначения Эдмондса [150]. Пусть  $H_{l_{\mu}}(r, r_{\mu})$  есть решение неоднородного дифференциального уравнения

$$L_{l_{\mu} k} H_{l_{\mu}}(r, r_{\mu}) = P_l(r, r_{\mu}).$$

Тогда величины  $\Delta E_l$  и  $S_l$  можно выразить через  $H_{ll_\mu}$  и  $P_l(r, r_\mu)$  следующим образом:

$$\Delta E_{lA} = \varepsilon_0 \sum_{l_\mu j_\mu} A_{ll_\mu j_\mu} \iint P_l(r, r_\mu) H_{ll_\mu}(r, r_\mu) \rho(r) r^2 dr dr_\mu; \quad (1.68)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{lB} = & -\varepsilon_0 \sum_{l_\mu j_\mu} A_{ll_\mu j_\mu} \iiint P_l(r, r_\mu) \times \\ & \times H_{ll_\mu}(r', r_\mu) \rho_l(r, r') r^2 dr \cdot r'^2 dr' dr_\mu; \end{aligned} \quad (1.69)$$

$$S_{lA} = \xi_0 \sum_{l_\mu j_\mu} A_{ll_\mu j_\mu} \iint P_l^2(r, r_\mu) \rho(r) r^2 dr dr_\mu; \quad (1.70)$$

$$\begin{aligned} S_{lB} = & -\xi_0 \sum_{l_\mu j_\mu} A_{ll_\mu j_\mu} \iiint P_l(r, r_\mu) \times \\ & \times P_l(r', r_\mu) \rho_l(r, r') r^2 dr r'^2 dr' dr_\mu. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Можно также явно ввести в рассмотрение промежуточные состояния ядра, используя коллективные частично-дырочные состояния, рассчитанные с реалистическими нуклон-нуклонными силами в приближении случайных фаз [279]. Для возбужденных состояний [77]

$$|I\rangle = Q_I^\dagger |I_0\rangle, \quad (1.72)$$

где  $Q_I^\dagger$  — линейный по частично-дырочному возбуждению оператор, определяемый следующими соотношениями:

$$Q_I^\dagger = \sum_{mi} (x_{mi}^{(I)} b_{mi}^+ - y_{mi}^{(I)} b_{mi}); \quad (1.73)$$

$$Q_I |I_0\rangle = 0. \quad (1.74)$$

Оператор  $b_{mi}^+$  порождает частично-дырочную пару (частица в состоянии  $m$  и дырка в состоянии  $i$ ), а оператор  $b_{mi}$  уничтожает ее, поэтому при действии оператора  $Q_I^\dagger$  на  $|I_0\rangle$  возбужденное состояние может заселяться двумя способами. Величины  $x$  и  $y$  представляют собой амплитуды, например,  $y_{mi}^{(I)}$  указывает, сколько таких частично-дырочных возбуждений в основном состоянии ядра.

Выражения для  $\Delta E_l$  и  $S_l$  имеют вид:

$$\Delta E_l = \varepsilon_0 \sum_{l_\mu j_\mu} A_{ll_\mu j_\mu} \int Z(r_\mu) Y(r_\mu) dr_\mu; \quad (1.75)$$

$$S_l = \xi_0 \sum_{l_\mu j_\mu} A_{ll_\mu j_\mu} \int Z^2(r_\mu) dr_\mu, \quad (1.76)$$

где

$$Z(r_\mu) = r_\mu R_{\mu_0}(r_\mu) X(r_\mu); \quad (1.77)$$

$$\begin{aligned} X(r_\mu) = & \sum_{mi} (x_{mi}^{(I)} + y_{mi}^{(I)}) \frac{(0 \| Y_l \| (j_m j_i) l)}{(2l+1)^{1/2}} \times \\ & \times \int \frac{r^l}{r^{l+1}} R_m(r) R_i(r) r^2 dr; \end{aligned} \quad (1.78)$$

$Y(r_\mu)$  есть решение дифференциального уравнения

$$L_{l_\mu \hbar} Y(r_\mu) = Z(r_\mu). \quad (1.79)$$

Оператор  $L_{l_\mu \hbar}$  определяется выражением (1.66) с величиной

$$\hbar^2 = -\frac{2m_\mu}{\hbar^2} (E_{I_0} + E_{\mu_0} - E_I) \quad (1.80)$$

[ср. с (1.67)].

### Вычисление поляризационных поправок в мюонном атоме свинца

При расчете поляризационных поправок в мюонном атоме  $^{208}\text{Pb}$ , выполненных Ченом, были использованы волновые функции, вычисленные Куо [280] с потенциалом Хамады—Джонсона. С этим потенциалом были вычислены ядерные матричные элементы и частично-дырочное взаимодействие диагонализировано на усеченном базисе невозмущенных состояний, который в дальнейшем будем называть модельным пространством.

Поляризационные поправки зависят от потенциала  $V(r_\mu)$ , входящего в (1.45), и, следовательно, от плотности протонов  $\rho(r)$ . В дополнение к  $S_I$  и  $\Delta E_I$  для проверки качества различных вычислений можно использовать значения приведенных вероятностей электромагнитных переходов  $B(EI)$ . В табл. 1.8 показана зависимость  $S_{IA}$ ,  $B_A(EI)$  и  $\Delta E_{IA}$  от выбора распределения протонов  $\rho(r)$ . Индекс  $A$  обозначает одночастичный член. Вероятности даны в единицах Вайскопфа (см., например, монографию Бора и Моттельсона [71, с. 388]). Расчеты были проведены для четырех различных моделей: 1) однородное распределение с радиусом  $1,2 A^{1/3}$  Ферми; 2) распределение Ферми с параметрами  $c = 6,67$  Ферми (радиус половинной плотности) и  $t = 2,21$  Ферми (толщина поверхностного слоя); 3) распределение для потенциала гармонического ос-

Таблица 1.8

Зависимость поляризационных поправок\*  
от вида  $\rho(r)$  [100]

Распределение протонов	$S_{IA}$ , МэВ <sup>2</sup>	$B_A(EI)$ , ед. Вайскопфа	$\Delta E_{IA}$ , кэВ
Однородное	0,57	86,8	—17,6
Ферми	0,58	87,0	—17,6
Для потенциала гармонического осциллятора	0,61	81,9	—17,5
Для потенциала Вудса—Саксона	0,58	86,6	—17,5

\* Приведенные значения вычислены в приближении полноты. Учтены только одночастичные члены;  $|\mu_0\rangle = 1s$ ;  $l = 1$ ;  $\langle E_I \rangle = 14$  МэВ.

Таблица 1.9

Вклад монополярных состояний ядра в поляризационные поправки [100]

Расчет с использованием	$\langle E_I \rangle$ , МэВ	$S_{IA}$ , МэВ <sup>2</sup>	$S_{IB}$ , МэВ <sup>2</sup>	$S_I$ , МэВ <sup>2</sup>	$\Delta E_{IA}$ , кэВ	$\Delta E_{IB}$ , кэВ	$\Delta E_I$ , кэВ
волновых функций Бломквиста [64] приближения полноты	8,2	—	—	0,044	—	—	—2,7
	10	3,6786	—3,6069	0,072	—334,80	331,71	—3,1
	25	3,6786	—3,6069	0,072	—138,57	136,98	—1,6
	10*	3,4494	—3,3921	0,057	—316,23	313,71	—2,5
	25*	3,4494	—3,3921	0,057	—130,68	129,39	—1,3

\* Эти строки рассчитаны с плотностями  $\rho(r)$  и  $\rho_e(r, r')$ , соответствующими состояниям в потенциале Вудса—Саксона.

Таблица 1.10

Вклад дипольных состояний\* ядра в поляризационные поправки [100]

Расчет с использованием	$\langle E_I \rangle$ , МэВ	$S_{IA}$ , МэВ <sup>2</sup>	$S_{IB}$ , МэВ <sup>2</sup>	$S_I$ , МэВ <sup>2</sup>	$B_A(EI)$ , ед. Вайс-копфа	$B_B(EI)$ , ед. Вайс-копфа	$B(EI)$ , ед. Вайс-копфа	$\Delta E_{IA}$ , кэВ	$\Delta E_{IB}$ , кэВ	$\Delta E_I$ , кэВ
волновых функций Куо* <sup>2</sup> [280] Жилле и др. [213] приближения полноты	—	—	—	0,048	—	—	12,0	—	—	—1,98
	—	—	—	0,049	—	—	11,7	—	—	—1,93
	14	0,36	—0,26	0,10	52,5	—37,0	15,5	—10,5	7,8	—2,7
	14* <sup>3</sup>	0,61	—0,43	0,18	81,9	—56,3	25,6	—17,5	12,8	—4,7

\*  $|\mu_e| = 1s, l = 1$ .\*<sup>2</sup> Для возбуждения 31-го частично-дырочного состояния Куо величина  $B(EI) = 14,7$  ед. Вайскопфа.\*<sup>3</sup> Эта строка рассчитана без учета движения центра инерции.

Таблица 1.11

Вклад квадрупольных состояний ядра в поляризационные поправки [100]

Расчет с использованием	$\langle E_I \rangle$ , МэВ	$S_{IA}$ , МэВ <sup>2</sup>	$S_{IB}$ , МэВ <sup>2</sup>	$S_I$ , МэВ <sup>2</sup>	$B_A(EI)$ , ед. Вайс- копфа	$B_B(EI)$ , ед. Вайс- копфа	$B(EI)$ , ед. Вайс- копфа	$\Delta E_{IA}$ , кэВ	$\Delta E_{IB}$ , кэВ	$\Delta E_I$ , кэВ
волновых функций Куо [280]	—	—	—	0,020	—	—	16,56	—	—	—0,44
приближения полноты	10	0,24	—0,14	0,10	96,5	—55,7	40,2	—3,7	2,3	—1,3
	25	0,24	—0,14	0,10	96,5	—55,7	40,2	—2,80	1,78	—1,0

Таблица 1.12

Вклад ядерных состояний с  $l=3$  в поляризационные поправки [100]

Расчет с использованием	$\langle E_I \rangle$ , МэВ	$S_{IA}$ , МэВ <sup>2</sup>	$S_{IB}$ , МэВ <sup>2</sup>	$S_I$ , МэВ <sup>2</sup>	$B_A(EI)$ , ед. Вайс- копфа	$B_B(EI)$ , ед. Вайс- копфа	$B(EI)$ , ед. Вайс- копфа	$\Delta E_{IA}$ , кэВ	$\Delta E_{IB}$ , кэВ	$\Delta E_I$ , кэВ
волновых функций Куо [280]	—	—	—	0,022	—	—	59,6	—	—	—0,33
приближения полноты	10	0,12	—0,05	0,072	126	—48	78	—1,07	0,52	—0,55
	25	0,12	—0,05	0,072	126	—48	78	—0,90	0,43	—0,47

Таблица 1.13

Вклад ядерных состояний с  $l = 4$  в поляризационные поправки [100]

Расчет с использованием волновых функций Куо [280] приближения полноты	$\langle E_I \rangle$ , МэВ	$S_{IA}$ , МэВ <sup>2</sup>	$S_{IB}$ , МэВ <sup>2</sup>	$S_I$ , МэВ <sup>2</sup>	$B_A(EI)$ , ед. Вайс-копфа	$B_B(EI)$ , ед. Вайс-копфа	$B(EI)$ , ед. Вайс-копфа	$\Delta E_{IA}$ , кэВ	$\Delta E_{IB}$ , кэВ	$\Delta E_I$ , кэВ
	—	—	—	0,005	—	—	32	—	—	—0,04
	15	0,077	—0,025	0,053	177	—48	125	—0,40	0,15	—0,25

Таблица 1.14

Вклад состояний с  $l = 5$  в поляризационные поправки [100]

Расчет с использованием волновых функций Куо [280] приближения полноты	$\langle E_I \rangle$ , МэВ	$S_{IA}$ , МэВ <sup>2</sup>	$S_{IB}$ , МэВ <sup>2</sup>	$S_I$ , МэВ <sup>2</sup>	$B_A(EI)$ , ед. Вайс-копфа	$B_B(EI)$ , ед. Вайс-копфа	$B(EI)$ , ед. Вайс-копфа	$\Delta E_{IA}$ , кэВ	$\Delta E_{IB}$ , кэВ	$\Delta E_I$ , кэВ
	—	—	—	0,003	—	—	42	—	—	—0,02
	15	0,052	—0,011	0,041	296	43	253	—0,18	0,05	—0,13

циллятора с параметром  $\hbar\omega = 7$  МэВ; 4) распределение для потенциала Вудса—Саксона с параметрами, полученными Бломквистом и Валборном [65]. Состояния нуклонов в потенциале гармонического осциллятора и в потенциале Вудса—Саксона используются для распределения заряда, полученного из одночастичных протонных состояний:

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi} \sum (2j_k + 1) R_k^2(r), \quad (1.81)$$

где суммирование проводится до уровня Ферми  $0 \ h_{11/2}$ .

Из табл. 1.8 можно видеть, что на поляризационные поправки почти не влияет протонная плотность. Поэтому в дальнейших расчетах поляризационных поправок для мюонного атома  $^{208}\text{Pb}$  используется только распределение, полученное из состояний гармонического осциллятора.

Результаты расчетов приведены в табл. 1.9—1.15. В табл. 1.9 приведены поправки для  $1s$ -уровня, обусловленные ядерными монополярными состояниями, вычисленные в приближении полноты при средних энергиях возбуждения ядра 10 и 25 МэВ, а также результаты расчетов Бломквиста [64].

Таблица 1.15

Поляризационные поправки к  $2p$ -уровню [100]

Расчет с использованием		$\Delta E_l$ для различных значений $l$ и $l_\mu$								
		$l = 0$	1		2		3		4	
		$l_\mu=1$	0	2	1	3	2	4	3	5
волновых функций	Бломквиста [64]	—0,08	—	—	—	—	—	—	—	—
	Куо [280]	—	—0,78	—0,42	—0,16	—0,07	—0,11	—0,05	—0,01	—0,006
	Жилле и др. [213]	—	—0,83	—0,39	—	—	—	—	—	—
приближения полноты*		—0,06	—0,75	—0,47	—0,25	—0,15	—0,09	—0,05	—0,04	—0,03

\* Средние энергии возбуждения ядра для  $l = 0, 1, 2, 3$  и  $4$  равны соответственно 25, 14, 15, 15 и 15 МэВ.

В табл. 1.10 приведены поправки к  $1s$ -уровню, обусловленные дипольными состояниями ядра, вычисленные в приближении полноты и с использованием волновых функций Куо [280] и Жилле и др. [213].

Аналогичные расчеты поляризационной поправки к  $1s$ -уровню, обусловленные ядерными состояниями с  $l = 2, 3, 4$  и  $5$  приведены в табл. 1.11—1.14. Хотя различные модели дают различные значения поправок к  $1s$ -уровню, Чен принимает как наиболее надежные следующие:  $-1,5$  кэВ для ядерных монополярных состояний;  $-2,1$  кэВ



для ядерных дипольных состояний; от  $-1$  до  $-1,3$  кэВ для ядерных квадрупольных состояний;  $-0,55$ ,  $-0,25$  и  $-0,1$  кэВ для ядерных состояний с  $l = 3, 4$  и  $5$  соответственно. Поправки, обусловленные ядерными состояниями с  $l \geq 6$ , составляют:  $-0,053$  кэВ ( $l = 6$ );  $-0,032$  кэВ ( $l = 7$ );  $-0,016$  кэВ ( $l = 8$ );  $-0,010$  кэВ ( $l = 9$ ). Рассмотрено также влияние связи мюона со спин-волновым состоянием  $1^+$ . Однако поправка, обусловленная этим взаимодействием, составляет только  $-3$  эВ. Суммирование всех этих поправок дает полную поляризационную поправку к  $1s$ -уровню, которая оказывается равной  $-6,0$  кэВ; оценочное значение погрешности  $\pm 0,6$  кэВ.

В табл. 1.15 приведены поляризационные поправки к  $2p$ -уровню. Полная поправка к  $2p$ -уровню равна  $-1,9 \pm 0,2$  кэВ. Поляризационные поправки к  $2s$ -уровню вычислены в приближении полноты. Результаты расчетов для ядерных состояний с  $l = 0, 1, 2, 3$  и  $4$  равны соответственно  $-0,44$ ;  $-0,45$ ;  $-0,18$ ;  $-0,07$  и  $-0,03$  кэВ. Полная поправка к  $2s$ -уровню составляет  $-1,2 \pm 0,2$  кэВ.

Отметим, что результаты расчетов Чена согласуются по порядку величины с результатами последних работ. Большое значение поляризационной поправки, полученное в ранней работе Купера и Хенли [120], можно уменьшить до величины того же порядка, что и в работе Чена, если точно рассматривать промежуточные состояния мюона и при вычислении среднего по основному состоянию ядра учесть двухчастичные члены.

### **Возможное экспериментальное подтверждение эффекта ядерной поляризации**

Недавно Андерсон и др. [14, 15] измерили с высокой точностью энергии линий мюонного рентгеновского излучения в  $^{208}\text{Pb}$ , используя чистый германий-литиевый детектор коаксиального типа объемом  $17\text{ см}^3$  с разрешением  $2,5$  кэВ при энергии  $100$  кэВ,  $4,5$  кэВ — при  $1,3$  МэВ и  $8,0$  кэВ — при  $5,0$  МэВ. В табл. 1.16 приведены результаты анализа основных мюонных рентгеновских линий в  $^{208}\text{Pb}$ . Величина  $\Delta\rho$  во второй строке есть тонкое расщепление  $K_\alpha$ -линии,  $\Delta d$  и  $\Delta\rho - \Delta d$ -расщепления  $L_\alpha$ -линии и  $\Delta d - \Delta f$ -расщепление  $M_\alpha$ -линии. В колонках 2 и 3 приведены соответственно измеренные энергии и экспериментальные погрешности. В колонке 4 приведены суммарные погрешности, включающие экспериментальные погрешности и неопределенности в вычислениях поляризации вакуума. Энергии рентгеновских переходов были получены из уравнения Дирака с распределением заряда ядра

$$\rho(r) = \rho_0 \{1 + \exp[n(r/c - 1)]\}^{-1} \quad (1.82)$$

(детальное обсуждение радиального распределения заряда ядра см. в § 2.1). Затем в полученные энергии перехода введены поправки на поляризацию вакуума, лэмбовский сдвиг и аномальный магнитный момент мюона. После этого параметры  $c$  и  $n$  варьируются

Таблица 1.16

Энергии основных линий мюонного рентгеновского излучения в  $^{206}\text{Pb}$ [9]

№ п. п.	Переход или тонкое расщепление	$E_{\text{экср.}}$ , кэВ	$\delta E$	$\Delta E$	$E_{\text{выч.}}$ кэВ	$E'_{\text{выч.}}$ кэВ
	1	2	3	4	5	6
1	$3d_{3/2} \rightarrow 2p_{1/2}$	2643,75	0,36	0,47	2644,56	2644,07
2	$\Delta p$	185,65	0,12	0,15	185,70	185,46
3	$\Delta p - \Delta d$	142,30	0,24	0,25	142,83	142,60
4	$3p_{3/2} \rightarrow 2s_{1/2}$	1507,93	0,80	0,82	1508,90	1507,64
5	$2s_{1/2} \rightarrow 2p_{1/2}$	1217,81	0,80	0,82	1216,24	1217,11
6	$2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$	5788,33	0,48	0,93	5787,12	5781,54
7	$4f_{5/2} \rightarrow 3d_{3/2}$	971,74	0,20	—	971,86	971,85
8	$\Delta d$	43,47	0,44	—	42,87	42,87
9	$\Delta d - \Delta f$	33,99	0,10	—	33,68	33,67

до получения наилучшего совпадения. В колонке 5 приведены значения энергий, вычисленные с использованием параметров из колонки 2 табл. 1.17 для «подгонки» первых шести энергий. Значения в колонке 6 получены при подгонке по пяти энергиям, без использования  $(2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2})$ -перехода, в котором влияние ядерной поляризации сказывается наиболее сильно. Параметры для расчета этих значений взяты из колонки 3 табл. 1.17. Заметим, что значение  $\chi^2$ , поделенное на число степеней свободы, составляет только 1,42 для подгонки по пяти энергиям, тогда как в случае подгонки по шести энергиям оно равно 3,59. С другой стороны, вычисленная энергия  $(2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2})$ -перехода в колонке 6 меньше экспериментального значения на  $6,8 \pm 2,3$  кэВ. Авторы эксперимента [14] предположили, что это расхождение обусловлено ядерной поляризацией.

Таблица 1.17

## Параметры расчета

Энергии, использованные при подгонке (номер строки в табл. 1.16)	1—6	1—5
1	2	3
Число варьируемых параметров	2	2
Число степеней свободы $N$	4	3
$\chi^2/N$	3,59	1,42
$r_0$ , Ферми	$1,1979 \pm 0,0009$	$1,1987 \pm 0,0006$
$n$	$13,99 \pm 0,58$	$14,37 \pm 0,41$
$c$ , Ферми	$6,692 \pm 0,025$	$6,715 \pm 0,019$
$t$ , Ферми	$2,102 \pm 0,079$	$2,053 \pm 0,055$

Изучая радиальное распределение заряда ядра, Форд и Уиллс [199] провели детальный анализ мюонного рентгеновского излучения также и для  $^{206}\text{Pb}$  на основе энергий перехода, измеренных в работах [14, 15]. Согласно результатам этих авторов, разность дополнительных сдвигов состояний  $1s$  и  $2p_{1/2}$  (см. гл. 2) составляет примерно 10 кэВ, тогда как в анализе Андерсона и др. [14, 15] соответствующее расхождение — около 7 кэВ. Форд и Уиллс рассмотрели также возможность устранения этого очевидного противоречия выбором другой функции, описывающей плотность распределения заряда ядра. Хотя им не удалось продемонстрировать это конкретными расчетами, такая возможность не исключена.

### § 1.8. ЭЛЕКТРОННОЕ ЭКРАНИРОВАНИЕ

Электроны в мезонных атомах уменьшают эффективный заряд ядра и могут вызывать сдвиги энергетических уровней мезона. Однако до тех пор, пока мы рассматриваем низшие энергетические уровни мезонных атомов, можно считать, что атомные электроны расположены далеко от мезона, так что эффект электронного экранирования должен быть мал. Оценки этого эффекта делали многие авторы [40, 48, 108, 120]. Например, Баррет вычислил влияние электронного экранирования на энергетические уровни мезона в  $^{209}\text{Bi}$ , используя электронную плотность, взятую из релятивистских самосогласованных расчетов для Hg и модифицированную множителем  $(Z/80)^3$ . Он нашел, что потенциал, обусловленный электронами, имеет вид  $a - br^{2\sigma}$  [ $\sigma = (1 - \alpha^2 Z^2)^{1/2}$ ;  $a$  и  $b > 0$ ], поэтому электронное экранирование уменьшает энергию перехода. Постоянный член  $a$  повышает все уровни на несколько килоэлектронвольт и не влияет на энергию перехода. Влияние второго члена изменяется от 4,6 эВ для  $1s$ -состояния до 190 эВ для  $5g$ -состояния. Учитывая точность экспериментов, влиянием экранирования на энергии переходов в мезонных атомах можно пренебречь.

Недавно Фрикке [202] вычислил влияние электронного экранирования, используя полностью самосогласованную процедуру Хартри—Фока—Слетера. При вычислении собственных значений энергии помимо потенциала, обусловленного зарядом ядра с распределением типа распределения Ферми, были учтены также кулоновское взаимодействие между мюоном и электроном и обменный потенциал электронов. Когда мюон находится в высоковозбужденных состояниях, атом испускает оже-электроны, и поэтому неизвестно, сколько электронов в нем остается. Неясно также, на каких атомных уровнях находятся эти сохранившиеся электроны. Поэтому Фрикке вычислил энергии связи мюона для состояний от  $1s$  до  $8k$  в  $^{208}\text{Pb}$  с 80, 46, 28 электронами (заполняющими три внутренние оболочки), с 10 электронами (заполняющими две внутренние оболочки), с 2 электронами (заполняющими  $K$ -оболочку) и без электронов (голое ядро), используя ядерные параметры Андерсона и др. [14]. В табл. 1.18 приведены результаты этих расчетов. Полная

Таблица 1.18

Энергии и сдвиги уровней мюона в свинце, кэВ, для различного числа электронов [202]

Состояние	Энергия уровня без учета элек- тронного экранирова- ния, кэВ	Сдвиги уровней при числе электронов				
		2	10	28	46	80
$1s_{1/2}$	—10525,456	5,383	10,275	14,132	15,804	17,190
$2p_{1/2}$	—4782,313	5,381	10,272	14,128	15,800	17,185
$3d_{3/2}$	—2162,653	5,361	10,249	14,105	15,776	17,162
$4d_{3/2}$	—1213,989	5,300	10,177	14,031	15,702	17,086
$4f_{5/2}$	—1197,504	5,320	10,201	14,055	15,726	17,112
$4f_{7/2}$	—1188,438	5,319	10,200	14,053	15,725	17,107
$5f_{5/2}$	—766,442	5,220	10,083	13,933	15,604	16,985
$5g_{7/2}$	—761,806	5,255	10,124	13,976	15,646	17,032
$6g_{7/2}$	—529,156	5,110	9,954	13,801	15,471	16,848
$6h_{9/2}$	—527,603	5,160	10,013	13,861	15,531	16,918
$7i_{11/2}$	—387,085	5,036	9,866	13,710	15,379	16,765
$8k_{13/2}$	—296,137	4,881	9,684	13,523	15,190	16,576

энергия связи приведена только для нулевого числа электронов, тогда как для всех других случаев указаны сдвиги уровней из-за электронного экранирования. Значения этих сдвигов для разных уровней энергии мюона близки при равном числе экранирующих электронов. Это может показаться весьма неожиданным, поскольку на высоких энергетических уровнях мюон должен был бы экранироваться большим числом электронов, чем на нижних уровнях. Приведенные в таблице результаты можно понять, учитывая, что два эффекта — увеличение числа экранирующих электронов и уменьшение собственного значения энергии с ростом главного квантового числа  $n$  — в основном компенсируют друг друга. В табл. 1.19 приведены сдвиги энергий переходов из-за электронного экранирования для различных электронных конфигураций. Сдвиги малы и обусловлены главным образом электронной  $K$ -оболочкой.

Отметим в связи с этим, что хотя атомные электроны практически не влияют на движение мезона, присутствие мезона в мезоатоме существенно сказывается на движении атомных электронов. Из-за того что мезон экранирует ядро, эффективный заряд ядра, определяющий движение электронов, оказывается уменьшенным почти на единицу. Поэтому химические и оптические свойства атома (т. е. его электронной оболочки) должны быть сдвинуты на одну клетку в периодической таблице.

Таблица 1.19

Сдвиги энергий переходов из-за электронного экранирования, кэВ,  
в свинце для различного числа электронов [202]

Переход	Энергия перехода без учета элек- тронного экранирова- ния, кэВ	Сдвиги энергий для числа электронов				
		2	10	28	46	80
$2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$	5734,143	— 2	— 3	— 4	— 4	— 5
$3d_{3/2} \rightarrow 2p_{1/2}$	2619,660	— 20	— 23	— 23	— 24	— 23
$4f_{5/2} \rightarrow 3d_{3/2}$	965,144	— 41	— 48	— 50	— 50	— 50
$5g_{7/2} \rightarrow 4f_{5/2}$	435,698	— 65	— 77	— 79	— 80	— 80
$6h_{9/2} \rightarrow 5g_{7/2}$	234,203	— 95	— 111	— 115	— 115	— 114
$7i_{11/2} \rightarrow 6h_{9/2}$	140,518	— 124	— 147	— 151	— 152	— 153
$8k \rightarrow 7i$	90,948	— 155	— 182	— 187	— 189	— 189

## § 1.9. ТОНКАЯ И СВЕРХТОНКАЯ СТРУКТУРА

### Спин-орбитальная связь

Спин-орбитальная тонкая структура зависит от спина и орбитального углового момента мезона. Для  $\pi^-$  и  $K^-$ -мезонных атомов не существует расщепления уровней с данным  $l$ , поскольку спины  $\pi^-$  и  $K^-$ -мезонов равны нулю. Для мюонных атомов спин-орбитальное расщепление, соответствующее различным значениям  $j$  для данного  $l$ , можно найти из формулы (1.17) для точечного заряда ядра. Уровень  $2p$  будет расщеплен на уровни  $2p_{3/2}$  и  $2p_{1/2}$  с весовыми факторами 2 и 1 соответственно, если говорить об относительных статистических весах. (По поводу аномалий в интенсивностях см. гл. 2.) Расщепление уменьшается с уменьшением  $Z$  гораздо быстрее, чем расстояние между уровнями. Для мюонных атомов с большим значением  $Z$  спин-орбитальное расщепление в действительности значительно уменьшается из-за конечных размеров ядра. Например, расщепление уровней тонкой структуры в  $2p$ -состоянии для мюонного атома свинца составляло бы 0,55 МэВ в случае точечного ядра, но конечные размеры ядра уменьшают эту величину до 0,2 МэВ. Сравнение формул (1.17) и (1.19) показывает, что расстояние между уровнями с разными  $l$  для данного  $n$  в  $\pi^-$  и  $K^-$ -мезонных атомах сравнимо с расстоянием между расщепленными уровнями тонкой структуры в мюонных атомах. Однако из-за поглощения пиона или каона эта структура не наблюдается, по крайней мере для низколежащих уровней энергии.

Поправки на приведенную массу для энергетических уровней тонкой структуры мезоатомов были детально рассмотрены Чиафалони [105].

## Статический квадрупольный момент ядра

Поскольку мезонные орбиты значительно ближе к ядру, чем электронные, статический квадрупольный момент может влиять на уровни энергии мезоатома гораздо сильнее, чем на электронные спектры. Зависимость эффекта конечных размеров ядра от ориентации  $j$  относительно ядерного спина  $I$  приводит к квадрупольному расщеплению. Как правило, квадрупольное расщепление много меньше, чем спин-орбитальное. Однако в случае сильно деформированных ядер ( $155 < A < 185$  и  $A > 230$ ) большой квадрупольный момент может создавать расщепление такого же порядка, как в тонкой структуре [381].

Помимо расщепления энергетических уровней, квадрупольный момент ядра вызывает также сдвиги уровней. Сдвиг зависит, по существу, от искажения формы ядра или изменения среднеквадратического радиуса  $\langle r^2 \rangle^{1/2}$  в деформированном ядре. Увеличение  $\langle r^2 \rangle$  уменьшает энергию связи. Эффект деформации зависит от модели ядра, используемой для описания квадрупольного момента. Андерсон и др. [11] оценили этот эффект, предполагая, что квадрупольный момент обусловлен эллипсоидальной деформацией ядра. Они нашли, что для всех известных значений квадрупольных моментов сдвиги малы. Наибольший найденный ими сдвиг уровня относится к  $^{75}\text{As}$  и составляет 4,6 кэВ.

## Динамическое сверхтонкое $E2$ -взаимодействие

В § 1.7 мы пренебрегали возможными резонансами, возникающими при состояниях ядра с энергией возбуждения, сравнимой с энергией ( $2p \rightarrow 1s$ )-перехода. В случае сильно деформированных ядер электрический квадрупольный потенциал имеет тот же порядок, что энергии возбуждения вращательных уровней и тонкое расщепление мюонного рентгеновского излучения  $K$ -серии.  $E2$ -Взаимодействие смешивает основное состояние ядра с различными возбужденными состояниями, так же как и с различными состояниями мюона. Вследствие резонансов между различными состояниями появляется дополнительная структура в спектрах мюонных атомов с сильно деформированными ядрами. Смешивание ядерных состояний приводит к появлению квадрупольной сверхтонкой структуры также и в случае четно-четных ядер с нулевым спином в основном состоянии.

## Магнитный дипольный момент

Ядро, обладающее квадрупольным моментом, всегда имеет и магнитный дипольный момент. Магнитный момент мюона примерно в 207 раз меньше магнитного момента электрона. Поэтому в мюонных атомах сверхтонкое расщепление из-за магнитного дипольного момента ядра в общем случае на два порядка меньше

расщепления, обусловленного электрическим квадрупольным моментом (см. § 2.1). Однако для определенных ядер с очень большим магнитным дипольным моментом и очень малым квадрупольным моментом нельзя пренебречь магнитным дипольным сверхтонким расщеплением. Типичным примером такого ядра может служить  $^{209}\text{Bi}$ . Магнитный момент отрицательного мюона в мюонном атоме несколько меньше, чем момент свободного мюона [238]. Поправки к гиромагнитному отношению для связанного мюона были вычислены Фордом и др. [196, 198]. Для дираковской частицы, связанной в поле бесспинового ядра и окруженной электронным облаком с нулевым полным моментом, можно выделить следующие поправки к гиромагнитному отношению: 1) радиационная,  $g_1$ ; 2) на изменение радиационной поправки из-за связи,  $g_2$ ; 3) прямая на связь,  $g_3$ ; 4) на ядерную поляризацию,  $g_4$ ; 5) на поляризацию электронного облака,  $g_5$ ; 6) на электронное диамагнитное экранирование,  $g_6$ ; 7) на центр инерции,  $g_7$ .

Вычисленное значение  $g$ -фактора связанного мюона, т. е. отношение его магнитного момента в мюонных магнетонах Бора ( $e\hbar/2m_\mu c$ ) к его угловому моменту в единицах  $\hbar$ , находится в довольно хорошем согласии с измеренным значением [243], если учесть неопределенности, обусловленные химическими и твердотельными магнитными экранирующими эффектами. Например, в мюонном атоме серы рассчитанные и измеренные значения поправок к гиромагнитному отношению связанного отрицательного мюона  $(g - g_+)/g_0$  равны соответственно  $-49,1 \cdot 10^{-4}$  и  $-48,1 \cdot 10^{-4}$ . Здесь  $g_0$  и  $g_+$  — гиромагнитные отношения для дираковской частицы ( $g_0 = 2$ ) и положительного мюона. Положительный и (свободный) отрицательный мюоны, как частица и античастица, имеют равные магнитные моменты.

Точное определение магнитных моментов в тяжелых мюонных атомах может оказаться полезным для изучения структуры мюона.

§ 2.1. ИЗУЧЕНИЕ СТРУКТУРЫ СФЕРИЧЕСКИХ ЯДЕР  
С ПОМОЩЬЮ МЮОННЫХ АТОМОВ**Уравнение Дирака в случае сферического распределения  
заряда ядра**

В гл. 1 было показано, что уровни энергии мюона в кулоновском поле ядра определяются решением уравнения Дирака (1.13) с нормировкой (1.14). Обычно значения энергии находятся численным решением уравнений (1.13) для потенциала, рассчитанного в предположении некоторого распределения заряда ядра. Форд и Хилл [194, 232] использовали в своих вычислениях различные типы распределения заряда ядра. Форд и Уиллс [195] в своих ранних расчетах использовали распределение заряда, удовлетворяющее старым данным по рассеянию электронов. Распределения заряда, предложенные Херманом и Хофштадтером [230], дают лучшее согласие с данными по мюонному рентгеновскому излучению [67]. В расчетах наиболее широко применяется распределение Ферми

$$\rho(r) = \frac{N}{1 + \exp \left[ 4 (\ln 3) \frac{r-c}{t} \right]}, \quad (2.1)$$

где  $\rho(r)$  нормируется следующим образом:

$$4\pi \int_0^{\infty} \rho(r) r^2 dr = Z. \quad (2.2)$$

Из соотношений (2.1) и (2.2) находим\*

$$N = \frac{3Z}{4\pi} \cdot \frac{1}{c^3 + \left( \frac{\pi t}{4 \ln 3} \right)^2 c}. \quad (2.3)$$

В соотношении (2.1)  $c$ —радиус половинной плотности, т. е. расстояние от центра ядра до точки, где плотность заряда составляет половину максимального значения (при  $r = 0$ );  $t$ —толщина поверхностного слоя, в пределах которого плотность заряда падает от

\* См. примечание к соотношению (2.6). — *Прим. пер.*



90 до 10% своего максимального значения. При  $t = 0$  распределение Ферми обращается в однородное распределение заряда.

Распределение заряда и соответствующий потенциал связаны уравнением Пуассона, так что

$$V(r) = -4\pi e^2 \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + \int_r^\infty \rho(r') r' dr' \right\}. \quad (2.4)$$

Рассмотрим один из примеров вычисления параметров  $c$  и  $t$  [4, 29, 141]. Интегралы в соотношении (2.4) могут быть вычислены по методу Симпсона [296, с. 477]. С помощью метода Хэминга [330, с. 95] уравнение Дирака можно проинтегрировать для этого потенциала и выбранной начальной энергии связи  $E_0 = (\mu c^2 - W)$ . Полученные решения  $f$  и  $g$  сравниваются в точке сшиваия ( $r = 20$  Ферми) с решением для точечного заряда в области  $r \geq 20$  Ферми.

### Диаграммы $ct$

С помощью метода, рассмотренного в предыдущем подпараграфе, можно вычислить энергии уровней и, следовательно, энергии переходов в мюонных атомах для заданных параметров  $c$  и  $t$  распределения заряда. Энергии уровней должны быть уточнены с учетом поляризации вакуума и других эффектов. Взаимосвязь параметров  $c$  и  $t$  для одной энергии перехода представляется в виде линий постоянной энергии на  $ct$ -диаграмме. Эти линии можно получить нахождением  $c$  для заданного  $t$ , применяя интерполяционную формулу Лагранжа [296, с. 470] для теоретических энергий переходов. Наиболее удобно определять  $c$  и  $t$  по одному из  $2p \rightarrow 1s$ -переходов ( $2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$ ,  $2p_{3/2} \rightarrow 1s_{1/2}$ ) и одному из  $3d \rightarrow 2p$ -переходов ( $3d_{5/2} \rightarrow 2p_{3/2}$ ,  $3d_{3/2} \rightarrow 2p_{1/2}$ ).

Разность энергий типа  $\Delta(2p) \equiv E(2p_{3/2} \rightarrow 1s_{1/2}) - E(2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2})$  можно использовать для определения последовательности переходов. Две линии постоянной энергии образуют область пересечения, размер которой зависит от экспериментальной погрешности. Для больших  $Z$  при существующей точности эксперимента область пересечения мала (см. на рис. 2.1, а и 2.1, б заштрихованную область для ядра  $_{83}\text{Bi}$ . — Прим. пер.). На рис. 2.1 показана  $ct$ -диаграмма для  $_{50}\text{Sn}$  и  $_{83}\text{Bi}$ . Экспериментальные погрешности измерения  $3d \rightarrow 2p$ -переходов в мюонных атомах с малыми и средними значениями  $Z$  весьма значительны, поэтому такой способ определения параметров  $c$  и  $t$  неудовлетворителен. Олово является элементом с наименьшим  $Z$ , для которого в настоящее время измерены как  $2p \rightarrow 1s$ , так и  $3d \rightarrow 2p$ -переходы. Для ограничения области изменения параметров  $c$  и  $t$ , определяемой из  $2p \rightarrow 1s$ -переходов, необходимо уменьшить экспериментальные погрешности измерения энергий  $3d \rightarrow 2p$ -переходов в мюонных атомах с  $Z \leq 50$ . Например, чтобы получить область пересечения на  $ct$ -диаграммах для  $_{17}\text{Cl}$ ,  $_{20}\text{Ca}$ ,  $_{26}\text{Fe}$ , необходима погрешность измере-

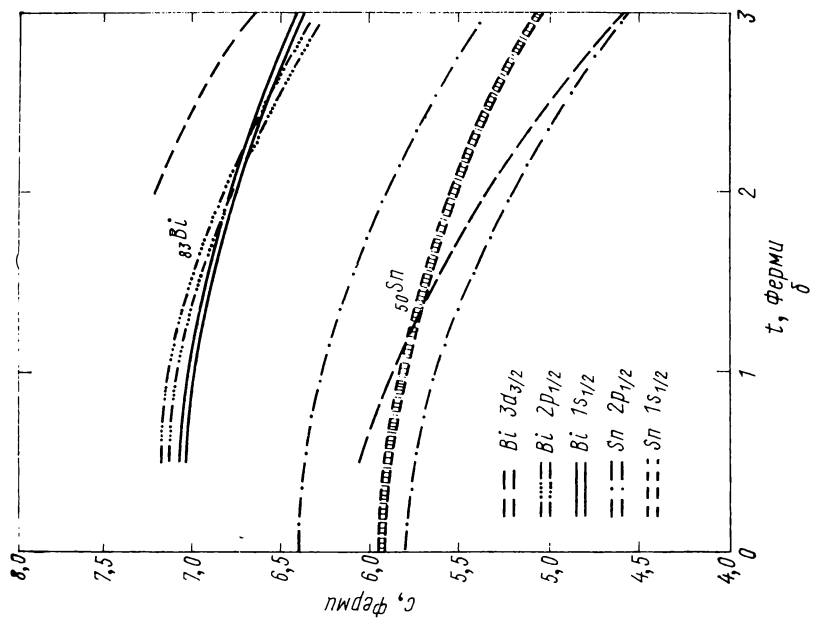
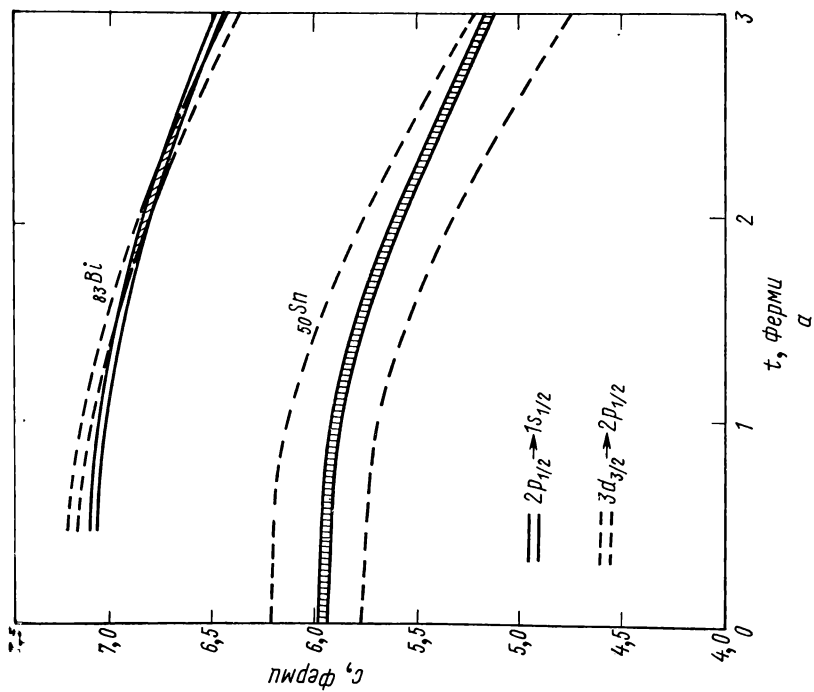


Рис. 2.1. Диаграмма  $ct$  для  $^{50}\text{Sn}$  и  $^{83}\text{Bi}$ :

a	$^{50}\text{Sn}$ :	$E(2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}) = 3412.8 \pm 3.0$	б	$^{50}\text{Sn}$ :	$E(1s_{1/2}) = 5225.5 \pm 3.9$	кэВ.
		$E(3d_{3/2} \rightarrow 2p_{1/2}) = 1022.6 \pm 2.0$			$E(2p_{1/2}) = 1812.7 \pm 2.7$	
	$^{83}\text{Bi}$ :	$E(2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}) = 5839.7 \pm 5.5$			$E(1s_{1/2}) = 10770.3 \pm 5.6$	
		$E(3d_{3/2} \rightarrow 2p_{1/2}) = 2700.2 \pm 2.5$			$E(2p_{1/2}) = 4927.4 \pm 3.0$	
					$E(3d_{3/2}) = 2227.2 \pm 1.6$	

ния  $3d \rightarrow 2p$ -переходов 0,1 кэВ. Это выше возможностей современного эксперимента.

При  $t = 2,0$  Ферми для  $\text{Bi}$  имеем

$$\left( \frac{d \ln c}{d \ln E} \right)_{2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}} = -1,3 \quad \text{и} \quad \left( \frac{d \ln c}{d \ln E} \right)_{3d_{5/2} \rightarrow 2p_{3/2}} = -4,9, \quad (2.5)$$

в то время как для  ${}^{50}\text{Sn}$  соответствующие значения равны  $-2,1$  и  $-30,3$ . Для этого значения  $t$  (2,0 Ферми) в случае  ${}^{83}\text{Bi}$  можно определить измерением энергий значение  $c$  с погрешностью  $\pm 0,01$  Ферми для  $2p \rightarrow 1s$ -перехода и  $\pm 0,03$  Ферми для  $3d \rightarrow 2p$ -перехода. С другой стороны, в случае  ${}^{50}\text{Sn}$  погрешность измерения  $c$  для соответствующих переходов составляет  $\pm 0,04$  и  $0,05$  Ферми. Однако следует отметить, что мы имеем здесь дело не с истинными стандартными отклонениями, поскольку существует неопределенность в значении самой величины  $t$ .

В табл. 2.1 приведены значения  $c$ , отвечающие различным значениям  $t$ , плотность протонов в центре ядра  $\rho_p = \rho$  ( $r = 0$ ), полученная из соотношения (2.1), а также среднеквадратические радиусы  $\langle r^2 \rangle^{1/2}$  для элементов от  ${}^{17}\text{Cl}$ , до  ${}^{80}\text{Nd}$ . Погрешности измерений  $c$  и  $\rho_p$  отвечают постоянному значению  $t$ . Уместно еще раз напомнить, что существует неопределенность в самом параметре  $t$ , которая влияет на точность определения других величин. В табл. 2.2, подобной табл. 2.1, область пересечения на  $ct$ -диаграмме для элементов  ${}^{79}\text{Au}$  и  ${}^{83}\text{Bi}$  представлена тремя значениями параметров  $c$  и  $t$ : в центре  $[c \pm (\delta c)_t, t]$  и в двух крайних точках области  $(c_1, t_1$  и  $c_2, t_2)$ .

В двух последних колонках табл. 2.1 и 2.2 даны значения  $c$  и  $t$ , определенные для некоторых ядер в экспериментах по рассеянию электронов. Следует отметить, что значения  $c$  и  $t$  для  ${}^{20}\text{Ca}$  и  ${}^{51}\text{Sb}$ , полученные из данных по рассеянию электронов, близки к соответствующим значениям, найденным в экспериментах с мезоатомным рентгеновским излучением. В случае  ${}^{79}\text{Au}$ ,  ${}^{82}\text{Pb}$  и  ${}^{83}\text{Bi}$  значение  $c$ , полученное из экспериментов по рассеянию электронов, меньше мю-атомных значений. Параметр  $t$ , найденный из рассеяния электронов, не отличается от мю-атомного значения в случае  ${}^{82}\text{Pb}$  и превышает последнее для  ${}^{79}\text{Au}$  и  ${}^{83}\text{Bi}$ . Это расхождение не обнаружено в более ранних экспериментах, выполненных с меньшей точностью. Детальный анализ рассеяния электронов на этих элементах можно найти в работах [123, 223, 233].

В табл. 2.1 и 2.2 приведены также значения радиусов  $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ . Для распределения Ферми\*

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle &= 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^4 dr = \frac{0,6 c^2 Z}{1 + (\pi t / (4c \ln 3))^2} \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{10}{3} \left( \frac{\pi t}{4c \ln 3} \right)^2 + \frac{7}{3} \left( \frac{\pi t}{4c \ln 3} \right)^4 \right\}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

\* Выражение (2.6), как и рассмотренное выше (2.3), — приближенное [см. Элтон Л. Размеры ядер. М., Изд-во иностр. лит., 1962]. — Прим. пер.

Таблица 2.1

Значения  $c$ , Ферми, плотности протонов в центре  $\rho_p$ , протон/Ферми<sup>3</sup>, и среднеквадратического радиуса  $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ , Ферми, для легких и средних ядер при фиксированных значениях  $t$ , Ферми [14]

Элемент	$t = 0,0$				$t = 1,0$				$t = 2,0$				$t = 3,0$				Рассеяние элек тронов	
	$c$	$\rho_p$	$\langle r^2 \rangle^{1/2}$	$\rho_p$	$c$	$\rho_p$	$\langle r^2 \rangle^{1/2}$	$c$	$\rho_p$	$\langle r^2 \rangle^{1/2}$	$c$	$\rho_p$	$\langle r^2 \rangle^{1/2}$	$c$	$t$			
$_{17}\text{Cl}$	$4,285 \pm 0,110$	$0,0516 \pm 0,0042$	$3,319 \pm 0,085$	$0,0550 \pm 0,0046$	$4,154 \pm 0,113$	$0,0550 \pm 0,0046$	$3,327 \pm 0,085$	$3,710 \pm 0,129$	$0,0692 \pm 0,0070$	$3,330 \pm 0,086$	$0,1050 \pm 0,0121$	$3,374 \pm 0,073$	$2,931 \pm 0,137$	$0,1003 \pm 0,0041$	$3,731 \pm 0,033$	—		
$_{20}\text{Ca}$	$4,450 \pm 0,075$	$0,0542 \pm 0,0028$	$3,447 \pm 0,058$	$0,0577 \pm 0,0030$	$4,319 \pm 0,074$	$0,0577 \pm 0,0030$	$3,451 \pm 0,056$	$3,900 \pm 0,082$	$0,0710 \pm 0,0042$	$3,458 \pm 0,056$	$0,1064 \pm 0,0080$	$3,479 \pm 0,053$	$3,125 \pm 0,096$	$0,0778 \pm 0,0005$	$4,664 \pm 0,008$	$3,60 \pm 0,03$	$2,50 \pm 0,16$	
$_{26}\text{Fe}$	$4,772 \pm 0,042$	$0,0571 \pm 0,0016$	$3,696 \pm 0,033$	$0,0602 \pm 0,0018$	$4,652 \pm 0,045$	$0,0602 \pm 0,0018$	$3,701 \pm 0,034$	$4,271 \pm 0,049$	$0,0716 \pm 0,0024$	$3,712 \pm 0,034$	$0,1003 \pm 0,0041$	$3,731 \pm 0,033$	$3,569 \pm 0,057$	$0,1003 \pm 0,0041$	$3,731 \pm 0,033$	—	—	
$_{50}\text{Sn}$	$5,940 \pm 0,010$	$0,0570 \pm 0,0003$	$4,601 \pm 0,008$	$0,0588 \pm 0,0003$	$5,848 \pm 0,011$	$0,0588 \pm 0,0003$	$4,608 \pm 0,008$	$5,567 \pm 0,010$	$0,0649 \pm 0,0003$	$4,630 \pm 0,007$	$0,0778 \pm 0,0005$	$4,664 \pm 0,008$	$5,067 \pm 0,012$	$0,0778 \pm 0,0005$	$4,664 \pm 0,008$	—	—	
$_{51}\text{Sb}$	$5,998 \pm 0,007$	$0,0564 \pm 0,0002$	$4,646 \pm 0,005$	$0,0582 \pm 0,0002$	$5,908 \pm 0,007$	$0,0582 \pm 0,0002$	$4,654 \pm 0,005$	$5,630 \pm 0,007$	$0,0641 \pm 0,0002$	$4,676 \pm 0,005$	$0,0764 \pm 0,0004$	$4,711 \pm 0,005$	$5,138 \pm 0,008$	$0,0764 \pm 0,0004$	$4,711 \pm 0,005$	$5,32 \pm 0,11$	$2,50 \pm 0,25$	
$_{52}\text{Te}$	$6,056 \pm 0,008$	$0,0559 \pm 0,0002$	$4,691 \pm 0,006$	$0,0576 \pm 0,0002$	$5,967 \pm 0,008$	$0,0576 \pm 0,0002$	$4,699 \pm 0,006$	$5,693 \pm 0,008$	$0,0633 \pm 0,0002$	$4,721 \pm 0,006$	$0,0751 \pm 0,0004$	$4,757 \pm 0,006$	$5,208 \pm 0,009$	$0,0751 \pm 0,0004$	$4,757 \pm 0,006$	—	—	
$_{53}\text{I}$	$6,077 \pm 0,009$	$0,0564 \pm 0,0003$	$4,707 \pm 0,007$	$0,0581 \pm 0,0003$	$5,988 \pm 0,009$	$0,0581 \pm 0,0003$	$4,715 \pm 0,007$	$5,715 \pm 0,010$	$0,0638 \pm 0,0003$	$4,737 \pm 0,007$	$0,0756 \pm 0,0004$	$4,773 \pm 0,007$	$5,233 \pm 0,011$	$0,0756 \pm 0,0004$	$4,773 \pm 0,007$	—	—	
$_{55}\text{Cs}$	$6,157 \pm 0,008$	$0,0563 \pm 0,0003$	$4,769 \pm 0,006$	$0,0579 \pm 0,0002$	$6,070 \pm 0,008$	$0,0579 \pm 0,0002$	$4,777 \pm 0,006$	$5,802 \pm 0,009$	$0,0634 \pm 0,0003$	$4,800 \pm 0,007$	$0,0746 \pm 0,0004$	$4,848 \pm 0,008$	$5,330 \pm 0,010$	$0,0746 \pm 0,0004$	$4,848 \pm 0,008$	—	—	
$_{56}\text{Ba}$	$6,206 \pm 0,011$	$0,0559 \pm 0,0003$	$4,807 \pm 0,009$	$0,0575 \pm 0,0003$	$6,120 \pm 0,011$	$0,0575 \pm 0,0003$	$4,815 \pm 0,008$	$5,855 \pm 0,011$	$0,0629 \pm 0,0003$	$4,839 \pm 0,008$	$0,0737 \pm 0,0005$	$4,877 \pm 0,009$	$5,389 \pm 0,013$	$0,0737 \pm 0,0005$	$4,877 \pm 0,009$	—	—	
$_{57}\text{La}$	$6,235 \pm 0,010$	$0,0561 \pm 0,0003$	$4,830 \pm 0,008$	$0,0577 \pm 0,0003$	$6,149 \pm 0,010$	$0,0577 \pm 0,0003$	$4,837 \pm 0,008$	$5,886 \pm 0,011$	$0,0630 \pm 0,0004$	$4,861 \pm 0,008$	$0,0737 \pm 0,0005$	$4,900 \pm 0,008$	$5,424 \pm 0,012$	$0,0737 \pm 0,0005$	$4,900 \pm 0,008$	—	—	
$_{58}\text{Ce}$	$6,261 \pm 0,012$	$0,0564 \pm 0,0003$	$4,850 \pm 0,009$	$0,0580 \pm 0,0004$	$6,176 \pm 0,013$	$0,0580 \pm 0,0004$	$4,858 \pm 0,009$	$5,915 \pm 0,013$	$0,0632 \pm 0,0004$	$4,883 \pm 0,009$	$0,0738 \pm 0,0006$	$4,921 \pm 0,010$	$5,456 \pm 0,015$	$0,0738 \pm 0,0006$	$4,921 \pm 0,010$	—	—	
$_{59}\text{Pr}$	$6,259 \pm 0,012$	$0,0574 \pm 0,0004$	$4,848 \pm 0,009$	$0,0591 \pm 0,0004$	$6,174 \pm 0,012$	$0,0591 \pm 0,0004$	$4,857 \pm 0,009$	$5,913 \pm 0,013$	$0,0644 \pm 0,0004$	$4,881 \pm 0,009$	$0,0752 \pm 0,0005$	$4,921 \pm 0,009$	$5,455 \pm 0,014$	$0,0752 \pm 0,0005$	$4,921 \pm 0,009$	—	—	
$_{60}\text{Nd}$	$6,313 \pm 0,013$	$0,0569 \pm 0,0004$	$4,890 \pm 0,010$	$0,0585 \pm 0,0004$	$6,229 \pm 0,013$	$0,0585 \pm 0,0004$	$4,898 \pm 0,010$	$5,971 \pm 0,014$	$0,0636 \pm 0,0005$	$4,923 \pm 0,010$	$0,0740 \pm 0,0006$	$4,964 \pm 0,010$	$5,520 \pm 0,015$	$0,0740 \pm 0,0006$	$4,964 \pm 0,010$	—	—	

Значения  $c$ , Ферми,  $t$ , Ферми,  $\rho_p$ , протон/Ферми<sup>3</sup>, и

Элемент	$c_1$	$t_1$	$\rho_{p_1}$	$\langle r_1^2 \rangle^{1/2}$	$c \pm (\delta c)t$	$t$	$\rho_p$
<sup>79</sup> Au	6,79	1,50	0,0588	5,41	$6,71 \pm 0,01$	1,80	0,0602
<sup>80</sup> Hg	6,75	1,89	0,0597	5,47	$6,46 \pm 0,02$	2,68	0,0651
<sup>81</sup> Tl	6,75	1,90	0,0604	5,47	$6,62^{\pm} \pm 0,01$	2,28	0,0627
<sup>82</sup> Pb <sup>206</sup>	6,74 <sup>5</sup>	1,97	0,0611	5,48	$6,62^{\pm} \pm 0,01$	2,31	0,0634
<sup>82</sup> Pb(ест.)	6,74 <sup>5</sup>	2,00	0,0610	5,49	$6,67 \pm 0,01$	2,21	0,0624
<sup>83</sup> Bi	6,84 <sup>5</sup>	1,72	0,0598	5,50	$6,72^{\pm} \pm 0,01$	2,14	0,0619

### Среднеквадратический радиус (из данных по рассеянию электронов и по рентгеновским спектрам мюонных атомов)

В течение многих лет распределение заряда в основном состоянии сферического ядра определялось из экспериментов по упругому рассеянию электронов высокой энергии (выше 150 МэВ). Поскольку получить малые переданные импульсы при высоких энергиях трудно, в этих экспериментах исследовалась в основном поверхность ядра, определяемая параметрами  $c$  и  $t$ . Точнее говоря, величины  $c$  и  $t$  эффективно связаны с распределением заряда в поверхностном слое. Введение трехпараметрического распределения заряда позволяет извлекать информацию о плотности заряда в центре ядра и на «хвосте» распределения. Однако при более низких энергиях можно непосредственно измерить среднеквадратический радиус, хотя некоторые другие детали распределения в этом случае

Таблица 2.3

Среднеквадратические радиусы, Ферми, для  $12 \leq A \leq 122$  [168]  
(погрешность измерения порядка 0,10 Ферми)

Элемент	Среднеквадратический радиус, определенный по			
	рассеянию электронов		рентгеновскому мюонному излучению	
	Модель Саксона—Вудса	Модель гармонического осциллятора	Модель Ферми	Модель Ферми
<sup>12</sup> C	2,58[169]	2,41[170] 2,51[405]	— —	—2,4[36]
<sup>16</sup> O	2,79[169]	2,71[281]	—	—2,9[36]
<sup>28</sup> Si	3,14[169]	—	—	3,07[36]
<sup>31</sup> P	3,24[169]	—	3,07[274]	3,14[36]
<sup>32</sup> S	3,33[169]	—	3,12[291]	3,22[327]
<sup>40</sup> Ca	3,39[169]	—	3,50[234]	3,46[36]
<sup>50</sup> Ti	—	—	3,56[170]	3,60[170]
<sup>56</sup> Fe	—	—	3,85[168]	3,73[5]
Ni(ест.)	—	—	3,80[166]	3,83[5]
<sup>115</sup> In	—	—	4,49[166]	4,50[122]
Sn(ест.)	—	—	4,62[168]	4,62[5]
<sup>122</sup> Sb	—	—	4,67[166]	4,62[5]

Таблица 2.2

 $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ , Ферми, для элементов от  ${}_{79}\text{Au}$  до  ${}_{83}\text{Bi}$  [4]

$\langle r^2 \rangle^{1/2}$	$c_2$	$t_2$	$\rho_{p_2}$	$\langle r^2 \rangle^{1/2}$	Рассеяние электронов	
					$c$	$t$
$5,415 \pm 0,007$	6,55	2,36	0,0629	5,45	$6,38 \pm 0,06$	$2,35 \pm 0,12$
$5,490 \pm 0,014$	6,20	3,22	0,0704	5,51	—	—
$5,480 \pm 0,007$	$6,53^b$	2,50	0,0645	5,48	—	—
$5,489 \pm 0,007$	6,55	2,51	0,0648	5,50	—	—
$5,493 \pm 0,007$	6,56	2,50	0,0645	5,50	$6,5 \pm 0,13$	$2,3 \pm 0,23$
$5,513 \pm 0,007$	6,62	2,42	0,0639	5,52	$6,47 \pm 0,13$	$2,7 \pm 0,27$

не будут ясны. Данные по рентгеновскому мю-атомному излучению часто анализировались в рамках распределения Ферми, и результаты приводились в виде  $st$ -диаграмм. Как видно из рис. 2.1 и табл. 2.1 и 2.2, допускается широкая область значений параметров  $c$  и  $t$ , которые дают одно и то же значение среднеквадратического радиуса с погрешностью ниже 1%.

Согласуются ли друг с другом результаты, получаемые из экспериментов по рассеянию электронов и из экспериментов с рентгеновским излучением мюонных атомов, и какие параметры можно получить модельно независимым способом — эти вопросы имеют решающее значение. Элтон [168] показал, что для легких и средних ядер среднеквадратический радиус всегда модельно независим. Как можно видеть из табл. 2.3, для ядер с  $12 \leq A \leq 122$  различ-

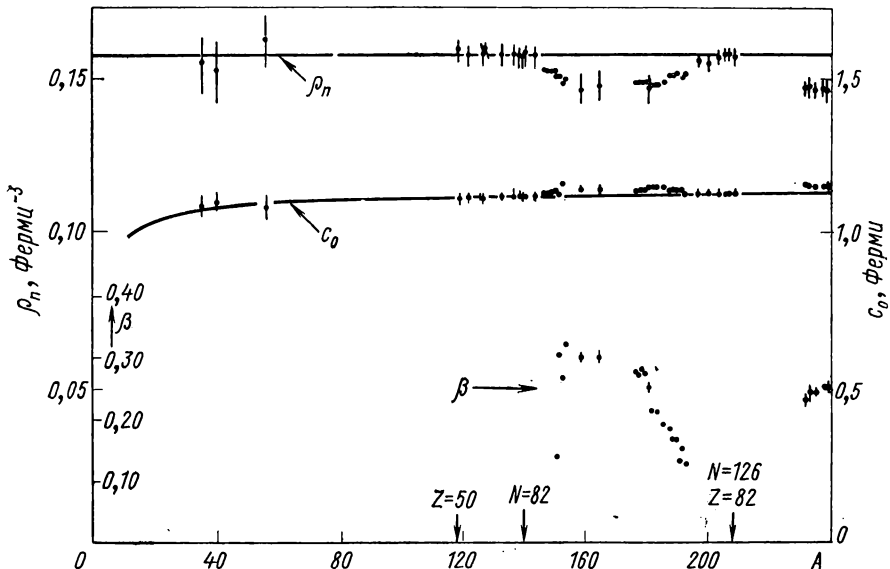


Рис. 2.2. Плотность нуклонов в центре ядра  $\rho_n$  и параметр  $c_0 = c A^{-1/3}$  монополюсной части распределения заряда для  $t=2,21$  [141]. Показан также параметр деформации.

ные модели дают примерно одинаковые значения среднеквадратического радиуса. В случае тяжелых ядер согласие менее удовлетворительно. Обычно различие проявляется тем сильнее, чем выше энергия электронов.

Среднее значение  $t$  для ядер от Au до Bi составляет  $2,21^{+0,14}_{-0,21}$  Ферми. Предполагая, что это значение  $t$  справедливо и для ядер с меньшим  $Z$ , и заменяя в выражении (2.5)  $Z$  на  $A$ , можно получить нуклонную плотность в центре ядра.

На рис. 2.2 показаны плотность  $\rho_n$  и радиальный параметр  $c_0 = cA^{-1/3}$  мюонных атомов со сферическими ядрами как функция атомной массы  $A$ . Данные по рентгеновскому излучению мюонных атомов в целом согласуются с предположением о постоянстве  $t$  и  $\rho_n$ , хотя эти параметры, оказывается, имеют несколько меньшие значения по сравнению с найденными из экспериментов по рассеянию электронов. Это расхождение, возможно, вызвано принятыми предположениями, в частности предположением о постоянстве  $t$ .

### Радиальное распределение заряда ядра

Распределение заряда ядра можно описывать только одним параметром, например эквивалентным радиусом  $R_{\text{эКВ}}$  — радиусом однородного распределения, имеющего тот же среднеквадратический радиус, что и действительное распределение. Отсюда связь  $\langle r^2 \rangle$  и  $R_{\text{эКВ}}$  должна быть следующей:

$$\langle r^2 \rangle = 4\pi \int_0^{R_{\text{эКВ}}} \frac{3}{4\pi R_{\text{эКВ}}^3} r^4 dr = \frac{3}{5} R_{\text{эКВ}}^2. \quad (2.7)$$

Однако для более точного описания распределения заряда сферически-симметричного ядра необходимо ввести два или более параметров. Примером двухпараметрического распределения является распределение Ферми (2.1) или его разновидность:

$$\rho(r) = \frac{N}{1 + \exp \left[ n \left( \frac{r}{c} - 1 \right) \right]}. \quad (2.8)$$

В этих распределениях радиус половинной плотности  $c$  и толщина поверхностного слоя  $t$  связаны с параметром  $n$  следующим выражением:

$$t = (4c/n) \ln 3. \quad (2.9)$$

Среднеквадратический радиус для распределения Ферми определяется соотношением (2.6).

Еще более точное описание распределения заряда достигается введением третьего параметра  $\omega$ , который видоизменяет плотность в центре ядра. Например, трехпараметрическое распределение Фер-

ми с параболическим уменьшением плотности в центре можно задать в виде

$$\rho(r) = \frac{\rho_0 [1 + \omega (r/c)^2]}{1 + \exp [4 [(r-c)/t] \ln 3]} \quad (2.10)$$

или, в соответствии с (2.1), в виде

$$\rho(r) = \frac{N [1 + \omega (r/c)^2]}{1 + \exp [n((r/c) - 1)]}. \quad (2.11)$$

Форд и Уиллс [199] установили, что параметры различных распределений заряда определяются энергией каждого перехода в мюонных атомах. Они нашли, что энергии каждого перехода отвечает определенный момент  $\langle r^k \rangle$  для широкого набора двух-, трех- и четырехпараметрических распределений заряда ядра. Кроме того, они распространили понятие эквивалентного радиуса  $R_k$  на все моменты  $\langle r^k \rangle$ :

$$R_k = \left[ \frac{1}{3} (k+3) \langle r^k \rangle \right]^{1/k}. \quad (2.12)$$

Введенный ранее соотношением (2.7) радиус  $R_{\text{экр}}$  соответствует  $R_2$ . В дальнейшем часто будет использоваться обозначение  $R_0$  вместо  $R_2$  и  $R_{\text{экр}}$ , особенно в § 2.2 и 2.3.

Показатель степени  $k$  зависит от атомного номера  $Z$ . Для каждого перехода  $k$  является четным числом при  $Z = 0$  и медленно уменьшается с увеличением  $Z$ . Однако  $k$  почти не зависит от вида выражения для распределения заряда ядра.

Вычисления были проведены со следующими выражениями: распределение с тремя параметрами:

$$\rho(r) = \begin{cases} N [1 + \omega (r/R)^2] \{1 - (1/2) \exp [-n(R-r)/R]\}, & r < R; \\ N (1 + \omega) (1/2) \exp [-n(r-R)/R], & r > R; \end{cases} \quad (2.13)$$

распределение Ферми (три параметра):

$$\rho(r) = \begin{cases} N [1 + \omega (r/R)^2] \{1 + \exp [(r-R)/a]\}^{-1}, & r < R; \\ N (1 + \omega) \{1 + \exp [(r-R)/a]\}^{-1}, & r > R; \end{cases} \quad (2.14)$$

распределение Бете (два параметра):

$$\rho(r) = \begin{cases} N \{1 - \exp [(r-R)/a]\}^2, & r < R; \\ 0, & r > R; \end{cases} \quad (2.15)$$

распределение Бете—Элтона (четыре параметра) [53]:

$$\rho(r) = \begin{cases} N [1 + \omega (r/R)^2] \{1 - (1/2) \exp [(r-R)/a]\}^2, & r < R; \\ N (1 + \omega) (1/4) \exp [-\gamma(r-R)], & r > R. \end{cases} \quad (2.16)$$

Следует заметить, что параболический фактор подавления плотности в центре (wine-bottle) проявляется только до  $r = R$ , при больших  $r$  он обращается в постоянную величину  $1 + \omega$ .



В табл. 2.4 приведены эквивалентные радиусы распределения заряда в  $^{206}\text{Pb}$ , вычисленные Фордом и Уиллсом [199] на основе экспериментальных данных, полученных Андерсеном и сотр. [9]. Значение  $k$ , как можно видеть из табл. 2.4, меняется в пределах от 0,08 до 4,82. Например, переход  $2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$  позволяет найти момент с  $k = 0,80$ . Из табл. 2.4 видно, что данный подход не безупречен, что было также подмечено Андерсеном и сотр. [9], которые предположили, что несоответствие в  $R_k$  обусловлено эффектом поляризации ядра (см. § 1.7).

Т а б л и ц а 2.4

Эквивалентные радиусы распределения заряда ядра  $^{206}\text{Pb}$ ,  
вычисленные на основе эксперимента [199]

Переход	Анализ по модели Ферми, $\omega=0$		Анализ по модели Ферми, $\omega=1,2$	
	$k$	$R_k$	$k$	$R_k$
$2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$	0,80	7,015(2)	0,81	7,032(2)
$2p_{3/2} \rightarrow 1s_{1/2}$	0,83	7,017(2)	0,85	7,033(2)
$2p_{3/2} \rightarrow 2p_{1/2}$	1,22	7,040(15)	1,23	7,051(15)
$3d_{3/2} \rightarrow 2p_{1/2}$	2,29	7,117(5)	2,29	7,122(5)
$3d_{5/2} \rightarrow 2p_{3/2}$	2,75	7,148(7)	2,78	7,158(7)
$3d_{3/2} \rightarrow 2p_{3/2}$	2,76	7,157(9)	2,77	7,166(9)
$3d_{5/2} \rightarrow 3d_{3/2}$	3,25	6,871(137)	3,27	6,878(137)
$4f_{5/2} \rightarrow 3d_{3/2}$	4,06	7,305(97)	4,10	7,308(97)
$4f_{7/2} \rightarrow 3d_{5/2}$	4,80	7,739(162)	4,82	7,746(152)
$3p_{3/2} \rightarrow 2s_{1/2}$	0,08	6,984(7)	0,11	7,022(7)

### Сверхтонкая структура мюонных атомов, обусловленная $M1$ - и статическим $E2$ -моментами ядра

Исследуя мюонное рентгеновское излучение, можно изучать не только форм-фактор распределения заряда ядра, но также распределение магнитного дипольного ( $M1$ ) и электрического квадрупольного ( $E2$ ) моментов в ядре. Использование в последние годы германий-литиевых детекторов, имеющих высокое разрешение по энергии, позволило приступить к исследованию конечного распределения  $M1$ -моментов отдельных нуклидов и определить  $E2$ -моменты ядер.

В  $1s_{1/2}$ -состоянии орбитальной частицы, электрона или  $\mu$ -мезона постоянная сверхтонкой структуры, обусловленной  $M1$ -распределением, определяется следующим выражением [181, 182]:

$$a = \frac{16}{3} \pi g_I \mu_0 \mu_I |\psi_s(0)|^2, \quad (2.17)$$

где  $g_I$  — полный ядерный  $g$ -фактор;  $\mu_0$  и  $\mu_I$  — магнитные моменты орбитальной частицы и ядра соответственно. Для электрона ( $\mu$ -мезона)

$$\mu_0 = e\hbar/2mc, \quad (2.18)$$

где  $m$  — масса электрона ( $\mu$ -мезона). Так как для малых  $Z$

$$|\psi_s(0)|^2 \approx \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{a_0} \right)^3 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{me^2 Z}{\hbar} \right)^3, \quad (2.19)$$

где  $a_0$  — боровский радиус электрона ( $\mu$ -мезона), константа  $M1$ -сверхтонкой структуры  $a$  пропорциональна  $m^2$ , в то время как энергия связи

$$E = -\frac{1}{2} mc^2 \left( \frac{Ze^2}{\hbar c} \right)^2 \quad (2.20)$$

пропорциональна  $m$ . Таким образом,

$$\frac{a(\mu)/E(\mu)}{a(e)/E(e)} \approx \frac{m_\mu}{m_e} \approx 207. \quad (2.21)$$

Отношение константы  $M1$ -сверхтонкой структуры  $a$  к энергии связи в мезоатомах приблизительно в 200 раз больше, чем в обычных атомах.

Так как магнитный момент мюона в 207 раз меньше, чем электрона, соотношение  $M1$ - и  $E2$ -взаимодействий в мюонных атомах на два порядка меньше, чем в обычных атомах. Это можно видеть из выражения

$$\frac{(\mu_n \mu_0/r_\mu^3)}{e^2 Q/r_e^3} \approx 1 \quad (\text{для обычных атомов}). \quad (2.22)$$

**Расчет сверхтонкой структуры.** Бор и Вайскопф [69] исследовали влияние конечного размера ядер на сверхтонкую структуру и в рамках простой модели рассчитали эффект Бора—Вайскопфа конечного распределения намагничивания ядра в случае  $1s_{1/2}$ - и  $2p_{1/2}$ -электронов. Для  $p$ -,  $d$ - и т. п. состояний волновые функции в нерелятивистском приближении обращаются в нуль в центре. Малые компоненты в решении уравнения Дирака для  $p_{1/2}$ -состояния имеют, однако, характер  $s$ -волновой функции и приводят к появлению плотности в центре. Этот релятивистский эффект может оказаться заметным в тяжелых ядрах. Расщепление сверхтонкой структуры в атомах с ядром конечных размеров и с конечным распределением ядерных моментов, вообще говоря, оказывается слабее, чем в случае точечного ядра.

Обратимся к формуле Бора—Вайскопфа для расщепления по энергии, обобщенной Ле Белласом [288]. Расщепление уровня по энергии, обусловленное магнитным взаимодействием в состоянии с полным моментом  $F = I + J$ , где  $I$  и  $J$  — полный момент ядра

и электрона (мюона) соответственно, определяется следующим выражением:

$$\Delta E_F(M) = \frac{1}{2IJ} [F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)] A_1, \quad (2.23)$$

где  $A_1$  связана с константой сверхтонкой структуры  $a$  соотношением

$$A_1 = IJa. \quad (2.24)$$

Величину  $A_1$  можно разделить на две части  $A_1^S$  и  $A_1^L$ , отвечающие намагничиванию ядра за счет спинового и орбитального движения нуклонов соответственно. Расщепление по энергии, обусловленное электрическим квадрупольным моментом, дается следующим выражением:

$$\Delta E_F(Q) = \frac{6[K(K+1) - (4/3)I(I+1)J(J+1)]}{2I(2I-1)2J(2J-1)} A_2, \quad (2.25)$$

где

$$K = F(F+1) - I(I+1) - J(J+1). \quad (2.26)$$

Величины  $A_1$  и  $A_2$  часто называют постоянными взаимодействия магнитной дипольной и электрической квадрупольной сверхтонкой структуры. В случае точечного магнитного диполя расщепление линии  $K_{a_2}$  перехода  $2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$ , обусловленного только  $M1$ -взаимодействием, определяется следующим выражением:

$$\Delta E_F(M) = A_1^{\text{точ}} [(2I+1)/I] = \frac{8\pi}{3} |\psi(0)|^2 \mu_0 \mu_I. \quad (2.27)$$

Для оценки распределения  $M1$ -момента ядра можно воспользоваться усредненной по распределению заряда  $\rho(r)$  величиной  $\psi^2(r)$ :

$$\langle \psi^2(r) \rangle = \frac{Z_{\text{эф}}^4}{Z} \frac{1}{\pi a_0^3}, \quad (2.28)$$

где  $Z_{\text{эф}}$  — эффективный заряд, определяемый соотношением

$$Z_{\text{эф}}^4 = \pi a_0^3 \langle \rho \rangle. \quad (2.29)$$

Тогда

$$A_1^{\text{кон}} = \frac{2}{3} \left( \frac{Z_{\text{эф}}^4}{Z} \right) \mu \left( \frac{m}{M} \right) \alpha^4 mc^2. \quad (2.30)$$

С помощью этого выражения можно найти приближенное значение расщепления сверхтонкой структуры, обусловленного конечным распределением ядерного  $M1$ -момента. Для этого пользуются таблицами значений эффективных зарядов, составленными Фордом и Уиллсом для большинства ядер [195, 197]. Однако этот способ позволяет находить лишь приближенные значения энергии

расщепления сверхтонкой структуры. Как  $A_1$ , так и  $A_2$  зависят от модельных предположений. Более точные выражения для этих величин читатель может найти в статье Ле Белласа [288]. Ниже будут приведены точные формулы для вычисления сверхтонкого расщепления, обусловленного точечным магнитным диполем и электрическим квадрупольным моментом ядра [4]. Сверхтонкое расщепление структуры, вызванное магнитным диполем, определяется диагональным матричным элементом оператора  $M1$ :

$$\Delta E_F(M) = (-1)^{I+J+F} e\mu_I k \left[ \int_0^\infty 2r^{-2} f_k g_k dr \right] \times \\ \times \left[ \frac{2J+1}{J(J+1)} \right]^{1/2} \begin{Bmatrix} F & J & I \\ 1 & I & J \end{Bmatrix} \left[ \begin{pmatrix} I & 1 & I \\ -I & 0 & I \end{pmatrix} \right]^{-1}, \quad (2.31)$$

где  $k$  определяется соотношением (1.15). Поправка, определяемая конечным размером ядра, составляет около 10%. Ядерный магнитный дипольный момент  $\mu_I$ , выраженный в единицах ядерного магнетона Бора, определяется выражением

$$\mu_I = \langle \mu_{I_z} \rangle = \langle Im | \mu_{I_z} | Im \rangle_{m=I} = \\ = (-1)^{2I-1} \begin{pmatrix} I & 1 & I \\ I & 0 & -I \end{pmatrix} \langle I || \mu_I || I \rangle. \quad (2.32)$$

Недиагональный матричный элемент находится по следующей формуле:

$$\langle I' J' (I'); FM | H_M | I J (I); FM \rangle = \\ = \begin{cases} (-1)^{I+J'+F+1} e \langle I' || \mu_I || I \rangle \left[ \int_0^\infty r^{-2} (f_{k'} g_k + g_{k'} f_k) dr \right] \times \\ \times \left[ \frac{(2I+3)(I'+1)}{(2I+1)} \right]^{1/2} \begin{Bmatrix} F & J' & I' \\ 1 & I & J \end{Bmatrix} \text{ для } l = l'; \\ (-1)^{I+J'+F} e \langle I' || \mu_I || I \rangle \left[ \int_0^\infty r^{-2} (f_{k'} g_k + g_{k'} f_k) dr \right] \times \\ \times \left[ \frac{(2I+4)(I+1)}{(2I+3)} \right]^{1/2} \begin{Bmatrix} F & J' & I' \\ 1 & I & J \end{Bmatrix} \text{ для } l = l' + 2. \end{cases} \quad (2.33a)$$

Энергетическое расщепление сверхтонкой структуры, связанное с электрическим квадрупольным моментом, определяется диагональным матричным элементом соответствующего оператора

$$\Delta E_F(Q) = \frac{1}{2} e^2 Q_{sp} (-1)^{I+F+1/2} \langle J || f(r) || J \rangle (2I+1) (2J+1) \times \\ \times \begin{Bmatrix} F & I & J \\ 2 & J & I \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} I & 2 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} I & I & 2 \\ J & J & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} I & I & 2 \\ -I & I & 0 \end{pmatrix}^{-1}, \quad (2.34)$$

где  $Q_{sp}$  — спектроскопический квадрупольный момент, определяемый выражением

$$Q_{sp} = \begin{pmatrix} I & I & 2 \\ - & I & 0 \end{pmatrix} \langle I \| Q \| I \rangle = \begin{pmatrix} I & I & 2 \\ - & I & 0 \end{pmatrix} \times \\ \times \left\langle I \left\| \sum_p r_p^2 2 \left( \frac{4\pi}{5} \right)^{1/2} Y_{20} \right\| I \right\rangle. \quad (2.35)$$

Для квадрупольного распределения, сконцентрированного на поверхности ядра радиуса  $R$ , мюонный матричный элемент имеет следующий вид:

$$\langle J \| f(r) \| J \rangle = R^{-5} \int_0^R r^2 (f_k^2 + g_k^2) dr + \int_R^\infty r^{-3} (f_k^2 + g_k^2) dr. \quad (2.36)$$

Недиагональный матричный элемент

$$\langle I' J'; FM | H_Q | IJ; FM \rangle = \frac{1}{2} e^2 (-1)^{I'+F+1/2} \langle I' \| Q \| I \rangle \times \\ \times \langle J' \| f(r) \| J \rangle [(2I+1)(2I'+1)(2J+1)(2J'+1)]^{1/2} \times \\ \times \begin{Bmatrix} F & I' & J' \\ 2 & J & I \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} I & 2 & I' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} I & I' & 2 \\ J' & J & \frac{1}{2} \end{Bmatrix}, \quad (2.37)$$

где

$$\langle J' \| f(r) \| J \rangle = R^{-5} \int_0^R r^2 (f_k' f_k + g_k' g_k) dr + \int_R^\infty r^{-3} (f_k' f_k + g_k' g_k) dr. \quad (2.38)$$

Приведенные матричные элементы оператора магнитного дипольного момента в формуле (2.33) и оператора электрического квадрупольного момента в формуле (2.37) связаны с приведенными вероятностями  $M1$ - и  $E2$ -переходов соответственно [6]:

$$\beta(M1, I' \rightarrow I) = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{2I'+1} |\langle I' \| \mu_I \| I \rangle|^2 \quad (2.39)$$

и

$$\beta(E2, I' \rightarrow I) = \frac{5}{16\pi} \frac{1}{2I'+1} |\langle I' \| Q \| I \rangle|^2. \quad (2.40)$$

**Сверхтонкая структура мюонных рентгеновских спектров в случае сферических ядер.** Рентгеновское излучение мюонного атома  $^{209}\text{Bi}$ , особенно линия  $K_{\alpha_2}(2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2})$ , наиболее удобное для изучения эффектов  $M1$ -распределения, было исследовано в ЦЕРНе, Чикаго, а также колумбийской группой [4, 36, 37, 152].

Ядро  $^{209}\text{Bi}$  с 83 протонами и 126 нейтронами имеет только один протон над дважды магическим остовом и может рассматриваться как ядро, близкое к сферическому. В основном состоянии это ядро имеет большой спин ( $I = 9/2$ ), малый квадрупольный момент ( $Q \approx -0,4 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$ ) и магнитный момент  $\mu_I = 4,08$  ядерного магнетона. Согласно эксперименту колумбийской группы,

ширина наблюдаемой линии  $K_{\alpha_2}$  составляет 13,5 кэВ (полная ширина на половине высоты), а согласно эксперименту, проведенному в Чикаго, — 14,5 кэВ. Эти значения намного превышают естественную ширину линии. Поскольку квадрупольный момент не оказывает влияния на линию  $K_{\alpha_2}$ , это уширение следует отнести только за счет М1-эффекта сверхтонкой структуры. Полученные значения исключают точечную модель дипольного магнитного момента, которая дает значение для ширины линии  $K_{\alpha_2}$  18,9 кэВ.

Баадер и сотр. [26] обнаружили хорошо разрешенное сверхтонкое М1-расщепление ядерного  $\gamma$ -излучения в мюонных атомах  $^{203}\text{Tl}$ ,  $^{205}\text{Tl}$ . Найденное расщепление основных состояний этих ядер составляет  $2,66 \pm 0,30$  и  $2,32 \pm 0,06$  кэВ соответственно.

Эффекты сверхтонкой структуры, обусловленные электрическим квадрупольным моментом ядра, исследовались в Au, для которого наблюдаемое квадрупольное расщепление линии  $2p_{3/2} \rightarrow 1s_{1/2}$  составляет  $19,8 \pm 2$  (ЦЕРН) и  $18,9 \pm 0,4$  кэВ [121]. (Теоретическое значение расщепления, рассчитанное по формуле (2.34), составляет  $17,2 \pm 3,1$  кэВ.) Эти измерения позволяют уточнить значение квадрупольного момента ядра  $Q_{sp} = 0,58 \pm 0,01$  б. Эффекты E2-сверхтонкой структуры наблюдаются также в спектрах рентгеновского излучения I и Bi, где они проявляются в уширении пиков.

В этом разделе параграфа рассматривались только диагональные матричные элементы E2-взаимодействия в основном состоянии ядра, т. е. статическое E2-взаимодействие. Однако в деформированных мюонных атомах динамическое E2-взаимодействие играет важную роль, поэтому перейдем к его детальному рассмотрению.

**Магнитная сверхтонкая структура и ядерные модели.** Выше была вычислена энергия, связанная с магнитным сверхтонким взаимодействием, в предположении, что ядро является точечным дипольным магнитом. В случае протяженного распределения намагничивания ядра энергия такого взаимодействия определяется в релятивистской теории возмущений выражением (2.23), где

$$A_1 = -\frac{2eK\mu_n}{J+1} \sum_{i=1}^A \int d^3 R \psi^*(\mathbf{R}) [(g_{li} L_{zi} + g_{si} S_{zi}) \times \\ \times \int_{R_i}^{\infty} f(r) g(r) dr + (g_{li} L_{zi} + g_{si} \hat{a}_{zi}) R^{-3} \int_0^{R_i} f(r) g(r) r^3 dr] \psi(\mathbf{R}). \quad (2.41)$$

Здесь  $r$  — радиальная координата мюона;  $R$  — координаты ядра;  $\psi$  — ядерные волновые функции;  $f$  и  $g$  — решения радиального уравнения Дирака;  $L_{zi}$  и  $S_{zi}$  — орбитальный угловой момент и спин нуклона;  $g_{li}$  и  $g_{si}$  — орбитальное и спиновое гироманнитные отношения для нуклона;  $\mu_n$  — ядерный магнетон;

$$K = \mp (J + 1/2) \text{ для } J = l \pm 1/2; \quad (2.42)$$

$$\hat{a} = -\sqrt{2\pi} (S \otimes Y_2)^1; \quad (2.43)$$

спин нуклона  $S$  и ранг сферической гармоники  $Y_2$  связаны в вектор.

Для того чтобы вычислить магнитное сверхтонкое расщепление на основе формулы (2.41), необходимо выбрать приемлемую модель ядра. Магнитная сверхтонкая структура сильно зависит от магнитного момента, поэтому следует рассматривать только такие модели, которые хорошо воспроизводят ядерные магнитные моменты. В 1970 г. Джонсон и Соренсен [253] детально исследовали магнитную сверхтонкую структуру мюонных атомов, привлекая к рассмотрению различные модели ядра. Перед тем как рассмотреть результаты их расчетов, обсудим несколько реалистических моделей, которые можно использовать для исследования магнитной сверхтонкой структуры. Во всех моделях, которые мы рассмотрим, за исключением одночастичной модели, согласие ядерных магнитных моментов с экспериментальными значениями достигается изменением синглетной части  $\delta$ -взаимодействия.

**Одночастичная модель.** Ядерные магнитные моменты, отвечающие одночастичной модели (значения Шмидта), плохо согласуются с экспериментом. Однако эта модель представляет интерес как хорошее «нулевое» приближение для других моделей. В одночастичной модели предполагается, что ядерный магнетизм полностью обусловлен последним нечетным нуклоном на одной из оболочек. Используя формулу (2.41) и одночастичные волновые функции ядра, получаем

$$A_1 = -\frac{2eK\mu_n}{J+1} \left\{ \left[ \frac{1}{2} g_s + \left( I + \frac{1}{2} \right) g_l \right] K_a + \right. \\ \left. + \left[ -\frac{2I-1}{8(I+1)} g_s + \left( I - \frac{1}{2} \right) g_l \right] K_b \right\} \text{ для } I = l + \frac{1}{2}; \quad (2.44a)$$

$$A_1 = -\frac{2eK\mu_n}{J+1} \left\{ \left[ -\frac{g_s}{2(I+1)} + \frac{2I+3}{2(I+1)} g_l \right] IK_a + \right. \\ \left. + \left[ \frac{2I+3}{8I(I+1)} g_s + \frac{2I+3}{2(I+1)} g_l \right] IK_b \right\} \text{ для } I = l - \frac{1}{2}; \quad (2.44b)$$

$$K_a \equiv \int_0^\infty R_{nl}^2(R) R^2 dR \int_R^\infty f(r) g(r) dr; \quad (2.45a)$$

$$K_b \equiv \int_0^\infty R_{nl}^2(R) R^{-1} dR \int_0^R f(r) g(r) r^3 dr. \quad (2.45b)$$

**Модель смешивания конфигураций.** Можно ввести поправки к одночастичной модели на смешивание конфигураций, если предположить, что кроме последнего, нечетного, нуклона вклад в ядерный магнетизм дает примешивание возбужденных состояний типа частица—дырка к основному состоянию системы.

В теории возмущений ожидаемое значение ядерного магнитного момента  $\mu$  определяется следующим выражением:

$$\langle \psi | \mu | \psi \rangle = \langle \psi_0 | \mu | \psi_0 \rangle + 2\text{Re} \sum_i \alpha_i \langle \psi_0 | \mu | \psi_i \rangle, \quad (2.46)$$

где

$$\alpha_i = \langle \psi_i | V | \psi_0 \rangle / (E_0 - E_i). \quad (2.47)$$

В соотношениях (2.46) и (2.47)  $|\psi\rangle$  является функцией основного состояния системы;  $|\psi_0\rangle$  — невозмущенное основное состояние с энергией  $E_0$ ;  $|\psi_i\rangle$  — возбужденное состояние частица—дырка с энергией  $E_i$ . Первый член в формуле (2.46) представляет собой ядерный магнитный момент в одночастичной модели, т. е. момент Шмидта. Если матричный элемент  $\langle \psi_0 | \mu | \psi_i \rangle$  значительно больше первого слагаемого в формуле (2.46), малая примесь возбужденных состояний к основному состоянию может дать заметный вклад в ядерный магнитный момент.

Аналогично можно вычислить поправку к сверхтонкой структуре, обусловленную возбужденными состояниями частица—дырка. Поправка примесных компонент с  $\Delta I = 0$

$$\begin{aligned} \delta A_I = & -\frac{2eK\mu_n}{J+1} \delta\mu_l \left[ \int_0^\infty R_{nIj}(R) R_{nIj'}(R) R^2 dR \int_R^\infty f g dr + \right. \\ & \left. + \frac{(1/4) g_s - g_l}{g_s - g_l} \int_0^\infty R_{nIj}(R) R_{nIj'}(R) R^{-1} dR \int_0^R f g r^3 dr, \right. \end{aligned} \quad (2.48)$$

где  $\delta\mu_l$  — поправка к ядерному магнитному моменту, связанная с примешиванием пар частица—дырка с орбитальным угловым моментом  $l$ .

**БКШ-м о д е л ь** (модель взаимодействия квазичастиц и модель с проектированием). В модели смешивания конфигураций возбужденные состояния частица—дырка за счет короткодействующего остаточного взаимодействия примешиваются к основному состоянию ядра. Это взаимодействие может быть учтено на более фундаментальной основе, например в рамках теории БКШ [34]. Хотя обычные силы спаривания не влияют на ядерный магнетизм, модель спаривания с учетом остаточного  $\delta$ -взаимодействия дает поправки, аналогичные поправкам, рассчитанным в модели смешивания конфигураций [17]. Взаимодействие, которое описывается  $\delta$ -функцией, относится к взаимодействию между квазичастицами.

В модели с проектированием Фрида и Киссленгера [201] компонента волновой функции метода БКШ проектируется на пространство функций с сохраняющимся числом частиц. Затем спроектированные функции используются в расчетах по теории возмущений с  $\delta$ -взаимодействием. Эффект сил спаривания между нейтроном и протоном мал по сравнению с эффектом взаимодействия между тождественными частицами, так как начиная с 28-й оболочки про-



тоны и нейтроны заполняют различные орбиты. Поэтому предполагается, что протонные и нейтронные части волновой функции получаются независимо: одна функция с четным числом частиц, другая — с нечетным ( $\psi_{\text{чет}}$  и  $\psi_{\text{нечет}}$  соответственно):

$$|\psi\rangle = |\psi_{\text{чет}}\rangle |\psi_{\text{нечет}}\rangle. \quad (2.49)$$

Волновая функция четной группы:

$$|\psi_{\text{чет}}\rangle = \sum_{n_1+n_2+\dots=n_e} a_{n_1 n_2 \dots}^{(e)} |j_1^{n_1}(0) j_2^{n_2}(0)\rangle, \quad (2.50)$$

нечетной:

$$|\psi_{\text{нечет}}\rangle = \sum_{n_1+n_2+\dots+p=n_o} a_{n_1 n_2 \dots p}^{(o)} |j_1^{n_1}(0) j_2^{n_2}(0) \dots j^p(j) jm\rangle, \quad (2.51)$$

где  $n_i$  — число частиц в  $i$ -м состоянии;  $p$  — число частиц в состоянии нечетного нуклона;  $n_e$  и  $n_o$  — полное число частиц в четной и нечетной группах. Амплитуды смешивания определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} |a_{n_1 n_2 \dots}^{(e)}|^2 &= [\sum |a^{(e)}|^2]^{-1} \prod_{\text{чет}} U_i^{2j_i+1-n_i} \times \\ &\times V_i^{n_i} \frac{\left(j_i + \frac{1}{2}\right)!}{\left(\frac{1}{2} n_i\right)! \left(j_i + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} n_i\right)!} \end{aligned} \quad (2.52a)$$

и

$$\begin{aligned} |a_{n_1 n_2 \dots p}^{(o)}|^2 &= [\sum |a^{(o)}|^2]^{-1} \prod_{\text{нечет } i \neq j} U_i^{2j_i+1-n_i} V_i^{n_i} U_j^{2j-p} V_j^{p-1} \times \\ &\times \frac{\left(j_i + \frac{1}{2}\right)!}{\left(\frac{1}{2} n_i\right)! \left(j_i + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} n_i\right)!} \cdot \frac{\left(j - \frac{1}{2}\right)!}{[(p-1)/2]! \left(j - \frac{1}{2} p\right)!} \end{aligned} \quad (2.52b)$$

(числа заполнения  $U$  и  $V$  обсуждаются на с. 69).

Ядерный магнитный момент

$$\mu = \mu_{sp} + \sum_{\text{чет}} |a_c^{(e)}|^2 \delta\mu_c^{(e)} + \sum_{\text{нечет}} |a_c^{(o)}|^2 \delta\mu_c^{(o)}, \quad (2.53)$$

где  $\mu_{sp}$  — одночастичный магнитный момент:

$$\mu_{sp} = I \left[ g_l \pm \frac{1}{2l+1} (g_s - g_l) \right]; \quad I = l \pm \frac{1}{2}. \quad (2.54)$$

В последнем соотношении  $g_l = 1$ ;  $g_s = 5,585$  для протонов и  $g_l = 0$ ;  $g_s = -3,826$  для нейтронов.

Второй и последний члены в формуле (2.53) описывают вклад в магнитный момент конфигураций четной и нечетной групп соответственно. В этой формуле учтен вклад только отдельных

конфигураций, перекрестные члены не учитывались; ожидается, что в большинстве случаев они малы.

Модель «спаривание + квадрупольное взаимодействие». Эта модель образуется из одночастичной модели оболочек, учитывающей спаривание с включением остаточного парного взаимодействия в виде длиннодействующих квадрупольных сил [47, 267]. Это взаимодействие приводит к рождению либо к аннигиляции фононов и рассеянию нечетной частицы. В результате диагонализации взаимодействия между квазичастицами и фононами волновая функция ядра выражается в виде линейной комбинации состояний одной квазичастицы и различного числа фононов (0, 1, 2):

$$|\psi_j\rangle = C_{j00}^j \alpha_j^+ |\psi_0\rangle + \sum_{j'} C_{j'12}^j (\alpha_{j'}^+ \Gamma_2^+) | \psi_0 \rangle + \\ + \sum_{j''} C_{j''2J}^j [\alpha_{j''}^+ (\Gamma_2^+ \Gamma_2^+)]_J | \psi_0 \rangle, \quad (2.55)$$

где  $C_{j'nJ}^j$  — амплитуда для квазичастицы, имеющей угловой момент  $j'$  и связанной с  $n$  фононами;  $J$  и  $j$  — суммарные моменты фононов и фонона и квазичастицы;  $\alpha_j^+$  — оператор рождения квазичастицы с угловым моментом  $j$ ;  $\Gamma_2^+$  — оператор рождения фонона с  $J = 2$ .

Когда вклад квазичастиц определен с учетом  $\delta$ -взаимодействия и учитываются длиннодействующие квадрупольные силы, приводящие к выражению для волновой функции (2.55), сверхтонкая структура определяется следующим выражением:

$$A(lj) = (C_{j00}^j)^2 A_{qp}(lj) + \sum_{j'} (C_{j'12}^j)^2 \left[ \frac{j'(j'+1) + j(j+1) - 6}{2j'(j+1)} A_{qp}(l'j') + \right. \\ \left. + \frac{j(j+1) + 6 - j'(j'+1)}{2(j+1)} A_{\text{фонон}} \right] + 2 \sum_{l'} C_{l'+\frac{1}{2}12}^j C_{l'-\frac{1}{2}12}^j (g_s - g_l) \times \\ \times (U_{l'+\frac{1}{2}} U_{l'-\frac{1}{2}} + V_{l'+\frac{1}{2}} V_{l'-\frac{1}{2}}) \times \\ \times \left( -\frac{2eK\mu_n}{J+1} \right) \left( K_a + \frac{\frac{1}{4} g_s - g_l}{g_s - g_l} K_b \right) (g_s - g_l) \times \\ \times \frac{\left[ \left( j + l' + \frac{7}{2} \right) \left( l' - j + \frac{5}{2} \right) \left( l' + j - \frac{3}{2} \right) \left( j - l' + \frac{5}{2} \right) \right]^{1/2}}{2(2l' + 1)(j + 1)} - \\ - \frac{3}{4} \sum_{\substack{\Delta l=0 \\ j_2=j_1+1}} C_{j_112}^j C_{j_212}^j (U_{j_1} U_{j_2} + V_{j_1} V_{j_2}) \left( -\frac{2eK\mu_n}{J+1} g_s K_b \right) \times \\ \times \frac{[(j + j_2 + 3)(j + j_2 - 2)(j_2 + 2 - j)(j + 3 - j_2)]^{1/2}}{j^2(j + 1)}, \quad (2.56)$$

где  $A_{qp}(lj)$  — одночастичный вклад, в котором учтено  $\delta$ -взаимодействие на основе модели проектирования;  $K_a$  и  $K_b$  — радиальные интегралы вида (2.45а), (2.45б), где вместо  $R_{ni}^2$  взято произведе-

Таблица 2.5

Постоянная магнитной сверхтонкой структуры (верхний ряд для каждого нуклида относится к мюону в  $s_{1/2}$ -состоянии, а нижний — к мюону в  $p_{1/2}$ -состоянии)

Нуклид и магнитный момент ядра	Постоянная сверхтонкой структуры, кэВ, рассчитанная						Экспериментальное значение постоянной сверхтонкой структуры	Литература
	в одночастичной модели	в модели точечного ядра	в модели смешивания конфигураций	в модели спаривания	в модели «спаривание + квадратное взаимодействие»			
					$gR = 0$	$gR = Z/A$		
${}^{93}_{41}\text{Nb}^{9+}$ $\mu = 6,1671$	1,63 0,365	2,32 0,426	1,48 0,332	1,48 0,331	1,48 0,331	1,55 0,347	—	—
${}^{113}_{49}\text{In}^{9+}$ $\mu = 5,5233$	1,91 0,556	2,61 0,637	1,58 0,457	1,58 0,456	1,58 0,456	1,67 0,481	—	—
${}^{115}_{49}\text{In}^{9+}$ $\mu = 5,5351$	1,91 0,555	2,60 0,637	1,58 0,457	1,58 0,457	1,57 0,457	1,66 0,481	1,65±0,15 0,55±0,20	[289]
${}^{121}_{51}\text{Sb}^{5+}$ $\mu = 3,359$	1,44 0,436	1,64 0,431	1,04 0,312	1,04 0,313	1,04 0,313	1,18 0,354	—	—
${}^{123}_{51}\text{Sb}^{7+}$ $\mu = 2,546$	0,847 0,226	1,23 0,326	1,07 0,297	1,07 0,297	1,05 0,293	1,17 0,327	—	—

Продолжение табл. 2.5

Нуклид и магнитный момент ядра	Постоянная сверхтонкой структуры, кЗВ, рассчитанная						Экспериментальное значение постоянной сверхтонкой структуры	Литература
	в одночастичной модели	в модели точечного ядра	в модели смешивания конфигураций	в модели спаривания	в модели «спаривание + квадратное взаимодействие»			
					$g_R = 0$	$g_R = Z/A$		
$^{127}_{53}\text{I } \frac{5}{2}^{+}$ $\mu = 2,8091$	1,47 0,476	1,40 0,399	0,940 0,296	0,930 0,294	0,918 0,291	1,11 0,352	$0,87 \pm 0,09$ $0,33 \pm 0,08$	[289]
$^{133}_{55}\text{Cs } \frac{7}{2}^{+}$ $\mu = 2,5789$	0,908 0,277	1,34 0,405	1,21 0,378	1,18 0,369	1,17 0,367	1,21 0,380	$1,16 \pm 0,17$ $0,55 \pm 0,22$	[289]
$^{139}_{57}\text{La } \frac{7}{2}^{+}$ $\mu = 2,7781$	0,944 0,304	1,50 0,481	1,29 0,429	1,30 0,431	1,30 0,431	1,30 0,432	$1,22 \pm 0,15$	[369]
$^{141}_{59}\text{Pr } \frac{5}{2}^{+}$ $\mu = 4,28$	1,61 0,598	2,41 0,811	1,47 0,541	1,47 0,544	1,47 0,544	1,48 0,544	$1,52 \pm 0,06$	[252]
$^{151}_{63}\text{Eu } \frac{5}{2}^{+}$ $\mu = 3,463$	1,67 0,680	2,04 0,772	1,23 0,499	1,24 0,503	1,23 0,498	1,43 0,583	$0,80 \pm 0,27$	[89, 363]
$^{151}_{63}\text{Eu } \frac{7}{2}^{+}$ $\mu = 2,56$	1,02 0,389	1,52 0,575	1,30 0,503	1,31 0,508	1,27 0,493	1,51 0,576	—	—

Продолжение табл. 2.5

Нуклид и магнитный момент ядра	Постоянная сверхтонкой структуры, кЭВ, рассчитанная в							Эксперименталь- ное значение	Литература
	одночастичной модели	модели точечного ядра	модели смешивания конфигураций	модели спаривания	модели «спаривание+ +квадратное взаимодействие»				
					$gR = 0$	$gR = Z/A$			
$^{203}_{81}\text{Tl } \frac{1}{2}^{+}$ $\mu = 1,61169$	1,16	1,19	0,768	0,774	0,770	0,777	0,665±0,075	[26]	
	0,613	0,631	0,407	0,410	0,408	0,412			
$^{203}_{81}\text{Tl } \frac{1}{2}^{+}$ $(\omega = 0,4)$	—	—	—	—	0,699	0,823	—	—	
					0,370	0,430			
$^{205}_{81}\text{Tl } \frac{1}{2}^{+}$ $\mu = 1,62754$	1,15	1,19	0,774	0,779	0,779	0,779	0,580±0,015	[89]	
	0,612	0,635	0,411	0,413	0,413	0,413			
$^{205}_{81}\text{Tl } \frac{1}{2}^{+}$ $(\omega = 0,4)$	—	—	—	—	0,710	0,824	—	—	
					0,377	0,437			
$^{209}_{83}\text{Bi } \frac{9}{2}^{-}$ $\mu = 4,0794$	1,64	3,04	2,06	—	—	—	1,92±0,14	[89]	
	0,893	1,67	1,12						

ние двух радиальных функций пары частица—дырка. Величины  $U$  и  $V$  используются в квазичастичном представлении, т. е.  $U_b^2$  характеризует незаполненность уровня  $b$ . Вклад фонона в сверхтонкую структуру ( $A_{\text{фонон}}$ ), определяется следующим выражением:

$$A_{\text{фонон}} = -\frac{2eK\mu_n}{J+1} g_R \left( \int_{R_0}^{\infty} f g dr + R_0^{-3} \int_0^{R_0} f g r^3 dr \right), \quad (2.57)$$

где  $g_R$  — гиромагнитное отношение для фонона.

**Р а с ч е т ы.** В табл. 2.5 приведены результаты расчетов сверхтонкой структуры мюонных атомов, проведенных в рамках различных моделей ядра. Параметры моделей подобраны таким образом, чтобы они правильно описывали экспериментальные значения моментов, приведенных в таблице под нуклидами. Результаты расчета в рамках всех моделей, за исключением одночастичной, подправлены с учетом  $\delta$ -взаимодействия. В модели «спаривание + + квадрупольное взаимодействие» рассмотрены два случая, отвечающие двум значениям гиромагнитного отношения для фонона: 0 и  $Z/A$ . Результаты расчета сравниваются с экспериментальными данными для  $^{115}\text{In}$ ,  $^{127}\text{I}$ ,  $^{133}\text{Cs}$ ,  $^{139}\text{La}$ ,  $^{141}\text{Pr}$ ,  $^{151}\text{Eu}$ ,  $^{203}\text{Tl}$ ,  $^{205}\text{Tl}$  и  $^{209}\text{Bi}$ . Для шести нуклидов из девяти наблюдается превосходное согласие теории с экспериментом.

### Аномальные отношения интенсивностей переходов

Если все мюонные уровни заселены в соответствии с их статистическим весом  $2j+1$ , отношения интенсивностей мультиплетов тонкой структуры должны быть следующими:

$$\begin{aligned} I(2p_{3/2} \rightarrow 1s_{1/2}) : I(2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}) &= 2 : 1; \\ I(3d_{5/2} \rightarrow 2p_{3/2}) : I(3d_{3/2} \rightarrow 2p_{3/2}) : I(3d_{3/2} \rightarrow 2p_{1/2}) &= 9 : 1 : 5; \\ I(4f_{7/2} \rightarrow 3d_{5/2}) : I(4f_{5/2} \rightarrow 3d_{5/2}) : I(4f_{5/2} \rightarrow 3d_{3/2}) &= 20 : 1 : 14. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Для неразрешенного дублета  $3d$  существуют только две линии и

$$I[(3d_{5/2} + 3d_{3/2}) \rightarrow 2p_{3/2}] : I(3d_{3/2} \rightarrow 2p_{1/2}) = 2 : 1. \quad (2.59)$$

Аналогично для неразрешенного дублета  $4f$

$$I[(4f_{7/2} + 4f_{5/2}) \rightarrow 3d_{5/2}] : I(4f_{5/2} \rightarrow 3d_{3/2}) = 3 : 2. \quad (2.60)$$

В табл. 2.6 и 2.7 приведены отношения интенсивностей переходов, полученные группой ЦЕРНа и другими группами. Теоретические значения, приведенные в таблицах, несколько меньше значений, найденных из выражений (2.58) и (2.59). Это расхождение объясняется зависимостью скорости перехода от  $\Delta E^3$  и учетом конечных размеров ядра при нахождении матричных элементов  $E1$ -переходов. Для семи элементов, приведенных в табл. 2.6, отношения согласуются с теорией. Для остальных трех элементов

Таблица 2.6

**Отношение интенсивностей мультиплетов тонкой структуры для ядер среднего атомного номера [4]**

Элемент	$\frac{I(2p_{3/2} \rightarrow 1s_{1/2})}{I(2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2})}$		$\frac{I[(3d_{5/2} + 3d_{3/2}) \rightarrow 2p_{3/2}]}{I(3d_{3/2} \rightarrow 2p_{1/2})}$	
	Эксперимент	Теория	Эксперимент	Теория
$_{50}\text{Sn}$	$1,83 \pm 0,11$	1,953	$1,73 \pm 0,15$	1,953
$_{51}\text{Sb}$	$1,90 \pm 0,10$	1,952	$2,57 \pm 0,30$	1,952
$_{52}\text{Te}$	$1,95 \pm 0,13$	1,954	$1,86 \pm 0,20$	1,954
$_{53}\text{I}$	$1,06 \pm 0,08$	1,952	$3,00 \pm 0,50$	1,952
$_{55}\text{Cs}$	$1,68 \pm 0,11$	1,951	$2,08 \pm 0,30$	1,951
$_{56}\text{Ba}$	$2,05 \pm 0,23$	1,952	$1,74 \pm 0,50$	1,952
$_{57}\text{La}$	$1,95 \pm 0,10$	1,951	$2,00 \pm 0,25$	1,951
$_{58}\text{Ce}$	$1,84 \pm 0,12$	1,950	$2,10 \pm 0,50$	1,950
$_{59}\text{Pr}$	$1,81 \pm 0,14$	1,950	$2,56 \pm 0,40$	1,950
$_{60}\text{Nd}$	$1,59 \pm 0,08$	1,949	$1,71 \pm 0,20$	1,949

Таблица 2.7

**Отношение интенсивностей мультиплетов тонкой структуры для тяжелых ядер [395]**

Элемент	$\frac{I(2p_{3/2} \rightarrow 1s_{1/2})}{I(2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2})}$		$\frac{I(3d_{5/2} \rightarrow 2p_{3/2})}{I(3d_{3/2} \rightarrow 2p_{1/2})}$		Литература
	Эксперимент	Теория	Эксперимент	Теория	
$_{79}\text{Au}$	$1,50 \pm 0,10$	1,926	$1,40 \pm 0,14$	1,752	[4]
$_{80}\text{Hg}$	$1,29 \pm 0,06$	1,925	$1,75 \pm 0,15$	1,751	[4]
$_{81}\text{Tl}$	$1,09 \pm 0,10$	1,923	$1,39 \pm 0,20$	1,750	[4]
$_{206}\text{Pb}$	$1,68 \pm 0,08$	—	—	—	[4]
	$1,45 \pm 0,10$	1,922	$1,57 \pm 0,15$	1,749	[4]
	$2,00 \pm 0,30$	—	—	—	[12]
$_{82}\text{Pb}$	$1,73 \pm 0,15$	—	—	—	[152]
	$1,50 \pm 0,15^*$	1,922	$1,57 \pm 0,20$	1,749	[4]
	$1,80 \pm 0,30^*$	—	—	—	[12]
$_{83}\text{Bi}$	$1,38 \pm 0,10$	1,920	$1,50 \pm 0,10$	1,748	[36]
	$1,31 \pm 0,20$	1,920	$1,44 \pm 0,20$	1,748	[4]
	$1,42 \pm 0,10$	1,920	$1,74 \pm 0,15$	1,748	[152]

\* Результаты, полученные в экспериментах для естественной смеси изотопов.

(I, Cs и Nb) наблюдается заметное различие теоретических и экспериментальных значений, особенно для иода. Приведенные в табл. 2.7 результаты измерений свидетельствуют об отклонении отношений интенсивностей переходов  $3d \rightarrow 2p$  и  $2p \rightarrow 1s$  от значений, определяемых статистической моделью. В случае Bi эти отклонения были подтверждены другими экспериментальными работами; для Pb в Чикаго не обнаружены значительные отклонения. Причина отклонений в настоящее время неизвестна. Возможно, они вызваны конкурирующими процессами, например E1-связью с неизвестными уровнями ядра.

## § 2.2. ИЗУЧЕНИЕ СТРУКТУРЫ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ЯДЕР С ПОМОЩЬЮ МЮОННЫХ АТОМОВ

В обычных атомах приходится рассматривать только диагональные матричные элементы  $E2$ -взаимодействия, которые оставляют ядро в основном состоянии. Уилетс [388] и Джекобсон [246] обратили внимание на то, что для мюонных атомов с деформированными ядрами сверхтонкое расщепление, обусловленное  $E2$ -взаимодействием, сравнимо с энергиями возбуждения ядра и обычное статическое описание не применимо. Этот новый эффект известен как динамический  $E2$ -эффект.

### Квадрупольная сверхтонкая структура мюонных атомов с деформированными ядрами

Полный гамильтониан мюонного атома с квадрупольным взаимодействием, приводящим к сверхтонкой структуре, имеет следующий вид:

$$H = H_n + H_\mu + H_Q = H_0 + H_Q, \quad (2.61)$$

где  $H_n$  — гамильтониан ядра;  $H_\mu$  — гамильтониан мюона, находящегося в монополярном потенциале ядра, т. е. в электростатическом потенциале, усредненном по всем углам;  $H_Q$  — квадрупольное взаимодействие.

Выберем в качестве модели ядра жесткий деформированный ротор, симметричный относительно некоторой оси. Состояния ядра в этой модели можно задать квантовыми числами  $I$ ,  $M$  и  $K$ , т. е. полным угловым моментом ядра, его проекцией на ось  $z$  и проекцией на ось симметрии ядра. Согласно коллективной модели Бора и Моттельсона, нормированные собственные функции  $H_N$  для четных ядер определяются следующим выражением:

$$|IMK\rangle = \left[ \frac{2I+1}{16\pi^2(1+\delta_{K,0})} \right]^{1/2} \{D_{M,K}^I + (-1)^I D_{M,-K}^I\}, \quad (2.62)$$

тогда как для нечетных ядер

$$|IMK\rangle = \left[ \frac{2I+1}{16\pi^2} \right]^{1/2} \{D_{M,K}^I \chi_K + (-1)^{I-\frac{1}{2}-I_n} D_{M,-K}^I \chi_{-K}\}, \quad (2.63)$$

где

$$\chi_K = \sum_{I_n} C_{j_n}(I_n)_\Omega \chi_{j_n\Omega} \delta_{\Omega K}. \quad (2.64)$$

В выражении (2.64) буквой  $\Omega$  обозначена величина  $j_z$ , являющаяся интегралом движения, поскольку потенциал предполагается аксиально-симметричным и гамильтониан  $H_n$  не зависит от ази-



мутальных углов. Детальное рассмотрение собственных функций коллективной модели читатель найдет в работах Бора и Моттelsona, Престона и Давидсона [70, 126, 324]. Относительное расположение уровней энергии определяется известным выражением

$$\Delta E_I = \frac{\hbar^2}{2J} [I(I+1) - K(K+1)]. \quad (2.65)$$

Волновая функция мюона удовлетворяет уравнению Дирака, которое содержит сферически-симметричную часть потенциала, и может быть обозначена как  $|jknm'\rangle$ . Взаимодействие, обусловленное квадрупольной связью, можно представить в виде

$$H_Q = -(1/2) Q_0 e^2 f(r) P_2(\cos \theta), \quad (2.66)$$

где  $\theta$  — угол между радиусом-вектором мезона и осью симметрии ядра. В общем случае функция радиальной координаты мезона  $r$  определяется выражением

$$eQ_0 f(r) = 2 \sqrt{\frac{4}{5}\pi} \left[ \frac{1}{r^3} \int_0^r \rho(r') r'^2 Y_{20}(r') d\tau' + r^2 \int_r^\infty \rho(r') \frac{1}{r'^3} Y_{20}(r') d\tau' \right], \quad (2.67)$$

где координата  $r'$  относится к ядру и  $\rho(r')$  — плотность заряда ядра. Выражение (2.67) получается решением уравнения Пуассона. На больших расстояниях  $f(r) \rightarrow r^{-3}$ , вблизи ядра вид  $f(r)$  зависит от распределения заряда ядра  $\rho(r)$ . В случае поверхностного квадрупольного распределения

$$f(r) = \begin{cases} 1/r^3 & \text{при } r > R_0; \\ r^2/R_0^5 & \text{при } r < R_0, \end{cases} \quad (2.68)$$

где  $R_0$  — эквивалентный радиус ядра.

Найдем вид  $f(r)$  в случае однородно заряженного эллипсоидального ядра. Поверхность такого ядра описывается следующим выражением:

$$R = R_0 (1 + \beta Y_{20}(\theta)), \quad (2.69)$$

где  $\beta$  — параметр деформации, положительный в случае вытянутого ядра и отрицательный в случае сплюснутого ядра. Угол определен в системе координат, связанной с ядром. Внутренний квадрупольный момент ядра  $Q_0$  определяется выражением

$$Q_0 = 2 \sqrt{\frac{4}{5}\pi} \int \rho(r) r^2 Y_{20}(\theta, \varphi) d\tau. \quad (2.70)$$

Во втором порядке по  $\beta$

$$\begin{aligned} eQ_0 &= 2 \sqrt{\frac{4}{5}} \pi \int_0^\infty \rho(r') r'^2 Y_{20}(r') d\tau' = \\ &= \frac{3e}{\sqrt{5\pi}} Z R_0^2 \beta \left( 1 + \frac{2}{7} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta \right). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Вне ядра, когда

$$r > R_{\text{макс}} = \begin{cases} R_0 \left( 1 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \right) & \text{при } \beta > 0; \\ R_0 \left( 1 - \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \beta \right) & \text{при } \beta < 0, \end{cases} \quad (2.72)$$

из (2.67) имеем

$$f(r) = 1/r^3. \quad (2.73)$$

Внутри ядра, когда

$$r < R_{\text{мин}} = \begin{cases} R_0 \left( 1 - \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \beta \right) & \text{при } \beta > 0; \\ R_0 \left( 1 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \right) & \text{при } \beta < 0, \end{cases} \quad (2.74)$$

получаем

$$f(r) = \frac{r^2}{R_0^5} \frac{1 - \frac{1}{14} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta}{1 + \frac{2}{7} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta}. \quad (2.75)$$

Можно найти  $f(r)$  также в остальном пространстве  $R_{\text{мин}} < r < R_{\text{макс}}$ , если предположить однородное распределение заряда в ядре. Однако точное вычисление не имеет смысла, так как  $f(r)$  в этой области сильно зависит от распределения заряда на поверхности ядра [4]. Внутренний квадрупольный момент  $Q_0$  связан с наблюдаемым в спектроскопических измерениях квадрупольным моментом  $Q$  следующим соотношением:

$$Q = \frac{3K^2 - I(I+1)}{(I+1)(2I+3)} Q_0. \quad (2.76)$$

Центробежные эффекты приводят к увеличению квадрупольного момента в возбужденном вращательном состоянии, которое можно оценить, если воспользоваться соотношением [176, 177]:

$$\frac{\Delta Q_0}{Q_0} = \frac{12E_I^2}{E_0^2 [I(I+1)]}, \quad (2.77)$$

где  $\Delta Q_0$  — увеличение квадрупольного момента;  $E_I$  — энергия вращательных состояний с полным угловым моментом  $I$ ;  $E_0$  — энергия первого колебательного состояния  $0^+$ .

В табл. 2.8 приведены величины  $\Delta Q_0/Q_0$ , найденные по формуле (2.77). Поскольку максимальное увеличение  $Q_0$  не больше неопределенности в самой величине  $Q_0$ , в дальнейшем будем использовать только модель жесткого деформированного ядра.

Т а б л и ц а 2.8

Увеличение квадрупольного момента возбужденных вращательных состояний  $^{238}\text{U}$  и  $^{232}\text{Th}$  за счет центробежного растяжения ядра

Элемент	$E_0$ , кэВ		$E_I$ , кэВ	$\Delta Q_0/Q_0$ , %
$^{238}\text{U}$	$I=2$	994	44,7	0,4
	$I=4$	994	147	1,3
$^{232}\text{U}$	$I=2$	725	50	0,95
	$I=4$	725	164	3,1

### Распределение заряда ядра

В первых теоретических работах, посвященных динамическому E2-эффекту в мюонных атомах с деформированными ядрами, Уилетс [388] и Джекобсон [246] не касались деталей распределения заряда. В этом разделе параграфа будет рассмотрено влияние распределения заряда деформированных ядер на сверхтонкую структуру спектров мюонных атомов. Будем предполагать одинаковое распределение заряда как для основного, так и для возбужденных состояний ядер. Это предположение справедливо для сильно деформированных ядер, где центробежное растяжение и связь вращений с колебаниями слабы. Сферически-симметричная часть распределения заряда ядра определяет gross-структуру и тонкую структуру спектра, тогда как несферическая часть отвечает за сверхтонкую структуру. Разложение по мультиполям позволяет разделить  $\rho(r)$  на две части:

$$\rho(r) = \rho_0(r) + \sum_{lm} \rho_{lm}(r) Y_{lm}(\theta\varphi), \quad (2.78)$$

где

$$\rho_0(r) = (1/4\pi) \int \rho(r) d\Omega \quad (2.79)$$

и

$$\rho_{lm}(r) = \int \rho(r) Y_{lm}^*(\theta\varphi) d\Omega. \quad (2.80)$$

В случае аксиальной симметрии в разложении (2.78) остается квадрупольный член

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0(r) + Y_{20} \rho_2(r) \quad (\rho_2 \equiv \rho_{20}). \quad (2.81)$$

Из выражений (2.70) и (2.81) находим

$$Q_0 = 2 \sqrt{\frac{4}{5}} \pi \int_0^\infty \rho_2(r) r^4 dr. \quad (2.82)$$

Используя определенную модель для  $\rho(r)$  и соотношения (2.79), (2.80), можно вычислить  $\rho_0(r)$  и  $\rho_2(r)$ . В ряде случаев можно сразу предположить определенное распределение  $\rho_0(r)$  и  $\rho_2(r)$ .

**Модели плотности заряда  $\rho(\mathbf{r})$ .**  
Однородное распределение заряда эллипсоидального ядра можно представить в виде

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) &= \rho_0 \quad \text{при } r < R; \\ \rho(\mathbf{r}) &= 0 \quad \text{при } r > R, \end{aligned} \quad (2.83)$$

где

$$R = R_0 (1 + \beta Y_{20}(\theta)). \quad (2.84)$$

Расчеты, проведенные на основе этой простой модели, не согласуются с экспериментальными данными; толщина поверхностного слоя  $t$  (от 90%  $\rho_0$  до 10%  $\rho_0$ ) монопольного распределения  $\rho_0(r)$   $^{238}\text{U}$ , согласно этой модели, составляет 1,4 Ферми ( $R_0 = 7,43$  Ферми,  $\beta = 0,25$ ). Это значительно меньше значения  $t = 2,7$  Ферми, полученного из анализа спектров рентгеновского излучения мюонных атомов [2]. Преимущество модели ядра с размытым краем очевидно.

Рассмотрим обобщение распределения Ферми на деформированное ядро:

$$\rho(\mathbf{r}, c, t) = \rho_0 \left[ 1 + \exp \left( 4 \ln 3 \frac{r - c (1 + \beta Y_{20})}{t (1 + \beta \gamma Y_{20})} \right) \right]^{-1}. \quad (2.85)$$

Угловую зависимость этого модифицированного распределения Ферми характеризует не только радиус  $c$ , но и толщина поверхностного слоя  $t$ . Из двух дополнительных параметров  $\beta$  и  $\gamma$ , определяющих деформацию,  $\beta$  связан главным образом с квадрупольным моментом, тогда как параметр формы  $\gamma$  характеризует распределение квадрупольного заряда. На рис. 2.3 показаны линии равной плотности заряда:  $0,9\rho_0(0)$ ;  $0,5\rho_0(0)$  и  $0,1\rho_0(0)$  для  $\gamma = 0$  (модифицированное по  $c$  распределение) и  $\gamma = 4$ . При этом квадрупольный момент  $Q_0$  и распределение монопольного заряда  $\rho_0(r)$  предполагались неизменными. При  $\gamma = 2c/t$  овал становится сфе-

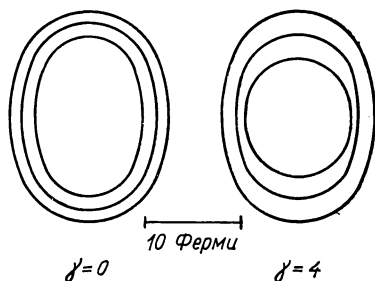


Рис. 2.3. Линии постоянной плотности заряда  $\rho = 0,9 \rho(0)$  [внутри],  $0,5 \rho(0)$ ,  $0,1 \rho(0)$  для  $^{238}\text{U}$  [5].

рическим. Этот случай иногда называют распределением с жестким остовом.

При анализе экспериментальных данных по рассеянию электронов обычно модифицируют распределение Ферми с помощью замены  $r$  на  $r(1 - \beta Y_{20})$  или на  $r/(1 + \beta Y_{20})$ :

$$\rho(r) = \rho_0 \left\{ 1 + \exp \left[ 4 \ln 3 \frac{r(1 - \beta Y_{20}(\theta)) - c}{t} \right] \right\}^{-1}. \quad (2.86)$$

Распределение (2.86) отвечает случаю  $\gamma = 1$  в выражении (2.85). Эту модель иногда называют моделью деформированного распределения плотности заряда. Как будет показано на примере, приведенном ниже, исследование сверхтонкой структуры мюонных атомов позволяет определить параметр формы  $\gamma$ .

В табл. 2.9 приведены значения радиальных матричных элементов для состояний  $2p$  и  $3d$  мюонного атома  $^{238}\text{U}$ , полученные с помощью численного решения уравнения Дирака в предположении, что распределение заряда ядра описывается соотношением (2.67) с параметром  $\gamma$ , равным 0 и  $2c/t$  (жесткий остов). Для сравнения в последней колонке приведены результаты расчета, выполненного в нерелятивистском приближении. Значения параметров  $c$ ,  $t$  и  $\beta$  выбраны из условия, чтобы оба распределения давали одно и то же монопольное распределение  $\rho_0(r)$  и один и тот же квадрупольный момент  $Q_0$ . Для этого монопольное распределение  $\rho_0(r)$  аппроксимировалось распределением Ферми с  $c = 6,94$  Ферми и  $t = 2,7$  Ферми. Используя известные из эксперимента величины [2]

$$e^2 Q_0 \langle \Psi'_{2p} | f(r) | \Psi_{2p} \rangle = 0,959 \text{ МэВ}$$

и  $Q_0 = 11 \text{ б}$ , получаем

$$\langle \Psi'_{2p} | f(r) | \Psi_{2p} \rangle = 6,06 \cdot 10^{-4} \text{ Ферми}^{-3}.$$

Таблица 2.9

Радиальные матричные элементы для  $2p$ - и  $3d$ -состояний,  
 $10^{-4} \text{ Ферми}^{-3}$  [3]

Матричный элемент	Значения матричных элементов		
	для $\gamma = 0^*$	для $\gamma = 2c/t^{**}$	для нерелятивистского приближения
$\langle 2 p_{1/2}   f(r)   2 p_{3/2} \rangle$	6,04	5,07	5,42
$\langle 2 p_{3/2}   f(r)   2 p_{3/2} \rangle$	6,10	5,14	5,42
$\langle 3 d_{3/2}   f(r)   3 d_{3/2} \rangle$	1,32	1,25	1,07
$\langle 3 d_{3/2}   f(r)   3 d_{5/2} \rangle$	1,15	1,10	1,07
$\langle 3 d_{5/2}   f(r)   3 d_{5/2} \rangle$	1,13	1,09	1,07

\*  $c = 6,971$  Ферми;  $t = 2,251$  Ферми;  $\beta = 0,282$ ;  $Q_0 = 11,0 \text{ б}$ .

\*\*  $c = 7,031$  Ферми;  $t = 2,551$  Ферми;  $\beta = 0,181$ ;  $Q_0 = 11,0 \text{ б}$ .

Это значение, как видно из табл. 2.9, лучше удовлетворяется при  $\gamma = 0$ , чем при  $\gamma = 2c/t$ . Разлагая распределение (2.85) в ряд по  $\beta$  и оставляя члены до второго порядка включительно, получаем следующее выражение для монопольного и квадрупольного распределений:

$$\rho_0(r) = N \left[ \rho + \frac{\beta^2}{8\pi} (c(1-\gamma) + \gamma r)^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + 2\gamma (c(1-\gamma) + \gamma r) \frac{\partial \rho}{\partial r} \right]; \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} \rho_2(r) = N\beta (c(1-\gamma) + \gamma r) \times \\ \times \left[ -\frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\beta}{7} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (c(1-\gamma) + \gamma r) \frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + 2\gamma \frac{\partial \rho}{\partial r} \right], \end{aligned} \quad (2.88)$$

где  $\rho$  — распределение Ферми;  $N$  — нормировочный фактор следующего вида:

$$\begin{aligned} N = \frac{3Ze}{4\pi c^3} \left[ 1 + \frac{3}{4\pi} \beta^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{\pi t}{4,4c} \right)^2 \left( 1 + \frac{\beta^2}{4\pi} \gamma(\gamma+1) \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

На рис. 2.4 показаны монопольное и квадрупольное распределения заряда в ядре  $^{238}\text{U}$  для  $\gamma = 0$ .

Пренебрегая в выражении для квадрупольного момента членами более высокого порядка, чем  $(t/c)^2$ , имеем

$$\begin{aligned} Q = 4 \sqrt{\frac{\pi}{5}} N \beta c^5 \left\{ 1 + \left( \frac{\pi t}{4,4c} \right)^2 \left( 2 + \frac{4}{3} \gamma \right) + \right. \\ \left. + \frac{2}{7} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta \left( 1 + \left( \frac{\pi t}{4,4c} \right)^2 \left( 1 + 2\gamma + \frac{1}{3} \gamma^2 \right) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Часто монопольное распределение  $\rho_0(r)$  аппроксимируется распределением Ферми  $\rho(r, c', t')$ , в котором [223]

$$c' = \frac{1}{N} \int_0^\infty \rho_0(r) dr = C; \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned} t'^2 = -\frac{3 \cdot 4,4^2}{\pi^2} \frac{1}{N} \int_0^\infty (r - c') \rho'_0(r) dr = t^2 \left( 1 + \frac{\beta^2 \gamma^2}{4\pi} \right) + \\ + \frac{3 \cdot 4,4^2}{4\pi^3} \beta^2 c^2. \end{aligned} \quad (2.92)$$

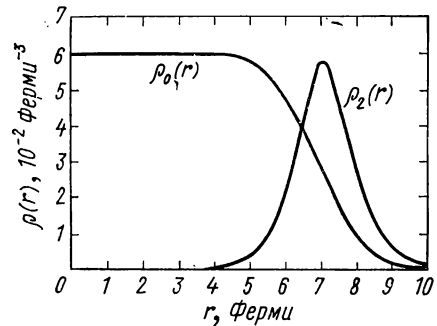


Рис. 2.4. Монопольное  $\rho_0(r)$  и квадрупольное  $\rho_2(r)$  распределения заряда для  $^{238}\text{U}$  [5]. Использовано модифицированное распределение заряда:  $\gamma=0$ ;  $c=c'=6,94$  Ферми;  $t'=2,7$  Ферми;  $t=2,34$  Ферми;  $\beta=0,284$ ;  $Q=11,6$ .

**Независимые модели для  $\rho_0(r)$  и  $\rho_2(r)$ .** Вместо того чтобы предполагать определенное распределение заряда  $\rho(r)$ , как это было сделано в предыдущем разделе параграфа, можно непосредственно выбрать, более или менее независимо, вид распределения  $\rho_0(r)$  и  $\rho_2(r)$ . Аккер [5], например, рассмотрел распределение Ферми для  $\rho_0(r)$  и распределение, отвечающее гауссовой форме, для  $\rho_2(r)$ :

$$\rho_2(r) = \frac{Q}{\pi} \sqrt{\frac{5}{4}} \left[ t_2 c_2^4 \left\{ 1 + \frac{3}{4} \left( \frac{t_2}{c_2} \right)^2 \right\} \right] \exp \left[ -\{2(r - c_2)/t_2\}^2 \right]. \quad (2.93)$$

Чтобы задать  $\rho_0(r)$  и  $\rho_2(r)$ , требуется пять параметров:  $c$ ,  $t$ ,  $Q$ ,  $c_2$  и  $t_2$ . Однако точность определения радиальных матричных элементов из эксперимента недостаточно высока и не позволяет выделить значения величин  $c_2$  и  $t_2$ . В действительности в экспериментах по рассеянию электронов часто полагают  $c_2 = c$  или  $c_2 = R_0 = 1,2 A^{1/3}$  Ферми и  $t_2 = t$ . Существует много способов введения третьего параметра при двух фиксированных параметрах распределения Ферми. Различные трехпараметрические распределения заряда в применении к мюонным атомам и рассеянию электронов рассмотрены в работах [206, 294] (см. также § 2.1).

### Квадрупольное расщепление энергетических уровней

Для вычисления энергетических уровней мюонных атомов рассмотрим связь коллективных вращательных состояний ядра  $|IKm\rangle$  и состояний мюона  $|jknm\rangle$  в базисном состоянии  $|Ik, jkn, FM\rangle$ , отвечающем полному спину  $F$ . Квадрупольное взаимодействие в этом базисе диагонализуется, необходимые при этом матричные элементы  $H_Q$  находятся обычной методикой тензорных операторов:

$$\begin{aligned} & \langle IK, jkn, FM | H_Q | I' K', j' k' n', F' M' \rangle = \\ & = (-1)^{j+j'+F+K+1/2} \delta_{FF'} \delta_{MM'} \frac{1}{2} e^2 Q_0 \langle kn | f(r) | k' n' \rangle \times \\ & \times [(2I+1)(2I'+1)(2j+1)(2j'+1)]^{1/2} \times \\ & \times \begin{Bmatrix} 2 & I & I' \\ F & j & j' \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} 2 & I & I' \\ 0 & -k & k' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j' & 2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.94)$$

где  $\{ \}$  —  $6j$ -символ, а  $( )$  —  $3j$ -символы.

Квадрупольное расщепление и смешивание базисных функций определяется произведением внутреннего квадрупольного момента  $Q_0$  и радиального матричного элемента

$$\langle kn | f(r) | k' n' \rangle = \int_0^\infty \{ F_{kn}(r) F_{k'n'}(r) + G_{kn}(r) G_{k'n'}(r) \} f(r) dr, \quad (2.95)$$

который зависит от несферической части распределения заряда ядра. Функции  $F_{kn}(r)$  и  $G_{kn}(r)$  описывают радиальные части норми-

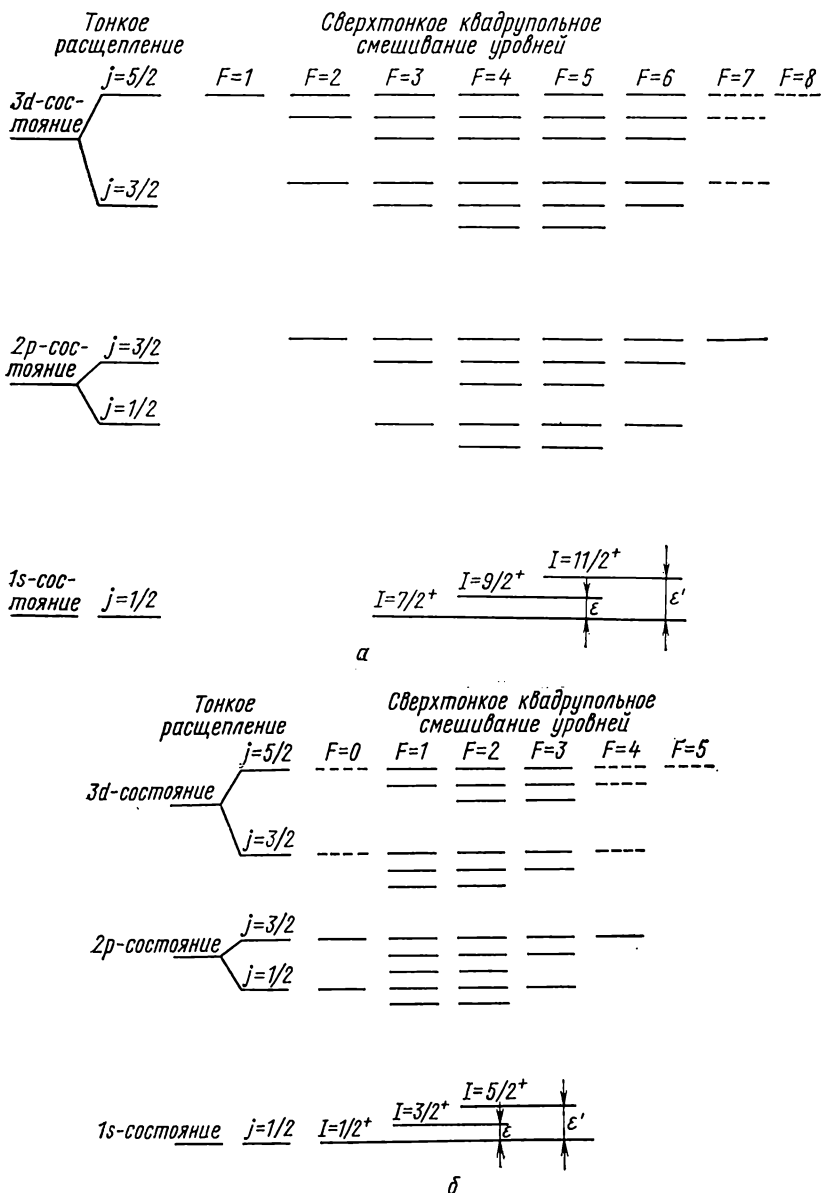


Рис. 2.5. Уровни энергии сверхтонкого квадрупольного расщепления для ядер со спинами  $7/2$  (а) и  $1/2$  (б) в  $3d$ - и  $2p$ -состояниях. Во взаимодействии с мюоном участвуют два первых возбужденных состояния ядра со спинами  $9/2$  и  $11/2$  (а) и  $3/2$  и  $5/2$  (б). Показаны также уровни тонкой структуры [329]:

----- — заселенные уровни; ---- — незаселенные уровни. Предполагается, что взаимодействие в состоянии  $4f$  отсутствует.



рованного решения уравнения Дирака. Уилетс [388] рассмотрел квадрупольное взаимодействие только в  $2p$ -состояниях. Чтобы получить согласие с современными экспериментальными данными, необходимо учесть также взаимодействие в  $3d$ -состояниях [1, 151]. Для полного определения спектра необходимы следующие пять параметров:

$$\left. \begin{aligned} Q_0 \langle 12 | f(r) | -22 \rangle; \\ Q_0 \langle -22 | f(r) | -22 \rangle; \\ Q_0 \langle 23 | f(r) | 23 \rangle; \\ Q_0 \langle 23 | f(r) | -33 \rangle; \\ Q_0 \langle -33 | f(r) | -33 \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (2.96)$$

Однако практически нам нужны только два параметра:  $Q_0 \times$  (матричные элементы в  $2p$ -состояниях) и  $Q_0 \times$  (матричные элементы в  $3d$ -состояниях).

Для нахождения уровней энергии и волновых функций мюонных атомов необходимо диагонализировать полный гамильтониан  $H = H_n + H_\mu + H_Q$ . В конкретных расчетах можно предположить, что эффект сверхтонкой структуры незначителен для  $n = 3$  и что  $3s - 3d$ -смешиванием можно пренебречь, так как матричные элементы связи  $\langle s | f(r) | d \rangle$  малы по сравнению с взаимодействием в  $3d$ -состояниях, а  $\langle d | f(r) | d \rangle$  и различие энергий  $3s$ - и  $3d$ -состояний велики по сравнению с  $3d$ -расщеплением.

В конкретных расчетах необходимо учитывать  $2p$ - и  $3d$ -дубли, каждый из которых связан с тремя самыми нижними вращательными состояниями (основным состоянием  $I$  и следующими двумя состояниями, например  $0^+$ ,  $2^+$ ,  $4^+$  в случае четно-четного ядра). Два примера уровней энергии для нечетных ядер даны на рис. 2.5, а, б. Предполагается, что  $2p$ -состояния не испытывают влияния  $3p$ -состояний, так как в энергии этих уровней существует большое различие. Близлежащее  $2s$ -состояние имеет противоположную четность. (Аналогичная ситуация возникает и для  $3d$ -состояний.) На рис. 2.5, а, б показаны все уровни, которые могут получиться при этих предположениях для случаев  $I = 7/2$  и  $I = 1/2$ .

На практике величины  $\langle I | H_n | I \rangle$  определяются по спектру ядра, тогда как  $\langle kn | H_\mu | kn \rangle$  находятся численным интегрированием уравнения Дирака в предположении некоторого распределения заряда ядра.

### Интенсивности спектральных линий

Интенсивности различных компонент сверхтонкой структуры  $L$ - и  $K$ -линий рентгеновского излучения мюонных атомов, как правило, рассчитываются в предположении, что полный каскад происходит исключительно за счет атомных  $E1$ -переходов, начиная с невозмущенных, статистически заполненных  $4f$ -состояний. Интенсив-

ность ядерных  $M1$ - или  $E2$ -переходов на несколько порядков меньше. Если спин является хорошим квантовым числом, получаем ограничение  $\Delta I = 0$ . Если  $I$  не является хорошим квантовым числом,  $E1$ -матричные элементы обращаются в нуль для компонент волновых функций с  $I_i \neq I_f$ . Обычно предполагается, что смешиванием, вызванным динамическим  $E2$ -взаимодействием, можно пренебречь для  $n > 3$ . Кроме того, предполагается, что среди состояний с  $n = 3$  только  $3d$ -состояния заслуживают рассмотрения, и все радиальные матричные элементы  $E1$ -переходов могут быть вычислены в нерелятивистском и длинноволновом приближениях. Иногда также пренебрегают энергетической зависимостью вероятностей  $E1$ -переходов.

В нерелятивистском приближении приведенный матричный элемент электрического дипольного перехода между двумя базисными состояниями  $|IK, jkn, FM\rangle$  определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} & \langle I' K', j' k' n', F' \| M(E1) \| IK, jkn, F \rangle = \\ & = (-1)^{F'+I+I} k^{-1/2} \delta_{II'} \delta_{kk'} \begin{Bmatrix} j & F & I \\ F & j' & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_k & j & \frac{1}{2} \\ j' & l_k & 1 \end{Bmatrix} \times \\ & \times [(2j+1)(2j'+1)(2F+1)(2l_k+1)]^{1/2} (n'l_k \| M(E1) \| nl_k). \quad (2.97) \end{aligned}$$

При вычислении отношений интенсивностей нет необходимости знать радиальные матричные элементы  $(n'l_k \| M(E1) \| nl_k)$ , поэтому в расчетах удобно использовать формулу (2.97). Поскольку не известны заселенности исходных  $4f$ -состояний, с которых начинается расчет, и возможны переходы из других состояний в  $3d$ - и  $2p$ -состояния, точный релятивистский расчет каскада не имеет смысла.

Т а б л и ц а 2.10

Параметры, использованные для расчета спектров,  
приведенных на рис. 2.6 [5]\*

Уровень мюона	Энергия мюона, МэВ	Уровень ядра	Энергия ядра, МэВ	Радиальные матричные элементы, $10^{-4}$ Ферми $^{-3}$		
				$k, n$	$k', n'$	$\langle kn   f(r)   k'n' \rangle$
$1s_{1/2}$	—12,1718	0+	0	12	—22	6,000
$2p_{1/2}$	—5,9382	2+	0,0447	—22	—22	6,060
$2p_{3/2}$	—5,7090	4+	0,148	23	23	1,300
$3d_{3/2}$	—2,7525	—	—	—23	—33	1,136
$3d_{5/2}$	—2,6866	—	—	—33	—33	1,120
$4f_{5/2}$	—1,5172	—	—	—	—	—
$4f_{7/2}$	—1,5026	—	—	—	—	—

\*  $Q_0 = 11$  б. Использовано распределение Ферми заряда ядра для  $C = 6,94$  Ферми и  $t = 2,7$  Ферми.

Экспериментальные данные дают величину  $\{Q_0 \langle k'n | f(r) | kn \rangle\}$ . Матричные элементы взаимодействия в  $3d$ -состояниях можно определить только из  $4f \rightarrow 3d$ -переходов, тогда как  $2p$ -матричные элементы лучше всего определяются из  $2p \rightarrow 1s$ -спектров, для которых  $3d$ -матричные элементы влияют только на интенсивность линий, но не влияют на разброс по энергии. Энергии вращательных состояний ядер и невозмущенных уровней мюона приведены в табл. 2.10.

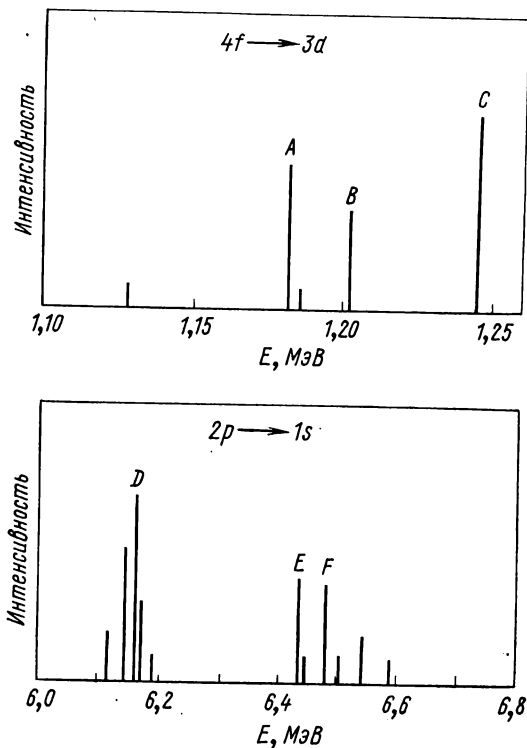


Рис. 2.6. Спектры переходов  $4f \rightarrow 3d$  и  $2p \rightarrow 1s$  для  $^{238}\text{U}$ . Энергии невозмущенных уровней и радиальные матричные элементы приведены в табл. 2.10 [5].

На рис. 2.6 приведены спектры переходов  $4f \rightarrow 3d$  и  $2p \rightarrow 1s$  для  $^{238}\text{U}$ , вычисленные с параметрами из табл. 2.10. Из расчетов следует, что неточность 1 кэВ при измерении расщепления по энергии  $A - B$  и  $A - C$  (см. рис. 2.6) приводит к погрешности 5% в значениях  $3d$ -матричных элементов, тогда как неточность 1 кэВ при измерении расщепления  $D$  и  $E$  приводит к погрешности 0,5% в значениях  $2p$ -матричных элементов.

В проведенном рассмотрении предполагалось, что заполнение  $4f$ -уровней носит статистический характер. Однако результаты,

полученные на основе этого предположения, не согласуются с наблюдаемыми значениями относительных интенсивностей линий. Согласие значительно улучшается, если учесть другие состояния ядра и мюона дополнительно к состояниям, определенным в модельном пространстве (см. с. 90). Пример такого расчета дан в табл. 2.11.

Таблица 2.11

Относительные интенсивности  $K$ - и  $L$ -линий  
рентгеновского спектра  $^{182}\text{W}$  [101]

Эксперимент		Расчет		
Энергия, МэВ	Интенсивность	Энергия, МэВ	Интенсивность	
			с поправкой	без поправки
5,19613	0,169	5,19633	0,176	0,186
5,22796	0,310	5,22763	0,314	0,322
5,29586	0,076	5,29640	0,082	0,084
5,31970	0,160	5,31951	0,144	0,143
5,41934	0,285	5,41958	0,283	0,265
2,05036	0,419	2,05031	0,404	0,388
2,17357	0,240	2,17350	0,233	0,248
2,21369	0,341	2,21368	0,362	0,363

### Взаимодействия высших мультипольностей

Хотя мы интересовались главным образом квадрупольным взаимодействием, существуют мультипольные взаимодействия более высоких порядков. Гамильтониан взаимодействия следующего по порядку мультиполя можно представить в виде

$$H_4 = -\frac{1}{2} e^2 Q_4 P_4(\cos \theta) f_4(r), \quad (2.98)$$

где

$$eQ_4 = 2 \sqrt{\frac{4\pi}{9}} \int Y_{40}(r) r^4 \rho(r) dr \quad (2.99)$$

и

$$f_4(r) = \frac{2}{eQ_4} \sqrt{\frac{4\pi}{9}} \left\{ r^4 \int_r^\infty \rho(r') Y_{40}(r') \frac{1}{r'^5} dr' + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^5} \int_0^r \rho(r') Y_{40}(r') r'^4 dr' \right\}. \quad (2.100)$$

Деформацию  $Y_{40}$  и, следовательно, четвертый момент ядра можно получить, изучая тонкую структуру  $\alpha$ -распада деформированного ядра [235]. Матричные элементы оператора  $H_4$  с базисными

функциями  $|IK, jkn, FM\rangle$  можно вычислить по формуле, аналогичной формуле (2.94), используя очевидную замену:

$$\begin{aligned} & \langle IK, jkn, FM | H_4 | I' K', j' k' n', F' M' \rangle = \\ & = (-1)^{j+j'+F+K+1/2} \delta_{FF'} \delta_{MM'} \frac{1}{2} e^2 Q_4 \langle kn | f_4(r) | k' n' \rangle \times \\ & \times [(2I+1)(2I'+1)(2j+1)(2j'+1)]^{1/2} \times \\ & \times \begin{Bmatrix} 4 & I & I' \\ F & j & j \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} 4 & I & I' \\ 0 & -K & K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j' & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Чтобы оценить эффект взаимодействия  $2^4$ -мультипольности, можно аппроксимировать  $f_4(r)$  следующим образом:

$$f_4(r) = r^4/R_0^9 \text{ при } r < R_0; \quad (2.102)$$

$$f_4(r) = 1/r^5 \text{ при } r > R_0, \quad (2.103)$$

где  $R_0$  — эквивалентный радиус ядра.

Исследование угловых моментов показывает, что  $H_4$  влияет только на уровень  $3d$  и это влияние можно рассчитать, оценивая  $Q_4$ . Однако таким образом нельзя определить  $H_4$  из эксперимента, так как наблюдаемый эффект от влияния  $H_4 + H_Q$  можно воспроизвести одним оператором  $H_Q$ , если немного изменить его параметры.

### Измерение и анализ мюонных рентгеновских спектров в случае деформированных ядер

В ранних экспериментах для исследования рентгеновских спектров мюонных атомов с деформированными ядрами использовались в основном кристаллы NaI. Поэтому сверхтонкая структура спектров проявлялась в виде уширения линий тонкой структуры. Для ряда элементов такие эксперименты были выполнены с Ge (Li)-детекторами [2, 12, 36]. Несколько лет назад Де Уит с сотр. [141, 142] провели измерения рентгеновских спектров девяти мюонных атомов в интервале от  $Z = 62$  до  $Z = 77$  и пяти мюонных атомов в интервале от  $Z = 90$  до  $Z = 94$ .

Теоретический подход к описанию спектров, рассмотренный в предыдущем разделе параграфа, содержит три «подгоночных» параметра:  $c$ ,  $t$  и  $\beta$  (или лучше  $Q_0$ ). В табл. 2.12 приведены параметры, дающие наилучшее согласие с экспериментом в предположении, что распределение заряда отвечает модели деформированного ядра (2.86). На основе известных малых квадрупольных моментов ядер  $^{147}\text{Sm}$ ,  $^{148}\text{Sm}$  и  $^{149}\text{Sm}$  предполагалось, что эти ядра имеют сферическую форму. Колебательная структура состояний ядра  $^{150}\text{Sm}$  и его малое процентное содержание в естественной смеси позволили предположить, что это ядро также имеет сферическую форму. Для некоторых ядер из числа приведенных в табл. 2.12 наблюдались переходы  $4f \rightarrow 3d$  и  $5g \rightarrow 4f$ .

Таблица 2.12

Радиальный параметр  $c$ , параметр поверхностного слоя  $t$ , внутренний квадрупольный момент  $Q_0$ , параметр деформации  $\beta$  и плотность нуклонов в центре  $\rho_N$  для модели деформированного ядра из исследования мюонного рентгеновского излучения [141]

Элемент	Z	A	Содержание изотопа, %	Параметры, полученные из мюонных рентгеновских спектров					
				$c$ , Ферми	$t$ , Ферми	$Q_0$ , б	$\beta$	$\rho_N$ , Ферми <sup>-3</sup>	
Sm	62	147	15,0	5,99	2,20	*	—	0,153* <sup>2</sup>	
		148	11,2	6,00	2,20	*	—	0,153* <sup>2</sup>	
		149	13,8	6,02	2,20	*	—	0,153* <sup>2</sup>	
		150	7,4	6,03	2,20	*	—	0,153* <sup>2</sup>	
		152	26,8	6,06	1,50	7,0	0,30	0,151* <sup>2</sup>	
Eu	63	154	22,7	6,08	1,50	7,6	0,32	0,150* <sup>2</sup>	
		151	47,8	6,08	2,03	5,0	0,14	0,151* <sup>2</sup>	
		153	52,2	6,10	2,03	5,0	0,22	0,149* <sup>2</sup>	
		159	100	6,20±0,10	1,50±0,40	7,6±0,4	0,30±0,01	0,147±0,005* <sup>2</sup>	
Ho	67	165	100	6,27±0,10	1,50±0,40	7,9±0,5	0,30±0,01	0,148±0,005* <sup>2</sup>	
		177	18,4	6,43	1,50	8,0	0,28	0,149* <sup>2</sup>	
Hf	72	178	27,1	6,44	1,50	8,0	0,27	0,149* <sup>2</sup>	
		179	13,8	6,45	1,50	8,2	0,28	0,149* <sup>2</sup>	
		180	35,4	6,47	1,50	8,0	0,27	0,149* <sup>2</sup>	
		181	100	6,51±0,10	1,50±0,40	7,5±0,4	0,25±0,01	0,147±0,005* <sup>3</sup>	
		182	26,2	6,51	1,83	6,3	0,21	0,148* <sup>2</sup>	
Ta	73								
W	74								

Продолжение табл. 2.12

Элемент	Z	A	Содержание изотопа, %	Параметры, полученные из мюонных рентгеновских спектров					
				с, Ферми	t, Ферми	Q <sub>0</sub> , б	β	ρ <sub>N</sub> , Ферми <sup>-3</sup>	
Os	76	183	14,3	6,52	1,83	6,3	0,21	0,148* <sup>2</sup>	
		184	30,7	6,55	1,86	6,3	0,21	0,148* <sup>2</sup>	
		186	28,7	6,55	1,83	5,7	0,19	0,149* <sup>2</sup>	
		188	13,3	6,54	1,90	5,5	0,18	0,151* <sup>2</sup>	
		189	16,2	6,55	1,93	5,0	0,17	0,151* <sup>2</sup>	
		190	26,4	6,57	1,90	5,0	0,17	0,152* <sup>2</sup>	
		192	41,0	6,59	1,91	4,5	0,15	0,152* <sup>2</sup>	
Ir	77	191	38,5	6,58	2,01	4,0	0,13	0,152* <sup>2</sup>	
		193	61,5	6,60	2,04	3,75	0,12	0,152* <sup>2</sup>	
		232	100	7,10±0,04	1,49±0,14	9,8±0,3	0,23±0,01	0,147±0,003* <sup>3</sup>	
Th	90	232	100	7,11±0,10	1,50±0,50	10,3±0,3	0,24±0,02	0,147±0,004* <sup>3</sup>	
U	92	233	95	7,14±0,04	1,44±0,17	10,6±0,2	0,241±0,004	0,146±0,003* <sup>2</sup>	
U	92	235	92,7	7,15±0,03	1,46±0,12	11,25±0,15	0,253±0,003	0,147±0,003* <sup>3</sup>	
U	92	238	99,3	7,18±0,07	1,35±0,35	12,0±0,3	0,26±0,01	0,146±0,004* <sup>3</sup>	
Pu	94	239	96						

\* См. текст.

\*<sup>2</sup> Измерялись только спектры  $2p \rightarrow 1s$ .\*<sup>3</sup> Измерялись спектры  $2p \rightarrow 1s$  и  $3d \rightarrow 2p$ .

Таблица 2.13  
Набор параметров деформированного распределения Ферми, дающих наилучшее согласие с экспериментом [232]

Нуклид	$r_0$ , Ферми	$a$ , Ферми	$c$ , Ферми	$t$ , Ферми	$\beta$	$\beta$ (однородное)	$Q_0$ , б	$Q_0$ , м. б	$\chi^2/\text{число степеней свободы}$
$^{150}\text{Nd}_{60}$	1,105	0,533	$5,87 \pm 0,03$	$2,34 \pm 0,06$	0,278	0,279	$5,17 \pm 0,12$	5,15	35/14
$^{152}\text{Sm}_{62}$	1,106	0,538	$5,90 \pm 0,03$	$2,36 \pm 0,05$	0,296	0,304	$5,85 \pm 0,15$	5,78	31/14
$^{162}\text{Dy}_{66}$	1,102	0,547	$6,01 \pm 0,03$	$2,40 \pm 0,05$	0,338	0,334	$7,12 \pm 0,12$	7,36	25/14
$^{164}\text{Dy}_{66}$	1,116	0,499	$6,11 \pm 0,03$	$2,19 \pm 0,06$	0,334	0,347	$7,50 \pm 0,20$	7,42	21/14
$^{168}\text{Er}_{68}$	1,118	0,497	$6,17 \pm 0,03$	$2,18 \pm 0,05$	0,333	0,339	$7,66 \pm 0,15$	7,77	64/14
$^{170}\text{Er}_{68}$	1,132	0,442	$6,27 \pm 0,03$	$1,94 \pm 0,05$	0,326	0,329	$7,45 \pm 0,13$	7,75	22/14
$^{182}\text{W}_{74}$	1,131	0,482	$6,41 \pm 0,02$	$2,12 \pm 0,05$	0,248	0,252	$6,58 \pm 0,06$	6,57	11/14
$^{184}\text{W}_{74}$	1,128	0,493	$6,42 \pm 0,02$	$2,17 \pm 0,05$	0,237	0,236	$6,21 \pm 0,06$	6,27	12/10
$^{186}\text{W}_{74}$	1,132	0,478	$6,46 \pm 0,02$	$2,10 \pm 0,05$	0,222	0,224	$5,93 \pm 0,05$	5,90	29/14



Поскольку термин *поляризация ядра* может быть использован для любых возмущений, приводящих к смешиванию возбужденных и основных состояний ядра, динамическое квадрупольное взаимодействие можно рассматривать как вид поляризации ядра. В силу исторически сложившихся причин эффект поляризации ядра понимается в ограниченном смысле, т. е. под этим подразумевается поправка на поляризацию ядра, обусловленная не включенными в модельное пространство членами. Более подробно этот вопрос обсуждается на с. 90. Эффект поляризации учитывался при анализе очень точных измерений  $K$ - и  $L$ -рентгеновских спектров мюонных атомов, выполненных для девяти деформированных четно-четных ядер:  $^{150}\text{Nd}$ ,  $^{152}\text{Sm}$ ,  $^{162}\text{Dy}$ ,  $^{164}\text{Dy}$ ,  $^{168}\text{Er}$ ,  $^{170}\text{Er}$ ,  $^{182}\text{W}$ ,  $^{184}\text{W}$ ,  $^{186}\text{W}$  [101, 232]. Учет эффекта поляризации ядра позволил получить хорошее согласие с экспериментом в значении энергии расщепления сверхтонкой структуры без использования 4-параметрического распределения заряда. В табл. 2.13 приведены параметры деформированного распределения заряда типа (2.86), полученные в этом анализе. Во второй колонке этой таблицы даны значения  $r_0$ , связанные с  $c$  соотношением  $c = r_0 A^{1/3}$ ; при этом  $t = (4 \ln 3) a$ .

Параметр деформации  $\beta$  (однородное) и внутренний квадрупольный момент  $Q_0$  определяются из экспериментов по измерению  $B(E2)$ . Параметры  $\beta$  приведены только для сравнения.

Поправки, обусловленные поляризацией ядра, к мюонным уровням  $1s_{1/2}$  девяти элементов даны в табл. 2.14.

Таблица 2.14  
Ядерные поляризационные поправки для  $1s_{1/2}$  мюонных  
уровней Nd, Sm, Dy, Er и W [232].  
Погрешность около 15%

Нуклид	Поляризация ядра в $1s$ - уровне, кэВ	Нуклид	Поляризация ядра в $1s$ - уровне, кэВ	Нуклид	Поляризация ядра в $1s$ - уровне, кэВ
$^{150}\text{Nd}$	6,87	$^{164}\text{Dy}$	10,34	$^{182}\text{W}$	9,43
$^{152}\text{Sm}$	8,05	$^{168}\text{Er}$	10,96	$^{184}\text{W}$	9,01
$^{162}\text{Dy}$	9,90	$^{170}\text{Er}$	10,39	$^{186}\text{W}$	8,95

### Возбуждение вращательных уровней ядер при переходах в мюонных атомах

Выше обсуждались эффекты взаимодействия орбитальных мюонов с квадрупольным моментом ядра, приводящие к сверхтонкой структуре радиационных переходов в мюонных атомах. Аналогично можно рассмотреть кулоновское возбуждение вращательных уровней в мю-атомных переходах.

В мюонных атомах каскад, ведущий к основному состоянию, происходит главным образом за счет радиационных  $E1$ -переходов и эффекта Оже. В случае деформированных ядер существует до-

полнительное взаимодействие между мюоном и квадрупольным моментом ядра. Вследствие этого взаимодействия имеется большая вероятность (около 0,5) возбуждения низколежащих вращательных уровней при переходах мезоатомов в  $2p$ -состояния. В случае переходов в  $3d$ -состояния вероятность возбуждения ядерных вращательных уровней мала (приблизительно 0,05). Переходы в  $1s$ -состояния не приводят к такому возбуждению ядер.

Время жизни первого возбужденного уровня в тяжелых ядрах много меньше (порядка  $10^{-9}$  с) времени жизни  $1s$ -состояния мю-атома (порядка  $10^{-7}$  с), поэтому ядро имеет достаточно времени для перехода в основное состояние, прежде чем мюон захватится ядром. Вероятность кулоновского возбуждения ядра можно найти, измеряя число  $\gamma$ -квантов и конверсионных электронов, нормированное на  $\mu$ -захват. Эта вероятность зависит как от значения, так и от знака внутреннего квадрупольного момента ядра; зная ее, можно определить знак  $Q_0$ , если абсолютное значение квадрупольного момента известно. В том случае, когда первое возбужденное состояние ядра не является чисто вращательным, вероятность кулоновского возбуждения зависит также от квадрупольного момента ядра в возбужденном состоянии.

Г. Е. Беловицкий [410], используя методику толстых ядерных эмulsionей, наблюдал кулоновское возбуждение ядерных вращательных уровней в  $^{238}\text{U}$  в процессе мюонного каскада. Кроме кулоновского возбуждения вращательных уровней возможно возбуждение ядра мюонного атома в результате прямой передачи ему энергии  $2p \rightarrow 1s$ -перехода. Этот процесс обсуждался в теоретических работах Д. Ф. Зарецкого и В. М. Новикова [398, 399]. Его экспериментальное подтверждение было получено Болотцем и Диазом с сотр. [143, 407]. Энергия, переданная ядру таким способом, составляет 6,3 МэВ и может расходоваться затем на нейтронное  $\gamma$ -излучение или испускание электронов внутренней конверсии.

Г. Е. Беловицкий [410] нашел, что вероятность кулоновского возбуждения ядерных вращательных уровней в  $^{238}\text{U}$  составляет около 0,5, что хорошо согласуется с теоретическими оценками. Теоретическое значение этой величины равно 0,5 для  $Q_0 > 0$  и 0,4 для  $Q_0 < 0$ . Поэтому для определения таким способом знака  $Q$  необходимо дальнейшее улучшение точности эксперимента. Желательно также знать более точно значение вероятности возбуждения вращательных уровней ядра в  $3d$ -состоянии.

### **Ядерная поляризация в мюонных атомах с деформированными ядрами**

Несколько лет назад анализ рентгеновских спектров мюонных атомов с деформированными ядрами проводился обычно по работе Уилетса и Джекобсона диагонализацией оператора электрического квадрупольного взаимодействия  $H_Q$ . В качестве базиса использовал

лись набор спиновых мультиплетов  $[1s_{1/2}, (2p_{3/2}, 2p_{1/2}), (3d_{5/2}, 3d_{3/2})$  и т. п.] и нижняя вращательная полоса спектра ядра. Чен назвал этот базис модельным пространством. Не имея экспериментальных данных современной точности (разрешение порядка килоэлектронвольт при энергии несколько Мегаэлектронвольт), Чен провел тщательный теоретический анализ спектров, учтя влияние мюонных и ядерных конфигураций, не вошедших в модельное пространство. Нормируя электрическое квадрупольное взаимодействие с учетом виртуальных возбуждений в состоянии, не включенные в базис диагонализации, можно значительно улучшить согласие с результатами измерений квадрупольных моментов в экспериментах по кулоновскому возбуждению. Следует отметить, что эти эксперименты дают значения квадрупольных моментов, на несколько процентов превышающие соответствующие значения, полученные из спектроскопического анализа. Перенормировочные поправки также сильно влияют на относительные интенсивности мультиплетов сверхтонкой структуры и параметры распределения заряда ядра.

Матричные элементы оператора  $H_Q$  и приведенный матричный элемент оператора  $M(E1)$  определяются соотношениями (2.94) и (2.97). В этих соотношениях используются базисные функции  $|IK, jkn, FM\rangle$ . Для нерелятивистского рассмотрения удобно представить состояния модельного пространства в виде  $|IK, nlj, FM\rangle$ , где  $|IK\rangle$  — ядерное вращательное состояние;  $FM$  — полный момент системы мюон—ядро и его проекция;  $|nlj\rangle$  относится к одному из состояний  $1s_{1/2}, 2p_{3/2}, 3d_{5/2}, 3d_{3/2}$ . В пределах одной вращательной полосы  $K$  не меняется.

В этом базисе соотношения (2.94) и (2.97) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle I_1 K_1, l_1 j_1, FM | H_Q | I_2 K_2, l_2 j_2, FM \rangle = \\ = \alpha_{j_1 j_2} A_2(I_1 K_1, l_1 j_1 F, I_2 K_2, l_2 j_2). \end{aligned} \quad (2.104)$$

Здесь

$$\alpha_{j_1 j_2} = -(e^2 Q_0 / 10) \langle l_1 j_1 | f(r) | l_2 j_2 \rangle; \quad (2.105)$$

$$\begin{aligned} A_2 \equiv A_2(I_1 K_1, l_1 j_1 F, I_2 K_2, l_2 j_2) = \\ = (-1)^{I_1 + I_2 + F - K + 1/2} 5 [(2j_1 + 2)(2j_2 + 1)(2I_1 + 1)(2I_2 + 1)]^{1/2} \times \\ \times \begin{Bmatrix} F & j_1 & I_1 \\ 2 & I_2 & j_2 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & 2 & I_2 \\ -K_1 & 0 & K_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & 2 & j_2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{2} [1 + (-1)^{I_1 + I_2}]; \end{aligned} \quad (2.106)$$

$$\begin{aligned} \langle I_f K_1, l_f j_f, F_f | M(E1) | I_i K_1, l_i j_i, F_i \rangle = \\ = M_1 B_1(I_f K_1, l_f j_f F_f, I_i K_1, l_i j_i F_i), \end{aligned} \quad (2.107)$$

где

$$M_1 = \langle I_f j_f | r_\mu | I_i j_i \rangle; \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned} & B_1(I_f K_1 l_f j_f F_f, I_i l_i f_i F_i) = \\ & = (-1)^{I_i + I_f + I_i + F_f + \frac{1}{2}} \delta_{I_f I_i} [(2j_f + 1)(2j_i + 1)(2F_f + 1)]^{\frac{1}{2}} \times \\ & \times \begin{Bmatrix} j_f & F_f & I_f \\ F_i & j_i & 1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j_f & 1 & j_i \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{2} [1 + (-1)^{I_f + I_i + 1}]. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Ниже будут обсуждаться результаты анализа, проведенного Ченом. Сущность его вычислений состоит в замене матричных элементов  $H_Q$  и  $M(E1)$  эффективными матричными элементами  $H_{эф}$  и  $M_{эф}(E1)$ . Определение эффективных матричных элементов дано на рис. 2.7 и 2.8.

**Эффективное квадрупольное взаимодействие.** Члены второго порядка, соответствующие последнему графику на рис. 2.7, разобьем на две части: ядерные промежуточные состояния  $|I\rangle$  (принадлежат модельному пространству, тогда как мюонные промежуточные состояния  $|NLJ\rangle$  находятся вне этого пространства) и ядерные промежуточные состояния, не принадлежащие модель-

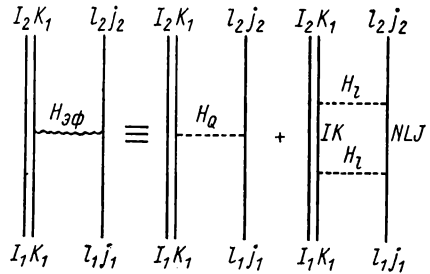


Рис. 2.7. Эффективные квадрупольные матричные элементы [101].

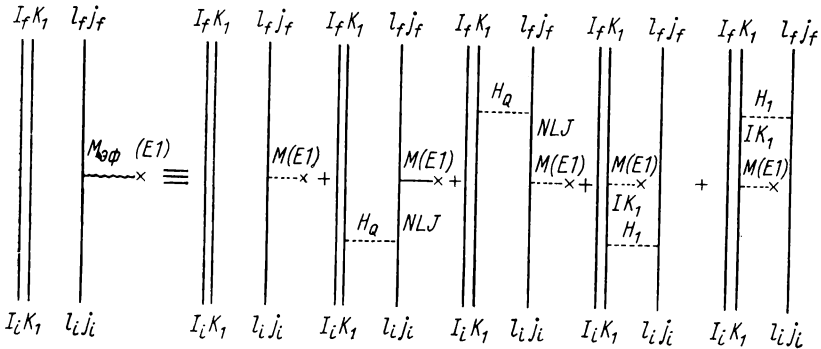


Рис. 2.8. Эффективные матричные элементы E1-переходов [101].

ному пространству. В первом случае поправка второго порядка  $\langle H_Q \rangle$  к матричному элементу может быть вычислена непосредственно:

$$\langle H_Q \rangle = \sum_{I, N, L, J} \frac{\langle I_1 K_1, l_1 j_1, FM | H_Q | I K_1, NLJ, FM \rangle \times \langle I K_1, NLJ, FM | H_Q | I_2 K_1, l_2 j_2, FM \rangle}{E_{I_2 K_1} + E_{l_2 j_2} - E_{I K_1} - E_{NLJ}}. \quad (2.110)$$

Интегрируя угловую часть с помощью соотношения (2.104), получаем

$$\langle H_Q^2 \rangle = [(e^2 Q_0)^2 / 20] \sum_{L, N} A_{2L} \frac{\langle R_1 | f(r_\mu) | R_{NL} \rangle \langle R_{NL} | f(r_\mu) | R_2 \rangle}{E_{I_2 K_1} + E_{I_2 j_2} - E_{IK_1} - E_{NLJ}}. \quad (2.111)$$

Здесь  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_{NL}$  — радиальные функции и

$$\begin{aligned} A_{l, L} &= A_{lL} (I_1 K_1 l_1 j_1 F; I_2 l_2 j_2) = \\ &= \sum_I \sum_{J=L-\frac{1}{2}}^{L+\frac{1}{2}} (-1)^{I_1+I_2} (2I+1) (2J+1) (2I+1) \times \\ &\quad \times [(2j_1+1) (2j_2+1) (2I_1+1) (2I_2+1)]^{\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \times \begin{Bmatrix} F & j_1 & I_1 \\ l & I & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F & j_2 & I_2 \\ l & I & J \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & l & I \\ -K_1 & K_1 & -K & K \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} I_2 & l & I \\ -K_1 & K_1 & -K & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & l & J \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & l & J \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \frac{1}{2} [1 + (-1)^{L+I+I_1}] \frac{1}{2} [1 + (-1)^{L+I+I_2}], \end{aligned} \quad (2.112)$$

где суммирование  $\sum_I$  ведется по уровням первой вращательной полосы. Мюонные промежуточные состояния можно просуммировать точно так же, как это сделано в § 1.7.

Вычислим поправку к волновой функции

$$|X\rangle = \sum_N \frac{|R_{NL}\rangle \langle R_{NL} | f(r_\mu) | R_2 \rangle}{E_{I_2 K_1} + E_{I_2 j_2} - E_{IK} - E_{NLJ}}, \quad (2.113)$$

а затем найдем поправку к матричному элементу. Эффективный матричный элемент

$$\langle H_{\text{эф}} \rangle = \langle H_Q \rangle + \langle H_Q^2 \rangle + \langle H_I^2 \rangle, \quad (2.114)$$

где первый член  $\langle H_Q \rangle$  находится по формуле (2.104), а второй член можно записать в виде

$$\langle H_Q^2 \rangle = \sum_L \beta_L A_{2L}. \quad (2.115)$$

Здесь

$$\beta_L = [(e^2 Q_0)^2 / 20] \langle g(r_\mu) | X \rangle; \quad (2.116)$$

$$g(r_\mu) = f(r_\mu) | R_2 \rangle. \quad (2.117)$$

Последний член можно представить выражением

$$\langle H_I^2 \rangle = \sum_L A_{lL} \gamma_{lL}. \quad (2.118)$$

(Заметим, что  $\sum_l H_l$  описывает электростатическое взаимодействие между мюоном и протонами.) Матрица  $A_{lL}$  рассчитывается по формуле (2.112). Значения  $\beta_L$  и  $\gamma_{lL}$ , вычисленные для нескольких ядер, приведены в табл. 2.15 и на рис. 2.9 и 2.10. После введения всех

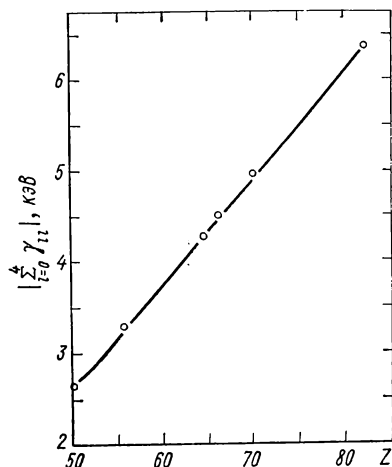


Рис. 2.9. Значения  $|\sum_{l=0}^4 \gamma_{lL}|$ , кэВ, для 1s-уровня [101]. Все значения  $\gamma_{lL}$  отрицательны.

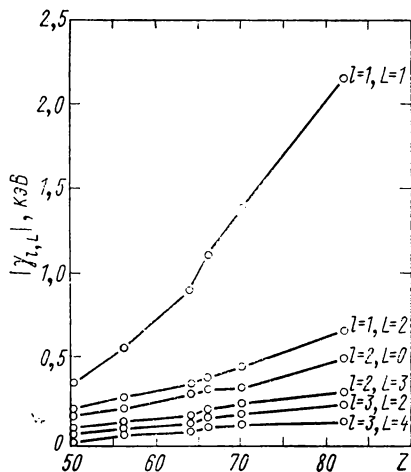


Рис. 2.10. Значения  $|\gamma_{lL}|$ , кэВ, для 2p-состояний [101]. Все значения  $\gamma_{lL}$  отрицательны.

этих величин соотношение (2.114) можно переписать в виде

$$\langle H_{\text{эф}} \rangle = \alpha_{i_1 i_2} A_2 + \sum_L \beta_L A_{2L} + \sum_{lL} \gamma_{lL} A_{lL}. \quad (2.119)$$

Матрицу  $A_{lL}$  разделим на две части:

$$A_{lL} = C_{lL} A_2 + d_{lL} 1, \quad (2.120)$$

Таблица 2.15

Значения  $\beta_L$ , кэВ [101]

Нуклид	$\beta$	$\beta_L$ в состояниях					
		1s	2p		3d		
		$L=2$	$L=1$	$L=3$	$L=0$	$L=2$	$L=4$
$^{150}\text{Nd}$	0,289	-3,12	-1,69	-0,43	+0,05	-0,06	-0,02
$^{152}\text{Sm}$	0,310	-4,07	-2,32	-0,61	+0,06	-0,09	-0,02
$^{162}\text{Dy}$	0,331	-5,50	-3,48	-0,98	+0,11	-0,16	-0,04
$^{164}\text{Dy}$	0,342	-5,94	-3,80	-1,07	+0,12	-0,18	-0,04
$^{163}\text{Er}$	0,338	-6,33	-4,18	-1,23	+0,14	-0,22	-0,06
$^{170}\text{Er}$	0,324	-5,76	-3,81	-1,13	+0,13	-0,20	-0,04
$^{182}\text{W}$	0,258	-4,13	-2,93	-0,97	+0,12	-0,20	-0,05
$^{184}\text{W}$	0,239	-3,71	-2,62	-0,87	+0,11	-0,17	-0,05
$^{186}\text{W}$	0,236	-3,65	-2,57	-0,86	+0,11	-0,17	-0,05

где  $C_{iL}$  и  $d_{iL}$  не меняются в пределах модельного пространства;  $\mathbf{1}$  — единичная матрица. Тогда из соотношений (2.119) и (2.120) получаем

$$\langle H_{\text{эф}} \rangle = \left( \alpha_{i_1 i_2} + \sum_L \beta_L C_{2L} + \sum_{iL} \gamma_{iL} C_{iL} \right) A_2 + \left( \sum_L \beta_L d_{2L} + \sum_{iL} \gamma_{iL} d_{iL} \right) \mathbf{1}. \quad (2.121)$$

Из полученного выражения можно видеть, что включение матричных элементов второго порядка равноценно перенормировке  $\alpha$  или внутреннего квадрупольного момента  $Q_0$  [соотношение (2.105)] на фактор

$$\eta = 1 + \left( \sum_L \beta_L C_{2L} + \sum_{iL} \gamma_{iL} C_{iL} \right) / \alpha. \quad (2.122)$$

Включение матричных элементов второго порядка приводит к увеличению связи компонент сверхтонкой структуры на постоянную величину

$$\Delta E = \sum_L \beta_L d_{2L} + \sum_{iL} \gamma_{iL} d_{iL}. \quad (2.123)$$

Вычисленные значения  $\eta$  находятся в интервале от 1,03 до 1,05. Это объясняет, почему внутренние квадрупольные моменты, полученные из традиционного анализа, на несколько процентов превышают значения, найденные из экспериментов по кулоновскому возбуждению.

Значения  $\beta_L$ , приведенные в табл. 2.15, получены в предположении распределения заряда в виде неоднородно деформированного эллипсоида с параметром деформации  $\beta$ , описывающим экспериментальные значения  $B$  (E2).

На рис. 2.9 показаны значения  $|\sum_{l=0}^4 \gamma_{il}|$ , кэВ, для 1s-уровня, тогда как на рис. 2.10 приведены величины  $|\gamma_{iL}|$ , кэВ, для 2p-состояний.

**Эффективные матричные элементы E1-переходов.** Матричный элемент эффективного перехода  $M_{\text{эф}}(E1)$  можно получить расчетом пяти диаграмм, показанных на рис. 2.8. Результат состоит из следующих компонент:

$$\begin{aligned} \langle I_f K_1, I_f j_f, F_f \| M_{\text{эф}}(E1) \| I_i K_1, I_i j_i, F_i \rangle = \\ = M_1 B_1 (I_f K_1 I_f j_f F_f, I_i K_1 I_i j_i F_i) + \\ + \sum_L M_{2L} B_{2L} + \sum_L [M_{3L} B_{3L} + M_4 B_4 + M_5 B_5, \end{aligned} \quad (2.124)$$

где  $M_1$  и  $B_1$  определяются соотношениями (2.108) и (2.109). Значения  $B$  рассчитываются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} B_{2L} = \sum_{J=L-\frac{1}{2}}^{L+\frac{1}{2}} (-1)^{-I_i+I_f+J+F_f+F_i-K_1} (2J+1) \times \\ \times [(2I_f+1)(2I_i+1)(2j_f+1)(2j_i+1)(2F_f+1)]^{\frac{1}{2}} \times \end{aligned}$$

$$\times \begin{Bmatrix} F_i & J & I_f \\ 2 & I_i & j_i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I_f & 2 & I_i \\ -K_1 & 0 & K_1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} J & 2 & j_i \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{2} [1 + (-1)^{L+l_i}] \times \\ \times \begin{Bmatrix} j_f & F_f & I_f \\ F_f & J & 1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j_f & 1 & J \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{2} [1 + (-1)^{L+l_f+1}]; \quad (2.125)$$

$$B_{3L} = \sum_{J=L-\frac{1}{2}}^{L+\frac{1}{2}} (-1)^{-I_f+l_i+J+2F_f-K_1} (2J+1) \times \\ \times [(2I_f+1)(2I_i+1)(2j_f+1)(2j_i+1)(2F_f+1)]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \begin{Bmatrix} F_f & j_f & I_f \\ 2 & I_i & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I_f & 2 & I_i \\ -K_1 & 0 & K_1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j_f & 2 & J \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{2} [1 + (-1)^{l_f+L}] \times \\ \times \begin{Bmatrix} J & F_f & I_i \\ F_i & j_i & 1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} J & 1 & j_i \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{2} [1 + (-1)^{L+l_i+1}]; \quad (2.126)$$

$$B_4 = \sum_I (-1)^{I-l_i-l_f+\frac{1}{2}} (2I+1) \times \\ \times [(2I_f+1)(2I_i+1)(2j_f+1)(2j_i+1)(2F_f+1)]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \begin{Bmatrix} I_f & F_f & j_f \\ F_i & I & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_i & j_i & 1 \\ 1 & I_i & j_i \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} I_f & 1 & I \\ -K_1 & 0 & K_1 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} I & 1 & I_i \\ -K_1 & 0 & K_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_f & 1 & j_i \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{2} [1 + (-1)^{l_f+l_i+1}]; \quad (2.127)$$

$$B_5 = B_4. \quad (2.128)$$

Значения  $M$ , неизменные в модельном пространстве, приведены в табл. 2.16 и 2.17 для  $K$ - и  $L$ -линий рентгеновского излучения соответственно.

Т а б л и ц а 2.16

Значения  $M$ , Ферми, для  $p \rightarrow s$ -переходов [101]

Нуклид	$M_{21}$	$M_{32}$	$M_4 + M_5$	Нуклид	$M_{21}$	$M_{32}$	$M_4 + M_5$
$^{150}\text{Nd}$	-0,28	-0,26	0,33	$^{170}\text{Er}$	-0,33	-0,35	0,48
$^{152}\text{Sm}$	-0,31	-0,29	0,36	$^{182}\text{W}$	-0,25	-0,29	0,60
$^{162}\text{Dy}$	-0,34	-0,34	0,47	$^{184}\text{W}$	-0,23	-0,28	0,60
$^{164}\text{Dy}$	-0,35	-0,36	0,47	$^{186}\text{W}$	-0,23	-0,28	0,60
$^{168}\text{Er}$	-0,34	-0,37	0,48				



Таблица 2.17

Значения  $M$ , Ферми, для  $d \rightarrow p$ -переходов [101]

Нуклид	$M_{22}$	$M_{20}$	$M_{33}$	$M_{31}$	$M_4 + M_8$
$^{150}\text{Nd}$	-0,25	0,23	-0,19	1,63	0,08
$^{152}\text{Sm}$	-0,25	0,26	-0,22	1,81	0,08
$^{162}\text{Dy}$	-0,32	0,32	-0,26	2,01	0,11
$^{164}\text{Dy}$	-0,34	0,33	-0,27	2,10	0,11
$^{168}\text{Er}$	-0,30	0,35	-0,28	2,10	0,12
$^{170}\text{Er}$	-0,33	0,33	-0,27	2,02	0,12
$^{182}\text{W}$	-0,24	0,29	-0,24	1,56	0,14
$^{184}\text{W}$	-0,23	0,27	-0,22	1,47	0,14
$^{186}\text{W}$	-0,25	0,27	-0,22	1,47	0,14

Рассмотренные поправки оказывают также значительное влияние на относительные интенсивности мультиплетов сверхтонкой структуры (см. табл. 2.11).

### Новый динамический эффект в мюонных атомах

Выше показывалось, что для точного определения энергии уровней мюонных атомов необходимо учитывать динамические квадрупольные эффекты. Дополнительные динамические эффекты могут возникнуть, как только энергия возбуждения ядерных уровней приблизится к энергии переходов в мюонных атомах. Хенли и Уилетс [229] подробно рассмотрели случай  $0^+ \rightarrow 0^+$  вибрационного возбуждения (см. также [361]). Матричный элемент ядерного монополярного перехода для кулоновского возбуждения состояния  $\beta$  из состояния  $\alpha$  определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \langle H' \rangle &\equiv \langle 1s, \beta | H' | 2s, \alpha \rangle = \\ &= Ze^2 \int \Phi_{1s}^*(x) \langle \beta | \frac{\rho(r)}{|r-x|} | \alpha \rangle \Phi_{2s}(x) d^3x, \end{aligned} \quad (2.129)$$

где  $\Phi_{1s}$  и  $\Phi_{2s}$  — волновые функции мюона;  $\rho(r)$  — нормированная плотность заряда ядра ( $\int \rho(r) d^3r = 1$ ).

Предполагая, что возбужденное состояние ядра отвечает двухфононой квадрупольной вибрации несжимаемой жидкой капли, Хенли и Уилетс оценили матричные элементы для  $^{68}\text{Zn}$  и  $^{82}\text{Kr}$ :

$$\langle H' \rangle = \begin{cases} 2,0 \text{ кэВ} & \text{для } ^{68}\text{Zn}; \\ 2,9 \text{ кэВ} & \text{для } ^{82}\text{Kr}. \end{cases}$$

Ядра  $^{68}\text{Zn}$  и  $^{82}\text{Kr}$  имеют основные состояния  $0^+$  и первые возбужденные состояния  $0^+$  при энергии 1,63 и 2,19 МэВ соответственно. Энергия перехода  $2s \rightarrow 1s$  составляет 1,62 и 2,21 МэВ в мюонных атомах Zn и Kr соответственно, что весьма близко к энергии возбужденных уровней этих ядер. Смешивание состояний  $|1s, \alpha\rangle$

и  $|2s, \beta\rangle$ , обусловленное недиагональными матричными элементами  $\langle H' \rangle$ , приводит к следующим значениям энергии уровней:

$$E_{\pm} = E_{2s, \alpha} - \frac{1}{2} \Delta \pm \varepsilon, \quad (2.130)$$

где

$$\varepsilon \equiv \left[ H'^2 + \left( \frac{1}{2} \Delta \right)^2 \right]^{1/2}; \quad (2.131)$$

$$\Delta \equiv E_{2s, \alpha} - E_{1s, \beta}. \quad (2.132)$$

Соответствующие собственные состояния можно записать в виде

$$|+\rangle = a|2s, \alpha\rangle + b|1s, \beta\rangle; \quad (2.133)$$

$$|-\rangle = b|2s, \alpha\rangle - a|1s, \beta\rangle, \quad (2.134)$$

где

$$a^2 = 1 - b^2 = \frac{1}{2} (1 + \Delta/2\varepsilon).$$

Расчеты проводились для типичных переходов из состояний  $|\pm\rangle$  в состояния  $2p$  мюонных атомов  $^{68}\text{Zn}$  и  $^{82}\text{Kr}$  в области физически приемлемых значений  $\Delta$  и  $H'$ . В том случае, когда энергии и интенсивности рентгеновского излучения известны из эксперимента, сравнивая их с результатами расчетов, можно определить как  $\Delta$ , так и  $H'$ .

### § 2.3. ИЗОТОПИЧЕСКИЕ СДВИГИ

В разных изотопах одного и того же элемента наблюдаются различия в расщеплении спектральных линий. Эти изотопические сдвиги могут быть вызваны разными причинами: эффектами массы и объема, эффектами формы (деформации) и сжимаемости ядра, эффектами изоспина, экранирования и др. Вначале мы обсудим общие свойства изотопических сдвигов в обычных атомах. Эти свойства легко распространить на случай мезоатомов. Исчерпывающую информацию об изотопических сдвигах читатель может получить в работе Уилетса [390].

#### Эффекты массы

Простейший изотопический сдвиг обусловлен движением ядра, имеющего конечную массу. Кинетическая энергия ядра определяется известным выражением:

$$T_N = \frac{1}{2M} \left\{ \sum_i (-\mathbf{P}_i) \right\}^2 = \frac{1}{2M} \sum_i P_i^2 + \frac{1}{2M} \sum_{i \neq j} \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_j, \quad (2.135)$$

где  $M$  — масса ядра;  $\mathbf{P}_i$  — импульс  $i$ -го электрона. Первый член в правой части этого выражения описывает так называемый нормальный эффект, тогда как второй член зависит от относительного направления движения отдельных нуклонов и описывает эффект

связи, или «специфический» эффект. Если не учитывать этот специфический эффект, решая уравнение Шредингера, можно найти, что энергия уровней увеличивается на фактор  $\mu/m$  ( $m$  — масса электрона и  $\mu$  — приведенная масса) по сравнению с энергией уровней атома с бесконечной массой. Нормальный эффект массы — единственный эффект массы, присущий одноэлектронным атомам, поэтому он очень важен для изучения мюонных атомов. Второй эффект — эффект связи — возникает только в многоэлектронных атомах и неинтересен при изучении мезоатомов\*. Так как эффект массы уменьшается с увеличением  $M$ , он заметен только в легких элементах.

### Эффект объема

В отличие от изотопического сдвига, обусловленного эффектом массы, изотопический сдвиг, связанный с зависимостью от объема, наиболее заметен в тяжелых элементах. Паули и Пайерлс [313] первыми высказали утверждение, что распределение заряда ядра в конечном объеме, слабо меняющееся от изотопа к изотопу, приводит к небольшим изменениям электростатических полей и что этот эффект объема, или так называемый эффект поля, является главной причиной изотопического сдвига в тяжелых элементах. В отличие от эффекта массы эффект объема уменьшает энергию связи атомов.

Спектральные линии четных изотопов выстраиваются в соответствии с массовым числом, самый легкий изотоп имеет самый низкий уровень сдвига, но сдвиг линий не одинаков. Уровни энергии нечетных изотопов, или центры инерции компонент сверхтонкой структуры, не располагаются точно посередине между уровнями соседних четных изотопов, а сдвинуты ближе к энергетическому уровню более легкого изотопа. Этот эффект называют четно-нечетным колебанием.

В предположении сферически-симметричного распределения заряда ядра сдвиг энергии электрона, обусловленный конечным распределением заряда ядра, определяется следующим выражением:

$$\Delta E = \int_0^R e \rho_e(r) \Delta V(r) 4\pi r^2 dr, \quad (2.136)$$

где  $\rho_e(r)$  — плотность электрического заряда электрона;  $R$  — радиус ядра;  $\Delta V(r)$  — различие потенциалов точечного ядра и ядра с конечным распределением заряда. Тогда для изотопического сдвига  $\delta\Delta E$  справедливо следующее выражение:

$$\delta\Delta E = \int_0^R \rho_e(r) \delta\Delta V(r) 4\pi r^2 dr, \quad (2.137)$$

---

\* По той же самой причине эффект экранирования, важный для электронных атомов, нет необходимости рассматривать в случае мезоатомов.

где  $\delta\Delta V(r)$  — различие потенциалов двух изотопов. Следует заметить, что соотношения (2.136) и (2.137) получены в первом порядке теории возмущений. Только  $s$ -электроны и в значительно меньшей степени  $p_{1/2}$ -электроны демонстрируют изотопический сдвиг, для всех других электронов (и мюонов) исчезает плотность  $\rho_e(0)$ .

Под изотопическим сдвигом, связанным с объемом, обычно понимают отношение  $\delta(\Delta E)_{\text{эксп}}/\delta(\Delta E)_{\text{станд}}$ , т. е. этот сдвиг выражают в единицах так называемого стандартного сдвига — величины, рассчитанной для сферического ядра радиуса  $R_0 \sim A^{1/3}$  с однородным распределением заряда. Изотопический сдвиг можно представить в виде произведения волновой функции электрона (мюона)  $|\psi(0)|^2$  и ядерного фактора  $C$ :

$$\delta(\Delta E) = |\psi(0)|^2 \frac{\pi a_0^3}{Z} C \left( Z, R_0, \frac{\Delta R_0}{R_0} \right), \quad (2.138)$$

где  $a_0$  — боровский радиус, а величина  $R_0$  связана с радиусом  $\langle r^2 \rangle$  соотношением (2.7) [см. замечание, касающееся обозначений, после соотношения (2.12)].

Используя функции Дирака, полученные с учетом конечных размеров ядра, находим

$$C \left( Z, R_0, \frac{\Delta R_0}{R_0} \right) = \frac{12R_\infty(\rho+1)}{(2\rho+1)(2\rho+3)\Gamma^2(2\rho+1)} \left( \frac{2ZR_0}{a_0} \right)^{2\rho} \frac{\Delta R_0}{R_0}, \quad (2.139)$$

где  $R_\infty$  — постоянная Ридберга;  $\Gamma$  — гамма-функция;

$$\rho = (1 - \alpha^2 Z^2)^{1/2}; \quad (2.140)$$

$\alpha$  — постоянная тонкой структуры.

Соотношение (2.139) можно записать в виде

$$C = F(Z) (2Z/a_0)^{2\rho} R_0^{2\rho-1} \Delta R_0, \quad (2.141)$$

где  $F(Z)$  — первый множитель в соотношении (2.139). Так как  $\rho \simeq 1$  (для  $A = 50$   $\rho = 0,93$ , но для  $A = 90$   $\rho = 0,75$ ), из соотношения (2.141) можно видеть, что

$$C \sim \delta(R_0^2). \quad (2.142)$$

Из соотношений (2.138) и (2.142) следует, что

$$\delta(\Delta E) \sim |\psi(0)|^2 \delta(R_0^2). \quad (2.143)$$

Так как

$$\begin{aligned} \delta(\Delta E)_{\text{эксп}}/\delta(\Delta E)_{\text{станд}} &\simeq \delta(R_0^2)_{\text{эксп}}/\delta(R_0^2)_{\text{станд}} \simeq \\ &\simeq \delta(R_0)_{\text{эксп}}/\delta(R_0)_{\text{станд}}, \end{aligned} \quad (2.144)$$

где  $\delta(R_0) = R_0(A_2) - R_0(A_1)$  — различие в радиусах для двух изотопов с массовыми числами  $A_1$  и  $A_2$ , изотопический сдвиг, связанный с объемом, часто выражается также в терминах  $\delta(R_0)_{\text{эксп}}/\delta(R_0)_{\text{станд}}$ .

## Эффект деформированного объема

Важность формы ядра, например отклонения зарядовой плотности от сферической симметрии, при изучении изотопических сдвигов отмечали Брикс и Копферман [75] и значительно позднее Уилетс с сотр. [387]. Распределение заряда деформированного ядра после усреднения по углам имеет ббольшую радиальную протяженность, чем в случае сферического ядра того же объема; это приводит к увеличению расщепления по энергии  $\Delta E$  независимо от того, сплюснуто ядро или вытянуто. Поверхность ядра, имеющего эллипсоидальную форму, описывается соотношением (2.69). Различие потенциалов сферического и деформированного ядер является эффектом второго порядка, и деформация ядра вызывает увеличение энергетического сдвига, пропорциональное  $\beta^2$ . В приближении однородного распределения заряда отношение дополнительного сдвига по энергии, обусловленного деформацией ядра,  $\Delta E_\beta$ , к сдвигу, связанному с нормальным эффектом объема,  $\Delta E_V$ , порядка  $\beta^2$ :

$$\Delta E_\beta / \Delta E_V = \rho (2\rho + 3) \beta^2 / 5, \quad (2.145)$$

где  $\rho$  определяется соотношением (2.140).

Отношение изотопического сдвига, вызванного деформацией, к сдвигу, связанному с нормальным эффектом объема, описывается следующим выражением:

$$\frac{\delta \Delta E_\beta}{\delta \Delta E_V} \simeq \frac{3}{10} (2\rho + 3) A \left( \frac{\delta \beta^2}{\delta N} \right)_Z, \quad (2.146)$$

где  $\delta N$  — различие в числе нейтронов двух изотопов.

При получении соотношений (2.145) и (2.146) использовались волновые функции Дирака. Несмотря на то что величина  $\Delta E_\beta / \Delta E_V$  очень мала, отношение  $\delta \Delta E_\beta / \delta \Delta E_V$  может быть весьма большим. Например, если положить  $\beta$  равным верхнему пределу 0,3, отношение (2.145) составит примерно 0,06, тогда как отношение (2.146) для пары изотопов  $^{150}\text{Sm} - ^{152}\text{Sm}$  ( $Z = 62$ ,  $A = 150$ ,  $\delta N = 2$  и  $\delta(\beta^2) = 0,005$ ) составляет приблизительно 0,54.

Для предсказания значения изотопического сдвига на основе соотношения (2.146) необходимо знать значение ядерной деформации. Теория деформации ядер была развита Бором и Моттельсоном [70], а также другими авторами, и сейчас существует большой объем информации по этому вопросу. Параметр деформации  $\beta$  может быть получен из опытных данных, таких, как значения квадрупольных моментов или энергий первых возбужденных состояний четно-четных ядер. Необходимо помнить, что параметр  $\beta$  относится к внутренней деформации, и наблюдаемые квадрупольные моменты следует в вычислениях приводить к внутренним квадрупольным моментам.

На рис. 2.11 проводится сравнение теоретической кривой с экспериментальными значениями изотопических сдвигов. Точки нанесены в единицах сдвига, предсказываемого нормальным эффектом объема, радиус сферического ядра  $R_0$  полагался равным  $1,4 \times 10^{-13} A^{1/3}$  см. Индексы точек означают порядковые номера элементов и приведены в тех случаях, когда измерения были сделаны для изотопов. Все сдвиги относятся к изотопам, отличающимся на два или четыре нейтрона. Для лучшего согласия с экспериментальными данными в качестве теоретической выбрана

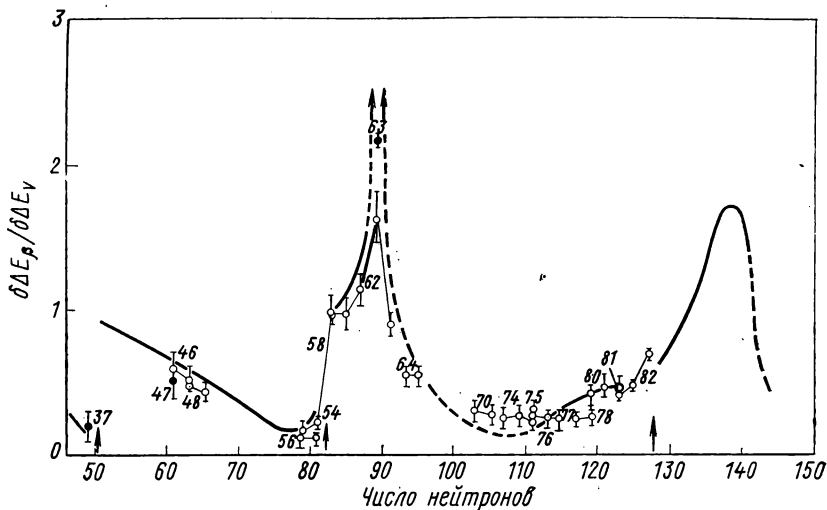


Рис. 2.11. Сравнение теоретических изотопических сдвигов с экспериментальными данными [387].

кривая, описываемая выражением  $0,5 (\delta \Delta E_V + \delta \Delta E_\beta) / \delta \Delta E_V$ . Сравнение показывает, что либо рассчитанный нормальный эффект объема слишком велик, либо существует эффект погашения.

Предполагая, что нечетные нуклиды имеют меньшее значение  $\beta$ , чем средняя деформация соседних четно-четных ядер, Уилетс с сотр. [387] пришли к выводу, что нечетно-четные колебания изотопических сдвигов обусловлены эффектом деформированного объема ядер [см. соотношение (2.146)]. Однако последующие исследования, как экспериментальные, так и теоретические, не подтвердили предположения о том, что деформация нечетных ядер всегда меньше деформации четных ядер. В действительности, явно выраженные нечетно-четные колебания были обнаружены главным образом в сферических и близких к ним ядрах. Наблюдаемые колебания изотопических сдвигов можно объяснить на основе модели «спаривание + квадрупольное взаимодействие».

## Ядерная поляризация, некулоновские силы и сжимаемость ядра

Согласно оценкам Уилетса и сотр. [387], эффект поляризации ядра не может дать поправок, превышающих 20%. Они также показали, что некулоновские силы (взаимодействие электрона и нейтрона), роль которых уменьшается с ростом  $A$ , могут дать только малые поправки, например 2,4% для  $Zn$  ( $A = 64$ ,  $Z = 30$ ). Эти оценки получены в предположении однородного распределения заряда с  $R_0 = 1,4 A^{1/3}$  Ферми. Использование более реального распределения заряда, например распределения Ферми, с гораздо меньшим радиальным параметром может привести к большим поправкам.

Сжимаемость ядра также уменьшает аномалии в значении изотопического сдвига. Если пренебречь влиянием потенциальной и кинетической энергии на поверхность ядра, равновесный радиус ядра можно определить следующим образом [178]:

$$R = r_0 (1 + E_c/E_0''), \quad (2.147)$$

где  $E_c$  — полная кулоновская энергия заряженной сферы;  $E_0''$  — коэффициент сжимаемости. Предполагая, что  $r_0 \sim A^{1/3}$ , находим

$$\frac{1}{R} \frac{\delta R}{\delta N} = \frac{1}{3A} \left( 1 - \frac{4E_c}{E_0'' + E_c} \right) \quad (2.148)$$

и

$$\frac{1}{R} \frac{\delta R}{\delta Z} = \frac{1}{3A} \left\{ 1 - \frac{4E_c}{E_0'' + E_c} \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{A}{Z} \right) \right\}. \quad (2.149)$$

Зависимость радиуса ядра от числа нейтронов и протонов для ядра, способного сжиматься, отличается от той же зависимости в случае несжимаемого ядра:

$$\frac{1}{R} \frac{\delta R}{\delta N} = \frac{1}{R} \frac{\delta R}{\delta Z} = \frac{1}{R} \frac{dR}{dA} = \frac{1}{3A}. \quad (2.150)$$

Отношение изотопических сдвигов для сжимаемых и несжимаемых ядер в предположении, что все аномалии в значении сдвига обусловлены в сферическом ядре эффектом сжимаемости, определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \gamma_N &= \left( \frac{\delta \Delta E}{\delta N} \right)_{\text{сжим}} / \left( \frac{\delta \Delta E}{\delta N} \right)_{\text{несжим}} = \\ &= \frac{3A}{R} \frac{\delta R}{\delta N} = 1 - \frac{4E_c}{E_0'' + E_c} \simeq \sqrt{\frac{1}{2}} \simeq 0,7. \end{aligned} \quad (2.151)$$

Полученное значение согласуется с данными по рассеянию электронов и мюонному рентгеновскому излучению [166, 349].

Аномалии в значении изотопического сдвига заметно уменьшаются, когда учитываются поляризация и сжимаемость ядра. В результате радиус ядра меняется медленнее с изменением числа

нейтронов, чем это следует из простой зависимости  $A^{1/3}$ . В действительности, изучение эффекта сжимаемости ядра показывает, что при добавлении двух нейтронов радиус ядра увеличивается гораздо меньше, чем предсказывает зависимость  $A^{1/3}$ . Этот факт можно объяснить на языке эффекта изоспина, который можно рассматривать как альтернативное описание сжимаемости ядра.

### Эффект изоспина

Перей и Шиффер [316] показали, что в оптическом потенциале член, зависящий от изоспина и введенный Лэйном [283], может вызывать аномалии изотопического сдвига, связанные с изменением распределения заряда ядра. Этот изоспиновый член в оптическом потенциале имеет следующий вид:

$$V = V_0 + \frac{t \cdot T}{A} V_1, \quad (2.152)$$

где  $t$  — изоспин налетающего нуклона или, в нашем случае, изоспин дополнительного нейтрона;  $T$  — изоспин ядра-мишени. Величины  $V_0$  и  $V_1$  не зависят от изоспина, но в общем случае зависят от координат и импульсов. В качестве  $V_0$  и  $V_1$  используют потенциал Саксона—Вудса с параметрами, подобранными для правильного описания энергий связи протонов, заполняющих внешние оболочки. Рассчитанное отношение радиусов распределения заряда двух ядер  $^{40}\text{Ca}$  и  $^{44}\text{Ca}$ , имеющих дважды заполненные оболочки и, следовательно, лучше описываемых этой моделью, составляет 0,985. Это значение находится в согласии с экспериментальным значением  $1,008 \pm 0,003$ , полученным из данных по рассеянию электронов и мюонному рентгеновскому излучению. Отношение, полученное из исследования изобар-аналоговых состояний ядер, составляет  $0,998 \pm 0,007$ . С другой стороны, простая зависимость  $A^{1/3}$  дает отношение 1,032. Похожий результат можно получить из распределения протонов, найденного по одночастичным волновым функциям в потенциале Саксона—Вудса, описывающем сильное различие в энергиях связи последнего протона ядер  $^{44}\text{Ca}$  и  $^{40}\text{Ca}$  [166, 167].

### Изотопические сдвиги в мюонных атомах

Как указывалось в предыдущем разделе, изучение изотопических сдвигов, особенно связанных с объемом, может дать информацию о размерах и форме ядер. Оптические методы измерения изотопических сдвигов имеют небольшую погрешность ( $\sim 1\%$ ), поэтому до последнего времени различия в радиусах соседних ядер исследовались методами оптической спектроскопии. Однако при выделении сдвигов, связанных с объемом, из экспериментальных данных этот способ встречает известные трудности:

1) для элементов с  $Z \lesssim 50$  изотопический сдвиг оптических линий нельзя отделить от доплеровского сдвига;



2) эффекты объема нельзя четко отделить от специфических эффектов массы;

3) для элементов с  $A < 50$  эффект приведенной массы в общем случае маскирует сдвиг, обусловленный объемом (даже для водорода);

4) участие сложных электронных конфигураций в типичных оптических переходах часто затрудняет выделение различий в среднеквадратических радиусах  $\delta\langle r^2 \rangle$  из наблюдаемых сдвигов.

Все эти трудности отсутствуют в соответствующих мюонных атомах.

В мюонных атомах отклонение от соотношения (2.143) весьма заметно и зависит от выбора модели. Например, модельную зависимость  $\delta(R_0)$  в рамках распределения Ферми можно увидеть из следующего рассмотрения [156]. В хорошем приближении, используя параметры этой модели (радиус половинной плотности  $c$  и

толщину поверхностного слоя  $t$ ), можно выразить величину  $R_0$  следующим образом:

$$R_0^3 = c^3 + 1,19t^2 \quad (2.153)$$

Обозначив  $\delta(R_0)_t$  вычисленную величину  $\delta R_0$  в предположении, что  $t = \text{const}$  ( $\delta t = 0$ ), находим

$$\delta(R_0)_t = \frac{\delta E}{(\partial E / \partial R_0)_t}, \quad (2.154)$$

где  $E$  — энергия  $K_\alpha$ -перехода. Раскрывая  $E$  в первом порядке по  $\delta(R_0)$  и  $\delta t$ , имеем

$$\delta(R_0)_t = \delta(R_0) - \delta t (\partial R_0 / \partial t)_c (1 - k_c / k_t), \quad (2.155)$$

где

$$k_c = (\partial E / \partial R_0)_c, \quad k_t = (\partial E / \partial R_0)_t. \quad (2.156)$$

Из соотношения (2.153) и определения  $(\delta R_0)_{\text{станд}}$  следует, что неопределенность в величине  $\delta(R_0) / \delta(R_0)_{\text{станд}}$ , связанная с модельной зависимостью, описывается выражением

$$\sigma = \frac{\delta(R_0) - \delta(R_0)_t}{\delta(R_0)_{\text{станд}}} \simeq 3,57 \frac{A}{\delta A} \frac{t^2}{R_0^2} \left(1 - \frac{k_c}{k_t}\right) \frac{\delta t}{t}. \quad (2.157)$$

Расчет величин  $k_c$  и  $k_t$  для Ca, Sn и Pb показывает, что в хорошем приближении

$$1 - k_c / k_t = 0,01 + 7,5 \cdot 10^{-4} A. \quad (2.158)$$

На рис. 2.12 приведена зависимость  $\sigma(A)$  для  $\Delta A = 2$  и  $\delta t / t = 0,05$ . Даже при  $A \simeq 40$  и  $\delta t / t = 0,05$ , как и предполага-

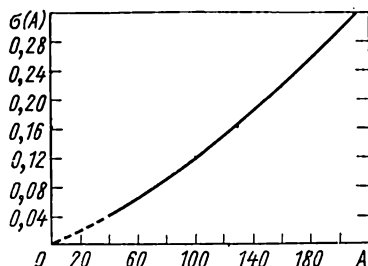


Рис. 2.12. Зависимость неопределенности  $\sigma$  в величине  $\delta(R_0) / \delta(R_0)_{\text{станд}}$  от атомной массы  $A$  [156].

лось, неопределенность  $\sigma$  близка к статистической погрешности отношения  $\delta(R_0)_t/\delta(R_0)_{\text{станд}}$ . В связи с этим необходимо отметить, что эксперименты по рассеянию электронов дают для изотопов Ca  $\delta t/t \simeq 0,1$ . В сильно деформированных ядрах заметное изменение толщины поверхностного слоя  $t$  происходит при небольшом изменении параметра деформации в соответствии с выражением  $\delta t \sim c\delta \langle \beta^2 \rangle$ . Детальное обсуждение модельной зависимости мюонных изотопических сдвигов читатель может найти в работах Эрлиха и Телегди [156, 366].

### Измерения изотопических сдвигов в мюонных атомах

**Измерения изотопических сдвигов в кальции\***. Эксперименты Хофштадтера и сотр. [372] по рассеянию электронов позволяют получить довольно надежное феноменологическое описание плотности заряда в изотопах Ca, а также точно определить изменения нескольких параметров, входящих в выражение для этой плотности.

В табл. 2.18 проводится сравнение наблюдаемых в эксперименте изотопических сдвигов с предсказаниями, полученными из рассеяния электронов. Эксперименты по рассеянию электронов показывают, что  $^{48}\text{Ca}$  имеет более компактное распределение заряда, чем  $^{40}\text{Ca}$ . Результаты экспериментов по рентгеновскому излучению находятся в согласии с этим выводом.

Т а б л и ц а 2.18

Мюонные изотопические сдвиги в Ca [156]

Пара изотопов	Наблюдаемый сдвиг мюонной $K_{\alpha}$ -линии, кэВ	Предсказываемые сдвиги
$^{40}\text{Ca} - ^{42}\text{Ca}$	$0,69 \pm 0,06$ [156]	$0,82 \pm 0,20$
$^{40}\text{Ca} - ^{44}\text{Ca}$	$0,89 \pm 0,05$ [156]; $0,9 \pm 0,3$ [56]; $0,5 \pm 0,3$ [112]	$0,61 \pm 0,10$
$^{40}\text{Ca} - ^{48}\text{Ca}$	$-0,47 \pm 0,12$ [156]	$-0,54 \pm 0,08$

**Измерения изотопических сдвигов в олове\*<sup>2</sup>**. На олове было проведено большое число измерений, использовались различные независимые методики, получены как оптические, так и мюонные изотопические сдвиги. (Об оптических изотопических сдвигах см. [102, 154, 155, 356]).

В табл. 2.19 приведены более поздние результаты по измерению мюонных изотопических сдвигов, полученные в Чикаго, и соот-

\* Результаты измерений с использованием Ge (Li)-детектора описаны в работе [154, 156]; с использованием NaI-детектора — в работах [11, 56, 112, 113].

\*<sup>2</sup> Результаты измерений с использованием Ge (Li)-детектора описаны в работах [36, 154, 156]; с использованием NaI-детектора — в работе [113].

Т а б л и ц а 2.19

## Мюонные изотопические сдвиги в Sn [156]

Пара изотопов	Наблюдаемый сдвиг, кэВ	Сдвиг из-за эффекта объема, кэВ	$\delta(R_0)_t$
			$\delta(R_0)_{\text{станд}}$
$^{116}\text{Sn} - ^{120}\text{Sn}$	$11,55 \pm 0,20$	11,67	$0,558 \pm 0,010$
$^{117}\text{Sn} - ^{120}\text{Sn}$	$9,28 \pm 0,15$	9,37	$0,620 \pm 0,010$
$^{118}\text{Sn} - ^{120}\text{Sn}$	$5,17 \pm 0,10$	5,23	$0,521 \pm 0,014$
$^{119}\text{Sn} - ^{120}\text{Sn}$	$3,42 \pm 0,17$	3,45	$0,768 \pm 0,030$
$^{120}\text{Sn} - ^{122}\text{Sn}$	$4,95 \pm 0,15$	5,01	$0,508 \pm 0,016$
$^{118}\text{Sn} - ^{118}\text{Sn}$	$6,38 \pm 0,22$	6,44	$0,630 \pm 0,023$

ветствующие значения  $\delta(R_0)_t / \delta(R_0)_{\text{станд}}$ . На рис. 2.13 эти данные показаны в виде диаграммы Брикса—Копфермана, обычно используемой в оптической спектроскопии.

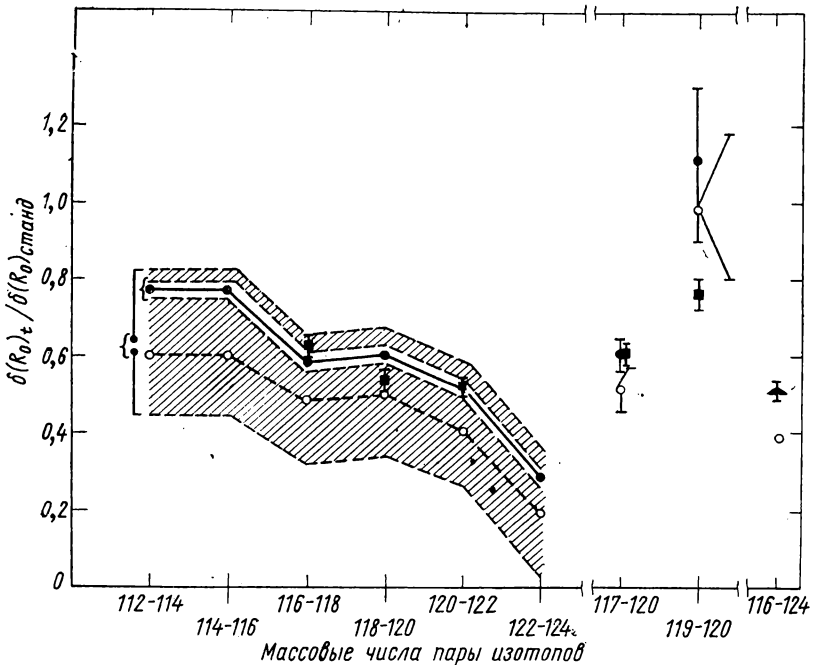


Рис. 2.13. Диаграмма Брикса—Копфермана для изотопических сдвигов в Sn [156]:

○ — оптические данные ( $m=4 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ ); ■ — мюонные данные ( $\delta t=0$ ); ▲ — данные электронного  $K_{\alpha}$ -излучения; ● — пересчитанные оптические данные ( $m=3 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ ); { — неопределенность в специфических сдвигах, связанных с массой.

Сравнение с оптическими данными проведено для специфического сдвига, связанного с массой,  $4 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$  (жирная штриховая линия). Другой вариант диаграммы, полученной для специфического сдвига, связанного с массой,  $3 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$  (тонкая штриховая линия).

ческого сдвига, связанного с массой, равного  $3,0 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$  (сплошная линия), находится в лучшем согласии с оценками отношения  $\delta(R_0)_t / \delta(R_0)_{\text{станд}}$  из данных по рассеянию электронов и мюонному излучению. Заштрихованная область показывает неопределенность значения специфического сдвига, связанного с массой. Остающиеся расхождения между мюонным и исправленным оптическим изотопическими сдвигами (имеется в виду пара  $^{118}\text{Sn} - ^{120}\text{Sn}$ ), возможно, объясняется изменениями толщины поверхностного слоя  $t$ . Для олова эти изменения составляют около 14%.

Независимые данные о деформации ядер, если они достаточно точны, могут быть использованы для интерпретации мюонных изотопических сдвигов. Однако в действительности это не имеет большого смысла, так как наши знания о деформации носят приближенный характер. Для изотопов Sn, где  $\langle \beta \rangle \simeq 0,1$ , неопределенность в значении среднеквадратической деформации  $\langle \beta^2 \rangle$ , полученной в экспериментах по кулоновскому возбуждению, является величиной того же порядка, что и изменение  $\langle \beta^2 \rangle$ , найденной по мюонным изотопическим сдвигам.

**Измерения изотопических сдвигов в других элементах.** Экспериментальные данные по мюонным изотопическим сдвигам для других ядер суммированы в табл. 2.20, 2.21а и 2.21б. В табл. 2.20 и 2.21а приведены результаты измерений изотопических сдвигов, полученные в последние годы для ядер Sr, Zr, Si, K, Fe, Ni и Cu. Результаты проведенных различными авторами измерений изотопических сдвигов собраны в работе [349]. Эти результаты приведены в табл. 2.21б. Все измерения, результаты которых иллюстрируются таблицами этого раздела, проведены с Ge (Li)-детекторами. Изотопические сдвиги для ядер  $^{16}\text{O} - ^{18}\text{O}$  и  $^{155}\text{Gd} - ^{160}\text{Gd}$  читатель может найти в работе [113]. (В этой работе был использован NaI (Tl)-детектор.) Изотопические сдвиги для ядер  $^{107}\text{Ag} - ^{109}\text{Ag}$  приведены в работе [89]. Авторы этой работы исследовали мюонное  $K$ - и  $L$ -рентгеновское излучение для разделенных изотопов  $^{151}\text{Eu}$  и  $^{153}\text{Eu}$  [90].

Т а б л и ц а 2.20

Изотопические сдвиги в Sr и Zr [156]

Пара изотопов	Наблюдаемый сдвиг, кэВ	Сдвиг из-за эффекта объема, кэВ	$\delta(R_0)_t$	$\delta(R_0)_t$
			$\delta(R_0)_{\text{мюон}} / \delta(R_0)_{\text{станд}}$	$\delta(R_0)_{\text{опт}} / \delta(R_0)_{\text{станд}}$
$^{84}\text{Sr} - ^{88}\text{Sr}$	—	—	—	от $-0,3$ до $+0,2$
$^{86}\text{Sr} - ^{88}\text{Sr}$	$-1,35 \pm 0,12$	$-1,27 \pm 0,12$	$-0,192 \pm 0,018$	от $-0,2$ до $+0,2$
$^{88}\text{Sr} - ^{90}\text{Sr}$	—	—	—	от $+1,1$ до $+1,6$
$^{86}\text{Sr} - ^{87}\text{Sr}$	$-1,15 \pm 0,10$	$-1,11 \pm 0,10$	$-0,177 \pm 0,016$	—
$^{90}\text{Zr} - ^{92}\text{Zr}$	$8,2 \pm 0,4$	$8,3 \pm 0,4$	$1,14 \pm 0,06$	$1,10 \pm 0,12$
$^{92}\text{Zr} - ^{94}\text{Zr}$	—	—	—	$0,78 \pm 0,12$
$^{94}\text{Zr} - ^{96}\text{Zr}$	—	—	—	$0,61 \pm 0,13$

Результаты измерений изотопических сдвигов в мюонных атомах Са, Сг, Си, Мо, Sn и Nd, полученные в Колумбийском университете, приведены в табл. 2.22—2.25. В случае Са снова подтвердились сведения о необычно слабом сдвиге между  $^{40}\text{Ca}$ — $^{44}\text{Ca}$ . В изотопах Сг наблюдается интересный эффект заполнения оболочки для числа нейтронов  $N = 28$ . Сильное уменьшение изотопического сдвига между  $^{122}\text{Sn}$ — $^{124}\text{Sn}$ , замеченное при анализе оптических спектров, не было обнаружено в мюонных экспериментах.

Таблица 2.21а  
Мюонные изотопические сдвиги [156]

Пара изотопов	Наблюдаемый сдвиг, кэВ	Сдвиг из-за эффекта объема, кэВ	$\frac{\delta(R_0)_t}{\delta(R_0)_{\text{станд}}}$
$^{28}\text{Si}$ — $^{29}\text{Si}$	$-0,08 \pm 0,04$	$-0,03 \pm 0,04$	$-0,07 \pm 0,09$
$^{28}\text{Si}$ — $^{30}\text{Si}$	$0,00 \pm 0,04$	$0,10 \pm 0,04$	$0,12 \pm 0,05$
$^{39}\text{K}$ — $^{41}\text{K}$	$0,35 \pm 0,06$	$0,45 \pm 0,06$	$0,31 \pm 0,04$
$^{54}\text{Fe}$ — $^{56}\text{Fe}$	$2,97 \pm 0,12$	$3,06 \pm 0,14$	$0,94 \pm 0,05$
$^{56}\text{Fe}$ — $^{57}\text{Fe}$	$1,25 \pm 0,20$	$1,29 \pm 0,20$	$0,81 \pm 0,12$
$^{58}\text{Ni}$ — $^{60}\text{Ni}$	$3,14 \pm 0,14$	$3,23 \pm 0,14$	$0,83 \pm 0,04$
$^{60}\text{Ni}$ — $^{61}\text{Ni}$	$0,97 \pm 0,18$	$1,01 \pm 0,18$	$0,53 \pm 0,09$
$^{60}\text{Ni}$ — $^{62}\text{Ni}$	$2,00 \pm 0,17$	$2,09 \pm 0,17$	$0,55 \pm 0,04$
$^{63}\text{Cu}$ — $^{65}\text{Cu}$	$2,31 \pm 0,16$	$2,40 \pm 0,16$	$0,60 \pm 0,04$

Таблица 2.21б  
Мюонные изотопические сдвиги [349]

Пара изотопов	$\delta(\Delta E)_{\text{эксп.}}$ кэВ, для переходов		$\delta(\Delta E)_{\text{теор.}}$ кэВ, для переходов		$\delta(\Delta E)_{\text{эксп.}}/\delta(\Delta E)_{\text{теор.}}$ для переходов		Литература
	$2p_{3/2} \rightarrow 1s_{1/2}$	$2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$	$2p_{3/2} \rightarrow 1s_{1/2}$	$2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$	$2p_{3/2} \rightarrow 1s_{1/2}$	$2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$	
$^{96}\text{Mo}$ — $^{98}\text{Mo}$	$6,2 \pm 0,7$	—	—	—	$-0,8$	$-0,8$	[99]
$^{142}\text{Nd}$ — $^{144}\text{Nd}$	$18 \pm 2$	$17 \pm 2$	12,7	12,4	1,4	1,3	[36]
$^{144}\text{Nd}$ — $^{146}\text{Nd}$	$14 \pm 2$	$16 \pm 2$	12,6	12,3	1,1	1,3	[36]
$^{182}\text{W}$ — $^{184}\text{W}$	$9 \pm 2$	$10 \pm 2$	15,1	14,5	0,6	0,7	[36]
$^{184}\text{W}$ — $^{186}\text{W}$	$7 \pm 2$	$9 \pm 2$	15,0	14,4	0,5	0,6	[36]
$^{206}\text{Pb}$ — $^{207}\text{Pb}$	$3,72 \pm 0,32$	$4,04 \pm 0,86$	7,3	6,9	$0,51 \pm 0,04$	0,6	[153]*
$^{206}\text{Pb}$ — $^{208}\text{Pb}$	$9,36 \pm 0,30$	$9,27 \pm 0,89$	14,5	13,8	$0,65 \pm 0,02$	0,67	[153]
	$10,2 \pm 1,4$	$8,4 \pm 1,4$	—	15,2	—	$0,55 \pm 0,08$	[13]**
	$10,5 \pm 3$	$10,5 \pm 3$	14,6	14,6	0,7	0,7	[4]**

\* При расчетах использовалось распределение Ферми:  $c = 1,13A^{1/3}$  Ферми;  $t = 2,1$  Ферми.

\*\* Результаты для  $^{206}\text{Pb}$  откорректированы по  $^{207}\text{Pb}$  с помощью данных по оптическим сдвигам.

\*\* Результаты для  $^{206}\text{Pb}$  откорректированы по  $^{207}\text{Pb}$  с помощью данных из работы [56].

Таблица 2.22

## Мюонные изотопические сдвиги в Са, Сг, Си и Мо [293]

Пара изотопов	Наблюдаемый сдвиг, кэВ	Полевой сдвиг, кэВ*	Стандартный сдвиг, кэВ**	$\delta E_{\text{пол}}/\delta E_{\text{станд}}$ по	
				[293]	[156]
$^{40}\text{Ca} - ^{44}\text{Ca}$	$0,99 \pm 0,10$	1,19	3,26	$0,36 \pm 0,04$	$0,33 \pm 0,02$
$^{50}\text{Cr} - ^{52}\text{Cr}$	$-0,83 \pm 0,08$	-0,73	2,60	$-0,28 \pm 0,03$	—
$^{52}\text{Cr} - ^{53}\text{Cr}$	$0,70 \pm 0,08$	0,75	1,27	$0,59 \pm 0,06$	—
$^{52}\text{Cr} - ^{54}\text{Cr}$	$2,17 \pm 0,20$	2,27	2,50	$0,9 \pm 0,08$	—
$^{63}\text{Cu} - ^{65}\text{Cu}$	$2,13 \pm 0,08$	2,21	4,00	$0,55 \pm 0,02$	$0,60 \pm 0,04$
$^{92}\text{Mo} - ^{96}\text{Mo}$	$17,42 \pm 0,20$	17,56	16,32	$1,08 \pm 0,01$	—
$^{95}\text{Mo} - ^{96}\text{Mo}$	$5,50 \pm 0,15$	5,53	4,08	$1,35 \pm 0,03$	—
$^{96}\text{Mo} - ^{97}\text{Mo}$	$1,12 \pm 0,10$	1,15	4,08	$0,28 \pm 0,03$	—

\* Получен вычитанием сдвига, обусловленного приведенной массой, из наблюдаемого сдвига.

\*\* Рассчитан для однородного распределения заряда ядра с  $R=1,2A^{1/3}$  Ферми.

Таблица 2.23

## Мюонные изотопические сдвиги в Sn [293]

Пара изотопов	Наблюдаемый сдвиг, кэВ	Полевой сдвиг, кэВ*	Стандартный сдвиг, кэВ**	$\delta E_{\text{пол}}/\delta E_{\text{станд}}$ по	
				[293]	[156]
$^{116}\text{Sn} - ^{117}\text{Sn}$	$2,35 \pm 0,10$	2,38	5,15	$0,46 \pm 0,02$	$0,45 \pm 0,03$
$^{116}\text{Sn} - ^{118}\text{Sn}$	$6,10 \pm 0,10$	6,16	10,25	$0,60 \pm 0,01$	$0,630 \pm 0,023$
$^{118}\text{Sn} - ^{119}\text{Sn}$	$1,84 \pm 0,16$	1,87	5,10	$0,37 \pm 0,03$	$0,35 \pm 0,04$
$^{118}\text{Sn} - ^{120}\text{Sn}$	$5,23 \pm 0,08$	5,29	10,08	$0,52 \pm 0,01$	$0,521 \pm 0,014$
$^{120}\text{Sn} - ^{122}\text{Sn}$	$4,44 \pm 0,15$	4,49	9,93	$0,45 \pm 0,02$	$0,508 \pm 0,016$
$^{122}\text{Sn} - ^{124}\text{Sn}$	$4,39 \pm 0,10$	4,44	9,80	$0,45 \pm 0,01$	—
$^{116}\text{Sn} - ^{124}\text{Sn}$	$20,16 \pm 0,20$	20,38	40,06	$0,503 \pm 0,005$	$0,457 \pm 0,015$ [103]

\* Под полевым сдвигом понимается наблюдаемый сдвиг с учетом поправки на эффект приведенной массы.

\*\* Рассчитан для однородного распределения заряда ядра с  $R=1,2A^{1/3}$  Ферми.

Таблица 2.24

## Мюонные изотопические сдвиги K- и L-линий изотопов Nd [293]

Пара изотопов	$\delta K_{\alpha 1}$ , кэВ	$\delta K_{\alpha 2}$ , кэВ	$\delta L_{\alpha 1}$ , кэВ	$\delta L_{\alpha 2}$ , кэВ
$^{142}\text{Nd} - ^{144}\text{Nd}$	$15,68 \pm 0,15$	$15,56 \pm 0,15$	$0,38 \pm 0,10$	$0,50 \pm 0,10$
$^{144}\text{Nd} - ^{146}\text{Nd}$	$15,20 \pm 0,15$	$14,38 \pm 0,15$	$0,01 \pm 0,10$	$0,83 \pm 0,10$
$^{146}\text{Nd} - ^{148}\text{Nd}$	$17,72 \pm 0,15$	$16,74 \pm 0,15$	$-0,96 \pm 0,10$	$0,02 \pm 0,10$
$^{148}\text{Nd} - ^{150}\text{Nd}$	$37,09 \pm 0,15$	$25,46 \pm 0,15$	$-15,54 \pm 0,10$	$-3,91 \pm 0,10$

Таблица 2.25

Мюонные изотопические сдвиги 1s-уровня изотопов Nd [293]

Пара изотопов	Наблюдаемый сдвиг, кэВ	Ядерная поляризационная поправка, кэВ*	Полевой сдвиг, кэВ**	Стандартный сдвиг, кэВ**	$\frac{\delta E_{\text{пол}}}{\delta E_{\text{станд}}}$
$^{142}\text{Nd} - ^{143}\text{Nd}$	$6,03 \pm 0,30$	—	6,05	6,70	$0,90 \pm 0,06$
$^{144}\text{Nd} - ^{145}\text{Nd}$	$5,78 \pm 0,50$	—	5,80	6,61	$0,88 \pm 0,09$
$^{142}\text{Nd} - ^{144}\text{Nd}$	$16,06 \pm 0,20$	0,19	16,30	13,37	$1,22 \pm 0,01$
$^{144}\text{Nd} - ^{146}\text{Nd}$	$15,21 \pm 0,20$	0,32	15,58	13,20	$1,18 \pm 0,01$
$^{146}\text{Nd} - ^{148}\text{Nd}$	$16,76 \pm 0,20$	0,64	17,44	13,05	$1,34 \pm 0,02$
$^{143}\text{Nd} - ^{150}\text{Nd}$	$21,55 \pm 0,25$	1,50	23,08	12,92	$1,79 \pm 0,02$

\* Рассчитана Ченом.

\*\* Под полевым сдвигом понимается наблюдаемый сдвиг с учетом поправок на эффекты приведенной массы и поляризации ядра.

\*\* Рассчитан для однородного распределения заряда ядра с  $R = 1,2A^{1/3}$  Ферми.

## § 2.4. ИЗОТОННЫЕ СДВИГИ

Как уже указывалось, дополнительные нейтроны ядра приводят к гораздо меньшему увеличению его радиуса, чем это следует из зависимости  $A^{1/3}$ . Поскольку в области стабильности радиус распределения заряда ядра с достаточно высокой точностью описывается зависимостью  $A^{1/3}$ , можно ожидать, что увеличение радиуса ядра, вызванное добавлением протонов, будет превышать ожидаемое из закона  $A^{1/3}$ , т. е. отличие в значениях  $R_0$  для различных изотонов должно быть большим, чем это следует из зависимости  $A^{1/3}$  [68]:

$$\frac{\delta(R_0)_p}{\delta(R_0)_{\text{станд}}} > 1, \quad (2.159)$$

где

$$\delta(R_0) \equiv R_0(Z, N + \Delta N) - R_0(Z, N). \quad (2.160)$$

Куитмен [328] исследовал изменения среднеквадратических радиусов распределения заряда ядра при добавлении протонов для 25 ядер между  $^{39}_{19}\text{K}$  и  $^{209}_{83}\text{Bi}$ . Он использовал результаты измерений энергий мюонных  $2p \rightarrow 1s$ -переходов и полученные в то время значения оптических изотопических сдвигов и нашел, что изотонные сдвиги  $\delta(R_0)_p / \delta(R_0)_{\text{станд}}$ , во всяком случае для тяжелых ядер, больше, чем это следует из закона  $A^{1/3}$ . В табл. 2.26 приведены результаты расчета, проведенного Куитменом. Погрешности измерения изотонных сдвигов, указанные в круглых скобках, обусловлены только неопределенностью разности энергии изотонов  $\Delta E_{\text{эксп}}$ . Различие экспериментальных значений энергий мюонного рентгеновского излучения изотонов во многом обусловлено кулоновскими эффектами и поэтому отдельные значения изотонных сдви-

гов получены с очень большими погрешностями. Изотонные сдвиги описываются следующим выражением:

$$\frac{\delta(R_0)_p}{\delta(R_0)_{\text{станд}}} = \frac{\delta(R_0)_p/R_0}{\delta Z/3A}, \quad (2.161)$$

где

$$\bar{A} = Z + N + \delta Z/2. \quad (2.162)$$

Радиальный параметр  $r_0$  ( $R = r_0 A^{1/3}$ ) использованный в расчетах, приведен в третьей колонке.

Т а б л и ц а 2.26

Мюонные изотонные сдвиги [328]

Пара изотонов	Число нейтронов	$r_0$ . Ферми		$\frac{\delta(R_0)_p}{\delta(R_0)_{\text{станд}}}$
		Легкое ядро	Тяжелое ядро	
$^{19}\text{K} - ^{20}\text{Ca}$	20	1,320	1,314	$1,0 \pm 1,2$ (0,6)
$^{20}\text{Ca} - ^{22}\text{Ti}$	24	1,314	1,284	$1,5 \pm 0,8$ (0,3)
$^{25}\text{Mn} - ^{26}\text{Fe}$	30	1,263	1,270	$1,4 \pm 1,0$ (0,9)
$^{27}\text{Fe} - ^{27}\text{Co}$	32	1,270	1,249	$0,4 \pm 2,0$ (1,6)
$^{27}\text{Co} - ^{28}\text{Ni}$	32	1,249	1,279	$0,2 \pm 2,0$ (1,5)
$^{28}\text{Ni} - ^{29}\text{Cu}$	34	1,279	1,266	$0,6 \pm 2,6$ (0,2)
$^{29}\text{Cu} - ^{30}\text{Zn}$	34	1,266	1,304	$3,1 \pm 1,5$ (0,9)
$^{47}\text{Ag} - ^{48}\text{Cd}$	62	1,237	1,232	$1,6 \pm 0,8$ (0,7)
$^{48}\text{Cd} - ^{49}\text{In}$	66	1,232	1,226	$-0,3 \pm 0,7$ (0,7)
$^{49}\text{In} - ^{50}\text{Sn}$	66	1,226	1,220	$1,0 \pm 1,0$ (0,9)
$^{50}\text{Sn} - ^{51}\text{Sb}$	70	1,220	1,215	$2,8 \pm 0,9$ (0,8)
$^{51}\text{Sb} - ^{52}\text{Te}$	72	1,215	1,211	$2,7 \pm 0,6$ (0,4)
$^{81}\text{Tl} - ^{82}\text{Pb}$	124	1,201	1,195	$1,6 \pm 0,7$ (0,6)
$^{82}\text{Pb} - ^{83}\text{Bi}$	126	1,195	1,199	$2,7 \pm 0,4$ (0,3)

Измеряя мюонные изотопические сдвиги, Эрлих [156] уточнил значения изотонных сдвигов для пары К—Са. В данном случае имело место различие по энергии около 70 кэВ, тогда как типичное различие по энергии между изотопами составляет примерно 0,5 кэВ.

Данные по К и Са не содержат заметных расхождений в форме основной линии спектра. Допуская возможное систематическое отклонение формы линии в пределах удвоенной погрешности и полагая  $\delta t = 0$ , Эрлих получил значения сдвигов, которые приведены в табл. 2.27. Напомним, что значение сдвига, полученное Куитменом, составляет  $1,0 \pm 1,2$  (см. табл. 2.26). Хотя результаты Куитмена содержат слишком большие погрешности, чтобы делать из них определенные

Т а б л и ц а 2.27

Мюонные изотонные сдвиги для пары изотонов К—Са [156]

Пара изотонов	$\delta(R_0)_p / \delta(R_0)_{\text{станд}}$
$^{39}\text{K} - ^{40}\text{Ca}$	$1,40 \pm 0,20$
$^{41}\text{K} - ^{42}\text{Ca}$	$1,64 \pm 0,20$



выводы, его данные, как можно видеть из табл. 2.26, свидетельствуют об оболочечных эффектах вблизи  $Z = 28$  и  $Z = 50$ . Следует отметить, что более точный анализ, проведенный Эрлихом, дает также устойчивое большое значение изотонного сдвига вблизи заполненной протонной оболочки в Ca ( $Z = 20$ ).

### § 2.5. ИЗОМЕРНЫЕ СДВИГИ

Основное и возбужденное состояния ядер могут иметь различные радиусы распределения заряда. Разность энергий, вызванная изменением радиуса распределения заряда ядра в различных его состояниях называют изомерным сдвигом и часто обозначают как  $\Delta\langle r^2 \rangle / \langle r^2 \rangle$ , т. е. как изменение среднеквадратического радиуса распределения заряда по мере возбуждения ядра. Существуют два метода определения изомерных сдвигов, а именно: с помощью эффекта Мёссбауэра в обычных, электронных, атомах и путем измерения ядерного излучения в мюонных атомах.

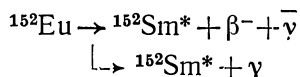
В первом случае изомерный сдвиг  $\Delta E$  для рассеянных  $\gamma$ -квантов определяется следующим выражением:

$$\Delta E = \frac{2\pi}{3} Z e^2 \Delta |\psi_0|^2 \Delta \langle r^2 \rangle, \quad (2.163)$$

где  $\Delta |\psi_0|^2$  — изменение электронной плотности в ядре между двумя состояниями всей системы;  $\Delta \langle r^2 \rangle$  — различие в значении среднеквадратического радиуса заряда между основным и возбужденным состоянием ядра. Таблицу изомерных сдвигов, определенных с помощью эффекта Мёссбауэра, можно найти в работе [258].

Теоретическое исследование электромагнитного взаимодействия между возбужденным деформированным ядром и мюоном на  $1s$ -орбите было проведено Ченом и Уилетсом [104] и Гюфнером [236]. Последний предсказывал появление сдвига в энергии перехода, вызванное изменением энергии ядра за счет влияния мюона на его деформацию. Интерпретировать этот сдвиг удобнее не на языке изменения деформации ядра, а как различие среднеквадратических радиусов распределения заряда в основном и возбужденном состояниях. Этот мюонный изомерный сдвиг впервые был обнаружен в  $^{152}\text{Sm}$  Ву и сотр. [395]. Их результаты показаны на рис. 2.14, а, б.

На рис. 2.14, а показан спектр ядерного  $\gamma$ -излучения, отвечающего переходу  $2^+ \rightarrow 0^+$ . Линия 133,5 кэВ относится к  $K_\alpha$ -мюонному рентгеновскому излучению для  $^{16}\text{O}$ , присутствующему в образце  $\text{Sm}_2\text{O}_3$ . Ядерное  $\alpha$ -излучение при распаде



показано в нижней части рисунка. Этот спектр измерялся одновременно с мюонным спектром. Сдвиг по энергии составляет  $\delta E = 560 \pm 50$  эВ, что дает  $\delta \langle r^2 \rangle / \langle r^2 \rangle = (5,9 \pm 0,4) \cdot 10^{-4}$ .

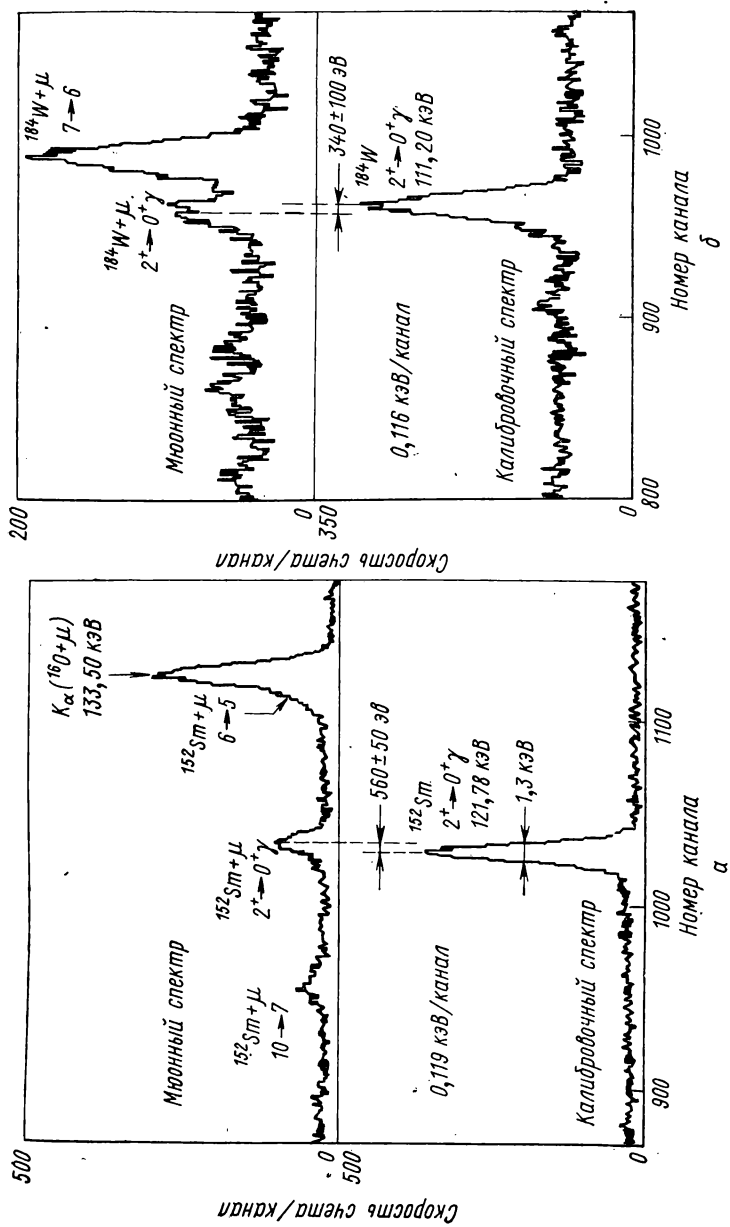


Рис. 2.14. Сдвиг энергии  $\gamma$ -кванта при распаде первого вращательного уровня, обусловленный мюоном в 1s-состоянии мезоатомов  $^{152}\text{Sm}$  (а) и  $^{184}\text{W}$  (б) [45]. Вверху —  $\gamma$ -спектр в присутствии мюона; внизу — спектр, полученный с помощью радиоактивного источника.

Вслед за первыми измерениями те же авторы [45] провели измерения энергетических сдвигов для семи деформированных ядер, используя улучшенную систему сравнения энергий. Результаты приведены в табл. 2.28 (см. также [25] и рис. 2.14,б для мюонных атомов W).

Бэк и сотр. [27], исследуя  $\gamma$ -излучение при мюонном возбуждении  $^{181}\text{Ta}$ , обнаружили  $\gamma$ -линии 136 и 165 кэВ (разрешением 15 кэВ), которые можно объяснить снятием возбуждения с первого и второго вращательных уровней ядра  $^{181}\text{Ta}$ . (Это ядро имеет основное состояние  $7/2^+$  и ротационные уровни  $9/2^+$  при 136,2 кэВ и  $11/2^+$  при 301,4 кэВ.) Из сравнения с соответствующей  $\gamma$ -линией радиационного распада  $^{181}\text{Ta}$  был найден сдвиг линии при 136 кэВ, равный  $+110 \pm 60$  эВ. Отсюда можно получить  $\Delta\langle r^2 \rangle = (+1,5 \pm 0,8) \times 10^{-3}$  Ферми<sup>2</sup>.

В случае мюонных атомов найти  $\Delta\langle r^2 \rangle$  не так просто, как с помощью эффекта Мёсбауэра. Эта величина проявляется в изменении распределения заряда ядра. Анализ экспериментов, посвященных измерению мюонного изомерного сдвига в  $^{181}\text{Ta}$ , проводился с ферми-распределением заряда для радиуса, половинной плотности  $c = 6,51$  Ферми и толщины поверхностного слоя  $t = 1,5$  Ферми [141]. Тогда для постоянного значения  $t$  получается  $\Delta\langle r^2 \rangle = (1,4 \pm 0,7) \times 10^{-3}$  Ферми<sup>2</sup> и для постоянной  $c$  —  $\Delta\langle r^2 \rangle = (1,6 \pm 0,8) \cdot 10^{-3}$  Ферми<sup>2</sup>. Эти два крайних значения в пределах погрешности измерений согласуются друг с другом, и окончательно имеем  $\Delta\langle r^2 \rangle = (1,5 \pm 0,8) \cdot 10^{-3}$  Ферми<sup>2</sup>. Подобный метод использовался при анализе результатов, приведенных в табл. 2.28. Из величин  $E_{\text{изомер}}$  были найдены изменения в каждом из параметров  $c$ ,  $t$  и  $\beta$  при условии, что два других остаются постоянными. В пределах погрешности эксперимента получены одинаковые изменения параметров.

Наблюдаемые сдвиги в энергии излучения в присутствии мюона нельзя объяснить только изменением радиуса распределения заряда, т. е. изомерным сдвигом. Влияние магнитного сверхтонкого расщепления при интерпретации мюонных изомерных сдвигов исследовано Даниэлем [124] и более подробно Гэлом и сотр. [211]. Следуя работе последних, посмотрим, какие дополнительные физические эффекты дают заметный вклад в наблюдаемые сдвиги по энергии.

Гамильтониан мюонного атома можно записать в следующем виде:

$$H = H_{\text{я}} + [T(\mu) + V(r_{\mu})] + (H^c + H^m), \quad (2.164)$$

где  $H_{\text{я}}$  — гамильтониан ядра в отсутствие мюона, собственные состояния этого гамильтониана будем обозначать  $|\psi_{\alpha}(1, \dots, A)\rangle$ ;  $[T(\mu) + V(r_{\mu})]$  — гамильтониан мюона с кинетической энергией  $T(\mu)$  и средним кулоновским потенциалом  $V(r_{\mu})$ , обусловленным распределением заряда ядра в его основном состоянии (собственные функции гамильтониана мюона —  $|nl_j\rangle$ );  $H^m$  — магнитное взаи-

Сравнение величин  $\Delta < r^2 > / < r^2 >$ , полученных из спектров мюонных атомов и эффекта Мессбауэра [45]

Нуклид	Энергия перехода $2^{+} \rightarrow 0^{+}$ , кэВ	Источник $\gamma$ -излучения	$\Delta E_{\text{эксп}}$ , эВ	$\Delta E_{\text{ц. т.}}$ , эВ*	$\Delta E_{\text{изомер}}$ , эВ	$\frac{\Delta < r^2 >}{< r^2 >} \cdot 10^4$	
						из мюонных спектров	из эффекта Мессбауэра
$^{150}_{80}\text{Nd}$	130,17	Кулоновское возбуждение**	+570 ± 120	-270	+840 ± 120	+5,8 ± 0,8	—
$^{152}_{62}\text{Sm}$	121,78	$^{152}\text{Eu} (\beta^{+})$ (ест.)	+560 ± 60	-360	+920 ± 70	+5,9 ± 0,4	+3,7 [258]
$^{154}_{64}\text{Gd}$	123,07	$^{154}\text{Eu} (\beta^{-})$	+670 ± 150	-240 -310	+800 ± 70 +980 ± 150	+5,1 ± 0,4 +5,9 ± 0,8	+4,8 [397]
$^{166}_{68}\text{Er}$	80,56	$^{166}\text{Ho} (\beta^{-})$	-350 ± 150	-320	-30 ± 150	-0,16 ± 0,8	—
$^{182}_{74}\text{W}$	100,10	$^{182}\text{Ta} (\beta^{-})$	-320 ± 100	-290 -240	-30 ± 100 -80 ± 100	-0,13 ± 0,5 -0,33 ± 0,5	+0,15 [258] +1,2 [397]
$^{184}_{74}\text{W}$	111,20	$^{184}\text{Re}$ (ест.)	-340 ± 100	-315 -250	-25 ± 100 -90 ± 100	-0,11 ± 0,5 -0,40 ± 0,5	+0,8
$^{186}_{74}\text{W}$	122,57	$^{186}\text{Re}$ (ест.)	-350 ± 100	-340 -250	-10 ± 100 -100 ± 100	-0,04 ± 0,5 -0,50 ± 0,5	—

\* Сдвиги центра инерции  $^{182}\text{Sm}$ ,  $^{166}\text{Er}$ ,  $^{182}\text{W}$ ,  $^{184}\text{W}$ ,  $^{186}\text{W}$  взяты из работы [211], тогда как для  $^{180}\text{Gd}$ ,  $^{184}\text{Gd}$  эта величина рассчитана Гюфнером с уменьшением на 2%. Погрешность значения сдвига составляет ±10%.

\*\* Кулоновское возбуждение  $^{150}\text{Nd}$  исследовалось Гринбаумом и др. Гюфнер изучал эффект экранировки 5f-оболочки в твердых телах с помощью изотопических сдвигов  $^{151}\text{Eu}$  и  $^{153}\text{Eu}$  и  $\text{CaF}_2$  и обнаружил увеличение плотности электронов на фактор 2,09 по сравнению со свободным атомом. Следовательно,  $\Delta < r^2 > / < r^2 > = 10 \cdot 10^{-4} / 2,09 = 4,8 \cdot 10^{-4}$ .

модействие мюона с ядром;  $H^c$  — остаточное кулоновское взаимодействие:

$$H^c = - \sum_p \frac{e^2}{|r_\mu - r_p|} - V(r_\mu). \quad (2.165)$$

Последние два члена обычно считают малыми и учитывают по теории возмущений.

Изомерный сдвиг  $\Delta E_{\alpha, \beta}^{\text{изомер}}$  между двумя состояниями  $\psi_\alpha$  и  $\psi_\beta$  существенно зависит от изменения радиуса распределения заряда между этими двумя состояниями и определяется выражением

$$\Delta E_{\alpha, \beta}^{\text{изомер}} = \langle \psi_\alpha, 1s_{1/2} | H^c | \psi_\alpha, 1s_{1/2} \rangle - \langle \psi_\beta, 1s_{1/2} | H^c | \psi_\beta, 1s_{1/2} \rangle, \quad (2.166)$$

где  $1s_{1/2}$  — состояние мюона. Магнитное взаимодействие между мюоном в состоянии  $1s_{1/2}$  и ядром в состоянии  $\psi_\alpha$  со спином  $I_\alpha$ , не равным нулю, приводит к сверхтонкому расщеплению, которое в первом порядке теории возмущений можно описать выражением

$$\begin{aligned} E_\alpha^M = & \langle \psi_\alpha, 1s_{1/2}; F = I_\alpha + \frac{1}{2} | H^m | \psi_\alpha, 1s_{1/2}; F = I_\alpha + \\ & + 1/2 \rangle - \langle \psi_\alpha, 1s_{1/2}; F = I_\alpha - \frac{1}{2} | H^m | \psi_\alpha, 1s_{1/2}; \\ & F = I_\alpha - 1/2 \rangle, \end{aligned} \quad (2.167)$$

где  $F$  — полный спин мюонного атома. Гэл с сотр. [211] провели расчеты магнитного сверхтонкого расщепления в мюонных атомах для нескольких состояний  $2^+$  деформированных четно-четных ядер в области от  $^{152}\text{Sm}$  до  $^{186}\text{W}$ . Расщепление приводит к асимметричному дублету  $\gamma$ -излучения, центр инерции которого оказывается сдвинутым по сравнению с положением нерасщепленной линии даже в отсутствие изомерного эффекта. Сдвиг центра инерции ядерного  $\gamma$ -излучения происходит по двум причинам. Во-первых существует нестатистический, т. е. непропорциональный  $2F+1$ , механизм заполнения уровней магнитной сверхтонкой структуры, обусловленной ядром. Заполнение этих уровней меняется от одного ядра к другому и определяется тем же механизмом, который приводит к возбуждению вращательных состояний. Во-вторых,  $M1$ -переход внутри дублета усиливает заселение нижнего уровня сверхтонкой структуры. Поскольку последний эффект заметно преобладает, центр инерции сдвигается в область более низких энергий. Этот (псевдоизомерный) сдвиг имеет тот же порядок, что и наблюдаемый сдвиг по энергии. В табл. 2.28 приведены изомерные сдвиги, полученные выделением сдвига центра инерции из наблюдаемых сдвигов по энергии с использованием результатов расчета Гэла и сотр. [211].

Сдвиг по энергии и расщепление ядерных уровней мюонного атома можно получить также во втором порядке теории возмущений ( $H^c + H^m$ ):

$$\Delta E_{\alpha, F}^{(2)} = - \sum_{\substack{\beta, nlj \\ (\beta, nlj) \neq (\alpha, 1s_{1/2})}} \frac{|\langle \Psi_{\beta, nlj}; F | H^c + H^m | \Psi_{\alpha, 1s_{1/2}}; F \rangle|^2}{(E_{\beta} - E_{\alpha}) + (E_{nlj} - E_{1s_{1/2}})}. \quad (2.168)$$

Это выражение учитывает поляризацию состояний ядра и мюона. Главная часть сдвига по энергии для данного ядерного уровня возникает за счет промежуточных состояний ядра и мюона при высоких энергиях возбуждения. Этот сдвиг составляет несколько килоэлектронвольт. Здесь мы имеем дело с различием в поляризации ядер  $\Delta E_{\text{пол}}$  между состояниями  $2^+$  и  $0^+$ , как это видно из соотношения (2.168). Так как внутренняя структура ядерных вращательных состояний  $0^+$  и  $2^+$  очень похожа, предполагается, что различие в поляризации этих состояний будет слабым. Во вращательной модели вклад промежуточных состояний мюона, по-видимому, также мал. Небольшое изменение полной поляризации деформированных ядер может приводить к сдвигу по энергии, сравнимому с наблюдаемым сдвигом. Однако надежные оценки  $\Delta E_{\text{пол}}$  отсутствуют, и поэтому при анализе мюонных изомерных сдвигов этой величиной пренебрегают.

Нельзя сказать, что изомерные сдвиги, полученные с помощью эффекта Мёссбауэра и ядерного  $\gamma$ -излучения в мюонных атомах, хорошо согласуются между собой. Особенно бросается в глаза тот факт, что отрицательные изомерные сдвиги в случае мюонных атомов  $^{166}\text{Er}$ ,  $^{182}\text{W}$ ,  $^{184}\text{W}$ ,  $^{186}\text{W}$  получаются даже с учетом сдвигов центра инерции линий сверхтонкого расщепления, тогда как изомерные сдвиги, найденные с помощью эффекта Мёссбауэра, всегда положительны, как и ожидается из модели центробежного растяжения. Это различие не удивительно, поскольку анализ эксперимента содержит неопределенности, в частности при учете поляризационных эффектов.

## § 2.6. ДЕЛЕНИЕ ЯДЕР ПРИ БЕЗЫЗЛУЧАТЕЛЬНЫХ ПЕРЕХОДАХ

Еще в 1949 г. Уилер предсказывал возможность существования двух способов деления урана остановившимися мюонами: захват  $\mu^-$ -мезона ( $\mu^- + \text{U} = \text{Pa} + \nu$ ) и безызлучательные переходы в мюонных атомах. В случае захвата медленных отрицательных мюонов тяжелыми ядрами энергия возбуждения в среднем составляет 15—20 МэВ; этой энергии вполне достаточно, чтобы вызвать деление. Второй механизм детально рассмотрен Д. Ф. Зарецким [398], который показал, что существует заметная вероятность передачи энергии перехода между низко лежащими состояниями мезоатома непосредственно ядру без испускания рентгеновского излучения.

Энергия такого возбуждения для  $U$  и  $Pu$  составляет 6,3 МэВ. Поскольку время жизни мюона в  $1s$ -состоянии мезоатома значительно больше (менее  $5 \cdot 10^{-8}$  с) времени жизни возбужденного состояния ядра, захвату мюона с  $K$ -оболочки может предшествовать распад возбужденного ядра по различным каналам, в частности  $\gamma$ - и нейтронное излучение, деление.

Эти два различных механизма, приводящие к делению ядра, можно разделить один от другого экспериментально, так как механизм, связанный с прямым захватом мюона, осуществляется с характерным средним временем жизни остановившегося в уране мюона (менее  $5 \cdot 10^{-8}$  с), тогда как деление, вызванное переходами, в мюонных атомах происходит быстрее (менее  $10^{-9}$  с). [Время торможения отрицательного мюона в веществе составляет  $10^{-9}$  с. После этого мюон захватывается на орбиту и совершает быстрый (менее  $10^{-12}$  с) каскад переходов в  $1s$ -состояние мюонного атома.]

Вопреки результатам первых расчетов Д. Ф. Зарецкого, которые предсказывали большой вклад безызлучательных переходов в деление  $^{238}U$ , экспериментальные данные, полученные Диазом и Г. Е. Беловицким с сотр. [143, 144, 409], показали, что безызлучательные переходы вызывают деление только 1% мюонных атомов урана. Полученный вывод можно объяснить тем, что присутствие мюона в  $1s$ -состоянии уменьшает кулоновскую энергию ядра и, следовательно, увеличивает барьер деления. Этот эффект ясно виден из следующих расчетов.

Потенциальная кривая деления в мезоатоме может быть представлена в виде

$$E_N^\mu = E_N^0 + E_\mu, \quad (2.169)$$

где  $E_N^0$  — потенциальная кривая деления ядра в отсутствие мюона;  $E_\mu$  — энергия связи мюона, зависящая от параметров ядерной деформации. Величина  $E_\mu$  уменьшается при деформации ядра, поэтому энергетический порог деления увеличивается.

Кулоновский потенциал деформированного ядра, которое согласно нашему предположению имеет форму эллипсоида вращения с полуосями  $a$  и  $b$ , до появления седловой точки описывается следующим выражением:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, \beta) = & \frac{Ze}{c} \left\{ [1 - P_2(\operatorname{ch} \alpha) P_2(\cos \beta)] \ln \operatorname{cth} \frac{\alpha_0}{2} + \right. \\ & \left. + \frac{3 \operatorname{ch}^2 \alpha}{2 \operatorname{ch} \alpha_0} P_2(\cos \beta) + \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha}{\operatorname{sh}^2 \alpha_0} \right) \frac{\sin^2 \beta}{\operatorname{ch} \alpha_0} \right\} \text{ для } \operatorname{ch} \alpha \leq \operatorname{ch} \alpha_0 = a/c; \\ \Phi(\alpha, \beta) = & \frac{Ze}{c} \left\{ [1 - P_2(\operatorname{ch} \alpha) P_2(\cos \beta)] \ln \operatorname{cth} \frac{\alpha}{2} + \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} \operatorname{ch} \alpha P_2(\cos \beta) \right\} \text{ для } \operatorname{ch} \alpha \geq a/c, \end{aligned} \quad (2.170)$$

где  $Ze$  — заряд ядра;  $P_2(\chi)$  — полином Лежандра второго порядка;  $\alpha$  и  $\beta$  — координаты вырожденного эллипсоида;  $c^2 = a^2 - b^2$ .

Значения  $E$  для основного состояния мюонного атома  $^{238}\text{U}$  с потенциалом (2.170) приведены в табл. 2.29. В табл. 2.30 даны значения статической деформации  $(a/b)_{\text{стат}}$ ; отношения ядерных полуосей, отвечающих седловой точке,  $(a/b)_{\text{с.т.}}$ ; порог деления  $E_{\text{порог}}$  и увеличение порога деления  $\Delta E_{\text{порог}}$ .

Таблица 2.29

Энергия связи мюона в основном состоянии мюонного атома  $^{238}\text{U}$  как функция отношения полуосей ядра [399, 432]

$a/b$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,5
$E_{\mu}$ , МэВ	11,89	11,79	11,66	11,53	11,36	11,21	11,01

Таблица 2.30

Пороговые значения энергии деления и отношения полуосей ядра [399, 432]

Ядро	$(a/b)_{\text{стат}}$	$(a/b)_{\text{с.т.}}$	$E_{\text{порог}}$ , МэВ	$\Delta E_{\text{порог}}$ , МэВ
$^{238}\text{U}$	1,3	2,24	5,8	0,6
$^{235}\text{U}$	1,25	2,2	5,75	0,6
$^{239}\text{Pu}$	1,3	2,17	5,48	0,5

Из табл. 2.30 видно, что в случае  $^{238}\text{U}$  порог деления в присутствии мюона ( $E_{\text{порог}} + \Delta E_{\text{порог}}$ ) выше энергии возбуждения (примерно 6,3 МэВ), тогда как в случае  $^{239}\text{Pu}$  этот порог приблизительно на 0,3 МэВ ниже энергии возбуждения. Эти расчёты показывают, что деление, вызванное безызлучательными переходами в мюонных атомах, гораздо более вероятно в  $^{239}\text{Pu}$ , чем в  $^{238}\text{U}$ .

Это предсказание теории хорошо согласуется с экспериментальными данными, показанными на рис. 2.15, *а, б*. На этих рисунках приведены результаты измерений временного распределения актов деления, вызванного остановившимися мюонами в  $^{232}\text{Th}$ ,  $^{235}\text{U}$  и  $^{238}\text{U}$  и в  $^{239}\text{Pu}$ . В обоих случаях для регистрации деления была использована многопластинчатая газовая сцинтилляционная камера. Из рис. 2.15, *а* и *б* можно определить отношение вероятности быстрого деления к вероятности деления, обусловленного захватом мюона. Результаты приведены в табл. 2.31.

Абсолютная вероятность деления, вызванного  $\mu^-$ -захватом, согласно оценкам, составляет около 40%. Отсюда следует, что вероятность безызлучательного деления  $^{239}\text{Pu}$  порядка 20%. Сравнивая эту величину с данными по пропусканию рентгеновского излучения в мюонных атомах урана и плутония, можно сделать вывод, что вероятность безызлучательного деления Pu приблизительно в 20 раз больше, чем вероятность деления Th и U.



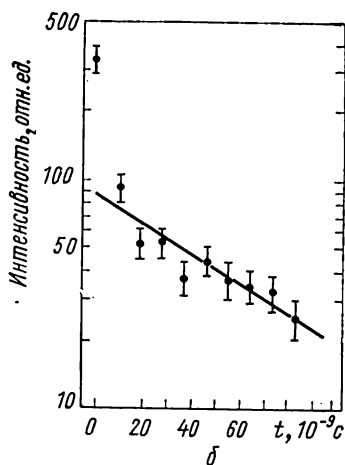
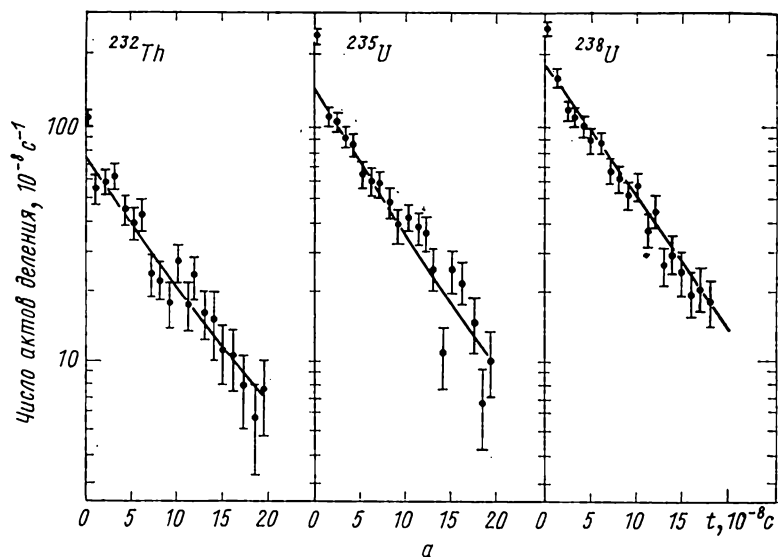


Рис. 2.15. Временное распределение актов деления ядер  $^{232}\text{Th}$ ,  $^{235}\text{U}$ ,  $^{238}\text{U}$  (а) [144] и  $^{238}\text{Pu}$  (б) [114], обусловленного остановившимися  $\mu$ -мезонами. Отделение фона не проводилось; в случае б  $\tau = 74 \pm 14$  нс.

Таблица 2.3†

Отношение вероятности быстрого деления  
к вероятности деления, обусловленного ядерным захватом

Ядро	Отношение вероятностей	Литература	Ядро	Отношение вероятностей	Литература
$^{232}\text{Th}$	$0,064 \pm 0,022$	[144]	$^{238}\text{U}$	$0,072 \pm 0,014$	[144]
$^{235}\text{U}$	$0,111 \pm 0,021$	[144]	$^{239}\text{Pu}$	$0,43 \pm 0,09$	[114]

Бьюдик с сотр. [81], используя кремниевый поверхностно-барьерный детектор, исследовали деление  $^{233}\text{U}$ ,  $^{235}\text{U}$  и  $^{238}\text{U}$ , вызванное мюонами и  $\pi$ -мезонами. Небольшое число случаев безызлучательного деления, зафиксированное в этом эксперименте, согласуется с результатами работы [144]. Отметим также, что интерпретация увеличения вероятности безызлучательного деления в  $^{239}\text{Pu}$ , как утверждают Коякару и сотр. [144], не подтверждается экспериментом Бьюдика.

## § 2.7. ДЕПОЛЯРИЗАЦИЯ МЮОНОВ В МЮОННЫХ АТОМАХ

Поляризованные вначале отрицательные мюоны не испытывают заметной деполяризации при замедлении, предшествующем их захвату на орбиту атома [55, 193, 375, 424]. Однако сильная деполяризация может возникнуть при переходах в мезоатоме. Дипольное взаимодействие (радиационное и оже-взаимодействие), вызывающее переходы в мюонных атомах, не влияет на спиновые переменные. С другой стороны, спин-орбитальное взаимодействие приводит к значительной деполяризации в момент переходов и, кроме того, в ядрах со спином, не равным нулю, дополнительная деполяризация возникает за счет сверхтонкого расщепления уровней мюонного атома. Деполяризация мюонов в мезоатомах изучалась многими авторами (см., например, [80, 244, 354, 395, 421, 429, 439, 440]).

### Деполяризация, обусловленная спин-орбитальным взаимодействием

Для возбужденных состояний не слишком высокой энергии ширина уровня в мюонном атоме значительно меньше тонкого расщепления соответствующих уровней, т. е. удовлетворяет следующему соотношению:

$$\Delta_{nl} \gg \Gamma_{nl}, \quad (2.171)$$

где  $\Delta_{nl}$  — расстояние между уровнями тонкой структуры с квантовыми числами  $n$  и  $l$ , но различными  $j = l \pm 1/2$ ;  $\Gamma_{nl}$  — ширина уровня, обусловленная радиационными и оже-переходами.

Предположим, что мюон с проекцией спина  $S_z$  на ось  $Z$  захватывается кулоновским полем ядра на уровень, характеризующийся числами  $n$  и  $l$ . Тогда, если условие (2.171) справедливо, вероятность нахождения мюона в состоянии с квантовыми числами  $n, l, j$  определяется следующим выражением:

$$P_j = \frac{2j+1}{2(2l+1)}. \quad (2.172)$$

С другой стороны, степень поляризации мюона в этом состоянии

$$\begin{aligned} \langle \sigma_z \rangle_{nlj} &= \frac{[3/4 + j(j+1) - l(l+1)]^2}{3j(j+1)} = \\ &= \begin{cases} \frac{2l+3}{3(2l+1)} 2S_z & \text{для } j = l + \frac{1}{2}; \\ \frac{2l-1}{3(2l+1)} 2S_z & \text{для } j = l - \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.173)$$

Поскольку наиболее вероятен захват мюонов в состоянии с большим  $l$ , из соотношений (2.172) и (2.173) имеем

$$P_j \simeq \frac{1}{2} \text{ и } \langle \sigma_z \rangle_{nlj} \simeq \frac{2}{3} S_z.$$

Образуя мюонный атом, мюоны заселяют состояния  $j = l + 1/2$  и  $j = l - 1/2$  приблизительно с равной вероятностью, при этом сохраняется около 1/3 их первоначальной поляризации. Затем, покидая состояние  $(n, l, j = l + 1/2)$ , мюоны совершают каскад переходов, приводящий к основному состоянию мюонного атома, и сохраняют 1/3 своей первоначальной поляризации, а покидая состояние  $(n, l, j = l - 1/2)$ , достигают основного состояния полностью деполаризованными. Это означает, что после захвата и образования мезоатома в основном состоянии остается около 17% первоначальной поляризации мюона. В табл. 2.32 приведены эксперимен-

Т а б л и ц а 2.32

Поляризация мюонов в основном состоянии мюонных атомов\*

Элемент	Спин ядра	Поляризация, %	Литература
H <sub>2</sub>	1/2	3±3	[439, 440]
C	0	14±4	[439, 440]
		19±3	[323]
		24±4	[20]
O	0	15±4	[439, 440]
F	1/2	4±4	[20]
Mg	0	20±5	[439, 440]
		18±4	[20]
Si	0	16±4	[20]
S	0	15±3	[439, 440]
		14±3	[20]
Zn	0	19±5	[439, 440]
Cd	0	19±5	[439, 440]
Pb	0	19±6	[439, 440]

\* Поляризация мюона определена из результатов измерений угловых распределений электронов, появляющихся при распаде мюона в мюонном атоме.

тальные данные, касающиеся остаточной поляризации в основном состоянии, в случае, когда начальные мюоны полностью поляризованы. Деполаризацию мюонов в мюонных атомах со спином ядра, равным нулю, можно объяснить в основном действием спин-орбитальных сил. Несколько лет назад Бакл с сотр. [80] провели измерения  $\mu e$ -асимметрии для C, Mg и водородсодержащих материалов, таких, как  $H_2O$ ,  $C_7H_8$  (толуол и поливинилтолуол) и  $CH_2$  (парафин и полиэтилен). Измерения, проведенные для изоляторов, дают половину сигнала свободной прецессии  $\mu^-$ , предсказанного на основе спин-орбитального взаимодействия. По мнению этих авторов, наблюдаемый эффект свидетельствует о существовании в некоторых изоляторах дополнительного механизма деполаризации\*.

### **Деполаризация, обусловленная сверхтонким взаимодействием**

В ядрах со спином, не равным нулю, взаимодействие, приводящее к сверхтонкой структуре, влияет на поляризацию мюона в мезоатомах, имеющих не очень высокую энергию возбуждения. Сверхтонкое расщепление уровней в мюонных атомах с большим  $Z$  имеет тот же порядок, что и радиационная ширина. Следовательно, эффект сверхтонкой структуры становится заметным в области расположения уровней более низкой энергии, где мала вероятность оже-переходов. А. П. Бухвостов и И. М. Шмушкевич [416] провели детальное теоретическое изучение деполаризации мюонов в мюонных атомах со спином  $I = 1/2$ . Согласно их расчетам, следует различать два случая. Если сверхтонкое расщепление низколежащих возбужденных состояний больше ширины уровня, поляризация мюонов в основном состоянии должна составлять примерно  $1/3$  поляризации мюона для ядра с нулевым спином. Однако когда ширина уровня много больше энергии сверхтонкого расщепления, эффект расщепления оказывается существенным только в основном состоянии и поляризация мюона составляет около  $1/2$  поляризации в случае ядра со спином, равным нулю.

А. П. Бухвостов [417] также исследовал деполаризацию мюонов в мюонных атомах со спином ядра  $I = 1$  и с произвольным спином. Его результаты для ядер со спином  $I = 1$  весьма близки к результатам, полученным без учета эффектов сверхтонкого расщепления возбужденных уровней. Это можно объяснить тем, что мюоны, находящиеся на возбужденных уровнях, приводят к частичной поляризации ядер, при этом часть поляризации мюона теряется\*<sup>2</sup>.

---

\* Влияние свойств вещества на деполаризацию отрицательных мюонов исследовалось в работах [452\*—455\*]. — *Прим. пер.*

\*<sup>2</sup> Экспериментальное изучение деполаризации  $\mu^-$ -мезонов в случае ядер с ненулевым спином выполнено в работах [402с\*, 456\*]. — *Прим. пер.*

## § 2.8. МАССА МЮОНОВ

Измерение энергии мюонного рентгеновского излучения позволяет определить массу мюона. В случае  $3d \rightarrow 2p$ -переходов можно использовать следующее выражение:

$$\frac{\bar{\nu}}{R} = \left[ \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right] Z^2 \frac{m_\mu}{m_e} \left( 1 + \frac{m_\mu}{m_e} \right)^{-1} \left[ 1 + \frac{13}{144} (Z_\alpha)^2 + \delta \right], \quad (2.174)$$

где  $\bar{\nu}$  — волновое число;  $R$  — постоянная Ридберга;  $\delta$  — сумма различных поправок.

В последнее время особое внимание уделялось мюонным переходам с энергией, меньшей 90 кэВ. Вследствие быстрого и значительного изменения сечения поглощения с энергией на краю фотоэлектрической  $K$ -полосы, а также вследствие знания энергий переходов существует возможность установить верхний либо нижний предел на энергию выделенного перехода, используя метод критического поглотителя. Результаты такого исследования, полученные С. Козловым и сотр. [273], приведены в табл. 2.33. В этой работе использовалась формула Дирака для точечного ядра, поправка на конечные размеры ядра была необходима только в случае  $2p \rightarrow 1s$ -перехода в углероде. Предполагалось, что все эффекты, за исключением поляризации вакуума, пренебрежимо малы. Полученный в измерениях  $3d \rightarrow 2p$ -линии фосфора предел (менее  $207,55 m_e$ ) противоречил наиболее точному из опубликованных в то время значению массы мюона  $m_\mu/m_e = 206,9 \pm 0,3$  [38]. С. Козлов и сотр. пришли к выводу, что для согласования с более низким пределом массы мюона, который они получили, необходимо учитывать

Т а б л и ц а 2.33

Предельные значения массы мюона, полученные  
из мюонных рентгеновских спектров [273]

Переход	Энергия перехода, кэВ	Масса мюона	
		без учета поляризации вакуума	с учетом поляризации вакуума
C ( $2p \rightarrow 1s$ )	< 76,123	< 209,99	< 208,95
P ( $3d \rightarrow 2p$ )	> 88,018*	> 207,55	> 206,77
Si ( $4f \rightarrow 3d$ )	> 26,713	> 206,82	> 206,47

\* Это значение рекомендовано Коэном и др. [107].

эффекты того же порядка, что и эффект поляризации вакуума. Затем они установили следующие пределы для массы мюона:

$$206,77 m_e < m_\mu < 208,95 m_e. \quad (2.175)$$

Позднее, в работе Гервина и сотр. [212], посвященной изучению магнитного момента мюона, было показано, что в результате тонкого расщепления  $3d \rightarrow 2p$ -перехода в мюонном фосфоре могут возникнуть линии, которые вызовут колебания на границе  $K$ -полосы Рв.

Питерман и Ямагучи [317] провели исследование поправок к  $3d \rightarrow 2p$ -переходу в мюонном фосфоре, в частности, учли поляризацию вакуума во втором и четвертом порядках теории возмущений, влияние конечных размеров ядра на кулоновский потенциал, экранирование атомными электронами и ряд других слабых эффектов. Суммарная поправка к  $3d_{5/2} \rightarrow 2p_{3/2}$ -переходу для  $m_\mu/m_e = 206,75$  в этом случае составила  $329,57 \pm 2,00$  эВ. В этой сумме поправка второго порядка к приведенной массе, обусловленная поляризацией вакуума, достигает 329,23 эВ.

Бирден [41] повторил измерения зависимости массового коэффициента поглощения для свинца от энергии рентгеновского излучения в области границы  $K$ -полосы. Эта граница, взятая в виде резкого обрыва коэффициента поглощения поглотителя, может быть использована в качестве значения энергии  $E_k$ . Если мюонное рентгеновское излучение с энергией  $E$  испытывает сильное поглощение, можно заключить, что  $E > E_k$ ; в случае  $E < E_k$  рентгеновское излучение «проникает». В действительности, граница  $K$ -полосы не является точкой обрыва коэффициента поглощения  $\sigma$  при  $E_k$ , а представляет собой довольно узкую область (приблизительно  $E_k/10^3$  для Pb), где  $\sigma$  сильно меняется (примерно в 5 раз). Если изменение  $\sigma$  в этой области хорошо известно, измеряя  $\sigma(E)$ , можно определить энергию мюонного рентгеновского излучения достаточно точно (с точностью  $\pm E_k/10^4$ ). Зная энергии переходов в мюонных атомах и принимая во внимание поправки, обусловленные различными эффектами, такими, как поляризация вакуума, эффект размера ядра и т. п., можно определить массу мюона. Как уже отмечалось выше, эти поправки сейчас детально исследованы.

Измерения массовых коэффициентов поглощения для определения массы мюона проводились в Чикаго и в Колумбийском университете. В Чикаго, используя NaI-спектрометр, нашли [286]:

$$\frac{m_\mu}{m_e} = 206,74^{+0,03}_{-0,04}, \quad (2.176)$$

а в случае пропорционального счетчика

$$\frac{m_\mu}{m_e} = 206,76^{+0,02}_{-0,03}. \quad (2.177)$$

Эти значения находятся в хорошем согласии с результатом

$$\frac{m_\mu}{m_e} = 206,78^{+0,03}_{-0,02}, \quad (2.178)$$

полученным в Колумбийском университете [139].

Из соотношений (2.176)—(2.178) можно найти среднее значение массы мюона, отвечающее экспериментам с мюонным рентгеновским излучением:

$$\frac{m_\mu}{m_e} = 206,76 \pm 0,02. \quad (2.179)$$

Этот эксперимент скорее касается измерения  $(m_\mu e_\mu^2)/(m_e e_e^2)$ , чем  $m_\mu/m_e$ , и сравнение результата с результатами других измерений дает отношение зарядов мюона и электрона  $e_\mu/e_e$ .

Существует три точных измерения статических характеристик мюона:  $g_\mu$ -фактора, так называемой величины  $(g - 2)$  (отношение частот спиновой прецессии и циклотронных колебаний) и энергии  $3d \rightarrow 2p$ -перехода в мюонном фосфоре. Шапиро и Ледерман [352] сопоставили эти измерения для лучшего согласования с фундаментальными константами мюона. Более новые результаты, касающиеся  $g_\mu$ ,  $f_\mu/f_p$  (отношение частот спиновой прецессии мюона и протона в том же самом магнитном поле) и отношения  $(m_\mu e_\mu^2)/(m_e e_e^2)$  приводят к следующим значениям:

$$\left. \begin{aligned} g_\mu/g_e &= 1,000001 \pm 0,000005; \\ m_\mu/m_e &= 206,761 \pm 0,005; \\ e_\mu/e_e &= 1,00002 \pm 0,00004. \end{aligned} \right\} \quad (2.180)$$

В настоящее время нет фундаментальной теории, способной предсказать отношения масс и зарядов, хотя из общих соображений можно ожидать, что отношение  $e_\mu/e_e$  равно единице. Предполагая, что это действительно так, имеем

$$m_\mu/m_e = 206,767 \pm 0,003. \quad (2.181)$$

Подводя итог, можно сказать, что в настоящее время наиболее точное значение массы мюона получено из прямых измерений с помощью соотношения (2.179) и из экспериментов по измерению величин  $(g - 2)$  и  $f_\mu/f_p$ . Масса мюона в настоящее время является опорной величиной для значения масс всех нестабильных частиц.

## § 2.9. ВОЗМОЖНОСТЬ ОБРАЗОВАНИЯ МЮОННЫХ АТОМОВ ПРИ РАСПАДЕ ТЯЖЕЛЫХ ГИПЕРЯДЕР

Хорошо известно, что спектр электронов при обычном ядерном  $\beta$ -распаде непрерывен. Процесс  $K$ -рождения, в котором появляются электроны в связанном  $1s$ -состоянии атома и испускаются нейтрино с дискретной энергией, пока не обнаружен. В тяжелых радиоактивных элементах обычного, неионизованного, вещества процесс  $K$ -рождения невозможен, поскольку  $K$ -оболочка заполнена. Для нейтрона и трития вероятность  $K$ -рождения мала по сравнению с вероятностью обычного  $\beta$ -распада. Процесс мюонного  $K$ -рождения при распаде тяжелого гиперядра может иметь вероятность, сравнимую с полной вероятностью распада с испусканием мюона. С. С. Герштейн и Б. М. Понтекорво [423] рассмотрели следующий процесс. Тяжелое гиперядро испускает антинейтрино дискретной энергии, при этом рождается мюон в связанном состоянии мюонного атома. Поскольку принцип Паули не запрещает нахождение мюона в  $1s$ -

состоянии любого мезоатома и радиус мюонного атома много меньше, чем обычного атома в том же состоянии, процесс мюонного  $K$ -рождения вполне вероятен.

С. С. Герштейн и Б. М. Понтекорво предполагают также, что этот процесс можно будет наблюдать в следующем эксперименте. Торможение потока отрицательных каонов в сравнительно тонкой мишени, выполненной из тяжелого элемента, приведет к образованию гиперядер, испытывающих мюонный распад с высокой вероятностью мюонного  $K$ -рождения. Затем может произойти запаздывающий захват мюонов ядром. При этом можно наблюдать запаздывающие процессы (с характерным временем примерно  $10^{-7}$  с), такие, как испускание нейтронов или электронов, а также запаздывающее деление.



### § 3.1. МЕЗОН-НУКЛОННЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Пионные атомы по некоторым признакам отличаются от мюонных атомов. Во-первых, спин пиона равен нулю, следовательно, вместо уравнения Дирака нужно использовать уравнение Клейна—Гордона. Во-вторых, сильное пион-ядерное взаимодействие создает дополнительные особенности в спектрах рентгеновских переходов.

В мюонных атомах взаимодействие мюона с ядром почти полностью электромагнитное. В пионных же атомах помимо электромагнитного взаимодействия имеется сильное взаимодействие, роль которого очень важна. Так, например, сильное взаимодействие влияет на схему каскада для малых значений орбитального момента  $l$ , вызывает сдвиги уровней энергии и изменяет ширины уровней.

В ранних работах по пионным атомам Дезер и др. [138], Бракнер [78], Д. Д. Иваненко и Г. Е. Пустовалов [441] пытались получить в первом порядке теории возмущений сдвиг и ширину уровня по низкоэнергетическим данным  $\pi$ -нуклонного рассеяния.

Однако справедливость использования первого порядка теории возмущений была поставлена под сомнение в работах Секи и Кромера [346], Фулчера и др. [210]. Они сделали вывод о том, что сильное пион-ядерное взаимодействие влияет на волновую функцию пиона внутри ядра и, согласно расчету Фулчера и др., перекрывание волновых функций ядра и  $1s$ -состояния пиона в пионном атоме  $^{23}\text{Na}$  может уменьшиться в четыре раза; этот результат находится в лучшем согласии с экспериментом, чем предсказание теории возмущений. Теоретические предсказания могут быть также заметно изменены интерференцией между вещественной и мнимой частями ядерного потенциала. Пытаясь получить лучшее согласие предсказаний теории и экспериментальных значений энергий переходов и ширин уровней в пионных атомах, Крелл и Эриксон [277] и Андерсон и др. [14] численно интегрировали уравнение Клейна—Гордона, предполагая для пион-ядерного потенциала функциональную форму, полученную Эриксоном и Эриксоном [173]. Более ранний и упрощенный анализ читатель может найти в работе Дженкинса и др. [248].

Байерс [86], Г. Е. Пустовалов [445] и Эриксон [172] пытались провести анализ пионных атомов и использовали нерелятивистские

волновые функции с феноменологическим пион-ядерным потенциалом, добавленным к кулоновскому потенциалу. Формализм, развитый Эриксоном и Эриксоном [173], широко использовался для вычисления сдвигов уровней энергии и ширин линий. В этой модели пион-ядерный потенциал связан с амплитудой пион-нуклонного рассеяния и скоростями поглощения пионов.

### § 3.2. АНАЛИЗ ПИОННОГО РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Если пренебречь сильным пион-ядерным взаимодействием, то собственные значения уравнения Клейна—Гордона с потенциалом ядра, учитывающим конечность распределения заряда, дают, по существу, уровни энергии пионных атомов. Среди различных возможных электромагнитных поправок существенна только поправка на эффект поляризации вакуума. Поэтому различие между наблюдаемыми энергиями переходов и энергиями, предсказанными уравнением Клейна—Гордона (с поправками на эффекты поляризации вакуума и конечных размеров ядра), можно считать обусловленным сильным пион-ядерным взаимодействием. Экспериментальные значения сдвигов уровней энергии  $\Delta E$ , получающихся в результате сильного пион-ядерного взаимодействия, находятся по формуле

$$\Delta E = E_{\text{эксп}} + (E_{\text{К-Г}} + E_{fs} + E_{\text{в.р}}), \quad (3.1)$$

где  $E_{\text{эксп}}$  — измеренная энергия пионного рентгеновского излучения;  $E_{\text{К-Г}}$  — энергия, полученная при решении уравнения Клейна—Гордона для случая точечного ядра;  $E_{fs}$  и  $E_{\text{в.р}}$  — поправки на конечные размеры ядра и поляризацию вакуума.

Далее будем использовать естественную систему единиц, в которой  $\hbar = c = 1$ . Заменяя в уравнении Шредингера оператор нерелятивистской кинетической энергии  $p^2/2m$  его релятивистской формой  $[(p^2 + m^2)^{1/2} - m]$ , получаем релятивистское волновое уравнение, включающее коммутатор:

$$(p^2 + m^2) \psi + [(p^2 + m^2)^{1/2}, V] \psi = (E - V)^2 \psi, \quad (3.2)$$

где  $V$  — сумма электромагнитного  $V_c$  и ядерного  $V_n$  потенциалов;  $m$  и  $p$  — масса и импульс пиона;  $E$  — полная энергия пиона, включающая его массу покоя ( $E = m + \epsilon$ , где  $\epsilon$  — энергия связи пиона). Если в уравнении (3.2) исключить коммутатор, то оно станет идентичным уравнению Клейна—Гордона. Поскольку в дальнейшем будет использоваться нерелятивистский потенциал пион-ядерного взаимодействия, можно опустить член с коммутатором, являющийся релятивистской поправкой. Оставляя только линейные по  $V_n$  члены, запишем волновое уравнение:

$$[1 + m/AM] \nabla^2 \psi = [m^2 - (E - V_c)^2 + 2mV_n] \psi, \quad (3.3)$$

где  $M$  — масса нуклона;  $A$  — атомное массовое число. После введения приведенной массы пиона и ядра  $\mu$  уравнение (3.3) принимает вид

$$\frac{\nabla^2}{2\mu} \psi + \left[ \epsilon - V_c + \frac{(\epsilon - V_c)^2}{2m} \right] \psi = V_n \psi, \quad (3.4)$$

где последний член в левой части уравнения является релятивистской поправкой, обусловленной электромагнитным взаимодействием. Для того чтобы численно решить уравнение (3.4), его полезно переписать в такой форме:

$$\nabla \frac{(1+\alpha)}{2\mu} \nabla \psi + \left\{ (\epsilon - V_c) \left[ 1 + \frac{(\epsilon - V_c)}{2m} \right] - V_n \right\} \psi = 0 \quad (3.5)$$

[ $\alpha$  определяется формулой (3.8)].

Пион-ядерный потенциал может быть представлен следующим образом [173]:

$$V_n = V_L - \frac{1}{2\mu} \nabla \alpha(r) \nabla = \frac{1}{2\mu} [q(r) - \nabla \alpha(r) \nabla], \quad (3.6)$$

где первый и второй члены в правой части равенства представляют соответственно локальный и нелокальный потенциалы:

$$q(r) = 2\mu V_L = -[m_1(r) + m_2(r)] \quad (3.7)$$

и

$$\alpha(r) = -L(r) [n_1(r) + n_2(r)]. \quad (3.8)$$

Представленный формулой (3.6) потенциал является так называемым потенциалом Кислинджера [266], полученным из теории многократного рассеяния Ватсона [374]. Потенциал этого типа выводится в Приложении В. Этот потенциал включает в себя часть, зависящую от скорости (нелокальный потенциал), чтобы должным образом объяснить сильную  $p$ -волну во взаимодействии между пионом и нуклонами ядра. Локальный потенциал объясняет  $s$ -волновое пион-нуклонное взаимодействие.

Сдвиги уровней и ширины линий пионного рентгеновского излучения определяют в основном следующие два основных процесса (однонуклонные и двухнуклонные реакции):

$$\pi + N \rightarrow \pi + N; \quad (3.9a)$$

$$\pi + 2N \rightarrow \pi + 2N. \quad (3.9b)$$

В формулах (3.7) и (3.8)  $m_1(r)$  и  $n_1(r)$  соответствуют однонуклонным процессам, а  $m_2(r)$  и  $n_2(r)$  характеризуют двухнуклонные процессы. Функция  $L(r)$  учитывает короткодействующие корреляции между рассеивателями и может рассматриваться как пионный аналог дипольного рассеяния в плотной классической среде (ло-

рентг-лоренц-эффект). Эти функции приводятся ниже:

$$m_1(r) = \frac{4\pi}{m} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \left[b_0 + \frac{b_1(N-Z)}{A}\right] \rho(r) + \Delta m_{1F}(r) + \Delta m_c(r); \quad (3.10)$$

$$m_2(r) = \frac{4\pi}{m^4} \left(1 + \frac{m}{2M}\right) \left[B_0 + \frac{B_1}{A-1}\right] \rho^2(r) + \Delta m_{2F}(r); \quad (3.11)$$

$$L(r) = \left\{1 + \frac{1}{3} [n_1(r) + n_2(r)]\right\}^{-1}; \quad (3.12)$$

$$n_1(r) = \frac{4\pi}{m^3} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \left[c_0 + \frac{c_1(N-Z)}{A}\right] \rho(r); \quad (3.13)$$

$$n_2(r) = \frac{4\pi}{m^6} \left(1 + \frac{m}{2M}\right) C_0 \rho^2(r), \quad (3.14)$$

где  $\rho(r)$  — плотность нуклонного распределения, нормированная на  $A$  (предполагается, что распределения протонов и нейтронов одинаковы). Однонуклонные параметры пион-ядерного потенциала ( $b_0$ ,  $b_1$ ,  $c_0$  и  $c_1$ ) — вещественные, а двухнуклонные параметры ( $B_0$ ,  $B_1$  и  $C_0$ ) — комплексные. Потенциал Кислинджера выведен в импульсном приближении, без учета эффектов поглощения и ядерной корреляции. Поправка на конечность корреляционной длины определяется следующим образом:

$$\Delta m_c(r) = -\frac{9\pi^2}{m^2} \left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 \rho^2(r) \frac{(b_0^2 + b_1^2)}{p_F^2}, \quad (3.15)$$

где  $p_F$  — импульс нуклона в ядре на поверхности Ферми (порядка 250 МэВ). Обусловленные фермиевским движением нуклонов внутри ядра поправочные члены имеют вид

$$\Delta m_{1F} = \left(\frac{m}{M}\right)^2 n_1(r) L(r) \langle p_N^2 \rangle; \quad (3.16a)$$

$$\Delta m_{2F} = \left(\frac{m}{2M}\right)^2 n_2(r) L(r) \langle p_{2N}^2 \rangle, \quad (3.16b)$$

где  $\langle p_N^2 \rangle$  — среднеквадратический импульс одного нуклона (порядка  $(3/5) p_F^2$ );  $\langle p_{2N}^2 \rangle$  — среднеквадратический импульс пары нуклонов (порядка  $2 \langle p_N^2 \rangle$ ).

По теории возмущений сдвиг уровня определяется выражением

$$\Delta E = \int \psi^* V \psi d\tau, \quad (3.17)$$

где  $\psi$  — волновая функция пиона;  $\tau$  — элемент объема. Чтобы получить сдвиги уровней пионного рентгеновского излучения, Эриксоны [173] описали ядро прямоугольной потенциальной ямой с радиусом  $R$ , равным эквивалентному среднеквадратическому радиусу, полученному из экспериментов по электронному рассеянию. Пион-ядерное взаимодействие характеризуется постоянными функциями  $m_1(r)$ ,  $m_2(r)$ ,  $n_1(r)$  и  $n_2(r)$ . Эриксоны обнаружили также, что комплексный энергетический сдвиг, вызванный пион-ядерным взаимо-

действием, в случае круговых орбит может быть представлен в виде разложения:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{E_n} \left\{ 1 + \frac{\alpha l}{2l+1} + 2k_n R \left[ 1 + \frac{\alpha}{2} (1 - \delta_{l0}) \right] + \frac{(K_0 R)^2}{(2l+1)(2l+3)} + \dots \right\} = \\ = \frac{(2k_n R)^{2l+1}}{(l+1)(2l+1)!} \left[ -\alpha l - \frac{(K_0 R)^2}{(2l+1)} - \frac{3k_n R}{(2l+3)(2l+5)} + \right. \\ \left. + \frac{(1+\alpha)(KR)^4}{(2l+3)^2(2l+5)} + \dots \right], \end{aligned} \quad (3.18)$$

где  $E_n$  — невозмущенная энергия  $n$ -й боровской орбиты ( $n = l + 1$ );  $k_n$  — волновое число, соответствующее энергии  $E_n$ ;  $\alpha$  — параметр нелокального взаимодействия;  $K_0^2$  — параметр локального взаимодействия;  $K^2$  — эффективное волновое число внутри ядра. Эти величины удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\alpha = n_1 + n_2 = \text{const} \quad \text{для } r < R; \quad (3.19)$$

$$K_0^2 = m_1 + m_2 = \text{const} \quad \text{для } r < R; \quad (3.20)$$

$$K^2 = \left( -k_n^2 - K_0^2 + \frac{3\mu Ze^2}{R} \right) / (1 + \alpha). \quad (3.21)$$

Погрешность разложения (3.18) порядка 10% для сдвигов 1s-уровней в  $^{16}\text{O}$  и  $^{19}\text{F}$ .

Ширина линии пионного рентгеновского излучения может быть найдена по формуле

$$\Gamma = A_1 \int \rho^2(r) |\psi|^2 dV + A_2 \int \rho^2(r) |\nabla \psi|^2 dV, \quad (3.22)$$

где параметры  $A_1$  и  $A_2$  определяются из измеренных ширин линий. Теоретический расчет ширины линии осложняется тем, что ядерное поглощение связанного отрицательного пиона вследствие закона сохранения импульса должно в основном сопровождаться испусканием двух нуклонов. Параметры  $A_1$  и  $A_2$ , вычисленные Эриксоном [174] из реакции  $2N \rightarrow 2N + \pi$ , соответственно равны

$$A_1 = 0,299 \pm 0,036; \quad A_2 = 2,15 \pm 0,51. \quad (3.23)$$

Эти значения находятся в хорошем согласии со значениями, определенными из наблюдаемых ширин линий в работе [248]:

$$A_1 = 0,220 \pm 0,017; \quad A_2 = 1,97 \pm 0,26. \quad (3.24)$$

### § 3.3. ПИОННОЕ РЕНТГЕНОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Первые измерения пионного рентгеновского излучения проводились главным образом сцинтилляционными или пропорциональными счетчиками. Ограниченное разрешение сцинтилляционных счетчиков не позволяло определить ширины линий, а с пропорциональными счетчиками можно было исследовать только низкоэнергетические пе-

реходы. (Обзор ранних работ см. в работах Веста [377] и Стирнса [358].)

Точные измерения пионного рентгеновского излучения впервые были выполнены группой физиков в Беркли [247—249]. После этого в ЦЕРНе и в Университете Уильяма и Мэри также провели измерения с высоким разрешением для нескольких элементов, поэтому в настоящее время имеется значительное число экспериментальных данных. Результаты этих измерений приводятся в следующих разделах этого параграфа.

### Переходы $2p \rightarrow 1s$

Группа экспериментаторов в Беркли измерила энергии и ширины линий пионного рентгеновского излучения  $2p \rightarrow 1s$ -перехода для ряда элементов от  $Z = 3$  (Li) до  $Z = 12$  (Mg), используя при этом твердотельные Ge- и Si-детекторы [248, 249]. Измерения энергий и ширин линий  $2p \rightarrow 1s$ -перехода для Be, B, C, N, O, F и Na с Ge-счетчиками были проведены в ЦЕРНе [30]. В этих экспериментах не обнаружены линии в Mg и Al, несмотря на 24- и 28-часовую работу ускорителя. Результаты этих измерений и недавнего более точного измерения энергий и ширин линий  $2p \rightarrow 1s$ -перехода для Li, Be, B и C в Университете Уильяма и Мэри [227] приводятся в табл. 3.1.

Андерсон и др. [9], анализируя пионные  $2p \rightarrow 1s$ -переходы, охарактеризовали пион-ядерное взаимодействие шестью  $s$ -волновыми параметрами ( $b_0, b_1, \text{Re } B_0, \text{Re } B_1, \text{Im } B_0$  и  $\text{Im } B_1$ ) и четырьмя  $p$ -волновыми параметрами ( $c_0, c_1, \text{Re } C_0$  и  $\text{Im } C_0$ ). Для  $p$ -волновых параметров пион-ядерного взаимодействия использовались оценки Эриксонов.  $s$ -Волновые параметры определялись из экспериментальных значений сдвигов  $1s$ -уровня и ширин линий ряда мезоатомов от  $^{10}\text{B}$  до Mg. Оказалось, что сдвиги и ширины нечувствительны к предполагаемому распределению заряда. Табл. 3.2 иллюстрирует используемые в расчете параметры распределения заряда. Рассматривались два типа распределения заряда: гауссово распределение

$$\rho(r) = \rho_0 [1 + w(r/c)^2] e^{-(r/c)^2} \quad (3.25)$$

и распределение Ферми [см. формулу (1.82)]. В табл. 3.2 они соответственно обозначены Г и Ф. Предполагалось, что нейтронное и протонное распределения одинаковы.

В табл. 3.3 проводится сравнение экспериментальных значений энергий  $2p \rightarrow 1s$ -перехода и ширины  $1s$ -уровня с теоретическими значениями, полученными Андерсоном и др. [9]. Предсказанные значения энергий переходов очень хорошо согласуются с наблюдаемыми. Однако теоретические и экспериментальные значения ширины уровней согласуются плохо, и предсказанные значения отличаются в среднем на 50% от наблюдаемых.

Энергии и ширины пионных  $2p \rightarrow 1s$ -переходов, кэВ

Нуклид	$E_{\text{эксп}}$			$\Delta E_{\text{эксп}}$		
	Беркли	ЦЕРН	Университет Уильяма и Мэри	Беркли	ЦЕРН	Университет Уильяма и Мэри
${}^6\text{Li}$	$23,9\pm0,2$	—	$24,18\pm0,06$	$-0,6\pm0,2$	—	$-0,35\pm0,06$
${}^7\text{Li}$	$23,8\pm0,2$	—	$24,06\pm0,06$	$-0,8\pm0,2$	—	$-0,57\pm0,06$
${}^9\text{Be}$	$42,1\pm0,2$	$42,38\pm0,20$	$42,32\pm0,05$	$-1,75\pm0,2$	$-1,75\pm0,2$	$-1,63\pm0,08$
${}^{10}\text{B}$	$64,9\pm0,2$	$65,94\pm0,18$	$65,79\pm0,11$	$-2,6\pm0,6$	$-2,79\pm0,19$	$-2,96\pm0,12$
${}^{11}\text{B}$	$64,5\pm0,2$	$64,98\pm0,18$	$65,00\pm0,11$	$-2,9\pm0,7$	$-3,80\pm0,19$	$-3,85\pm0,12$
${}^{12}\text{C}$	$93,3\pm0,5$	$92,94\pm0,15$	$93,19\pm0,12$	$-5,8\pm0,5$	$-6,12\pm0,15$	$-5,96\pm0,12$
${}^{14}\text{N}$	$123,9\pm0,5$	$124,74\pm0,15$	—	$-9,8\pm1,1$	$-10,10\pm0,16$	—
${}^{16}\text{O}$	$160,6\pm0,7$	$159,95\pm0,25$	—	$-14,7\pm1,2$	$-15,73\pm0,26$	—
${}^{18}\text{O}$	—	$155,01\pm0,25$	—	—	$-20,59\pm0,26$	—
${}^{19}\text{F}$	$196,5\pm0,5$	$195,9\pm0,5$	—	$-25,8\pm1,1$	$-25,6\pm0,6$	—
${}^{23}\text{Na}$	$277,2\pm1,0$	$276,2\pm1,0$	—	$-49,8\pm1,4$	$-52,4\pm1,0$	—
Mg	—	—	—	$-57,3\pm1,4$	—	—

Продолжение табл. 3.1

Нуклид	$\Delta E_{\text{теор}}$		Естественная ширина $\Gamma_{\text{эксп}}$			Естественная ширина $\Gamma_{\text{теор}}$	
	Беркли	Университет Уильяма и Мэри	Беркли	ЦЕРН	Университет Уильяма и Мэри	Беркли	Университет Уильяма и Мэри
${}^6\text{Li}$	-0,30	-0,47	$0,39 \pm 0,36$	—	$0,15 \pm 0,05$	0,10	0,11
${}^7\text{Li}$	-0,52	-0,79	$0,57 \pm 0,30$	—	$0,19 \pm 0,05$	0,13	0,18
${}^9\text{Be}$	-1,47	-2,12	$0,85 \pm 0,28$	$1,07 \pm 0,30$	$0,58 \pm 0,05$	0,55	0,56
${}^{10}\text{B}$	-2,28	-3,29	$1,4 \pm 0,5$	$1,27 \pm 0,25$	$1,68 \pm 0,12$	1,17	1,48
${}^{11}\text{B}$	-3,27	-4,56	$2,3 \pm 0,5$	$1,87 \pm 0,25$	$1,72 \pm 0,15$	1,35	1,75
${}^{12}\text{C}$	-4,62	-6,50	$2,6 \pm 0,5$	$2,96 \pm 0,25$	$3,25 \pm 0,15$	2,33	3,41
${}^{14}\text{N}$	-8,33	—	$4,1 \pm 0,4$	$4,48 \pm 0,30$	—	4,59	—
${}^{16}\text{O}$	-13,75	—	$9,0 \pm 2,0$	$7,56 \pm 0,50$	—	7,69	—
${}^{18}\text{O}$	—	—	—	$8,67 \pm 0,70$	—	—	—
${}^{19}\text{F}$	-25,68	—	$4,6 \pm 2,0$	$9,4 \pm 1,5$	—	6,58	—
${}^{23}\text{Na}$	-51,20	—	$4,6 \pm 3,0$	$10,3 \pm 4,0$	—	10,26	—
Mg	-58,15	—	—	—	—	12,95	—



Таблица 3.2

Параметры распределения заряда, используемые  
при анализе пионных  $2p \rightarrow 1s$ -переходов [9]

$Z$	$A$	$c/A^{1/3}$ , Ферми	$n$	$w$	$R_{\text{экв}}/A^{1/3}$ , Ферми	Распре- деление
2	4	0,325	—	0,0	1,304*	Г
3	6	0,026	—	0,333	1,794*	Г
3	7	0,930	—	0,333	1,625*	Г
4	9	0,856	—	0,667	1,562*	Г
5	10	0,91	3,79	—	1,6467*	Ф
5	11	0,87	3,79	—	1,403*	Ф
6	12	1,00*	5,18	—	1,363* <sup>2</sup>	Ф
7	14	1,01	5,8	—	1,311* <sup>2</sup>	Ф
8	16	1,03*	5,59	—	1,357* <sup>2</sup>	Ф
8	18	1,034	5,59	—	1,366* <sup>2</sup>	Ф
9	19	1,03	5,40	—	1,368* <sup>2</sup>	Ф
11	23	1,03	5,80	—	1,337* <sup>2</sup>	Ф
12	24	1,01*	5,42	—	1,349* <sup>2</sup>	Ф

\* Данные Бакенштосса и др. [31].

\*\* Данные Элтона [165].

Таблица 3.3

Сравнение экспериментальных и теоретических значений  
энергии  $2p \rightarrow 1s$ -переходов и ширины  
 $1s$ -уровней пионных атомов [9]

Нуклид	Энергия $2p \rightarrow 1s$ -перехода		Ширина $1s$ -уровня	
	Эксперимент	Теория	Эксперимент	Теория
<sup>4</sup> He	10,69±0,06	10,63	0,000±0,086	0,23
<sup>6</sup> Li	24,157±0,057	24,15	0,155±0,050	0,32
<sup>7</sup> Li	24,038±0,057	23,93	0,200±0,049	0,31
<sup>9</sup> Be	42,311±0,047	42,14	0,601±0,049	0,70
<sup>10</sup> B	65,663±0,085	65,73	1,594±0,106	1,79
<sup>11</sup> B	64,905±0,085	64,90	1,793±0,125	1,73
<sup>12</sup> C	93,099±0,092	93,15	3,138±0,125	3,08
<sup>14</sup> N	124,671±0,144	124,53	4,343±0,240	4,75
<sup>16</sup> O	160,022±0,235	159,87	7,645±0,485	5,88
<sup>18</sup> O	155,01±0,25	155,09	8,67±0,70	4,67
<sup>19</sup> F	196,20±0,35	195,01	7,67±1,20	6,49
<sup>23</sup> Na	277,37±0,41	278,36	6,29±1,07	10,70
<sup>24</sup> Mg	330,3±1,0	329,84	—	13,83

Измеряемая естественная ширина линии  $\Gamma_n$  рентгеновского излучения определяется формулой

$$\Gamma_n = \Gamma_i^2 / \Gamma_m, \quad (3.26)$$

где  $\Gamma_m$  — полная ширина на полувысоте измеряемого пика рентгеновского излучения;  $\Gamma_i$  — разрешение прибора.

До сих пор обсуждались только энергии переходов. Измерение интенсивности пионного рентгеновского излучения дает также информацию о пион-ядерном взаимодействии. Хотя уже в ранних работах [87, 358] по пионному рентгеновскому излучению измерялись выходы рентгеновского излучения, более точные измерения интенсивности были выполнены сравнительно недавно в ЦЕРНе [269, 270], где измерялись интенсивности пионного рентгеновского излучения  $2p \rightarrow 1s$ -перехода для мезоатомов Be,  $^{10}\text{B}$ , В (ест.), С, N,  $^{16}\text{O}$ ,  $^{18}\text{O}$  и Na. В ЦЕРНе же рассчитаны населенности пионных  $2p$ -уровней и при сравнении со скоростями рентгеновских переходов, которые вычислены с реальными пионными волновыми функциями [277], учитывающими большое влияние сильного  $\pi$ -ядерного взаимодействия, определены значения естественных ширин  $2p$ -уровней.

Впервые линии  $K$ -серий как мюонного, так и пионного рентгеновского излучения в жидком гелии наблюдали Ветмор и др. [378]. В табл. 3.4 приведены вычисленные и наблюдаемые значения энергий  $K_\alpha$ -,  $K_\beta$ - и  $K_\gamma$ -переходов, а также наблюдаемые значения ширины линий.

Т а б л и ц а 3.4

Энергии  $p \rightarrow 1s$ -переходов и ширины линий пионного атома He [384]

Переход	$E_{\text{эксп.}}$ кэВ	$E_{\text{теор.}}$ кэВ	$\Gamma_{\text{эксп.}}$ эВ
$2 p \rightarrow 1 s (K_\alpha)$	$10,69 \pm 0,06$	10,763	$582 \pm 38$
$3 p \rightarrow 1 s (K_\beta)$	$12,68 \pm 0,06$	12,653	$633 \pm 32$
$4 p \rightarrow 1 s (K_\gamma)^*$	$13,46 \pm 0,08$	13,540	$736 \pm 113$

\* В эту линию могут давать вклад более высокие переходы, которые не разрешаются экспериментально.

Используя ширину мюонной  $K_\alpha$ -линии в качестве «инструментальной» ширины, Ветмор и др. рассчитали естественную ширину  $\Gamma_n$  пионной  $K_\alpha$ -линии  $^4\text{He}$  по данным табл. 3.4. Они получили  $\Gamma_n = 0 \pm 86$  эВ, в то время как предсказанные значения Экстейна и Бракнера—351 эВ [149] и 54 эВ [78]. Они также измерили относительный выход  $K_\alpha$  ( $\Sigma K$ ) для мюонов ( $0,54 \pm 0,05$ ). Соответствующее отношение для пионов —  $0,31 \pm 0,05$ . По-видимому, эти данные указывают на то, что заселенности  $3p$ - и  $2p$ -состояний сравнимы. Этот вывод не согласуется с обычным предположением о том, что каскад проходит главным образом через круговые орбиты, когда мезон достигает состояний с малым квантовым числом.

### Переходы $3d \rightarrow 2p$

Энергия пионного  $3d \rightarrow 2p$ -перехода в случае Al регистрировалась спектрометром с изогнутым кристаллом [21]. В Беркли и ЦЕРНе, используя Ge (Li)-детекторы, провели измерения энергий

Энергии пионных  $3d \rightarrow 2p$ -переходов, сдвиги и ширины уровней, кэВ

Нуклид	$E_{\text{эксп}}$		$\Delta E_{\text{эксп}}$		$\Delta E_{\text{теор}}$	$\Gamma_{\text{эксп}}$		$\Gamma_{\text{теор}}$
	Беркли	ЦЕРН	Беркли	ЦЕРН		Беркли	ЦЕРН	
$^{27}\text{Al}$	—	$87,40 \pm 0,10$ ; $87,53 \pm 0,07^*$	—	$0,12$ $0,24 \pm 0,08^*$	$0,12^*$	—	$0,36 \pm 0,15$	$0,12^*$
$^{31}\text{P}$	—	$101,58 \pm 0,15$	—	$0,29$	—	—	—	—
$^{32}\text{S}$	—	$116,78 \pm 0,10$	—	$0,38$	—	—	$0,43 \pm 0,15$	—
$^{35}\text{Cl}$	$133,2 \pm 0,3$	—	$0,7 \pm 0,3$	—	$0,40$	$0,8 \pm 0,4$	—	$0,41$
$^{39}\text{K}$	$188,6 \pm 0,3$	$133,06 \pm 0,10$	—	$0,54$	—	$1,9 \pm 0,6$	$0,79 \pm 0,15$	—
$^{40}\text{Ca}$	—	$150,55 \pm 0,15$	$1,2 \pm 0,3$	—	$0,98$	—	—	$1,19$
$^{41}\text{Ti}$	$209,3 \pm 0,3$	$188,77 \pm 0,18$	$1,6 \pm 0,3$	$0,80$	—	—	$0,89 \pm 0,25$	—
$^{51}\text{V}$	—	$209,66 \pm 0,18$	—	$1,44$	$1,31$	$2,1 \pm 0,6$	$1,45 \pm 0,15$	$1,52$
$^{52}\text{Cr}$	$278,2 \pm 0,4$	$253,98 \pm 0,20$	$2,8 \pm 0,4$	$1,97$	—	—	$2,00 \pm 0,25$	—
$^{54}\text{Cr}$	$302,5 \pm 0,5$	—	$2,4 \pm 0,5$	$2,27$	$2,47$	—	$2,89 \pm 0,25$	$4,27$
$^{55}\text{Mn}$	—	$277,85 \pm 0,20$	—	$2,53$	$3,04$	—	—	$5,01$
$^{56}\text{Fe}$	$328,5 \pm 0,8$	$302,75 \pm 0,25$	$2,8 \pm 0,8$	$2,81$	—	—	$3,66 \pm 0,25$	—
$^{57}\text{Fe}$	$356,9 \pm 1,0$	—	$4,4 \pm 1,0$	—	$2,61$	—	$4,46 \pm 0,35$	$6,46$
$^{59}\text{Co}$	—	$329,12 \pm 0,25$	—	$3,47$	$4,54$	$6,0 \pm 2,5$	—	$7,89$
$^{60}\text{Co}$	$384,6 \pm 1,0$	$356,43 \pm 0,30$	$4,1 \pm 1,0$	$3,99$	—	—	$6,38 \pm 0,40$	—
$^{61}\text{Ni}$	—	$384,74 \pm 0,35$	—	$4,43$	$5,33$	—	$8,65 \pm 0,60$	$10,07$
$^{63}\text{Cu}$	—	$415,23 \pm 0,70$	—	$6,04$	—	—	$7,37 \pm 0,70$	—
$^{64}\text{Zn}^{*2}$	—	$446,1 \pm 2,0$	—	$7,0$	—	—	$12,7 \pm 3,0$	—
	—	$478,2 \pm 3,0$	—	$8,0$	—	—	$15,9 \pm 4,0$	—
							$16,8 \pm 6,0$	—

\* Данные Астбери и др. [21].

\*\* Два набора данных соответствуют различной калибровке источников [321].

и ширин  $3d \rightarrow 2p$ -перехода для ядер от Al до Zn. Результаты этих измерений приведены в табл. 3.5. Чтобы определить параметры  $\pi^-$ -ядерного взаимодействия, необходимо исследовать более высокие переходы ( $3d \rightarrow 2p$ ,  $4f \rightarrow 3d$ ,  $5g \rightarrow 4f$  и т. п.). Экспериментальные значения сдвигов уровней энергии и ширин линий прекрасно согласуются с предсказаниями теории Эриксона.

### Переходы $4f \rightarrow 3d$ и $5g \rightarrow 4f$

Энергии и ширины более высоких переходов ( $4f \rightarrow 3d$  и  $5g \rightarrow 4f$ ) пионного рентгеновского излучения измерялись в Беркли [249] и ЦЕРНе [244]. Результаты этих измерений приведены в табл. 3.6 и 3.7. В случае  $4f \rightarrow 3d$ - и  $5g \rightarrow 4f$ -переходов кулоновская поправка  $E_{fs}$  не учитывается, так как пион находится далеко от ядра. Однако в некоторых случаях электрический квадрупольный момент ядра приводит к сверхтонкому расщеплению, пренебречь которым нельзя. В табл. 3.6 и 3.7 приведены также значения ширин, полученные группой ЦЕРНа с учетом сверхтонкого расщепления. Впервые сверхтонкое расщепление в Ta наблюдали Каригэн и др. [88], причем этот случай является единственным, когда сверхтонкое расщепление наблюдалось непосредственно в спектре в виде двух отдельных групп линий.

Таблица 3.6

Энергии пионных  $4f \rightarrow 3d$ -переходов и ширины уровней, кэВ

Нуклид	$E_{\text{экср}}$		$\Gamma_{\text{экср}}$		
	Беркли	ЦЕРН	Беркли	ЦЕРН	
				Без сверхтонкого расщепления	Со сверхтонким расщеплением
$^{89}\text{Y}$	$278,2 \pm 0,3$	—	$0,8 \pm 0,6$	—	—
$^{93}\text{Nb}$	$307,6 \pm 0,3$	—	$0,6 \pm 0,4$	—	—
$^{103}\text{Rh}$	$370,9 \pm 0,4$	—	$1,3 \pm 0,6$	—	—
$^{115}\text{In}$	$442,1 \pm 1,1$	—	—	—	—
$\text{In}$	—	$442,9 \pm 0,5$	—	$2,8 \pm 0,6$	$2,6 \pm 0,6$
$^{116}\text{Sn}$	$460,9 \pm 0,6$	—	$1,9 \pm 1,2$	—	—
$^{117}\text{Sn}$	$460,4 \pm 0,6$	—	$2,1 \pm 1,2$	—	—
$^{118}\text{Sn}$	$460,4 \pm 0,6$	—	$2,5 \pm 1,2$	—	—
$^{119}\text{Sn}$	$460,3 \pm 0,6$	—	$1,9 \pm 1,2$	—	—
$^{120}\text{Sn}$	$460,5 \pm 0,6$	—	$2,7 \pm 1,2$	—	—
$^{122}\text{Sn}$	$460,3 \pm 0,6$	—	$2,0 \pm 1,2$	—	—
$^{124}\text{Sn}$	$460,2 \pm 0,6$	—	$2,3 \pm 1,2$	—	—
$^{127}\text{I}$	$519,1 \pm 1,1$	$520,8 \pm 0,8$	—	$4,6 \pm 1,5$	$4,4 \pm 1,5$
$^{133}\text{Cs}$	$560,5 \pm 1,2$	$562,0 \pm 1,5$	$4,2 \pm 1,8$	$3,3 \pm 1,5$	—
$^{139}\text{La}$	$603,7 \pm 0,9$	—	—	—	—
$\text{La}$	—	$604,9 \pm 2,0$	—	$6,2 \pm 2,0$	$6,2 \pm 2,0$
$^{140}\text{Ce}$	$626,1 \pm 2,0$	—	$5,8 \pm 3,8$	—	—
$^{141}\text{Pr}$	$649,5 \pm 2,0$	$648,1 \pm 2,0$	$6,7 \pm 2,8$	$5,4 \pm 2,5$	—

Таблица 3.7

Энергии пионных  $5g \rightarrow 4f$ -переходов и ширины уровней, кэВ

Нуклид	$E_{\text{эксп}}$		$\Gamma_{\text{эксп}}$		
	Беркли	ЦЕРН	Беркли	ЦЕРН	
				Без сверхтонкого расщепления	Со сверхтонким расщеплением
$^{181}\text{Ta}$	$453,1 \pm 0,4$	$453,90 \pm 0,20$	—	—	$0,5 \pm 0,2$
Pt	—	$519,34 \pm 9,24$	—	$1,8 \pm 1,0$	—
$^{197}\text{Au}$	$532,5 \pm 0,5$	$533,16 \pm 0,20$	—	$1,1 \pm 0,3$	$1,0 \pm 0,3$
Hg	—	$547,14 \pm 0,25$	—	$1,4 \pm 0,5$	—
Tl	—	$561,67 \pm 0,25$	—	$1,0 \pm 0,2$	—
$^{206}\text{Pb}$	—	$575,62 \pm 0,30$	—	$1,2 \pm 0,4$	—
Pb	—	$575,56 \pm 0,25$	—	$1,1 \pm 0,3$	—
$^{209}\text{Bi}$	$589,8 \pm 0,9$	$590,06 \pm 0,30$	$1,7 \pm 1,0$	$1,7 \pm 0,5$	$1,7 \pm 0,5$
$^{232}\text{Th}$	$689,0 \pm 0,6$	—	$6,0 \pm 0,9$	—	—
$^{238}\text{U}$	$731,4 \pm 1,1$	—	$6,1 \pm 1,0$	—	—
$^{239}\text{Pu}$	$766,2 \pm 1,6$	—	$9,1 \pm 2,5$	—	—

### § 3.4. АНАЛИЗ ПИОННОГО РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И ПИОН-ЯДЕРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

В двух предыдущих параграфах были представлены типичные примеры анализа пионного рентгеновского излучения. Однако, чтобы добиться настоящей точности в измерении сдвигов энергий и ширины линий, необходимо анализировать данные эксперимента более тщательно, так как пионная волновая функция часто сильно искажена ядром. Недавно Крелл и Эриксон [277] детально проанализировали энергетические сдвиги и ширины уровней пионного рентгеновского излучения в модели эффективного нелокального потенциала с пятью параметрами, используя при этом простой, но эффективный метод вычисления, который они разработали для нахождения решений волновых уравнений на связанные состояния [276]. Этот метод кратко изложен в Приложении В.

#### Потенциал пион-ядерного взаимодействия

Уровни энергии пионных атомов определяются отрицательными собственными значениями уравнения Клейна—Гордона (3.4), которое может быть записано в следующем виде:

$$\{\nabla^2 + [(E - V_c)^2 - \mu^2]\} \psi = 2\mu V_n \psi. \quad (3.27)$$

Чтобы подчеркнуть зависимость потенциала  $V_n$  [см. формулу (3.6)] от плотности нейтронов, протонов и вещества, обозначенных  $\rho_n$ ,  $\rho_p$  и  $\rho_m = (\rho_n + \rho_p)$ , выпишем локальную и нелокальную части

потенциала в такой форме:

$$q(r) = -4\pi \{p_1 b_0 \rho_m(r) + p_1 b_1 [\rho_n(r) - \rho_p(r)] + i p_2 \operatorname{Im} B_0 \rho_m^2(r)\}; \quad (3.28a)$$

$$\alpha(r) = \alpha_0(r) [1 - \frac{1}{3} \xi \alpha_0(r)]^{-1}; \quad (3.28б)$$

$$\alpha_0(r) = -4\pi [p_1^{-1} c_0 \rho_m(r) + i p_2^{-1} \operatorname{Im} C_0 \rho_m^2(r)], \quad (3.28в)$$

где  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $\operatorname{Im} B_0$ ,  $c_0$  и  $\operatorname{Im} C_0$  — вещественные константы;  $p_1 = 1 + m/M$  и  $p_2 = 1 + m/(2M)$  — кинематические константы. Чтобы обеспечить нелинейную массовую зависимость (лоренц-лорентц-эффект), введем в уравнение (3.28б) корреляционный параметр  $\xi$ , характеризующий поляризацию ядерной среды. Этот параметр является мерой зернистости ядерной материи; короткодействующие антикорреляции между нуклонами приводят к  $\xi = 1$ , в то время как полностью однородное распределение ядерной материи дает  $\xi = 0$ . Предполагалось, что  $q(r)$  и  $\alpha(r)$  линейно зависят от  $\rho_n(r)$  и  $\rho_p(r)$  и, кроме того, что только член с  $b_1$  в формуле (3.28a) явно зависит от  $\rho_n(r)$  и  $\rho_p(r)$ . Массовые плотности  $\rho_n(r)$ ,  $\rho_p(r)$  и  $\rho_m(r)$  удобно представить обычным двухпараметрическим распределением Ферми. Протонное распределение выражается через распределение заряда ядра:

$$\langle r^2 \rangle = \langle r^2 \rangle_c - \langle r^2 \rangle_p, \quad (3.29)$$

где последний член представляет поправку, учитывающую неточечность протона. Чтобы свести число параметров до минимума, Крелл и Эрикссон предположили, что протонное и нейтронное распределения тождественны. В действительности, в элементах с избыточным числом нейтронов нейтронное распределение может простирается за протонным (этот вопрос будет обсуждаться ниже). Потенциал кулоновского взаимодействия  $V_c$  [см. формулу (3.27)] учитывает эффект конечного распределения заряда ядра. Эффект поляризации вакуума, не включенный в формулу (3.27), описывается, как и в случае мюонных атомов, выражением (1.39), что справедливо для  $r < \lambda_e$  ( $\lambda_e$  — комптоновская длина волны электрона). Вклад потенциала поляризации вакуума в энергию  $E_n$  связанного состояния  $n$  ( $n$  — главное квантовое число) приблизительно равен

$$\Delta E_n = E_{v.p} = \int dr^3 |\psi_n|^2 V_p(r), \quad (3.30)$$

где  $\psi_n(r)$  — нормированная волновая функция пиона, полученная с учетом сильного взаимодействия. (Заметим, что в формуле (1.42) использовались дираковские волновые функции, тогда как здесь используются волновые функции из решения уравнения Клейна—Гордона.) Из табл. 3.8 видно, что изменение вакуумно-поляризационного сдвига, обусловленного сильным взаимодействием, почти модельно-независимо, поскольку наибольший вклад дает внешняя область взаимодействия.

## Энергетические сдвиги и ширины уровней

Поскольку здесь рассматриваются только сферические или близкие к сферическим распределения ядерной массы, можно положить  $q(\mathbf{r}) = q(r)$  и  $\alpha(\mathbf{r}) = \alpha(r)$ , а орбитальный момент  $l$  — хорошее квантовое число. Нелокальное выражение (3.27) может быть приведено к обычному локальному представлению с помощью подстановки:

$$\tilde{u}_l(r) = \{1 + \alpha(r)\}^{1/2} r \Phi_l(r), \quad (3.31)$$

где  $\Phi_l(r)$  — радиальная часть волновой функции  $\psi$  в формуле (3.27). После этого получим

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - [1 + \alpha(r)]^{-1} \left\{ \frac{\alpha'(r)}{r} + \frac{1}{2} \alpha''(r) - \left( \frac{1}{2} \alpha'(r) \right)^2 [1 + \alpha(r)]^{-1} + \beta(r) \right\} \right] \tilde{u}_l = 0, \quad (3.32)$$

где

$$\beta(r) = [(E - V_c(r))^2 - \mu^2] - q(r). \quad (3.33)$$

Это локальное представление показывает, что изменение  $\alpha(r)$  на ядерной поверхности приводит к «размазыванию» дипольного слоя. В Приложении С дан численный метод интегрирования уравнения на собственные значения для связанных состояний с комплексным потенциалом. Уравнение интегрируют по внешней области, и при помощи метода итераций с высокой степенью точности получают собственные значения.

В предыдущем разделе параграфа обсуждались экспериментальные данные, полученные из пионного рентгеновского излучения и касающиеся  $1s$ -,  $2p$ -,  $3d$ - и  $4f$ -уровней. Значения сдвигов уровней энергии, приведенные там, были получены при сравнении измеренных энергий с теоретическими значениями, вычисленными для ядра с учетом конечного распределения заряда, но без какого-либо сильного взаимодействия, т. е.  $\xi = \xi_c + \xi_s$ , где  $\xi$  — полный сдвиг уровня, а  $\xi_c$  и  $\xi_s$  — сдвиги уровня, обусловленные конечным распределением заряда ядра и сильным пион-ядерным взаимодействием. Однако поскольку имеется значительное искажение волновой функции пиона, такое деление незаконно, поэтому Крелл и Эриксон обсуждают полный сдвиг уровня  $\xi$ .

Используя главным образом данные экспериментов ЦЕРНа (восемь элементов от  $^{10}\text{B}$  до  $^{23}\text{Na}$ , для которых измерены энергии перехода  $2p \rightarrow 1s$ , и десять элементов от  $^{27}\text{Al}$  до  $^{59}\text{Co}$ , для которых измерены энергии  $3d \rightarrow 2p$ -перехода) и предполагая  $\xi = 1$ , т. е. полную антикорреляцию на малых расстояниях, Крелл и Эриксон нашли, что следующие пять параметров дают хорошее представление о полученных данных:

$$\begin{aligned} b_0 &= -0,030 m_{\pi}^{-1}; & b_1 &= -0,080 m_{\pi}^{-1}; & \text{Im } B_0 &= 0,040 m_{\pi}^{-4}; \\ c_0 &= 0,24 m_{\pi}^{-3}; & \text{Im } C_0 &= 0,14 m_{\pi}^{-6}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Результаты расчета на основе этого набора параметров сравниваются с экспериментальными данными в табл. 3.8—3.12.

Таблица 3.8

Сдвиги уровней за счет поляризации вакуума, эВ [277]

Элемент	$\Delta E_{1s}$	$\Delta E_{2p}$	$\Delta E_{3d}$	Элемент	$\Delta E_{1s}$	$\Delta E_{2p}$	$\Delta E_{3d}$
${}^6_3\text{Li}$	-0,004	0	0	${}^{40}_{20}\text{Ca}$	-2,993	0,027	0
${}^9_4\text{Be}$	-0,017	0	0	${}^{48}_{22}\text{Ti}$	—	0,036	0
${}^{10}_5\text{B}$	-0,032	0	0	${}^{51}_{23}\text{V}$	—	0,042	0
${}^{11}_5\text{B}$	-0,040	0	0	${}^{52}_{24}\text{Cr}$	—	0,054	0
${}^{12}_6\text{C}$	-0,064	0	0	${}^{55}_{25}\text{Mn}$	—	0,060	0
${}^{14}_7\text{N}$	-0,114	0	0	${}^{56}_{26}\text{Fe}$	—	0,075	0
${}^{16}_8\text{O}$	-0,184	0	0	${}^{59}_{27}\text{Co}$	—	0,068	0
${}^{18}_8\text{O}$	-0,231	0	0	${}^{83}_{38}\text{Sr}$	—	0,050	0,008
${}^{19}_9\text{F}$	-0,309	0	0	${}^{115}_{49}\text{N}$	—	-0,627	0,049
${}^{23}_{11}\text{Na}$	-0,590	0	0	${}^{131}_{53}\text{I}$	—	-6,304	0,395
${}^{32}_{16}\text{S}$	-1,703	0,009	0				

Таблица 3.9

Сдвиги и ширины 1s-уровней, кэВ [277]

Элемент	$E(2p) - E(1s)^*$	$\langle r^2 \rangle^{1/2}$	$z$ , Ферми	$\Delta E_{эм}(1s)$	$\Delta E_{теор}(1s)^{**}$	$\Delta E_{эксп}(1s)$	$\Gamma_{теор}(1s)$	$\Gamma_{эксп}(1s)$
${}^6_3\text{Li}$	24,56	2,43	1,00	-0,05	-0,51	$-0,38 \pm 0,06^{*3}$	0,14	$0,15 \pm 0,05^{*3}$
${}^7_3\text{Li}$	24,65	2,37	1,00	-0,05	-0,74	$-0,64 \pm 0,06^{*3}$	0,17	$0,19 \pm 0,05^{*3}$
${}^9_4\text{Be}$	44,09	2,40	1,00	-0,16	-2,00	$-1,77 \pm 0,05^{*3}$	0,56	$0,58 \pm 0,05^{*3}$
${}^{10}_5\text{B}$	69,12	2,45	1,00	-0,40	-3,51	$-3,18 \pm 0,18^{*4}$	1,30	$1,27 \pm 0,25^{*4}$
${}^{11}_5\text{B}$	69,21	2,42	1,00	-0,39	-4,30	$-4,23 \pm 0,18^{*4}$	1,38	$1,87 \pm 0,25^{*4}$
${}^{12}_6\text{C}$	99,93	2,42	1,00	-0,81	-6,80	$-6,99 \pm 0,15^{*4}$	2,89	$2,96 \pm 0,25^{*4}$
${}^{14}_7\text{N}$	136,48	2,48	1,77	-1,58	-11,77	$-11,74 \pm 0,15^{*4}$	5,19	$4,48 \pm 0,30^{*4}$
${}^{16}_8\text{O}$	178,80	2,71	1,83	-3,16	-19,43	$-18,85 \pm 0,25^{*4}$	6,80	$7,56 \pm 0,50^{*4}$
${}^{18}_8\text{O}$	178,98	2,77	1,87	-3,30	-23,85	$-23,97 \pm 0,25^{*4}$	6,27	$8,67 \pm 0,70^{*4}$
${}^{19}_9\text{F}$	227,02	2,85	2,00	-5,51	-32,58	$-31,12 \pm 0,5^{*4}$	9,21	$9,4 \pm 1,5^{*4}$
${}^{23}_{11}\text{Na}$	340,94	2,94	2,00	-12,62	-63,37	$-64,74 \pm 1,0^{*4}$	17,9	$10,3 \pm 4,0^{*4}$
${}^{32}_{16}\text{S}$	731,66	3,12	2,50	-57,61	-203,5	—	61,1	—
${}^{40}_{20}\text{Ca}$	1158,97	3,41	2,70	-149,1	-419,2	—	99,1	—

Обозначения:  $\Delta E_{эм}$  — предполагаемый электромагнитный сдвиг в отсутствие сильного взаимодействия;  $\Delta E_{теор}$  и  $\Gamma_{теор}$  — рассчитанные с параметрами (3.34) полный сдвиг (с учетом эффекта конечных размеров) и ширина уровня;  $\Delta E_{эксп}$  и  $\Gamma_{эксп}$  — соответствующие экспериментальные значения;  $\langle r^2 \rangle$  — среднеквадратический радиус заряда. Аналогичные обозначения приняты в табл. 3.10—3.12.

\* Для точечного ядра с учетом поляризации вакуума (аналогично в табл. 3.10—3.12).  
 \*\* Учитывается модификация поляризации вакуума сильным взаимодействием (см. табл. 3.8).

<sup>\*3</sup> Данные Бакенштосса и др. [30].

<sup>\*4</sup> Данные Харриса и др. [227].



Сдвиги и ширины 2*p*-уровней, кэВ [277]

Элемент	$E(3d) - E(2p)$	$\langle r^2 \rangle^{1/2}$ , Ферми	$t$ , Ферми	$\Delta F_{\text{эм}}^{(2p)}$	$\Delta E_{\text{теор}}^{(2p)*}$	$\Delta E_{\text{эксп}}^{(2p)}$	$\Gamma_{\text{теор}}^{(2p)}$	$\Gamma_{\text{эксп}}^{(2p)}$
$^{14}_7\text{N}$	25,064	2,48	1,77	0	0,006	—	$4,0 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \pm 0,3^{*2} \cdot 10^{-3}$
$^{16}_8\text{O}$	32,797	2,71	1,83	0	0,012	—	$7,5 \cdot 10^{-3}$	$4,7 \pm 0,8^{*2} \cdot 10^{-3}$
$^{18}_8\text{O}$	32,831	2,77	1,87	0	0,012	—	$8,2 \cdot 10^{-3}$	$3,8 \pm 0,7^{*2} \cdot 10^{-3}$
$^{19}_9\text{F}$	41,594	2,85	2,00	0	0,023	—	$16 \cdot 10^{-3}$	$11,2 \pm 1,9^{*2} \cdot 10^{-3}$
$^{23}_{11}\text{Na}$	62,295	2,94	2,00	0	0,069	—	$56 \cdot 10^{-3}$	$34,6 \pm 7,6^{*2} \cdot 10^{-3}$
$^{27}_{13}\text{Al}$	87,20	2,91	2,28	0,01	0,17	$0,20 \pm 0,10$	0,18	$0,36 \pm 0,15^{*3}$
$^{31}_{15}\text{P}$	116,33	3,06	2,45	-0,02	0,36	$0,45 \pm 0,10$	0,41	$0,43 \pm 0,15^{*3}$
$^{33}_{16}\text{S}$	132,46	3,12	2,50	-0,02	0,52	$0,60 \pm 0,10$	0,59	$0,79 \pm 0,15^{*3}$
$^{40}_{20}\text{Ca}$	207,72	3,41	2,70	-0,11	1,52	$1,94 \pm 0,18$	2,03	$2,00 \pm 0,25^{*3}$
$^{48}_{22}\text{Ti}$	251,83	3,56	2,20	-0,20	1,94	$2,15 \pm 0,20$	3,37	$2,89 \pm 0,25^{*3}$
$^{51}_{23}\text{V}$	275,50	3,58	2,10	-0,26	2,26	$2,35 \pm 0,20$	4,43	$3,66 \pm 0,25^{*3}$
$^{52}_{24}\text{Cr}$	300,21	3,66	2,30	-0,36	2,74	$2,55 \pm 0,25$	5,41	$4,46 \pm 0,35^{*3}$
$^{55}_{25}\text{Mn}$	326,04	3,72	2,20	-0,48	2,98	$3,08 \pm 0,25$	6,69	$6,38 \pm 0,40^{*3}$
$^{56}_{26}\text{Fe}$	352,92	3,75	2,50	-0,63	3,65	$3,51 \pm 0,30$	8,34	$8,65 \pm 0,60^{*3}$
$^{59}_{27}\text{Co}$	380,93	3,83	2,50	-0,84	3,72	$3,81 \pm 0,35$	9,91	$7,37 \pm 0,70^{*3}$
$^{88}_{38}\text{Sr}$	762,49	4,14	2,30	-7,12	-3,68	—	55,2	—
$^{115}_{49}\text{In}$	1283,87	4,49	2,30	-35,2	-70,8	—	148,5	—
$^{173}_{71}\text{Ta}$	2956,21	5,50	2,80	-404,0	-885,0	—	353,0	—

\* Учитывается модификация поляризации вакуума сильным взаимодействием.

\*\* Данные Коха и др. [269, 270].

\*\* Данные работы [321].

Таблица 3.11

Сдвиги и ширины  $3d$ -уровней, кэВ [277]

Элемент	$E(4f) - E(3d)$	$\langle r^2 \rangle^{1/2}$ , Ферми	$t$ , Ферми	$\Delta E(3d)$ $\Delta E_{эм}$	$\Delta E(3d)^*$ $\Delta E_{теор}$	$\Delta E(3d)$ $\Delta E_{эксп}$	$\Gamma(3d)$ $\Gamma_{теор}$	$\Gamma(3d)$ $\Gamma_{эксп}$
$^{115}_{49}\text{In}$	440,31	4,49	2,30	-0,08	2,1	$2,6 \pm 0,5$	2,5	$2,6 \pm 0,6^{*2}$
$^{123}_{51}\text{Sb}$	477,52	4,67	2,40	-0,14	2,7	—	3,3	—
$^{127}_{53}\text{I}$	516,28	4,74	2,00	-0,19	3,5	$4,5 \pm 0,8$	4,7	$4,4 \pm 1,5^{*2}$
$^{133}_{55}\text{Cs}$	556,62	4,80	2,50	-0,28	4,3	$5,4 \pm 1,5$	5,9	$3,3 \pm 1,5^{*2}$
$^{139}_{57}\text{La}$	598,54	4,86	2,50	-0,39	5,2	$6,4 \pm 2,0$	7,7	$6,2 \pm 2,0^{*2}$
$^{141}_{59}\text{Pr}$	642,04	4,88	2,50	-0,51	6,6	$6,1 \pm 2,0$	10,1	$5,4 \pm 2,5^{*2}$

\* Учитывается модификация поляризации вакуума сильным взаимодействием.

\*\* Данные Шмитта и др. [344].

Таблица 3.12

Сдвиги и ширины  $4f$ -уровней, кэВ [277]

Элемент	$E(5g) - E(4f)$	$\langle r^2 \rangle^{1/2}$ , Ферми	$t$ , Ферми	$\Delta E(4f)$ $\Delta E_{эм}$	$\Delta E(4f)^*$ $\Delta E_{теор}$	$\Delta E(4f)$ $\Delta E_{эксп}$	$\Gamma(4f)$ $\Gamma_{теор}$	$\Gamma(4f)$ $\Gamma_{эксп}$
$^{181}_{73}\text{Ta}$	453,03	$5,50^{*2}$	2,80	-0,01	0,48	$0,87 \pm 0,2$	0,34	$0,5 \pm 0,2^{*3}$
$^{197}_{79}\text{Au}$	531,87	5,32	2,32	-0,02	0,90	$1,29 \pm 0,2$	0,85	$1,0 \pm 0,3^{*3}$
$^{209}_{83}\text{Bi}$	588,11	5,50	2,10	-0,04	1,45	$1,95 \pm 0,3$	1,46	$1,7 \pm 0,5^{*3}$
$^{233}_{90}\text{Th}$	693,68	$5,80^{*2}$	2,80	-0,13	2,89	$4,32 \pm 0,6$	3,01	$6,0 \pm 0,9^{*4}$
$^{232}_{90}\text{Th}$	693,68	$5,80^{*2}$	2,00	-0,11	3,01	$4,32 \pm 0,5$	3,36	$6,0 \pm 0,9^{*4}$
$^{233}_{90}\text{Th}$	693,68	$5,70^{*2}$	2,00	-0,10	2,93	$4,32 \pm 0,6$	3,39	$6,0 \pm 0,9^{*4}$
$^{238}_{92}\text{U}$	725,54	$5,87^{*2}$	2,80	-0,17	3,48	$5,96 \pm 1,1$	3,74	$6,1 \pm 1,0^{*4}$
$^{239}_{94}\text{Pu}$	758,14	$5,85^{*2}$	2,80	-0,20	4,15	$7,06 \pm 1,6$	4,61	$9,1 \pm 2,5^{*4}$

\* Учитывается модификация поляризации вакуума сильным взаимодействием.

\*\* Сильно деформированные ядра, для которых среднеквадратические радиусы и  $t$  выбраны произвольно.

\*\* Данные Шмитта и др. [344].

\*\* Данные Дженкинса и Кунсельмана [249].

## Сравнение с теоретическими предсказаниями

Проведем сравнение эмпирических параметров [см. формулу (3.34)] с теоретическими предсказаниями.

**Локальные параметры.** Действительная часть потенциала пион-ядерного взаимодействия [параметры  $b_0$ ,  $b_1$  и  $c_0$  в выражении (3.28)] описывает локальные взаимодействия. Используя теорию многократ-

ного рассеяния,  $b_0$  (для изоскалярного локального потенциала) и  $b_1$  (для изовекторного локального потенциала) можно выразить следующим образом:

$$b_0 = \frac{1}{2} (a_n + a_p) - \langle 1/r \rangle_{\text{кор}} \frac{1}{4} \left[ 2 (a_n^2 + a_p^2) + (a_n - a_p)^2 \right] + \text{поправки}; \quad (3.35)$$

$$b_1 = \frac{1}{2} (a_p - a_n) + \text{поправки}, \quad (3.36)$$

где  $a_n$  и  $a_p$  — нейтронная и протонная длины  $\pi N$ -рассеяния;  $\langle 1/r \rangle_{\text{кор}}$  — среднее значение обратного корреляционного расстояния двух тождественных частиц в ядре.

Если длина рассеяния мала по сравнению с ядерными размерами, то ядро можно рассматривать как однородную среду и когерентные изоскалярные и изовекторные длины  $\pi N$ -рассеяния доминируют в интенсивности потенциала. Однако однородная среда не может описать перерассеяния на двух нуклонах, которые локализованы близко друг к другу. В этом случае вклад поляризации ядра в потенциал пион-ядерного взаимодействия, определяемый членом  $\langle 1/r \rangle_{\text{кор}}$ , очень важен. Следует отметить, что  $r$  в этой поправке является корреляционным расстоянием двух нуклонов в ядре и не связано с ядерными размерами. Этот корреляционный член в случае  $s$ -волнового рассеяния выражается через характерный импульс Ферми  $p_F$ :

$$\langle 1/r \rangle_{\text{кор}} = (3/2\pi) p_F. \quad (3.37)$$

Рассматриваемый корреляционный член всегда отрицателен (отталкивание) и достигает  $-0,020 m_{\pi}^{-1}$  [ср. с  $b_0$  в выражении (3.34)]. Оставшаяся часть  $b_0$ , равная  $-0,010 m_{\pi}^{-1}$ , обусловлена поправочным членом в выражении (3.35) и когерентными нейтронными и протонными длинами рассеяния. Основной вклад в поправку вносит дисперсионный эффект, который, как следует из оценки, дает от  $-0,005 m_{\pi}^{-1}$  до  $0,10 m_{\pi}^{-1}$ . Ферми-движение нуклонов в ядре приводит к поправке  $+0,004 m_{\pi}^{-1}$ . Это позволяет сделать вывод, что область когерентного среднего  $a_N^{(+)} = (1/2) (a_n + a_p)$  для длин  $\pi N$ -рассеяния лежит в пределах  $-0,010 m_{\pi}^{-1} \leq a_N^{(+)} \leq 0$ . Значение  $a_N^{(+)}$ , полученное из теоретического анализа экспериментов по  $\pi N$ -рассеянию, колеблется в широких пределах от  $-0,012 m_{\pi}^{-1}$  [332] до  $+0,023 m_{\pi}^{-1}$  [292]. Современные данные по пионным атомам больше соответствуют значению, полученному в работе [332].

Параметр интенсивности изовекторного взаимодействия  $b_1 = -0,080 m_{\pi}^{-1}$  [см. формулу (3.34)], полученный из данных по пионным атомам, находится в хорошем согласии с  $\left(\frac{1}{2}\right) (a_p - a_n)$ . Эксперименты по  $\pi N$ -рассеянию подтверждают это согласие:  $(1/2) \times (a_p - a_n) = -0,087 m_{\pi}^{-1}$  [292] и  $(1/2) (a_p - a_n) = -0,095 m_{\pi}^{-1}$  [24]. Сравнение эмпирических параметров с предсказаниями алгебры токов читатель может найти в работе [175].

**Нелокальные параметры.** Предположим, что ядро содержит одинаковое число нейтронов и протонов и что все ориентации спинов равновероятны. Дипольная сила  $k$ -го нуклона, индуцируемая пионным полем:

$$\mathbf{p}_k = 3a_k^{l=1} \mathbf{E}_{1k}, \quad (3.38)$$

где  $a_k^{l=1}$  — длина  $p$ -волнового рассеяния;  $\mathbf{E}_{1k}$  — эффективное поле, т. е. локальное поле у рассеивателя. Для дальнейшего обсуждения полезно определить среднюю плотность силы диполя

$$\mathbf{p}(r) = -[\alpha(r)/4\pi] \nabla \Phi. \quad (3.39)$$

Если эффективное поле является только характеристикой среды и не зависит от  $k$ -й частицы, то средняя плотность силы диполя представляется через когерентные средние  $p$ -волновые длины рассеяния нейтронов и протонов обоих спинов:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(r) &= (3/4) (a_{n\uparrow}^{l=1} + a_{n\downarrow}^{l=1} + a_{p\uparrow}^{l=1} + a_{p\downarrow}^{l=1}) \rho(r) \mathbf{E}_1(r) \equiv \\ &\equiv (1/3) (4\alpha_{33} + 2\alpha_{13} + 2\alpha_{31} + \alpha_{11}) \rho(r) \mathbf{E}_1(r) \equiv \\ &\equiv c_0 \rho(r) \mathbf{E}_1(r). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Поскольку для разреженной среды  $\mathbf{E}_1 = \nabla \Phi$ , формулу (3.40) можно приближенно записать в виде

$$\mathbf{p}(r)_{\text{разр}} \simeq c_0 \rho(r) \nabla \Phi, \quad (3.41)$$

где

$$c_0 = (1/3) (4\alpha_{33} + 2\alpha_{13} + 2\alpha_{31} + \alpha_{11}). \quad (3.42)$$

Из формул (3.40) и (3.41) следует:

$$\alpha_0(r) = -4\pi c_0 \rho(r). \quad (3.43)$$

В предельном случае неразреженной системы, т. е. однородной среды дискретных рассеивателей, получаем

$$\mathbf{E}_1(r) = [1 + (4/3) \pi c_0 \rho(r)]^{-1} \nabla \Phi. \quad (3.44)$$

Следовательно,

$$\alpha(r) = \alpha_0(r) [1 - (1/3) \alpha_0(r)]^{-1}, \quad (3.45)$$

где  $\alpha_0$  определено формулой (3.43). Теоретическое значение  $c_0 = 0,21 m_{\pi}^{-3}$  с поправкой 10% достаточно хорошо согласуется со значением  $c_0 = 0,24 m_{\pi}^{-3}$  из (3.34).

Пионы поглощаются в ядре главным образом на парах близко расположенных нуклонов. Предполагая, что процесс пионного поглощения в ядре на  $np$ -парах аналогичен поглощению в дейтроне, и используя данные по сечению реакции  $\pi^+ + d \rightarrow p + p$  при энергиях нескольких мегаэлектронвольт, Роуз [333] предсказал силу поглощения локального взаимодействия:

$$(\text{Im } B_0) = 0,0174 m_{\pi}^{-4}. \quad (3.46)$$

Это значение в два раза меньше того, что получается из анализа пионных атомов:  $-0,040 m_{\pi}^{-4}$  [см. (3.34)].

Аналогично, по данным реакции  $n + p \rightarrow \pi^- + \bar{p} + p$ , предсказана интенсивность поглощения для нелокального взаимодействия:

$$(\text{Im} C_0) = 0,073 m_{\pi}^{-6}, \quad (3.47)$$

что также в два раза меньше значения, полученного из анализа пионных атомов [формула (3.34)]. Источник расхождения между полученными из анализа и предсказанными значениями  $\text{Im } B_0$  и  $\text{Im } C_0$  пока еще не ясен.

### § 3.5. НЕЙТРОННЫЕ РАДИУСЫ ИЗ АНАЛИЗА ПИОННОГО РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В предыдущих параграфах пион-ядерный потенциал уточнялся в предположении одинаковых радиусов протонного и нейтронного распределений. Андерсон и др. [10] исследовали возможные различия среднеквадратических радиусов нейтронной и протонной плотностей. Возможные различия в распределении протонов и нейтронов также исследовались при анализе каонных атомов (§ 5.2). Как уже указывалось в § 3.1, Андерсон и др. [10] вычислили энергии и ширины уровней, находя собственные значения уравнения (3.4). Чтобы подчеркнуть независимость оптического потенциала  $V_n$  [см. формулу (3.6)] от плотностей нейтронов, протонов и вещества, обозначаемых  $\rho_n$ ,  $\rho_p$  и  $\rho_m = \rho_n + \rho_p$ , запишем локальную часть  $V_n$  следующим образом:

$$V(r) = -\frac{4\pi}{2\mu} \{ [b_0 \rho_m + b_1(\rho_n - \rho_p)] + i[B_0 \rho_m \rho_p + B_1(\rho_n - \rho_p) \rho_p] \}. \quad (3.48)$$

Аналогично для нелокальной части

$$\alpha(r) = \frac{\alpha_0(r)}{1 - (1/3) \alpha_0(r)}, \quad (3.49)$$

где

$$\alpha_0(r) = -4\pi \{ [c_0 \rho_m + c_1(\rho_n - \rho_p)] + i[C_0 \rho_m \rho_p + C_1(\rho_n - \rho_p) \rho_p] \}. \quad (3.50)$$

В этом оптическом потенциале параметры поглощения  $B_1$  и  $C_1$  положены равными нулю. Оставшиеся шесть параметров определяются из энергий пионных переходов и ширин уровней, полученных при численном решении уравнения (3.4) для 38 ядер от  $^{10}\text{B}$  до  $^{209}\text{Bi}$  в предположении одинакового распределения нейтронной и протонной плотностей. Различия среднеквадратических радиусов нейтронного и протонного распределений учитывается новым параметром

$$\Delta = \langle r_n^2 \rangle^{1/2} - \langle r_p^2 \rangle^{1/2}. \quad (3.51)$$

Параметры оптического потенциала и параметр  $\Delta$ , который считается не зависящим от массового числа, снова варьировались, чтобы получить набор значений, наилучшим образом воспроизводящий экспериментальные данные. Для параметра  $\Delta$  оптимальным оказалось следующее значение:

$$\Delta = -0,01 \pm 0,16 \text{ Ферми.} \quad (3.52)$$

Этот результат показывает, что не существует значительного различия среднеквадратических радиусов протонов и нейтронов. Однако данный результат не следует рассматривать как некоторое «среднее» поведение большого числа ядер.

В одной из недавних работ Кунсельмана и Грина [278] в действительности указывается на то, что на поверхности ядра  $^{44}\text{Ca}$  нейтронное распределение в значительной мере простирается за протонным распределением. Они измерили спектры пионного рентгеновского излучения в  $^{40}\text{CaCl}_2$  и  $^{44}\text{CaCl}_2$  и обнаружили, что для  $3d \rightarrow 2p$ -перехода в случае  $^{44}\text{Ca}$  как сдвиг, так и ширина получаются меньше, чем в  $^{40}\text{Ca}$  (разность сдвигов равна  $-0,34 \pm 0,15$  кэВ, а разность ширин есть  $0,23 \pm 0,14$  кэВ). Кажется, что это измерение и анализ с помощью оптической модели подтверждают обогащенность ядерной поверхности  $^{44}\text{Ca}$  нейтронами (среднеквадратический радиус нейтронов  $3,9 \pm 0,15$ , а протонов —  $3,55$  Ферми). При этом предполагается, что радиусы протонного и нейтронного распределений в ядре  $^{40}\text{Ca}$  одинаковы (среднеквадратический радиус  $3,52$  Ферми).

Этот вывод согласуется с некоторыми результатами исследований каонных атомов ряда средних и тяжелых элементов (§ 5.2). Однако заметим, что результат аналогичного исследования  $3d \rightarrow 2p$ -переходов в пионных атомах  $^{58}\text{Ni}$  и  $^{60}\text{Ni}$  согласуется с предположением о равных среднеквадратических радиусах нейтронного и протонного распределений [250].

Все эти выводы основаны на анализе, содержащем неопределенности, которые возникают из недостаточного знания пион-ядерного взаимодействия. Лучшее понимание пион-ядерного взаимодействия, особенно части, ответственной за поглощение, поможет разобраться в возможных различиях протонного и нейтронного распределений.

### § 3.6. ВРЕМЕНА ЗАМЕДЛЕНИЯ $\pi^-$ -МЕЗОНОВ В ЖИДКИХ $\text{H}_2$ , $\text{D}_2$ И $^4\text{He}$

Отрицательные пионы, остановившиеся в жидком водороде, подвергаются скорее ядерному поглощению, чем распаду. Первый эксперимент по времени замедления был проведен Филдсом и др. [190], которые наблюдали частоту редких событий распада  $\pi^-$ , чтобы определить среднее время, требуемое для замедления и ядерного захвата. Их результаты показывают, что полное время, необходимое пиону для уменьшения скорости от  $0,01$  с до скорости, при которой происходит ядерный захват в жидком водороде,  $t_c(0,01 \text{ с}) = (1,2^{+1,2}_{-0,5}) \times 10^{-12}$  с.

Доде и др. [145] и Бирман и др. [54] также измерили времена замедления и поглощения  $\pi^-$  в жидком водороде. Согласно работе Доде и др., среднее время, необходимое пиону для уменьшения скорости от 0,006 с до скорости, при которой происходит ядерный захват, в жидком водороде составляет  $(2,3 \pm 0,6) \cdot 10^{-12}$  с. Поскольку этот результат приблизительно на два порядка меньше теоретической оценки Вайтмана [386], многие авторы пытались улучшить теоретический расчет [129, 131, 290, 337]. Дэй и др. [129, 131] объясняли краткость этого времени высокой вероятностью  $s$ -захвата из вышележащих состояний посредством штарковского смешивания подуровней пионных водородных атомов в столкновениях с молекулами водорода. В этом случае ядерный захват должен доминировать над процессами атомного каскада для состояний пионного водородного атома с главным квантовым числом  $n \simeq 4$ .

В случае мезоатома гелия ситуация совершенно иная [62, 63]. Среднее время нахождения  $\pi^-$ -мезона на атомных орбитах при уменьшении скорости от 0,02 с до скорости, при которой происходит ядерный захват, равняется  $t_c = (3,19 \pm 0,23) \cdot 10^{-10}$  с, хотя, согласно работе Фетковича и Пиуита [189], время каскада  $\pi^-$ -мезона в жидком гелии составляет  $(2,5 \pm 1,0) \cdot 10^{-10}$  с. Время каскада — период между первоначальным атомным захватом и ядерным поглощением пиона. Ясно, что время замедления или время каскада в жидком гелии на два порядка больше, чем в жидком водороде. Это указывает на то, что в мезоатоме гелия эффект Штарка проявляется гораздо слабее, чем в пионном водородном атоме. Так как система  $(\pi^- \alpha)^+$  — ион, то из-за кулоновского отталкивания ей трудно проникнуть в соседние атомы He в отличие от нейтральных мезоатомов водорода, а потому вполне понятно отсутствие влияния эффекта Штарка на времена каскада и замедления в системе  $\pi^-$  — He. Кроме того, каналы ядерного захвата в системах  $(\pi^- \alpha)$  и  $(\pi^- p)$  полностью различны. Например, реакция  $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$  энергетически запрещена в He, в то время как 2-нуклонный захват отсутствует в мезоатоме водорода.

Экспериментальные результаты согласуются с предположением о том, что обычные радиационные и внешние оже-переходы составляют основу каскадного механизма в мезоатоме He. Очень важно понять механизм каскада, поскольку он определяет не только время каскада, но и состояния углового момента, из которых происходит поглощение пионов ядром.

Деррик и др. [137] провели эксперименты по изучению влияния примесей дейтерия и гелия на процесс замедления отрицательных пионов в жидком водороде, тогда как схема каскада и поглощения отрицательных пионов в водородсодержащих веществах теоретически анализировалась Л. И. Пономаревым [443] и др. Хотя ядерный захват отрицательных пионов из состояния покоя — важный процесс, он не будет рассматриваться в данной книге. Напомним только, что именно при изучении ядерного захвата отрицательных пионов в мезоатомах дейтерия определена четность пиона [310].

### § 3.7. МАССА ПИОНА

В § 2.8 была получена точная оценка массы отрицательного мюона из измерения энергии мюонного рентгеновского излучения. Аналогично можно точно оценить массу отрицательного пиона из прецизионных измерений энергии пионного рентгеновского излучения. Такие эксперименты были выполнены давно (обзор ранних работ можно найти у Веста [377]), однако желательно получить еще более точное значение массы  $\pi^-$ -мезона.

Отметим, например, что оценки всех адронных масс зависят от точности измерений пионной или протонной массы.

Шафер [351] для определения массы  $\pi^-$ -мезона провел измерения энергий  $4f \rightarrow 3d$ -переходов в пионных атомах кальция и титана, используя для этого спектрометр с изогнутым кристаллом. Им были найдены следующие значения энергий переходов для пионных атомов кальция и титана:  $72,352 \pm 0,009$  и  $87,651 \pm 0,009$  эВ соответственно. Результаты вычислений этих энергий приведены в табл. 3.13.

Т а б л и ц а 3.13

Энергии пионных  $4f \rightarrow 3d$ -переходов в Ca и Ti ( $m_\pi c^2 = 139,580$  МэВ) [351]\*

Вклад, вносимый в энергию переходов**	Энергии пионных $4f \rightarrow 3d$ -переходов, кэВ	
	Ca	Ti
уравнением Клейна—Гордона	$72,388 \pm 0,001$	$87,622 \pm 0,001$
приведенной массой	$-0,270 \pm 0,001$	$-0,273 \pm 0,001$
поляризацией вакуума (второй порядок)	$+0,230 \pm 0,002$	$+0,301 \pm 0,002$
поляризацией вакуума (четвертый порядок)	$+0,002 \pm 0,002$	$+0,003 \pm 0,002$
сдвигом за счет сильного взаимодействия	$+0,002 \pm 0,001$	$+0,004 \pm 0,002$
экранированием орбитальными электронами	$-0,001 \pm 0,001$	$-0,001 \pm 0,001$

\* Вычисленные энергии перехода для Ca и Ti:  $72,351 \pm 0,003$  и  $87,665 \pm 0,004$  кэВ. Масштабный фактор ( $m_\pi c^2$ /энергия перехода) для Ca и Ti:  $1929,21 \pm 48 \cdot 10^{-6}$  и  $1592,38 \pm 44 \cdot 10^{-6}$ .

\*\* Электромагнитные форм-факторы, лэмбовский сдвиг, отдача пионного атома, сверхтонкие эффекты пренебрежимо малы.

Эти расчеты основаны на первоначальном (пробном) значении массы пиона, равном 139,580 МэВ. Масштабные факторы (пробное значение массы пиона, деленное на расчетное значение энергии перехода) не зависят (довольно хорошее приближение) от начального значения массы пиона.

Чтобы достичь хорошей степени точности, решение уравнения Клейна—Гордона для центрального кулоновского поля было разло-



жено до членов порядка  $(\alpha Z)^6$ :

$$E = -m_\pi c^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha Z}{\lambda} \right)^2 - \frac{3}{8} \left( \frac{\alpha Z}{\lambda} \right)^4 + \frac{5}{16} \left( \frac{\alpha Z}{\lambda} \right)^6 \right], \quad (3.53)$$

где

$$\lambda = n - l - 1/2 + [(l + 1/2)^2 - (\alpha Z)^2]^{1/2}. \quad (3.54)$$

В расчете использовалось значение постоянной тонкой структуры  $1/\alpha = 137,038800 \pm 4 \cdot 10^{-6}$ . Произведение экспериментальных значений энергии перехода на масштабные факторы дало следующие значения массы  $\pi^-$ -мезона:

из мезоатома Ca:  $139,582000 \pm 0,000136$  МэВ;

из мезоатома Ti:  $139,574000 \pm 0,000109$  МэВ.

Средневзвешенное этих двух измерений

$$m_\pi c^2 = 139,577000 \pm 0,000096 \text{ МэВ}. \quad (3.55)$$

#### § 4.1. КАОННОЕ РЕНТГЕНОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Атомные каонные орбиты становятся меньше электронных орбит того же элемента, когда главное квантовое число  $n$  принимает значения, меньшие 30. В каонных атомах, как и в других мезоатомах, каскадный процесс для больших  $n$  определяется преимущественно оже-переходами. С переходом каонов в нижележащие состояния радиационные переходы начинают конкурировать с оже-переходами и каонные атомы испускают рентгеновское излучение. Затем серии рентгеновских линий прерываются, что является как бы сигналом поглощения  $K^-$ -мезонов ядрами. Ниже представлены результаты измерений каонного рентгеновского излучения и исследован вопрос о том, что можно узнать из этих экспериментов.

#### Каонное рентгеновское излучение в $^4\text{He}$

Хотя в настоящее время насчитывается значительное число теоретических работ по каонным атомам [161, 255, 299, 331, 332], каонное рентгеновское излучение было впервые обнаружено только недавно в эксперименте Бурлесона и др. [35]. В этом эксперименте  $K^-$ -мезоны останавливались в жидкой гелиевой мишени. Каонное рентгеновское излучение  $^4\text{He}$  изучалось также Михаэлем [301]. В обоих экспериментах достоверно наблюдалась линия  $L_\alpha$ -перехода, а также получены некоторые доказательства существования  $K_\alpha$ -линии. В табл. 4.1 приведены измеренные энергии переходов и отношения интенсивностей  $K_\alpha$ - и  $L_\alpha$ -линий. Теоретические значения энергий переходов, отвечающих  $K_\alpha$ - и  $L_\alpha$ -линиям, были получены из решения уравнения Клейна—Гордона с учетом эффектов поляризации вакуума и конечного размера ядра.

Используя экспериментальное значение отношения интенсивностей линий и расчет атомного каскада, Михаэль и Бурлесон и др. нашли, что скорость ядерного поглощения равна  $(1,0 \pm_{0,6}^{1,5}) \times 10^{13} \text{ с}^{-1}$  и  $(3,3 \pm_{1,2}^{3,4}) \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$  соответственно. Эти значения много меньше предыдущего значения скорости поглощения  $K^-$ -ме-

Таблица 4.1

## Энергии и отношения интенсивностей рентгеновских линий каонного атома гелия

Энергии переходов, кэВ		Отношение интенсивностей $K_{\alpha^-}$ и $L_{\alpha^-}$ -линий	Примечания	Литература
$L_{\alpha}$	$K_{\alpha}$			
6,7±0,2	34,7±0,3	0,21±0,12	Эксперимент	[35]
6,5±0,4	35,4±0,9	0,49±0,22	Эксперимент	[301]
6,5	34,9	—	Теория	—

зонов, полученного Дзем [130] ( $5 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ ). Дэй использовал экспериментальные результаты по  $K^-$ -протонному рассеянию в  $S$ -волне и предполагал, что  $S$ -волновая амплитуда  $K^-$ -мезон-однонуклонного поглощения пропорциональна перекрытию атомной  $P$ -волны волновой функцией ядра. В каонном мезоатоме гелия, как и в пионном мезоатоме гелия (§ 3.6), ион  $(K_{\alpha}^-)^+$  не может приблизиться к ядрам соседних атомов настолько близко, насколько это возможно для нейтрального  $K^-$ -мезоатома водорода. Хотя и неизвестна точная схема (распределение по уровням) ядерного поглощения, наблюдаемый в экспериментах большой абсолютный выход  $L_{\alpha}$ -переходов (например,  $85 \pm 25\%$  в эксперименте Михаэля [301]) ясно указывает на то, что большинство каонов не захватывается ядром до тех пор, пока они не достигают низколежащих уровней ( $n \simeq 2$ ), поэтому столкновительной механизм, такой, как штарковское смешивание, усиливающий ядерный захват за счет переходов в  $S$ -состоянии внутри уровня с главным квантовым числом  $n$ , не может быть доминирующим процессом. Этот вывод также согласуется с наблюдаемыми временами замедления и каскада  $K^-$ -мезонов в жидком гелии. Действительно, Блок и др. [63] обнаружили, что полное время, необходимое для того, чтобы каон, имея скорость  $0,02 \text{ с}^{-1}$ , захватился ядром в жидком гелии, есть  $t_c(0,02 \text{ с}) = (2,4 \pm 0,4) \cdot 10^{-10} \text{ с}$ . Это значение на два порядка больше предсказанного Дзем в предположении, что доминирует эффект Штарка. В этой связи отметим, что в каонных водородных атомах ситуация совершенно противоположна. Было предсказано, что время каскада (от первоначального образования до ядерного  $S$ -волнового поглощения) с учетом штарковского смешивания должно быть равно  $(2,4 \pm_{-1,3}^{+0,8}) \cdot 10^{-12} \text{ с}$ . Без учета эффекта Штарка время каскада примерно равно  $30 \cdot 10^{-12} \text{ с}$  [290]. Время каскада, измеренное Кнопом и др. [268], больше или равно  $4 \cdot 10^{-12} \text{ с}$ , что согласуется с предсказанием существования штарковского смешивания. О ядерном захвате  $K^-$ -мезонов из орбитальных  $S$ - и  $P$ -состояний каонных водородных атомов читатель может узнать в работах Фрая [209] и Нордина [307].

Первоначально спины основных состояний гиперфрагментов  $^4\text{H}$  и  $^4\text{He}$ , а также спин и четность резонанса  $Y_0^*$  (1405 МэВ) были опре-

делены в предположении, что  $K^-$ -мезоны захватываются в гелии из  $S$ -состояния [60, 61]. Однако впоследствии эти величины были найдены независимым образом [62].

Наблюдаемые энергии каонного рентгеновского излучения из  $^4\text{He}$  близки к значениям, полученным из решения уравнения Клейна—Гордона с учетом поправок на эффекты поляризации вакуума и конечного размера ядра (табл. 4.1). Это указывает на то, что эффект возмущения уровней энергии сильным каон-ядерным взаимодействием отсутствует. Теоретические оценки влияния сильного каон-ядерного взаимодействия на энергии переходов расходятся с экспериментальными значениями больше, чем на порядок.

Комплексный сдвиг уровня энергии связан с длиной рассеяния соотношением

$$\Delta \epsilon_n \equiv \Delta E_n + \frac{i}{2} \Gamma = - \frac{^4A}{nB} E_n, \quad (4.1)$$

где  $n$  — главное квантовое число;  $\Delta E_n$  — действительная часть комплексного сдвига энергии уровня;  $\Gamma$  — мнимая часть сдвига энергии уровня, которая определяет ширину уровня;  $A$  — комплексная длина рассеяния,  $B$  — боровский радиус каонного атома  $^4\text{He}$ ;  $E_n$  — энергия состояния. Формула (4.1) получена в предположении, что комплексная длина рассеяния  $A$  мала по сравнению с боровским радиусом (около 29 Ферми). Обычная прямая связь комплексных сдвигов энергий уровней с суммой экспериментальных длин  $K^-N$ -рассеяния не выполняется. Ван Хиппел и Дуглас [373] и Уретский [371] попытались связать результаты эксперимента Бурлесона и др. [35] с удовлетворительным значением комплексного оптического потенциала. Их расчеты, однако, не в состоянии объяснить экспериментальные результаты. Ясно, что необходимы дальнейшие теоретические исследования. Более поздние данные о рентгеновском излучении каонных, пионных и мюонных атомов гелия читатель может найти в работе Березина и др. [43].

### Каонное рентгеновское излучение других легких атомов

Уиганд и Мэк [383] измеряли каонное рентгеновское излучение легких элементов  $^7\text{Li}$ ,  $^9\text{Be}$ ,  $\text{B}$  (ест.) и  $^{12}\text{C}$ . Бэватронный пучок  $K^-$ -мезонов с импульсом  $500 \pm 10$  МэВ/с (полная ширина на полувысоте) был замедлен в энергетическом диссипаторе.

На рис. 4.1 показана схема размещения приборов, использованных в эксперименте. Отрицательные каоны останавливались в мишенях  $\text{LiH}$ ,  $\text{Be}$ ,  $\text{B}$  и  $\text{CH}_2$ . Для измерения рентгеновского излучения использовались две разделительные системы: цепочка из четырех  $\text{Si (Li)}$ -детекторов и  $\text{Ge (Li)}$ -детектор. Телескопический счетчик каонов состоял из сцинтилляционных счетчиков 1, 3, 4, 5, 7 и черенковского счетчика 2. Счетчики 7 и 2 были соединены по схеме антисовпадений.

Результаты измерений приведены в табл. 4.2. Там же в явном виде приведены переходы и их энергии, полученные из уравнения Клейна—Гордона. Все наблюдаемые линии соответствуют расчетным энергиям. Расчет Эйзенберга и Кесслера [161] предсказывает, что энергия перехода  $3d \rightarrow 2p$   $K^-$ -мезоатома  $^{12}\text{C}$  выше, чем результат, полученный из уравнения Клейна—Гордона (63,0 кэВ), на 1,15 кэВ.

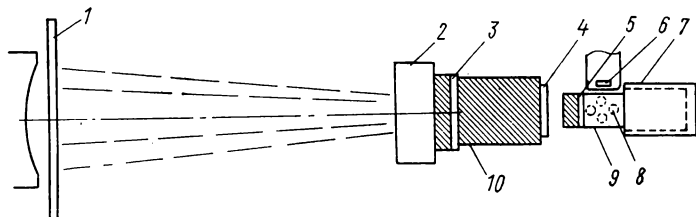


Рис. 4.1. Схема размещения приборов, используемых в эксперименте по изучению каонного рентгеновского излучения [383]:

1, 3, 4, 5, 7 — сцинтилляционные счетчики; 2 — счетчик Черенкова; 6 — Ge (Li)-детектор; 8 — Si (Li)-детекторы; 9 — мишень; 10 — графитовый замедлитель.

Однако выход рентгеновского излучения из переходов в состояние с  $n = 2$  был слишком мал, чтобы подтвердить эту линию. Выходы, приведенные в последней колонке этой таблицы, есть число рентгеновских квантов в данной спектральной линии на остановившийся  $K^-$ -мезон.

Таблица 4.2  
Каонное рентгеновское излучение легких элементов [383]

Нуклид	Переход	$E$ , кэВ	Число остановок	Число $\gamma$ -квантов	Тип де- тектора	Эффектив- ность ре- гистрации	Эксперимен- тальный выход
$^7\text{Li}$	$3d \rightarrow 2p$	15,3	215 000	225	Si (Li)	$5 \cdot 10^{-3}$	$0,21 \pm 0,07$
$^9\text{Be}$	$3d \rightarrow 2p$	27,6	99 000	60	Si (Li)	$4 \cdot 10^{-3}$	$0,15 \pm 0,06$
B (ест.)	$3d \rightarrow 2p$	43,6	81 000	40	Ge (Li)	$7 \cdot 10^{-3}$	$0,07 \pm 0,03$
B (ест.)	$4f \rightarrow 3d$	15,2	81 000	50	Si (Li)	$2 \cdot 10^{-3}$	$0,3 \pm 0,15$
$^{12}\text{C}$	$3d \rightarrow 2p$	63,0	186 000	—	Ge (Li)	$7 \cdot 10^{-3}$	$< 0,04$
$^{12}\text{C}$	$4f \rightarrow 3d$	22,0	190 000	220	Si (Li)	$5 \cdot 10^{-3}$	$0,23 \pm 0,07$
$^{12}\text{C}$	$4f \rightarrow 3d$	22,0	186 000	150	Ge (Li)	$4 \cdot 10^{-3}$	$0,20 \pm 0,07$
$^{12}\text{C}$	$5f \rightarrow 3d$	32,2	186 000	45	Ge (Li)	$6 \cdot 10^{-3}$	$0,04 \pm 0,02$
$^{12}\text{C}$	$6f \rightarrow 3d$	37,8	186 000	45	Ge (Li)	$6 \cdot 10^{-3}$	$0,04 \pm 0,02$

#### Каонное рентгеновское излучение средних и тяжелых элементов

Измерение спектров каонного рентгеновского излучения легких элементов, описанное в предыдущем параграфе, было проведено также для средних и тяжелых элементов с использованием того же самого бэватронного пучка  $K^-$ -мезонов и больших Ge (Li)-детекторов [384].

Таблица 4.3

## Каонное рентгеновское излучение средних и тяжелых элементов [384]

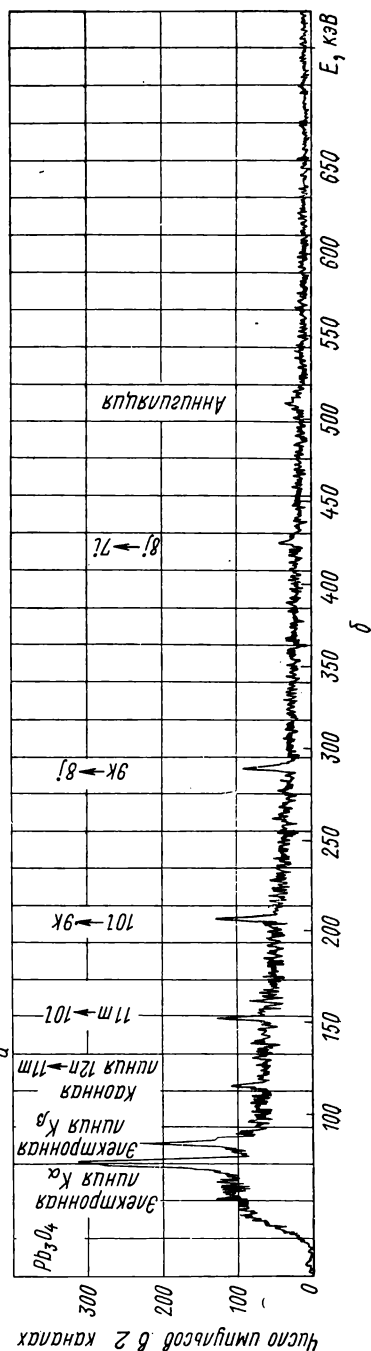
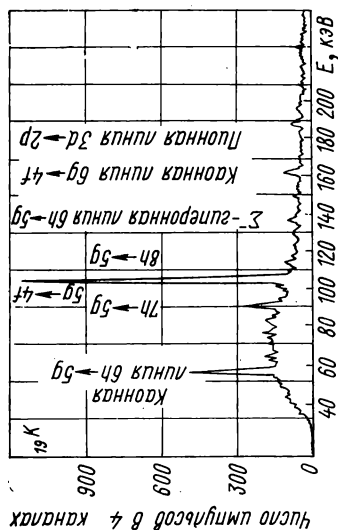
Z	Мишень	Переход $n_1l_1 \rightarrow n_2l_2$	Интенсивность на один К <sup>+</sup>	Энергия, кэВ
17	CaCl <sub>2</sub>	5g → 4f	0,6 ± 0,1	84,3
17	CaCl <sub>2</sub>	5g → 4f <sub>i</sub>	0,6 ± 0,1	84,3
		6g → 4f <sub>i</sub>	0,06 ± 0,02	130,0
		4f → 3d	0,05 ± 0,02	182,2
19	K	6h → 5g	0,55 ± 0,1	57,3
19	K	6h → 5g	0,55 ± 0,1	57,3
		7h → 5g	0,07 ± 0,02	91,8
		8h → 5g	0,03 ± 0,01	114,2
		5g → 4f <sub>i</sub>	0,60 ± 0,1	105,5
		6g → 4f <sub>i</sub>	0,04 ± 0,02	162,7
20	<sup>40</sup> CaCl <sub>2</sub>	6h → 5g	0,7 ± 0,1	63,5
		5g → 4f <sub>i</sub>	0,4 ± 0,1	116,9
20	<sup>44</sup> CaCl <sub>2</sub>	6h → 5g	0,6 ± 0,1	63,5
		5g → 4f <sub>i</sub>	0,3 ± 0,1	116,9
22	Ti	5g → 4f <sub>i</sub>	0,4 ± 0,1	141,8
		6h → 5g	0,4 ± 0,1	77,0
		7h → 5g	0,06 ± 0,02	123,4
28	Ni	7i → 6h	0,3 ± 0,1	75,4
		9i → 6h	0,06 ± 0,03	157,8
		6h → 5g	0,2 ± 0,1	125,0
		5g → 4f <sub>i</sub>	0,1 ± 0,05	230,3
29	CuCl <sub>2</sub> + 2H <sub>2</sub> O	7i → 6h	0,1 ± 0,05	80,9
		6h → 5g	0,3 ± 0,1	134,2
30	Zn	7i → 6h	0,5 ± 0,1	86,6
		6h → 5g	0,6 ± 0,1	143,6
32	Ge	7i → 6h	0,4 ± 0,2	—
		6h → 5g	0,4 ± 0,2	—
33	As	7i → 6h	0,4 ± 0,2	—
		6h → 5g	0,4 ± 0,2	—
34	Se	7i → 6h	0,4 ± 0,2	—
		6h → 5g	0,4 ± 0,2	—
42	Mo	9k → 8j	0,3 ± 0,1	75,7
		8j → 7i	0,25 ± 0,1	110,5
		7i → 6h	0,3 ± 0,1	170,3
		6h → 5g	0,15 ± 0,05	283,3 (286,6)
53	I	10l → 9k	0,6 ± 0,1	86,4
		9k → 8j	0,4 ± 0,1	120,8
		8j → 7i	0,5 ± 0,3	176,7
		7i → 6h	0,5 ± 0,1	271,8 (271,7)
56	BaO	9k → 8j	0,3 ± 0,1	134,9
		8j → 7i	0,3 ± 0,1	196,9
		7i → 6h	0,3 ± 0,1	304 (303,6)
62	Sm	10l → 9k	0,4 ± 0,1	118,3
62	Sm	10l → 9k	0,4 ± 0,1	118,3
		9k → 8j	0,4 ± 0,1	165,5
		8j → 7i	0,5 ± 0,1	241,5
		7i → 6h	0,3 ± 0,1	373,9 (372,5)
63	EuF <sub>2</sub>	10l → 9k	0,2 ± 0,1	122,2
63	EuF <sub>3</sub>	10l → 9k	0,2 ± 0,1	122,12
		9k → 8j	0,3 ± 0,1	170,9
		8j → 7i	0,3 ± 0,1	249,4
		7i → 6h	0,15 ± 0,1	385,7 (384,6)

Продолжение табл. 4.3

$Z$	Мишень	Переход $n_1 l_1 \rightarrow n_2 l_2$	Интенсивность на один $K^-$	Энергия, кэВ
64	$Gd_2O_3$	$10l \rightarrow 9k$	$0,3 \pm 0,1$	126,1
		$9k \rightarrow 8j$	$0,3 \pm 0,1$	176,4
		$8j \rightarrow 7i$	$0,3 \pm 0,1$	257,4
		$7i \rightarrow 6h$	$0,15 \pm 0,1$	398,7 (397,0)
66	Dy	$10l \rightarrow 9k$	$0,2 \pm 0,1$	134,1
		$9k \rightarrow 8j$	$0,2 \pm 0,1$	187,6
		$8j \rightarrow 7i$	$0,2 \pm 0,1$	274,5 (273,8)
68	Er	$10l \rightarrow 9k$	$0,4 \pm 0,1$	142,4
		$9k \rightarrow 8j$	$0,4 \pm 0,1$	199,2
		$8j \rightarrow 7i$	$0,2 \pm 0,1$	291,6 (290,7)
74	W	$10l \rightarrow 9k$	$0,15 \pm 0,1$	168,8
		$9k \rightarrow 8j$	$0,15 \pm 0,1$	236,1
		$8j \rightarrow 7i$	$0,15 \pm 0,1$	345,1 (344,6)
77	Ir	$10l \rightarrow 9k$	$0,2 \pm 0,1$	182,8
		$9k \rightarrow 8j$	$0,2 \pm 0,1$	255,7
		$8j \rightarrow 7i$	$0,1 \pm 0,05$	374,4 (373,3)
80	HgCl	$10l \rightarrow 9k$	$0,7 \pm 0,1$	197,3
		$9k \rightarrow 8j$	$0,6 \pm 0,1$	276,1
		$8j \rightarrow 7i$	$0,4 \pm 0,1$	406,3 (403,1)
81	TlCl	$11m \rightarrow 10l$	$0,7 \pm 0,1$	149,6
		$10l \rightarrow 9k$	$0,7 \pm 0,1$	202,3
		$9k \rightarrow 8j$	$0,5 \pm 0,1$	283,1
82	$Pb_3O$	$8j \rightarrow 7i$	$0,4 \pm 0,1$	416,6 (413,3)
		$12n \rightarrow 11m$	$0,3 \pm 0,1$	116,6
		$11m \rightarrow 10l$	$0,5 \pm 0,1$	153,3
		$10l \rightarrow 9k$	$0,5 \pm 0,1$	207,4
		$9k \rightarrow 8j$	$0,4 \pm 0,1$	290,1
92	U	$8j \rightarrow 7i$	$0,1 \pm 0,05$	326,7 (423,6)
		$12n \rightarrow 11m$	$0,4 \pm 0,1$	146,9
		$11m \rightarrow 10l$	$0,5 \pm 0,1$	193,2
		$10l \rightarrow 9k$	$0,4 \pm 0,1$	261,3
		$9k \rightarrow 8j$	$0,25 \pm 0,1$	365,6
		$8j \rightarrow 7i$	$0,1 \pm 0,05$	539,0 (534,1)

Результаты измерений каонных спектральных рентгеновских линий 24 элементов от  $Z = 17$  до  $Z = 92$  приведены в табл. 4.3. Некоторые образцы спектров показаны на рис. 4.2, *a* и *б*. Вне-сенные в табл. 4.3 энергии получаются из уравнения Клейна—Гордона с поправками на приведенную массу, но без поправок на дополнительные эффекты. Наблюдаемые значения согласуются с теоретическими значениями за исключением энергий более высоких переходов в тяжелых элементах. В этих случаях отклонения иллюстрируются приведенными в скобках значениями, полученными из уравнения Клейна—Гордона. Большинство этих отклонений может быть объяснено эффектами поляризации вакуума и конечного размера ядра. В четвертом столбце даны приблизительные значения интен-

Рис. 4.2. Спектр каонного рентгеновского излучения в К (а) и в Рb (б) [384]. Объем детектора  $13 \text{ см}^3$ . Число каонных остатков в детекторе  $1,0 \cdot 10^6$  (а) и  $1,3 \cdot 10^6$  (б).





сивностей рентгеновского излучения на остановившийся  $K^-$ -мезон. Эти значения находятся в хорошем согласии с результатами Эйзенберга и Кесслера [161], исключая случаи, в которых преобладает ядерный захват.

## § 4.2. КАОННОЕ РЕНТГЕНОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ КАК ИСТОЧНИК ИНФОРМАЦИИ О ПЕРИФЕРИИ ЯДРА

### Захват $K^-$ -мезонов ядерной поверхностью

В предыдущих главах было показано, что мюон может служить хорошим инструментом в исследовании распределения заряда ядер, в то время как пион из-за сильного пион-ядерного взаимодействия может использоваться для изучения распределения ядерной массы.

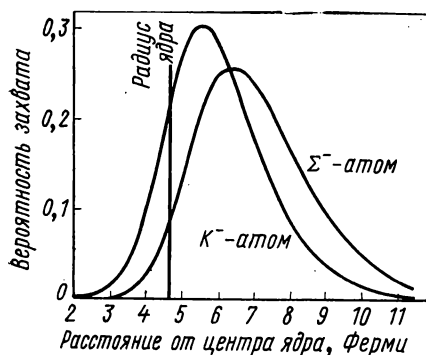


Рис. 4.3. Радиальная зависимость нормированной вероятности ядерного захвата  $K^-$ -мезона и  $\Sigma^-$ -гиперона в каонном и  $\Sigma^-$ -гиперонном атомах брома [299].

В некоторых отношениях каонный атом подобен пионному атому. Однако в каонном атоме взаимодействие с ядром сильнее и масса  $K^-$ -мезона больше массы пиона. Следовательно,  $K^-$ -мезоны могут быть использованы как очень чувствительный зонд в исследовании распределения ядерной плотности. Уилкинсон [391, 392, 394] особенно подчеркивает, что изучение каонных атомов может дать сведения о самой крайней области ядерной поверхности.

Если в конце каскада каоны захватываются ядром из круговых орбит (что, вероятно, имеет место), то процесс захвата главным образом происходит на поверхности ядра [255, 299, 393]. На рис. 4.3 показана радиальная зависимость нормированной вероятности ядерного захвата движущейся по орбите частицы в каонном и  $\Sigma^-$ -гиперонном атомах брома. В расчете использовались центральный оптический потенциал и вудс-саксоновское распределение нуклонной плотности со следующими параметрами:  $W = -22,5$  МэВ,  $C = 1,07 A^{1/3}$  Ферми,  $t = 0,57$  Ферми [см. выражения (4.4) и (4.5)]. По-видимому, в действительности  $K^-$ -захват более периферичен, чем показано на рис. 4.3.

Этот вывод существенно зависит от предположения, что ядерный захват  $K^-$ -мезонов и  $\Sigma^-$ -гиперонов происходит с круговых орбит. Такое предположение теоретически допустимо, так как  $K^-$ -мезоны

и  $\Sigma^-$ -гипероны в основном захватываются в атомные состояния с большим значением орбитального момента  $l$ , грубо говоря, пропорционально статистическому весу  $(2l + 1)$  (§ 1.2). Это предположение подтверждается результатами наблюдений подобного спектра в рентгеновских сериях Pb. Каоны некруговых орбит ( $l < n - 1$ ) не дают вклада на концах рентгеновских серий, поэтому Уиганд [384] сделал вывод, что если каон доходит до 8-го или 9-го уровня

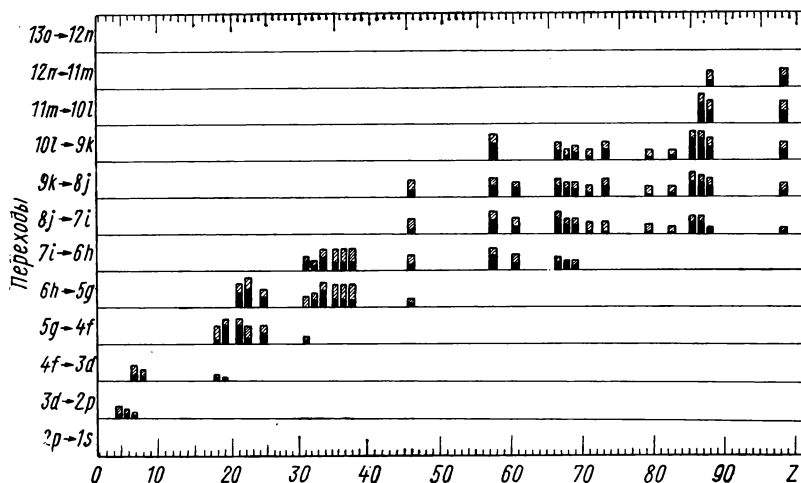


Рис. 4.4. Диаграмма экспериментально наблюдаемых основных каонных линий, приведенных в табл. 4.3 [384]. По оси ординат откладываются переходы из вышележащей круговой орбиты в следующую нижележащую круговую орбиту. Высота сплошных полосок пропорциональна наблюдаемым интенсивностям. Средняя интенсивность линий порядка 0,6  $\gamma$ -квантов на остановившийся  $K^-$ -мезон.

каонного атома Pb, как это действительно и происходит, то он определенно находится на круговой орбите ( $l = n - 1$ ).

Рис. 4.4 представляет собой диаграмму основных каонных рентгеновских линий, приведенных в табл. 4.3. По оси ординат отложены переходы от одной круговой орбиты к следующей. Высота прямоугольников пропорциональна наблюдаемым интенсивностям, которые согласуются с расчетами Эйзенберга и Кесслера [161]. Диаграмма ясно показывает уровни, на которых обрываются различные переходы, указывая тем самым, что произошел ядерный захват каона. На диаграмме также видно внезапное обрывание линий переходов, причем соответствующее  $n$  падает с уменьшением  $Z$ . Этим подтверждается, что ядерная материя (вероятно, нейтроны) простирается за пределами общепринятой ядерной поверхности. Этот вопрос будет обсуждаться в следующем разделе.

## Избыток нейтронов на поверхности тяжелых ядер

Джонсон и Теллер [254] первыми предположили, что в  $\beta$ -стабильных ядрах область нейтронного распределения должна быть больше области протонного распределения и, кроме того, при проведении экспериментов по пион-ядерному взаимодействию может быть найдена область ядерной поверхности, населенная главным образом нейтронами. В последние годы возможность существования избытка нейтронов на поверхности тяжелых ядер обсуждалась многими авторами [51, 83, 164, 217, 255, 343, 350, 389].

Как уже упоминалось в предыдущем разделе, каоны особенно пригодны для исследования самой периферической области ядер. В эксперименте такого типа даже можно оценить отношение числа нейтронов к числу протонов на ядерной поверхности, поскольку легко отличить взаимодействия  $K^- \rightarrow p$  и  $K^- \rightarrow n$  друг от друга.

Существует несколько процессов первичного взаимодействия  $K^-$ -мезонов с нуклонами в каонных атомах:

$$K^- + p \rightarrow \Sigma^- + \pi^+; \quad (4.2a)$$

$$K^- + p \rightarrow \Sigma^+ + \pi^-; \quad (4.2б)$$

$$K^- + p \rightarrow \Sigma^0 + \pi^0; \quad (4.2в)$$

$$K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0; \quad (4.2г)$$

$$K^- + n \rightarrow \Sigma^- + \pi^0; \quad (4.3a)$$

$$K^- + n \rightarrow \Sigma^0 + \pi^-; \quad (4.3б)$$

$$K^- + n \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-; \quad (4.3в)$$

(Детальное рассмотрение этого вопроса читатель может найти в работе Брэндона [73].)

Дэвис и др. [127] измерили относительные скорости рождения заряженных  $\Sigma^-$ -гиперонов при захвате  $K^-$ -мезонов протонами и нейтронами в легких (C, N, O) и тяжелых (Ag, Br) эмульсионных ядрах. Авторы работы [127] обнаружили, что отношение числа протонных и нейтронных захватов в тяжелых и легких ядрах равно  $5,0^{+1,2}_{-0,8}$ . Большое значение этого отношения интерпретируется как указание на избыток нейтронов в наиболее выступающей области тяжелого ядра.

Буроп [83] подробно обсудил избыток нейтронов, или «нейтронную атмосферу», которая необходима для объяснения результатов этого эксперимента. Он отметил также, что в дополнение к процессам (4.2a), (4.2б) и (4.3a) на захват должен оказывать большое влияние резонанс  $Y_0^*$ . Блум и др. [66] пытались объяснить результаты этого эксперимента, вводя полуфеноменологическое описание  $Y_0^*$ -резонанса [262], а также изменение в отношении нейтронной плотности к протонной при движении от ядерного кора до области, находящейся за пределами обычного радиуса ядра. Предварительные результаты их расчета качественно согласуются с экспериментом.

Изучение каонного рентгеновского излучения средних и тяжелых элементов также указывает на существование в тяжелых ядрах области, обогащенной нейтронами [384, 385]. Предположим, что  $K^-$ -ядерное взаимодействие можно представить центральным опти-

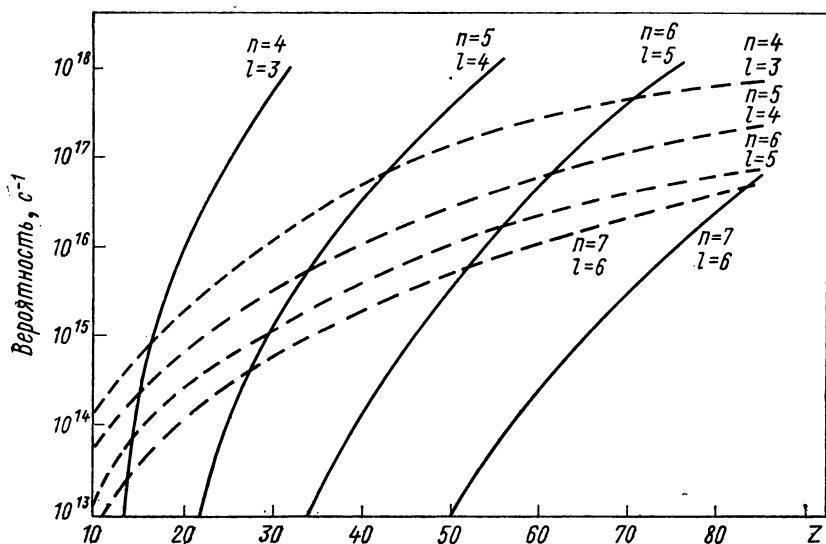


Рис. 4.5. Расчетные значения вероятностей радиационных переходов (X-переходы) (---) и ядерных поглощений (Y-переходы) (—)  $K^-$ -мезонов из различных мезоатомных состояний [398]. В расчете использовались следующие значения параметров:  $W=30$  МэВ,  $C=1,07 \cdot A^{1/3}$  Ферми и  $t=0,55$  Ферми.

ческим потенциалом

$$V(r) = (U + iW) \rho(r), \quad (4.4)$$

где ядерная вудс-саксоновская плотность  $\rho(r)$  имеет следующий вид:

$$\rho(r) = \frac{\rho(0)}{1 + \exp[(r-C)/t]}. \quad (4.5)$$

В этом выражении  $C$  — расстояние, на котором плотность убывает вдвое;  $t$  — толщина поверхностного слоя;  $\rho(r)$  нормирована на объем ядра. Скорость ядерного захвата дается в первом порядке теории возмущений следующим интегралом перекрытия:

$$p_c = \frac{W}{h} \int \rho(r) |R_{n,l}(r)|^2 r^2 dr, \quad (4.6)$$

где  $R_{n,l}(r)$  — нормированная водородоподобная радиальная волновая функция  $K^-$ -мезона. В случае захвата из круговых орбит в формуле (4.6) используются радиальные функции с  $l = n - 1$ .

Расчет вероятностей радиационных переходов и ядерного захвата предсказывает, что серии:  $n = 4 \rightarrow 3$ ,  $5 \rightarrow 4$ ,  $6 \rightarrow 5$  и  $7 \rightarrow 6$  должны прерываться соответственно при  $A = 16, 33, 56$  и  $83$ , как это показано на рис. 4.5 [393]. Эти значения, однако, не согласуются с результатом эксперимента (см. рис. 4.4). Если предположить различные распределения плотностей протонов и нейтронов, а также увеличить значение  $W$ , то можно добиться согласия между теорией и экспериментом. Например, в случае  ${}^{157}_{64}\text{Gd}$  расчетные значения согласуются с экспериментальными, если приписать протонному распределению обычные значения параметров  $C_p = 1,07 \times A^{1/3}$  Ферми и  $t_p = 0,55$  Ферми, но увеличить нейтронный радиус до  $1,2 \cdot 1,07 \cdot A^{1/3}$  Ферми, а толщину поверхностного слоя нейтронного распределения до  $2 \cdot 0,55$  Ферми и, кроме того, принять  $W = 100$  МэВ. Следует, однако, отметить, что согласие может быть также достигнуто с различными комбинациями параметров  $C$  и  $t$ . К тому же в настоящее время неизвестно точное значение  $W$ . Ценность каонного рентгеновского излучения как источника информации о периферии ядра в значительной степени зависит от точного значения  $W$ . Отметим также, что в недавней работе Андерсона и др. [10] было использовано низкоэнергетическое пион-ядерное взаимодействие для исследования нуклонного распределения в ядрах. Найдено, что различие в нейтронном и протонном радиусах составляет  $-0,01 \pm 0,16$  Ферми. Этот результат отражает «среднее» поведение широкой области ядер.

### Дополнение

Пионерская работа Уиганда [384], измерившего выходы каонного рентгеновского излучения в широкой области ядер, стимулировала появление теоретических работ по каонным атомам. Эриксон и Шек (Nucl. Phys., 1970, v. B19, p. 450) детально исследовали сильное  $K^-$ -ядерное взаимодействие в пороговой области, его зависимость от распределения ядерной материи и параметров, характеризующих взаимодействие. В этой работе содержится вывод о том, что  $K^-$ -ядерный потенциал, пропорциональный длинам  $KN$ -рассеяния и стандартному распределению ядерной плотности типа Ферми, может объяснить в пределах экспериментальной точности выходы рентгеновского излучения, полученные Уигандом, и нет необходимости предполагать протяженность нейтронного распределения за пределы обычной ядерной поверхности.

С другой стороны, исследование Бете и Симонса (Nucl. Phys., 1970, v. B21, p. 589), по-видимому, согласуется с большей плотностью нейтронов на периферии ядра. Эти авторы проводят различие между основной ядерной поверхностью (вблизи точки, в которой ядерная плотность уменьшилась в два раза) с одинаковым распределением нейтронной и протонной плотностей и краевой ядерной поверхностью, где происходит в основном однонуклонное поглощение мезонов. Они считают, что экспериментальные данные по интен-

сивностям рентгеновского излучения и конечные зарядовые состояния могут быть объяснены экстраполяцией амплитуд  $KN$ -рассеяния в соответствующую кинематическую область, и отмечают, что в более тяжелых ядрах одночастичные волновые функции протонов распадаются гораздо быстрее, чем нейтронные. Кроме того, из расчета Негеле (Nucl. Phys., 1969, v. A138, p. 401) следует, что отношение нейтронной плотности к протонной в  $^{208}\text{Pb}$  меньше, чем по данным Бете и Симонса, но больше того, что получается с распределением типа Ферми.

Анализ Аслама и Рука (Nucl. Phys., 1970, v. B20, p. 397), учитывая эффект ядерной деформации, может также объяснить наблюдаемые выходы каонного рентгеновского излучения в пределах экспериментальной погрешности, за исключением случая  $^{208}\text{Pb}$ . Их расчет, однако, дает около половины отношения протонной и нейтронной плотностей, полученного Буропом [83]. Результат расчета скорости двухнуклонного поглощения в каонных атомах (Nucl. Phys., 1970, v. B20, p. 159) показывает, что не существует доказательств присутствия  $\alpha$ -кластеров в ядерной поверхности.

Очевидно, что наши знания о каонных атомах очень ограничены и необходимо провести более точные эксперименты, чтобы внести ясность во многие нерешенные вопросы.

#### § 4.3. МЕТАСТАБИЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ $(\alpha K^- e^-)$ -АТОМА

Чтобы объяснить большие наблюдаемые значения средних времен каскада  $\pi^-$ - и  $K^-$ -мезонов на атомных орбитах в жидком гелии (примерно  $3 \cdot 10^{-10}$  с и  $2 \cdot 10^{-10}$  с соответственно), Кондо [117] предположил существование метастабильного состояния нейтрального мезоатома. Детальные расчеты Расселла [336] указывают на то, что случайное образование метастабильного состояния может, по крайней мере, частично объяснить среднее время каскада каонного атома He, но не объясняет время каскада пионного атома He.

По-видимому, нейтральные мезоатомы гелия  $(\alpha \pi^- e^-)$  и  $(\alpha K^- e^-)$  образуются в состоянии с энергией связи  $E_b$ , которая мало отличается от энергии связи электрона в  $1s$ -состоянии гелиевого атома (79,02 эВ). По закону сохранения энергии существует определенный возможный минимум изменения главного квантового числа мезона:

$$\Delta n \geq |\Delta n|_{\text{мин}},$$

оже-переходы обычно идут с минимальным изменением  $\Delta n = |\Delta n|_{\text{мин}}$ , причем в этом случае энергия эжектируемых электронов довольно мала. Орбитальный угловой момент  $l_A$  эжектируемого электрона больше или равен  $|\Delta l|$  ( $\Delta l$  — изменение углового момента мезона), поэтому скорость оже-перехода должна быть значительно подавлена центробежным барьером. В табл. 4.4 приводятся значения  $E_b$ ,  $|\Delta n|_{\text{мин}}$ ,  $E_A$ , скорости оже-перехода  $P_A$  и скорости радиационного перехода  $P_R$  ( $\alpha \pi^- e^-$ ), ( $\alpha K^- e^-$ ) и ( $\alpha p e^-$ )-атомов. Рассматриваются только те состояния, в которых отрицательный мезон или антипро-

тон находятся на круговых орбитах ( $l = n - 1$ ). Скорость оже-перехода  $P_A$ , приведенная в табл. 4.4, получена с точностью до множителя 2 или 3. Большое значение скорости оже-перехода пиона в системе ( $\alpha\pi^-e^-$ ) из состояния с  $n = 16$  наводит на мысль, что среднее время каскада пионного мезоатома гелия нельзя объяснить предположением существования метастабильных состояний. В случае ( $\alpha K^-e^-$ )-системы малое значение  $P_A$  из состояния с  $n = 28$  означает, что среднее время каскада в каонном атоме гелия можно объяснить, предполагая случайное образование метастабильных состояний атома ( $\alpha K^-e^-$ ). Это заключение подтверждается расчетом взаимодействия ( $\alpha K^-e^-$ )-атома с атомом гелия [336]. Согласно этому расчету, эффект Штарка, вероятно, подавлен в метастабильных состояниях атома ( $\alpha K^-e^-$ ).

Табл. 4.4 показывает также, что время каскада нейтрального антипротонного атома ( $\alpha\bar{p}e^-$ ) начиная с больших значений главного квантового числа определяется только скоростью радиационных переходов  $P_R$ . Это позволяет экспериментально наблюдать «путешествие» антипротонов по этим состояниям.

Таблица 4.4

Некоторые свойства круговых орбит ( $\alpha\pi^-e^-$ )-, ( $\alpha K^-e^-$ )- и ( $\alpha\bar{p}e^-$ )-атомов [336]

Атом	$n$	$E_b$ , эВ	$ \Delta n _{\text{мин}}$	$E_A$ , эВ	$P_A$ , с <sup>-1</sup>	$P_R$ , с <sup>-1</sup>
$\alpha\pi^-e^-$	16	—75,616	3	9,112	$4 \cdot 10^9$	$2,8 \cdot 10^7$
	15	—81,736	2	2,992	$2 \cdot 10^{12}$	$4,8 \cdot 10^7$
$\alpha K^-e^-$	29	—74,8	5	5,848	$6 \cdot 10^2$	$4,4 \cdot 10^6$
	28	—77,928	4	2,720	$4 \cdot 10^6$	$6,0 \cdot 10^6$
	27	—81,6	4	6,120	$1 \cdot 10^6$	$8,1 \cdot 10^6$
$\alpha\bar{p}e^-$	38	—74,8	6	3,128	—	$2,0 \cdot 10^6$
	37	—79,696	5	0,816	—	$2,5 \cdot 10^6$
	36	—82,824	5	3,400	—	$3,1 \cdot 10^6$
	35		4	0,272	$\gtrsim 10^4$	$3,9 \cdot 10^6$

#### § 4.4. МАССА КАОНА

В § 2.8 и 3.7 было показано, что изучение мезонного рентгеновского излучения может дать точные значения масс орбитальных частиц. Измерение же энергий каонного рентгеновского излучения не позволяет в настоящее время определить массу  $K^-$ -мезона со сравнимой точностью. Уиганд и Кунсельман [385] утверждают, что их калибровка по энергии позволяет получить массу  $K^-$ -мезона с погрешностью 1 МэВ. Согласно [311]  $m_K = 493,715 \pm 0,037$  МэВ.

#### § 4.5. $\Sigma^-$ -ГИПЕРОННОЕ РЕНТГЕНОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

$\Sigma^-$ -Гипероны образуются в реакциях (4.2а) и (4.3а). При захвате этих частиц ядрами мишени могут образовываться  $\Sigma^-$ -гиперонные атомы. Уже в 1957 г. Фрай и др. [208] наблюдали в фотографии-

ческих эмульсиях на конце треков  $\Sigma^-$ -гиперонов оже-электроны, которые указывают на образование  $\Sigma^-$ -гиперонных атомов. Однако  $\Sigma^-$ -гиперонное рентгеновское излучение зарегистрировано только недавно [384]. На рис. 4.2, а видна только одна линия рентгеновского излучения гиператома  $^{19}\text{K}$  с энергией 136 кэВ, соответствующая  $6h \rightarrow 5g$ -переходу.  $\Sigma^-$ -Гиперонное рентгеновское излучение, возникающее в  $h = 7 \rightarrow h = 6$ -переходе с энергией 82,2 кэВ, в эксперименте не наблюдалось. Линия перехода  $h = 5 \rightarrow h = 4$ , по-видимому, ограничивается ядерным захватом. Рис. 4.3 говорит о том, что в  $\Sigma^-$ -гиперонных атомах ядерный захват происходит даже в более удаленной области ядерной поверхности, чем в случае каонных атомов. Поэтому измерение  $\Sigma^-$ -гиперонного рентгеновского излучения даст возможность исследовать край периферии ядра [83].  $\Sigma^-$ -Гиперонное рентгеновское излучение тяжелых ядер должно обладать тонкой структурой, обусловленной магнитным моментом  $\Sigma^-$ -гиперона. Следовательно, изучение  $\Sigma^-$ -гиперонного рентгеновского излучения может дать значение магнитного момента  $\Sigma^-$ -гиперона.

#### § 4.6. $\Xi^-$ -ГИПЕРОННЫЕ И АНТИПРОТОННЫЕ АТОМЫ

Другие отрицательные частицы, рождающиеся в реакциях при высоких энергиях, такие, как  $\Xi^-$ -гипероны и антипротоны, могут также образовывать адронные атомы. Радиус  $K$ -орбиты  $\Xi^-$ -гиперонного атома меньше ядерного радиуса для  $Z > 7$ , так как масса  $\Xi^-$ -гиперона очень велика ( $1321,29 \pm 0,14$  МэВ) [311]. Аннигиляция антипротонов из атомных состояний подробно изучалась Бете и Гамильтоном [49] и сравнительно недавно Апостолакисом и др. [16]. За время, в течение которого была написана эта книга, ни антипротонное, ни  $\Xi^-$ -гиперонное рентгеновское излучение не наблюдались. Однако с использованием более интенсивных антипротонных пучков изучение антипротонных атомов может служить средством получения информации о структуре ядра.

#### Дополнение

Бакенштосс и сотр. (Phys. Lett., 1970, v. B33, p. 399) в ЦЕРНе получили самое убедительное доказательство существования  $\Sigma^-$ -гиперонных атомов, а также впервые измерили антипротонное рентгеновское излучение.

**$\Sigma^-$ -гиперонные атомы.** При анализе каонных рентгеновских спектров некоторые исследователи наблюдали  $\gamma$ -линии, источником которых предполагались радиационные переходы в  $\Sigma^-$ -гиперонных атомах. Эти наблюдения ограничивались отдельными линиями в K, S, Li и т. п. [384] (см. также Phys. Lett., 1970, v. B33, p. 399; Nucl. Phys., 1970, v. B16, p. 389). В ЦЕРНе (Phys. Lett., 1970, v. B33, p. 399) впервые получили неоспоримое доказательство существования  $\Sigma^-$ -гиперонного атома благодаря регистрации серии переходов типа  $(n \rightarrow n - 1)$ ,  $(n - 1) \rightarrow (n - 2)$  и т. п.



Таблица 4.5

Сравнение измеренных характеристик рентгеновского излучения  
 $\Sigma^-$ -гиперонных атомов с расчетными значениями\*

Элемент	Переход $n \rightarrow n'$	$R_{\text{теор}}, \%$	$E_{\text{теор}}, \text{кэВ}$	$E_{\text{эксп}}, \text{кэВ}$	$I_{\Sigma^-}/I_K, \%$	Контрольный переход $n \rightarrow n'$
$^{16}\text{S}$	$6 \rightarrow 5$	86	96,52	$96,70 \pm 0,30$	$5,6 \pm 1,0$	$5 \rightarrow 4$
	$5 \rightarrow 4$	3	177,92	—	—	—
$^{17}\text{Cl}$	$7 \rightarrow 6$	99	65,87	$66,18 \pm 0,50$	$4,3 \pm 1,1$	$5 \rightarrow 4$
	$6 \rightarrow 5$	75	109,38	$109,40 \pm 0,20$	$6,5 \pm 1,2$	$5 \rightarrow 4$
	$5 \rightarrow 4$	2	—	—	—	—
	$11 \rightarrow 10$	100	49,03	$49,33 \pm 0,40$	—	—
$^{30}\text{Zn}$	$10 \rightarrow 9$	100	66,32	—	—	—
	$9 \rightarrow 8$	100	92,79	$92,33 \pm 0,50$	$3,7 \pm 0,9$	$6 \rightarrow 5$
	$8 \rightarrow 7$	99	135,46	$134,99 \pm 0,50$	$4,0 \pm 1,0$	$6 \rightarrow 5$
	$7 \rightarrow 6$	45	208,94	—	—	—
	$6 \rightarrow 5$	1	345,68	—	—	—

\* См. Backenstoss G. e. a. Phys. Lett., 1970, v. B33, p. 230.

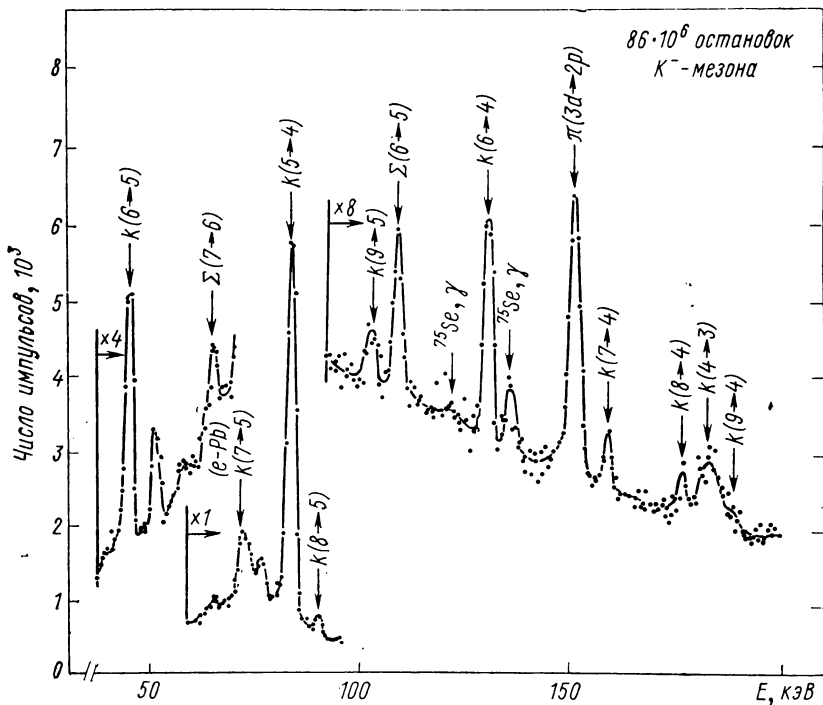


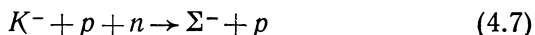
Рис. 4.6. Спектр рентгеновского излучения каонных,  $\Sigma^-$ -гиперонных и  $\pi^-$ -мезонных атомов, полученный при торможении  $K^-$ -мезонов в LiCl.

Таблица 4.6

**Сравнение измеренных значений энергии рентгеновских линий  
антипротонного атома  $\bar{p}$  с расчетными значениями**

Переход $n \rightarrow n'$	$E_{\text{эксп}}, \text{кэВ}$			$\langle E_{\text{эксп}} \rangle, \text{кэВ}$	$E_{\text{теор}}, \text{кэВ}$
	I	II	III		
15 $\rightarrow$ 14	107,73 $\pm$ 0,23	107,73 $\pm$ 0,40	—	107,73 $\pm$ 0,20	107,76
14 $\rightarrow$ 13	133,45 $\pm$ 0,18	133,65 $\pm$ 0,16	—	133,56 $\pm$ 0,12	133,68
13 $\rightarrow$ 12	168,62 $\pm$ 0,16	168,38 $\pm$ 0,15	168,97 $\pm$ 0,26	168,56 $\pm$ 0,10	168,59
12 $\rightarrow$ 11	216,97 $\pm$ 0,15	216,86 $\pm$ 0,15	217,01 $\pm$ 0,19	216,94 $\pm$ 0,09	216,81
15 $\rightarrow$ 13	241,66 $\pm$ 0,42	241,78 $\pm$ 0,52	—	241,71 $\pm$ 0,33	241,44
11 $\rightarrow$ 12	285,31 $\pm$ 0,24	285,48 $\pm$ 0,16	285,40 $\pm$ 0,15	285,42 $\pm$ 0,10	285,33
14 $\rightarrow$ 12	—	301,03 $\pm$ 0,65	—	301,03 $\pm$ 0,56	302,26
10 $\rightarrow$ 9	286,02 $\pm$ 0,26	386,03 $\pm$ 0,33	386,16 $\pm$ 0,35	386,05 $\pm$ 0,17	386,08
13 $\rightarrow$ 11	385,33 $\pm$ 0,26	385,34 $\pm$ 0,33	385,47 $\pm$ 0,35	385,36 $\pm$ 0,17	385,39

Около 100] низкоэнергетических  $K^-$ -мезонов протонного синхротрона ЦЕРНа за импульс могли быть остановлены в мишени толщиной 8 г/см<sup>2</sup>.  $\Sigma^-$ -Гипероны, образующие  $\Sigma^-$ -гиперонные атомы, рождались главным образом в реакциях (4.2а) и (4.3а). Наибольшее количество гиперонов рождалось в реакции



и распадалось до образования  $\Sigma^-$ -гиперонных атомов, так как их энергия была слишком велика.

В табл. 4.5 проводится сравнение измеренных характеристик рентгеновского излучения  $\Sigma^-$ -гиперонных атомов с расчетными зна-

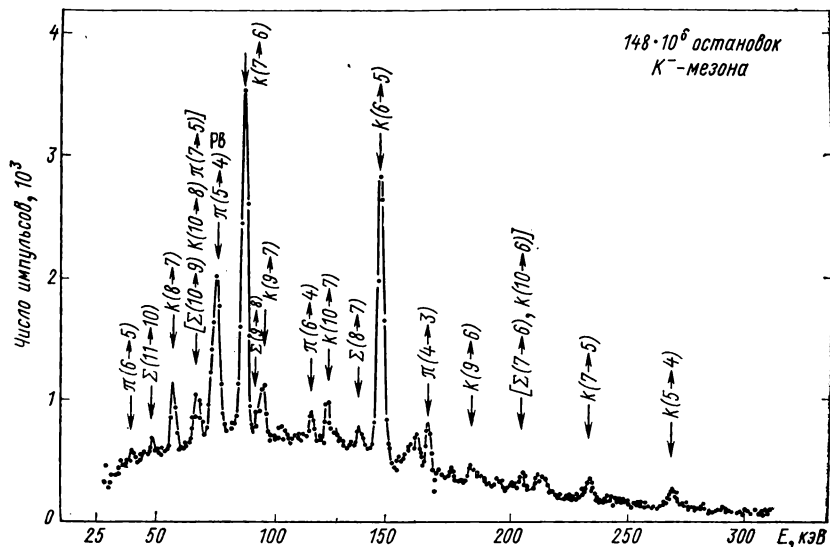


Рис. 4.7. Спектр рентгеновского излучения каонных,  $\Sigma^-$ -гиперонных и  $\pi^-$ -мезонных атомов, полученный при торможении  $K^-$ -мезонов в Zn.

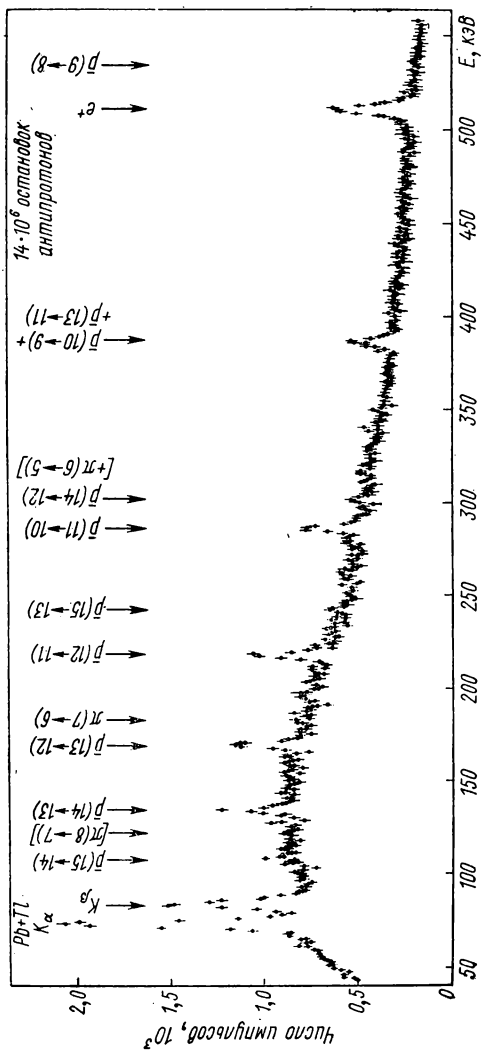


Рис. 4.8. Спектр рентгеновского излучения антипротонного атома Tl, измеренный Ge (Li)-детектором с объемом  $10 \text{ см}^3$ .

чениями для ядер S, Cl и Zn. В третьем столбце приведены значения  $R$  — меры выхода перехода;  $R = \Gamma_x / (\Gamma_a + \Gamma_x)$ , где  $\Gamma_x$  — радиационная ширина электрического дипольного перехода;  $\Gamma_a$  — ширина ядерного поглощения. Величина  $\Gamma_a$  рассчитана в предположении чисто мнимого  $\Sigma^-$ -ядерного потенциала  $V \simeq i \operatorname{Im} A\rho(r)$  ( $\operatorname{Im} A = 1$  Ферми,  $\rho(r)$  — распределение заряда). Энергии, приведенные в четвертом столбце, вычислены с учетом эффекта поляризации вакуума. Отношение интенсивностей рентгеновского излучения  $\Sigma^-$ -гиперонного и каонного атомов приведено в предпоследнем столбце. В последнем столбце указан контрольный переход каонного атома, который не ослаблен ядерным поглощением.

Рис. 4.6 и 4.7 показывают рентгеновские спектры каонных, пионных и  $\Sigma^-$ -гиперонных атомов в Cl (LiCl) и Zn соответственно (Phys. Lett., 1970, v. B33, p. 230). На рис. 4.6 можно ясно видеть две линии переходов в  $\Sigma^-$ -гиперонном атоме:  $7 \rightarrow 6$  (66 кэВ) и  $6 \rightarrow 5$  (109 кэВ). Следующая линия перехода  $5 \rightarrow 4$  (200 кэВ) не наблюдается из-за малого выхода (2%). На рис. 4.7 наблюдаются три линии переходов в  $\Sigma^-$ -атомах:  $11 \rightarrow 10$  (49 кэВ),  $9 \rightarrow 8$  (92 кэВ) и  $8 \rightarrow 7$  (135 кэВ). Линия перехода  $9 \rightarrow 8$  появляется как плечо линии каонного перехода  $9 \rightarrow 7$ . Линия перехода  $6 \rightarrow 5$  не видна из-за слабого выхода. Линии переходов  $10 \rightarrow 9$  (66 кэВ) и  $7 \rightarrow 6$  (209 кэВ), выходы которых не малы, не наблюдаются, так как совпадают с каонной  $10 \rightarrow 8$ - и пионной  $7 \rightarrow 5$ -линиями переходов и с линией каонного перехода  $10 \rightarrow 6$  соответственно.

**Антипротонные атомы.** В ЦЕРНе также впервые измерили рентгеновское излучение, возникающее в результате радиационных переходов в антипротонных атомах (Phys. Lett., 1970, v. B33, p. 230). В сепарированном пучке с малыми импульсами, полученном на протонном синхротроне ЦЕРНа, около 300 антипротонов за импульс останавливалось в мишени толщиной 4 г/см<sup>2</sup>. На рис. 4.8 приведен спектр рентгеновского излучения антипротонного атома Tl. Все сильные линии этого спектра идентифицированы как антипротонное рентгеновское излучение, за исключением двух групп линий с энергиями около 74 и 84 кэВ. Эти линии вызваны электронными  $K_\alpha$ - и  $K_\beta$ -переходами в Pb и Tl. В этом эксперименте нет пионного рентгеновского излучения, что указывает на его эффективное устранение. В табл. 4.6 сравниваются измеренные энергии рентгеновских переходов антипротонных атомов с расчетными значениями. Последние получены с учетом эффектов поляризации вакуума и конечных размеров ядра (иногда учитывалось и расщепление тонкой структуры). Форма линии переходов  $(10 \rightarrow 9) + (13 \rightarrow 11)$  может быть воспроизведена расщеплением тонкой структуры в предположении, что магнитный момент антипротона равен протонному магнитному моменту. Однако чтобы узнать магнитный момент антипротона, требуются более точные измерения. Масса антипротона по первым семи энергиям переходов табл. 4.6 определяется как

$$m_{\bar{p}} = m_p \pm 0,5 \text{ МэВ}$$

со степенью достоверности 68%.

## § 5.1. МОЛЕКУЛЯРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Системы, в которых отрицательный мюон образует связанное состояние с двумя ядрами, называются мюонными молекулами. Примерами таких систем являются:  $(p\mu^-p)$ ,  $(p\mu^-d)$  и  $(d\mu^-d)$ , и именно они представляют интерес.

Хотя, несомненно, самое важное открытие в этой области — открытие катализа мюонами синтеза в водороде, многие другие молекулярные явления также интересны и важны. Далее обсуждаются различные аспекты мезомолекулярных явлений, причем акцент делается на ядерные реакции.

Исчерпывающий обзор как теоретических, так и экспериментальных работ по мюонным молекулам, вплоть до 1960 г., читатель может найти в работе Я. Б. Зельдовича и С. С. Герштейна [436].

Отрицательный мюон, замедленный в жидком водороде, может образовать мюонный атом, который в дальнейшем переходит из первоначального состояния в состояния с меньшими значениями главного квантового числа  $n$ , теряя при этом энергию в виде рентгеновского излучения и передавая ее оже-электронам. Мюонный атом водорода подвергается одному из следующих процессов [59]:

1. Распад мюона ( $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$ ) со скоростью  $\lambda_0 = 0,455 \times 10^6 \text{ с}^{-1}$ .

2. Передача мюона примеси ( $Z > 1$ ) со скоростью  $c_z \lambda_z$  ( $c_z$  — концентрация примеси;  $\lambda_z$  — скорость передачи мюона от  $p$  к примеси, когда  $c_z = 1$ ).

3. Передача мюона дейтрону со скоростью  $c \lambda_e$  ( $c$  — концентрация дейтерия;  $\lambda_e$  — скорость передачи мюона от  $p$  к  $d$  в жидком дейтерии).

4. Соединение атома ( $\mu^-p$ ) с протоном, приводящее к образованию молекулярного иона ( $p\mu^-p$ ) со скоростью  $(1 - c) \lambda_{pp}$  ( $\lambda_{pp}$  — скорость образования молекулы в чистом жидком водороде).

5. Соединение атома ( $\mu^-p$ ) с дейтроном, приводящее к образованию молекулярного иона ( $p\mu^-d$ ). Однако данный процесс не играет большой роли, так как вероятность передачи мюона дейтрону в  $10^4$  раз больше.

6. Взаимодействия с тритоном, приводящие к образованию мюонного атома трития ( $\mu^-t$ ) (обсуждаться не будут, так как концентрация трития очень мала).

Подобно этому, в случае атомов ( $\mu^-d$ ) открытыми каналами являются:

1. Распад мюона.
2. Соединение атома ( $\mu^-d$ ) с протоном, приводящее к образованию со скоростью  $(1 - c)\lambda_{pd}$  молекулярного иона ( $p\mu^-d$ ).

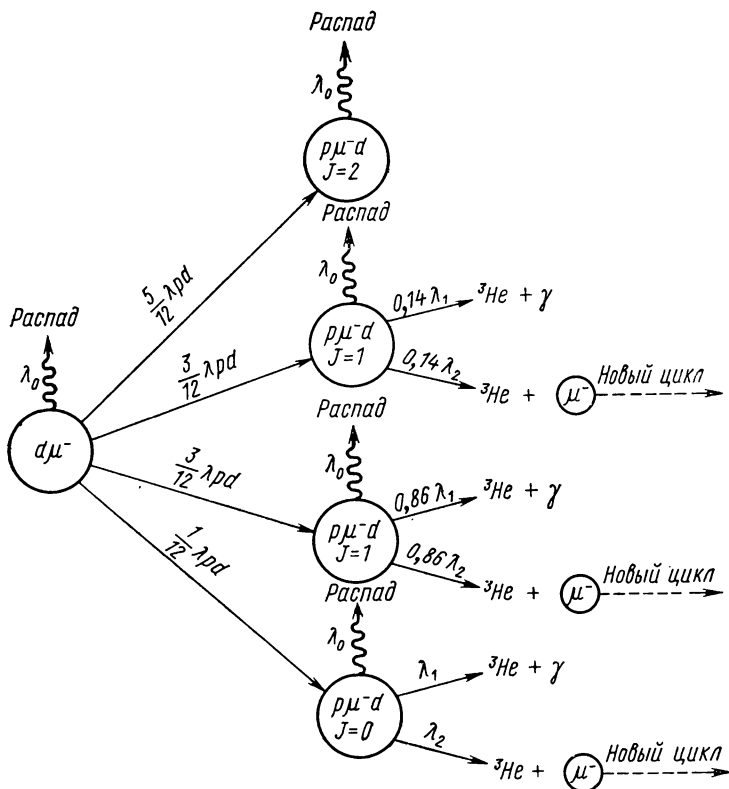


Рис. 5.1. Схематическая диаграмма этапов, приводящих к реакции ядерного синтеза и другим важным процессам, в случае, когда  $c \ll 1$ , а концентрация примеси пренебрежимо мала [59].

3. Соединение атома ( $\mu^-d$ ) с дейтроном, приводящее к образованию со скоростью  $c\lambda_{dd}$  молекулярного иона ( $d\mu^-d$ ).

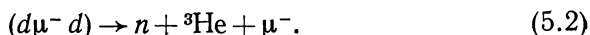
4. Передача мюона примеси ( $Z > 1$ ) со скоростью  $c_z\lambda_{dz}$ .

Молекулярный ион ( $p\mu^-d$ ) не может подвергаться каким-либо дальнейшим молекулярным переходам, но протон и дейтрон в системе ( $p\mu^-d$ ) могут слиться и образовать  ${}^3\text{He}$ :

$$(p\mu^-d) \rightarrow {}^3\text{He}\mu^- + \gamma \quad (\text{скорость } \lambda_1 \text{ с}^{-1}), \quad (5.1a)$$

$$(p\mu^-d) \rightarrow {}^3\text{He} + \mu^- \quad (\text{скорость } \lambda_2 \text{ с}^{-1}). \quad (5.1б)$$

Этот процесс синтеза будет подробно обсуждаться в § 5.3. С точки зрения молекулярного процесса молекула ( $d\mu^-d$ ) не представляет интереса, потому что она немедленно подвергается реакции синтеза:



Этот вопрос обсуждается в § 5.4.

На рис. 5.1 показаны этапы, приводящие к реакции синтеза и другим важным реакциям, но при этом предполагается, что концентрация дейтерия  $c \ll 1$ , а концентрация примеси ( $Z > 1$ ) — пренебрежимо мала. Обобщение экспериментальных и расчетных значений скоростей образования мюонных молекул читатель может найти в работе Конфорта и др. [119].

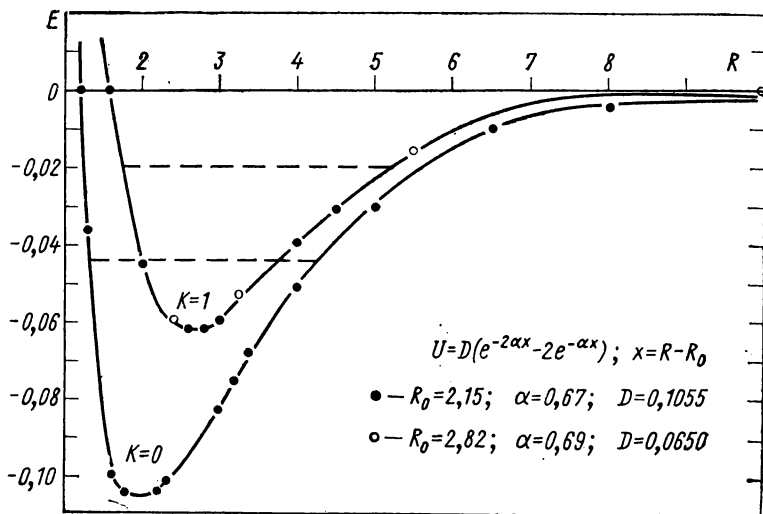
## § 5.2. УРОВНИ ЭНЕРГИИ

После того как мезоатом ( $\mu^-p$ ) или ( $\mu^-d$ ) достигает основного состояния ( $n = 1$ ), связанный молекулярный ион может образоваться только в состояниях, которые соответствуют  $1s\Sigma$ -мюонной орбитали, и только эти состояния широко исследовались. Орбиталь  $1s\Sigma$  — основное состояние мюона для фиксированного относительного положения ядер. Энергии других орбиталей значительно выше энергии основного состояния мюонного атома.

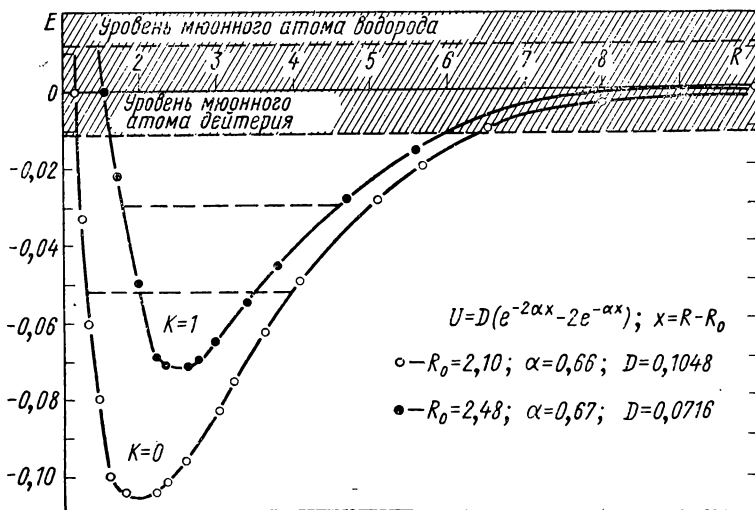
Приближение Борна—Оппенгеймера, которое так успешно применялось при рассмотрении обычных (электронных) молекул, не вполне удовлетворительно при анализе мюонных молекул. Параметром разложения в этом приближении является  $\sqrt[4]{m/M}$ , где  $m$  и  $M$  — массы электрона и ядра соответственно (см., например, [341]). В обычных молекулах водорода этот параметр приблизительно равен  $1/7$ , и малость этой величины убеждает в полезности данного приближения. Однако соответствующее значение для мюонной молекулы водорода — почти единица ( $2/3$ ), и применимость приближения Борна—Оппенгеймера к мюонным молекулам, в значительной степени, менее оправдана.

Очевидна необходимость более совершенного метода, поэтому состояния мюонных молекул широко исследовались в адиабатическом приближении и с помощью вариационного метода (см. работы [84, 91—95, 109—111, 192, 205, 207, 224, 245, 256, 257, 271, 297, 312, 340, 353, 355, 376, 396, 411, 420, 435]).

В связанных состояниях мюонных молекул ( $p\mu^-p$ ), ( $p\mu^-d$ ) и ( $p\mu^-t$ ) имеются вращательные уровни с  $K = 0$  и  $1$ , в то время как для ( $d\mu^-d$ ), ( $d\mu^-t$ ) и ( $t\mu^-t$ ) существуют также уровни с  $K = 2$ . Мюонная молекула ( $t\mu^-t$ ) имеет связанное состояние даже с  $K = 3$  (табл. 5.1). На рис. 5.2, а и 5.2, б приведены потенциальные кривые и уровни энергий для молекул ( $p\mu^-p$ ) и ( $p\mu^-d$ ) [436]. При получении этих потенциальных кривых введены поправки к адиабатическому приближению. Точки на кривых представляют значения, вычисленные с использованием потенциалов Морзе. Энергии и расстояния приведены в мезоатомных единицах. В этой системе единица длины



a



б

Рис. 5.2. Потенциальные кривые и уровни энергии мезомолекулярных ионов ( $p\mu-p$ ) (а) и ( $p\mu-d$ ) (б) [436].



есть радиус первой боровской орбиты мюонного атома водорода, а единица энергии равна 5,6 кэВ.

В табл. 5.1 приведены энергии диссоциации различных мюонных молекул. Глубина потенциальной ямы системы  $(p\mu^-p)$  недостаточна для существования связанного колебательного уровня с  $K = 0$ ,  $v = 1$ . Следовательно, существует виртуальный уровень системы  $(p\mu^-p)$  с энергией, близкой к нулю, что приводит к резонансному рассеянию систем  $(\mu^-p)$  на протонах. Этот резонанс может значительно увеличить вероятность образования мюонных молекул

Таблица 5.1

Энергия диссоциации мезомолекулярных ионов, эВ

Мезомолекулярный ион	$K=0$		$K=1$		$K=2$	$K=3$
	$v=0$	$v=1$	$v=0$	$v=1$	$v=0$	$v=0$
$(p\mu^-p)$	252 [436] 241 [109, 110] 248 [95] 253 [95]	—	106 [436] 93 [109, 110] 109 [411] 102,2 [376] 107,2 [224] 106,8 [340] 104,9 [257] 101,5 [312] 105,7 [95]	—	—	—
$(p\mu^-d)$	223 [436] 214 [109, 110] 220 [411] 221,4 [95]	—	95 [436] 90 [109, 110] 90 [411]	—	—	—
$(d\mu^-d)$	330 [436] 322 [109, 110] 317 [271]	40 [436] 181 [109, 110]	226 [436] 223 [109, 110] 226 [411] 226,5 [224] 226,3 [340] 224,6 [312] 226,1 [95]	7 [340]	88 [436] 82 [109, 110]	—
$(p\mu^-t)$	211 [436] 213 [411]	—	90 [436] 98 [411]	—	—	—
$(d\mu^-t)$	323 [436] 319 [411]	36 [436] 32 [411]	234 [436] 232 [411]	—	103 [436] 102 [411]	—
$(t\mu^-t)$	367 [436]	86 [436]	288 [436] 288 [411] 288,7 [224] 288,8 [340] 287,7 [312] 288,8 [95]	45 [436]	107 [436]	55 [436]

и возможность ядерной реакции налету. Результаты расчетов, приведенные в табл. 5.1, говорят о том, что уровни с квантовыми числами  $K = 0$ ,  $v = 1$  в системах  $(d\mu^-d)$  и  $(d\mu^-t)$ , так же как и уровни с  $K = 1$ ,  $v = 1$  в  $(d\mu^-d)$  и  $(t\mu^-t)$ , могут приводить к резонансному столкновению. Существование резонансного уровня с  $K = 1$ ,  $v = 1$  и с очень малой энергией диссоциации (около 7 эВ) может быть причиной большого расхождения теоретического и экспериментального значений скорости образования молекулярного иона  $(d\mu^-d)$ . Эта энергия была получена в адиабатическом приближении; однако вариационный расчет Шерра и Махачека [340] не дает этого при  $K=1$  и  $v = 1$ . Если мезомолекулярный ион  $(d\mu^-d)$  действительно имеет уровень с энергией, равной нескольким электронвольтам, то механизм образования системы  $(d\mu^-d)$  посредством  $E1$ -перехода на возбужденные колебательные уровни молекулы  $D_2$  может объяснить наблюдаемую скорость образования  $(d\mu^-d)^*$ .

Интересно исследовать влияние ядерных сил на молекулярные уровни энергии. Ожидаемый сдвиг представляет собой значительную часть мезомолекулярного сверхтонкого расщепления [402]. Сверхтонкая структура мюонной молекулы  $(p\mu^-p)$  в ортосвязанном состоянии с  $F = 1$  ( $F$  — полный угловой момент трехтельной системы) обсуждалась в работе Хальперна [225].

### § 5.3. МЮОННЫЙ КАТАЛИЗ ЯДЕРНОГО СИНТЕЗА

Альварец и др. [7] в эксперименте с остановившимися  $K^-$ -мезонами в жидко-водородной пузырьковой камере наблюдали реакцию синтеза  $p + d \rightarrow {}^3\text{He}$ . В камере было гораздо больше мюонных следов, чем каонных. Всего зарегистрировано 2500 случаев мюонных остановок. В числе этих остановок отмечено 15, после которых наблюдались вторичные мюоны с пробегом 1,7 см, распадающиеся в свою очередь с испусканием электронов (рис. 5.3). Длина пробега 1,7 см соответствует энергии 5,4 МэВ. В пяти случаях из этих пятнадцати имеется большой зазор, вплоть до 1 мм, между концом первичного и началом вторичного треков. Этот зазор — реальный эффект, а не статистическая флуктуация в расстоянии между пузырьками.

Альварец и др. сделали вывод о том, что остановившийся мюон образует мюонный атом  $(\mu^-p)$ , который, в свою очередь, сталкиваясь с дейтроном, образует мезомолекулярный ион  $(p\mu^-d)$ . Затем в системе  $(p\mu^-d)$  происходит реакция синтеза по каналам (5.1а) или (5.1б). В последнем случае с помощью внутренней конверсии мюон восстанавливается, имея при этом энергию 5,4 МэВ. Дрейф нейтрального мюонного атома является причиной зазора между первич-

---

\* Л. И. Пономаревым и др. [449] найден уровень, существование которого доказано в работе [450], с аналогичными квантовыми числами, но с энергией 0,7 эВ. Данное значение энергии объясняют эксперименты по измерению скорости образования мезомолекул  $(d\mu^-d)$  при различных температурах. — *Прим. пер.*

ным и вторичным треками. Мезокатализная ядерная реакция была предсказана Франком [200], А. Д. Сахаровым [446] и Я. Б. Зельдовичем [433].

Альварец и др. измерили частоту событий синтеза для различной концентрации дейтерия. Число событий для каждого мюона, под-

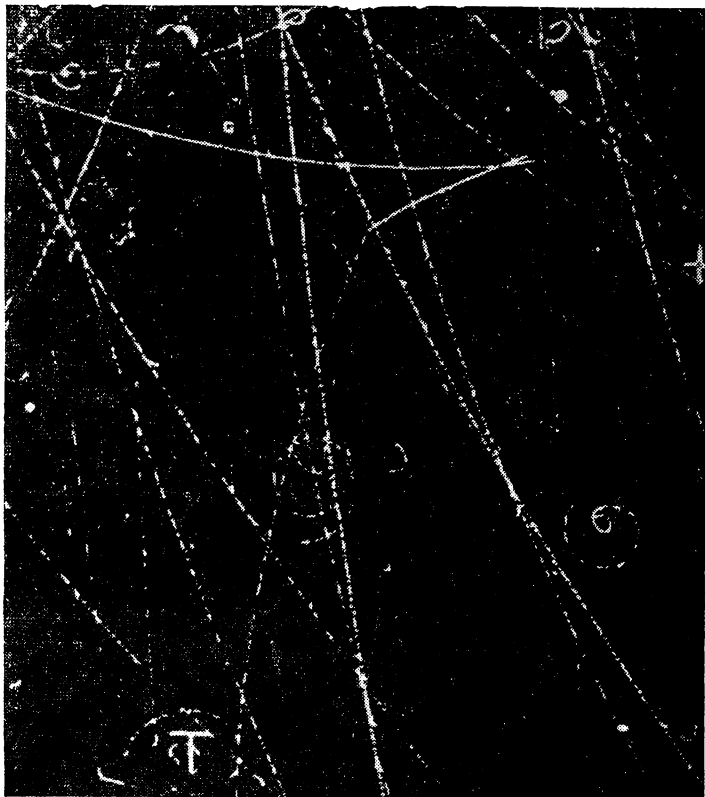


Рис. 5.3. Пример мюонного катализа в реакции ядерного синтеза ( $p+d$ ). Падающий мюон, останавливаясь, образует нейтральный мюонный атом и дрейфует в этой системе, после чего он эжектируется с энергией 5,4 МэВ, освобождаемой в процессе синтеза ( $p+d$ ), останавливается, сделав пробег длиной 1,7 см, и, наконец, распадается [7]. (Фотография получена профессором Альварецом).

вергавшегося нормальному распаду, равнялось  $0,2 \cdot 10^{-2}$  в жидком естественном водороде (концентрация дейтерия 0,016%),  $2 \times 10^{-2}$  для концентрации дейтерия 0,3% и  $2,5 \cdot 10^{-2}$  для концентрации 4,3%.

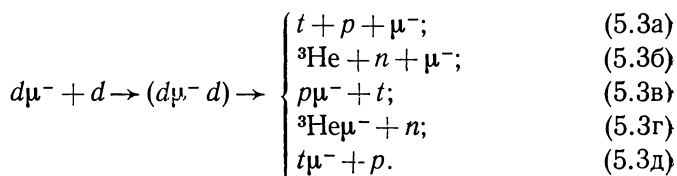
Мезосинтез водорода и дейтерия может также проходить с передачей энергии взаимодействия  $\gamma$ -кванту, а не мюону, в процессе

внутренней конверсии. Этот процесс [см. (5.1a)] экспериментально исследовали Ашмор и др. [18] и Блезёр и др. [59]. Ашмор и др. впервые зарегистрировали  $\gamma$ -кванты из процесса синтеза и измерили их временное распределение. Сравнивая выход  $\gamma$ -квантов в своем эксперименте ( $0,34 \pm 0,06$  на остановившийся мюон в жидком водороде, обогащенном дейтерием до 1,8%) с результатами Альвареца и др., они получили коэффициент внутренней конверсии, равный  $0,066 \pm 0,014$ . Процесс внутренней конверсии в связи с катализом ядерных реакций между изотопами водорода будет обсуждаться более детально в § 5.6.

В одном из 15 изученных Альварецом и др. случаев мюон дважды приводил к ядерному синтезу. Невольно возникает предположение о возможности поддержания мюонами ядерного синтеза в водороде. Однако последующее теоретическое изучение показало, что это невозможно [249, 355, 434].

#### § 5.4. КАТАЛИЗ СИНТЕЗА В СИСТЕМЕ $(d\mu^-d)$

Отрицательный мюон может катализировать следующий двухдейтронный синтез в мезомолекулярном ионе  $(d\mu^-d)$ :



Реакция (5.3a) экспериментально исследовалась Альварецом и др. [7], Фетковичем и др. [188], В. П. Желеповым и др. [425, 429] и Доде [145]. Процесс (5.3б) впервые наблюдался В. П. Желеповым и др. [147, 426, 427] в диффузионной камере, наполненной дейтерием под давлением 7,2 атм. Выход реакции (5.3б) относительно реакции (5.3a) составляет приблизительно 1,2. В. П. Желепов и др. также обнаружили, что отношения выходов реакций (5.3в) к (5.3a) и (5.3г) к (5.3б) меньше 0,13.

На рис. 5.4 и 5.5 приведены типичные фотографии реакций  $d + d \rightarrow {}^3\text{He} + n$  и  $d + d \rightarrow t + p$ .

#### § 5.5. ПРОНИЦАЕМОСТЬ КУЛОНОВСКОГО БАРЬЕРА

Ядерные реакции в мюонной молекуле возможны только тогда, когда реагирующие ядра приближаются друг к другу на расстояния порядка радиуса действия ядерных сил. Даже в случае, когда кинетическая энергия ядер много меньше кулоновского барьера, этот процесс может протекать за счет туннельного эффекта.

Можно получить порядок величины проницаемости кулоновского барьера произвольной формы, используя некоторое среднее значение высоты барьера и описывая его прямоугольной функцией

(см. [184]); тогда для коэффициента проницаемости  $B$  получается формула

$$B = \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_{\chi_1}^{\chi_2} \sqrt{2M(U(\chi) - E)} d\chi \right\} = \\ = \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2M\bar{U}} (\chi_2 - \chi_1) \right\}, \quad (5.4)$$

где  $\bar{U}$  — некоторая средняя высота барьера;  $(\chi_2 - \chi_1)$  — ширина эквивалентного прямоугольного барьера.



Рис. 5.4. Фотография реакции  $d + d \rightarrow {}^3\text{He} + n$  [147]. (Фотография получена профессором В. П. Дзелеповым.)

Формула (5.4) показывает, что проницаемость кулоновского барьера гораздо более чувствительна к ширине, чем к высоте барьера. Нейтральный мюонный атом водорода может очень близко приближаться к другим ядрам. В мезомолекулярном ионе  $(p\mu^-d)$  среднее расстояние  $p-d$  составляет около 1/200-й того же расстояния в обычном молекулярном ионе HD. Коэффициент проницаемости кулоновского барьера (порядка  $10^{-5}$ ) и частота вибрации (порядка  $10^{17} \text{ с}^{-1}$ ) в системе  $(p\mu^-d)$  указывают на то, что время, необходимое

для ядерной реакции между  $p$  и  $d$ , мало по сравнению с временем жизни мюона [7]. С другой стороны, в обычной молекуле  $HD$  вероятность ядерной реакции должна быть порядка  $10^{-21}$  реакций

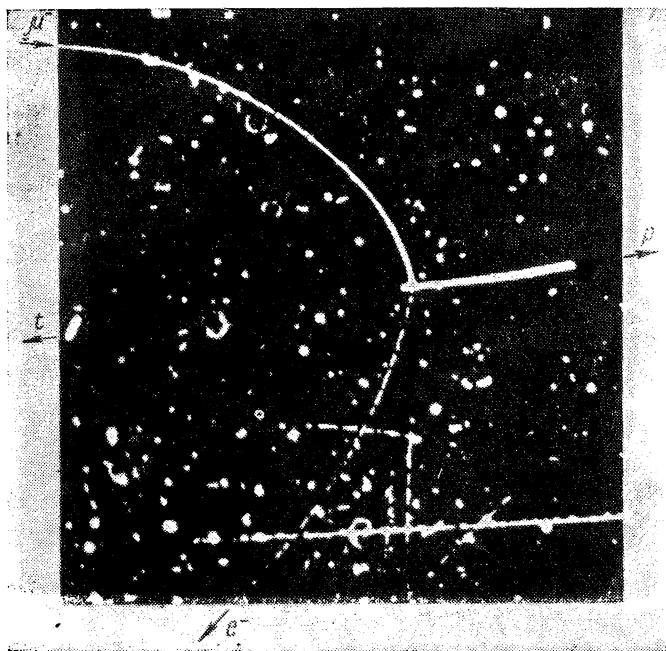


Рис. 5.5. Фотография реакции  $d+d \rightarrow t+p$  [428]. (Фотография получена профессором В. П. Желеповым.)

в год в  $1 \text{ м}^3$  жидкого  $HD$ . Детальное обсуждение прохождения ядер через кулоновский барьер в мезомолекулярном ионе читатель может найти в работе Я. Б. Зельдовича и С. С. Герштейна [436].

## § 5.6. ВНУТРЕННЯЯ КОНВЕРСИЯ

Вернемся теперь к проблемам внутренней конверсии в мюонных атомах, особенно в мюонных атомах  ${}^3\text{He}$ . Процесс внутренней конверсии в атомах  ${}^3\text{He}$  исследовался многими авторами: Я. Б. Зельдовичем и др. [434], Хайяши и др. [228], Джэксоном [245], Скирмом [355], Наруми и Матсуо [305] и др.

Мюонная молекула ( $\mu p d$ ) как целое находится в  $S$ -состоянии, и волновая функция мюона адиабатически приспособливается к движению ядер, когда они сходятся и образуют составное ядро  ${}^3\text{He}$ . Следовательно, мюон должен быть на  $K$ -орбите ядра  ${}^3\text{He}$ , и процесс внутренней конверсии является  $K$ -конверсией. Однако,

как следует из расчета в борновском приближении, коэффициент конверсии  $M1$ -излучения с энергией 5,4 МэВ составляет только около  $10^{-4}$ , а квадрупольная примесь слишком мала, чтобы его существенно изменить. Для состояния ядра с  $l = 0$  остается возможность конверсии путем  $E0$ -перехода (общая теория  $0 \rightarrow 0$ -переходов изложена в книге Блатта и Вайскопфа [57]). В обычной теории внутренней конверсии в электронных атомах считается, что ядро точечное, и это допустимо по крайней мере для легких атомов. Однако в случае мюонных атомов из-за большой близости мюона к ядру необходимо учитывать эффект конечных размеров ядра.

Мы описываем движение мюона уравнением Дирака и получаем общую формулу для вероятности испускания мюонов посредством  $E0$ -перехода [305]. Следует обратить внимание на два обстоятельства: 1) для учета эффекта конечных размеров ядра необходимо получить как регулярное, так и нерегулярное решения в кулоновском поле и 2) в области внутри ядра важно знать точное поведение как ядерных, так и мюонных волновых функций. Гамильтониан возмущения имеет следующий вид:

$$H' = - \sum_p \frac{e^2}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_\mu|}, \quad (5.5)$$

где  $\mathbf{r}_p$  и  $\mathbf{r}_\mu$  — координаты протона и мюона. Матричный элемент  $E0$ -перехода определяется выражением

$$\begin{aligned} \langle i | H' (l=0) | f \rangle &\equiv \langle H' \rangle = \\ &= -e^2 \left\{ \int d\tau_N \int_0^{r_p} d\tau_\mu \tilde{\Phi}_f \tilde{\Psi}_f \left( \frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_\mu} \right) \Phi_i \Psi_i + \right. \\ &\quad \left. + \int d\tau_N \int_0^\infty d\tau_\mu \tilde{\Phi}_f \tilde{\Psi}_f \frac{1}{r_\mu} \Phi_i \Psi_i \right\}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где  $\Phi$  — ядерная волновая функция;  $\Psi$  — мюонная волновая функция; индексы  $i$  и  $f$  обозначают начальное и конечное состояния соответственно. Так как второй член формулы (5.6) обращается в нуль из-за ортогональности начального и конечного состояний, получаем

$$\begin{aligned} \langle H' \rangle &= -e^2 \int d\tau_p \int_0^{r_p} d\tau_\mu \tilde{\Phi}_f \tilde{\Psi}_f \left( \frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_\mu} \right) \Phi_i \Psi_i = \\ &= -e^2 \int d\tau_p \tilde{\Phi}_f(\mathbf{r}_p) \left[ \int_0^{r_p} d\tau_\mu \tilde{\Psi}_f(\mathbf{r}_\mu) \left( \frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_\mu} \right) \Psi_i(\mathbf{r}_\mu) \right] \times \\ &\quad \times \Phi_i(\mathbf{r}_p). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Ввиду того что область интегрирования ограничена конечным размером ядра, необходимо знать мюонную волновую функцию толь-

ко внутри ядра. Интеграл в скобках в выражении (5.7) естественным образом разбивается на два:

$$\int_0^p d\tau_\mu \tilde{\psi}_f(\mathbf{r}_\mu) \left( \frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_\mu} \right) \psi_i(\mathbf{r}_\mu) = \frac{1}{r_p} \int_0^p d\tau_\mu \tilde{\psi}_f(\mathbf{r}_\mu) \psi_i(\mathbf{r}_\mu) - \int_0^p d\tau_\mu \tilde{\psi}_f(\mathbf{r}_\mu) \frac{1}{r_\mu} \psi_i(\mathbf{r}_\mu). \quad (5.8)$$

Первый и второй члены правой части формулы (5.8) выразим через регулярное  $F_k$  и нерегулярное  $G_k$  решения уравнения Дирака с потенциалом однородного распределения заряда ядра:

$$I = \frac{1}{r_p} \int_0^p dr_\mu \{ F_{-1}^{(i)}(r_\mu) F_{-1}^{(f)}(r_\mu) + G_{-1}^{(i)}(r_\mu) G_{-1}^{(f)}(r_\mu) \}; \quad (5.9a)$$

$$II = \int_0^p dr_\mu \frac{1}{r_\mu} \{ F_{-1}^{(i)}(r_\mu) F_{-1}^{(f)}(r_\mu) + G_{-1}^{(i)}(r_\mu) G_{-1}^{(f)}(r_\mu) \}. \quad (5.9b)$$

Так как рассматривается случай  $K$ -конверсии, в решениях уравнения Дирака индекс  $k$  принимает значение  $-1$ . Ядерную волновую функцию начального состояния можно записать

$$\Phi_i = \psi(0) (1 - \lambda_d/r), \quad (5.10)$$

где  $\psi(0)$  — волновая функция системы  $(p\mu^-d)^+$  при  $r = 0$ , а  $\lambda_d$  — де-бройлевская длина волны относительного движения  $p$  и  $d$ . Если предположить, что заряд ядра в конечном состоянии распределен по ядерной поверхности, то получим следующее значение вероятности перехода:

$$\frac{2\pi}{3} |\langle H' \rangle|^2 = 1,7 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}, \quad (5.11)$$

которое приводит к приемлемому согласию с данными экспериментов. Множитель  $1/3$  в левой части равенства (5.11) вводится из-за того, что ядерный синтез идет через состояние с полным спином  $1/2$ .

В табл. 5.2 проводится сравнение результатов теории и эксперимента. В этой таблице  $\lambda_1 + \lambda_2$  — скорость ядерного синтеза;  $\lambda_2$  — скорость испускания мюонов в процессе конверсии;  $t_\mu$  — время жизни мюонов [см. реакции (5.1a), (5.1b)].

Хотя значения, вычисленные Наруми и Матсуо, находятся в достаточно хорошем согласии с двумя типами экспериментальных данных, это согласие, как упоминалось выше, было достигнуто в предположении, что заряд ядра конечной системы сконцентрирован на ядерной поверхности, в то время как волновая функция мюона получена в предположении однородного распределения заряда ядра. Отметим также, что матричный элемент  $\langle i | H' (l = 0) | f \rangle$  очень чувствителен к ядерной волновой функции. Действительно, если



Т а б л и ц а 5.2

Сравнение теоретических расчетов с экспериментальными данными мюонного катализа ядерного синтеза  $p + d \rightarrow {}^3\text{He} + 5,4 \text{ МэВ}$  [305]

$\lambda_2 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$	$\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$	$\lambda_2/(t_\mu^{-1} + \lambda_2)$	Примечания	Литература
—	—	0,03	Эксперимент	[7]
—	$0,066 \pm 0,014$	—	То же	[18]
4,7	0,78	0,5	Теория	[434]
0,93	0,17	0,17	То же	[228]
—	0,15	—	»	[245]
1,7	0,17	0,27	»	[355]
0,17	0,069	0,035	»	[305]

использовать, например, экспоненциальную волновую функцию вместо функции (5.10) или предположить однородное распределение заряда ядра в конечном состоянии, то вероятность  $E0$ -перехода станет больше экспериментального значения на порядок.

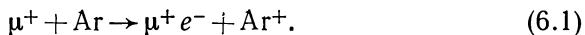
В последние годы эксперименты по изучению внутренней конверсии в электронных атомах достигли такого уровня, что стало необходимым учитывать эффекты структуры ядер. В нашем же случае ситуация более сложна, поскольку надо решать задачу трех тел. Так как матричный элемент  $\langle i|H' (l=0)|f \rangle$  чувствителен к ядерным волновым функциям, дальнейшее изучение процесса внутренней конверсии в мюонных атомах может оказаться полезным для исследования структуры ядер.

## § 6.1. ОБРАЗОВАНИЕ МЮОНИЯ

Предыдущие главы были посвящены рассмотрению мезоатомов и мезомолекул. В этих системах электрон обычного атома или молекулы замещен отрицательно заряженной частицей (мюон, мезон, гиперон и т. д.). Можно рассмотреть также атомную или молекулярную систему, в которых различные положительно заряженные частицы образуют связанные системы с электронами. В этой главе будут кратко обсуждаться мюоний и мюониевые молекулы.

Изменение в широком диапазоне поляризации положительных мюонов, остановившихся в твердом или жидком телах в присутствии внешнего магнитного поля, изучалось многими исследователями [97, 98, 162, 216, 238, 309, 347, 364, 403, 418]. Это изменение в поляризации интерпретировали обычно с точки зрения многократного образования связанных в течение короткого времени мюонных атомов [185, 187, 204, 347]. Другие возможные механизмы деполяризации обсуждались Хьюджесом [237], В. Г. Носовым и И. В. Яковлевой [308, 442] и др.

Прямое доказательство образования мюония впервые было получено Хьюджесом и др. [239] в аргонном газе. При остановке положительных мюонов в аргоне может образоваться мюоний ( $\mu^+e^-$ ):



Так как положительный мюон из распада пиона ( $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \bar{\nu}_\mu$ ) поляризован (вектор спина направлен противоположно вектору импульса), при захвате неполяризованных электронов кулоновским взаимодействием будет образовываться мюоний. Триплетное состояние поляризованного мюония должно прецессировать во внешнем магнитном поле  $H$  с частотой  $f = \mu_0^e H/h$ , где  $\mu_0^e$  — электронный магнетон Бора. В следующем параграфе будет показано, что единственным мюониевым состоянием с отличным от нуля магнитным моментом в слабом внешнем магнитном поле является триплетное состояние  $(F, M_F) = (+1, +1)$ . Следовательно, наблюдение характеристической частоты ларморовой прецессии этого состояния мюония служит доказательством образования мюония.

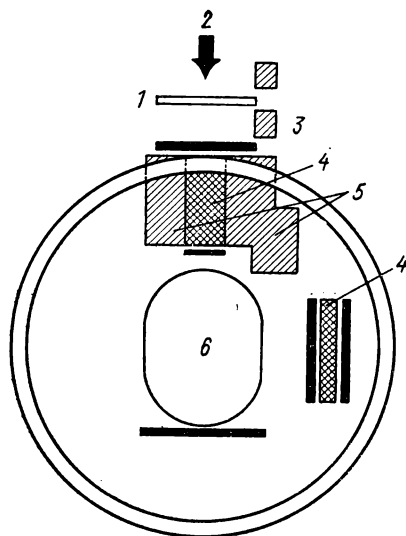


Рис. 6.1. Схема эксперимента по образованию мюония [239]:

1 — монитор; 2 — пучок; 3 — катушки Гельмгольца; 4 — углеродный поглотитель; 5 — защита; 6 — газовая мишень; 7 — сцинтиллятор.

Схема эксперимента Хьюджеса и др. [239] показана на рис. 6.1. Падающий пучок состоит из положительных пионов и мюонов. Пионы останавливаются в углеродном поглотителе, а мюоны — в газовой мишени, содержащей аргон под давлением приблизительно 50 атм. Мюоны теряют энергию на ионизацию и возбуждение атомов аргона, после чего образуют мюониевые атомы. Так как позитроны из распада положительных мюонов ( $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$ ) испускаются преимущественно в направлении спина мюона, из анализа данных временного распределения позитронов можно сделать вывод о наличии прецессии мюония. Этот эксперимент ясно доказывает, что в аргоне действительно образуется поляризованный мюоний.

Попытки Касселса и др. [97] и Свенсона [364] заметить триплетное состояние мюония в жидких и

твердых мишенях были безуспешны. Недавно, однако, наблюдали прецессию триплетного состояния мюония в кристаллическом кварце [406] и органическом сцинтилляторе [400].

## § 6.2. УРОВНИ ЭНЕРГИИ

Характерные черты уровней энергии мюония как изотопа водородного атома могут быть получены из решения уравнения Шредингера с учетом различия в массах. Энергия связи основного состояния мюония равна 13,539 эВ, а расщепление тонкой структуры порядка  $\alpha^2 R_M$ , где  $R_M$  — постоянная Ридберга для мюония ( $R_M = 109\,209,12 \pm 0,02 \text{ см}^{-1}$ ) и  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры. Интервал сверхтонкой структуры основного состояния мюония в первом приближении дается формулой Ферми [см. (3.20)]:

$$\Delta\nu = \frac{\Delta W}{h} = \frac{16}{3} \alpha^2 c R_\infty \frac{\mu_\mu}{\mu_0^e} \simeq 4524, \quad (6.2)$$

где  $\Delta\nu$  — интервал сверхтонкой структуры в частотных единицах;  $\Delta W$  — интервал сверхтонкой структуры в энергетических единицах;  $R_\infty$  — постоянная Ридберга для случая бесконечной массы;  $\mu_\mu$  — магнитный момент мюона и  $\mu_0^e$  — электронный магнетон Бора.

В случае внешнего статического магнитного поля  $H$  сверхтонкая структура основного состояния мюония может быть найде-

на по следующей формуле [70]:

$$W_{F=\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} M_F} = -\frac{\Delta W}{4} + \mu_0^e g_\mu H M_F \pm \frac{\Delta W}{2} \left[ 1 + 2M_F \chi + \chi^2 \right]^{1/2}, \quad (6.3)$$

где  $F$  — полный угловой момент;  $M_F$  — соответствующее магнитное квантовое число;  $\chi = (g_e - g_\mu) \mu_e H / \Delta W$ ;  $g_e$  и  $g_\mu$  — электронное и мюонное гиромагнитные отношения в мюонии. В слабом магнитном поле состояния сверхтонкой структуры характеризуются квантовыми числами  $F$  и  $M_F$ , в то время как в сильном поле

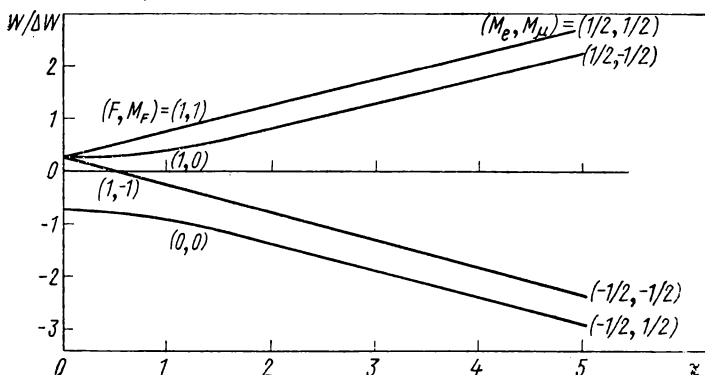


Рис. 6.2. Зависимость уровня энергии основного состояния мюония от  $\chi$  [240].

магнитная связь между мюоном и электроном разрушается и состояния сверхтонкой структуры характеризуются магнитными квантовыми числами электрона и мюона  $M_e$  и  $M_\mu$ . На рис. 6.2 в единицах интервала сверхтонкой структуры  $\Delta W$  приведена зависимость уровня энергии основного состояния мюония, помещенного в магнитное поле  $H$ , от  $\chi$ , пропорционального  $H$ . В сильном магнитном поле, направленном навстречу мюонному пучку, четыре состояния сверхтонкой структуры  $(M_e, M_\mu) = (+1/2, +1/2)$ ,  $(+1/2, -1/2)$ ,  $(-1/2, -1/2)$ ,  $(-1/2, +1/2)$  заселяются с весами  $1/2, 0, 0, 1/2$ . С другой стороны, в слабом магнитном поле состояния сверхтонкой структуры  $(F, M_F) = (+1, +1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(0, 0)$  заселяются с весами  $1/2, 1/4, 0, 1/4$ .

### § 6.3. ИНТЕРВАЛ СВЕРХТОНКОЙ СТРУКТУРЫ И ПОСТОЯННАЯ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ

Теоретическое значение интервала сверхтонкой структуры можно получить по формуле

$$\Delta v = \left( \frac{16}{2} \alpha^2 c R_\infty \frac{\mu_\mu}{\mu_0^e} \right) \left( 1 + \frac{m_e}{m_\mu} \right)^{-3} \times \\ \times \left[ 1 + \frac{3}{2} \alpha^2 + a_e + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \delta_\mu \right]. \quad (6.4)$$

Основной член соответствует формуле Ферми [см. формулу (6.2)]. Второй член есть поправка на приведенную массу. Члены в квадратных скобках представляют собой различные релятивистские поправки:  $(3/2)\alpha^2$  — релятивистская поправка к значению, получаемому по формуле Ферми;  $a_e$  — аномальный  $g$ -фактор электрона;  $\epsilon_1$  — радиационная поправка второго порядка;  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$  — радиационные поправки более высоких порядков и, наконец,  $\delta_\mu$  — релятивистская поправка, связанная с эффектом отдачи. Используя значение постоянной  $\alpha$  [133] ( $\alpha^{-1} = 137,0388 \pm 9 \cdot 10^{-6}$ ) и значения других констант, которые приведены в работе Хьюджеса [241], можно получить следующее теоретическое значение интервала сверхтонкой структуры:

$$\Delta\nu_{\text{теор}} = 4463,16 \pm 0,10 \text{ МГц } (\pm 22 \cdot 10^{-6}). \quad (6.5)$$

Экспериментальные значения  $\Delta\nu$  были получены группой Йельских ученых при наблюдении перехода  $(M_e, M_\mu) = (+1/2, +1/2) \rightarrow (M_e, M_\mu) = (+1/2, -1/2)$  в сильном магнитном поле и перехода  $(F, M_F) = (1, +1) \rightarrow (F, M_F) = (0, 0)$  в слабом магнитном поле [106, 240, 369, 401].

В эксперименте с сильным полем было получено следующее значение интервала сверхтонкой структуры [106]:

$$\Delta\nu = 4463,15 \pm 0,06 \text{ МГц (в Ar)}. \quad (6.6)$$

В случае слабого магнитного поля [369]

$$\Delta\nu = 4463,220 \pm 0,033 \text{ МГц (в Ar)}; \quad (6.7a)$$

$$\Delta\nu = 4463,302 \pm 0,027 \text{ МГц (в Kr)}. \quad (6.7b)$$

Взяв средневзвешенное этих трех значений и приняв во внимание возможность нелинейности при изменении аргонового давления, в качестве экспериментального значения получим

$$\Delta\nu_{\text{эксп}} = 4463,26 \pm 0,04 \text{ МГц}. \quad (6.8)$$

Приравнивая величины (6.5) и (6.8), можно получить значение постоянной тонкой структуры:

$$\alpha^{-1} = 137,0368 \pm 0,0012 (\pm 9 \cdot 10^{-6} \text{ — одно стандартное отклонение}). \quad (6.9)$$

Неопределенность в этой величине возникает главным образом из-за неопределенности в магнитном моменте мюона. И наоборот, если выбрать некоторое значение постоянной тонкой структуры  $\alpha$ , то, зная  $\Delta\nu_{\text{эксп}}$ , можно получить значения магнитного момента и массы мюона. Используя значение постоянной  $\alpha^{-1} = 137,0359 \pm \pm 0,0004$ , получаем

$$\mu_\mu/\mu_e = 3,183314 \pm 0,000034 (11 \cdot 10^{-6} \text{ — одно стандартное отклонение}) \quad (6.10)$$

и (см. § 2.8)

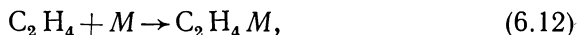
$$m_{\mu}/m_e = 206,770 \pm 0,002 \quad (11 \cdot 10^{-6} \text{—одно стандартное отклонение}). \quad (6.11)$$

Группа чикагских физиков [157] определила интервал сверхтонкой структуры основного состояния мюония в аргоне, измеряя зеемановскую частоту перехода  $(F, M_F) = (1, +1) \rightarrow (F, M_F) = (1, 0)$  при более низких давлениях аргона, чем в более ранних экспериментах. Таким образом, уменьшается неопределенность, вводимая экстраполяцией  $\Delta_{\nu}$  к нулевому давлению. Результат работы [157] ( $\Delta_{\nu} = 4463,317 \pm 0,021$  МГц) расходится со значением (6.7а), но согласуется со значением (6.7б).

Гуревич и др. [222] наблюдали модулированную мюониевую прецессию в расплавленном кварце, в котором положительные мюоны образовывали долгоживущий мюоний. Частота биения пропорциональна квадрату внешнего магнитного поля  $H$ . Некогерентное мюониевое взаимодействие со средой может, однако, усложнить зависимость частоты биений от  $H$ . Среднее значение  $\Delta_{\nu}$  для различных значений  $H$  в этом эксперименте равно  $\overline{\Delta_{\nu}} = 4474 \pm 130$  МГц, что находится в приемлемом согласии с другими экспериментальными данными. Этот факт может интерпретироваться как указание на то, что «размер» мюония одинаков как в кварце, так и в вакууме.

#### § 6.4. МЮНИЕВАЯ МОЛЕКУЛА И ХИМИЯ МЮНИЯ

Предполагают, что химическое взаимодействие мюония, который можно рассматривать как легкий изотоп водорода, с атомами и молекулами будет походить на взаимодействие водородного атома. Мобли и др. [303] изучали взаимодействие мюония с различными молекулами при наблюдении эффектов, вызванных малым количеством примесей к аргонному газу, в котором образовывались мюониевые атомы. Интенсивность резонансного сигнала в случае перехода  $(M_e, M_{\mu}) = (1/2, +1/2) \rightarrow (M_e, M_{\mu}) = (1/2, -1/2)$  ослабевает при добавлении NO и O<sub>2</sub>. Подавление сигнала менее эффективно при добавлении C<sub>2</sub>H<sub>4</sub> и не наблюдается при введении H<sub>2</sub>. Вероятно, в случае парамагнитных молекул NO и O<sub>2</sub> механизмом реакции является электрон-спиновое обменное столкновение, в то время как во втором случае могут образовываться мюониевые молекулы:



где  $M$  — стандартное обозначение мюония. В последнем случае реакция не ожидается, потому что молекула H<sub>2</sub> — не парамагнитная и, кроме того, при комнатной температуре из-за большой колебательной энергии молекулы MH не может образоваться мюониевая молекула  $M + \text{H}_2 \rightarrow \text{MH} + \text{H}$ . (Этот вопрос обсуждается

в конце параграфа.) Колебательная частота молекулы МН должна быть примерно  $9810\text{ см}^{-1}$ , в то время как энергия диссоциации должна приблизительно равняться 4 эВ.

Молекулярное взаимодействие мюония можно также исследовать при измерении поляризации положительных мюонов в зависимости от времени и концентрации примеси. Мобли и др. [303] изучали природу деполяризующих столкновений, наблюдая скорость деполяризации в зависимости от статического магнитного поля.

Предполагая, что мюониевые и водородные атомы подвергаются аналогичным химическим реакциям, В. Г. Фирсов и В. М. Бяков [447, 448] показали, что, измеряя коэффициент асимметрии  $\mu^+$ -распада, можно определить постоянные абсолютных скоростей для водорода, вступающего в реакцию с различными акцепторами. Зависимость прецессии спина  $\mu^+$ -мюона от химических соединений, которые мюон образует в различных магнитных полях, также позволяет идентифицировать эти акцепторы по классам соединений [448]. А. И. Бабаев и др. [406] измерили коэффициент асимметрии в угловом распределении позитронов, испускаемых при  $\mu^+$ -распадах, для ряда соединений и их бинарных смесей. Константы скоростей мюониевых реакций, вычисленные на основе этого измерения, приведены в табл. 6.1, где  $k_1$  и  $k_2$  — константы скоростей образования мюониевых молекул и радикалов соответственно. В последнем столбце этой таблицы приводятся константы полных скоростей реакций для водорода, которые получены методом Фирсова—Бякова [447] с учетом разности масс мюониевого и водородного атомов. Сравнение результатов, полученных на основе данных по взаимодействию мюония (табл. 6.1) и непосредственно из водородных реакций, показывает удовлетворительное согласие в пределах больших экспериментальных погрешностей. Например, полная скорость реакции в случае бензола, вычисленная из мюониевых данных, равна  $5,5 \cdot 10^8\text{ л}/(\text{моль} \cdot \text{с})$ , что согласуется с результатами прямых экспериментов ( $6 \cdot 10^8\text{ л}/(\text{моль} \cdot \text{с})$ ) [330].

Так как водородные реакции моделируются мюониевыми реакциями, исследование последних может открыть новый физический метод изучения первых. Высокая точность измерений и возможность открытия тонких особенностей спиновых состояний промежуточных продуктов являются значительными преимуществами мюониевого метода и делают желательным его дальнейшее применение.

Положительный мюон, замещая протон в водородсодержащей молекуле, может образовать мюониевую молекулу. Так, например, из  $\text{H}_2$ ,  $\text{HCl}$ ,  $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$  и т. п., мы можем получить  $\text{MH}$ ,  $\text{MCl}$ ,  $\text{CH}_3\text{MCH}_2\text{OH}$ ,  $\text{CH}_3\text{CHMON}$  и т. п. Также могут быть образованы молекулярные ионы, например  $(\mu^+pe^-)$ . Хотя вполне вероятно, что мюониевые молекулы могут быть образованы, неясно, могут ли они образовываться в достаточном количестве.

Возможность образования большого числа мюониевых молекул теоретически исследовалась в ряде работ [264, 265, 404, 413]. Ансельм и Шехтер [404] рассматривали возможность образования мо-

Таблица 6.1

## Константы скоростей химических реакций мюония с различными акцепторами [406]

Вещество	$k_1, 1/(\text{моль} \cdot \text{с})$	$k_2, 1/(\text{моль} \cdot \text{с})$	$k_{\text{H} + \text{AC}}, 1/(\text{моль} \cdot \text{с})$
$\text{C}_6\text{H}_{12}$	$1,2 \cdot 10^9 \pm 19\%$ $-15\%$	—	$4,0 \cdot 10^8$
$\text{CH}_3\text{OH}$	$2,7 \cdot 10^8 \pm 21\%$ $-16\%$	—	$9,0 \cdot 10^7$
$\text{C}_8\text{H}_{18}$	$1,1 \cdot 10^9 \pm 18\%$ $-12\%$	—	$3,7 \cdot 10^8$
$\text{CHCl}_3$	$5,0 \cdot 10^9 \pm 31\%$ $-24\%$	—	$1,7 \cdot 10^9$
$\text{C}_6\text{H}_6$	$3,4 \cdot 10^8 \pm 23\%$ $-18\%$	$1,3 \cdot 10^9 \pm 21\%$ $-18\%$	$5,5 \cdot 10^8$
$\text{CHBr}_3$	$1,6 \cdot 10^{10} \pm 27\%$ $-19\%$	—	$5,3 \cdot 10^9$
$\text{DPPH}$	$1,1 \cdot 10^{11} \pm 29\%$	—	$3,7 \cdot 10^{10}$
$\text{C}_6\text{H}_{10}$	$9,6 \cdot 10^8 \pm 25\%$ $-18\%$	$4,3 \cdot 10^8$	$4,6 \cdot 10^8$
$\text{C}_6\text{H}_5\text{Cl}$	$7,4 \cdot 10^8 \pm 30\%$ $-20\%$	$1,3 \cdot 10^9$	$6,8 \cdot 10^8$
$\text{C}_6\text{H}_5\text{Br}$	$1,7 \cdot 10^9 \pm 30\%$ $-20\%$	$1,3 \cdot 10^9$	$1,0 \cdot 10^9$
$\text{C}_2\text{H}_4\text{Cl}_2$	$7,0 \cdot 10^8 \pm 45\%$ $-34\%$	—	$2,3 \cdot 10^8$
$\text{CH}_2\text{I}_2$	$9,5 \cdot 10^{10} \pm \infty$ $-85\%$	—	$3,2 \cdot 10^{10}$

лекулы МН при замедлении положительных мюонов в водородном газе. Ими была вычислена скорость химической реакции между молекулами мюония и водорода при использовании метода активационного комплекса в теории Эйринга [214]. Вероятность образования молекулы МН сильно зависит от температуры; молекулы МН практически не образуются вплоть до температуры 800 К, а при температурах выше этой почти все положительные мюоны образуют мюониевые молекулы. Большая активационная энергия этого процесса требует высокой температуры для его протекания. Однако некоторые реакции, например реакции с тяжелыми галогенами, имеют более низкие активационные энергии. Так, в случае аналогичной реакции с иодом энергия активации почти нулевая. Основной трудностью этого подхода является неопределенность в значении параметров теории активационного комплекса.

По этой причине А. М. Бродский [413] определил скорость реакции из соответствующих экспериментальных данных для водородных реакций. Поправка на различие масс может быть рассчитана с помощью кинетической теории нуклидов. Малость мюонной массы по сравнению с массой протона увеличивает туннельный эффект, поэтому его также следует учитывать.

В табл. 6.2 приведены скорости образования мюониевых молекул в различных реакциях, выраженные через  $(1 - \rho_1/\rho)$ , где  $\rho_1$  и  $\rho$  — концентрация молекул мюония и полное число положительных мюонов. Предполагается, что стационарный поток термализованного мюония взаимодействует в органической среде. Значения



Т а б л и ц а 6.2

Скорости образования мюониевых молекул ( $1 - \rho_1/\rho$ ) в различных химических реакциях. 100%-ному образованию мюониевых молекул соответствует  $\rho_1/\rho = 1$  [413]

Реакция	$1 - \rho_1/\rho$	Реакция	$1 - \rho_1/\rho$
$M + n\text{-гексан}$	0,02	$M + \text{дифенил}$	$1 \cdot 10^{-6}$
$M + \text{бензол}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$M + \text{паратрифенил}$	$5 \cdot 10^{-7}$
$M + \text{этиловый бензол}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$		

$\rho_1/\rho$  получены из соответствующих водородных реакций с этими органическими жидкостями при температуре 296 К [226]. Из этой таблицы видно, что в данных конденсированных средах практически все положительные мюоны должны образовывать мюониевые молекулы при комнатной температуре.

Ким [264] рассмотрел возможность создания молекул мюониевой воды, предполагая, что постоянная скорости для реакции



приблизительно та же, что и для реакции



Поскольку константа скорости этой реакции имеет большое значение, он сделал вывод о том, что создание в лаборатории молекул мюониевой воды, которую можно назвать легкой водой, должно стать вполне реальным с развитием ускорителей, создающих высокоинтенсивные мюонные пучки (мезонные фабрики). Им также были вычислены три ожидаемые фундаментальные колебательные частоты мюониевой молекулы воды. Наблюдение образца с характерной частотой будет служить подтверждением действительного образования мюониевой воды.

Существует косвенное доказательство образования мюониевых молекул. Например, подавление резонансного сигнала в  $\text{C}_2\text{H}_4$  может интерпретироваться как указание на образование мюониевых молекул. Наблюдение очень слабых колебательных и вращательных спектров явилось бы прямым доказательством образования мюониевых молекул. В настоящее время такие спектры экспериментально не наблюдаются. Однако ввод ускорителей с высокой интенсивностью облегчит изучение химии мюония [334].

## § 6.5. ПОИСК КОНВЕРСИИ МЮОНИЙ — АНТИМЮОНИЙ

Группа йельских ученых [8] искала конверсию мюония ( $M = \mu^+ e^-$ ) с антимюоном ( $\bar{M} = \mu^- e^+$ ), которая допускается мультипликативным законом сохранения лептонного квантового числа, но запрещается аддитивным законом сохранения. Согласно перво-

му (мультипликативному) сумма мюонных и электронных лептонных чисел  $\Sigma (L_\mu + L_e)$  и знак  $(-)^{\Sigma L_\mu}$  (а следовательно, и  $(-)^{\Sigma L_e}$ ) сохраняются, в то время как последний (аддитивный) подразумевает, что сохраняются суммы  $\Sigma L_\mu$  и  $\Sigma L_e$ . Эксперимент, описанный в работе [8], представляет особенный интерес, так как все другие существующие экспериментальные данные согласуются как с аддитивным, так и с мультипликативным законами сохранения.

Слабое четырехфермионное взаимодействие, способное привести к конверсии, может быть записано следующим образом [179]:

$$\dot{H}_w = \frac{C}{\sqrt{2}} \bar{\Psi}_\mu \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \Psi_e \bar{\Psi}_\mu \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \Psi_e + \text{с.}, \quad (6.15)$$

где  $C$  — константа связи  $M-\bar{M}$ ;  $\Psi$  и  $\gamma_\lambda$  — обычные полевые операторы и  $\gamma$ -матрицы. Матричный элемент оператора  $H_w$  между основными состояниями  $M$  и  $\bar{M}$  есть

$$\langle \bar{M} | M_w | M \rangle = 1 \cdot 10^{-12} \frac{C}{C_v} \text{ эВ}, \quad (6.16)$$

где  $C_v$  — векторная константа связи  $\beta$ -распада. Вероятность того, что мюоний будет распадаться так же, как антимюоний в вакууме, представляется следующим образом:

$$P(\bar{M}) = \int_0^\infty \gamma e^{-\gamma t} |\langle \bar{M} | \Psi(t) \rangle|^2 dt = 2,5 \cdot 10^{-5} (C/C_v)^2. \quad (6.17)$$

В присутствии газа, скажем аргона,  $\bar{M}$  должен сталкиваться с атомом Ag и образовывать мюонный атом аргона с последующим испусканием мюонной рентгеновской линии  $2p \rightarrow 1s$ -перехода с энергией 643 кэВ. Скорость конверсии мюоний — антимюоний в аргонном газе детально рассчитана в работах [179, 304]. Для давления в 1 атм при комнатной температуре

$$P(\bar{M}) = 1,0 \cdot 10^{-10} (C/C_v)^2 \pm 20\%. \quad (6.18)$$

Регистрация мюонного рентгеновского излучения  $2p \rightarrow 1s$ -перехода доказала бы существование  $M-\bar{M}$ -конверсии. Результаты эксперимента [8] согласуются с нулевой скоростью конверсии.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### А. Вероятности переходов

**Вероятности радиационных переходов.** Детальное обсуждение вероятности радиационных переходов читатель может найти, например, в работах [50, 118]. Если в формулах, приведенных в этих работах, заменить электронную массу массой мюона, то получим:

$$P_R(n_1 l_1 \rightarrow n_2 l_2) = \frac{\alpha^3 Z^4 e^2}{6hA_\mu} \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \frac{\max(l_1, l_2)}{2l_1 + 1} I^2, \quad (\text{A.1})$$

где  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры;  $A_\mu$  — радиус первой боровской орбиты мюонного водородного атома;  $I$  — дипольный матричный элемент:

$$I = \int_0^\infty R(n_1 l_1) R(n_2 l_2) r dr. \quad (\text{A.2})$$

В формуле (A.2) функции  $R(n, l)$  являются радиальными функциями нормированных собственных волновых функций мюонного водородного атома, которые определяются следующим образом:

$$R_{nl}(r) = \left\{ \left( \frac{2Z}{nA_\mu} \right) \frac{1}{[2n(n+l)!(n-l-1)!]} \right\}^{1/2} \rho^{l+1} e^{-\rho/2} L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho), \quad (\text{A.3})$$

где

$$\rho = \frac{2Z}{nA_\mu} r.$$

Функция  $R(n, l)$  нормирована так, что  $\int_0^\infty R^2(n, l) dr = 1$ . Используя выражения (A.2) и (A.3), можно получить следующее выражение для дипольного матричного элемента [158]:

$$\begin{aligned} I(n_1, l_1 \rightarrow n_2, l_2) = & \sqrt{\frac{2^{2l_1+2l_2+4} n_1^{2l_2+4} n_2^{2l_1+4} (n_1-l_1-1)! (n_2-l_2-1)! (n_1+l_1)! (n_2+l_2)!}{(n_1+n_2)^{2l_1+2l_2+8}}} \times \\ & \times \int_0^\infty dt t^{l_1+l_2+3} \exp(-t) \sum_{\gamma_1=0}^{n_1-l_1-1} \frac{\left(-\frac{2n_2}{n_1+n_2} t\right)^{\gamma_1}}{\gamma_1! (n_1-l_1-\gamma_1-1)! (2l_1+\gamma_1+1)!} \times \\ & \times \sum_{\gamma_2=0}^{n_2-l_2-2} \frac{\left(-\frac{2n_1}{n_1+n_2} t\right)^{\gamma_2}}{\gamma_2! (n_2-l_2-\gamma_2-1)! (2l_2+\gamma_2+1)!}, \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

где\*

$$t = \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \cdot \frac{Zr}{A_\mu}.$$

Приведем полезную для вычисления правой части выражения (А.4) формулу

$$\int_0^\infty \rho^k \exp(-\rho) d\rho = k! \quad (\text{А.5})$$

**Вероятности оже-переходов.** Самые обширные расчеты вероятностей оже-переходов были проделаны Бурбиджем и де Борде [82, 134]. Результаты, которые они получили для  $P$ -переходов Оже ( $\Delta l = l_1 - l_2 = \pm 1$ ) с испусканием  $K$ - и  $L$ -электронов, могут быть выражены через дипольный матричный элемент  $I$ :

$$P_A^P(K) = \frac{\pi \alpha c}{\alpha_0} \cdot \frac{2^5}{\mu^2} \left( \frac{Z^*}{Z} \right)^2 \frac{\max(l_1, l_2)}{3(2l_1 + 1)} \times \\ \times \frac{y^2}{1 + y^2} \frac{\exp[y(4 \operatorname{ctg} y - \pi)]}{\operatorname{sh}(\pi y)} I^2; \quad (\text{А.6a})$$

$$P_A^P(L) = \frac{\pi \alpha c}{\alpha_0} \cdot \frac{2^4}{\mu^2} \left( \frac{Z^*}{Z} \right)^2 \frac{\max(l_1, l_2)}{3(2l_1 + 1)} \times \\ \times \frac{y^2(4 + 5y^2)(4 + 3y^2)}{(4 + y^2)^3} \frac{\exp[y(4 \operatorname{ctg}(y/2) - \pi)]}{\operatorname{sh}(\pi y)} I^2, \quad (\text{А.6б})$$

где

$$y = \frac{1}{\sqrt{(T/m_e c^2)^2 + (2T/m_e c^2)^2}}; \\ \mu = m_\mu/m_e,$$

$T$  — кинетическая энергия испускаемого оже-электрона;  $Z^*$  и  $Z$  — эффективные ядерные заряды, в поле которых находятся электрон и мюон соответственно.

Бурбидж и де Борде вычислили также скорость  $S$ -перехода Оже ( $\Delta l = 0$ ) типа  $n_1 - n_2 = 1$ ,  $l_1 = l_2 = n_1 - 2$ .

Приведем самую общую формулу, данную Эйзенбергом и Кесслером [158]:

$$P_A^S(K) = \frac{\alpha c}{\alpha_0} \cdot \frac{1}{\mu^4} \left( \frac{Z^*}{Z} \right)^4 \frac{1}{y} \frac{2^{4l+7}}{3^2} (n_1 \mp l)! (n_1 - l - 1)! \times \\ \times (n_2 + l)! (n_2 - l - 1)! \frac{n_1^{2l+6} n_2^{2l+6}}{(n_1 + n_2)^{4l+10}} Q^2, \quad (\text{А.7})$$

где  $Q$  представлено в виде двойной суммы:

$$Q = \sum_{\lambda=0}^{n_1-l-1} \sum_{k=0}^{n_2-l-1} (-1)^{\lambda+k+1} 2^{\lambda+k} \frac{1}{n_1^\lambda n_2^k} \cdot \frac{(\lambda+k+2l+2)!}{(1/n_1 + 1/n_2)^{\lambda+k}} \times \\ \times \frac{(\lambda+k)(\lambda+k+4l+7)}{\lambda! (n_1-l-\lambda-1)! (2l+\lambda+1)! k! (n_2-l-k-1)! (2l-k+1)!}. \quad (\text{А.8})$$

Множитель 2 введен в выражение для скорости оже-перехода с испусканием  $K$ -электронов, чтобы учесть оба электрона данной  $K$ -оболочки. Расчет скоростей перехода с испусканием электронов  $L$ -оболочки аналогичен.

\* Пояснение пер.

чен, но гораздо более сложен, поскольку должны рассматриваться как  $2s$ -так и  $2p$ -электроны. Скорость оже-перехода с испусканием электронов  $L$ -оболочки много меньше скорости оже-перехода с испусканием электронов  $K$ -оболочки. В оже-переходах электроны могут испускаться в состояния с  $|\Delta l| = 0, 1, 2$  и т. д. Однако скорости переходов существенно убывают с увеличением  $|\Delta l|$ .

## Б. Потенциал оптической модели пион-ядерного взаимодействия

Данные по пионному рентгеновскому излучению обычно анализируются с использованием формализма, развитого Эриксоном и Эриксоном (на языке оптического потенциала типа потенциала Кислинджера) [формула (3.6)]. Следуя работе Эриксона и Эриксона [173], приведем краткий вывод этого потенциала. Наша задача заключается в том, чтобы, используя амплитуды  $\pi N$ -рассеяния и пионного рождения в нуклон-нуклонных столкновениях, получить простой нелокальный потенциал взаимодействия пионов низкой энергии с конечными ядерными системами. Рассматривая  $\pi N$ -взаимодействие в ядре, мы предполагаем, что амплитуда рассеяния падающих пионов на свободных и связанных нуклонах остается той же, за исключением тривиальных кинематических множителей. Это предположение, называемое импульсным приближением, должно очень хорошо выполняться для пионов низкой энергии, так как амплитуда  $\pi N$ -взаимодействия не имеет полюсов в данной области энергий и, кроме того, радиус  $\pi N$ -взаимодействия мал. В этом приближении амплитуда  $\pi N$ -рассеяния на  $i$ -м нуклоне имеет следующий вид:

$$f_i(r) = [b_0 + b_1 t \cdot \tau_i + (c_0 + c_1 t \cdot \tau_i) k' \cdot k + \\ + i(d_0 + d_1 t \cdot \tau_i) \sigma_i \cdot [k' k]] \delta(r - r'), \quad (\text{Б.1})$$

где  $k$  и  $k'$  — импульсы падающего и рассеянного пионов;  $t$  — оператор изотопического спина пиона;  $\tau_i$  и  $\sigma_i$  — изоспиновая и спиновая матрицы нуклона. Постоянные  $b_0, b_1, c_0, c_1, d_0$  и  $d_1$  в формуле (Б.1) выражаются через  $s$ -волновые  $\alpha_{2t}$  и  $p$ -волновые  $\alpha_{2t, 2j}$  длины  $\pi N$ -рассеяния ( $t$  — полный изоспин,  $j$  — полный спин системы  $\pi N$ ):

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{3} (\alpha_1 + 2\alpha_3); & b_1 &= \frac{1}{3} (\alpha_3 - \alpha_1); \\ c_0 &= \frac{1}{3} (4\alpha_{33} + 2\alpha_{31} + 2\alpha_{13} + \alpha_{11}); & c_1 &= \frac{1}{3} (2\alpha_{33} + \alpha_{31} - 2\alpha_{13} - \alpha_{11}); \\ d_0 &= \frac{1}{3} (2\alpha_{31} - 2\alpha_{33} + \alpha_{11} - \alpha_{13}); & d_1 &= \frac{1}{3} (\alpha_{31} - \alpha_{33} - \alpha_{11} + \alpha_{13}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{Б.2})$$

Предполагается, что выражение (Б.1) справедливо для падающих пионов в области энергий  $E_\pi \leq 30$  МэВ как на энергетической поверхности, так и вне ее. Запишем полную пион-ядерную волновую функцию  $\Psi$ , соответствующую упругому и неупругому рассеянию пиона:

$$\Psi = \psi(r) |0\rangle, \quad (\text{Б.3})$$

где  $|0\rangle$  — основное ядерное состояние;  $\psi(r)$  зависит от пионной и ядерной координат, хотя только пионная координата явно указана в обозначении. Полная пион-ядерная волновая функция описывает, очевидно, сумму падающих и рассеянных волн. Падающая волна пион-ядерной системы определяется следующим образом:

$$\Psi_0 = \chi_0(r) |0\rangle, \quad (\text{Б.4})$$

где  $\chi_0(\mathbf{r})$  — падающая пионная волна. Рассеянная волна от рассеивателя  $i$  пропорциональна  $\psi_i(\mathbf{r})|0\rangle$  (волна, падающая на рассеиватель  $i$ ) и, кроме того, амплитуде рассеяния  $f_i$ . Следовательно, можно записать

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r})|0\rangle &= \chi_0(\mathbf{r})|0\rangle + \\ &+ \sum_i \int g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_i(\mathbf{r}') \psi_i(\mathbf{r}')|0\rangle d\mathbf{r}', \end{aligned} \quad (\text{Б.5})$$

где  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  — функция Грина, описывающая как расходящуюся пионную волну, так и ядерные состояния. Функция Грина  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  налетающих пионов с энергией  $E$  может быть выражена через ядерные состояния с энергией  $\epsilon_n$ :

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_n g_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |n\rangle \langle n|, \quad (\text{Б.6})$$

где  $g_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  — функция Грина при энергии  $E - \epsilon_n$ . Если отсутствует внешнее воздействие на пионное поле, то пропагатор определяется не зависящим от времени уравнением Клейна—Гордона, из которого получаем:

$$g_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp(i k_n |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}. \quad (\text{Б.7})$$

Волновое число  $k_n$  в формуле (Б.7) находится следующим образом:  $k_n^2 = (E - \epsilon_n)^2 - \mu^2$ , где  $\mu$  — масса пиона. Энергиями возбуждения ядерных состояний можно пренебречь по сравнению с энергиями промежуточных пионных состояний, и в этом приближении выражение (Б.6) принимает вид

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sum_n |n\rangle \langle n|. \quad (\text{Б.8})$$

Для  $\psi_i(\mathbf{r})|0\rangle$  в формуле (Б.5) можем получить выражение, аналогичное самой формуле (Б.5):

$$\begin{aligned} \psi_i(\mathbf{r})|0\rangle &= \chi_0(\mathbf{r})|0\rangle + \\ &+ \sum_{j \neq i} \int g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_j(\mathbf{r}') \psi_{j; i}(\mathbf{r}')|0\rangle d\mathbf{r}', \end{aligned} \quad (\text{Б.9})$$

где  $\psi_{j; i}(\mathbf{r})|0\rangle$  обозначает мезонное поле, рассеивающееся на  $j$ -м нуклоне. Из выражения (Б.9) ясно, что  $\psi_i(\mathbf{r})|0\rangle$  — сумма падающих и рассеянных от всех рассеивателей волн, за исключением  $i$ -го. Можно применить эту же процедуру к  $\psi_{j; i}(\mathbf{r})|0\rangle$  в выражении (Б.9) и, повторяя ее, построить бесконечную систему уравнений. Решение этой бесконечной системы уравнений — достаточно трудоемкая задача, поэтому необходимо теперь конкретизировать явный вид состояний ядерного возбуждения. Замечая, что амплитуда рассеяния (Б.1) с различными от нуля константами  $b_0$  и  $c_0$  сохраняет основные черты проблемы многократного рассеяния, подставим эту упрощенную амплитуду рассеяния в формулу (Б.5). При этом получаем:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r})|0\rangle &= \chi_0(\mathbf{r})|0\rangle + \int d\mathbf{r}' [b_0 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\rho}(\mathbf{r}') \psi_{r'}(\mathbf{r}') - \\ &- c_0 \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \hat{\rho}(\mathbf{r}') \nabla' \psi_{r'}(\mathbf{r}')_{\mathbf{r}''=\mathbf{r}'}] |0\rangle, \end{aligned} \quad (\text{Б.10})$$

где

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i); \quad (\text{Б.11})$$

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}) \psi_{r'}(\mathbf{r}) = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \psi_i(\mathbf{r}'). \quad (\text{Б.12})$$

Аналогичным образом из выражения (Б.9) можно получить:

$$\begin{aligned} \psi_i(\mathbf{r})|0\rangle = & \chi_0(\mathbf{r})|0\rangle + \int d\mathbf{r}' [b_0 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\rho}_i(\mathbf{r}') \psi_{\mathbf{r}'; \mathbf{r}_i}(\mathbf{r}') - \\ & - c_0 \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\rho}_i(\mathbf{r}') (\nabla'' \psi_{\mathbf{r}'; \mathbf{r}_i}(\mathbf{r}''))_{\mathbf{r}''=\mathbf{r}'}] |0\rangle, \end{aligned} \quad (\text{Б.13})$$

где

$$\hat{\rho}_i(\mathbf{r}) = \sum_{j \neq i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j); \quad (\text{Б.14})$$

$$\hat{\rho}_i(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{r}; \mathbf{r}_i}(\mathbf{r}')|0\rangle = \sum_{j \neq i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \psi_{j; i}(\mathbf{r}')|0\rangle. \quad (\text{Б.15})$$

Проектируя выражение (Б.10) на основное ядерное состояние, получаем

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi(\mathbf{r}) | 0 \rangle & \equiv \Phi(\mathbf{r}) = \\ & = \chi_0(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') [b_0 g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Phi_1(\mathbf{r}') - \\ & - c_0 (\nabla g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}'))], \end{aligned} \quad (\text{Б.16})$$

где  $\rho(\mathbf{r})$  — средняя плотность;  $\Phi_1(\mathbf{r})$  — среднее поле налетающего пиона;  $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$  — среднее от градиента поля налетающего пиона;

$$\rho(\mathbf{r}) = \langle 0 | \hat{\rho}(\mathbf{r}) | 0 \rangle; \quad (\text{Б.17})$$

$$\rho(\mathbf{r}) \Phi_1(\mathbf{r}) = \langle 0 | \hat{\rho}(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}) | 0 \rangle; \quad (\text{Б.18})$$

$$\rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \langle 0 | \hat{\rho}(\mathbf{r}) (\nabla \psi_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}))_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}} | 0 \rangle. \quad (\text{Б.19})$$

Соотношение для  $\Phi_1(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$  может быть получено из выражения (Б.13). Умножая выражение (Б.13) на  $\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$  и суммируя по  $i$ , получаем:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\mathbf{r}) = & \chi_0(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') [1 + G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \times \\ & \times \{b_0 g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Phi_{1; \mathbf{r}}(\mathbf{r}') - \\ & - c_0 (\nabla g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}_{1; \mathbf{r}}(\mathbf{r}'))\}, \end{aligned} \quad (\text{Б.20})$$

где  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  — функция парной корреляции двух рассеивателей;  $\Phi_{1; \mathbf{r}}(\mathbf{r}')$  — среднее поле налетающего пиона в точке  $\mathbf{r}'$ , когда рассеиватель находится в точке  $\mathbf{r}$ ;  $\mathbf{E}_{1; \mathbf{r}}(\mathbf{r}')$  — среднее от градиента поля налетающего пиона в точке  $\mathbf{r}'$ , когда координата рассеивателя —  $\mathbf{r}$ :

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') [1 + G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] & \equiv \langle 0 | \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \hat{\rho}_i(\mathbf{r}') | 0 \rangle \equiv \\ & \equiv \langle 0 | \sum_i \sum_{j \neq i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) | 0 \rangle; \end{aligned} \quad (\text{Б.21})$$

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') [1 + G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \Phi_{1; \mathbf{r}}(\mathbf{r}') & \equiv \\ & \equiv \langle 0 | \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \hat{\rho}_i(\mathbf{r}') \psi_{\mathbf{r}'; \mathbf{r}_i}(\mathbf{r}') | 0 \rangle; \end{aligned} \quad (\text{Б.22})$$

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') [1 + G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \mathbf{E}_{1; \mathbf{r}}(\mathbf{r}') & \equiv \\ & \equiv \langle 0 | \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \hat{\rho}_i(\mathbf{r}') (\nabla'' \psi_{\mathbf{r}'; \mathbf{r}_i}(\mathbf{r}''))_{\mathbf{r}''=\mathbf{r}'} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{Б.23})$$

При выводе выражения (Б.20) были использованы уравнение (Б.18) и свойство полноты  $\sum_n |n\rangle \langle n| = 1$ . Аналогичным образом можно получить

уравнение для  $E_1(r)$ :

$$E_1(r) = \nabla \chi_0(r) + \int dr' \rho(r') [1 + G(r, r')] \times \\ \times \{b_0 \nabla g_0(r, r') \Phi_{1;r}(r') - \\ - \nabla (\nabla g_0(r, r') \cdot E_{1;r}(r'))\}. \quad (B.24)$$

Хотя эта процедура может быть продолжена и далее, в реальных расчетах  $\Phi(r)$  приходится обрывать разложение через  $n$  шагов и предполагать  $\Phi_n = \Phi_{n+1}$ , а в случае  $E(r)$ , аналогичным образом,  $E_n = E_{n+1}$ . Очевидно, что простейшее приближение, которое может быть сделано, заключается в том, чтобы положить  $\Phi_1(r) = \Phi(r)$  и  $E_1(r) = \nabla \Phi(r)$  в выражении (B.16). Тогда после частичного интегрирования по  $r'_1$  получаем из выражения (B.16) следующее соотношение:

$$\Phi(r) = \chi_0(r) + \int dr' g_0(r, r') [b_0 \rho(r') - \\ - (\nabla' c_0 \rho(r') \nabla')] \Phi(r'). \quad (B.25)$$

При получении этого уравнения была сделана замена  $\nabla g_0$  на  $-\nabla' g_0$  и  $g_0(r, r')$  на  $g_0(|r - r'|)$ . Так как

$$(\nabla^2 + k^2) g_0(r, r') = -4\pi \delta(r - r'), \quad (B.26)$$

то из уравнения (B.25) получаем:

$$(\nabla^2 + k^2) \Phi(r) = -4\pi [b_0 \rho(r) - (\nabla c_0 \rho(r) \nabla)] \Phi(r). \quad (B.27)$$

В случае нерелятивистских пионов этот результат можно интерпретировать на языке потенциала, зависящего от скорости:

$$V(r) = -\frac{4\pi}{2\mu} [b_0 \rho(r) - \nabla c_0 \rho(r) \nabla], \quad (B.28)$$

который, по существу, является потенциалом Кислинджера. Основная черта этого потенциала — его нелокальность, которая указывает на  $p$ -волновой характер  $\pi N$ -взаимодействия.

В принципе  $\Phi(r)$  может быть найдено из  $\Phi_1(r)$  и  $E_1(r)$ . После некоторых манипуляций можно прийти к волновому уравнению для  $\Phi_1(r)$ :

$$(\nabla^2 + k^2) \Phi_1(r) = -4\pi \left[ b_0 \rho(r) - \right. \\ \left. - \nabla \frac{c_0 \rho(r)}{1 + \frac{1}{3} 4\pi c_0 \rho(r)} \nabla \right] \Phi_1(r) \quad (B.29)$$

с соответствующим этому уравнению нерелятивистским потенциалом

$$v(r) = -\frac{4\pi}{2\mu} \left[ b_0 \rho(r) - \nabla \frac{c_0 \rho(r)}{1 + \frac{1}{3} 4\pi c_0 \rho(r)} \nabla \right], \quad (B.30)$$

который имеет явную нелинейную зависимость от плотности рассеивателя. Если положить  $b_0 = 0$ , то уравнение (B.29) превращается в хорошо известное уравнение, описывающее дипольное рассеяние электромагнитных волн, проходящих через плотную однородную среду поляризованных атомов. Такое рассеяние порождает эффект Лорентц—Лоренца [72] (наблюдаемую нелинейную зависимость коэффициента преломления от плотности). При анализе рентгеновского излучения пионных атомов обычно пренебрегают эффектом Лорентц—Лоренца.



## В. Решение волнового уравнения в задаче на связанные состояния с вещественными или комплексными собственными значениями

Сильное пион-ядерное взаимодействие в пионных атомах приводит к комплексным энергиям (уширение линий). Крелл и Эриксон [276] развили новый метод интегрирования волнового уравнения, с помощью которого становится возможным получить комплексные собственные значения с высокой степенью точности.

Рассмотрим уравнение следующего типа:

$$d^2 u/dr^2 + (k_0^2 + q(r)) u = 0, \quad (\text{В.1})$$

где  $k_0$  и  $q(r)$  комплексны;  $q(r)$  стремится к нулю на бесконечности скорее, чем  $1/r$ . Тогда регулярное и нерегулярное решения  $U_k^{(1)}(r)$  и  $U_k^{(2)}(r)$  для произвольного волнового числа  $k$  и больших  $r$  ведут себя следующим образом:

$$U_k^{(1)}(r) \rightarrow \exp(-kr); \quad U_k^{(2)}(r) \rightarrow \exp(kr). \quad (\text{В.2})$$

Решение уравнения на связанные состояния в области нуля ведет себя как  $r^{l+1}$  и экспоненциально стремится к нулю на бесконечности для  $k = k_0$ . Метод решения Крелла—Эриксона заключается в следующем: 1) выбрать правильное поведение решения на связанные состояния в нуле,  $u_k(r) = Ar^{l+1}$ , с произвольной константой  $A$ , отвечающей пробному значению  $k$ ; 2) интегрировать во внешней области до больших значений  $r$ . Таким образом, получаем волновую функцию

$$u_k(r) = B(k) \left[ U_k^{(1)}(r) + \left( \frac{k-k_0}{k} \right) C(k) U_k^{(2)}(r) \right] \xrightarrow{r \rightarrow \infty} B(k) \left[ \exp(-kr) + \left( \frac{k-k_0}{k} \right) C(k) \exp(kr) \right]. \quad (\text{В.3})$$

В этом выражении как  $B(k)$ , так и  $C(k)$  можно считать постоянными в области значений  $k$  порядка  $k_0$ . Нерегулярное решение  $U_k^{(2)}(r)$  быстро становится доминирующим при больших значениях  $r$ . Чтобы справиться с этой ситуацией, Крелл и Эриксон ввели отношение  $v(k)$  при большом фиксированном значении  $r = r_0$ :

$$v(k) = \frac{|u_k(r_0)|^2}{|U_k^{(2)}(r_0)|^2} \simeq \frac{|u_k(r_0)|^2}{\exp[2 \operatorname{Re}(kr_0)]} \simeq \left| \frac{k-k_0}{k} \right|^2 |BC|. \quad (\text{В.4})$$

Большая область сходимости ясно определяет минимум функции  $v(k)$ . Функция  $|u_k(r)|^2$  имеет минимум при некотором значении  $r = r_{\min}$ , после которого для больших значений  $r$   $|u_k(r)|^2$  растет экспоненциально. Таким способом можно получить очень точную волновую функцию  $u_k(r)$  для приближенного собственного значения  $k$  в области  $r < r_{\min}$ . В области  $r > r_{\min}$  волновая функция должна быть положена равной нулю или экспоненциально убывающей.

Следующие значения кулоновских энергий связи  $3d$ -состояния пионного атома  $^{16}\text{O}$  получены при точном решении уравнения Клейна—Гордона методом Крелла—Эриксона и вариационным методом:

$$E_{3d} = \begin{cases} -26,1857_3 \text{ кэВ (точный расчет);} \\ -26,1857_2 \text{ кэВ (метод Крелла—Эриксона);} \\ -26,1857_3 \text{ кэВ (вариационный метод).} \end{cases} \quad (\text{В.5})$$

Отметим, что в вариационном методе интегрирование выполняется от обоих концов во внутреннюю область, в то время как в методе Крелла—Эриксона интегрирование проводится в направлении неустойчивости.

Следующий пример иллюстрирует точность обоих методов при расчете энергии и ширины  $1s$ -уровня пионного атома  $^{16}\text{O}$ :

$$E_{1s} = \begin{cases} (-219,6493_4 - i 1,1322_0) \text{ кэВ} & (\text{метод Крелла—Эриксона}); \\ (-219,6493_8 - i 1,1322_0) \text{ кэВ} & (\text{вариационный метод}). \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

На основе собственных значений в отсутствии сильного взаимодействия после четырех итераций как в методе Крелла—Эриксона, так и в вариационном методе были получены значения, представленные в (B.6). В методе Крелла—Эриксона волновая функция и отношение (B. 4) были получены интегрированием по внешней области в комплексной плоскости.

Рассмотренные примеры отчетливо показывают точность метода Крелла—Эриксона. Хотя сходимость его хуже, чем сходимость вариационного метода, большая общность и простота делают его очень полезным для численных расчетов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Acker H. L. e. a. — «Nucl. Phys.», 1965, v. 62, p. 477.
2. Acker H. L. e. a. — «Phys. Lett.», 1965, v. 14, p. 317.
3. Acker H. L., Marshall H. — «Phys. Lett.», 1965, v. 19, p. 127.
4. Acker H. L. e. a. — «Nucl. Phys.», 1966, v. 87, p. 1.
5. Acker H. L. — «Nucl. Phys.», 1966, v. 87, p. 153.
6. Alder K. e. a. — «Rev. Mod. Phys.», 1956, v. 28, p. 432.  
(К. Альдер и др. — В кн.: Деформация атомных ядер. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1958, с. 9.)
7. Alvarez L. W. e. a. — «Phys. Rev.», 1957, v. 105, p. 1127.
8. Amato J. J. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1968, v. 21, p. 1709.
9. Anderson D. K., Jenkins D. A., Powers R. J. — «Phys. Rev.», 1969, v. 188, p. 9.
10. Anderson D. K., Jenkins D. A., Powers R. J. — «Phys. Rev. Lett.», 1970, v. 24, p. 71.
11. Anderson H. L. e. a. — «Phys. Lett.», 1963 v. 6, p. 261.
12. Anderson H. L. e. a. In: Proc. 12th Intern. Conf. on High-Energy Physics. V. 1. M., Atomizdat, 1966, p. 936.
13. Anderson H. L. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1966, v. 16, p. 434.
14. Anderson H. L. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 22, p. 221.
15. Anderson H. L. e. a. — «Phys. Rev.», 1969, v. 187, p. 1565.
16. Apostolakis A. J. e. a. — «Nuovo cimento», 1965, v. 40A, p. 268.
17. Arima A., Horie H. — «Progr. Theor. Phys. (Kyoto)», 1955, v. 11, p. 509.
18. Ashmore A. e. a. — «Proc. Phys. Soc. (Lond.)», 1957, v. 71, p. 161.
19. Astbury A. e. a. — «Nuovo cimento», 1960, v. 18, p. 1267.
20. Astbury A., Hattersley P. M., Hussain M. — «Proc. Phys. Soc. (Lond.)», 1961, v. 78, p. 1145.
21. Astbury A. e. a. In: Comptes Rendus due Congr ss Intern. de Physique Nucl aire, v. 2. P. Eugenberger, ed. Paris, Centre National de la Recherche Scientifique, 1964, p. 225.
22. Auman J. e. a. In: Proc. Intern. Conf. on High-Energy Physics. J. Prentki, ed. Geneva, CERN, 1962, p. 330.
23. Au-Yang M. Y., Cohen M. L. — «Phys. Rev.», 1968, v. 174, p. 468.
24. Baacke J., H hler G., Steiner F. — «Z. Phys.», 1969, Bd 221, S. 134.
25. Baader R. e. a. — «Phys. Lett.», 1968, v. 27B, p. 425.
26. Baader R. e. a. — «Phys. Lett.», 1968, v. 27B, p. 428.
27. Backe H. e. a. In: Hyperfine Structure and Nuclear Radiations. E. Matthias and D. A. Shirley, eds., Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1968, p. 65.
28. Backenstoss G. e. a. — «Bull. Amer. Phys. Soc.», 1959, v. 4, p. 273.
29. Backenstoss G. e. a. — «Nucl. Phys.», 1965, v. 62, p. 449.
30. Backenstoss G. e. a. — «Phys. Lett.», 1967, v. 25B, p. 365.
31. Backenstoss G. e. a. — «Phys. Lett.», 1967, v. 25B, p. 547.

32. Baijal J. S. e. a. — «Nuovo cimento», 1963, v. 30, p. 711.
33. Baker G. A. — «Phys. Rev.», 1960, v. 117, p. 1130.
34. Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R. — «Phys. Rev.», 1957, v. 108, p. 1175.
35. Bardin T. T. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1955, v. 16, p. 718.
36. Bardin T. T. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1966, v. 16, p. 429.
37. Bardin T. T. e. a. — «Phys. Rev.», 1967, v. 160, p. 1043.
38. Barkas W. H., Birnbaum W., Smith F. M. — «Phys. Rev.», 1956, v. 101, p. 778.
39. Barrett R. C. — «Phys. Lett.», 1968, v. 28B, p. 93.
40. Barret R. C. e. a. — «Phys. Rev.», 1968, v. 166, p. 1589.
41. Bearden A. J. — «Phys. Rev. Lett.», 1960, v. 4, p. 240.
42. Bellicard J. Private communication (Elton [167]).
43. Berezin S. e. a. — «Phys. Lett.», 1969, v. 30B, p. 27.
44. Bernow S. e. a. — «Phys. Lett.», 1967, v. 18, p. 787.
45. Bernow S. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1968, v. 21, p. 457.
46. Bernstein J., Wu T.Y. — «Phys. Rev. Lett.», 1959, v. 2, p. 404.
47. Bes D. R., Sorensen R. A. In: Advances Nucl. Phys. Baranger e. a., ed. 1969, v. 2, p. 129.
48. Best B. G., Kim D. Y. — «Canad. J. Phys.», 1968, v. 46, p. 1253.
49. Bethe H. A., Hamilton D. J. — «Nuovo cimento», 1956, v. 4, p. 1.
50. Bethe H. A., Salpeter E. E. Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms. N. Y. Academic Press, 1957. (Бете Г., Солпитер Э. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. Пер. с англ., М., Физматгиз, 1960.)
51. Bethe H. A. — «Phys. Rev.», 1968, v. 167, p. 879.
52. Bethe H. A., Negele J. W. — «Nucl. Phys.», 1968, v. 117A, p. 575.
53. Bethe H. A., Elton L. R. B. — «Phys. Rev. Lett.», 1968, v. 20, p. 745.
54. Biernan E. S. e. a. — «Phys. Lett.», 1963, v. 4, p. 351.
55. Bincer A. A. — «Phys. Rev.», 1957, v. 107, p. 1434.
56. Bjorkland J. A. e. a. — «Phys. Rev.», 1964, v. 136B, p. 341.
57. Blatt J. M., Weisskopf V. F. Theoretical Nuclear Physics. N. Y., J. Wiley, 1952. (Блатт Д., Вайскопф В. Теоретическая ядерная физика. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1954.)
58. Bleser E. J. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1962, v. 8, p. 128.
59. Bleser E. J. e. a. — «Phys. Rev.», 1963, v. 132, p. 2679.
60. Block M. M. e. a. — «Nuovo cimento», 1961, v. 20, p. 724.
61. Block M. M., Lendinara L., Monari L. In: Proc. Intern. Conf. on High-Energy Physics. J. Prentki, ed. Geneva, CERN, 1962, p. 371.
62. Block M. M. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1963, v. 11, p. 301.
63. Block M. M., Kopelman J. B., Sun C. R. — «Phys. Rev.», 1965, v. 140B, p. 143.
64. Blomquist J. — «Nucl. Phys.», 1967, v. 103A, p. 644.
65. Blomquist J., Wahlborn S. — «Arkiv fys.», 1960, Bd 16, S. 545.
66. Bloom S. D., Johnson M. H., Teller E. — «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 23, p. 28.
67. Bloore F. J., Varshni Y. P., Pearson J. M. — «Phys. Lett.», 1963, v. 3, p. 303.
68. Bodmer A. R. — «Nucl. Phys.», 1958, v. 9, p. 371.
69. Bohr A., Weisskopf V. F. — «Phys. Rev.», 1950, v. 77, p. 94.
70. Bohr A., Mottelson B. R. Kgl. — «Danske Videnskab. Mat-Fys. Medd.», 1953, Bd 27, N 16.
71. Bohr A., Mottelson B. R. Nuclear Structure. V. 1. N. Y., Benjamin Inc., 1969. (Бор О., Моттельсон Б. Р. Структура атомного ядра. Пер. с англ. Т. 1. М., «Мир», 1971.)
72. Born M., Wolf E. Principles of Optics. Pergamon Press, Oxford, 1965, p. 71, 100.
73. Bransden B. H. In: E. H. S. Burhop, ed. High Energy Physics, v. 3. N. Y., Academic Press, 1969, p. 1.
74. Breit G., Rabi I. I. — «Phys. Rev.», 1931, v. 38, p. 2082.

75. Brix P., Kopfermann H. — «Z. Phys.», 1949, Bd 126, S. 344.
76. Brodsky S. J., Erickson G. W. — «Phys. Rev.», 1966, v. 148, p. 26.
77. Brown G. E. Unified Theory of Nuclear Models and Nuclear Forces. Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1967. (Браун Дж. Единая теория ядерных моделей и сил. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1970.)
78. Brueckner K. — «Phys. Rev.», 1955, v. 98, p. 769.
79. Bruno B. — «Arkiv mat. astron. fys.», 1948, Bd 36A, N 8.
80. Buckle D. C. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1968, v. 20, p. 705.
81. Budick B. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1970, v. 24, p. 604.
82. Burbidge G. R., De Borde A. H. — «Phys. Rev.», 1953, v. 89, p. 189.
83. Burhop E. H. S. — «Nucl. Phys.», 1967, v.1B, p. 438.
84. Burke P. G., Haas F., Percival I. C. — «Proc. Phys. Soc. (Lond.)», 1959, v.73, p. 912.
85. Burleson G. R. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1965, v. 15, p. 70.
86. Byers N. — «Phys. Rev.», 1957, v. 107, p. 843.
87. Camac M. e. a. — «Phys. Rev.», 1955, v. 99, p. 897.
88. Carrigan R. A. Jr. e. a. — «Phys. Lett.», 1967, v. 25B, p. 193.
89. Carrigan R. A. Jr. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1968, v. 20, p. 874.
90. Carrigan R. A. e. a. — «Phys. Lett.», 1968, v. 27B p. 622.
91. Carter B. P. — «Phys. Rev.», 1966, v. 141, p. 863.
92. Carter B. P. — «Phys. Rev.», 1968, v. 165, p. 139.
93. Carter B. P. Preprint, 1968, UCRL-70897.
94. Carter B. P. Preprint, 1968, UCRL-71122 (Rev. 1).
95. Carter B. P. Preprint, 1968, UCRL-71509.
96. Case K., Messiah A. — «Phys. Rev.», 1951, v.82, p. 563.
97. Cassels J. M. e. a. — «Proc. Phys. Soc. (Lond.)», 1957, v. 70A, p. 543.
98. Charkpak G. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1961, v. 6, p. 128.
99. Chasman C. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1965, v.14, p. 181.
100. Chen M. Y. — «Phys. Rev.», 1970, v.C1, p. 1167.
101. Chen M. Y. — «Phys. Rev.», 1970, v. 9, p. 1176.
102. Chesler R. B., Boehm F., Brockmeier R. T. — «Phys. Rev. Lett.», 1965, v.15, p. 132.
103. Chesler R. B., Boehm F. — «Phys. Rev.», 1968, v. 166, p. 1206.
104. Chinn D., Wilets L. Private communication, 1963, (Hüfner [236]).
105. Ciafaloni M. — «Nuovo cimento», 1967, v. 52A, p. 274.
106. Cleland W. E. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1964, v. 13, p. 202.
107. Cohen E. R., Crowe K. M., DuMond J. W. — «Phys. Rev.», 1956, v. 104, p. 266.
108. Cohen S. Univ. of California Radiation Laboratory Report, 1958, UCRL-8389.
109. Cohen S., Judd D. L., Riddell R. J. — «Phys. Rev.», 1958, v. 110, p. 1471.
110. Cohen S., Judd D. L., Riddell R. L. — «Phys. Rev.», 1960, v. 119, p. 384.
111. Cohen S., Judd D. L., Riddell R. L. — «Phys. Rev.», 1960, v.119, p. 397.
112. Cohen R. C. e. a. — «Phys. Lett.», 1964, v. 11, p. 70.
113. Cohen R. C. e. a. — «Phys. Rev.», 1966, v. 141, p. 48.
114. Cojocar V. L. e. a. — «Phys. Lett.», 1966, v. 20, p. 53.
115. Cole R. K. — «Phys. Lett.», 1967, v. 25B, p. 178.
116. Cole R. K. — «Phys. Rev.», 1969, v. 177, p. 164.
117. Condo G. T. — «Phys. Lett.», 1964, v. 9, p. 65.
118. Condon E. U., Shortley G. H. The Theory of Atomic Spectra. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1935. (Кондон Э., Шортли Г. Теория атомных спектров. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1949).
119. Conforto G. e. a. — «Nuovo cimento», 1964, v. 33, p. 1001.
120. Cooper L. N., Henley E. M. — «Phys. Rev.», v. 92, p. 789.
121. Coté R. E. e. a. — «Phys. Lett.», 1965, v. 19, p. 18.
122. Coté R. E. e. a. In: Proc. Williamsburg Conf. on Intermediate Energy Physics. H. O. Funsten, ed., Williamsburg College of William and Mary, 1966, v. 1, p. 51.
123. Crannell H. e. a. — «Phys. Rev.», 1961, v. 121, p. 283.
124. Daniel H. — «Naturwiss.», 1968, Bd 55, S. 339.

125. Daniel H. e. a. — «Phys. Lett.», 1968, v. 26B, p. 281.
126. Davidson J. P. Collective Models of the Nucleus, N. Y., Academic Press, 1968.
127. Davis D. H. e. a. — «Nucl. Phys.», 1967, v. B1, p. 434.
128. Day T. B., Morrison P. — «Phys. Rev.», 1957, v. 107, p. 912.
129. Day T. B., Snow G. A., Sucher J. — «Phys. Rev. Lett.», 1959, v. 3, p. 61.
130. Day T. B. — «Nuovo cimento», 1960, v. 13, p. 381.
131. Day T. B., Snow G. A., Sucher J. — «Phys. Rev.», 1960, v. 118, p. 864.
132. Day T. B. e. a. — «Phys. Rev.», 1961, v. 123, p. 1051.
133. Dayhoff E. S., Triebwasser S., Lamb W. F., Jr. — «Phys. Rev.», 1953, v. 89, p. 106.
134. De Borde A. H. — «Proc. Phys. Soc.», (Lond.), 1954, v. 67, p. 57.
135. Demeur M. — «Nucl. Phys.», 1956, v. 1, p. 516.
136. Demeur M., Joachain C. — «Nucl. Phys.», 1960, v. 17, p. 329.
137. Derrick K. e. a. — «Phys. Rev.», 1966, v. 151, p. 82.
138. Deser S. e. a. — «Phys. Rev.», 1954, v. 96, p. 774.
139. Devons S. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1960, v. 5, p. 330.
140. Devons S., Duerdorth I. In: Advances in Nuclear Physics. M. Baranger e. a., eds. V. 2, N. Y., Plenum Press, 1969, p. 295.
141. DeWit S. A. e. a. In: Proc. Intern. Nucl. Phys. Conf. R. L. Becker e. a., eds., N. Y., Academic Press, 1967, p. 460.
142. DeWit S. A. e. a. — «Nucl. Phys.», 1967, v. 87, p. 657.
143. Diaz J. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1959, v. 3, p. 234.
144. Diaz J. A., Kaplan S. N., Pyle R. V. — «Nucl. Phys.», 1963, v. 40, p. 54.
145. Doede J. H. e. a. — «Phys. Rev.», 1964, v. 129, p. 2808.
146. Doede J. H., Hildebrand R. H., Israel M. H. — «Phys. Rev.», 1964, v. 136B, p. 1609.
147. Dzhelepov V. P. e. a. — «Nuovo cimento», 1964, v. 33, p. 40.
148. Eckhause M. e. a. — «Nuovo cimento», 1962, v. 24, p. 666.
149. Eckstein S. G. — «Phys. Rev.», 1963, v. 129, p. 413.
150. Edmonds A. R. Angular Momentum in Quantum Mechanics. Princeton, Princeton Univ. Press, 1960. (Эдмондс А. Угловые моменты в квантовой механике. — В кн.: Деформация атомных ядер. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1958.)
151. Ehrlich R. D. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1964, v. 13, p. 550.
152. Ehrlich R. D. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1966, v. 16, p. 425.
153. Ehrlich R. D. e. a. — «Phys. Lett.», 1966, v. 23, p. 468.
154. Ehrlich R. D. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 18, p. 959.
155. Ehrlich R. D. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 19, p. 344.
156. Ehrlich R. D. — «Phys. Rev.», 1968, v. 173, p. 1088.
157. Ehrlich R. D. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 23, p. 513.
158. Eisenberg Y., Kessler D. — «Nuovo cimento», 1961, v. 19, p. 1195.
159. Eisenberg Y., Kessler D. — «Phys. Rev.», 1961, v. 123, p. 1472.
160. Eisenberg Y., Kessler D. — «Phys. Rev.», 1963, v. 130, p. 2349.
161. Eisenberg Y., Kessler D. — «Phys. Rev.», 1963, v. 130, p. 2352.
162. Eisenstein B., Prepost R., Sachs A. M. — «Phys. Rev.», 1966, v. 142, p. 217.
163. Ekstein S. G. — «Phys. Rev.», 1962, v. 129, p. 413.
164. Elton L. R. B. — «Nucl. Phys.», 1961, v. 23, p. 681.
165. Elton L. R. B. Nuclear Sizes. Lond. Oxford Univ. Press, 1961, p. 31. (Элтон Л. Размеры ядер. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1962.)
166. Elton L. R. B., Swift A. — «Proc. Phys. Soc. (Lond.)», 1964, v. 84, p. 125.
167. Elton L. R. B., Swift A. In: Proc. Williamsburg Conf. on Intermediate Energy Physics. H. O. Funsten, ed., V. 2. Williamsburg, College of William and Mary, 1966, p. 731.
168. Elton L. R. B. In: Proc. Intern. Conf. on Electromagnetic Sizes of Nuclei. P. J. Brown, ed., Ottawa, Carleton Univ., 1967, p. 267.
169. Elton L. R. B., Swift A. — «Nucl. Phys.», 1967, v. 94A, p. 52.
170. Engfer R. Varenna Summer School Lecture, 1966.

171. Erickson G. W. Invited paper at the Internat. Symposium on the Physics of One- and Two-Electron Atoms, Munich, Univ., 1968.
172. Ericson M. — «Compt. Rend.», 1963, v. 257, p. 3831.
173. Ericson M., Ericson T. E. — «Ann. Phys. (N. Y.)», 1966, v. 36, p. 323.
174. Ericson T. E. O. In: Proc. Intern. Nuclear Physics Conf. R. L. Becker e. a., eds., N. Y., Academic Press, 1967, p. 437.
175. Ericson M., Figureau A., Molinari A. — «Nucl. Phys.», 1969, v. 10B, p. 501.
176. Faessler A., Greiner W. — «Z. Phys.», 1962, Bd 168, S. 425.
177. Faessler A., Greiner W. — «Z. Phys.», 1963, Bd 177, S. 190.
178. Feenberg E. — «Phys. Rev.», 1941, v. 59, p. 149.
179. Feinberg G., Weinberg S. — «Phys. Rev.», 1961, v. 123, p. 1439.
180. Feinberg G., Lederman L. M. — «Ann. Rev. Nucl. Sci.», 1963, v. 13, p. 431.
181. Fermi E. — «Z. Phys.», 1930, Bd 82, S. 729.
182. Fermi E., Segrè E. — «Z. Phys.», 1933, Bd 82, S. 729.
183. Fermi E., Teller E. — «Phys. Rev.», 1947, v. 72, p. 399.
184. Fermi E. Nuclear Physics (compiled by J. Orear, A. H. Rosenfeld and R. A. Schluter), Chicago, Univ. of Chicago Press, 1950, p. 56.
185. Ferrel R., Chaos F. — «Phys. Rev.», 1957, v. 107, p. 1322.
186. Ferrel R. A. — «Phys. Rev. Lett.», 1960, v. 4, p. 425.
187. Ferrel R. A., Lee Y. C., Pal M. K. — «Phys. Rev.», 1960, v. 118, p. 317.
188. Fetkovich J. G., Fields T. H., McIlwain R. L. — «Phys. Rev.», 1960, v. 118, p. 319.
189. Fetkovich J. G., Pewitt E. H. — «Phys. Rev. Lett.», 1963, v. 11, p. 290.
190. Fields T. H. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1960, v. 5, p. 69.
191. Fitch V. L., Rainwater J. — «Phys. Rev.», 1953, v. 92, p. 789.
192. Flüge S., Schröder U. — «Z. Phys.», 1961, Bd 126, S. 28.
193. Ford K. W., Mullin C. J. — «Phys. Rev.», 1957, v. 108, p. 477.
194. Ford K. W., Hill D. L. — «Phys. Rev.», 1954, v. 94, p. 1630.
195. Ford K. W., Wills J. G. Los Alamos Sci. Laboratory Report, 1960, LAMS 2387.
196. Ford K. W., Hughes V. W., Wills J. G. — «Phys. Rev. Lett.», 1961, v. 7, p. 134.
197. Ford K. W., Wills J. G. — «Nucl. Phys.», 1962, v. 35, p. 295.
198. Ford K. W., Hughes V. W., Wills J. G. — «Phys. Rev.», 1963, v. 129, p. 194.
199. Ford K. W., Wills J. G. — «Phys. Rev.», 1969, v. 185, p. 1429.
200. Frank F. G. — «Nature», 1947, v. 160, p. 525.
201. Freed N., Kisslinger L. S. — «Nucl. Phys.», 1961, v. 25, p. 611.
202. Fricke B. — «Arkiv Physik», 1969, Bd 218, S. 495.
203. Fricke B. — «Lett. Nuovo cimento», 1969, v. 2, p. 859.
204. Friedman J. I., Telegdi V. L. — «Phys. Rev.», 1957, v. 106, p. 1290.
205. Fröman A., Kinsey J. L. — «Phys. Rev.», 1961, v. 123, p. 2077.
206. Frosch R. F. e. a. — «Phys. Rev.», 1968, v. 174, p. 1380.
207. Frost A. A., Inokuti M., Lowe J. P. — «J. Chem. Phys.», 1964, v. 41, p. 482.
208. Fry W. F. e. a. — «Phys. Rev.», 1957, v. 107, p. 257.
209. Frye G. — «Phys. Rev.», 1959, v. 113, p. 688.
210. Fulcher L. P., Eisenberg J. M., Le Tourneux J. — «Canad. J. Phys.», 1967, v. 45, p. 313.
211. Gal A., Grodzins L., Hüfner J. — «Phys. Rev. Lett.», 1968, v. 21, p. 450.
212. Garwin R. L. e. a. — «Phys. Rev.», 1960, v. 118, p. 271.
213. Gillet V., Green A. M., Sanderson E. A. — «Nucl. Phys.», 1966, v. 88, p. 321.
214. Glasstone S., Laidler K. J., Eyring H. The Theory of Rate Processes, N. V., McGraw Hill, 1941.
215. Glauber R., Rarita W., Schwed P. — «Phys. Rev.», 1960, v. 120, p. 609.
216. Gorodetsky S. e. a. — «Phys. Lett.», 1962, v. 2, p. 133.
217. Greenless G. W., Pyle G. J., Tang Y. C. — «Phys. Rev.», 1968, v. 171, p. 115.
218. Greiner W. — «Z. Phys.», 1961, Bd 164, S. 374.
219. Greiner W., Marschall H. — «Z. Phys.», 1961, Bd 165, S. 171.

220. Grin G. A., Kunselman R. Univ. of California Radiation Laboratory Report, 1969, UCRL-18499.
221. Grin G. A., Kunselman R. — «Phys. Lett.», 1970, v. 31B, p. 116.
222. Gurevich I. I. e. a. — «Phys. Lett.», 1969, v. 29B, p. 387.
223. Hahn B., Ravenhall D. G., Hofstadter R. — «Phys. Rev.», 1956, v. 101, p. 1131.
224. Halpern A. M. — «Phys. Rev. Lett.», 1964, v. 13, p. 660.
225. Halpern A. M. — «Phys. Rev.», 1968, v. 174, p. 62.
226. Hardwick T. J. — «J. Phys. Chem.», 1962, v. 66, p. 117.
227. Harris R. J. Jr. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1968, v. 20, p. 505.
228. Hayashi C. e. a. — «Progr. Theoret. Phys. (Kyoto)», 1957, v. 17, p. 615.
229. Henley E. M., Wilets L. — «Phys. Rev. Lett.», 1968, v. 20, p. 1389.
230. Herman R., Hofstadter R. High-Energy Electron Scattering Tables, Stanford, Stanford Univ. Press, 1960.
231. Hill D. L., Ford K. W. — «Phys. Rev.», 1954, v. 94, p. 1617.
232. Hitlin D. e. a. — «Phys. Rev.», 1970, v. C1, p. 1184.
233. Hofstadter R. — «Ann. Rev. Nucl. Sci.», 1957, v. 7, p. 231.
234. Hofstadter R. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1965, v. 15, p. 758.
235. Huber M. G. — «Phys. Lett.», 1964, v. 13, p. 242.
236. Hüfner J. — «Nucl. Phys.», 1964, v. 60, p. 427.
237. Hughes V. W. — «Phys. Rev.», 1957, v. 109, p. 1106.
238. Hughes V. W., Telegdi V. L. — «Bull. Amer. Phys. Soc.», 1958, v. 3, p. 229.
239. Hughes V. W. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1960, v. 5, p. 63.
240. Hughes V. W. e. a. In: Proc. Williamsburg Conf. on Intermediate Energy Physics. H. O. Funsten, ed. V. 1. Williamsburg, College of William and Mary, 1966, p. 377.
241. Hughes V. W. — «Ann. Rev. Nucl. Sci.», 1966, v. 16, p. 445.
242. Huizenga J. R., Gindler J. E., Duffield R. — «Phys. Rev.», 1954, v. 95, p. 1009.
243. Hutchinson D. P. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1961, v. 7, p. 129.
244. Ignatenko A. E. — «Nucl. Phys.», 1961 v. 23, p. 75.
245. Jackson J. D. — «Phys. Rev.», 1957, v. 106, p. 330.
246. Jacobsohn B. A. — «Phys. Rev.», 1954, v. 96, p. 1637.
247. Jenkins D. A., Crowe K. M. — «Phys. Rev. Lett.», 1966, v. 16, p. 637.
248. Jenkins D. A. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1966, v. 17, p. 1.
249. Jenkins D. A., Kunselman R. — «Phys. Rev. Lett.», 1966, v. 17, p. 1148.
250. Jenkins D. A., Powers R. J., Miller G. H. — «Phys. Rev.», 1969, v. 185, p. 1508.
251. Joachain C. — «Nucl. Phys.», 1961, v. 25, p. 317.
252. Johnson J. A. e. a. — «Phys. Lett.», 1969, v. 29B, p. 420.
253. Johnson J., Sorensen R. A. — «Phys. Rev.», 1970, v. C2, p. 102.
254. Johnson M. H., Teller E. — «Phys. Rev.», 1954, v. 93, p. 357.
255. Jones P. B. — «Philos. Mag.», 1958, v. 3, p. 33.
256. Kabir P. K. — «Phys. Lett.», 1965, v. 14, p. 257.
257. Kabir P. K. — «Z. Phys.», 1966, Bd 191, S. 447.
258. Kienle P., Kalvins G. M., Ruby S. L. In: Hyperfine Structure and Nuclear Radiations. E. Matthias and D. A. Shirley, eds. Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1968, p. 971.
259. Kienle P. e. a. — «J. Phys. Soc. Japan», 1968, v. 24, p. 207.
260. Kessler D. In: Proc. Intern. Conf. on Electromagnetic Sizes of Nuclei. D. J. Brown e. a., eds. Ottawa, Carleton Univ. Press., 1967, p. 3.
261. Kessler D. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 18, p. 1179.
262. Kim Y. K. — «Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 19, p. 1074.
263. Kim Y. N. — «Phys. Lett.», 1962, v. 3, p. 33.
264. Kim Y. N. — «Phys. Rev. Lett.», 1968, v. 20, p. 359.
265. Kim Y. N. — «Nuovo cimento», 1968, v. 55B, p. 286.
266. Kisslinger L. — «Phys. Rev.», 1955, v. 98, p. 761.
267. Kisslinger L. S., Sorensen R. A. — «Rev. Mod. Phys.», 1963, v. 35, p. 853.



268. Knop R., Burnstein R. A., Snow G. A. — «Phys. Rev. Lett.», 1965, v. 14, p. 767.
269. Koch H. e. a. — «Phys. Lett.», 1968, v. 28B, p. 279.
270. Koch H. e. a. — «Phys. Lett.», 1969, v. 29B, p. 140.
271. Kolos W., Roothaan C. C. J., Sack R. — «Rev. Mod. Phys.», 1960, v. 32, p. 178.
272. Kopfermann H. Nuclear Moments. N. Y. Academic Press, 1958 (Конферман Г. Ядерные моменты. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1960).
273. Koslov S., Fitch V. L., Rainwater J. — «Phys. Rev.» 1954, v. 95, p. 291.
274. Kossanyi-Demany P., Lombard R., Bishop G. R. — «Nucl. Phys.», 1965, v. 62, p. 615.
275. Krall N. A., Gerjuoy E. — «Phys. Rev. Lett.», 1959, v. 3, p. 142.
276. Krell M., Ericson T. E. O. — «J. Comp. Phys.», 1968, v. 3, p. 202.
277. Krell M., Ericson T. E. O. — «Nucl. Phys.», 1969, v. 11B, p. 521.
278. Kunselman R., Grin G. A. — «Phys. Rev. Lett.», 1970, v. 24, p. 838.
279. Kuo T. T. S., Brown G. E. — «Nucl. Phys.», 1966, v. 85, p. 40.
280. Kuo T. T. S. — «Bull. Amer. Phys. Soc.», 1967, v. 12, p. 538.
281. Lacoste F., Bishop G. R. — «Nucl. Phys.», 1961, v. 26, p. 511.
282. Lakin W., Kohn W. — «Phys. Rev.», 1954, v. 94, p. 787.
283. Lane A. M. — «Phys. Rev. Lett.», 1962, v. 8, p. 171.
284. Lathrop J. F. e. a. — «Nuovo cimento», 1960, v. 15, p. 831.
285. Lathrop J. F. e. a. — «Nuovo cimento», 1960, v. 17, p. 109.
286. Lathrop J. F. e. a. — «Nuovo cimento», 1960, v. 17, p. 114.
287. Lathrop J. F. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1961, v. 7, p. 147.
288. LeBellac M. — «Nucl. Phys.», 1963, v. 40, p. 645.
289. Lee W. Y. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 23, p. 648.
290. Leon M., Bethe H. A. — «Phys. Rev.», 1962, v. 127, p. 676.
291. Lombard R., Kossanyi-Demany P., Bishop G. R. — «Nucl. Phys.», 1964, v. 59, p. 398.
292. Lovelace C. CERN, 1968, Preprint Th. 837.
293. Macagno E. R. e. a. — «Phys. Rev.», 1970, v. C1, p. 1202.
294. McKee R. J. — «Phys. Rev.», 1969, v. 180, p. 1139.
295. Mann R. A., Rose M. E. — «Phys. Rev.», 1961, v. 121, p. 293.
296. Margenau H., Murphy G. M. Mathematics of Physics and Chemistry. 2nd ed. N. Y. D. Van Nostrand Co., 1956.
297. Marschall H., Schmidt T. — «Z. Phys.», 1957, Bd 150, S. 293.
298. Marshak R. E. Meson Physics. N. Y. McGraw Hill Co., 1952, p. 174.
299. Martin A. D. — «Nuovo cimento», 1963, v. 27, p. 1359.
300. Melville H. W., Robb J. C. — «Proc. Roy. Soc. (Lond.)», 1950, v. A202 p. 181.
301. Michael D. N. — «Phys. Rev.», 1967, v. 158, p. 1343.
302. Mickelwait A. B., Corben H. C. — «Phys. Rev.», 1954, v. 96, p. 1145.
303. Mobley R. M. e. a. — «J. Chem. Phys.», 1966, v. 44, p. 4354.
304. Morgan D. L., Hughes V. W. — «Bull. Amer. Phys. Soc.», 1968, v. 13, p. 635.
305. Narumi H., Matsuo S. — «Progr. Theor. Phys. (Kyoto)», 1961, v. 26, p. 221.
306. Nigam B. P. — «Phys. Rev.», 1965, v. 140B, p. 1693.
307. Nordin P. Jr. — «Phys. Rev.», 1961, v. 123, p. 2168.
308. Nosov V. G., Yakovleva I. V. — «Nucl. Phys.», 1965, v. 68, p. 609.
309. Orear J., Harris G., Bierman E. — «Phys. Rev.», 1957, v. 107, p. 332.
310. Panofsky W., Aamodt R. L., Hadley J. — «Phys. Rev.», 1951, v. 81, p. 565.
311. Particle Data Group. Rev. Mod. Phys., 1973, v. 45, p. 16, 17.
312. Patterson M. R., Becker R. L. Oak Ridge National Laboratory Report ORNL TM-1850, 1967.
313. Pauli W., Peierls R. — «Z. Phys.», 1931, Bd 32, S. 670.
314. Pauling L. The Nature of Chemical Bond. Ithaca Cornell Univ Press, 1960. (Паулинг Л. Природа химической связи. Пер. с англ. М., Госхимиздат, 1947.)
315. Pearson J. M. — «Nucl. Phys.», 1963, v. 45, p. 401.
316. Perey F. G., Schiffer J. P. — «Phys. Rev. Lett.», 1966, v. 17, p. 324.

317. Petermann A., Yamaguchi Y. — «Phys. Rev. Lett.», 1959, v. 2, p. 359.
318. Pieper W., Greiner W. — «Phys. Lett.», 1967, v. 24B, p. 377.
319. Placci A. e. a. — «Nuovo cimento», 1967, v. 52A, p. 1274.
320. Placci A. e. a. — «Nuovo cimento», 1969, v. 64A, p. 1053.
321. Poelz G. e. a. — «Phys. Lett.», 1968, v. 26B, p. 331.
322. Ponomarev L. I., Prokoshkin Yu. D. — «Comments on Nuclear and Particle Physics», 1968, v. 2, p. 176.
323. Prepost R. e. a. — «Bull. Amer. Phys. Soc.», 1960, v. 5, p. 75.
324. Preston M. A. Physics of the Nucleus. Palo—Alto — Lond. Addison-Wesley Publ. Co. (Престон М. А. Физика ядра. Пер. с англ. М., «Мир», 1964.)
325. Quaranta A. A. e. a. — «Nuovo cimento», 1967, v. 47, p. 92.
326. Quaranta A. A. e. a. — «Phys. Rev.», 1969, v. 177, p. 2119.
327. Quitmann D. e. a. — «Nucl. Phys.», 1964, v. 51, p. 609.
328. Quitmann D. — «Z. Phys.», 1967, Bd 206, S. 113.
329. Raboy S. e. a. — «Nucl. Phys.», 1965, v. 73, p. 353.
330. Ralston A. R., Wilf H. S. Mathematical Methods for Digital Computers N. Y. J. Wiley and Sons, 1960.
331. Rook J. R. — «Nucl. Phys.», 1962, v. 39, p. 479.
332. Rook J. R. — «Nucl. Phys.», 1963, v. 43, p. 363.
333. Rose C. M. — «Phys. Rev.», 1967, v. 154, p. 1305.
334. Rosen L. — «Physics Today», 1966, v. 19, N 12, p. 21.
335. Ruderman M. A. — «Phys. Rev.», 1960, v. 118, p. 1632.
336. Russell J. E. — «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 23, p. 63.
337. Russell J. E., Shaw G. L. — «Phys. Rev. Lett.», 1960, v. 4, p. 369.
338. Samaranyake V. K., Woolcock W. S. — «Phys. Rev. Lett.», 1965, v. 15, p. 936.
339. Scheck F. — «Z. Phys.», 1963, Bd 172, S. 239.
340. Scherr C. W., Machacek M. — «Phys. Rev.», 1965, v. 138A, p. 371.
341. Schiff L. I. Quantum Mechanics. 3rd ed. N. Y. McGraw Hill Co., 1968, Ch. 13.
342. Schiff M. — «Nuovo cimento», 1961, v. 22, p. 66.
343. Schiffer J. P. Paper presented at Conf. on Isobaric Spin, Asilomar, 1969.
344. Schmitt H. — «Phys. Lett.», 1968, v. 27B, p. 530.
345. Schwinger J. — «Phys. Rev.», 1949, v. 75, p. 651.
346. Seki R., Cromer A. H. — «Phys. Rev.», 1967, v. 156, p. 93.
347. Sens J. C. — «Phys. Rev.», 1957, v. 107, p. 1465.
348. Sens J. C. — «Nuovo cimento», 1958, v. 7, p. 536.
349. Sens J. C. In: High-Energy Physics and Nuclear Structure. G. Alexander ed., Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1967, p. 93.
350. Seyler R. G., Blanchard C. H. — «Phys. Rev.», 1963, v. 131, p. 355.
351. Shafer R. E. — «Phys. Rev.», 1967, v. 163, p. 1451.
352. Shapiro G., Lederman L. M. — «Phys. Rev.», 1962, v. 125, p. 1022.
353. Shimizu M., Mizuno Y., Izuyama T. — «Progr. Theoret. Phys. (Kyoto)», 1958, v. 20, p. 777.
354. Shmushkevich I. M. — «Nucl. Phys.», 1959, v. 11, p. 419.
355. Skyrme T. H. — «Philos. Mag.», 1957, v. 2, p. 910.
356. Stacey D. N. — «Proc. Roy. Soc. (Lond.)», 1964, v. 280A, p. 459.
357. Stearns M. B. — «Progr. Nucl. Phys.», 1957, v. 6, p. 108.
358. Stearns M., Stearns M. B. — «Phys. Rev.», 1957, v. 105, p. 1573.
359. Stearns M. B., Stearns M. — «Phys. Rev.», 1957, v. 107, p. 1709.
360. Sterheim M. M. — «Phys. Rev.», 1965, v. 138B, p. 430.
361. Sundaresan M. K., Srinivasan V. — «Phys. Rev. Lett.», 1968, v. 21, p. 1509.
362. Suzuki A. — «Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 19, p. 1005.
363. Suzuki M. N. Ph. D. thesis Carnegie-Mellon Univ., 1968.
364. Swanson R. A. — «Phys. Rev.», 1958, v. 112, p. 580.
365. Tauscher L. e. a. — «Phys. Lett.», 1968, v. 27A, p. 581.
366. Telegdi V. L. In: Atomic Physics. Bederson e. a., ed. N. Y., Plenum Press 1969, p. 551.
367. Temmer G. M. — «Rev. Mod. Phys.», 1958, v. 30, p. 498.
368. Thompson A. C. Ph. D. thesis. Carnegie-Mellon Univ., 1969.

369. Thompson P. A. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 22, p. 163.
370. Überall H. — «Phys. Rev.», 1959, v. 114, p. 1640.
371. Uretsky J. L. — «Phys. Rev.», 1966, v. 147, p. 906.
372. Van Oostrum K. J. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1966, v. 16, p. 528.
373. Von Hippel F., Douglas J. H. — «Phys. Rev.», 1966, v. 146, p. 1042.
374. Watson K. M. — «Phys. Rev.», 1953, v. 89, p. 575.
375. Wentzel G. — «Phys. Rev.», 1949, v. 75, p. 1810.
376. Wessel W. R., Phillipson P. — «Phys. Rev. Lett.», 1964, v. 13, p. 23.
377. West D. — «Repts Progr. Phys.», 1958, v. 21, p. 271.
378. Wetmore R. J. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 19, p. 1003.
379. Wheeler J. A. — «Phys. Rev.», 1947, v. 71, p. 320.
380. Wheeler J. A. — «Rev. Mod. Phys.», 1949, v. 21, p. 133.
381. Wheeler J. A. — «Phys. Rev.», 1953, v. 92, p. 812.
382. Wichmann E. H., Kroll N. M. — «Phys. Rev.», 1956, v. 101, p. 843.
383. Wiegand C. E., Mack D. A. — «Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 18, p. 685.
384. Wiegand C. E. — «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 22, p. 1235.
385. Wiegand C. E., Kunselman R. In: Proc. Intern. Conf. on Hypernuclear Physics, Argonne, 1969 (unpubl.). Preprint UCRL — 18891.
386. Wightman A. S. — «Phys. Rev.», 1950, v. 77, p. 521.
387. Wilets L., Hill D. L., Ford K. W. — «Phys. Rev.», 1953, v. 91, p. 1488.
388. Wilets L. — «Kgl. danske vid. selskab. Mat.-fys. medd.», 1954, Bd 29, N 1.
389. Wilets L. — «Phys. Rev.», 1956, v. 101, p. 1805.
390. Wilets L. In: Encyclopedia of Physics. S. Flüge, ed. V. 40. Berlin, Springer Verlag, 1958, p. 96.
391. Wilkinson D. H. — «Philos. Mag.», 1959, v. 4, p. 215.
392. Wilkinson D. H. In: Proc. Intern. Conf. on Nuclear Structure. D. A. Bromley e. a., eds. Amsterdam, Univ. of Toronto Press and North-Holland Publ. Co., 1960, p. 20.
393. Wilkinson D. H. In: Proc. Rutherford Jubilee Internat. Conf. J. B. Birks, ed. N. Y. Academic Press, 1961, p. 339.
394. Wilkinson D. H. — «Comments on Nuclear and Particle Physics», 1967, v. 1, p. 112.
395. Wu G. S. In: Proc. Internat. Nuclear Physics Conf. R. L. Becker e. a., eds. N. Y. Academic Press, 1967, p. 409.
396. Wu T. Y., Rosenberg R. L., Sandstrom H. — «Nucl. «Phys.», 1960, v. 16, p. 432.
397. Veboah-Amankwah D., Grodzins L., Frankel R. B. — «Phys. Rev. Lett.», 1968, v. 18, p. 791.
398. Zaretsky D. F. Proc. 2nd United Nations Intern. Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy. V. 15, Geneva, 1958, p. 175. Труды 2-й Междуна- р. конф. по мирному использованию атомной энергии. Доклады со- ветских ученых. Т. 1. Доклад № 2227. М., Атомиздат, 1959, с. 462).
399. Zaretski D. F., Novikov V. M. — «Nucl. Phys.», 1961, v. 28, p. 177.
400. Zichichi A. Annual Report, CERN, 1964, p. 59.
401. Ziock K. e. a. — «Phys. Rev. Lett.», 1962, v. 8, p. 103.
402. Zwanziger D. — «Phys. Rev.», 1966, v. 151, p. 1337.
- 402a\*. Blomqvist J. — «Nucl. Phys.», 1972, v. B48, p. 95.
- 402b\*. Daniel H. — «Lett., Nuovo cimento», 1973, v. 7, p. 375.
- 402c\*. Favart D. e. a. Preprint Univ. of Lovain, 1970.
403. Али-Заде С. А., Гуревич И. И., Никольский Б. А. — «Журн. экс- перим. и теор. физ.», 1961, т. 40, с. 452.
404. Ансельм А. А., Шехтер В. М. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1962, т. 43, с. 958.
405. Афанасьев Н. Г. и др. — «Ядерная физика», 1967, т. 5, с. 318.
406. Бабаев А. И. и др. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1966, т. 50, с. 887.
407. Балац М. Я. и др. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1960, т. 39, с. 1168.
408. Басиладзе С. С., Ермолов П. Ф., Оганесян К. О. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1965, т. 49, с. 1042.
409. Беловицкий Г. Е. и др. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1960, т. 38, с. 404.

410. Беловицкий Г. Е. — «Журн. эксперим. и теор. физ.» 1961, т. 41, с. 66.
411. Беляев В. Б. и др. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1959, т. 37, с. 1652.
412. Бобров В. Д. и др. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1965, т. 48, с. 1197.
413. Бродский А. М. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1963, т. 44, с. 1612.
414. Будяшов Ю. Г. и др. — «Ядерная физика», 1967, т. 5, с. 599.
415. Будяшов Ю. Г. и др. — «Ядерная физика», 1967, т. 5, с. 830.
416. Бухвостов А. П., Шмушкевич И. М. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1961, т. 41, с. 1895.
417. Бухвостов А. П. — «Ядерная физика», 1966, т. 4, с. 83.
418. Вайсенберг А. О., Рабин Н. В., Смирнитский В. А. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1959, т. 36, с. 1680.
419. Весман Э. А. — «Письма ЖЭТФ», 1967, т. 5, с. 113.
420. Герштейн С. С. — «Докл. АН СССР», 1957, т. 117, с. 956.
421. Герштейн С. С. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1958, т. 34, с. 993.
422. Герштейн С. С. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1962, т. 43, с. 706.
423. Герштейн С. С., Понтекорво Б. М. — «Ядерная физика», 1965, т. 2, с. 257.
424. Гольдман И. И. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1958, т. 34, с. 1017.
425. Джелепов В. П. и др. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1962, т. 42, с. 439.
426. Джелепов В. П. и др. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1964, т. 46, с. 2042.
427. Джелепов В. П. и др. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1964, т. 47, с. 1243.
428. Джелепов В. П. и др. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1966, т. 50, с. 1235.
429. Джрбашян В. А. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1959, т. 36, с. 277.
430. Займидорога А. О. и др. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1963, т. 44, с. 1852.
431. Займидорога А. О. и др. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1967, т. 52, с. 97.
432. Зарецкий Д. Ф., Новиков В. М. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1961, т. 40, с. 982.
433. Зельдович Я. Б. — «Докл. АН СССР», 1954, т. 95, с. 493.
434. Зельдович Я. Б. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1957, т. 33, с. 310.
435. Зельдович Я. Б., Герштейн С. С. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1958, т. 35, с. 649.
436. Зельдович Я. Б., Герштейн С. С. — «Успехи физ. наук», 1960, т. 71, с. 581.
437. Зинов В. Г., Конин А. Д., Мухин А. И. — «Ядерная физика», 1965, т. 2, с. 859.
438. Зинов В. Г. и др. — «Ядерная физика», 1967, т. 5, с. 591.
439. Игнатенко А. Е. и др. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1958, т. 35, с. 894.
440. Игнатенко А. Е. и др. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1958, т. 35, с. 1131.
441. Иваненко Д. Д., Пустовалов Г. Е. — «Успехи физ. наук», 1957, т. 61, с. 27.
442. Носов В. Г., Яковлева И. В. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1962, т. 43, с. 1750.
443. Пономарев Л. И. — «Ядерная физика», 1965, т. 2, с. 223.
444. Пустовалов Г. Е. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1957, т. 32, с. 1519.
445. Пустовалов Г. Е. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1959, т. 36, с. 1086.
446. Сахаров А. Д. Отчет ФИАН, 1948.
447. Фирсов В. Г., Бяков В. М. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1964, т. 47, с. 1074.
448. Фирсов В. Г. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1965, т. 48, с. 1179.
- 449\*. Пономарев Л. И., Пузынин И. В., Пузынина Т. П. Препринт ОИЯИ, Р4-6919, Дубна, 1973.

- 450\*. Матвеев А. В., Пономарев Л. И. — «Журн. эксперим. и теор. физ.» 1970, т. 58, с. 1640.
- 451\*. Быстрицкий В. М. и др. Препринт ОИЯИ, Р1-7342, Дубна, 1973.
- 452\*. Евсеев В. С. Препринт ОИЯИ, Р14-4052, Дубна, 1968.
- 453\*. Джураев А. А. и др. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1972, т. 62, с. 2210.
- 454\*. Джураев А. А., Евсеев В. С. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1972, т. 62, с. 1167.
- 455\*. Джураев А. А. и др. Препринт ОИЯИ, Р14-7213, Дубна, 1973.
- 456\*. Бабаев А. И. и др. — «Ядерная физика», 1969, т. 10, с. 964.

## АЛФАВИТНО-ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адиабатическое приближение 174, 177  
 Анализ по оптической модели 149  
 Аналоговые состояния 103  
 Антимюоний 192  
 Антипротонный атом 166, 167, 169—171  
 Атом  $\Sigma$ -гиперонный 166, 167  
 Атомная модель Томпсона 22  
 — концентрация 9  
 Атомный захват мюонов 9  
 — —, относительная вероятность 9, 10  
 — — пионов 9, 150  
 — —, химические эффекты в мюонных атомах 9—12  
 — — — в пионных атомах 12—14  
 Барьер деления 118  
 — кулоновский 179—181  
 — центробежный 165  
 Бета-распад 126, 193  
 Борновское приближение 182  
 Боровская орбита 9, 132, 176, 194  
 Боровский радиус 20, 57, 99, 155  
 Вариационный метод 174, 201  
 Величина ( $g - 2$ ) 126  
 Вероятность захвата 160  
 Взаимодействие  $E2$  2, 45  
 — высшей мультипольности 83, 84  
 — дельта-образное 62, 63, 65  
 — динамическое квадрупольное 61, 81  
 — дипольное 121  
 — каон-ядерное 155, 160, 163  
 — квадрупольное 45, 71, 72, 78, 80, 83, 89  
 — комплексное 142, 200  
 — кулоновское 141, 185  
 — локальное 145, 146  
 — мезон-нуклонное 9, 128  
 — нелокальное 147, 148  
 — пион-ядерное 128—132, 137, 140—142, 149, 160, 162, 196—199  
 — слабое четырехфермионное 193  
 — спин-орбитальное 121  
 Вибрационное возбуждение 96  
 Виртуальное возбуждение 90  
 Виртуальный позитрон 26  
 — уровень 176  
 — электрон 26  
 Внутренняя конверсия 177, 178, 181—184  
 Возбуждение вибрационное 96  
 — вращательных уровней 88, 89  
 — кулоновское 88, 89, 90, 94  
 Возбужденные уровни ядер 74, 96  
 Волновые функции 21—24, 201  
 — — БКШ 64  
 — — двухкомпонентные 19  
 — — Дирака 19, 29, 57, 61, 78, 100  
 — —, искажение 142  
 — — каона 163  
 — — Клейна—Гордона, см. уравнение Клейна—Гордона  
 — — коллективной модели 71  
 — — модели конфигурационного смешивания 63  
 — — — «спаривание + квадрупольное взаимодействие» 65  
 — — мюона 72, 78, 96, 99, 182, 183  
 — — мюонного атома 79, 194  
 — — одночастичные 62, 103, 165  
 — —, приближенные формулы 21—24  
 — — пиона 128, 131, 137, 140, 141  
 — — пион-ядерные 196  
 — — радиальные 72, 73, 91  
 — —  $s$ -волновые 57  
 — — ядерные 61, 71, 182—184  
 Вращательное возбужденное состояние 74  
 Временное распределение  $\gamma$ -квантов 179

— — деления 119, 120  
 — — позитронов 186  
 Время жизни возбужденного состояния 89  
 — — мезона 9  
 — — мюона 89, 118, 181, 183  
 — замедления  $K^-$ -мезонов 154  
 — —  $\pi^-$ -мезонов 149, 150  
 — каскада антипротонного атома 166  
 — — каона 154, 166  
 — — пиона 150, 166  
 Вторичный мюон 14, 16, 172, 173  
 Гамильтониан квадрупольного взаимодействия 78  
 — мюона 31, 71, 114  
 — мюонного атома 114  
 — полный 31, 71, 80  
 — ядра 31, 71, 114  
 Гамма-излучение 61, 89, 112, 114, 116—118  
 —, магнитная сверхтонкая структура 61  
 — при синтезе 178  
 Гиперонные атомы 153, 166—168  
 Гиперядра 126  
 Гироманнитное отношение, см. также  $g$ -фактор  
 — — нуклона орбитальное и спинное 61  
 — —, поправки 45  
 — — фонона 69  
 — — электрона и мюона 187  
 $g$ -фактор мюона 46, 126  
 — полный ядерный 57  
 — электрона 188  
 Двухнуклонные обменные члены 33  
 Де-Бройлевская длина волны 183  
 Деление  
 —, барьер 118  
 —, вероятность 119, 120  
 —, запаздывающее 127  
 —, канал 118  
 — наведенное мюонами 119, 120  
 — наведенное пионами 121  
 —, порог 119  
 Дельта-взаимодействие 62, 63, 65, 69  
 Деполаризация мюона сверхтонким взаимодействием 123  
 — — спин-орбитальным взаимодействием 121—123  
 Детектор Ge (Li) 5, 56, 105, 107, 137, 155, 156  
 — NaI (кристалл) 5, 84, 105  
 — NaI (Ti) 107  
 — кремниевый поверхностно-барьерный 121  
 — твердотельный Ge и Si 133

Деформация внутренняя 100  
 — среднеквадратическая 107  
 — статическая 119  
 Деформированный эллипсоид 94, 118  
 Деформированные четно-четные ядра 88, 116  
 Диаграмма Врикса—Копфермана 106  
 Диаграмма  $ct$  48  
 Динамический  $E2$ -эффект 5, 71, 74, 96  
 Динамическое  $E2$ -взаимодействие 45, 61, 81  
 Диод германий-литиевый 40  
 Дипольный матричный элемент 194  
 Дипольный слой 142  
 Доплеровский сдвиг 103  
 Единица Вайскопфа 35—37  
 Естественная ширина линии 63, 135—139  
 Задача трех тел 184  
 Закон сохранения лептонного числа 192  
 Захват мюона 9, 16, 89, 117, 127  
 Зеemanовская частота 189  
 Зернистость ядерного вещества 141  
 Изомерный сдвиг 6, 112—117  
 — — мюонный 114, 117  
 Изотонный сдвиг 110—112  
 — — мюонный 111  
 Изотопический сдвиг 6, 97—110, 115  
 — —, измерение 105—110  
 — — мюонных атомов 103—105  
 — — оптический 103, 105, 107  
 — —, полевой эффект 110  
 — — стандартный 99, 109, 110  
 — —, эффект деформированного объема 100  
 — —, эффект объема 98, 99  
 — —, эффект массы 97, 98  
 — —, эффект приведенный массы 109  
 — —, Ag 107  
 — —, Ca 105, 108, 109  
 — —, Cr 107, 108, 109  
 — —, Cu 107, 108, 109  
 — —, Eu 107, 115  
 — —, Fe 107, 108  
 — —, Gd 107  
 — —, K 107, 108  
 — —, Mo 108, 109  
 — —, Nd 108, 109, 110  
 — —, Ni 107, 108  
 — —, O 107  
 — —, Pb 108  
 — —, Si 107, 108  
 — —, Sn 106, 107, 108, 109  
 — —, Sr 107  
 — —, W 108  
 — —, Zr 107

Импульсное приближение 131, 196  
Интенсивность абсолютная 18  
— линии 80, 82, 83, 153, 157  
— относительная 83, 90  
— пионного рентгеновского излучения 137

Каонное рентгеновское излучение 153—160, 169, 170  
— — — и периферия ядра 160—165  
— — — в  $\text{He}^4$  153—155  
— — — легких элементов 155—156  
— — — средних и тяжелых элементов 156—160  
Катализ реакции синтеза мюонами 173, 174, 177—182, 183  
Квадрупольная сверхтонкая структура 45  
Квадрупольное распределение для  $\text{U}^{77}$   
— — на поверхности ядра 60, 72  
Квадрупольное сверхтонкое расщепление мюонных атомов 58—61, 71—74  
Квадрупольный момент (см. также момент) 72—74, 77, 139  
— —,  $\text{Bi}$  60  
— — внутренний 72, 73, 78, 85, 89, 94  
— — возбужденных состояний 89  
— —, спектроскопический 60, 73  
— — статический 45  
— — электрический 46, 56, 58—61  
Квазичастица 63, 65  
Кислинжера потенциал 130—132, 196, 199  
Клейна—Гордона уравнение 19—21, 129, 140, 153, 155, 156, 158, 197, 200  
Колебательный спектр 192  
— уровень 176, 177  
Коллективная модель 71  
Коллективные вращательные состояния 78  
— частично-дырочные состояния 34  
Конверсия мюоний-антимюоний 192, 193  
Конечные размеры ядра 20, 21, 69, 99, 125, 129, 143, 155, 158, 170, 182  
Константа связи 193  
Концентрация примеси 14, 172—174, 178  
Корреляционная двухчастичная плотность 32  
Корреляционный параметр 141  
Крелла—Эриксона метод 200, 201  
Кулоновская поправка 139  
Кулоновская энергия 102, 200  
Кулоновский барьер 179—181  
— потенциал 20, 114, 116, 125, 129  
— эффект 110

Кулоновское взаимодействие 141  
— возбуждение 88, 89, 94, 96, 107, 116  
— — поле 26, 121, 151, 182

Легкая вода 192  
Линии постоянной плотности заряда 75

Лэмбовский сдвиг 26, 30, 40, см. также собственная энергия

Магический остов 60  
Магнитная дипольная поправка на конечные размеры 58

— — сверхтонкая структура 56, 57, 58, 61

Магнитное сверхтонкое расщепление 45, 61, 116

— — — и ядерные модели 61—69  
Магнитный дипольный момент 45, 46

— — эффект 60

Магнитный момент антипротона 170

— —, ожидаемое значение 63

— —,  $\text{Bi}$  60

— — мюона 45, 57, 124, 186, 188

— — ядра 56, 57, 58, 60

— — гиперона 167

Масса адрона 151

— каона 166

— мюона 124 — 126, 188

— пиона 151, 152, 197

Масштабный фактор 151, 152

Матричный элемент дипольный 194

— —  $\text{E0}$ -перехода 182

— — квадрупольного взаимодействия 78, 90, 91

— — приведенный 90

— — радиальный 76, 78, 81

— — эффективный дипольный 94, 95

— — эффективный квадрупольный 91 — 94

— — ядерного монополярного перехода 96

Мезоатомные единицы 12, 17

Метаабильный ( $\alpha K^- e^-$ )-атом 165, 166

Мёссбауэра эффект 112, 114, 115, 117

Многократное рассеяние 130, 145, 146, 197

Модель БКШ 63

— деформированного ядра 74, 84, 85

— квазичастиц 63

— спаривания 63, 66 — 68

— «спаривание + квадрупольное взаимодействие» 65 — 69

— с проектированием 63, 65

Модельное пространство 35, 88, 90, 91, 94, 95

Момент Шмидта 63

Мюонная сверхтонкая структура 76



Мюонное  $K$ -рождение 126, 127  
— рентгеновское излучение 5, 6, 40, 41, 45, 53, 54, 102, 103, 110, 117, 124, 125, 137, 151

Мюонные молекулы 6, 172 — 184  
— промежуточные состояния 91, 92, 117

Мюонный боровский радиус 57

Недостающее рентгеновское излучение 18

Нейтронная атмосфера 162

Нейтронное распределение 133, 148, 162, 164

Нейтронов избыток 162 — 164

Нейтронный радиус 148 — 149

Новый динамический эффект 96 — 97

Оболочечная модель 62, 65

Оболочечный эффект 112

Образование гиперонных атомов 166  
— мезоатомов 9, 126

— мюниевых молекул 185, 189, 191, 192

— мюония 6, 185, 186

— мюонных атомов 122, 126

— мюонных молекул 14, 172, 176

Одночастичная волновая функция 62, 103

— модель 62, 66 — 69

Одночастичные протонные состояния 39  
— состояния ниже уровня Ферми 33

— — электрон 195

Остаточное взаимодействие 63, 65

— — кулоновское 116

Отношение зарядов 10, 126

Отношение интенсивностей 81, 153, 154, 168

— — аномальное 69, 70

— — мультиплета тонкой структуры 69, 70

— — мюонного рентгеновского излучения 11, 18

— — пионного рентгеновского излучения 12, 13

— — сверхтонкого мультиплета 90, 96

— нейтронной и протонной плотностей 162

Оптический сдвиг, см. изотопический сдвиг

Параболический фактор подавления 55

Парамагнитные молекулы 189

Параметры двухнуклонные 131

— деформации 53, 72, 100, 105, 118

— —  $\beta$  72, 76, 85, 88, 94, 100

— —  $\gamma$  76

— корреляционные 141

— локального взаимодействия 132, 145, 146

— нелокального взаимодействия 132, 147, 148

— радиальные 50, 54 — 56, 85, 102

— разложения 174

— распределения заряда ядра 48, 50, 52 — 56, 90, 133

— эффективного заряда 14

—  $p$ -волновые 133

—  $s$ -волновые 133

Передача мюона 14, 16, 172, 173

Переходы  $E=0$  182

—  $E=1$  80, 81, 90

— безызлучательные 117 — 121

— , вероятность 11, 60, 81, 123, 183, 184, 194 — 196

— каскадные 10, 16 — 18, 150, 153, 160

— оптические 104

— радиационные 9, 17, 18, 88, 150, 153, 163, 165, 169

— , скорость 69, 165, 166, 195, 196

Пионное поле 147, 197

Пионное рентгеновское излучение 12, 131, 132 — 140, 148, 149, 169, 196

— — — , анализ 129 — 132, 140 — 148, 199

— — — рассеяние 128, 129, 130

Пионный аналог дипольного рассеяния 130

Плотность в центре 54

— заряда 42, 54, 74 — 76, 78, 96, 98

— нуклонного распределения 153, 85, 131, 160

— силы диполя 147

— центральная нуклонная 54, 85

Поглощение

— , амплитуда 154

— , интенсивность 148

— , коэффициент 125

— пионов 129, 148, 150

— , сечение 124

— , эффект 131

Полная ширина на полувысоте 136, 155

Поляризация вакуума 5, 6, 21, 25 — 30, 40, 48, 124, 125, 129, 143 — 145, 151, 153, 155, 158, 168

— мюона 121 — 123

Поправка на конечность корреляционной длины 131

— — приведенную массу 44, 125, 158, 188

Постоянная Ридберга 99, 124, 186

— — для мюония 186

— сверхтонкого  $E2$ -взаимодействия 58

Потенциал Вудса — Саксона 39, 103

- $E2$  45
- зависящий от скорости 130, 199
- каон-ядерный 164
- Кислинджера 130, 131, 196, 199
- кулоновский 20, 114, 125, 129
- локальный 130, 140, 146
- мюонной молекулы 174, 175
- нелокальный 130, 140, 147, 196
- оптический 103, 148, 155, 160, 163, 196
- пион-ядерный 128 — 130, 140, 141, 145, 196 — 199
- Хамады — Джонсона 35
- электростатический 71
- ядерный 129
- $\Sigma$ -ядерный 168
- Потенциальные кривые 174, 175
- деления 118
- Процессия мюония 189
- спина мюона 126
- Приближение Борна — Оппенгеймера 174
- полноты 35 — 40
- случайных фаз 34
- Швингера для малых расстояний 29
- Приведенная вероятность перехода 35, 36, 60
- Приведенный матричный элемент 33, 60, 90
- Протоний 14
- Протонное распределение 133, 148, 162, 164
- Протонный радиус 164
- — среднеквадратический 148, 149
- Процедура Хартри — Фока — Слетера 42
- Псевдоизомерный сдвиг 116
- Пузырьковая камера 177
- Равновесный радиус 102**
- Радиальная форма распределения заряда ядра 54 — 56
- Радиальный матричный элемент 76, 81
- параметр 57, 85 — 87, 102
- Радиационная ширина 123, 168
- Радиус боровский 57, 99, 155
- нейтронный 148, 149, 164
- однородного распределения 25, 54
- протонный 164
- прямоугольной ямы 131
- равновесный 102
- среднеквадратический, см. средне-квадратический радиус
- эквивалентный 54, — 56, 72, 84
- Размер ядра 17, 103, 153
- конечный 20, 21, 30, 44, 70, 124, 129, 155, 158
- —, влияние на сверхтонкое расщепление 57

- Распад Мюона 15**
- пиона 185
- Распределение заряда ядра 6, 40, 41, 47, 48, 54, 72, 74, 114, 133, 160**
- — — Бете 55
- — — Бете — Элтона 55
- — — Вудса — Саксона 36, 39
- — — гауссово 78, 133
- — — деформированное 72, 74
- — — из рассеяния электронов 47, 52, 76
- — — квадрупольное 75, 78
- — — конечное 20, 98, 99, 141, 142
- — — модифицированное 75
- — — монополярное 75 — 78
- — — однородное 24, 35, 48, 73, 109, 110, 183, 184
- — — осцилляторное 35, 36
- — —, параметры  $s$  и  $t$  47 — 50, 54
- — —, радиальная форма 40, 54 — 56
- — — сферическое 52, 98
- — — с жестким остовом 76
- — — точечное 98
- — — Ферми 35, 42, 47, 48, 50, 53, 54, 55, 76 — 78, 102, 104, 114, 141
- — —, функциональные формы 55
- — — эллипсоидальное 45, 72, 75, 94
- ядерного вещества 6, 140, 142, 160
- ядерной плотности 160, 164
- Рассеяние**
- , амплитуда 129, 164, 196, 197
- , длина 146, 147, 155, 164
- электронов 6, 47, 50, 52 — 54, 76, 78, 102, 103, 105, 131
- Реалистические нуклон-нуклонные силы 34**
- Реакция синтеза 174, 177 — 179, 183**
- одно-и двухнуклонная 130
- Резонанс  $Y_0^*$  162**
- Резонансное столкновение 177**
- Резонансный сигнал 189, 192**
- уровень 177
- Ротатор 71**
- Сверхтонкая  $E-2$  структура мюонных атомов 57 — 60**
- структура 45, 57, 63, 123, 139, 177, 187
- —, высшие мультиполи 83
- — динамическая квадрупольная 45, 71, 78 — 80
- —, интервал 187 — 199
- — квадрупольная 45
- — магнитная дипольная 6, 45, 61 — 69, 114
- — мюония 187
- — мюонных атомов 56 — 71

— — молекул 177  
 — — , расчеты 57 — 60, 66 — 69  
 — — сферических ядер 60  
 — — , центр инерции системы уровней 98  
 Сверхтонкое расщепление 45, 46, 123, 139, 140, 177  
 — — возбужденных уровней 123  
 Связь  $E1$  70  
 Сдвиг уровня 128, 129, 131, 142 — 145, 155  
 Седловая точка 118  
 Сечение поглощения 124  
 Силы переходов 35  
 Скорость распада мюона 172  
 Состояния в потенциале гармонического осциллятора 39  
 Специфический эффект массы 98, 104, 106, 107  
 Спин-орбитальная связь в мюонных атомах 44, 45  
 Спин-орбитальное взаимодействие 121, 123  
 — — расщепление 45  
 Среднеквадратический импульс нуклонов 131  
 — радиус 45, 50 — 54, 99, 104, 110, 112, 131, 143  
 — — для легких и средних ядер 51  
 — — для тяжелых ядер 52  
 — — для фермиевского распределения 50, 54  
 — — из электронного рассеяния 52 — 54  
 — — модельно-независимый 53  
 — — нейтронный 148, 149  
 — — протонный 148, 149  
 Стандартный сдвиг 99, 109, 110, см. также изотопический сдвиг  
 Статическое распределение 18, 44, 69, 161  
 Теория многократного рассеяния 130, 145  
 Толщина нейтронной поверхности 164  
 — поверхностного слоя 47, 48, 50 — 52, 75, 76, 85 — 87, 104, 105, 107, 114, 163  
 — — — для ядер от Au до Bi 52  
 — — — нейтронная 164  
 Томсоновская модель атома 22  
 Тонкая структура 20, 44, 74, 170  
 — — деформированных ядер 84  
 — — , поправка на приведенную массу 44  
 — — , постоянная 99, 186 — 188, 194  
 — — , расщепление 124

Угловой момент мезона 165  
 — — нуклона 61  
 — — полный 57, 177, 187  
 — — — ядерный 71, 74  
 — — фона 65  
 — — электрона 165  
 Уравнение Дирака 19 — 21, 40, 47, 61, 72, 76, 80, 128, 182, 183  
 Уровни энергии 19, 98, 174, 186  
 — — , влияние конечных размеров ядра 20, 21, 58, 124  
 — — возбужденных ядер 96  
 — — , квадрупольное расщепление 78 — 80  
 — — , комплексный сдвиг 131, 155  
 — — , магнитное сверхтонкое расщепление 116  
 — — мезонных атомов 19, 20  
 — — мюония 186, 187  
 — — мюонных атомов 19, 78 — 80, 81  
 — — — молекул 174 — 177  
 — — пионных атомов, сдвиг 129  
 — — , поляризационная поправка 89  
 — — , приближенные формулы 21 — 24  
 — — , сверхтонкое расщепление 121  
 — — , статистическое заполнение 82  
 Уширение линии 200

Фермиевское движение нуклонов 131  
 Ферми-импульс 146  
 Ферми-распределение 35, 47, 50, 78, 81, 102, 104, 108, 114, 133  
 — — двухпараметрическое 52  
 — — для деформированных ядер 75  
 — — , среднеквадратический радиус 52  
 — — модифицированное 76, 78  
 — — трехпараметрическое 52  
 — Теллера закон 9, 10, 14  
 — уровень 33, 39  
 — формула 186, 188  
 Фононное взаимодействие 65  
 — гироманнитное отношение 69  
 Фононный оператор рождения 65  
 Форма линии 111  
 Формула Дирака для точечного ядра 124  
 Функция Грина 197  
 — корреляции 198

Химические эффекты, см. атомный захват  
 Химия мюония 189 — 192

Центробежное растяжение 74, 117  
Центробежный барьер 165  
Центр инерции компонент сверхтон-  
кой структуры 98  
— — , сдвиг 115 — 117

Частично-дырочное возбуждение 34,  
63

— — состояние 34, 62, 63

Четность 80

— пионов 150

—  $Y_0^*$  154

Четно-четные ядра 45, 101

— — — деформирование 88, 116

— — — , первые возбужденные со-  
стояния 10

Ширина 121, 123, 128 — 130, 133,  
136, 140, 142 — 145, 148, 180, 201

— линии 61, 132, 133, 136 — 139

— ядерного поглощения 168

Эйринга теория 191

Эквивалентный радиус 54, 72, 84

Электрический квадрупольный по-  
тенциал 42

Электронное экранирование 16, 42 —  
44, 98

Энергия вращательного состояния  
74, 82

— возбуждения 71, 117, 119

— — средняя 32

— диссоциация 176, 177, 190

Эффект Бора — Вайскопфа 57 — 60

— деформирование объема 100, 101

— заполненной оболочки 108

— изоспина 97, 103

— Лорентц-Лоренца 130, 141, 199

— объема 98, 99

— приведенной массы 104, 109, 110,  
151

— разрушения электронной оболоч-  
ки 18

— связи 98

— Штарка 150, 154, 166

— экранирования 97, 98

— ядерной корреляции 131

Эффективное взаимодействие 91 — 96

— волновое число 132

— квадрупольное взаимодействие  
91 — 94

— квантовое число 22

Эффективный заряд 12 — 14, 58, 195

— матричный элемент  $E1$ -перехода  
94

Ядерная материя 141, 161, 164

— модель БКШ 63

— Вудса — Саксона 36, 39, 52

— — гармонического осциллятора  
35, 36, 52

— — оболочечная 65

— — одночастичная 62, 63, 65 — 69

— — ротационная 117

— — с жестким остовом 76

— — смешивания конфигураций 62,  
63, 66 — 99

— — спаривания 63, 66 — 69

— — «спаривание + квадрупольное  
взаимодействие» 65 — 69, 104

— — с проектированием 63, 65

— — с размытым краем 75

— однородная 35

— — ферми 35, 52

— периферия 6, 160, 162, 164, 167

— поверхность 6, 52, 72, 100, 142,  
149, 160 — 165, 183

— — , захват каонов 160 — 162

— — , избыток нейтронов 162 — 164

— — , нуклонное распределение 164

— поляризация 6, 21, 30 — 42, 46, 56,  
88, 102, 117, 146

— — в деформированных ядрах 89 —  
96, 117

— — очень легких мюонных ато-  
мах 30

— — , возможное экспериментальное  
доказательство 40 — 42

— — в сферических ядрах 30 — 35

— — в мюонном атоме Рв 35 — 40

— сжимаемость 32, 102, 103

— среда 141

— форма 100, 103, 118

Ядерное давление 117 — 121, 132

— поглощение 131, 132, 149, 150, 153,  
154, 168

—  $\gamma$ -излучение 112, 114 — 117

Ядерные волновые функции 61, 182,  
183

— — — коллективной модели 71, 72

— — — модели смешивания конфи-  
гураций 63

— — — «спаривание + квадру-  
польное взаимодействие» 65, 69

— вращательные уровни 88 — 90, 92

— силы 179

— состояния возбужденные 96, 197

— — дипольные 36, 39, 40

— — квадрупольные 37, 40

— — коллективные вращательные  
78

— — монопольные 36, 39

— — промежуточные 32 — 34, 91,  
117

Ядерный захват каонов 154, 160, 161

— — мюонов 89, 117

— — пионов 149, 150  
— магнетон 59 — 61  
— синтез 177 — 179, 183  
Ядра деформированные 112  
— — жесткие 74  
— с замкнутой оболочкой 32, 106

— составные 181  
— сферические 100, 102  
— точечные 20, 66 — 68, 124, 182  
— четно-четные деформированные 88  
— эллипсоидальные 72, 118  
—  $\beta$ -стабильные 162

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие переводчиков . . . . .	3
Предисловие . . . . .	4
Введение . . . . .	5
Список обзорной литературы . . . . .	7
<b>Г л а в а 1. Основные свойства мезоатомов . . . . .</b>	<b>9</b>
§ 1.1. Атомный захват мезонов . . . . .	9
§ 1.2. Каскадные переходы . . . . .	16
§ 1.3. Уровни энергии . . . . .	19
§ 1.4. Конечные размеры ядра . . . . .	20
§ 1.5. Приближенные формулы для уровней энергии и волновых функций . . . . .	21
§ 1.6. Поляризация вакуума . . . . .	25
§ 1.7. Поляризация ядра (дисперсионный эффект) . . . . .	30
§ 1.8. Электронное экранирование . . . . .	42
§ 1.9. Тонкая и сверхтонкая структура . . . . .	44
<b>Г л а в а 2. Мюонные атомы . . . . .</b>	<b>47</b>
§ 2.1. Изучение структуры сферических ядер с помощью мюонных атомов . . . . .	47
§ 2.2. Изучение структуры деформированных ядер с помощью мюонных атомов . . . . .	71
§ 2.3. Изотопические сдвиги . . . . .	97
§ 2.4. Изотонные сдвиги . . . . .	110
§ 2.5. Изомерные сдвиги . . . . .	112
§ 2.6. Деление ядер при безызлучательных переходах . . . . .	117
§ 2.7. Деполяризация мюонов в мюонных атомах . . . . .	121
§ 2.8. Масса мюонов . . . . .	124
§ 2.9. Возможность образования мюонных атомов при распаде тяжелых гиперядер . . . . .	126
<b>Г л а в а 3. Пионные атомы . . . . .</b>	<b>128</b>
§ 3.1. Мезон-нуклонные взаимодействия . . . . .	128
§ 3.2. Анализ пионного рентгеновского излучения . . . . .	129
§ 3.3. Пионное рентгеновское излучение . . . . .	132
§ 3.4. Анализ пионного рентгеновского излучения и пион-ядерное взаимодействие . . . . .	140
§ 3.5. Нейтронные радиусы из анализа пионного рентгеновского излучения . . . . .	148
§ 3.6. Времена замедления $\pi^-$ -мезонов в жидких $H_2$ , $D_2$ и $^4He$ . . . . .	149
§ 3.7. Масса пиона . . . . .	151

<b>Г л а в а 4.</b>	<b><math>K^-</math>-мезонные, <math>\Sigma^-</math>-гиперонные и другие атомы</b>	<b>153</b>
§ 4.1.	Каонное рентгеновское излучение	153
§ 4.2.	Каонное рентгеновское излучение как источник информации о периферии ядра	160
§ 4.3.	Метастабильное состояние ( $\alpha K^- e^-$ )-атома	165
§ 4.4.	Масса каона	166
§ 4.5.	$\Sigma^-$ -Гиперонное рентгеновское излучение	166
§ 4.6.	$\Xi^-$ -Гиперонные и антипротонные атомы	167
<b>Г л а в а 5.</b>	<b>Мюонные молекулы</b>	<b>172</b>
§ 5.1.	Молекулярные процессы	172
§ 5.2.	Уровни энергии	174
§ 5.3.	Мюонный катализ ядерного синтеза	177
§ 5.4.	Катализ синтеза в системе ( $d\mu-d$ )	179
§ 5.5.	Проницаемость кулоновского барьера	179
§ 5.6.	Внутренняя конверсия	181
<b>Г л а в а 6.</b>	<b>Мюоний и мюониевые молекулы</b>	<b>185</b>
§ 6.1.	Образование мюония	185
§ 6.2.	Уровни энергии	186
§ 6.3.	Интервал сверхтонкой структуры и постоянная тонкой структуры	187
§ 6.4.	Мюониевая молекула и химия мюония	189
§ 6.5.	Поиск конверсии мюоний—антимюоний	192
<b>Приложения</b>		<b>194</b>
А.	Вероятности переходов	194
Б.	Потенциал оптической модели пион-ядерного взаимодействия	196
В.	Решение волнового уравнения в задаче на связанные состояния с вещественными или комплексными собственными значениями	200
<b>Список литературы</b>		<b>202</b>
<b>Алфавитно-предметный указатель</b>		<b>213</b>

**Ён Нок Ким**  
**МЕЗОННЫЕ АТОМЫ**  
**И ЯДЕРНАЯ СТРУКТУРА**

Редактор  
**Е. В. Сатарова**

Художественный редактор  
**А. Т. Кириянов**

Переплет художника  
**А. И. Шаварда**

Технический редактор  
**Н. А. Власова**

Корректор  
**Е. Д. Рагулина**

Сдано в набор 24/X 1974 г.  
Подписано к печати 2/IV 1975 г.  
Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub> Бумага типографская № 2  
Усл. печ. л. 14,0 Уч.-изд. л. 15,2  
Тираж 2190 экз. Зак. изд. 72096  
Зак. тип. 1202 Цена 1 р. 68 к.  
Атомиздат, 103031,  
Москва, К-31, ул. Жданова, 5.  
Московская типография № 4  
Союзполиграфпрома при Государственном  
комитете Совета Министров СССР  
по делам издательств, полиграфии  
и книжной торговли  
г. Москва, И-41,  
Б. Переяславская ул., дом 46



