K 004

ВОЕННАЯ АКАДЕМИЯ ХИМИЧЕСКОЙ ЗАЩИТЫ

Б. А. КОРДЕМСКИЙ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

МОСКВА—1964

ВОЕННАЯ АКАДЕМИЯ ХИМИЧЕСКОЙ ЗАЩИТЫ

Б. А. КОРДЕМСКИЙ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Краткий курс лекций с задачами
для упражнений

МОСКВА—1964

Необходимость настоящего издания определяется тем, что существующие пособия по теории вероятностей либо слишком обширны для нашего небольшого курса (например, книга *Е. С. Вентцель «Теория вероятностей»*), либо направлены в адрес экономических специальностей (например, книга *В. Е. Гмурмана «Введение в теорию вероятностей и математическую статистику»*). Нет и задачника, полностью отвечающего программе нашего краткого курса. Поэтому в настоящее издание мы включили около 100 задач — набор, достаточный для закрепления изучаемого теоретического материала. Задачи подобраны преподавателем кафедры *А. И. Корелицкой.*

Стремясь обеспечить слушателей академии наиболее подходящим пособием, мы вначале предполагали ограничиться редактированием изданной работы *А. В. Маркина «Теоретические основы точности измерений и обработки результатов наблюдений»* (ВАХЗ, 1962). По объему охваченного материала эта книга близка к нашей программе. Однако процесс обработки книги *А. В. Маркина* постепенно привел к изменению почти всего текста; впрочем, отдельные страницы, а также задачи и примеры, взятые *А. В. Маркиным* из практики работы специальной кафедры, сохранились.

В редакционной части работы принимали участие преподаватели кафедры высшей математики: *А. А. Коноплянкин, А. И. Корелицкая,* ст. преподаватель *Р. И. Позойский,* доцент *М. Г. Шестопал.*

Издание Военной академии химической защиты
Москва, Б-5, Бригадирский пер., 13

Редактор ***Э. И. Захарова***

Техн. редактор *В. Н. Лутаенко* Корректор *Е. А. Воронова*

Г—491671 Подп. к печ. 9.10.1964 Объем 7 печ. л.
Изд. № 34 Бумага $60 \times 90^1/_{16}$ Зак. 700
Только для внутриведомственной продажи (цена 32 коп.)

Типография Военной академии химической защиты

Глава I

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ. ВЕРОЯТНОСТИ

§ 1. Первоначальные сведения о теории вероятностей

Результат каждого физического или химического явления определяется не только основными, постоянно действующими условиями, но и некоторыми второстепенными — меняющимися при повторении явления. Вмешательство меняющихся второстепенных условий невозможно устранить полностью, поэтому в любое закономерное явление проникают элементы случайности, иногда оказывающие влияние на его исход.

Пример 1. Бросаем монету. В качестве результата нас интересует случай, когда монета упадет гербом вверх (появление герба). Падение монеты гербом вверх или цифрой, конечно, причинно обусловлено. Однако условия, влияющие на движение монеты, настолько многочисленны и сложны, что неуловимое для нас изменение этих условий может привести к противоположному результату (непоявление герба), а проследить влияние всех этих условий не представляется возможным. Поэтому интересующий нас результат отдельного опыта — появление герба — следует признать в данном опыте случайным.

Пример 2. Аналогичным в этом смысле является и результат такого опыта, как выстрел из орудия. Хотя нам известны очень многие из условий, влияющих на полет снаряда (угол и скорость бросания, вес, баллистические характеристики снаряда и т. п.), но и в этом случае мы сознаем, что оценить все факторы, влияющие на исход опыта (положение точки попадания), невозможно, чтобы однозначно определить этот исход. Даже расширяя круг условий, влияющих на полет снаряда (вращение Земли, изменение плотности воздуха с изменением высоты), мы все же не в состоянии учесть влияния множества казалось бы незначительных факторов (изменение веса снаряда, колебание ствола при выстреле, погрешности измерения плотности и температуры воздуха, технологические погрешности формы снаряда и т. д.).

Таким образом, действительная траектория снаряда в каждом выстреле будет более или менее отличаться от так называемой расчетной и, следовательно, исход каждого такого опыта, т. е. положение точки попадания относительно точки прицеливания, будет также случайным.

Элементы случайности сопутствуют всякому явлению. Но, если они неспособны вызвать значительные несовпадения результатов при повторных воспроизведениях явления в одних и тех же основных условиях, то влиянием случайных элементов можно пренебречь и принимать во внимание лишь основные решающие закономерности рассматриваемого явления. Для обработки и изучения такого класса явлений пригоден аппарат классического математического анализа. Одним из его приемов является, например, составление и интегрирование дифференциальных уравнений.

Однако растущие потребности практики и техники все более и более настойчиво требовали научного анализа таких явлений, в которых случайные факторы приобретают настолько значительную роль, что отбрасывание многочисленных второстепенных условий становится недопустимым.

Под влиянием большого числа второстепенных, трудно учитываемых факторов, при многократном повторении опыта в одинаковых основных условиях, явление может протекать каждый раз по-иному. Такие явления будем называть *случайными*. Несмотря на господствующую роль в таком классе явлений элемента случайности, неопределенности, многопричинности, существуют специфические закономерности, управляющие случайными явлениями.

Пример 1. При каждом единичном выстреле отклонение точки попадания снаряда от точки прицеливания представляет случайное явление, но при многократном повторении выстрелов проявляется следующая закономерность: точки падения снарядов группируются в окрестности одной определенной точки (центра рассеивания); ближе к ней они располагаются более густо, дальше от нее — реже. При этом убывание густоты также происходит закономерно.

Пример 2. Каждая молекула газа, заключенного в сосуде, за секунду множество раз сталкивается с другими молекулами, многократно меняет скорость и направление движения. Известно, что давление газа на стенку сосуда обусловлено совокупностью ударов молекул об эту стенку. Так как траектория каждой отдельной молекулы случайна, то казалось бы и давление на стенку сосуда должно изменяться случайным и неконтролируемым образом; однако это не так. Если число молекул достаточно велико, то давление газа практически не зависит от траекторий отдельных молекул. Случайные особенности, свойственные движению каждой отдельной молекулы, в массе взаимно компенсируются; в результате, несмотря на сложность и запутанность траекторий отдельных молекул, наблюдается весьма простая закономерность, характеризующая давление газа в целом. Именно массовость случайных явлений обеспечивает выполнение определенной закономерности; при значительном уменьшении числа молекул газа случайные отклонения от закономерности становятся уже ощутимыми.

Для решения задач, возникающих при изучении массы случайных явлений, потребовалось создание специальных методов, позволяющих глубже анализировать явления с учетом присущих им элементов случайности.

Образовались новые разветвления математики — теория вероятностей, математическая статистика.

Теория вероятностей — это наука, изучающая объективные закономерности, присущие массовым случайным явлениям.

Методы теории вероятностей не дают возможности предсказать исход отдельного случайного явления, но позволяют предсказать средний суммарный результат массы однородных случайных явлений. Следовательно, зная законы, управляющие массами случайных явлений, можно добиваться в случае необходимости целенаправленного изменения хода случайных явлений, их контролирования, уменьшения их влияния на практику.

В настоящее время нет почти ни одной естественной науки, в которой так или иначе не применялись бы вероятностные методы. Широко пользуются методами теории вероятностей ядерная физика, теория автоматического регулирования, машинная математика, теория стрельбы и бомбометания, теория боеприпасов, теория прицелов и приборов управления огнем, аэронавигация, тактика, исследование операций (в частности, теория эффективности боевых действий) и другие отрасли науки.

Базой для применения вероятностных методов исследования всегда служит *устойчивость массовых случайных явлений,* многократно подтвержденная опытом.

Возникновение теории вероятностей как науки относится к середине XVII в. и обязано исследованиям Паскаля, Ферма и Гюйгенса первоначально в области теории азартных игр. В процессе таких исследований постепенно сформировались некоторые из основных понятий теории, например, такие, как «вероятность» и «математическое ожидание». Были установлены их основные свойства и приемы вычисления. Непосредственное практическое применение вероятностные методы нашли прежде всего в задачах страхования.

Для всего XVIII и начала XIX вв. характерно широкое увлечение проблемами теории вероятностей. Она становится настолько «модной» наукой, что ее начинают применять не только там, где это применение правомерно, но и там, где оно не было оправдано, например, для решения проблем истории, политики, судопроизводства.

Антинаучная спекуляция методами теории вероятностей вызвала к тридцатым годам XIX в. скептицизм и разочарование в отношении этой науки. Стало складываться представление, что теория вероятностей—не более чем математическое развлечение.

Но именно в это время в России формируется знаменитая петербургская «могучая кучка» математиков (В. Я. Буняковский, П. Л. Чебышев, А. А. Марков, А. М. Ляпунов), трудами которых теория вероятностей была поставлена на прочную логическую и математическую основу. С этого времени и вплоть до наших дней ведущая роль в развитии теории вероятностей принадлежит ученым нашей страны (С. Н. Бернштейн, А. Н. Колмогоров, А. Я. Хинчин, В. И. Романовский, Б. В. Гнеденко и др.).

§ 2. Событие. Вероятность события

Как в геометрии основными понятиями являются понятия точки, линии, поверхности, в механике — понятия силы, массы, скорости, так и в теории вероятностей существуют свои основные, исходные, первичные понятия. Рассмотрим их. Первым исходным понятием является понятие события.

Событием принято называть всякий ожидаемый факт, независимо от того, произойдет ли он действительно в результате опыта.

Примеры событий:

а) появление герба при бросании монеты;

б) попадание в цель при выстреле;

в) взрыв при синтезе 8-оксихинолина;

г) взрыв при повышении температуры хранения концентрированной перекиси водорода до 40°;

д) дожитие данного человека до определенной даты (например, до 7 сентября следующего года).

Различают события достоверные, невозможные и случайные.

Достоверным называется событие, которое в данных условиях непременно должно произойти.

Так, при атмосферном давлении в 760 *мм* и температуре 100° вода закипает. Это событие — кипение воды — достоверное.

Невозможным называется событие, которое в данных условиях не может произойти.

Так, образование льда при нагревании воды до 30° при нормальном давлении — событие невозможное.

Случайным называется событие, которое при осуществлении определенной совокупности условий может либо произойти, либо не произойти.

В § 1 были приведены примеры случайных событий.

Теория вероятностей изучает случайные события. Что же касается событий достоверных или невозможных, то одна из задач теории вероятностей состоит в том, чтобы, в частности, указать такие условия, при которых случайное событие становится практически достоверным или, наоборот, условия, при которых оно становится практически невозможным.

В дальнейшем вместо фразы «при осуществлеиии определенной совокупности условий» будем говорить короче: «в данном опыте». Каждое случайное событие мы будем рассматривать как результат некоторого опыта (испытаиия).

Выделим три объединения событий.

А. События иазываются *единственно-возможными*, или образующими *полную группу*, если в результате опыта непременно должно появиться одно и только одно из них.

Примеры: 1. Попадаиие в цель и промах при одиом выстреле.

2. Выпадение герба и выпадение цифры при бросании монеты.

3. Производится три выстрела по цели. Полной группой событий будут: ни одного попадания, одно попадание, два попадания, три попадаиия.

В. События называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же опыте.

Примеры: 1. Выпадение герба и выпадение цифры при бросании монеты.

2. В ящике содержится семь белых и три красных шара. Событие A — появление белого шара; событие B — появление красного шара. При вынимании одного шара из ящика события A и B — несовместны. Однако в других условиях, например, при двукратном вынимании шара события A и B в таком опыте — совместны: при первом вынимании может появиться белый шар (событие A), а при втором — красный (событие B).

С. События называются *равновозможными*, если нет объективных оснований считать появление одного из них более возможным, чем появление другого.

Примеры: 1. Выпадение герба и выпадение цифры при бросании монеты.

2. Появление шара с тем или иным номером при вынимании одного шара из урны, содержащей 10 перенумерованных одинаковых на ощупь шаров.

Если события являются одновременно единственно-возможными, несовместными и равновозможными, то они называются элементарными событиями: можно сказать также, что такие события составляют *систему случаев.*

Например, события, приведенные в каждом из двух последних примеров, являются элементарными событиями.

Если полная группа событий состоит только из двух равновозможных и несовместных событий, то они называются *противоположными.* Два противоположных события можно обозначить, например, символами A и $\overline{A}$.

Примеры противоположных событий:

1. Появление герба и цифры при однократном бросании монеты.

2. Производится двукратное бросание монеты. Событие A — непоявление герба ни одного раза. Противоположное событие $\overline{A}$ — появление герба хотя бы один раз.

3. Попадание и промах при одном выстреле.

Для сравнения объективных возможностей появления в данном опыте того или иного события нужна количественная оценка каждого случайного события.

Рассмотрим такой опыт. В урне содержится 7 белых и 3 красных шара. Занумеруем белые шары числами 1, 2,....,7, красные — числами 8, 9, 10. Если опыт состоит в вынимании одного шара из урны, то мы имеем 10 элементарных событий (A_i):

A_1 — вынут шар 1, A_2 — вынут шар 2 и т. д.

Пусть нас интересует событие $Б$: «вынут белый шар». Это событие не является элементарным, но оно связано с элементарными событиями A_1, A_2,..., A_{10}. В самом деле, зная какое элементарное событие произошло, можно однозначно решить появилось событие $Б$ или нет. Если, например, произошло одно из элементарных событий A_1,...,A_7, то событие $Б$ осуществилось; о таком элементарном событии говорят, что оно *благоприятствует* появлению события $Б$. Если же произошло одно из элементарных событий A_8, A_9, A_{10}, то $Б$ не осуществилось.

Из 10 элементарных событий (случаев) 7 случаев благоприятствуют событию $Б$. Отношение $\frac{7}{10}$ назовем вероятностью события $Б$ и обозначим через $P(Б)$, тогда

$$P(Б)=\frac{7}{10}.$$

В опыте с бросанием монеты возможны 2 элементарных события (2 случая). Выпадению герба (событие A) благоприятствует один случай из двух. Вероятностью события A будем считать дробь $\frac{1}{2}$,

$$P(A)=\frac{1}{2}.$$

Определение. Вероятностью события A называется отношение числа случаев m, благоприятствующих появлению события A, к числу n всех возможных случаев:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Замечание. Это определение вероятности приспособлено для классической схемы, т. е. для задач, позволяющих рассматриваемое событие A связать с конечным количеством известных элементарных событий (свести к системе случаев), появляющихся в данном опыте. В таких задачах подсчет числа n всех элементарных событий и числа m элементарных событий, благоприятствующих появлению события A, не может быть выполнен по каким-либо общим рецептам и требует в каждом случае индивидуального подхода.

Пример. Из урны, содержащей a белых и b черных шаров, вынимаем

1) один шар;

2) сразу два шара.

Вычислить вероятность появления белых шаров отдельно в каждом варианте задачи.

Решение. Пусть событие A — появление белого шара в первом варианте задачи. Тогда $n=a+b$, $m=a$ и

$$P(A)=\frac{a}{a+b}.$$

Пусть событие B—появление двух белых шаров во втором варианте задачи.

Теперь n равно числу сочетаний по 2 из $a+b$ элементов, $n=C^2{}_{a+b}$, m равно числу сочетаний по 2 из a элементов. Следовательно,

$$P(B)=\frac{C^2{}_a}{C^2{}_{a+b}}.$$

Как видим из определения и приведенных примеров, вероятность есть число, характеризующее степень объективной возможности появления в данных условиях интересующего нас события.

Задачи, сводимые к классической схеме случаев, редко возникают в производственной и лабораторной практике.

Однако рассмотрение их помогает уяснению понятия «вероятность».

Основные свойства вероятностей

1. Вероятность невозможного события равна нулю. Действительно, если событие A невозможно, то в системе n случаев благоприятствующих ему случаев нет ($m=0$). Тогда

$$P(A)=\frac{m}{n}=0.$$

2. Вероятность достоверного события равна единице.

Действительно, если событие A достоверно, то это для системы случаев означает, что его появлению благоприятствуют **все** без исключения n случаев (т. е. $m=n$).

Тогда

$$P(A)=\frac{m}{n}=1.$$

3. Вероятность появления случайного события может принимать значения, заключенные между 0 и 1:

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1.$$

Действительно, всегда $0\leqslant m\leqslant n$.

4. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице. Действительно, если в системе n случаев и событию A благоприятствует m случаев, то событию $\bar{A}$ будет благоприятствовать $n-m$ случаев.

Тогда

$$P(A)=\frac{m}{n};\quad P(\bar{A})=\frac{n-m}{n};\quad P(A)+P(\bar{A})=\frac{m}{n}+\frac{n-m}{n}=1.$$

§ 3. Относительная частота (статистическая вероятность)

Для вычисления по формуле $P(A)=\frac{m}{n}$ вероятности отдельного события A, сводимого к системе случаев, нет необходимости действительно осуществлять соответствующие испытания. $P(A)$ вычисляется априорно, до опытов.

Пусть, однако, опыты произведены, т. е. осуществлено n испытаний и подсчитано, что в m^* случаях появилось событие A.

Отношение $\frac{m^*}{n}$ обозначим через $P^*(A)$ и назовем *относительной частотой* события A, или иначе *статистической вероятностью.*

Определение. Относительной частотой, или статистической вероятностью $P^*(A)$ события A в данной серии опытов, называется отношение числа m^* опытов, в которых событие A появилось, к общему числу n опытов, произведенных в одинаковых условиях

$$P^*(A)=\frac{m^*}{n}.$$

Таким образом, статистическая вероятность (в отличие от ранее введенной «математической» вероятности) — апостериорное понятие, т. е. $P^*(A)$ вычисляется после произведенных опытов.

Относительная частота события, вычисленная по результатам небольшого числа опытов, может значительно отличаться от соответствующего результата, полученного при вторичном осуществлении такой же серии опытов.

Пример. При 10 бросаниях монеты герб (событие A) выпал только один раз; тогда

$$P^*(A)=0{,}1.$$

При следующих 10 бросаниях монеты герб выпал 7 раз; тогда

$$P^*(A)=0{,}7.$$

В той и другой серии опытов $P^*(A)$ заметно отличаются от «математического» (априорного) значения вероятности $P^*(A)=0{,}5$.

Однако, как показывает практика, при увеличении числа опытов частота события теряет свой случайный характер и проявляет тенденцию стабилизироваться, колеблясь около некоторого постоянного числа.

Пример. При бросании монеты была получена следующая таблица результатов:

Экспериментатор	Число бросаний	Число появлений герба	Относительная частота
Бюффон, XVIII в.	4040	2048	0,5080
Пирсон, XIX в.	12000	6019	0,5016
Пирсон	24000	12012	0,5005

Как видно, относительная частота колеблется около 0,5 — априорного значения вероятности.

Такое свойство «выравниваемости» частот при увеличении числа опытов многократно проверено практикой не только для системы случаев, но для других событий, связанных с массой однородных опытов, не сводимых к системе случаев.

Примеры событий, не сводимых к системе случаев:

1) попадание в цель при выстреле;

2) взрыв при синтезе 8-оксихинолина.

Ясно, что каждое из событий A этого класса также обладает определенной мерой объективной возможности, т. е. может быть охарактеризовано числом, *принимаемым* в качестве математической вероятности $P(A)$ события A. Вычислить $P(A)$ для такого события заранее, до опыта, невозможно. Но если в результате большого количества произведенных опытов была получена некоторая относительная частота $P^*(A)$ события A, то, естественно, именно это число $P^*(A)$ принять в качестве *приближенного значения* математической вероятности $P(A)$ этого события.

Пример. Произведено в одинаковых условиях 100 синтезов 8-оксихинолина; из них 4 синтеза привели к взрыву. Какова вероятность взрыва (событие A) в новой серии синтезов этого вещества?

Решение. $P^*(A)=0{,}04$. Принимаем, что $P(A)\approx 0{,}04$.

Органическая, глубокая связь между относительной частотой события и его вероятностью является проявлением объективного *закона больших чисел* — универсальной закономерности, наблюдаемой в случайных явлениях.

Первой и простейшей из возможных формулировок закона больших чисел является теорема Бернулли.

Я. Бернулли доказал, что при неограниченном увеличении числа однородных независимых опытов с практической достоверностью можно утверждать, что частота события будет сколь угодно мало отличаться от его вероятности в отдельном опыте.

Именно открытие закона больших чисел сделало возможным построение теории вероятностей и применение методов статистического исследования в астрономии, физике, метеорологии, химии, биологии, лингвистике, в социальных, технических, военных и других науках.

§ 4. Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Вероятность события, состоящего в том, что появляется событие A или несовместное с ним событие B, равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A \text{ или } B)=P(A)+P(B).$$

Событие, состоящее в появлении события A *или* события B, обозначим символом $A+B$.

Тогда

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Доказательство (для событий, сводимых к системе случаев).

Пусть в результате опыта может иметь место один из n случаев ($M_1, M_2, \ldots, M_n$) и пусть K случаев из n благоприятствуют появлению события A, а другие m случаев из n благоприятствуют появлению события B. Представим это в виде следующей схемы:

событие A	*или* событие B	
$M_1, M_2, \ldots, M_k,$	$M_{k+1}, \ldots, M_{k+m},$	$M_{k+m+1}, \ldots, M_n$
только событие A (K случаев)	только соб. B (m случаев)	ни соб. A, ни соб. B

Вероятность события A

$$P(A) = \frac{K}{n}.$$

Вероятиость события B

$$P(B) = \frac{m}{n}.$$

Вероятность интересующего нас события, состоящего в том, что произойдет событие A или, безразлично, произойдет несовместное с ним событие B, определится так:

$$P(A \text{ или } B) = P(A + B) = \frac{K + m}{n} = \frac{K}{n} + \frac{m}{n} = P(A) + P(B),$$

что и требовалось доказать.

Теорема сложения вероятностей может быть распространена на любое число m иесовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

В этом случае

$$P(A_1 \text{ или } A_2 \text{ или } \ldots \text{ или } A_m) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_m),$$

иначе

$$P\left(\sum_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i).$$

Пример. В урне содержится 30 шаров: 10 красиых, 5 синих и 15 белых.

Найти вероятность появления цветного шара при выиимаиии из урны одиого шара.

Решение. Появлеиие цветного шара означает появлеиие красного шара (событие A) *или* появление синего шара (событие B).

$P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$; $P(B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$. События A и B несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому теорема сложения применима. Искомая вероятность равна

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

Непосредственный подсчет вероятности появления цветного шара дает тот же результат: $\frac{1}{2}$. В самом деле, цветной шар появляется в 15 случаях из 30, следовательно, искомая вероятность $\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$.

Замечание. Условие несовместности событий является строго обязательным для применения теоремы сложения вероятностей.

Пример. Непосредственный подсчет показывает, что в интервале [1, 30] имеется 20 целых чисел, каждое из которых делится или на 2, или на 3. Следовательно, вероятность того, что целое число, наугад взятое из интервала [1, 30], делится или на 2, или на 3, равна $\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$.

В интервале [1, 30] имеется 15 чисел, каждое из которых делится на 2 и 10 чисел, каждое из которых делится на 3.

Пусть событие A — делимость числа на 2, событие B — делимость числа на 3. Тогда $P(A)=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$.

Замечаем, что $\frac{2}{3}\neq\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, т.е. для вычисления вероятности появления события A *или* появления события B, теорема сложения вероятностей неприменима. Это объясняется тем, что события A и B совместные: в интервале [1, 30] есть числа, которые одновременно делятся на 2 и на 3, т. е. некоторые из элементарных событий относятся как к группе случаев, определяющих появление события A, так и к группе случаев, определяющих появление события B.

§ 5. Зависимые и независимые события

Два события называются *независимыми*, если появление или непоявление одного из них не изменяет вероятности появления другого. Два события называются *зависимыми*, если появление или не появление одного из событий изменяет вероятность появления другого.

Вероятность появления события A, вычисленная при условии, что имело место событие B, называется *условной вероятностью события* A и обозначается $P(A/B)$, или $P_B(A)$.

Пример. В урне 10 шаров: 3 зеленых, 2 красных и 5 белых. Интересующее нас событие A — появление зеленого шара.

Если ничего не известно о появлении наугад вынутого шара, то безусловная вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{3}{10}.$$

Если же нам стало известно (или сделано предположение), что вынутый шар цветной (событие B—появление цветного шара), то, очевидно, вероятность появления зеленого шара, вычисленная при условии, что имеет место событие B (появление цветного шара), является условной вероятностью $P(A/B)$.

Для вычисления этой вероятности необходимо разделить число случаев, благоприятствующих событию A, на число всех возможных случаев.

Число всех возможных случаев (с учетом, что имело место событие B) равно 5. Из них событию A благоприятствуют три случая. Тогда

$$P(A/B) = \frac{3}{5}.$$

Мы видим, что рассмотренные два события A и B являются зависимыми, так как появление или непоявление события B влияет на вероятность появления события A. Действительно, пока не было известно, что вынутый шар цветной, безусловная вероятность появления зеленого шара была равна $\frac{3}{10}$. Когда же стало известно, что вынутый шар цветной, то вычисленная с учетом события B вероятность события A стала равной $\frac{3}{5}$, т. е. вероятность события A изменилась.

Условие зависимости события A от события B можно записать в виде

$$P(A) \neq P(A/B),$$

а *условие независимости* — в виде

$$P(A) = P(A/B).$$

§ 6. Теорема умножения вероятностей

Нас часто может интересовать вероятность совместного (не обязательно совпадающего по времени) появления двух или нескольких событий.

Решение этой задачи возможно с помощью теоремы умножения вероятностей.

Вероятность совместного появления двух событий A и B равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие имело место

$$P(A \text{ и } B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B).$$

Событие, состоящее в совместном появлении события A и события B, обозначим символом $A\cdot B$. Тогда

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B).$$

Доказательство (для событий, сводимых к системе случаев).

Пусть в результате опыта может иметь место один из n случаев (M_1, M_2..., M_n). Предположим, что первые K случаев благоприятствуют как событию A, так и событию B, следующие l случаев благоприятствуют только событию A, остальные случаи событию A не благоприятствуют:

$M_1, M_2,\ldots, M_k$	$M_{k+1},\ldots, M_{k+l}$	$M_{k+l+1},\ldots, M_n$
события A и B (K случаев)	только соб. A (l случаев)	не событие A (остальные случаи)

Схема показывает, что

$$P(A \text{ и } B)=\frac{K}{n},\quad P(A)=\frac{K+l}{n},\quad P(B/A)=\frac{K}{K+l}.$$

Нетрудно убедиться теперь в том, что

$$P(A \text{ и } B)=P(A\cdot B)=\frac{K}{n}=\frac{K+l}{n}\cdot\frac{K}{K+l}=$$

$$=P(A)\cdot P(B/A).$$

Если в приведенной схеме событие A переименовать в B, а событие B переименовать в A, то

$$P(B \text{ и } A)=\frac{K}{n},\quad P(B)=\frac{K+l}{n},\quad P(A/B))=\frac{K}{K+l}.$$

Тогда

$$P(B \text{ и } A)=P(A\cdot B)=\frac{K}{n}=\frac{K+l}{n}\cdot\frac{K}{K+l}=P(B)\cdot P(A/B).$$

Теорема доказана.

Теорема умножения вероятностей может быть распространена на любое число событий A_1, A_2, ..., A_n.

В этом случае

$$P(A_1 \text{ и } A_2 \text{ и } \dots \text{ и } A_n) =$$
$$= P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2) \dots P(A_n/A_1A_2\dots A_{n-1}),$$

причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие произошли.

Если события A и B независимы, то условные вероятности $P(A/B)$ и $P(B/A)$ не будут отличаться от соответствующих безусловных вероятностей $P(A)$ и $P(B)$. Тогда теорема умножения для двух *независимых* событий запишется таким равенством

$$P(A \text{ и } B) = P(A)\cdot P(B),$$

иначе

$$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B).$$

Вероятность совместного появления n *независимых* событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ будет равна

$$P(A_1 \text{ и } A_2 \text{ и } \dots \text{ и } A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2) \dots P(A_n),$$

иначе

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Пример 1. Из урны, содержащей 4 белых шара и 6 черных шаров, вынимают наудачу один шар и, не возвращая его в урну, вынимают второй шар. Какова вероятность того, что оба раза будут вынуты белые шары?

Решение. Обозначим через A — появление белого шара в первый раз и через B — появление белого шара второй раз. Вероятность события A

$$P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Условная вероятность события B при условии, что событие A (появление белого шара первый раз) имело место

$$P(B/A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Вероятность совместного появления событий A и B (появление двух белых шаров за два последовательных вынимания) по теореме умножения зависимых событий будет равна

$$P(A\cdot B) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{15} = 0{,}133.$$

Пример 2. Те же условия, но после первого вынимания, шар возвращается в урну и шары перемешиваются.

Решение. Теперь события A и B независимы и

$$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = 0{,}16.$$

Пример 3. Слово «папаха» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами тщательно перемешиваются. Четыре карточки извлекаются по очереди и раскладываются в ряд.

Какова вероятность получить таким путем слово «папа»?

Решение. Вероятность вытащить первую букву слова „папа" (событие A) равна $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Вероятность вытащить вторую букву слова „папа" (событие B) при условии, что буква „п" вытащена, равна $P(B/A) = \frac{3}{5}$ (так как в числе оставшихся пяти букв имеются три буквы „а"). Вероятность вытащить третью букву слова „папа" (событие C) при условии, что уже вытащены буквы „п" и „а", равна $P(C/AB) = \frac{1}{4}$. Аналогично вытаскивание последней буквы слова „папа" (событие D) определяется условной вероятностью $P(D/ABC) = \frac{2}{3}$.

По обобщенной теореме умножения вероятностей зависимых событий получим

$$P(ABCD) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB) \cdot P(D/ABC) = \frac{1}{30}.$$

Замечание. Если противоположное событие распадается на меньшее число вариантов, чем прямое событие, то имеет смысл сначала вычислить вероятность противоположного события.

Пример 4. Химический процесс ведется параллельно на трех аппаратах, действующих независимо. Вероятность бесперебойной работы первого аппарата $P_1 = 0{,}9$, второго $P_2 = 0{,}8$, а третьего $P_3 = 0{,}7$.

Найти вероятность того, что процесс будет доведен до конца хотя бы на одном аппарате.

Решение. Обозначим буквой A искомое событие: «процесс будет доведен до конца хотя бы на одном аппарате». Тогда $\overline{A}$ — противоположное событие: «процесс не будет доведен до конца ни на одном аппарате». Это событие состоит в том, что остановился и первый, и второй, и третий аппараты.

Найдем вероятность остановки каждого аппарата. «Остановка» и «бесперебойная работа» суть события противоположные. Вероятности q_1, q_2 и q_3 остановок первого, второго и третьего аппаратов соответственно равны:

$$q_1 = 1 - P_1 = 0{,}1; \quad q_2 = 1 - P_2 = 0{,}2; \quad q_3 = 1 - P_3 = 0{,}3.$$

Остановки аппаратов — независимые события. Вероятность события $\overline{A}$ равна

$$P(\overline{A}) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0{,}006.$$

Вероятность искомого события A равна

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}994.$$

§ 7. Частная теорема о повторении опытов

В практике часто приходится иметь дело с многократным повторением одного и того же опыта в одних и тех же условиях.

Повторяющиеся испытания, в каждом из которых может произойти или не произойти случайное событие A, называются независимыми по отношению к событию A, если вероятность события A в каждом испытании не зависит от исхода других испытаний.

Нас может интересовать вопрос о том, какова вероятность появления некоторого события A ровно m раз в данной серии из n независимых опытов (обозначается $P_{m,n}$) или какова вероятность появления этого события в данной серии опытов *не менее* m раз (обозначается P_m).

Так, например, если вероятность взрыва 8-оксихинолина при одном синтезе равна 0,02, а мы производим серию из 10 синтезов в одинаковых условиях, то нас могут интересовать вопросы: какова вероятность получить три взрыва в этой серии синтезов или какова вероятность хотя бы одного взрыва в данной серии синтезов?

Эти и подобные им задачи решаются с помощью теоремы Бернулли (теоремы о повторении опытов). Ограничимся только такими часто встречающимися случаями, когда опыты являются независимыми, вероятность интересующего нас события известна и постоянна, т. е. от опыта к опыту не меняется.

При этих ограничениях соответствующая теорема называется частной теоремой о повторении опытов и формулируется так:

Если в каждом из n независимых опытов, производимых в одинаковых условиях, событие A может появиться с вероятностью p или не появиться с вероятностью q (где $q = 1-p$), то вероятность того, что событие A в результате n опытов появится ровно m раз, будет равна

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} \quad \text{(формула Бернулли).}$$

Доказательство. Чередование появлений и непоявлений события A безразлично. Событие A в n опытах может появляться m раз, например, в таком чередовании

$$\underbrace{A, A, \ldots, A}_{m \text{ раз}}, \quad \underbrace{\overline{A}, \overline{A}, \ldots, \overline{A}}_{n-m \text{ раз}},$$

где $\bar{A}$ — обозначает, как мы и условились ранее, событие, противоположное событию A (непоявление события A).

Всевозможные другие комбинации из m появлений и $n-m$ непоявлений события A будут отличаться от указанной только последовательностью (чередованием) событий A и $\bar{A}$.

Вероятность любой одной такой комбинации, т. е. вероятность того, что событие A появится m раз и не появится $n-m$ раз, будет равна по теореме умножения $p^m \cdot q^{n-m}$. Количество L таких комбинаций равно, очевидно, числу сочетаний из n элементов по m

$$L = C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Так как безразлично, какая именно из этих L несовместных комбинаций будет иметь место (важно лишь, чтобы событие A в n опытах появилось m раз), то по теореме сложения вероятность появления или 1-й, или 2-й, или..., или L-й комбинации равна

$$P_{m,n} = L \cdot p^m q^{n-m} = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Теорема доказана.

Вычисляя $P_{m,n}$ для различных значений $m \leqslant n$, можно получить представление о том, как распределяются вероятности между значениями $m=0$, $m=1$, $m=2,\ldots$, $m=n$, т. е. установить, какой вероятностью характеризуется каждое из возможных чисел появления события A при n опытах.

Правая часть формулы Бернулли есть формула общего члена разложения бинома $(p+q)^n$, поэтому ее часто называют формулой *биноминального распределения* вероятностей.

Так как $p+q=1$, то $P_{0,n}+P_{1,n}+P_{2,n}+\ldots+P_{n,n} = (p+q)^n = 1$, т. е. сумма вероятностей *всех* возможных чисел появления события A при n опытах равна 1.

Пример 1. Вероятность взрыва при синтезе 8-оксихинолина равна 0,02. Определить вероятность того, что в серии из 10 синтезов будет иметь место 3 взрыва.

Решение. Пусть событие A — взрыв при одном синтезе. Его вероятность, по условию, равна

$$p = 0{,}02.$$

Соответственно, вероятность не взрыва

$$q = 0{,}98.$$

По формуле Бернулли вероятность того, что в серии из $n=10$ синтезов будет иметь место $m=3$ взрыва, определится так:

$$P_{3,10} = C_{10}^3 p^3 q^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0{,}02^3 \cdot 0{,}98^7 =$$

$$= 120 \cdot 0{,}000008 \cdot 0{,}865 = 0{,}00083.$$

Пример 2. В том же опыте определить вероятность того, что в результате 10 синтезов будет не менее одного взрыва.

Решение. Найдем вначале вероятность $P_{o,n}$ того, что в серии из 10 синтезов будет менее одного взрыва, т. е. не произойдет ни одного взрыва

$$P_{o,n} = C^0_{10}\, p^0 \cdot q^{10} = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}98^{10} = 0{,}71.$$

Так как события „ни одного взрыва" и „не менее одного взрыва" суть события противоположные, то вероятность появления ожидаемого события не менее одного раза равна

$$P_1 = 1 - P_{o,n} = 1 - 0{,}71 = 0{,}29.$$

Частные случаи теоремы о повторении опытов

1. Вероятность $P_{n,n}$ появления события A n раз в n опытах равна

$$P_{n,n} = p^n.$$

2. Вероятность $P_{o,n}$ непоявления события A ни разу в n опытах равна

$$P_{o,n} = q^n.$$

3. Вероятность появления события A не менее m раз в n опытах равна

$$P_m = P_{m,n} + P_{m+1,n} + \ldots + P_{n,n},$$

иначе

$$P_m = \sum_{i=m}^{n} P_{i,n},$$

где $P_{i,n} = C^i_n\, p^i\, q^{n-i}$.

Опять-таки, если применить переход к противоположному событию, то

$$P_m = 1 - \sum_{i=0}^{m-1} P_{i,n}.$$

4. На практике при *больших* значениях n и *малой* вероятности p для *небольших* значений m вместо формулы Бернулли применяют приближенную, так называемую асимптотическую формулу Пуассона

$$P_{m,n} \approx \frac{(n \cdot p)^m\, e^{-np}}{m!}.$$

Соответственно в статистике формулу Пуассона часто называют „*законом редких явлений*".

§ 8. Задачи для упражнений

К § 1, 2, 3

1.1. Весь комплект лотерейных билетов стоит n рублей. Цена одного билета r рублей. Ценные выигрыши падают на m билетов.

Определить вероятность ценного выигрыша на один билет.

1.2. В аквариум пущено 36 рыбок четырех видов поровну. По форме и размерам все рыбки одинаковы. Одну рыбку вытащили, выяснили к какому виду она принадлежит и вновь пустили в аквариум. Через несколько минут еще раз вытащили одну случайно попавшуюся рыбку.

Определить вероятность того, что обе эти рыбки принадлежат одному виду.

1.3. Объект атакуют 6 самолетов-снарядов, два из которых (неизвестно какие именно) имеют ядерные боевые заряды. Атаку отражают четыре зенитных управляемых ракеты, каждая из которых с достоверностью сбивает намеченный самолет.

Какова вероятность, что объект не подвергнется ядерному нападению?

1.4. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны.

Определить вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь только две окрашенные грани.

1.5. Из партии деталей, среди которых n доброкачественных и m бракованных, для контроля наудачу взято K штук. При контроле оказалось, что все K деталей доброкачественные.

Определить вероятность того, что следующая деталь, взятая из партии, также будет доброкачественной.

1.6. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

1.7. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100.

Найти вероятность того, что номер первого, наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.

1.8. В кошельке лежат три монеты достоинством по 20 коп. и семь монет по 3 коп. Наудачу берется одна монета, а затем извлекается вторая, которая оказывается монетой в 20 коп.

Определить вероятность того, что и первая извлеченная монета имеет достоинство 20 коп.

1.9. В ящике имеется 5 карточек с буквами О, П, Р, С, Т. Карточки вынимаются по одной и каждая последующая прикладывается к предыдущей.

Найти вероятность того, что образуется слово «спорт».

1.10. В последний день продажи лотерейных билетов из оставшихся K билетов обязательно будет продан, по крайней мере, один билет, но равновозможно, что будут проданы 2, 3,..., а может быть и все K билетов.

С какой вероятностью можно ожидать, что будет продано четное число билетов?

К § 4, 5, 6

1.11. Круговая мишень состоит из трех зон. Вероятность попадания в I зону 0,15, во II зону 0,23, в III зону 0,17.

Какова вероятность промаха?

1.12. Предприятие изготовляет 95% изделий стандартных, причем из них 86% первого сорта. Найти вероятность того, что взятое наудачу изделие этого предприятия окажется первого сорта.

1.13. По статистическим данным ремонтной мастерской в среднем на 20 остановок токарного станка приходится: 10 — для смены резца; 3 — из-за неисправности привода; 2 — из-за несвоевременной подачи заготовок. Остальные остановки происходят по другим причинам.

Найти вероятность остановки станка по другим причинам.

1.14. Вероятность того, что в электрической цепи напряжение превысит номинальное значение, равна p_1. При повышенном напряжении вероятность аварии прибора-потребителя электрического тока равна p_2.

Определить вероятность аварии прибора вследствие повышения напряжения.

1.15. Производится бомбометание по трем складам боеприпасов, причем сбрасывается одна бомба. Вероятность попадания в первый склад 0,01; во второй 0,008; в третий 0,025. При попадании в один из складов взрываются все три.

Найти вероятность того, что склады будут взорваны.

1.16. Два стрелка, для которых вероятности попадания в мишень соответственно равны 0,7 и 0,8, производят по одному выстрелу.

Определить вероятность попадания в мишень.

1.17. При увеличении напряжения в два раза соответственно с вероятностями 0,3, 0,4 и 0,6 может произойти разрыв электрической цепи вследствие выхода из строя одного из трех последовательно соединенных элементов.

Определить вероятность того, что при этом не будет разрыва цепи.

1.18. Два охотника одновременно увидели лису и одновременно выстрелили в нее. Предположим, что каждый из этих охотников на таком расстоянии обычно в одном случае из трех попадает в лису и убивает ее.

Какова вероятность того, что лиса будет убита?

1.19. Вероятность наступления события в каждом опыте одинакова и равна 0,2. Опыты производятся последовательно до наступления события.

Определить вероятность того, что придется производить четвертый опыт.

1.20. Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет первосортной, равна 0,7. При изготовлении такой детали на втором станке эта вероятность равна 0,8. На первом станке изготовлены две детали, на втором — три.

Найти вероятность того, что все детали первосортные.

1.21. События A и B несовместны.

Зависимы ли данные события?

1.22. В ящике находится 20 одинаковых деталей, из которых 5 деталей имеют брак.

Какова вероятность:

а) при вынимании одной детали вынуть бракованную;

б) при последовательном вынимании двух деталей с возвращением первой детали в ящик вынуть обе годные;

в) при последовательном вынимании двух деталей без возвращения первой детали в ящик вынуть обе годные;

г) при вынимании сразу четырех деталей вынуть две годные и две бракованные.

1.23. Электролампочки изготовляют два завода: 70% 1-й завод и 30% 2-й завод. Из 100 лампочек первого завода 83 стандартных, а из 100 лампочек второго завода 63 стандартных.

а) Куплено 100 лампочек. Сколько из них стандартных?

б) Лампочка стандартна. Какова вероятность, что она изготовлена на втором заводе?

1.24. Вероятность попадания в цель при отдельном выстреле $p=0,2$.

Какова вероятность поразить цель, если 2% взрывателей дают отказы (т. е. в 2% случаев выстрела взрыв не произойдет)?

1.25. Доказать, что если $P(A/B)>P(A)$, то и $P(B/A)>P(B)$.

1.26. В двух урнах находятся одинаковые шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, а во второй соответственно 10, 8 и 6. Из обеих урн наудачу извлекается по одному шару.

Какова вероятность, что оба шара одного цвета?

1.27. Вероятность того, что слушатель A решит задачу, равна 0,75, а вероятность того, что слушатель B решит ту же задачу равна 0,8.

Найти вероятность того, что задача будет решена хотя бы одним слушателем, если оба слушателя будут решать ее независимо друг от друга.

1.28. Три стрелка независимо друг от друга стреляют в цель. Вероятности попаданий соответственно 0,6; 0,8; 0,9.

Какова вероятность, что после того, как каждый выстрелит 1 раз, на мишени будет:

а) две пробоины;

б) не меньше двух пробоин.

1.29. Студент пришел на экзамен, зная лишь 20 из 25 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса.

Найти вероятность того, что студент знает все эти вопросы.

1.30. Студент, разыскивая специальную книгу, решил обойти 3 библиотеки. Для каждой библиотеки одинаково вероятно есть в ее фондах книга или нет. Если книга есть в фонде, то одинаково вероятно занята она другим читателем или нет.

Что более вероятно: найдет студент книгу или нет? (Библиотеки формируются независимо одна от другой).

1.31. В ящике лежат 10 заклепок, отличающиеся только материалом: 5 железных, 3 латунных и 2 медных. Наугад берут 2 заклепки.

Какова вероятность того, что они будут из одного материала?

1.32. Танк последовательно форсирует три линии минных заграждений. Вероятность подрыва танка на первой линии 0,05; на второй 0,06 и на третьей 0,1.

Какова вероятность преодоления танком заграждений.

1.33. У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик наудачу взял один валик, а затем второй.

Найти вероятность того, что первый взятый валик — конусный, а второй - эллиптический.

К § 7

1.34. Что вероятнее выиграть в шахматы у равносильного противника:

а) три партии из четырех или пять из восьми;

б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми.

1.35. Определить вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины не содержит:

а) цифры 5;

б) двух цифр 5.

Номера у машин четырехзначные и неповторяющиеся.

1.36. Монету бросают 10 раз.

Какова вероятность того, что все 10 раз она упадет вверх гербом?

1.37. Производится 6 выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из орудия равна 0,2.

Найти наивероятнейшее число попаданий.

Указание. Вычислить вероятность всех возможных случаев попадания и взять наибольшую.

1.38. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле 0,2.

Какова вероятность того, что из пяти выстрелов будет не менее двух попаданий?

1.39. Две электрические лампочки включены в цепь последовательно.

Определить вероятность того, что при повышении напряжения в цепи выше номинального питание в цепи прекратится, если вероятность перегорания обеих лампочек одинакова и в этих условиях равна 0,4.

1.40. Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа каждого элемента в течение одного года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов.

Какова вероятность отказа двух элементов за год?

1.41. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия в пути равна 0,0002.

Найти вероятность того, что на базу прибудет 3 негодных изделия.

Глава II

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 1. Типы случайных величин

Случайной величиной называют такую величину, которая в результате опыта может принять какое-либо одно значение, причем заранее, до опыта, нельзя указать, какое именно.

Если случайная величина может принимать только отдельные значения, которые можно перечислить до опыта, то она называется *прерывной* или *дискретной* случайной величиной.

Примеры: — число взрывов продукта при 10 синтезах;

— число отказов аппарата при n испытаниях;

— количество бракованных образцов в партии из 100 изделий.

Случайное событие можно рассматривать как случайную величину, принимающую два значения 0 и 1, если условиться: 0 означает, что событие не произошло, 1 означает, что событие произошло.

Если возможные значения случайной величины сплошь заполняют некоторый промежуток, то она называется *непрерывной* величиной.

Примеры: — абсцисса (ордината) точки попадания при выстреле;

— расстояние от точки попадания до центра мишени;

— погрешность датчика температуры концентрированной перекиси водорода.

Условимся случайные величины обозначать большими буквами (X, Y, Z и др.), а их возможные значения — малыми (x, y, z).

§ 2. Распределение дискретных случайных величин

При изучении дискретных случайных величин возникают следующие вопросы:

— какие значения может принимать случайная величина и указать их все;

— в какой мере возможны отдельные значения случайной величины, т. е. каковы вероятности этих значений.

Когда ответы на эти вопросы даны, мы говорим, что данная дискретная случайная величина охарактеризована полностью, т. е. что известно *распределение вероятностей* всех возможных значений случайной величины или, иначе, известно *распределение случайной величины.*

Если в результате опыта случайная величина X примет одно из n возможных значений $x_1, x_2, ..., x_n$, это значит, что в результате опыта произойдет о д н о из полной группы n несовместных событий:

— событие A_1 — случайная величина X приняла значение x_1; условное обозначение: $X = x_1$;

— событие A_2 — случайная величина X приняла значение x_2; $X = x_2$;

. . . . ;

— событие A_i — случайная величина X приняла значение x_i; $X = x_i$;

. . . . ;

— событие A_n — случайная величина X приняла значение x_n; $X = x_n$.

Вероятность того, что случайная величина X приняла значение x_i, будем обозначать так: $P(X = x_i)$.

Пусть для каждого из событий A_i вычислена вероятность его появления $P_i = P\ (X = x_i)$. Тогда все эти данные можно представить в виде так называемой *таблицы распределения* случайной величины X.

Возможные значения случайной величины	x_1	x_2	. . .	x_i	. . .	x_n
Вероятности соответствующих значений случайной величины	P_1	P_2	. . .	P_i	. . .	P_n

Такую таблицу будем называть *рядом распределения* дискретной случайной величины.

Так как при этом рассматриваемые события несовместны и образуют полную группу, то $\sum\limits_{i=1}^{n} P_i = 1$, т. е. сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна единице.

Более наглядным является графическое изображение распределения случайной величины: по оси абсцисс откладывают всевозможные значения случайной величины, а по оси ординат вероятности этих значений; полученные точки соединяют отрезками (рис. 1).

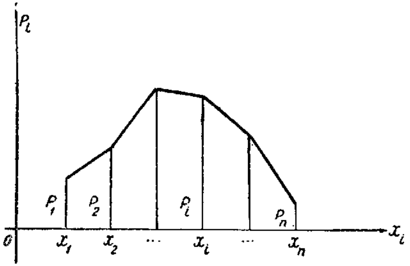

Рис. 1

Получившуюся фигуру называют **многоугольником распределения** случайной величины.

Многоугольник распределения обладает тем свойством, что сумма ординат его вершин равна единице. Это очевидно: ведь по оси ординат отложены вероятности всех без исключения возможных значений случайной величины. А сумма этих вероятностей равна единице.

Пример. Стрелок производит 3 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле 0,4. За каждое попадание засчитывается 5 очков. Построить многоугольник распределения числа полученных очков.

Решение. Случайная величина X — число возможных очков — имеет значения

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 10, \quad x_4 = 15.$$

Вероятности этих значений находим по частной теореме о повторении опытов.

$$P_1 = 0{,}6^3 = 0{,}216; \quad P_2 = C_3^1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}432;$$

$$P_3 = C_3^2 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}288; \quad P_4 = 0{,}4^3 = 0{,}064.$$

Ряд и многоугольник распределения величины X представлены на рис. 2.

x_i	0	5	10	15
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

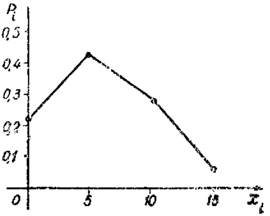

Рис. 2

§ 3. Интегральная функция распределения случайных величин

Возможные значения непрерывной случайной величины сплошь заполняют некоторый промежуток (конечный или бесконечный). Поэтому указать все эти значения не представляется возможным. Для характеристики распределения случайной величины непрерывного типа мы поступим следующим образом.

Пусть X — случайная величина, возможные значения которой сплошь заполняют интервал (a, b), x — любое действительное число.

Рассмотрим вероятность события, состоящего в том, что X примет значение меньшее числа x. Вероятность этого события будем обозначать так: $P(X < x)$. Очевидно, что $P(X < x)$ есть некоторая функция от x

Её называют интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения. Часто интегральную функцию распределения называют просто функцией распределения.

Определение. *Интегральной функцией распределения* называется функция $F(x)$, определяющая для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее x, т. е.

$$F(x) = P(X < x). \qquad \text{II. 3. 1}$$

Геометрически это равенство можно истолковать так: $F(x)$ — есть вероятность того, что случайная величина X примет значение, изображающееся на числовой оси точкой, лежащей левее точки с абсциссой x (рис. 3).

Рис. 3

Свойства интегральной функции распределения

Свойство 1. Интегральная функция распределения может принимать любое значение от 0 до 1

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1. \qquad \text{II. 3. 2}$$

Действительно, вероятность—всегда неотрицательное число, не превышающее единицы.

Свойство 2. $F(x)$ — неубывающая функция, т. е. $F(x_2) \geqslant F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.

Действительно, при перемещении точки x вправо по числовой оси вероятность того, что случайная точка X попадет левее x, не может уменьшиться.

Свойство 3. Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то

$F(x) = 0$ при $x < a$ как вероятность невозможного события и $F(x) = 1$ при $x > b$ как вероятность достоверного события.

Примерный график фуикции $F(x)$ показан на чертеже (рис. 4).

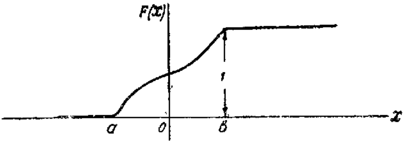

Рис. 4

Если возможные значения непрерывной случайной величины заполняют всю ось Ox, то становятся очевидными следующие предельные соотношения:

а) на минус бесконечности функция распределения равна нулю

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \text{ короче, } F(-\infty) = 0;$$

б) на плюс бесконечности функция распределения равна едииице

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1, \text{ короче, } F(+\infty) = 1.$$

Замечание. Для выяснения закона распределения дискретной случайной величины также можно составить некоторую интегральную функцию $F(x)$, график которой, как легко понять, всегда будет иметь ступенчатый вид.

§ 4. Вероятность попадания случайной величины на заданный участок

Пусть возможные значения случайной величины X заполняют участок числовой оси от α до β, причем условимся временно точку α, т. е. левый конец участка, включать в участок, а правый не включать,

$$\alpha \leqslant X < \beta.$$

Зная функцию $F(x)$, вычислим вероятность $P(\alpha \leqslant X < \beta)$, т. е. вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале $\alpha \leqslant X < \beta$ (вероятность попадания случайной величины X на заданный участок).

Для этого рассмотрим событие $X < \beta$ (случайная величина X приняла значение меньшее числа β). Его можно расчленить на следующие два несовместных события:

событие A: $\alpha \leqslant X < \beta$ с вероятностью $P(\alpha \leqslant X < \beta)$,

событие B: $X < \alpha$ с вероятностью $P(X < \alpha)$.

Событие $X < \beta$ имеет место, если было событие A или было событие B (рис. 5), следовательно, по теореме сложения вероятностей имеем:

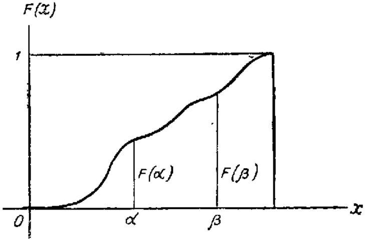

Рис. 5

$$P(X < \beta) = P(\alpha \leqslant X < \beta) + P(X < \alpha).$$

Отсюда

$$P(\alpha \leqslant X < \beta) = P(X < \beta) - P(X < \alpha).$$

Так как

$$P(X < \beta) = F(\beta) \text{ и } P(X < \alpha) = F(\alpha),$$

то

$$P(\alpha \leqslant X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \qquad \text{II.4.1}$$

Пусть теперь $\beta \to \alpha$. Для случайной величины X это означает, что в данном опыте она должна в пределе принять именно указанное значение α. Вероятность этого события $P(X = \alpha)$ будет равна

$$P(X = \alpha) = \lim_{\beta \to \alpha} P(\alpha \leqslant X < \beta) = \lim_{\beta \to \alpha} [F(\beta) - F(\alpha)].$$

Если функция $F(x)$ непрерывна в точке α (что мы предполагаем), то последний предел равен нулю, т. е.

$$P(X=\alpha)=0, \qquad \text{II.4.2}$$

вероятность того, что непрерывная случайная величина примет указанное отдельное значение, равна нулю.

Действительно, попадание случайной величины в заранее назначенную точку α можно понимать как попадание на бесконечно малый участок от α до β при $\beta \to \alpha$. Но с уменьшением участка уменьшается и вероятность попадания на такой участок (согласно формуле II. 4. 1.).

Теперь можно уточнить определение случайной величины непрерывного типа:

случайная величина называется непрерывной, если непрерывна характеризующая ее интегральная функция распределения.

Вернемся к формуле II. 4.1. Расчленим событие $\alpha \leqslant X < \beta$ на два: $X=\alpha$, $\alpha<X<\beta$. По теореме сложения вероятностей несовместных событий имеем:

$$P(\alpha \leqslant X<\beta)=P(X=\alpha)+P(\alpha<X<\beta).$$

Но, как доказано, $P(X=\alpha)=0$, отсюда

$$P(\alpha \leqslant X<\beta)=P(\alpha<X<\beta).$$

Так же можно показать, что

$$P(\alpha<X\leqslant\beta)=P(\alpha<X<\beta)=P(\alpha\leqslant X\leqslant\beta).$$

В связи с полученным результатом формула II. 4. 1 принимает следующий вид:

$$P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha) \qquad \text{II. 4. 3.}$$

Окончательно можно сказать, что *вероятность попадания случайной величины на заданный участок равна приращению интегральной функции распределения на этом участке.*

§ 5. Дифференциальная функция распределения

Пусть интегральная функция распределения $F(x)$ случайной величины X непрерывна и дифференцируема.

Определение. Первую производную от интегральной функции распределения называют *дифференциальной функцией* распределения и обозначают $\varphi(x)$

$$\varphi(x)=F'(x) \qquad \text{II. 5. 1.}$$

Замечание 1. Интегральная функция, очевидно, является первообразной для дифференциальной функции.

Замечание 2. Для описания распределения вероятностей *дискретной* случайной величины дифференциальная функция *не применима*.

Так как $\varphi(x)=F'(x)$, а функция распределения $F(x)$ есть неубывающая функция, то отсюда следует, что $\varphi(x)$ есть неотрицательная функция, $\varphi(x)\geqslant 0$, т. е. график функции $\varphi(x)$ весь лежит не ниже оси абсцисс (например, как на рис. 6).

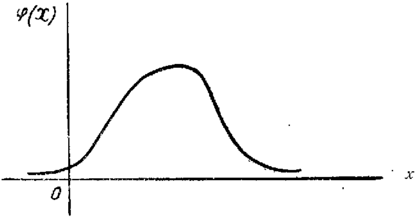

Рис. 6

График функции $\varphi(x)$ называется *кривой распределения*.

Зная дифференциальную функцию $\varphi(x)$, можно вычислить вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее заданному интервалу (α, β), т. е. вероятность попадания на заданный участок $P(\alpha<X<\beta)$.

Мы знаем, что $P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)$, где $F(x)$ — интегральная функция распределения.

По формуле Ньютона — Лейбница имеем

$$F(\beta)-F(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta}F'(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)dx.$$

Таким образом,

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)dx \qquad \text{II. 5. 2.}$$

Геометрически вероятность попадания величины X на участок (α, β) выражается площадью под кривой распределения, опирающейся на этот участок (рис. 7).

Зная, что $\varphi(x)=F'(x)$, зададимся теперь обратной задачей: выразить интегральную функцию распределения случайной величины X через ее дифференциальную функцию распределения. Интегральную функцию распределения $F(x)=P(X<x)$ можно понимать как вероятность попадания

случайной величины X на участок $(-\infty, x)$, $P(-\infty < X < x) = F(x)$ и тогда по формуле II.5.2 имеем:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\, dx \qquad \text{II.5.3.}$$

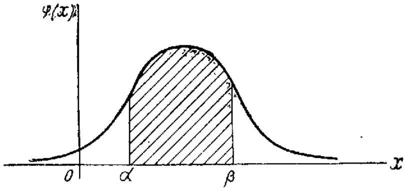

Рис. 7

Предполагается, конечно, что для данной функции $\varphi(x)$ этот несобственный интеграл сходится. Геометрически $F(x)$ есть площадь под кривой распределения, лежащая левее точки x (рис. 8).

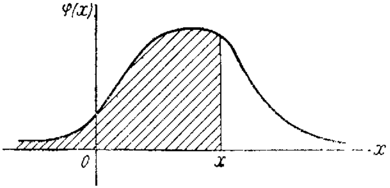

Рис. 8

Пример. Для случайиой величины $X(-\infty < X < \infty)$ известна кривая распределения (рис. 9).

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \qquad \text{(закон Коши).}$$

Найти соответствующую интегральную функцию распределения.

Решение. Интегральная функция распределения этой случайной величины X определится так:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx=\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg} x\right]_{\infty}^{x}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x+\frac{\pi}{2}\right).$$

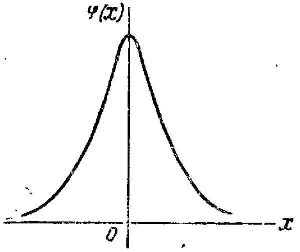

Рис. 9

График интегральной функции распределения $F(x)$ случайной величины X имеет вид, показанный на рис. 10.

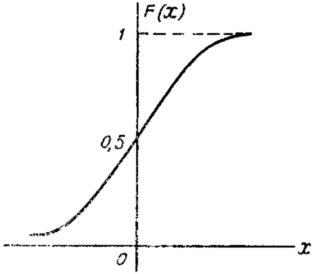

Рис. 10

Основные свойства дифференциальной функции

Свойство 1. Как было уже отмечено, дифференциальная функция неотрицательна

$$\varphi(x)\geqslant 0. \qquad \text{II.5.4.}$$

Свойство 2. Несобственный интеграл в бесконечных пределах от дифференциальной функции равен единице

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 1 \qquad \text{II.5.5.}$$

Это следует из формулы II.5.3 и из того, что $F(+\infty)=1$. Геометрически это означает, что вся площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox и кривой распределения, равна единице.

В частности, если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (α, β), то

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\, dx = 1 \qquad \text{II.5.6.}$$

Вероятностный смысл дифференциальной функции

По определению дифференциальной функции $\varphi(x) = F'(x)$, или иначе

$$\varphi(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \qquad \text{II.5.7.}$$

Разность $F(x+\Delta x) - F(x)$ определяет вероятность попадания случайной величины X на интервал $(x, x+\Delta x)$.

Значение дифференциальной функции в точке x равно пределу отношения вероятности попадания непрерывной случайной величины на интервал $(x, x+\Delta x)$ к длине этого интервала (при $\Delta x \to 0$). Значение функции $\varphi(x)$ в точке x можно рассматривать как плотность вероятности в этой точке. Дифференциальная функция $\varphi(x)$ определяет плотность распределения вероятности случайной величины X для каждой точки x. Дифференциальную функцию распределения часто так и называют *плотностью вероятности* непрерывной случайной величины.

Так как приращение функции приближенно равно дифференциалу функции при достаточно малых Δx, то $F(x+\Delta x) - F(x) \approx F'(x)\, dx$ или

$$F(x+\Delta x) - F(x) \approx \varphi(x)\, dx \qquad \text{II.5.8.}$$

Это значит, что случайная величина может принять значение, принадлежащее промежутку $(x, x+\Delta x)$ с вероятностью, приближенно равной (с точностью до бесконечно малой высшего порядка относительно Δx) произведению плотности вероятности в точке x на длину интервала Δx.

Величина $\varphi(x)dx$ называется *элементом вероятности*. Геометрически это — площадь элементарного прямоугольника с основанием dx и высотой $\varphi(x)$ (рис. 11).

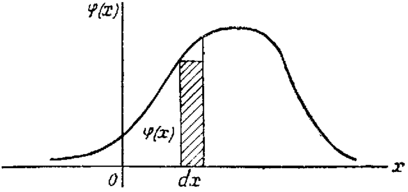

Рис. 11

Дифференциальная функция распределения — наиболее удобный вид задания распределения случайных величин непрерывного типа. Часто она формируется на основе опыта, практики. Используя данные опыта, мы можем построить ступенчатую фигуру, характеризующую распределение частот, а затем, помня, что вероятность и частота при большом числе опытов соответствуют друг другу, подобрать подходящую кривую распределения вероятностей.

Чтобы понять это, приведем следующий *пример*.

Рабочий объём бака для горючего измерен достаточно точно. Производится серия из 100 испытаний литромера, определяющего расход горючего из бака на полный его рабочий объем. В каждом таком испытании определяется погрешность литромера как разность между показаниями его счетчика и известным нам рабочим объемом.

Пусть результаты таких измерений дали следующую таблицу:

Погрешность литромера (л)	От −200 до −150	От −150 до −100	От −100 до −50	От −50 до 0	От 0 до +50	От +50 до +100	От +100 до +150	От +150 до +200
Число измерений, имеющих эту погрешность	2	6	14	25	28	16	6	3
Частота погрешности	0,02	0,06	0,14	0,25	0,28	0,16	0,06	0,03

Если теперь на основании этих данных построить многоугольник распределения частот, то мы получим ступенчатую фигуру, изображенную на рис. 12.

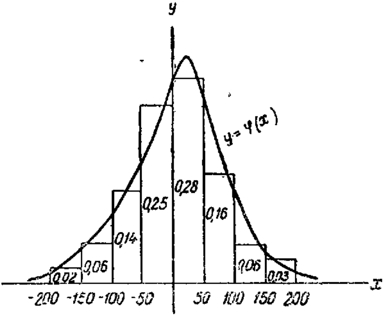

Рис. 12

Эта фигура, построенная по достаточно большому числу опытов ($n = 100$), дает представление о возможной плотности распределения случайной величины X — погрешности литромера. Становится наглядным, например, что лишь в 5% случаев погрешность литромера выходит за пределы ± 150 *л*. Практически такой литромер считается пригодным.

Такая картина распределения частот носит название *гистограммы распределения*. Заменяя полученную ступенчатую линию подходящей плавной кривой $y = \varphi(x)$, мы можем принять ее в качестве кривой распределения случайной величины X — погрешности литромера, полагая её непрерывной.

§ 6. Параметры распределения случайных величин

Не всегда есть возможность иметь в своем распоряжении закон распределения изучаемой случайной величины.

Практически часто бывает достаточно знать некоторые параметры этого распределения, т. е. такие числовые характеристики, назначение которых—выразить в сжатой форме наиболее существенные особенности распределения.

Параметры распределения позволяют указать характерные точки группирования возможных значений случайной величины и плотность их группирования вокруг этих характерных точек.

Соответственно различают характеристики положения возможных значений случайной величины на числовой оси и характеристики рассеяния возможных значений случайной величины.

Характеристики положения возможных значений случайной величины

Наиболее применяемыми характеристиками положения являются: *мода; математическое ожидание.*

Мода

Модой дискретной случайной величины называется её наиболее вероятное значение. *Модой непрерывной случайной величины* называют то её значение, для которого плотность вероятности максимальна.

Мода обозначается буквой M. На многоугольнике распределения (рис. 13) модой будет являться то значение M слу-

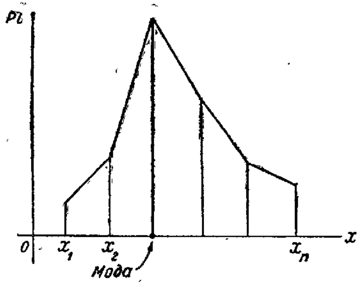

Рис. 13

чайной величины, которому соответствует наибольшая ордината. Для случайной величины непрерывного типа модой будет то из возможных значений случайной величины, которому соответствует максимум кривой распределения (рис. 14).

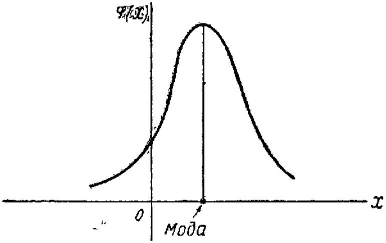

Рис. 14

Математическое ожидание

Если в результате n независимых опытов случайная величина X приняла значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то нетрудно вычислить среднее арифметическое значение этой величины.

Предположим теперь, что опытов еще не было, но априорно, т. е. до опытов, известно, что случайная величина X может принять эти значения с вероятностями соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Какое значение случайной величины X следует нам считать её «ожидаемым средним» значением? Для ответа на этот вопрос и вводится числовой параметр — математическое ожидание.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений этой величины на их вероятности.

Этот параметр будем обозначать символами $M\{X\}$, или m_x.

Тогда

$$m_x = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n,$$

или короче

$$m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad \text{II. 6. 1.}$$

Для уяснения связи между математическим ожиданием m_x и числом ξ_x—фактическим средним арифметическим значением случайной величины X—вычислим ξ_x.

Пусть в результате n независимых опытов случайная величина X приняла m_1 раз значение x_1, m_2 раз значение $x_2, \ldots, m_n$ раз значение x_n, причем $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = n$.

Тогда ξ_x—среднее арифметическое значение случайной величины X—равно

$$\xi_x = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n}{n},$$

или в другой форме

$$\xi_x = x_1 \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + \ldots + x_n \frac{m_n}{n}.$$

Отношения $\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}, \ldots; \frac{m_n}{n}$ суть частоты (статистические вероятности) соответствующих значений случайной величины X.

В формуле, выражающей ξ_x, заменим $\frac{m_1}{n}=p_1^*$, $\frac{m_2}{n}=p_2^*$, $\ldots$, $\frac{m_n}{n}=p_n^*$, тогда

$$\xi_x = x_1p_1^* + x_2p_2^* + \ldots + x_np_n^*.$$

Если эти частоты p_i^* вычислены по результатам достаточно большой серии n опытов, то закон больших чисел (стр. 12) позволяет утверждать, что при многократном повторении серии опытов, для подавляющего большинства серий, частоты p_i^* ничтожно мало отличались бы от соответствующих вероятностей p_i.

То же самое можно сказать и о близости получаемой из опытов средней арифметической ξ_x к математическому ожиданию m_x случайной величины X.

Если производнтся несколько серий испытаний (опытов), то средние арифметические значения случайной величины X, вычисленные для каждой серии испытаний, будут колебаться около постоянного числа m_x.

Эта связь между средним арифметическим и математическим ожиданием является одной из форм проявления объективного закона больших чисел.

Зная математическое ожидание, можно как бы предвидеть результаты испытаний, если они проводятся в устойчивых условиях.

Определение математического ожидания, сформулированное для дискретных случайных величин, распространим теперь на величины непрерывные.

Пусть непрерывная случайная величина X задана дифференциальной функцией распределения $\varphi(x)$. Допустим, что все возможные значения X заключены в интервале $[a, b]$. Разобьем этот интервал на частичные интервалы Δx_1, $\Delta x_2, \ldots$, Δx_n. В каждом из частичных интервалов возьмем по одной произвольной точке соответственно x_1, $x_2, \ldots$, x_n и составим произведения вида $\varphi(x_i)\Delta x_i$. Каждое такое произведение выражает приближенно вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее отрезку Δx_i.

По аналогии с формулой II.6.1 составим сумму произведений

$$x_1\cdot\varphi(x_1)\Delta x_1 + x_2\cdot\varphi(x_2)\Delta x_2 + \ldots + x_n\cdot\varphi(x_n)\Delta x_n = \\ = \sum_{i=1}^{n} x_i\varphi(x_i)\Delta x_i.$$

Перейдя к пределу при $\Delta x_i \to 0$, получим $\int_a^b x\varphi(x)\,dx$, который и примем в качестве математического ожидания непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат интервалу $[a, b]$:

$$M\{X\} = \int_a^b x \cdot \varphi(x)\, dx \qquad \text{II.6.2.}$$

Если возможные значения случайной величины заполняют всю ось Ox, то математическое ожидание определяется интегралом

$$M\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \varphi(x)\, dx \qquad \text{II.6.3.}$$

Предполагается, конечно, что этот несобственный интеграл сходится. Математическое ожидание является в теории вероятностей важнейшей, наиболее часто употребляемой характеристикой положения случайной величины.

Для симметричного и модального (имеющего моду) распределения мода совпадает с математическим ожиданием, если оно существует. Это будет точка, общая с центром симметрии распределения.

Меры рассеяния возможных значений случайной величины

Рассмотренные выше характеристики положения возможных значений случайной величины дают представление о некоторых средних, типичных значениях интересующей нас случайной величины. В геометрическом смысле они (особенно математическое ожидание) дают представление о центре группирования или центре рассеяния. Однако возможные значения случайной величины могут по-разному группироваться около такого среднего значения. В одном случае они могут группироваться очень тесно, плотно: их разброс, или, как говорят, рассеяние возможных значений относительно среднего, будет невелик. В другом случае возможные значения будут группироваться около среднего разреженно, их рассеяние будет велико.

Для характеристики плотности группирования возможных значений случайной величины относительно центра рассеяния служат меры рассеяния, из которых мы рассмотрим две:

— дисперсию;

— среднее квадратическое отклонение (или штандарт).

Дисперсия

Пусть X — случайная величина, а m_x — её математическое ожидание.

Возможные значения случайной величины, как это только что было сказано, могут по-разному группироваться относительно центра группирования (математического ожидання).

Разность $X - m_x$ называется *отклонением* случайной величины X от ее математического ожидания m_x. Так как X — случайная величнна, то и отклонение ее от математического ожидания также будет величииой случайной.

Может быть «среднее отклонение», или лучше сказать математическое ожидание отклонения $M\{X - m_x\}$, и будет подходящей мерой рассеяния возможных значений случайной величины X относительно её среднего значения m_x?

Оказывается, что для любой случайной величины X

$$M\{X - m_x\} = 0 \qquad \text{II.6.3.}$$

и, следовательно, математическое ожидание отклонения не может служить мерой рассеяния.

Докажем справедливость формулы II.6.3 для случая дискретной случайной величины X.

Пусть закон распределения случайной величины X известен

X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_i	...	p_n

Так как случайная величина $X - m_x$ примет какое-либо значение $x_i - m_x$, тогда и только тогда, когда случайная величина X примет значение x_i, то вероятность каждого значения $x_i - m_x$ такова же, что и для x_i.

Таким образом, случайная величина $X - m_x$ подчиняется следующему закону распределения:

$X - m_x$	$x_1 - m_x$	$x_2 - m_x$	...	$x_i - m_x$	...	$x_n - m_x$
p	p_1	p_2	...	p_i	...	p_n

По определению математического ожидания

$$M\{X - m_x\} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)\, p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - m_x \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \text{ то } M\{X - m_x\} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - m_x = m_x - m_x = 0.$$

Этот результат не является неожиданным, так как естественно, что одни возможные отклонения положительны, а другие отрицательны, в результате их взаимного погашения среднее значение отклонения равно нулю.

Поэтому в качестве меры рассеяния случайной величины относительно ее среднего значения лучше взять среднее значение абсолютных величин отклонений или еще удобнее — *среднее значение квадратов отклонений*, т. е. такой параметр: $M\{(X-m_x)^2\}$.

Определение. Дисперсией называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

Этот параметр обозначается через $D\{X\}$,

$$D\{X\} = M\{(X-m_x)^2\} \qquad \text{II.6.4.}$$

Численное значение дисперсии характеризует разброс. рассеяние возможных значений случайной величины относительно её центра рассеивания, каковым и является математическое ожидание случайной величины. (Слово *дисперсия* означает *рассеяние*).

Чтобы получить значение дисперсии дискретной случайной величины X, надо вычислить математическое ожидание не самой случайной величины X, а квадрата отклонения ее от математического ожидания. Как было показано, отклонение $X-m_x$ принимает возможные значения с теми же вероятностями p_i, какие соответствуют значениям случайной величины X.

Очевидно, что это замечание остается в силе и для квадрата отклонения, т. е. квадрат отклонения подчиняется следующему закону распределения:

$(X-m_x)^2$	$(x_1-m_x)^2$	$(x_2-m_x)^2$	...	$(x_n-m_x)^2$
p	p_1	p_2	...	p_n

По определению дисперсии

$$D\{X\} = M\{(X-m_x)^2\} = \sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2 p_i \qquad \text{II.6.5.}$$

Чтобы получить соответствующую формулу для вычисления дисперсии непрерывной случайной величины, будем следовать принципу, примененному в аналогичной ситуации для математического ожидания.

Пусть известен дифференциальный закон $\varphi(x)$ распределения непрерывной случайной величины X.

Заменяя в формуле II.6.5 дискретные значения

$$(x_i - m_x)^2 \text{ и } p_i$$

непрерывными величинами: функцией $(x - m_x)^2$ и элементом вероятности $\varphi(x)\,dx$, а суммирование — интегрированием, распространенным на всю числовую ось, получим

$$D\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 \varphi(x)\,dx \qquad \text{II.6.6}$$

Отметим, что дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. Это не всегда удобно в практике. Поэтому часто пользуются другой характеристикой плотности группирования случайной величины — средним квадратическим отклонением, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины.

Среднее квадратическое отклонение

Определение. *Средним квадратическим отклонением случайной величины* называется корень квадратный из дисперсии этой случайной величины.

Среднее квадратическое отклонение случайной величины X обозначается σ_x, или $\sigma\{X\}$.

Следовательно, для дискретной случайной величины X среднее квадратическое отклонение σ_x выразится соотношением

$$\sigma_x = \sqrt{D\{X\}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 \cdot p_i}\,, \qquad \text{II.6.7.}$$

а для непрерывной случайной величины X соотношением

$$\sigma_x = \sqrt{D\{X\}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 \varphi(x)\,dx} \qquad \text{II.6.8.}$$

Указанные параметры — дисперсия и среднее квадратическое отклонение — следующим образом характеризуют плотность группирования возможных значений случайной величины относительно ее центра рассеяния (математического ожидания): чем меньше величина дисперсии (или среднего квадратического отклонения), тем выше плотность группирования случайной величины относительно ее центра рассеяния, или тем меньше рассеяние ее возможных значений. Это означает, что при большом числе опытов, в каждом из которых случайная величина X будет принимать то или иное значение, малые отклонения случайной величины от центра рассеяния (от математического ожидания) будут наблюдаться чаще, а большие — реже (плотность группирования высокая). И, наоборот, чем больше величина дисперсии (или среднего квадратического отклонения), тем плотность группирования меньше, или тем больше рассеяние возможных значений случайной величины вокруг центра.

Мы можем сравнивать рассеяния двух случайных величин по величинам дисперсий или средних квадратических отклонений следующим образом: если дисперсия $D\{X\}$ случайной величины X меньше, чем дисперсия $D\{Y\}$ случайной величины Y, то мы говорим, что рассеяние случайной величины Y больше, чем рассеяние случайной величины X.

Пример 1. Производится 3 независимых выстрела по мишени; вероятность попадания при каждом выстреле 0,4. Случайная величина X — число попаданий. Определить характеристики величины X: $M\{X\}$, $D\{X\}$, σ_x.

Решение. Ряд распределения величины X имеет вид

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

Следовательно,

$$M\{X\} = 0\cdot 0{,}216 + 1\cdot 0{,}432 + 2\cdot 0{,}288 + 3\cdot 0{,}064 = 1{,}2;$$

$$D\{X\} = (0-1{,}2)^2 p_1 + (1-1{,}2)^2 p_2 + (2-1{,}2)^2 p_3 + (3-1{,}2)^2 p_4 = 0{,}72; \quad \sigma_x = 0{,}848.$$

Пример 2. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $\varphi(x) = Ae^{-|x|}$ (рис. 15).

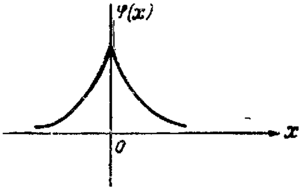

Рис. 15

Найти коэффициент A, $M\{X\}$, $D\{X\}$, σ_x.

Решение.

Так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1, \text{ то } 2A\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1, \text{ откуда } A = \frac{1}{2}.$$

Так как $x \cdot e^{-|x|}$ нечётная функция, то $M\{X\} = 0$,

$$D[X] = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2}\, x^2 e^{-x}\,dx = 2;\ \sigma_x = \sqrt{2}.$$

§ 7. Нормальное распределение

В теории вероятностей, математической статистике и их практических приложениях значительная роль принадлежит так называемому *нормальному распределению* случайной величины.

Нормальное распределение принимается в качестве наиболее подходящего приближенного закона действительного распределения случайной величины, когда её количественные значения возникают как суммарный результат большого числа независимых причин, ни одна из которых существенно не превалирует над остальными.

Такими случайными величинами являются, например, погрешности наблюдений, допускаемые наблюдателем, линейные размеры деталей при массовом производстве, координаты пробоины в мишени при неизменных установках прицела в повторных стрельбах.

Нормальному закону распределения подчинены также многие из тех случайных величин, с которыми инженеру-химику приходится сталкиваться в практической работе. К ним относятся, например, случайные ошибки измерений, возможные отклонения результатов химического и спектрального анализов, логарифм дозы яда, вызывающей смерть. Вся современная методика точностной оценки химических анализов широко пользуется нормальным распределением.

Закон нормального распределения случайной величины X, который также называют законом Гаусса, задается следующей дифференциальной функцией распределения:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_x}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_x^2}(x-m_x)^2}, \qquad \text{II.7.1.}$$

где σ_x — среднее квадратическое отклонение случайной величины X;

m_x — центр рассеяния (математическое ожидание).

График дифференциальной функции нормального распределения (рис. 16) называют *кривой нормального распределения* или *нормальной кривой* (кривой Гаусса).

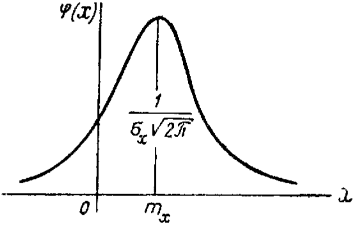

Рис. 16

Исследуя функцию II.7.1, легко вывести, что

1) функция $\varphi(x)$ определена на всей оси Ox;

2) $\varphi(x) > 0$ для всех $x \in (-\infty, \infty)$ [символ $\in$ означает „принадлежит"], т. е. нормальная кривая расположена над осью Ox;

3) график функции $\varphi(x)$ асимптотически приближается к оси Ox при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$;

4) при $x = m_x$ функция имеет максимум, равный $\frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}}$;

5) нормальная кривая симметрична относительно прямой $x = m_x$, так как при замене $(x - m_x)$ на $-(x - m_x)$ выражение II.7.1 не меняется. Нормальное распределение, таким образом, является симметричным, причем центр симметрии распределения есть центр рассеяния — математическое ожидание — m_x. Это связано, очевидно, с тем, что центр тяжести плоской симметричной фигуры всегда лежит на оси симметрии.

Значение случайной величины $x = m_x$ является также и модой, т. е. наивероятнейшим значением случайной величины X.

С изменением величины m_x нормальная кривая, не изменяя своей формы, смещается вдоль оси абсцисс (рис. 17).

Следовательно, параметр m_x характеризует расположение нормальной кривой относительно начала координат.

С изменением среднего квадратического отклонения σ_x изменяется форма кривой нормального распределения (рис. 18).

Так как максимальная ордината нормальной кривой равна $\frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}}$, то отсюда видно, что она увеличивается с уменьшением σ_x.

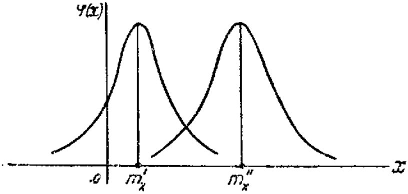

Рис. 17

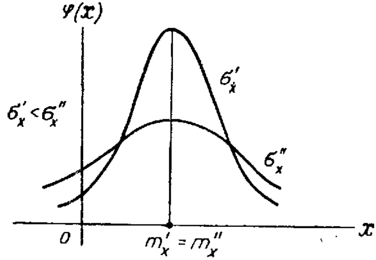

Рис. 18

Но площадь, ограниченная кривой распределения, при любом значении σ_x должна быть равна единице (свойство дифференциальиой функции), следовательно, чем меньше величина σ_x, тем острее, иглообразнее форма нормальной кривой. Наоборот, чем больше величина σ_x, тем кривая распределения становится более пологой.

Мы видим, таким образом, что в первом случае плотность группирования возможных значений случайной величины относительно центра рассеивания выше, чем во втором.

§ 8. Вероятность попадания в заданный интервал нормально распределенной случайной величины

Пусть случайная величина X подчинена нормальному распределению, имеет математичсское ожидание m_x и среднее квадратическое отклонение σ_x.

Вычислим вероятиость того, что случайная величина X примет значение, находящееся в интервале (α, β).

В соответствии с общим правилом вычисления вероятности попадания непрерывной случайной величины в границы заданного интервала с помощью дифференциальной функции распределения (II.5.2), мы можем записать

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_x^2}(x-m_x)^2} dx \qquad \text{II.8.1}$$

Преобразуем эту формулу так, чтобы удобно было пользоваться готовой таблицей.

Сделаем подстановку, полагая

$$\frac{1}{\sigma_x}(x - m_x) = t,$$

откуда

$$\frac{dx}{\sigma_x} = dt.$$

Заменим пределы интегрирования. При $x = \alpha$

$$t = \frac{1}{\sigma_x}(\alpha - m_x),$$

а при $x = \beta$

$$t = \frac{1}{\sigma_x}(\beta - m_x).$$

Тогда вместо (II.8.1) получим

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{1}{\sigma_x}(\alpha - m_x)}^{\frac{1}{\sigma_x}(\beta - m_x)} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad \text{II 8.2}$$

Разбивая промежуток интегрирования на два участка — один от $\frac{1}{\sigma_x}(\alpha - m_x)$ до 0, а второй от 0 до $\frac{1}{\sigma_x}(\beta - m_x)$, получим

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{1}{\sigma_x}(\alpha - m_x)}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{1}{\sigma_x}(\beta - m_x)} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

или, переставляя пределы в первом интеграле и меняя его знак, получим окончательно

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\frac{1}{\sigma_x}(\beta - m_x)} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\frac{1}{\sigma_x}(\alpha - m_x)} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad \text{II.8.3}$$

Функция $e^{-\frac{t^2}{2}}$ в элементарных функциях не интегрируется. Поэтому для выполнения дальнейших вычислений введем специальную функцию вида

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad \text{II.8.4}$$

Эта неэлементарная функция носит название функции Лапласа.* Тогда выражение (II.8.3) примет вид

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma_x}\right). \qquad \text{II.8.5}$$

Нетрудно доказать, что функция Лапласа является функцией нечетной, т. е. удовлетворяющей условию:

$$\Phi(-t) = -\Phi(t).$$

Это свойство функции Лапласа будем учитывать при решении практических задач.

Если $m_x = 0$, то

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma_x}\right) \qquad \text{II.8.6}$$

Если еще вдобавок отрезок $[\alpha, \beta]$ симметричен относительно начала координат, т. е. если $-\beta = +\alpha$, то

$$P(-\beta < X < \beta) = P(|X| < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{-\beta}{\sigma_x}\right).$$

Имея в виду, что функция Лапласа нечетная, получим

$$P(|X| < \beta) = 2\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma_x}\right). \qquad \text{II.8.7}$$

С помощью приближенных методов вычислены значения функции Лапласа для некоторых значений аргумента и результаты сведены в таблицу, приведенную в прилож. 1 (стр. 109).

Если рассматриваемая случайная величина X действительно подчинена нормальному распределению с подходяще по-

---

* Лаплас — выдающийся французский математик, физик и астроном, ввел в теорию вероятностей эту функцию.

добранными параметрами m_x и σ_x, то это значит, что при достаточно большом числе наблюдаемых независимых ее значений относительная частота попаданий этих значений в заданный интервал приближенно равна вероятности, вычисленной по формулам II. 8. 5, II. 8. 6 или II. 8. 7.

Пример 1. Погрешность расходомера жидкого топлива подчинена нормальному распределению с математическим ожиданием $m_x = -10$ *л/мин* и средним квадратическим отклонением $\sigma_x = 20$ *л/мин*. Определить вероятность того, что фактическая погрешность расходомера будет лежать в интервале от -50 до $+50$ *л/мин*.

Решение. По формуле II. 8. 5 имеем

$$P(-50 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-(-10)}{20}\right) - \Phi\left(\frac{-50-(-10)}{20}\right) =$$

$$= \Phi(3) - \Phi(-2) = \Phi(3) + \Phi(2) = 0{,}49865 - 0{,}4772 =$$

$$= 0{,}97585 \approx 0{,}98.$$

Таким образом, с вероятностью 0,98 можно надеяться, что ошибка расходомера будет в пределах ± 50 *л/мин*. Это означает, что в подавляющем большинстве случаев погрешность расходомера не выйдет за эти пределы и только в некоторых случаях окажется превосходящей их.

Пример 2. Счетчик-литромер указывает только целые значения количества прошедшей через него жидкости: одно деление — 100 *л*, два деления — 200 *л*, три деления — 300 *л* и т. д.

Погрешности счетчика подчинены нормальному распределению. Счетчик не имеет систематической погрешности, т. е. $m_x = 0$. Среднее квадратическое отклонение показаний соответствует двум делениям счетчика. Определить вероятность того, что погрешность счетчика выйдет за пределы ± 400 *л*.

Решение. Случайную величину X — погрешность счетчика — будем выражать в его делениях, тогда среднее квадратическое отклонение $\sigma_x = 2$. Сначала вычислим, с какой вероятностью погрешность счетчика будет в пределах ± 4 деления. Положим $\beta = +4$ и $\alpha = -4$. Поскольку интервал $(-4;\ 4)$ симметричен относительно начала отсчета, а систематическая погрешность отсутствует, $m_x = 0$, то, пользуясь соотношением II.8.7, получим

$$P(|X| < \beta) = 2\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma_x}\right) = 2\Phi\left(\frac{4}{2}\right) = 2\Phi(2) - 0{,}954.$$

Теперь, зная с какой вероятностью погрешность счетчика-литромера будет попадать в интервал ± 4 деления, легко вычислить вероятность того, что погрешность в измерении количества жидкости, протекшей через литромер, будет принимать значения, располагающиеся вне интервала (—4; 4), т. е. вычислить вероятность $P(|X|>\beta)$.

Это событие противоположно тому событию, вероятность которого мы вычислили прежде. Следовательно,

$$P(|X|>\beta)=1-P(|X|<\beta)=1-0{,}954=0{,}046=4{,}6\%.$$

Окончательно: при данной точности работы счетчика-литромера, характеризующейся средним квадратическим отклонением $\sigma_x=2$ деления, мы ожидаем, что в 4,6% случаев измерений погрешность показаний счетчика выйдет за пределы ± 4 деления (± 400 *л*).

Пример 3. Условия те же, что и в предыдущей задаче, т. е. $m_x=0$; $\sigma_x=2$ деления. Определить пределы, за которые погрешность счетчика-литромера не выйдет с вероятностью $p=0{,}9$.

Решение. По формуле II. 8. 7 имеем

$$P(|X|<\beta)=2\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma_x}\right)=0{,}9, \text{ откуда } \Phi\left(\frac{\beta}{\sigma_x}\right)=0{,}45.$$

По таблице функции Лапласа (прилож. I) найдем для $\Phi(t)=0{,}45$

$$t=1{,}65. \text{ Но } t=\frac{\beta}{\sigma_x}, \text{ где } \sigma_x=2,$$

откуда

$$\beta=2\cdot 1{,}65=3{,}3.$$

Таким образом, с вероятностью 0,9 можно ожидать, что погрешность счетчика-литромера будет лежать в пределах $\pm 3{,}3$ деления литромера.

§ 9. Правило «три сигма»

Установим теперь полезное для практических расчетов правило приближенной оценки допустимой погрешности измерений — так называемое правило «три сигма».

Определим вероятность того, что случайная погрешность измерения, подчиненная нормальному распределению, не выйдет за пределы интервала $\pm 3\sigma_x$, имея в виду, что систематическая погрешность отсутствует, т. е. что $m_x=0$. Тогда, согласно II. 8. 7, имеем

$$P(|X|<3\sigma_x)=2\Phi\left(\frac{3\sigma_x}{\sigma_x}\right)=2\Phi(3)=0{,}997.$$

Следовательно, если случайная погрешность измерения подчинена нормальному распределению, мы ожидаем, что при большом количестве измерений случайные погрешности в

99,7% случаев будут лежать в пределах интервала, ограниченного тремя средними квадратическими отклонениями, и только в небольшом количестве случаев (0,3%) мы ожидаем выхода случайной погрешности за пределы этого интервала.

Таким образом, мы можем считать, что практически все рассеивание случайной величины, подчиненной нормальному распределению, относительно центра рассеивания укладывается в интервал, равный трем средним квадратическим отклонениям. Отклонения же случайной величины от ее центра рассеивания больше трех средних квадратических отклонений практически исключаются (встречаются, но весьма и весьма редко).

Это правило удобно при расчетах: оно позволяет достаточно обоснованно наметить практически возможные пределы уклонения (максимальная погрешность) изучаемой случайной величины от ее математического ожидания (центра рассеяния), если эта случайная величина подчинена нормальному распределению. Если же в нашем распоряжении нет никаких сведений о распределении случайной величины, тогда берут максимальное практически возможное отклонение случайной величины от ее среднего значения и делят это отклонение на 3 — получается грубо ориентировочное значение среднего квадратического отклонения σ_x.

§ 10. Приведенная функция Лапласа

В артиллерийской практике, связанной с бомбометанием и стрельбой по цели, имеющей вид длинной полосы, вместо среднего квадратического отклонения σ_x предпочитают другую характеристику рассеяния — «срединное отклонение» E_x.

Срединным отклонением называется половина длины участка ($2E_x$), симметричного относительно центра рассеяния, вероятность попадания в который равна $\frac{1}{2}$.

Геометрически срединное отклонение E_x есть половина длины участка оси абсцисс, симметричного относительно центра рассеяния m_x, на который опирается половина площади, ограниченной кривой распределения $\varphi(x)$ (рис. 19).

Если случайная величина X имеет рассеяние с центром m_x, то срединное отклонение E_x определяется равенством

$$P(|X-m_x|<E_x)=\frac{1}{2}. \qquad \text{II.10.1}$$

Найдем связь между параметрами E_x и σ_x.

Участок $|X-m_x|$ можно представить как интервал $(m_x-E_x,\ m_x+E_x)$. Тогда, по формуле II.8.5, вероятность попадания случайной величины X в интервал $(m_x - E_x, m_x + E_x)$ равна

$$P(m_x - E_x < X < m_x + E_x) = \Phi\left(\frac{E_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{-E_x}{\sigma_x}\right) \quad \text{II.10.2.}$$

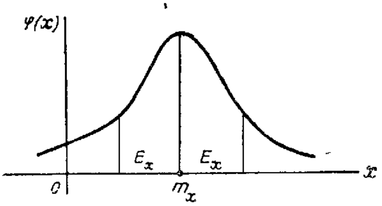

Рис. 19

Зная, что функция Лапласа нечетная, придадим полученному результату следующий вид:

$$P(|X - m_x| < E_x) = 2\Phi\left(\frac{E_x}{\sigma_x}\right) \quad \text{II.10.3.}$$

Сопоставляя формулы II.10.1 и II.10.3, получим

$$\Phi\left(\frac{E_x}{\sigma_x}\right) = \frac{1}{4} \quad \text{II.10.4.}$$

По таблице значений функции Лапласа находим

$$\frac{E_x}{\sigma_x} \approx 0{,}674.$$

Отсюда

$$E_x \approx 0{,}674\,\sigma_x, \quad \text{а } \sigma_x \approx \frac{E_x}{0{,}674} \quad \text{II.10.5.}$$

Из формулы II.8.5, применяя формулу II.10.5, получаем

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(0{,}674\,\frac{\beta - m_x}{E_x}\right) - \Phi\left(0{,}674\,\frac{\alpha - m_x}{E_x}\right) \quad \text{II.10.6.}$$

Чтобы избежать необходимости каждый раз умножать аргумент функции Лапласа на 0,674, введем новую функцию $\hat{\Phi}(x) = \Phi(0{,}674x)$, называемую *приведенной функцией Лапласа.*

Таблица значений функции $\hat{\Phi}(x)$ имеется в справочниках и в подробных курсах теории вероятностей.

Пользуясь приведенной функцией Лапласа, преобразуем формулу II.8.5 к виду

$$P(\alpha < X < \beta) = \hat{\Phi}\left(\frac{\beta - m_x}{E_x}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{\alpha - m_x}{E_x}\right) \qquad \text{II.10.7.}$$

§ 11. Закон равной вероятности

Если заранее известно, что все возможные значения случайной величины лежат в пределах некоторого интервала $a < X < b$, кроме того, известно, что в пределах интервала все значения случайной величины равновероятны, т. е. обладают одной и той же плотностью вероятности, то такой закон распределения носит название *закона равной вероятности*, или закона равномерной плотности.

Учитывая это определение закона равной вероятности, мы получим следующее весьма простое математическое выражение его дифференциальной функции распределения на интервале $(-\infty, +\infty)$:

$$\begin{cases} \varphi(x) = k & \text{при } a \leqslant x \leqslant b; \\ \varphi(x) = 0 & \text{при } x < a \text{ и } x > b, \end{cases}$$

где $k = \text{const}$.

График этой функции представлен на рис. 20.

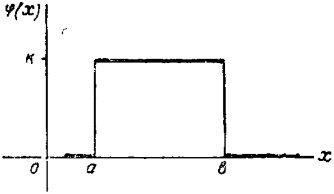

Рис. 20

Величину постоянной k определим из условия, что вся площадь под кривой распределения должна быть равна единице

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \int_a^b k\,dx - 1.$$

Отсюда нетрудно определить, что

$$k = \frac{1}{b - a}.$$

Следовательно, окончательно выражение дифференциальной функции распределения в случае закона равной вероятности запишется так:

$$\begin{cases} \varphi(x)=0 & \text{при} \quad x<a \text{ и } x>b, \\ \varphi(x)=\dfrac{1}{b-a} & \text{при } a\leqslant x\leqslant b. \end{cases} \qquad \text{II.11.1.}$$

Как видно из рис. 20, случайная величина в случае ее распределения по закону равной вероятности не имеет моды (наивероятнейшего значения). Математическое ожидание для случайной величины, подчиненной закону равной вероятности, легко определится вычислением абсциссы центра тяжести плоской фигуры, ограниченной сверху кривой (в данном случае прямой) распределения

$$m_x=\frac{b+a}{2} \qquad \text{II.11.2.}$$

Определим, наконец, среднее квадратическое отклонение для случайной величины, подчиненной закону равной вероятности, полагая для упрощения выкладок, что математическое ожидание равно нулю, т. е. что $m_x=0$. (Это будет при $a=-b$).

Пользуясь выведенным ранее соотношением II.6.6, определим вначале дисперсию (квадрат среднего квадратического отклонения)

$$D\{X\}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)(x-m_x)^2dx.$$

В рассматриваемом случае $a=-b$ и равенства II. 11. 1 принимают следующий вид:

$$\varphi(x)=0 \quad \text{при} \quad x<-b \text{ и } x>b,$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{2b} \quad \text{при } -b\leqslant x\leqslant b.$$

Тогда дисперсия определится так:

$$D\{X\}=\int\limits_{-b}^{-b}\frac{x^2}{2b}\,dx=\frac{1}{2b}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-b}^{b}=\frac{b^2}{3}. \qquad \text{II.11.3.}$$

Среднее квадратическое отклонение, как известно, равно корню квадратному из дисперсии.

Следовательно,

$$\sigma_x=\frac{b}{\sqrt{3}} \qquad \text{II.11.4.}$$

Отметим, что в практике с законом равной вероятности мы встречаемся, когда имеем дело с округлениями случайных значений измеряемой случайной величины до определенных целых значений.

Например, если мы при измерениях температуры жидкости округляем показания (а они — случайны!) термометра до целых градусов, то случайные погрешности от таких округлений будут подчинены закону равной вероятности.

§ 12. Задачи для упражнений

К § 1, 2

2.1. В денежной лотерее выпущено 1000 билетов. Разыгрывается один выигрыш по 100 руб.; четыре по 50 руб.; пять по 40 руб. и десять выигрышей по 10 руб. Составить ряд распределения стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

2.2. Составить ряд распределения и построить многоугольник распределения вероятностей случайного попадания мячом в корзину при одном броске, если вероятность попадания мячом в корзину при одном броске $p = 0,3$.

2.3. Монета брошена 6 раз. Составить ряд распределения и построить многоугольник распределения появления герба при шести бросаниях, считая вероятность появления герба равной $\frac{1}{2}$.

Указание. При построении многоугольника распределения взять наиболее удобный масштаб по оси, на которой откладываются значения p_i.

2.4. Производится 4 выстрела по мишени с вероятностью попадания при одном выстреле 0,3. Составить ряд распределения и построить многоугольник распределения числа случайных попаданий в мишень.

2.5. Производится набрасывание колец на колышек до первого попадания либо до полного израсходования всех колец, число которых равно пяти. Составить ряд распределения случайного числа брошенных колец, если вероятность наброса равна 0,9.

2.6. Производится стрельба по некоторой цели до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле p. Случайная величина X — число выстрелов. Построить ряд распределения величины X. По первым пяти членам ряда построить многоугольник распределения, если $p=0,3$.

К § 3, 4

2.7. Построить график функции распределения (интегрального закона распределения) в условиях задач:

1) **2.2**, 2) **2.4**.

2.8. Распределение случайной величины X задано интегральной функцией

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<-1; \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{3} & \text{при } -1\leqslant x\leqslant 2; \\ 1 & \text{при } x>2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате опыта X примет значение, заключенное в интервале $(0;\ 1)$.

2.9. Интегральная функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant -2; \\ A+B\arcsin\frac{x}{2} & \text{при } -2<x<2; \\ 1 & \text{при } x\geqslant 2. \end{cases}$$

Определить: а) при каких значениях A и B функция распределения является непрерывной;

б) вероятность того, что случайная величина X окажется в пределах интервала $(-1;\ 1)$.

2.10. Каково должно быть A, чтобы функция

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0; \\ A-e^{-x} & \text{при } 0\leqslant x<\infty, \end{cases}$$

являлась интегральной функцией распределения случайной величины X. Построить график функции $F(x)$.

К § 5

2.11. Интегральная функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Найти плотность вероятности случайной величины X.

2.12. Дифференциальная функция распределения случайной величины X имеет вид

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<-\frac{\pi}{2}, \\ A\cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}; \\ 0 & \text{при } x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

а) Найти коэффициент A.

б) Построить график функции $\varphi(x)$.

в) Найти интегральную функцию распределения и построить её график.

г) Найти вероятность попадания величины X на участок от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

2.13. Дифференциальная функция распределения случайной величины X имеет вид

$$\varphi(x)=A\,x^2e^{-kx}\quad (k>0;\quad 0\leqslant x<\infty).$$

а) Найти коэффициент A.

б) Найти интегральную функцию распределения случайной величины X.

в) Вычислить вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(0;\ \frac{1}{k}\right)$.

2.14. Интегральная функция распределения имеет вид

$$\dot{F}(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{9}{x^2} & \text{при } x>3;\\ 0 & \text{при } x\leqslant 3.\end{cases}$$

а) Найти дифференциальную функцию распределения случайной величины X.

б) Найти вероятность попадания случайной величины в интервал (5; 10).

2.15. Дифференциальная функция распределения случайной величины X имеет вид

$$\varphi(x)=Ae^{-|x|}\,(-\infty<x<\infty).$$

1) Найти: а) значение A;

б) интегральную функцию распределения $F(x)$.

2) Построить графики функций $\varphi(x)$ и $F(x)$.

К § 6

2.16. Производится один выстрел по мишени с вероятностью попадания p. Составить ряд распределения числа попаданий.

Определить математическое ожидание и дисперсию числа попаданий при одном выстреле.

2.17. Производится три независимых выстрела по мишени; вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4. Случайная величина X — число попаданий.

Определить математическое ожидание $M\{X\}$, дисперсию $D\{X\}$ и среднее квадратическое отклонение σ_x случайной величины X.

2.18. Стрелок ведет стрельбу по мишени до первого попадания, имея боезапас 4 патрона. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Случайная величина X — число неизрасходованных патронов.

Найти $M\{X\}$ и σ_x.

2.19. Доказать: *дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания,* т. е.

$$D\{X\} = M\{X^2\} - [M\{X\}]^2.$$

Замечание. Этой формулой можно пользоваться при решении последующих задач.

2.20. В результате испытания двух приборов (A и $Б$) установлена вероятность наблюдения помех, оцениваемых по трехбалльной системе.

Уровень помех		1	2	3
Вероятность наблюдения помех данного уровня	Прибор A	0,20	0,06	0,04
	Прибор B	0,06	0,04	0,10

По приведенным данным выбрать лучший прибор, если лучшим является тот, который в среднем имеет меньший уровень помех.

Указание. Сравнить математические ожидания случайного уровня помех для приборов A и $Б$. Если они равны, то сравнить средние квадратические отклонения.

2.21. Найти математическое ожидание случайной величины X, дифференциальный закон распределения которой имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } (-\infty < x \leqslant 3); \\ \dfrac{16}{\pi} \cdot \dfrac{1}{25 - 6x + x^2} & \text{при } (3 < x < 7); \\ 0 & \text{при } (7 \leqslant x < +\infty). \end{cases}$$

2.22. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, дифференциальный закон распределения которой имеет вид (распределение Лапласа)

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

2.23. При наличии большого числа частиц (молекул газа, электронов в металле и т. п.), находящихся в неупорядоченном движении, скорость v выбранной частицы в данный момент времени t_0 является случайной величиной. Дифференциальный закон распределения такой случайной величины найден Максвеллом

$$\varphi(v) = \begin{cases} \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} v^2 e^{-h^2 v^2} & \text{при } v > 0; \\ 0 & \text{при } v < 0. \end{cases}$$

(Постоянная h зависит от природы частиц и может быть найдена экспериментально или выведена из теоретических соображений).

а) Построить график распределения Максвелла.

б) Найти среднее значение (математическое ожидание) скорости частиц для распределения Максвелла.

в) Доказать, что мода (наиболее вероятное значение) скорости частиц обратна постоянной h.

2.24. Случайная величина X подчинена дифференциальному закону распределения, который задан графиком (рис. 21), OA — прямая линия, $AB \perp Ox$, точка B $(1,0)$.

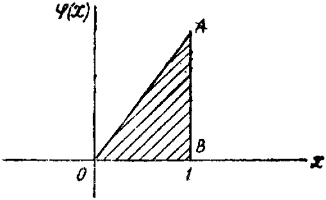

Рис. 21

Составить аналитическое выражение для данной дифференциальной функции распределения.

Найти $M\{X\}$, $D\{X\}$, σ_X.

2.25. Случайная величина X задана интегральной функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 1 & \text{при } x > \pi \end{cases}$$

Найти: а) дифференциальную функцию распределения $\varphi(x)$;

б) вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение в интервале $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$;

в) математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

2.26. Интегральная функция распределения вероятностей имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x_0^3}{x^3} & \text{при } x \geqslant x_0; \\ 0 & \text{при } x \leqslant x_0. \end{cases}$$

Найти $M\{X\}$ и $D\{X\}$.

2.27. Обработка результатов одной переписи показала, что дифференциальный закон распределения возраста лиц, занимающихся научной работой, может быть представлен формулой

$$\varphi(t) = k(t - 22{,}5)(97{,}5 - t)^5, \text{ где } t \text{ — годы.}$$

Определить: а) средний возраст научного работника;

б) во сколько раз число научных работников в возрасте ниже среднего превышает число научных работников в возрасте выше среднего.

К § 7, 8, 9, 10

2.28. Случайная величина X распределена по нормальному закону, математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 30 и 10. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (10; 50).

2.29. Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками.

Систематическая ошибка равна 50 *м* в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 100$ *м*.

Найти: а) вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 150 *м*;

б) вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинной.

2.30. Измерительный прибор имеет систематическую ошибку 5 *м* и среднее квадратическое отклонение 74 *м*.

Какова вероятность того, что ошибка измерения не превзойдет по абсолютной величине 5 *м*?

2.31. Срединная ошибка (срединное отклонение) определения дальности радиолокатором равна 25 *м*.

Определить: а) дисперсию ошибок определения дальности;

б) вероятность получения ошибок в дальности по абсолютной величине не более чем 20 *м*.

Указание. Срединная ошибка E и среднее квадратическое отклонение связаны формулой $E = 0{,}6744\ \sigma$.

2.32. В результате проверки точности работы прибора установлено, что 80% ошибок не вышло за пределы $\pm$ 20 *м*. Определить среднее квадратическое отклонение ошибок прибора, если известно, что систематических ошибок прибор не имеет, а случайные ошибки распределены по нормальному закону.

2.33. Заряд охотничьего пороха отвешивают на весах, имеющих срединную ошибку взвешивания $E = 100$ *мг*. Номинальный вес порохового заряда 2,3 *г*. Определить вероятность повреждения ружья, если максимально допустимый вес порохового заряда 2,5 *г*.

2.34. На станке изготовляется некоторая деталь. Её длина L представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону, и имеет среднее значение $l_{cp} = 20$ *см* и дисперсию, равную 0,2 см.

а) Найти вероятность того, что длина детали будет заключена между 19,7 *см* и 20,3 *см*, т. е. уклонение в ту или другую сторону не превзойдет 0,3 *см*.

б) Какую длину изделия можно гарантировать с вероятностью 0,95?

2.35. Пусть изготовляемые цехом детали по размеру диаметра распределяются по нормальному закону, имеют среднее значение диаметра 4,5 *см* и среднее квадратическое отклонение 0,05 *см*.

Найти вероятность того, что размер диаметра взятой наудачу детали отличается от среднего размера диаметра не более чем на 1 *мм*.

2.36. Вес вылавливаемых в пруду рыб подчиняется нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma_x = 25$ *г* и математическим ожиданием $m_x = 375$ *г*.

Найти вероятность того, что вес одной пойманной рыбы будет:

а) заключен в пределах от 300 до 425 *г*;

б) не более 450 *г*;

в) не менее 300 *г*.

2.37. Среднее квадратическое отклонение случайной величины, распределенной по нормальному закону, равно 2 *см*.

Найти в каких границах следует ожидать отклонение значения случайной величины от ее математического ожидания, чтобы вероятность невыхода отклонения за эти границы была равна 0,95.

2.38. Найти дисперсию случайной величины, распределенной по нормальному закону, если известно, что отклонение от математического ожидания, не превосходящее 0,1 *см*, имеет место с вероятностью 0,7887.

2.39. Самолет производит бомбометание одной бомбой по железнодорожной насыпи, ширина которой 20 *м*. Направление полета перпендикулярно к насыпи. Прицеливание производится по средней линии насыпи; систематической ошибки прицел не дает. Среднее квадратическое отклонение $\sigma = 36$ *м*.

Найти вероятность попадания в насыпь.

2.40. Самолет-штурмовик производит обстрел колонны войск противника, ширина которой 4 *м*. Полет — вдоль колонны, прицеливание — по средней линии колонны. Вследствие скольжения стреляющего самолета имеется систематическая ошибка — точка попадания смещается вправо в среднем на 1 *м*, среднее квадратическое отклонение в боковом направлении $\sigma_б = 7$ *м*.

Найти вероятность попадания в колонну при одном выстреле.

2.41. Нормально распределенная случайная величина X имеет математическое ожидание, равное нулю. Определить срединное отклонение E, при котором значение $P(\alpha < X < \beta)$ было бы наибольшим $(0 < \alpha < \beta)$.

К § 11

2.42. Поезда метрополитена идут с интервалом 2 *мин*. Пассажир выходит на платформу в произвольный момент времени.

Найти математическое ожидание и дисперсию времени ожидания поезда.

2.43. Дифференциальная функция распределения случайной величины X имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h} & \text{при } |x - a| \leqslant h; \\ 0 & \text{при } |x - a| > h, \end{cases}$$

где a и h — постоянные.

а) Определить $M\{X\}$; $D\{X\}$.

б) Составить интегральную функцию распределения величины X.

в) Изобразить дифференциальную и интегральную функции распределения графически.

2.44. Минутная стрелка электрических часов делает скачок в середине минуты. Определить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение ошибки определения времени по этим часам.

Вычислить вероятность ошибиться по этим часам не больше чем на 10 *сек*.

Глава III

СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 1. Законы распределения системы двух случайных величин

Системой двух случайных величин называется совокупность двух случайных величин X и $У$, рассматриваемая как одио целое.

Одну случайную велнчину мы интерпретировали как случайную точку на оси абсцисс. Очевидно, что систему двух случайных велнчин можно интерпретировать как случайную точку на плоскости xOy.

Интегральной функцией распределения системы двух случайных величин $(X, У)$ называется вероятность совместного выполнения двух неравенств

$$X < x \quad \text{и} \quad У < y, \text{ т. е.}$$

$$F(x, y) = P(X < x, \ У < y). \qquad \text{III. 1. 1.}$$

Это есть вероятность попадания случайной точки $(X, У)$ в бесконечный „квадраит" с вершиной в точке (x, y), лежащий левее и ниже ее (рис. 22).

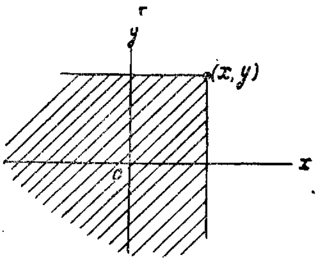

Рис. 22

Функция распределения одной случайной величины X—обозначим ее $F_1(x)$—есть вероятность попадания случайной точки в полуплоскость, ограниченную справа абсциссой x (рнс. 23). Аналогично для одной величины $У$: функция $F_2(y)$ — есть вероятность попадания в полуплоскость, ограниченную сверху ординатой y (рис. 24). Отсюда следует, что при одиом нз аргументов, равном $+\infty$, функция распределения системы превращается в функцию распределения случайной величины, соответствующей другому аргументу

$$F(x, +\infty) = F_1(x); \quad F(+\infty, y) = F_2(y) \qquad \text{III. 1. 2.}$$

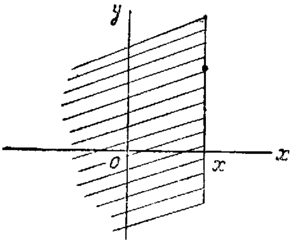

Рис. 23

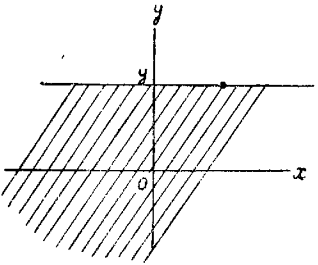

Рис. 24

В самом деле, при «смещении» той или иной границы квадранта на $+\infty$ в пределе квадрант превращается в полуплоскость, вероятность попадания в которую есть функция распределения одной из величин, входящих в систему. Распределение системы непрерывных величин обычно характеризуют *плотностью распределения (дифференциальным законом)* $\varphi(x, y)$.

Очевидно, что вероятностная характеристика системы двух случайных величин — дифференциальная функция распределения $\varphi(x, y)$ двух переменных x и y — не может быть дана кривой распределения: она должна быть дана поверхностью распределения (рис. 25).

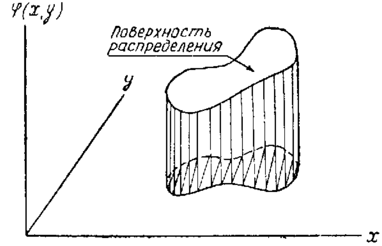

Рис. 25

Свойства дифференциальной функции распределения системы двух случайных величин

1) Дифференциальная функция распределения системы двух случайных величин есть функция неотрицательная

$$\varphi(x, y) \geqslant 0 \quad \text{(без доказательства)} \qquad \text{III. 1. 3.}$$

2) Двойной интеграл в бесконечных пределах от дифференциальной функции распределения системы равен единице

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)\, dx\, dy = 1 \qquad \text{III. 1. 4.}$$

Справедливость этого свойства следует из того, что вероятность попадания случайной точки на плоскость xOy есть вероятность достоверного события.

Как и для одной случайной величины, дифференциальная функция распределения системы двух случайных величин дает возможность вычислять вероятности попадания случайной точки $(X, У)$ в заданную область.

Обозначим событие, состоящее в попадании случайной точки в область Q, так:

$$(X, У) \in Q.$$

По аналогии с одной случайной величиной вероятность попадания случайной точки (точки со случайными координатами x и y) в заданную область Q произвольной формы будет выражаться соотношением

$$P[(X, У) \in Q] = \iint\limits_{(Q)} \varphi(x, y)\, dx\, dy \qquad \text{III. 1. 5.}$$

Геометрически эта вероятность (рис. 25) представляется объемом цилиндрического тела, имеющего в основании область Q и ограниченного сверху поверхностью распределения.

Так, вероятность попадания случайной точки в прямоугольник R (рис. 26) будет выражаться соотношением

$$P[(X, Y) \in R] = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \int\limits_{\gamma}^{\delta} \varphi(x, y)\, dx\, dy \qquad \text{III. 1. 6.}$$

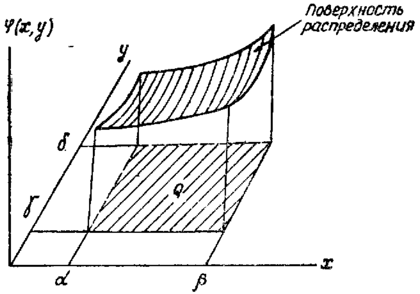

Рис. 26

Пользуясь этой формулой, можно выразить функцию распределения системы $F(x, y)$ через плотность распределения $\varphi(x, y)$. Функция $F(x, y)$ есть вероятность попадания в бесконечный квадрант, т. е. в прямоугольник, ограниченный абсциссами $-\infty$ и x и ординатами $-\infty$ и y.
Отсюда

$$F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} \varphi(x, y)\, dx\, dy \qquad \text{III. 1. 7.}$$

Зная закон распределения системы двух случайных величин, можно определить законы распределения отдельных величин, входящих в систему.

Так как

$$F_1(x) = F(x, \infty); \quad F_2(y) = F(\infty, y),$$

то

$$F_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y)\, dx\, dy,$$

откуда, дифференцируя по x, получим выражение для плотности распределения величины X

$$\varphi_1(x) = F'_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)\, dy \qquad \text{III. 1. 8.}$$

Аналогично

$$\varphi_2(y) = F'_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)\, dx \qquad \text{III. 1. 9.}$$

Чтобы получить плотность распределения одной из величин, входящих в систему, нужно плотность распределения системы проинтегрировать в бесконечных пределах по аргументу, соответствующему другой случайной величине.

Случайные величины X и $У$ называются *независимыми*, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая.

В противном случае величины X и $У$ называются *зависимыми*.

В качестве критерия взаимной независимости случайных величин X и $У$ примем (без доказательства) формулу

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y) \qquad \text{III. 1. 10.}$$

Это значит, что если дифференциальную функцию распределения системы случайных величин X и $У$ можно представить как произведение двух функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента, то случайные величины X и $У$ независимы.

Обратно, если известно, что X и $У$ взаимно независимы, то дифференциальная функция распределения системы этих случайных величин равна произведению дифференциальных функций распределения каждой из случайных величин в отдельности.

Возникновение указанного критерия взаимной независимости для случайных величин естественно, если принять во внимание аналогичный критерий взаимной независимости двух случайных событий и учесть, что понятие дифференциального закона распределения случайной величины является расширением понятия вероятности случайного события.

Изучение системы трех и более случайных величин мы проводить здесь не будем.

§ 2. Числовые характеристики функции случайных величин

При рассмотрении случайных явлений может оказаться, что интересующая нас случайная величина, скажем Z, является заданной функцией одного или нескольких аргументов, причем каждый аргумент также является случайной величиной.

Ставится такая задача: найти числовые характеристики заданной функции, если известен закон распределения системы аргументов.

Начнем с функции одного аргумента

$$Z = f(X).$$

Известен закон распределения случайной величины X. Попытаемся определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z, не зная и не находя закона её распределения.

Пусть X — дискретная случайная величина, закон распределения которой задан следующим рядом:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
P_i	P_1	P_2	...	P_n

Так как каждому значению x_i случайной величины X соответствует одно определенное значение $f(x_i)$ случайной величины Z, то появлению значения x_1 с вероятностью p_1 соответствует появление значения $f(x_1)$ с той же вероятностью p_1, появлению значения x_2 с вероятностью p_2 соответствует появление значения $f(x_2)$ с той же вероятностью p_2 и т. д.

Указанное соответствие выразим следующей таблицей.

$f(x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$
P_i	P_1	P_2	...	P_n

Может быть, что в этой таблице значения $f(x_i)$ расположатся не в возрастающем порядке и некоторые из них окажутся одинаковыми. Такая таблица не является рядом распределения дискретной случайной величины Z, но это не препятствует вычислению математического ожидания $M\{Z\}$ как суммы произведений возможных значений случайной величины на вероятности этих значений

$$M\{Z\} = M\{f(x)\} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) P_i \qquad \text{III. 2. 1.}$$

Заменяя в формуле III.2.1 сумму интегралом в бесконечных пределах, вероятности p_i — элементом вероятности —

$\varphi(x)\,dx$, где $\varphi(x)$ – плотность распределения X, получим соответствующую формулу для случая, когда X — непрерывная случайная величина

$$M\{f(x)\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad \text{III. 2. 2.}$$

Применяя аналогичные рассуждения, получим следующие формулы:

а) для дисперсии функции от одного случайного аргумента X, если X — дискретная случайная величина

$$D\{f(X)\} = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - M\{f(X)\}]^2 \cdot P_i, \qquad \text{III. 2. 3.}$$

если X — непрерывная случайная величина

$$D\{f(X)\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - M\{f(X)\}]^2\,\varphi(x)\,dx; \qquad \text{III.2.4.}$$

б) для математического ожидания и дисперсии функции от двух непрерывных случайных аргументов X и Y, т. е. функции $Z = f(X, Y)$, с известной плотностью распределения $\varphi(x, y)$ системы (X, Y).

$$M\{f(X,Y)\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int f(x, y)\,\varphi(x, y)\,dx\,dy \qquad \text{III. 2. 5.}$$

$$D\{f(X, Y)\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int [f(x, y) - M\{f(X,Y)\}]^2 \varphi(x, y)\,dx\,dy \ \text{III.2.6.}$$

§ 3. Теоремы о математическом ожидании

Теорема I.

Математическое ожидание постоянной (не случайной) величины C равно этой величине

$$M\{C\} = C \qquad \text{III. 3. 1.}$$

Доказательство.

Так как постоянная величина всегда принимает только одно значение, то вероятность того, что она примет это значение, есть вероятность достоверного события, т. е. равна единице. Следовательно, по соотношению II.6.1 имеем

$$M\{C\} = C \cdot 1 = C.$$

Теорема II.

Если случайная величина Z является произведением случайной величины X и постоянной C, т. е. имеет вид $Z=CX$, то её математическое ожидание выражается соотношением

$$M\{Z\} = C\,M\{X\}.$$

Другая формулировка этой теоремы: постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

Доказательство.

Для случайных величин непрерывного типа эта теорема доказывается применением соотношения III.2.2. Действительно, если $f(X) = CX$, то

$$M\{Z\} = M\{f(X)\} = M\{CX\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} Cx\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= C\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx = CM\{X\}.$$

Для случайных величин прерывного типа эта теорема доказывается применением формулы III.2.1.
Итак

$$M\{CX\} - C\,M\{X\} \qquad \text{III. 3. 2.}$$

Теорема III.

Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ равно сумме математических ожиданий этих случайных величин

$$M\{X_1 + X_2 + \ldots + X_n\} = M\{X_1\} + M\{X_2\} + \ldots + M\{X_n\} \qquad \text{III. 3. 3.}$$

Докажем эту теорему только для суммы двух непрерывных случайных величин.

Эта частная теорема формулируется так: дана система двух случайных величин $(X, У)$. Известен дифференциальный закон распределения этой системы $\varphi(x, y)$. Известны также математические ожидания каждой из этих двух случайных величин: $M\{X\}$ и $M\{У\}$.
Требуется доказать, что

$$M\{X + У\} = M\{X\} + M\{У\} \qquad \text{III. 3. 4.}$$

Доказательство.

Пусть $Z = f(X, У) = X + У$. По формуле III. 2. 5

$$M\{Z\}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int f(x,y)\,\varphi(x,y)\,dxdy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int (x+y)\,\varphi(x,y)\,dxdy=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\,dy+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} ydy\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\,dx \qquad \text{III.3.5.}$$

В параграфе 1 этой главы было показано, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dy=\varphi_1(x),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dx=\varphi_2(y),$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$ —дифференциальные функции распределения одной случайной величины X или, соответственно, $У$. Тогда соотношение III. 3. 5 примет вид

$$M\{Z\}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\varphi_1(x)\,dx+\int\limits_{\infty}^{+\infty}y\,\varphi_2(y)dy.$$

Применяя соотношение II. 6. 2, получаем

$$M\{Z\}=M\{X\}+M\{Y\},$$

что и требовалось доказать.

Для суммы произвольного числа случайных величин

$$M\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i\right\}=\sum_{i=1}^{n}M\left\{X_i\right\} \qquad \text{III. 3. 6.}$$

Доказательство проводится методом математической индукции.

Отметим одну важнейшую особенность всех трех рассмотренных теорем о математическом ожидании: мы не предъявляли никаких требований к законам распределения случайных величин. Это значит, что эти теоремы применимы ко всем случайным величинам, каким бы законам распределения они ни подчинялись. Точно так же в теореме III мы не требовали независимости случайных величин X_1, X_2, ..., X_n. Следовательно, эта теорема может применяться как для независимых, так и для зависимых случайных величин.

Теорема IV.

Математическое ожидание произведения независимых случайных величин X_1, X_2, ..., X_n равно произведению их математических ожиданий

$$M\{X_1X_2 \dots X_n\} = M\{X_1\} \cdot M\{X_2\} \dots M\{X_n\}, \quad \text{III.3.7.}$$

если $X_1, X_2, \dots, X_n$—независимые случайные величины, короче

$$M\{\prod_{i=1}^{n} X_i\} = \prod_{i=1}^{n} M\{X_i\}. \quad \text{III.3 7}'.$$

Докажем эту теорему только для произведения двух независимых непрерывных случайных величин X и $У$.

Доказательство.

Пусть $Z = f(X, У) = X \cdot У$.

Полагаем, что закон распределения $\varphi(x, y)$ системы $(X, У)$ двух случайных величин задан. Поскольку $Z = f(X, У) = X \cdot У$, то по формуле III.2.5

$$M\{Z\} = M\{X \cdot У\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int xy\varphi(x, y)\,dxdy \quad \text{III.3.8.}$$

По условию, случайные величины X и $У$ являются независимыми. А это, как известно (III.1.10), означает, что

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y).$$

Следовательно, соотношение III.3.8 примет такой вид

$$M\{Z\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi_1(x)\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} y\,\varphi_2(y)\,dy.$$

Но

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi_1(x)\,dx = M\{X\}$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi_2(y)\,dy = M\{y\},$$

значит

$$M\{Z\} = M\{X \cdot У\} = M\{X\} \cdot M\{У\},$$

что и требовалось доказать.

Для произведения произвольного числа независимых случайных величин

$$M\{\prod_{i=1}^{n} X_i\} = \prod_{i=1}^{n} M\{X_i\} \quad \text{III.3.8}'.$$

Доказательство проводится методом математической индукции. Как и в предыдущих теоремах, мы не предъявляем никаких требований к законам распределения случайных величин. Единственным ограничением в последней теореме явилось требование, чтобы случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ были **независимыми**.

Указанная особенность теорем о математическом ожидании делает эту характеристику распределения случайных величин весьма употребимой в практике.

Математическое ожидание произведения **зависимых** случайных величин рассматривать не будем.

§ 4. Теоремы о среднем квадратическом отклонении

Теорема I.

Среднее квадратическое отклонение постоянной (не случайной) величины равно нулю

$$\sigma_c = 0. \qquad \text{III.4.1.}$$

Доказательство.

Так как постоянная (не случайная) величина C принимает всегда только одно значение, то вероятность этого значения равна единице.

По определению

$$\sigma_c = \sqrt{D\{C\}} = \sqrt{M\{(C - m_c)^2\}}.$$

Но для постоянной величины C математическое ожидание $m_c = C$. Следовательно,

$$\sigma_c = \sqrt{M\{(C - C)^2\}} = 0.$$

Теорема II.

Если случайная величина $Z = CX$,

то $$\sigma_z = C \cdot \sigma_x \qquad \text{III.4.2.}$$

Эту теорему можно формулировать еще и так: постоянный множитель можно выносить за знак среднего квадратического отклонения.

Доказательство.

Как известно,

$$D\{Z\} = M\{(Z - m_z)^2\} \qquad \text{III.4.3.}$$

Но коль скоро $Z = CX$, то

$$m_z = Cm_x \qquad \text{III.4.4.}$$

Подставляя III.4.4 в III.4.3, получим

$$D\{Z\} = M\{(CX - Cm_x)^2\} = M\{C^2(X - m_x)^2\} =$$
$$= C^2 M\{(X - m_x)^2\} = C^2 D\{X\}.$$

По определению

$$\sigma_z = \sqrt{D\{Z\}}\ .$$

Следовательно,

$$\sigma_z = C\sqrt{D\{X\}} = C\cdot\sigma_X,$$

что и требовалось доказать.

Теорема III.

Среднее квадратическое отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma^2 x_1 + \sigma^2 x_2 + \ldots + \sigma^2 x_n} \qquad \text{III.5.5.}$$

Докажем эту теорему только для суммы двух независимых случайных величин X и $У$, т. е. для $Z = X + У$. При этом полагаем, что для случайных величин X и $У$ их математические ожидания m_X и m_y и средние квадратические отклонения σ_X и σ_y известны.

Доказательство.

Дисперсия случайной величины Z определяется, как известно, соотношением

$$D\{Z\} = M\{(Z - m_z)^2\}.$$

Но, как доказано для $Z = X + У$,

$$m_z = m_X + m_y.$$

Следовательно,

$$D\{Z\} = M\{[(X + У) - (m_X + m_y)]^2\} = \\ = M\{[(X - m_x) + (У - m_y)]^2\} \qquad \text{III.5.6.}$$

Преобразуем выражение, стоящее под знаком математического ожидания,

$$M\{[(X - m_x)^2 + (У - m_y)^2 + 2(X - m_X)(У - m_y)]\} = \\ = [(X - m_X) + (У - m_y)]^2 = (X - m_x)^2 + (У - m_y)^2 + \\ + 2(X - m_X)(У - m_y).$$

По теореме III для математического ожидания имеем

$$M\{(X - m_X)^2\} + M\{(У - m_y)^2\} + 2M\{(X - m_X)(У - m_y)\}.$$

Первое и второе слагаемые — это дисперсии

$$D\{X\} \text{ и } D\{У\}\ .$$

Так как по условию X и $У$ — независимые случайные величины, то, как легко показать, $X - m_x$ и $У - m_y$ — также независимы. Поэтому по теореме IV для математического ожидания

$$2M\{(X-m_x)(Y-m_y)\}=2\,M\{X-m_x\}\,M\{Y-m_y\}.$$

Но

$$M\{X-m_x\}=M\{X\}-M\{m_x\}=m_x-m_x=0.$$

Подставляя результаты всех преобразований в формулу III.5.6, получим

$$D\{Z\}=D\{X\}+D\{Y\} \qquad \text{III.5.7.}$$

(Дисперсия суммы двух **независимых** случайных величин равна сумме дисперсий этих величин).

Далее

$$\sigma_z=\sqrt{D\{Z\}}=\sqrt{D\{X\}+D\{Y\}}=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}, \qquad \text{III.5.8.}$$

что и требовалось доказать.

Для произвольного числа слагаемых доказательство проводится методом математической индукции.

Среднее квадратическое отклонение является наиболее часто используемым в практике параметром, характеризующим плотность группирования возможных значений случайной величины.

§ 5. Задачи для упражнений

К § 1

3.1. Дифференциальная функция распределения системы случайных величин (X, Y)

$$\varphi(x,y)=0{,}5\,\sin(x+y)\ \text{для}\ \begin{cases} 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2} \\ 0\leqslant y<\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$$

в остальных точках плоскости $\varphi(x, y)=0$.

Определить:

а) интегральную функцию распределения этой системы;

б) вероятность попадания случайной точки (X, Y) в квадрат, ограниченный осями координат и прямыми $x=\dfrac{\pi}{4}$, $y=\dfrac{\pi}{4}$.

3.2. Нормальный закон распределения системы независимых случайных величин (X, Y) на плоскости имеет вид

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\,e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]}.$$

Показать, что вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник (R) со сторонами $x=\alpha$, $x=\beta$, $y=\gamma$, $y=\delta$ выражается с помощью функции Лапласа формулой

$$P[(X, Y) \in R] =$$
$$= \left[\Phi\left(\frac{\beta-m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m_x}{\sigma_x}\right)\right]\left[\Phi\left(\frac{\delta-m_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{\gamma-m_y}{\sigma_y}\right)\right].$$

3.3. Система случайных величин (X, Y) подчинена нормальному закону с плотностью распределения

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{6\pi} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-0,5)^2}{4} + \frac{y^2}{2,25}\right]}.$$

Используя результат предыдущей задачи, найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник $10\ м \times 7,5\ м$ с центром в начале координат и большей стороной, параллельной оси Ox.

3.4. Производится стрельба с самолета по горизонтальной прямоугольной площадке $9\ м \times 12\ м$. Вероятные отклонения: в продольном направлении $E_д = 10\ м$, в боковом направлении $E_б = 5\ м$. Прицеливание по центру мишени; заход вдоль мишени. Известно, что средняя точка попадания смещается в сторону недолета на 4 $м$. Используя результат задачи **3.2**, найти вероятность попадания в мишень при одном выстреле.

3.5. Производится стрельба ракетой по горизонтальному квадрату $500\ м \times 500\ м$. Срединные ошибки стрельбы: $E_д = 120\ м$, $E_б = 100\ м$. Прицеливание по центру квадрата. Систематических ошибок нет. Исходя из нормального закона распределения, определить вероятность попадания в цель:

а) при одном выстреле;

б) при двух выстрелах;

в) при трех выстрелах.

3.6. Производится бомбометание по прямоугольной площадке $600\ м \times 400\ м$. Вероятные отклонения $E_д = E_б = 100\ м$. Прицеливание по центру мишени; заход вдоль мишени. Продольная ошибка (перелет) $m_д = 50\ м$, боковая систематическая ошибка (вправо) $m_б = 30\ м$.

Исходя из нормального закона распределения, найти вероятность попадания в цель.

К § 2, 3, 4

3.7. Производится 3 выстрела по мишени, причем вероятности попаданий при первом, втором и третьем выстрелах соответственно 0,3; 0,5; 0,8. Используя теорему о математическом ожидании суммы событий и результаты задачи **2.16**, вычислить математическое ожидание и дисперсию числа попаданий при трех выстрелах.

3.8. Испытуемый прибор состоит из *пяти* малонадежных элементов. Отказы элементов независимы, а вероятности их для элементов с номером i равны $p_i = 0{,}2 + 0{,}1\ (i - 1)$.

Определить математическое ожидание и дисперсию числа отказавших элементов.

Указание. Использовать теоремы о математическом ожидании и дисперсии суммы событий и результаты задачи **2.16.**

3.9. Производится n выстрелов с вероятностью попадания при одном выстреле, равной p. Определить математическое ожидание числа попаданий при n выстрелах.

Глава IV

ЭЛЕМЕНТЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

§ 1. Числовые характеристики статистического распределения

Установление закономерностей, управляющих массовыми случайными явлениями, основывается на изучении статистических данных — результатов наблюдений (измерений). Так, например, при тарировке прибора для измерения расхода жидкости, аналитических весов и других приборов производится ряд опытов (измерений), по результатам которых мы стремимся составить представление о точностных характеристиках прибора. При анализе вещества также производится ряд однотипных измерений, по результатам которых составляется представление, например, о содержании того или иного элемента в данном растворе.

Для исследований, связанных с лабораторными и полигонными экспериментами военного назначения, характерна сложность и дороговизна каждого отдельного опыта. Возникает задача изучения распределения исследуемой случайной величины или системы величин на статистическом материале небольшого объема.

Что касается закона распределения исследуемой случайной величины, то иногда он бывает известен заранее, иногда высказывается в порядке предположения. В таких случаях статистический материал используется для выяснения числовых характеристик случайной величины — математического ожидания и среднего квадратического отклонения.

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение, вычисленные статистически на основе обработки результатов наблюдений, назовем *статистическими параметрами* и обозначим соответственно m^* и σ^*.

Изучаемая случайная величина подчинена некоторому объективно существующему закону распределения с истинными, но нам неизвестными значениями тех же параметров m и σ.

Очевидно, что m^* и σ^* являются приближенными значениями неизвестных параметров m и σ.

Значения m^* и σ^* называют также *«точечными оценками»* соответствующих неизвестных параметров m и σ теоретического распределения.

Статистический параметр m^*

Пусть производится серия из n независимых наблюдений над некоторой случайной величиной X, в результате чего получены значения

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Среднее арифметическое из этих значений определяется формулой

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \qquad \text{IV. 1. 1.}$$

Эту формулу можно представить так:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} x_1 + \frac{1}{n} x_2 + \ldots + \frac{1}{n} x_n.$$

Отношение $\frac{1}{n} = p^*$ есть статистическая частота появления каждого из рассматриваемых значений случайной величины X и

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i p^*.$$

В силу аналогии этой формулы с формулой математического ожидания дискретной случайной величины среднее значение $\bar{x}$, вычисленное по формуле IV.1.1, имеет смысл принять в качестве статистического математического ожидания m^* случайной величины X

$$m^* = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \bar{x} \qquad \text{IV. 1. 2.}$$

Оправдать принятое соглашение можно еще и тем, что по закону больших чисел, как упоминалось, при увеличении n, значение $\bar{x}$ приближается (в вероятностном смысле) к истинному значению m_x величины X.

Статистический параметр σ^*

По определению среднего квадратического отклонения

$$\sigma_x = \sqrt{D\{X\}} = \sqrt{M\{(X - m_x)^2\}}.$$

Если X - дискретная случайная величина, то

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i} \qquad \text{IV. 1. 3.}$$

Заменяя m_x его статистическим приближением m^* и полагая $p_i = \frac{1}{n}$, по аналогии с формулой IV. 1. 3 можно принять в качестве статистического среднего квадратического отклонения

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m^*)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}} \qquad \text{IV. 1.4.}$$

При большом числе n измерений в действительности и пользуются этой формулой, но в случае малого числа измерений доброкачественность формулы IV.1.4 становится сомнительной.

В самом деле, пусть $n = 1$, т. е. производится только одно измерение x_1, тогда $\bar{x} = x_1$ и

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{x_1 - x_1}{1}} = 0.$$

Но если среднее квадратическое отклонение равно нулю, то рассеяния нет, т. е. случайный результат одного измерения привел к точному значению измеряемой величины. Такой вывод противоречит здравому смыслу: при одном измерении нельзя сказать ничего определенного о рассеянии возможных значений случайной величины.

Поэтому от рабочей формулы, по которой вычисляется σ^*, естественнее было бы ожидать неопределенного результата при $n = 1$.

Это и будет иметь место, если формулу IV.1.4 для вычисления σ^* мы заменим таким соотношением:

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \qquad \text{IV. 1. 5.}$$

Закон больших чисел и в этом случае утверждает, что при увеличении n значение σ^* приближается (в вероятностном смысле) к истинному значению σ_x величины X.

§ 2. Понятие о точности и надежности обработки результатов наблюдений

При небольшом числе опытов, очевидно, нельзя рассчитывать на большую точность статистически определенных параметров m^* и σ^*. Это будут случайно принятые значения, и мы должны уметь оценить насколько «подходящими значениями» неизвестных величин m и σ являются m^* и σ^*, найденные по формулам IV.1.2 и IV.1.5, т. е. будут ли эти статистические значения при массовом их применении приводить в среднем к меньшим ошибкам, чем всякие другие.

Также необходимо уметь количественно оценивать точность и надежность вычисленных «подходящих значений» неизвестных величин m и σ. С другой стороны, если потребуется организовать наблюдение (измерение) с заданной надежностью, то надо уметь определить количество наблюдений, которое необходимо провести, чтобы обеспечить заданную надежность.

Пусть ρ^* — статистический параметр распределение изучаемой случайной величины (это может быть и m^* и σ^*, и любой другой параметр), ρ — соответствующий истинный параметр распределения.

Разность $\rho - \rho^*$ назовем *уклонением* статистического параметра от соответствующего истинного.

Обозначим буквой α вероятность того, что абсолютная величина уклонеиия $|\rho - \rho^*|$ не превзойдет некоторого заданного числа ε

$$\alpha = P(|\rho - \rho^*| < \varepsilon) \qquad \text{IV. 2. 1.}$$

Заменив неравенство $|\rho - \rho^*| < \varepsilon$ равносильным двойным неравенством $-\varepsilon < \rho - \rho^* < \varepsilon$ или $\rho^* - \varepsilon < \rho < \rho^* + \varepsilon$, будем иметь

$$\alpha = P(\rho^* - \varepsilon < \rho < \rho^* + \varepsilon) \qquad \text{IV. 2. 2.}$$

Формулу IV. 2. 2 следует понимать так: α есть вероятность того, что истинное неизвестное значение параметра ρ

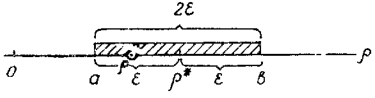

Рис. 27

будет заключаться в границах $\rho^* - \varepsilon$, $\rho^* + \varepsilon$ или, как еще говорят, точка ρ будет накрыта случайным интервалом $[\rho^* - \varepsilon; \rho^* + \varepsilon]$ (рис. 27).

Вероятность α называют *доверительной вероятностью* или *надежностью* обработки результатов наблюдений.

Положительное число ε называют *точностью* обработки результатов наблюдений.

Интервал $[\rho^* - \varepsilon, \rho^* + \varepsilon]$ называется *доверительным интервалом*. Случайные концы этого интервала называются *доверительными границами*.

Метод доверительных интервалов разработан американским математиком Ю. Нейманом, исходя из идей английского статистика Р. Фишера.

В практике обработки результатов наблюдений обычно задаются некоторой надежностью α, близкой к единице, и определяют точность обработки или доверительный интервал, за границы которого не выйдет истинное значение отыскиваемого параметра ρ. Чаще всего полагают $\alpha=0{,}9$, или $\alpha=0{,}95$, или $\alpha = 0{,}99$.

§ 3. Вычисление доверительного интервала для математического ожидания нормально распределенной случайной величины при известном σ

Пусть в результате n опытов (наблюдений, измерений) случайная величина X приняла значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Будем исходить из того, что все выполненные измерения (наблюдения, опыты) независимы, т. е. результат одного никак не влияет на возможные результаты других измерений и что случайная величина X подчинена нормальному распределению. На практике наиболее часто встречаются именно такие случайные величины.

Пусть, кроме того, истинное среднее квадратическое отклонение для нормального закона распределения случайной величины X известно и равно σ; истинное математическое ожидание m случайной величины X нам неизвестно.

По результатам измерений найдем $\overline{x}$ и примем его в качестве статистического математического ожидания

$$m^* = \overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Задача состоит в том, чтобы с заданной надежностью α определить доверительный интервал $[m^* - \varepsilon;\ m^* + \varepsilon]$ значений математического ожидания m случайной величины X.

С этой целью среднее арифметическое значение $\overline{x}$ случайной величины X будем рассматривать как значение новой случайной величины $\overline{X}$, являющейся суммой n независимых случайных величин $\frac{X_1}{n}, \frac{X_2}{n}, \ldots, \frac{X_n}{n}$,

$$\overline{X} = \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \ldots + \frac{X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{IV. 3. 1.}$$

Выразим истинное математическое ожидание $m_{\overline{X}}$ и истинное среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\overline{X}}$ распределения случайной величины $\overline{X}$ через соответствующие истинные параметры m и σ распределения величины X.

Примем без доказательства, что случайная величина X, определяемая формулой IV.3.1, так же подчиняется нормальному распределению, как и случайная величина X.

Естественно принять также, что все n измерений величины X выполнены с одинаковой точностью, т. е. что случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ подчинены нормальному закону распределения с теми же числовыми характеристиками, которые имеет X, т. е.

$$m_{X_1} = m_{X_2} = \ldots = m_{X_n} = m$$

и IV. 3. 2.

$$\sigma_{X_1} = \sigma_{X_2} = \ldots = \sigma_{X_n} = \sigma.$$

По теоремам II и III для математического ожидания

$$m_{\overline{X}} = M\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right\} = \frac{1}{n} M\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i\right\} =$$

$$= \frac{1}{n}(m_{X_1} + m_{X_2} + \ldots + m_{X_n}) \qquad \text{IV. 3. 3.}$$

По теоремам II и III для среднего квадратического отклонения

$$\sigma_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{1}{n^2}\sigma^2 X_1 + \frac{1}{n^2}\sigma^2 X_2 + \ldots + \frac{1}{n^2}\sigma^2 X_n} = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 X_i}$$

IV. 3. 4.

Принимая во внимание формулы IV. 3. 2, получим

$$m_{\overline{X}} = \frac{1}{n}(n \cdot m) = m; \qquad \text{IV. 3. 5.}$$

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{1}{n}\sqrt{n\sigma^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \qquad \text{IV. 3. 6.}$$

Чтобы охарактеризовать точность ε и надежность α среднего значения $\overline{x}$ случайной величины X в качестве „подходящего значения" её математического ожидания m, найдем вероятность α осуществления неравенства $|\overline{X} - m| < \varepsilon$.

Заменим это неравенство равносильным двойным неравенством $-\varepsilon < \overline{X} - m < \varepsilon$, или $m - \varepsilon < \overline{X} < m + \varepsilon$.

Пользуясь формулой II. 8. 5 (стр. 52), получим:

$$\alpha = P(|\overline{X} - m| < \varepsilon) = P(m - \varepsilon < \overline{X} < m + \varepsilon) =$$

$$= \Phi\left(\frac{m + \varepsilon - m}{\sigma_{\overline{X}}}\right) - \Phi\left(\frac{m - \varepsilon - m}{\sigma_{\overline{X}}}\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_{\overline{X}}}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma_{\overline{X}}}\right).$$

В силу нечетности функции Лапласа и формулы IV. 3.6 имеем

$$\alpha = P(|\overline{X} - m| < \varepsilon) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_{\overline{X}}}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \quad \text{IV.3.7.}$$

Для получения рабочей формулы будем вместо $\overline{X}$ писать $\overline{x}$ или m^* и обозначим

$$t = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}. \quad \text{IV. 3. 8.}$$

Тогда

$$\alpha = P(|m^* - m| < \varepsilon) = 2 \cdot \Phi(t) \quad \text{IV. 3. 9.}$$

Если заданы число измерений n и точность обработки ε, то по формуле IV.3.8 найдем t, затем с помощью таблиц значений функции Лапласа найдем надежность обработки α, т. е. вероятность того, что при данном числе измерений уклонение полученного по результатам наблюдений среднего значения $\overline{x}$ от математического ожидания m не выйдет за границы $\pm\varepsilon$ данной точности.

Если заданы число измерений n и требуемая надежность α, то сначала, согласно формуле IV.3.9, найдем по таблице значений функции Лапласа аргумент t, которому соответствует заданное значение функции Лапласа, равное α, а затем по формуле IV.3.8 найдем ε - точность обработки, а следовательно и доверительный интервал $[m^* - \varepsilon, m^* + \varepsilon]$, за границы которого с заданной надежностью не выйдет истинное значение m математического ожидания.

Если заданы точность и надежность обработки, то можно определить, какое количество измерений необходимо произвести, чтобы обеспечить эти заданные значения точности и надежности.

Пример 1. Погрешность литромера подчинена нормальному распределению со средним квадратическим отклонением $\sigma_V = 120$ *л*. Производится тарировка литромера на объеме $V = 10\,000$ *л* по девяти измерениям, $n = 9$, которые дали следующие значения:

№ измерения	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Показания литромера	9 800	10 400	10 600	9 500	10 000	10 500	10 200	9 800	10 100

Определить надежность тарировки литромера на погрешность в границах ± 100 *л*.

Решение. Определяем по результатам измерений среднее значение показаний

$$\overline{V} = \frac{9\,800 + 10\,400 + \dots + 10\,100}{9} = 10\,100 \text{ л}.$$

Это означает, что литромер имеет систематическую погрешность $+ 100$ *л*. Следовательно, при расчете дозы необходимо вводить постоянную поправку — 100 *л*. Определяем надежность обработки результатов наблюдений, т. е. вероятность того, что отклонения показаний оттарированного литромера не выйдут за пределы $\pm$ 100 *л*

$$\alpha = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_V}\right) = 2\Phi\left(\frac{100 \cdot 3}{120}\right) = 2\Phi\ (2{,}50).$$

По таблице функции Лапласа (прилож. 1) находим для $t = 2{,}50$

$$\alpha = 0{,}9876.$$

Таким образом, на данном отсчете $V = 1000$ *л* с достаточной уверенностью можно сказать, что при введении поправки в — 100 *л* погрешность отсчета литромера не выйдет за пределы $\pm$ 100 *л*, т. е. истинная доза жидкости будет находиться в интервале (9900, 10100) *л*.

Пример 2. Произведена тарировка термоограничителя, которая дала следующие результаты по четырем измерениям на верхнем ($+ 25°$) и нижнем ($+ 15°$) пределах:

— на нижнем пределе:

$$t_1 = + 17{,}0°; \quad t_2 = + 14{,}5°; \quad t_3 = 13{,}5°; \quad t_4 = + 15{,}0°;$$

— на верхнем пределе:

$$t'_1 = +29{,}5°; \quad t'_2 = + 24{,}5°; \quad t'_3 = + 24{,}0°; \quad t'_4 = + 24{,}0°.$$

С надежностью $\alpha = 0{,}954$ определить, в каком интервале может лежать погрешность измерения температуры на верхнем и нижнем пределах (определить точность тарировки), если среднее квадратическое отклонение по обоим пределам равно $\sigma_t = 3°$.

Решение. Определяем по результатам тарировки среднее значение показаний:

а) на нижнем пределе измерений

$$\overline{t} = \frac{17{,}0 + 14{,}5 + 13{,}5 + 15{,}0}{4} = 15{,}0°;$$

б) на верхнем пределе измерений

$$\overline{t'} = \frac{29{,}5 + 24{,}5 + 24{,}0 + 24{,}0}{4} = 25{,}5°.$$

Это означает, что по результатам тарировки нижний предел измерений систематической погрешности не имеет, а верхний предел имеет систематическую погрешность $\Delta t' = +0{,}5°$.

Определяем точность тарировки, которая обеспечивается с заданной надежностью. Для этого входим в таблицу функции Лапласа (прилож. 1) по заданному значению надежности $\alpha = 0{,}954$ и отыскиваем соответствующее ему значение аргумента.

Так как $\alpha = 2\Phi(t) = 0{,}954$, то $\Phi(t) = 0{,}477$.

Для $\Phi(t) = 0{,}477$ в таблице находим $t = 2$, откуда

$$\varepsilon = \frac{t\sigma_t}{\sqrt{n}} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{4}} = 3°.$$

Таким образом, с надежностью $\alpha = 0{,}954$ точность обработки составляет $\pm\ 3°$, т. е. истинное значение отсчитываемой термоограничителем температуры будет лежать:

— на нижнем пределе измерения — в диапазоне от $+12$ до $+18°$;

— на верхнем пределе измерения — в диапазоне от $+22{,}5$ до $+28{,}5°$.

Вывод. Тарировка термоограничителя по четырем измерениям на каждом пределе не обеспечивает достаточной точности при заданной надежности. Для повышения точности тарировки необходимо увеличить количество измерений.

Пример 3. Определить количество измерений, которые необходимо производить при тарировке термоограничителя для того, чтобы с надежностью $\alpha = 0{,}995$ ожидаемая погрешность показаний не вышла за пределы $\pm\ 2°$, если $\sigma_t = 3°$.

Решение. Из формулы V.3.9 следует, что $\Phi(t) = \frac{\alpha}{2}$.

В данном случае $\Phi(t) = \frac{0{,}995}{2} = 0{,}4975$. Входим в таблицу функции Лапласа (прилож. 1) по заданному значению функции $\Phi(t) = 0{,}4975$ и находим соответствующее значение аргумента $t = 2{,}8$.

Но

$$t = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_t},$$

следовательно,

$$n = \frac{t^2\sigma_t^2}{\varepsilon^2} = \frac{2{,}8^2 \cdot 3^2}{2^2} = 18.$$

Таким образом, для обеспечения заданной точности обработки необходимо проделывать не менее 18 измерений на каждом диапазоне.

§ 4. Вычисление доверительного интервала для математического ожидания нормально распределенной случайной величины при неизвестном σ

Пусть в результате n независимых опытов (наблюдений, измерений) случайная величина X, подчиненная нормальному распределению, приняла значения $x_1, x_2, ..., x_n$, причем среднее квадратическое отклонение σ этого распределения неизвестно. Требуется найти оценку m^* неизвестного математического ожидания m случайной величины X и с надежностью α установить доверительный интервал $[m^* - \varepsilon, m^* + \varepsilon]$ для этого параметра.

В качестве оценки m^* можно, по-прежнему, взять среднее арифметическое из n наблюдений величины X

$$m^* = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{IV.4.1.}$$

Но для вычисления вероятности α неравенства $|m^* - m| < \varepsilon$ не пригоден прием, примененный в предыдущем параграфе. Дело в том, что хотя закон распределения случайной величины $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ известен (нормальный закон с центром рассеивания $m_{\overline{X}} = m$ и $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), но воспользоваться им невозможно, так как теперь неизвестны оба истинных параметра m и σ. Однако и в этом случае для решения поставленной задачи вводится новая случайная величина T, возможные значения которой t определяются формулой

$$t = \frac{m^* - m}{\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}}, \qquad \text{IV. 4. 2.}$$

где

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m^*)^2}{n - 1}} \qquad \text{IV. 4. 3.}$$

В курсах математической статистики доказывается, что при нормальном распределении величины X случайная величина T подчиняется *закону распределения Стьюдента* (псевдоним английского статистика В. Госсета). Дифференциальная функция этого распределения имеет следующий вид:

$$S(t, n) = B_n \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, \qquad \text{IV. 4. 4.}$$

где коэффициент B_n зависит от n и вычисляется с помощью некоторой неэлементарной функции (так называемой гамма-функции).

Замечательно, что распределение Стьюдента не зависит от неизвестного параметра σ случайной величины X.

На основе этого распределения составлена таблица (прилож. 2), входами в которую являются: доверительная вероятность α и число $K = n - 1$. Числа в таблице дают значения величины t_α, которая связана с точностью обработки ε формулой

$$\varepsilon = \frac{t_\alpha \sigma^*}{\sqrt{n}} \qquad \text{IV.4.5.}$$

Зная α и K, по таблице находим соответствующее значение t_α и устанавливаем искомый доверительный интервал для неизвестного значения математического ожидания случайной величины X

$$\left[m^* - t_\alpha \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}; \qquad m^* + t_\alpha \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} \right] \qquad \text{IV. 4. 6.}$$

Пример. Для определения точностных характеристик расходомера произведено 5 измерений, которые дали следующие результаты:

i	1	2	3	4	5
V_i *л/мин*	1050	1250	1400	900	1300

Требуется найти подходящее значение верного показания расхода V и найти доверительные границы, в которых с надежностью 0,95 заключено верное показание. Известно, что расходомер не имеет систематической погрешности.

Решение. Определяем среднее арифметическое (статистическое математическое ожидание) показаний расходомера

$$\overline{V} = \frac{\sum_{i=1}^{5} V_i}{5} = 1180 \text{ л/мин.}$$

Отметим, что для практических подсчетов $\overline{V}$ не обязательно суммировать данные значения V_i. Достаточно выбрать любое удобное начало отсчета, например, $V_0 = 1000$ *л/мин* и вычислить среднее значение отклонений от V_0. Тогда

$$\overline{V_0} = \frac{50 + 250 + 400 - 100 + 300}{5} = 180 \text{ л/мин.}$$

Следовательно, $\overline{V}=V_0+\overline{V}_0=1000+180=1180$ *л/мин*.
Определяем σ^* по формуле IV. 4. 3

$$\sigma^*=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(V_i-1180)^2}{4}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(-130)^2+70^2+220^2+(-280)^2+120^2}{4}}=$$

$$=\sqrt{37249}=193 \text{ л/мин}.$$

В таблице прилож. 2 при $\alpha=0{,}95$, $k=n-1=4$ находим $t_\alpha=2{,}776$. По формуле IV. 4. 5 находим ε:

$$\varepsilon=\frac{2{,}776\cdot 193}{\sqrt{5}}\approx 240 \text{ л/мин}.$$

Следовательно, с вероятностью $\alpha=0{,}95$ можно ожидать, что уклонения истинных значений показаний литромера от полученного из опыта среднего значения $\overline{V}=1180$ *л/мин* будут находиться в границах $\pm$ 240 *л/мин* (доверительные границы: $\overline{V}-\varepsilon=940$, $\overline{V}+\varepsilon=1420$). Это означает, что данный расходомер не обладает высокой точностью показаний; разброс их велик. Для обеспечения более высокой точности измерений необходимо прибор исправить или заменить другим.

§ 5. Вычисление доверительного интервала для дисперсии нормально распределенной случайной величины при неизвестном m

Пусть случайная величина X подчиняется нормальному закону с неизвестным центром рассеяния m и неизвестной дисперсией $D\{X\}$ (или неизвестным средним квадратическим отклонением σ).

По результатам n независимых опытов для $D\{X\}$ и σ получены подходящие значения D^* и σ^*

$$D^*=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m^*)^2}{n-1} \quad \text{и} \quad \sigma^*=\sqrt{D^*} \qquad \text{IV. 5. 1.}$$

Требуется с надежностью α установить доверительный интервал $[a, b]$ для параметра $D\{X\}$, где a и b — доверительные границы.

Примем следующие обозначения:

$$p_1=\frac{1-\alpha}{2}, \quad p_2=1-p_1 \qquad \text{IV. 5. 2.}$$

Для решения поставленной задачи вводится новая случайная величина V, возможные значения которой v определяются формулой

$$v = \frac{(n-1)D^*}{D\{X\}} \qquad \text{IV. 5. 3.}$$

Доказано, что при нормальном распределении величины X случайная величина V подчиняется распределению, названному „распределением χ^2" (*хи* квадрат). Это распределение не зависит от неизвестного параметра m случайной величины X.

На основе этого распределения составлена таблица (прилож. 3), входами в которую являются: число p_1 (одновременно с числом p_2) и число $K = n - 1$.

В таблице помещены значения χ^2. Находим значение χ_1^2, соответствующее числу p_1, и значение χ_2^2, соответствующее числу p_2 при фиксированном K.

Доверительные границы a и b определяются по формулам

$$a = \frac{D^*}{\chi_1^2}(n-1); \qquad b = \frac{D^*}{\chi_2^2}(n-1) \qquad \text{IV.5.4.}$$

Искомый доверительный интервал для неизвестной дисперсии $D\{X\}$ случайной величины X имеет вид

$$\left[\frac{D^*}{\chi_1^2}(n-1); \qquad \frac{D^*}{\chi_2^2}(n-1)\right] \qquad \text{IV.5.5.}$$

Соответственно, доверительный интервал для неизвестного σ имеет вид

$$[\sqrt{a}, \quad \sqrt{b}] \text{ или } \left[\sqrt{\frac{D^*(n-1)}{\chi_1^2}}, \quad \sqrt{\frac{D^*(n-1)}{\chi_2^2}}\right] \qquad \text{IV.5.6.}$$

Пример. В условиях примера, рассмотренного в предыдущем параграфе, найти доверительный интервал для дисперсии и для среднего квадратического отклонения с надежностью $\alpha=0{,}96$ (96 % доверительный интервал).

Решение. Статистические значения дисперсии и среднего квадратического отклонения показаний расходомера были вычислены

$$D^* = 37249, \ \sigma^* = 193 \text{ *л/мин.*}$$

Зная, что $\alpha = 0{,}96$, находим по таблице (прилож. 3) при $K = n - 1 = 4$

$$\text{для } p_1 = \frac{1-\alpha}{2} = 0{,}02 \qquad \chi_1^2 = 11{,}67,$$

$$\text{для } p_2 = 1 - p_1 = 0{,}98 \qquad \chi_2^2 = 0{,}297.$$

По формулам IV.5.4 находим

$$a = \frac{D^*}{\chi_1^2}(n-1) = \frac{37249 \cdot 4}{11,67} = 12759; \ \sqrt{a} = 113,$$

$$b = \frac{D^*}{\chi_2^2}(n-1) = \frac{37249 \cdot 4}{0,297} = 501670; \ \sqrt{b} = 708.$$

Доверительный интервал для σ: [113; 708]. Он слишком широко накрывает точку $\sigma^* = 193$. Это означает, что:

а) либо число измерений недостаточно для оценки неизвестного σ с надежностью $\alpha = 0,96$ и надо увеличить его;

б) либо, если первое предположение не подтвердится, расходомер обладает большим разбросом показаний и нуждается в замене.

Замечание. Можно было бы доказать, что при $n \to \infty$ распределение Стьюдента и распределение χ^2 стремятся к нормальному распределению.

По этой причине, если вход в таблицу (прилож. 2 и 3) затруднен (например, из-за ограниченности таблицы), то при $n > 20$ *доверительный интервал для математического ожидания* нормально распределенной случайной величины X (или с неизвестным законом распределения, если нет оснований считать, что он резко отличается от нормального) можно вычислять приближенно по формулам IV.3.8, IV.3.9 (см. § 3). При этом взамен истинного значения σ берут σ^* (IV.4.3).

В аналогичном случае приближенный *доверительный интервал* для дисперсии случайной величины X можно вычислять по следующим формулам, определяющим его границы a и b.

$$a = D^* - t\sigma_{D^*}; \quad b = D^* + t\sigma_{D^*}, \qquad \text{IV.5.7.}$$

где D^* и t вычисляются соответственно по формулам IV.5.1 и IV.3.9, а для вычисления σ_{D^*} рекомендуется формула

$$\sigma_{D^*} = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\,D^* \qquad \text{IV.5.8.}$$

Границами доверительного интервала для *среднего квадратического отклонения* случайной величины X будут числа $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$.

Однако для малых n ($n < 10 \div 20$) замена распределений Стьюдента и χ^2 нормальным распределением привела бы к грубым ошибкам.

Таким образом, доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии нормально распределенной случайной величины X при малых n следует вычислять непременно по формулам § 4 и 5.

§ 6. Задачи для упражнений

К § 1, 2, 3

5.1. Среднее значение дальности до ориентира, полученное по четырем независимым измерениям, равно 2250 *м*. Случайные ошибки измерения распределены нормально; срединное отклонение $E = 40$ *м*.

Найти с надёжностью 95% доверительный интервал для оценки значения дальности.

5.2. Сколько зёрен надо выбрать из партии зерна, чтобы с вероятностью 0,95 отклонение полученного в выборке среднего веса зерен от среднего веса зерен во всей партии не превзошло 0,001 *г*? Исследования в аналогичных условиях показали, что среднее квадратическое отклонение веса зерен во всей партии следует считать равным 0,05 *г*. (Закон распределения случайного веса зерен нормальный).

5.3. В качестве подходящего значения дальности до цели принимают среднее арифметическое из результатов независимых измерений дальности n дальномерами.

Измерения не содержат систематической ошибки, а случайные ошибки распределены нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 14{,}9$ *м*.

Сколько надо иметь дальномеров, чтобы абсолютная величина ошибки при определении дальности до цели с вероятностью 0,9 не превышала 15 *м*?

5.4. Произведено несколько испытаний (на сопротивление) специальной стали, предназначенной для колонны синтеза аммиака. Получены следующие данные:

$$Z = 35;\ 40;\ 38;\ 37;\ 41;\ 34;\ 42 \text{ и } 37\ \textit{кг}/\textit{мм}^2.$$

Известно, что случайные ошибки испытаний распределены по нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 2{,}8$ *кг/мм*^{2}.

а) Определить с вероятностью 0,99 низшую границу сопротивления.

б) Какова надежность того, что значение сопротивления не отклонится от своего среднего значения больше чем на ± 2 *кг/мм*^{2}?

К § 4 и 5

5.5. По 15 независимым измерениям были рассчитаны подходящие значения математического ожидания и среднего квадратического отклонения максимальной скорости самолета

$$m_v^* = 424{,}7\ \textit{м}/\textit{сек} \text{ и } \sigma_v^* = 8{,}7\ \textit{м}/\textit{сек}.$$

Определить:

а) доверительные границы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения при надежности 0,9;

б) вероятность, с которой можно утверждать, что абсолютное значение ошибки в определении m_v^* не превзойдет 4 *м/сек.*

5.6. При определении начальной скорости снаряда получены следующие её значения:

400,8; 402,7; 401,6; 399,5; 403,2; 400,6 *м/сек.*

Определить подходящее значение начальной скорости и среднее квадратическое отклонение её в этом опыте.

Оценить надежность полученного значения начальной скорости для $\varepsilon = \pm 1{,}3$ *м/сек.*

5.7. Произведено 5 независимых измерений для определения заряда электрона. Опыт дал следующие результаты (в абсолютных электростатических единицах):

$4{,}781 \cdot 10^{-10}$; $4{,}795 \cdot 10^{-10}$; $4{,}769 \cdot 10^{-10}$; $4{,}792 \cdot 10^{-10}$; $4{,}779 \cdot 10^{-10}$.

Определить подходящее значение для заряда электрона и найти доверительные границы при надежности 99%.

7 Зак. 700

Глава V

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

§ 1. Случайный характер погрешностей измерений

Измерения, с которыми мы сталкиваемся в практике для определения тех или иных физических величин или химических параметров, например давления, температуры, плотности, концентрации, расхода, содержания вещества, как бы тщательно они не были организованы, всегда выполняются с теми или иными погрешностями, т. е. отклонениями истинного значения измеряемой величины от значения, полученного в результате измерения. На погрешность результатов измерений влияют и различные погрешности аппаратуры, и субъективные погрешности наблюдателя, и многочисленные другие факторы.

Таким образом, погрешности измерений являются величинами случайными: в результате измерения погрешность измеряемой величины может принимать различные значения, причем нельзя заранее указать, какие именно. Следовательно, характеризовать погрешности измерений необходимо с вероятностной точки зрения. Для полной характеристики погрешности нам следовало бы, вообще говоря, указать ее закон распределения. Многочисленные опыты и наблюдения показывают, что часто случайные погрешности подчиняются нормальному распределению, то есть, что относительные частоты случайных погрешностей измеряемой величины достаточно близки к вероятностям таких погрешностей, рассчитанным по нормальному закону распределения. Поэтому для характеристики таких погрешностей нам достаточно указать их математические ожидания и средние квадратические отклонения.

Совершенно очевидно, что математическое ожидание погрешности измеряемой величины, если оно не равно нулю, свидетельствует о наличии систематической погрешности. Такая погрешность может быть устранена путем выверки и настройки измерительного прибора или введением поправок к результатам измерения.

Знание же среднего квадратического отклонения характеризует плотность группирования случайной погрешности относительно среднего значения (математического ожидания), разброс её возможных значений вокруг среднего значения. Следовательно, указывая величину среднего квадратического отклонения погрешности, мы тем самым характеризуем точность измерения данной величины: точность аппаратуры, точность метода измерения, точность работы наблюдателя.

Далее будут изложены общие методы определения математического ожидания и среднего квадратического отклонения случайной погрешности измерения.

§ 2. Вычисление математического ожидания погрешности измерения

Пусть величина y является заданной функцией величин (или параметров) x_1, x_2, $x_3, \ldots, x_n$.

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Для определения значения величины y мы производим измерения величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Точные значения этих величин обозначим теми же буквами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а соответствующие погрешности — Δx_1, $\Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. Для точных значений величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ функция y имела бы значение

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Фактические значения величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, полученные в результате измерений, таковы:

$$x_1 + \Delta x_1,\ x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n,$$

а соответствующее значение функции

$$y_{изм} = f(x_1 + \Delta x_1,\ x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n).$$

Значит, вследствие погрешностей измерения наблюдаемых величин, мы получим значение величины y с погрешностью Δy

$$\Delta y = y_{изм} - y = f(x_1+\Delta x_1,\ x_2+\Delta x_2, \ldots, x_n+\Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{V.2.1.}$$

Поскольку величины Δx_1, $\Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ являются погрешностями измерений, а не грубыми ошибками, то можно считать их достаточно малыми. Тогда, заменяя приращение Δy функции y ее полным дифференциалом первого порядка dy, мы получим с точностью до бесконечно малых высших порядков

$$\Delta y \approx \frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\Delta x_n.$$

Или, короче,

$$\Delta y \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta x_i \qquad \text{V.2.2.}$$

Теперь положим, что для каждой из погрешностей Δx_1, $\Delta x_2, \ldots$, Δx_n измеряемых величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ известно ее математическое ожидание $m_{\Delta x_1}, m_{\Delta x_2}, \ldots, m_{\Delta x_n}$. Требуется определить математическое ожидание $m_{\Delta y}$ интересующей нас погрешности Δy величины y. Это просто. Применяя теоремы II и III о математическом ожидании (III.6.2 и III.6.6) и имея в виду, что $\frac{\partial y}{\partial x_i} = \mathrm{const}$ $(i=1,2,\ldots,n)$, мы немедленно получаем

$$m_{\Delta y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} m_{\Delta x_i} \qquad \text{V.2.3.}$$

Пример. Весовой расход жидкости определяется формулой

$$G = v\,(1{,}2 - 0{,}05t + 5\cdot 10^{-6}t^2),$$

где v—объем жидкости;

t—температура жидкости.

Математические ожидания погрешностей измеряемых величин v и t таковы

$$m_{\Delta v} = 0{,}1\ \text{м}^3,\ m_{\Delta t} = -2^\circ.$$

Результаты измерения:

$$v = 10\ \text{м}^3,\ t = +20^\circ.$$

Определить математическое ожидание погрешности в весовом расходе жидкости.

Решение. Определяем частные производные $\frac{\partial G}{\partial v}$ и $\frac{\partial G}{\partial t}$ и их значения при $v = 10$, $t = 20$

$$\frac{\partial G}{\partial v}\Big|_{\substack{v=10\\t=20}} = 1{,}2 - 0{,}05t + 5\cdot 10^{-6}t^2\Big|_{\substack{v=10\\t=20}} = 0{,}202,$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}\Big|_{\substack{v=10\\t=20}} = v(10^{-5}\cdot t - 0{,}05)\Big|_{\substack{v=10\\t=20}} = -0{,}498.$$

Определяем математическое ожидание погрешности измерения весового расхода жидкости

$$m_{\Delta G} = \frac{\partial G}{\partial v} m_{\Delta v} + \frac{\partial G}{\partial t} m_{\Delta t} = 0{,}202 \cdot 0{,}1 - 0{,}498(-2) - 1{,}016.$$

§ 3. Вычисление среднего квадратического отклонения погрешности измерения

Условия и обозначения такие же, как и в предыдущем параграфе. Дополнительно потребуем, чтобы измерения величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а следовательно, и погрешности этих измерений были **независимыми**.

Требуется определить среднее квадратическое отклонение погрешности измерения $\sigma_{\Delta y}$ величины y по известным средним квадратическим отклонениям $\sigma_{\Delta x_1}, \sigma_{\Delta x_2}, \ldots, \sigma_{\Delta x_n}$ погрешностей $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$.

Эта задача решается применением теорем II и III о средних квадратических отклонениях (III.5.5).

Поскольку погрешность Δy измерения величины y может быть приближенно представлена в виде

$$\Delta y \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i,$$

то, применяя указанные теоремы о среднем квадратическом отклонении, получим

$$\sigma_{\Delta y} = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \sigma^2_{\Delta x_1} + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \sigma^2_{\Delta x_2} + \ldots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2 \sigma^2_{\Delta x_n}} \qquad \text{V.3.1.}$$

Пример. В условиях предыдущего примера определить среднее квадратическое отклонение погрешности весового расхода жидкости, если средние квадратические отклонения погрешностей в измерении объема v и температуры t жидкости составляют соответственно

$$\sigma_{\Delta v} = 0{,}3 \ м^3, \quad \sigma_{\Delta t} = 0{,}5^\circ.$$

Решение. Среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\Delta G}$ составит

$$\sigma_{\Delta G} = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)^2 \sigma^2_{\Delta v} + \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^2 \sigma^2_{\Delta t}} =$$

$$= \sqrt{0{,}202^2 \cdot 0{,}3^2 + 0{,}498^2 \cdot 0{,}5^2} = 0{,}256,$$

§ 4. Удельный вес частной погрешности

При анализе точности работы той или иной измерительной аппаратуры или при анализе точности того или иного метода измерения представляет практический интерес оценить степень влияния погрешностей измерений тех или иных наблюдаемых величин на общую погрешность измерения интересующей нас величины. Так, например, в рассмотренном только что примере определения погрешности весового расхода жидкости нас может интересовать вопрос о том, что приносит в данном случае наибольшую ошибку: погрешность измерения объёма V или погрешность измерения температуры t. Если окажется, например, что большая часть погрешности в величине G приносится погрешностью измерения какого-либо одного параметра (например, температуры), то представляется целесообразным повысить прежде всего точность измерения именно этого параметра и тем самым повысить точность измерения интересующей нас величины. Ответ на такой вопрос, таким образом, помог бы нам по-новому организовать процесс.

Эта задача решается установлением понятия «удельный вес» первичных погрешностей. Будем исходить из формулы

$$\Delta y \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i.$$

Пусть имеет место только одна погрешность Δx_1, а все остальные погрешности отсутствуют

$$\Delta x_2 = 0, \ \Delta x_3 = 0, \ \ldots, \ \Delta x_n = 0.$$

Тогда

$$\Delta y_{x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1.$$

Полученное число представляет погрешность измерения величины y, вызванную погрешностью измерения только одной величины x_1. Это нашло отражение и в записи: индекс указывает, что эта погрешность является частной погрешностью, вызванной влиянием одного только фактора — погрешностью измерения величины x_1.

Вообще, следовательно, число

$$\Delta y_{x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i$$

представляет частную погрешность измерения величины y, вызванную влиянием одного i-го фактора. Тогда выражение полной погрешности величины y имеет вид

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \Delta y_{x_i},$$

где Δy_{x_i} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — частные погрешности.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\Delta y}$ погрешности Δy величины y можно выразить как

$$\sigma_{\Delta y} = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \sigma^2_{\Delta x_1} + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \sigma^2_{\Delta x_2} + \ldots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2 \sigma^2_{\Delta x_n}} =$$

$$= \sqrt{\sigma^2_{\Delta y_{x_1}} + \sigma^2_{\Delta y_{x_2}} + \ldots + \sigma^2_{\Delta y_{x_n}}},$$

где $\sigma^2_{\Delta y_{x_i}} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 \sigma^2_{\Delta x_i}$ — дисперсия частной погрешности, т.е. погрешности, вызванной влиянием одного только i-го фактора. Теперь дадим определение удельного веса погрешности.

Удельным весом частной погрешности Δx_i называется отношение ее дисперсии к дисперсии полной погрешности измерения. Обычно удельный вес выражается в процентах. Тогда, обозначив удельный вес погрешности Δx_i через $u_{\Delta x_i}$ в соответствии с определением, получим

$$u_{\Delta x_i} = \frac{\sigma^2_{\Delta x_i}}{\sigma^2_{\Delta y}} \cdot 100\%.$$

Пример. Оценить влияние погрешностей измерения объема V и температуры t при определении весового расхода жидкости в условиях предыдущего примера.

Решение. Определяем дисперсию $\sigma^2_{\Delta G_V}$ частной погрешности измерения объема

$$\sigma^2_{\Delta G_V} = \left(\frac{\partial G}{\partial V}\right)^2 \sigma^2_{\Delta V} = 0{,}202^2 \cdot 0{,}3^2 = 0{,}0037.$$

Определяем дисперсию $\sigma_{\Delta G_t}$ частной погрешности измерения температуры

$$\sigma^2_{\Delta G_t} = \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^2 \sigma^2_{\Delta t} = 0{,}498^2 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}062.$$

Определяем удельный вес $u_{\Delta G_V}$ частной погрешности измерения объема

$$u_{\Delta G_V} = \frac{\sigma^2_{\Delta G_V}}{\sigma^2_{\Delta G}} 100\% = \frac{0{,}0037}{0{,}256^2} 100\% \approx 6\%.$$

Определяем удельный вес $u_{\Delta G_t}$ частной погрешности измерения температуры

$$u_{\Delta G_t} = \frac{\sigma^2{}_{\Delta G_t}}{\sigma^2{}_{\Delta G}} 100\% = \frac{0{,}062}{0{,}256^2} 100\% \approx 94\%.$$

Мы видим, таким образом, что наибольшее, решающее влияние на погрешность измерения весового расхода жидкости оказывает неточность измерения температуры. Следовательно, для повышения точности измерения весового расхода жидкости необходимо прежде всего повысить точность измерения температур (перейти, например, на более точные датчики температуры).

* * *

На этом мы заканчиваем изучение основных методов количественной оценки объективных закономерностей, присущих случайным величинам, с которыми военному инженеру-химику приходится иметь дело как в практической работе с химической техникой, так и при постановке опытных работ.

Круг вопросов, рассмотренных в данном курсе, является базой также и для уяснения принципов экономного планирования экспериментов и анализа их результатов.

ОТВЕТЫ

1.1. $\frac{mr}{n}$. **1.2.** $\frac{1}{4}$. **1.3.** $\frac{6}{15}$. **1.4.** 0,096. **1.5.** $\frac{n-k}{n+m-k}$.

1.6. $\frac{1}{90}$. **1.7.** 0,81. **1.8.** $\frac{2}{9}$. **1.9.** $\frac{1}{120}$. **1.10.** $\frac{2^{K-1}-1}{2^K-1}$.

Указание. $n=C^1{}_K+C^2{}_K+\ldots+C^K{}_K=2^K-1$; $m=C^2{}_K+$ $+C^4{}_K+\ldots=2^{K-1}-1$.

1.11. 0,45. **1.12.** 0,817. **1.13.** $p=0{,}25$. **1.14.** $p_1\cdot p_2$. **1.15.** 0,043.

1.16. 0,94. **1.17.** 0,168. **1.18.** $\frac{5}{9}$. **1.19.** 0,512. **1.20.** 0,251.

1.21. Да. **1.22.** а) 0,25; б) 0,5625; в) 0,553; г) $\frac{70}{323}$.

1.23. а) 77; б) 0,189. **1.24.** 0,196. **1.26.** $\frac{31}{96}$. **1.27.** 0,95.

1.28. а) 0,444; б) 0,876. **1.29.** $\frac{57}{115}$. **1.30.** Вероятнее, что найдет, так как вероятность найти книгу равна $1-\left(\frac{3}{4}\right)^3$.

1.31. $\frac{28}{90}$. **1.32.** 0,80. **1.33.** $\frac{7}{30}$. **1.34.** а) $P_{3,4}>P_{5,8}$, так как $\frac{1}{4}>\frac{7}{32}$; б) $P_3=\frac{5}{16}$; $P_5=\frac{93}{256}$ и $P_5>P_3$.

1.35. а) 0,656; б) 0,948. **1.36.** $\frac{1}{1024}$. **1.37.** 1. **1.38.** 0,26.

1.39. 0,64. **1.40.** 0,184. Указание. Так как при достаточно большом n вероятность p мала, то можно применить асимптотическую формулу Пуассона (см. стр. 21).

1.41. По формуле Пуассона $p=\frac{1}{6e}\approx 0{,}0613$.

2.1.

x_i	100	50	40	10	0
p_i	0,001	0,004	0,005	0.01	0,98

2.2.

x_i	0	1
p_i	0,7	0,3

2.3.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	$\left(\frac{1}{2}\right)^6$	$6\left(\frac{1}{2}\right)^6$	$15\left(\frac{1}{2}\right)^6$	$20\left(\frac{1}{2}\right)^6$	$15\left(\frac{1}{2}\right)^6$	$6\left(\frac{1}{2}\right)^6$	$\left(\frac{1}{2}\right)^6$

2.4.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,240	0,4116	0,2646	0,0756	0,0081

2.5.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,9	0,09	0,009	0,0009	0,0001

2.6.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,3	$0,3\cdot 0,7$	$0,3\cdot(0,7)^2$	$0,3\cdot(0,7)^3$	$0,3\cdot(0,7)^4$

2.7.

2)
$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant 0 \\ 0,24 & \text{при } 0<x\leqslant 1 \\ 0,6517 & \text{при } 1<x\leqslant 2 \\ 0,9163 & \text{при } 2<x\leqslant 3 \\ 0,9919 & \text{при } 3<x\leqslant 4 \\ 1 & \text{при } x>4 \end{cases}$$

2.8. $\frac{1}{3}$. **2.9.** а) $A=\frac{1}{2}$; $B=\frac{1}{\pi}$; б) $\frac{1}{3}$. **2.10.** $A=1$.

2.11. $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. **2.12.** а) $A=\frac{1}{2}$;

в) $$F(x)=\begin{cases} 0 & x<-\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}(\sin x+1) & -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2} \\ 0 & x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

г) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **2.13.** а) $A=\frac{k^3}{2}$; б) $F(x)=1-\frac{k^2x^2+2kx+2}{2}e^{-kx}$;

в) $1-\frac{5}{2e}\approx 0{,}086$. **2.14.** а) $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{18}{x^3} & \text{при } x>3;\\ 0 & \text{при } x\leqslant 3;\end{cases}$ б) 0,27.

2.15. а) $A=\frac{1}{2}$;

б) $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^x & \text{при } x>0;\\ 1-\frac{1}{3}e^{-x} & \text{при } x\leqslant 0.\end{cases}$ **2.16.** $m_x=p$; $D\{x\}=p(1-p)$.

2.17. $M\{X\}=1{,}2$; $D\{X\}=0{,}72$; $\sigma_x=0{,}848$.

2.18. $M\{X\}=2{,}4$; $\sigma_x=1{,}8$.

2.20. $M_A\{X\}=M_Б\{X\}=0{,}44$ балла; $\sigma_A=0{,}78$ балла, $\sigma_Б=0{,}96$ балла. Прибор A лучше, чем $Б$.

2.21. $m_x=\frac{3\pi+8\ln 2}{\pi}=$ $=4{,}76$.

2.22. $M\{X\}=0$; $D\{X\}=2$.

2.23. а) Рис. 28;

б) $m_v=\frac{2}{h\sqrt{\pi}}$;

в) мода вычисляется из условия экстремума:

$\varphi'(v)=0$; $M_v=\frac{1}{h}$.

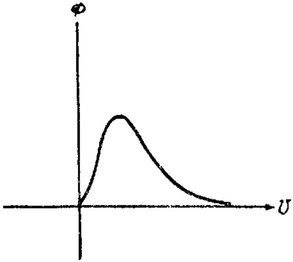

Рис. 28

2.24. $\varphi(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0\\ 2x \text{ при } 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 \text{ при } x>1.\end{cases}$

$$M\{X\}=\frac{2}{3}\ ;\ D\{X\}=\frac{1}{18};\ \sigma_x=\frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

2.25. а) $\varphi(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ \frac{1}{2}\sin x & \text{при } 0\leqslant x\leqslant\pi;\\ 0 & \text{при } x>\pi;\end{cases}$

б) $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$; в) $M\{X\}=\frac{\pi}{2}$; $\sigma_x=\frac{\pi}{2}$.

2.26. $M\{X\}=\frac{3}{2}x_0$; $D\{X\}=\frac{1}{2}$.

2.27. а) $M\{T\}=41{,}25$ года; б) $\frac{P(t<m_t)}{P(t>m_t)}=0{,}79$.

2.28. 0,954. **2.29.** а) $P(|X|<150)=0{,}8185$;
б) $P(-\infty<X<0)=0{,}6914$. **2.30.** 0,05.

2.31. а) $D_x=1370$ *м*; б) $p=0{,}41$. **2.32.** 15,8 *м*.

2.33. $P(0{,}2<X<\infty)=0{,}089$.

2.34. а) 0,866; б) $20\pm0{,}4$ *см*. **2.35.** 0,95.

2.36. а) 0,9758; б) 0,9986; в) 0,9986. **2.37.** $\pm3{,}9$.

2.38. 0,0064 *см*. **2.39.** 0,21. **2.40.** 0,21.

2.41. $E=0{,}477\sqrt{\frac{\beta^2-\alpha^2}{\ln\frac{\beta}{\alpha}}}$. **2.42.** $M\{T\}=60$ *сек*;
$D\{T\}=1\,200$ *сек*^{2}; $\sigma_T=34{,}6$ *сек*.

2.43. $M\{X\}=a$; $D\{X\}=\frac{h^2}{3}$.

2.44. $m_t=0$; $\sigma_t=10\sqrt{3}$ *сек*; $P(-10<T<10)=\frac{1}{3}$.

3.1. а) $F_{(x,y)}=0{,}5\,[\sin x+\sin y-\sin(x+y)]$; б) 0,21.

3.3. 0,973. **3.4.** 0,14. **3.5.** а) 0,75; б) 0,94; в) 0,99.

3.6. 0,76. **3.7.** $m_x=1{,}6$; $D_x=0{,}62$.

3.8. $m_x=2$; $D_x=1{,}1$. **3.9.** *п. р.*

4.1. (2192 *м*; 2308 *м*); **4.2.** $n=9604$; **4.3.** $n\geqslant3$.

4.4. а) 35,5 *кг/мм*^{2}; б) 0,96.

4.5. а) (420,8 *м/сек*; 428,6 *м/сек*); б) $\alpha=0{,}9$.

4.6. а) 401,4 *м/сек*; б) 0,92.

4.7. $m^*=4{,}783\cdot10^{-10}$; $(4{,}760\cdot10^{-10}; 4{,}806\cdot10^{-10})$.

Таблица значений функции $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0,00	0,0000	0,48	0,1844	0,96	0,3315	1,42	0,4222
0,01	0,0040	0,49	0,1879	0,97	0,3340	1,43	0,4236
0,02	0,0080	0,50	0,1915	0,98	0,3365	1,44	0,4251
0,03	0,0120	0,51	0,1950	0,99	0,3389	1,45	0,4265
0,04	0,0160	0,52	0,1985	1,00	0,3413	1,46	0,4279
0,05	0,0199	0,53	0,2019	1,01	0,3438	1,47	0,4292
0,06	0,0239	0,54	0,2054	1,02	0,3461	1,48	0,4306
0,07	0,0279	0,55	0,2088	1,03	0,3485	1,49	0,4319
0,08	0,0319	0,56	0,2123	1,04	0,3508	1,50	0,4332
0,09	0,0359	0,57	0,2157	1,05	0,3531	1,51	0,4345
0,10	0,0398	0,58	0,2190	1,06	0,3554	1,52	0,4357
0,11	0,0438	0,59	0,2224	1,07	0,3577	1,53	0,4370
0,12	0,0478	0,60	0,2257	1,08	0,3599	1,54	0,4382
0,13	0,0517	0,61	0,2291	1,09	0,3621	1,55	0,4394
0,14	0,0557	0,62	0,2324	1,10	0,3643	1,56	0,4406
0,15	0,0596	0,63	0,2357	1,11	0,3665	1,57	0,4418
0,16	0,0636	0,64	0,2389	1,12	0,3686	1,58	0,4429
0,17	0,0675	0,65	0,2422	1,13	0,3708	1,59	0,4411
0,18	0,0714	0,66	0,2454	1,14	0,3729	1,60	0,4452
0,19	0,0753	0,67	0,2486	1,15	0,3749	1,61	0,4463
0,20	0,0793	0,68	0,2517	1,16	0,3770	1,62	0,4471
0,21	0,0832	0,69	0,2549	1,17	0,3790	1,63	0,4484
0,22	0,0871	0,70	0,2580	1,18	0,3810	1,64	0,4495
0,23	0,0910	0,71	0,2611	1,19	0,3830	1,65	0,4505
0,24	0,0948	0,72	0,2642			1,66	0,4515
0,25	0,0987	0,73	0,2673	1,20	0,3849	1,67	0,4525
0,26	0,1026	0,74	0,2703	1,21	0,3869	1,68	0,4535
0,27	0,1064	0,75	0,2734			1,69	0,4545
0,28	0,1103	0,76	0,2764	1,22	0,3883	1,70	0,4554
0,29	0,1141	0,77	0,2794	1,23	0,3907	1,71	0,4564
0,30	0,1179	0,78	0,2823	1,24	0,3925	1,72	0,4573
0,31	0,1217	0,79	0,2852	1,25	0,3944	1,73	0,4582
0,32	0,1255	0,80	0,2881	1,26	0,3962	1,74	0,4591
0,33	0,1293	0,81	0,2910	1,27	0,3980	1,75	0,4599
0,34	0,1331	0,82	0,2939	1,28	0,3997	1,76	0,4608
0,35	0,1368	0,83	0,2967	1,29	0,4015	1,77	0,4616
0,36	0,1406	0,84	0,2995	1,30	0,4032	1,78	0,4625
0,37	0,1443	0,85	0,3023	1,31	0,4049	1,79	0,4633
0,38	0,1480	0,86	0,3051	1,32	0,4066	1,80	0,4641
0,39	0,1517	0,87	0,3078	1,33	0,4082	1,81	0,4649
0,40	0,1554	0,88	0,3106	1,34	0,4099	1,82	0,4656
0,41	0,1591	0,89	0,3133	1,35	0,4115	1,83	0,4664
0,42	0,1628	0,90	0,3159	1,36	0,4131	1,84	0,4671
0,43	0,1664	0,91	0,3186	1,37	0,4147	1,85	0,4678
0,44	0,1700	0,92	0,3212	1,38	0,4162	1,86	0,4686
0,45	0,1736	0,93	0,3238	1,39	0,4177	1,87	0,4693
0,46	0,1772	0,94	0,3264	1,40	0,4192	1,88	0,4699
0,47	0,1808	0,95	0,3289	1,41	0,4207	1,89	0,4706

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
1,90	0,4713	2,14	0,4838	2,48	0,4934	2,82	0,4976
1,91	0,4719	2,16	0,4846	2,50	0,4938	2,84	0,4977
1,92	0,4726	2,18	0,4854	2,52	0,4941	2,86	0,4979
1,93	0,4732	2,20	0,4861	2,54	0,4945	2,88	0,4980
1,94	0,4738	2,22	0,4868	2,56	0,4948	2,90	0,4981
1,95	0,4744	2,24	0,4875	2,58	0,4951	2,92	0,4982
1,96	0,4750	2,26	0,4881	2,60	0,4953	2,94	0,4984
1,97	0,4756	2,28	0,4887	2,62	0,4956	2,96	0,4985
1,98	0,4761	2,30	0,4893	2,64	0,4959	2,98	0,4986
1,99	0,4767	2,32	0,4898	2,66	0,4961	3,00	0,49865
2,00	0,4772	2,34	0,4904	2,68	0,4963	3,20	0,49931
2,02	0,4783	2,36	0,4909	2,70	0,4965	3,40	0,49966
2,04	0,4793	2,38	0,4913	2,72	0,4967	3,60	0,499841
2,06	0,4803	2,40	0,4918	2,74	0,4969	3,80	0,499928
2,08	0,4812	2,42	0,4922	2,76	0,4971	4,00	0,499968
2,10	0,4821	2,44	0,4927	2,78	0,4973	4,50	0,499997
2,12	0,4830	2,46	0,4931	2,80	0,4974	5,00	0,499997

Приложение 2

Таблица значений t_α в зависимости от α и $K = n - 1$

$K=n-1$ \ α	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	3,08	6,31	12,71	31,8	63,7	63,7
2	1,886	2,92	4,30	6,96	9,92	31,6
3	1,638	2,35	3.18	4,54	5,84	12,94
4	1,533	2,13	2,77	3,75	4,60	8,61
5	1,476	2,02	2,57	3,36	4,03	6,86
6	1,440	1,943	2,45	3,14	3,71	5,96
7	1,415	1,895	2,36	3,00	3,50	5,40
8	1,397	1,860	2,31	2,90	3,36	5,04
9	1,383	1,833	2,26	2,82	3,25	4,78
10	1,372	1,812	2,23	2,76	3,17	4,59
11	1,363	1,796	2,20	2,72	3,11	4,49
12	1,356	1,782	2,18	2,68	3,06	4,32
13	1,350	1,771	2,16	2,65	3,01	4,22
14	1,345	1,761	2,14	2,62	2,98	4,14
15	1,341	1,753	2,13	2,60	2,95	4,07
16	1,337	1,746	2,12	2,58	2,92	4,02
17	1,333	1,740	2,11	2,57	2,90	3,96
18	1,330	1,734	2,10	2,55	2,88	3,92
19	1,328	1,729	2,09	2,54	2,86	3,88
20	1,325	1,725	2,09	2,53	2,84	3 85

Таблица значений χ^2 в зависимости от r и p

$r=n-1$ \ p	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,00015	0,0006	0,00	0,016	0,064	1,64	2,71	3,84	5,41	6,64
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,34	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09
6	0,872	1,134	1,635	2,20	3,07	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81
7	1,239	1,564	2,17	2,83	3,82	9,80	12,02	14,07	16,62	18,47
8	1,646	2,03	2,73	3,49	4,59	11,03	13,36	15,51	18,17	20,09
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	12,24	14,68	16,92	19,68	21,66
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	13,44	15,99	18,31	21,16	23,20
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	14,63	17,28	19,68	22,61	24,72
12	3,57	4,18	5,23	6,30	7,81	15,81	18,55	21,02	24,05	26,21
13	4,11	4,76	5,89	7,04	8,63	16,98	19,81	22,36	25,47	27,68
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	18,15	21,06	23,68	26,87	29,14
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,31	19,31	22,30	24,99	28,25	30,57
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,15	20,46	23,54	26,29	29,63	32,00
17	6,41	7,26	8,67	10,08	12,00	21,61	24,76	27,58	30,99	33,40
18	7,02	7,91	9,39	10,86	12,86	22,76	25,98	28,86	32,34	34,80
19	7,63	8,57	10,11	11,65	13,72	23,90	27,20	30,14	33,68	36,19
20	8,26	9,24	10,85	12,44	14,58	25,03	28,41	31,41	35,02	37,56

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава III. Системы случайных величин

Глава IV. Элементы обработки результатов наблюдений

Глава V. Основы теории точности измерений

ПРОДАЖЕ НЕ ПОДЛЕЖИТ