МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Т. Г. ШЕВЧЕНКО

Н. И. КОВАНЦОВ

ТЕОРИЯ КОМПЛЕКСОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО КИЕВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1963

517.5
К56

В монографии освещена теория комплексов в евклидовом пространстве, проективном и на этой основе — в ряде неевклидовых пространств. Она включает краткий библиографический указатель.

Рассчитана на лиц, знакомых с основами метода внешних форм Картана в объеме книги С. П. Финикова под тем же названием и с основами линейчатой геометрии и объеме его же книг «Проективно-дифференциальная геометрия», «Теория конгруэнций», «Теория пар конгруэнций». Может быть использована в качестве учебного пособия при изучении спецкурсов по проективно-дифференциальной геометрии и отчасти — по метрической дифференциальной геометрии, а также аспирантами, специализирующимися в линейчатой геометрии.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория комплексов — один из разделов линейчатой геометрии. Два других ее раздела представляют собой теорию линейчатых поверхностей и теорию линейчатых конгруэнций. Однако в то время, как два последних раздела в целом ряде своих направлений доведены до состояния завершенности, теория комплексов все еще остается на положении новой теории. Причина этого заключается не столько в невнимании исследователей к вопросам новой теории, сколько в ее специфической трудности, трудности, на которую в свое время обратил внимание еще Ф. Клейн.

До недавнего времени работы по теории комплексов появлялись лишь от случая к случаю и касались, главным образом, лишь отдельных ее вопросов. Едва ли не первой среди них является работа Абеля Трансона [77], в которой ставится и решается задача о расслоении трехпараметрического семейства (комплекса) прямых в однопараметрическое семейство нормальных конгруэнций. Спустя некоторое время теория комплексов стала предметом специального рассмотрения у Ю. Плюккера [74], который впервые высказал мысль о возможности рассматривать прямую линию как образующий элемент пространства. Поскольку прямая в трехмерном точечном пространстве вполне определяется четырьмя существенными параметрами (например, координатами ее точек, принадлежащих двум каким-либо координатным плоскостям), то такое пространство может рассматриваться как четырехмерное линейчатое пространство. Приравнивая эти параметры каким-либо функциям одного аргумента, получают линейчатую поверхность, двух аргументов — конгруэнцию, трех — комплекс. Рассмотрения Плюккера касались прямых линий и многообразий, ими образованных, лишь в проективном пространстве. Если из проективных координат $(x^1 : x^2 : x^3 : x^4)$ и $(y^1 : y^2 : y^3 : y^4)$ двух каких-либо точек прямой образовать матрицу

$$\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ y^1 & y^2 & y^3 & y^4 \end{pmatrix},$$

то можно получить шесть миноров

$$p^{ik} = \begin{vmatrix} x^i & x^k \\ y^i & y^k \end{vmatrix},$$

которые впоследствии получили название плюккеровых координат прямой. Задавая одно линейное соотношение между плюккеровыми координатами, получают линейный комплекс, квадратичное соотношение дает квадратичный комплекс. Исследования Плюккера касаются, главным образом, линейных и квадратичных комплексов; при этом теория последних была им разработана с такой степенью полноты, с какой к тому времени была известна теория кривых и поверхностей второго порядка.

Разработка дифференциальной геометрии комплекса прямых в проективном пространстве была начата исследованиями С. Ли и Ф. Клейна в начале 70-х годов прошлого столетия [66, 40]. Стимулом к такой разработке послужила обнаруженная обоими авторами замечательная аналогия между конформной геометрией сфер четырехмерного (точечного) конформного пространства, отнесенного к гексасферическим координатам, и проективной геометрией линейчатого пространства в плюккеровых координатах. Каждой точке первого пространства соответствует прямая линия второго; следовательно, трехмерной точечной поверхности соответствует комплекс прямых. Идя по пути такой аналогии, Клейн, в частности, нашел, что линии кривизны на поверхности в конформном пространстве соответствуют особым линейчатым поверхностям комплекса, которые получили название главных. К сожалению, дальнейшего развития дифференциальная геометрия линейчатого комплекса, основанная на аналогии с теорией трехмерной поверхности в конформном пространстве, не получила. В 70-е годы теории комплексов, рассматриваемой наряду с теорией конгруэнций, посвятил свое достаточно обширное исследование А. Фосс [86].

К концу XIX столетия сведений по теории комплексов оказалось достаточно для того, чтобы Г. Кёнигс мог посвятить им специальный раздел своего элементарного учебника по линейчатой геометрии [38]. В 1902 г. то же самое было сделано Циндлером [88]. В это же время итальянский математик Санниа пытается строить теорию комплексов в метрическом пространстве на основе двух квадратичных форм подобно тому, как это делается в классической теории поверхностей. Санниа, однако, не пошел далеко в развитии своей теории, так как, определяя обе квадратичные формы первой дифференциальной окрестностью луча комплекса, он, естественно, не мог указать с помощью своих форм достаточно глубоких свойств этого комплекса [75].

В 1923 г. к теории комплексов в проективном пространстве впервые приложил метод внешних форм Картана П. Мантре [67, 68]. Им, в частности, была дана классификация комплексов, основанная на рассмотрении так называемых инфлекционных центров луча. В зависимости от характера этих центров естественным образом выделяются комплексы с одним двойным, двумя двойными, одним тройным и одним четырехкратным инфлекционными центрами.

Метод Картана позволяет каждый комплекс считать заданным с помощью некоторой тройки линейных форм и некоторых инвариантов, которые имеют тот или иной геометрический смысл в зависимости от пространства, вмещающего комплекс. Такую же форму задания комплекса, но уже не в проективном, а в евклидовом пространстве, применил и В. Хак в серии своих работ, появившихся в середине 30-х и начале 40-х годов [87]. Однако, если не считать способа задания, в остальном методика, примененная Хаком, к методу внешних форм никакого отношения не имеет. Ограничиваясь вначале первой дифференциальной окрестностью луча, Хак вводит основной (нормальный) трехгранник комплекса, образованный центром луча, его главной нормалью, бинормалью и самим лучом. Переход ко второй окрестности, естественно, приводит к главным поверхностям и инфлекционным центрам луча.

В 1940 г. метод внешних форм Картана к метрической теории комплексов был применен С. П. Финиковым [81]. В результате этого на нескольких страницах журнальной статьи ему удалось изложить то, на что Хаку потребовалось намного больше места.

В 40-е и особенно в 50-е годы теорией комплексов занимаются, главным образом, советские и румынские геометры (В. И. Коровин, М. А. Акивис, А. М. Васильев, Г. Георгиев, Р. Мирон и др.). С начала 50-х годов в разработку теории комплексов включаются целые коллективы геометров. Так, возникает томская школа геометров, возглавляемая Р. Н. Щербаковым. Здесь вопросы теории комплексов занимают одно из ведущих мест [90—97]. В Вильнюсе теорией комплексов занимается группа геометров во главе с К. И. Гринцевичюсом [22—33]. В Киеве эта теория представлена работами Н. И. Кованцова и его учеников [43—62]. Усилиями этих геометров создана достаточно обширная литература.

В настоящее время возникла настоятельная потребность в создании трудов, которые бы подводили некоторый итог проделанной работе и вместе с тем служили бы в определенной мере учебным пособием для студентов и аспирантов, специализирующихся по геометрии. Монография, которую мы сейчас выпускаем, и представляет собой первую попытку решения обеих поставленных задач.

Для понимания ее содержания необходимо знакомство с

называть компонентами инфинитезимального смещения репера пространства.

Продифференцируем внешним образом равенства (1.1), приняв во внимание, что внешний дифференциал от полного дифференциала равен нулю

$$(\omega^i)' I_i + [dI_i \omega^i] = 0,$$
$$(\omega_i^k)' I_k + [dI_k \omega_i^k] = 0.$$

Здесь штрихом обозначены внешние дифференциалы линейных форм, а квадратными скобками — внешние квадратичные формы.

Перепишем эти равенства, переменив в квадратных скобках немые индексы

$$\begin{aligned} (\omega^i)' I_i + [dI_j \omega^j] = 0, \\ (\omega_i^k)' I_k + [dI_j \omega_i^j] = 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Дифференциалы dI_j заменим здесь их значениями по формулам (1.1), положив в первом равенстве

$$dI_j = \omega_j^i I_i,$$

а в остальных

$$dI_j = \omega_j^k I_k.$$

Вынося векторы за скобки, приведем равенства (1.3) к виду:

$$\{(\omega^i)' + [\omega_j^i \omega^j]\} I_i = 0,$$
$$\{(\omega_i^k)' + [\omega_j^k \omega_i^j]\} I_k = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при независимых векторах I_1, I_2, I_3 и учитывая, что при перестановке двух сомножителей внешняя квадратичная форма меняет знак, мы придем к следующим соотношениям между линейными формами ω^i, ω_i^k

$$\left.\begin{aligned} (\omega^i)' = [\omega^j \omega_j^i], \\ (\omega_i^k)' = [\omega_i^j \omega_j^k] \end{aligned}\right\} (i, j, k = 1, 2, 3) \tag{1.4}$$

Таким соотношениям должны удовлетворять формы ω^i, ω_k для того, чтобы они могли служить компонентами инфинитезимального смещения сопровождающего трехгранника евклидова пространства.

Равенства (1.4) называются **уравнениями структуры евклидова пространства.**

§ 2. Нормальная корреляция

При движении сопровождающего трехгранника каждое ребро его описывает трехпараметрическую совокупность прямых линий, т. е. некоторый линейчатый комплекс. Мы будем изучать комплекс, описанный вектором $\boldsymbol{I}_3$.

Очевидно, и наоборот, если нам дан произвольный комплекс, то, помещая вершину $\boldsymbol{A}$ сопровождающего трехгранника на его луч, а вектор $\boldsymbol{I}_3$ совмещая с этим лучом, мы приведем к описанному случаю. Тем самым каждый луч комплекса будет вполне определяться тремя параметрами u, v, w.

Стационарной подгруппой группы движений сопровождающего трехгранника называется подгруппа, оставляющая неподвижным текущий луч комплекса. Очевидно, при преобразовании, принадлежащем этой подгруппе, вектор $\boldsymbol{I}_3$ остается без изменения, а точка $\boldsymbol{A}$ перемещается вдоль луча. Из равенств (1.1) заключаем, что в этом случае четыре формы $\omega^1, \omega^2, \omega_3^1, \omega_3^2$ обращаются в нуль

$$\omega^1 = 0, \ \omega^2 = 0, \ \omega_3^1 = 0, \ \omega_3^2 = 0. \tag{1.5}$$

Формы $\omega^1, \omega^2, \omega_3^1, \omega_3^2$ называются главными формами инфинитезимального смещения сопровождающего трехгранника. Поскольку эти формы обращаются в нуль при закрепленном луче, т. е. при нулевых значениях дифференциалов du, dv, dw, то они являются линейными функциями только этих трех дифференциалов. Следовательно, между ними должно существовать некоторое линейное соотношение, которому мы придадим вид

$$\omega^2 = k\omega_3^1 + p\omega_3^2 + q\omega^1. \tag{1.6}$$

(Если форма ω^2 не входит в соотношение между главными формами, разрешим его относительно формы ω^1. В противном случае мы имели бы соотношение между формами ω_3^1 и ω_3^2 которое означало бы, что сферическое отображение комплекса вырождается в линию. Комплекс, у которого это имеет место, представляет собой однопараметрическую совокупность связок параллельных прямых. Такие комплексы мы условимся из рассмотрения исключать).

Формы $\omega^1, \omega_3^1, \omega_3^2$ впредь будем принимать за базисные формы комплекса.

Поскольку комплекс есть трехмерная совокупность прямых линий в трехмерном точечном пространстве, то это означает, что через каждую точку пространства проходит однопараметрическая совокупность лучей, принадлежащих этому комплексу. (В самом деле, если бы это было не так, то все точки, расположенные на лучах комплекса, составили бы четырехмерную совокупность). Этой совокупностью является конус лучей, вершина которого совпадает с упомянутой точкой.

Пусть l — какая-нибудь образующая конуса, $\boldsymbol{M}$ — его вершина, а Π — плоскость, касательная к конусу вдоль образующей l. При перемещении точки $\boldsymbol{M}$ вдоль луча l плоскость Π будет поворачиваться вокруг этого луча. Тем самым каждой точке луча будет соответствовать определенная плоскость, проходящая через этот луч. Назовем такое соответствие **нормальной корреляцией** на луче l.

Найдем аналитическое выражение такой корреляции. Пусть

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} + t\boldsymbol{I}_3. \tag{1.7}$$

Если точка $\boldsymbol{M}$ остается неподвижной, то

$$d\boldsymbol{M} = 0 \tag{1.8}$$

Дифференцируя равенство (1.7) и принимая во внимание равенства (1.1), мы приведем равенство (1.8) к виду

$$(\omega^1 + t\omega_3^1)\boldsymbol{I}_1 + (\omega^2 + t\omega_3^2)\boldsymbol{I}_2 + (\omega^3 + dt)\boldsymbol{I}_3 = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\omega^1 + t\omega_3^1 = 0, \\ &\omega^2 + t\omega_3^2 = 0, \\ &\omega^3 + dt = 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Таковы уравнения, определяющие конус лучей комплекса. Вектор нормали к плоскости Π определится тогда как векторное произведение

$$\boldsymbol{N} = [d\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_3] = \omega^2\boldsymbol{I}_1 - \omega^1\boldsymbol{I}_2. \tag{1.10}$$

Из (1.9) находим

$$\omega^1 = -t\omega_3^1, \ \omega^2 = -t\omega_3^2. \tag{1.11}$$

Подставляя это в (1.6), будем иметь

$$\frac{\omega_3^1}{-(p+t)} = \frac{\omega_3^2}{-qt+k}.$$

Следовательно (см. (1.11)),

$$\frac{\omega^1}{-(p+t)} = \frac{\omega^2}{-qt+k}.$$

Мы можем, таким образом, в качестве вектора нормали к плоскости П взять вектор

$$N = (-qt + k) I_1 + (p + t) I_2. \qquad (1.12)$$

Если точка M является фокусом некоторого торса, принадлежащего комплексу, то при перемещении вдоль этого торса

$$dM = (\omega^3 + dt) I_3, \qquad (1.a)$$

следовательно,

$$\omega^1 + t\omega_3^1 = 0, \ \omega^2 + t\omega_3^2 = 0. \qquad (1.13)$$

Отсюда

$$\omega^1\omega_3^2 - \omega^2\omega_3^1 = 0. \qquad (1.14)$$

Таким образом, линейные формы, соответствующие торсу комплекса, удовлетворяют соотношению (1.14).

Легко видеть, что справедливо и обратное, т. е. если главные формы удовлетворяют соотношению (1.14), то линейчатая поверхность комплекса является торсом.

Действительно, положим

$$\frac{\omega^1}{\omega_3^1} = \frac{\omega^2}{\omega_3^2} = -t.$$

Но в таком случае для точки $M = A + tI_3$ имеем

$$dM = (\omega^3 + dt) I_3,$$

что и доказывает, что точка M является ребром возврата развертывающейся поверхности (торса).

Очевидно, вектор N (1.10) будет вектором нормали не только к конусу комплекса, имеющему вершину в точке M, но и ко всякой развертывающейся поверхности комплекса, имеющей точку M своим фокусом. Чтобы в этом убедиться, достаточно сопоставить уравнения (1.13), определяющие произвольную развертывающуюся поверхность, с уравнениями (1.9), определяющими конус.

Таким образом, плоскость П, соответствующая точке M в нормальной корреляции на луче, будет касаться вдоль этого луча каждого торса, имеющего точку M своим фокусом.

Справедливо и обратное: если развертывающаяся поверхность, проходящая через луч l, касается плоскости П, то ее ребро возврата проходит через точку M и касается луча l в этой точке.

Тангенс угла наклона вектора N к вектору I_1 определяется равенством

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{p + t}{-qt + k}. \qquad (1.15)$$

книгой С. П. Финикова «Метод внешних форм Картана», а также с его известными монографиями «Проективно-дифференциальная геометрия» и «Теория конгруэнций».

Книга делится на две неравные части. В первой рассматриваются свойства комплекса прямых в трехмерном евклидовом пространстве, во второй — его свойства в проективном пространстве. Рассмотрения, содержащиеся в первой части, отчасти повторяются в восьмой главе второй части, но уже в проективной интерпретации евклидовой геометрии. По примеру последней рассматриваются свойства комплексов в целом ряде неевклидовых пространств — как метрических, так и неметрических. Обе части не зависят друг от друга, а потому знакомство с книгой можно начинать с прочтения любой из них.

Автор отдает себе отчет в том, что выпускаемая монография далеко не свободна от недостатков, из которых те или иные, возможно, являются и значительными. Поэтому все замечания, касающиеся как содержания книги, так и ее формы, будут им с благодарностью приняты и учтены в дальнейшей работе над нею.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КОМПЛЕКСОВ

Глава первая

ОКРЕСТНОСТЬ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. Уравнения структуры

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве каким-нибудь образом введена некоторая криволинейная система координат u, v, w. Сопоставим с каждой точкой пространства

$$A(u, v, w)$$

тройку единичных взаимно перпендикулярных векторов

$$\boldsymbol{I}_1(u, v, w),\ \boldsymbol{I}_2(u, v, w),\ \boldsymbol{I}_3(u, v, w),$$

образующих левую систему

$$[\boldsymbol{I}_1\boldsymbol{I}_2] = \boldsymbol{I}_3,\ [\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{I}_3] = \boldsymbol{I}_1,\ [\boldsymbol{I}_3\boldsymbol{I}_1] = \boldsymbol{I}_2.$$

Трехгранник $A\boldsymbol{I}_1\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{I}_3$ будет представлять собой основной трехгранник пространства, который является сопровождающим для всякого многообразия, рассматриваемого в этом пространстве.

Обозначим через ω^i, ω_i^k координаты дифференциалов dA и $d\boldsymbol{I}_i$ относительно этого трехгранника

$$\begin{aligned} dA &= \omega^i \boldsymbol{I}_i, \\ d\boldsymbol{I}_i &= \omega_i^k \boldsymbol{I}_k \end{aligned} \quad (i, k = 1, 2, 3). \tag{1.1}$$

Из единичности и взаимной ортогональности векторов $I_1 I_2 I_3$, будет следовать следующая зависимость между координатами ω_i^k

$$\omega_i^k = -\omega_k^i. \tag{1.2}$$

Величины ω^i, ω_i^k представляют собой, очевидно, некоторые линейные функции дифференциалов du, dv, dw. Мы их будем

Последнюю формулу и следует считать **аналитическим** выражением нормальной корреляции.

§ 3. Канонический трехгранник

Для бесконечно удаленной точки $t = \infty$ **луча** (для которой, следовательно, конус лучей комплекса становится цилиндром) вектор нормали к плоскости П становится равным

$$\boldsymbol{N}_\infty = -q\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2.$$

Этот вектор называется **вектором бинормали** комплекса в данном его луче l.

Совместим с этим вектором вектор $\boldsymbol{I}_2$ сопровождающего трехгранника. В таком случае

$$q = 0. \tag{1.16}$$

Вектор $\boldsymbol{I}_1$ становится полностью определенным. Назовем этот вектор **вектором главной нормали** комплекса в луче l.

Выберем точку $\boldsymbol{M}$ на луче так, чтобы вектор $\boldsymbol{N}$ в ней (см. (1.12)) был перпендикулярен к вектору бинормали. Это немедленно приводит к равенству

$$p + t = 0. \tag{1.*}$$

Назовем такую точку **центром** луча l комплекса.

Совмещая вершину $\boldsymbol{A}$ $(t = 0)$ сопровождающего трехгранника с центром луча, мы из (1.*) получим условие такого совмещения

$$p = 0. \tag{1.17}$$

Сопровождающий трехгранник становится полностью определенным. Назовем его **каноническим трехгранником** комплекса прямых в евклидовом пространстве.

Прямая, проходящая через центр луча и параллельная вектору главной нормали, носит название **главной нормали,** прямая, проходящая через центр и параллельная бинормали — название **бинормали** комплекса.

Равенство (1.6) принимает теперь вид

$$\omega^2 = k\omega_3^1. \tag{1.18}$$

Это равенство представляет собой дифференциальное уравнение комплекса прямых, отнесенного к своему каноническому трехграннику.

Величина k есть единственный инвариант, определяемый окрестностью первого порядка луча комплекса. Назовем ее **кривизной** комплекса в данном его луче.

§ 4. Основные формулы и уравнения, определяемые окрестностью первого порядка

1. **Формула Шаля.** Перепишем равенство (1.12), учтя в нем (1.16) и (1.17)

$$N = kI_1 + tI_2. \tag{1.19}$$

Если обозначим через θ угол, образуемый плоскостью П с вектором главной нормали I_1, то из последнего равенства будет следовать, что

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{k}{t}. \tag{1.20}$$

Это формулируется в виде предложения, которому ретроспективно приписывают имя Шаля:

нормальная корреляция на луче комплекса есть проективное соответствие.

Впредь формулу (1.20) будем называть **формулой Шаля.**

2. **Формула Кёнигса.** Возьмем произвольную линейчатую поверхность, принадлежащую комплексу. Вектор нормали N этой поверхности в произвольной точке $M = A + tI_3$ определится равенством

$$N = [dMI_3] = (\omega^2 + t\omega_3^2)\, I_1 - (\omega^1 + t\omega_3^1)\, I_2. \tag{1.21}$$

Отсюда легко находится тангенс угла наклона φ этого вектора к вектору главной нормали комплекса I_1

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\omega^1 + t\omega_3^1}{\omega^2 + t\omega_3^2}. \tag{1.22}$$

Параметр распределения линейчатой поверхности есть

$$p = \frac{(dA, I_3, dI_3)}{dI_3^2} = \frac{\omega^2\omega_3^1 - \omega^1\omega_3^2}{(\omega_3^1)^2 + (\omega_3^2)^2}. \tag{1.23}$$

Если точка M является стрикционной точкой поверхности, то

$$t = -\frac{dA\cdot dI_3}{dI_3^2} = -\frac{\omega^1\omega_3^1 + \omega^2\omega_3^2}{(\omega_3^1)^2 + (\omega_3^2)^2}. \tag{1.24}$$

Из (1.18) находим

$$k = \frac{\omega^2}{\omega_3^1},$$

а потому

$$p - k = -\frac{\omega_3^2}{\omega_3^1}\,\frac{\omega^1\omega_3^1 + \omega^2\omega_3^2}{(\omega_3^1)^2 + (\omega_3^2)^2}. \tag{1.25}$$

Подставляя в равенство (1.22) вместо t его значение, определяемое формулой (1.24), найдем тангенс угла φ_0 между главной нормалью комплекса и нормалью к линейчатой поверхности в стрикционной точке

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\omega_3^2}{\omega_3^1}\cdot\frac{\omega^1\omega_3^2 - \omega^2\omega_3^1}{\omega^1\omega_3^2 - \omega^2\omega_3^1}. \tag{1.26}$$

Если рассматриваемая поверхность не является развертывающейся, то мы можем привести последнее равенство к виду

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\omega_3^2}{\omega_3^1}, \tag{1.26'}$$

а тогда, сопоставляя между собой формулы (1.24), (1.25), (1.26), будем иметь

$$t\cdot\operatorname{tg}\varphi_0 = p - k. \tag{1.27}$$

Формула (1.27) носит название **формулы Кёнигса.** Она связывает между собой расстояние t стрикционной точки линейчатой поверхности комплекса от центра луча комплекса, угол φ_0 между главной нормалью последнего и нормалью к линейчатой поверхности в ее стрикционной точке, параметр p распределения линейчатой поверхности и кривизну k комплекса.

В случае развертывающейся поверхности угол между вектором N и вектором главной нормали комплекса определяется равенством (1.15). Следовательно, в этом случае, учитывая, что $p = 0$, мы будем иметь

$$t\cdot\operatorname{ctg}\varphi_0 = k. \tag{1.28}$$

Эта формула в точности совпадает с формулой (1.20), если положить $\varphi_0 + \frac{\pi}{2} = \theta$. Легко видеть, что при тех же предположениях эта формула получается как частный случай формулы Кёнигса (1.27).

3. **Специальные комплексы.** Если кривизна k комплекса обращается в нуль

$$k = 0,$$

то $\omega^2 \equiv 0$ (см. (1.18)), а в таком случае

$$dA = \omega^1 I_1 + \omega^3 I_3.$$

Вектор dA, таким образом, зависит лишь от двух линейных форм. Это означает, что точка A (центр луча) описывает поверхность, которой касаются все лучи комплекса. Рассматриваемый комплекс представляет собой, следовательно, совокупность касательных к некоторой поверхности. Это — **специальный комплекс**.

Может ли быть поверхность, которой касаются все лучи специального комплекса, совершенно произвольной? Легко показать, что это действительно так.

В самом деле, помещая вершину $\boldsymbol{A}$ трехгранника на выбранную поверхность и совмещая плоскость $\boldsymbol{I}_1\boldsymbol{I}_2$ с касательной плоскостью поверхности, получим уравнение этой поверхности в виде

$$\omega^2 = 0. \tag{1.29}$$

Если теперь рассмотреть комплекс касательных к данной поверхности, принимая за его луч прямую, параллельную вектору $\boldsymbol{I}_3$, то равенство (1.29) будет означать, что точка $\boldsymbol{A}$ — центр луча такого комплекса, а трехгранник $\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_1\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{I}_3$ — его канонический трехгранник.

4. **Точки прикосновения.** Назовем **точкой прикосновения** линейчатой поверхности комплекса такую точку $\boldsymbol{M}$ на ее образующей, в которой касательная плоскость поверхности совпадает с плоскостью П, соответствующей точке $\boldsymbol{M}$ в нормальной корреляции на этой образующей. В такой точке векторы (1.19) и (1.21) оказываются параллельными друг другу, а потому

$$k(\omega^1 + t\omega_3^1) + t(\omega^2 + t\omega_3^2) = 0,$$

или (см. (1.18))

$$\omega_3^2 t^2 + 2\omega^2 t + k\omega^1 = 0. \tag{1.30}$$

Таким образом, **на каждой образующей линейчатой поверхности имеется в общем случае две и только две точки прикосновения.**

Линии, описанные на поверхности точками прикосновения, назовем **линиями прикосновения** этой поверхности.

Точки (1.30) сливаются в одну тогда и только тогда, когда

$$k\omega_3^2\omega^1 - (\omega^2)^2 = 0,$$

или

$$\omega^1\omega_3^2 - \omega^2\omega_3^1 = 0,$$

т. е. когда поверхность является развертывающейся. В этом случае

$$t = -\frac{\omega^2}{\omega_3^2} = -\frac{\omega^1}{\omega_3^1};$$

следовательно, единственная точка прикосновения совпадает с точкой ребра возврата (фокусом) поверхности (см. (1.13)).

5. **Инволютивно сопряженные поверхности.** Возьмем две линейчатые поверхности комплекса, проходящие через один и тот же луч и определяемые соответственно главными формами $\omega^1 : \omega^2 : \omega_3^1 : \omega_3^2$ и $\overline{\omega}^1 ; \overline{\omega}^2 : \overline{\omega}_3^1 : \overline{\omega}_3^2$. Угол наклона вектора нормали каждой из них в точках $\boldsymbol{M}(t)$ и $\overline{\boldsymbol{M}}(\overline{t})$ к вектору главной нормали комплекса определяется соответственно равенством

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\omega^1 + t\omega_3^1}{\omega^2 + t\omega_3^2}, \quad \operatorname{tg}\overline{\varphi} = -\frac{\overline{\omega}_1 + \overline{t}\,\overline{\omega}_3^1}{\overline{\omega}_2 + \overline{t}\,\overline{\omega}_3^2}.$$

(см. (1.22)). Если касательные плоскости к поверхностям совпадают, то между точками касания $\boldsymbol{M}$ и $\overline{\boldsymbol{M}}$ установится некоторое проективное соответствие

$$\frac{\omega^1 + t\omega_3^1}{\omega^2 + t\omega_3^2} = \frac{\overline{\omega}^1 + \overline{t}\,\overline{\omega}_3^1}{\overline{\omega}^2 + \overline{t}\,\overline{\omega}_3^2},$$

или

$$\omega^1\overline{\omega}^2 - \overline{\omega}^1\omega^2 + t(\omega_3^1\overline{\omega}^2 - \omega_3^2\overline{\omega}^1) + \overline{t}(\omega^1\overline{\omega}_3^2 - \omega^2\overline{\omega}_3^1) + t\overline{t}(\omega_3^1\overline{\omega}_3^2 - \overline{\omega}_3^1\omega_3^2) = 0.$$

Это соответствие инволютивно тогда и только тогда, когда коэффициенты при t и $\overline{t}$ равны друг другу — следовательно, когда главные формы поверхностей связаны условием

$$\omega_3^1\overline{\omega}^2 - \omega_3^2\overline{\omega}^1 + \omega^2\overline{\omega}_3^1 - \omega^1\overline{\omega}_3^2 = 0. \tag{1.31}$$

Поверхности, обладающие таким свойством, будем называть **инволютивно сопряженными** друг другу.

Легко обнаружить, что поверхность, **инволютивно сопряженная самой себе, является развертывающейся.**

Понятие инволютивной сопряженности применимо к двум любым отдельно взятым линейчатым поверхностям, проходящим через один и тот же луч, вне их связи с комплексом. Однако это понятие можно определить также и в терминах первой окрестности луча комплекса.

Прежде всего, легко проверяется, что две пары точек (t_1, t_2) и $(\overline{t}_1, \overline{t}_2)$ гармонически сопряжены тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$-2(t_1 t_2 + \overline{t}_1\overline{t}_2) + (t_1 + t_2)(\overline{t}_1 + \overline{t}_2) = 0. \tag{1.32}$$

Для пар точек прикосновения двух линейчатых поверхностей, проходящих через один луч, мы имеем

$$t_1 + t_2 = -2\frac{\omega^2}{\omega_3^2}, \quad t_1 t_2 = k\frac{\omega^1}{\omega_3^2},$$

$$\overline{t}_1 + \overline{t}_2 = -2\frac{\overline{\omega}^2}{\overline{\omega}_3^2}, \quad \overline{t}_1\overline{t}_2 = k\frac{\overline{\omega}^1}{\overline{\omega}_3^2}.$$

(см. (1.30)). Если эти пары гармонически разделяют друг друга, то должно быть выполнено равенство (1.32), т. е.

$$-k(\omega^1\bar{\omega}_3^2 + \bar{\omega}^1\omega_3^2) + 2\omega^2\bar{\omega}^2 = 0. \qquad (1.33)$$

С помощью (1.18) последнее слагаемое можно представить в виде

$$k\omega_3^1\bar{\omega}^2 + k\bar{\omega}_3^1\omega^2,$$

а потому (1.33) принимает вид

$$\omega_3^1\bar{\omega}^2 + \bar{\omega}_3^1\omega^2 - (\omega^1\bar{\omega}_3^2 + \bar{\omega}^1\omega_3^2) = 0.$$

Но это в точности совпадает с (1.31).

Таким образом, **необходимым и достаточным условием инволютивной сопряженности двух линейчатых поверхностей комплекса, проходящих через один и тот же луч, является гармоническая сопряженность двух пар точек их прикосновения.**

§ 5. Касательные линейные комплексы

Шесть плюккеровых координат произвольного луча комплекса можно определить как две тройки декартовых координат векторов $\boldsymbol{I}_3$ и $[\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_3]$. Следовательно, уравнение линейного комплекса, содержащего луч данного комплекса (обозначим его через Σ_3), может быть записано в виде

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{b}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_3] = 0, \qquad (1.34)$$

где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — постоянные векторы, координаты которых играют роль коэффициентов в уравнении линейного комплекса. Если комплекс (1.34) содержит, кроме данного луча, также и все лучи, принадлежащие к его первой дифференциальной окрестности, то он называется **касательным комплексом.**

Чтобы найти касательный комплекс, продифференцируем уравнение (1.34)

$$\boldsymbol{a}d\boldsymbol{I}_3 + d\{[\boldsymbol{b}\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}_3] + [\boldsymbol{A}, d\boldsymbol{I}_3]\} = 0,$$

или

$$\omega^1(-\boldsymbol{b}\boldsymbol{I}_2) + \omega_3^1(\boldsymbol{a}\boldsymbol{I}_1 + k\boldsymbol{b}\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{b}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_1]) + \omega_3^2(\boldsymbol{a}\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{b}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_2]) = 0.$$

Так как это равенство должно быть выполнено при любых значениях базисных форм $\omega^1, \omega_3^1, \omega_3^2$, то будут иметь место следующие соотношения между коэффициентами уравнения касательного линейного комплекса:

$$\boldsymbol{b}\boldsymbol{I}_2 = 0,$$
$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{I}_1 + k\boldsymbol{b}\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{b}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_1] = 0, \qquad (1.35)$$
$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{b}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_2] = 0.$$

Вместе с (1.34) получается, таким образом, четыре соотношения на пять существенных коэффициентов уравнения (1.34). Следовательно, **в каждом луче произвольного комплекса Σ_3 в общем случае существует пучок касательных линейных комплексов.**

В терминах, связанных с пучком касательных линейных комплексов, можно сформулировать геометрический смысл основных понятий, относящихся к первой дифференциальной окрестности луча комплекса Σ_3, таких как центр луча, главная нормаль и бинормаль, нормальная корреляция, кривизна.

В самом деле, примем трехгранник $\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_1\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{I}_3$ за координатный. В таком случае мы будем иметь $\boldsymbol{A}\{0, 0, 0\}$, $\boldsymbol{I}_1\{1, 0, 0\}$, $\boldsymbol{I}_2\{0, 1, 0\}$, $\boldsymbol{I}_3\{0, 0, 1\}$. Положим, кроме того, $\boldsymbol{a}\{a^1, a^2, a^3\}$, $\boldsymbol{b}\{b^1, b^2, b^3\}$. В таком случае уравнения (1.34) и (1.35) примут вид

$$a^3 = 0,\ b^2 = 0,\ a^1 + kb^1 = 0,\ a^2 = 0.$$

Положив $b^3 = \lambda$, $b^1 = 1$ найдем $a^1 = -k$. Следовательно, уравнение пучка касательных линейных комплексов может быть записано в виде

$$-k\rho_1 + \rho_4 + \lambda\rho_6 = 0. \qquad (1.36)$$

Здесь ρ_i — плюккеровы координаты прямой (при этом три первых индекса соответствуют координатам вектора $\boldsymbol{I}_3$, взятым в их натуральном порядке, три последних — координатам вектора $[\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_3]$, также взятым в натуральном порядке).

Если α, β, γ — направляющие косинусы прямой, а x, y, z — координаты некоторой точки на ней, то, в соответствии с тем, что только что сказано,

$$\rho_1 = \alpha,\ \rho_2 = \beta,\ \rho_3 = \gamma,\ \rho_4 = -\beta z + \gamma y,\ \rho_5 = -\gamma x + \alpha z,\ \rho_6 = -\alpha y + \beta x.$$

Уравнение (1.36) при подстановке в него этих координат принимает вид

$$-k\alpha - \beta z + \gamma y + \lambda(-\alpha y + \beta x) = 0. \qquad (1.37)$$

Заменим коэффициенты α, β, γ пропорциональными им разностями $X-x$, $Y-y$, $Z-z$:

$$-(\lambda y + k)X - (z - \lambda x)Y + yZ + kx = 0. \qquad (1.38)$$

Для каждой точки (x, y, z) это уравнение определяет плоскость, полярно сопряженную ей в нуль-системе комплекса (1.36). Как известно, **осью линейного комплекса** называется прямая, для каждой точки которой полярно сопряженная с ней плоскость перпендикулярна к ней.

Если плоскость (1.38) перпендикулярна к прямой g с угловыми коэффициентами $l:m:n$, то

$$\frac{-\lambda y-k}{l}=\frac{-z+\lambda x}{m}=\frac{y}{n}. \tag{1.39}$$

Запишем это для двух каких-либо точек прямой g (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2):

$$\frac{-\lambda y_1-k}{l}=\frac{-z_1+\lambda x_1}{m}=\frac{y_1}{n},$$

$$\frac{-\lambda y_2-k}{l}=\frac{-z_2+\lambda x_2}{m}=\frac{y_2}{n}.$$

Вычтем из одной системы равенств другую

$$\frac{-\lambda(y_1-y_2)}{l}=\frac{-(z_1-z_2)+\lambda(x_1-x_2)}{m}=\frac{y_1-y_2}{n}.$$

Заменим здесь разности x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2 пропорциональными им коэффициентами l, m, n:

$$\frac{-\lambda m}{l}=\frac{-n+\lambda l}{m}=\frac{m}{n}.$$

Обозначая величину общего отношения через s, получим

$$\begin{aligned} sl+\lambda m&=0,\\ \lambda l-sm-n&=0,\\ m-sn&=0.\end{aligned} \tag{1.40}$$

Условием совместности этой системы является следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} s+\lambda & 0 \\ \lambda-s-1 \\ 0 & 1-s\end{vmatrix}=0$$

или

$$s[s^2+(\lambda^2+1)]=0.$$

Корни уравнения

$$s_1=0,\ s_{2,3}=\pm i\sqrt{\lambda^2+1}.$$

Для первого корня уравнения (1.40) дают

$$\frac{l}{1}=\frac{n}{\lambda},\ m=0.$$

Подставляя это в уравнения (1.39), будем иметь

$$z-\lambda x=0,\ (1+\lambda^2)y+k\lambda=0. \tag{1.41}$$

Легко видеть, что угловые коэффициенты этой прямой есть как-раз $1:0:\lambda$, что и означает, что найденная прямая действительно является осью линейного комплекса.

Если в уравнения (1.40) подставить два других корня, то мы получим для каждого из них

$$\frac{l}{\lambda}=\frac{m}{s}=\frac{n}{1}\quad (s=\pm i\sqrt{\lambda^2+1}). \tag{1.42}$$

Подставляя это в (1.39), получим прямую

$$0y+k=0,\ \lambda x-sy-z=0,$$

угловые коэффициенты которой есть $1:0:\lambda$. Это не совпадает с (1.42).

Таким образом, прямая (1.41) — единственная ось линейного касательного комплекса с параметром λ.

Из уравнений (1.41) видно, что ось каждого касательного линейного комплекса ортогонально пересекает бинормаль комплекса Σ_3 $(x=z=0)$ в точке $y=\frac{-k\lambda}{1+\lambda^2}$ и при изменении λ описывает некоторый прямой коноид. Бинормаль комплекса можно теперь определить как ось этого коноида, а центр луча — как точку, в которой ось коноида пересекает луч комплекса. Прямая, проходящая через центр и перпендикулярная к лучу и бинормали, есть главная нормаль.

Положим

$$\lambda=-\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}.$$

В таком случае

$$y=\frac{k}{2}\sin\psi.$$

Следовательно, при изменении ψ от 0 до 2π точка пересечения оси касательного линейного комплекса с бинормалью дважды описывает на бинормали отрезок, равный k, причем середина этого отрезка совпадает с центром луча комплекса.

Отметим еще одно свойство касательных линейных комплексов.

Для точки M $(0, 0, t)$ на луче комплекса Σ_3 уравнение плоскости (1.38) принимает вид

$$kX+tY=0.$$

Это уравнение не зависит от λ, а потому плоскость будет одной и той же для всех касательных комплексов.

Угол, образуемый этой плоскостью с главной нормалью (в данном случае — осью абсцисс), определяется равенством

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{k}{t}.$$

Следовательно (см. (1.20)), рассматриваемая плоскость совпадает с плоскостью П. Но это означает, что нормальная корреляция на луче есть такое соответствие между точками луча и проходящими через них плоскостями, в котором каждой точке луча соответствует плоскость, полярно сопряженная этой точке в нуль-системе каждого из линейных комплексов, касательных к комплексу Σ_3 в данном луче.

§ 6. Комплекс главных нормалей

Рассмотрим комплекс Σ_1, образованный главными нормалями комплекса Σ_3. Чтобы воспользоваться формулами, выведенными в предшествующих параграфах, перейдем к трехграннику $\widetilde{A}\widetilde{I}_1\widetilde{I}_2\widetilde{I}_3$, положив

$$\widetilde{A} = A, \widetilde{I}_1 = I_3, \widetilde{I}_2 = -I_2, \widetilde{I}_3 = I_1. \qquad (1.43)$$

Взяв такой трехгранник, мы отнюдь не навязываем новым векторам I_1 и I_2 роли главной нормали и бинормали нового комплекса. Для нас это пока только векторы сопровождающего репера для комплекса Σ_1. Легко убедиться в том, что этот репер будет ориентирован точно так же, как и первоначальный репер.

В соответствии с равенствами (1.43) мы должны положить

$$\widetilde{\omega}^2 = -\omega^2, \widetilde{\omega}_3^1 = \omega_1^3.$$

Но тогда, принимая во внимание соотношение (1.18), будем иметь

$$\widetilde{\omega}^2 = k\widetilde{\omega}_3^1. \qquad (1.44)$$

Отсюда следует, что:

1. Трехгранник $\widetilde{A}\widetilde{I}_1\widetilde{I}_2\widetilde{I}_3$ является каноническим для комплекса главных нормалей Σ_1.

2. Главной нормалью комплекса Σ_1 является луч первоначального комплекса Σ_3.

3. Центр луча комплекса Σ_1 совпадает с центром луча комплекса Σ_3.

4. Кривизны комплексов Σ_1 и Σ_3 в соответствующих лучах равны друг другу:

$$\widetilde{k} = k.$$

Глава вторая

ВТОРАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ОКРЕСТНОСТЬ

§ 1. Основные уравнения

Продифференцируем внешним образом дифференциальное уравнение комплекса (1.18)

$$[\omega^1\omega_1^2] + [\omega_3^1 dk] + [\omega_3^2, k\omega_1^2 - \omega^3] = 0. \qquad (2.1)$$

Алгебраически разрешая это внешнее квадратичное уравнение, мы по лемме Картана будем иметь

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= p\omega^1 + \alpha\omega_3^1 + \beta\omega_3^2, \\ dk &= \alpha\omega^1 + q\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2, \\ -\omega^3 + k\omega_1^2 &= \beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1 + r\omega_3^2. \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Здесь $p, q, r, \alpha, \beta, \gamma$ — некоторые функции параметров u, v, w. Вместе с уравнением (1.18) уравнения (2.2) будут определять дифференциальную окрестность второго порядка луча комплекса. Коэффициенты $k, p, q, r, \alpha, \beta, \gamma$ представляют собой основные инварианты этой окрестности. Из них лишь один инвариант — кривизна k — принадлежит первой дифференциальной окрестности.

§ 2. Плоские кривые s и s'

1. **Кривая** s. Подобно тому, как через каждую точку пространства проходит конус лучей комплекса, так в каждой плоскости будет располагаться однопараметрическая совокупность лучей комплекса, огибающая в ней некоторую плоскую кривую s. В частности, такая кривая существует и в плоскости П (см. гл. I, § 2). Лучи комплекса, огибающие кривую s, образуют вырожденную развертывающуюся поверхность, ребром возврата которой и является эта кривая. В связи со сказанным в конце § 2, мы должны заключить, что кривая s проходит через точку M и касается луча в этой точке.

Подсчитаем кривизну кривой s в точке M.

Имеем для единичного вектора нормали к кривой

$$\bar{\nu} = \cos\theta I + \sin\theta I_2. \qquad (2.3)$$

Отсюда, дифференцируя, находим

$$d\bar{\nu} = (d\theta + \omega_1^2)(-\sin\theta I_1 + \cos\theta I_2) + (\cos\theta\omega_1^3 + \sin\theta\omega_2^3) I_3.$$

Поскольку s — плоская кривая, то вектор $d\nu$ должен быть параллелен вектору I_3. Следовательно,

$$d\theta + \omega_1^2 = 0, \tag{2.4}$$

а тогда

$$d\bar{\nu} = (\cos\theta\omega_1^3 + \sin\theta\omega_2^3) I_3. \tag{2.5}$$

С другой стороны, как и для всякого ребра возврата торса, для кривой s должны быть выполнены равенства (1.13) и (1.a)

$$\omega^1 + t\omega_3^1 = 0,\ \omega^2 + t\omega_3^2 = 0, \tag{1.13}$$

$$dM = (\omega^3 + dt) I_3. \tag{1.a}$$

Из равенства (1.a) мы находим дифференциал длины дуги кривой s

$$ds = \omega^3 + dt. \tag{2.6}$$

Продифференцировав (1.20), будем иметь

$$d\theta = \frac{kdt - tdk}{k^2 + t^2}. \tag{2.*}$$

В таком случае из (2.4) найдем

$$dt = \frac{1}{k}\left[tdk - \omega_1^2(k^2 + t^2)\right].$$

Следовательно (см. (2.6)),

$$ds = \omega^3 + \frac{1}{k}\left[tdk - \omega_1^2(k^2 + t^2)\right].$$

Из равенства (2.5) мы легко получаем теперь кривизну кривой s

$$\varkappa = \frac{\cos\theta\omega_1^3 + \sin\theta\omega_2^3}{\omega^3 + \frac{1}{k}\left[tdk - \omega_1^2(k^2 + t^2)\right]}. \tag{2.7}$$

Из (1.13) и (1.18) имеем

$$\omega^1 = -t\omega_3^1,\ \omega_3^2 = -\frac{k}{t}\omega_3^1. \tag{2.8}$$

В таком случае из равенств (2.2) найдем

$$\begin{gathered}\omega_1^2 = \left(-pt + \alpha - \beta\frac{k}{t}\right)\omega_3^1,\\ dk = \left(-\alpha t + q - \gamma\frac{k}{t}\right)\omega_3^1,\\ \omega^3 = \left[-(kp - \beta)t + (k\alpha - \gamma) - (k\beta - r)\frac{k}{t}\right]\omega_3^1.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Далее, из (1.20) имеем

$$\sin\theta = -\frac{k}{\sqrt{k^2 + t^2}},\ \cos\theta = \frac{t}{\sqrt{k^2 + t^2}}. \tag{2.a}$$

Подставляя найденные значения в (2.6), мы после необходимых упрощений найдем окончательную формулу, определяющую кривизну кривой s:

$$\varkappa = \frac{k\sqrt{k^2 + t^2}}{pt^4 - 2\alpha t^3 + (2k\beta + q)t^2 - 2k\gamma t + k^2 r}. \tag{2.10}$$

2. **Кривая s'.** Если мы пересечем конус лучей комплекса, имеющий вершину в точке M, некоторой плоскостью Π', перпендикулярной к лучу l и отстоящей от центра луча на расстоянии ρ, то получим некоторую плоскую кривую s'. Подсчитаем ее кривизну $\varkappa'$ в точке M', принадлежащей лучу l.

Очевидно, нормаль $\bar{\nu}'$ к кривой s' в точке M' перпендикулярна к нормали $\bar{\nu}$; а потому в окрестности точки M' мы можем положить

$$\bar{\nu}' = -\sin\theta I_1 + \cos\theta I_2 + \varepsilon I_3, \tag{2.11}$$

где ε — бесконечно малое, обращающееся в нуль в точке M'. Отсюда

$$\begin{gathered}d\bar{\nu}' = -(d\theta + \omega_1^2)(\cos\theta I_2 + \sin\theta I_2) + (d\varepsilon - \sin\theta\omega_1^3 + \cos\theta\omega_2^3) I_3 +\\ + \varepsilon(\omega_3^1 I_1 + \omega_3^2 I_2).\end{gathered}$$

В точке M' вектор $d\bar{\nu}'$ должен быть параллелен $\bar{\nu}$, а потому

$$d\varepsilon - \sin\theta\omega_1^3 + \cos\theta\omega_2^3 = 0. \tag{2.12}$$

Следовательно (поскольку в точке M' $\varepsilon = 0$),

$$d\nu' = -(d\theta + \omega_1^2)\nu. \tag{2.13}$$

Так как лучи комплекса описывают конус, то должны быть выполнены равенства (1.9)

$$\omega^1 + t\omega_3^1 = 0,\ \omega^2 + t\omega_3^2 = 0,\ \omega^3 + dt = 0. \qquad (1.9)$$

Из второго равенства (1.9) следует, что

$$\frac{\omega_3^2}{\omega_3^1} = -\frac{k}{t}.$$

(см. (1.18)). Но

$$-\frac{k}{t} = \operatorname{tg}\theta.$$

(см. (1.20)). Следовательно,

$$-\sin\theta\,\omega_1^3 + \cos\theta\,\omega_2^3 = 0,$$

а потому в точке M'

$$d\varepsilon = 0$$

(см. (2.12)). Так как

$$M' = A + \rho I_3,$$

то

$$dM' = (\omega^1 + \rho\omega_3^1)\,I_1 + (\omega^2 + \rho\omega_3^2)\,I_2 + (\omega^3 + d\rho)\,I_3.$$

Поскольку $dM' \perp I_3$ в точке M', то

$$dM' = (\omega^1 + \rho\omega_3^1)\,I_1 + (\omega^2 + \rho\omega_3^2)\,I_2.$$

Вектор dM' параллелен вектору $\bar{v}$, а потому

$$\frac{\omega^1 + \rho\omega_3^1}{\cos\theta} = \frac{\omega^2 + \rho\omega_3^2}{\sin\theta} = ds',$$

где ds' — дифференциал длины дуги кривой s'. Отсюда

$$\omega^1 + \rho\omega_3^1 = ds'\cos\theta,$$

$$\omega^2 + \rho\omega_3^2 = ds'\sin\theta.$$

Следовательно,

$$ds' = \sqrt{(\omega^1 + \rho\omega_3^1)^2 + (\omega^2 + \rho\omega_3^2)^2}.$$

Из формулы (2.13) мы легко находим кривизну кривой s'

$$\varkappa' = -\frac{d\theta + \omega_1^2}{ds'} = -\frac{d\theta + \omega_1^2}{\sqrt{(\omega^1 + \rho\omega_3^1)^2 + (\omega^2 + \rho\omega_3^2)^2}}.$$

Из (2*) и (1.9) находим

$$d\theta = \frac{-k\omega^3 - t\,dk}{k^2 + t^2},$$

$$\omega^1 = -t\omega_3^1,\ \omega^2 = -t\omega_3^2.$$

Следовательно,

$$\varkappa' = -\frac{(k\omega^3 + t\,dk) - \omega_1^2(k^2 + t^2)}{(k^2 + t^2)(t - \rho)\sqrt{(\omega_3^1)^2 + (\omega_3^2)^2}}.$$

Принимая во внимание равенства (2.8) и (2.9), мы получим окончательную формулу кривизны

$$\varkappa' = -\frac{pt^4 - 2\alpha t^3 + (2k\beta + q)t^2 - 2k\gamma t + k^2 r}{(t - \rho)(k^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (2.14)$$

3. **Коническая кривизна и связь между кривыми.** Величина

$$\breve{\varkappa}' = \varkappa'(t - \rho) \qquad (2.15)$$

или

$$\breve{\varkappa}' = -\frac{pt^4 - 2\alpha t^3 + (2k\beta + q)t^2 - 2k\gamma t + k^2 r}{(k^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (2.16)$$

не зависит от выбора плоскости Π' и определяется только конусом комплекса. Назовем ее **конической кривизной конуса.**

Легко показать, что коническая кривизна конуса есть предел отношения угла двух достаточно близких касательных плоскостей конуса к углу между теми образующими, вдоль которых плоскости касаются конуса. В самом деле, пусть ML и ML' — две близких образующих конуса с углом $\Delta\varphi$ между ними. Пусть угол между касательными плоскостями, проходящими через эти образующие, равен $\Delta\psi$.

Проведем плоскость, перпендикулярную к линии пересечения касательных плоскостей в некоторой точке $\breve{L}$. Эта плоскость пересечет конус по некоторой кривой $\breve{s}'$, (будем считать, что точки L и L' лежат на этой кривой), которая в пределе, когда точки L и L' сливаются друг с другом, обращается в кривую s'. Пусть $\overset{\frown}{LL'} = \breve{\Delta s}'$. Тогда хорда LL' будет эквивалентна дуге $\breve{\Delta s}'$, $LL' \sim \breve{\Delta s}'$.

Кривизна кривой s' есть, очевидно, $\varkappa' = \lim\frac{\Delta\psi}{LL'}$. Но $LL' \sim \Delta\varphi\cdot l$, где l — длина образующей LM или $L'M$. Следовательно, $\varkappa' = \lim\frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi\cdot l}$. Отсюда $\breve{\varkappa}' = \lim\frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi}$, что и утверждалось.

Нетрудно было бы, конечно, дать этому совершенно строгое аналитическое обоснование.

Перемножим теперь равенства (2.10) и (2.16)

$$\varkappa \cdot \overset{\frown}{\varkappa}' = \frac{k}{k^2 + t^2}.$$

Принимая во внимание первое равенство (2.a), мы можем переписать это соотношение в виде

$$\varkappa\overset{\frown}{\varkappa}' = \frac{\sin^2\theta}{k}. \qquad (2.17)$$

Назовем две величины

$$\varkappa^* = \frac{\varkappa}{\sin\theta}, \quad \overset{\frown}{\varkappa}'^* = \frac{\overset{\frown}{\varkappa}'}{\sin\theta} \qquad (2.18)$$

соответственно **приведенной кривизной кривой** s и **приведенной кривизной конуса комплекса.** Тогда равенство (2.17) перепишется в виде

$$\varkappa^*\overset{\frown}{\varkappa}'^* = \frac{1}{k}, \qquad (2.19)$$

т. е. **для всех точек луча комплекса произведение приведенных кривизн плоской кривой** s **и соответствующего ей конуса комплекса есть величина постоянная, обратная кривизне комплекса в этом луче.**

§ 3. Инфлекционные центры. Линейный комплекс

Точка луча, обладающая тем свойством, что соответствующий ей конус комплекса имеет этот луч своей образующей перегиба, называется **инфлекционным центром луча.** Очевидно, плоская кривая s', получающаяся от пересечения конуса плоскостью, перпендикулярной к лучу, имеет для инфлекционного центра на рассматриваемом луче также перегиб. Следовательно, для нее $\varkappa' = 0$. Но в таком случае из формулы (2.14) мы немедленно находим уравнение, определяющее инфлекционные центры луча:

$$pt^4 - 2\alpha t^3 + (2k\beta + q)\,t^2 - 2k\gamma t + k^2 r = 0. \qquad (2.20)$$

Отсюда видно, что **на каждом луче в общем случае существует четыре инфлекционных центра.**

Как показывает равенство (2.10), в инфлекционном центре

кривизна кривой s обращается в бесконечность. Следовательно, **каждый инфлекционный центр луча является особой точкой для соответствующей ему плоской кривой s.**

Если все точки кривой s являются особыми, то кривая вырождается в точку, а все лучи комплекса, расположенные в плоскости П, проходят через эту точку. Если это обстоятельство имеет место для всех точек пространства, то уравнение (2.20) будет тождественно исчезать и, следовательно, будут выполнены следующие равенства

$$p = 0,\ \alpha = 0,\ 2k\beta + q = 0,\ \gamma = 0,\ r = 0. \qquad (2.21)$$

В этом случае каждой точке пространства будет соответствовать плоскость, в которой располагаются все лучи комплекса, проходящие через эту точку, то есть мы будем иметь нуль-систему некоторого линейного комплекса. Комплекс Σ_3 становится, таким образом, линейным комплексом.

Наоборот, для всякого линейного комплекса каждая кривая s вырождается в точку. Следовательно, для нее $\varkappa = \infty$. В таком случае все коэффициенты при степенях t в уравнении (2.10) обращаются в нуль.

Таким образом, **равенства (2.21) являются необходимыми и достаточными условиями, характеризующими линейный комплекс.**

В целом ряде своих свойств линейный комплекс выступает как аналог сферы обычного трехмерного пространства. Это является следствием той фундаментальной аналогии между линейчатой и конформной геометриями, которая в свое время была обнаружена С. Ли. С фактами такой аналогии мы не раз будем встречаться и впредь; сейчас же отметим то свойство линейного комплекса, которое является аналогом свойства сферы быть единственной поверхностью, все точки которой омбилические.

Подобно тому, как в каждой нормальной плоскости поверхности располагается однопараметрическая совокупность точек этой поверхности, образующая в ней некоторую плоскую кривую, так в каждой плоскости П, проходящей через луч l, располагается однопараметрическая совокупность лучей комплекса, огибающая в ней плоскую кривую s. В соответствии с этим формулу (2.10) можно рассматривать как аналог формулы, определяющей кривизну нормального сечения поверхности. Естественно теперь назвать главными плоскостями те плоскости П, для которых кривизна $\varkappa$ достигает экстремальных значений; следовательно, для этих плоскостей

$$\frac{d\varkappa}{dt} = 0$$

или

$$-3pt^5+4\alpha t^4-(2k\beta+q+4pk^2)t^3+6\alpha k^2t^2+$$
$$+(k^2r-4k^3\beta-2qk^3)t+2k^3\gamma=0.$$

Если это уравнение обращается в тождество, то луч комплекса, для которого это обстоятельство имеет место, естественно уподобить омбилической точке поверхности. Легко видеть, что комплекс, у которого все лучи обладают таким свойством, является линейным

$$p=0,\ \alpha=0,\ 2k\beta+q=0,\ \gamma=0,\ r=0.$$

§ 4. Точки симметрии. Линейчатые поверхности, сопряженные в комплексе

Пусть точка луча

$$M=A+tI_3$$

перемещается по некоторой линейчатой поверхности комплекса $\omega^1:\omega_3^1:\omega_3^2$ перпендикулярно к этому лучу. В таком случае

$$\omega^3+dt=0. \tag{2.22}$$

Плоскость П, соответствующая точке M в нормальной корреляции, будет огибать при этом некоторый торс, вектор образующей которого мы можем найти, очевидно, как векторное произведение

$$l=[NdN],$$

где вектор N определяется равенством (1.19). Производя дифференцирование и заменяя dt его значением, найденным из (2.22), будем иметь

$$l=(k\omega_1^3+t\omega_2^3)(tI_1-kI_2)+[k(-\omega^3+k\omega_1^2)-t(dk+t\omega_2^1)]I_3.$$

Этот вектор, вообще говоря, не перпендикулярен к лучу (вектору I_3). Легко, однако, видеть, что на каждом луче линейчатой поверхности имеется две точки, для которых такая перпендикулярность имеет место. Эти точки определяются следующим квадратным уравнением:

$$\omega_1^2t^2-dkt+k(-\omega^3+k\omega_1^2)=0. \tag{2.23}$$

Назовем эти точки **точками симметрии**, а линии, ими описываемые — **линиями симметрии** линейчатой поверхности $\omega^1:\omega_3^1:\omega_3^2$.

Заметим, что уравнение (2.23) в точности совпадает с уравнением (2.25) (см. ниже).

Назовем поверхность $\omega^1:\omega_3^1:\omega_3^2$ **сопряженной в комплексе** поверхности $\overline{\omega}^1:\overline{\omega}_3^1:\overline{\omega}_3^2$, если точки симметрии первой гармонически делят точки прикосновения второй. Мы имеем для точек симметрии поверхности $\omega^1:\omega_3^1:\omega_3^2$

$$t_1+t_2=\frac{dk}{\omega_1^2},\ t_1t_2=k\frac{-\omega^3+k\omega_1^2}{\omega_1^2}$$

(см. (2.23)). В то же время для точек прикосновения поверхности $\overline{\omega}^1:\overline{\omega}_3^1:\overline{\omega}_3^2$ справедливо равенство (1.30)

$$\overline{t}_1+\overline{t}_2=-2\frac{\overline{\omega}^2}{\overline{\omega}_3^2},\ \overline{t}_1\overline{t}_2=k\frac{\overline{\omega}^1}{\overline{\omega}_3^2}.$$

Подставляя найденные значения в равенство (1.32), характеризующее гармоническую сопряженность двух пар точек, будем иметь

$$\omega_1^2\overline{\omega}^1+dk\overline{\omega}_3^1+(-\omega^3+k\omega_1^2)\overline{\omega}_3^2=0. \tag{2.24}$$

Заменяя здесь формы ω_1^2, dk, $-\omega^3+k\omega_1^2$ их значениями по формулам (2.2), запишем равенство (2.24) в виде

$$p\omega^1\overline{\omega}^1+q\omega_3^1\overline{\omega}_3^1+r\omega_3^2\overline{\omega}_3^2+\alpha(\omega^1\overline{\omega}_3^1+\omega_3^1\overline{\omega}^1)+$$
$$+\beta(\omega_3^2\overline{\omega}^1+\omega^1\overline{\omega}_3^2)+\gamma(\omega_3^1\overline{\omega}_3^2+\omega_3^2\overline{\omega}_3^1)=0. \tag{2.24$'$}$$

Это равенство симметрично относительно форм $\omega^1:\omega_3^1:\omega_3^2$ и $\overline{\omega}^1:\overline{\omega}_3^1:\overline{\omega}_3^2$, а потому свойство сопряженности является взаимным.

Назовем две линейчатые поверхности комплекса, линейные формы которых удовлетворяют условию (2.24), **взаимно сопряженными** в комплексе.

Симметрию сопряженности можно сформулировать следующим образом: **если точки прикосновения одной линейчатой поверхности комплекса гармонически разделяют точки симметрии другой, то и, наоборот, точки прикосновения другой гармонически делят точки симметрии первой.**

§ 5. Главные поверхности

Назовем **главными поверхностями** комплекса те его поверхности, у которых линии прикосновения являются их асимптотическими линиями.

В точке прикосновения вектор нормали N к линейчатой поверхности совпадает с вектором нормали к плоскости П (1.19), следовательно,

$$dN = (dk + t\omega_2^1) I_1 + (dt + k\omega_1^2) I_2 + (k\omega_1^3 + t\omega_2^3) I_3.$$

Умножая это скалярно на вектор, касательный к линии прикосновения,

$$dM = (\omega^1 + t\omega_3^1) I_1 + (\omega^2 + t\omega_3^2) I_2 + (\omega^3 + dt) I_3.$$

и приравнивая результат к нулю, мы получим условие того, что линии прикосновения линейчатой поверхности комплекса являются асимптотическими

$$(\omega^1 + t\omega_3^1)(dk + t\omega_2^1) + (\omega^2 + t\omega_3^2)(dt + k\omega_1^2) +$$
$$+ (\omega^3 + dt)(k\omega_1^3 + t\omega_2^3) = 0.$$

Принимая во внимание равенство (1.18) и равенства $\omega_i^j = -\omega_j^i$ (см. (1.2)), будем иметь

$$(\omega^2 + t\omega_3^2)(-\omega^3 + k\omega_1^2) - (\omega^1 + t\omega_3^1)(-dk + t\omega_1^2) = 0.$$

Поскольку для линии прикосновения

$$\frac{\omega^2 + t\omega_3^2}{k} = \frac{\omega^1 + t\omega_3^1}{-t}$$

(см. (1.30)), то мы можем переписать последнее равенство в виде

$$k(-\omega^3 + k\omega_1^2) + t(-dk + t\omega_1^2) = 0.$$

Заменяя здесь формы $\omega_1^2, dk, -\omega^3 + k\omega_1^2$ их значениями, получим

$$(p\omega^1 + \alpha\omega_3^1 + \beta\omega_3^2) t^2 - (\alpha\omega^1 + q\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2) t +$$
$$+ k(\beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1 + r\omega_2^3) = 0. \qquad (2.25)$$

Поскольку для главных поверхностей обе линии прикосновения являются асимптотическими, то это уравнение должно совпадать с уравнением (1.30). Следовательно,

$$\frac{p\omega^1 + \alpha\omega_3^1 + \beta\omega_3^2}{\omega_3^2} = \frac{\alpha\omega^1 + q\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2}{-2k\omega_3^1} = \frac{\beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1 + r\omega_3^2}{\omega^1} = s \qquad (2.26)$$

(s — величина общего отношения). При выписывании равенств (2.26) было учтено основное соотношение (1.18). Впредь, используя это соотношение, этого специально оговаривать не будем.

Уравнения (2.26) определяют главные поверхности комплекса. Перепишем их в виде

$$\begin{aligned} &p\omega^1 + \alpha\omega_3^1 + (\beta - s)\omega_3^2 = 0, \\ &\alpha\omega^1 + (q + 2ks)\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2 = 0, \\ &(\beta - s)\omega^1 + \gamma\omega_3^1 + r\omega_3^2 = 0. \end{aligned} \qquad (2.27)$$

Поскольку формы $\omega^1, \omega_3^1, \omega_3^2$ обращаются в нуль одновременно только при неподвижном луче, то условием совместности этих уравнений является равенство

$$\begin{vmatrix} p & \alpha & \beta - s \\ \alpha & q + 2ks & \gamma \\ \beta - s & \gamma & r \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.28)$$

Назовем это равенство **характеристическим уравнением.** Решая его и подставляя последовательно его корни в уравнения (2.27), получим для каждого из корней соответствующую главную поверхность. Поскольку характеристическое уравнение является кубическим, это означает, что **через каждый луч комплекса в общем случае проходят три главных поверхности.**

Пусть s и $\bar{s}$ — два не равных друг другу корня характеристического уравнения и $(\omega^1 : \omega_3^1 : \omega_3^2), (\bar{\omega}^1 : \bar{\omega}_3^1 : \bar{\omega}_3^2)$ соответствующие им главные поверхности. В таком случае имеют место следующие две серии равенств

$$\begin{aligned} &p\omega^1 + \alpha\omega_3^1 + (\beta - s)\omega_3^2 = 0, \\ &\alpha\omega^1 + (q + 2ks)\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2 = 0, \\ &(\beta - s)\omega^1 + \gamma\omega_3^1 + r\omega_3^2 = 0, \end{aligned} \qquad (2.29)$$

$$\begin{aligned} &p\bar{\omega}^1 + \alpha\bar{\omega}_3^1 + (\beta - \bar{s})\bar{\omega}_3^2 = 0, \\ &\alpha\bar{\omega}^1 + (q + 2k\bar{s})\bar{\omega}_3^1 + \gamma\bar{\omega}_3^2 = 0, \\ &(\beta - \bar{s})\bar{\omega}^1 + \gamma\bar{\omega}_3^1 + r\bar{\omega}_3^2 = 0. \end{aligned} \qquad (2.30)$$

Умножим первое равенство (2.29) на $\bar{\omega}^1$, второе — на $\bar{\omega}_3^1$, третье — на $\bar{\omega}_3^2$ и сложим их

$$s(-\bar{\omega}^1\omega_3^2 + 2k\bar{\omega}_3^1\omega_3^1 - \bar{\omega}_3^2\omega^1) + p\omega^1\bar{\omega}^1 + q\omega_3^1\bar{\omega}_3^1 + r\omega_3^2\bar{\omega}_3^2 +$$
$$+ \alpha(\omega_3^1\bar{\omega}^1 + \omega^1\bar{\omega}_3^1) + \beta(\omega_3^2\bar{\omega}^1 + \omega^1\bar{\omega}_3^2) + \gamma(\omega_3^1\bar{\omega}_3^2 + \omega_3^2\bar{\omega}_3^1) = 0. \qquad (2.31)$$

Аналогичное равенство получим из системы (2.30)

$$\bar{s}\left(-\bar{\omega}^1\omega_3^2 + 2k\bar{\omega}_3^1\omega_3^1 - \bar{\omega}_3^2\omega^1\right) + p\omega^1\bar{\omega}^1 + q\omega_3^1\bar{\omega}_3^1 + r\omega_3^2\bar{\omega}_3^2 + \\ + \alpha\left(\omega_3^1\bar{\omega}^1 + \omega^1\bar{\omega}_3^1\right) + \beta\left(\omega_3^2\bar{\omega}^1 + \omega^1\bar{\omega}_3^2\right) + \gamma\left(\omega_3^1\bar{\omega}_3^2 + \omega_3^2\bar{\omega}_3^1\right) = 0. \quad (2.32)$$

Сопоставляя (2.31) и (2. 32) между собой и принимая во внимание, что $s \neq \bar{s}$, придем к следующим соотношениям между линейными формами, определяющими главные поверхности

$$\omega_3^1\bar{\omega}^2 - \omega_3^2\bar{\omega}^1 + \omega^2\bar{\omega}_3^1 - \omega^1\bar{\omega}_3^2 = 0,$$

$$p\omega^1\bar{\omega}^1 + q\omega_3^1\bar{\omega}_3^1 + r\omega_3^2\bar{\omega}_3^2 + \alpha\left(\omega^1\bar{\omega}_3^1 + \omega_3^1\bar{\omega}^1\right) + \\ + \beta\left(\omega^1\bar{\omega}_3^2 + \omega_3^2\bar{\omega}^1\right) + \gamma\left(\omega_3^2\bar{\omega}_3^1 + \omega_3^1\bar{\omega}_3^2\right) = 0. \quad (2.33)$$

Первое из этих равенств совпадает с равенством (1. 31), характеризующим инволютивную сопряженность двух поверхностей, второе совпадает с равенством (2.24′), характеризующим взаимную сопряженность в комплексе.

Имеет место, следовательно, следующая теорема:

Главные поверхности комплекса взаимно сопряжены друг с другом и инволютивно, и в комплексе.

§ 6. Связь с касательными линейными комплексами

В § 5 гл. I мы отметили, что в каждом луче произвольного комплекса Σ_3 существует пучок касательных линейных комплексов. Исследуем теперь вопрос о существовании соприкасающихся линейных комплексов, т. е. комплексов, имеющих с данным комплексом касание порядка выше первого. С этой целью продифференцируем уравнения (1.35). Принимая во внимание эти же уравнения, мы можем привести результат дифференцирования к виду

$$\begin{gathered} \omega_1^2 bI_1 + \omega_3^2 bI_3 = 0, \\ dkbI_1 - 2k\omega_3^1 bI_3 = 0, \\ (-\omega^3 + k\omega_1^2)\, bI_1 + \omega^1 bI_3 = 0. \end{gathered} \quad (2.34)$$

Если бы одновременно имели место равенства $bI_1 = 0$, $bI_3 = 0$, то вместе с первым равенством (1.35) это означало бы, что $b = 0$. Это, однако, невозможно.

Перепишем равенства (2.34), учтя (2.2),

$$\begin{gathered} (p\omega^1 + \alpha\omega_3^1 + \beta\omega_3^2)\, bI_1 + \omega_3^2 bI_3 = 0, \\ (\alpha\omega^1 + q\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2)\, bI_1 - 2k\omega_3^1 bI_3 = 0, \\ (\beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1 + r\omega_3^2)\, bI_1 + \omega^1 bI_3 = 0. \end{gathered} \quad (2.35)$$

Для существования соприкасающегося комплекса необходимо, чтобы эти равенства были удовлетворены при любых значениях форм ω^1, ω_3^1, ω_3^2. Но это немедленно приводит нас к соотношениям

$$p = \alpha = \gamma = r = 0. \quad (2.36)$$

Равенства (2.35) принимают вид

$$\begin{gathered} \beta bI_1 + bI_3 = 0, \\ qbI_1 - 2kbI_3 = 0, \\ \beta bI_1 + bI_3 = 0. \end{gathered}$$

Для их совместности необходимо, чтобы было выполнено соотношение

$$2k\beta + q = 0. \quad (2.37)$$

Собирая соотношения (2.36) и (2.37)

$$p = 0,\ \alpha = 0,\ 2k\beta + q = 0,\ \gamma = 0,\ r = 0,$$

замечаем, что **единственным комплексом, допускающим в каждом луче соприкасающийся линейный комплекс, является сам линейный комплекс** (см. (2.21)).

Если не требовать справедливости равенств (2.35) для любых значений базисных форм, то, как легко видеть, они будут совместны тогда и только тогда, когда имеет место пропорциональность

$$\frac{p\omega^1 + \alpha\omega_3^1 + \beta\omega_3^2}{\omega_3^2} = \frac{\alpha\omega^1 + q\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2}{-2k\omega_3^1} = \frac{\beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1 + r\omega_3^2}{\omega^1}.$$

Но последние равенства (см. (2.26)) определяют главные поверхности комплекса. При этом каждой главной поверхности соответствует определенный касательный комплекс, уравнения которого мы получим, присоединяя любое из уравнений (2.34) к уравнениям (1.34) и (1.35).

Главные поверхности не являются единственными поверхностями комплекса, для которых существует имеющий с ними соприкосновение второго порядка касательный линейный комплекс. Легко показать, что такой комплекс существует для всякой поверхности комплекса Σ_3.

Действительно, пусть σ — поверхность комплекса Σ_3, определяемая отношениями базисных форм

$$\omega^1 : \omega_3^1 : \omega_3^2.$$

Условие того, что линейный комплекс (обозначим его на время буквой L) содержит три бесконечно близких луча поверхности σ (следовательно, имеет с этой поверхностью касание второго порядка), записывается в виде

$$aI_3 + b[AI_3] = 0,$$

$$\omega^1(-bI_2) + \omega_3^1(aI_1 + kbI_1 + b[AI_1]) + \omega_3^2(aI_2 + b[AI_2]) = 0,$$

$$d\omega^1(-bI_2) + d\omega_3^1(aI_1 + kbI_1 + b[AI_1]) + d\omega_3^2(aI_2 + b[AI_2]) +$$
$$+ \omega^1(\omega_1^2 bI_1 + \omega_3^2 bI_3) + \omega_3^1(\omega_1^2 aI_2 + dkbI_1 + k\omega_1^2 bI_2 + 2k\omega_1^3 bI_3 +$$
$$+ \omega^3 bI_2 + \omega_1^2 b[AI_2]) + \omega_3^2(\omega_2^1 aI_1 + \omega^1 bI_3 - \omega^3 bI_1 + \omega_2^1 b[AI_1]) = 0$$

(буквой d обозначено обычное дифференцирование линейных форм вдоль поверхности σ). Если этот комплекс является касательным к комплексу Σ_3, то коэффициенты при формах ω^1, ω_3^1, ω_3^2 во втором равенстве обратятся в нуль и мы придем к следующим пяти соотношениям

$$\begin{gathered} aI_3 + b[AI_3] = 0, \\ bI_2 = 0, \\ aI_1 + kbI_1 + b[AI_1] = 0, \\ aI_2 + b[AI_2] = 0, \end{gathered} \qquad (2.^*)$$

$$\omega^1(\omega_1^2 bI_1 + \omega_3^2 bI_3) + \omega_3^1(dkbI_1 + 2k\omega_1^3 bI_3) + \omega_3^2((-\omega^3 + k\omega_1^2) bI_1 +$$
$$+ \omega^1 bI_3) = 0.$$

Эти соотношения единственным образом определяют комплекс L.

Если поверхность σ является главной, то последнее равенство становится эквивалентным каждому из равенств (2.34). Чем, однако, отличается главная поверхность от произвольной поверхности комплекса Σ_3? Чтобы это выяснить, обратим внимание на то, что если выполнены первые четыре равенства (2.*), то линейный комплекс L всегда является касательным к комплексу Σ_3 в его текущем луче AI_3. В таком случае легко понять, что если поверхность σ — главная, то комплекс L будет касательным к Σ_3 не только в луче AI_3, но и в соседнем с ним луче $A^*I_3^* = AI_3 + d(AI_3)$. Действительно, в случае когда выполнены условия (2.34), то есть, когда σ — главная поверхность, наравне с первыми четырьмя равенствами (2.*) будут выполнены также и равенства

$$\begin{gathered} aI_3^* + b[A^*I_3^*] = 0, \\ bI_2^* = 0, \\ aI_1^* + k^*bI_1^* + b[A^*I_1^*] = 0, \\ aI_2^* + b[A^*I_2^*] = 0, \end{gathered} \qquad (2.^{**})$$

где $I_i^* = I_i + dI_i$, $A^* = A + dA$, $k^* = k + dk$), или, в силу (2.*),

$$\begin{gathered} d(aI_3 + b[AI_3]) = 0, \\ d(bI_2) = 0, \\ d(aI_1 + kbI_1 + b[AI_1]) = 0, \\ d(aI_2 + b[AI_2]) = 0 \end{gathered}$$

(в равенствах (2.**) члены, содержащие произведения линейных форм, должны быть отброшены).

В связи с тем, что равенства (2.34), вообще говоря, уже не имеют места в соседнем луче A^*I_3, то это означает, что касательный комплекс L имеет с главной поверхностью σ в луче $A^*I_3^*$ лишь касание первого порядка. Этот комплекс будет иметь здесь касание второго порядка с поверхностью, в общем случае уже отличной от главной.

Чтобы пояснить найденное свойство главных поверхностей, возьмем, к примеру, касательную к плоской кривой $y = y(x)$

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0).$$

Уравнение касательной в соседней точке имеет вид

$$y - (y_0 + dy_0) = (y_0' + dy_0')(x - (x_0 + dx_0)).$$

Два последних уравнения совпадают тогда и только тогда, когда

$$-dy_0 = dy_0'(x - (x_0 + dx_0)) - y_0'dx_0.$$

Так как $y_0'dx_0 = dy_0$, то из последнего равенства следует, что $dy_0' = 0$, т. е.

$$y_0'' = 0.$$

Это условие в общем случае характеризует точки перегиба.

Таким образом, единственной точкой кривой, в которой касательная касается кривой не только в этой, но и в соседней точке, является точка перегиба. Поскольку, вообще говоря, $y_0^{*''} = y_0'' + dy_0'' \neq 0$ (в противном случае было бы $y_0''' = 0$), то точка, соседняя с точкой перегиба, уже не является точкой перегиба (последнее, разумеется, очевидно).

Сравнивая это с главными поверхностями, мы можем высказать следующее.

Будем считать произвольную линейчатую поверхность комплекса Σ_3, проходящую через его текущий луч, аналогом кривой, а касательный линейный комплекс, имеющий с ней в этом луче касание второго порядка — аналогом касательной к кривой. (Разумеется, такая аналогия в значительной степени искусственна). В таком случае единственной поверхностью комплекса, для которой данный луч можно было бы уподобить точке перегиба, является его главная поверхность.

§ 7. Две фундаментальные формы комплекса

К понятию главных поверхностей можно прийти, развивая теорию комплексов на базе двух квадратичных форм аналогично тому, как это делается в теории поверхностей. Напомним, прежде всего, некоторые факты из теории поверхностей.

Пусть u, v — криволинейные координаты текущей точки на поверхности. Совместим с этой точкой вершину $\boldsymbol{A}$ сопровождающего трехгранника $\boldsymbol{A I_1 I_2 I_3}$, а плоскость $\boldsymbol{A I_1 I_2}$ — с касательной плоскостью поверхности в этой точке. В таком случае из равенства

$$d\boldsymbol{A} = \omega^1 \boldsymbol{I}_1 + \omega^2 \boldsymbol{I}_2 + \omega^3 \boldsymbol{I}_3$$

мы будем иметь

$$\omega^3 = 0. \tag{2.38}$$

Это равенство мы должны рассматривать как дифференциальное уравнение поверхности.

Инфинитезимальное смещение вершины $\boldsymbol{A}$ по поверхности определяется равенством

$$d\boldsymbol{A} = \omega^1 \boldsymbol{I}_1 + \omega^2 \boldsymbol{I}_2.$$

Формы ω^1, ω^2 играют роль базисных форм на поверхности. При вращении сопровождающего трехгранника вокруг нормали к поверхности $\boldsymbol{I}_3$ эти формы будут меняться, сохраняя, однако, единственный принадлежащий им инвариант — первую квадратичную форму поверхности

$$d\boldsymbol{A}^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2. \tag{2.a}$$

Вторая квадратичная форма может быть определена обычным путем

$$-d\boldsymbol{A} d\boldsymbol{I}_3 = \omega^1 \omega_1^3 + \omega^2 \omega_2^3. \tag{2.b}$$

Однако эта форма может быть определена и иначе. Действительно, продифференцируем внешним образом уравнение (2.38), приняв во внимание уравнения структуры (1.4)

$$[\omega^1 \omega_1^3] + [\omega^2 \omega_2^3] = 0.$$

Заменим в левой части внешнее умножение обыкновенным; получим (2b).

Таким образом, первая квадратичная форма поверхности представляет собой инвариант базисных форм поверхности, а вторая — результат внешнего дифференцирования левой части дифференциального уравнения поверхности (2.38) с последующей заменой внешнего умножения обыкновенным.

Перенесем теперь этот же принцип образования квадратичных форм и в теорию комплексов. С этой целью рассмотрим общий трехгранник $\boldsymbol{A I_1 I_2 I_3}$, присоединенный к лучу комплекса таким образом, что вектор $\boldsymbol{I}_3$ совмещен с лучом комплекса, а вершина $\boldsymbol{A}$ помещена на этот луч (мы будем называть все такие трехгранники трехгранниками первого порядка).

Перейдем от трехгранника $\boldsymbol{A I_1 I_2 I_3}$ к произвольному другому трехграннику первого порядка $\boldsymbol{A' I_{1'} I_{2'} I_{3'}}$, положив

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{I}_3, \; \boldsymbol{I}_{3'} = \boldsymbol{I}_3, \tag{2.39}$$

$$\boldsymbol{I}_{1'} = \cos\theta \boldsymbol{I}_1 + \sin\theta \boldsymbol{I}_2, \; \boldsymbol{I}_{2'} = -\sin\theta \boldsymbol{I}_1 + \cos\theta \boldsymbol{I}_2,$$

где λ, θ — произвольные функции параметров луча. Продифференцируем последние равенства, принимая во внимание, что

$$d\boldsymbol{A}' = \omega^{i'} \boldsymbol{I}_{i'}, \; d\boldsymbol{I}_{i'} = \omega_{i'}^{j'} \boldsymbol{I}_{j'} \tag{2.40}$$

(здесь штрихи не означают внешнего дифференцирования). В таком случае мы будем иметь следующие формулы преобразования главных форм смещения трехгранника

$$\begin{gathered}
\omega^{1'} = \cos\theta(\omega^1 + \lambda\omega_3^1) + \sin\theta(\omega^2 + \lambda\omega_3^2), \\
\omega^{2'} = -\sin\theta(\omega^1 + \lambda\omega_3^1) + \cos\theta(\omega^2 + \lambda\omega_3^2), \\
\omega_{3'}^{1'} = \cos\theta\omega_3^1 + \sin\theta\omega_3^2, \\
\omega_{3'}^{2'} = -\sin\theta\,\omega_3^1 + \cos\theta\omega_3^2.
\end{gathered} \tag{2.41}$$

Исключая из этих четырех равенств два параметра преобразования, получим следующих два инварианта главных форм

$$i_1 = (I_3 dI_3 dA) = \omega^2\omega_3^1 - \omega^1\omega_3^2,$$
$$i_2 = dI_3^2 = (\omega_3^1)^2 + (\omega_3^2)^2. \qquad (2.42)$$

Инвариант i_2 представляет собой линейный элемент сферического отображения комплекса. Его можно было бы уподобить третьей квадратичной форме поверхности. Что касается инварианта i_1, то легко заметить, что он обращается в нуль на развертывающихся поверхностях комплекса. В фундаментальной аналогии С. Ли развертывающиеся поверхности играют роль аналога изотропных кривых на трехмерной поверхности. Но в таком случае мы можем с полным основанием смотреть на инвариант i_1 как на аналог первой квадратичной формы поверхности

$$\varphi_1 = \omega^2\omega_3^1 - \omega^1\omega_3^2.$$

Продифференцируем теперь внешним образом дифференциальное уравнение комлекса (1.18):

$$[\omega^1\omega_1^2] + [\omega_3^1 dk] + [\omega_3^2, k\omega_1^2 - \omega^3] = 0$$

(см. (2.1)). Заменим здесь внешнее умножение обыкновенным и назовем в соответствии с тем, что сказано выше, результат такой замены **второй квадратичной формой комплекса**

$$\varphi_2 = \omega^1\omega_1^2 + \omega_3^1 dk + \omega_3^2 (k\omega_1^2 - \omega^3) \qquad (2.43)$$

или (см. (2.2))

$$\varphi_2 = p(\omega^1)^2 + q(\omega_3^1)^2 + r(\omega_3^2)^2 + 2\alpha\omega^1\omega_3^1 + $$
$$+ 2\beta\omega^1\omega_3^2 + 2\gamma\omega_3^1\omega_3^2. \qquad (2.44)$$

Легко видеть, что **обращение в нуль полярной формы от квадратичной формы φ_1 выделяет инволютивно сопряженные поверхности (см. (2.33)), а обращение в нуль полярной формы от квадратичной формы выделяет поверхности, сопряженные в комплексе (см. (2.33)).**

Каждая главная поверхность представляет собой общую пару двух инволюций, определяемых указанными полярными формами.

Поскольку у двух любых инволютивно сопряженных поверхностей точки прикосновения одной гармонически делят точки прикосновения другой, а у двух поверхностей, сопряженных в комплексе, точки прикосновения одной гармонически делят точ-

ки симметрии другой, то **у каждой главной поверхности точки прикосновения совпадают с точками симметрии.** Это же непосредственно следует из сопоставления друг с другом уравнений (1.30) и (2.23), одно из которых определяет точки прикосновения линейчатой поверхности, а другое — ее точки симметрии. У плавных поверхностей уравнения (1.30) и (2.23) совпадают друг с другом, а это доказывает утверждение.

Примечание. Уравнения (1.30) и (2.23) не эквивалентны друг другу в том смысле, что первое из них записано в общем трехграннике первого порядка (для поверхности это трехгранник, у которого вершина **A** совпадает с точкой поверхности, а плоскость $\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2$ — с касательной плоскостью поверхности в этой точке), а второе — в каноническом трехграннике. Это обстоятельство не оказывает, очевидно, на сформулированный результат никакого влияния.

Заметим, что геометрия окрестности второго порядка луча полностью определяется формами φ_1 и φ_2. В силу этого мы будем называть эти формы **фундаментальными квадратичными формами комплекса.** Эти формы в метрической теории комплексов играют такую же роль, как квадратичные формы (2.а), (2.в) в теории поверхностей.

Назовем **нормальной кривизной** линейчатой поверхности комплекса инвариант χ, равный отношению двух фундаментальных квадратичных форм

$$\chi = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{p(\omega^1)^2 + q(\omega_3^1)^2 + r(\omega_3^2)^2 + 2\alpha\omega^1\omega_3^1 + 2\beta\omega^1\omega_3^2 + 2\gamma\omega_3^1\omega_3^2}{k(\omega_3^1)^2 - \omega^1\omega_3^2}. \qquad (2.45)$$

Отсюда

$$p(\omega^1)^2 + (q - k\chi)(\omega_3^1)^2 + r(\omega_3^2)^2 + 2\alpha\omega^1\omega_3^1 + $$
$$+ (2\beta + \chi)\,\omega^1\omega_3^2 + 2\gamma\omega_3^1\omega_3^2 = 0. \qquad (2.46)$$

Продифференцируем это равенство по $\omega^1, \omega_3^1, \omega_3^2$

$$p\omega^1 + \alpha\omega_3^1 + \left(\beta + \frac{\chi}{2}\right)\omega_3^2 = 0,$$
$$\alpha\omega^1 + (q - k\chi)\,\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2 = 0, \qquad (2.47)$$
$$\left(\beta + \frac{\chi}{2}\right)\omega^1 + \gamma\omega_3^1 + r\omega_3^2 = 0.$$

Линейчатые поверхности, линейные формы которых ω^1, ω_3^1, ω_3^2 удовлетворяют этим условиям, соответствуют, очевидно, экстремальным значениям кривизны χ.

Сравнивая равенства (2.47) с равенствами (2.27), замечаем, что такие поверхности необходимо являются главными; при этом

$$\chi = -2s,$$

где s — корень характеристического уравнения (2.28).

Таким образом, **экстремальные значения нормальной кривизны линейчатой поверхности комплекса приобретаются для главных поверхностей и только для них, при этом экстремальная нормальная кривизна главной поверхности оказывается равной соответствующему удвоенному корню характеристического уравнения с противоположным знаком.**

Если назвать **лучом округления** (не путать с омбилическим лучом § 3 гл. II) луч, в котором нормальная кривизна χ остается одной и той же для всех линейчатых поверхностей комплекса, через него проходящих, то для такого луча уравнение (2.46) будет тождественно исчезать. Следовательно,

$$p = 0,\ q - k\chi = 0,\ r = 0,\ \alpha = 0,\ 2\beta + \chi = 0,\ \gamma = 0.$$

Исключая отсюда χ, найдем

$$p = 0,\ \alpha = 0,\ 2k\beta + q = 0,\ \gamma = 0,\ r = 0.$$

Если эти равенства соблюдаются для каждого луча, то комплекс будет линейным (см. (2.21)). Таким образом, **единственным комплексом, все лучи которого являются лучами округления, будет линейный комплекс.**

Мы снова получаем то свойство линейного комплекса, которое роднит его со сферой конформного пространства.

Глава третья

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ, ПРИСОЕДИНЕННЫЕ К ЛИНЕЙЧАТОМУ КОМПЛЕКСУ

§ 1. Основные уравнения

Поместим на каждый луч комплекса некоторую точку

$$A' = A + \lambda I_3, \tag{3.1}$$

где $\lambda = \lambda\,(u, v, w)$ — какая-то функция параметров u, v, w, определяющих положение луча в комплексе. Получим векторное поле (A', I_3), присоединенное к комплексу. Точка A' является центром поля, вектор I_3 — единичным вектором поля.

Поскольку $\lambda\ (u, v, w)$ — произвольная функция параметров u, v, w, (за одним исключением, которое будет указано ниже), то, следовательно, **к каждому комплексу можно присоединить множество векторных полей, зависящее от одной произвольной функции трех аргументов.**

Если точка A' совпадает с центром луча комплекса, то векторное поле называется **центральным полем комплекса.**

Совместим с центром луча некоторый координатный трехгранник $A'I_{1'}I_{2'}I_{3'}$, положив, как и в (2.39),

$$A' = A + \lambda I_3,\ I_{3'} = I_3,$$
$$I_{1'} = \cos\theta I_1 + \sin\theta I_2,\ I_{2'} = -\sin\theta I_1 + \cos\theta I_2. \tag{3.2}$$

Здесь $\theta\ (u, v, w)$ — также некоторая произвольная функция параметров луча. Положим теперь (см. (2.40))

$$dA' = \omega^{i'} I_{i'},\ dI_{i'} = \omega_{i'}^{j'} I_{j'},\ \omega_{i'}^{j'} = -\omega_{j'}^{i'}. \tag{3.3}$$

Примем в качестве базисных форм поля формы $\omega^{1'}, \omega^{2'}, \omega^{3'}$. Три остальных формы $\omega_{1'}^{2'}, \omega_{2'}^{3'}, \omega_{3'}^{1'}$ инфинитезимального смещения сопровождающего трехгранника будут в таком случае некоторыми линейными функциями от базисных форм

$$\omega_{1'}^{2'} = c_{i'}\omega^{i'},\ \omega_{2'}^{3'} = a_{i'}\omega^{i'},\ \omega_{3'}^{1'} = b_{i'}\omega^{i'}. \tag{3.4}$$

Из равенств (3.3) мы легко находим

$$\begin{aligned}
\omega^{1'} &= \cos\theta\,(\omega^1 + \lambda\omega_3^1) + \sin\theta\,(\omega^2 + \lambda\omega_3^2),\\
\omega^{2'} &= -\sin\theta\,(\omega^1 + \lambda\omega_3^1) + \cos\theta\,(\omega^2 + \lambda\omega_3^2),\\
\omega^{3'} &= \omega^3 + d\lambda,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{2'}^{3'} &= \sin\theta\omega_3^1 - \cos\theta\omega_3^2,\\
\omega_{3'}^{1'} &= \cos\theta\omega_3^1 + \sin\theta\omega_3^2,\\
\omega_{1'}^{2'} &= \omega_1^2 + d\theta.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

(См. (2.41)).

Положим для простоты

$$\omega^3 + d\lambda = \tilde{\lambda}\omega^1 + \lambda_1\omega_3^1 + \lambda_2\omega_3^2,$$
$$\omega_1^2 + d\theta = \tilde{\theta}\omega^1 + \theta_1\omega_3^1 + \theta_2\omega_3^2. \tag{3.7}$$

Выразим теперь коэффициенты a_i, b_i, c_i, через инварианты $k, p, q, r, \alpha, \beta, \gamma$ окрестности второго порядка луча и коэффициенты $\tilde{\lambda}, \lambda_1, \lambda_2, \tilde{\theta}, \tilde{\theta}_1, \theta_2$.

Принимая во внимание равенства (1.18), (2.2) и (3.7), можем переписать равенства (3.5) и (3.6) в виде

$$
\begin{gathered}
\omega^{1'} = \cos\theta\omega^1 + (\lambda\cos\theta + k\sin\theta)\,\omega_3^1 + \lambda\sin\theta\omega_3^2, \\
\omega^{2'} = -\sin\theta\omega^1 + (-\lambda\sin\theta + k\cos\theta)\,\omega_3^1 + \lambda\cos\theta\omega_3^2, \qquad (3.8) \\
\omega^{3'} = \widetilde{\lambda}\omega^1 + \lambda_1\omega_3^1 + \lambda_2\omega_3^2
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_{2'}^{3'} &= \sin\theta\omega_3^1 - \cos\theta\omega_3^2, \\
\omega_{3'}^{1'} &= \cos\theta\omega_3^1 + \sin\theta\omega_3^2, \\
\omega_{1'}^{2'} &= \widetilde{\theta}\omega^1 + \theta_1\omega_3^1 + \theta_2\omega_3^2. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Подставим в (3.4) значения форм $\omega^{i'}, \omega_{i'}^{j'}$, определяемые равенствами (3.8) и (3.9). Сравнивая затем коэффициенты при независимых формах $\omega^1, \omega_3^1, \omega_3^2$, мы будем иметь

$$
\begin{aligned}
&c_1\cos\theta - c_2\sin\theta + c_3\widetilde{\lambda} = \widetilde{\theta}, \\
&c_1(\lambda\cos\theta + k\sin\theta) + c_2(-\lambda\sin\theta + k\cos\theta) + c_3\lambda_1 = \theta_1, \\
&c_1\lambda\sin\theta + c_2\lambda\cos\theta + c_3\lambda_2 = \theta_2, \\
&a_1\cos\theta - a_2\sin\theta + a_3\widetilde{\lambda} = 0, \\
&a_1(\lambda\cos\theta + k\sin\theta) + a_2(-\lambda\sin\theta + k\cos\theta) + a_3\lambda_1 = \sin\theta, \\
&a_1\lambda\sin\theta + a_2\lambda\cos\theta + a_3\lambda_2 = -\cos\theta, \qquad (3.10) \\
&b_1\cos\theta - b_2\sin\theta + b_3\widetilde{\lambda} = 0, \\
&b_1(\lambda\cos\theta + k\sin\theta) + b_2(-\lambda\sin\theta + k\cos\theta) + b_3\lambda_1 = \cos\theta, \\
&b_1\lambda\sin\theta + b_2\lambda\cos\theta + b_3\lambda_2 = \sin\theta.
\end{aligned}
$$

Отсюда

$$
c_1 = \frac{1}{\Delta}\left[\sin\theta(\theta_1\lambda_2 - \theta_2\lambda_1) + (-\lambda\sin\theta + k\cos\theta)(\widetilde{\theta}\lambda_2 - \theta_2\widetilde{\lambda}) - \right.
$$

$$
\left. - \lambda\cos\theta(\widetilde{\theta}\lambda_1 - \theta_1\widetilde{\lambda})\right],
$$

$$
c_2 = \frac{1}{\Delta}\left[\cos\theta(\theta_1\lambda_2 - \theta_2\lambda_1) - (\lambda\cos\theta + k\sin\theta)(\widetilde{\theta}\lambda_2 - \theta_2\widetilde{\lambda}) + \right.
$$

$$
\left. + \lambda\sin\theta(\widetilde{\theta}\lambda_1 - \theta_1\widetilde{\lambda})\right],
$$

$$
\begin{aligned}
c_3 &= \frac{1}{\Delta}(\widetilde{\theta}\lambda^2 - \theta_1\lambda + k\theta_2), \\
a_1 &= \frac{1}{\Delta}(k\cos^2\theta\widetilde{\lambda} + \sin\theta\cos\theta\lambda_1 + \sin^2\theta\lambda_2), \\
a_2 &= \frac{1}{\Delta}(-\lambda\widetilde{\lambda} - k\sin\theta\cos\theta\widetilde{\lambda} + \cos^2\theta\lambda_1 + \sin\theta\cos\theta\lambda_2), \qquad (3.11) \\
a_3 &= \frac{1}{\Delta}(-\sin\theta\lambda - \cos\theta k), \\
b_1 &= \frac{1}{\Delta}(\lambda\widetilde{\lambda} - k\sin\theta\cos\widetilde{\theta\lambda} - \sin^2\theta\lambda_1 + \sin\theta\cos\theta\lambda_2), \\
b_2 &= \frac{1}{\Delta}(k\sin^2\theta\widetilde{\lambda} - \sin\theta\cos\theta\lambda_1 + \cos^2\theta\lambda_2), \\
b_3 &= \frac{1}{\Delta}(-\cos\theta\lambda + k\sin\theta),
\end{aligned}
$$

где

$$
\Delta = \widetilde{\lambda}\lambda^2 - \lambda_1\lambda + \lambda_2 k. \qquad (3.12)
$$

Поле, присоединенное к комплексу, становится вырожденным, если

$$
\Delta = 0
$$

или

$$
\widetilde{\lambda}\lambda^2 - \lambda_1\lambda + \lambda_2 k = 0. \qquad (3.13)
$$

Поскольку Δ — определитель, составленный из коэффициентов уравнений (3.5), то обращение его в нуль означает, что между формами $\omega^{1'}, \omega^{2'}, \omega^{3'}$ существует некоторая линейная зависимость, а потому число независимых из них не превосходит двух. Но в таком случае дифференциал dA', как показывает первое равенство (3.3), будет зависеть не более, чем от двух независимых форм, а потому совокупность центров поля вырождается или в поверхность, или в линию. (Последнее имеет место тогда, когда число независимых форм оказывается равным 1).

Если вырожденным является центральное поле комплекса, то равенство (3.13) будет удовлетворено при $\lambda = 0$

$$
\lambda_2 k = 0.
$$

Возможны два случая:

1. $k=0$. Это случай обычного специального комплекса, у которого все лучи касаются некоторой поверхности.

2. $\lambda_2=0$. Как показывает первое равенство (3.7), в котором следует положить $\lambda=0$, λ_2 — коэффициент разложения формы ω_3 по базисным формам комплекса $\omega^1, \omega_3^1, \omega_3^2$; следовательно,

$$\lambda_2 = k\beta - r.$$

Рассматриваемый случай характеризуется, таким образом, равенством

$$k\beta - r = 0.$$

У комплексов, характеризуемых таким равенством, совокупность центров всех лучей вырождается в поверхность; однако, в отличие от специальных комплексов, каждый конус лучей с вершиной в точке такой поверхности не вырождается в плоскость, касательную к этой поверхности.

Назовем такие комплексы **полуспециальными** ([12—18] Г. Георгиев). В дальнейшем вырожденные поля мы будем из рассмотрения исключать.

§ 2. Две фундаментальные квадратичные формы поля

Условимся в дальнейшем, говоря о произвольном поле, все величины, характеризующие это поле, записывать без штрихов.

Центр поля A можно в известном смысле уподобить точке трехмерной поверхности, а вектор поля I_3 — единичному вектору нормали к ней. В таком случае для поля можно ввести две фундаментальные квадратичные формы в полной аналогии с тем, как это делается в теории поверхностей:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= (dA)^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2, \\ \Phi_2 &= -dA\,dI_3 = -\omega^1\omega_3^1 - \omega^2\omega_3^2. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Назовем **нормальной кривизной поля** в данном направлении отношение второй фундаментальной формы к первой

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{-\omega^1\omega_3^1 - \omega^2\omega_3^2}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2}. \tag{3.16}$$

Отсюда (см. (3.4))

$$\begin{aligned} (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 + \rho\,[\omega^1(b_1\omega^1 + b_2\omega^2 + b_3\omega^3) - \\ - \omega^2(a_1\omega^1 + a_2\omega^2 + a_3\omega^3)] = 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Продифференцируем это равенство по ω^1, ω^2, ω^3, полагая ρ постоянным:

$$\begin{aligned} 2(1+b_1\rho)\,\omega^1 - (a_1-b_2)\,\rho\omega^2 + b_3\rho\omega^3 &= 0, \\ -(a_1-b_2)\,\rho\omega^1 + 2(1-a_2\rho)\,\omega^2 - a_3\rho\omega^3 &= 0, \\ +b_3\rho\omega^1 - a_3\rho\omega^2 + 2\omega^3 &= 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Исключая отсюда формы ω^1, ω^2, ω^3, будем иметь

$$\begin{vmatrix} 2(1+b_1\rho) & -(a_1-b_2)\rho & +b_3\rho \\ -(a_1-b_2)\rho & 2(1-a_2\rho) & -a_3\rho \\ +b_3\rho & -a_3\rho & 2 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\begin{aligned} -[a_3^2b_1 - b_3^2a_2 - a_3b_3(a_1-b_2)]\,(\rho)^3 - [b_3^2 + a_3^2 + (a_1-b_2)^2 + \\ + 4a_2b_1]\,(\rho)^2 - 4(a_2-b_1)\,\rho + 4 = 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Значения ρ, удовлетворяющие этому уравнению, соответствуют экстремальным значениям кривизны $\frac{1}{\rho}$. Назовем три величины, составленные из корней этого уравнения

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{\rho_1}\cdot\frac{1}{\rho_2}\cdot\frac{1}{\rho_3} = +\frac{1}{4}\,[a_3^2b_1 - b_3^2a_2 - a_3b_3(a_1-b_2)], \\ P &= \frac{1}{\rho_1\rho_2} + \frac{1}{\rho_2\rho_3} + \frac{1}{\rho_3\rho_1} = -\frac{1}{4}\,[b_3^2 + a_3^2 + (a_1-b_2)^2 + 4a_2b_1], \\ H &= \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} = +(a_2-b_1) \end{aligned} \tag{3.20}$$

соответственно **полной, смешанной и средней кривизнами** поля. Подставим в первую формулу (3.20) вместо a_i, b_i их значения, определяемые равенствами (3.11). После приведения подобных членов и сокращений эта формула примет вид

$$K = +\frac{\lambda}{4\Delta^2}. \tag{3.21}$$

Отсюда видно, что кривизна K обращается в нуль тогда и только тогда, когда $\lambda=0$, т. е. когда центр поля совпадает с центром луча комплекса. Мы имеем, следовательно, теорему:

Единственным полем комплекса, полная кривизна которого равняется нулю, является центральное поле этого комплекса.

Из формулы (3.21) следует также, что **для полей, центры**

которых расположены по одну сторону от центра луча, полная кривизна K положительна, для центров, лежащих по другую сторону,— отрицательна.

Для выяснения значения средней кривизны H рассмотрим поверхность, описанную центром поля A и ортогональную к вектору поля I_3. Уравнение такой поверхности имеет вид

$$\omega^3 = 0 \tag{3.22}$$

(см. (3.3)). Полученное уравнение будет некоторым уравнением в полных дифференциалах du, dv, dw (уравнение Пфаффа), коэффициенты которого в общем случае не удовлетворяют условию полной интегрируемости. Известно, вместе с тем, что всякое уравнение Пфаффа допускает интегральные многообразия одного измерения, т. е. линии, если следить при изменении параметров u, v, w за перемещением точки A. (Или линейчатые поверхности, если следить за перемещением вектора I_3). Все такие линии проходят через одну и ту же точку пространства и касаются в ней одной и той же плоскости $I_1 I_2$. Совокупность таких интегральных кривых называют **неголономной поверхностью.**

Таким образом, в общем случае уравнение (3.22) определяет неголономную поверхность. Эта поверхность становится обыкновенной (голономной), если уравнение (3.22) вполне интегрируемо.

Различные определения одного и того же понятия, относящегося к обыкновенной поверхности, в случае неголономной поверхности приводят к разным объектам. Происходит своеобразное расщепление свойств поверхности, на которое обратил внимание еще Д. М. Синцов. Ниже мы будем иметь случай воспользоваться таким расщеплением; сейчас же займемся отысканием средней кривизны поверхности (3.22).

Средней кривизной неголономной поверхности называется сумма ее экстремальных нормальных кривизн. Чтобы ее найти, примем за базисные формы на поверхности (3.22) формы ω^1, ω^2. Тогда каждая кривая на поверхности будет вполне определяться отношением базисных форм $\omega^1 : \omega^2$, дифференциал ее длины дуги — равенством

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2,$$

а единичный вектор касательной — равенством

$$\sigma = \frac{\omega^1 I_1 + \omega^2 I_2}{\sqrt{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2}}.$$

Дифференцируя последнее равенство, будем иметь

$$\frac{d\sigma}{ds} = AI_1 + BI_2 + \frac{\omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2} I_3,$$

где A и B — некоторые коэффициенты. Нормальная кривизна k_n определяется как коэффициент при I_3 в последнем равенстве

$$k_n = \frac{\omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2}. \tag{3.23}$$

Подставим сюда вместо ω_1^3 и ω_2^3 их значения, определяемые равенствами (3.4), в которых следует положить $\omega^3 = 0$. Мы будем иметь

$$k_n[(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2] + \omega^1(b_1\omega^1 + b_2\omega^2) - \omega^2(a_1\omega^1 + a_2\omega^2) = 0.$$

Продифференцируем это равенство по ω^1 и ω^2, считая при этом k_n постоянным

$$2(k_n + b_1)\omega^1 + (b_2 - a_1)\omega^2 = 0, \tag{3.24}$$

$$(b_2 - a_1)\omega^1 + 2(k_n - a_2)\omega^2 = 0.$$

Исключая отсюда формы ω^1 и ω^2, найдем

$$\begin{vmatrix} 2(k_n + b_1) & b_2 - a_1 \\ b_2 - a_1 & 2(k_n - a_2) \end{vmatrix} = 0$$

или

$$4(k_n)^2 + 4(b_1 - a_2)k_n - 4b_1a_2 - (b_2 - a_1)^2 = 0. \tag{3.25}$$

Корни этого квадратного уравнения представляют собой, очевидно, экстремальные значения кривизны, определяемой равенством (3.23).

Отсюда получаем соответственно значения полной и средней кривизн неголономной поверхности (3.22)

$$K_3 = -\frac{1}{4}[4b_1a_2 + (b_2 - a_1)^2],$$

$$H_3 = -(b_1 - a_2) \tag{3.26}$$

(индекс 3 внизу указывает на то, что рассматриваемой неголономной поверхностью является поверхность, ортогональная к вектору I_3).

Сравнивая последние формулы в (3.20) и (3.26), замечаем, что средние кривизны H и H_3 совпадают.

Можем сформулировать следующую теорему:

Средняя кривизна поля H равна средней кривизне H_3 неголономной поверхности, описанной центром поля и ортогональной к вектору поля.

Выясним теперь геометрический смысл смешанной кривизны. Назовем **центральной линией** поля кривую, описанную центром поля и огибаемую вектором этого поля.

Из равенств (3.3) следует, что дифференциальными уравнениями центральной линии поля будут равенства

$$\omega^1 = 0, \omega^2 = 0.$$

Следовательно, для этой линии мы будем иметь

$$dA = \omega^3 I_3, dI_3 = \omega^3 (b_3 I_1 - a_3 I_2)$$

(см. (3.4)).

Отсюда получаем кривизну центральной линии

$$k_3 = \frac{|dI_3|}{|dA|} = \sqrt{a_3^2 + b_3^2}. \tag{3.27}$$

Мы можем теперь следующим образом представить смешанную кривизну поля (см. (3.20), (3,26), (3.27)):

$$P = K_3 - \left(\frac{k_3}{2}\right)^2.$$

Таким образом, **смешанная кривизна поля равна разности между полной кривизной иеголономной поверхности, ортогональной к вектору поля, и квадратом половины кривизны центральной линии поля.**

§ 3. Индикатриса нормальных кривизн

Отложим на касательной к каждой кривой $\omega^1 : \omega^2 : \omega^3$, описываемой точкой A, отрезок, равный $\sqrt{|\rho_n|}$, где величина ρ_n определяется равенством (3.16). Если начало этого отрезка совпадает с точкой A, а конец — с некоторой точкой B, то, очевидно, вектор AB будет определяться равенством

$$AB = \frac{dA}{|dA|}\sqrt{|\rho_n|} = \frac{|\rho_n|}{\sqrt{\Phi_1}}(\omega^1 I_1 + \omega^2 I_2 + \omega^3 I_3).$$

В местной системе координат $AI_1I_2I_3$ координаты точки B будут иметь вид

$$x^i = \frac{|\rho_n|\,\omega^i}{\sqrt{\Phi_1}}, i = 1, 2, 3,$$

откуда

$$\omega^i = \frac{1}{|\rho_n|}\sqrt{\Phi_1}\, x^i, i = 1, 2, 3. \tag{3.28}$$

Подставляя эти значения в равенство (3.17) (за исключением первых трех слагаемых) и сокращая последнее на $\Phi_1 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2$, получим уравнение поверхности 2-го порядка

$$x^1(b_1x^1 + b_2x^2 + b_3x^3) - x^2(a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3) = \pm 1. \tag{3.29}$$

Назовем эту поверхность **индикатрисой нормальных кривизн поля.** Легко показать, что **полная кривизна K_3 равна малому дискриминанту из коэффициентов уравнения (3.29), а модуль K равен модулю большого дискриминанта из коэффициентов этого уравнения.**

Асимптотический конус индикатрисы (3.29) имеет уравнение

$$x^1(b_1x^1 + b_2x^2 + b_3x^3) - x^2(a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3) = 0. \tag{3.30}$$

Этот конус содержит луч комплекса $x^1 = x^2 = 0$, а касательная плоскость к нему в этом луче имеет уравнение

$$b_3x^1 - a_3x^2 = 0.$$

Эта плоскость образует с вектором I_1 угол α, определяемый равенством

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b_3}{a_3} = \frac{\lambda\cos\theta - k\sin\theta}{\lambda\sin\theta + k\cos\theta}. \tag{3.31}$$

(см. (3.11)).

В то же время угол ψ, образуемый плоскостью П, соответствующей в нормальной корреляции точке A, с вектором I_1, равен, очевидно,

$$\psi = \theta^* - \theta, \tag{3.32}$$

где через θ^* мы обозначили угол, образуемый плоскостью П с вектором главной нормали I_1. (В формуле (1.20) мы его обозначили через θ). В силу этого мы должны положить теперь

$$\operatorname{tg}\theta^* = -\frac{k}{\lambda}.$$

Следовательно, формула (3.32) нам даст

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\lambda\sin\theta + k\cos\theta}{k\sin\theta - \lambda\cos\theta}. \tag{3.33}$$

Сравнивая равенства (3.31) и (3.33), мы заключаем, что

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\psi=-1,$$

т. е. касательная плоскость асимптотического конуса индикатрисы нормальных кривизн любого поля, присоединенного к комплексу, проходящая через луч комплекса, перпендикулярна к плоскости П, соответствующей вершине конуса в нормальной корреляции на данном луче.

Если обозначить через φ_1, φ_2, φ_3 углы, образуемые некоторым направлением, исходящим из центра поля, с главными осями индикатрисы нормальных кривизн этого поля, то для нормальной кривизны $\frac{1}{\rho}$ любой кривой пространства, касающейся этого направления, будет иметь место легко получаемое соотношение

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\cos^2\varphi_1}{\rho_1}+\frac{\cos^2\varphi_2}{\rho_2}+\frac{\cos^3\varphi_3}{\rho_3}, \tag{3.34}$$

представляющее собой аналог известной формулы Эйлера классической теории поверхностей. Здесь $\frac{1}{\rho_1}$, $\frac{1}{\rho_2}$, $\frac{1}{\rho_3}$ — экстремальные значения нормальной кривизны, определяемые уравнением (3.19).

§ 4. Неголономная конгруэнция, принадлежащая комплексу

Как мы уже отметили выше, если уравнение (3.22) истолковывать в точечно-геометрическом смысле, то оно будет определять неголономную поверхность, описанную центром поля **A**, если же его истолковывать в линейчато-геометрическом смысле, то оно будет представлять собой уравнение неголономной конгруэнции, принадлежащей комплексу. Будем называть неголономную поверхность, определяемую уравнением (3.22), базисной поверхностью конгруэнции.

Исследуем свойства этой конгруэнции.

Прежде всего, найдем обычным путем ее фокусы и граничные точки.

а) Фокусы. Пусть

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}+r\boldsymbol{I}_3 \tag{3.35}$$

фокус конгруэнции (3.22). Дифференцируя (3.35), будем иметь

$$d\boldsymbol{M}=(\omega^1+r\omega_3^1)\boldsymbol{I}_1+(\omega^2+r\omega_3^2)\boldsymbol{I}_2+(\omega^3+dr)\boldsymbol{I}_3.$$

При изменении параметров луча, принадлежащего конгруэнции, точка **M** описывает фокальную поверхность, касательную к вектору $\boldsymbol{I}_3$; следовательно, коэффициенты при $\boldsymbol{I}_1$ и $\boldsymbol{I}_2$ должны быть пропорциональны друг другу. Но в таком случае их внешнее произведение должно обращаться в нуль

$$[\omega^1+r\omega_3^1,\ \omega^2+r\omega_3^2]=0.$$

Подставим сюда вместо ω_3^1 и ω_3^2 их значения по формулам (3.4), в которых следует положить $\omega^3=0$:

$$\{(1+b_1r)(1-ra_2)+r^2a_1b_2\}[\omega^1\omega^3]=0 \tag{3.36}$$

Поскольку формы ω^1, ω^2 являются независимыми на конгруэнции (3.22), то $[\omega^1\omega^2]\neq0$. Приравнивая поэтому к нулю коэффициент при внешней форме в равенстве (3.36), получим квадратное уравнение для определения фокусов конгруэнции

$$(a_1b_2-b_1a_2)r^2+(b_1-a_2)r+1=0.$$

Положим

$$\frac{1}{r}=\eta. \tag{3.*}$$

Тогда предыдущее уравнение может быть переписано в виде

$$\eta^2+(b_1-a_2)\eta+(a_1b_2-b_1a_2)=0. \tag{3.37}$$

б) Граничные точки. Пусть

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}+r\boldsymbol{I}_3 \tag{3.38}$$

граничная точка конгруэнции (3.22). Продифференцируем уравнение (3.38)

$$d\boldsymbol{M}=(\omega^1+r\omega_3^1)\boldsymbol{I}_1+(\omega^2+r\omega_3^2)\boldsymbol{I}_2+(\omega^3+dr)\boldsymbol{I}_3. \tag{3.39}$$

Найдем уравнение, определяющее абсциссу r.

Всякому отношению $\omega^1:\omega^2$ базисных форм конгруэнции (3.22) соответствует луч этой конгруэнции, бесконечно близкий к текущему лучу, а стрикционная точка этих двух лучей будет определена равенством

$$d\boldsymbol{M}d\boldsymbol{I}_3=0,$$

т. е.

$$(\omega^1+r\omega_3^1)\omega_3^1+(\omega^2+r\omega_3^2)\omega_3^2=0.$$

Подставим сюда значения форм ω_3^1, ω_3^2 по формулам (3.4), положив в них $\omega^3=0$:

$$[(1+b_1r)\omega^1+b_2r\omega^2](b_1\omega^1+b_2\omega^2)-[-a_1r\omega^1+$$
$$+(1-a_2r)\omega^2](a_1\omega^1+a_2\omega^2)=0.$$

Продифференцируем это равенство по ω^1 и ω^2, считая r постоянным:

$$2\left[(a_1^2+b_1^2)r+b_1\right]\omega^1+\left[2(b_1b_2+a_1a_2)r+(b_2-a_1)\right]\omega^2=0,$$
$$\left[2(b_1b_2+a_1a_2)r+(b_2-a_1)\right]\omega^1+2\left[(b_2^2+a_2^2)r-a_2\right]\omega^2=0.$$

Граничные точки определяются как общие корни этих двух уравнений. Мы их получим, исключив из последних уравнений формы ω^1, ω^2

$$(a_1b_2-a_2b_1)^2r^2+(a_2-b_1)(b_1a_2-a_1b_2)r-b_1a_2-\frac{1}{4}(b_2-a_1)^2=0. \tag{3.40}$$

Введем обозначение

$$(a_1b_2-a_2b_1)r=\eta. \tag{3.41}$$

Тогда уравнение, определяющее граничные точки, запишется в виде

$$\eta^2+(b_1-a_2)\eta-\frac{1}{4}\left[4b_1a_2+(b_2-a_1)^2\right]=0. \tag{3.42}$$

Подсчитаем теперь гауссову кривизну $\overline{K}_3$ неголономной поверхности (3.22). Последняя, как известно, определяется как отношение элемента площади сферического отображения неголономной поверхности к элементу площади самой поверхности. Из равенств

$$\begin{aligned} dA&=\omega^1I_1+\omega^2I_2,\\ dI_3&=\omega_3^1I_1+\omega_3^2I_2 \end{aligned}\qquad(\omega^3=0)$$

легко находим элементы площади dS и dS' поверхности и ее сферического отображения

$$dS=[\omega^1\omega^2],$$
$$dS'=[\omega_3^1\omega_3^2].$$

Следовательно,

$$\overline{K}_3=\frac{[\omega_3^1\omega_3^2]}{[\omega^1\omega^2]}.$$

Учитывая значения форм ω_3^1 и ω_3^2 (см. (3.4)), мы легко найдем

$$\overline{K}_3=a_1b_2-b_1a_2. \tag{3.I}$$

Но в таком случае уравнения (3.37) и (3.42) перепишутся в виде

$$\eta^2-H_3\eta+\overline{K}_3=0, \tag{3.37$'$}$$
$$\eta^2-H_3\eta+K_3=0 \tag{3.42$'$}$$

(см. (3.26)). Корни уравнения (3.37)$'$ называются **главными кривизнами второго рода** неголономной поверхности (3.22), корни уравнения (3.42)$'$ — ее **главными кривизнами первого рода.** Величины, обратные кривизнам,— **радиусы кривизны.** Но в таком случае из равенства (3.*) следует теорема:

главные радиусы кривизны второго рода неголономной поверхности равны расстояниям от этой поверхности фокусов нормальной к ней неголономной конгруэнции.

Равенство (3.41) запишется в виде

$$\overline{K}_3r=\eta.$$

Это равенство может быть сформулировано в виде следующей теоремы:

произведения гауссовой кривизны неголономиой поверхности на расстояния от этой поверхности граничных точек неголономной к ней конгруэнции равны главным кривизнам первого рода поверхности.

Если поверхность (3.22) становится голономной, то гауссова кривизна становится равной полной кривизне, кривизны первого и второго рода совпадают между собой, а конгруэнция (3.22) оказывается обычной нормальной конгруэнцией, у которой праничные точки, как известно, совпадают с ее фокусами. Оба сформулированных выше предложения будут совпадать с тем элементарным предложением, которое гласит, что фокусы нормальной конгруэнции отстоят от ее базисной поверхности на расстояниях, равных главным радиусам кривизны этой поверхности. Мы обнаруживаем здесь известное расщепление свойств обычной конгруэнции, которое в случае неголономных поверхностей было подмечено Д. М. Синцовым.

§ 5. Геодезическое кручение поля

Подобно тому, как в § 2 мы рассматривали нормальную кривизну поля как отношение двух фундаментальных квадратичных форм, можем рассмотреть теперь геодезическое кручение поля как аналог соответствующего понятия теории поверхностей.

Как известно (см. В. Ф. Каган, «Основы теории поверхностей», т. I, стр. 207), геодезическим кручением кривой на поверхности называется величина τ, определяемая формулой

$$\tau=\frac{dn}{ds}\frac{[dMn]}{ds}, \tag{3.43}$$

где M — точка поверхности, n — единичный вектор нормали к ней, ds — дифференциал длины дуги кривой. В соответствии с нашим истолкованием поля как трехмерной поверхности с вектором нормали I_3 мы должны назвать теперь геодезическим кручением поля в данном направлении величину τ, определяемую равенством

$$\tau=\frac{dI_3[dAI_3]}{dA^2}=\frac{\omega^2\omega_3^1-\omega^1\omega_3^2}{(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+(\omega^3)^2}.$$

Подставляя сюда значения форм ω_3^1, ω_3^2 (см. (3.4)), будем иметь

$$\tau[(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+(\omega^3)^2]-\omega^2(b_1\omega^1+b_2\omega^2+b_3\omega^3)-$$
$$-\omega^1(a_1\omega^1+a_2\omega^2+a_3\omega^3)=0. \tag{3.44}$$

Продифференцируем это равенство по ω^1, ω^2, ω^3, считая τ постоянным,

$$\begin{aligned}2(\tau-a_1)\omega^1-(b_1+a_2)\omega^2-a_3\omega^3&=0,\\ -(b_1+a_2)\omega^1+2(\tau-b_2)\omega^2-b_3\omega^3&=0,\\ -a_3\omega^1-b_3\omega^2+2\tau\omega^3&=0.\end{aligned} \tag{3.45}$$

Исключив из этих уравнений формы ω^1, ω^2, ω^3, получим кубическое уравнение, определяющее экстремальные значения геодезического кручения (**главные геодезические кручения поля**):

$$\begin{vmatrix}2(\tau-a_1) & -(b_1+a_2) & -a_3\\ -(b_1+a_2) & 2(\tau-b_2) & -b_3\\ -a_3 & -b_3 & 2\tau\end{vmatrix}=0$$

или

$$(\tau)^3-(b_2+a_1)(\tau)^2+\frac{1}{4}[4a_1b_2-a_3^2-b_3^2-(b_1+a_2)^2]\tau+$$
$$+\frac{1}{4}\left[a_1b_3^2+b_2a_3^2-a_3b_3(b_1+a_2)\right]=0.$$

Отсюда имеем следующие симметрические функции главных кручений:

$$T=\tau_1\tau_2\tau_3=\frac{1}{4}[a_3b_3(b_1+a_2)-a_1b_3^2-b_2a_3^2],$$
$$M=\tau_1\tau_2+\tau_2\tau_3+\tau_3\tau_1=\frac{1}{4}[4a_1b_2-a_3^2-b_3^2-(b_1+a_2)^2], \tag{3.46}$$
$$S=\tau_1+\tau_2+\tau_3=b_2+a_1,$$

которые естественно можно назвать **полным, смешанным и средним геодезическими кручениями поля.**

Подставляя в первую формулу (3.46) вместо a_i, b_i их значения (3.11), получим после необходимых упрощений

$$T=-\frac{k}{4\Delta^2}. \tag{3.47}$$

Отсюда легко можно вывести следующее:

у всякого неспециального комплекса ($k\neq 0$) не существует присоединенного к нему поля, у которого полное геодезическое кручение равняется нулю.

Выясним теперь геометрический смысл средней и смешанной геодезических кривизн поля. С этой целью снова рассмотрим неголономную поверхность (3.22). Если мы положим в равенстве (3.44) $\omega^3=0$, то получим уравнение, определяющее геодезическое кручение некоторой кривой, расположенной на этой поверхности

$$\tau[(\omega^1)^2+(\omega^2)^2]-\omega^2(b_1\omega^1+b_2\omega^2)-\omega^1(a_1\omega^1+a_2\omega^2)=0.$$

Продифференцируем это уравнение по ω^1, ω^2, считая τ постоянным:

$$2(\tau-a_1)\omega^1-(b_1+a_2)\omega^2=0,$$
$$-(b_1+a_2)\omega^1+2(\tau-b_2)\omega^2=0.$$

Исключая ω^1, ω^2, получим квадратное уравнение, определяющее экстремальные значения геодезического кручения рассматриваемой поверхности:

$$(\tau)^2-(b_2+a_1)\tau+a_1b_2-\frac{1}{4}(b_1+a_2)^2=0. \tag{3.48}$$

Отсюда находим соответственно полное и среднее геодезические кручения поверхности

$$T_3=a_1b_2-\frac{1}{4}(b_1+a_2)^2,$$
$$S_3=b_2+a_1. \tag{3.49}$$

Сравнивая последнюю формулу с последней формулой (3.46), заключим, что

среднее геодезическое кручение поля равно средней кривизне неголономной поверхности, ортогональной к вектору поля в его центре.

Что касается смешанного геодезического кручения M, то легко убедиться в справедливости равенства

$$M = T_3 - \left(\frac{k_3}{2}\right)^2 \tag{3.50}$$

Здесь κ_3 — кривизна центральной линии поля, определяемая равенством (3.27).

Следовательно, как и в случае смешанной кривизны, заключаем, что

смешанное геодезическое кручение поля равно разности между полным геодезическим кручением неголономной поверхности, ортогональной к вектору поля, и квадратом половины кривизны центральной линии поля.

Легко убедиться в справедливости следующего равенства, связывающего между собой средние кривизну и геодезическое кручение поля, с одной стороны, и соответствующие смешанные величины с другой

$$P - \left(\frac{H}{2}\right)^2 = M - \left(\frac{S}{2}\right)^2. \tag{3.51}$$

§ 6. Индикатриса геодезических кручений I

Найдем теперь индикатрису геодезических кручений поля, подобно тому, как в § 3 была найдена индикатриса нормальных кривизн (см. (3.29)). Для этого на каждой касательной к кривой, описанной точкой A и определяемой отношениями форм $\omega^1 : \omega^2 : \omega^3$, отложим отрезок, равный $\frac{1}{\sqrt{|\tau|}}$, где τ — геодезическое кручение кривой. В таком случае в местной системе координат $AI_1I_2I_3$ координаты конца отрезка будут определяться равенствами

$$\omega^i = \sqrt{\Phi_1 |\tau|}\, x^i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{3.52}$$

где $\Phi_1 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2$ (см. (3.28)). Подставляя формы ω^i в равенство (3.44) и сокращая на $\Phi_1 |\tau|$, получим уравнение индикатрисы.

$$x^2 (b_1x^1 + b_2x^2 + b_3x^3) + x^1 (a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3) = \pm 1. \tag{3.53}$$

Уравнение асимптотического конуса индикатрисы имеет вид

$$x^1 (a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3) + x^2 (b_1x^1 + b_2x^2 + b_3x^3) = 0. \tag{3.54}$$

Этот конус проходит через луч комплекса $x^1 = x^2 = 0$. Касательная плоскость к нему в данном луче определяется уравнением

$$a_3x^1 + b_3x^2 = 0.$$

Угол β между этой плоскостью и вектором I_1 определится равенством

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{a_3}{b_3}.$$

Сравнивая это равенство с равенством (3.31), замечаем, что

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = -1.$$

Таким образом, **асимптотический конус индикатрисы геодезических кручений поля ортогонален к асимптотическому конусу индикатрисы нормальных кривизн того же поля.**

Поскольку, однако, как это мы видели в § 3, конус лучей комплекса, имеющий вершиной центр поля, также ортогонален к асимптотическому конусу индикатрисы нормальных кривизн, то следует заключить, что

асимптотический конус индикатрисы геодезических кручений поля касается конуса лучей комплекса, имеющего вершину в центре поля.

Иными словами,

касательная плоскость к асимптотическому конусу геодезических кручений совпадает с плоскостью П, соответствующей центру поля в нормальной корреляции.

§ 7. Индикатриса геодезических кручений II

К другому виду индикатрисы геодезических кручений мы придем, рассматривая одновременно три векторных поля AI_1, AI_2, AI_3 с общим центром A. Возьмем для каждого из этих полей неголономную поверхность, ортогональную к вектору поля и определяемую соответственно уравнением

$$\omega^1 = 0,\ \omega^2 = 0,\ \omega^3 = 0.$$

Пусть, для примера, это будет поверхность

$$\omega^3 = 0. \tag{3.22}$$

Уравнение индикатрисы геодезических кручений на ней мы получим, найдя линию пересечения поверхности (3.53) с плоскостью $x^3 = 0$,

$$a_1 (x^1)^2 + (a_2 + b_1)\, x^1x^2 + b_2 (x^2)^2 = \pm 1. \tag{3.55}$$

Уравнения индикатрис для двух других поверхностей $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$ получим с помощью круговой перестановки символов a, b, c и индексов 1, 2, 3

$$b_2 (x^2)^2 + (b_3 + c_2) x^2 x^3 + c_3 (x^3)^2 = \pm 1,$$
$$c_3 (x^3)^2 + (c_1 + a_3) x^3 x^1 + a_1 (x^1)^2 = \pm 1. \qquad (3.56)$$

Легко видеть, что все три кривые (3.55) и (3.56) являются линиями пересечения поверхности второго порядка

$$a_1 (x^1)^2 + b_2 (x^2)^2 + c_3 (x^3)^2 + (a_2 + b_1) x^1 x^2 + (b_3 + c_2) x^2 x^3 + + (c_1 + a_3) x^3 x^1 = \pm 1 \qquad (3.57)$$

соответственно с плоскостями

$$x^3 = 0,\ x^1 = 0,\ x^2 = 0.$$

Поскольку в каждой точке пространства мы имеем три взаимно перпендикулярных неголономных поверхности $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$, $\omega^3 = 0$, то естественно говорить о триортогональной системе неголономных поверхностей. Назовем поэтому поверхность (3.57) **пространственной индикатрисой триортогональной системы неголономных поверхностей, присоединенных к полю**

Примечание. Факт расположения трех индикатрис (3.55) и (3.56) на одной поверхности 2-го порядка представляет собой некоторое существенное свойство именно геодезических кручений кривых, не распространяющихся, например, на нормальные кривизны этих кривых.

Действительно, рассмотрим индикатрисы нормальных кривизн на поверхностях $\omega = 0$, $\omega^2 = 0$, $\omega^3 = 0$. Чтобы получить уравнение индикатрисы, соответствующей, например, поверхности $\omega^3 = 0$, достаточно в уравнении (3.29) положить $x^3 = 0$

$$b_1 (x^1)^2 + (b_2 - a_1) x^1 x^2 - a_2 (x^2)^2 = \pm 1. \qquad (3.58)$$

Чтобы получить две другие индикатрисы, следует в этом уравнении совершить круговую перестановку символов a, b, c и индексов 1, 2, 3

$$c_2 (x^2)^2 + (c_3 - b_2) x^2 x^3 - b_3 (x^3)^2 = \pm 1.$$
$$a_3 (x^3)^2 + (a_1 - c_3) x^3 x^1 - c_1 (x^1)^2 = \pm 1, \qquad (3.59)$$

Легко видеть, что в общем случае кривые (3.58) и (3.59) не принадлежат никакой поверхности второго порядка.

Формула (3.43) показывает, что для линии кривизны на поверхности и только для нее геодезическое кручение равно нулю (чтобы в этом убедиться, достаточно учесть равенство Родрига $dn = \lambda dA$). В теории поверхностей известна так называемая формула Форсайта (см. A. R. Forsyth «Lectures on the Differential Geometrie of curves and surfaces», Cambridge, 1920)

$$\frac{d\varphi}{ds} + \varkappa = \tau,$$

связывающая кручение $\varkappa$ некоторой кривой, лежащей на поверхности, ее геодезическое кручение τ и угол φ между главной нормалью кривой и нормалью к поверхности. Из этой формулы видно, что если две поверхности пересекаются вдоль некоторой кривой под одним и тем же узлом, то эта кривая имеет на каждой поверхности одно и то же геодезическое кручение.

Следовательно, если две поверхности пересекаются под постоянным углом и на одной из них линия пересечения является линией кривизны, то и на другой она также является линией кривизны. Это — известная теорема Иоахимсталя.

В каждой точке пространства мы имеем три взаимно перпендикулярных неголономных поверхности $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$, $\omega^3 = 0$. Следовательно, как уже говорилось выше, мы можем говорить о триортогональной системе поверхностей. В отличие от случая голономных поверхностей, линии пересечения поверхностей нашей триортогональной системы в общем случае не являются их линиями кривизны, и, следовательно, на эту систему не переносится теорема Дюпена. Геодезическое кручение указанных линий в общем случае не будет равняться нулю. Однако мы получим известное обобщение теоремы Дюпена, если скажем, в соответствии с тем, что мы отметили выше, что **линии пересечения поверхностей триортогональной системы имеют одно и то же геодезическое кручение на каждой из проходящих через них поверхностей системы.**

Докажем теперь следующую теорему:

Любой полудиаметр пространственной индикатрисы (3.57) представляет собой квадратный корень из абсолютной величины радиуса геодезического кручения произвольной кривой, касающейся этого полудиаметра и отнесенной к любой поверхности, касательная плоскость которой жестко связана с гранями триортогональной системы $AI_1I_2I_3$.

Действительно, пусть σ — некоторая плоскость, нормаль которой $n\{\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3\}$ жестко связана с трехгранником $AI_1I_2I_3$. Тем самым сама плоскость, которая предполагается проходящей через точку A, оказывается также жестко связанной с трехгранником. Числа α^1, α^2, α^3, представляющие собой координаты единичного вектора, являются, таким образом, постоянными.

Неголономная поверхность Σ, огибаемая плоскостью σ, определяется дифференциальным уравнением

$$dAn = 0$$

или

$$\alpha^1\omega^1+\alpha^2\omega^2+\alpha^3\omega^3=0. \qquad (3.60)$$

Пусть l — индикатриса геодезических кручений поверхности Σ. Пусть, далее, $\bar{l}$ — линия пересечения плоскости σ с квадрикой (3.57). Так как плоскость σ образует постоянный угол с плоскостью $\boldsymbol{I}_1\boldsymbol{I}_2$, то линия пересечения поверхностей Σ и $\omega^3=0$, в соответствии с тем, что было сказано выше, имеет одно и то же геодезическое кручение на обеих поверхностях. Но в таком случае индикатрисы l и (3.55) имеют общий диаметр. Подобным же образом индикатриса l имеет общие диаметры с индикатрисами (3.56). Так как, однако, кривая второго порядка, имеющая своими диаметрами три заданных отрезка, может быть только одной (для ее задания достаточно, очевидно, и двух отрезков), то, следовательно, кривые l и $\bar{l}$ совпадают. Это означает, что индикатриса поверхности (3.60) целиком располагается на поверхности (3.57). Теорема доказана.

Совершенно очевидно, что векторы $\boldsymbol{I}_1$, $\boldsymbol{I}_2$, $\boldsymbol{I}_3$ не занимают относительно индикатрисы (3.57) никакого особого положения. Последняя характеризуется сразу всей жесткой системой направлений, определяемой любыми двумя из них.

Если поверхность

$$\omega^3=0 \qquad (3.22)$$

является голономной, то последнее уравнение должно быть вполне интегрируемо. Дифференцируя его внешним образом, будем иметь

$$[\omega^1\omega_1^3]+[\omega^2\omega_2^3]=0.$$

Подставим сюда значения форм ω_1^3, ω_2^3 по формулам (3.4), положив в них $\omega^3=0$. Будем иметь

$$-(b_2+a_1)[\omega^1\omega^2]=0.$$

Поскольку формы ω^1, ω^2 являются независимыми на поверхности (3.22), то $[\omega^1\omega^2]\neq 0$. Следовательно, условие голономности поверхности имеет вид

$$a_1+b_2=0. \qquad (3.61)$$

Аналогично получаются условия голономности поверхностей $\omega^1=0$ и $\omega^2=0$

$$\left.\begin{aligned} b_2+c_3&=0,\\ c_3+a_1&=0.\end{aligned}\right\} \qquad (3.62)$$

Если равенства (3.61) и (3.62) имеют место одновременно, т. е. если поверхности $\omega^1=0$, $\omega^2=0$, $\omega^3=0$ образуют голономную триортогональную систему, то будут выполнены равенства

$$a_1=0,\ b_2=0,\ c_3=0. \qquad (3.63)$$

Индикатриса геодезических кручений (3.57) имеет в этом случае уравнение

$$(a_2+b_1)x^1x^2+(b_3+c_2)x^2x^3+(c_1+a_3)x^3x^1=\pm 1 \qquad (3.64)$$

и представляет собой некоторый гиперболоид. Асимптотический конус этого гиперболоида имеет уравнение

$$(a_2+b_1)x^1x^2+(b_3+c_2)x^2x^3+(c_1+a_3)x^3x^1=0. \qquad (3.65)$$

Отсюда видно, что три взаимно перпендикулярных оси

$$x^1=x^2=0,\ x^2=x^3=0,\ x^3=x^1=0,$$

параллельные векторам $\boldsymbol{I}_3$, $\boldsymbol{I}_1$, $\boldsymbol{I}_2$, всегда принадлежат конусу.

Очевидно, и наоборот, если координатные оси трехгранника $A\boldsymbol{I}_1\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{I}_3$ принадлежат асимптотическому конусу индикатрисы (3.57), то поверхности $\omega^1=0$, $\omega^2=0$, $\omega^3=0$ являются голономными. Действительно, как показывает уравнение (3.57), в этом случае должны быть выполнены равенства

$$a_1=0,\ b_2=0,\ c_3=0, \qquad (3.66)$$

это и доказывает голономность указанных поверхностей.

Возьмем теперь уравнение произвольного конуса 2-го порядка с вершиной в начале координат

$$a_{11}(x^1)^2+a_{22}(x^2)^2+a_{33}(x^3)^2+2a_{12}x^1x^2+2a_{23}x^2x^3+2a_{31}x^3x^1=0. \qquad (3.67)$$

Найдем условие того, что этот конус имеет тройку взаимно перпендикулярных образующих. Пусть такие образующие характеризуются следующими единичными векторами

$$\{\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3\},\ \{\beta^1,\beta^2,\beta^3\},\ \{\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3,\}.$$

Подставим координаты этих векторов в уравнение (3.67) вместо текущих координат x^1, x^2, x^3

$$a_{11}(\alpha^1)^2+a_{22}(\alpha^2)^2+a_{33}(\alpha^3)^2+2a_1\alpha^1\alpha^2+2a_{23}\alpha^2\alpha^3+2a_{31}\alpha^3\alpha^1=0,$$
$$a_{11}(\beta^1)^2+a_{22}(\beta^2)^2+a_{33}(\beta^3)^2+2a_1\beta^1\beta^2+2a_{23}\beta^2\beta^3+2a_{31}\beta^3\beta^1=0,$$
$$a_{11}(\gamma^1)^2+a_{22}(\gamma^2)^2+a_{33}(\gamma^3)^2+2a_{12}\gamma^1\gamma^2+2a_{23}\gamma^2\gamma^3+2a_{31}\gamma^3\gamma^1=0.$$

Сложим эти равенства друг с другом и учтем соотношения

$$(\alpha^1)^2+(\beta^1)^2+(\gamma^1)^2=1,\ \alpha^1\alpha^2+\beta^1\beta^2+\gamma^1\gamma^2=0,$$
$$(\alpha^2)^2+(\beta^2)^2+(\gamma^2)^2=1,\ \alpha^2\alpha^3+\beta^2\beta^3+\gamma^2\gamma^3=0,$$
$$(\alpha^3)^2+(\beta^3)^2+(\gamma^3)^2=1,\ \alpha^3\alpha^1+\beta^3\beta^1+\gamma^3\gamma^1=0,$$

связывающие координаты единичных и взаимно перпендикулярных векторов. Получим следующее условие, необходимое для существования в конусе (3.67) тройки взаимно перпендикулярных образующих

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=0. \tag{3.68}$$

Покажем теперь, что это условие является и достаточным. Действительно, принимая его во внимание, перепишем уравнение конуса (3.67) в виде

$$a_{11}[(x^1)^2-(x^3)^2]+a_{22}[(x^2)^2-(x^3)^2]+2a_{12}x^1x^2+2a_{23}x^2x^3+2a_{31}x^3x^1=0.$$

Совместим ось x^1 с одной из образующих этого конуса. Это, очевидно, не изменит соотношения (3.68), поскольку сумма $a_{11}+a_{22}+a_{33}$ является инвариантом общего преобразования прямоугольной декартовой системы координат. В таком случае уравнение конуса примет вид

$$a_{22}[(x^2)^2-(x^3)^2]+2a_{12}x^1x^2+2a_{23}x^2x^3+2a_{31}x^3x^1=0. \tag{3.69}$$

Пусть l — прямая плоскости x^2x^3, наклоненная к оси x^2 под углом φ. Тогда для текущей точки этой прямой мы будем иметь

$$x^1=0,\ x^2=\rho\cos\varphi,\ x^3=\rho\sin\varphi,$$

(ρ — параметр). Если прямая l принадлежит конусу (3.69), то мы будем иметь соотношение

$$a_{22}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+2a_{23}\sin\varphi\cos\varphi=0$$

или

$$a_{22}\cos 2\varphi+a_{23}\sin 2\varphi=0.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} 2\varphi=-\frac{a_{22}}{a_{23}}.$$

Решая это уравнение, получим два значения φ, отличающихся друг от друга на угол $\frac{\pi}{2}$. Но это и доказывает, что конус (3.67) имеет тройку взаимно перпендикулярных образующих. Поскольку, однако, мы совместили ось x^1 с произвольной образующей конуса (3.61), то это означает, что этот конус имеет бесчисленное множество троек взаимно перпендикулярных образующих.

Асимптотический конус пространственной индикатрисы геодезических кручений (3.57) имеет уравнение

$$a_1(x^1)^2+b_2(x^2)^2+c_3(x^3)^2+(a_2+b_1)x^1x^2+$$
$$+(b_3+c_2)x^2x^3+(c_1+a_3)x^3x^1=0.$$

В соответствии с вышесказанным, мы можем теперь утверждать, что **необходимым и достаточным условием существования в этом конусе трех взаимно перпендикулярных образующих (а, следовательно, и бесконечного множества таких образующих) является равенство**

$$a_1+b_2+c_3=0. \tag{3.70}$$

Зададимся теперь вопросом, в каком случае поверхность (3.60), ортогональная к вектору $n\{\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3\}$ ($\alpha^i=\mathrm{const}$) является голономной. С этой целью продифференцируем внешним образом уравнение (3.60). Мы придем к следующему условию его полной интегрируемости (см. 3.60 и 3.4):

$$-(\alpha^1)^2(c_3+b_2)-(\alpha^2)^2(a_1+c_3)-(\alpha^3)^2(b_2+a_1)+$$
$$+\alpha^1\alpha^2(b_1+a_2)+\alpha^2\alpha^3(c_2+b_3)+\alpha^3\alpha^1(a_3+c_1)=0. \tag{3.71}$$

Если триортогональная система поверхностей является обыкновенной голономной, то

$$a_1=0,\ b_2=0,\ c_3=0$$

(см. (3.63)), а потому равенство (3.71) принимает вид

$$\alpha^1\alpha^2(b_1+a_2)+\alpha^2\alpha^3(c_2+b_3)+\alpha^3\alpha^1(a_3+c_1)=0.$$

Отсюда видно, что вектор n принадлежит асимптотическому конусу индикатрисы геодезических кручений II. К тому же конусу в этом случае принадлежат и векторы $I_1I_2I_3$ нормалей к поверхностям триортогональной системы.

Итак, если какая-нибудь поверхность, нормаль которой жестко связана с подвижным трехгранником голономной триортогональной системы, является голономной, то ее нормаль принадлежит асимптотическому конусу индикатрисы II (см. (3.57)).

В общем случае конус (3.71) нормалей голономных поверхностей не совпадает с асимптотическим конусом индикатрисы (3.57). Выясним, в каком случае это совпадение имеет место. Для этого потребуем, чтобы вектор n принадлежал асимптотическому конусу индикатрисы (3.57)

$$a_1(\alpha^1)^2+b_2(\alpha^2)^2+c_3(\alpha^3)^2+(a_2+b_1)\alpha^1\alpha^2+(b_3+c_2)\alpha^2\alpha^3+$$
$$+(c_1+a_3)\alpha^3\alpha^1=0 \tag{3.72}$$

Вычтем из этого равенства равенство (3.71)

$$(a_1+b_2+c_3)\left[(\alpha^1)^2+(\alpha^2)^2+(\alpha^3)^2\right]=0.$$

Так как $(\alpha^1)^2+(\alpha^2)^2+(\alpha^3)^2\neq 0$, то

$$a_1+b_2+c_3=0,$$

что в точности совпадает с равенством (3.70).

Таким образом, **необходимым и достаточным условием того, чтобы любая поверхность, вектор нормали которой жестко связан с подвижным трехгранником $AI_1I_2I_3$ и принадлежит асимптотическому конусу индикатрисы геодезических кручений (3.57), была голономной, является наличие в этом конусе тройки (а, следовательно, и бесчисленного множества таких троек) взаимно перпендикулярных образующих.**

§ 8. Центральное поле комплекса

Предполагая, что центр поля совпадает с центром луча A $(\lambda=0)$, мы будем иметь центральное поле комплекса. Назовем **нормальным** полем данного комплекса поле, центр которого совпадает с точкой A, а единичный вектор — с вектором главной нормали луча, и **бинормальным** — поле с центром A и вектором I_2.

Полагая в формулах (3.7) $\lambda=0$, $\theta=0$ и принимая во внимание равенства (2.2), для центрального поля будем иметь

$$\tilde\theta=p,\ \theta_1=\alpha,\ \theta_2=\beta,$$

$$\tilde\lambda=kp-\beta,\ \lambda_1=k\alpha-\gamma,\ \lambda_2=k\beta-r.$$

В таком случае формулы (3.11) и (3.12) дают

$$c_1=\frac{1}{\Delta}k(\beta^2-pr),\quad c_2=\frac{1}{\Delta}(\beta\gamma-\alpha r),\ c_3=\frac{1}{\Delta}k\beta,$$

$$a_1=\frac{1}{\Delta}k(kp-\beta),\quad a_2=\frac{1}{\Delta}(k\alpha-\gamma),\ a_3=-\frac{1}{\Delta}k,\tag{3.74}$$

$$b_1=0,\ b_2=\frac{1}{\Delta}(k\beta-r),\ b_3=0,$$

$$\Delta=k(k\beta-r).\tag{3.75}$$

Формулы (3.26), (3.*l*), (3.49) дают значения основных величин неголономной поверхности

$$\omega^3=0,\tag{3.76}$$

ортогональной к вектору поля I_3 (назовем ее **неголономной поверхностью основного комплекса)**:

полной кривизны

$$K_3=-\frac{1}{4}\left[4b_1a_2+(b_2-a_1)^2\right]=-\frac{1}{4\Delta^2}(r-2k\beta+k^2p)^2,$$

средней кривизны

$$H_3=-(b_1-a_2)=\frac{1}{\Delta}(k\alpha-\gamma),$$

гауссовой кривизны

$$\bar K_3=a_1b_2-b_1a_2=\frac{1}{\Delta}(kp-\beta),\tag{3.77}$$

полной геодезической кривизны

$$T_3=a_1b_2-\frac{1}{4}(b_1+a_2)^2=\frac{1}{\Delta}(kp-\beta)-\frac{1}{4\Delta^2}(k\alpha-\gamma)^2,$$

средней геодезической кривизны: $S_3=b_2+a_1=\frac{1}{\Delta}(k^2p-r)$.

Линиями кривизны первого рода неголономной поверхности называются линии, соответствующие экстремальным значениям нормальной кривизны. Чтобы получить дифференциальное уравнение таких линий для поверхности (3.76), следует, очевидно, из уравнений (3.24) исключить кривизну k_n:

$$-\frac{1}{2}(b_2-a_1)\left[(\omega^1)^2-(\omega^2)^2\right]+(a_2+b_1)\,\omega^1\omega^2=0\tag{3.78}$$

Линиями кривизны второго рода неголономной поверхности называются линии, вдоль которых нормали к поверхности образуют развертывающиеся поверхности. Чтобы получить дифференциальное уравнение этих линий для поверхности (3.76), следует приравнять к нулю векторное произведение $[dAdI_3]$ (в соответствии с тождеством Родрига)

$$[dAdI_3]=0,$$

или

$$\omega_3^1\omega^2 - \omega_3^2\omega^1 = 0.$$

Подставляем сюда значения форм ω_3^1, ω_3^2 по формулам (3.4)

$$a_1(\omega^1)^2 + b_2(\omega^2)^2 + (a_2 + b_1)\,\omega^1\omega^2 = 0. \qquad (3.79)$$

Мы видим, что в уравнениях (3.78) и (3.79) коэффициенты при $\omega^1\omega^2$ одинаковы и равны средней кривизне поверхности (3.76) (см. (3.77), где следует положить $b_1 = 0$). Что касается коэффициентов при квадратах форм ω^1 и ω^2, то мы замечаем, что их произведение в уравнении (3.78) равно полной кривизне поверхности (3.76), а в уравнении (3.79) — гауссовой кривизне этой поверхности.

Мы получаем, таким образом, новое истолкование вывода, отмеченного в 1928 г. Я. П. Бланком, что **полная кривизна неголономной поверхности так относится к линиям кривизны первого рода этой поверхности, как гауссова кривизна — к линиям кривизны второго рода.**

Для неголономной поверхности

$$\omega^1 = 0, \qquad (3.80)$$

ортогональной к вектору главной нормали $\boldsymbol{I}_1$, путем круговой перестановки из (3.77) мы получим формулы, определяющие основные кривизны:

полной кривизны

$$K_1 = -\frac{1}{4}\left[4c_2b_3 + (c_3 - b_2)^2\right] = -\frac{r^2}{4\Delta^2},$$

средней кривизны

$$H_1 = -(c_2 - b_3) = -\frac{1}{\Delta}(\beta\gamma - \alpha r), \qquad (3.81)$$

гауссовой кривизны

$$\overline{K_1} = b_2c_3 - c_2b_3 = \frac{\beta}{\Delta},$$

полной геодезической кривизны

$$T_1 = b_2c_3 - \frac{1}{4}(c_2 + b_3)^2 = \frac{\beta}{\Delta} - \frac{1}{4\Delta^2}(\beta\gamma - \alpha r)^2,$$

средней геодезической кривизны

$$S_1 = c_3 + b_2 = \frac{1}{\Delta}(2k\beta - r).$$

Подобным же образом для неголономной поверхности

$$\omega^2 = 0, \qquad (3.82)$$

ортогональной к вектору бинормали $\boldsymbol{I}_2$, имеем формулы:

полной кривизны

$$K_2 = -\frac{1}{4}\left[4a_3c_1 + (a_1 - c_3)^2\right] = \frac{pk}{\Delta} - \frac{p^2k^4}{4\Delta^2},$$

средней кривизны

$$H_2 = -(a_3 - c_1) = \frac{k}{\Delta}(1 + \beta^2 - pr),$$

гауссовой кривизны

$$\overline{K_2} = c_3a_1 - a_3c_1 = \frac{kp}{\Delta}, \qquad (3.83)$$

полной геодезической кривизны

$$T_2 = c_3a_1 - \frac{1}{4}(a_3 + c_1)^2 = \frac{1}{\Delta^2}k^2\beta(kp - \beta) - \frac{k^2}{4\Delta^2}(1 - \beta^2 + pr)^2,$$

средней геодезической кривизны

$$S_2 = a_1 + c_3 = \frac{k^2p}{\Delta}.$$

Из равенств (3.77), (3.81) и (3.83) вытекает следующее:

1. **Сумма гауссовых кривизн неголономных поверхностей основного и нормального комплексов равна гауссовой кривизне неголономной поверхности бинормального комплекса**

$$\overline{K}_1 + \overline{K}_3 = \overline{K}_2. \qquad (3.84)$$

2. **Полная кривизна неголономной поверхности основного и нормального комплексов отрицательна.**

3. **Средняя геодезическая кривизна неголономной поверхности бинормального комплекса равна гауссовой кривизне этой поверхности, умноженной на кривизну k основного комплекса,**

$$S_2 = k\overline{K}_2. \qquad (3.85)$$

4. **Квадрат средней геодезической кривизны неголономной поверхности равен учетверенной разности гауссовой и полной кривизн этой поверхности**

$$S_i^2 = 4(\overline{K}_i - K_i),\ i = 1, 2, 3 \qquad (3.86)$$

(это справедливо для произвольной неголономной поверхности).

5. **Как и для всякой неголономной поверхности, для трех неголономных поверхностей (3.76), (3.80) и (3.82) будет справедливо равенство**

$$H_i^2 = 4(\overline{K}_i - T_i),\ i = 1, 2, 3,$$

т. е. квадрат средней кривизны неголономной поверхности равен учетверенной разности между гауссовой и полной геодезической кривизнами этой поверхности.

Триортогональная система линий. Назовем **центральной линией** комплекса линию, описанную центром луча комплекса и касающуюся этого луча. Линию, описанную центром луча основного комплекса и касающуюся главной нормали I_1, назовем **нормальной** линией; подобным же образом определяется **бинормальная** кривая. Очевидно, в отличие от нормальной кривой, последняя не образована центрами лучей бинормального комплекса.

Определим основные инварианты всех трех линий.

Для центральной кривой мы имеем

$$\omega^1 = \omega^2 = 0,$$

т. е. (см. (1.18))

$$\omega^1 = \omega_3^1 = 0 \tag{3.87}$$

(специальные комплексы из рассмотрения исключены). Так как в этом случае

$$dA = \omega^3 I_3,\ dI_3 = \omega_3^2 I_2,\ -dI_1 = -\omega_1^2 I_2, \tag{3.88}$$

то это означает, что **нормальный трехгранник комплекса является трехгранником Френе центральной кривой, причем бинормаль комплекса I_2 является главной нормалью кривой, а следовательно, вектор $-I_1$, противоположный вектору главной нормали комплекса, — бинормалью кривой.**

Из равенств (3.88) находим кривизну и кручение центральной кривой:

$$k_3 = \frac{\omega_3^2}{\omega^3},\quad \varkappa_3 = -\frac{\omega_1^2}{\omega^3}.$$

Прииимая во внимание (3.88) и (2.2), получим окончательно

$$k_3 = \frac{k}{\Delta},\ \varkappa_3 = -\frac{k\beta}{\Delta},\ \Delta = k(k\beta - r). \tag{3.89}$$

Для нормальной кривой

$$\omega^2 = \omega^3 = 0,\ \text{т. е. } \omega_3^1 = \omega^3 = 0, \tag{3.90}$$

а потому

$$dA = \omega^1 I_1,\ dI_1 = \omega_1^2 I_2,\ dI_3 = \omega_3^2 I_2.$$

Отсюда находим

$$k_1 = \frac{\omega_1^2}{\omega^1},\quad \varkappa_1 = \frac{\omega_3^2}{\omega^1}$$

или

$$k_1 = \frac{k(\beta^2 - pr)}{\Delta},\ \varkappa_1 = -\frac{k(kp - \beta)}{\Delta}. \tag{3.91}$$

Для бинормальной кривой

$$\omega^1 = \omega^3 = 0, \tag{3.92}$$

а потому

$$dA = \omega^2 I_2,\ dI_2 = \omega_2^1 I_1 + \omega_2^3 I_3.$$

Отсюда видно, что кручение бинормальной кривой принадлежит уже дифференциальной окрестности третьего порядка. Что касается кривизны, то она определяется равенством

$$k_2 = \frac{\sqrt{(\omega_2^1)^2 + (\omega_2^3)^2}}{\omega^2}$$

или

$$k_2 = \frac{1}{\Delta}\sqrt{(k\alpha - \gamma)^2 + (\beta\gamma - \alpha r)^2} \tag{3.93}$$

(ради простоты мы всюду отбрасываем знак модуля у кривизны).

Сопоставляя формулы (3.89), (3.91) и (3.93) с формулами (3.77), (3.81) и (3.83), мы получим следующие соотношения между инвариантами трех векторных полей:

$$\overline{K}_3 = -\frac{\varkappa_1}{k},\ \overline{K}_1 = -\frac{\varkappa_3}{k},\ \overline{K}_2 = \varkappa_3\varkappa_1 + k_3 k_1,$$

$$K_3 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k} + \varkappa_1\right)^2,\ K_1 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k} + \varkappa_3\right)^2,$$

$$K_2 = -\frac{1}{4}(\varkappa_3 - \varkappa_1)^2 + k_3 k_1,$$

$$H_2 = k_3 + k_1,\ k_2 = \sqrt{H_1^2 + H_3^2}, \tag{3.94}$$

$$K_3 = -\frac{1}{4k^2}(k^2\overline{K}_3 - 1)^2,\ K_1 = -\frac{1}{4k^2}(k^2\overline{K}_1 - 1)^2.$$

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ПРОЕКТИВНАЯ ТЕОРИЯ КОМПЛЕКСОВ

Глава первая

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Выбор сопровождающего тетраэдра

Пусть u, v, w — параметры, определяющие положение луча комплекса в трехмерном проективном пространстве. Сопоставим с каждым лучом некоторым образом определенный тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$. В таком случае каждая вершина будет представлять собой некоторую функцию параметров u, v, w.

Положим

$$dA_i = \omega_i^j A_j \ (i, j = 1, 2, 3, 4). \tag{1.1}$$

В дальнейшем каждый комплекс мы будем представлять себе заданным формами ω_i^j. Эти формы не могут быть выбраны совершенно произвольными. Для того, чтобы уравнения (1.1) составляли вполне интегрируемую систему (следовательно, определяли совокупность всех проективно эквивалентных между собой комплексов) необходимо и достаточно, чтобы обращение в нуль внешних дифференциалов от правых частей уравнений было алгебраическим следствием самих уравнений.

Продифференцируем внешним образом уравнения (1.1):

$$(\omega_i^j)' A_j + [dA_j \omega_i^j] = 0.$$

Здесь штрих по-прежнему означает внешний дифференциал от линейной формы.

Заменим dA_j по формулам (1.1) и соответствующим образом условимся выбирать немые индексы

$$\{(\omega_i^k)' + [\omega_j^k \omega_i^j]\} A_k = 0.$$

При независимости вершин A_k это приводит к равенствам

$$(\omega_i^k)' = [\omega_i^j \omega_j^k]. \tag{1.2}$$

Полученные уравнения будут уравнениями структуры проективного пространства, играющими роль уравнений Гуасса и Петерсона—Кодацци при задании многообразия линейными формами.

В зависимости от выбора сопровождающего тетраэдра уравнения (1.1) будут иметь тот или иной вид. Прежде всего, совершенно естественным представляется такое ограничение в выборе тетраэдра, при котором две его вершины, например, A_1 и A_2 оказываются расположенными на луче комплекса. В таком случае из равенств

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3 + \omega_1^4 A_4, \tag{1.3}$$
$$dA_2 = \omega_2^1 A_1 + \omega_2^2 A_2 + \omega_2^3 A_3 + \omega_2^4 A_4$$

мы заключаем, что движением луча в комплексе управляют лишь формы $\omega_1^3, \omega_1^4, \omega_2^3, \omega_2^4$. При наличии трех параметров u, v, w, определяющих элемент многообразия, из шестнадцати линейных форм ω_i^j лишь три являются линейно независимыми.

Заметим, что ранг системы форм $\omega_1^3, \omega_1^4, \omega_2^3, \omega_2^4$ равен трем. Действительно, если бы он был меньше трех, то из равенства

$$d[A_1A_2] = (\omega_1^1 + \omega_2^2)[A_1A_2] + \omega_1^3 [A_3A_2] + \omega_1^4 [A_4A_2] +$$
$$+ \omega_2^3 [A_1A_3] + \omega_2^4 [A_1A_4] \tag{1.4}$$

(здесь через $[A_iA_j]$ обозначены плюккеровы координаты прямой A_iA_j) мы бы заключили, что луч A_1A_2 описывает конгруэнцию (при ранге, равном 2) или линейчатую поверхность (при ранге, равном 1).

Примем три формы из четырех, например, ω_2^3, ω_1^4, ω_2^3 за линейно независимые (в противном случае мы бы сменили нумерацию вершин A_1 и A_2). Следовательно, форма ω_1^3 будет линейно выражаться через формы ω_1^4, ω_2^4, ω_2^3, которые впредь будут играть роль базисных форм в комплексе

$$\omega_1^3 = a\omega_2^3 + b\omega_1^4 + c\omega_2^4. \tag{1.5}$$

Распорядимся теперь дальнейшим выбором сопровождающего тетраэдра таким образом, чтобы это равенство приняло по возможности более простой вид. С этой целью примем в качестве плоскости $A_1A_2A_3$ плоскость, касательную к конусу лучей комплекса, имеющему вершину в точке A_1. Из равенств (1.3) видно, что при неподвижной точке A_1 в этом случае должно быть

$$\omega_1^2 = \omega_1^3 = \omega_1^4 = 0,$$
$$dA_2 = \omega_2^1 A_1 + \omega_2^2 A_2 + \omega_2^3 A_3,$$

т. е. $\omega_2^4=0$. Но тогда, как это следует из (1.5),

$$a=0.$$

Аналогично, если в качестве плоскости $A_2A_1A_4$ выбрать плоскость, касательную к конусу лучей, имеющему вершину в точке A_2, то должны быть одновременно выполнены равенства

$$\omega_2^1=\omega_2^3=\omega_2^4=0,\qquad \omega_1^3=0$$

а это дает (см. (1.5))

$$b=0.$$

Равенство (1.5) примет теперь вид

$$\omega_1^3=c\omega_2^4. \tag{1.6}$$

Подставим это в первое равенство (1.3):

$$A_1=\omega_1^1A_1+\omega_1^2A_2+c\omega_2^4A_3+\omega_1^4A_4.$$

Отсюда видно, что нормированием координат вершины A_3 тетраэдра можно добиться того, чтобы коэффициент c обратился в —1

$$c=-1. \tag{1.7}$$

Следовательно (см. (1.6)),

$$\omega_1^3+\omega_2^4=0. \tag{1.8}$$

Исключение составляют комплексы, для которых $c=0$. В этом случае

$$dA_1=\omega_1^1A_1+\omega_1^2A_2+\omega_1^4A_4;$$

следовательно, точка A_1 описывает поверхность, касающуюся плоскости $A_1A_2A_4$. Комплекс представляет собой совокупность касательных к некоторой поверхности — **специальный комплекс**.

Равенством (1.7) специальные комплексы из рассмотрения исключаются.

Назовем тетраэдр, компоненты инфинитезимального смещения которого связаны соотношением (1.8), **нормальным тетраэдром.**

Равенство (1.8) представляет собой дифференциальное уравнение комплекса, отнесенного к нормальному тетраэдру.

Продифференцируем равенство (1.8) внешним образом

$$[\omega_1^2-\omega_3^4,\omega_2^3]+[\omega_2^1-\omega_4^3,\omega_1^4]+[\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_4^4,\omega_2^4]=0. \tag{1.9}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\omega_1^2-\omega_3^4&=p\omega_2^3+\alpha\omega_1^4+\beta\omega_2^4,\\ \omega_2^1-\omega_4^3&=\alpha\omega_2^3+q\omega_1^4-\gamma\omega_2^4,\\ \omega_2^2+\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_4^4&=\beta\omega_2^3-\gamma\omega_1^4+r\omega_2^4.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Здесь p, q, r, α, β, γ — параметры, определяющие окрестность второго порядка. При всяком выборе этих параметров, подчиненном, разумеется, условию интегрируемости уравнений (1.10), выделяется комплекс и в нем — некоторый тетраэдр второго порядка.

§ 2. Инфлекционные центры луча

В первой части мы определили инфлекционный центр как такую точку M луча, в которой кривая s плоскости П, соответствующей точке M в нормальной корреляции, имеет возврат, или, что то же, кривая s' имеет в точке пересечения с лучом перегиб. Такое определение было дано инфлекционным центрам Фоссом.

Поскольку это определение имеет проективный характер, то из него мы будем исходить при отыскании инфлекционных центров луча комплекса и в проективном пространстве.

Пусть

$$M=A_1+tA_2 \tag{1.11}$$

некоторая точка луча. В таком случае

$$dM=(\omega_1^1+t\omega_2^1)A_1+(\omega_1^2+t\omega_2^2+dt)A_2+(\omega_1^3+t\omega_2^3)A_3+ \\ +(\omega_1^4+t\omega_2^4)A_4.$$

Заменив здесь A_1 разностью $M-tA_2$ (см. (1.11)), получим

$$dM=(\omega_1^1+t\omega_2^1)M+(\omega_1^3+t\omega_2^3)A_3+(\omega_1^4+t\omega_2^4)A_4+ \\ +[dt-t^2\omega_2^1+t(\omega_2^2-\omega_1^1)+\omega_1^2]A_2.$$

Следовательно, условия неподвижности точки M будут иметь вид

$$\begin{gathered}\omega_1^3+t\omega_2^3=0,\qquad \omega_1^4+t\omega_2^4=0,\\ dt-t^2\omega_2^1+t(\omega_2^2-\omega_1^1)+\omega_1^2=0.\end{gathered} \tag{1.12}$$

Плоскость П, соответствующая точке M в нормальной корреляции, есть плоскость, касающаяся вдоль данного луча A_1A_2

конуса комплекса, с вершиной в точке M. Следовательно, тангенциальные координаты такой плоскости мы можем определить с помощью равенства

$$\Pi \equiv (A_1 A_2 dA_1) = \omega_1^3 (A_1 A_2 A_3) + \omega_1^4 (A_1 A_2 A_4).$$

Полагая здесь, в соответствии с (1.8) и (1.12), $\omega_1^3 = -\omega_2^4$, $\omega_1^4 = -t\omega_2^4$ и сокращая тангенциальные координаты на $-\omega_2^4$, будем иметь

$$\Pi = (A_1 A_2 A_3) + t (A_1 A_2 A_4). \tag{1.13}$$

Отсюда

$$d\Pi = (\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + t\omega_4^3)(A_1 A_2 A_3) + [dt + t(\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_4^4) + \omega_3^4] (A_1 A_2 A_4) + (\omega_1^4 - t\omega_1^3)(A_4 A_2 A_3) + (\omega_2^4 - t\omega_2^3)(A_1 A_4 A_3).$$

Заменим здесь $(A_1 A_2 A_3)$ разностью $\Pi - t(A_1 A_2 A_4)$ и примем во внимание (1.8)

$$d\Pi = (\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + t\omega_4^3)\, \Pi + (\omega_1^4 + t\omega_2^4)(A_4 A_2 A_3) + (\omega_1^3 + t\omega_2^3)(A_1 A_3 A_4) + [dt - t^2\omega_4^3 + t(\omega_4^4 - \omega_3^3) + \omega_3^4] (A_1 A_2 A_4).$$

Условие неподвижности плоскости Π (что обеспечивает перегиб конуса в рассматриваемом луче $A_1 A_2$) сводится к равенствам

$$\begin{gathered} \omega_1^3 + t\omega_2^3 = 0, \qquad \omega_1^4 + t\omega_2^4 = 0, \\ dt - t^2\omega_4^3 + t(\omega_4^4 - \omega_3^3) + \omega_3^4 = 0. \end{gathered} \tag{1.14}$$

Мы видим, что первые равенства систем (1.12) и (1.14) совпадают. Взятые отдельно, эти равенства, между прочим, означают, что точка M описывает ребро возврата развертывающейся поверхности комплекса, а плоскость Π совпадает с соприкасающейся плоскостью этого ребра. Если к этим равенствам присоединить третье равенство системы (1.12), то точка M становится неподвижной, а само присоединенное равенство будет определять ее координату на луче. Так как эта координата определяется с помощью дифференциального уравнения, то это означает, что точка M определяется с произволом в одну постоянную, т. е. может совпадать с произвольной точкой луча. Этого, очевидно, и следовало ожидать, так как вершину конуса мы можем выбрать в произвольной точке луча.

Присоединяя к двум первым уравнениям системы (1.14) третье уравнение этой системы, мы фиксируем плоскость Π.

Следовательно, точка M будет описывать в этой плоскости кривую s. Третье уравнение и определяет координату точки M. Поскольку уравнение дифференциальное, то точка M определяется с произволом в одну постоянную. Это означает, что в качестве плоскости Π мы можем взять любую плоскость, проходящую через луч комплекса.

Одновременное выполнение равенств (1.12) и (1.14) для любой точки луча означало бы, что в каждой плоскости Π располагается плоский пучок лучей комплекса, проходящих через точку M. Мы имели бы обычную нуль-систему, и комплекс был бы линейным.

Если рассматриваемый комплекс не является линейным, то равенства (1.12) и (1.14) будут выполняться лишь для отдельных точек луча, которые и представляют собой, очевидно, **инфлекционные центры** этого луча. Чтобы их найти, вычтем из третьего равенства (1.14) третье равенство (1.12)

$$(\omega_2^1 - \omega_4^3)t^2 - (\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4)\, t - (\omega_1^2 - \omega_3^4) = 0. \tag{1.15}$$

Из (1.12) или (1.14) находим, учитывая (1.8)

$$\omega_1^4 = -t\omega_2^4, \quad \omega_2^3 = \frac{1}{t}\,\omega_2^4.$$

Подставим это в (1.10)

$$\omega_1^2 - \omega_3^4 = \frac{\omega_2^4}{t}(p - \alpha t^2 + \beta t),$$

$$\omega_2^1 - \omega_4^3 = \frac{\omega_2^4}{t}(\alpha - q t^2 - \gamma t),$$

$$\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = \frac{\omega_2^4}{t}(\beta + \gamma t^2 + r t).$$

Внося это в (1.15) и сокращая на $\frac{\omega_2^4}{t}$, получим уравнение 4 степени, определяющее инфлекционные центры луча,

$$q t^4 + 2\gamma t^3 - (2\alpha - r)\, t^2 + 2\beta t + p = 0. \tag{1.16}$$

Отсюда непосредственно получаются условия, характеризующие линейный комплекс

$$q = 0, \quad \gamma = 0, \quad 2\alpha - r = 0, \quad \beta = 0, \quad p = 0. \tag{1.17}$$

§ 3. Главные поверхности

В первой части мы отметили главные поверхности комплекса как такие поверхности, у которых линии прикосновения есть их асимптотические линии. Это свойство имеет проективный характер, а потому может быть положено в основу определения главных поверхностей комплекса также и в проективном пространстве.

Найдем, прежде всего, линии прикосновения линейчатой поверхности комплекса. Будем задавать такую поверхность отношениями базисных форм $\omega_2^3:\omega_1^4:\omega_2^4$. В таком случае касательная плоскость к поверхности в точке

$$M = A_1 + tA_2$$

определится тангенциальными координатами

$$\sigma = (A_1A_2dM) = (\omega_1^3 + t\omega_2^3)(A_1A_2A_3) + (\omega_1^4 + t\omega_2^4)(A_1A_2A_4).$$

В точках прикосновения эта плоскость должна совпадать с плоскостью Π, соответствующей точке M в нормальной корреляции (см. (1.13)); следовательно,

$$t(\omega_1^3 + t\omega_2^3) = \omega_1^4 + t\omega_2^4. \qquad (1.18)$$

Полагая здесь $\omega_1^3 = -\omega_2^4$, мы придем к следующему квадратному уравнению, определяющему точки прикосновения луча:

$$\omega_2^3 t^2 - 2\omega_2^4 t - \omega_1^4 = 0. \qquad (1.19)$$

При изменении базисных форм эти точки описывают на поверхности $\omega_2^3:\omega_1^4:\omega_2^4$ две линии прикосновения.

Если линия прикосновения — асимптотическая, то характеристика семейства плоскостей Π при перемещении вдоль этой линии будет содержать точку dM. Следовательно,

$$\Pi dM = 0, \quad d\Pi dM = 0.$$

Первое равенство удовлетворено в силу (1.19). Что же касается второго, то, подсчитывая dM и $d\Pi$

$$dM = (\omega_1^1 + t\omega_2^1)A_1 + (\omega_1^2 + t\omega_2^2 + dt)A_2 + (\omega_1^3 + t\omega_2^3)A_3 +$$
$$+ (\omega_1^4 + t\omega_2^4)A_4,$$
$$d\Pi = (\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + t\omega_4^3)(A_1A_2A_3) + (dt + t(\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_4^4) +$$
$$+ \omega_3^4)(A_1A_2A_4) + (\omega_1^4 - t\omega_1^3)(A_4A_2A_3) +$$
$$+ (\omega_2^4 - t\omega_2^3)(A_1A_4A_3)$$

будем иметь

$$d\Pi dM = [(\omega_2^2 + \omega_3^3 - t(\omega_2^1 - \omega_4^3))(\omega_1^4 + t\omega_2^4) -$$
$$- (t(\omega_1^1 + \omega_4^4) - (\omega_1^2 - \omega_3^4))(\omega_1^3 + t\omega_2^3)](A_1A_2A_3A_4) \qquad (1.20)$$

(мы учли равенство $\omega_1^3 = -\omega_2^4$. В дальнейшем, учитывая это соотношение, мы этого специально оговаривать не будем).

Принимая во внимание независимость точек A_1, A_2, A_3, A_4, а также соотношение (1.18), найдем после сокращений

$$(\omega_2^1 - \omega_4^3)t^2 - (\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4)t - (\omega_1^2 - \omega_3^4) = 0. \quad (1.21)$$

Для главной поверхности обе линии прикосновения являются асимптотическими, а потому уравнения (1.19) и (1.21) должны быть эквивалентны между собой. Следовательно, дифференциальные уравнения главных поверхностей имеют вид

$$\frac{\omega_2^1 - \omega_4^3}{\omega_2^3} = \frac{\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4}{2\omega_2^4} = \frac{\omega_1^2 - \omega_3^4}{\omega_1^4}.$$

Полагая величину общего отношения равной s и заменяя формы, стоящие в числителях, их значениями по формулам (1.10), получим три линейных уравнения:

$$(\alpha - s)\omega_2^3 + q\omega_1^4 - \gamma\omega_2^4 = 0,$$
$$p\omega_2^3 + (\alpha - s)\omega_1^4 + \beta\omega_2^4 = 0, \qquad (1.22)$$
$$\beta\omega_2^3 - \gamma\omega_1^4 + (r - 2s)\omega_2^4 = 0.$$

Исключая отсюда формы $\omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4$, одновременно не равные нулю, получим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \alpha - s & q & -\gamma \\ p & \alpha - s & \beta \\ \beta & -\gamma & r - 2s \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.23)$$

Если теперь подставить корни уравнения (1.23) в (1.22), получим для каждого из них соответствующую главную поверхность.

§ 4. Классификация комплексов

Если при закрепленном луче комплекса менять положение сопровождающего тетраэдра, то дифференциалы du, dv, dw, определяющие положение луча в комплексе, будут равны нулю. В этом случае компоненты инфинитезимального смещения тетраэдра будут зависеть лишь от параметров, обусловливающих его изменение при закрепленном луче.

Назовем эти параметры **вторичными параметрами**, а компоненты смещения, зависящие лишь от дифференциалов этих параметров — **вторичными формами**.

Введем для вторичных форм обозначение π_i^j. Тогда из равенства (1.4) будет немедленно следовать, что формы $\pi_1^3, \pi_2^3, \pi_1^4$ π_2^4 обращаются в нуль

$$\pi_1^3 = 0, \qquad \pi_2^3 = 0, \qquad \pi_1^4 = 0, \qquad \pi_2^4 = 0. \tag{1.24}$$

Это означает, очевидно, что формы $\omega_1^3, \omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4$ зависят только от дифференциалов du, dv, dw. Назовем такие формы **главными формами.**

В результате той неполной канонизации сопровождающего тетраэдра, которая приводит к нормальному тетраэдру (1.8), главными становятся также и формы $\omega_1^2 - \omega_3^4, \omega_2^1 - \omega_4^3, \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4$, так что

$$\pi_1^2 - \pi_3^4 = 0, \quad \pi_2^1 - \pi_4^3 = 0, \quad \pi_2^2 + \pi_3^3 - \pi_1^1 - \pi_4^4 = 0. \tag{1.25}$$

При полной канонизации тетраэдра все вторичные параметры оказываются выраженными через **главные параметры** u, v, w и все вторичные формы становятся равными нулю.

Продифференцируем внешним образом уравнения (1.10)

$$\begin{gathered}
[-dp + 2\beta\omega_1^2 - p(\omega_2^2 - 2\omega_3^3 + \omega_4^4), \omega_2^3] + \\
+ [-d\alpha - \gamma\omega_1^2 - \alpha(\omega_1^1 - \omega_3^3) - (\omega_4^2 + \omega_3^1) - \beta\omega_4^3, \omega_1^4] + \\
+ [-d\beta + r\omega_1^2 - \beta(\omega_1^1 - 2\omega_3^3 + \omega_4^4) + p(\omega_2^1 + \omega_4^3) - \\
- \alpha(\omega_1^2 + \omega_3^4), \omega_2^4] = 0, \\
[-d\alpha - \beta\omega_2^1 - \alpha(\omega_2^2 - \omega_4^4) - (\omega_4^2 + \omega_3^1) - \gamma\omega_3^4, \omega_2^3] + \\
+ [-dq + 2\gamma\omega_2^1 - q(\omega_1^1 - 2\omega_4^4 + \omega_3^3), \omega_1^4] + \qquad (1.26) \\
+ [d\gamma - r\omega_2^1 + \gamma(\omega_2^2 - 2\omega_4^4 + \omega_3^3) - q(\omega_1^2 + \omega_3^4) + \alpha(\omega_2^1 + \omega_4^3), \omega_2^4] = 0. \\
\Big[-d\beta - 2\alpha\omega_3^4 + 2p\omega_4^3 - \beta(\omega_2^2 - \omega_3^3) + \frac{r}{2}(\omega_1^2 + \omega_3^4) + \\
+ (pq - \alpha^2)\omega_1^4, \omega_2^3\Big] + \Big[d\gamma + 2\alpha\omega_4^3 - 2q\omega_3^4 + \gamma(\omega_1^1 - \omega_4^4) - \\
- \frac{r}{2}(\omega_2^1 + \omega_4^3) - (pq - \alpha^2)\omega_2^3, \omega_1^4\Big] + \Big[-dr + \beta(\omega_2^1 + 3\omega_4^3) + \\
+ \gamma(\omega_1^2 + 3\omega_3^4) - 2(\omega_4^2 + \omega_3^1) + \frac{r}{2}(\omega_3^3 - \omega_2^2 + \omega_4^4 - \omega_1^1) + \\
+ 2(\alpha\beta + p\gamma)\omega_2^3 + 2(q\beta + \alpha\gamma)\omega_1^4, \omega_2^4\Big] = 0
\end{gathered}$$

(учитывается равенство (1.9)).

Отсюда получаем следующий закон изменения параметров p, q, r, α, β, γ при изменении вторичных форм

$$\begin{gathered}
\delta p = 2\beta\pi_1^2 - p(\pi_2^2 - 2\pi_3^3 + \pi_4^4), \\
\delta q = 2\gamma\pi_2^1 - q(\pi_1^1 - 2\pi_4^4 + \pi_3^3), \\
\delta r = 4\gamma\pi_1^2 + 4\beta\pi_2^1 - 2(\pi_4^2 + \pi_3^1) - \frac{r}{2}(\pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_3^3 - \pi_4^4). \qquad (1.27) \\
\delta\alpha = -\gamma\pi_1^2 - \beta\pi_2^1 - (\pi_4^2 + \pi_3^1) - \frac{\alpha}{2}(\pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_3^3 - \pi_4^4), \\
\delta\beta = r\pi_1^2 - \beta(\pi_1^1 - 2\pi_3^3 + \pi_4^4) + 2p\pi_2^1 - 2\alpha\pi_1^2, \\
\delta\gamma = r\pi_2^1 - \gamma(\pi_2^2 - 2\pi_4^4 + \pi_3^3) + 2q\pi_1^2 - 2\alpha\pi_2^1
\end{gathered}$$

(при выведении этих равенств следует принять во внимание (1.24) и (1.25)).

Перепишем теперь в развернутом виде характеристическое уравнение (1.23)

$$-2s^3 + I_1 s^2 + 2I_2 s + I_3 = 0, \tag{1.28}$$

где

$$\begin{gathered}
I_1 = r + 4\alpha, \qquad I_2 = -\beta\gamma + pq - \alpha r - \alpha^2, \\
I_3 = 2\alpha\beta\gamma - pqr + p\gamma^2 + q\beta^2 + r\alpha^2.
\end{gathered} \tag{1.29}$$

Продифференцируем уравнение (1.28) два раза по s

$$-3s^2 + I_1 s + I_2 = 0, \tag{1.30$_1$}$$

$$-6s + I_1 = 0. \tag{1.30$_2$}$$

Всякий простой корень уравнения (1.28) удовлетворяет лишь самому этому уравнению, двойной корень, кроме того,— уравнению (1.30$_1$), тройной — всем трем уравнениям (1.29), (1.30$_1$), (1.30$_2$).

Коэффициенты I_1, I_2, I_3, в общем случае не являются инвариантами преобразования вторичных параметров. Следовательно, не являются инвариантами и корни характеристического уравнения (последнее утверждение, впрочем, проверяется непосредственно). Найдем вариацию этих корней, для чего продифференцируем уравнения (1.28), (1.30$_1$) и (1.30$_2$). Принимая во внимание (1.27), мы, прежде всего, находим

$$\delta I_1 = -\frac{1}{2} I_1(\pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_3^3 - \pi_4^4) - 6(\pi_4^2 + \pi_3^1),$$

$$\delta I_2 = -I_2(\pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_3^3 - \pi_4^4) + I_1(\pi_4^2 + \pi_3^1), \tag{1.31}$$

$$\delta I_3 = -\frac{3}{2} I_3(\pi_1^1 + \pi_2^2 \pi_3^3 - \pi_4^4) + 2 I_2(\pi_4^2 + \pi_3^1).$$

В таком случае, вследствие дифференцирования уравнений (1.28), (1.30_1) и (1.30_2), будем иметь соответственно

$$(-3s^2 + I_1 s + I_2)\left[\delta s + \frac{1}{2} s(\pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_3^3 - \pi_4^4) + (\pi_4^2 + \pi_3^1)\right] = 0,$$

$$(-6s + I_1)\left[\delta s + \frac{1}{2} s(\pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_3^3 - \pi_4^4) + (\pi_4^2 + \pi_3^1)\right] = 0,$$

$$\delta s + \frac{1}{2} s(\pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_3^3 - \pi_4^4) + (\pi_4^2 + \pi_3^1)\Big] = 0.$$

Для простого корня справедливо неравенство $-3s^2 + I_1 s + I_2 \neq 0$, для двойного корня — неравенство $-6s + I_1 \neq 0$. Следовательно, каков бы ни был корень характеристического уравнения, его вариация определяется одним и тем же равенством

$$\delta s = -\frac{1}{2} s(\pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_3^3 - \pi_4^4) - (\pi_4^2 + \pi_3^1). \tag{1.32}$$

Для двух корней s_1 и s_2 имеем

$$\delta s_1 = -\frac{1}{2} s_1(\pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_3^3 - \pi_4^4) - (\pi_4^2 + \pi_3^1),$$

$$\delta s_2 = -\frac{1}{2} s_2(\pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_3^3 - \pi_4^4) - (\pi_4^2 + \pi_3^1).$$

Вычитая из одного равенства другое, находим

$$\delta(s_1 - s_2) = -\frac{1}{2}(s_1 - s_2)(\pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_3^3 - \pi_4^4).$$

Отсюда видно, что если $s_1 = s_2$ в одном нормальном тетраэдре, то это же равенство будет справедливо и для всякого другого тетраэдра. Иными словами

кратность корня характеристического уравнения является инвариантом преобразования вторичных параметров.

Следовательно, чтобы классифицировать комплексы по кратности корней характеристического уравнения, можно воспользоваться любым сопровождающим тетраэдром, подчиненным условию нормальности (1.8). Поскольку в результате решения системы (1.22) получаются вполне инвариантные образы — главные поверхности комплекса, — то совершенно очевидно, что ранг матрицы

$$D \equiv \begin{pmatrix} \alpha - s & q & -\gamma \\ p & \alpha - s & \beta \\ \beta & -\gamma & r - 2s \end{pmatrix}$$

для каждого корня будет один и тот же в любом нормальном тетраэдре.

Ранг системы уравнений (1.22) (ранг матрицы D), в силу уравнения (1.23), не может быть больше 2. Покажем, что для всякого простого корня характеристического уравнения этот ранг действительно равен двум, а соответствующая ему главная поверхность является косой.

Примечание: Единственной точкой прикосновения развертывающейся поверхности комплекса является ее фокус, а линией прикосновения — ребро возврата. Поскольку соприкасающаяся плоскость ребра возврата совпадает с касательной плоскостью поверхности, то это означает, что всякая развертывающаяся поверхность подпадает под определение главной поверхности. Переходя от равенства (1.20) к равенству (1.21) путем сокращения первого на форму $\omega_1^3 + i\omega_2^3$, мы, очевидно, исключим из рассмотрения развертывающиеся поверхности, для которых эта форма обращается в нуль. *Apriori*, однако, не исключена возможность, что какая-либо линейчатая поверхность, получающаяся в результате решения уравнений (1.22), окажется развертывающейся. Ниже мы убедимся в том, что это возможно только для комплексов с кратными инфлекционными центрами.

Действительно, поместим вершину A_1 в какой-нибудь инфлекционный центр. Тогда, как это следует из уравнения (1.16), $p = 0$, а потому матрица D принимает вид

$$D \equiv \begin{pmatrix} \alpha - s & q & -\gamma \\ 0 & \alpha - s & \beta \\ \beta & -\gamma & r - 2s \end{pmatrix}.$$

Если бы ранг матрицы был меньше двух, то минор

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta \\ \beta & r - 2s \end{vmatrix}$$

был бы равен нулю, а это возможно лишь при $\beta = 0$. В таком случае характеристическое уравнение (1.23) примет вид $(\alpha - s)^2(r - 2s) = 0$. Простой корень этого уравнения есть $s = \frac{r}{2}$, причем должно быть $\frac{r}{2} \neq \alpha$, так как в противном случае корень уравнения был бы тройным. Но тогда левый угловой минор будет равен

$$\begin{vmatrix} \alpha - s & q \\ 0 & \alpha - s \end{vmatrix} = \left(\alpha - \frac{r}{2}\right)^2.$$

Если бы ранг матрицы D был меньше двух, то этот минор был бы равен нулю, что противоречит неравенству $\frac{r}{2} \neq \alpha$.

Предположим теперь, что главная поверхность, определяемая простым корнем характеристического уравнения является развертывающейся. В таком случае главные формы $\omega_1^4, \omega_2^4, \omega_1^3, \omega_2^3$ будут связаны с координатой t фокуса следующими равенствами

$$\omega_1^3 + t\omega_2^3 = 0, \quad \omega_1^4 + t\omega_2^4 = 0.$$

Откуда

$$\omega_2^3 = \frac{1}{t}\,\omega_2^4, \qquad \omega_1^4 = -\,t\omega_2^4.$$

Подставляя полученное в уравнения (1.22) и сокращая их на ω_2^4, мы приведем последние к виду

$$\begin{aligned} &(\alpha - s) - qt^2 - \gamma t = 0,\\ &p - (\alpha - s)t^2 + \beta t = 0, \qquad\qquad (1.33)\\ &\beta - \gamma t^2 + (r - 2s)t = 0. \end{aligned}$$

Так как t одни и те же во всех уравнениях, то их коэффициенты пропорциональны. Но в таком случае ранг матрицы D меньше двух, а это, как мы видели выше, невозможно [1].

Пусть s_1, s_2, s_3 — корни характеристического уравнения, R_i — ранг матрицы D, соответствующей корню s_i.

Возможны следующие случаи.

1. $s_1 \neq s_2,\ s_2 \neq s_3,\ s_3 \neq s_2$. Все корни характеристического уравнения простые. Каждому корню будет соответствовать одна и только одна косая главная поверхность.

Легко видеть, что в рассматриваемом случае все инфлекционные центры являются простыми. Действительно, если бы один из центров был двойным (или имел высшую кратность), то, помещая в него вершину A_1 тетраэдра, мы бы имели из уравнения (1.16) $p = \beta = 0$. В таком случае характеристиче-

[1] Случай $t=0$ привел бы к развертывающейся поверхности $\omega_1^4 = \omega_2^4 = 0$. В этом случае $s=\alpha$, $p=\beta=0$. Точка A_1 оказывается необходимо двойным инфлекционным центром, а $s=\alpha$—двойным корнем характеристического уравнения.

ское уравнение (1.23) имело бы вид $(\alpha - s)^2(r - 2s) = 0$, т. е. имело бы двойной корень $s = \alpha$. Наоборот, если все инфлекционные центры луча простые, то простыми будут и корни характеристического уравнения. Действительно, поместим вершины A_1 и A_2 тетраэдра в два каких-либо инфлекционных центра. В таком случае $p = q = 0$, а потому характеристическое уравнение примет вид,

$$(\alpha - s)\left[(\alpha - s)(r - 2s) + 2\beta\gamma\right] = 0.$$

Предположим, что это уравнение имеет двойной корень. Если бы таким корнем был корень $s = \alpha$, то он обращал бы в нуль и выражение, стоящее в квадратных скобках. Мы бы имели $\beta\gamma = 0$, а это означало бы, что или A_1 или A_2 является двойным инфлекционным центром.

Если $s = \alpha$ — простой корень, то выражение в квадратных скобках должно быть полным квадратом. Следовательно,

$$(2\alpha - r)^2 - 16\beta\gamma = 0. \qquad (1.34)$$

Полагая в уравнении (1.16) $p = q = 0$, мы приведем его к виду

$$2\gamma t^2 - (2\alpha - r)t + 2\beta = 0,$$

определяющему два инфлекционных центра, отличных от A_1 и A_2. Равенство (1.34) означает, что эти центры совпадают, т. е. один из инфлекционных центров является двойным.

2. $s = s_1 = s_2 \neq s_3$. Простому корню s_3 по-прежнему соответствует единственная косая главная поверхность. Что касается двойного корня s, то ему в свою очередь соответствуют 2 случая:

а) $R=2$, т. е. корню s отвечает единственная главная поверхность. Эта поверхность не может не быть развертывающейся, так как в противном случае ранг R был бы меньше двух. Легко видеть, что в рассматриваемом случае каждый луч содержит один и только один двойной инфлекционный центр.

Действительно, помещая вершины A_1, A_2 в два каких-либо инфлекционных центра, мы будем иметь $p = q = 0$.

Примечание: если бы луч содержал лишь один четырехкратный центр, то, совмещая с ним вершину $_1$, мы бы имели $p=\beta=2\alpha-r=\gamma=0$. Характеристическое уравнение имело бы вид $2(\alpha-s)^3=0$, т. е. имело бы тройной корень, а ранг R был бы равен единице. Что касается возможности совмещения вершин тетраэдра с инфлекционными центрами, то мы считаем последние существующими как в том случае, когда они действительны, так и в том, когда они мнимы).

Характеристическое уравнение имеет в таком случае вид

$$(\alpha - s)\left[(\alpha - s)(r - 2s) + 2\beta\gamma\right] = 0,$$

а так как один из его корней двойной, то, как уже было указано выше, на луче существует двойной центр. Помещая в него вершину A_1, мы будем иметь, кроме того, $\beta = 0$. Двойным корнем характеристического уравнения будет корень $s = \alpha$. Матрица D принимает для него вид

$$D \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & r-2\alpha \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

Если бы луч содержал еще один двойной инфлекционный центр, то мы имели бы $\gamma = 0$, а тогда $R = 1$.

Наоборот, если каждый луч содержит только один двойной инфлекционный центр, то характеристическое уравнение имеет двойной (но не более высокой кратности) корень, а $R = 2$. Действительно, принимая двойной центр за вершину A_1, получим $p = \beta = 0$. В таком случае характеристическое уравнение принимает вид $(\alpha - s)^2(r - 2s) = 0$. Если бы оно допускало тройной корень, то $2\alpha - r = 0$, а тогда вершина A_1 была бы тройным центром. Совмещая A_2 с каким-либо простым центром, приведем матрицу D к виду (1.35). Если бы ее ранг был равен 1, то $\gamma = 0$, т. е. точка A_2 была бы тоже двойным центром.

б) $R = 1$. Корню s соответствует бесчисленное множество главных поверхностей. Из предыдущих рассуждений следует, что в этом случае каждый луч комплекса содержит два двойных инфлекционных центра. (Такой комплекс известен под именем комплекса проективного вращения. См. [50]). Справедливо и обратное.

Главные поверхности, соответствующие кратному корню могут быть развертывающимися.

Очевидно, сейчас невозможен случай $R=0$, так как в противном случае $s_1 = s_2 = s_3$.

3. $s = s_1 = s_2 = s_3$. Здесь возможны следующие случаи:

а) $R = 2$. В этом случае тройному корню соответствует единственная развертывающаяся главная поверхность. Покажем, что каждый луч комплекса содержит тройной инфлекционный центр (но не высшей кратности). Действительно, если бы луч содержал четырехкратный центр, то, совмещая с ним вершину A_1, мы бы имели $p = \beta = 2\alpha - r = \gamma = 0$, $s = \alpha$. Матрица D имела бы в этом случае вид

$$D \equiv \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $R = 1$.

Таким образом, на каждом луче имеется не меньше двух инфлекционных центров. Если бы один из них был двойным, то, как уже сказано, характеристическое уравнение не могло бы иметь тройного корня.

Наоборот, если каждый луч содержит тройной инфлекционный центр (но не высшей кратности), то $s_1 = s_2 = s_3$ и $R = 2$. Действительно, совмещая A_1 с тройным центром, получим $p = \beta = 2\alpha - r = 0$. Тогда характеристическое уравнение $(\alpha - s)^3 = 0$ имеет тройной корень $s = \alpha$. Матрица D принимает вид

$$D \equiv \begin{pmatrix} 0 & q & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Если бы ранг этой матрицы был меньше 2, то $\gamma = 0$, и тогда точка A_1 была бы четырехкратным инфлекционным центром.

б) $R = 1$. Тройному корню соответствует бесчисленное множество главных поверхностей. Покажем, что каждый луч в этом случае содержит четырехкратный инфлекционный центр. Действительно, если бы луч содержал два инфлекционных центра меньшей кратности, то, совмещая с ними вершины A_1 и A_2 ($p = q = 0$), мы привели бы характеристическое уравнение к виду

$$(\alpha - s)\,[(\alpha - s)(r - 2s) + 2\gamma\beta] = 0.$$

Так как корень $s = \alpha$ — тройной, то $r = 2\alpha$. Пусть $\gamma = 0$. Матрица D принимает вид

$$D \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы будет меньше 2 лишь при $\beta = 0$, но тогда он становится равным нулю.

Наоборот, если луч комплекса содержит четырехкратный инфлекционный центр, то корень характеристического уравнения тройной и $R = 1$. Действительно, принимая четырехкратный центр за вершину A_1, получим $p = \beta = r - 2\alpha = \gamma = 0$, $(\alpha - s)^3 = 0$, т. е. $s = \alpha$ — тройной корень. Имеем теперь для $s = \alpha$

$$D \equiv \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если бы $R=0$, то $q=0$, инфлекционные центры были бы неопределенными. По той же причине, как показывают равенства (1.33), главные поверхности, соответствующие тройному корню могут быть развертывающимися.

в) $R=0$. Это, очевидно, возможно тогда и только тогда, когда

$$p=0, \quad \beta=0, \quad r-2\alpha=0, \quad \gamma=0, \quad q=0,$$

т. е. когда комплекс является линейным (см. (1.17)). Главные поверхности становятся неопределенными. Любая поверхность комплекса, в том числе и развертывающаяся, становится главной.

Обозначая через μ максимальную кратность корня характеристического уравнения, сведем последние результаты в таблицу 1.

Таблица 1

Тип компл.	μ	R	Характер инфлекционных центров	Число главных поверхностей
I	1	2	все инфлекционные центры простые	три косых главных поверхности
II	2	2	один двойной инфлекционный центр	одна косая главная поверхность для простого корня и одна развертывающаяся для двойного
	2	1	два двойных инфлекционных центра	одна косая главная поверхность для простого корня и бесчисленное множество для двойного
III	3	2	один тройной инфлекционный центр	одна развертывающаяся главная поверхность
	3	1	один четырехкратный инфлекционный центр	бесчисленное множество главных поверхностей
	3	0	бесчисленное множество инфлекционных центров (линейный комплекс)	главные поверхности произвольны

§ 5. Окрестность третьего порядка

Выпишем необходимые для дальнейшего дифференциальные уравнения, определяющие инфинитезимальные смещения тетраэдра третьего порядка. С этой целью разрешим алгеб-

раически уравнения (1.26), воспользовавшись известной леммой Картана

$$-dp-p(\omega_2^2-2\omega_3^3+\omega_4^4)+2\beta\omega_1^2=p_1\omega_2^3+p_2\omega_1^4+p_3\omega_2^4,$$

$$-d\alpha-\alpha(\omega_1^1-\omega_3^3)-\gamma\omega_1^2-\beta\omega_4^3-(\omega_4^2+\omega_3^1)=p_2\omega_2^3+p_4\omega_1^4+p_5\omega_2^4,$$

$$-d\beta-\beta(\omega_1^1-2\omega_3^3+\omega_4^4)+r\omega_1^2+p(\omega_2^1+\omega_4^3)-\alpha(\omega_1^2+\omega_3^4)=$$

$$=p_3\omega_2^3+p_5\omega_1^4+p_6\omega_2^4; \qquad (1.36)$$

$$-d\alpha-\alpha(\omega_2^2-\omega_4^4)-\gamma\omega_3^4-\beta\omega_2^1-(\omega_4^2+\omega_3^1)=q_4\omega_2^3+q_1\omega_1^4+q_5\omega_2^4,$$

$$-dq-q(\omega_1^1-2\omega_4^4+\omega_3^3)+2\gamma\omega_2^1=q_1\omega_2^3+q_2\omega_1^4-q_3\omega_2^4, \qquad (1.37)$$

$$d\gamma+\gamma(\omega_2^2-2\omega_4^4+\omega_3^3)-r\omega_2^1-q(\omega_1^2+\omega_3^4)+\alpha(\omega_2^1+\omega_4^3)= \qquad (1.37)$$

$$=q_5\omega_2^3-q_3\omega_1^4+q_6\omega_2^4;$$

$$-d\beta-\beta(\omega_2^2-\omega_3^3)-2\alpha\omega_3^4+2p\omega_4^3+\frac{r}{2}(\omega_1^2+\omega_3^4)+$$

$$+(pq-\alpha^2)\,\omega_1^4=r_4\omega_2^3+r_5\omega_1^4+R_1\omega_2^4;$$

$$d\gamma+\gamma(\omega_1^1-\omega_4^4)+2\alpha\omega_4^3-2q\omega_3^4-\frac{r}{2}(\omega_2^1+\omega_4^3)-(pq-\alpha^2)\,\omega_2^3=$$

$$=r_5\omega_2^3+r_6\omega_1^4+R_2\omega_2^4; \qquad (1.38)$$

$$-dr+\frac{r}{2}(\omega_3^3-\omega_2^2+\omega_4^4-\omega_1^1)+\beta(\omega_2^1+3\omega_4^3)+\gamma(\omega_1^2+3\omega_3^4)-$$

$$-2(\omega_4^2+\omega_3^1)+2(\alpha\beta+p\gamma)\,\omega_2^3+2(q\beta+\alpha\gamma)\,\omega_1^4=R_1\omega_2^3+R_2\omega_1^4+r_3\omega_2^4.$$

Образуем три разности $(1.36_2)-(1.37_1)$, $(1.36_3)-(1.38_1)$, $(1.37_3)-(1.38_2)$

$$\alpha(\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_4^4)-\gamma(\omega_1^2-\omega_3^4)+\beta(\omega_2^1-\omega_4^3)=$$

$$=(p_2-q_4)\,\omega_2^3+(p_4-q_1)\,\omega_1^4+(p_5-q_5)\,\omega_2^4,$$

$$\beta(\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_4^4)+\left(\frac{r}{2}-\alpha\right)(\omega_1^2-\omega_3^4)+p(\omega_2^1-\omega_4^3)-$$

$$-(pq-\alpha^2)\,\omega_1^4=(p_3-r_4)\,\omega_2^3+(p_5-r_5)\,\omega_1^4+(p_6-R_1)\,\omega_2^4,$$

$$\gamma(\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_4^4)-\left(\frac{r}{2}-\alpha\right)(\omega_2^1-\omega_4^3)-q(\omega_1^2-\omega_3^4)+$$

$$+(pq-\alpha^2)\,\omega_2^3=(q_5-r_5)\,\omega_2^3-(q_3+r_6)\,\omega_1^4+(q_6-R_2)\,\omega_2^4.$$

Принимая во внимание (1.10) и сравнивая коэффициенты при $\omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4$, будем иметь

$$q_4 = p_2 + p\gamma - 2\alpha\beta, \quad p_4 = q_1 + q\beta - 2\alpha\gamma, \quad p_5 - q_5 = \alpha r - 2\gamma\beta,$$

$$r_4 = p_3 - \beta^2 - \frac{1}{2} pr, \quad -p_5 + r_5 = \beta\gamma - \frac{1}{2} r\alpha,$$

$$p_6 = R_1 + \frac{3}{2}\beta r - \alpha\beta - p\gamma, \quad q_5 - r_5 = \beta\gamma - \frac{1}{2}\alpha r, \tag{1.39}$$

$$r_6 = -q_3 + \gamma^2 + \frac{1}{2} qr, \quad q_6 = R_2 + \frac{3}{2}\gamma r - \alpha\gamma - q\beta.$$

Введем обозначения

$$R_1 - 2(\alpha\beta + p\gamma) = r_1 - \frac{1}{2}\beta r, \quad R_2 - 2(\alpha\gamma + q\beta) = r_2 - \frac{1}{2}\gamma r, r_5 = h. \tag{1.40}$$

Тогда все независимые равенства системы (1.36), (1.37) и (1.38) могут быть записаны в виде

$$-dp - p(\omega_2^2 - 2\omega_3^3 + \omega_4^4) + 2\beta\omega_1^2 = p_1\omega_2^3 + p_2\omega_1^4 + p_3\omega_2^4,$$

$$-dq - q(\omega_1^1 - 2\omega_4^4 + \omega_3^3) + 2\gamma\omega_2^1 = q_1\omega_2^3 + q_2\omega_1^4 - q_3\omega_2^4,$$

$$-dr + \frac{r}{2}(\omega_3^3 - \omega_2^2 + \omega_4^4 - \omega_1^1) + 4\beta\omega_2^1 + 4\gamma\omega_1^2 - 2(\omega_4^2 + \omega_3^1) +$$

$$+\left[3(-p\gamma - \alpha\beta) + \frac{1}{2}\beta r\right]\omega_2^3 + \left[3(-q\beta - \alpha\gamma) + \frac{1}{2}\gamma r\right]\omega_1^4 =$$

$$= r_1\omega_2^3 + r_2\omega_1^4 + r_3\omega_2^4, \tag{1.41}$$

$$d\gamma + \gamma(\omega_1^1 - \omega_4^4) + (2\alpha - r)\omega_2^1 - 2q\omega_1^2 - \left(\alpha^2 - pq - \frac{1}{2}r\alpha\right)\omega_2^3 =$$

$$= h\omega_2^3 - (q_3 - \gamma^2)\omega_1^4 + r_2\omega_2^4,$$

$$-d\beta - \beta(\omega_2^2 - \omega_3^3) - (2\alpha - r)\omega_1^2 + 2p\omega_2^1 + \left(\alpha^2 - pq - \frac{1}{2}r\alpha\right)\omega_1^4 =$$

$$= (p_3 - \beta^2)\omega_2^3 + h\omega_1^4 + r_1\omega_2^4,$$

$$-d\alpha + \frac{\alpha}{2}(\omega_3^3 - \omega_2^2 + \omega_4^4 - \omega_1^1) - \gamma\omega_1^2 - \beta\omega_2^1 - (\omega_4^2 + \omega_3^1) +$$

$$+\frac{1}{2}\alpha\beta\omega_2^3 + \frac{1}{2}\alpha\gamma\omega_1^4 = (p_2 - \alpha\beta)\omega_2^3 + (q_1 - \alpha\gamma)\omega_1^4 + h\omega_2^4.$$

Глава вторая

КОМПЛЕКСЫ С КРАТНЫМИ ИНФЛЕКЦИОННЫМИ ЦЕНТРАМИ

В предыдущей главе было обнаружено, что через каждый луч проходят лишь три главные поверхности только у комплекса с простыми инфлекционными центрами. У этих же комплексов характеристическое уравнение имеет три различных корня. Только для таких комплексов может быть построен канонический тетраэдр, аналогичный каноническому тетраэдру поверхности в проективном пространстве.

Ниже мы рассмотрим комплексы, у которых характеристическое уравнение имеет кратные корни. Каждый из таких комплексов, за исключением линейного, содержит на каждом своем луче кратные инфлекционные центры. Принимая за исходное понятие конгруэнции того или иного частного вида, мы дадим для каждого комплекса способ эффективного построения (безинтегрального представления).

§ 1. Комплексы с одним двойным инфлекционным центром на каждом луче (комплексы C_2)

Поместим вершину A_1 в двойной центр. В таком случае

$$p = \beta = 0, \quad 2\alpha - r \neq 0 \tag{2.1}$$

(см. (1.16)). Из равенств (141₁) и (1.41₅) находим теперь

$$p_1 = p_2 = p_3 = 0, \quad \omega_1^2 = \frac{\alpha^2 - \frac{1}{2}r\alpha - h}{2\alpha - r}\omega_1^4 - \frac{r_1}{2\alpha - r}\omega_2^4. \tag{2.2}$$

Равенство

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3 + \omega_1^4 A_4$$

принимает теперь вид

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \left(\frac{\alpha^2 - \frac{1}{2}r\alpha - h}{2\alpha - r}A_2 + A_4\right)\omega_1^4 - \left(A_3 + \frac{r_1}{2\alpha - r}A_2\right)\omega_2^4. \tag{2.3}$$

Дифференциал dA_1 зависит лишь от двух существенных форм ω_1^4, ω_2^4. Следовательно, **двойной инфлекционный центр описывает поверхность** (обозначим ее через Σ_1), **касающуюся плоскости**

$$\left(A_1, \frac{\alpha^2 - \frac{1}{2}r\alpha - h}{2\alpha - r}A_2 + A_4, A_3 + \frac{r_1}{2\alpha - r}A_2\right).$$

Примем эту плоскость за плоскость $A_1A_3A_4$ (это, очевидно, не противоречит условию (1.8). В таком случае

$$r_1 = 0, \quad \alpha^2 - \frac{1}{2} r\alpha - h = 0. \tag{2.4}$$

Следовательно,

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_3^4 = -\alpha\omega_1^4. \tag{2.5}$$

При перемещении точки A_1 по поверхности Σ_1 ребро A_1A_3 описывает некоторую конгруэнцию (обозначим ее через K_2), одним из фокусов которой является точка A_1. Когда луч этой конгруэнции огибает на Σ_1 фокальную кривую l_1, то $\omega_1^4 = 0$, следовательно, $\omega_3^4 = 0$. Но в таком случае

$$dA_3 = \omega_3^1 A_1 + \omega_3^2 A_2 + \omega_3^3 A_3.$$

Это означает, что соприкасающаяся плоскость кривой l_1 совпадает с плоскостью $(A_1A_2A_3)$, т. е. плоскость $(A_1A_2A_3)$ является фокальной плоскостью конгруэнции K_2, не касающейся поверхности Σ_1. Это означает вместе с тем, что **при неподвижной точке A_1 плоскость $(A_1A_2A_3)$ остается неподвижной; следовательно, ребро A_1A_2 перемещается в неподвижной плоскости.** Иными словами, **каждый конус комплекса, имеющий вершину в двойном инфлекционном центре, вырождается в плоскость.** Таким образом, **комплекс C_2 распадается в двупараметрическое семейство плоских пучков(инфлекционных пучков), центры которых описывают одну фокальную поверхность конгруэнции Σ_1, а плоскости огибают вторую фокальную поверхность этой конгруэнции.**

Покажем, что конгруэнцией K_2 может быть совершенно произвольная непараболическая конгруэнция.

Действительно, пусть A_1A_3 — луч произвольной непараболической конгруэнции, A_1 — ее фокус, описывающий фокальную поверхность Σ_1, и $A_1A_3A_4$ — касательная плоскость этой поверхности. В таком случае

$$\omega_1^2 = 0. \tag{2.6}$$

Пусть l_1 — фокальная кривая, огибаемая на Σ_1 лучом конгруэнции. Тогда при перемещении вдоль этой кривой $\omega_1^4 = 0$. Поместим точку A_2 в соприкасающуюся плоскость кривой l_1, тогда

$$dA_3 = \omega_3^1 A_1 + \omega_3^2 A_2 + \omega_3^3 A_3, \quad \omega_1^4 = 0,$$

т. е.

$$\omega_3^4 = -\alpha\omega_1^4, \tag{2.7}$$

где α — некоторый коэффициент пропорциональности.

Образуем комплекс, проведя через каждую точку A_1 поверхности Σ_1 в плоскости $A_1A_2A_3$ пучок прямых A_1A_2. Тогда конус его лучей с вершиной A_1 вырождается в плоскость $A_1A_2A_3$. Примем касательную плоскость к конусу комплекса с вершиной A за плоскость $A_1A_2A_4$. В таком случае, как это показано в первой главе, будет выполнено равенство

$$\omega_1^3 - c\omega_2^4 = 0.$$

Сконструированный комплекс, очевидно, не может быть специальным, так как выбранная конгруэнция непараболическая, а потому плоские пучки $A_1A_2A_3$ не касаются поверхности Σ_1. В таком случае нормированием координат вершин тетраэдра A_3 или A_4 можно привести коэффициент c к -1, так что

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0.$$

Продолжением этого равенства будут уравнения (1.10), причем равенства (2.6) и (2.7) показывают, что в этом случае

$$p = 0, \ \beta = 0.$$

Тогда из уравнения (1.16) заключаем, что точка A_1 является двойным инфлекционным центром луча комплекса.

Таким образом, **чтобы построить комплекс C_2, следует взять любую конгруэнцию и через каждую точку одной из ее фокальных поверхностей в фокальной плоскости, не касающейся этой поверхности, провести пучок прямых. Наоборот, всякий комплекс C_2 может быть построен таким образом.**

Предполагая, что вершина A_1 совпадает с двойным инфлекционным центром, мы получим следующее квадратное уравнение, определяющее простые центры,

$$qt^2 + \gamma t - (2\alpha - r) = 0. \tag{2.8}$$

(см. (1.16)). Совместим вершину A_2 с точкой, гармонически разделяющей двойной центр по отношению к паре простых центров. В таком случае сумма корней уравнения (2.8) должна равняться нулю, а потому

$$\gamma = 0. \tag{2.9}$$

Если $(A_1A_3A_4)$ — касательная плоскость фокальной поверхности Σ_1, то $\omega_1^2 = 0$, $\omega_3^4 = -\alpha\omega_1^4$.

Совместим точку A_3 со вторым фокусом конгруэнции K_2, описывающим фокальную поверхность Σ_3. Так как поверхность Σ_3 касается плоскости $A_1A_2A_3$, то мы должны иметь

$$\omega_3^4 = 0, \tag{2.10}$$

т. е.

$$\alpha = 0, \tag{2.11}$$

а потому и

$$h = 0. \tag{2.12}$$

Из (2.1) заключаем, что $r \neq 0$, а потому

$$\omega_2^1 = \frac{q_3}{r}\,\omega_1^4 - \frac{r_2}{r}\,\omega_2^4 \tag{2.13}$$

(см. (1.41₄)). Если точка A_1 остается на месте, то $\omega_1^4 = \omega_2^4 = 0$; следовательно, $\omega^2 = 0$. Точка A_3 (второй фокус) остается, очевидно, тоже неподвижной. Тогда из равенства

$$dA_2 = \omega_2^2 A_2 + \omega_2^3 A_3$$

будет следовать, что точка A_2 описывает прямую, проходящую через точку A_3.

Таким образом, **если двойной инфлекционный центр комплекса C_2 (первый фокус конгруэнции K_2) остается на месте, то точка, гармонически сопряженная с этим центром относительно пары простых центров, перемещается по прямой, проходящей через второй фокус конгруэнции.**

Соприкасающиеся линейные комплексы. Мы видели в первой части, что в каждом луче произвольного комплекса существует пучок касательных линейных комплексов, т. е. комплексов, имеющих с данным комплексом общую окрестность первого порядка. Что касается соприкасающихся комплексов, то, как было показано, единственным комплексом, допускающим в каждом луче соприкасающийся линейный комплекс (т. е. комплекс, имеющий с данным комплексом, общую окрестность 2-го порядка), является сам линейный комплекс.

Если, однако, для произвольного комплекса C не существует соприкасающихся линейных комплексов, то в направлении каждой главной поверхности этого комплекса можно провести линейный комплекс, имеющий с комплексом C касание более высокого порядка [1].

У комплекса C_2 через каждый луч проходят две главных поверхности — одна, соответствующая простому корню характеристического уравнения, и другая — кратному корню.

Покажем, что последняя поверхность целиком принадлежит соответствующему ей линейному комплексу.

Действительно, запишем уравнение линейного комплекса, проходящего через луч произвольного комплекса C (пока мы

[1] Вероятно, более правильно было бы говорить о более высоком порядке касания с линейным комплексом самой главной поверхности.

не будем ограничивать себя выбором комплекса C_2), символически в виде

$$\Sigma\,[A_1A_2] = 0, \tag{2.14}$$

понимая левую часть как сумму шести плюккеровых координат прямой A_1A_2, умноженных на соответствующие коэффициенты.

Дифференцируя уравнение (2.14), найдем

$$\omega_2^3\sum[A_1A_3] - \omega_1^4\sum[A_2A_4] + \omega_2^4\sum([A_1A_4] + [A_2A_3]) = 0. \tag{2.15}$$

Комплекс (2.14) будет касательным к комплексу C, если все коэффициенты последнего равенства при независимых формах $\omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4$ будут равны нулю

$$\sum[A_1A_3] = 0, \sum[A_2A_4] = 0, \sum([A_1A_4] + [A_2A_3]) = 0. \tag{2.19}$$

Равенства (2.14) и (2.16) и определяет пучок касательных комплексов.

Подобно тому, как это сделано в § 6, гл. II, ч. I, продифференцируем равенства (2.16). Приинимая во внимание (2.14) и (2.16), найдем

$$\begin{gathered}
(\omega_1^2 - \omega_3^4)\sum[A_2A_3] + \omega_1^4\sum[A_4A_3] = 0,\\
(\omega_2^1 - \omega_4^3)\sum[A_2A_3] + \omega_2^3\sum[A_4A_3] = 0,\\
(\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4)\sum[A_2A_3] + 2\omega_2^4\sum[A_4A_3] = 0.
\end{gathered} \tag{2.17}$$

Очевидно, суммы $\Sigma[A_2A_3]$ и $\Sigma[A_4A_3]$ одновременно не могут обращаться в нуль, так как в противном случае все коэффициенты уравнения линейного комплекса обратятся в нуль. В таком случае уравнения (2.17) будут совместны тогда и только тогда, когда формы $\omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4$ будут подчинены условиям

$$\frac{\omega_2^1 - \omega_4^3}{\omega_2^3} = \frac{\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4}{2\omega_2^4} = \frac{\omega_1^2 - \omega_3^4}{\omega_1^4}.$$

Эти условия определяют главные поверхности. Если s — корень характеристического уравнения, то эквивалентные друг другу уравнения (2.17) сведутся к следующему уравнению

$$s\sum[A_2A_3] + \sum[A_4A_3] = 0. \tag{2.18}$$

Это уравнение должно быть присоединено к уравнениям (2.14) и (2.16). Для каждого корня s, т. е. для каждой главной поверхности, мы будем иметь соответствующий соприкасающийся линейный комплекс.

Предположим теперь, что рассматриваемый комплекс есть комплекс C_2. Помещая вершины A_1 и A_3 соответственно на фокальные поверхности Σ_1 и Σ_3 конгруэнции K_2, а плоскости $A_1A_3A_4$ и $A_1A_3A_2$ совмещая с касательными плоскостями к этим поверхностям, мы будем иметь

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_3^4 = 0, \tag{2.19}$$

а потому

$$p = 0, \alpha = 0, \beta = 0. \tag{2.20}$$

Выберем еще вершину A_2 так, чтобы

$$\gamma = 0 \tag{2.21}$$

(см. (2.9)). Характеристическое уравнение (1.23) примет вид

$$s^2(r - 2s) = 0.$$

Его двойной корень

$$s = 0. \tag{2.22}$$

Из уравнений (1.22), учитывая в них (2.20) и (2.21), найдем дифференциальные уравнения главной поверхности, соответствующей двойному корню

$$\omega_1^4 = 0, \ \omega_2^4 = 0. \tag{2.23}$$

Продифференцируем внешним образом уравнения (2.19)

$$[\omega_1^3 \omega_3^2] + [\omega_1^4 \omega_4^2] = 0, \ [\omega_3^1 \omega_1^4] + [\omega_3^2 \omega_2^4] = 0.$$

Отсюда видно, что

$$\omega_3^2 = \omega_4^2 = \omega_3^1 = \omega_3^2 = 0 (\mathrm{mod.}\, \omega_1^4, \omega_2^4). \tag{2.24}$$

Учитывая в (2.18) равенство (2.22), найдем

$$\sum [A_4 A_3] = 0. \tag{2.25}$$

Дифференцируя теперь это уравнение в направлении главной поверхности (2.23) и принимая во внимание (2.24), мы придем к тождеству. Следовательно, главная поверхность (2.23) целиком принадлежит линейному комплексу (2.14), (2.16), (2.25). В локальной системе координат $A_1A_2A_3A_4$ уравнение такого комплекса будет иметь вид

$$p^{14} - p^{23} = 0, \tag{2.26}$$

где p^{ik} — плюккеровы координаты прямой.

Уравнения (2.23) можно рассматривать как два обыкновенных дифференциальных уравнения первого порядка в дифференциалах главных параметров луча. Интегрируя их, получим двупараметрическое семейство главных поверхностей, на которые, таким образом, следует считать расслоенным комплекс C_2. Следовательно, для такого комплекса мы получим и двупараметрическое семейство линейных комплексов (2.26).

Итак, **всякий комплекс C_2 есть огибающая двупараметрического семейства линейных комплексов. На каждом из последних располагается главная поверхность комплекса C_2, соответствующая кратному корню характеристического уравнения.**

Между прочим, равенства (2.23) означают, что точка A_1 остается на месте, следовательно, луч комплекса A_1A_2 описывает плоский пучок $(A_1A_2A_3)$ с вершиной в точке A_1. Главная поверхность вырождается в плоскость, соответствующую точке A_1 в нуль-системе соприкасающегося линейного комплекса. Тогда становится совершенно очевидным, что такая поверхность всегда принадлежит соприкасающемуся с ней комплексу.

Может ли комплекс C_2 быть огибающей еще одного двупараметрического семейства линейных комплексов, соответствующих главным поверхностям? Мы уже видели выше, что каждый комплекс из этого семейства должен целиком содержать эту поверхность. Если эта поверхность отлична от поверхности (2.23), то она должна отвечать корню

$$s = \frac{r}{2}.$$

Из (1.22) находим ее уравнения

$$\omega_2^3 = 0, \ \omega_1^4 = 0 \tag{2.27}$$

(это заведомо косая поверхность). Положим теперь в уравнении (2.18) $s = \frac{r}{2}$

$$r \sum [A_2 A_3] + 2 \sum [A_4 A_3] = 0. \tag{2.28}$$

Продифференцируем это уравнение в направлении (2.27). После приведения подобных членов будем иметь

$$\left[dr + r(\omega_2^2 - \omega_4^4) + 2(\omega_4^2 + \omega_3^1) - \frac{r^2}{2}\omega_2^4\right][A_2 A_3] = 0 \ (\omega_2^3 = \omega_1^4 = 0)$$

Приравнивая к нулю коэффициент при $[A_2 A_3]$ и учитывая (1.41), будем иметь

$$r_3 \omega_2^4 = 0.$$

Следовательно, только для комплексов

$$r_3 = 0 \tag{2.29}$$

возможно указанное двойное огибание двупараметрическим семейством линейных комплексов.

Всякий ли комплекс, огибаемый двупараметрическим семейством линейных комплексов, есть комплекс C_2? Позднее покажем, что это не так.

§ 2. Комплексы с двумя двойными инфлекционными центрами на каждом луче (комплексы C_{22} — комплексы проективного вращения)

Поместим вершины A_1 и A_2 в двойные центры, тогда

$$p = \beta = 0,\ 2\alpha - r \neq 0,\ q = \gamma = 0 \tag{2.30}$$

(см. (1.16)). Аналогично тому, как это сделано в § 1, можно заключить, что **точки A_1 и A_2 описывают две поверхности,** которые мы обозначим соответственно символами Σ_{14} и Σ_{23}. Принимая касательные плоскости к этим поверхностям за плоскости $A_1A_3A_4$ и $A_2A_3A_4$ (что не противоречит условию (1.8)), мы получим

$$\omega_1^2 = 0,\quad \omega_2^1 = 0; \tag{2.31}$$

$$r_1 = 0,\quad \alpha^2 - \frac{1}{2} r\alpha - h = 0,\quad r_2 = 0,\quad \alpha^2 - \frac{1}{2} r\alpha + h = 0. \tag{2.32}$$

Из равенств (2.32) находим

$$h = 0,\ \alpha \neq 0. \tag{2.33}$$

В таком случае из (1.10) и (2.30) получаем

$$\omega_3^4 = 0,\ \omega_4^3 = 0. \tag{2.34}$$

Из равенств (1.41) находим

$$p_1 = p_2 = p_3 = 0,\ q_1 = q_2 = q_3 = 0; \tag{2.35}$$

$$\omega_4^2 + \omega_3^1 = 0. \tag{2.36}$$

Продифференцируем внешним образом равенства (2.31)

$$[\omega_1^3\omega_3^2] + [\omega_1^4\omega_4^2] = 0,\ [\omega_2^3\omega_3^1] + [\omega_2^4\omega_4^1] = 0.$$

Отсюда, учитывая (2.36), найдем

$$\omega_4^2 = -\mu\omega_2^4,\quad \omega_3^1 = \mu\omega_2^4,$$

$$\omega_3^2 = -\lambda\omega_2^4 + \mu\omega_1^4,\quad \omega_4^1 = \mu\omega_2^3 + l\omega_2^4. \tag{2.37}$$

В таком случае

$$d[A_1A_4] = (\omega_1^1 + \omega_4^4)[A_1A_4] - \omega_2^4([A_3A_4] + \mu[A_1A_2]),$$

$$d[A_2A_3] = (\omega_2^2 + \omega_3^3)[A_2A_3] - \omega_2^4([A_3A_4] + \mu[A_1A_2]).$$

Каждый из дифференциалов $d[A_1A_4]$ и $d[A_2A_3]$ существенным образом зависит от одной формы ω_2^4. Следовательно, ребра A_1A_4 и A_2A_3 сопровождающего тетраэдра описывают две линейчатые поверхности, образующие которых соответствуют друг другу. Но так как вершины A_1 и A_2 уже описывают поверхности Σ_{14} и Σ_{23} соответственно, то это означает, что вышеназванные линейчатые поверхности есть не что иное, как поверхности Σ_{14} и Σ_{23}. Из равенств (2.31) и (2.34), между прочим, следует, что координатные плоскости $(A_1A_3A_4)$, $(A_2A_3A_4)$ $(A_3A_1A_2)$, $(A_4A_1A_2)$ касаются поверхностей Σ_{14} и Σ_{23} соответственно в точках A_1, A_2, A_3, A_4. Вместе с тем мы заключаем, **что ребра A_1A_3 и A_2A_4 являются лучами конгруэнции K_{22}, фокальными поверхностями которой являются линейчатые поверхности Σ_{14} и Σ_{23}.**

Покажем, что **конгруэнция K_{22} есть конгруэнция W.** Действительно, асимптотические линии на поверхностях Σ_{14} и Σ_{23}, проходящие через точки A_1 и A_3, определяется уравнениями

$$(d^2A_1, A_1A_3A_4) = 0,\quad (d^2A_3, A_1A_2A_3) = 0,$$

или

$$\omega_1^3\omega_3^2 + \omega_1^4\omega_4^2 = 0,\qquad \omega_3^1\omega_1^4 + \omega_3^2\omega_2^4 = 0,$$

или (см. 2.37)

$$\omega_2^4(2\mu\omega_1^4 - \lambda\omega_2^4) = 0,\ \omega_2^4(2\mu\omega_1^4 - \lambda\omega_2^4) = 0. \tag{2.38}$$

Совпадение этих уравнений и доказывает утверждение.

Асимптотические линии, определяемые уравнением $\omega_2^4 = 0$, есть прямолинейные образующие поверхностей Σ_{14} и Σ_{23}, т. е. ребра A_1A_4 и A_2A_3. Эти ребра, как мы видели выше, соответствуют друг другу.

Подобным же образом соответствуют друг другу криволинейные асимптотические, определяемые уравнением $2\mu\omega_1^4 - \lambda\omega_2^4 = 0$.

Из равенств

$$dA_1 = \omega_1^1A_1 + \omega_1^3A_3 + \omega_1^4A_4,$$

$$dA_2 = \omega_2^2A_2 + \omega_2^3A_3 + \omega_2^4A_4$$

следует, что когда точка A_1 остается на месте $(\omega_1^4 = \omega_2^4 = 0)$, то точка A_2 описывает неподвижное ребро A_2A_3, т. е. луч комплекса описывает пучок в плоскости $A_1A_2A_3$.

Подобным же образом, когда неподвижной остается точка A_2 $(\omega_2^3 = \omega_2^4 = 0)$, то точка A_1 описывает неподвижное ребро A_1A_4, т. е. луч комплекса описывает пучок в плоскости $A_2A_1A_4$.

При этом плоскость $A_1A_2A_3$ касается поверхности Σ_{23} в точке A_3, плоскость $A_2A_1A_4$ касается поверхности Σ_{14} в точке A_4.

Таким образом, **комплекс C_{22} двумя способами расслаивается в двупараметрическое семейство плоских пучков. При этом вершины этих пучков описывают одну фокальную линейчатую поверхность конгруэнции K_{22} (являющейся конгруэнцией W), а плоскости огибают вторую фокальную поверхность (также линейчатую) этой конгруэнции.**

Это свойство полностью характеризует комплекс C_{22}.

Действительно, пусть нам дана произвольная конгруэнция W с линейчатыми фокальными поверхностями Σ_{14} и Σ_{23} (конгруэнция K_{22}). Принимая фокусы ее, расположенные на поверхностях Σ_{14} и Σ_{23}, соответственно за вершины A_1, A_3 тетраэдра, а фокальные плоскости соответственно за плоскости $A_1A_3A_4$ и $A_1A_3A_2$, мы будем иметь

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_3^4 = 0, \tag{2.39}$$

Проведем через каждую точку A_1 в плоскости $A_1A_2A_3$ пучок прямых и покажем, что построенный таким образом комплекс есть комплекс C_{22}. С этой целью примем прямолинейную образующую поверхности Σ_{14}, проходящую через точку A_1, за ребро A_1A_4, прямолинейную образующую поверхности Σ_{23}, проходящую через точку A_3 — за ребро A_2A_3.

Поскольку конгруэнция K_{22} есть конгруэнция W, у которой прямолинейные образующие фокальных поверхностей соответствуют друг другу, то фокусу A_2, расположенному на ребре A_2A_3, будет соответствовать фокус, расположенный на ребре A_1A_4. Примем этот последний за вершину A_4. В таком случае наряду с равенствами (2.39) будут выполняться также и равенства

$$\omega_2^1 = 0, \quad \omega_4^3 = 0. \tag{2.40}$$

Из способа, с помощью которого сконструирован комплекс C_{22}, следует, что конус лучей этого комплекса, имеющий вершину в точке A_1, вырождается в плоскость $A_1A_2A_3$, а конус лучей с вершиной A_2 — в плоскость $A_2A_1A_4$. В таком случае, как это показано в главе 1, между главными формами $\omega_1^3, \omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4$,

(предполагается, что лучом комплекса является ребро A_1A_2) будет существовать зависимость

$$\omega_1^3 + c\omega_2^4 = 0.$$

Путем нормирования координат вершин тетраэдра A_3 или A_4 можно привести коэффициент c к -1, тогда

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0. \tag{2.41}$$

Продолжение этого равенства приводит к параметрам окрестности 2-го порядка

$$\begin{aligned} &\omega_1^2 - \omega_3^4 = p\omega_2^3 + \alpha\omega_1^4 + \beta\omega_2^4, \\ &\omega_2^1 - \omega_4^3 = \alpha\omega_2^3 + q\omega_1^4 - \gamma\omega_2^4, \\ &\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = \beta\omega_2^3 - \gamma\omega_1^4 + r\omega_2^4. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Равенства (2.39) и (2.40) показывают, что в данном случае

$$p = \beta = 0, \; q = \gamma = 0, \; \alpha = 0, \tag{2.43}$$

а потому точки A_1 и A_2 являются двойными инфлекционными центрами комплекса (см. (1.16)), т. е. построенный комплекс есть комплекс C_{22}.

Итак, чтобы построить произвольный комплекс с двумя двойными инфлекционными центрами на каждом луче (комплекс C_{22}), следует взять произвольную конгруэнцию W с линейчатыми фокальными поверхностями и через каждую точку любой из этих поверхностей в плоскости, касательной к другой поверхности, провести пучок прямых.

Каждый комплекс C_{22} распадается, таким образом, в однопараметрическое семейство линейных конгруэнций, директрисы которых образуют фокальные поверхности некоторой конгруэнции (конгруэнции K_{22}).

Примечание. При конструировании комплекса C_{22} мы воспользовались произвольной конгруэнцией с линейчатыми фокальными поверхностями, у которых прямолинейные образующие соответствуют друг другу. Такая конгруэнция есть всегда конгруэнция W, а потому и криволинейные асимптотические фокальных поверхностей будут соответствовать друг другу.

Соприкасающиеся линейные комплексы. Учитывая равенство (2.43), запишем характеристическое уравнение в виде $s^2(r - 2s) = 0$. Его кратный корень будет $s = 0$. Подставляя его в уравнения (1.22), найдем из них

$$\omega_2^4 = 0. \tag{2.44}$$

Следовательно, все главные поверхности комплекса C_{22}, определяемые кратным корнем $s=0$, принадлежат конгруэнции (2.44). Но конгруэнция (2.44) есть, очевидно, линейная конгруэнция, директрисами которой являются прямые A_1A_4 и A_2A_3 фокальных поверхностей Σ_{14} и Σ_{24} конгруэнции K_{22}.

Соприкасающийся линейный комплекс, соответствующий кратному корню $s = 0$, мы получим, присоединив к уравнениям (2.14), (2.16) уравнение (2.18), в котором следует положить $s = 0$, т. е. уравнение

$$\sum [A_4A_3] = 0. \tag{2.45}$$

Этот комплекс будет, очевидно, соприкасаться с комплексом C_{22} вдоль любой главной поверхности, принадлежащей конгруэнции (2.44). Уравнением этого комплекса в локальной системе координат будет уравнение (2.26). Легко видеть, что вся конгруэнция (2.44) принадлежит комплексу (2.26). Чтобы это обнаружить, достаточно убедиться в том, что при дифференцировании уравнения (2.45), при условиях (2.14) и (2.16), будем иметь

$$(\omega_4^2 + \omega_3^1)[A_2A_3] = 0,$$

а это, при условии (2.36), представляет собой тождество.

Поскольку комплекс распадается в однопараметрическое семейство линейных конгруэнций (2.44), то и совокупность комплексов (2.26) будет тоже однопараметрической. Следовательно, **всякий комплекс с двумя двойными инфлекционными центрами на каждом луче (комплекс C_{22}) есть огибающая однопараметрического семейства линейных комплексов.**

Покажем, что и наоборот, всякий комплекс, являющийся огибающей однопараметрического семейства линейных комплексов, есть комплекс C_{22}.

Действительно, если некоторый комплекс C есть огибающая однопараметрического семейства линейных комплексов L, то такой комплекс распадается в однопараметрическое семейство линейных конгруэнций K, каждая из которых принадлежит соответствующему комплексу L. Комплексу L будет принадлежать, следовательно, и любая линейчатая поверхность комплекса C, принадлежащая конгруэнции K. Если, однако, некоторая линейчатая поверхность комплекса целиком принадлежит касательному линейному комплексу, то эта поверхность будет необходимо главной поверхностью комплекса[1]. Таким

[1] При этом предполагается, что лииейный комплекс является касательиым к изучаемому комплексу в каждом луче этой поверхности, как это мы имеем в рассматриваемом случае. При таком предположеиии равенства (2.16) имеют место, в частностн, в луче $[A_1^*A_2^*] = [A_1A_2] + d[A_1A_2]$, близком к лучу $[A_1A_2]$. Это приводит к равенствам (2.17), справедливым лишь для главных поверхностей.

образом, комплекс C имеет бесчисленное множество главных поверхностей, а это, как показывает классификационная таблица в гл. I, характеризует комплекс C_{22}, его предельный случай — комплекс с четырехкратным инфлекционным центром, и вырожденный случай — линейный комплекс.

§ 3. Комплексы с тройным инфлекционным центром на каждом луче (комплексы C_3)

Очевидно, комплекс с тройным инфлекционным центром на каждом луче (комплекс C_3) представляет собой некоторый частный случай комплекса с одним двойным центром (комплекса C_2). Следовательно, если для построения комплекса C_2 мы воспользовались произвольной конгруэнцией, то для построения комплекса C_3 следует воспользоваться конгруэнцией, подчиненной некоторому условию. Найдем это условие.

Совместим вершину A_1 с тройным инфлекционным центром. В таком случае

$$p = \beta = 2\alpha - r = 0, \quad \gamma \neq 0 \tag{2.46}$$

(см. (1.16)) мы предполагаем, что кратность инфлекционного центра не больше 3.

Из (1.41) находим

$$p_1 = p_2 = p_3 = 0, \quad h = r_1 = 0, \tag{2,47}$$

$$-d(2\alpha - r) = 6\gamma\omega_1^2 + \left(2q_1 - 6\alpha\gamma - r_2 + \frac{1}{2}\gamma r\right)\omega_1^4 - r_3\omega_2^4 = 0.$$

Отсюда

$$\omega_1^2 = -\frac{1}{6\gamma}\left(2q_1 - 6\alpha\gamma - r_2 + \frac{1}{2}\gamma r\right)\omega_1^4 + \frac{r_3}{6\gamma}\omega_2^4.$$

Следовательно,

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \left[-\frac{1}{6\gamma}\left(2q_1 - 6\alpha\gamma - r_2 + \frac{1}{2}\gamma r\right)A_2 + A_4\right]\omega_1^4 + \\ + \left(\frac{r_3}{6\gamma}A_2 - A_3\right)\omega_2^4.$$

Дифференциал dA_1 существенным образом зависит от двух форм. Следовательно, вершина A_1 описывает некоторую поверхность (Σ_1). Принимая касательную плоскость к этой поверхности за плоскость $A_1A_4A_3$, мы придем к равенствам

$$2q_1 - 6\alpha\gamma - r_2 + \frac{1}{2}\gamma r = 0, \quad r_3 = 0, \omega_1^2 = 0. \tag{2.48}$$

При $\omega_1^4 = \omega_2^4 = 0$ точка A_1 остается на месте. При этом

$$d(A_1A_2A_3) = (\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3)(A_1A_2A_3),$$

т. е. плоскость $A_1A_2A_3$ остается неподвижной. Следовательно, конус лучей комплекса с вершиной в тройном инфлекционном центре вырождается в плоский пучок.

При перемещении точки A_1 по поверхности Σ_1 ребро A_1A_3 описывает конгруэнцию (K_3), одной из фокальных поверхностей которой является поверхность Σ_1. Если мы поместим вершину A_3 во второй фокус конгруэнции K_3, описывающий вторую фокальную поверхность (Σ_3), (плоскость $A_3A_1A_2$ совместится с касательной плоскостью этой поверхности), то мы должны получить

$$\omega_3^4 = 0. \qquad (2.49)$$

Из равенства $-\omega_3^4 = \alpha\omega_1^4$ (см. (1.10, 2.46, 2.48)) заключим, что в этом случае

$$\alpha = 0, \quad \text{а потому и } r = 0. \qquad (2.50)$$

Укажем свойство, выделяющее конгруэнцию K_3 из класса всех конгруэнций. С этой целью рассмотрим фокальную кривую σ_1, расположенную на поверхности Σ_1 и касающуюся лучей конгруэнции K_3. Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют параметры этой линии, имеет вид

$$\omega_1^4 = 0. \qquad (2.51)$$

Пучок линейных комплексов L, каждый из которых проходит через 4 бесконечно близких касательных к линии σ_1, определяется, очевидно, четырьмя уравнениями

$$\sum[A_1A_3] = d\sum[A_1A_3] = d^2\sum[A_1A_3] = d^3\sum[A_1A_3] = 0, \quad (\omega_1^4 = 0)$$

или

$$\sum[A_1A_3]=0,\ \sum[A_1A_2] = 0,\ \sum([A_2A_3] + [A_1A_4])=0,\ \sum[A_4A_3]=0. \qquad (2.52)$$

Уравнение пучка комплексов (2.52) в локальной системе координат $A_1A_2A_3A_4$ имеет вид

$$\lambda p^{24} + p^{23} - p^{14} = 0, \qquad (2.53)$$

где λ — параметр пучка. Легко видеть, что в нуль-системе каждого из этих комплексов точке A_3 соответствует плоскость $A_1A_4A_3$.

Покажем, что это свойство характеризует конгруэнцию K_3. Действительно, пусть Σ_1 и Σ_3 — фокальные поверхности некоторой конгруэнции K. Поместим вершины A_1 и A_3 в фокусы этой конгруэнции, а плоскости $A_1A_3A_4$ и $A_3A_1A_2$ совместим соответственно с касательными плоскостями поверхностей Σ_1 и Σ_3. В таком случае

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_3^4 = 0. \qquad (2.54)$$

Построим комплекс C, проведя через каждую точку A_1 в плоскости $A_1A_2A_3$ пучок прямых A_1A_2. Тогда точке A_1 будет соответствовать в нормальной корреляции для луча A_1A_2 плоскость $A_1A_2A_3$. В таком случае выбором A_4 добьемся $\omega_1^3 - c\omega_2^4 = 0$, и нормированием координат вершин тетраэдра A_3 или A_4 можно привести коэффициент c к -1. В таком случае

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0. \qquad (2.55)$$

Продолжая это равенство, будем иметь

$$\begin{aligned} \omega_1^2 - \omega_3^4 &= p\omega_2^3 + \alpha\omega_1^4 + \beta\omega_2^4, \\ \omega_2^1 - \omega_4^3 &= \alpha\omega_2^3 + q\omega_1^4 - \gamma\omega_2^4, \\ \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4 &= \beta\omega_2^3 - \gamma\omega_1^4 + r\omega_2^4. \end{aligned} \qquad (2.56)$$

Учитывая равенства (2.54), найдем

$$p = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0. \qquad (2.57)$$

Пусть σ_1 — фокальная кривая, расположенная на поверхности Σ_1 и огибаемая лучами конгруэнции K. Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют ее параметры, будет

$$\omega_1^4 = 0. \qquad (2.58)$$

Проведем пучок линейных комплексов через 4 бесконечно близких касательных к линии σ_1. Параметры такого комплекса определятся уравнениями

$$\sum[A_1A_3] = d\sum[A_1A_3] = d^2\sum[A_1A_3] = d^3\sum[A_1A_3] = 0 \quad (\omega_1^4 = 0).$$

Или

$$\sum[A_1A_3] = 0,\ \sum[A_1A_2] = 0,\ \sum[A_2A_3] + [A_1A_4] = 0, \qquad (2.59)$$

$$(\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4)\sum[A_2A_3] + 2\omega_2^4\sum[A_4A_3] = 0.$$

Принимая во внимание равенства (2.56), (2.57) и (2.58), приведем последнее уравнение к виду

$$r\sum[A_2A_3]+2\sum[A_4A_3]=0.$$

Уравнение пучка комплексов будет иметь вид

$$\lambda p^{24}+(p^{23}-p^{14})+\frac{r}{2}p^{34}=0. \qquad (2.60)$$

Плоскость, полярно соответствующая точке A_3 в нуль-системе каждого из комплексов пучка (2.60), имеет уравнение

$$\xi^2-\frac{r}{2}\xi^4=0.$$

Эта плоскость совпадает с плоскостью $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4$ ($\xi^2=0$) тогда и только тогда, когда

$$r=0. \qquad (2.61)$$

В таком случае уравнение (1.16), определяющее инфлекционные центры, приведется к виду

$$qt^4+2\gamma t^3=0.$$

Следовательно, точка $A_1(t=0)$ является тройным инфлекционным центром. Но это означает, что конгруэнция K есть конгруэнция K_3.

Поскольку конгруэнция K_3 несимметрична относительно своих фокальных поверхностей, то мы ее назовем конгруэнцией, отнесенной к своей фокальной поверхности Σ_1.

Таким образом, **чтобы построить произвольный комплекс с тройным инфлекционным центром на каждом луче (комплекс C_3), следует взять произвольную конгруэнцию K_3, отнесенную к своей фокальной поверхности Σ_1, и через каждую точку этой поверхности в фокальной плоскости, не касающейся Σ_1, провести пучок прямых.**

Покажем, что на всякой поверхности с достаточно большим произволом можно провести однопараметрическое семейство линий, касательные к которым образуют конгруэнцию K_3, отнесенную к этой поверхности.

Действительно, пусть Σ_1 — произвольная поверхность, A_1 — текущая точка ее и $A_1A_3A_4$ — касательная плоскость. В таком случае

$$\omega_1^2=0. \qquad (2.62)$$

Главными формами семейства тетраэдров, присоединенных к поверхности, будут формы ω_1^3 и ω_1^4. Их мы примем за базисные формы на поверхности.

Продолжая равенство (2.62), найдем

$$\omega_3^2=a\omega_1^3+b\omega_1^4,$$
$$\omega_4^2=b\omega_1^3+c\omega_1^4.$$

Принимая за ребра асимптотические касательные к поверхности Σ_1, будем иметь $a=0$, $c=0$, а потому

$$\omega_3^2=b\omega_1^4,\quad \omega_4^2=b\omega_1^3.$$

В таком случае

$$dA_3=\omega_3^1A_1+\omega_1^4bA_2+\omega_3^3A_3+\omega_3^4A_4,$$
$$dA_4=\omega_4^1A_1+\omega_1^3bA_2+\omega_4^3A_3+\omega_4^4A_4.$$

Нормируя координаты вершины A_2, мы можем привести коэффициент b к 1. Следовательно,

$$\omega_3^2=\omega_1^4,\quad \omega_4^2=\omega_1^3. \qquad (2.63)$$

Продолжая эти равенства, найдем

$$\omega_3^4=B\omega_1^4+C\omega_1^3,$$
$$\omega_4^3=D\omega_1^4+A\omega_1^3, \qquad (2.64)$$
$$-\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=2A\omega_1^4+2B\omega_1^3,$$

Канонизируем тетраэдр, зафиксировав возможно большее число коэффициентов A, B, C, D. С этой целью найдем, прежде всего, соприкасающуюся квадрику Ли. Как известно, квадрикой Ли называется квадрика, проходящая через три бесконечно близких касательных к асимптотическим линиям одного семейства, проведенных вдоль асимптотической второго семейства, при этом квадрика оказывается одной и той же независимо от того, какое семейство назвать первым, а какое вторым.

Равенства (2.63) показывают, что ребра A_1A_3 и A_1A_4 сопровождающего тетраэдра касаются соответственно асимптотических $\omega_1^4=0$ и $\omega_1^3=0$.

Запишем уравнение квадрики с текущей точкой P в виде

$$\sum aPP=0.$$

В таком случае факт принадлежности к этой квадрике ребра $A\,A_3$ будет определяться тремя равенствами

$$\sum aA_1A_1=0,\ \sum aA_1A_3=0,\ \sum aA_3A_3=0. \qquad (2.65)$$

Продифференцируем эти равенства два раза в направлении $\omega_1^3=0$ (это и будет означать, что квадрика (2.65) проходит через три бесконечно близких асимптотических касательных A_1A_3 вдоль асимптотической $\omega_1^3=0$).

Принимая во внимание (2.62), (2.63), будем иметь

$$\sum aA_1A_4=0,\ \sum a(A_1A_2+A_3A_4)=0,\ \sum a(A_2A_3+BA_3A_4)=0,$$

$$\sum aA_4A_4=0,\ \sum a(AA_3A_4+A_2A_4)=0,\ \sum a\left(\frac{1}{\omega_1^4}[B(\omega_4^4-\omega_2^2)-\right.$$

$$\left.-2AB\omega_1^4+B^*\omega_1^4+\omega_2^4-\omega_3^1]A_3A_4+A_2A_2\right)=0, \qquad (2.66)$$

где

$$B^*=\frac{[dB\omega_1^3]}{[\omega_1^4\omega_1^3]}.$$

Если выбрать ребра A_1A_2 и A_3A_4 так, чтобы они были полярно сопряжены относительно квадрики Ли, а вершина A_2 лежала на ней, то к уравнениям (2.65) и (2.66) должны быть добавлены уравнения

$$\sum aA_2A_3=0,\ \sum aA_3A_4=0,\ \sum aA_2A_2=0. \qquad (2.67)$$

Условие совместности уравнений (2.65), (2.66), (2.67) имеет вид

$$B=0,\quad A=0,\quad \omega_2^4-\omega_3^1=0 \quad\ \omega\ \ =0).$$

В таком случае (см. (2.64))

$$\omega_3^4=C\omega_1^3,\quad \omega_4^3=D\omega_1^4,\quad -\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0.$$

Кроме того, мы теперь, очевидно, будем иметь

$$\omega_2^4-\omega_3^1=\kappa\omega_1^3, \qquad (2.68)$$

где κ — некоторый коэффициент.

Нормированием координат вершин A_3 и A_4 мы можем привести коэффициенты C и D к 1. Тогда

$$\omega_3^4=\omega_1^3,\quad \omega_4^3=\omega_1^4,\quad -\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0. \qquad (2.69)$$

Продолжая последнее равенство, найдем

$$\omega_2^3-\omega_4^1=l\omega_1^4, \qquad (2.70)$$

где l — некоторый коэффициент.

Дальнейшая канонизация репера будет основана на использовании директрис Вильчинского.

Записывая уравнение линейного комплекса с текущим лучом PQ в виде

$$\sum a[PQ]=0,$$

мы получим условие принадлежности к этому комплексу асимптотической касательной к линии $\omega_1^4=0$ в виде

$$\sum a[A_1A_3]=0 \qquad (2.71)$$

(заметим, что прежде, например, (2.59), мы записывали уравнение линейного комплекса, опуская коэффициенты a, но подразумевая их). Найдем линейный комплекс, который определяется пятью бесконечно близкими касательными к линии $\omega_1^4=0$. С этой целью продифференцируем четыре раза в направлении $\omega_1^4=0$ уравнение (2.71):

$$\sum a[A_1A_4]=0,\ \sum a([A_1A_2]+[A_3A_4])=0,\ \sum a[A_2A_3]=0,$$

$$k\sum a[A_4A_3]+\sum a[A_2A_4]=0. \qquad (2.72)$$

В локальном тетраэдре $A_1A_2A_3A_4$ уравнение соприкасающегося линейного комплекса запишется в виде

$$p^{34}-p^{12}+kp^{24}=0. \qquad (2.73)$$

Подобным же образом запишется уравнение линейного комплекса, проходящего через 5 бесконечно близких касательных к асимптотической $\omega_1^3=0$:

$$p^{43}-p^{12}+lp^{23}=0. \qquad (2.74)$$

Пучок линейных комплексов, образованный комплексами (2.73) и (2.74), имеет уравнение

$$(1-\lambda)p^{34}-(1+\lambda)p^{12}+kp^{24}+\lambda lp^{23}=0.$$

Этому пучку принадлежат два специальных комплекса, параметры которых удовлетворяют уравнению

$$1-\lambda^2=0.$$

Уравнения комплексов имеют соответственно вид

1. $\lambda=-1,\quad 2p^{34}+kp^{24}-lp^{23}=0,$
2. $\lambda=+1,\quad -2p^{12}+kp^{24}+lp^{23}=0.$

Оси этих комплексов имеют соответственно координаты

1. $q^{34}=0,\quad q^{24}=0,\quad q^{23}=0,\quad q^{12}=2,\quad q^{13}=-k,\quad q^{14}=-l,$
2. $q^{12}=0,\quad q^{24}=0,\quad q^{23}=0,\quad q^{34}=-2,\quad q^{13}=-k,\quad q^{14}=l.$

Оси специальных соприкасающихся линейных комплексов называются **директрисами Вильчинского.** Легко видеть, что первая директриса проходит через точку A_1 (1:0:0:0) поверхности и не лежит в касательной плоскости к поверхности. Вторая директриса, наоборот, лежит в касательной плоскости ($\xi^3=0$) и не проходит через точку A_1. Принимая первую директрису за ребро A_1A_2 тетраэдра, заключим, что

$$\kappa=0,\ l=0. \tag{2.75}$$

Тогда вторая директриса окажется совмещенной с ребром A_3A_4, т. е. мы получили известный результат, гласящий, что **директрисы Вильчинского полярно сопряжены относительно соприкасающейся квадрики Ли.**

Равенства (2.68) и (2.70) принимают вид

$$\omega_2^4-\omega_3^1=0,\ \ \omega_2^3-\omega_4^1=0\,. \tag{2.76}$$

Зададим теперь однопараметрическое семейство кривых на поверхности Σ_1 с помощью дифференциального уравнения

$$\omega_1^4=\alpha\omega_1^3, \tag{2.77}$$

где α — некоторая функция от параметров асимптотических линий. В таком случае касательная к линиям этого семейства определяется точкой

$$dA_1=\omega_1^1A_1+\omega_1^3(A_3+\alpha A_4).$$

При перемещении точки A_1 по поверхности Σ_1, прямая

$$q=[A_1, A_3+\alpha A_4] \tag{2.78}$$

описывает конгруэнцию, первым фокусом которой является точка A_1. Найдем второй фокус. Пусть этот фокус совпадает с точкой

$$F=A_3+\alpha A_4+tA_1.$$

Отсюда

$$dF=(\omega_3^1+\alpha\omega_4^1+dt+t\omega_1^1)A_1+(\omega_3^2+\alpha\omega_4^2+t\omega_1^2)A_2+$$
$$+(\omega_3^3+\alpha\omega_4^3+t\omega_1^3)A_3+(\omega_3^4+d\alpha+\alpha\omega_4^4+t\omega_1^4)A_4\,.$$

Точка dF должна располагаться на прямой q; следовательно,

$$\begin{gathered}\omega_3^2+\alpha\omega_4^2+t\omega_1^2=0\,,\\ \omega_3^4+d\alpha+\alpha\omega_4^4+t\omega_1^4-\alpha(\omega_3^3+\alpha\omega_4^3+t\omega_1^3)=0.\end{gathered} \tag{2.79}$$

Выпишем уравнения (2.62), (2.63), (2.69), (2.76), осуществляющиеся для тетраэдра, построенного на директрисах Вильчинского:

$$\begin{gathered}\omega_1^2=0,\quad \omega_3^2=\omega_1^4,\quad \omega_4^2=\omega_1^3,\quad \omega_3^4=\omega_1^3,\quad \omega_4^3=\omega_1^4,\\ \omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4=0,\ \ \omega_2^3-\omega_4^1=0,\ \ \omega_2^4-\omega_3^1=0.\end{gathered} \tag{2.80}$$

Продолжение равенств

$$\omega_3^4=\omega_1^3,\ \ \omega_4^3=\omega_1^4,\ \ \omega_2^3-\omega_4^1=0\,,\quad \omega_2^4-\omega_3^1=0$$

дает

$$\begin{gathered}2\,\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_4^4=h\omega_1^3,\quad 2\omega_4^4-\omega_1^1-\omega_3^3=H\omega_1^4,\\ \omega_2^1=a\omega_1^3+b\omega_1^4,\ \ \omega_3^1=b\omega_1^3+c\omega_1^4,\ \ \omega_4^1=e\omega_1^3+a\omega_1^4.\end{gathered} \tag{2.81}$$

Поскольку

$$(\omega_1^3)'\neq 0,\ (\omega_1^4)'\neq 0\,,$$

то ω_1^3 и ω_1^4 не есть полные дифференциалы. Положим

$$\omega_1^3=du,\ \ \omega_1^4=dv,$$

Положим, кроме того,

$$d\alpha=\alpha_1\,du+\alpha_2\,dv,$$

(α_1 и α_2 — в общем случае не есть частные производные функции α).

Равенства (2.79) с учетом (2.80) и (2.81) сведутся к одному равенству

$$t=\frac{1}{2\alpha}\left(1+\alpha_1-\alpha\alpha_2+\alpha^3-\alpha\frac{H\alpha+h}{3}\right). \tag{2.82}$$

Этим равенством и определяется второй фокус конгруэнции (2.77).

Ищем пучок линейных комплексов, содержащих 4 бесконечно близких прямых q вдоль кривой σ_1, касающейся этих прямых. В соответствии с соглашением, касающимся записи уравнения линейного комплекса, мы будем иметь:

$$\sum q=d\sum q=d^2\sum q=d^3\sum q=0$$

(ради упрощения мы отбросили букву a), где q определится равенством (2.78). В развернутом виде эти равенства будут

$$\sum([A_1A_3]+\alpha[A_1A_4])=0. \qquad (2.83)$$

$$\sum([A_1A_2]+s[A_1A_4])=0, \quad s=\frac{1}{2\alpha}\left(1+\frac{d\alpha}{du}-\alpha^3+\alpha\frac{\alpha H-h}{3}\right); \qquad (2.84)$$

$$\sum(s[A_3A_4]-[A_2A_3]-\alpha[A_2A_4]+x[A_1A_4])=0, \quad x=-\frac{s}{3}(2h+$$

$$+\alpha H)+\frac{ds}{du}-s^2-s\alpha^2-e\alpha-a\alpha^2+b+c\alpha, \qquad (2.85)$$

$$\sum(m[A_3A_4]+y[A_1A_4])=0, \quad y=\frac{dx}{du}+\ldots, \quad m=x-s^2+\ldots \qquad (2.86)$$

(точками обозначены члены, не содержащие $\frac{dx}{du}$).

Записываем уравнение пучка линейных комплексов (см. ((2.83)—(2.86)).

$$-sp^{12}-\alpha p^{13}+p^{14}-\left(\frac{sy}{m}+\alpha\nu-x\right)p^{23}+\nu p^{24}-\frac{y}{m}p^{34}=0, \qquad (2.87)$$

где ν — параметр пучка.

Плоскость, сопряженная с точкой

$$F=A_3+\alpha A_4+tA_1$$

(где t определится через (2.82)) в нуль-системе каждого из комплексов (2.87), имеет уравнение

$$\left(t-\frac{y}{m}\right)(\alpha\xi^3-\xi^4)+\left(st+x-\frac{1}{m}sy\right)\xi^2=0.$$

Для того, чтобы эта плоскость совпадала с плоскостью $A_1A_3A_4$, т. е. с касательной плоскостью поверхности Σ_1 в точке A_1, необходимо и достаточно соблюдение следующего условия:

$$t-\frac{y}{m}=0. \qquad (2.88)$$

Внесем в равенство (2.88) значение t по формуле (2.82), а также значения y и m по формулам (2.83)—(2.86)

$$\frac{1}{2\alpha}\frac{d^3\alpha}{du^3}-m\left(1+\alpha_1-\alpha\alpha_2+\alpha^3-\alpha\frac{H\alpha+h}{3}\right)+\ldots=0. \qquad (2.89)$$

Или (в символической записи)

$$\alpha_{uuu}+3\alpha_{uuv}\alpha+3\alpha_{uvv}\alpha^2+\alpha_{vvv}\alpha^3+\ldots=0. \qquad (2.90)$$

Полученное уравнение является уравнением в частных производных третьего порядка, не сводящееся к обыкновенному уравнению в силу того, что в скобках в (2.89) дифференцирование производится не вдоль (2.77), а вдоль сопряженного направления.

При достаточно общих предположениях о поверхности Σ_1 уравнение (2.90) имеет решение, зависящее от трех произвольных функций одного аргумента (теорема Ковалевской). С таким произволом, следовательно, для каждой поверхности существует конгруэнция K_3, отнесенная к этой поверхности.

§ 4. Комплексы с четырехкратным инфлекционным центром на каждом луче (комплексы C_4)

Совместим вершину A_1 сопровождающего тетраэдра с четырехкратным центром. В таком случае (см. (1.16)).

$$p=\beta=2\alpha-r=\gamma=0, \quad q\neq 0 \qquad (2.91)$$

(равенство нулю q вместе с предыдущими равенствами означало бы, что комплекс-линейный). Из (1.41) теперь немедленно следует

$$p_1=p_2=p_3=0, \quad r_1=h=0, \quad r_2=2q_1, \quad r_3=0. \qquad (2.92)$$

Следовательно,

$$\omega_1^2=\frac{q_3}{2q}\omega_1^4-\frac{r_2}{2q}\omega_2^4,$$

а потому

$$dA_1=\omega_1^1A_1+\left(A_4+\frac{q_3}{2q}A_2\right)\omega_1^4-\left(A_3+\frac{r_2}{q}A_2\right)\omega_2^4.$$

Поскольку дифференциал dA_1 зависит лишь от двух существенных форм ω_1^4, ω_2^4, то это означает, что точка A_1 описывает некоторую поверхность (Σ). Примем касательную плоскость к этой поверхности за плоскость $A_1A_3A_4$. В таком случае

$$\omega_1^2=0, \qquad (2.93)$$

а потому

$$q_3=0, \quad r_2=0. \qquad (2.94)$$

Из равенств (1.10) находим

$$\omega_3^4 = -\alpha\omega_1^4,$$

$$\omega_2^1 - \omega_4^3 = \alpha\omega_2^3 + q\omega_1^4,$$

$$\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = r\omega_2^4. \qquad (2.95)$$

Кроме того,

$$-dr + \frac{r}{2}(\omega_3^3 - \omega_2^2 + \omega_4^4 - \omega_1^1) - 2(\omega_4^2 + \omega_3^1) = 0. \qquad (2.96)$$

Продифференцируем внешним образом последнее равеиство Учитывая значение dr, определяемое этим же равенством, после упрощеиий будем иметь

$$2[\omega_4^1(\omega_3^4 + \alpha\omega_1^4)] - 2[\omega_3^2, \omega_2^1 - \omega_4^3 - \alpha\omega_2^3] -$$

$$-[\omega_4^2 - \omega_3^1, \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4 - r\omega_2^4] = 0$$

(см. (2.92)). Принимая во внимание (2.95) сведем последнее равеиство к виду

$$[\omega_3^2\omega_1^4] = 0.$$

Отсюда

$$\omega_3^2 = m\omega_1^4. \qquad (2.97)$$

В таком случае

$$d[A_1A_3] = (\omega_1^1 + \omega_3^3)[A_1A_3] + \omega_1^4([A_4A_3] + m[A_1A_2] - \alpha[A_1A_4]).$$

Из того обстоятельства, что дифференциал $d[A_1A_3]$ зависит лишь от одной существенной формы ω_1^4, следует, что **ребро A_1A_3 описывает некоторую линейчатую поверхность**. Очевидно, этой поверхностью **является поверхность Σ, описываемая четырехкрагным центром A_1.**

Совместим точку A_3 с точкой прикосновения плоскости $A_1A_2A_3$ с поверхностью Σ. В таком случае

$$\omega_3^4 = 0, \qquad (2.98)$$

а потому

$$\alpha = r = 0, \qquad (2.99)$$

$$\omega_4^2 + \omega_3^1 = 0 \qquad (2.100)$$

(см. (2.91), (2.95), (2.96). Дифференцируя внешним образом равенство $\omega_3^4 = 0$, получим

$$\omega_3^1 = m\omega_2^4 + n\omega_1^4$$

(n — параметр продолжения).

Поскольку теперь

$$dA_3 = \omega_3^1A_1 + m\omega_1^4A_2 + \omega_3^3A_3,$$

то, нормируя координаты вершины A_2, мы можем привести коэффициент m к 1:

$$m = 1. \qquad (2.101)$$

(Равенство $m=0$ означало бы, что поверхность Σ—развертывающаяся, а точка A_3 описывала бы на ней ребро возврата. Нормированием (2.101) этот случай из рассмотрения исключается).

В таком случае

$$\omega_3^2 = \omega_1^4.$$

Дифференциальное продолжение этого равенства приводит к уравнению

$$\omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_1^1 - \omega_4^4 = l\omega_1^4 \qquad (2.102)$$

(l — параметр продолжения).

Уравнения инфинитезимального смещения сопровождающего тетраэдра имеют тогда вид

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0, \quad \omega_1^2 = 0, \quad \omega_3^4 = 0, \quad \omega_3^2 = \omega_1^4, \quad \omega_3^1 + \omega_4^2 = 0,$$

$$\omega_2^1 - \omega_4^3 = q\omega_1^4, \quad \omega_2^2 - \omega_4^4 = \frac{l}{2}\omega_1^4, \quad \omega_3^1 = \omega_2^4 + n\omega_1^4, \qquad (2.103)$$

$$\omega_3^3 - \omega_1^1 = -\frac{l}{2}\omega_1^4.$$

Ребро A_1A_3 остается неподвижным, если $\omega_1^4 = 0$. Легко видеть, что при всех перемещениях сопровождающего тетраэдра, оставляющих неподвижным ребро A_1A_3, остаются неподвижными точки

$$M_1 = A_1 + iA_3, \quad M_3 = A_1 - iA_3 \; (i = \sqrt{-1}). \qquad (2.104)$$

Эти точки гармонически разделяют вершины A_1 и A_3 тетраэдра. Следовательно, **на каждой образующей A_1A_3 линейчатой поверхности Σ между точками A_1 и A_3 устанавливается инволютивное соответствие, двойными точками которого являются точки M_1 и M_3.**

Если точка A_1 остается на месте, то $\omega_1^4 = \omega_2^4 = 0$. В таком случае

$$d(A_1A_2A_3) = (\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3)(A_1A_2A_3),$$

т. е. плоскость $A_1A_2A_3$ остается неподвижной; следовательно, луч A_1A_2 описывает в этой плоскости пучок с центром в точке A_1.

Таким образом, **всякий комплекс C_4 распадается в двупараметрическое семейство плоских пучков, вершины которых описывают некоторую линейчатую поверхность Σ, а плоскости касаются той же поверхности, причем на каждой образующей соответствие между каждой вершиной и соответствующей ей точкой касания является некоторой инволюцией.**

Легко доказывается справедливость равенств

$$(d^2M_1, dM_1, A_1A_3) = 0, \quad (d^2M_3, dM_3, A_1A_3) = 0,$$

а это означает, **что двойные точки M_1M_3 инволюции описывают на поверхности Σ две асимптотические линии.** Но в таком случае можно говорить об инволюции не между точками той или иной образующей, а об инволюции криволинейных асимптотических поверхности Σ.

Покажем, что найденные свойства полностью характеризуют комплекс C_4.

Действительно, пусть точки A_1 и A_3 подвижного тетраэдра описывают некоторую линейчатую поверхность Σ (располагаясь на одной ее образующей), причем эта последняя касается в точке A_1 плоскости $A_1A_3A_4$, а в точке A_3 — плоскости $A_1A_2A_3$. В таком случае

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_3^4 = 0. \tag{2.105}$$

Так как ребро A_1A_3 описывает линейчатую поверхность, то дифференциал

$$d[A_1A_3] = (\omega_1^1 + \omega_3^3)[A_1A_3] + \omega_1^4[A_4A_3] + \omega_3^2[A_1A_2]$$

должен зависеть существенным образом только от одной формы (пусть это будет главная форма ω_1^4). Следовательно,

$$\omega_3^2 = m\omega_1^4,$$

где m — некоторый множитель пропорциональности. Нормированием координат вершины A_2, как это было сделано выше, можно привести коэффициент m к 1

$$m = 1, \quad \omega_3^2 = \omega_1^4. \tag{2.106}$$

Продолжая равенства (2.105) и (2.106), будем иметь

$$\omega_4^2 = \omega_1^3 + k\omega_1^4, \quad \omega_3^1 = \omega_2^4 + n\omega_1^4. \tag{2.107}$$

$$\omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_1^1 - \omega_4^4 = l\omega_1^4.$$

Проведем в плоскости $A_1A_2A_3$ через точку A_1 пучок прямых. Мы получим некоторый линейчатый комплекс. Помещая точку A_2 на луч комплекса, определим главные формы $\omega_1^3, \omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4$ инфинитезимального смещения его сопровождающего тетраэдра. Мы можем принять три из них, например $\omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4$, за базисные. Тогда, если мы примем за плоскость $A_1A_2A_4$ плоскость, касательную к конусу лучей комплекса с вершиной в точке A_2 (точка A_2 — произвольная точка луча) (в точке A_1 конус лучей вырождается в плоский пучок, с плоскостью которого совпадает плоскость $A_1A_2A_3$), то путем подходящего нормирования координат вершины A_3 мы можем выразить форму ω_1^3 через базисные формы следующим образом:

$$\omega_1^3 = -\omega_2^4 \tag{2.108}$$

(см. (1.8)).

Дифференциальное продолжение равенства (2.108) имеет вид

$$\begin{gathered}\omega_1^2 - \omega_3^4 = p\omega_2^3 + \alpha\omega_1^4 + \beta\omega_2^4,\\ \omega_2^1 - \omega_4^3 = \alpha\omega_2^3 + q\omega_1^4 - \gamma\omega_2^4,\\ \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = \beta\omega_2^3 - \gamma\omega_1^4 + r\omega_2^4.\end{gathered} \tag{2.109}$$

Инфлекционные центры луча комплекса по-прежнему будут определяться уравнением

$$qt^4 + 2\gamma t^3 - (2\alpha - r)t^2 + 2\beta t + p = 0. \tag{2.110}$$

В силу (2.105) справедливы равенства

$$p = \alpha = \beta = 0. \tag{2.111}$$

Установим теперь между криволинейными асимптотическими поверхности Σ некоторое инволютивное соответствие. Тогда при перемещении точки A_1 вдоль одной асимптотической точка A_3 будет перемещаться вдоль другой, соответствующей ей. Следовательно, дифференциальные уравнения

$$(d^2A_1, dA_1, A_1A_3) = 0, \quad (d^2A_3, dA_3, A_1A_3) = 0,$$

определяющие асимптотические, проходящие через точки A_1 и A_3, должны совпадать. Выполняя дифференцирование, найдем

$$\omega_1^4(k\omega_1^4 - 2\omega_2^4) = 0, \quad \omega_1^4(n\omega_1^4 + 2\omega_2^4) = 0.$$

Равенство $\omega_1^4 = 0$ определяет прямолинейные образующие поверхности Σ. Следовательно, соответствие криволинейных асимптотических сведется к равенству

$$k = -n,$$

а потому

$$\omega_4^2+\omega_3^1=0. \tag{2.112}$$

Пусть

$$M_1=A_1+bA_3,\ M_3=A_1-bA_3$$

двойные точки инволютивного соответствия на образующей A_1A_3. При перемещении точек A_1 и A_3 по неподвижному ребру точки M_1 и M_3 остаются неподвижными, т. е.

$$[dM_1,M_1]\equiv 0,\quad [dM_3,M_3]\equiv 0\quad (\omega_1^4=0).$$

Это приводит к равенствам

$$-\omega_2^4+db+b(\omega_3^3-\omega_1^1)-b^2\omega_3^1=0,$$

$$(\omega_1^4=0).$$

$$-\omega_2^4-db-b(\omega_3^3-\omega_1^1)-b^2\omega_3^1=0.$$

Складывая эти равенства и учитывая (2.108), найдем

$$(1+b^2)\,\omega_2^4=0,$$

откуда

$$b=\pm i. \tag{2.113}$$

При перемещении по поверхности Σ точки M_1 и M_3, очевидно, будут описывать криволинейные асимптотические, а потому

$$(d^2M_1,M_1,A_1A_3)=0,\ (d^2M_3,M_3,A_1A_3)=0.$$

В силу (2.113) эти равенства сводятся к одному соотношению

$$\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_4^4=0,$$

или

$$-\gamma\omega_1^4+r\omega_2^4=0.$$

Это равенство справедливо при любых значениях ω_1^4 и ω_2^4, а потому

$$\gamma=0,\ r=0. \tag{2.114}$$

Уравнение (2.110) принимает теперь вид

$$qt^4=0,$$

а это означает, что точка $A_1(t=0)$ является четырехкратным инфлекционным центром.

Таким образом, **чтобы построить произвольный комплекс, каждый луч которого содержит четырехкратный инфлекционный центр, следует взять произвольную линейчатую поверхность Σ, задать между ее криволинейными асимптотическими произвольную инволюцию и через каждую точку одной из этих асимптотических в плоскости, касающейся поверхности Σ в точке соответствующей асимптотической провести пучок прямых. Поверхность Σ составит тогда геометрическое место четырехкратных центров построенного комплекса.**

Глава третья

КВАЗИСПЕЦИАЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСЫ

§ 1. Общие соображения

Каждый из комплексов с кратными инфлекционными центрами представляет собой двупараметрическую совокупность плоских пучков, вершины которых M описывают некоторую поверхность Σ, а плоскости Π огибают некоторую другую поверхность σ. Известно, далее, что в каждой плоскости располагается однопараметрическая совокупность лучей произвольного комплекса, огибающая в ней некоторую плоскую кривую s. Взяв произвольную двупараметрическую совокупность плоскостей, которые всегда можно мыслить себе касательными к некоторой поверхности σ (с теми или иными вырождениями последней), можем рассматривать произвольный комплекс как совокупность касательных к конгруэнции кривых s, расположенных в этих плоскостях. В таком случае каждый из комплексов с кратными инфлекционными центрами будет обладать тем свойством, что у него в каждой касательной плоскости некоторой вполне определенной поверхности σ совокупность лучей вырождается в пучок и, следовательно, кривая s вырождается в точку M — центр этого пучка. Легко видеть, что таким же свойством обладает и линейный комплекс, для которого поверхность σ является произвольной, и специальный комплекс, представляющий собой совокупность касательных к некоторой поверхности σ. В последнем случае сама поверхность σ оказывается носительницей вершин плоских пучков, на которые расслаивается комплекс.

Совершенно очевидно, что специальными, линейными комплексами, а также комплексами с кратными инфлекционными центрами не исчерпывается класс комплексов, расслаивающихся в двупараметрическую совокупность плоских пучков. Назовем такие комплексы, по их сходству со специальными комплексами, **квазиспециальными комплексами**. Элементарные свойства таких комплексов будут служить предметом рассмотрения в настоящей главе.

Будем придерживаться впредь следующих обозначений:

$\boldsymbol{M}$ — вершина плоского пучка комплекса,
Π — плоскость пучка,
Σ — поверхность, описываемая точкой $\boldsymbol{M}$,
σ — поверхность, огибаемая плоскостью Π,
$\boldsymbol{P}$ — точка касания поверхности σ с плоскостью Π,
l — линия пересечения плоскости Π с касательной плоскостью поверхности Σ,
К — конгруэнция, описанная линией l,
Σ^* — вторая фокальная поверхность конгруэнции K (первой фокальной поверхностью является, очевидно, сама поверхность Σ),
$\boldsymbol{M}^*$ — второй фокус конгруэнции K (первым является точка $\boldsymbol{M}$).

У комплекса C_2, каждый луч которого содержит один двойной инфлекционный центр, точка $\boldsymbol{M}$ совпадает с этим центром, поверхность Σ — с поверхностью Σ_1 (см. обозначения предыдущей главы), поверхность σ — с поверхностью Σ^*, которая в свою очередь совпадает с поверхностью Σ_3. Точка $\boldsymbol{P}$ совпадает с точкой $\boldsymbol{M}^*$.

У комплекса C_{22} с двумя двойными инфлекционными центрами на каждом луче имеет место двукратное расслоение в двупараметрическую совокупность плоских пучков. При этом, если в качестве поверхности Σ принять одну из фокальных поверхностей конгруэнции W, определяющей комплекс, в качестве поверхности Σ^* следует взять вторую фокальную поверхность этой конгруэнции, и наоборот.

В случае комплекса C_3 с тройным инфлекционным центром на каждом луче мы имеем ту же конструкцию, что и для комплекса C_2, только конгруэнция, фокальными поверхностями которой являются поверхности Σ и Σ^*, будет уже не произвольной, а некоторой конгруэнцией K_3, отнесенной к поверхности Σ.

У комплекса C_4 с четырехкратным инфлекционным центром поверхность σ совпадает с поверхностью Σ, которая теперь представляет собой произвольную линейчатую поверхность, однако, в отличие от специального комплекса, точка $\boldsymbol{P}$ не совпадает с точкой $\boldsymbol{M}$, а лишь располагается с ней на одной образующей. Как и в трех предыдущих случаях, поверхность σ совпадает теперь с поверхностью Σ^*.

Наконец, в случае специального комплекса поверхность σ совпадает с поверхностью Σ, точка $\boldsymbol{M}$ — с точкой $\boldsymbol{P}$, поверхность Σ^* и точка $\boldsymbol{M}^*$ на ней становятся неопределенными.

Таким образом, у каждого из комплексов с кратными инфлекционными центрами поверхность σ совпадает с поверхностью Σ^*, у каждого специального комплекса поверхность σ совпадает с поверхностью Σ. Между этими двумя крайними случаями, очевидно, располагается обширный класс квазиспециальных комплексов, у которых такого совпадения нет.

Очевидной представляется справедливость следующего предложения:

Чтобы построить произвольный квазиспециальный комплекс, следует взять три произвольные поверхности Σ, Σ^*, σ, принять две из них, например, Σ и Σ^*, за фокальные поверхности некоторой конгруэнции, через каждый луч этой конгруэнции провести плоскость, касающуюся поверхности σ, и в этой плоскости через точку одной какой-либо фокальной поверхности, например Σ, провести пучок прямых.

Ниже мы подтвердим справедливость этого предложения также и аналитическими выкладками.

Поскольку поверхности Σ, Σ^* и σ могут быть выбраны совершенно произвольно, то мы должны заключить, что **класс квазиспециальных комплексов определяется с произволом в три функции двух аргументов.**

Конус лучей квазиспециального комплекса, имеющий вершину в точке $\boldsymbol{M}$, вырождается в плоскость Π. Эта плоскость, таким образом, соответствует точке $\boldsymbol{M}$ в нормальной корреляции на каждом луче, проходящем через эту точку. Это означает, что плоскость Π является стационарной. Следовательно, точка $\boldsymbol{M}$ оказывается инфлекционным центром луча. Для точки $\boldsymbol{M}$ и плоскости Π будут выполнены равенства систем (1.12) и (1.14). Однако, если в общем случае третьи уравнения этих систем не будут выполняться при подстановке в них координат инфлекционных центров, то в случае квазиспециального комплекса подстановка координаты точки $\boldsymbol{M}$ обращает эти уравнения в тождества.

Таким образом, если в некоторой точке конус лучей комплекса вырождается в плоский пучок прямых, то эта точка может быть только инфлекционным центром всех указанных прямых.

Очевидно, что **если комплекс распадается в двупараметрическое семейство плоских пучков (следовательно, вершины таких пучков совпадают с инфлекционными центрами лучей), то центры этих пучков описывают некоторую поверхность Σ.**

Докажем справедливость обратного предложения:

Если совокупность положений некоторого инфлекционного центра вырождается в поверхность Σ, то конус лучей комплекса, имеющий вершиной этот центр, вырождается в плоский пучок, и, следовательно, комплекс распадается в двупараметрическое семейство плоских пучков.

Действительно, примем указанный инфлекционный центр за вершину $\boldsymbol{A}_1$ сопровождающего тетраэдра, а плоскость, касательную к поверхности Σ, за грань $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4$ этого тетраэдра. Это, очевидно, не будет противоречить такой партикуляризации (канонизации) тетраэдра, в результате которой получены равенства (1.8) и (1.10), в частности, равенства

$$\omega_1^3 = -\omega_2^4,$$

$$\omega_1^2 - \omega_3^4 = p\omega_2^3 + \alpha\omega_1^4 + \beta\omega_2^4.$$

Из того факта, что точка A_1 совпадает с инфлекционным центром луча, следует, что

$$p = 0,$$

а из факта совпадения плоскости $A_1A_3A_4$ с касательной плоскостью поверхности Σ — равенство

$$\omega_1^2 = 0.$$

Следовательно,

$$-\omega_3^4 = \alpha\omega_1^4 + \beta\omega_2^4.$$

Равенства

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \omega_1^3 A_3 + \omega_1^4 A_4,$$

$$d(A_1A_2A_3) = (\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3)(A_1A_2A_3) + \omega_1^4(A_4A_2A_3) +$$
$$+ \omega_2^4(A_1A_4A_3) + \omega_3^4(A_1A_2A_4)$$

показывают теперь, что при неподвижной точке A_1 ($\omega_1^4 = \omega_2^4 = 0$) плоскость $A_1A_2A_3$ также остается неподвижной. Луч комплекса A_1A_2 описывает в этой плоскости пучок, а это и доказывает утверждение.

Поскольку каждый луч комплекса содержит в общем случае 4 инфлекционных центра, то a priori возможны четыре случая расслоения комплекса в двупараметрические семейства плоских пучков:

1. Комплексы C^1, допускающие однократное расслоение.
2. Комплексы C^2, допускающие двукратное расслоение.
3. Комплексы C^3, допускающие троекратное расслоение.
4. Комплексы C^4, допускающие четырехкратное расслоение.

Мы ограничимся рассмотрением лишь комплексов C^1.

§ 2. Существование комплексов C^1

Примем инфлекционный центр, описывающий поверхность Σ, за вершину A_1 сопровождающего тетраэдра, а касательную плоскость к этой поверхности — за координатную плоскость

$A_1A_4A_3$. В таком случае, как это только что было показано (мы предполагаем, что тетраэдр партикуляризован так, что $\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0$, а дифференциальным продолжением последнего равенства являются равенства (1.10)).

$$p = 0, \omega_1^2 = 0, -\omega_3^4 = \alpha\omega_1^4 + \beta\omega_2^4. \tag{3.1}$$

Не трудно убедиться в том, что инфинитезимальные смещения построенного таким образом тетраэдра будут определяться следующей замкнутой относительно операции внешнего дифференцирования системой внешних дифференциальных уравнений

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0, \omega_1^2 = 0, [\omega_3^4\omega_1^4\omega_2^4] = 0, [\omega_3^2\omega_1^3] + [\omega_4^2\omega_1^4] = 0,$$
$$-[\omega_3^4\omega_2^3] + [\omega_2^1 - \omega_4^3, \omega_1^4] + [\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4, \omega_2^4] = 0. \tag{3.2}$$

Эта система эквивалентна следующей системе уравнений Пфаффа

$$\begin{gathered} \omega_1^3 + \omega_2^4 = 0, \omega_1^2 = 0, \omega_3^2 = -a\omega_2^4 + b\omega_1^4, \\ \omega_4^2 = -b\omega_2^4 + c\omega_1^4, -\omega_3^4 = \alpha\omega_1^4 + \beta\omega_2^4, \\ \omega_2^1 - \omega_4^3 = \alpha\omega_2^3 + q\omega_1^4 - \gamma\omega_2^4, \\ \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = \beta\omega_2^3 - \gamma\omega_1^4 + r\omega_2^4. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Характеристическая система форм, входящих в систему (3.2), кроме трех форм ω_2^4, ω_2^3, ω_1^4, независимых на интегральном многообразии, и двух форм $\omega_1^3 + \omega_2^4$, ω_1^2, тождественно равных нулю на этом многообразии, содержит еще 5 форм

$$\omega_3^4, \ \omega_3^2, \ \omega_4^2, \ \omega_2^1 - \omega_4^3, \ \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4.$$

Следовательно, в соответствии с обозначениями, принятыми в монографии С. П. Финикова «Метод внешних форм Картана». $\overline{q} = 5$. Кроме того, мы имеем в системе (3.2) лишь два независимых квадратичных соотношения; следовательно, в соответствии с теми же обозначениями, $s_1 = 2$. Поскольку рассматривается частный класс комплексов, то старший характер обращается в нуль, $s_3 = 0$. Но тогда из равенства $\overline{q} = s_1 + s_2 + s_3$ найдем $s_2 = 3$. Следовательно, число Картана $Q = s_1 + 2s_2 = 8$. Но точно такое же число коэффициентов мы имеем в системе (3.3), $N = 8$. Следовательно, критерий Картана для системы внешних дифференциальных уравнений (3.2) удовлетворен, а потому эта система — в инволюции. Ее решение существует с произволом в три функции двух аргументов.

§ 3. Строение комплексов C^1

Исследуем строение рассматриваемых комплексов.

Поскольку комплекс расслаивается в двупараметрическое семейство плоских пучков, центры которых описывают поверхность Σ, то при закрепленном центре пучка, т. е. при закрепленной вершине A_1 ($\omega_1^3 = \omega_1^4 = 0$) луч комплекса A_1A_2 описывает пучок. Равенством $\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0$ эта плоскость принята за координатную плоскость $A_1A_2A_3$. Линия пересечения плоскостей $A_1A_2A_3$ и $A_1A_3A_4$, т. е. ребро A_1A_3 касается поверхности Σ и, следовательно, описывает некоторую конгруэнцию. Обозначим последнюю символом K. Один из фокусов конгруэнции K совпадает с A_1. Поместим вершину A_3 во второй фокус. Тем самым мы пока исключаем из рассмотрения случай, когда конгруэнция K является параболической. Обозначим вторую фокальную поверхность конгруэнции K, как уже условлено, символом Σ^*. Если точка A_3 описывает на этой поверхности фокальную кривую, касающуюся ребра A_3A_1, то $\omega_3^2 = \omega_3^4 = 0$, или

$$-a\omega_2^4 + b\omega_1^4 = 0, \quad -\alpha\omega_1^4 + \beta\omega_2^4 = 0. \tag{3.4}$$

Равенства $\omega_2^4 = 0$, $\omega_1^4 = 0$ одновременно не могут иметь места, так как в противном случае точка A_1 оставалась бы на месте. Следовательно, должен равняться нулю определитель, составленный из коэффициентов при формах ω_2^4, ω_1^4, т. е.

$$\alpha a - \beta b = 0. \tag{3.5}$$

При перемещении (3.4) точка A_1 описывает на поверхности Σ фокальную кривую, не касающуюся ребра A_1A_3. Касательная к этой кривой будет представлять собой луч конгруэнции, являющейся преобразованием Лапласа от конгруэнции K. Примем эту касательную за ребро A_1A_4. В таком случае равенства (3.4) должны быть эквивалентны равенству $\omega_1^3 = 0$. Поскольку, однако, $\omega_1^3 = -\omega_2^4$ (см. 3.2), то из (3.4) находим

$$b = 0, \quad \alpha = 0 \tag{3.6}$$

(это, как мы видим не противоречит равенству (3.5)).

Равенства (3.3) примут вид (мы ограничимся выписыванием лишь некоторых из них)

$$\omega_3^2 = -a\omega_2^4, \quad \omega_4^2 = c\omega_1^4, \quad -\omega_3^4 = \beta\omega_2^4, \quad \omega_2^1 - \omega_4^3 = q\omega_1^4 - \gamma\omega_2^4. \tag{3.7}$$

Продифференцируем внешним образом равенство

$$\omega_3^2 = -a\omega_2^4.$$

Получим ковариант

$$[da + a(2\omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4) + \beta c\omega_1^4 - a\beta\omega_2^3, \omega_2^4] + [a\omega_2^1, \omega_1^4] = 0.$$

Отсюда

$$da + a(2\omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4) + \beta c\omega_1^4 - a\beta\omega_2^3 = A\omega_2^4 + B\omega_1^4,$$
$$a\omega_2^1 = B\omega_2^4 + C\omega_1^4, \tag{3.8}$$

где A, B, C — некоторые параметры продолжения.

Фиксируя ребро A_1A_4, мы тем самым фиксируем и плоскость $A_1A_2A_4$. Вспомним теперь, что равенством $\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0$ между совокупностью вершин A_2 на луче и совокупностью плоскостей $A_1A_2A_4$ устанавливается некоторое взаимно однозначное соответствие. Следовательно, равенствами (3.6) на каждом луче A_1A_2 фиксируется положение вершины A_2.

Пусть теперь точка A_1, а потому и плоскость $A_1A_2A_3$ и точка A_3 остаются на месте, следовательно, $\omega_1^4 = \omega_2^4 = 0$. Но в таком случае (см. (3.8)) $\omega_2^1 = 0$, а также (что нам понадобится в дальнейшем) $\omega_4^3 = 0$.

Поскольку теперь

$$dA_2 = \omega_2^2 A_2 + \omega_2^3 A_3,$$

то это означает, что точка A_2 описывает прямую, проходящую через точку A_3. Таким образом, если плоскость $A_1A_2A_4$, перемещаясь, проходит через одну и ту же прямую A_1A_4, сопряженную на поверхности Σ с прямой A_1A_3, то точка A_2, соответствующая этой плоскости в нормальной корреляции на луче комплекса, описывает прямую, проходящую через второй фокус конгруэнции A_1A_3 (первым является точка A_1).

Это свойство обобщается на произвольную прямую, проходящую через точку A_1 и расположенную в касательной плоскости поверхности Σ.

Пусть $m = [A_1, A_3 + xA_4]$ — одна из таких прямых. Потребуем, чтобы при фиксированной точке A_1 ($\omega_1^4 = \omega_2^4 = 0$) эта прямая оставалась неподвижной, т. е.

$$dm \equiv 0 \pmod{m, \omega_1^4, \omega_2^4}.$$

Отсюда

$$dx + x(\omega_4^4 - \omega_3^3) \equiv 0 \pmod{\omega_1^4, \omega_2^4}. \tag{3.9}$$

Следовательно,

$$dx + x(\omega_2^2 - \omega_1^1) \equiv x\beta\omega_2^3 \pmod{\omega_1^4, \omega_2^4} \tag{3.10}$$

(см. (3.3)).

Плоскость, проходящая через прямые A_1A_2 и m, имеет тангенциальные координаты

$$\overline{\mu} = (A_1A_2A_3) + x(A_1A_2A_4).$$

Сравнивая это с равенством (1.13), замечаем, что в нормальной корреляции на луче A_1A_2 плоскости μ соответствует точка

$$M = A_1 + xA_2.$$

Дифференцируя это равенство, будем иметь

$$dM \equiv \omega_1^1 A_1 + (dx + x\omega_2^2) A_2 + x\omega_2^3 A_3 \pmod{\omega_1^4, \omega_2^4}$$

(см. (3.10)). Пусть

$$L = dM + \lambda M$$

точка пересечения прямой $[M, dM]$ с ребром A_1A_3. Легко показать, что

$$\lambda = -\frac{1}{x}(dx + x\omega_2^2).$$

Следовательно, (см. (3.10)).

$$L \equiv \omega_2^3 (xA_3 - \beta A_1) \pmod{\omega_1^4, \omega_2^4}.$$

Сокращая все четыре проективных координаты точки L на $-\omega_2^3$, получим окончательно

$$L = \beta A_1 - xA_3. \qquad (3.11)$$

Дифференцируя равенство

$$-\omega_3^4 = \beta\omega_2^4$$

(см. (3.7)), будем иметь

$$[d\beta + \beta(\omega_2^2 - \omega_3^3) - \beta^2\omega_2^3, \ \omega_2^4] + [\omega_3^1 + \beta\omega_2^1, \omega_1^4] = 0. \qquad (3.12)$$

Отсюда замечаем, что

$$d\beta + \beta(\omega_2^2 - \omega_3^3) - \beta^2\omega_2^3 \equiv 0 \pmod{\omega_1^4, \omega_2^4}, \qquad (3.13)$$

$$\omega_3^1 \equiv 0 \pmod{\omega_1^4, \omega_2^4}.$$

Продифференцируем теперь равенство (3.11):

$$dL = (d\beta + \beta\omega_1^1) A_1 - (dx + x\omega_3^3) A_3 \quad (\omega_1^4 = \omega_2^4 = 0).$$

Принимая во внимание (3.10) и (3.13), найдем

$$dL \equiv 0 \pmod{L, \omega_1^4, \omega_2^4}.$$

Это означает, что при перемещении луча A_1A_2 внутри пучка с центром A_1 точка L, а следовательно, и прямая $n = ML$ остаются неподвижными.

Покажем, что все прямые n проходят через одну и ту же точку

$$P = A_3 + \beta A_2 \qquad (3.14)$$

плоскости $\Pi = (A_1A_2A_3)$. Действительно, плоскость Π остается неподвижной, если $\omega_1^4 = \omega_2^4 = 0$.

Пусть

$$N = A_1 + xA_2 + \lambda(\beta A_1 - xA_3)$$

некоторая точка прямой n. Так как одной из прямых ML является ребро A_2A_3, то ожидаемая точка, через которую проходят все прямые n, должна лежать и на ребре A_2A_3. Следовательно, $1 + \lambda\beta = 0$, а потому $N = xA_2 + \frac{x}{\beta} A_3$, или, сокращая на $\frac{x}{\beta}$ и меняя обозначение N на P, получим как раз точку (3.14). Покажем, что точка P действительно остается неподвижной при

$$\omega_1^4 = \omega_2^4 = 0.$$

В самом деле (см. (3.13))

$$dP = (\omega_3^3 + \beta\omega_2^3)(A_3 + \beta A_2) \equiv 0, \pmod{P},$$

а это и доказывает утверждение.

Двупараметрическое семейство плоскостей Π огибает некоторую поверхность σ. Легко показать, что эта поверхность является поверхностью, описанной точкой P. Действительно, мы имеем

$$d(A_1A_2A_3) = (\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3)(A_1A_2A_3) + \omega_1^4(A_4A_2A_3) +$$
$$+ \omega_2^4[(A_1A_4A_3) - \beta(A_1A_2A_4)].$$

Характеристика семейства определяется как точка пересечения трех плоскостей

$$(A_1A_2A_3), (A_4A_2A_3), (A_1A_4, A_3 + \beta A_2),$$

которая и есть как раз точка P.

§ 4. Проективитеты

Между поверхностями Σ и σ устанавливается взаимно однозначное точечное соответствие. В то же время в их касательных плоскостях устанавливается некоторое соответствие прямых m

и n. В этом последнем сопряженные, а следовательно, асимптотические направления поверхностей не соответствуют друг другу. Однако это соответствие осуществляет некоторый проективитет между пучками прямых, касательных к этим поверхностям.

Действительно, пучок p прямых, проходящих через точку A_1 и лежащих в касательной плоскости поверхности Σ, перспективен пучку плоскостей с осью на ребре A_1A_2, а этот последний, по теореме Шаля, проективен ряду точек M, соответствующих в нормальной корреляции плоскостям пучка. Но в таком случае перспективный этому ряду пучок прямых с центром в точке P будет проективен пучку p. В этом проективитете мы должны лучу конгруэнции l (прямой A_1A_3) поставить в соответствие прямую PA_1.

Всякой конгруэнции лучей, касательных к поверхности Σ, будет соответствовать конгруэнция лучей, касательных к поверхности σ. При этом, если первый луч огибает кривую, расположенную на поверхности Σ, второй будет огибать кривую, расположенную на второй фокальной поверхности (первой является поверхность σ). Действительно, пусть луч первой конгруэнции будет $m=[A_1\ A_3+xA_4]$, тогда лучом второй будет $n=[A_1+x A_2, A_3\ \ \beta A_2]$.

Пусть $F=A_1+xA_2+\lambda(A_3+\beta A_2)$ — второй фокус луча n. Имеем:

$$dF=(\omega_1^1+x\omega_2^1+\lambda\omega_3^1+\lambda\beta\omega_2^1)(A_1+xA_2)+$$

$$+(d\lambda+\omega_1^3+x\omega_2^3+\lambda\omega_3^3+\lambda\beta\omega_2^3)(A_3+\beta A_2)+$$

$$+(dx+x\omega_2^2+\lambda\omega_3^2+\lambda d\beta+\lambda\beta\omega_2^2-x\omega_1^1-x^2\omega_2^1-x\lambda\omega_3^1-x\lambda\beta\omega_2^1-$$

$$-\beta\omega_1^3-\beta x\omega_2^3-\beta\lambda\omega_3^3-\lambda\beta^2\omega_2^3)A_2+(\omega_1^4+x\omega_2^4)A_4.$$

Тогда F огибает кривую, если имеют место равенства

$$dx+x(\omega_2^2-\omega_1^1)-x^2\omega_2^1-\beta\omega_1^3-\beta x\omega_2^3+$$

$$+\lambda(d\beta+\beta(\omega_2^2-\omega_3^3)-\beta^2\omega_2^3-x(\omega_3^1+\beta\omega_2^1)+\omega_3^2)=0, \qquad (3.15)$$

$$\omega_1^4+x\omega_2^4=0.$$

Обратимся теперь к прямой m. Мы имеем

$$dm=\omega_1^1 m+(x\omega_1^3-\omega_1^4)[A_3\ A_4]+(\omega_3^2+x\omega_4^2)[A_1A_2]+$$

$$+(dx+x(\omega_4^4-\omega_3^3)-x^2\omega_4^3+\omega_3^4)[A_1A_4]. \qquad (3.16)$$

Для того, чтобы прямая m описывала конгруэнцию, необходимо, чтобы формы, стоящие коэффициентами при $[A_3A_4]$,

$[A_1A_2]$ и $[A_1A_4]$, были линейно зависимы. Коэффициентами при $[A_3A_4]$ и $[A_1A_2]$ будут

$$-(\omega_1^4+x\omega_2^4),\ xc\omega_1^4-a\omega_2^4. \qquad (3.17)$$

Эти формы линейно зависимы тогда и только тогда, когда

$$cx^2+a=0. \qquad (3.18)$$

Направления, определяемые равенством (3.18), есть асимптотические направления поверхности Σ. Исключая их из рассмотрения, мы можем считать коэффициенты при $[A_3A_4]$, $[A_1A_2]$, $[A_1A_4]$ зависящими лишь от форм ω_1^4, ω_2^4. В частности,

$$dx+x(\omega_4^4-\omega_3^3)-x^2\omega_4^3+\omega_3^4=u\omega_1^4+v\omega_2^4. \qquad (3.19)$$

В таком случае

$$dx+x(\omega_2^2-\omega_1^1)-x^2\omega_2^1-\beta\omega_1^3-\beta x\omega_2^3=$$

$$=(u-qx^2-\gamma x)\omega_1^4+(v+\gamma x^2+2\beta+rx)\omega_2^4. \qquad (3.20)$$

Из (3.12) после алгебраического разрешения получим

$$d\beta+\beta(\omega_2^2-\omega_3^3)-\beta^2\omega_2^3=\overline{P}\omega_2^4+Q\omega_1^4, \qquad (3.21)$$

$$\beta\omega_2^1+\omega_3^1=Q\omega_2^4+R\omega_1^4.$$

Равенства (3.15) принимают вид

$$[(u-qx^2-\gamma x)+\lambda(Q-xR)]\omega_1^4+$$

$$+[(v+\gamma x^2+2\beta+rx)+\lambda(\overline{P}-xQ-a)]\omega_2^4=0, \qquad (3.22)$$

$$\omega_1^4+x\omega_2^4=0.$$

Исключая формы ω_1^4, ω_2^4, которые, очевидно, не могут обращаться в нуль одновременно (иначе мы не имели бы конгруэнции лучей m или n), получим уравнение для определения λ:

$$\lambda(-Rx^2-\overline{P}+2Qx+a)+x(u-qx^2-2\gamma x)-(v+2\beta+rx)=0.$$

Отсюда получаем координаты второго фокуса. Первый (точка F) соответствует значению $\lambda=\infty$.

Из уравнений (3.22) видно, что если второй фокус огибает кривую, то $\omega_1^4:\omega_2^4=-x$. С другой стороны, если точка A_1 перемещается по поверхности Σ в направлении прямой m, то также $\omega_1^2:\omega_2^4=-x$. Этим утверждение доказано.

Если

$$Rx^2-2Qx+\overline{P}-a=0, \qquad (3.23)$$

то конгруэнция прямых n становится параболической. Таким образом, в общем случае на поверхности Σ существуют два направления, которые соответствуют асимптотическим направлениям поверхности σ. Пара направлений на поверхности Σ становится неопределенной для комплексов

$$R=0,\ Q=0,\ \overline{P}=a. \tag{3.24}$$

В этом случае (см. (3.21))

$$d\beta+\beta(\omega_2^2-\omega_3^3)-\beta^2\omega_2^3=a\omega_2^4, \tag{3.25}$$
$$\beta\omega_2^1+\omega_3^1=0.$$

Легко подсчитать, что

$$dP\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,P),$$

а это означает, что **все** плоскости Π проходят через одну и ту же точку $\boldsymbol{P}$. Чтобы построить комплекс рассматриваемого вида, следует взять произвольную конгруэнцию, через каждый луч ее и некоторую фиксированную, но произвольную точку $\boldsymbol{P}$, провести плоскость и в этой плоскости, через один из фокусов конгруэнции,— пучок прямых.

В рассмотренном случае поверхность σ вырождается в точку. В общем случае развертывающимся поверхностям конгруэнции прямых m не соответствуют развертывающиеся поверхности конгруэнции прямых n. Однако в общем случае существуют две пары конгруэнций, для которых такое соответствие имеет место. Действительно, как известно, фокальная сеть любой конгруэнции всегда сопряжена на любой поверхности; следовательно, касательные к линиям этой сети гармонически делят асимптотические касательные. Если задавать всякое направление на поверхности Σ с помощью точки $\boldsymbol{A}_3+x\boldsymbol{A}_4$ на ребре $\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4$, т. е. с помощью параметра x, то асимптотические касательные этой поверхности определятся параметрами

$$x_1=+\sqrt{-\frac{a}{c}},\ x_2=-\sqrt{-\frac{a}{c}} \tag{3.26}$$

(см. (3.18)). В таком случае инволюция сопряженных направлений x, x' определится с помощью равенства

$$cxx'+a=0. \tag{3.27}$$

Равным образом, инволюция сопряженных направлений на поверхности σ определится равенством

$$Rtt'-Q(t+t')+\overline{P}-a=0. \tag{3.28}$$

Это вытекает из того, что асимптотические направления этой поверхности определяются равенством (3.23). Сменили букву x на t, исходя из того соображения, что сопряженные направления, определяемые равенством (3.28), вообще говоря, не соответствуют направлениям, определяемым равенством (3.27). Если же такое соответствие имеет место, то последнее равенство запишется в виде

$$Rxx'-Q(x+x')+\overline{P}-a=0. \tag{3.29}$$

Решая уравнения (3.27) и (3.29) как два уравнения с двумя неизвестными x и x', найдем искомые конгруэнции. Поскольку теперь

$$xx'=-\frac{a}{c},\ x+x'=\frac{1}{Q}\left(-R\frac{a}{c}+\overline{P}-a\right),$$

то эти конгруэнции будут определяться квадратным уравнением

$$x^2+\frac{1}{Q}\left(R\frac{a}{c}-\overline{P}+a\right)x-\frac{a}{c}=0. \tag{3.30}$$

Предположим, что $\beta\neq 0$.

Если $\beta=0$, то получается комплекс с одним двойным инфлекционным центром, совпадающим с точкой $\boldsymbol{A}_1$. В этом случае поверхность σ совпадает с поверхностью Σ^*. Проективитет между поверхностями Σ и σ становится проективитетом между поверхностями Σ и Σ^*.

§ 5. Связь с теорией конгруэнций

Пользуясь понятиями, связанными с геометрией квазиспециального комплекса, мы можем теперь сформулировать ряд предложений, относящихся непосредственно к конгруэнции $K(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_3)$.

Если точка $\boldsymbol{A}_1$ перемещается по кривой, касательной к прямой $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_3$, то $\omega_1^4=0$. В таком случае $dA_3=\omega_3^1A_1+\omega_3^2A_2+\omega_3^3A_3+\omega_3^4A_4$. Но $\omega_3^4=0$, $\omega_3^1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\omega_1^4)$ (см. (3.21)). Следовательно, $dA_3=\omega_3^2A_2+\omega_3^3A_3$. Это означает, что ребро $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3$ касается на поверхности Σ^* фокальной кривой. Из первого равенства (3.21) следует, что теперь $P=Q=0$. Но тогда, приводя равенство (3.30) к общему знаменателю, мы заключаем, что пара конгруэнций, соответствующих в проективитете развертывающимся поверхностям, отвечают значениям корней $x=0$, $x=\infty$, т. е. они описываются ребрами $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_3$ и $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_4$ тетраэдра.

Если равенства (3.29) и (3.28) совпадают, то

$$Q=0,\quad R=-c.$$

В этом случае уравнение (3.30) тождественно исчезает.

Сформулируем теперь отдельно для конгруэнций несколько предложений, которые будут представлять собой перенесение на этот случай общих предложений, справедливых для произвольного квазиспециального комплекса.

Пусть нам дана произвольная конгруэнция A_1A_3 с фокальными поверхностями $\Sigma(A_1)$ и $\Sigma^*(A_3)$. Проведем в фокальной плоскости, касающейся поверхности Σ, через точку A_1 пучок прямых A_1A_2. Получим некоторый квазиспециальный комплекс. Пусть A_1A_4 — произвольная прямая, проходящая через точку A_1 и расположенная в плоскости, касающейся поверхности Σ, и пусть A_2 — точка на луче комплекса, соответствующая в этом комплексе плоскости $A_1A_4A_2$. Тогда при вращении плоскости $A_1A_4A_2$ вокруг прямой A_1A_4 точка A_2 будет перемещаться по некоторой прямой A_2A_3, проходящей через фокус. Таким образом, каждой прямой A_1A_4 одного фокального пучка будет соответствовать определенная прямая A_2A_3 второго фокального пучка. Это соответствие является некоторым проективитетом (τ). Если прямая A_1A_4 огибает на поверхности Σ некоторую кривую, то соответствующая ей прямая A_2A_3 будет также огибать на поверхности Σ^* кривую только в том случае, когда эта последняя является асимптотической линией. Наоборот, если прямая A_2A_3 огибает на поверхности Σ^* асимптотическую линию, то соответствующая ей прямая A_1A_4 будет огибать на поверхности Σ некоторую линию. Сеть линий (S) на поверхности Σ, соответствующая асимптотической сети поверхности Σ^*, гармонически сопряжена относительно фокальной сети конгруэнции A_1A_3. Сеть S совпадает с сетью асимптотических линий в том и только в том случае, когда конгруэнция A_1A_3 есть конгруэнция W. Можно сказать еще, что во всякой конгруэнции W касательные к соответствующим асимптотическим всегда соответствуют друг другу в проективитете τ. Если прямая A_1A_4 описывает конгруэнцию, то соответствующая ей прямая также описывает некоторую конгруэнцию. При этом развертывающимся поверхностям конгруэнции A_1A_4, ребра возврата которых расположены на поверхности Σ, соответствуют развертывающиеся поверхности конгруэнции A_2A_3, ребра возврата которых расположены на второй фокальной поверхности (отличной от Σ^*). Обе пары развертывающихся поверхностей этих конгруэнций соответствуют друг другу в том и только в том случае, когда обе конгруэнции являются лапласовскими преобразованиями конгруэнции A_1A_3 или же обе они совпадают с конгруэнцией A_1A_3 (этот последний случай следует считать предельным в проективитете τ). В обоих случаях фокальные сети конгруэнций A_2A_3 и A_1A_4 совпадают с фокальными сетями конгруэнции A_1A_3. Обе пары развертывающихся поверхностей для каждой пары конгруэнции A_2A_3 и A_1A_4

соответствуют в том и только в том случае, когда конгруэнция A_1A_3 есть конгруэнция W.

Конгруэнция W получает еще следующее естественное выделение из общего класса всех конгруэнций в их отношении к рассматриваемым комплексам. Если через каждую точку A_3 в плоскости $A_1A_3A_4$ провести пучок прямых, то мы получим новый комплекс, обладающий той же структурой, что и рассматриваемый. Назовем его комплексом, **сопряженным** рассматриваемому. Так же, как и последний, сопряженный комплекс устанавливает некоторый проективитет τ^* в фокальных плоскостях конгруэнции. Найдем формулы, определяющие оба проективитета.

Пусть $m = [A_1, A_3 + xA_4]$ — некоторая прямая, касающаяся поверхности Σ. Тогда, как известно, в комплексе A_1A_2 плоскости $(A_1, A_2, A_3 + xA_4)$ будет соответствовать на луче этого комплекса точка $A_1 + xA_2$, а потому прямой $[A_1, A_3 + xA_4]$, касательной к Σ, в проективитете τ будет соответствовать прямая $[A_3, A_1 + xA_2] = n$, касательная к Σ^*. Мы запишем это соответствие в виде равенства

$$x' = x. \tag{3.31}$$

Найдем теперь плоскость, соответствующую точке $A_3 + xA_4$ в комплексе A_3A_4. Учитывая, что эта плоскость является соприкасающейся плоскостью ребра возврата развертывающейся поверхности комплекса, получим координаты этой плоскости в виде

$$\rho\Pi' = (A_3, A_4, d^2(A_3 + xA_4))$$

при

$$\omega_3^1 + x\omega_4^1 = 0,\ \omega_3^2 + x\omega_4^2 = 0,$$

где ρ — множитель пропорциональности. После несложных преобразований найдем

$$\Pi' = \left(A_3, A_4, A_1 - \frac{c}{R}xA_2\right),$$

а это означает, что плоскость пересекает луч A_1A_2 в точке $A_1 - \frac{c}{R}xA_2$. Следовательно, в проективитете τ^* прямой m, касательной к поверхности Σ, соответствует прямая $\left[A_3, A_1 - \frac{c}{R}xA_2\right]$, касательная к Σ^*. Запишем это соответствие в форме равенства

$$x^* = -\frac{c}{R}x. \tag{3.32}$$

Для дальнейшего имеет смысл найти формулу третьего естественного проективитета (φ) между касательными плоскостями поверхностей Σ и Σ^*, который устанавливается лучами конгруэнции A_1A_3. Таким проективитетом мы называем соответствие касательных к кривым, соответствующим в конгруэнции. Как известно, если некоторая кривая s касается прямой m, то для нее $x = -\frac{\omega_1^4}{\omega_2^4}$. Но в таком случае для соответствующей в конгруэнции кривой s^* имеем

$$dA_3 = \omega_3^3 A_3 + \omega_3^1 A_1 + \omega_3^2 A_2 = \omega_3^3 A_3 + \omega_1^4 R\left(A_1 - \frac{a}{R}\frac{\omega_2^4}{\omega_1^4}A_2\right) =$$

$$= \omega_3^3 A_3 + R\omega_1^4\left(A_1 + \frac{a}{R}\frac{1}{x}A_2\right).$$

Следовательно, в проективитете φ прямой m будет соответствовать прямая $\left[A_3, A_1 + \frac{a}{R}\frac{1}{x}A_2\right]$. Формула этого соответствия будет иметь вид

$$x'' = \frac{a}{R}\frac{1}{x}. \qquad (3.33)$$

Таким образом, каждой прямой (x) плоскости $A_1A_3A_4$ будут соответствовать в плоскости $A_3A_1A_2$ три прямые x', x^* и x''. Различные взаимные положения этих прямых позволяют выделить как некоторые классы конгруэнций, обладающих теми или иными особенностями, так и некоторые характерные направления на поверхностях Σ и Σ^*. Мы еще более обогатим разнообразие возможностей, если введем в рассмотрение обе пары асимптотических линий на поверхностях Σ и Σ^*. Уравнение асимптотических на поверхности Σ^* имеет вид

$$a(\omega_2^4)^2 - R(\omega_1^4)^2 = 0.$$

Следовательно,

$$a - R(\lambda^*)^2 = 0, \text{ откуда } \lambda_1^*\lambda_2^* = -\frac{a}{R}, \left(\lambda^* = -\frac{\omega_1^4}{\omega_2^4}\right). \qquad (3.34)$$

Асимптотические линии на поверхности Σ имеют уравнение

$$a(\omega_2^4)^2 + c(\omega_1^4)^2 = 0.$$

Следовательно,

$$a + c\lambda^2 = 0, \text{ откуда } \lambda_1\lambda_2 = \frac{a}{c}\left(\lambda = -\frac{\omega_1^4}{\omega_2^4}\right), \qquad (3.35)$$

Для поверхности Σ^* последнее уравнение определяет образ асимптотических линий поверхности Σ.

§ 6. Некоторые теоремы

Сравнение формул (3.31)—(3.35) приводит нас к следующим результатам:

1.

$$x'x'' + \lambda_1^*\lambda_2^* = 0.$$

Следовательно, **проективитеты τ и φ переводят каждую прямую, касающуюся поверхности Σ, в две прямые, касающиеся поверхности Σ^* и взаимно сопряженные на ней.**

2. Равенство

$$x' = x^*, \text{ или } x = -\frac{c}{R}x$$

при $c \neq -R$ возможны лишь для $x=0$ и $x=\infty$. При $c=-R$ это равенство становится тождеством. Таким образом, **для всякой конгруэнции A_1A_3, не являющейся конгруэнцией W, проективитеты τ и τ^* имеют только две пары общих элементов — это луч конгруэнции, считаемый дважды, и пара лапласовских преобразований этой конгруэнции. У конгруэнции W оба проективитета совпадают.** Этим выделяются конгруэнции W, как уже отмечалось, из общего класса всех конгруэнций.

3. Равенство

$$x' = -x^* \quad \text{или} \quad x = \frac{c}{R}x$$

возможно лишь при $x=0$ и $x=\infty$, если $c \neq R$. Если же $c=R$, то это равенство обращается в тождество. В первом случае (для произвольной конгруэнции) мы получаем фокальную сеть. Так как в этом случае мы имеем общие элементы проективитетов τ и τ^*, то это означает, что у всех комплексов, для которых $c \neq R$, ни на одной из фокальных поверхностей не существует прямой, которая в проективитетах τ и τ^* переходила бы в две прямые, гармонически сопряженные относительно фокальной сети. В случае $c=R$ имеем

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1^*\lambda_2^* = 0.$$

Следовательно, образ асимптотической сети одной поверхности является сопряженной сетью на второй фокальной поверхности, т. е. такая конгруэнция есть конгруэнция V. Таким образом, для всякой конгруэнции V и только для нее проективитеты τ и

τ^* переводят каждую прямую, касающуюся поверхности Σ, в две прямые, касающиеся поверхности Σ^* и взаимно сопряженные относительно фокальной сети на этой поверхности.

Ряд предложений можно получить, рассматривая преобразования, представляющие собой те или иные произведения проективитетов τ, τ^* и φ. Так, например, проективитет $\tau^*\ \tau\varphi$ может быть записан в виде формулы

$$x^{**} = -\frac{a}{c}\frac{1}{x}.$$

Но в таком случае

$$xx^{**}+\lambda_1\lambda_2=0,$$

т. е.

4. Две прямые, касательные к поверхности Σ^* и соответствующие в проективитетах τ и $\tau^*\tau\varphi$ одной и той же прямой, касательной к Σ, всегда гармонически разделяют на Σ^* образ асимптотической сети поверхности Σ.

5. Полагая

$$x'=x'', \text{ т. е. } a-Rx^2=0,$$

получим уже известное предложение о том, что **прямые, соответствующие в проективитетах τ и φ одной и той же прямой, касающейся Σ, совпадают в том и только в том случае, когда они являются асимптотическими касательными поверхности Σ^*.**

6. Наоборот, полагая

$$x^*=x'' \quad \text{т. е.} \quad a+cx^2=0,$$

заключим, что прямые, соответствующие одной и той же прямой, касающейся Σ, в проективитетах τ^* и φ совпадают тогда и только тогда, когда первая прямая является асимптотической касательной на Σ.

§ 7. Связь с главными поверхностями

Отметим еще один факт, относящийся к произвольному комплексу C^l, расслаивающемуся в семейство плоских пучков. Поскольку в рассматриваемом случае имеют место равенства

$$p=0,\ \alpha=0$$

(стр. 122—123), то характеристическое уравнение (1.23) примет вид

$$s^2(r-2s)+q\beta^2-2\beta\gamma s=0.$$

Полагая $\beta\neq0$, придадим этому уравнению следующую форму

$$-q\left(\frac{\beta}{s}\right)^3+2\gamma\left(\frac{\beta}{s}\right)^2-r\frac{\beta}{s}+2\beta=0. \qquad (3.36)$$

В то же время уравнение (1.16), определяющее инфлекционные центры, по сокращении на t запишется в виде

$$qt^3+2\gamma t^2+rt+2\beta=0. \qquad (3.37)$$

Сравнивая (3.36) и (3.37), приходим к следующему соотношению, связывающему каждый инфлекционный центр (исключая A_1) с определенным корнем характеристического уравнения:

$$t=-\frac{\beta}{s} \qquad (3.38)$$

Мы можем это сформулировать как предложение о том, что **каждому инфлекционному центру луча комплекса, исключая A_1, соответствует определенная главная поверхность этого комплекса.**

Установим характер этого соответствия.

Взяв первое и второе уравнения из системы (1.22), определим главную поверхность, соответствующую корню s:

$$\omega_1^4=\frac{\beta}{s}\omega_2^4,\ \omega_2^3=\frac{1}{s}\left(-\gamma+\frac{\beta q}{s}\right)\omega_2^4.$$

Точки прикосновения поверхности

$$\omega_2^3t^2-2\omega_2^4t-\omega_1^4=0$$

дают нам

$$t_1t_2=-\frac{\omega_1^4}{\omega_2^3}=-\frac{\beta}{-\gamma+\frac{\beta q}{s}},\ t_1+t_2=\frac{2\omega_2^4}{\omega_2^3}=\frac{2s}{-\gamma+\frac{\beta q}{s}}.$$

Следовательно,

$$t(t_1+t_2)-2t_1t_2=0,$$

где $t=-\frac{\beta}{s}$ (см. (3.38), а это означает, что **точки прикосновения каждой главной поверхности гармонически разделяют соответствующий этой поверхности инфлекционный центр относительно центра A_1**. (То, что точки прикосновения каждой главной поверхности грамонически делят не только одну, а даже две соответствующие пары инфлекционных центров — этот факт является известным и притом это справедливо для самого общего комплекса. Здесь следует обратить внимание на наличие соответствия между главными поверхностями и свободными инфлекционными центрами, какое осуществляется с помощью достаточно компактной формулы (3.38)).

Глава четвертая

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОМПЛЕКСОВ

§ 1. Преобразование T

В теории конгруэнций широко известно понятие пары T, как такой пары, у которой фокусы одной конгруэнции лежат в фокальных плоскостях другой, и наоборот. Это понятие естественным образом переносится в теорию комплексов, где таким путем возникает понятие пар T-комплексов. Впредь пару T-комплексов мы будем называть просто парой T.

Определение пары T было дано в 1948 г. М. А. Акивисом в заметке [1]. Свойства такой пары с достаточной обстоятельностью рассмотрены им в статье [2].

Пусть A_1 — какая-либо точка луча l комплекса K. Этой точке в нормальной корреляции на луче l соответствует плоскость Π, которая при канонизации тетраэдра (1.8) совпадает с плоскостью $A_1A_2A_3$. Пусть K' — второй комплекс и l' — его луч, который в заданном соответствии комплексов соответствует лучу l. Плоскость Π пересекает луч l' в некоторой точке, с которой мы будем считать совмещенной вершину A_3 тетраэдра. Плоскость Π' соответствующая в нормальной корреляции на луче l' точке A_3 в общем случае не проходит через точку A_1. Если же инцидентность $A_1 \in \Pi'$ имеет место для любой точки A_1, то пара комплексов K и K' есть пара T.

Найдем условия, характеризующие пару T.

Пусть A_2 — какая-либо точка луча l, отличная от A_1, и A_4 — точка луча l', связанная с точкой A_2 таким же образом, как точка A_3 с точкой A_1. Ради симметрии в дальнейшем не будем себя связывать условием, в соответствии с которым точкам A_1 и A_2 в нормальной корреляции на луче соответствуют плоскости $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$. В таком случае, полагая, что главными формами смещения лучей l и l' являются соответственно формы

$$\omega_1^3, \omega_1^4, \omega_2^3, \omega_2^4$$

и

$$\omega_3^1, \omega_3^2, \omega_4^1, \omega_4^2,$$

мы будем иметь следующие дифференциальные уравнения комплексов K и K':

$$\omega_1^3 = a\omega_2^3 + b\omega_1^4 + c\omega_2^4, \tag{4.1}$$

$$\omega_3^1 = a'\omega_4^1 + b'\omega_3^2 + c'\omega_4^2. \tag{4.2}$$

Если

$$M = A_1 + tA_2$$

какая-либо точка луча l, то

$$\Pi = (bt - c)(A_1A_2A_3) + (a + t)(A_1A_2A_4) \tag{4.3}$$

есть плоскость, соответствующая ей в нормальной корреляции. Плоскость (4.3) пересекает ребро A_3A_4 в точке

$$M' = (bt - c)A_3 + (a + t)A_4$$

или

$$M' = A_3 + t'A_4,$$

где

$$t' = \frac{a + t}{bt - c}. \tag{4.4}$$

В нормальной корреляции на луче l' точке M' соответствует плоскость

$$\Pi' = (b't' - c')(A_3A_4A_1) + (a' + t')(A_3A_4A_2), \tag{4.5}$$

пересекающая ребро A_1A_2 в точке

$$\overline{M} = (b't' - c')A_1 + (a' + t')A_2$$

или

$$\overline{M} = A_1 + \bar{t}A_2,$$

где

$$\bar{t} = \frac{a' + t'}{b't' - c'}.$$

Пара комплексов K и K' будет парой T тогда и только тогда, когда

$$\bar{t} \equiv t,$$

т. е.

$$(b' - bc')t^2 + (ab' - a'b + cc' - 1)t + a'c - a = 0, \tag{4.6}$$

и аналогично — для координаты точки M' на прямой A_3A_4:

$$(b - b'c)t'^2 + (a'b - ab' + c'c - 1)t' + ac' - a' = 0. \tag{4.7}$$

Отсюда видно, что какова бы ни была пара комплексов с произвольным соответствием между их лучами, на каждом луче любого из этих комплексов существует пара точек (действительных различных, мнимых или совпадающих), в которых комплексы обладают свойством T. Назовем эти точки T — точками. Е. Т. Ивлев называет их флекнодальными точками (см. [36]).

Для пары T комплексов уравнения (4.6) и (4.7) исчезают, следовательно

$$b' - bc' = 0,\ ab' - a'b + cc' - 1 = 0,\ a'c - a = 0,$$
$$b - b'c = 0,\ a'b - ab' + c'c - 1 = 0,\ ac' - a' = 0. \qquad (4.8)$$

Легко видеть, что эти шесть равенств эквивалентны следующим трем:

$$1 - cc' = 0,\ a - a'c = 0,\ b - b'c = 0. \qquad (4.9)$$

Уравнения (4.1), (4.2) могут быть теперь переписаны в виде

$$\omega_1^3 = a\omega_2^3 + b\omega_1^4 + c\omega_2^4,$$
$$\omega_4^2 = -a\omega_4^1 - b\omega_3^2 + c\omega_3^1. \qquad (4.10)$$

Это будет соответствовать общему случаю пары T. Возможны, однако, частные случаи, не охватываемые этим общим случаем. Чтобы прийти к этим случаям, выясним, когда равенства (4.8), стоящие в первой строчке, не эквивалентны равенствам, стоящим во второй строчке. Возьмем первые из них

$$b' - bc' = 0,\ ab' - a'b + cc' - 1 = 0,\ a - a'c = 0. \qquad (4.11)$$

Перемножая первое и третье, получим

$$ab' = a'bcc'.$$

В таком случае второе равенство (4.11) запишется в виде

$$(a'b+1)\ (cc'-1) = 0.$$

Если обращается в нуль второй сомножитель, то мы будем иметь дело с парой T.

Предположим теперь, что

$$cc' \neq 1;$$

следовательно,

$$a'b = -1. \qquad (4.12)$$

Отсюда $a' \neq 0$ и $b \neq 0$. Умножим первое равенство (4.11) на a'. Учитывая (4.12), получим

$$a'b' + c' = 0. \qquad (4.13)$$

Аналогично, умножая третье равенство (4.11) на b, будем иметь

$$ab + c = 0. \qquad (4.14)$$

Легко понять, что в рассматриваемом случае оба комплекса K и K' являются специальными. Действительно, возьмем для примера комплекс K. Пусть

$$M = A_1 + tA_2$$

какая-либо точка его луча. Тогда

$$dM = (\omega_1^1 + t\omega_2^1)A_1 + (\omega_1^2 + t\omega_2^2 + dt)A_2 + (\omega_1^3 + t\omega_2^3)A_3 + (\omega_1^4 + t\omega_2^4)A_4.$$

Если точка M описывает поверхность, касающуюся лучей комплекса (это возможно лишь в случае специального комплекса), то формы $\omega_1^3 + t\omega_2^3$ и $\omega_1^4 + t\omega_2^4$ линейно зависимы, т. е.

$$[\omega_1^3 + t\omega_2^3, \omega_1^4 + t\omega_2^4] = 0.$$

Это же условие, очевидно, и достаточно для того, чтобы комплекс был специальным. Подставим в последнее равенство вместо ω_1^3 ее значение, определяемое равенством (4.1)

$$(a+t)\,[\omega_2^3\omega_1^4] + t\,(a+t)\,[\omega_2^3\omega_2^4] + (bt - c)\,[\omega_1^4\omega_2^4] = 0.$$

Поскольку последнее должно быть выполнено при любых значениях форм $\omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4$, то

$$a + t = 0,\ bt - c = 0.$$

Исключая отсюда t, придем к (4.14), что и доказывает утверждение. Аналогично доказывается справедливость равенства (4.13) для комплекса K'[1].

Поверхности, касательные к лучам комплексов (фокальные поверхности) описываются соответственно точками (фокусами)

$$F = A - aA_2,\ F' = A_3 - a'A_4.$$

У специального комплекса каждой точке луча, отличной от фокуса, в нормальной корреляции соответствует одна и та же плоскость — плоскость, касательная к фокальной поверхности. В самом фокусе соответствующая плоскость становится неопределенной.

Внесем теперь равенства (4.12), (4.13) и (4.14) в уравнение (4.7):

$$(1 - cc')\ (t'^2 + 2a't' + a'^2) = 0.$$

Так как $1 - cc' \neq 0$, то

$$t'^2 + 2a't' + a'^2 = 0.$$

Отсюда

$$t' = -a'.$$

[1] Мы доказали обратное утверждение. Однако после этого справедливость прежнего утверждения усматривается достаточно легко.

Таким образом, в рассматриваемом случае у специального комплекса K T-точки являются неопределенными, у специального комплекса K' обе T-точки совпадают с фокусом F'. Фокальные поверхности обоих комплексов расположены так, что касательная плоскость к поверхности $\{F\}$ всегда проходит через фокус F'. Последнее утверждение, очевидно, непосредственно легко проверяется с помощью элементарных аналитических выкладок. В самом деле, плоскость, соответствующая в нормальной корреляции на луче l точке $M=A_1+tA_2$, определяется тангенциальными координатами

$$\Pi = (bt-c)(A_1A_2A_3) + (a+t)(A_1A_2A_4)$$

или (если принять во внимание (4.14))

$$\Pi = b(A_1A_2A_3) + (A_1A_2A_4).$$

Равенство (4.12) показывает, что точка $F'=A_3-a'A_4$ принадлежит этой плоскости.

Касательная плоскость к поверхности $\{F'\}$ в общем случае не проходит через точку F. Она будет проходить через F тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$ab'=-1.$$

Но в таком случае

$$1-cc'=0,$$

и мы приходим к паре T комплексов (теперь уже специальных). Прямая FF' касается поверхностей $\{F\}, \{F'\}$ в точках F и F'.

Вернемся к общему классу пар T.

Подсчитаем произвол существования пары. С этой целью продифференцируем внешним образом уравнения (4.10)

$$\begin{gathered}[\Omega_1\omega_2^3] + [\Omega_2\omega_1^4] + [\Omega_3\omega_2^4] = 0,\\ [\Omega_1'\omega_4^1] + [\Omega_2'\omega_3^2] + [\Omega_3'\omega_4^2] = 0,\end{gathered} \tag{4.15}$$

где

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= -da + a(\omega_1^1-\omega_2^2) + \omega_1^2 - a^2\omega_2^1 + (ab+c)\omega_3^4,\\ \Omega_2 &= -db + b(\omega_4^4-\omega_3^3) - (ab+c)\omega_2^1 - \omega_4^3 + b^2\omega_3^4,\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\Omega_3 = -dc + c(\omega_4^4+\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3) - b\omega_1^2 - ac\omega_2^1 + a\omega_4^3 + bc\omega_3^4,$$

$$\left(a'=\frac{a}{c},\ b'=\frac{b}{c},\ c'=\frac{1}{c}\right),$$

$$\begin{aligned}\Omega_1' &= -da' + a'(\omega_3^3-\omega_4^4) + \omega_3^4 - a'^2\omega_4^3 + (a'b'+c')\omega_1^2,\\ \Omega_2' &= -db' + b'(\omega_2^2-\omega_1^1) - (a'b'+c')\omega_4^3 - \omega_2^1 + b'^2\omega_1^2,\\ \Omega_3' &= -dc' + c'(\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_4^4-\omega_1^1) - b'\omega_3^4 - a'c'\omega_4^3 + a'\omega_2^1 + b'c'\omega_1^2.\end{aligned} \tag{4.17}$$

Легко заключить, что

$$\begin{aligned}\Omega_1' &= \frac{1}{c}\Omega_1 - \frac{a}{c^2}\Omega_3,\\ \Omega_2' &= \frac{1}{c}\Omega_2 - \frac{b}{c^2}\Omega_3,\\ \Omega_3' &= -\frac{1}{c^2}\Omega_3.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Формы $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$, равно как и формы $\Omega_1', \Omega_2', \Omega_3'$, линейно независимы. Примем их (на время) за базисные формы на паре комплексов. Раскроем (4.15) по лемме Картана

$$\begin{aligned}\omega_2^3 &= p^{11}\Omega_1 + p^{12}\Omega_2 + p^{13}\Omega_3,\\ \omega_1^4 &= p^{21}\Omega_1 + p^{22}\Omega_2 + p^{23}\Omega_3,\\ \omega_2^4 &= p^{31}\Omega_1 + p^{32}\Omega_2 + p^{33}\Omega_3,\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}\omega_4^1 &= q^{11}\Omega_1' + q^{12}\Omega_2' + q^{13}\Omega_3',\\ \omega_3^2 &= q^{21}\Omega_1' + q^{22}\Omega_2' + q^{23}\Omega_3',\\ \omega_4^2 &= q^{31}\Omega_1' + q^{32}\Omega_2' + q^{33}\Omega_3'\end{aligned} \tag{4.20}$$

$p^{ij}=p^{ji}, q^{ij}=q^{ji}$. Мы имеем, таким образом, два ковариата (4.15), $s_1=2$, шесть характеристических форм $\omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4, \omega_4^1, \omega_3^2, \omega_4^2$, $q=6$. При невозрастающих характерах из равенства $s_1+s_2+s_3=q$ имеем $s_2=s_3=2$. Следовательно, $Q=s_1+2s_2+3s_3=12$. Но таково уже число $N=12$ параметров p^{ij} и q^{ij}. Следовательно, критерий Картана выполнен, а потому пары T-комплексов существуют с произволом 2 функции трех аргументов.

Канонизируем теперь сопровождающий тетраэдр. С этой целью примем за вершины A_1A_3 (соответственно A_2A_4) точки, соответствующие друг другу в соответствии T. В таком случае для $t=0$ мы должны иметь $t'=0$, а для $t=\infty$ — соответственно $t'=\infty$. Из равенства (4.4) теперь будет следовать

$$a=0,\ b=0.$$

Путем одного нормирования координат вершин можно привести коэффициент c к 1:

$$c=1.$$

Тогда (см. (4. 10))

$$\omega_1^3=\omega_2^4,\ \omega_4^2=\omega_3^1 \qquad (4.21)$$

$$\Omega_1=\omega_1^2+\omega_3^4,\ \Omega_1'=\omega_3^4+\omega_1^2,$$

$$\Omega_2=-\omega_2^1-\omega_4^3,\ \Omega_2'=-\omega_4^3-\omega_2^1, \qquad (4.22)$$

$$\Omega_3=\omega_4^4+\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3,\ \Omega_3'=\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_4^4-\omega_1^1.$$

Равенство (4.4) принимает теперь вид

$$t'=-t. \qquad (4.23)$$

Положение вершин A_1, A_2 на луче l остается совершенно произвольным. При фиксировании этих вершин фиксируются также вершины A_3, A_4 на луче l', а потому и все грани сопровождающего тетраэдра.

§ 2. Нормальная квадрика

Покажем, что для любой пары соответственных лучей l, l' можно построить единственную квадрику, проходящую через эти лучи и пересекающую оба комплекса инволютивно. Иными словами, такая квадрика будет инволютивно пересекать любую линейчатую поверхность каждого из комплексов, проходящую через луч l (или l'). Назовем такую квадрику **нормальной квадрикой комплексов пары.**

Пусть

$$M=A_1+tA_2,\ M'=A_3+t'A_4$$

пара точек на лучах l, l', в которых образующая искомой квадрики пересекает эти лучи. Поскольку соответствие точек M и M' проективно, то

$$t'=\frac{At+B}{Ct+D}\ (AD-BC\neq 0), \text{ или } t=\frac{Dt'-B}{-Ct'+A}. \qquad (4.24)$$

Касательные плоскости к квадрике в точках M и M' определяются соответственно тангенциальными координатами

$$\Pi=(A_1A_2A_3)+t'(A_1A_2A_4).$$

$$\Pi=(A_3A_4A_1)+t\,(A_3A_4A_2).$$

Произвольные линейчатые поверхности, принадлежащие комплексам K и K', можно задать отношениями базисных форм

$$\omega_2^3:\omega_1^4:\omega_2^4,\ \omega_4^1:\omega_3^2:\omega_4^2.$$

Пусть теперь

$$\overline{M}=A_1+\overline{t}A_2,$$

$$\overline{M}'=A_3+\overline{t}'A_4.$$

две какие-либо точки лучей l, l', отличные от M и M'.

Касательные плоскости к поверхностям в точках $\overline{M}$ и $\overline{M}'$ имеют координаты

$$\overline{\Pi}=(A_1A_2A_3)+\frac{\omega_1^4+\overline{t}\omega_2^4}{\omega_1^3+\overline{t}\omega_2^3}(A_1A_2A_4),$$

$$\overline{\Pi}'=(A_3A_4A_1)+\frac{\omega_3^2+\overline{t}'\omega_4^2}{\omega_3^1+\overline{t}'\omega_4^1}(A_3A_4A_2),$$

Потребуем, чтобы плоскости $\overline{\Pi}$, $\overline{\Pi}'$ совпадали соответственно с плоскостями Π и Π'. Это приводит к равенствам:

$$\begin{aligned} &\omega_2^3\overline{t}t'+\omega_2^4(t'-\overline{t})-\omega_1^4=0,\\ &\omega_4^1 t\overline{t}'+\omega_4^2(t-\overline{t}')-\omega_3^2=0, \end{aligned} \qquad (4.25)$$

или, принимая во внимание (4.24),

$$(A\omega_2^3-C\omega_2^4)t\overline{t}+(A\omega_2^4-C\omega_1^4)t+(B\omega_2^3-D\omega_2^4)\overline{t}+B\omega_2^4-D\omega_1^4=0,$$

$$(D\omega_4^1+C\omega_4^2)t'\overline{t}'+(D\omega_4^2+C\omega_3^2)t'-(A\omega_4^2+B\omega_4^1)\overline{t}'-(A\omega_3^2+B\omega_4^2)=0.$$

Для искомой квадрики оба эти проективные соответствия должны быть инволюциями; следовательно,

$$A\omega_2^4-C\omega_1^4\equiv B\omega_2^3-D\omega_2^4,$$

$$D\omega_4^2+C\omega_3^2\equiv -A\omega_4^2-B\omega_4^1. \qquad (4.26)$$

Оба тождества выполняются при любом выборе базисных форм. Следовательно,

$$A=-D,\ C=0,\ B=0. \qquad (4.27)$$

Обратим внимание на то, что любое из тождеств (4.26) влечет за собой другое, т. е. если некоторая квадрика, проходящая через соответствующие лучи комплексов пары T, инволютивно пересекает один комплекс, то она инволютивно пересекает и другой комплекс.

Внося (4.27) в (4.24), получим

$$t' = -t,$$

что совпадает с (4.23). Это означает, что общая нормальная квадрика комплексов пары T образована прямыми, соединяющими те пары точек лучей l и l', которые находятся в соответствии T.

Можно показать, что наличие общей нормальной квадрики у двух комплексов является свойством, выделяющим пару T из числа всевозможных пар комплексов.

Действительно, пусть l и l' — пара соответственных лучей двух комплексов K и K'. Совмещая с лучом l ребро A_1A_2, а с лучом l' — ребро A_3A_4 тетраэдра, мы сможем записать уравнения комплексов в виде (4.1) и (4.2). В таком случае вместо равенств (4.25) мы должны записать

$$\omega_2^3\bar{t}t' + \omega_1^3 t' - \omega_2^4\bar{t} - \omega_1^4 = 0,$$

$$\omega_4^1 t\bar{t}' + \omega_3^1 t - \omega_4^2\bar{t}' - \omega_3^2 = 0$$

или (см. (4.24))

$$(A\omega_2^3 - C\omega_2^4)\, t\bar{t} + (A\omega_1^3 - C\omega_1^4)\, t + (B\omega_2^3 - D\omega_2^4)\,\bar{t} + B\omega_1^3 - D\omega_1^4 = 0,$$

$$(D\omega_4^1 + C\omega_4^2)\, t'\bar{t}' + (D\omega_3^1 + C\omega_3^2)\, t' - (A\omega_4^2 + B\omega_4^1)\,\bar{t}' - (A\omega_3^2 + B\omega_3^1) = 0.$$

Потребуем, чтобы каждый из этих проективитетов был инволюцией. Это приводит к тождествам

$$A\omega_1^3 - C\omega_1^4 \equiv B\omega_2^3 - D\omega_2^4,$$

$$D\omega_3^1 + C\omega_3^2 \equiv -A\omega_4^2 - B\omega_4^1$$

или (см. (4.1) и (4.2))

$$(Aa - B)\,\omega_2^3 + (Ab - C)\,\omega_1^4 + (Ac + D)\,\omega_2^4 \equiv 0,$$

$$(Da' + B)\,\omega_4^1 + (Db' + C)\,\omega_3^2 + (Dc' + A)\,\omega_4^2 \equiv 0.$$

Отсюда

$$\begin{gathered} Aa - B = 0,\ Ab - C = 0,\ Ac + D = 0, \\ Da' + B = 0,\ Db' + C = 0,\ Dc' + A = 0. \end{gathered} \tag{4.28}$$

Мы видим, что в общем случае выполнение одной тройки равенств не влечет за собой выполнение другой. Взяв все равенства вместе, получим

$$1 - cc' = 0,\ a - a'c = 0,\ b - b'c = 0.$$

Это в точности совпадает с равенствами (4.9), характеризующими пары T.

§ 3. Квадрика Плюккера

Пара T комплексов может быть охарактеризована с помощью отображения ее на квадрику Плюккера. Как известно, всякая прямая трехмерного точечного проективного пространства может быть определена любыми двумя своими точками

$$(x^1 : x^2 : x^3 : x^4),$$

$$(y^1 : y^2 : y^3 : y^4).$$

Из координат этих точек можно образовать шесть миноров

$$p^{ik} = \begin{vmatrix} x^i & x^k \\ y^i & y^k \end{vmatrix},$$

которые называются плюккеровыми координатами прямой. Плюккеровы координаты подчинены так называемому фундаментальному условию Плюккера:

$$p^{12}p^{34} - p^{13}p^{24} + p^{14}p^{23} = 0, \tag{4.29}$$

которое легко получить, выписав очевидное равенство

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ y^1 & y^2 & y^3 & y^4 \\ x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ y^1 & y^2 & y^3 & y^4 \end{vmatrix} = 0$$

и раскрыв левую часть по элементам двух первых строк.

Шесть величин p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{23}, p^{24}, p^{34} являются плюккеровыми координатами прямой трехмерного пространства тогда и только тогда, когда они подчинены условию (4.29). Если истолковывать величины p^{ik} как однородные проективные координаты точки в пятимерном проективном пространстве P_5, то равенство (4.29) может быть истолковано как уравнение некоторой квадрики в этом пространстве. Это и есть квадрика Плюккера (Q). Все пространство прямых трехмерного проективного пространства отображается, таким образом, на квадрику Плюккера. Каждый комплекс будет представлять собой некоторую трехмерную поверхность, принадлежащую квадрике, пары комплексов — две таких поверхности. Если соединить соответствующие точки этих поверхностей прямыми линиями, то получим трехмерную совокупность прямых (σ), как увидим ниже, не принадлежащих квадрике (4.29). Назовем такую совокупность трехмерной конгруэнцией. Найдем свойство такой конгруэнции, выделяющее пару T среди других пар комплексов.

Предположим, что с лучами l и l' комплексов K и K' пары совмещены ребра A_1A_2 и A_3A_4 тетраэдра. Дифференциальные уравнения комплексов будем считать заданными в виде (4.1) и (4.2). Будем обозначать буквами L и L' те две точки на квадрике Q, в которые отображаются прямые l и l'. Тогда произвольная точка прямой LL' может быть задана координатами

$$M = L + tL' = [A_1A_2] + t\,[A_3A_4].$$

Отсюда

$$dM = (\omega_1^1 + \omega_2^2)[A_1A_2] + (\omega_3^3 + \omega_4^4 + dt)[A_3A_4] + (\omega_1^3 + t\omega_4^2)\,[A_3A_2] +$$
$$+ (\omega_1^4 - t\omega^2)\,[A_4A_2] - (\omega_2^3 - t\omega_4^1)\,[A_3A_1] + (\omega_2^4 + t\omega_3^1)[A_1A_4].$$

Точка M описывает фокальную кривую конгруэнции σ, если точка dM коллинеарна с точками L и L', т. е. если одновременно выполнены равенства

$$\begin{aligned} &\omega_1^3 + t\omega_4^2 = 0,\ \omega_1^4 - t\omega_3^2 = 0, \\ &\omega_2^4 + t\omega_3^1 = 0,\ \omega_2^3 - t\omega_4^1 = 0. \end{aligned} \tag{4.30}$$

В этих равенствах имеется лишь три независимых базисных формы. За таковые можно принять, например, формы $\omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4$ или $\omega_4^1, \omega_3^2, \omega_4^2$. Чтобы найти фокусы конгруэнции, надо исключить эти формы из равенств (4.30). Поскольку, однако, равенств (4.30) четыре, то это означает, что не всякая трехмерная конгруэнция в пространстве P_5 имеет фокусы. Для конгруэнции, у которой такие фокусы существуют, равенства (4.30) совместны при любых значениях базисных форм

Учитывая (4.1) и (4.2), с помощью равенств (4.30), стоящих во втором столбце, мы можем равенства первого столбца переписать в виде

$$t\omega_2^4 + t\,(a\omega_4^1 + b\omega_3^2 + \omega_4^2) = 0\,,$$
$$\omega_2^4 + t\,(a'\omega_4^1 + b'\omega_3^2 + c'\omega_4^2) = 0.$$

Исключая отсюда t и ω_2^4, получим

$$(a - a'c)\,\omega_4^1 + (b - b'c)\,\omega_3^2 + (1 - cc')\,\omega_4^2 = 0.$$

Поскольку равенство выполняется при любых значениях базисных форм $\omega_4^1, \omega_3^2, \omega_4^2$, то

$$a - a'c = 0,\ b - b'c = 0,\ 1 - cc' = 0.$$

Но это совпадает с (4.9), что означает, что единственной фокальной трехмерной конгруэнцией в P_5 является конгруэнция, соответствующая паре T комплексов.

Исключая из трех независимых уравнений (4.30) три базисные формы, получим кубическое уравнение, определяющее фокусы конгруэнции σ. Последняя, таким образом, в общем случае содержит три фокуса. Каждому фокусу будет соответствовать определенная развертывающаяся поверхность конгруэнции.

Поскольку по построению лучи ll' пары не могут пересекаться, то точки L, L' никогда не могут принадлежать одной прямолинейной образующей квадрики Q.

§ 4. Касательный линейный комплекс

Характерным свойством пары T является то, что комплексы пары в соответствующих лучах имеют общий касательный линейный комплекс.

Действительно, пучок касательных линейных комплексов к комплексу K определяется уравнениями

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum p\,[A_1A_2] = 0, \\ &\textstyle\sum p\,(a\,[A_3A_2] + [A_1A_3]\,) = 0, \\ &\textstyle\sum p\,(b\,[A_3A_2] + [A_4A_2]) = 0, \\ &\textstyle\sum p\,(c\,[A_3A_2] + [A_1A_4]) = 0 \end{aligned} \tag{4.31}$$

(p — совокупность шести коэффициентов уравнения линейного комплекса).

Аналогично запишутся уравнения, определяющие пучок касательных линейных комплексов к комплексу K'

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum p\,[A_3A_4] = 0, \\ &\textstyle\sum p\,(a'\,[A_1A_4] + [A_3A_1]) = 0, \\ &\textstyle\sum p\,(b'\,[A_1A_4] + [A_2A_4]) = 0, \\ &\textstyle\sum p\,(c'\,[A_1A_4] + [A_3A_2]) = 0. \end{aligned} \tag{4.32}$$

В тетраэдре $A_1A_2A_3A_4$ пучки (4.31) и (4.32) имеют соответственно уравнения

$$ap^{13} + bp^{42} + cp^{14} - p^{32} + \lambda p^{34} = 0, \tag{4.33}$$
$$a'p^{31} + b'p^{24} + c'p^{32} - p^{14} + \mu p^{12} = 0 \tag{4.34}$$

(λ и μ — параметры пучков). Комплексы (4.33) и (4.34) совпадают, если выполнены равенства

$$\frac{a}{-a'}=\frac{b}{-b'}=\frac{c}{-1}=\frac{-1}{c'}=\frac{\lambda}{0}=\frac{0}{\mu}.$$

Отсюда

$$1-cc'=0,\ a-a'c=0,\ b-b'c=0,$$

а это характеризует пару T. Общий касательный линейный комплекс имеет уравнение

$$ap^{13}+bp^{42}+cp^{14}-p^{32}=0. \tag{4.35}$$

В тетраэдре (4.21) это уравнение принимает вид

$$p^{14}-p^{32}=0. \tag{4.36}$$

§ 5. Инволютивные системы комплексов

Как мы видели выше, уравнение квадрики Плюккера имеет вид

$$p^{12}p^{34}-p^{13}p^{24}+p^{14}p^{23}=0. \tag{4.37}$$

Положим

$$p^{12}=x^1+x^4,\ p^{34}=x^1-x^4,\ p^{13}=-x^2+x^5,$$
$$p^{24}=x^2+x^5,\ p^{14}=x^3+x^6,\ p^{23}=x^3-x^6, \tag{4.38}$$

откуда

$$x^1=\frac{1}{2}(p^{12}+p^{34}),\ x^4=\frac{1}{2}(p^{12}-p^{34}),$$

$$x^2=\frac{1}{2}(p^{24}-p^{13}),\ x^5=\frac{1}{2}(p^{24}+p^{13}), \tag{4.39}$$

$$x^3=\frac{1}{2}(p^{14}+p^{23}),\ x^6=\frac{1}{2}(p^{14}-p^{23}),$$

В таком случае уравнение (4.37) принимает вид

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-(x^4)^2-(x^5)^2-(x^6)^2=0. \tag{4.40}$$

При любом аффинном действительном преобразовании, сохраняющем в левой части уравнения квадрики алгебраическую сумму квадратов, сигнатура $+++---$ сохранится. Это — следствие известного в теории квадратичных форм закона инерции.

Пусть теперь E_4 — евклидово четырехмерное пространство и

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+(u-d)^2-r^2=0$$

уравнение сферы в этом пространстве. Примем за однородные координаты сферы в этом пространстве шесть чисел $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4, \xi^5, \xi^6$, определяемых равенствами

$$\frac{\xi_1}{\xi_6}=a,\ \frac{\xi_2}{\xi_6}=b,\ \frac{\xi_3}{\xi_6}=c,\ \frac{\xi_4}{\xi_6}=d,\ \frac{\xi_5}{\xi_6}=a^2+b^2+c^2+d^2-r^2,$$

которые являются гексасферическими координатами сферы.

Каждую точку пространства E_4 можно представить себе сферой нулевого радиуса $r=0$. Следовательно, гексасферические координаты ее связаны соотношением

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2-\xi_5\xi_6=0. \tag{4.41}$$

Положим

$$\xi_1=y^1,\ \xi_2=y^2,\ \xi_3=y^3,\ \xi_4=y^4,\ \xi_5=-y^5+y^6,\ \xi_6=y^5+y^6. \tag{4.42}$$

В таком случае равенство (4.41) запишется в виде

$$(y^1)^2+(y^2)^2+(y^3)^2+(y^4)^2+(y^5)^2-(y^6)^2=0. \tag{4.43}$$

Мы видим, что все точки четырехмерного пространства отображаются на гиперквадрику (4.43) пятимерного пространства с сигнатурой $+++++-$.

Отображение, переводящее прямые трехмерного точечного пространства в точки гиперквадрики (4.40), носит название перенесения Плюккера. Отображение, переводящее точки четырехмерного точечного пространства в точки гиперквадрики (4.43), носит название перенесения Дарбу.

Примечание: Поскольку пространство E_4 рассматривается не в декартовых, а в гексасферических координатах, сохраняющихся при конформных преобразованиях пространства, то его следует рассматривать как конформное пространство.

Если мы положим теперь

$$y^1=x^1,\ y^2=x^2,\ y^3=x^3,\ y^4=ix^4,\ y^5=ix^5,\ y^6=x^6, \tag{4.44}$$

то получим отображение (в комплексной области) линейчатого пространства на четырехмерное конформное пространство. Это и есть известная фундаментальная аналогия Ли — Клейна.

Отображение можно осуществить в действительной области, если вместо евклидова взять псевдоевклидово пространство индекса 2. Уравнение сферы в таком пространстве имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2-(z-c)^2-(u-d)^2-r^2=0.$$

За однородные координаты сферы следует теперь принять числа, определяемые равенствами

$$\frac{\xi_1}{\xi_6}=a,\ \frac{\xi_2}{\xi_6}=b,\ \frac{\xi_3}{\xi_6}=-c,\ \frac{\xi_4}{\xi_6}=-d,\ \frac{\xi_5}{\xi_6}=a^2+b^2-c^2-d^2-r^2.$$

В таком случае гексасферические координаты точки будут связаны условием

$$\xi_1^2+\xi_2^2-\xi_3^2-\xi_4^2-\xi_5\xi_6=0.$$

С помощью подстановки

$$\xi_1=y^1,\ \xi_2=y^2,\ \xi_3=y^4,\ \xi_4=y^5,\ \xi_5=-y^3+y^6,\ \xi_6=y^3+y^6$$

это условие приводится к виду

$$(y^1)^2+(y^2)^2+(y^3)^2-(y^4)^2-(y^5)^2-(y^6)^2=0. \qquad (4.45)$$

Это в точности совпадает с условием (4.43), если положить

$$x^i=y^i.$$

Псевдоевклидово точечное пространство, рассматриваемое в гексасферических координатах, называется псевдоконформным пространством. Такое пространство однозначно отображается на линейчатое пространство целиком в действительной области.

Можно, следовательно, говорить об отображении линейчатого пространства как на конформное (в комплексной области), так и на псевдоконформное (в действительной области). Мы предпочтем последнее.

Запишем теперь уравнение сферы в гексасферических координатах. Если

$$(x-a)^2+(y-b)^2-(z-c)^2-(u-d)^2-r^2=0$$

ее уравнение в прямоугольной декартовой системе координат, то обозначая гексасферические координаты ее текущей точки $M\ (x,\ y,\ z,\ u)$ через ξ_i, а такие же координаты самой сферы через η_i, мы запишем последнее уравнение в виде

$$\xi_5\eta_6+\eta_5\xi_6-2\eta_1\xi_1-2\eta_2\xi_2+2\eta_3\xi_3+2\eta_4\xi_4=0. \qquad (4.47)$$

Положим теперь, в соответствии с предыдущим,

$$\xi_1=y^1,\ \xi_2=y^2,\ \xi_3=y^4,\ \xi_4=y^5,\ \xi_5=-y^3+y^6,\ \xi_6=y^3+y^6,$$

$$\eta_1=c_1,\ \eta_2=c_2,\ \eta_3=c_4,\ \eta_4=c_5,\ \eta_5=-c_3+c_6,\ \eta_6=c_3+c_6.$$

Тогда уравнение (4.47) примет вид

$$c_1y^1+c_2y^2+c_3y^3-c_4y^4-c_5y^5-c_6y^6=0, \qquad (4.48)$$

Это и есть уравнение сферы как многообразия точек. В этом уравнении координаты точки y^i подчинены условию (4.45), координаты же самой сферы c_i произвольны. Если они тоже подчинены условию (4.45), то сфера является специальной — это есть сфера нулевого радиуса.

В линейчатом пространстве уравнению (4.48) соответствует уравнение

$$c_1x^1+c_2x^2+c_3x^3-c_4x^4-c_5x^5-c_6x^6=0. \qquad (4.49)$$

Полученное уравнение есть, очевидно, уравнение линейного комплекса. Если координаты c_i этого комплекса подчинены условию (4.40), то комплекс — специальный. Он представляет собой совокупность прямых, пересекающих одну и ту же прямую — его ось.

Две сферы в псевдоевклидовом пространстве

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-(z-c_1)^2-(u-d_1)^2-r_1^2=0,$$

$$(x-a_2)^2+(y_1-b_2)^2-(z-c_2)^2-(u_1-d_2)^2-r_2^2=0$$

пересекаются ортогонально, если выполнено условие

$$(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2-(c_1-c_2)^2-(d_1-d_2)^2-r_1^2-r_2^2=0$$

или в координатах y^i

$$y_1^1y_2^1+y_1^2y_2^2+y_1^3y_2^3-y_1^4y_2^4-y_1^5y_2^5-y_1^6y_2^6=0. \qquad (4.50)$$

Таким образом, условие ортогональности двух сфер аналитически выражается через обращение в нуль полярной формы от фундаментальной квадратичной формы, стоящей в левой части уравнения (4.45). В частности, если радиусы сфер равны нулю, то равенство (4.50) связывает две точки, расстояние между которыми (если вести рассмотрение в псевдоевклидовом пространстве) равно нулю. В линейчатом пространстве условию (4.50) соответствует равенство

$$x_1^1x_2^1+x_1^2x_2^2+x_1^3x_2^3-x_1^4x_2^4-x_1^5x_2^5-x_1^6x_2^6=0. \qquad (4.51)$$

Если x^i — координаты прямой, то в плюккеровых координатах последнее условие принимает вид

$$p^{12}q^{34}-p^{13}q^{24}+p^{14}q^{23}+p^{23}q^{14}-p^{24}q^{13}+p^{34}q^{12}=0. \qquad (4.52)$$

Это есть условие пересечения двух прямых.

Если $x^i=a_i$ — координаты линейного комплекса, то условие (4.51) приинимает вид

$$a_1'a_1''+a_2'a_2''+a_3'a_3''-a_4'a_4''-a_5'a_5''-a_6'a_6''=0. \qquad (4.53)$$

Комплексы, координаты которых связаны таким условием, называются инволютивными. Выясним их геометрические свойства.

Два комплекса в трехмерном точечном пространстве всегда имеют двупараметрическое семейство — линейную конгруэнцию — общих лучей. Пусть l — один из таких лучей и

$$p^i + tq^i, \quad p^i + \lambda q^i$$

координаты двух каких-либо точек его M и N (p^i, q^i — две принимаемые за базисные точки луча l).

Пусть $p^{ik} = p^i q^k - p^k q^i$ — плюккеровы координаты луча l. Так как этот луч принадлежит обоим комплексам, то (см. (4.39))

$$a_1'(p^{12} + p^{34}) + a_2'(p^{24} - p^{13}) + a_3'(p^{14} + p^{23}) -$$
$$- a_4'(p^{12} - p^{34}) - a_5'(p^{24} + p^{13}) - a_6'(p^{14} - p^{23}) = 0, \quad (4.54)$$

$$a_1''(p^{12} + p^{34}) + a_2''(p^{24} - p^{13}) + a_3''(p^{14} + p^{23}) -$$
$$- a_4''(p^{12} - p^{34}) - a_5''(p^{24} - p^{13}) - a_6''(p^{14} - p^{23}) = 0. \quad (4.55)$$

В нуль-системах этих комплексов точкам M и N соответствуют плоскости (ради простоты мы положим $p^1 = 1, p^2 = p^3 = = p^4 = 0, q^2 = 1, q^1 = q^3 = q^4 = 0$).

$$\xi^3 [-(a_2' + a_5') + t(a_3' + a_6')] + \xi^4 [a_3' - a_6' + t(a_2' - a_5')] = 0, \quad a_1' = a_4',$$
$$\xi^3 [-(a_2'' + a_5'') + \lambda(a_3'' + a_6'')] + \xi^4 [a_3'' - a_6'' + \lambda(a_2'' - a_5'')] = 0, \quad a_1'' = a_4''.$$

Потребуем, чтобы эти плоскости совпадали. Это приводит к равенству

$$\frac{a_2' + a_5' - t(a_3' + a_6')}{a_2'' + a_5'' - \lambda(a_3'' + a_6'')} = \frac{a_3' - a_6' + t(a_2' - a_5')}{a_3'' - a_6'' + \lambda(a_2'' - a_5'')}$$

или

$$\lambda t [(a_3'' + a_6'' (a_2' - a_5') - (a_3' + a_6')(a_2'' - a_5'')] - t[(a_2'' + a_5'')(a_2' - a_5') +$$
$$+ (a_3'' - a_6'')(a_3' + a_6')] + \lambda[(a_2' + a_5')(a_2'' - a_5'') + (a_3' - a_6')(a_3'' + a_6'')] +$$
$$+ (a_2' + a_5')(a_3'' - a_6'') - (a_2'' + a_5'')(a_3' - a_6') = 0.$$

Этим устанавливается проективитет между точками M и N. Этот проективитет становится инволюцией тогда и только тогда, когда

$$(a_2'' + a_5'')(a_2' - a_5') + (a_3' - a_6'')(a_3' + a_6') + (a_2' + a_5') \times$$
$$\times (a_2'' - a_5'') + (a_3' - a_6')(a_3'' + a_6'') = 0$$

или

$$a_2'a_2'' + a_3'a_3'' - a_5'a_5'' - a_6'a_6'' = 0.$$

Это в точности совпадает с равенством (4.53), если в нем положить $a_1' = a_4'$, $a_1'' = a_4''$.

Для двух линейных комплексов, заданных уравнеииями вида

$$c_{12}p^{12} + c_{13}p^{13} + c_{14}p^{14} + c_{23}p^{23} + c_{24}p^{24} + c_{34}p^{34} = 0,$$

условие (4.53) будет выражаться уравнением

$$c_{12}'c_{34}'' + c_{12}'c_{34}'' - c_{13}'c_{24}'' - c_{13}'c_{24}'' + c_{14}'c_{23}'' + c_{14}'c_{23}'' = 0. \quad (4.56)$$

Таким образом, пара инволютивных комплексов характеризуется тем, что на каждой принадлежащей им прямой они устанавливают инволюцию между плоскостями, соответствующими точкам прямой в нуль-системах этих комплексов.

Пусть мы теперь имеем некоторую точку $M(y)$ в псевдоконформном пространстве и два выходящих из нее направления. Такие направления можно, очевидно, задать с помощью дифференциалов dy и δy. Координаты $y + dy$ и $y + \delta y$ определяют в пространстве не точки, а некоторые сферы, которые, в силу равенств

$$(y^1 + dy^1)y^1 + (y^2 + dy^2)y^2 + (y^3 + dy^3)y^3 - (y^4 + dy^4)y^4 -$$
$$- (y^5 + dy^5)y^5 - (y^6 + dy^6)y^6 = 0,$$
$$(y^1 + \delta y^1)y^1 + (y^2 + \delta y^2)y^2 + (y^3 + \delta y^3)y^3 - (y^4 + \delta y^4)y^4 -$$
$$- (y^5 + \delta y^5)y^5 + (y^6 + \delta y^6)y^6 = 0$$

проходят через точку M. Если потребовать, чтобы эти сферы были ортогональны, то будут ортогональными и направления, определяемые дифференциалами dy и δy. Подставляя координаты $y + dy$ и $y + \delta y$ в (4.50), получим условие ортогональности в виде

$$dy^1\delta y^1 + dy^2\delta y^2 + dy^3\delta y^3 - dy^4\delta y^4 - dy^5\delta y^5 - dy^6\delta y^6 = 0. \quad (4.57)$$

В линейчатом пространстве мы будем иметь два линейных комплекса $x + dx$ и $x + \delta x$, связанных условием

$$dx^1\delta x^1 + dx^2\delta x^2 + dx^3\delta x^3 - dx^4\delta x^4 - dx^5\delta x^5 - dx^6\delta x^6 = 0. \quad (4.58)$$

Из сказанного выше следует, что это является условием инволютивности комплексов.

Если дифференциалы dx и δx, кроме того, подчинены условию

$$(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2 - (dx^5)^2 - (dx^6)^2 = 0,$$
$$(\delta x^1)^2 + (\delta x^2)^2 + (\delta x^3)^2 - (\delta x^4)^2 - (\delta x^5)^2 - (\delta x^6)^2 = 0,$$

то мы будем иметь дело с двумя линейчатыми поверхностями σ_1 и σ_2 проходящими через одну и ту же прямую x. Линейные комплексы $x+dx$ и $x+\delta x$ становятся специальными линейными комплексами, а плоскости, соответствующие в их нуль-системах точкам прямой x, — касательными плоскостями поверхностей σ_1 и σ_2. Последние оказываются, таким образом, расположенными инволютивно относительно друг друга.

Два произвольных линейчатых комплекса, содержащие общий луч, будут пересекаться в этом луче инволютивно, если инволютивно пересекаются касательные к ним линейные комплексы. Совершенно очевидно теперь, что четырежды ортогональной системе поверхностей в псевдоконформном пространстве будет соответствовать в линейном пространстве система из четырех однопараметрических семейств комплексов, попарно пересекающихся инволютивно. Назовем такую систему **четырежды инволютивной системой комплексов.**

Найдем такие системы непосредственно в линейчатом пространстве средствами метода внешних форм Картана.

Пусть в трехмерном проективном пространстве ребро A_1A_2 координатного тетраэдра совпадает с общим лучом четырех комплексов четырежды инволютивной системы.

Главные формы смещения тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$

$$\omega_1^3,\ \omega_2^3,\ \omega_1^4,\ \omega_2^4.$$

Мы не можем, к сожалению, так канонизировать сопровождающий тетраэдр, чтобы в нем уравнение каждого однопараметрического семейства комплексов выражалось обращением в нуль соответствующей главной формы, так как такое обращение возможно лишь для специального комплекса. Однако ничто не мешает нам на любом из этих комплексов выбрать в качестве базисных форм ту или иную тройку главных форм. В таком случае уравнения комплексов инволютивной системы будут иметь соответственно вид

$$\begin{aligned}
K_1:&\quad \omega_1^3 = a_1\omega_2^3 + b_1\omega_1^4 + c_1\omega_2^4,\\
K_2:&\quad \omega_2^3 = a_2\omega_1^4 + b_2\omega_2^4 + c_2\omega_1^3,\\
K_3:&\quad \omega_1^4 = a_3\omega_2^4 + b_3\omega_1^3 + c_3\omega_2^3,\\
K_4:&\quad \omega_2^4 = a_4\omega_1^3 + b_4\omega_2^3 + c_4\omega_1^4.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Найдем для каждого из этих комплексов соответствующий ему пучок касательных линейных комплексов. Если

$$\sum a\,[A_1A_2] = 0 \tag{4.60}$$

уравнение линейного комплекса (a — совокупность шести коэффициентов этого уравнения), то, дифференцируя его, получим

$$\omega_1^3\sum a\,[A_3A_2] + \omega_1^4\sum a\,[A_4A_2] + \omega_2^3\sum a\,[A_1A_3] + \omega_2^4\sum a\,[A_1A_4] = 0.$$

Внося сюда последовательно условия (4.59) и приравнивая каждый раз к нулю коэффициенты при базисных формах соответствующего комплекса, будем иметь для комплекса K_1:

$$\begin{aligned}
&a_1\sum a\,[A_3A_2] + \sum a\,[A_1A_3] = 0,\\
&b_1\sum a\,[A_3A_2] + \sum a\,[A_4A_2] = 0,\\
&c_1\sum a\,[A_3A_2] + \sum a\,[A_1A_4] = 0,
\end{aligned} \tag{4.61}$$

для комплекса K_2:

$$\begin{aligned}
&a_2\sum a\,[A_1A_3] + \sum a\,[A_4A_2] = 0,\\
&b_2\sum a\,[A_1A_3] + \sum a\,[A_1A_4] = 0,\\
&c_2\sum a\,[A_1A_3] + \sum a\,[A_3A_2] = 0,
\end{aligned} \tag{4.62}$$

для комплекса K_3:

$$\begin{aligned}
&a_3\sum a\,[A_4A_2] + \sum a\,[A_1A_4] = 0,\\
&b_3\sum a\,[A_4A_2] + \sum a\,[A_3A_2] = 0,\\
&c_3\sum a\,[A_4A_2] + \sum a\,[A_1A_3] = 0,
\end{aligned} \tag{4.63}$$

для комплекса K_4:

$$\begin{aligned}
&a_4\sum a\,[A_1A_4] + \sum a\,[A_3A_2] = 0,\\
&b_4\sum a\,(A_1A_4] + \sum a\,[A_1A_3] = 0,\\
&c_4\sum a\,[A_1A_4] + \sum a\,[A_4A_2] = 0.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Каждую тройку уравнений нужно для соответствующего комплекса присоединить к уравнению (4.60). В сопровождающем тетраэдре уравнения пучков касательных линейных комплексов будут иметь вид

$$
\begin{aligned}
&K_1: \quad p^{23}+a_1p^{13}+b_1p^{42}+c_1p^{14}+\lambda_1p^{34}=0,\\
&K_2: \quad p^{31}+a_2p^{42}+b_2p^{14}+c_2p^{32}+\lambda_2p^{34}=0,\\
&K_3: \quad p^{24}+a_3p^{14}+b_3p^{32}+c_3p^{13}+\lambda_3p^{34}=0,\\
&K_4: \quad p^{41}+a_4p^{32}+b_4p^{13}+c_4p^{42}+\lambda_4p^{34}=0
\end{aligned}
\tag{4.65}
$$

($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ — параметры пучков).

Потребуем, чтобы два любых линейных комплекса, принадлежащих к разным пучкам, были инволютивно сопряжены друг другу. Принимая во внимание равенство (4.56), запишем условие сопряженности в виде

$$
\begin{aligned}
&a_1a_2-c_1c_2-(b_1-b_2)=0,\\
&1+a_2c_3-b_2b_3-c_2a_3=0,\\
&b_1c_3-a_1+a_3-c_1b_3=0,\\
&a_1c_4+b_1b_4-c_1a_4-1=0,\\
&-c_4+a_2b_4-b_2a_4+c_2=0,\\
&c_3c_4-b_4-a_3a_4+b_3=0.
\end{aligned}
\tag{4.66}
$$

Мы имеем 6 условий на 12 коэффициентов a_i, b_i, c_i. Среди последних, таким образом, лишь 6 независимых. Мы не будем доказывать теоремы существования инволютивных систем, отослав читателя к работе А. М. Васильева [10], где приведены соответствующие подсчеты, и к книге С. П. Финикова [85], содержащей изложение этой работы. Сошлемся лишь на результат, гласящий, что инволютивные системы существуют с произволом в 6 функций двух аргументов.

Нашей целью будет исследование вопроса о том, как влияет преобразование T на инволютивную систему комплексов. Иными словами, если H — некоторая инволютивная система и H' — четыре однопараметрических семейства комплексов, соответствующих комплексам H в соответствии T, то будет ли система H' также инволютивной?

Покажем, что ответ на последний вопрос является положительным.

Действительно, пусть общий луч системы H' есть A_3A_4. В таком случае главными формами смещения этого луча будут

$$\omega_3^1,\ \omega_4^1,\ \omega_3^2,\ \omega_4^2.$$

Уравнения комплексов K_1', K_2', K_3', K_4', получающихся из комплексов K_1, K_2, K_3, K_4 путем преобразования T, имеют соответственно вид

$$
\begin{aligned}
&\omega_3^1=a_1'\omega_4^1+b_1'\omega_3^2+c_1'\omega_4^2,\\
&\omega_4^1=a_2'\omega_3^2+b_2'\omega_4^2+c_2'\omega_3^1,\\
&\omega_3^2=a_3'\omega_4^2+b_3'\omega_3^1+c_3'\omega_4^1,\\
&\omega_4^2=a_4'\omega_3^1+b_4'\omega_4^1+c_4'\omega_3^2.
\end{aligned}
\tag{4.67}
$$

Поскольку пара комплексов K_1, K_1' есть пара T, то для нее должны быть выполнены равенства (4.9), т. е.

$$1-c_1c_1'=0,\ a_1-c_1a_1'=0,\ b_1-c_1b_1'=0. \tag{4.68}$$

Аналогичные условия получаются для пар K_2 и K_2', K_3 и K_3', K_4 и K_4':

$$
\begin{aligned}
&a_2-a_2'=0,\ b_2+c_2'=0,\ b_2b_2'-c_2c_2'=0,\\
&c_3-c_3'=0,\ a_3+b_3'=0,\ a_3a_3'-b_3b_3'=0,\\
&1-a_4a_4'=0,\ c_4-a_4c_4'=0,\ b_4-a_4b_4'=0.
\end{aligned}
\tag{4.69}
$$

Принимая во внимание (4.66), из последних равенств легко выводим

$$
\begin{aligned}
&a_1'a_2'-c_1'c_2'-(b_1'-b_2')=0,\\
&1+a_2'c_3'-b_2'b_3'-c_2'a_3'=0,\\
&b_1'c_3'-a_1'+a_3'-c_1'b_3'=0,\\
&a_1'c_4'+b_1'b_4'-c_1'a_4'-1=0,\\
&-c_4'+a_2'b_4'-b_2'a_4'+c_2'=0,\\
&c_3'c_4'-b_4'-a_3'a_4'+b_3'=0.
\end{aligned}
$$

Это означает, что луч A_3A_4 описывает четырежды инволютивную систему комплексов. Требуемое доказано.

§ 6. Инволютивное преобразование I

Наряду с преобразованием T представляет определенный интерес рассмотрение преобразования, которому мы присвоим название инволютивного преобразования комплексов. Для того, чтобы определить такое преобразование, обратимся к равенствам, с которых мы начали рассмотрение преобразования T.

Пусть два комплекса K и K' определены дифференциальными уравнениями (соответственно)

$$
\begin{aligned}
&\omega_1^3=a\omega_2^3+b\omega_1^4+c\omega_2^4,\\
&\omega_3^1=a'\omega_4^1+b'\omega_3^2+c'\omega_4^2
\end{aligned}
\tag{4.70}
$$

(как и прежде комплекс K описывается ребром $l = A_1A_2$, комплекс K' — ребром $l' = A_3A_4$).

Как уже говорилось выше, плоскость П, соответствующая в нормальной корреляции точке $M = A_1 + tA_2$ луча A_1A_2 пересекает луч A_3A_4 в точке $M' = A_3 + t'A_4$, где

$$t' = \frac{a+t}{bt-c}.$$

Плоскость П′, соответствующая в нормальной корреляции на луче A_3A_4 точке M', пересекает луч A_1A_2 в точке $\overline{M} = A_1 + \overline{t}A_2$, где

$$\overline{t} = \frac{a'+t'}{b't'-c'}.$$

Отсюда

$$(b' - bc')\,t\overline{t} + (ab' + cc')\,\overline{t} - (1 + a'b)\,t - a + a'c = 0. \qquad (4.71)$$

Мы видим, что между точками M и $\overline{M}$ устанавливается некоторый проективитет P. Этот проективитет обращается в тождество для пары T. Другим, обращающим на себя внимание случаем проективитета P является, очевидно, случай инволюции. Назовем пары комплексов, для которых такой случай имеет место, инволютивными парами или парами I. Очевидно, такие пары полностью характеризуются равенством

$$ab' + a'b + cc' + 1 = 0. \qquad (4.72)$$

Равенство симметрично относительно букв со штрихами и букв без штрихов. Следовательно, если проективитет является инволюцией на луче l комплекса K, то соответствующий проективитет на луче l' также является инволюцией.

Выясним геометрические свойства пары I.

§ 7. Нормальные квадрики

Пусть Q — некоторая квадрика, проходящая через лучи l и l'. Произвольная образующая этой квадрики пересекает лучи l и l' в точках

$$M = A_1 + tA_2, \quad M' = A_3 + t'A_4,$$

связанных друг с другом в некотором проективитете

$$t' = \frac{At+B}{Ct+D} \quad \text{или} \quad t = \frac{Dt'-B}{-Ct'+A}\ (AD - BC \neq 0). \qquad (4.73)$$

Повторяя почти дословно рассуждения, приведенные в § 2, возьмем, прежде всего, касательные плоскости к квадрике в точках M и M'

$$\Pi = (A_1A_2A_3) + t'(A_1A_2A_4),$$
$$\Pi' = (A_3A_4A_1) + t(A_3A_4A_2).$$

Касательные плоскости к соответствующим линейчатым поверхностям комплексов K, K', проходящим (в отдельности) через лучи l и l',

$$\omega_2^3 : \omega_1^4 : \omega_2^4, \quad \omega_4^1 : \omega_3^2 : \omega_4^2$$

в некоторых точках

$$\overline{M} = A_1 + \overline{t}A_2, \ \overline{M}' = A_3 + \overline{t}'A_4$$

лучей l и l', определятся координатами

$$\overline{\Pi} = (\omega_1^3 + \overline{t}\omega_2^3)(A_1A_2A_3) + (\omega_1^4 + \overline{t}\omega_2^4)(A_1A_2A_4),$$
$$\overline{\Pi}' = (\omega_3^1 + \overline{t}'\omega_4^1)(A_3A_4A_1) + (\omega_3^2 + \overline{t}'\omega_4^2)(A_3A_4A_2).$$

В то же время плоскости, соответствующие точкам $\overline{M}$ и $\overline{M}'$ в нормальных корреляциях на лучах l и l', определяются тангенциальными координатами

$$\Pi_1 = (b\overline{t} - c)(A_1A_2A_3) + (a + \overline{t})(A_1A_2A_4),$$
$$\Pi_1' = (b'\overline{t}' - c')(A_3A_4A_1) + (a' + \overline{t}')(A_3A_4A_2).$$

Потребуем, чтобы плоскости П и П′ совпадали соответственно с плоскостями $\overline{\Pi}$ и Π'_1. Это приводит к равенствам

$$t'(\omega_1^3 + \overline{t}\omega_2^3) - (\omega_1^4 + \overline{t}\omega_2^4) = 0,$$
$$t(b'\overline{t}' - c') - (a' + \overline{t}') = 0,$$

или (см. (4.73))

$$(At + B)(\omega_1^3 + \overline{t}\omega_2^3) - (Ct + D)(\omega_1^4 + \overline{t}\omega_2^4) = 0,$$
$$(Dt' - B)(b'\overline{t}' - c') - (-Ct' + A)(a' + \overline{t}') = 0. \qquad (4.74)$$

Потребуем, чтобы квадрика Q была ортогональной к комплексу K и касалась комплекса K'. Это означает, что оба проективитета (4.74) должны быть инволюциями. Считая, что формы ω_1^3 и

ω_3^1 определяются равенствами (4.70), мы заключим, что это возможно только лишь при выполнении условий:

$$B-Aa=0,\ C-Ab=0,\ D+Ac=0, \tag{4.75}$$

$$-Dc'+Ca'+Bb'+A=0.$$

Исключая из этих равенств коэффициенты A, B, C, D, получим

$$ab'+a'b+cc'+1=0.$$

Это в точности совпадает с равенством (4.72).

К тому же самому мы пришли бы, если бы потребовали совпадения плоскостей Π и Π' соответственно с плоскостями Π_1 и Π'. Этому результату можно придать несколько другую форму. Потребуем, чтобы наравне с совпадением плоскостей Π и $\overline{\Pi}$ имело место также и совпадение плоскостей Π' и $\overline{\Pi'}$. Это приведет к равенству

$$t(\omega_3^1+\overline{t}'\omega_4^1)-(\omega_3^2+\overline{t}'\omega_4^2)=0$$

или

$$(Dt'-B)(\omega_3^1+\overline{t}'\omega_4^1)-(-Ct'+A)(\omega_3^2+\overline{t}'\omega_4^2)=0.$$

От последнего равенства потребуем, чтобы оно было тождеством вида $t'=\overline{t'}$, но не для всех линейчатых поверхностей комплекса K', а лишь для одной какой-то поверхности этого комплекса. Это приводит к равенствам

$$D\omega_4^1+C\omega_4^2=0,\quad B\omega_3^1+A\omega_3^2=0,$$

$$-B\omega_4^1-A\omega_4^2+D\omega_3^1+C\omega_3^2=0.$$

К этим равенствам следует присоединить первые три равенства системы (4.75):

$$B-Aa=0,\ C-Ab=0,\ D+Ac=0.$$

Принимая во внимание последние равенства, а также равенства (4.70), получим

$$-c\omega_4^1+b\omega_4^2=0,$$

$$aa'\omega_4^1+(ab'+1)\omega_3^2+ac'\omega_4^2=0,$$

$$-(a+ca')\omega_4^1+(b-cb')\omega_3^2-(1+cc')\omega_4^2=0.$$

Условием совместности этих уравнений будет

$$\begin{vmatrix} -c & aa' & a+ca' \\ 0 & ab'+1 & -b+cb' \\ b & ac' & 1+cc' \end{vmatrix}=0.$$

или

$$(ab+c)(ab'+a'b+cc'+1)=0.$$

Исключая из рассмотрения специальные комплексы, т. е. полагая $ab+c\neq 0$, получим

$$ab'+a'b+cc'+1=0,$$

т. е. равенство (4.72).

Таким образом, инволютивные пары комплексов характеризуются тем, что у них в каждой паре соответствующих лучей существует проходящая через них квадрика, ортогональная к одному комплексу (инволютивно сопряженная с каждой линейчатой поверхностью этого комплекса) и касательная ко второму комплексу (инволютивно сопряженная с нормальной корреляцией этого комплекса).

Нормальная корреляция на луче комплекса есть полярное соответствие в любом касательном линейном комплексе. Следовательно, вместо того, чтобы говорить о квадрике Q в паре соответствующих лучей, можно говорить о касательных линейных комплексах. Инволютивные пары комплексов характеризуются тем, что у них в каждой паре соответствующих лучей существует пара линейных комплексов, каждый из которых касается одного комплекса и инволютивно сопряжен с другим (инволютивно сопряжен со всеми касательными комплексами другого).

Это же может быть подтверждено аналитическими выкладками.

Действительно, как уже указывалось выше, касательные линейные комплексы к комплексам K и K' в сопровождающем тетраэдре имеют уравнения

$$ap^{13}+bp^{42}+cp^{14}-p^{32}+\lambda p^{34}=0,$$

$$a'p^{31}+b'p^{24}+c'p^{32}-p^{14}+\mu p^{12}=0$$

(см. (4.33) и (4.34)). Эти комплексы содержат оба луча l, l', если $\lambda=\mu=0$. Последние инволютивно сопряжены друг другу (это значит, что линейный комплекс касательный, например, к комплексу K в луче l, инволютивно сопряжен в луче l' с комплексом, касательным к K'), если

$$ab'+a'b+cc'+1=0,$$

что совпадает с (4.72).

Подсчитаем теперь широту класса инволютивных пар комплексов. Легко заметить, что между характеристическими формами Ω_i, Ω_i' имеет место следующая линейная зависимость:

$$a\Omega_2' + b\Omega_1' + c\Omega_3' + a'\Omega_2 + b'\Omega_1 + c'\Omega_3 = 0 \qquad (4.76)$$

(см. (4.17).

Положим

$$\begin{aligned} \omega_4^1 &= p^1\omega_2^3 + q^1\omega_1^4 + r^1\omega_2^4, \\ \omega_3^2 &= p^2\omega_2^3 + q^2\omega_1^4 + r^2\omega_2^4, \\ \omega_4^2 &= p^3\omega_2^3 + q^3\omega_1^4 + r^3\omega_2^4. \end{aligned} \qquad (4.77)$$

Тогда система ковариантов (4.15) примет вид

$$\begin{aligned} &[\Omega_1\omega_2^3] + [\Omega_2\omega_1^4] + [\Omega_3\omega_2^4] = 0, \\ &[\Omega_i' p^i, \omega_2^3] + [\Omega_i' q^i, \omega_1^4] + [\Omega_i' r^i, \omega_2^4] = 0. \end{aligned} \qquad (4.78)$$

Продифференцируем внешним образом систему (4.77)

$$[\Delta p^k \omega_2^3] + [\Delta q^k \omega_1^4] + [\Delta r^k \omega_2^4] = 0, \quad k = 1, 2, 3. \qquad (4.79)$$

Итак, мы имеем пять линейно независимых уравнений Пфаффа — (4.1), (4.2) и (4.77) и пять линейно независимых ковариантов — (4.78) и (4.79), полученных путем их внешнего дифференцирования, $s_1=5$. Характеристических форм Ω_i, Ω_i', $\Delta p^k, \Delta q^k$, Δr^k — 14, $q = 14$. При невозрастающих характерах имеем $s_2=5$, $s_3=4$. Следовательно, число Картана $Q=27$.

Развернем теперь коварианты (4.78), (4.79) по лемме Картана. Не выписывая всех получающихся при этом уравнений Пфаффа, заметим, что мы будем иметь $6+6+6\cdot3=30$ параметров продолжения. Однако равенство (4.76) наложит на эти параметры три соотношения, следовательно, $N=27$. Таким образом, $Q=N$, а потому мы можем высказать предложение, что **класс всех инволютивных пар зависит от 4 произвольных функций трех аргументов.** Следовательно, не только любая пара комплексов может находиться в инволютивном соответствии, но и само соответствие между их лучами может существовать с достаточно большим произволом (2 функции трех аргументов).

Глава пятая

КАНОНИЧЕСКИЙ ТЕТРАЭДР КОМПЛЕКСА В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Окрестность второго порядка

Основными геометрическими образами поверхности в проективном пространстве являются ее асимптотические линии. Поверхность считается отнесенной к асимптотическим линиям, если два ребра сопровождающего тетраэдра совпадают с касательными к асимптотическим линиям. Аналитически условие такого совпадения выглядит следующим образом.

Если вершину A_1 тетраэдра совместить с текущей точкой поверхности, а плоскость $A_1A_2A_3$ — с касательной плоскостью этой поверхности, то главными формами смещения тетраэдра будут формы ω_1^2, ω_1^3. Совмещая ребра A_1A_2 и A_1A_3 с асимптотическими касательными, мы приведем дифференциальные уравнения асимптотических линий соответственно к виду

$$\omega_1^3 = 0, \quad \omega_1^2 = 0. \qquad (5.1)$$

Уравнения (5.1) можно считать простейшими уравнениями асимптотических.

Однако отнюдь не более сложными являются и уравнения вида

$$\omega_1^3 + \omega_1^2 = 0, \quad \omega_1^3 - \omega_1^2 = 0 \qquad (5.2)$$

и уравнения

$$\omega_1^3 + k\omega_1^2 = 0, \quad \omega_1^3 + l\omega_1^2 = 0, \qquad (5.3)$$

где k и l — некоторые инварианты поверхности. Разумеется, ни в случае (5.2), ни в случае (5.3) ребра A_1A_2 и A_1A_3 подвижного тетраэдра не совпадают с касательными к асимптотическим линиям; однако проективная связь асимптотических линий с теми линиями на поверхности, которых касаются в этих случаях ребра A_1A_2 и A_1A_3, оказывается достаточно простой.

Расширяя несколько содержание слов «поверхность, отнесена к асимптотическим линиям», мы будем говорить, что такое отнесение имеет место, если в сопровождающем тетраэдре поверхности дифференциальные уравнения асимптотических имеют наиболее простой вид. Понятие простоты не является однозначно определенным понятием. Понимание простоты зависит от тех целей и задач, которые мы перед собой ставим. Однако в то же время такое понимание и не является столь неопределенным, чтобы его нельзя было использовать при канонизации сопровождающего репера того или иного геометрического многообразия.

Обратимся к комплексам прямых в проективном пространстве. Естественно принять за основные проективные образы такого комплекса его главные поверхности.

Если поместить вершины A_1A_2 тетраэдра на луч комплекса, совместить плоскости $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$ с плоскостями, соответствующими этим точкам в нормальной корреляции и определенным образом пронормировать координаты вершин, то главные формы $\omega_1^3, \omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4$, как показано в гл. I, будут подчинены следующему соотношению

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0 \tag{5.4}$$

с дифференциальным продолжением

$$\begin{aligned} \omega_1^2 - \omega_3^4 &= p\omega_2^3 + \alpha\omega_1^4 + \beta\omega_2^4, \\ \omega_2^1 - \omega_4^3 &= \alpha\omega_2^3 + q\omega_1^4 - \gamma\omega_2^4, \\ \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4 &= \beta\omega_2^3 - \gamma\omega_1^4 + r\omega_2^4. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Базисными формами являются формы ω_2^3, ω_1^4, ω_2^4. Всякая конгруэнция, принадлежащая комплексу, будет определяться одним линейным уравнением между этими формами

$$a\omega_2^3 + b\omega_1^4 + c\omega_2^4 = 0. \tag{5.6}$$

Если на коэффициенты не наложены никакие условия, то эта конгруэнция в общем случае является неголономной.

Всякая линейчатая поверхность комплекса задается как пересечение двух конгруэнций

$$a\omega_2^3 + b\omega_1^4 + c\omega_2^4 = 0, \quad a_1\omega_2^3 + b_1\omega_1^4 + c_1\omega_2^4 = 0. \tag{5.7}$$

Эти уравнения следует рассматривать как два обыкновенных дифференциальных уравнения на две функции. За таковые можно принять, например, функции u и v, за аргумент — w. Такие уравнения всегда имеют решение; следовательно, на коэффициенты a, b, c, a_1, b_1, c_1, кроме совершенно естественных условий, налагаемых теоремами существования и единственности, не накладывается никаких дополнительных условий.

Уравнение (5.6), если оно вполне интегрируемо, определяет не одну конгруэнцию, а целое однопараметрическое семейство таких конгруэнций, составляющих данный комплекс.

Равным образом уравнения (5.7) определяют не одну, а двупараметрическое семейство линейчатых поверхностей, составляющих комплекс.

Мы рассмотрели выше комплексы с кратными инфлекционными центрами на каждом луче. Такие комплексы характеризовались тем, что характеристическое уравнение (1.23), определяющее главные поверхности, допускает непростые корни. Следовательно, через каждый луч комплекса проходило более или менее трех главных поверхностей.

Обратимся теперь к рассмотрению случая, когда через каждый луч комплекса проходит три и только три главных поверхности. Таким образом, характеристические уравнения имеют только простые корни.

Будем говорить, что комплекс отнесен к главным поверхностям, если дифференциальные уравнения таких поверхностей в сопровождающем тетраэдре имеют наиболее простой вид. Поскольку базисными формами являются формы ω_2^3, ω_1^4, ω_2^4, то, казалось бы, простейшими следует признать уравнения

$$\begin{aligned} \omega_2^3 &= 0, & \omega_1^4 &= 0, \\ \omega_2^3 &= 0, & \omega_2^4 &= 0, \\ \omega_1^4 &= 0, & \omega_2^4 &= 0. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Эти уравнения действительно являются простейшими из всех уравнений вида (5.7). Легко, однако, видеть, что для поверхностей, определяемых уравнениями (5.8_2) и (5.8_3), выполняется условие

$$\omega_2^3\omega_1^4 - \omega_2^4\omega_1^3 = 0,$$

характеризующее развертывающие поверхности. Поскольку в случае простых корней характеристического уравнения главные поверхности могут быть только косыми, то привести дифференциальные уравнения таких поверхностей к виду (5.82) и (5.83), очевидно, не удастся. Но в таком случае естественно назвать простейшими уравнения вида

$$\begin{aligned} \omega_2^3 &= 0, & \omega_1^4 &= 0, \\ \omega_2^3 + \omega_1^4 &= 0, & \omega_2^4 &= 0, \\ \omega_2^3 - \omega_1^4 &= 0, & \omega_2^4 &= 0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Будем говорить, что комплекс отнесен к главным поверхностям, если уравнения таких поверхностей имеют вид (5.9).

Уравнения (5.9) не могут быть получены друг из друга путем круговой перестановки индексов и, следовательно, сами поверхности оказываются несимметричными по отношению к сопровождающему тетраэдру.

Назовем поверхность, дифференциальные уравнения которой имеют вид (5.9_1), координатной поверхностью. У такой поверхности точки прикосновения, определяемые уравнением (1.19), совпадают с вершинами A_1 и A_2 тетраэдра. Что касается двух других поверхностей, то они уже таким свойством не обладают.

Наша задача при канонизации сопровождающего тетраэдра комплекса будет состоять в том, чтобы привести дифференциальные уравнения его главных поверхностей к виду (5.9).

Выпишем с этой целью ряд уравнений: уравнение, определяющее точки прикосновения поверхности

$$\omega_2^3 t^2 - 2\omega_2^4 t - \omega_1^4 = 0, \tag{1.19}$$

уравнение, определяющее инфлекционные центры луча

$$qt^4 + 2\gamma t^3 - (2\alpha - r)t^2 + 2\beta t + p = 0, \tag{1.16}$$

уравнения, определяющие главные поверхности

$$\begin{aligned} (\alpha - s)\,\omega_2^3 + q\omega_1^4 - \gamma\omega_2^4 &= 0, \\ p\omega_2^3 + (\alpha - s)\,\omega_1^4 + \beta\omega_2^4 &= 0, \\ \beta\omega_2^3 - \gamma\omega_1^4 + (r - 2s)\,\omega_2^4 &= 0 \end{aligned} \tag{1.22}$$

и характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \alpha - s & q & -\gamma \\ p & \alpha - s & \beta \\ \beta & -\gamma & r - 2s \end{vmatrix} = 0. \tag{1.23}$$

Внесем (5.9_1) в (1.22):

$$-\gamma\omega_2^4 = 0,$$

$$\beta\omega_2^4 = 0.$$

$$(r - 2s)\,\omega_2^4 = 0.$$

Если бы $\gamma \neq 0$, $\beta \neq 0$, то $\omega_2^4 = 0$, а тогда вместе с $\omega_2^3 = 0$, $\omega_1^4 = 0$ это вело бы к неподвижности луча. Следовательно,

$$\beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad s_1 = \frac{r}{2} \tag{5.10}$$

(s_1 — корень характеристического уравнения, соответствующий главной поверхности (5.9_1)).

Внесем теперь в (1.22) уравнения (5.9_2) и (5.9_3). Соответственно будем иметь

$$\begin{aligned} -(\alpha - s) + q &= 0, \\ -p + (\alpha - s) &= 0; \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned} (\alpha - s) + q &= 0, \\ p + (\alpha - s) &= 0. \end{aligned} \tag{5.12}$$

(мы предполагаем, что $\omega_2^3 \neq 0$, $\omega_1^4 \neq 0$, в противном случае луч комплекса оставался бы неподвижным. Кроме того, учтены равенства (5.10).

Из (5.11) и (5.12) находим

$$p = q.$$

Корнями характеристического уравнения, соответствующими главным поверхностям (5.9_2) и (5.9_3), будут

$$s_2 = \alpha - p, \ s_3 = \alpha + p. \tag{5.13}$$

По условию все корни различны. Следовательно, $p \neq 0$. Считая зафиксированными главные параметры, мы из первого уравнения (1.41) получаем

$$\delta p + p\,(\pi_2^2 - 2\pi_3^3 + \pi_4^4) = 0. \tag{5.14}$$

Выбором вторичных параметров можно привести коэффициент p, а следовательно, и q к единице:

$$p = q = 1. \tag{5.15}$$

Из коэффициентов, определяющих вторую дифференциальную окрестность луча, остались незафиксированными α и r. Из (1.41) находим

$$-d\,(r - 2\alpha) + \frac{1}{2}\,(r - 2\alpha)\,(\omega_3^3 - \omega_2^2 + \omega_4^4 - \omega_1^1) =$$

$$= (r_1 - p_2)\,\omega_2^3 + (r_2 - q_1)\,\omega_1^4 + (r_3 - h)\,\omega_2^4, \tag{5.16}$$

$$\omega_3^3 - \omega_2^2 + \omega_4^4 - \omega_1^1 = (p_1 + q_1)\,\omega_2^3 + (p_2 + q_2)\,\omega_1^4 + (p_3 + q_3)\,\omega_2^4.$$

Отсюда заключаем, что

$$\delta\,(r - 2\alpha) = 0,$$

т. е. величина $r - 2\alpha$ есть инвариант. В то же время, как показывают те же равенства (1.41),

$$\delta r + 2\,(\pi_4^2 + \pi_3^1) = 0.$$

Поскольку формы π_4^2 и π_3^1 еще не зафиксированы, то фиксацией их суммы можно привести коэффициент r к нулю. Покажем, как это можно сделать.

С этой целью найдем квадрику Ли для координатной главной поверхности

$$\omega_2^3 = 0, \quad \omega_1^4 = 0. \tag{5.17}$$

Такая квадрика будет определяться следующими девятью уравнениями:

$$\sum A_1A_1 = 0, \ \sum A_1A_2 = 0, \ \sum A_2A_2 = 0,$$

$$d\sum A_1A_1 = 0, \ d\sum A_1A_2 = 0, \ d\sum A_2A_2 = 0, \quad (\mathrm{mod}\ \omega_2^3, \omega_1^4)$$

$$d^2\sum A_1A_1 = 0, \quad d^2\sum A_1A_2 = 0, \quad d^2\sum A_2A_2 = 0$$

или

$$\sum A_1A_1 = 0, \ \sum A_1A_2 = 0, \ \sum A_2A_2 = 0,$$

$$\sum A_1A_3 = 0, \quad \sum (A_1A_4 - A_2A_3) = 0, \quad \sum A_2A_4 = 0,$$

$$\sum [(\omega_1^2 + \omega_3^4) A_2A_3 - \omega_2^4 A_3A_3] = 0, \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_2^3, \omega_1^4) \tag{5.18}$$

$$\sum [(\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4) A_1A_4 + 2\omega_2^4 A_3A_4] = 0,$$

$$\sum [(\omega_2^1 + \omega_4^3) A_1A_4 + \omega_2^4 A_4A_4] = 0.$$

Положив

$$\omega_1^2 + \omega_3^4 = 2A\omega_2^4, \quad \omega_2^1 + \omega_4^3 = 2B\omega_2^4 \ (\mathrm{mod}\ \omega_2^3, \omega_1^4),$$

мы можем записать уравнение квадрики (5.18) в сопровождающем тетраэдре $A_1A_2A_3A_4$ в виде

$$A(\xi^3)^2 + \xi^2\xi^3 + \xi^1\xi^4 - \frac{r}{2}\xi^3\xi^4 - B(\xi^4)^2 = 0. \tag{5.19}$$

Отсюда видно, что плоскость, полярная точке A_1 относительно квадрики, есть плоскость $A_1A_2A_3$, а плоскость, соответствующая точке A_4, есть какая-то плоскость, проходящая через точку A_2. Следовательно, в поляритете относительно квадрики, всякой прямой A_1A_4, расположенной в плоскости $A_1A_2A_4$, соответствует прямая, проходящая через точку A_2 и расположенная в плоскости $A_1A_2A_3$.

Примем эту прямую за ребро A_2A_3. В таком случае

$$r = 0. \tag{5.20}$$

Коэффициент α становится инвариантом. Окрестность второго порядка оказывается полностью использованной. Этой окре-

стности, как мы видим, недостаточно для того, чтобы канонизировать тетраэдр.

Легко находятся точки прикосновения для поверхностей (5.92) и (5.93)

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_1 &= A_1 + A_2, \ \widetilde{A}_2 = A_1 - A_2 \quad (\omega_2^3 - \omega_1^4 = \omega_2^4 = 0) \\ \widehat{A}_1 &= A_1 + iA_2, \ \widehat{A}_2 = A_1 - iA_2 \quad (\omega_2^3 + \omega_1^4 = \omega_2^4 = 0). \end{aligned} \tag{5.21}$$

Отсюда видно, что точки прикосновения главных поверхностей гармонически делят друг друга. Этого и следовало ожидать. В первой части было найдено характеристическое свойство главных поверхностей, как поверхностей, одновременно инволютивно сопряженных и сопряженных в комплексе. Если вспомнить, что инволютивная сопряженность характеризуется гармонической сопряженностью двух пар точек прикосновения линейчатых поверхностей, то мы как раз и приходим к утверждению, высказанному выше.

До сих пор мы не касались вопроса о том, можно или нельзя уравнения главных поверхностей комплекса привести к виду (5.9). Все наши рассуждения оказались бы лишенными содержания, если бы случилось, что этого сделать нельзя.

Покажем, что в комплексной области приведение уравнений главных поверхностей к виду (5.9) всегда возможно.

Действительно, к виду (5.9_1) можно привести уравнение всякой косой линейчатой поверхности комплекса. Для этого достаточно поместить вершины A_1, A_2 подвижного тетраэдра в точки прикосновения этой поверхности. Если рассматриваемая поверхность является главной, то, как показано выше,

$$\beta = 0, \ \gamma = 0.$$

Характеристическое уравнение примет вид

$$(r - 2s)\,[(\alpha - s)^2 - pq] = 0. \tag{5.22}$$

Первый корень

$$s_1 = \frac{r}{2}$$

соответствует координатной главной поверхности. Два других корня

$$s_2 = \alpha - \sqrt{pq}, \ s_3 = \alpha + \sqrt{pq} \tag{5.23}$$

дают две другие главные поверхности. (Примем во внимание, что в силу сделанных нами предложений $s_1 \neq s_2$, $s_2 \neq s_3$, $s_3 \neq s_1$).

Подставляя корни (5.23) в уравнения (1.22) мы найдем из них

$$\sqrt{pq}\,\omega_2^3 + q\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^4 = 0, \tag{5.24}$$

$$-\sqrt{pq}\,\omega_1^4 + p\omega_2^3 = 0, \quad \omega_2^4 = 0.$$

Коэффициенты p и q не могут равняться нулю; в противном случае мы имели бы кратные корни, а тем самым — или бесконечное множество главных поверхностей или развертывающиеся главные поверхности. Эти случаи мы отбросим. Но тогда, как показывают уравнения (1.41), путем нормировки координат, мы можем привести p и q к 1

$$p=1, \; q=1.$$

Уравнения (5.24) совпадут с уравнениями (5.9_2) и (5.9_3), что и доказывает утверждение.

Уравнение инфлекционных центров запишется теперь в виде

$$t^4 - 2\alpha t^2 + 1 = 0. \tag{5.25}$$

Корни этого уравнения

$$t = \pm\sqrt{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}}.$$

Обратим внимание на то, что теперь

$$s_1 = 0, \; s_2 = \alpha - 1, \; s_3 = \alpha + 1.$$

Коэффициент α не может равняться ± 1, так как в противном случае мы имели бы $s_1 = s_2$ или $s_1 = s_3$, что исключено. Но тогда все четыре инфлекционных центра являются различными (это, впрочем, мы уже отметили в первой главе при классификации комплексов).

Пусть

$$t_1 = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}}, \quad t_2 = -\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}},$$

$$t_3 = \sqrt{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 1}}, \quad t_4 = -\sqrt{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}}. \tag{5.26}$$

Так как

$$t_1 + t_2 = 0, \quad t_3 + t_4 = 0,$$

то это означает, что вершины A_1, A_2, т. е. **точки прикосновения координатной главной поверхности гармонически делят две пары инфлекционных центров.**

Так как координатная поверхность является любой из трех главных поверхностей, то то же самое следует, очевидно, сказать относительно двух других поверхностей.

Мы приходим к следующей связи между главными поверхностями и инфлекционными центрами луча.

Косые главные поверхности комплекса есть те линейчатые поверхности этого комплекса, точки прикосновения которых гармонически делят две пары инфлекционных центров.

Если каждый луч содержит четверку различных инфлекционных центров, то такую четверку можно тремя способами разбить на две пары. Каждому разбиению будет соответствовать определенная главная поверхность.

§ 2. Рассмотрения в действительной области

До сих пор все наши рассуждения относились к полю комплексных чисел. В частности, совмещая вершины A_1, A_2 с точками прикосновения координатной главной поверхности, мы не отличали случая, когда эти точки действительны, от случая, когда они мнимы. При этом, как легко понять, если бы главная поверхность оказалась мнимой, то ее точки прикосновения могли бы оказаться как действительными, так и мнимыми.

Выясним теперь, сколько действительных главных поверхностей может иметь произвольный действительный комплекс. Для этого вернемся к произвольному нормальному тетраэдру.

Предполагая, что комплекс действительный, мы должны заключить, что действительными будуг и все коэффициенты второй дифференциальной окрестности α, β, γ, p, q, r. Характеристическое уравнение, будучи кубическим уравнением с действительными коэффициентами, допускает по крайней мере один действительный корень, которому будет соответствовать действительная главная поверхность. Обозначим эту поверхность символом σ.

Предположим, что точки прикосновения поверхности σ являются мнимыми. Координаты таких точек всегда являются комплексно-сопряженными. Мы их будем называть комплексно-сопряженными точками. Если мы выберем вершины A_1, A_2 гармонически сопряженными относительно этих точек, то их координаты будут

$$A_1 + i\lambda A_2, \; A_1 - i\lambda A_2 \tag{5.27}$$

$i = \sqrt{-1}$, λ — действительный коэффициент.

Мы пришли к фундаментальному соотношению

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0,$$

пронормировав координаты вершины A_3. Остальные вершины тетраэдра остаются ненормированными. Пронормируем координаты вершины A_2 так, чтобы коэффициент λ обратился в 1, если он положителен, к -1 в противном случае.

Точки прикосновения поверхности σ будут иметь координаты

$$A_1 + iA_2, \ A_1 - iA_2. \tag{5.28}$$

Из уравнения (1.19), определяющего точки прикосновения, находим, что поверхность σ определяется дифференциальными уравнениями

$$\omega_2^3 + \omega_1^4 = 0, \ \omega_2^4 = 0. \tag{5.29}$$

Из уравнений (1.22), определяющих главные поверхности, находим

$$\begin{gathered} \alpha - s - q = 0, \\ -p + \alpha - s = 0, \\ \beta + \gamma = 0. \end{gathered} \tag{5.30}$$

Отсюда

$$p = q, \ \gamma = -\beta.$$

Подставляя это в характеристическое уравнение (1.23), приведем его к виду

$$-2s^3 + (r + 4\alpha)s^2 + 2(p^2 - \alpha^2 + \beta^2 - \alpha r)s + (p - \alpha)(2\beta^2 - r(p + \alpha)) = 0. \tag{5.31}$$

Из (5.30) находим корень s, соответствующий поверхности σ:

$$s = \alpha - p.$$

Этот корень, как видим, действителен. Уравнение (5.31) допускает такой корень. Следовательно, два других корня этого уравнения будут определяться квадратным уравнением

$$s^2 - \left(\frac{r}{2} + (\alpha + p)\right)s - \left(\beta^2 - \frac{r}{2}(\alpha + p)\right) = 0. \tag{5.32}$$

Дискриминант этого уравнения есть

$$\Delta = \left(\frac{r}{2} - (\alpha + p)\right)^2 + 4\beta^2. \tag{5.33}$$

Дискриминант положителен; следовательно, корни характеристического уравнения всегда действительны. Действительными поэтому будут и соответствующие им главные поверхности. Очевидно, действительность главных поверхностей не будет зависеть от того, к какому действительному тетраэдру мы отнесем наш комплекс. Но тогда следует заключить, что и корни характеристического уравнения будут действительными в любом действительном тетраэдре.

У обеих главных поверхностей, определенных уравнением (5.32) точки прикосновения действительны. В самом деле, решим уравнения (1.22), внеся в них равенства $p = q$, $\gamma = -\beta$ относительно форм ω_2^3, ω_1^4

$$\omega_2^3 = -\frac{\beta}{\alpha - s + p}\omega_2^4, \quad \omega_1^4 = -\frac{\beta}{\alpha - s + p}\omega_2^4.$$

Подставим эти формы в уравнение (1.19). После очевидных преобразований получим

$$t^2 + 2\frac{\alpha - s + p}{\beta}t - 1 = 0.$$

Дискриминант уравнения есть

$$\left(\frac{\alpha - s + p}{\beta}\right)^2 + 1.$$

Дискриминант положителен, а потому точки прикосновения действительны для любого из двух корней уравнения (5.32).

Мы заключаем, что если у одной действительной главной поверхности точки прикосновения мнимы, то у двух других они необходимо действительны. Можно взять любую из этих двух поверхностей и с ее точками прикосновения, если угодно, совместить вершины A_1, A_2 тетраэдра. Тем самым то, что мы прежде совмещали вершины A_1, A_2 с точками прикосновения одной из трех главных поверхностей является вполне законным для рассмотренного случая. Это законно еще и потому, что пары точек прикосновения главных поверхностей гармонически делят друг друга.

Совмещая вершины A_1, A_2 с действительными точками прикосновения одной из трех главных поверхностей, т. е. принимая ее за координатную поверхность, мы привели ее уравнения к виду $\omega_2^3 = \omega_1^4 = 0$. В таком случае $\beta = \gamma = 0$. Уравнения двух других главных поверхностей мы привели к виду

$$\omega_2^3 + \omega_1^4 = 0, \ \ \omega_2^4 = 0,$$

$$\omega_2^3 - \omega_1^4 = 0, \ \ \omega_2^4 = 0$$

соответственно с точками прикосновения

$$A_1 + iA_2, \ A_1 - iA_2$$

(это исходная главная поверхность) и

$$A_1 + A_2, \ A_1 - A_2.$$

Предположим теперь, что точки прикосновения главной поверхности σ, соответствующей действительному корню характеристического уравнения, являются действительными. Совмещая с ними вершины A_1, A_2 сопровождающего тетраэдра, приведем коэффициенты β и γ к нулю.

Из (1.41), положив в них $\beta=\gamma=0$, находим при фиксированных главных параметрах

$$\begin{gathered} \delta p=-p\left(\pi_2^2-2\pi_3^3+\pi_4^4\right), \\ \delta q=-q\left(\pi_1^1-2\pi_4^4+\pi_3^3\right), \\ (2\alpha-r)\,\pi_2^1-2q\pi_1^2=0, \\ 2p\pi_1^2-(2\alpha-r)\,\pi_1^2=0. \end{gathered} \tag{5.34}$$

Если бы определитель, составленный из коэффициентов при π_1^2 и π_2^1 обращался в нуль

$$\Delta=-(2\alpha-r)^2+4pq=0,$$

то это означало бы, что характеристическое уравнение (1.23) имело бы двойной корень $s_1=\frac{r}{2}$. Этот случай мы исключаем; следовательно, $\Delta\neq0$, а потому

$$\pi_1^2=0, \quad \pi_2^1=0.$$

Тогда

$$\pi_3^4=0, \quad \pi_4^3=0$$

(см. 1.10). Принимая во внимание эти равенства, заключим, что

$$\begin{gathered} \left(\pi_2^2-2\pi_3^3+\pi_4^4\right)'=0, \\ \left(\pi_1^1-2\pi_4^4+\pi_3^3\right)'=0, \end{gathered}$$

где штрихом обозначено внешнее дифференцирование при закрепленных главных параметрах.

Внешние дифференциалы форм $\pi_2^2-2\pi_3^3+\pi_4^4$ и $\pi_1^1-2\pi_4^4+\pi_3^3$ обращаются в нуль. Следовательно, эти формы есть полные дифференциалы двух каких-то переменных. Обозначая эти переменные через λ и μ будем иметь

$$\begin{gathered} \pi_2^2-2\pi_3^3+\pi_4^4=\delta\lambda, \\ \pi_1^1-2\pi_4^4+\pi_3^3=\delta\mu. \end{gathered}$$

Равенства (5.34) перепишутся в виде

$$\delta p=-p\delta\lambda, \quad \delta q=-q\delta\mu.$$

Решение этой системы уравнений будет

$$p=Ae^{-\lambda}, \quad q=Be^{-\mu}.$$

Коэффициенты A и B зависят лишь от главных параметров. Они определяются комплексом, но не сопровождающим тетраэдром этого комплекса. Ни один из этих коэффициентов не может обратиться в нуль; в противном случае, как уже указывалось, характеристическое уравнение имело бы кратный корень.

Если бы мы рассматривали комплекс над полем комплексных чисел, то каковы бы ни были не равные нулю коэффициенты A и B, за счет подходящего выбора вторичных параметров λ и μ параметры p и q можно было бы привести к 1.

Иное положение вещей имеет место в пространстве над полем действительных чисел.

Так, если, например, коэффициент A отрицателен, то никаким выбором действительного переменного λ параметр p не может быть приведен к 1.

Возможны, следовательно, следующие случаи

$$1^\circ\ p>0,\ q>0,$$

$$2^\circ\ p<0,\ q<0,$$

$$3^\circ\ p>0,\ q<0,$$

$$4^\circ\ p<0,\ q>0.$$

Путем выбора параметров λ, μ коэффициенты p и q в каждом из этих случаев могут быть приведены соответственно к виду

$$1^\circ.\ p=q=1, \qquad 2^\circ.\ p=q=-1,$$

$$3^\circ.\ p=-q=1, \quad 4^\circ.\ p=-q=-1.$$

Равенства (5.23) показывают, что в первом и во втором случаях корни характеристического уравнения являются действительными; следовательно, главные поверхности, отличные от координатной, являются действительными. Уравнения этих поверхностей имеют соответственно вид (см. 5.26))

в первом случае

$$\begin{gathered} \omega_2^3+\omega_1^4=0, \quad \omega_2^4=0, \\ -\omega_1^4+\omega_2^3=0, \quad \omega_2^4=0, \end{gathered} \tag{5.35}$$

во втором случае

$$\begin{gathered} \omega_2^3-\omega_1^4=0, \quad \omega_2^4=0. \\ -\omega_1^4-\omega_2^3=0, \quad \omega_2^4=0. \end{gathered} \tag{5.36}$$

(5.35) и (5.36) отличаются друг от друга только порядком уравнений.

Рассмотрим уравнения (5.35). Как показывает уравнение (1.19), определяющее точки прикосновения, поверхность (5.35_1) имеет комплексно-сопряженные точки прикосновения, поверхность (5.35_2) — действительные точки.

Таким образом, в рассматриваемом случае все три главных поверхности действительны; причем на двух из них точки прикосновения действительны, на третьей — комплексно-сопряженные. Это как раз только что рассмотренный случай.

Обратимся теперь к рассмотреиию третьего и четвертого случаев. В этих случаях корни (5.23) комплексно сопряжены. Комплексно-сопряженными будут и соответствующие им главные поверхности.

Уравнения главных поверхностей имеют вид:
в третьем случае:

$$\begin{aligned} i\omega_2^3-\omega_1^4=0, \quad \omega_2^4=0,\\ -i\omega_1^4+\omega_2^3=0, \quad \omega_2^4=0, \end{aligned} \tag{5.37}$$

в четвертом случае

$$\begin{aligned} i\omega_2^3+\omega_1^4=0, \quad \omega_2^4=0,\\ -i\omega_1^4-\omega_2^3=0, \quad \omega_2^4=0. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Как и следовало ожидать, системы уравнений (5.37) и (5.38) отличаются друг от друга лишь порядком уравнений.

Взяв уравнения (5.37), имеем точки прикосновения для поверхности (5.37_2)

$$t_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \quad t_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i);$$

для поверхности (5.37_2)

$$t_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), \quad t_4=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Мы видим, что точки прикосновения каждой главной поверхности уже не являются комплексно-сопряженными; однако они комплексно сопряжены крест-накрест:

$$t_1 \text{ и } t_3, \ t_2 \text{ и } t_4.$$

Таким образом, в действительном проективном пространстве комплекс может иметь или три действительных главных поверхности (на одной из этих поверхностей точки прикосновения комплексно-сопряжены, на двух других — действительны), или одну действительную и две комплексно-сопряженных (на действительной поверхности точки прикосновения действительны, на комплексно-сопряженных — мнимы, однако для каждой поверхности не комплексно-сопряженные).

Таким образом, мы всегда можем в действительной области совместить вершины A_1 и A_2 с точками прикосновения одной из главных поверхностей. Однако привести коэффициенты p и q к единице, как это сделано в равенствах (5.15), мы можем далеко не всегда. Для проективного пространства над полем комплексных чисел это приведение всегда возможно.

§ 3. Окрестность третьего порядка

Вернемся к рассмотрениям, прерванным соображениями о различиях между областями действительных и комплексных чисел. Прежде всего подытожим то, что уже было найдено.

Вершины A_1, A_2 сопровождающего тетраэдра помещены у нас в точки прикосновения одной из трех главных поверхностей (координатной поверхности). Ребра A_1A_4 и A_2A_3 полярно сопряжены относительно квадрики Ли, соприкасающейся с координатной главной поверхностью.

Кроме того, выполнено три нормирования координат вершин тетраэдра. В результате параметры второй дифференциальной окрестности оказываются связанными соотношениями

$$p=q=1, \ \beta=\gamma=r=0. \tag{5.39}$$

Уравнения инфинитезимального смещения тетраэдра принимают вид

$$\begin{aligned} &\omega_1^3+\omega_2^4=0,\\ &\omega_1^2-\omega_3^4=\omega_2^3+\alpha\omega_1^4,\\ &\omega_2^1-\omega_4^3=\alpha\omega_2^3+\omega_1^4,\\ &\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_4^4=0; \end{aligned} \tag{5.40}$$

α — инвариант. Вся дифференциальная окрестность второго порядка оказалась использованной, при этом тетраэдр остается еще не канонизированным. Для канонизации придется привлечь к рассмотрению окрестность третьего порядка.

Прежде всего, естественно принять за ребра A_1A_3 и A_2A_4 касательные к линиям прикосновения координатной главной поверхности. Это не будет противоречить тому выбору элементов сопровождающего тетраэдра, который был произведен до этого. Действительно, в точках прикосновения A_1 и A_2 касательные плоскости к линейчатой поверхности комплекса совпадают с плоскостями, соответствующими этим точкам в нормальной корреляции, т. е. плоскостями $A_1A_2A_3$ и $A_2A_1A_4$. Следовательно, мы можем в этих плоскостях выбрать ребра A_1A_3 и A_2A_4. Далее, асимптотические касательные к линейчатой поверхности всегда совпадают с прямолинейными образующими соприкасающейся с этой поверхностью квадрики Ли, а потому, если, например, ребро A_1A_4 тетраэдра пересекает пару асимптотических касательных, то полярно сопряженное с ним ребро пересекает ту же пару касательных. Иными словами, выбор в качестве ребер A_1A_3 и A_2A_4 асимптотических касательных не исключает полярной сопряженности ребер A_1A_4 и A_2A_3 относительно квадрики Ли.

Уравнение квадрики Ли в выбранном таким образом тетраэдре будет иметь вид

$$\xi^2\xi^3 + \xi^1\xi^4 = 0, \tag{5.41}$$

а потому (см. (5.19))

$$A = 0, \quad B = 0, \quad (\mathrm{mod}\ \omega_2^3, \omega_1^4)$$

т. е.

$$\omega_1^2 + \omega_3^4 = 0, \quad \omega_2^1 + \omega_4^3 = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \omega_2^3, \omega_1^4). \tag{5.42}$$

Внесем в (1.41) равенства (5.39). Тогда из четвертого и пятого равенств этой системы, мы в частности, будем иметь

$$\begin{aligned} 2a\omega_2^1 - 2\omega_1^2 &= (\alpha^2 - 1 + h)\,\omega_2^3 - q_3\omega_1^4 + r_2\omega_2^4, \\ -2a\omega_1^2 + 2\omega_2^1 &= (-\alpha^2 + 1 + h)\,\omega_1^4 + p_3\omega_2^3 + r_1\omega_2^4, \end{aligned} \tag{5.43}$$

Полагая здесь $\omega_2^3 = \omega_1^4 = 0$, найдем

$$\omega_1^2 = \frac{\alpha r_1 - r_2}{2(1-\alpha^2)}\,\omega_2^4, \quad \omega_2^1 = \frac{-\alpha r_2 + r_1}{2(1-\alpha^2)}\,\omega_2^4.$$

Поскольку (см. (5.40))

$$\omega_1^2 = \omega_3^4, \quad \omega_2^1 = \omega_4^3 \quad (\mathrm{mod}\ \omega_2^3, \omega_1^4),$$

то

$$\omega_1^2 + \omega_3^4 = \frac{\alpha r_1 - r_2}{1-\alpha^2}\,\omega_2^4, \quad \omega_2^1 + \omega_4^3 = \frac{-\alpha r_2 + r_1}{1-\alpha^2}\,\omega_2^4.$$

Принимая во внимание равенства (5.42), получим

$$\alpha r_1 - r_2 = 0, \quad -\alpha r_2 + r_1 = 0;$$

а так как $1-\alpha^2 \neq 0$, то

$$r_1 = 0, \ r_2 = 0. \tag{5.44}$$

Это и есть условие совмещения ребер A_1A_3 и A_2A_4 с касательными к линиям прикосновения координатной главной поверхности.

У нас осталось незафиксированным положение ребра A_3A_4. Чтобы осуществить такое фиксирование, рассмотрим квадрики, соприкасающиеся с поверхностями

$$\omega_2^3 - \omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^4 = 0 \tag{5.45}$$

и

$$\omega_2^3 + \omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^4 = 0. \tag{5.46}$$

Взяв, например, главную поверхность (5.45), получим следующие уравнения, определяющие соприкасающуюся с ней квадрику

$$\sum A_1A_1 = 0, \ \sum A_1A_2 = 0, \ \sum A_2A_2 = 0,$$

$$\sum A_1A_4 = 0, \quad \sum (A_1A_3 + A_2A_4) = 0, \quad \sum A_2A_3 = 0,$$

$$\begin{gathered} (\omega_4^3 - \omega_1^2)\sum A_1A_3 + \omega_1^4\sum A_4A_4 = 0, \\ (\omega_3^4 - \omega_2^1)\sum A_2A_4 + \omega_2^3\sum A_3A_3 = 0, \\ (\omega_3^3 + \omega_1^1 - \omega_4^4 - \omega_2^2)\sum A_1A_3 + 2\omega_1^4\sum A_3A_4 = 0 \\ (\mathrm{mod}\ \omega_2^3 - \omega_1^4, \omega_2^4). \end{gathered} \tag{5.47}$$

Уравнение квадрики в местном тетраэдре запишется в виде

$$a_{33}(\xi^3)^2 + a_{44}(\xi^4)^2 + 2\xi^1\xi^3 - 2\xi^2\xi^4 + 2a_{34}\xi^3\xi^4 = 0, \tag{5.48}$$

где

$$a_{33} = \frac{\omega_3^4 - \omega_2^1}{\omega_2^3}, \quad a_{44} = -\frac{\omega_4^3 - \omega_1^2}{\omega_1^4}, \quad a_{34} = -\frac{\omega_3^3 + \omega_1^1 - \omega_4^4 - \omega_2^2}{2\omega_1^4}$$

$$(\mathrm{mod}\ \omega_2^3 - \omega_1^4, \omega_2^4)$$

или

$$a_{33} = -(1+\alpha) - \frac{p_3 + 2h - q_3}{2(1+\alpha)}, \quad a_{44} = (1+\alpha) - \frac{p_3 + 2h - q_3}{2(1+\alpha)},$$

$$a_{34} = -\frac{p_1 - q_1 + p_2 - q_2}{4}. \tag{5.49}$$

Аналогично получим уравнение квадрики, соприкасающейся с поверхностью (5.46)

$$b_{33}(\xi^3)^2+b_{44}(\xi^4)^2+2\xi^1\xi^3+2\xi^2\xi^4+2b_{34}\xi^3\xi^4=0, \qquad (5.50)$$

где

$$b_{33}=(1-\alpha)-\frac{p_3-2h-q_3}{2(1-\alpha)}, \quad b_{44}=(1-\alpha)+\frac{p_3-2h-q_3}{2(1-\alpha)},$$

$$b_{34}=\frac{p_1-q_1-(p_2-q_2)}{4}. \qquad (5.51)$$

Уравнениями

$$\xi^3(a_{33}\xi^3+2\xi^1)=0, \quad \xi^4=0$$

определяется линия пересечения поверхности (5.48) с плоскостью $A_1A_2A_3$ ($\xi^4=0$), распадающаяся, как мы видим, на 2 прямые

$$\xi^3=\xi^4=0, \quad \xi^4=\frac{\xi^1}{\xi^3}+\frac{a_{33}}{2}=0. \qquad (5.52)$$

Обе эти прямые (первая из них есть луч комплекса) проходят через точку A_2.

Аналогично имеем две прямые

$$\xi^3=\xi^4=0; \quad \xi^4=\frac{\xi^1}{\xi^3}+\frac{b_{33}}{2}=0, \qquad (5.53)$$

получающиеся от пересечения поверхности (5.50) с плоскостью $A_1A_2A_3$. Таким образом, через точку A_2 в плоскости $A_1A_2A_3$ будет проходить тройка прямых, которые мы зададим координатами точек их пересечения с ребром A_1A_3:

луч комплекса $(1:0)$,

прямая (5.52) $\left(-\frac{a_{33}}{2}:1\right)$,

прямая (5.53) $\left(-\frac{b_{33}}{2}:1\right)$.

Присоединим к ним четвертую прямую l' координатами $(x:1)$ и составим сложное отношение четверки, приняв за базисные прямые луч A_2A_1 и прямую l':

$$W'=\frac{b_{33}+2x}{a_{33}+2x}. \qquad (5.54)$$

Совершенно аналогично, если мы возьмем плоскость $A_1A_2A_4$, то получим в ней тройку прямых, проходящих через точку A_1

(мы зададим эти прямые точками их пересечения с ребром A_2A_4)

луч комплекса $(1:0)$,

прямая $\left(\frac{a_{44}}{2}:1\right)$,

прямая $\left(-\frac{b_{44}}{2}:1\right)$.

Присоединим к ним еще одну прямую l'' с координатами $(y:1)$ и составим сложное отношение при базисных прямых A_1A_2 и l''

$$W''=\frac{b_{44}+2y}{-a_{44}+2y}. \qquad (5.55)$$

Потребуем, чтобы сложные отношения W' и W'' равнялись друг другу.

Это приводит к равенству

$$a_{33}b_{44}+b_{33}a_{44}+2(a_{33}-b_{33})y+2(a_{44}+b_{44})x=0. \qquad (5.56)$$

Потребуем, кроме того, чтобы прямые l' и l'' были полярно сопряжены относительно квадрики (5.41). Это дает еще одно соотношение между x и y:

$$x+y=0. \qquad (5.57)$$

Решая уравнения (5.56) и (5.57) относительно x и y, найдем

$$-y=x=-\frac{1}{2}\,\frac{a_{33}b_{44}+b_{33}a_{44}}{a_{44}+b_{44}-a_{33}+b_{33}}.$$

Совместим теперь ребро A_1A_4 с прямой l''. В таком случае ребро A_2A_3 автоматически совместится с прямой l'. Условие совмещения примет вид

$$a_{33}b_{44}+b_{33}a_{44}=0.$$

Отсюда находим

$$h=\frac{1+\alpha^2}{4a}(p_3-q_3)^1 \qquad (5.58)$$

Положение ребра A_3A_4 становится полностью определенным. Осталось пронормировать еще раз координаты вершин тетраэд-

[1] Случай $\alpha=0$ считается исключенным. Легко видеть, что в этом случае четверка инфлекционных центров является гармонической.

ра. Сделаем это так, чтобы определитель, составленный из них, обращался в единицу:

$$(A_1A_2A_3A_4)=1.$$

Дифференцируя это равенство, получим соотношение между формами ω_i^i:

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0. \tag{5.59}$$

Введем обозначения

$$\frac{p_3}{4\alpha}=P, \quad +\frac{q_3}{4\alpha}=Q, \quad p_1=a,\ q_2=b,\ q_1=s,\ p_2=r,\ r_3=-2k \tag{5.60}$$

(не смешивать входящих сюда букв с теми, которые были использованы прежде).

Уравнения движения тетраэдра принимают вид

$$\omega_1^2=\left(P'+\frac{1}{2}\right)\omega_2^3+\alpha\left(R'+\frac{1}{2}\right)\omega_1^4,$$

$$\omega_2^1=\left(Q'+\frac{1}{2}\right)\omega_1^4+\alpha\left(S'+\frac{1}{2}\right)\omega_2^3,$$

$$\omega_3^4=\left(P'-\frac{1}{2}\right)\omega_2^3+\alpha\left(R'-\frac{1}{2}\right)\omega_1^4,$$

$$\omega_4^3=\left(Q'-\frac{1}{2}\right)\omega_1^4+\alpha\left(S'-\frac{1}{2}\right)\omega_2^3, \tag{5.61}$$

$$\omega_1^1=-\omega_4^4=-\frac{1}{8}s'\omega_2^3-\frac{1}{8}b'\omega_1^4+\frac{\alpha}{2}(3Q-P)\omega_2^4,$$

$$\omega_2^2=-\omega_3^3=-\frac{1}{8}r'\omega_1^4-\frac{1}{8}a'\omega_2^3-\frac{\alpha}{2}(3P-Q)\omega_2^4,$$

$$d\alpha=\frac{1}{2}[\alpha(a+s)-2r]\omega_2^3+\frac{1}{2}[\alpha(b+r)-2s]\omega_1^4+$$

$$+[(\alpha^2-1)(P-Q)-k]\omega_2^4,$$

$$\omega_1^3+\omega_2^4=0,\ \omega_3^1+\omega_4^2=k\omega_2^4,$$

где

$$P'=\frac{1}{2(1-\alpha^2)}[-(1-3\alpha^2)P+(1+\alpha^2)Q]$$

$$Q'=\frac{1}{2(1-\alpha^2)}[-(1-3\alpha^2)Q+(1+\alpha^2)P],$$

$$R'=\frac{1}{2(1-\alpha^2)}[(1+\alpha^2)P+(3-\alpha^2)Q], \tag{5.62}$$

$$S'=\frac{1}{2(1-\alpha^2)}[(1+\alpha^2)Q+(3-\alpha^2)P]$$

$$a'=3a+s,\quad b'=3b+r,\quad s'=3s+a,\quad r'=3r+b.$$

Все коэффициенты уравнений (5.61) являются инвариантами. Полученный тетраэдр назовем каноническим тетраэдром комплекса.

§ 4. Тетраэдральный комплекс

Мы придем к тетраэдральному комплексу, пытаясь найти ответ на совершенно естественный вопрос: что представляет собой комплекс, все инварианты которого, принадлежащие третьей дифференциальной окрестности, равны нулю (за исключением инварианта α, принадлежащего второй окрестности)

$$P=Q=a=b=r=s=k=0$$

Уравнения движения канонического тетраэдра для такого комплекса имеют вид

$$\omega_1^2=\frac{1}{2}(\omega_2^3+\alpha\omega_1^4),\quad \omega_1^1=0,\quad \omega_1^3+\omega_2^4=0,$$

$$\omega_2^1=\frac{1}{2}(\omega_1^4+\alpha\omega_2^3),\quad \omega_2^2=0,\quad \omega_3^1+\omega_4^2=0,$$

$$\omega_3^4=-\frac{1}{2}(\omega_2^3+\alpha\omega_1^4),\quad \omega_3^3=0,\quad \alpha=\mathrm{const}, \tag{5.63}$$

$$\omega_4^3=-\frac{1}{2}(\omega_1^4+\alpha\omega_2^3),\quad \omega_4^4=0,$$

Внешнее дифференцирование системы (5.63) приводит к следующим следствиям

$$\omega_3^2 = \frac{1-\alpha^2}{4}\,\omega_1^4, \qquad \omega_4^1 = \frac{1-\alpha^2}{4}\,\omega_2^3,$$
$$\omega_4^2 = -\frac{1-\alpha^2}{4}\,\omega_2^4, \quad \omega_3^1 = \frac{1-\alpha^2}{4}\,\omega_2^4. \tag{5.64}$$

Легко проверить, что система уравнений (5.63) и (5.64) вполне интегрируема.

Припомним, что инфлекционные центры имеют координаты

$$I = A_1 \pm \sqrt{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2-1}}\; A_2$$

(см. (5.26)).

Дифференцируя, найдем

$$dI = \frac{1}{2}\,t\,(\omega_1^4 + \alpha\omega_2^3)\,I + \frac{1}{2}\,((1-\alpha t^2)\,\omega_2^3 + (\alpha - t^2)\,\omega_1^4)\,A_2 +$$
$$+ (-\omega_2^4 + t\omega_2^3)\,A_3 + (\omega_1^4 + t\omega_2^4)\,A_4,$$

где

$$t = \pm\sqrt{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2-1}}\,.$$

Так как

$$[\,(1-\alpha t^2)\,\omega_2^3 + (\alpha - t^2)\,\omega_1^4,\, -\omega_2^4 + t\omega_2^3,\, \omega_1^4 + t\omega_2^4] =$$
$$= (t^4 - 2\alpha t^2 + 1)\,[\,\omega_2^3\omega_1^4\omega_2^4] = 0,$$

то формы, стоящие коэффициентами при A_2, A_3, A_4, линейно зависимы. Непосредственно обнаруживается, что

$$(1-\alpha t^2)\,\omega_2^3 + (\alpha - t^2)\,\omega_1^4 = \frac{1-\alpha t^2}{t}\,(-\omega_2^4 + t\omega_2^3) + (\alpha - t^2)\,(\omega_1^4 + t\omega_2^4).$$

Следовательно,

$$dI = \frac{1}{2}\,t\,(\omega_1^4 + \alpha\omega_2^3)\,I +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha t^2}{t}A_2 + 2A_3\right)(-\omega_2^4 + t\omega_2^3) +$$
$$+ \frac{1}{2}\,(\alpha - t^2)A_2 + 2A_4)\,(\omega_1^4 + t\omega_2^4).$$

Дифференциал dI перемещается в плоскости

$$\sigma = (A_1 + tA_2,\ (1-\alpha t^2)\,A_2 + 2tA_3,\ (\alpha - t^2)A_2 + 2A_4)$$

или

$$\sigma = (A_1 + tA_2, A_3 - tA_4,\ (\alpha - t^2)\,A_2 + 2A_4). \tag{5.65}$$

Легко проверяется справедливость равенства

$$d\sigma \equiv 0 \pmod{\sigma}.$$

Следовательно при всех перемещениях сопровождающего тетраэдра плоскость σ остается неподвижной. Для каждого t имеем свою плоскость σ, совокупность которых, таким образом, образует некоторый тетраэдр τ. Каждый луч комплекса пересекает грани этого тетраэдра в своих инфлекционных центрах, сложное отношение которых

$$W = (t_1t_4t_2t_3) = \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_4} : \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = \text{const}. \tag{5.66}$$

Следовательно, рассматриваемый комплекс является тетраэдральным. Тетраэдр, гранями которого являются плоскости (5.65), назовем **базисным** тетраэдром.

Чтобы найти координаты вершин базисного тетраэдра, берем три какие-либо плоскости (5.65)

$$\sigma_1 = (A_1 + t_1A_2,\ A_3 - t_1A_4,\ (\alpha - t_1^2)\,A_2 + 2A_4),$$
$$\sigma_2 = (A_1 + t_2A_2,\ A_3 - t_2A_4,\ (\alpha - t_2^2)A_2 + 2A_4),$$
$$\sigma_3 = (A_1 + t_3A_3,\ A_3 - t_3A_4,\ (\alpha - t_3^2)A_2 + 2A_4),$$

и потребуем, чтобы некоторая точка

$$P_4 = x^4A_1 + y^4A_2 + z^4A_3 + A_4$$

принадлежала им одновременно. Это приводит к равенствам

$$2t_1x^4 - 2y^4 + t_1\,(\alpha - t_1^2)\,z^4 + \alpha - t_1^2 = 0,$$
$$2t_2x^4 - 2y^4 + t_2\,(\alpha - t_2^2)\,z^4 + \alpha - t_2^2 = 0, \tag{5.67}$$
$$2t_3x^4 - 2y^4 + t_3\,(\alpha - t_3^2)\,z^4 + \alpha - t_3^2 = 0.$$

Учтем теперь тот порядок инфлекционных центров, который был принят у нас ранее

$$t_1 = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}}\,, \quad t_2 = -\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}}\,,$$
$$t_3 = \sqrt{\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}}\,, \quad t_7 = -\sqrt{\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}}\,.$$

В таком случае из (6.67) находим

$$x^4 = -\frac{4}{\Delta}(\alpha^2-1)(t_2-t_1), \quad y^4 = -\frac{4}{\Delta}(\alpha^2-1)(t_2-t_1)t_3,$$

$$z^4 = -\frac{8}{\Delta}\sqrt{\alpha^2-1}(t_2-t_1), \quad \Delta = 8\sqrt{\alpha^2-1}\,(t_2-t_1)t_3.$$

Таким образом, точка P_4 определится равенством

$$P_4 = \sqrt{\alpha^2-1}\,(A_1-t_4A_2) + 2(A_3+t_4A_4) \tag{5.68}$$

Аналогично найдем три остальные вершины

$$\begin{aligned} P_1 &= \sqrt{\alpha^2-1}\,(A_1-t_1A_2) - 2(A_3+t_1A_4), \\ P_2 &= \sqrt{\alpha^2-1}\,(A_1-t_2A_2) - 2(A_3+t_2A_4), \\ P_3 &= \sqrt{\alpha^2-1}\,(A_1-t_3A_2) + 2(A_3+t_3A_4). \end{aligned} \tag{5.69}$$

Найдем уравнение тетраэдрального комплекса в базисном тетраэдре $\tau(P_1P_2P_3P_4)$.

Пусть

$$\begin{aligned} I_1 &= x_1P_2 + y_1P_3 + P_4 \\ I_2 &= x_2P_1 + y_2P_3 + P_4 \end{aligned} \tag{5.70}$$

две какие-либо точки на гранях базисного тетраэдра $P_2P_3P_4$ и $P_1P_3P_4$. В таком случае точки пересечения прямой I_1I_2 с двумя другими гранями будут определяться координатами

$$I_3 = I_1 - \frac{y_1}{y_2}I_2, \quad I_4 = I_1 - I_2$$

(точка I_3 лежит на грани $P_1P_2P_4$, точка I_4 — на грани $P_1P_2P_3$).

В соответствии с формулой (5.66) имеем

$$W = (I_1I_4I_2I_3) = \frac{y_2}{y_1}.$$

Отсюда $y_2 = y_1W$. Внесем это в (5.70); тогда плюккеровы координаты прямой I_1I_2 будут следующими

$$[I_1I_2] = -x_1x_2[P_1P_2] + x_1y_1W[P_2P_3] + x_1[P_2P_4] - \\ - y_1x_2[P_1P_3] - x_2[P_1P_4] + (1-W)y_1[P_3P_4].$$

В базисном тетраэдре эти координаты есть

$$q^{12} = -\lambda x_1x_2, \quad q^{13} = -\lambda y_1x_2, \quad q^{14} = -\lambda x_2,$$
$$q^{23} = \lambda x_1y_1W, \quad q^{24} = \lambda x_1, \quad q^{34} = \lambda(1-W)y_1.$$

λ — множитель пропорциональности.

Исключим из этих равенств параметры x_1, x_2, y_1, λ

$$q^{12}q^{34} - (1-W)q^{13}q^{24} = 0, \quad Wq^{12}q^{34} - (1-W)q^{14}q^{23} = 0. \tag{5.71}$$

Вычитая эти равенства друг из друга, придем к фундаментальному условию Плюккера

$$q^{12}q^{34} - q^{13}q^{24} + q^{14}q^{23} = 0.$$

Следовательно, из уравнений (5.71) лишь одно является независимым. Взяв за таковое первое, мы и будем иметь уравнение тетраэдрального комплекса в базисном тетраэдре

$$q^{12}q^{34} - (1-W)q^{13}q^{24} = 0 \quad \left(W = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right). \tag{5.72}$$

Уравнение показывает, что тетраэдральный комплекс есть некоторый частного вида квадратичный комплекс.

Принимая во внимание формулы (5.68) и (5.69), можно было бы вывести уравнение комплекса в подвижном тетраэдре $A_1A_2A_3A_4$.

§ 5. Комплекс $k = 0$.

В гл. 2 было показано, что всякий комплекс с двойным инфлекционным центром на каждом луче есть огибающая двупараметрического семейства линейных комплексов. Тогда же было отмечено, что не всякий комплекс, являющийся огибающей двупараметрического семейства линейных комплексов, есть комплекс, содержащий двойной центр на каждом луче.

В настоящем параграфе мы покажем, что огибающей двупараметрического семейства линейных комплексов может быть также и комплекс с простыми инфлекционными центрами. Нашей целью будет доказать справедливость следующего предложения: **единственным комплексом в классе всех комплексов с простыми инфлекционными центрами на каждом луче, огибающим двупараметрическое семейство линейных комплексов, является комплекс, который в каноническом тетраэдре характеризуется равенством**

$$k = 0. \tag{5.73}$$

Действительно, как мы видели в гл. 2, пучок касательных линейных комплексов определяется уравнениями

$$\sum [A_1 A_2] = 0$$

$$\sum [A_1 A_3] = 0, \quad \sum [A_2 A_4] = 0, \quad \sum ([A_1 A_4] + [A_2 A_3]) = 0 \tag{5.74}$$

(см. (2.14), (2.16). Продифференцируем последние три уравнения в направлении координатной главной поверхности $\omega_2^3 = \omega_1^4 = 0$[1]. В результате всего получим одно уравнение

$$\sum [A_3 A_4] = 0. \tag{5.75}$$

Продифференцируем, наконец, последнее уравнение в том же направлении

$$(\omega_3^1 + \omega_4^2] \sum [A_1 A_4] = 0.$$

или (см. (5.61))

$$k \sum [A_1 A_4] = 0.$$

Равенство

$$\sum [A_1 A_4] = 0$$

невозможно, так как в противном случае все коэффициенты уравнеиия линейного комплекса обратились бы в нуль. Следовательно,

$$k = 0;$$

а это означает, что результат дифференцирования уравнения (5.75) есть тождество. Следовательно, у комплексов $k=0$ координатная главная поверхность целиком принадлежит соприкасающемуся линейному комплексу.

Поскольку всякий комплекс представляет собой двупараметрическое семейство главных поверхностей (тех или иных; в данном случае — координатных), то, следовательно, комплекс $k=0$ есть огибающая двупараметрическая семейства линейных комплексов. Это и требовалось доказать.

Из самого характера рассуждений следует, что никаких других комплексов, огибающих двупараметрическое семейство линейных комплексов кроме комплексов $k=0$, и комплексов с одним двойным инфлекционным центром на каждом луче, не существует.

[1] Законность такого дифференцирования объясняется в сноске к § 2 гл. 2.

Покажем, что каждая из координатных главных поверхностей комплекса $k=0$, представляет собой квадрику.

Действительно, записывая уравнение квадрики в виде

$$\sum PP = 0$$

(коэффициенты a уравнений подразумеваются), получим, прежде всего, условия принадлежности к этой квадрике луча $A_1 A_2$

$$\sum A_1 A_1 = 0, \quad \sum A_1 A_2 = 0, \quad \sum A_2 A_2 = 0. \tag{5.76}$$

Продифференцируем эти уравнения два раза в направлении $\omega_2^3 = \omega_1^4 = 0$

$$\begin{gathered} \sum A_1 A_3 = 0, \quad \sum (A_2 A_3 - A_1 A_4) = 0, \quad \sum A_2 A_4 = 0, \\ \sum A_3 A_3 = 0, \quad \sum A_3 A_4 = 0, \quad \sum A_4 A_4 = 0. \end{gathered} \tag{5.77}$$

Дифференцируя последние три уравнения еще раз в том же направлении, получим

$$\omega_3^2 \sum A_1 A_4 = 0, \quad k \sum A_1 A_4 = 0, \quad \omega_4^1 \sum A_1 A_4 = 0 \quad (\operatorname{mod} \omega_2^3, \omega_1^4). \tag{5.78}$$

Равенство

$$\sum A_1 A_4 = 0$$

невозможно, так как в противном случае все коэффициенты уравнения соприкасающейся квадрики обращались бы в нуль. Следовательно,

$$k = 0.$$

Но в таком случае

$$\omega_3^1 + \omega_4^2 = 0.$$

Дифференцируя это внешним образом, найдем

$$[\omega_3^2, \omega_2^1 - \omega_4^3] + [\omega_4^1, \omega_1^2 - \omega_3^4] = 0. \tag{5.79}$$

В силу того, что $\alpha^2 - 1 \neq 0$, формы

$$\omega_2^1 - \omega_4^3 = \omega_1^4 + \alpha\omega_2^3,$$

$$\omega_1^2 - \omega_3^4 = \omega_2^3 + \alpha\omega_1^4$$

линейно независимы. В таком случае ковариант (5.79) может быть разрешен по лемме Картана

$$\omega_3^2 = A(\omega_1^4 + \alpha\omega_2^3) + B(\omega_2^3 + \alpha\omega_1^4)$$

$$\omega_4^1 = B(\omega_1^4 + \alpha\omega_2^3) + C(\omega_2^3 + \alpha\omega_1^4).$$

Отсюда следует, что

$$\omega_3^2 = 0, \quad \omega_4^1 = 0 \quad (\mathrm{mod}\, \omega_2^3, \omega_1^4).$$

Но тогда уравнения (5.78) обращаются в тождество.

Это и доказывает, что координатная главная поверхность является квадрикой.

Равенство (5.73) достаточно для того, чтобы эта поверхность была квадрикой.

§ 6. Формулы преобразования

При построении канонического тетраэдра мы выбрали в качестве вершин A_1, A_2 точки прикосновения одной из трех главных поверхностей. Поскольку в комплексной области эта поверхность ничем не отличается от двух других главных поверхностей, то мы с одинаковым успехом могли бы совместить вершины A_1, A_2 с точками прикосновения любой из них. Тем самым координатной поверхностью станет какая-либо другая главная поверхность. При таком переходе как формы ω_i^k, так и параметры P, Q, β, a, b, r, s, k испытают некоторые преобразования. Целью настоящего параграфа составляет нахождение таких преобразований.

Выпишем, прежде всего, уравнения трех главных квадрик:

$$\xi^2\xi^3 + \xi^1\xi^4 = 0 \text{ (для поверхности } \omega_2^3 = \omega_1^4 = 0), \tag{5.80}$$

$$a_{33}(\xi^3)^2 + a_{44}(\xi^4)^2 + 2a_{34}\xi^3\xi^4 + 2(\xi^1\xi^3 - \xi^2\xi^4) = 0 \text{ (для поверхности } \omega_2^3 - \omega_1^4 = \omega_2^4 = 0), \tag{5.81}$$

$$b_{33}(\xi^3)^2 + b_{44}(\xi^4)^2 + 2b_{34}\xi^3\xi^4 + 2(\xi^1\xi^3 + \xi^2\xi^4) = 0 \text{ (для поверхности } \omega_2^3 + \omega_1^4 = \omega_2^4 = 0) \tag{5.82}$$

(см. (5.41), (5.48), (5.50)). Точки прикосновения главных поверхностей имеют координаты

$$A_1 \qquad A_2 \qquad (\omega_2^3 = \omega_1^4 = 0), \tag{5.83}$$

$$\widetilde{A}_1 = A_1 + A_2 \quad \widetilde{A}_1 = A_1 - A_2 \quad (\omega_2^3 - \omega_1^4 = \omega_2^4 = 0), \tag{5.84}$$

$$\hat{A}_1 = A_1 + iA_2 \quad \hat{A}_2 = A_1 - iA_2 \quad (\omega_2^3 + \omega_1^4 = \omega_2^4 = 0) \tag{5.85}$$

(см. (5.21)).

Очевидно, точкам $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2$ в нормальной корреляции соответствуют плоскости со следующими тангенциальными координатами

$$\widetilde{\Pi}_1 = (A_1A_2A_3) + (A_1A_2A_4), \quad \widetilde{\Pi}_2 = (A_1A_2A_3) - (A_1A_2A_4)$$

а потому уравнения этих плоскостей в местной системе координат имеют соответственно вид

$$\xi^4 - \xi^3 = 0, \quad \xi^4 + \xi^3 = 0. \tag{5.86}$$

Плоскость

$$\xi^4 - \xi^3 = 0$$

пересекается с квадриками (5.83), (5.84), (5.85) по трем прямым

$$\xi^3 = \xi^4, \quad \xi^1 = -\xi^2, \tag{5.87}$$

$$\xi^3 = \xi^4, \quad 2(\xi^1 - \xi^2) + (a_{33} + a_{44} + 2a_{34})\xi^3 = 0, \tag{5.88}$$

$$\xi^3 = \xi^4, \quad 2(\xi^1 + \xi^2) + (b_{33} + b_{44} + 2b_{34})\xi^3 = 0. \tag{5.89}$$

Из этих прямых прямая (5.88) проходит через точку $\widetilde{A}_1$, прямые (5.87) и (5.89) — через точку $\widetilde{A}_2$. Точки пересечения прямой (5.88) с прямыми (5.87) и (5.89) имеют координаты

$$\xi_1^1 = -\xi_1^2 = -\frac{1}{4}(a_{33} + a_{44} + 2a_{34}), \quad \xi_1^3 = \xi_1^4 = 1; \tag{5.90}$$

$$\xi_2^1 = -\frac{1}{4}(b_{33} + b_{44} + 2b_{34} + a_{33} + a_{44} + 2a_{34}), \quad \xi_2^3 = 1, \tag{5.91}$$

$$\xi_2^2 = -\frac{1}{4}(b_{33} + b_{44} + 2b_{34} - a_{33} - a_{44} - 2a_{34}), \quad \xi_2^4 = 1.$$

Таким образом, на прямой (5.88) мы имеем три точки: $\widetilde{A}$, (5.90) и (5.91). Пусть

$$\xi_3^1 = \lambda - \frac{1}{2}(a_{33} + a_{44} + 2a_{34}), \quad \xi_3^3 = \xi_3^4 = 1, \quad \xi_3^2 = \lambda \tag{5.92}$$

некоторая четвертая точка этой прямой (λ — произвольный параметр). Если мы запишем координаты точки $\widetilde{A}_1$ в виде

$$\xi_4^1 = 1, \quad \xi_4^2 = 1, \quad \xi_4^3 = 0, \quad \xi_4^4 = 0,$$

то получим следующее сложное отношение четверки точек

$$\widetilde{W}' = \frac{\dfrac{\xi_1^3}{\xi_1^1} - \dfrac{\xi_2^3}{\xi_2^1}}{\dfrac{\xi_2^3}{\xi_2^1} - \dfrac{\xi_3^3}{\xi_3^1}} : \frac{\dfrac{\xi_1^3}{\xi_1^1} - \dfrac{\xi_4^3}{\xi_4^1}}{\dfrac{\xi_4^3}{\xi_4^1} - \dfrac{\xi_3^3}{\xi_3^1}} = \frac{b_{33} + b_{44} + 2b_{34}}{4\lambda + b_{33} + b_{44} + 2b_{34} - a_{33} - a_{44} - 2a_{34}}.$$

Взяв плоскость

$$\xi^4 + \xi^3 = 0$$

и выполняя все аналогичные выкладки, получим другое сложное отношение

$$\widetilde{W}'' = \frac{b_{33} + b_{44} - 2b_{34}}{4\mu + b_{33} + b_{44} - 2b_{34} - a_{33} - a_{44} + 2a_{34}},$$

где μ — параметр, определяющий некоторую точку

$$\xi^1 = \mu - \frac{1}{2}(a_{33} + a_{44} - 2a_{34}), \quad \xi^2 = -\mu, \quad \xi^3 = -\xi^4 = 1 \qquad (5.93)$$

на линии пересечения плоскости $\xi^3 + \xi^4 = 0$ с квадрикой (5.81).

Потребуем, чтобы прямая, проходящая через точки (5.92) и (5.93) целиком принадлежала квадрике (5.81). Это приводит к условию

$$\lambda + \mu = a_{44}. \qquad (5.94)$$

Потребуем еще, чтобы имело место равенство

$$\widetilde{W}' = \widetilde{W}''$$

или

$$\begin{gathered}\lambda(b_{33} + b_{44} - 2b_{34}) - \mu(b_{33} + b_{44} + 2b_{34}) - a_{34}(b_{33} + b_{44}) + \\ + b_{34}(a_{33} + a_{44}) = 0.\end{gathered} \qquad (5.95)$$

Решая уравнения (5.94) и (5.95), будем иметь:

$$\lambda = \frac{1}{2}(a_{44} + a_{34}) + \frac{b_{34}}{2}\,\frac{a_{44} - a_{33}}{b_{44} + b_{33}},$$

$$\mu = \frac{1}{2}(a_{44} - a_{34}) - \frac{b_{34}}{2}\,\frac{a_{44} - a_{33}}{b_{44} + b_{33}}.$$

Координаты точек (5.92) и (5.93) примут соответственно вид

$$\begin{aligned} &\xi^1 = \widetilde{\alpha}_3^1 = -\frac{1}{2}(a_{33} + a_{44}) + \frac{b_{34}}{2}\,\frac{a_{44} - a_{33}}{b_{44} + b_{33}}, \qquad \xi^3 = 1, \\ &\xi^2 = \widetilde{\alpha}_3^2 = \frac{1}{2}(a_{44} + a_{34}) + \frac{b_{34}}{2}\,\frac{a_{44} - a_{33}}{b_{44} + b_{33}}, \qquad \xi^4 = 1, \end{aligned} \qquad (5.96)$$

$$\begin{aligned} &\xi^1 = \widetilde{\alpha}_4^1 = -\frac{1}{2}(a_{33} - a_{44}) - \frac{b_{34}}{2}\,\frac{a_{44} - a_{33}}{b_{44} + b_{33}}, \qquad \xi^3 = 1, \\ &\xi^2 = \widetilde{\alpha}_4^2 = \frac{1}{2}(a_{44} - a_{34}) - \frac{b_{34}}{2}\,\frac{a_{44} - a_{33}}{b_{44} + b_{33}}, \qquad \xi^4 = -1. \end{aligned} \qquad (5.97)$$

Примем точки $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2$ (5.96), (5.97) за вершины нового тетраэдра $\widetilde{A}_1\widetilde{A}_2\widetilde{A}_3\widetilde{A}_4$. Формулы перехода от тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ к тетраэдру $\widetilde{A}_1\widetilde{A}_2\widetilde{A}_3\widetilde{A}_4$ будут иметь вид

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_1 &= \widetilde{\rho}_1(A_1 + A_2), \\ A_2 &= \widetilde{\rho}_2(A_1 - A_2), \\ \widetilde{A}_3 &= \widetilde{\rho}_3(\widetilde{\alpha}_3^1 A_1 + \widetilde{\alpha}_3^2 A_2 + A_3 + A_4), \\ \widetilde{A}_4 &= \widetilde{\rho}_4^1(\widetilde{\alpha}_4^1 A_1 + \widetilde{\alpha}_4^2 A_2 + A_3 - A_4), \end{aligned} \qquad (5.98)$$

где $\widetilde{\rho}_1, \widetilde{\rho}_2, \widetilde{\rho}_3, \widetilde{\rho}_4$, — некоторые нормирующие множители.

Продифференцируем равенства (5.98), положив

$$d\widetilde{A}_i = \widetilde{\omega}_i^k \widetilde{A}_k.$$

Заменим здесь координаты $\widetilde{A}_k$ их значениями по тем же формулам (5.98) и сравним коэффициенты при A_1, A_2, A_3, A_4

$$\begin{aligned} &\widetilde{\omega}_1^1\widetilde{\rho}_1 + \widetilde{\omega}_1^2\widetilde{\rho}_2 + \widetilde{\omega}_1^3\widetilde{\rho}_3\widetilde{\alpha}_3^1 + \widetilde{\omega}_1^4\widetilde{\rho}_4\widetilde{\alpha}_4^1 = d\widetilde{\rho}_1 + \widetilde{\rho}_1(\omega_1^1 + \omega_2^1), \\ &\widetilde{\omega}_1^1\widetilde{\rho}_1 - \widetilde{\omega}_1^2\widetilde{\rho}_2 + \widetilde{\omega}_1^3\widetilde{\rho}_3\widetilde{\alpha}_3^1 + \widetilde{\omega}_1^4\widetilde{\rho}_4\widetilde{\alpha}_4^2 = d\widetilde{\rho}_1 + \widetilde{\rho}_1(\omega_1^2 + \omega_2^2), \\ &\widetilde{\omega}_1^3\widetilde{\rho}_3 + \widetilde{\omega}_1^4\widetilde{\rho}_4 = \widetilde{\rho}_1(\omega_1^3 + \omega_2^3), \\ &\widetilde{\omega}_1^3\widetilde{\rho}_3 - \widetilde{\omega}_1^4\widetilde{\rho}_4 = \widetilde{\rho}_1(\omega_1^4 + \omega_2^4), \end{aligned} \qquad (5.99_1)$$

$$\begin{aligned} &\widetilde{\omega}_2^1\widetilde{\rho}_1 + \widetilde{\omega}_2^2\widetilde{\rho}_2 + \widetilde{\omega}_2^3\widetilde{\rho}_3\widetilde{\alpha}_3^1 + \widetilde{\omega}_2^4\widetilde{\rho}_4\widetilde{\alpha}_4^1 = d\widetilde{\rho}_2 + \widetilde{\rho}_2(\omega_1^1 - \omega_2^1), \\ &\widetilde{\omega}_2^1\widetilde{\rho}_1 - \widetilde{\omega}_2^2\widetilde{\rho}_2 + \widetilde{\omega}_2^3\widetilde{\rho}_3\widetilde{\alpha}_3^2 + \widetilde{\omega}_2^4\widetilde{\rho}_4\widetilde{\alpha}_4^2 = -d\widetilde{\rho}_2 + \widetilde{\rho}_2(\omega_1^2 - \omega_2^2); \\ &\widetilde{\omega}_2^3\widetilde{\rho}_3 + \widetilde{\omega}_2^4\widetilde{\rho}_4 = \widetilde{\rho}_2(\omega_1^3 - \omega_2^3), \\ &\widetilde{\omega}_2^3\widetilde{\rho}_3 - \widetilde{\omega}_2^4\widetilde{\rho}_4 = \widetilde{\rho}_2(\omega_1^4 - \omega_2^4). \end{aligned} \qquad (5.99_2)$$

$$\begin{gathered} \widetilde{\omega}_3^1\widetilde{\rho}_1 + \widetilde{\omega}_3^2\widetilde{\rho}_2 + \widetilde{\omega}_3^3\widetilde{\rho}_3\widetilde{\alpha}_3^1 + \widetilde{\omega}_3^4\widetilde{\rho}_4\widetilde{\alpha}_4^1 = d\widetilde{\rho}_3\widetilde{\alpha}_3^1 + \widetilde{\rho}_3(d\widetilde{\alpha}_3^1 + \\ + \widetilde{\alpha}_3^1\omega_1^1 + \widetilde{\alpha}_3^2\omega_2^1 + \omega_3^1 + \omega_4^1), \\ \widetilde{\omega}_3^1\widetilde{\rho}_1 - \widetilde{\omega}_3^2\widetilde{\rho}_2 + \widetilde{\omega}_3^3\widetilde{\rho}_3\widetilde{\alpha}_3^2 + \widetilde{\omega}_3^4\widetilde{\rho}_4\widetilde{\alpha}_4^2 = \\ = d\widetilde{\rho}_3\widetilde{\alpha}_3^2 + \widetilde{\rho}_3(d\widetilde{\alpha}_3^2 + \widetilde{\alpha}_3^1\omega_1^2 + \widetilde{\alpha}_3^2\omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2); \end{gathered}$$

$$\overset{\frown}{\omega}{}_3^3 \widetilde{\rho}_3 + \widetilde{\omega}_3^4 \overset{\frown}{\rho}_4 = d\widetilde{\rho}_3 + \overset{\frown}{\rho}_3 (\overset{\frown}{\alpha}{}_3^1\omega_1^3 + \overset{\frown}{\alpha}{}_3^2\omega_2^3 + \omega_3^3 + \omega_4^3), \qquad (5.99_3)$$

$$\widetilde{\omega}_3^3 \overset{\frown}{\rho}_3 - \overset{\frown}{\omega}{}_3^4 \widetilde{\rho}_4 = d\widetilde{\rho}_3 + \widetilde{\rho}_3 (\overset{\frown}{\alpha}{}_3^1\omega_1^4 + \widetilde{\alpha}_3^2\omega_2^4 + \omega_3^4 + \omega_4^4),$$

$$\widetilde{\omega}_4^1 \widetilde{\rho}_1 + \overset{\frown}{\omega}{}_4^2 \widetilde{\rho}_2 + \widetilde{\omega}_4^3 \overset{\frown}{\rho}_3 \overset{\frown}{\alpha}{}_3^1 + \overset{\frown}{\omega}{}_4^4 \overset{\frown}{\rho}_4 \overset{\frown}{\alpha}{}_4^1 =$$

$$= d\widetilde{\rho}_4 \overset{\frown}{\alpha}{}_4^1 + \widetilde{\rho}_4 (d\overset{\frown}{\alpha}{}_4^1 + \overset{\frown}{\alpha}{}_4^1\omega_1^1 + \overset{\frown}{\alpha}{}_4^2\omega_2^1 + \omega_3^1 - \omega_4^1),$$

$$\widetilde{\omega}_4^1 \overset{\frown}{\rho}_1 - \overset{\frown}{\omega}{}_4^2 \overset{\frown}{\rho}_2 + \widetilde{\omega}_4^3 \rho_3 \overset{\frown}{\alpha}{}_3^2 + \widetilde{\omega}_4^4 \widetilde{\rho}_4 \widetilde{\alpha}_4^2 = \qquad (5.99_4)$$

$$= d\widetilde{\rho}_4 \widetilde{\alpha}_4^2 + \widetilde{\rho}_4 (d\widetilde{\alpha}_4^2 + \overset{\frown}{\alpha}{}_4^1\omega_1^2 + \overset{\frown}{\alpha}{}_4^2\omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2),$$

$$\widetilde{\omega}_4^3 \overset{\frown}{\rho}_3 + \overset{\frown}{\omega}{}_4^4 \widetilde{\rho}_4 = d\widetilde{\rho}_4 + \overset{\frown}{\rho}_4 (\widetilde{\alpha}_4^1\omega_1^3 + \widetilde{\alpha}_4^2\omega_2^3 + \omega_3^3 - \omega_4^3),$$

$$\widetilde{\omega}_4^3 \overset{\frown}{\rho}_3 - \overset{\frown}{\omega}{}_4^4 \overset{\frown}{\rho}_4 = -d\overset{\frown}{\rho}_4 + \widetilde{\rho}_4 (\overset{\frown}{\alpha}{}_4^1\omega_1^4 + \overset{\frown}{\alpha}{}_4^2\omega_2^3 + \omega_3^4 - \omega_4^4).$$

Из третьего и четвертого равенств (5.99_1) и (5.99_2) находим

$$\overset{\frown}{\omega}{}_1^3 = \frac{1}{2}\frac{\overset{\frown}{\rho}_1}{\overset{\frown}{\rho}_3}(\omega_2^3 + \omega_1^4), \quad \overset{\frown}{\omega}{}_1^4 = \frac{1}{2}\frac{\overset{\frown}{\rho}_1}{\widetilde{\rho}_4}(\omega_2^3 - \omega_1^4 - 2\omega_2^4), \qquad (5.100)$$

$$\overset{\frown}{\omega}{}_2^3 = \frac{1}{2}\frac{\widetilde{\rho}_2}{\widetilde{\rho}_3}(-\omega_2^3 + \omega_1^4 - 2\omega_2^4), \quad \overset{\frown}{\omega}{}_2^4 = \frac{1}{2}\frac{\widetilde{\rho}_2}{\widetilde{\rho}_4}(-\omega_2^3 - \omega_1^4).$$

Потребуем, чтобы формы $\widetilde{\omega}_1^3$ и $\widetilde{\omega}_2^4$ удовлетворяли соотношениям (5.61), в частности

$$\overset{\frown}{\omega}{}_1^3 + \widetilde{\omega}_2^4 = 0.$$

Это немедленно дает

$$\widetilde{\rho}_1 \overset{\frown}{\rho}_4 = \widetilde{\rho}_2 \overset{\frown}{\rho}_3. \qquad (5.101)$$

Из первого и второго равенств системы (5.99_1) вычитанием находим

$$\overset{\frown}{\omega}{}_1^2 = \frac{1}{2}\frac{\overset{\frown}{\rho}_1}{\overset{\frown}{\rho}_2}(\omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_2^1 - \omega_1^2) - \frac{1}{4}(\overset{\frown}{\alpha}{}_3^1 - \overset{\frown}{\alpha}{}_3^2)\frac{\widetilde{\rho}_1}{\overset{\frown}{\rho}_2}(\omega_2^3 + \omega_1^4) -$$

$$- \frac{1}{4}(\overset{\frown}{\alpha}{}_4^1 - \overset{\frown}{\alpha}{}_4^2)\frac{\overset{\frown}{\rho}_1}{\rho_2}(\omega_2^3 - \omega_1^4 - 2\omega_2^4) \qquad (5.102)$$

(см. (5.100), (5.101)). Далее, из третьего и четвертого равенств (5.99_3) будем иметь

$$\overset{\frown}{\omega}{}_3^4 = \frac{1}{2}\frac{\widetilde{\rho}_3}{\widetilde{\rho}_4}(\omega_3^3 - \omega_4^4 + \omega_4^3 - \omega_3^4) - \frac{1}{2}(\overset{\frown}{\alpha}{}_3^1 + \overset{\frown}{\alpha}{}_3^2)\,\omega_2^4\frac{\widetilde{\rho}_3}{\overset{\frown}{\rho}_4} +$$

$$+ \frac{1}{2}\overset{\frown}{\alpha}{}_3^2\omega_2^3 - \frac{1}{2}\frac{\overset{\frown}{\rho}_3}{\widetilde{\rho}_4}\overset{\frown}{\alpha}{}_3^1\omega_1^4 \qquad (5.103)$$

(см. (5.100), (5.101)).

Потребуем, чтобы формы $\widetilde{\omega}_1^2$ и $\widetilde{\omega}_3^4$ удовлетворяли системе вида (5.40), в частности

$$\overset{\frown}{\omega}{}_1^2 - \widetilde{\omega}_3^4 = \overset{\frown}{\omega}{}_2^3 + \widetilde{\alpha}\,\widetilde{\omega}_1^4, \qquad (5.104)$$

где $\overset{\frown}{\alpha}$ — преобразованное значение коэффициента α. Подставляя сюда значения форм $\overset{\frown}{\omega}{}_1^2, \widetilde{\omega}_3^4, \overset{\frown}{\omega}{}_2^3, \overset{\frown}{\omega}{}_1^4$ по формулам (5.100), (5.102), (5.103), а также значения коэффициентов $\widetilde{\alpha}_3^1, \widetilde{\alpha}_3^2, \widetilde{\alpha}_4^1, \overset{\frown}{\alpha}{}^2$ по формулам (5.96) и (5.97), будем иметь

$$\frac{1}{2}(1-\alpha)\frac{\widetilde{\rho}_1\overset{\frown}{\rho}_3}{\overset{\frown}{\rho}{}_2^2} = 1, \qquad (5.105)$$

$$\overset{\frown}{\alpha} = -\frac{1}{2}\frac{\widetilde{\rho}_3}{\overset{\frown}{\rho}_1}(\alpha + 3). \qquad 5.106$$

Аналогично, находя формы $\widetilde{\omega}_2^1$, $\overset{\frown}{\omega}{}_4^3$ и требуя, чтобы они удовлетворяли соотношению

$$\widetilde{\omega}_2^1 - \overset{\frown}{\omega}{}_4^3 = \widetilde{\alpha}\,\overset{\frown}{\omega}{}_2^3 + \overset{\frown}{\omega}{}_1^4$$

(см. (5.40)), получим

$$\frac{1}{2}(1-\alpha)\frac{\overset{\frown}{\rho}_2\widetilde{\rho}_4}{\overset{\frown}{\rho}{}_1^2} = 1, \qquad (5.107)$$

$$\overset{\frown}{\alpha} = -\frac{1}{2}\frac{\widetilde{\rho}_3}{\widetilde{\rho}_1}(\alpha + 3). \qquad (5.108)$$

Равенство (5.108) в точности совпадает с равенством (5.106). Что же касается равенств (5.105) и (5.107), то вместе с (5.101) они дают

$$\widetilde{\rho}_2^4=\widetilde{\rho}_1^4.$$

Отсюда

$$\widetilde{\rho}_2=\varepsilon\widetilde{\rho}_1 \tag{5.109}$$

где $\varepsilon=\sqrt[4]{1}$. Но в таком случае из (5.100), (5.105), (5.107) мы будем иметь

$$\widetilde{\rho}_3=\varepsilon^2\frac{2}{1-\alpha}\widetilde{\rho}_1,\qquad \widetilde{\rho}_4=\varepsilon^3\frac{2}{1-\alpha}\widetilde{\rho}_1. \tag{5.110}$$

Следовательно,

$$\widetilde{\alpha}=\varepsilon^2\frac{\alpha+3}{\alpha-1}. \tag{5.111}$$

Потребуем теперь, чтобы, в соответствии с уравнениями (5.61), формы $\widetilde{\omega}_1^2, \widetilde{\omega}_3^4$ удовлетворяли уравнению

$$\widetilde{\omega}_1^2+\widetilde{\omega}_3^4=\frac{1}{1-\widetilde{\alpha}^2}\left[-(1-3\widetilde{\alpha}^2)\widetilde{P}+(1+\widetilde{\alpha}^2)\widetilde{Q}\right]\widetilde{\omega}_2^3+$$
$$+\frac{\widetilde{\alpha}}{1-\widetilde{\alpha}^2}\left[(1+\widetilde{\alpha}^2)\widetilde{P}+(3-\widetilde{\alpha}^2)\widetilde{Q}\right]\widetilde{\omega}_1^4,$$

где $\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$ — преобразованные значения коэффициентов P, Q. Подставляя сюда значения форм $\widetilde{\omega}_1^2, \widetilde{\omega}_3^4, \widetilde{\omega}_2^3, \widetilde{\omega}_1^4$ и коэффициента $\widetilde{\alpha}$ по формулам (5.100), (5.102), (5.103), (5.111), а также учитывая формулы (5.96), (5.97), (5.61), (5.49), (5.51), найдем путем сравнения коэффициентов при формах ω_2^3, ω_1

$$\widetilde{P}=\frac{(s-a)+(r-b)}{8(\alpha-1)}+\frac{2\alpha(P+Q)}{(1-\alpha)(\alpha+3)},$$
$$\widetilde{Q}=-\frac{(s-a)+(r-b)}{8(\alpha-1)}+\frac{2\alpha(P+Q)}{(1-\alpha)(\alpha+3)}. \tag{5.112}$$

Сложим теперь первые два равенства системы (5.99_1) и разделим сумму на ρ_1

$$2\widetilde{\omega}_1^1+\frac{\widetilde{\rho}_3}{\widetilde{\rho}_1}\widetilde{\omega}_1^3(\widetilde{\alpha}_3^1+\widetilde{\alpha}_3^2)+\frac{\widetilde{\rho}_4}{\widetilde{\rho}_1}\widetilde{\omega}_1^4(\widetilde{\alpha}_4^1+\widetilde{\alpha}_4^2)=2d\ln\widetilde{\rho}_1+(\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_1^2+\omega_2^1), \tag{5.113}$$

Вычтем, далее, из первого равенства системы (5.99_2) второе равенство этой системы и разделим разность на ρ_2

$$2\widetilde{\omega}_2^2+\frac{\widetilde{\rho}_3}{\widetilde{\rho}_2}\widetilde{\omega}_2^3(\widetilde{\alpha}_3^1-\widetilde{\alpha}_3^2)+\frac{\widetilde{\rho}_4}{\widetilde{\rho}_2}\widetilde{\omega}_2^4(\widetilde{\alpha}_4^1-\widetilde{\alpha}_4^2)=2d\ln\widetilde{\rho}_2+(\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_1^2-\omega_2^1). \tag{5.114}$$

Вычтем равенства (5.113) и (5.114) друг из друга, учтя (5.100) и (5.101), и потребуем, чтобы разность, в соответствии с (5.61) удовлетворяла уравнению

$$\widetilde{\omega}_1^1-\widetilde{\omega}_2^2=\frac{1}{4}(\widetilde{a}-\widetilde{s})\widetilde{\omega}_2^3-\frac{1}{4}(\widetilde{b}-\widetilde{r})\widetilde{\omega}_1^4+\widetilde{\alpha}(\widetilde{Q}+\widetilde{P})\widetilde{\omega}_2^4. \tag{5.115}$$

Здесь $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$, $\widetilde{r}$, $\widetilde{s}$ — преобразованные значения коэффициентов a, b, r, s. Учитывая формулы (5.100), (5.111), (5.112), (5.109), (5.110), (5.96), (5.97), (5.61), найдем путем сравнения коэффициентов при ω_2^3 и ω_1^4

$$\widetilde{s}-\widetilde{a}=\varepsilon\frac{(s-a)-(r-b)}{1-\alpha}-8\varepsilon\frac{P-Q}{1-\alpha}; \tag{5.116}$$

$$\widetilde{r}-\widetilde{b}=\varepsilon^3\frac{(r-b)-(s-a)}{1-\alpha}-8\varepsilon^3\frac{P-Q}{1-\alpha}. \tag{5.116}$$

Продифференцируем, наконец, равенство (5.111)

$$d\widetilde{\alpha}=-\varepsilon^2\frac{4}{(\alpha-1)^2}d\alpha. \tag{5.117}$$

Потребуем, чтобы дифференциал $d\widetilde{\alpha}$, в соответствии с (5.61), удовлетворял уравнению

$$d\widetilde{\alpha}=\frac{1}{2}\left[\widetilde{\alpha}(\widetilde{a}+\widetilde{s})-2\widetilde{r}\right]\widetilde{\omega}_2^3+\frac{1}{2}\left[\widetilde{\alpha}(\widetilde{b}+\widetilde{r})-2\widetilde{s}\right]\widetilde{\omega}_1^4+$$
$$+\left[(\widetilde{\alpha}^2-1)(\widetilde{P}-\widetilde{Q})-\widetilde{k}\right]\widetilde{\omega}_2^4.$$

Заменяя здесь формы $d\widetilde{\alpha}, \widetilde{\omega}_2^3, \widetilde{\omega}_1^4, \widetilde{\omega}_2^4$ их значениями по формулам (5.117), (5.100), мы придем к следующим значениям коэффициентов $\widetilde{s}$, $\widetilde{r}$, $\widetilde{k}$

$$\widetilde{s}=\varepsilon\frac{2(P-Q)}{\alpha-1}+\frac{\varepsilon k}{(\alpha-1)^2}-\frac{\varepsilon}{4(\alpha-1)^2}[(\alpha+5)(s-r)+(3-\alpha)(a-b)]$$
$$\widetilde{r}=\varepsilon^3\frac{2(P-Q)}{\alpha-1}+\frac{\varepsilon^3 k}{(\alpha-1)^2}+\frac{\varepsilon^3}{4(\alpha-1)^2}[(\alpha+5)(s-r)+(3-\alpha)(a-b)].$$
$$\widetilde{k}=\frac{2}{(\alpha-1)^2}(a+3s+b+3r). \tag{5.118}$$

Таким образом, переход от тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$, построенного на главной квадрике (5.80), к тетраэдру $\widetilde{A}_1\widetilde{A}_2\widetilde{A}_3\widetilde{A}_4$, подобным же образом построенному на квадрике (5.81), осуществляется с помощью равенств

$$
\begin{aligned}
\widetilde{A}_1 &= \widetilde{\rho}_1 (A_1 + A_2)\,,\\
\widetilde{A}_2 &= \widetilde{\rho}_2 (A_1 - A_2)\,,\\
\widetilde{A}_3 &= \widetilde{\rho}_3 (\widetilde{\alpha}_3^1 A_1 + \widetilde{\alpha}_3^2 A_2 + A_3 + A_4),\\
\widetilde{A}_4 &= \widetilde{\rho}_4 (\widetilde{\alpha}_4^1 A_1 + \widetilde{\alpha}_4^2 A_2 + A_3 - A_4)\,,
\end{aligned}
$$

где

$$
\widetilde{\rho}_1 = \widetilde{\rho}\,, \quad \widetilde{\rho}_2 = \varepsilon\widetilde{\rho}\,, \quad \widetilde{\rho}_3 = \varepsilon^2 \frac{2}{1-\alpha}\widetilde{\rho}\,, \quad \widetilde{\rho}_4 = \varepsilon^3 \frac{2}{1-\alpha}\widetilde{\rho} \quad (\varepsilon^4 = 1) \tag{5.119}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}_3^1 &= \frac{1+\alpha}{2}(P-Q+1) - \frac{(s-a)+\alpha(r-b)}{4(1-\alpha)}\,,\\
\widetilde{\alpha}_3^2 &= -\frac{1+\alpha}{2}(P-Q+1) - \frac{(r-b)+\alpha(s-a)}{4(1-\alpha)} + (1+\alpha),\\
\widetilde{\alpha}_4^1 &= \frac{1+\alpha}{2}(P-Q+1) + \frac{(s-a)+\alpha(r-b)}{4(1-\alpha)}\,,\\
\widetilde{\alpha}_4^2 &= \frac{1+\alpha}{2}(P-Q+1) - \frac{(r-b)+\alpha(s-a)}{4(1-\alpha)} - (1+\alpha)
\end{aligned}
\tag{5.120}
$$

(см. (5.96), (5.97), (5.49), (5.51), (5.58)). Базисные формы $\widetilde{\omega}_2^3$, $\widetilde{\omega}_1^4$, $\widetilde{\omega}_2^4$ преобразуются по формулам

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_2^3 &= \varepsilon^3 \frac{1-\alpha}{4}(\omega_1^4 - \omega_2^3 - 2\omega_2^4),\\
\widetilde{\omega}_1^4 &= \varepsilon \frac{1-\alpha}{4}(\omega_2^3 - \omega_1^4 - 2\omega_2^4),\\
\widetilde{\omega}_2^4 &= -\varepsilon \frac{1-\alpha}{4}(\omega_2^3 + \omega_1^4)
\end{aligned}
\tag{5.121}
$$

(см. (5.100)). Инфинитезимальные смещения тетраэдра $\widetilde{A}_1\widetilde{A}_2\widetilde{A}_3\widetilde{A}_4$ определяются системой дифференциальных уравнений, аналогичных уравнениям системы (5.61); причем инварианты $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{P}$, $\widetilde{Q}$, $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$, $\widetilde{r}$, $\widetilde{s}$, $\widetilde{k}$ связаны с первоначальными инвариантами α, P, Q, a, b, r, s, k равенствами

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\alpha} &= \varepsilon^2 \frac{\alpha+3}{\alpha-1}\,,\\
\widetilde{P} &= \frac{(s-a)+(r-b)}{8(\alpha-1)} + \frac{2\alpha(P+Q)}{(1-\alpha)(\alpha+3)}\,,\\
\widetilde{Q} &= -\frac{(s-a)+(r-b)}{8(\alpha-1)} + \frac{2\alpha(P+Q)}{(1-\alpha)(\alpha+3)}\,,\\
\widetilde{s} - \widetilde{a} &= \varepsilon \frac{(s-a)-(r-b)}{1-\alpha} - 8\varepsilon\frac{P-Q}{1-\alpha}\,,\\
\widetilde{r} - \widetilde{b} &= \varepsilon^3 \frac{(r-b)-(s-a)}{1-\alpha} - 8\varepsilon^3\frac{P-Q}{1-\alpha}\,,\\
\widetilde{k} &= \frac{2}{(\alpha-1)^2}(a+3s+b+3r)\,,\\
\varepsilon^2\widetilde{s} + \widetilde{r} &= \varepsilon^3 \frac{4(P-Q)}{\alpha-1} + \frac{\varepsilon^2 k}{(\alpha-1)^2}\,,\\
-\varepsilon^2\widetilde{s} + \widetilde{r} &= \varepsilon^3 \frac{1}{2(\alpha-1)^2}\left[(\alpha+5)(s-r)+(3-\alpha)(a-b)\right].
\end{aligned}
\tag{5.122}
$$

Примечание. В знаменателях формул, определяющих $\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$, стоит сумма $\alpha+3$. Эта сумма не может равняться нулю, так как в противном случае мы имели бы $W=2$ (см. (5.26)). Следовательно, четверка инфлекционных центров луча была бы гармонической. Однако этот случай мы условились из рассмотрения исключать.

Обратимся теперь к главной поверхности $\omega_2^3 + \omega_1^4 = \omega_2^4 = 0$ и связанной с ней соприкасающейся квадрике (5.99₃). Рассуждения, совершенно аналогичные предыдущим, убедят нас в том, что точки (вершины) нового тетраэдра $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{A}_4$ будут связаны с вершинами первоначального тетраэдра A_1, A_2, A_3, A_4 следующими равенствами

$$
\begin{aligned}
\hat{A}_1 &= \hat{\rho}_1 (A_1 + iA_2),\\
\hat{A}_2 &= \hat{\rho}_2 (A_1 - iA_2),\\
\hat{A}_3 &= \hat{\rho}_3 (\hat{\alpha}_3^1 A_1 + \hat{\alpha}_3^2 A_2 + A_3 + iA_4),\\
\hat{A}_4 &= \hat{\rho}_4 (\hat{\alpha}_4^1 A_1 + \hat{\alpha}_4^2 A_2 + A_3 - iA_4),
\end{aligned}
\tag{5.123}
$$

где

$$\overset{\wedge}{\rho}_1=\rho,\quad \overset{\wedge}{\rho}_2=\varepsilon\rho,\quad \overset{\wedge}{\rho}_3=-\varepsilon^2\frac{2}{1-\alpha}\rho,\quad \overset{\wedge}{\rho}_4=-\varepsilon^3\frac{2}{1+\alpha}\rho,\ \varepsilon^4=1; \tag{5.124}$$

$$\overset{\wedge}{\alpha}{}_3^1=-\frac{1-\alpha}{2}(P-Q+1)+i\frac{(s-a)+\alpha(r-b)}{4(1+\alpha)}$$

$$\overset{\wedge}{\alpha}{}_3^2=i\frac{1-\alpha}{2}(P-Q+1)+\frac{(r-b)+\alpha(s-a)}{4(1+\alpha)}-i(1-\alpha),$$

$$\overset{\wedge}{\alpha}{}_4^1=-\frac{1-\alpha}{2}(P-Q+1)-i\frac{(s-a)+\alpha(r-b)}{4(1+\alpha)}, \tag{5.125}$$

$$\alpha_4^2=i\frac{1-\alpha}{2}(P-Q+1)+\frac{(r-b)+\alpha(s-a)}{4(1+\alpha)}+i(1-\alpha).$$

Базисные формы комплекса будут преобразовываться по следующим формулам

$$\overset{\wedge}{\omega}{}_2^3=\varepsilon\frac{1+\alpha}{4}[2\omega_2^4+i(\omega_2^3+\omega_1^4)],$$

$$\overset{\wedge}{\omega}{}_1^4=\varepsilon\frac{1+\alpha}{4}[2\omega_2^4-i(\omega_2^3+\omega_1^4)], \tag{5.126}$$

$$\overset{\wedge}{\omega}{}_2^4=\varepsilon^3\frac{1+\alpha}{4}i(\omega_2^3-\omega_1^4).$$

Наконец, параметры α, P, Q, a, b, r, s, k будут изменяться по формулам

$$\overset{\wedge}{\alpha}=\varepsilon^2\frac{\alpha-3}{\alpha+1},$$

$$\hat{P}=i\frac{(r-b)-(s-a)}{8(1+\alpha)}+\frac{2\alpha(P+Q)}{(1+\alpha)(\alpha-3)},$$

$$\hat{Q}=-i\frac{(r-b)-(s-a)}{8(1+\alpha)}+\frac{2\alpha(P+Q)}{(1+\alpha)(\alpha-3)},$$

$$\hat{s}-\hat{a}=i\varepsilon\frac{(s-a)+(r-b)}{1+\alpha}-8\varepsilon\frac{P-Q}{1+\alpha},$$

$$\hat{r}-\hat{b}=-i\varepsilon^3\frac{(s-a)+(r-b)}{1+\alpha}-8\varepsilon^2\frac{P-Q}{1+\alpha}, \tag{5.127}$$

$$\hat{k}=\frac{2i}{(1+\alpha)^2}(a-b+3s-3r),$$

$$\varepsilon^2\hat{s}+\hat{r}=-4\varepsilon^3\frac{P-Q}{1+\alpha}+2\varepsilon^3\frac{k}{(1+\alpha)^2},$$

$$-\varepsilon^2\hat{s}+\hat{r}=i\frac{\varepsilon^3}{2(1+\alpha)^2}[(5-\alpha)(s+r)+(3+\alpha)(a+b)].$$

Примечание. Легко видеть, что $\alpha-3\neq 0$, так как в противном случае мы снова имели бы комплекс с гармонической четверкой инфлекционных центров.

Глава шестая

ОТОБРАЖЕНИЕ КОМПЛЕКСА НА ТОЧЕЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Отображение на конформное пространство

Нам необходимо вернуться к рассмотрениям гл. 4, относящимся к отображению линейчатого пространства на конформное четырехмерное точечное пространство. Пусть $\boldsymbol{p}$ — аналитическая прямая («точка») линейчатого пространства, рассматриваемая как совокупность шести ее плюккеровых координат

$$\boldsymbol{p}=p^{ik}[\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_k]\ (i<k).$$

Положим для простоты

$$p^{12}=\eta^1,\quad p^{13}=\eta^2,\quad p^{14}=\eta^3,\quad p^{23}=\eta^4,\quad p^{24}=\eta^5,\quad p^{34}=\eta^6,$$

$$[\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2]=\boldsymbol{p}_1,\quad [\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_3]=\boldsymbol{p}_2,\quad [\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_4]=\boldsymbol{p}_3,\quad [\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3]=\boldsymbol{p}_4,$$
$$[\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_4]=\boldsymbol{p}_5,\quad [\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4]=\boldsymbol{p}_6.$$

В таком случае

$$\boldsymbol{p}=\eta^i\boldsymbol{p}_i. \tag{6.1}$$

Пусть $\boldsymbol{P}$ — соответствующая аналитическая точка конформного пространства, рассматриваемая как совокупность шести ее гексасферических координат ξ^i относительно некоторого подвижного базиса $\boldsymbol{P}_i$

$$\boldsymbol{P}=\xi^i\boldsymbol{P}_i. \tag{6.2}$$

Переход от «точек» (прямых) линейчатого пространства к точкам конформного пространства осуществляется с помощью равенства

$$\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{P}$$

или

$$\eta^i p_i = \xi^i P_i. \qquad (6.3)$$

Переписывая (4.39) в новых обозначениях и решая (4.42) относительно y^i, находим

$$x^1 = \frac{1}{2}(\eta^1 + \eta^6), \quad x^4 = \frac{1}{2}(\eta^1 - \eta^6),$$

$$x^2 = \frac{1}{2}(\eta^5 - \eta^2), \quad x^5 = \frac{1}{2}(\eta^5 + \eta^2),$$

$$x^3 = \frac{1}{2}(\eta^3 + \eta^4), \quad x^6 = \frac{1}{2}(\eta^3 - \eta^4),$$

$$y^1 = \xi^1, \qquad y^4 = \xi^4$$

$$y^2 = \xi^2, \qquad y^5 = \frac{1}{2}(\xi^6 - \xi^5),$$

$$y^3 = \xi^3, \qquad y^6 = \frac{1}{2}(\xi^6 + \xi^5).$$

В соответствии с (4.44) переход от координат x^i к координатам y^i осуществляется с помощью равенств

$$y^1 = x^1, \quad y^2 = x^2, \quad y^3 = x^3, \quad y^4 = ix^4, \quad y^5 = ix^5, \quad y^6 = x^6.$$

Отсюда находим

$$\xi^1 = \frac{1}{2}(\eta^1 + \eta^6), \quad \xi^4 = \frac{i}{2}(\eta^1 - \eta^6),$$

$$\xi^2 = \frac{1}{2}(\eta^5 - \eta^2), \quad \xi^5 = -\frac{i}{2}(\eta^5 + \eta^2) + \frac{1}{2}(\eta^3 - \eta^4), \qquad (6.4)$$

$$\xi^3 = \frac{1}{2}(\eta^3 + \eta^4), \quad \xi^6 = \frac{i}{2}(\eta^5 + \eta^2) + \frac{1}{2}(\eta^3 - \eta^4).$$

Подставим теперь значения ξ^i, определяемые этими равенствами, в (6.3)

$$\eta^i p_i = \frac{1}{2}[\eta^1(P_1 + iP_4) + \eta^2(-P_2 - iP_5 + iP_6) + \eta^3(P_3 + P_5 + P_6) +$$
$$+ \eta^4(P_3 - P_5 - P_6) + \eta^5(P_2 - iP_5 + iP_6) + \eta^6(P_1 - iP_4)].$$

Сравнивая затем коэффициенты при одинаковых координатах η^i, найдем формулы перехода для базисов обоих пространств

$$p_1 = \frac{1}{2}(P_1 + iP_4), \qquad p_4 = \frac{1}{2}(P_3 - P_5 - P_6),$$

$$p_2 = -\frac{1}{2}(P_2 + iP_5 - iP_6), \quad p_5 = \frac{1}{2}(P_2 - iP_5 + iP_6), \qquad (6.5)$$

$$p_3 = \frac{1}{2}(P_3 + P_5 + P_6), \quad p_6 = \frac{1}{2}(P_1 - iP_4)$$

или

$$P_1 = p_1 + p_6, \qquad P_4 = -i(p_1 - p_6),$$

$$P_2 = -p_2 + p_5, \qquad P_5 = \frac{1}{2}(ip_2 + ip_5 + p_3 - p_4), \qquad (6.6)$$

$$P_3 = p_3 + p_4, \qquad P_6 = \frac{1}{2}(-ip_2 - ip_5 + p_3 - p_4),$$

«Вершины» (сферы) базиса в конформном пространстве отображаются в линейные комплексы линейчатого пространства, имеющие в тетраэдре $p_1, \ldots, p_6$ координаты

$$P_1(1, 0, 0, 0, 0, 1), \quad P_2(0, -1, 0, 0, 1, 0), \quad P_3(0, 0, 1, 1, 0, 0);$$

$$P_4(-i, 0, 0, 0, 0, i) \quad P_5\left(0, \frac{i}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{i}{2}, 0\right),$$

$$P_6\left(0, -\frac{i}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{i}{2}, 0\right). \qquad (6.7)$$

Легко видеть, что из этих комплексов только два — P_5 и P_6 — являются специальными. Следовательно, базис $P_1, \ldots, P_6$ состоит из четырех сфер P_1, P_2, P_3, P_4 и двух точек P_5, P_6. Равенствами (4.44), очевидно, исключается возможность того, чтобы координаты каждой «вершины» $P_1, \ldots, P_6$ базиса в отдельности умножались на один и тот же множитель пропорциональности. Плюккеровы произведения точек $P_1, \ldots, P_6$ друг на друга следует рассматривать как инварианты. Обозначая эти произведения символами $P_i P_j$ мы, в частности, обнаруживаем, что

$$P_5 P_6 = -1, \quad P_2 P_2 = 1, \quad P_3 P_3 = 1, \quad P_1 P_1 = 0, \quad P_4 P_4 = 1,$$

т. е., в частности

$$P_2 P_2 = P_3 P_3 = -P_5 P_6 = P_1 P_1 = P_4 P_4 \qquad (6.8)$$

Из очевидных равенств

$$P_1P_2 = P_1P_3 = P_1P_4 = P_2P_3 = P_2P_4 = P_3P_4 = 0,$$
$$P_5P_5 = P_6P_6 = 0, \tag{6.9}$$
$$P_1P_5 = P_1P_6 = P_2P_5 = P_2P_6 = P_3P_5 = P_3P_6 = P_4P_5 = P_4P_6 = 0$$

следует, что сферы P_1, P_2, P_3, P_4 между собой ортогональны, что сферы P_5, P_6 вырождаются в точки (о чем уже говорилось выше) и что эти точки принадлежат всем сферам.

Принимая за текущий луч линейчатого пространства луч p_1, мы заключим из равенств (6.5), что ему в конформном пространстве будет соответствовать точка $P_1 + iP_4$. Дифференцируя эту точку, найдем

$$d(P_1 + iP_4) = 2dp_1 = 2[(\omega_1^1 + \omega_2^2)p_1 + \omega_2^3 p_2 + \omega_2^4 p_3 - \omega_1^3 p_4 - \omega_1^4 p_5] =$$
$$= (\omega_1^1 + \omega_2^2)(P_1 + iP_4) - \omega_2^3(P_2 + iP_5 - iP_6) + \omega_2^4 \times$$
$$\times (P_3 + P_5 + P_6) - \omega_1^3(P_3 - P_5 - P_6) -$$
$$- \omega_1^4(P_2 - iP_5 + iP_6) = \Omega^*(P_1 + iP_4) + \Omega^k P_k$$
$$(k = 2, 3, 5, 6, \quad \Omega^* = \omega_1^1 + \omega_2^2).$$

Формы

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= -(\omega_2^3 + \omega_1^4), \\ \Omega^3 &= \omega_2^4 - \omega_1^3, \\ \Omega^5 &= -i(\omega_2^3 - \omega_1^4) + \omega_2^4 + \omega_1^3, \\ \Omega^6 &= i(\omega_2^3 - \omega_1^4) + \omega_2^4 + \omega_1^3 \end{aligned} \tag{6.10}$$

есть главные формы смещения репера в конформном пространстве. Обращение в нуль форм $\omega_2^3, \omega_2^4, \omega_1^3, \omega_1^4$ влечет за собой обращение в нуль и форм $\Omega^2, \Omega^3, \Omega^5, \Omega^6$, и наоборот.

Нам предстоит выяснить наличие тех или иных инвариантов главных форм при преобразованиях реперов как в линейчатом, так и в конформном пространствах. С этой целью найдем формулы преобразования для главных форм. Начнем с линейчатого пространства. При преобразовании тетраэдра луч p_1 должен переходить сам в себя, поэтому формулы преобразования могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} p_1 &= h\bar{p}_1, & l &= 2, \dots, 6, \\ p_l &= \alpha_l^k \bar{p}_k, & k &= 1, \dots, 6. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Поскольку p_l — прямые, то для их координат α_l^k должно выполняться условие Плюккера:

$$p_l p_l = \alpha_l^1\alpha_l^6 - \alpha_l^2\alpha_l^5 + \alpha_l^3\alpha_l^4 = 0, \quad l = 2, \dots, 6 \tag{6.12}$$

(через $p_i p_k$, как и прежде, записывается плюккерово произведение). Далее, должны быть выполнены условия пересечения прямых

$$p_1p_2 = h\alpha_2^6 = 0, \quad p_1p_3 = h\alpha_3^6 = 0, \quad p_1p_4 = h\alpha_4^6 = 0, \quad p_1p_5 = h\alpha_5^6 = 0$$
$$p_2p_3 = \alpha_2^1\alpha_3^6 - \alpha_2^2\alpha_3^5 + \alpha_2^3\alpha_3^4 + \alpha_2^4\alpha_3^3 - \alpha_2^5\alpha_3^2 + \alpha_2^6\alpha_3^1 = 0,$$
$$p_2p_4 = \alpha_2^1\alpha_4^6 - \dots + \alpha_2^6\alpha_4^1 = 0,$$
$$p_2p_6 = \alpha_2^1\alpha_6^6 - \dots + \alpha_2^6\alpha_6^1 = 0, \quad p_3p_5 = \alpha_3^1\alpha_5^6 - \dots + \alpha_3^6\alpha_5^1 = 0, \tag{6.13}$$
$$p_3p_6 = \alpha_3^1\alpha_6^6 - \dots + \alpha_3^6\alpha_6^1 = 0,$$
$$p_4p_5 = \alpha_4^1\alpha_5^6 - \dots + \alpha_4^6\alpha_5^1 = 0, \quad p_4p_6 = \alpha_4^1\alpha_6^6 - \dots + \alpha_4^6\alpha_6^1 = 0,$$
$$p_5p_6 = \alpha_5^1\alpha_6^6 - \dots + \alpha_5^6\alpha_6^1 = 0.$$

Продифференцируем первое равенство (6.11):

$$dp_1 = dh\bar{p}_1 + hd\bar{p}_1$$

или

$$(\omega_1^1 + \omega_2^2)p_1 + \omega_2^3 p_2 + \omega_2^4 p_3 - \omega_1^3 p_4 - \omega_1^4 p_5 =$$
$$= [dh + h(\bar{\omega}_1^1 + \bar{\omega}_2^2)]\bar{p}_1 + h\bar{\omega}_2^3\bar{p}_2 + h\bar{\omega}_2^4\bar{p}_3 - h\bar{\omega}_1^3\bar{p}_4 - h\bar{\omega}_1^4\bar{p}_5.$$

Заменим здесь $p_1, \dots, p_5$ их значениями по формулам (6.11) и сравним коэффициенты в обеих частях равенства:

$$\begin{aligned} dh + h(\bar{\omega}_1^1 + \bar{\omega}_2^2) &= h(\omega_1^1 + \omega_2^2) + \omega^i\alpha_i^1, \\ h\bar{\omega}^k &= \omega^i\alpha_i^k, \end{aligned} \tag{6.14}$$

$$(k, i = 2, 3, 4, 5, \quad \omega^2 = \omega_2^3, \omega^3 = \omega_2^4, \ \omega^4 = -\omega_1^3, \ \omega^5 = -\omega_1^4).$$

Примем во внимание еще одно соображение. В репере $P_1, \dots, P_6$ образы прямых $p_1, \dots, p_6$ имеют координаты:

$$p_1\left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{i}{2}, 0, 0\right), \quad p_2\left(0, -\frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{i}{2}, \frac{i}{2}\right),$$
$$p_3\left(0, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad p_4\left(0, 0, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$
$$p_5\left(0, \frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{i}{2}, \frac{i}{2}\right), \quad p_6\left(\frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{i}{2}, 0, 0\right).$$

В гексасферических координатах ξ^i условие (4.50) запишется в виде

$$(P\overline{P}) = \xi^1\overline{\xi}^1 + \xi^2\overline{\xi}^2 + \xi^3\overline{\xi}^3 + \xi^4\overline{\xi}^4 - \frac{1}{2}\xi^5\overline{\xi}^6 - \frac{1}{2}\xi^6\overline{\xi}^5 = 0.$$

Левую часть этого равенства будем называть произведением Дарбу двух сфер (соответственно двух точек) конформного пространства. Легко обнаружить, что

$$(p_1p_6) = -(p_2p_5) = (p_3p_4). \tag{6.15}$$

В силу соображений, которые приведены выше, эти равенства следует считать инвариантными. При переходе от конформного пространства к линейчатому произведение Дарбу перейдет в произведение Плюккера и, следовательно, равенства (6.15) заменятся равенствами

$$p_1p_6 = -p_2p_5 = p_3p_4. \tag{6.16}$$

Не следует, однако, думать, что эти равенства обусловлены заданным отображением двух пространств. Они выполнены всегда безотносительно какого бы то ни было отображения. Действительно, если A_i — вершины координатного тетраэдра в линейчатом пространстве, то

$$p_1p_6 = (A_1A_2A_3A_4),$$

$$p_2p_5 = (A_1A_3A_2A_4),$$

$$p_3p_4 = (A_1A_4A_2A_3),$$

откуда непосредственно следуют указанные равенства.

Принимая во внимание (6.12), (6.13), (6.14), легко доказывается справедливость равенства

$$\overline{\omega}^2\,\overline{\omega}^5 - \overline{\omega}^3\,\overline{\omega}^4 = \Theta\,(\omega^2\omega^5 - \omega^3\omega^4), \tag{6.17}$$

где

$$\Theta = \frac{1}{h^2}\,(\alpha_2^2\,\alpha_5^5 + \alpha_5^2\,\alpha_2^5 - \alpha_2^3\,\alpha_5^4 - \alpha_5^3\,\alpha_2^4).$$

Это означает, что форма

$$\omega = -\omega^2\omega^5 + \omega^3\omega^4 = \omega_2^3\omega_1^4 - \omega_1^3\omega_2^4 \tag{6.18}$$

является относительным инвариантом проективного преобразования линейчатого пространства. Обращение этой формы в нуль, как известно, характеризует развертывающиеся поверхности.

Обратимся теперь к конформному пространству. Формулы преобразования репера в таком пространстве имеют вид

$$P_1 + iP_4 = a\,(\overline{P}_1 + i\overline{P}_4),$$

$$P_s = c_s^k\overline{P}_k,\ s = 1, 2, 3, 5, 6,\ k = 1, \ldots, 6 \tag{6.19}$$

(a и c_s^k — некоторые коэффициенты). Продифференцируем первое равенство (6.19)

$$\Omega^*\,(P_1 + iP_4) + \Omega^lP_l = (da + a\overline{\Omega}^*)\,(\overline{P}_1 + i\overline{P}_4) + a\overline{\Omega}^l\,\overline{P}_l,$$

$$l = 2, 3, 5, 6.$$

Внося сюда (6.19) и сравнивая коэффициенты при $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_6$, получим

$$\Omega^*a + \Omega^lc_l^1 = da + a\overline{\Omega}^*,$$

$$\Omega^*ia + \Omega^lc_l^4 = i\,(da + a\overline{\Omega}^*), \quad (l, k = 2, 3, 5, 6) \tag{6.20}$$

$$c_l^k\Omega^l = a\overline{\Omega}^k.$$

Если теперь принять во внимание соотношения (6.8), (6.9), то, аналогично предыдущему, можно прийти к заключению о справедливости соотношений

$$(\overline{\Omega}^2)^2 + (\overline{\Omega}^3)^2 - \overline{\Omega}^5\,\overline{\Omega}^6 = \lambda'\,[\,(\Omega^2)^2 + (\Omega^3)^2 - \Omega^5\Omega^6],$$

где

$$\lambda' = \frac{1}{a^2}\,[\,(c_2^2)^2 + (c_2^3)^2 - c_2^5\,c_2^6].$$

Это означает, что форма

$$\Omega = (\Omega^2)^2 + (\Omega^3)^2 - \Omega^5\Omega^6 \tag{6.21}$$

является относительным инвариантом преобразования конформного пространства, линейного относительно гексасферических координат.

Можно было бы показать, что формы ω и Ω являются единственными относительными инвариантами преобразований обоих пространств (абсолютных инвариантов эти преобразования не имеют), однако на этом мы останавливаться не будем. Назовем эти формы фундаментальными формами рассматриваемых пространств.

Принимая во внимание равенства (6.10), обнаруживаем, что

$$\Omega = 4\omega. \tag{6.22}$$

Таким образом, **при отображении линейчатого и конформного пространств друг на друга сохраняется отношение фундаментальных форм этих пространств.**

Пусть теперь C — некоторый комплекс прямых в линейчатом пространстве, отнесенный к какому-либо своему нормальному тетраэдру. Следовательно,

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0. \tag{6.23}$$

Фундаментальная форма пространства на таком комплексе принимает вид

$$\omega = \omega_2^3\omega_1^4 + (\omega_2^4)^2.$$

При отображении линейчатого пространства на конформное комплекс C перейдет в некоторую трехмерную точечную поверхность Σ, на которой главные формы связаны соотношением

$$\Omega^5 + \Omega^6 = 0. \tag{6.24}$$

Фундаментальная форма Ω на поверхности Σ принимает вид

$$\Omega = (\Omega^2)^2 + (\Omega^3)^2 + (\Omega^5)^2.$$

Формы $\omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4$ являются базисными на комплексе C. Формы $\Omega^2, \Omega^3, \Omega^5$ — базисные на поверхности Σ. При отображении C на Σ эти формы переходят друг в друга по формулам

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= -(\omega_2^3 + \omega_1^4), \\ \Omega^3 &= 2\omega_2^4, \\ \Omega^5 &= -i(\omega_2^3 - \omega_1^4), \end{aligned} \tag{6.25}$$

§ 2. Отображение с помощью линейных форм

Резюмируя содержание предыдущего пункта, следует сказать, что произвольный комплекс проективного пространства допускает отображение на трехмерную поверхность конформного пространства, при котором базисные формы комплекса $\omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4$ переходят в базисные формы поверхности $\Omega^2, \Omega^3, \Omega^5$ по формулам (6.25). Эти формулы получены в предположении, что отображение уже задано — это отображение индуцируется отображением всего линейчатого пространства, отнесённого к плюккеровым координатам, на конформное пространство в гексасферических координатах (см. (6.4).

Трехмерная поверхность конформного пространства представляет собой частный случай трехмерного точечного пространства. Свойства такого пространства определяются его дифференциальным уравнением

$$\Omega^6 + \Omega^5 = 0$$

и уравнениями структуры, которым подчиняются формы Ω^i. Что, однако, представляют собой такие уравнения?

Чтобы ответить на вопрос, рассмотрим конформное пространство вне всякой связи с его отображением на линейчатое пространство. Отнесем его к семейству реперов $\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_6$, каждый из которых представляет собой шестерку сфер. Пусть, как в только что рассмотренном случае, сферы $\boldsymbol{P}_5$ и $\boldsymbol{P}_6$ вырождаются в точки, принадлежащие четырем остальным сферам $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4$, причем последние между собой взаимно ортогональны. Это приводит к следующим соотношениям между произведениями Дарбу для гексасферических координат сфер репера

$$\begin{gathered} (\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2) = (\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_3) = (\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_4) = (\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3) = (\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_4) = (\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_4) = 0, \\ (\boldsymbol{P}_5\boldsymbol{P}_5) = (\boldsymbol{P}_6\boldsymbol{P}_6) = 0, \\ (\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_5) = (\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_5) = (\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_5) = (\boldsymbol{P}_4\boldsymbol{P}_5) = 0, \\ (\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_6) = (\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_6) = (\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_6) = (\boldsymbol{P}_4\boldsymbol{P}_6) = 0 \end{gathered} \tag{6.26}$$

(заметим, что это те же равенства (6.9), только теперь мы заключаем перемножаемые точки в скобки, подчеркивая тем самым, что мы имеем дело не с плюккеровым произведением их, а с произведением Дарбу. Это, разумеется, вполне естественно, так как в том отображении линейчатого пространства на конформное, о котором шла речь выше, плюккерово произведение тождественно переходит в произведение Дарбу. Заметим вместе с тем, что сейчас, вводя равенства (6.26), мы ни о каком отображении пока не говорим — такое отображение мы в дальнейшем восстановим с помощью соответствующих дифференциальных уравнений).

Нормируем, кроме того, гексасферические координаты сфер таким образом, чтобы были выполнены равенства

$$(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_1) = (\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_2) = (\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_3) = (\boldsymbol{P}_4\boldsymbol{P}_4) = -(\boldsymbol{P}_5\boldsymbol{P}_6) = 1. \tag{6.27}$$

Координаты сферы (точки) $\boldsymbol{P}_6$ остаются пока не пронормированными.

Каждый из дифференциалов $d\boldsymbol{P}_i$ представляет собой совокупность шести гексасферических координат некоторой сферы в конформном пространстве. Если Ω_i^k — ее координаты в репере $\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_6$, то

$$d\boldsymbol{P}_i = \Omega_i^k \boldsymbol{P}_k, \quad i, k = 1, \ldots, 6. \tag{6.28}$$

Это — деривационные уравнения конформного пространства в гексасферических координатах. Однако в отличие, например, от точечного проективного пространства, формы Ω_i^k не являются линейно независимыми. Чтобы получить соотношения между ними, продифференцируем равенства (6.26), (6.27). Это приводит к следующему:

$$\begin{aligned} &\Omega_i^k + \Omega_k^i = 0, \quad &&\Omega_5^6 = \Omega_6^5 = 0, \\ &\Omega_5^i + \Omega_i^6 = 0, \quad &&\Omega_6^k + \Omega_k^5 = 0, \quad i = 1, \ldots, 4 \\ &\Omega_i^i = 0, \quad &&\Omega_5^5 + \Omega_6^6 = 0. \end{aligned} \tag{6.29}$$

На 36 форм $\Omega_i^k \, (i, k = 1, \ldots, 6)$ наложено, таким образом, 21 соотношение. Следовательно, независимых остается лишь 15 форм. Это означает, что группа конформных преобразований четырехмерного точечного пространства — пятнадцатичленная. Но такова же и группа преобразований трехмерного точечного проективного пространства, а, следовательно, и четырехмерного линейчатого пространства, вмещенного в это пространство. Этого, очевидно, и следовало ожидать, так как выше мы установили возможность отображения конформного пространства на линейчатое и изоморфизм фундаментальных групп обоих пространств.

Продифференцируем теперь равенства (6.28) внешним образом. В силу линейной независимости «вершин» репера $\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_6$ мы получим следующую систему внешних дифференциальных уравнений [1]

$$D\Omega_i^k = [\Omega_i^j \Omega_j^k] \quad (i, j, k = 1, \ldots, 6). \tag{6.30}$$

Вместе с (6.29) эти уравнения и составят уравнения структуры конформного пространства.

Сопоставляя с обозначениями, входящими в (6.10), замечаем, что

$$\Omega^l = \Omega_1^l + i\Omega_4^l \quad (l = 2, 3, 5, 6). \tag{6.31}$$

Пусть Σ — некоторая точечная трехмерная поверхность в четырехмерном конформном пространстве, отнесенная к реперу $\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_6$. Предположим, что с текущей точкой такой поверхности совмещена точка $\boldsymbol{P}_1 + i\boldsymbol{P}_4$. В таком случае главными формами смещения репера будут формы $\Omega^2, \Omega^3, \Omega^5, \Omega^6$, определяемые равенствами (6.31). Поскольку

$$d(\boldsymbol{P}_1 + i\boldsymbol{P}_4) = \Omega^* (\boldsymbol{P}_1 + i\boldsymbol{P}_4) + \Omega^l \boldsymbol{P}_l, \quad (l = 2, 3, 5, 6) \tag{6.32}$$

то это означает, что сфера $d(\boldsymbol{P}_1 + i\boldsymbol{P}_4)$ всегда принадлежит четырехмерному линейному подпространству, определяемому сферами

$$\boldsymbol{P}_1 + i\boldsymbol{P}_4, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_5, \boldsymbol{P}_6$$

(из этих сфер три, а именно $\boldsymbol{P}_1 + i\boldsymbol{P}_4$, $\boldsymbol{P}_5$, $\boldsymbol{P}_6$ вырождаются в точки). Если точка $\boldsymbol{P}_1 + i\boldsymbol{P}_4$ описывает поверхность, то это пространство становится трехмерным, следовательно, между формами $\Omega^2, \Omega^3, \Omega^5, \Omega^6$ должно существовать некоторое линейное соотношение

$$\Omega^6 = a\Omega^2 + b\Omega^3 + c\Omega^5. \tag{6.33}$$

В таком случае

$$d(\boldsymbol{P}_1 + i\boldsymbol{P}_4) = \Omega^* (\boldsymbol{P}_1 + i\boldsymbol{P}_4) + \Omega^2 (\boldsymbol{P}_2 + a\boldsymbol{P}_6) + \Omega^3 (\boldsymbol{P}_3 + b\boldsymbol{P}_6) + \\ + \Omega^5 (\boldsymbol{P}_5 + c\boldsymbol{P}_6).$$

Как легко проверить, все сферы $d(\boldsymbol{P}_1 + i\boldsymbol{P}_4)$ ортогональны к пучку сфер

$$\boldsymbol{P} = \mu (\boldsymbol{P}_1 + i\boldsymbol{P}_4) + \lambda (a\boldsymbol{P}_2 + b\boldsymbol{P}_3 + \boldsymbol{P}_5 - c\boldsymbol{P}_6) \tag{6.34}$$

и только к этому пучку. Выберем сферы $\boldsymbol{P}_2$ и $\boldsymbol{P}_3$ ортогональными к этому пучку. Это дает

$$a = b = 0. \tag{6.35}$$

В таком случае равенство (6.33) примет вид

$$\Omega^6 = c\Omega^5. \tag{6.36}$$

Записываем равенство (6.32) в виде

$$d(\boldsymbol{P}_1 + i\boldsymbol{P}_4) = \Omega^* (\boldsymbol{P}_1 + i\boldsymbol{P}_4) + \Omega^2 \boldsymbol{P}_2 + \Omega^3 \boldsymbol{P}_3 + \Omega^5 (\boldsymbol{P}_5 + c\boldsymbol{P}_6).$$

Путем нормирования координат вершины $\boldsymbol{P}_6$ (напомним, что она пока остается непронормированной), приведем коэффициент c к -1. Главные формы смещения репера оказываются связанными следующим соотношением

$$\Omega^5 + \Omega^6 = 0. \tag{6.37}$$

Назовем построенный репер нормальным репером поверхности. Как показано выше, базисные формы поверхности $\Omega^2, \Omega^3, \Omega^5$ образуют единственную относительную инвариантную форму

$$\Omega = (\Omega^2)^2 + (\Omega^3)^2 + (\Omega^5)^2.$$

[1] D — символ внешнего дифференцирования, столь же часто используемый, как и штрих.

Предположим теперь, что нам задана некоторая линейная подстановка (6.25) форм $\omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4$, с одной стороны, и форм $\Omega^2, \Omega^3, \Omega^5$ — с другой. Такая подстановка осуществляет, очевидно, отображение комплекса C с базисными формами $\omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4$ на некоторую поверхность Σ конформного пространства с базисными формами $\Omega^2, \Omega^3, \Omega^5$. При этом предполагается, что как комплекс C, так и поверхность Σ отнесены к своим нормальным реперам, т. е.

$$\begin{aligned} \omega_1^3 + \omega_2^4 &= 0, \\ \Omega^6 + \Omega^5 &= 0. \end{aligned} \tag{6.38}$$

Как найти такое отображение в явном виде?

В настоящем параграфе мы наметим лишь ход рассуждений. Соответствующими выкладками мы снабдим эти рассуждения в следующем параграфе, где будет рассмотрено отображение комплекса на точечные пространства иной природы.

Продифференцируем внешним образом уравнения (6.25), потребовав, чтобы формы ω_i^k удовлетворяли уравнениям структуры проективного пространства, формы $\Omega^l = \Omega_1^l + i\Omega_4^l$ — уравнениям структуры конформного пространства. Продолжая получающуюся систему ковариантов, мы можем выразить все формы $\Omega_i^k (i, k = 1, \ldots, 6)$ через формы ω_i^k (в случае необходимости систему можно продолжить еще нужное число раз). От найденных таким образом форм Ω_i^k мы требуем, чтобы они удовлетворяли уравнениям структуры конформного пространства. Оказывается, что никаких соотношений на формы ω_i^k кроме (6.38) и тех, которые накладываются на них уравнениями структуры, мы не получим. (Непосредственная проверка этого утверждения из-за технических сложностей была бы довольно затруднительна. Утверждение, однако, становится очевидным, коль скоро мы вспомним уже рассмотренные ранее конечные формулы отображения двух пространств и, следовательно, комплексов одного пространства на трехмерные поверхности другого).

Найденные формы Ω_i^k подставляем в деривационные уравнения

$$d\boldsymbol{P}_i = \Omega_i^k \boldsymbol{P}_k,$$

которые интегрируем. То, что система таких уравнений вполне интегрируема, следует из того, что формы Ω_i^k удовлетворяют уравнениям структуры конформного пространства. Все шесть «вершин» репера $\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_6$ окажутся функциями трех параметров — главных параметров комплекса C. Каждая точка пространства, каким-то образом связанная с подвижным репером $\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_6$, может считаться соответствующей текущему лучу комплекса C. Однако мы будем считать соответствующей лишь точку $\boldsymbol{P}_1 + i\boldsymbol{P}_4$, так как именно она описывает поверхность, фундаментальная форма которой

$$\Omega = (\Omega^2)^2 + (\Omega^3)^2 + (\Omega^5)^2$$

пропорциональна фундаментальной форме комплекса

$$\omega = \omega_2^3\omega_1^4 + (\omega_2^4)^2.$$

К этому необходимо сделать следующие пояснения.

Уравнение квадрики Плюккера в плюккеровых координатах η^i имеет вид

$$\eta^1\eta^6 - \eta^2\eta^5 + \eta^3\eta^4 = 0.$$

Уравнение квадрики Дарбу (квадрики, на которую отображаются точки конформного пространства) в гексасферических координатах ξ^i есть

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 + (\xi^4)^2 - \xi^5\xi^6 = 0.$$

Преобразованием (6.4) одна квадрика переводится в другую и вместе с тем все линейчатое пространство в конформное. Но совершенно очевидно, что преобразование (6.4) далеко не единственное, переводящее одну квадрику в другую. Можно указать бесчисленное множество преобразований, осуществляющих то же самое. В результате каждого из таких преобразований форма ω перейдет в форму Ω с коэффициентом пропорциональности, в общем случае уже отличном от 4. Формулы (6.25) осуществляют отображение двух пространств не при всяком выборе нормальных реперов комплекса C и поверхности Σ, а лишь при таком, при каком выбор одного определенным образом ограничивает выбор другого. Если мы заменим формулы (6.25) формулами

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= -\frac{\lambda}{2}(\omega_2^3 + \omega_1^4), \\ \Omega^3 &= \lambda\omega_2^4, \\ \Omega^5 &= -\frac{i\lambda}{2}(\omega_2^3 - \omega_1^4), \end{aligned} \tag{6.39}$$

где λ — произвольно, то выбор реперов в обоих многообразиях будет несколько более свободным.

Не ограничивает ли, однако, форма уравнений (6.39) вид отображения?

Покажем, что никакого ограничения при этом не происходит. Какую бы линейную подстановку форм $\omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4$ и $\Omega^2, \Omega^3, \Omega^5$ мы ни имели, если только она подчинена условию

$$\Omega = \lambda^2\omega, \tag{6.40}$$

ее всегда можно привести к виду (6.39) соответствующим согласованием двух реперов — у комплекса и у поверхности. Действительно, пусть мы имеем такую подстановку

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \alpha^1\omega_2^3 + \beta^1\omega_1^4 + \gamma^1\omega_2^4, \\ \Omega^3 &= \alpha^2\omega_2^3 + \beta^2\omega_1^4 + \gamma^2\omega_2^4, \\ \Omega^5 &= \alpha^3\omega_2^3 + \beta^3\omega_1^4 + \gamma^3\omega_2^4. \end{aligned} \tag{6.41}$$

Равенство (6.40) накладывает на коэффициенты $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i$ шесть соотношений

$$\begin{aligned} &(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2 + (\alpha^3)^2 = 0, && \alpha^1\beta^1 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^3\beta^3 = \frac{1}{2}\lambda^2, \\ &(\beta^1)^2 + (\beta^2)^2 + (\beta^3)^2 = 0, && \beta^1\gamma^1 + \beta^2\gamma^2 + \beta^3\gamma^3 = 0, \\ &(\gamma^1)^2 + (\gamma^2)^2 + (\gamma^3)^2 = \lambda^2, && \gamma^1\alpha^1 + \gamma^2\alpha^2 + \gamma^3\alpha^3 = 0. \end{aligned} \tag{6.42}$$

Положим

$$\begin{aligned} -\frac{\bar\lambda}{2}(\bar\omega_2^3 + \bar\omega_1^4) &= \alpha^1\omega_2^3 + \beta^1\omega_1^4 + \gamma^1\omega_2^4, \\ \bar\lambda\,\bar\omega_2^4 &= \alpha^2\omega_2^3 + \beta^2\omega_1^4 + \gamma^2\omega_2^4, \\ -i\frac{\bar\lambda}{2}(\bar\omega_2^3 + \bar\omega_1^4) &= \alpha^3\omega_2^3 + \beta^3\omega_1^4 + \gamma^3\omega_2^4. \end{aligned} \tag{6.43}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \bar\omega_2^3 &= \frac{i}{\bar\lambda}(\alpha^3 + i\alpha^1)\,\omega_2^3 + \frac{i}{\bar\lambda}(\beta^3 + i\beta^1)\,\omega_1^4 + \frac{i}{\bar\lambda}(\gamma^3 + i\gamma^1)\,\omega_2^4, \\ \bar\omega_1^4 &= -\frac{i}{\bar\lambda}(\alpha^3 - i\alpha^1)\,\omega_2^3 - \frac{i}{\bar\lambda}(\beta^3 - i\beta^1)\,\omega_1^4 - \frac{i}{\bar\lambda}(\gamma^3 - i\gamma^1)\,\omega_2^4, \\ \bar\omega_2^4 &= \frac{\alpha^2}{\bar\lambda}\omega_2^3 + \frac{\beta^2}{\bar\lambda}\omega_1^4 + \frac{\gamma^2}{\bar\lambda}\omega_2^4. \end{aligned} \tag{6.44}$$

Обратимся теперь к равенствам (6.14). Перепишем их в виде

$$\begin{aligned} \bar\omega_2^3 &= \frac{1}{h}(\alpha_2^2\omega_2^3 - \alpha_5^2\omega_1^4 - \alpha_4^2\omega_1^3 + \alpha_3^2\omega_2^4), \\ \bar\omega_1^4 &= -\frac{1}{h}(\alpha_2^5\omega_2^3 - \alpha_5^5\omega_1^4 - \alpha_4^5\omega_1^3 + \alpha_3^5\omega_2^4), \\ \bar\omega_1^3 &= -\frac{1}{h}(\alpha_2^4\omega_2^3 - \alpha_5^4\omega_1^4 - \alpha_4^4\omega_1^3 + \alpha_3^4\omega_2^4), \\ \bar\omega_2^4 &= \frac{1}{h}(\alpha_2^3\omega_2^3 - \alpha_5^3\omega_1^4 - \alpha_4^3\omega_1^3 + \alpha_3^3\omega_2^4). \end{aligned} \tag{6.45}$$

Учтем, что

$$\bar\omega_1^3 + \bar\omega_2^4 = \omega_1^3 + \omega_2^4 = 0.$$

Это дает

$$\alpha_2^3 = \alpha_2^4, \quad \alpha_5^3 = \alpha_5^4, \quad -\alpha_4^3 + \alpha_4^4 - \alpha_3^3 + \alpha_3^4 = 0. \tag{6.46}$$

Кроме этих, на коэффициенты α_i^k $(i, k=2, 3, 4, 5)$ наложены еще следующие соотношения (см. (6.12), (6.13))

$$\begin{aligned} &-\alpha_2^2\alpha_2^5 + \alpha_2^3\alpha_2^4 = 0, \quad -\alpha_2^2\alpha_3^5 + \alpha_2^3\alpha_3^4 + \alpha_2^4\alpha_3^3 - \alpha_2^5\alpha_3^2 = 0, \\ &-\alpha_3^2\alpha_3^5 + \alpha_3^3\alpha_3^4 = 0, \quad -\alpha_2^2\alpha_4^5 + \alpha_2^3\alpha_4^4 + \alpha_2^4\alpha_4^3 - \alpha_2^5\alpha_4^2 = 0, \\ &-\alpha_4^2\alpha_4^5 + \alpha_4^3\alpha_4^4 = 0, \quad -\alpha_3^2\alpha_5^5 + \alpha_3^3\alpha_5^4 + \alpha_3^4\alpha_5^3 - \alpha_3^5\alpha_5^2 = 0, \\ &-\alpha_5^2\alpha_5^5 + \alpha_5^3\alpha_5^4 = 0, \quad -\alpha_4^2\alpha_5^5 + \alpha_4^3\alpha_5^4 + \alpha_4^4\alpha_5^3 - \alpha_4^5\alpha_5^2 = 0, \\ &\alpha_2^2\alpha_5^5 - \alpha_2^3\alpha_5^4 - \alpha_2^4\alpha_5^3 + \alpha_2^5\alpha_5^2 + \alpha_3^2\alpha_4^5 - \alpha_3^3\alpha_4^4 - \alpha_3^4\alpha_4^3 + \alpha_3^5\alpha_4^2 = 0 \end{aligned} \tag{6.47}$$

(мы выписали только те соотношения, которые содержат лишь формы α_i^k, $i, k=2, 3, 4, 5$.

Сравнивая (6.45) с (6.44), найдем

$$\begin{aligned} &\alpha_2^2 = i\frac{h}{\bar\lambda}(\alpha^3 + i\alpha^1), \qquad \alpha_5^2 = -i\frac{h}{\bar\lambda}(\beta^3 + i\beta^1), \\ &\alpha_4^2 + \alpha_3^2 = i\frac{h}{\bar\lambda}(\gamma^3 + i\gamma^1), \\ &\alpha_2^5 = i\frac{h}{\bar\lambda}(\alpha^3 - i\alpha^1), \qquad \alpha_5^5 = -i\frac{h}{\bar\lambda}(\beta^3 - i\beta^1), \\ &\alpha_4^5 + \alpha_3^5 = i\frac{h}{\bar\lambda}(\gamma^3 - i\gamma^1), \\ &\alpha_2^3 = \frac{h}{\bar\lambda}\alpha^2, \qquad \alpha_5^3 = -\frac{h}{\bar\lambda}\beta^2, \qquad \alpha_4^3 + \alpha_3^3 = \frac{h}{\bar\lambda}\gamma^2. \end{aligned} \tag{6.48}$$

Отсюда

$$\alpha^1 = -\frac{\bar\lambda}{2h}(\alpha_2^2-\alpha_2^5), \qquad \beta^1 = \frac{\bar\lambda}{2h}(\alpha_5^2-\alpha_5^5),$$

$$\gamma^1 = -\frac{\bar\lambda}{2h}(\alpha_4^2+\alpha_3^2-\alpha_4^5-\alpha_3^5), \tag{6.49}$$

$$\alpha^2 = \frac{\bar\lambda}{h}\alpha_2^3, \qquad \beta^2 = -\frac{\bar\lambda}{h}\alpha_5^3, \qquad \gamma^2 = \frac{\bar\lambda}{h}(\alpha_4^3+\alpha_3^3),$$

$$\alpha^3 = -i\frac{\bar\lambda}{2h}(\alpha_2^2+\alpha_2^5), \qquad \beta^3 = i\frac{\bar\lambda}{2h}(\alpha_5^2+\alpha_5^5),$$

$$\gamma^3 = -i\frac{\bar\lambda}{2h}(\alpha_4^2+\alpha_3^2+\alpha_4^5+\alpha_3^5).$$

В соответствии с (6.17) имеем

$$\bar\omega = \theta\omega.$$

Тогда из равенства

$$\Omega = \lambda^2\omega = \lambda^2\frac{1}{\theta}\bar\omega = \bar\lambda^2\bar\omega$$

следует

$$\bar\lambda^2 = \frac{\lambda^2}{\theta} = \frac{\lambda^2 h^2}{\alpha_2^2\alpha_5^5+\alpha_5^2\alpha_2^5-\alpha_2^3\alpha_5^4-\alpha_5^3\alpha_2^4}. \tag{6.50}$$

Принимая во внимание равенства (6.46), (6.47) и (6.50), легко показать, что значения $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i$, определяемые равенствами (6.49), удовлетворяют соотношениям (6.42). Но это значит, что преобразование, коэффициенты которого определены с помощью (6.48) (коэффициенты, не входящие в эти формулы, остаются произвольными), действительно переводят формулы (6.41) в формулы (6.39). Но это означает, что мы всегда можем отображение двух пространств — конформного и линейчатого — считать заданным равенствами (6.39).

Обратимся теперь к отображению комплекса на пространства с другими уравнениями структуры.

§ 3. Отображение на евклидово пространство

Пусть теперь C — по-прежнему некоторый комплекс прямых в линейчатом пространстве и Σ — трехмерное евклидово точечное пространство, отнесенное к подвижному ортогональному реперу $AI_1I_2I_3$, так что

$$dA = \Omega^i I_i, \qquad i, k = 1, 2, 3. \qquad dI_i = \Omega_i^k I_k, \tag{6.51}$$

Главными формами смещения репера (они же будут базисными формами евклидова пространства) являются формы

$$\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$$

с единственным абсолютным инвариантом

$$\psi = (\Omega^1)^2 + (\Omega^2)^2 + (\Omega^3)^2.$$

Рассмотрим линейную подстановку

$$\omega_2^3 = \alpha_i\Omega^i, \quad \omega_1^4 = \beta_i\Omega^i, \quad \omega_2^4 = \gamma_i\Omega^i, \tag{6.52}$$

подчиненную условию

$$\omega = \lambda^2\psi,$$

где λ — некоторый множитель пропорциональности, а ω — относительно инвариантная форма комплекса. Это приводит к следующим соотношениям между $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\beta_1+\gamma_1^2=\lambda^2, \quad \alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2+2\gamma_1\gamma_2=0,\\
&\alpha_2\beta_2+\gamma_2^2=\lambda^2, \quad \alpha_2\beta_3+\beta_2\alpha_3+2\gamma_2\gamma_3=0,\\
&\alpha_3\beta_3+\gamma_3^2=\lambda^2, \quad \alpha_3\beta_1+\beta_3\alpha_1+2\gamma_3\gamma_1=0.
\end{aligned} \tag{6.53}$$

Рассмотрим частный случай равенств (6.52):

$$\omega_2^3 = \lambda(\Omega^1+i\Omega^2), \quad \omega_1^4 = \lambda(\Omega^1-i\Omega^2), \quad \omega_2^4 = \lambda\Omega^3. \tag{6.54}$$

Как и прежде, можно было бы показать, что равенства (6.52) можно привести к виду (6.54) переходом к новому сопровождающему тетраэдру у комплекса C. Однако впредь мы отнесем комплекс к вполне определенному, именно к его каноническому тетраэдру. Следовательно, преобразовать тетраэдр, приводя его в соответствие с выбранным ортогональным трехгранником евклидова пространства, мы не сможем. Вместо этого мы для заданного тетраэдра в комплексе построим соответствующий ему ортогональный трехгранник евклидова пространства. Покажем, что это всегда возможно.

Действительно, положим

$$\bar{\lambda}(\bar{\Omega}^1 + i\bar{\Omega}^2) = \alpha_i\Omega^i,$$
$$\bar{\lambda}(\bar{\Omega}^1 - i\bar{\Omega}^2) = \beta_i\Omega^i,$$
$$\bar{\lambda}\bar{\Omega}^3 = \gamma_i\Omega^i.$$

Отсюда

$$\bar{\Omega}^1 = \frac{1}{2\bar{\lambda}}(\alpha_1+\beta_1)\Omega^1 + \frac{1}{2\bar{\lambda}}(\alpha_2+\beta_2)\Omega^2 + \frac{1}{2\bar{\lambda}}(\alpha_3+\beta_3)\Omega^3,$$

$$\bar{\Omega}^2 = \frac{1}{2i\bar{\lambda}}(\alpha_1-\beta_1)\Omega^1 + \frac{1}{2i\bar{\lambda}}(\alpha_2-\beta_2)\Omega^2 + \frac{1}{2i\bar{\lambda}}(\alpha_3-\beta_3)\Omega^3,$$

$$\bar{\Omega}^3 = \frac{1}{\bar{\lambda}}\gamma_1\Omega^1 + \frac{1}{\bar{\lambda}}\gamma_2\Omega^2 + \frac{1}{\bar{\lambda}}\gamma_3\Omega^3$$

(мы снабдили λ и формы, соответствующие новому трехграннику, черточками, подчеркивая частный характер выбора такого трехгранника). Принимая во внимание (6.53), обнаруживаем, что матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2\bar{\lambda}}(\alpha_1+\beta_1) & \frac{1}{2\bar{\lambda}}(\alpha_2+\beta_2) & \frac{1}{2\bar{\lambda}}(\alpha_3+\beta_3) \\ \frac{1}{2i\bar{\lambda}}(\alpha_1-\beta_1) & \frac{1}{2i\bar{\lambda}}(\alpha_2-\beta_2) & \frac{1}{2i\bar{\lambda}}(\alpha_3-\beta_3) \\ \frac{1}{\bar{\lambda}}\gamma_1 & \frac{1}{\bar{\lambda}}\gamma_2 & \frac{1}{\bar{\lambda}}\gamma_3 \end{pmatrix}$$

ортогональна, а это и доказывает утверждение.

Комплексы, допускающие указанное отображение на евклидово пространство, назовем конформно-евклидовыми.

Докажем существование конформно-евклидовых комплексов. С этой целью продифференцируем равенства (6.54) внешним образом, учтя, что формы Ω^i удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства, а формы ω_i^k — уравнениям структуры проективного пространства. Если мы заменим затем в получающихся ковариантах формы $\omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4$ их значениями по формулам (6.54), то приведем систему ковариантов к виду

$$[d\lambda - i\lambda\Omega_1^2 - \lambda(\omega_2^2 - \omega_3^3), \Omega^1] + [id\lambda + \lambda\Omega_1^2 - i\lambda(\omega_2^2 - \omega_3^3), \Omega^2] +$$
$$+ [-\lambda\Omega_3^1 + i\lambda\Omega_2^3 + \lambda(\omega_2^1 + \omega_4^3), \Omega^3] = 0,$$
$$[d\lambda + i\lambda\Omega_1^2 - \lambda(\omega_1^1 - \omega_4^4)\ \Omega^1] + [-id\lambda + \lambda\Omega_1^2 + i\lambda(\omega_1^1 - \omega_4^4), \Omega^2] +$$
$$+ [-\lambda\Omega_3^1 - i\lambda\Omega_2^3 - \lambda(\omega_1^2 + \omega_3^4), \Omega^3] = 0,$$

$$[\lambda\Omega_3^1 - \lambda\omega_2^1 + \lambda\omega_3^4, \Omega^1] + [-\lambda\Omega_2^3 + i\lambda\omega_2^1 + i\lambda\omega_3^4, \Omega^2] +$$
$$+ [d\lambda - \lambda(\omega_2^2 - \omega_4^4), \Omega^3] = 0.$$

Алгебраически разрешая эту систему, будем иметь:

$$\begin{aligned} &d\lambda - i\lambda\Omega_1^2 - \lambda(\omega_2^2 - \omega_3^3) = a_i^1\Omega^i, \\ &id\lambda + \lambda\Omega_1^2 - i\lambda(\omega_2^2 - \omega_3^3) = a_i^2\Omega^i, \quad (a_i^j = a_j^i) \\ &-\lambda\Omega_3^1 + i\lambda\Omega_2^3 + \lambda(\omega_2^1 + \omega_4^3) = a_i^3\Omega^i \end{aligned} \tag{6.55}$$

$$\begin{aligned} &d\lambda + i\lambda\Omega_1^2 - \lambda(\omega_1^1 - \omega_4^4) = b_i^1\Omega^i, \\ &-id\lambda + \lambda\Omega_1^2 + i\lambda(\omega_1^1 - \omega_4^4) = b_i^2\Omega^i, \quad (b_i^j = b_j^i) \\ &-\lambda\Omega_3^1 - i\lambda\Omega_2^3 - \lambda(\omega_1^2 + \omega_3^4) = b_i^3\Omega^i, \end{aligned} \tag{6.56}$$

$$\begin{aligned} &\lambda\Omega_3^1 - \lambda\omega_2^1 + \lambda\omega_3^4 = c_i^1\Omega^i, \\ &-\lambda\Omega_2^3 + i\lambda\omega_2^1 + i\lambda\omega_3^4 = c_i^2\Omega^i, \quad (c_i^j = c_j^i) \\ &d\lambda - \lambda(\omega_2^2 - \omega_4^4) = c_i^3\Omega^i. \end{aligned} \tag{6.57}$$

Между коэффициентами a_i^j, b_i^j, c_i^j существует целый ряд зависимостей. Так, сопоставляя между собой первые два равенства (6.55), будем иметь

$$a_1^2 = ia_1^1, \quad a_2^2 = ia_1^2 = -a_1^1, \quad a_2^3 = ia_1^3. \tag{6.58}$$

Аналогично, путем сопоставления первых двух равенств (6.56), получаем

$$b_1^2 = -ib_1^1, \quad b_2^2 = -ib_1^2 = -b_1^1, \quad b_2^3 = -ib_1^3. \tag{6.59}$$

Исключая из уравнений (6.55_3) (6.57_1) и (6.57_2), формы Ω_3^1, Ω_2^3, найдем

$$-(c_1^1 + ic_1^2 + a_1^3)\Omega^1 - (c_1^2 + ic_2^2 + a_2^3)\Omega^2 - (c_1^3 + ic_2^3 + a_3^3)\Omega^3 -$$
$$-\lambda(\omega_2^1 - \omega_4^3) = 0. \tag{6.60}$$

Примем теперь в качестве сопровождающего нормального тетраэдра комплекса его канонический тетраэдр, инфинитезимальные смещения которого описываются системой (5.61). Из этой системы мы, в частности, находим

$$\omega_2^1 - \omega_4^3 = \alpha\omega_2^3 + \omega_1^4$$

или (см. (6.54))

$$\omega_2^1 - \omega_4^3 = \lambda\alpha(\Omega^1 + i\Omega^2) + \lambda(\Omega^1 - i\Omega^2). \tag{6.61}$$

Внося это в (6.60) и приравнивая к нулю коэффициенты при Ω^1, Ω^2, Ω^3, придем к следующим соотношениям:

$$c_1^1 + ic_1^2 + a_1^3 + \lambda^2(1+\alpha) = 0,$$
$$c_1^2 + ic_2^2 + a_2^3 - i\lambda^2(1-\alpha) = 0, \quad (6.62)$$
$$c_1^3 + ic_2^3 + a_3^3 = 0.$$

Из системы (5.61) найдем

$$\omega_1^2 - \omega_3^4 = \omega_2^3 + \alpha\omega_1^4$$

или

$$\omega_1^2 - \omega_3^4 = \lambda(\Omega^1 + i\Omega^2) + \lambda\alpha(\Omega^1 - i\Omega^2). \quad (6.63)$$

Исключая формы Ω_3^1, Ω_3^2 из уравнений (6.56_3), (6.57_1) и (6.57_2) и принимая во внимание (6.63), получим соотношения

$$c_1^1 - ic_1^2 + b_1^3 + \lambda^2(1+\alpha) = 0,$$
$$c_1^2 - ic_2^2 + b_2^3 + i\lambda^2(1-\alpha) = 0, \quad (6.64)$$
$$c_1^3 - ic_2^3 + b_3^3 = 0.$$

Исключая, наконец, формы $d\lambda$, Ω_1^2 из уравнений (6.55_1), (6.56_1) и (6.57_3), придем еще к трем соотношениям:

$$a_1^1 + b_1^1 = 2c_1^3, \quad a_1^2 + b_1^2 = 2c_2^3, \quad a_1^3 + b_1^3 = 2c_3^3. \quad (6.65)$$

Таким образом, между 18 коэффициентами a_i^j, b_i^j, c_i^j существует 15 соотношений (6.58), (6.59), (6.62), (6.64) и (6.65). Введем обозначения

$$c_1^3 = -\lambda\lambda_1, \quad c_2^3 = -\lambda\lambda_2, \quad c_3^3 = -\lambda\lambda_3.$$

В таком случае из равенств (6.58)—(6.65) найдем

$$a_1^1 = i\lambda(i\lambda_1 + \lambda_2), \quad a_1^2 = -\lambda(i\lambda_1 + \lambda_2), \quad a_1^3 = -\lambda\lambda_3,$$
$$a_2^2 = -i\lambda(i\lambda_1 + \lambda_2), \quad a_2^3 = -i\lambda\lambda_3, \quad a_3^3 = \lambda(\lambda_1 + i\lambda_2),$$
$$b_1^1 = -\lambda(\lambda_1 + i\lambda_2), \quad b_1^2 = i\lambda(\lambda_1 + i\lambda_2), \quad b_1^3 = -\lambda\lambda_3,$$
$$b_2^2 = \lambda(\lambda_1 + i\lambda_2), \quad b_2^3 = i\lambda\lambda_3, \quad b_3^3 = \lambda(\lambda_1 - i\lambda_2),$$
$$c_1^1 = \lambda\lambda_3 - \lambda^2(1+\alpha), \quad c_1^2 = 0, \quad c_2^2 = \lambda\lambda_3 + \lambda^2(1-\alpha).$$

Из девяти равенств (6.55)—(6.57) только четыре оказываются независимыми, причем эти последние могут быть представлены в виде

$$d\ln\lambda = \omega_1^1 + \omega_2^2 - \lambda_i\Omega^i,$$
$$\Omega_1^2 = i(\omega_2^2 - \omega_1^1) - \lambda_2\Omega^1 + \lambda_1\Omega^2, \quad (6.66)$$
$$\Omega_2^3 = \frac{i}{2}(\omega_2^1 + \omega_4^3 + \omega_1^2 + \omega_3^4) - \lambda_3\Omega^2 + \lambda_2\Omega^3,$$
$$\Omega_3^1 = \frac{1}{2}(\omega_2^1 + \omega_4^3 - \omega_1^2 - \omega_3^4) - \lambda_1\Omega^3 + \lambda_3\Omega^1.$$

Запишем продолжение уравнения (6.66_1)

$$d\lambda_1 = \lambda_2\Omega_1^2 + \lambda_3\Omega_1^3 - \lambda(\omega_3^2 + \omega_4^1) - \lambda_{1i}\Omega^i,$$
$$d\lambda_2 = \lambda_3\Omega_2^3 + \lambda_1\Omega_2^1 - i\lambda(\omega_3^2 - \omega_4^1) - \lambda_{2i}\Omega^i, \quad (\lambda_{ik} = \lambda_{ki}) \quad (6.67)$$
$$d\lambda_3 = \lambda_1\Omega_3^1 + \lambda_2\Omega_3^2 - \lambda(\omega_4^2 - \omega_3^1) - \lambda_{3i}\Omega^i.$$

Здесь λ_{ik} — параметры продолжения.

Продифференцируем внешним образом остальные уравнения системы (6.66). После ряда упрощений приведем систему ковариантов к виду

$$-(\lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda^2(1-\alpha^2) + \lambda_3^2)[\Omega^1\Omega^2] + (\lambda_{13} - \lambda_1\lambda_3)[\Omega^2\Omega^3] + (\lambda_{23} - \lambda_2\lambda_3)[\Omega^3\Omega^1] = 0,$$
$$(\lambda_{13} - \lambda_1\lambda_3)[\Omega^1\Omega^2] - (\lambda_{22} + \lambda_{33} + \lambda_1^2)[\Omega^2\Omega^3] + (\lambda_{12} - \lambda_1\lambda_2)[\Omega^3\Omega^1] = 0,$$
$$(\lambda_{23} - \lambda_2\lambda_3)[\Omega^1\Omega^2] + (\lambda_{12} - \lambda_1\lambda_2)[\Omega^2\Omega^3] - (\lambda_{33} + \lambda_{11} + \lambda_2^2)[\Omega^3\Omega^1] = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_{11} = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2) - \frac{\lambda^2}{2}(1-\alpha^2), \quad \lambda_{12} = \lambda_1\lambda_2,$$
$$\lambda_{22} = \frac{1}{2}(\lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_1^2) - \frac{\lambda^2}{2}(1-\alpha^2), \quad \lambda_{23} = \lambda_2\lambda_3, \quad (6.68)$$
$$\lambda_{33} = \frac{1}{2}(\lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2) + \frac{\lambda^2}{2}(1-\alpha^2), \quad \lambda_{31} = \lambda_3\lambda_1.$$

Равенства (6.67) приобретают теперь вид

$$d\lambda_1 = \lambda_2\Omega_1^2 + \lambda_3\Omega_1^3 - \lambda(\omega_3^2 + \omega_4^1) -$$
$$-\left[\frac{1}{2}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2) - \frac{\lambda^2}{2}(1-\alpha^2)\right]\Omega^1 - \lambda_1\lambda_2\cdot\Omega^2 - \lambda_1\lambda_3\Omega^3,$$
$$d\lambda_2 = \lambda_3\Omega_2^3 + \lambda_1\Omega_2^1 - i\lambda(\omega_3^2 - \omega_4^1) -$$
$$-\left[\frac{1}{2}(\lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_1^2) - \frac{\lambda^2}{2}(1-\alpha^2)\right]\Omega^2 - \lambda_2\lambda_3\Omega^3 - \lambda_2\lambda_1\Omega^1, \tag{6.69}$$
$$d\lambda_3 = \lambda_1\Omega_3^1 + \lambda_2\Omega_3^2 - \lambda(\omega_4^2 - \omega_3^1) -$$
$$-\left[\frac{1}{2}(\lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2) + \frac{\lambda^2}{2}(1-\alpha^2)\right]\Omega^3 - \lambda_3\lambda_1\Omega^1 - \lambda_3\lambda_2\Omega^2.$$

Продифференцируем эти равенства внешним образом

$$-(1+\alpha)[\omega_4^2 + \omega_3^1, \Omega^1] + [(1-\alpha^2)(\omega_1^1 + \omega_2^2) - \alpha d\alpha, \Omega^1] -$$
$$-\frac{1}{2}(1-\alpha^2)[\omega_2^1 + \omega_4^3 - \omega_1^2 - \omega_3^4, \Omega^3] = 0,$$
$$(1-\alpha)[\omega_4^2 + \omega_3^1, \Omega^2] + [(1-\alpha^2)(\omega_1^1 + \omega_2^2) - \alpha d\alpha, \Omega^2] +$$
$$+\frac{i}{2}(1-\alpha^2)[\omega_2^1 + \omega_4^3 + \omega_1^2 + \omega_3^4, \Omega^3] = 0,$$
$$-\frac{1}{2}(1-\alpha^2)[\omega_2^1 + \omega_4^3 - \omega_1^2 - \omega_3^4, \Omega^1] - [(1-\alpha^2)(\omega_1^1 + \omega_2^2) - \alpha d\alpha, \Omega^3] +$$
$$+\frac{i}{2}(1-\alpha^2)[\omega_2^1 + \omega_4^3 + \omega_1^2 + \omega_3^4, \Omega^2] = 0.$$

Подставляя сюда значения форм $\omega_4^2 + \omega_3^1$, $\omega_1^1 + \omega_2^2$, $\omega_2^1 + \omega_4^3$, $\omega_1^2 - \omega_3^4$, $d\beta$ (см. (5.61)), заменив затем формы $\omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4$ их значениями по формулам (6.54) и приравняв к нулю коэффициенты при квадратичных формах $[\Omega^1\Omega^2]$, $[\Omega^2\Omega^3]$, $[\Omega^3\Omega^1]$, мы получим всего 4 независимых соотношения между параметрами P, Q, a, b, r, s, k

$$\begin{aligned} &P + Q = 0, && k = 2P(1-\alpha^2); \\ &a = -s + 2\alpha r, && b = -r + 2\alpha s, \end{aligned} \tag{6.70}$$

Эти соотношения исчерпывают все условия, накладываемые на конформно-евклидовы комплексы, и, следовательно, всякий комплекс, параметры канонического тетраэдра которого связаны условиями (6.70), является конформно-евклидовым.

Можно показать, что класс конформно-евклидовых комплексов зависит от шести произвольных функций одного аргумента.

Заметим, что канонический тетраэдр построен нами лишь для комплексов с простыми инфлекционными центрами. Следовательно, только для таких комплексов и будет справедлива сформулированная теорема.

§ 4. Тетраэдральный комплекс

В отличие от конформного пространства при ортогональном преобразовании евклидова пространства форма ψ переходит сама в себя. В то же время, фиксируя один какой-либо тетраэдр комплекса, мы тем самым фиксируем и форму ω. Поэтому в рассматриваемом случае можно поставить более узкую задачу отыскания изометрического отображения, т. е. такого отображения, при котором формы ψ и ω переходят друг в друга:

$$\psi = \omega.$$

Мы должны теперь во всех предыдущих формулах положить $\lambda = 1$. Не выполняя всех выкладок, заметим, что последнее условие приводит к равенствам

$$P = Q = 0,\ a = b = 0,\ r = s = 0,\ k = 0,\ \beta = \text{const}.$$

Уравнения движения сопровождающего тетраэдра комплекса принимают вид

$$\begin{aligned} &\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0, \\ &\omega_1^2 = \frac{1}{2}(\omega_2^3 + \alpha\omega_1^4), \quad \omega_3^4 = -\frac{1}{2}(\omega_2^3 + \alpha\omega_1^4), \\ &\omega_2^1 = \frac{1}{2}(\omega_1^4 + \alpha\omega_2^3), \quad \omega_4^3 = -\frac{1}{2}(\omega_1^4 + \alpha\omega_2^3), \\ &\omega_2^1 = 0, \quad \omega_2^2 = 0, \quad \omega_3^3 = 0, \quad \omega_4^4 = 0, \\ &\omega_3^2 = \frac{1-\alpha^2}{4}\omega_1^4, \quad \omega_4^1 = \frac{1-\alpha^2}{4}\omega_2^3, \\ &\omega_4^2 = -\frac{1-\alpha^2}{4}\omega_2^4, \quad \omega_3^1 = \frac{1-\alpha^2}{4}\omega_2^4. \end{aligned} \tag{6.71}$$

Легко проверить, что эта система замкнута относительно операции внешнего дифференцирования.

Комплекс, определяемый системой (6.71), является тетраэдральным комплексом (см. (5.63) и (5.64)). Мы можем высказать, следовательно, следующую теорему: **канонический тетраэдр комплекса допускает изометрическое отображение комплекса на евклидово пространство, причем единственным комплексом, допускающим такое отображение, является тетраэдральный комплекс.**

Поскольку в рассматриваемом случае

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$

то равенства (6.66) приобретают вид (см. (6.71))

$$\Omega^2_1 = 0, \quad \Omega^3_2 = 0, \quad \Omega^1_3 = 0. \tag{6.72}$$

Из равенств

$$\omega^3_2 = \Omega^1 + i\Omega^2, \qquad \omega^4_1 = \Omega^1 - i\Omega^2, \quad \omega^4_2 = \Omega^3 \tag{6.73}$$

находим

$$\Omega^1 = \frac{1}{2}(\omega^3_2 + \omega^4_1), \quad \Omega^2 = -\frac{i}{2}(\omega^3_2 - \omega^4_1), \; \Omega^3 = \omega^4_2. \tag{6.74}$$

Отсюда видно, что уравнения

$$\Omega^1 = 0, \quad \Omega^2 = 0, \quad \Omega^3 = 0 \tag{6.75}$$

переходят соответственно в

$$\omega^3_2 + \omega^4_1 = 0, \quad \omega^3_2 - \omega^4_1 = 0, \quad \omega^4_2 = 0. \tag{6.76}$$

Равенства (6.75) определяют триортогональную систему координатных поверхностей в евклидовом пространстве, которая, в силу уравнений (6.72), является голономной. Равенства (6.76) попарно определяют главные поверхности комплекса, система которых, следовательно, также голономна. Последнее справедливо для всех конформно-евклидовых комплексов. Полная интегрируемость каждого из уравнений (6.75) означает, что каждые два двупараметрических семейства главных поверхностей расслаиваются в однопараметрическое семейство конгруэнций. Последние необходимо являются конгруэнциями W.

Далее, равенства (6.72) показывают, что координатные поверхности евклидова пространства представляют собой плоскости прямоугольной декартовой системы. Следовательно, при изометрическом отображении тетраэдрального комплекса на евклидово пространство его конгруэнции W, расслаивающие главные поверхности, переходят в плоскости триортогональной декартовой системы, а потому сами главные поверхности переходят в прямые этой системы.

§ 5. Комплексы, допускающие изометрическое отображение на пространство постоянной кривизны

Очевидно, конформно-евклидовы комплексы допускают конформное отображение (отображение, при котором формы ψ и ω пропорциональны друг другу) не только на евклидово, но и на всякое конформно-евклидово пространство. Конформно-евклидовым, в частности, является пространство постоянной кривизны. Разумеется, поэтому, что если бы мы отображали комплекс на пространство постоянной кривизны, то мы пришли бы к тем же самым соотношениям (6.70). Однако, поставив вопрос об изометрическом отображении на пространство постоянной кривизны, мы придем к комплексу, отличному от тетраэдрального.

Формулы, определяющие отображение, будут иметь теперь вид

$$\begin{aligned} \omega^3_2 &= \Omega^1 + i\Omega^2, \\ \omega^4_1 &= \Omega^1 - i\Omega^2, \\ \omega^4_2 &= \Omega^3. \end{aligned} \tag{6.77}$$

Дифференцируя внешним образом эти уравнения, мы должны учесть, что формы Ω^1, Ω^2, Ω^3 удовлетворяют уравнениям структуры пространства постоянной кривизны:

$$\begin{gathered} D\Omega^i = [\Omega^l \Omega^i_l], \\ \Omega^l_k = -\Omega^k_l \\ D\Omega^i_l = [\Omega^k_l \Omega^i_k] - K[\Omega^l \Omega^i], \end{gathered} \tag{6.78}$$

(K — кривизна пространства).

Уравнения движения сопровождающего тетраэдра искомого комплекса имеют вид:

$$\begin{gathered} \omega^3_1 + \omega^4_2 = 0, \\ \omega^2_1 = \frac{1}{2}(\omega^3_2 + \alpha\omega^4_1), \qquad \omega^4_3 = -\frac{1}{2}(\omega^3_2 + \alpha\omega^4_1), \\ \omega^1_2 = \frac{1}{2}(\omega^4_1 + \alpha\omega^3_2), \qquad \omega^3_4 = -\frac{1}{2}(\omega^4_1 + \alpha\omega^3_2), \\ \omega^1_3 = \frac{1-\alpha^2}{4}\omega^4_2, \qquad \omega^2_4 = -\frac{1-\alpha^2}{4}\omega^4_2, \\ \omega^2_3 = \frac{1-\alpha^2}{4}\omega^4_1, \qquad \omega^1_4 = \frac{1-\alpha^2}{4}\omega^3_2, \end{gathered} \tag{6.79}$$

$$\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_4^4=0,\quad \omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0,$$

$$\omega_1^1+\omega_2^2=-\alpha\,(r\omega_2^3+s\omega_1^4),$$

$$\omega_1^1-\omega_2^2=-\frac{1}{2}(s-\alpha r)\,\omega_2^3+\frac{1}{2}(r-\alpha s)\,\omega_1^4.$$

$$d\alpha=-(1-\alpha^2)\,(r\omega_2^3+s\omega_1^4).$$

При этом параметры r и s связаны соотношениями

$$K=-4\alpha^2 sr,\quad r^2+s^2=2\,\alpha rs. \tag{6.80}$$

Комплекс (6.79) обобщает тетраэдральный комплекс и приводится к последнему при $K=0$. В этом случае уравнения (6.79) в точности совпадают с уравнениями (6.71).

Поскольку, как отмечалось, пространство постоянной кривизны является конформно-евклидовым, то комплекс (6.79) допускает, очевидно, конформное отображение на евклидово пространство, причем в каноническом тетраэдре коэффициент конформности λ не будет уже равен единице. Найдем этот коэффициент. С этой целью внесем в уравнения (6.66) и (6.69) уравнения (6.79) и (6.80). Мы будем иметь

$$\begin{gathered} d\ln\lambda=-\alpha\lambda(r+s)\,\Omega^1-i\alpha\lambda\,(r-s)\,\Omega^2-\lambda_i\Omega^i,\\ \Omega_1^2=\frac{i}{2}\lambda\,(1+\alpha)\,(s-r)\,\Omega^1-\frac{\lambda}{2}(1-\alpha)\,(s+r)\,\Omega^2-\lambda_2\Omega^1+\lambda_1\Omega^2,\\ \Omega_2^3=-\lambda_3\Omega^2+\lambda_2\Omega^3,\\ \Omega_3^1=-\lambda_1\Omega^3+\lambda_3\Omega^1, \end{gathered} \tag{6.81}$$

$$\begin{gathered} d\lambda_1=-\frac{1}{2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)\,\Omega^1+\frac{\lambda_1\lambda}{2}\,[i\,(1+\alpha)\,(s-r)\,\Omega^1-\\ -(1-\alpha)\,(s+r)\,\Omega^2],\\ d\lambda_2=-\frac{1}{2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)\,\Omega^2-\\ -\frac{\lambda\lambda_1}{2}\,[i\,(1+\alpha)\,(s-r)\,\Omega^1-(1-\alpha)\,(s+r)\,\Omega^2],\\ d\lambda_3=-\frac{1}{2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)\,\Omega^3. \end{gathered} \tag{6.82}$$

Первое уравнение (6.81) и уравнения (6.82) определят значение λ с четырьмя произвольными постоянными. Это будет со-

ответствовать, очевидно, группе преобразований конформно-евклидова пространства с заданной двойной точкой (при конформном отображении комплекса не меняется луч его, а, следовательно, и точка трехмерного пространства, в которую он отображается). В частности, можно положить

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=0,\quad \lambda_3=0. \tag{6.83}$$

Тогда уравнения (6.81) и (6.82) примут вид

$$\begin{gathered} d\ln\lambda=\omega_1^1+\omega_2^2,\\ \Omega_1^2=i\,(\omega_2^2-\omega_1^1),\\ \Omega_2^3=0,\\ \Omega_3^1=0. \end{gathered} \tag{6.84}$$

Эти уравнения вполне интегрируемы. Коэффициент λ может быть любой функцией, определяемой первым уравнением (очевидно, с произволом в одну постоянную). Эту функцию можно найти. Для этого, приняв во внимание (6.79), перепишем первое уравнение (6.84) в виде

$$d\ln\lambda=-\frac{1}{2}\,d\ln(1-\alpha^2).$$

Отсюда

$$\lambda^2=\frac{c}{1-\alpha^2}, \tag{6.85}$$

где c — произвольное постоянное интегрирования. Очевидно, при $K=0$ мы получим не $\lambda=1$, а лишь то значение λ, которое получится из единицы при некотором конформном преобразовании евклидова пространства.

Таким образом, **комплекс (6.79) допускает конформное отображение на евклидово пространство с коэффициентом конформности, определяемым равенством (6.85).**

Подобным же образом можно показать, что тетраэдральный комплекс допускает конформное отображение на пространство постоянной кривизны K с некоторым коэффициентом конформности, отличным от единицы.

§ 6. Общие свойства конформно-евклидовых комплексов

Согласно известному предложению С. Ли линии кривизны и асимптотические линии на поверхности могут быть описаны одинаковыми формулами, при условии, что в первом случае их следует трактовать в терминах геометрии сфер, а во втором — в терминах линейчатой геометрии. Может быть сформулировано следующее: **уравнения асимптотических линий на фокальных поверхностях произвольной конгруэнции W, принадлежащей конформно-евклидовому комплексу, совпадают с уравнениями линий кривизны на соответствующих этим конгруэнциям поверхностях евклидова пространства.**

Проведем доказательство в самом общем нормальном тетраэдре. Тем самым наше заключение будет в одинаковой мере относиться как к комплексам с простыми инфлекционными центрами, так и к комплексам с кратными центрами.

Продолжая основное уравнение, характеризующее нормальный тетраэдр

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0,$$

получим уже известные равенства

$$\begin{aligned} \omega_1^2 - \omega_3^4 &= p\omega_2^3 + \alpha\omega_1^4 + \beta\omega_2^4, \\ \omega_2^1 - \omega_4^3 &= \alpha\omega_2^3 + q\omega_1^4 - \gamma\omega_2^4, \\ \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4 &= \beta\omega_2^3 - \gamma\omega_1^4 + r\omega_2^4. \end{aligned} \tag{6.86}$$

Если теперь проделать выкладки § 5, приняв во внимание равенства (6.86), но не равенства (5.61), то, как легко понять, в соотношениях (6.62) мы должны вместо $1+\alpha$ и $1-\alpha$ положить $q+\alpha$ и $q-\alpha$, в соотношениях (6.64) положить $p+\alpha$ и $p-\alpha$. В окончательный результат (6.66) эти коэффициенты не войдут, а потому мы будем иметь по-прежнему

$$\Omega_2^3 = \frac{i}{2}(\omega_2^1 + \omega_4^3 + \omega_1^2 + \omega_3^4) - \lambda_3\Omega^2 + \lambda_2\Omega^3,$$

$$\Omega_3^1 = \frac{1}{2}(\omega_2^1 + \omega_4^3 - \omega_1^2 - \omega_3^4) - \lambda_1\Omega^3 + \lambda_3\Omega^1. \tag{6.87}$$

Пусть теперь уравнение конгруэнции W в произвольном нормальном тетраэдре имеет вид

$$\omega_2^4 = 0. \tag{6.88}$$

Пусть

$$M = A + tA_2$$

фокус такой конгруэнции. Отсюда

$$dM = (\omega_1^1 + t\omega_2^1)A_1 + (\omega_1^2 + t\omega_2^2 + dt)A_2 + (\omega_1^3 + t\omega_2^3)A_3 + (\omega_1^4 + t\omega_2^4)A_4.$$

При перемещении вдоль фокальной кривой точка dM оказывается коллинеарной с A_1, A_2, а потому

$$\omega_1^3 + t\omega_2^3 = 0, \ \omega_1^4 + t\omega_2^4 = 0. \tag{6.89}$$

Учитывая (6.88), из последних равенств находим координаты фокусов

$$t_1 = 0, \ t_2 = \infty.$$

Следовательно, фокусами являются сами вершины A_1 и A_2.

Поскольку при (6.88)

$$(dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1^4 A_4,$$

$$(dA_2 = \omega_2^1 A_1 + \omega_2^2 A_2 + \omega_2^3 A_3,$$

то касательными плоскостями к фокальным поверхностям, описанным точками A_1 и A_2, будут соответственно плоскости $(A_1A_2A_4)$ и $(A_1A_2A_3)$. Следовательно, уравнения асимптотических линий на этих поверхностях имеют вид

$$(d^2A_1, \ A_1A_2A_4) = 0,$$

$$(d^2A_2, \ A_1A_2A_3) = 0$$

или

$$\begin{aligned} \omega_1^2\omega_2^3 + \omega_1^4\omega_4^3 &= 0, \\ \omega_2^1\omega_1^4 + \omega_2^3\omega_3^4 &= 0. \end{aligned} \tag{6.90}$$

Так как рассматриваемая конгруэнция есть конгруэнция W, то последние уравнения должны быть эквивалентными между собой. Если их сумма

$$(\omega_1^2 + \omega_3^4)\,\omega_2^3 + (\omega_2^1 + \omega_4^3)\,\omega_1^4 = 0 \tag{6.91}$$

не равна тождественно нулю, то она также им эквивалентна и представляет собой, следовательно, также уравнение асимптотических линий на фокальных поверхностях конгруэнции.

Обратимся теперь к евклидову пространству. В нем конгруэнции (6.88), как показывают равенства (6.77), будет соответствовать поверхность

$$\Omega^3 = 0, \tag{6.92}$$

для которой справедливы равенства

$$dA = \Omega^1 I_1 + \Omega^2 I_2, \ dI_3 = \Omega_3^1 I_1 + \Omega_3^2 I_2.$$

Линии кривизны на поверхности (6.92) характеризуются тождеством Родрига $dA = m\,dI_3$ (m — коэффициент пропорциональности), а потому их дифференциальное уравнение имеет вид

$$\Omega^1\Omega_3^2 - \Omega^2\Omega_3^1 = 0.$$

Подставляя сюда значения форм Ω_3^2, Ω_3^1 по формулам (6.87) при $\Omega^3=0$, мы будем иметь

$$(i\Omega^1 + \Omega^2)(\omega_2^1 + \omega_4^3) + (i\Omega^1 - \Omega^2)(\omega_1^2 + \omega_3^4) = 0$$

или, учитывая (6.77),

$$(\omega_1^2 + \omega_3^4)\,\omega_2^3 + (\omega_2^1 + \omega_4^3)\,\omega_1^4 = 0. \qquad 6.93$$

Совпадение уравнений (6.91) и (6.93) и доказывает справедливость сформулированного выше утверждения.

Заметим, что если линии кривизны на поверхности евклидова пространства становятся неопределенными, т. е. если эта поверхность оказывается сферой или плоскостью, то наше предложение перестает быть справедливым в том смысле, что асимптотические линии на фокальных поверхностях соответствующей этой поверхности конгруэнции W вовсе не обязаны быть неопределенными. Это будет именно тот случай, когда уравнения (6.90) имеют сумму тождественно равную нулю, и такой именно случай мы имеем на конгруэнциях $\omega_2^4=0$ (эти конгруэнции есть необходимо конгруэнции W), выбирая в качестве сопровождающего канонический тетраэдр. Однако теорему легко распространить и на этот случай, если согласиться считать, что каждое из двух эквивалентных друг другу уравнений (6.90) может быть рассматриваемо как уравнение какой-то определенной пары линий кривизны на сфере (или на плоскости).

Глава седьмая

КОМПЛЕКСЫ В НЕЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Разработанная в предыдущих главах проективная теория комплексов позволяет дать простое представление о теории комплексов в целом ряде неевклидовых пространств, если эти последние рассматривать как обычное проективное пространство с заданной фундаментальной группой преобразований. Ниже мы коротко коснемся некоторых аспектов этой теории в случае аффинного, эллиптического, гиперболического и ряда других пространств. Однако перед этим представляет интерес обозреть с общей проективной точки зрения также и некоторые факты рассмотренной в первой части евклидовой геометрии комплексов.

Будем предполагать, что проективное пространство отнесено к семейству тетраэдров $A_1A_2A_3A_4$ с уравнениями инфинитезимального смещения

$$dA_i = \omega_i^j A_j \qquad (7.1)$$

$(A_1A_2A_3A_4) \neq 0$. Формы ω_i^j, как обычно, удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$(\omega_i^j)' = [\omega_i^k \omega_k^j]. \qquad (7.2)$$

Пусть при проективных преобразованиях остается неподвижной некоторая плоскость П, которую, не нарушая общности, можно считать совмещенной с плоскостью $A_1A_2A_3$. Пусть, кроме того, в этой плоскости задано некоторое мнимое коническое сечение (абсолют), уравнения которого в подвижном трехграннике имеют вид

$$(x_1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0, \; x^4 = 0. \qquad (7.3)$$

Разумеется, записывая уравнение абсолюта в виде (7.3), мы определенным образом условливаемся нормировать координаты вершин тетраэдра.

Найдем те соотношения между формами ω_i^j, которые возникают как следствие инвариантности уравнения (7.3).

Пусть $T(A_1A_2A_3A_4)$ и $T'(A_1'A_2'A_4'A_5')$— два близких тетраэдра, причем

$$A_{i'} = A_i + dA_i = (\delta_i^j + \omega_i^j)\,A_j. \qquad (7.4)$$

где δ_i^j— символ Кронекера. Величины

$$\delta_i^j + \omega_i^j$$

есть координаты вершин $A_{i'}$ в тетраэдре T. В таком случае формулы проективного преобразования, переводящего тетраэдр T в тетраэдр T', имеют вид

$$\rho x^{i'} = (\delta_i^{i'} + \omega_i^{i'})\,x^i, \; \omega_k^4 = 0, \; (k = 1, 2, 3). \qquad (7.5)$$

Потребуем, чтобы при проективных преобразованиях кривая (7.3) переходила сама в себя. Тем самым, очевидно, из группы проективных преобразований выделится подгруппа евклидовой геометрии.

В координатах $x^{i'}$ уравнения кривой (7.3) имеют вид

$$(x^{1'})^2 + (x^{2'})^2 + (x^{3'})^2 = 0, \; x^{4'} = 0.$$

Подставим сюда значения $x^{i'}$, определяемые равенствами (7.5)

$$\sum_{i'=1}^{3}(\delta_i^{i'}+\omega_i^{i'})(\delta_k^{i'}+\omega_k^{i'})x^i x^k=0 \quad x^4=0. \tag{7.6}$$

Это уравнение должно совпадать с уравнением (7.3). Запишем условия совпадения, отбросив в (7.6) члены, содержащие произведения форм ω_p^q

$$\omega_i^i=\omega_j^j,\ \omega_i^k+\omega_k^i=0\ (i\neq k),\ i,k=1,2,3. \tag{7.7}$$

Уравнения (7.7), присоединенные к (7.2), составят уравнения структуры евклидова пространства.

Форма уравнения (7.3) показывает, что в координатном трехстороннике $A_1A_2A_3$ каждая сторона полярно сопряжена относительно абсолюта с противолежащей ей вершиной. Но это означает, что пространство оказывается отнесенным к семейству ортогональных трехгранников с ребрами A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3.

Если умножить все вершины A_1, A_2, A_3, A_4 на одну и ту же величину, то уравнение (7.3) не изменится, следовательно, это не изменит равенств (7.7)

$$\bar{A}_i=rA_i.$$

Дифференцируя

$$d\bar{A}_i=drA_i+rdA_i,$$

найдем

$$\bar{\omega}_i^i=r(d\ln r+\omega_i^i).$$

Положим

$$d\ln r+\omega_i^i=0,$$

что возможно, так как $(\omega_i^i)'=0$. В таком случае $\bar{\omega}_i^i=0$. Отбрасывая черточку, имеем

$$\omega_i^i=0. \tag{7.8}$$

Если мы теперь отбросим индекс 4, то получим следующие уравнения движения сопровождающего трехгранника в евклидовом пространстве

$$\begin{aligned} dA&=\omega^1A_1+\omega^2A_2+\omega^3A_3,\\ dA_1&=\omega_1^2A_2+\omega_1^3A,\ \omega_1^2+\omega_2^1=0,\\ dA_2&=\omega_2^1A_1+\omega_2^3A_3,\ \omega_2^3+\omega_3^2=0,\ \omega_i^i=0.\\ dA_3&=\omega_3^1A_1+\omega_3^2A_2,\ \omega_3^1+\omega_1^3=0, \end{aligned} \tag{7.9}$$

Полученные уравнения являются известными нам уравнениями (1.1) ч. 1.

Если на луч комплекса поместить вершины AA_3, то главными формами смещения трехгранника будут формы

$$\omega^1,\omega^2,\omega_3^1,\omega_3^2$$

(помним об отбрасывании индекса 4). Для нормального трехгранника эти формы связаны условием

$$\omega^2=k\omega_3^1,$$

где k — кривизна комплекса.

Далее теория комплексов в евклидовом пространстве развивается обычным путем.

Обратимся теперь к комплексам в других пространствах.

§ 1. Комплексы в аффинном пространстве

Совместим плоскость $A_1A_2A_3$ с бесконечно удаленной плоскостью аффинного пространства. В таком случае из уравнений (7.5), определяющих проективное преобразование двух бесконечно близких тетраэдров, заключаем

$$\omega_1^4=\omega_2^4=\omega_3^4=0. \tag{7.10}$$

Эти уравнения вместе с (7.2) и будут представлять собой уравнения структуры аффинного пространства.

Поскольку $(\omega_4^4)'=0$, то форма ω_4^4 есть полный дифференциал. Положим

$$\omega_4^4=d\tau.$$

Полагая

$$\bar{A}_i=r_iA_i \text{ (не суммировать!)}$$

найдем в частности:

$$\bar{\omega}_4^4=r_4(d\ln r_4+d\tau).$$

Выберем множитель r_4 так, чтобы сумма, стоящая в скобках обратилась в нуль. Отбрасывая у формы $\bar{\omega}_4^4$ черточку, присоединим к уравнениям структуры еще одно уравнение

$$\omega_4^4=0. \tag{7.11}$$

Отбрасывая индекс 4, запишем уравнения движения подвижного трехгранника аффинного пространства с вершиной $A-A_4$:

$$dA=\omega^iA_i,\ dA_i=\omega_i^kA_k,\ i,k=1,2,3 \tag{7.12}$$

Помещая вершины A_1A_3 на луч комплекса, имеем главные формы инфинитезимального смещения трехгранника

$$\omega^1, \omega^2, \omega_3^1, \omega_3^2$$

с линейным соотношением между ними

$$\omega^2 = k\omega_3^1 + a\omega_3^2 + b\omega^1. \tag{7.13}$$

Первоначальную канонизацию сопровождающего репера произведем на формальном пути варьирования коэффициентов k, a, b в дифференциальном уравнении комплекса (7.13). С этой целью продифференцируем уравнение (7.13) внешним образом, помня, что формы с одним индексом есть по сути формы, содержащие индекс 4

$$[\Delta k, \omega_3^1] + [\Delta a, \omega_3^2] + [\Delta b, \omega^1] = 0, \tag{7.14}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta k &= dk + k(\omega_3^3 + \omega_2^2 - \omega_1^1) + b\omega^3 - bk\omega_2^1 - a\omega_1^2, \\ \Delta a &= da + a\omega_3^3 - \omega^3 - (k + ab)\,\omega_2^1, \\ \Delta b &= db + b(\omega_2^2 - \omega_1^1) + \omega_1^2 - b^2\omega_2^1. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Закрепляя главные параметры, будем иметь следующую вариацию коэффициентов k, a, b

$$\begin{aligned} \delta k &= -k(\pi_3^3 + \pi_2^2 - \pi_1^1) - b\pi^3 + bk\pi_2^1 + a\pi_1^2, \\ \delta a &= -a\pi_3^3 + \pi^3 + (k + ab)\,\pi_2^1, \\ \delta b &= -b(\pi_2^2 - \pi_1^1) - \pi_1^2 + b^2\pi_2^1. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Канонизация репера заключается в выборе какого-либо частного решения этой системы уравнений, не сужающего широты класса комплекса.

Для произвольного комплекса возможна канонизация

$$a = b = 0, \ k = 1. \tag{7.17}$$

Одновременное обращение в нуль всех трех коэффициентов a, b, k возможно лишь для частного класса — именно для специальных комплексов. Равенствами (7.17) специальные комплексы из рассмотрения исключены.

Алгебраически разрешая ковариант (7.14), получим систему

Пфаффа, определяющую дифференциальную окрестность 2-го порядка:

$$\begin{aligned} \omega_3^3 + \omega_2^2 - \omega_1^1 &= p\omega_3^1 + \alpha\omega_3^2 + \beta\omega^1, \\ -\omega^3 - \omega_2^1 &= \alpha\omega_3^1 + q\omega_3^2 + \gamma\omega^1, \\ \omega_1^2 &= \beta\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2 + r\omega^1. \end{aligned} \tag{7.18}$$

При этом

$$\omega^2 = \omega_3^1. \tag{7.19}$$

Плоскость AA_3A_1 касается конуса комплекса, имеющего вершину в точке A_3. Так как точка A_3 — бесконечно удаленная, то конус вырождается в цилиндр.

Плоскость AA_3A_2 касается конуса, вершина которого совпадает с точкой A. Положение точки A остается на луче совершенно произвольным. Фиксация такой точки будет связана с использованием уже окрестности 2-го порядка.

Используем с этой целью прямую A_1A_3. Это есть линия пересечения бесконечно удаленной плоскости с касательной плоскостью П цилиндра. Если эта линия остается неподвижиой, то плоскость П перемещается параллельно самой себе. Луч комплекса AA_3 описывает в этом случае линейчатую поверхность. называемую основным цилиндроидом комплекса. Найдем уравнения последнего.

Ребро A_1A_3 остается неподвижным, если

$$\omega_1^2 = 0, \ \omega_3^2 = 0.$$

Учитывая (7.18), эти равенства можно записать в виде

$$\beta\omega_3^1 + r\omega^1 = 0, \ \omega_3^2 = 0, \tag{7.20}$$

Касательная плоскость к цилиндроиду в точке

$$M = A + tA_3$$

определяется тангенциальными координатами

$$\sigma = ((\beta - tr)\,A_1 - rA_2, AA_3)$$

Существует единственная точка на луче

$$t = \frac{\beta}{r}, \tag{7.21}$$

в которой эта плоскость совпадает с плоскостью AA_2A_3, т. е. с плоскостью, касательной к конусу с вершиной в точке A. Назовем эту точку **аффинным центром луча.** Совмещая точку A $(t=0)$ с аффинным центром, получим

$$\beta=0. \tag{7.22}$$

Таким образом, **аффинный центр — точка луча, в которой касательная плоскость основного цилиндроида совпадает с плоскостью, соответствующей этой точке в нормальной корреляции на луче.**

Чтобы определить положение ребер AA_1 и AA_2, найдем уравнение гиперболического параболоида, соприкасающегося с основным цилиндроидом. Примем во внимание, что при условии (7.22) дифференциальные уравнения основного цилиндроида имеют вид

$$\omega^1=0,\ \omega_3^2=0. \tag{7.23}$$

Исключение составляет случай одновременного обращения в нуль обоих параметров β и r.

Записывая уравнение поверхности 2-го порядка в виде

$$\Sigma MM=0,$$

мы найдем соприкасающийся параболоид из уравнений

$$\sum AA=0,\ \sum AA_3=0,\ \sum A_3A_3=0,$$

$$d\sum AA=0,\ d\sum AA_3=0,\ d\sum A_3A_3=0,\ (\mathrm{mod}\,\omega^1,\omega_3^2) \tag{7.24}$$

$$d^2\sum AA=0,\ d^2\sum AA_3=0,\ d^2\sum A_3A_3=0.$$

Выполняя дифференцирование, будем иметь

$$\sum AA=0,\ \sum AA_3=0,\ \sum A_3A_3=0,$$

$$\sum AA_2=0,\ \sum(A_2A_3+AA_1)=0,\ \sum A_1A_3=0, \tag{7.25}$$

$$\sum\left(A_2A_2+\frac{\omega^3-\omega_2^1}{\omega_3^1}A_2A_3\right)=0,\ \sum(pA_2A_3+2A_1A_2)=0,\ \sum A_1A_1=0.$$

Ограничиваясь пока рассмотрением лишь окрестности 2-го порядка, т. е. не продолжая равенств (7.18), мы рассмотрим лишь наложением на положение ребер AA_1 и AA_2 только условия, при котором коэффициент p обращается в нуль

$$p=0. \tag{7.26}$$

Это возможно лишь в случае

$$\Sigma A_1A_2=0,$$

т. е. равенством (7.26) на точки A и A_2 наложено условие полярной сопряженности относительно соприкасающегося параболоида. Поскольку точка A_1 всегда лежит на параболоиде, то условием (7.26) точка A_2 располагается в касательной плоскости к параболоиду, проведенной в точке A_1. Иными словами, точка A_1 помещается в точку касания параболоида с плоскостью $A_1A_2A_3$.

Ребро AA_1 становится полностью определенным. Его можно назвать **главной нормалью** комплекса в аффинном пространстве.

Равенства (7.18) принимают вид:

$$\begin{gathered}\omega_3^3+\omega_2^2-\omega_1^1=\alpha\omega_3^2,\\ -\omega^3-\omega_2^1=\alpha\omega_3^1+q\omega_3^2+\gamma\omega^1,\\ \omega_1^2=\gamma\omega_3^2+r\omega^1.\end{gathered} \tag{7.27}$$

Продолжим первое равенство

$$\begin{gathered}-d\alpha-\alpha(\omega_3^3-\omega_2^2)+\gamma(2\omega_2^1-\alpha\omega_3^1)=c_{11}\omega_3^2+c_{12}\omega_3^1+c_{13}\omega^1,\\ -2\omega_1^3+r\alpha\omega^1=c_{21}\omega_3^2+c_{22}\omega_3^1+c_{23}\omega^1,\\ 2r\omega_2^1=c_{31}\omega_3^2+c_{32}\omega_3^1+c_{33}\omega^1\end{gathered} \tag{7.28}$$

$(c_{ik}=c_{ki})$. Полагая $\omega^1=\omega_3^2=0$, найдем

$$\omega_2^1=\frac{1}{2r}c_{32}\omega_3^1,\ \omega^3=-\left(\alpha+\frac{1}{2r}c_{32}\right)\omega_3^1,\ r\neq 0.$$

Первое равенство в третьей строчке (7.25) запишется в виде

$$\sum\left(A_2A_2-\left(\alpha+\frac{c_{32}}{r}\right)A_2A_3\right)=0.$$

Центр соприкасающегося параболоида в тетраэдре AA_1A_2A определится равенствами

$$\xi^0=0,\ \xi^1=1,\ \xi^2=1,\ \xi^3=-\left(\alpha+\frac{c_{32}}{r}\right). \tag{7.29}$$

Мы видим, что этот центр всегда лежит на прямой A_2A_3. Поскольку положение точки на этой прямой остается неопределенным, то ничто не мешает совместить эту точку с центром (7.29):

$$\alpha+\frac{c_{23}}{r}=0.$$

Положение ребра AA_2 становится полностью определенным. Назовем это ребро **бинормалью** комплекса.

Представляет интерес исключенный случай

$$r=0.$$

Из (7.27) находим

$$\omega_1^2=\gamma\omega_3^2.$$

Если $\gamma=0$, то $\omega_1^2\equiv 0$. Точка A_1 описывает кривую, касательную к ребру A_1A_3. При $\gamma\neq 0$ равенства $\omega_1^2=0$ и $\omega_3^2=0$ становятся эквивалентными друг другу. Ребро A_1A_3 снова огибает кривую, однако точка прикосновения уже не совпадает с A_1. И в том и в другом случае основной цилиндроид становится неопределенным. Цилиндроидом становится всякая поверхность, принадлежащая конгруэнции $\omega_3^2=0$.

§ 2. Комплексы в биаксиальном пространстве с действительным абсолютом

1. Основные уравнения. Пусть l_1 и l_2 — базисные прямые биаксиального пространства. Ограничимся вначале рассмотрением случая, когда эти прямые действительны. Движениями в биаксиальном пространстве называются те коллинеации, которые переводят прямые l_1, l_2 в себя.

Выберем подвижной тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$ так, чтобы базисные прямые определялись плюккеровыми координатами:

$$l_1=[A_4, A_3+A_1],\ l_2=[A_3,\ A_4+A_2]. \qquad (7.*)$$

В таком случае из равенств

$$dl_1\equiv 0\,(\operatorname{mod} l_1),\ dl_2\equiv 0\,(\operatorname{mod} l_2) \qquad (7.30)$$

обеспечивающих инвариантность прямых, будут следовать уравнения структуры биаксиального пространства

$$\begin{gathered}\omega_1^1-\omega_3^3=\omega_1^3,\quad \omega_2^2-\omega_4^4=\omega_2^4,\\ \omega_3^2=-\omega_1^2,\ \omega_4^1=-\omega_2^1,\\ \omega_4^2=0,\ \omega_3^1=0,\\ \omega_4^3-\omega_4^1=0,\ \omega_3^4-\omega_3^2=0.\end{gathered} \qquad (7.31)$$

Эти уравнения следует присоединить к уравнениям (7.2).

Помещая вершины A_1, A_2 на текущий луч комплекса, выделяем главные формы

$$\omega_1^3,\ \omega_1^4,\ \omega_2^3,\ \omega_2^4$$

с линейным соотношением между ними:

$$\omega_1^3=a\omega_2^3+b\omega_1^4+k\omega_2^4. \qquad (7.32)$$

Дифференцируем это уравнение внешним образом

$$[\Delta a\omega_2^3]+[\Delta b\omega_1^4]+[\Delta k\omega_2^4]=0, \qquad (7.33)$$

где

$$\begin{gathered}\Delta a=da+a(\omega_2^2-\omega_1^1)+(-1+k+ab)\omega_1^2+a^2\omega_2^1\\ \Delta b=db+b(\omega_3^3-\omega_4^4)+(-1+k+ab)\omega_2^1+b^2\omega_1^2,\\ \Delta k=dk+k(\omega_3^3-\omega_1^1)+(k+1)(a\omega_2^1+b\omega_1^2).\end{gathered} \qquad (7.34)$$

Закрепим главные параметры

$$\begin{gathered}\delta a=-a(\pi_2^2-\pi_1^1)-(-1+k+ab)\pi_1^2-a^2\pi_2^1,\\ \delta b=-b(\pi_3^3-\pi_4^4)-(-1+k+ab)\pi_2^1-b^2\pi_1^2,\\ \delta k=-(k+1)(a\pi_2^1+b\pi_1^2).\end{gathered} \qquad (7.35)$$

2. Классификация комплексов. Возможны два случая:

1. $k\neq 1$. В этом случае путем выбора вторичных параметров, определяющих изменение форм π_1^2, π_2^1, можно привести коэффициенты a и b к нулю. В таком случае $\delta k=0$, т. е. k — инвариант.

Положение точек A_1, A_2 на луче вполне определено. Назовем эти точки **центрами** луча. Инварианту k присвоим название **кривизны** комплекса.

Равенства $a=b=0$ означают, что плоскости $A_1A_2A_3$ и $A_2A_1A_4$ соответствуют точкам A_1 и A_2 соответственно в нормальной корреляции на луче.

Центры могут быть геометрически охарактеризованы следующим образом.

Пусть $l=A_3A_4$ — какая-либо абсолютная прямая биаксиального пространства, т. е. прямая, пересекающая базисные прямые l_1 и l_2. Для определенности положим $A_3\in l_2$, $A_4\in l_1$. Плоскость (ll_1) пересекает луч комплекса в точке A_1, плоскость (ll_2) — в точке A_2. Тем самым выделяются две плоскости $A_1A_2A_3$ и $A_2A_1A_4$, которые в общем случае не соответствуют точкам A_1, A_2 в нормальной корреляции на луче.

Существует единственное положение абсолютной прямой l, для которого такое соответствие имеет место. Назовем прямую l, отвечающую этому положению, **осью** комплекса. Центры комплекса есть точки пересечения луча комплекса с плоскостями, соединяющими ось с базисными прямыми пространства.

Поскольку лучей комплекса — трехмерное многообразие, а абсолютных прямых — линейная конгруэнция, то каждой оси соответствует линейчатая поверхность, принадлежащая комплексу. Назовем эту поверхность **центральной** поверхностью комплекса.

Уравнения центральной поверхности

$$\omega_1^2 = 0, \ \omega_2^1 = 0 \tag{7.36}$$

получаются из условий

$$dA_3 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, A_3), \ dA_4 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, A_4) \tag{7.37}$$

при использовании уравнений структуры (7.31).

Разумеется, при этом плоскости $A_1A_3A_4$ и $A_2A_3A_4$ остаются неподвижными.

Прямая комплекса A_1A_2 вместе с парой базисных прямых биаксиального пространства определяет некоторую квадрику[1] Q, эти три прямые являются на последней тремя прямолинейными образующими одной и той же серии. Уравнение такой квадрики в сопровождающем репере имеет вид

$$\xi^1\xi^4 + \xi^2\xi^3 - \xi^3\xi^4 = 0. \tag{7.38}$$

Касательная плоскость к этой поверхности в точке $M = A_1 + tA_2$ задается уравнением

$$t\xi^3 + \xi^4 = 0. \tag{7.39}$$

В то же время плоскость, соответствующая точке M в нормальной корреляции, имеет уравнение

$$t\xi^3 + k\xi^4 = 0 \tag{7.40}$$

Точки $A_1(t=0)$ и $A_2(t=\infty)$ являются единственными точками луча, в которых плоскости (7.39) и (7.40) совпадают. Это дает новую геометрическую характеристику центров луча (припомним, что $k \neq 1$).

Плоскости (7.39) и (7.40) принадлежат пучку плоскостей, базисными плоскостями которого являются плоскости $\xi^4=0$ $(t=0)$ и $\xi^3=0$ $(t=\infty)$. Легко видеть, что сложное отношение, образуемое плоскостями (7.39) и (7.40) с базисными плоскостями $\xi^3=0$, $\xi^4=0$, равно кривизне комплекса k.

Назовем плоскости $A_1A_2A_3$ $(\xi^4=0)$ и $A_2A_1A_4$ $(\xi^3=0)$ **центральными** плоскостями.

Таким образом, **кривизна комплекса k есть сложное отношение, образуемое центральными плоскостями комплекса с двумя плоскостями, одна из которых соответствует произвольной точке луча в нормальной корреляции на этом луче, а другая касается в этой точке квадрики Q.**

[1] А. П. Норден называет эту квадрику сфероидом.

Лучи комплекса с двумя действительными центрами на каждом луче, назовем гиперболическими лучами комплекса.

2. $k=1$. Равенства (7.35) принимают в данном случае вид

$$\begin{aligned} \delta a &= -a(\pi_2^2 - \pi_1^1), \\ \delta b &= -b(\pi_1^1 - \pi_2^2), \\ a\pi_2^1 &+ b\pi_1^2 = 0 \end{aligned} \tag{7.41}$$

(мы учли при этом равенства $\pi_3^3 = \pi_1^1$, $\pi_4^4 = \pi_2^2$, которые следуют из (7.31).

Здесь также возможны различные случаи.

1°. $a \neq 0$, $b \neq 0$. В таком случае из (7.41) находим $\delta \ln ab = 0$, т. е. ab — инвариант. Возможны два случая.

а) $\delta \ln \frac{a}{b} = 2(\pi_1^1 - \pi_2^2)$, $ab > 0$ Нормированием координат вершин тетраэдра можно привести отношение $\frac{a}{b}$ к 1

$$a = b. \tag{7.42}$$

В таком случае

$$\pi_2^1 + \pi_1^2 = 0. \tag{7.43}$$

Положение вершин A_1, A_2 на луче не определено, однако между ними существует определенная зависимость.

Так как теперь $\delta a = 0$, то a есть инвариант. При этом

$$\omega_1^3 = a(\omega_2^3 + \omega_1^4) + \omega_2^4. \tag{7.44}$$

Связь между положением вершин A_1 и A_2 может быть охарактеризована следующим образом.

Плоскость, соответствующая точке

$$M = A_1 + tA_2$$

в нормальной корреляции, имеет тангенциальные координаты

$$\sigma = (at - 1)(A_1A_2A_3) + (a + t)(A_1A_2A_4).$$

Ее уравнение в сопровождающем тетраэдре есть

$$(a + t)\xi^3 - (at - 1)\xi^4 = 0. \tag{7.45}$$

В то же время мы имеем плоскость

$$t\xi^3 + \xi^4 = 0, \tag{7.46}$$

касающуюся квадрики Q в точке $\boldsymbol{M}$. Плоскости (7.45) и (7.46) совпадают в двух точках

$$t=\pm i,$$

т. е.

$$F_1=A_1+iA_2,\ F_2=A_1-iA_2. \tag{7.47}$$

Назовем эти точки по аналогии с предыдущим **центрами** луча. Отличие рассматриваемого случая от предыдущего заключается лишь в том, что прежде центры представляли собой действительные точки луча, с которыми мы имели возможность совместить вершины A_1 и A_2 тетраэдра. Теперь эти точки мнимы, а потому такого совмещения делать нельзя. Выбор вершин A_1, A_2 теперь осуществляется иначе (именно, как показывают равенства (7.47), вершины A_1 и A_2 всегда гармонически сопряжены относительно мнимых центров F_1 и F_2. Это и есть связь между положением вершин A_1, A_2.

Назовем лучи комплекса с двумя мнимыми сопряженными центрами эллиптическими лучами комплекса.

Пару мнимых центров можно использовать как пару циклических точек и с помощью них ввести эллиптическую метрику как на луче, так и в пучке плоскостей, проходящих через этот луч. Это, в частности, дает возможность геометрически истолковать инвариант a.

Действительно, возьмем для одной и той же точки $\boldsymbol{M}$ пару соответствующих ей плоскостей (7.45) и (7.46). Положим

$$\lambda=-\frac{a+t}{at-1}$$

и составим сложное отношение четырех плоскостей — двух плоскостей (7.45), (7.46) и двух центральных плоскостей

$$f_1=(A_1A_2A_3)+i(A_1A_2A_4),\ f_2=(A_1A_2A_3)-i(A_1A_2A_4); \tag{7.48}$$

$$W=(t,i,\lambda,-i)=\frac{i-t}{\lambda-i}:\frac{-i-t}{\lambda+i}=\frac{-(1+t\lambda)+i(\lambda-t)}{-(1+t\lambda)-i(\lambda-t)}=$$
$$=\frac{1-ia}{1+ia}.$$

Положим

$$a=tg\varphi. \tag{7.49}$$

Тогда

$$W=e^{-2i\varphi}.$$

Следовательно,

$$\varphi=\frac{i}{2}\ln W,$$

т. е. φ в эллиптической метрике, определяемой циклическими точками F_1, F_2 или, что то же самое, плоскостями f_1 и f_2, есть угол, образуемый плоскостями (7.45) и (7.46).

Таким образом, **инвариант a есть тангенс угла, образуемого в произвольной точке луча двумя плоскостями, из которых одна представляет собою плоскость, касательную в этой точке к квадрике Q, другая — соответствует этой точке в нормальной корреляции на луче.**

Если A_1 принята за вершину тетраэдра, то за координатную плоскость $A_1A_2A_3$ принимается плоскость, образующая с плоскостью, соответствующей в корреляции точке A_1, угол φ, определяемый равенством (7.49).

б) $\delta \ln\dfrac{a}{b}=2(\pi_1^1-\pi_2^2),\ ab<0.$

В этом случае нормированием координат вершин тетраэдра можно привести отношение $\dfrac{a}{b}$ к -1:

$$a=-b.$$

Положение вершин тетраэдра A_1, A_2 на луче также не определено, так как на формы π_1^2 и π_2^1 накладывается лишь одно условие

$$\pi_2^1-\pi_1^2=0.$$

Поскольку теперь $\delta a=0$, то a есть инвариант. Выясним его геометрический смысл.

В рассматриваемом случае плоскость Π, соответствующая точке $M=A_1+tA_2$ в нормальной корреляции на луче, будет определяться уравнением

$$(a+t)\xi^3+(at+1)\xi^4=0. \tag{7.a}$$

Эта плоскость совпадает с плоскостью (7.46), касающейся в точке $\boldsymbol{M}$ квадрики Q, в двух точках:

$$t=\pm 1,$$

т. е.

$$F_1=A_1+A_2,\ F_2=A_1-A_2.$$

Эти точки являются центрами луча. В рассматриваемом случае они действительны. Отличие этого случая от случая 1 состоит лишь в том, что прежде мы вершины A_1 и A_2 совместили с самими центрами луча, теперь же мы совместили их с некоторой парой точек (произвольной), гармонически разделяющей центры

В данном случае центральные плоскости определяются уравнениями

$$(a+1)\xi^3+(a+1)\xi^4=0$$
$$(a-1)\xi^3-(a-1)\xi^4=0.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $a\neq\pm 1$. В этом случае центральные плоскости определяются уравнениями

$$\xi^3+\xi^4=0,\ \xi^3-\xi^4=0.$$

Помня определение кривизны k, найдем сложное отношение, которое образуют эти плоскости с плоскостями (7.39) и (7.a):

$$W=k=(t,1,\lambda,-1)=\frac{1-t}{\lambda-1}:\frac{-1-t}{\lambda+1}=\frac{1-t+\lambda-\lambda t}{1+t-\lambda(1+t)}=$$

$$=\frac{1+a}{1-a}$$

$$\left(\lambda=\frac{a+t}{at+1}\right).$$

Такова связь между кривизной комплекса k и инвариантом a.

Если $k>0$, то можно положить

$$k=e^{+2\varphi}.$$

Тогда

$$a=th\varphi.$$

Если $k<0$, то, полагая

$$k=-e^{+2\varphi},$$

получим

$$a=Cth\varphi.$$

Если принять действительные центры за базисные точки псевдоевклидовой метрики на прямой, то

$$\varphi=\frac{1}{2}\ln k$$

есть угол между плоскостями (7.39) и (7.a) в гиперболической метрике, которая этими точками определяется на прямой.

Примечание: Здесь буквой k обозначена кривизна комплекса в тетраэдре, соответствующем значениям $a=b=0$.

Мы можем сказать, следовательно, что если центры луча на прямой мнимы, то инвариант a есть тригонометрический тангенс угла между плоскостями (7.39) и (7.a) в эллиптической метрике, определяемой этими центрами.

Если центры действительны, то φ есть угол в соответствующей гиперболической метрике, а инвариант a — гиперболический тангенс этого угла.

Обратимся теперь к исключенному случаю $a=\pm 1$. Пусть, для примера, $a=-1$. В этом случае

$$\omega_1^3=-\omega_2^3+\omega_1^4+\omega_2^4,$$

и, следовательно,

$$dF_1=(\omega_1^1+\omega_2^1)A_1+(\omega_1^2+\omega_2^2)A_2+(\omega_1^4+\omega_2^4)(A_3+A_4).$$

Это означает, что центр F_1 описывает поверхность Σ, касательную к плоскости

$$(A_1, A_2, A_3+A_4).$$

Наоборот, пусть центр F_1 описывает поверхность. Мы имеем уже две нормировки координат вершин тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$, в результате которых базисные прямые представлены плюккеровыми координатами (7.*). Не противореча истине, можно предположить, что такая нормировка произведена над координатами вершин A_1 и A_4. В таком случае путем нормировки координат вершины A_2 можно привести координаты фокуса F_1 к виду A_1+A_2. Равным образом путем нормировки координат вершины A_3 можно привести к виду A_3+A_4 координаты точки, в которой касательная плоскость поверхности, описываемой центром F_1, пересекает ребро A_3A_4. Но тогда

$$\omega_1^3+\omega_2^3=\omega_1^4+\omega_2^4.$$

Следовательно, $a=-1$, $b=1$, $k=1$.

Таким образом, рассматриваемый комплекс есть специальный комплекс, базисная поверхность которого описана центром луча F_1.

У такого комплекса плоскость, соответствующая точке M в нормальной корреляции на луче, имеет уравнение

$$-1+t)\xi^3+(1-t)\xi^4=0. \qquad (7.\ в)$$

Для всякой точки M, отличной от центра F_1, эта плоскость совпадает с плоскостью, касательной к Σ,

$$\xi^3-\xi^4=0. \qquad (7.\ c)$$

Эта плоскость, как и следовало ожидать, пересекает ребро A_3A_4 в точке A_3+A_4. Чтобы получить такую плоскость надо через точку M провести конус лучей комплекса, касающихся поверхности Σ. Линия прикосновения l проходит через точку F_1. Плоскость, соответствующая точке M в нормальной корреляции, определяется ребром A_1A_2 и касательной к l. Это есть касательная плоскость поверхности.

Если такое построение применить к центру F_1, то линия l вырождается в точку (совпадающую с точкой F_1). Касательная к ней становится произвольной прямой связки, имеющей центр в точке F_1, а потому плоскость, соответствующая в нормальной корреляции точке F_1 оказывается неопределенной. Это и сказывается на уравнении (7.в), которое при подстановке в него координаты центра $F_1(t=1)$ становится тождеством.

Если воспользоваться определением центра, в соответствии с которым плоскость, соответствующая ему в нормальной корреляции, совпадает с плоскостью, касательной к поверхности Q, то мы должны приписать точке F_1 плоскость

$$\xi^3+\xi^4=0.$$

Эта плоскость пересекает ребро A_3A_4 в точке A_3-A_4, гармонически сопряженной с точкой A_3+A_4 относительно вершин A_3, A_4. Эта плоскость никогда не совпадает с плоскостью (7.с), касательной к поверхности Σ.

Комплексы $a=1$ имеют точно такое же строение, как и комплексы $a=-1$, однако у них базисную поверхность описывает уже не точка A_1, а точка A_2. Переменив обозначения, мы придем к только что рассмотренному случаю.

Отметим, что как и в евклидовом пространстве базисная поверхность специального комплекса может описываться только центром луча. Следовательно, название «центры», которое мы дали точкам F_1 и F_2, является оправданным. Отличие заключается лишь в том, что в евклидовом пространстве центр один и всегда действительный, в биаксиальном же пространстве центров два, которые могут быть, как мы видели, действительными различными, мнимыми или, как увидим ниже, совпадающими.

3. Параболические комплексы.

2^0. Остановимся теперь на комплексах с совпадающими центрами. Лучи с совпадающими центрами назовем параболическими лучами, а комплексы, состоящие из параболических лучей,— параболическими комплексами.

Считая, что дифференциальная окрестность первого порядка определяется уравнением (7.32), мы найдем для точки M плоскость, соответствующую ей в нормальной корреляции

$$(a+t)\,\xi^3+(k-bt)\,\xi^4=0. \tag{7.50}$$

Центры луча есть точки, в которых эта плоскость совпадает с плоскостью (7.46). Такие точки определяются квадратным уравнением

$$bt^2+(1-k)\,t+a=0. \tag{7.51}$$

Это уравнение тождественно исчезает лишь для линейного комплекса, что будет доказано ниже.

Уравнение (7.51) имеет кратные корни в случае

$$(1-k)^2-4ab=0. \tag{7.52}$$

Если совместим плоскость $A_1A_2A_3$ с плоскостью, соответствующей точке A_1 в нормальной корреляции, то, как легко сообразить, $a=0$. В таком случае из (7.52) находим $k=1$. Кратный центр совпадает с точкой A_1 $(b\neq 0)$.

Из (7.35) находим

$$\pi_1^2=0,\ \delta b=-b\,(\pi_1^1-\pi_2^2).$$

Нормированием координат вершин тетраэдра можно привести b к 1. Тогда

$$\omega_1^3=\omega_1^4+\omega_2^4. \tag{7.53}$$

Продолжение этого равенства:

$$\omega_3^3-\omega_4^4+\omega_1^2=\alpha\omega_1^4+\beta\omega_2^4, \tag{7.54}$$

$$\omega_3^3-\omega_1^1+2\omega_1^2=\beta\omega_1^4+\gamma\omega_2^4.$$

Класс комплексов имеет произвол в одну функцию двух аргументов.

Так как

$$dA_1=\omega_1^1A_1+\omega_1^4\left(A_4+\frac{\beta+1}{2}A_2+A_3\right)+\omega_2^4\left(A_3+\frac{\gamma+1}{2}A_2\right),$$

то точка A_1 (двойной центр) описывает поверхность.

Найдем инфлекционные центры луча. Плоскость Π, соответствующая точке $M=A_1+tA_2$ в нормальной корреляции на луче, определяется тангенциальными координатами

$$\Pi=(1-t)(A_1A_2A_3)-t\,(A_1A_2A_4).$$

Плоскость остается на месте, если

$$(1-t)\,\omega_1^4+t\omega_1^3=0,\ (1-t)\,\omega_2^4+t\omega_2^3=0,$$

$$dt-t\,(1-t)\,(\omega_3^3-\omega_4^4)+t^2\omega_4^3-(1-t)^2\omega_3^4=0. \tag{7.55}$$

В то же время условия неподвижности точки M имеют вид

$$\omega_1^3 + t\omega_2^3 = 0,\ \omega_1^4 + t\omega_2^4 = 0,$$

$$dt + t(\omega_2^2 - \omega_1^1) + \omega_1^2 - t^2\omega_2^1 = 0. \qquad (7.56)$$

Принимая во внимание (7.53), легко показать, что первые два равенства системы (7.55), эквивалентны первым двум равенствам системы (7.56), которые перепишем в виде:

$$\omega_2^3 = -\frac{1-t}{t}\omega_2^4,\ \omega_1^4 = -t\omega_2^4. \qquad (7.57)$$

Что касается третьих равенств этих систем, то, вычитая одно из другого, придем к соотношению, не содержащему dt

$$t(\omega_2^2 - \omega_1^1, + \omega_1^2 - t^2\omega_2^1 + t(1-t)(\omega_3^3 - \omega_4^4) - t^2\omega_4^3 + (1-t)^2\omega_3^4 = 0. \qquad (7.58)$$

Из (7.81), (7.53) и (7.54), (7.57), находим

$$t(\alpha t^2 - 2\beta t + \gamma + 1) = 0. \qquad (7.59)$$

Получили кубическое уравнение; однако не следует думать, что, в отличие от общей проективной теории, в данном случае мы имеем лишь три инфлекционных центра на луче. Здесь мы также имеем четверку центров, однако один из них следует, очевидно, считать двойным. Выясним, какой именно.

В левой части уравнения (7.58) в силу (7.54) отсутствуют члены, содержащие ω_2^3. Если бы мы имели общий комплекс, то такие члены из этой части не исчезали. Пусть A — коэффициент при них.

В таком случае, вместо уравнения (7.59) мы бы имели

$$-A\frac{1-t}{t} + t(\alpha t^2 - 2\beta t + \gamma + 1) = 0.$$

Приводя уравнение к общему знаменателю, получим

$$-A(1-t) + t^2(\alpha t^2 - 2\beta t + \gamma + 1) = 0.$$

Это уравнение 4 степени; следовательно, как и следовало ожидать, комплекс имеет четыре инфлекционных центра. Если теперь положить в уравнении $A=0$, то мы возвращаемся к случаю двойного центра, однако уравнение, определяющее инфлекционные центры на луче, примет теперь вид

$$t^2(\alpha t^2 - 2\beta t + \gamma + 1 = 0.$$

Это — уравнение 4 степени. Двойной центр $A_1(t=0)$ совпадает с двойным инфлекционным центром.

Таким образом, параболический комплекс содержит на каждом луче двойной инфлекционный центр, являющийся одновременно двойным центром луча.

Вспомним, что класс всех комплексов с двойным инфлекционным центром определяется с произволом в две функции двух аргументов. В то же время класс комплексов (7.53) имеет произвол в одну функцию аргументов. Следовательно, комплексы (7.53) составляют лишь частный случай комплексов с двойным инфлекционным центром.

Легко представить себе свойство, выделяющее параболические комплексы из класса всех комплексов C_2 (комплексов с двойными инфлекционными центрами).

Как известно, чтобы построить комплекс C_2, следует взять произвольную непараболическую конгруэнцию и через каждую точку одной из ее фокальных поверхностей в фокальной плоскости, не касающейся этой поверхности, провести пучок прямых. Иными словами, для задания комплекса C_2 следует взять две произвольные поверхности и, приняв их за фокальные поверхности некоторой конгруэнции, произвести указанные выше построения.

Возьмем теперь какой-нибудь параболический комплекс. Если Σ_1 — поверхность, описанная двойным центром A_1 этого комплекса, то можно сразу усмотреть, что конгруэнция K, фокальной поверхностью которой является Σ_1, не может быть совершенно произвольной. Действительно, как только мы берем точку A_1 поверхности Σ_1, немедленно получаем прямую A_1A_3, проходящую через эту точку и пересекающую две базисные прямые. Плоскость $A_1A_2A_3$ в которой располагается пучок прямых комплекса (с вершиной в точке A_1) необходимо проходит через прямую A_1A_3. Плоскость $A_1A_2A_3$ является фокальной плоскостью конгруэнции K. Эта плоскость является соприкасающейся плоскостью фокальной кривой, расположенной на Σ_1 и проходящей через A_3. Если принять прямую A_1A_3 за проективную нормаль поверхности Σ_1, то указанную фокальную кривую следует считать проективной геодезической.

Таким образом, фокальные кривые поверхности Σ_1 состоят из проективных геодезических при условии, что проективными нормалями являются прямые абсолютной линейной конгруэнции (т. е. прямые, пересекающие две базисные прямые).

Совокупность проективных геодезических при заданной конгруэнции нормалей зависит от двух произвольных постоянных. Из них с произволом в одну функцию одного аргумента можно выделить однопараметрическое семейство. С таким произволом при заданной поверхности Σ_1 существует конгруэнция K, а потому и порождаемый ею параболический комплекс.

Это может быть подтверждено аналитическими выкладками. Действительно, принимая базисные прямые l_1 и l_2 за прямые

$$[A_4, A_3+A_1],\ [A_3 A_4+A_2],$$

соответственно получим уравнения (7.31). Если вершины A_1, A_2 поместить на луч искомого комплекса, то $\omega_1^3, \omega_1^4, \omega_2^3, \omega_2^4$ — главные формы и

$$\omega_1^3 = a\omega_2^3 + b\omega_1^4 + k\omega_2^4 \tag{7.60}$$

фундаментальное соотношение между ними.

Выберем произвольную поверхность Σ_1 и пусть A_1 — точка луча, лежащая на ней. В плоскости, проходящей через A_1A_3 проведем пучок прямых с центром A_1. Тогда A_1 — необходимо инфлекционный центр получаемого таким образом комплекса. Плоскость $A_1A_2A_3$ соответствует точке A_1 в нормальной корреляции на луче, а потому

$$a=0.$$

Нормированием координат вершин, что не противоречит (7.31), приводим b к 1

$$b=1.$$

В таком случае

$$\omega_1^3 = \omega_1^4 + k\omega_2^4. \tag{7.61}$$

Из

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3 + \omega_1^4 A_4,$$

учитывая, что A_1 описывает поверхность, находим

$$\omega_1^2 = \frac{\beta+1}{2}\omega_1^4 + \frac{\gamma+1}{2}\omega_2^4, \tag{7.62}$$

где β и γ — некоторые коэффициенты. Заметим, что если точка A_1 остается на месте, то плоскость $A_1A_2A_3$ необходимо также остается на месте (см. (7.31)).

Это можно сформулировать следующим образом:

Плоскость, соответствующая точке A_1 в нормальной корреляции, пересекает базисные прямые в двух точках, в общем случае не колинеарных с точкой A_1. Если такая колинеарность имеет место, то A_1 — центр луча. Если этот центр описывает поверхность, то он необходимо инфлекционный центр.

Касательная плоскость к поверхности Σ_1 определяется точками

$$A_1,\ A_4 + \frac{\beta+1}{2}A_2 + A_3,\quad kA_3 + \frac{\gamma+1}{2}A_2.$$

Линия ее пересечения с плоскостью $A_1A_2A_3$ (луч конгруэнции K) есть

$$l = \left[A_1,\ kA_3 + \frac{\gamma+1}{2}A_2\right].$$

На поверхности эта линия соответствует смещению

$$\omega_1^4 = 0. \tag{7.63}$$

Продифференцируем в этом направлении координаты точки

$$P = kA_3 + \frac{\gamma+1}{2}A_2:$$

$$dP \equiv \ldots + \left(k\omega_3^4 + \frac{\gamma+1}{2}\omega_2^4\right)A_4 \pmod{\omega_1^4}$$

(точками обозначены члены, содержащие A_1, A_2, A_3.) Так как плоскость $A_1A_2A_3$ должна быть соприкасающейся плоскостью фокальной кривой (7.63), то коэффициент при A_4 в последнем равенстве должен обращаться в нуль. Но в таком случае

$$k=1.$$

Это и доказывает утверждение.

Таким образом, чтобы построить произвольный параболический комплекс, следует на произвольной поверхности Σ_1 взять какое-нибудь однопараметрическое семейство проективных геодезических, соответствующих прямым абсолютной линейной конгруэнции, и образовать конгруэнцию K касательных к этим кривым. В фокальной плоскости этой конгруэнции, не касающейся Σ_1, через точку A_1 следует провести пучок прямых. Искомый комплекс есть двупараметрическая совокупность таких пучков.

4. Линейный комплекс. 3^0. Рассмотрим, наконец, случай

$$a=b=0.$$

Теперь

$$\omega_1^3 = \omega_2^4. \tag{7.64}$$

Это уравнение вполне интегрируемо. Точке $M = A_1 + tA_2$ в нормальной корреляции соответствует плоскость

$$\Pi = (A_1A_2A_3) - t(A_1A_2A_4).$$

Условие неподвижности точки M

$$\omega_1^3 + t\omega_2^3 = 0,\ \omega_1^4 + t\omega_2^4 = 0,$$

$$dt + t(\omega_2^2 - \omega_1^1) + \omega_1^2 - t^2\omega_2^1 = 0$$

и плоскости Π

$$\omega_1^3 + t\omega_2^3 = 0, \quad \omega_1^4 + t\omega_2^4 = 0,$$

$$dt + t(\omega_3^3 - \omega_4^4) - \omega_3^4 + t^2\omega_4^3 = 0$$

эквивалентны друг другу. Каждая точка луча — инфлекционный центр. Комплекс — линейный.

§ 3. Комплексы в биаксиальном пространстве с мнимым абсолютом

Предыдущие рассуждения потеряют свою силу, если в качестве абсолюта биаксиального пространства взять пару мнимых сопряженных прямых. В этом случае целесообразно задать базисные прямые с помощью плюккеровых координат

$$l_1 = [A_1 + iA_3,\ A_2 + iA_4],\ l_2 = [A_1 - iA_3,\ A_2 - iA_4]. \quad (7.65)$$

Тем самым координаты вершин тетраэдра оказываются определенным образом проиормированными два раза.

Из условия неподвижности базисных прямых

$$dl_1 \equiv 0\ (\mathrm{mod}\, l_1),\ dl_2 \equiv 0\ (\mathrm{mod}\, l_2)$$

находим уравнения структуры рассматриваемого биаксиального пространства

$$\begin{gathered}\omega_2^1 - \omega_4^3 = 0,\ \omega_1^2 - \omega_3^4 = 0,\\ \omega_4^1 + \omega_2^3 = 0,\ \omega_3^2 + \omega_1^4 = 0,\\ \omega_2^4 + \omega_4^2 = 0,\ \omega_1^3 + \omega_3^1 = 0,\\ \omega_2^2 - \omega_4^4 = 0,\ \omega_1^1 - \omega_3^3 = 0.\end{gathered} \quad (7.66)$$

Помещая вершины A_1, A_2 на луч комплекса, имеем главные формы $\omega_1^3, \omega_1^4, \omega_2^3, \omega_2^4$ с фундаментальным соотношением между ними

$$\omega_1^3 = a\omega_2^3 + b\omega_1^4 + k\omega_2^4. \quad (7.67)$$

Дифференцируем его внешним образом

$$[\Delta a, \omega_2^3] + [\Delta b, \omega_1^4] + [\Delta k, \omega_2^4] = 0, \quad (7.68)$$

где

$$\Delta a = -da + a(\omega_1^1 - \omega_2^2) + (1 + k + ab)\,\omega_2^1 - a^2\omega_2^1,$$

$$\Delta b = -db + b(\omega_2^2 - \omega_1^1) - (1 + k + ab)\,\omega_2^1 + b^2\omega_1^2,$$

$$\Delta k = -dk + (1 - k)(a\omega_2^1 - b\omega_1^2).$$

Имеем вариацию коэффициентов a, b, k

$$\begin{gathered}\delta a = a(\pi_1^1 - \pi_2^2) + (1 + k + ab)\,\pi_1^2 - a^2\pi_2^1,\\ \delta b = b(\pi_2^2 - \pi_1^1) - (1 + k + ab)\,\pi_2^1 + b^2\pi_1^2,\\ \delta k = (1 - k)(a\pi_2^1 - b\pi_1^2).\end{gathered} \quad (7.69)$$

Возможны следующие случаи

1. $k \neq -1$. В этом случае выбором вторичных параметров можно привести коэффициенты a и b к нулю:

$$a = b = 0.$$

Тогда k — инвариант. Назовем его **кривизной** комплекса. Плоскость $A_1A_2A_3$ соответствует точке A_1, плоскость $A_1A_2A_4$ — точке A_2 в нормальной корреляции. Точки A_1 и A_2 фиксированы. Назовем их **центрами** луча. В рассматриваемом случае центры действительны.

2. $k = -1$. 1° $a \neq 0$, $b \neq 0$ — центры мнимы
2° $a = 0$, $b \neq 0$ — центры совпадают
3° $a = 0$, $b = 0$ — комплекс линейный.

Никакого принципиального отличия от случая биаксимального пространства с действительным абсолютом мы не имеем.

В пространстве с действительным абсолютом мы могли бы расположить вершины подвижного тетраэдра подобно тому, как это сделано для пространства с мнимым абсолютом, т. е. положить

$$l_1 = [A_1 + A_3,\ A_2 + A_4],\ l_2 = [A_1 - A_3,\ A_2 - A_4].$$

Уравнения структуры в этом случае имели бы вид

$$\begin{gathered}\omega_2^1 - \omega_4^3 = 0,\ \omega_1^2 - \omega_3^4 = 0,\\ \omega_4^1 - \omega_2^3 = 0,\ \omega_3^2 - \omega_1^4 = 0,\\ \omega_2^4 - \omega_4^2 = 0,\ \omega_1^3 - \omega_3^1 = 0,\\ \omega_2^2 - \omega_4^4 = 0,\ \omega_1^1 - \omega_3^3 = 0\end{gathered} \quad (7.70$$

В этом случае вариации коэффициентов a, b, k в уравнении комплекса (7.67) совпадают с вариациями (7.69), и мы имели бы для гиперболического комплекса[1] $k \neq -1$, для эллиптического, параболического и линейного $k = -1$.

[1] Речь идет о комплексах с гиперболическими, эллиптическими или параболическими лучами.

При том расположении вершин тетраэдра, при котором осуществляются уравнения (7.66) или (7.70), ребро A_3A_4 наравне с ребром A_1A_2 описывает комплекс. Главными формами движения сопровождающего тетраэдра такого комплекса являются формы

$$\omega_3^1,\ \omega_3^2,\ \omega_4^1,\ \omega_4^2.$$

Если вершины A_1, A_2 комплекса A_1A_2 поместить в его центры, то

$$\omega_1^3 = k\omega_2^4.$$

Принимая во внимание уравнения (7.66) и (7.70), заключим, что для комплекса A_3A_4 как в гиперболическом, так и в эллиптическом пространстве[1] будет выполнено равенство

$$\omega_3^1 = k\omega_4^2.$$

Это означает, что вершины A_3, A_4 такого комплекса помещены в его центры. При этом у обоих комплексов кривизна k оказывается одной и той же. Более того, в гиперболическом биаксиальном пространстве, как показывают уравнения (7.70), комплексы A_1A_2, A_3A_4 эквивалентны друг другу, т. е. с помощью подходящего преобразования биаксиальной группы могут быть переведены друг в друга. Для эллиптического пространства такое отображение меняет соответствующим образом определяемую ориентацию комплекса.

§ 4. Комплексы в биаксиальном пространстве со сдвоенным абсолютом (биаксиальное пространство параболического типа)

Совместим с осью биаксиального пространства (со сдвоенным абсолютом) ребро A_3A_4 подвижного тетраэдра. В таком случае условия неподвижности этой оси будут иметь вид

$$\omega_3^1 = 0,\ \omega_3^2 = 0,\ \omega_4^1 = 0,\ \omega_4^2 = 0. \tag{7.71}$$

Пусть

$$M = A_3 + tA_4$$

произвольная точка оси и Π — соответствующая ей плоскость в абсолютной корреляции на оси. Плоскость Π пересекает ребро A_1A_2 в точке

$$M' = A_1 + \lambda A_2,$$

[1] Речь идет о биаксиальном пространстве с действительным или мнимым абсолютом.

где

$$\lambda = \frac{at+b}{ct+d}\,(ad - bc \neq 0).$$

Условимся выбирать вершины A_1, A_2 на ребре A_1A_2 так, чтобы точке A_3 $(t=0)$ соответствовала точка $A_1(\lambda=0)$, а точке $A_4(t=\infty)$ — точка $A_2(\lambda=\infty.)$ В таком случае

$$b=0,\ c=0;$$

следовательно,

$$M' = A_1 + t\frac{a}{d}A_2.$$

Пронормируем координаты точки A_2 так, чтобы последнее равенство приняло вид

$$M' = A_1 = tA_2.$$

В таком случае плоскость Π будет иметь следующие тангенциальные координаты

$$\Pi = (A_3A_4A_1) + t\,(A_3A_4A_2).$$

Движения биаксиального пространства есть такие колинеации проективного пространства, которые переводят в себя абсолютную корреляцию.

Мы имеем

$$M^* = M + dM = (1 + \omega_3^3 + t\omega_4^3)\,A_3 + (t + dt + \omega_3^4 + t\omega_4^4)\,A_4,$$

$$\Pi^* = \Pi + d\Pi = (1 + \omega_3^3 + \omega_4^4 + \omega_1^1 + t\omega_2^1)\,(A_3A_4A_1) +$$
$$+ (t + dt + t\,(\omega_3^3 + \omega_4^4 + \omega_2^2) + \omega_1^2)\,(A_3A_4A_2).$$

Плоскость Π^* будет соответствовать точке M^* в абсолютной корреляции, если

$$\frac{t + dt + \omega_3^4 + t\omega_4^4}{1 + \omega_3^3 + t\omega_4^3} = \frac{t + dt + t(\omega_3^3 + \omega_4^4 + \omega_2^2) + \omega_1^2}{1 + \omega_3^3 + \omega_4^4 + \omega_1^1 + t\omega_2^1}.$$

Выполняя умножение и отбрасывая члены высших порядков, получим

$$t^2(\omega_2^1 - \omega_4^3) - t\,(\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4) - (\omega_1^2 - \omega_3^4) = 0.$$

Это равенство должно быть выполнено при любом значении t; следовательно,

$$\omega_2^1 - \omega_4^3 = 0,$$
$$\omega_1^2 - \omega_3^4 = 0, \qquad (7.72)$$
$$\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = 0.$$

Вместе с (7.71) эти уравнения являются уравнениями структуры рассматриваемого пространства.

Поступая как обычно, записываем дифференциальное уравнение комплекса

$$\omega_1^3 = a\omega_2^3 + b\omega_1^4 + k\omega_2^4. \qquad (7.73)$$

Отсюда находим вариацию коэффициентов a, b, k:

$$\delta a = a(\pi_1^1 - \pi_2^2) + (1 + k + ab)\pi_1^2 - a^2\pi_2^1,$$
$$\delta b = b(\pi_2^2 - \pi_1^1) - (1 + k + ab)\pi_2^1 + b^2\pi_1^2, \qquad (7.74)$$
$$\delta k = (1 - k)(a\pi_2^1 - b\pi_1^2).$$

В случае $k \neq -1$ приводим a и b к нулю. Плоскости $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$ будут соответствовать вершинам A_1, A_2 в нормальной корреляции на луче комплекса. Положение точек A_1, A_2 становится фиксированным. Назовем эти точки **центрами** луча. В рассматриваемом случае центры действительны.

Чтобы геометрически характеризовать центры луча, рассмотрим пока уравнение (7.73) в общем виде.

Точке

$$M = A_3 + tA_4$$

на оси в абсолютной корреляции соответствует плоскость, пересекающая ребро A_1A_2 в точке

$$M' = A_1 + tA_2.$$

В то же время точке M' в нормальной корреляции на луче комплекса соответствует плоскость

$$\Pi = (bt - k)(A_1A_2A_3) + (a + t)(A_1A_2A_4).$$

Эта плоскость пересекает ось в точке

$$\overline{M} = A_3 + \frac{a + t}{bt - k}A_4.$$

Точка $\overline{M}$ совпадает с M, если

$$\frac{a + t}{bt - k} = t,$$

т. е.

$$bt^2 - (k+1)t - a = 0. \qquad (7.75)$$

Это квадратное уравнение на луче A_1A_2 определяет центры луча. Если центры мнимы, то совмещение с ними вершин A_1, A_2 невозможно.

В этом случае коэффициенты a, b, k могут быть приведены к виду

$$a = b,\ k = -1.$$

Если центры совпадают, то можно добиться равенств

$$a = 0,\ b = 1,\ k = -1.$$

Комплекс зависит от одной функции двух аргументов. Чтобы построить такой комплекс, следует взять произвольную поверхность Σ_1, через точку A_1 ее провести «нормаль» A_1A_3, т. е. прямую, проходящую через точку A_3, соответствующую в абсолютной корреляции на оси плоскости $A_3A_4A_1$ и для этой «нормали» построить двупараметрическое семейство «геодезических».

Взяв произвольное однопараметрическое семейство таких «геодезических» в качестве семейства фокальных кривых конгруэнции K, в соприкасающихся плоскостях таких кривых проведем пучки прямых с центрами в точках A_1.

§ 5. Комплексы в эллиптическом пространстве

Остановимся на эллиптическом пространстве несколько более обстоятельно, чем это было сделано в предыдущих случаях.

Примем за эллиптическое пространство трехмерное проективное пространство с абсолютом в виде невырожденной мнимой поверхности второго порядка. При исследовании свойств комплекса ограничимся лишь первой дифференциальной окрестностью его луча.

1. Уравнения структуры. Будем брать в качестве сопровождающего тетраэдра любого многообразия в эллиптическом пространстве тетраэдр $T(A_1A_2A_3A_4)$, автополярный относительно абсолюта. Нормируем, кроме того, координаты вершин A_k так, чтобы точки пересечения любого ребра A_kA_l с абсолютом имели координаты $A_k \pm iA_l$ $(i = \sqrt{-1})$. В таком случае уравнение абсолюта относительно любого сопровождающего тетраэдра будет иметь вид

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 0. \qquad (7.76)$$

Возьмем репер $T'(A_{1'}A_{2'}A_{3'}A_{4'})$, бесконечно близкий к реперу T. Следовательно, координатами вершин нового репера относительно старого будут

$$A_{i'}(\delta_i^1+\omega_i^1,\ \delta_i^2+\omega_i^2,\ \delta_i^3+\omega_i^3,\ \delta_i^4+\omega_i^4).$$

Эти координаты есть коэффициенты проективного преобразования, переводящего первый репер во второй. Следовательно, формулы такого преобразования имеют вид

$$\rho x^{i'} = x^i + \omega_k^i x^k \tag{7.77}$$

(ρ — множитель пропорциональности). В эллиптическом пространстве это преобразование должно переводить абсолют (7.76) в себя; следовательно, уравнение (7.76) перейдет в уравнение

$$(x^{1'})^2 + (x^{2'})^2 + (x^{3'})^2 + (x^{4'})^2 = 0. \tag{7.78}$$

Внесем (7.77) в (7.78) и сократим уравнение на ρ^2. Отбрасывая члены, содержащие квадраты форм ω_i^l, будем иметь следующее

$$\sum_{i=1}^{4}[(1+2\omega_i^i)(x^i)^2 + 2x^ix^l\omega_i^l] = 0 \tag{7.79}$$

(внутри квадратных скобок по индексу i не суммировать). Требуя, чтобы уравнение (7.79) совпадало с уравнением (7.76), получим:

$$1+2\omega_i^i = 1+2\omega_l^l,\ \omega_i^l + \omega_l^i = 0,\ \ (i \neq l)$$

или

$$\omega_i^i = \omega_l^l,\ \omega_i^l = -\omega_l^i\ \ (i\neq l). \tag{7.80}$$

Таковы дополнительные условия, накладываемые на формы ω_i^l группой эллиптических преобразований. Легко проверить, что уравнения (7.80) с формами ω_i^l, подчиненными уравнениям структуры, образуют вполне интегрируемую систему. Следовательно, уравнения (7.2) и (7.80) образуют полную систему уравнений, определяющих инфинитезимальное смещение репера в эллиптическом пространстве.

2. К а н о н и ч е с к и й р е п е р к о м п л е к с а. Совмещая вершины A_1, A_2 тетраэдра с какими-либо двумя точками луча комплекса, будем иметь главные формы смещения тетраэдра ω_1^3, ω_2^3, ω_1^4, ω_2^4. Линейному соотношению между ними придадим вид

$$\omega_1^3 = a\omega_1^4 + b\omega_2^3 + k\omega_2^4. \tag{7.78}$$

Отсюда находим внешним дифференцированием

$$[\Delta b, \omega_2^3] + [\Delta a, \omega_1^4] + [\Delta k, \omega_2^4] = 0, \tag{7.79}$$

где

$$\Delta b = -db + (1+b^2)\omega_1^2 + (k+ab)\omega_3^4,$$
$$\Delta a = -da + (k+ab)\omega_1^2 + (1+a^2)\omega_3^4, \tag{7.80}$$
$$\Delta k = -dk + (bk-a)\omega_1^2 + (ak-b)\omega_3^4.$$

Следовательно, вариация коэффициентов a, b, k определяется равенствами

$$\delta b = (1+b^2)\pi_1^2 + (k+ab)\pi_3^4,$$
$$\delta a = (k+ab)\pi_1^2 + (1+a^2)\pi_3^4,$$
$$\delta k = (bk-a)\pi_1^2 + (ak-b)\pi_3^4.$$

Накладывая на вторичные формы π_1^2, π_3^4 два условия

$$\pi_1^2 + k\pi_3^4 = 0,$$
$$k\pi_1^2 + \pi_3^4 = 0, \tag{7.81}$$

приведем к нулю коэффициенты a и b. (При $k=\pm 1$ такое одновременное уравнение не всегда возможно). В этом случае $\delta k=0$, а это означает, что коэффициент k — инвариант. Назовем его **кривизной** комплекса.

Равенство (7.78) принимает вид

$$\omega_1^3 = k\omega_2^4. \tag{7.82}$$

Определитель системы (7.81) равен

$$\Delta = 1-k^2.$$

Возможны два случая.

1. $\Delta\neq 0$, т. е. $k\neq\pm 1$. В этом случае из (7.81) находим $\pi_1^2 = \pi_3^4 = 0$. Сопровождающий репер становится полностью определенным. Назовем точки, с которыми совпадают в этом случае вершины A_1 и A_2, **центрами** луча.

2. $\Delta=0$, т. е. $k=\pm 1$. На формы π_1^2 и π_3^4 оказывается наложенным лишь одно условие. Тетраэдр не определен.

Выясним строение тетраэдра в каждом из этих случаев. Рассмотрим сначала первый случай.

Как известно, тетраэдр $T(A_1A_2A_3A_4)$ должен быть автополярным относительно абсолюта. В терминах эллиптической геометрии это означает, что все грани такого тетраэдра, равно как и все пересекающие друг друга ребра его, взаимно перпендикулярны между собой.

Равенство (7.82), связывающее между собой главные формы сопровождающего тетраэдра комплекса в проективном пространстве, возможно тогда и только тогда, когда координатная плоскость $A_1A_2A_3$ соответствует в нормальной корреляции на луче точке A_1, а плоскость $A_2A_1A_4$ — точке A_2. При произвольном расположении точек A_1, A_2 на луче, полярно сопряженных относительно абсолюта (взаимно перпендикулярных точек), соответствующие им плоскости $A_1A_2A_3$ и $A_2A_1A_4$ не перпендикулярны друг другу. Центры луча — единственные точки этого луча, для которых такая перпендикулярность имеет место.

Совместив вершины A_1, A_2 с центрами луча, мы однозначно определяем также и положение вершин A_3, A_4. Действительно. точка A_1 определяет полярно сопряженную с ней плоскость $A_2A_3A_4$, точка A_2 — плоскость $A_1A_3A_4$. Линия пересечения плоскостей — прямая A_3A_4 — полярно сопряжена с лучом A_1A_2 относительно абсолюта. Точка A_3 и A_4 соответственно найдутся как точки пересечения прямой A_3A_4 с плоскостями $A_1A_2A_3$ и $A_2A_1A_4$, соответствующими точкам A_1, A_2 в нормальной корреляции на луче.

Расстояние между центрами луча, как и между двумя любыми вершинами канонического тетраэдра, равно, очевидно, $\frac{\pi}{2}R$, где R — фундаментальная постоянная эллиптического пространства. Это следует из взаимной перпендикулярности каждой пары таких точек.

Стремясь провести аналогию с евклидовой геометрией, мы примем на время точку A_2 за аналог бесконечно удаленной точки прямой A_1A_2. В таком случае плоскость $A_2A_1A_4$ нужно принять за аналог плоскости, касательной к цилиндру комплекса. Тогда прямая A_1A_3, проходящая через центр A_1 и перпендикулярная к этой плоскости, должна быть названа **бинормалью** комплекса в центре A_1.

Естественно теперь назвать ребро A_2A_4 бинормалью комплекса в центре A_2.

Прямая A_1A_4, перпендикулярная в точке A_1 к лучу A_1A_2 и бинормали A_1A_3, должна быть названа **главной нормалью** комплекса в центре A_1. Аналогично ребро A_2A_3 есть главная нормаль в центре A_2.

Таким образом, в отличие от евклидовой геометрии, у комплекса в эллиптическом пространстве два центра, две бинормали и две главных нормали.

Каждая из прямых $A_1A_4, A_1A_3, A_2A_4, A_2A_3, A_3A_4$, наравне с прямой A_1A_2 описывает некоторый комплекс. Возьмем один из них, — например, комплекс прямых A_3A_4. Этот комплекс полярно сопряжен комплексу прямых A_1A_2 относительно абсолюта.

Главными формами луча комплекса A_3A_4 являются формы $\omega_3^1, \omega_3^2, \omega_4^1, \omega_4^2$. Между ними в силу (7.82) имеет место соотношение $\omega_3^1 = k\omega_4^2$. Следовательно, кривизны комплексов A_1A_2 и A_3A_4 равны между собой.

Говоря, что кривизна комплекса A_1A_2 в данном луче равна k, мы принимаем во внимание также и то, что центры этого луча у нас рассматриваются в определенном порядке. Обозначим центры буквами P, Q. Поместим вершину A_1, например, в точку P. (Тогда вершина A_2 совместится с Q). Соотношение между главными формами запишется в виде (7.82), и кривизна комплекса будет равна k. Если же мы с точкой P совместим вершину A_2, то соотношение между главными формами должно быть записано в виде

$$\omega_2^4 = \frac{1}{k}\omega_1^3$$

и кривизну комплекса следует считать равной $\frac{1}{k}$.

Комплекс, описываемый главной нормалью A_1A_4, имеет главные формы $\omega_1^2, \omega_1^3, \omega_4^2, \omega_4^3$.

Примечание: В канонизированном репере, очевидно, все формы становятся главными. Говоря о главных формах в данном случае, мы имеем в виду лишь формы, руководящие движением вершин A_1 и A_4.

Между ними, в силу (7.82), имеет место равенство

$$\omega_1^3 = -k\omega_4^2. \tag{7.83}$$

Это означает, что кривизна комплекса главных нормалей в центре A_1 равна по модулю и противоположна по знаку кривизне комплекса A_1A_2 с центром в точке A_1. Из (7.83) следует также, что центры комплекса A_1A_4 совпадают с вершинами A_1, A_4.

Аналогичное утверждение можно высказать и относительно главной нормали A_2A_3, проходящей через центр A_2.

Таким образом, как и в евклидовой геометрии, данный комплекс и комплекс его главных нормалей имеют один и тот же центр. Однако, в отличие от евклидовой геометрии, кривизны их равны по модулю и противоположны по знаку.

Если взять комплекс бинормалей A_1A_3, то в общем случае центры его лучей не совпадают с точками A_1 и A_3.

Выясним теперь геометрический смысл кривизны k. С этой целью рассмотрим две точки $M_1 = A_1 + tA_2$ и $M_2 = A_1 - tA_2$ луча A_1A_2, гармонически разделяющие центры A_1 и A_2 этого луча. Легко сообразить, что плоскости, соответствующие этим точкам в нормальной корреляции на луче A_1A_2, определяются следующими тангенциальными координатами

$$\sigma_1 = k(A_1A_2A_3) - t(A_1A_2A_4),$$
$$\sigma_2 = k(A_1A_2A_3) + t(A_1A_2A_4).$$

Точки пересечения этих плоскостей с ребром A_3A_4 есть соответственно

$$M_3 = A_3 - \frac{t}{k}A_4,\ M_4 = A_3 + \frac{t}{k}A_4. \qquad (7.84)$$

Отсюда видно, что эти точки всегда гармонически сопряжены относительно центров A_3, A_4. Потребуем, кроме того, чтобы точки M_3 и M_4 были и взаимно перпендикулярны; следовательно,

$$\left(-\frac{t}{k}\right)\left(\frac{t}{k}\right) = -1.$$

Отсюда

$$t = \pm k.$$

Следовательно

$$M_1 = A_1 + kA_2,\ M_2 = A_1 - kA_2.$$

Назовем точки M_1 и M_2 **псевдоцентрами** луча A_1A_2.

Легко видеть, что псевдоцентры взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k = \pm 1$, т. е., когда $\Delta = 0$. Комплексы, соответствующие этому случаю, мы рассмотрим позже. Сейчас же попробуем вычислить расстояние между точками M_1 и M_2.

Точки пересечения ребра A_1A_2 с абсолютом есть

$$N_1 = A_1 - iA_2,\ N_2 = A_1 + iA_2.$$

Сложное отношение точек $M_1N_1M_2N_2$ равно

$$W = (M_1N_1M_2N_2) = \frac{-i-k}{-k+i} : \frac{i-k}{-k-i} = \frac{(1-k^2) - i2k}{(1-k^2) + i2k}.$$

Положим $k = \operatorname{tg}\varphi$. В таком случае

$$W = \frac{\cos 2\varphi - i \sin 2\varphi}{\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi} = e^{-i4\varphi}.$$

Следовательно, расстояние между псевдоцентрами равно

$$d = \frac{i}{2} R \ln W = 2R\varphi.$$

Получаем следующий геометрический смысл кривизны k:

$$k = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\frac{d}{R}. \qquad (7.85)$$

Назовем плоскости $A_1A_3A_4$ и $A_2A_3A_4$ **центральными** плоскостями. Каждая из них проходит через один из центров и полярно сопряжена относительно абсолюта второму центру. Центральные плоскости всегда взаимно перпендикулярны.

Назовем **псевдоцентральными** плоскостями плоскости $M_1A_3A_4$ и $M_2A_3A_4$, т. е. плоскости, каждая из которых проходит через соответствующий ей псевдоцентр и через прямую, полярно сопряженную лучу комплекса относительно абсолюта. Очевидно, угол θ между псевдоцентральными плоскостями равен $\frac{d}{R}$. Следовательно,

$$k = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta, \qquad (7.86)$$

т. е. кривизна комплекса есть тангенс половины угла между псевдоцентральными плоскостями. Иными словами, кривизна, соответствующая некоторому центру, есть тангенс угла между центральной плоскостью, проходящей через этот центр, и любой из соответствующих ему псевдоцентральных плоскостей.

Полагая в равенствах (7.84) $t = \pm k$, будем иметь

$$M_3 = A_3 - A_4,\ \ M_4 = A_3 + A_4.$$

Эти точки являются серединами тех полупрямых, на которые взаимно перпендикулярные центры A_3 и A_4 делят всю эллиптическую прямую.

Расстояние между точками M_1 и A_1 (или, что то же самое, между точками M_2 и A_2) равно $\frac{d}{R}$. Следовательно, говоря о том, что d есть расстояние между псевдоцентрами M_1 и M_2, мы имеем в виду именно тот отрезок между ними, который содержит точку A_1. Если заменить в формуле (7.85) d на $\pi R - d$, т. е. длиной второго отрезка, образуемого псевдоцентрами, то мы должны в левой части заменить k на $\frac{1}{k}$. Это совпадает с теми соображениями о выборе порядка центров на луче, которые были приведены выше.

3. Клиффордовы комплексы. Рассмотрим теперь комплекс, характеризуемый условием $\Delta = 0$, или $k = \pm 1$.

Как уже отмечалось выше, в этом случае положение сопровождающего тетраэдра оказывается неопределенным. Это означает, что у такого комплекса каждая точка луча является центром. В соответствии с этим неопределенным будет и положение псевдоцентров. Однако следует помнить, что выбор центров однозначно определяет и выбор псевдоцентров, и наоборот.

Выясним строение рассматриваемого комплекса. Возьмем сначала случай $k = 1$. Из (7.80) следует, что в этом случае

$$\Delta a = \Delta b = \omega_1^2 + \omega_3^4,\ \ \Delta k = 0.$$

Следовательно, равенство (7.79) принимает вид

$$[\omega_1^2+\omega_3^4, \omega_2^3+\omega_1^4]=0.$$

Отсюда

$$\omega_1^2+\omega_3^4=\alpha(\omega_2^3+\omega_1^4), \tag{7.87}$$

где α — скалярная функция. Рассматриваемые комплексы существуют с произволом в одну функцию одного аргумента. Легко видеть, что в данном случае

$$(\omega_1^2+\omega_3^4)'=0, \quad (\omega_2^3+\omega_1^4)'=0.$$

Положим поэтому

$$\omega_1^2+\omega_3^4=dv, \quad \omega_2^3+\omega_1^4=du,$$

где u и v — некоторые переменные. Продолжая уравнение (7.87), получим

$$d\alpha=\beta du$$

(β — скалярная функция). Отсюда следует, что α — функция лишь одного переменного u: $\alpha=f(u)$.

Следовательно, комплекс $k=1$ характеризуется следующей вполне интегрируемой системой дифференциальных уравнений

$$\omega_1^3=\omega_2^4, \; \omega_2^3+\omega_1^4=du, \; \omega_1^2+\omega_3^4=f(u)\,du \tag{7.88}$$

$f(u)$ — произвольная функция.

Равенство $u=\mathrm{const}$ выделяет некоторую голономную конгруэнцию, принадлежащую рассматриваемому комплексу

$$\omega_1^3=\omega_2^4, \; \omega_2^3+\omega_1^4=0, \; \omega_1^2+\omega_3^4=0. \tag{7.89}$$

Пусть $F=A_1+tA_2$ — фокус конгруэнции (7.89). Легко показывается, что $t^2+1=0$; следовательно, фокусами рассматриваемой конгруэнции являются точки пересечения ее лучей с абсолютом

$$F_1=A_1+iA_2, \; F_2=A_1-iA_2.$$

Поскольку

$$dF_1=(\omega_1^1+i\omega_2^1)(A_1+iA_2)+(\omega_2^4-i\omega_1^4)(A_3+iA_4),$$
$$dF_2=(\omega_1^1-i\omega_2^1)(A_1-iA_2)+(\omega_2^4+i\omega_1^4)(A_3-iA_4)$$
$$dl_1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, l_1), \; dl_2\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, l_2),$$

где

$$l_1=[A_1+iA_2, A_3+iA_4], \; l_2=[A_1-iA_2, A_3-iA_4],$$

то рассматриваемая конгруэнция — линейная. Ее директрисы — две мнимосопряженные образующие абсолюта — прямые l_1 и l_2, принадлежащие к одной и той же серии. Следовательно, все лучи рассматриваемой конгруэнции являются клиффордовыми параллелями, соответствующими одной и той же паре образующих. Каждому значению u соответствует конгруэнция (7.89). Комплекс $k=1$ представляет собой однопараметрическое семейство таких конгруэнций. Естественно назвать его **клиффордовым комплексом**.

Наоборот, если задать произвольное соответствие между образующими одной серии абсолюта (такое соответствие как раз и определяется одной функцией одного аргумента) и принять соответствующие образующие за директрисы линейной конгруэнции, то получающаяся таким путем однопараметрическая совокупность конгруэнций составит клиффордов комплекс.

Действительно, пусть в тетраэдре $A_1A_2A_3A_4$ абсолют имеет уравнение (7.76). Тогда точки пересечения ребра A_1A_2 с абсолютом есть

$$F_1=A_1+iA_2, \; F_2=A_1-iA_2.$$

Сопровождающий тетраэдр комплекса выберем так, чтобы главные формы ω_1^3 и ω_2^4 были связаны условием

$$\omega_1^3=k\omega_2^4. \tag{7.90}$$

Это, как показано в § 1, всегда возможно. Прямолинейные образующие абсолюта, проходящие через точки F_1 и F_2, определяются соответственно следующими плюккеровыми координатами

$$l_1=[A_1+iA_2, A_3+iA_4], \; l_2=[A_1-iA_2, A_3-iA_4].$$
$$m_1=[A_1+iA_2, A_3-iA_4], \; m_2=[A_1-iA_2, A_3+iA_4].$$

Потребуем, чтобы, например, прямые l_1 и l_2 оставались неподвижными, т. е. чтобы $dl_1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, l_1)$, $dl_2\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, l_2)$. Это приведет к следующим соотношениям

$$\omega_1^2+\omega_3^4=0, \; \omega_2^3+\omega_1^4=0 \tag{7.91}$$

Поскольку

$$dF_1=(\omega_1^1+i\omega_2^1)(A_1+iA_2)+(\omega_1^3+i\omega_2^3)A_3+(\omega_1^4+i\omega_2^4)A_4,$$
$$dF_2=(\omega_1^1-i\omega_2^1)(A_1-iA_2)+(\omega_1^3-i\omega_2^3)A_3+(\omega_1^4-i\omega_2^4)A_4,$$

то условие того, чтобы точки F_1, F_2 описывали прямые l_1 и l_2, будет иметь вид:

$$\omega_1^4 + i\omega_2^4 = i(\omega_1^3 + i\omega_2^3),$$

$$\omega_1^4 - i\omega_2^4 = -i(\omega_1^3 - i\omega_2^3).$$

Принимая во внимание (7.90) и (7.91), приведем эти равенства к виду

$$(1-k)\,\omega_2^4 = 0.$$

Равенство $\omega_2^4 = 0$ невозможно, так как вместе с условием $\omega_2^3 + \omega_1^4 = 0$ на базисные формы $\omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4$ оно выделяло бы из комплекса не конгруэнцию, а поверхность. Следовательно, $k = 1$, а это и доказывает утверждение.

Если бы мы взяли вместо прямых l_1 и l_2 прямые m_1 и m_2, то пришли бы к комплексу $k = -1$. Следовательно, если один из комплексов $k = \pm 1$ состоит из левых параллелей Клиффорда, то другой — из правых.

У клиффордова комплекса две плоскости, соответствующие в нормальной корреляции на луче любым двум взаимно перпендикулярным точкам, всегда взаимно перпендикулярны. Это свойство полностью характеризует комплекс. Другим характерным свойством является то, что у такого комплекса псевдоцентры совпадают с серединами тех полупрямых, на которые центры делят прямую. Имеет место полная симметрия между центрами и псевдоцентрами, т. е. если принять за центры пару псевдоцентров, то за псевдоцентры мы должны принять пару центров.

Наконец, клиффордовы комплексы могут быть охарактеризованы тем, что у них имеет место полная симметрия между центрами одной и той же пары, иными словами, кривизна комплекса будет одной и той же независимо от того, какой центр принят за первый.

4. Ф о р м у л а К ё н и г с а. В евклидовой геометрии формула Кёнигса связывает между собой для произвольной линейчатой поверхности комплекса расстояние ее стрикционной точки от центра луча, угол между главной нормалью комплекса и нормалью к поверхности в этой точке, параметр распределения поверхности и кривизну комплекса. Найдем аналог этой формулы для комплекса прямых в эллиптическом пространстве. Попутно отметим ряд интересных понятий, к которым приводит вывод формулы.

Поскольку главная нормаль комплекса не пересекается с нормалью к линейчатой поверхности этого комплекса, то мы вместо угла между такими нормалями будем брать угол между плоскостями, проходящими через луч и перпендикулярными к

соответствующим нормалям. Исходя из этого, примем во внимание, что главная нормаль комплекса в центре A_1 есть ребро A_1A_4; следовательно, перпендикулярная к ней плоскость определяется тангенциальными координатами

$$\bar{\sigma}_0 = (A_1A_2A_3). \qquad (7.92)$$

Пусть теперь произвольная линейчатая поверхность комплекса задается двумя дифференциальными уравнениями

$$\omega_2^3 = \alpha\omega_2^4,\ \omega_1^4 = \beta\omega_2^4. \qquad (7.93)$$

Для развертывающихся поверхностей имеют $\omega_2^3\omega_1^4 - \omega_1^3\omega_2^4 = 0$; следовательно, коэффициенты α и β связаны следующим соотношением с кривизной комплекса

$$\alpha\beta = k. \qquad (7.94)$$

Предполагая, что рассматриваемая линейчатая поверхность является косой, мы должны равенство (7.94) считать исключенным.

Пусть

$$M = A_1 + tA_2 \qquad (7.95)$$

произвольная точка луча. Тогда, как легко сообразить, ее абсцисса t будет связана с расстоянием d от точки A_1 условием

$$t = \operatorname{tg}\frac{d}{R} \qquad (7.96)$$

(R — постоянная эллиптического пространства). Касательная плоскость к поверхности (7.93) в точке M определяется координатами

$$\sigma = (k + \alpha t)(A_1A_2A_3) + (\beta + t)(A_1A_2A_4). \qquad (7.97)$$

Угол φ, образуемый этой плоскостью с плоскостью (7.92), определяется равенством

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\beta + t}{k + \alpha t}. \qquad (7.98)$$

Пусть теперь, кроме точки M, мы имеем еще некоторую точку

$$N = A_1 + \tau A_2. \qquad (7.99)$$

Если h — расстояние между точками M, N и θ — угол между касательными плоскостями к поверхности (7.93) в этих точках, то, как нетрудно подсчитать,

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\dfrac{\beta+t}{k+\alpha t}-\dfrac{\beta+\tau}{k+\alpha\tau}}{1+\dfrac{\beta+t}{k+\alpha t}\cdot\dfrac{\beta+\tau}{k+\alpha\tau}};\tag{7.100}$$

$$\operatorname{tg}\frac{h}{R}=\frac{\tau-t}{1+t\tau}.\tag{7.101}$$

Найдем теперь условие того, чтобы точка M была стрикционной точкой луча A_1A_2 на поверхности (7.93). Как известно, в евклидовой геометрии стрикционной точкой линейчатой поверхности называется основание общего перпендикуляра двух бесконечно близких лучей этой поверхности. В эллиптической геометрии две не пересекающиеся прямые имеют в общем случае два общих перпендикуляра, полярно-сопряженных относительно абсолюта. Следовательно, каждый луч косой линейчатой поверхности комплекса содержит две стрикционных точки. Чтобы их найти, примем во внимание, что всякий перпендикуляр к прямой в эллиптическом пространстве всегда пересекает, кроме данной прямой, также и прямую, полярно-сопряженную с ней относительно абсолюта.

Следовательно, если мы возьмем два бесконечно близких луча A_1A_2 и $A_{1'}A_{2'}$ $(A_{1'}=A_1+dA_1, A_{2'}=A_2+dA)$ поверхности (7.93), то их общие перпендикуляры пересекут также прямые A_3A_4, $A_{3'}A_{4'}$ $(A_{3'}=A_3+dA_3, A_{4'}=A_4+dA_4)$.

Совершенно очевидно, что поверхность (7.93), но уже описанная лучом A_3A_4, будет пересекаться этими перпендикулярами в ее стрикционных точках. Пусть

$$P=A_3+\rho A_4$$

одна из таких точек, лежащих на луче A_3A_4. В таком случае прямые MP, $A_{1'}A_{2'}$, $A_{3'}A_{4'}$ будут определяться соответственно следующими плюккеровыми координатами

$$MP(0,1,\rho,t,t\rho,0),$$

$$A_{1'}A_{2'}(1+\omega_1^1+\omega_2^2,\ \omega_2^3,\ \omega_2^4,-\omega_1^3,-\omega_1^4,\ 0),$$

$$A_{3'}A_{4'}(0,-\omega_4^1,\ \omega_3^1,-\omega_4^2,\ \omega_3^2.\ 1+\omega_3^3+\omega_4^4)$$

(в скобках координаты выписаны в следующем порядке p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{23}, p^{24}, p^{34}. Кроме того, в координатах прямых $A_{1'}A_{2'}$ и $A_{3'}A_{4'}$ мы отбросили члены, содержащие произведения форм). Потребуем теперь, чтобы имело место попарное пересечение прямых MP и $A_{1'}A_{2'}$, MP и $A_{3'}A_{4'}$. Это приводит к равенствам

$$\omega_1^4-t\rho\omega_2^3+(t-k\rho)\,\omega_2^4=0,$$
$$t\rho\omega_1^4-\omega_2^3-(\rho-kt)\,\omega_2^4=0,$$

или, принимая во внимание (7.93),

$$\beta-t\rho\alpha+(t-k\rho)=0,$$
$$t\rho\beta-\alpha-(\rho-kt)=0.\tag{7.102}$$

Исключая из этих двух равенств ρ, найдем квадратное уравнение, определяющее стрикционные точки на луче A_1A_2:

$$(\beta+t)(1-t\beta)-(k+\alpha t)(-\alpha+kt)=0.\tag{7.103}$$

Аналогично, исключая из равенств (7.102) t, придем к квадратному уравнению, определяющему стрикционные точки на луче A_3A_4:

$$(\alpha+\rho)(1-\rho\alpha)-(k+\beta\rho)(-\beta+k\rho)=0.\tag{7.104}$$

Стрикционные точки на луче A_1A_2 становятся неопределенными, если выполнены следующие два условия:

$$\beta+\alpha k=0,\ \beta^2+k^2-(1+\alpha^2)=0.\tag{7.105}$$

Находя из первого равенства β и подставляя его во второе, приведем его к виду

$$(1+\alpha^2)\ (1-k^2)=0.\tag{7.106}$$

Если выполнено равенство (7.106), то две бесконечно близких образующих поверхности (7.93) имеют бесконечное множество общих перпендикуляров, которое в общем случае оказывается однопараметрическим. Это означает, что все такие перпендикуляры имеют общую длину, а сами образующие представляют собой две равноотстоящие прямые, т. е. две прямые Клиффорда.

Возможны два случая.

1. $k^2-1\neq0$, т. е. комплекс не клиффордов. В этом случае $\alpha=\pm i$, $\beta=\mp ik$. Поскольку тепер $\alpha\beta-k=0$, то полученные поверхности являются развертывающимися. Их фокусы

$$A_1+ikA_2,\ A_1-ikA_2\tag{7**}$$

гармонически сопряжены с парой центров луча. Расстояние между этими точками равно

$$r=iR\ln\frac{k+1}{k-1}.\tag{7.107}$$

Касательные плоскости к поверхности имеют соответственно координаты

$$\sigma_1=(A_1A_2A_3)-i(A_1A_2A_4),\ \sigma_2=(A_1A_2A_3)+i(A_1A_2A_4). \quad (7.108)$$

Но это — плоскости, проходящие через луч A_1A_2 и касающиеся абсолюта.

Поскольку

$$d\sigma_1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\sigma_1,\omega_2^3-i\omega_2^4,\ \omega_1^4+ik\omega_2^4),$$

$$d\sigma_2\equiv(\mathrm{mod}\,\sigma_2,\ \omega_2^3+i\omega_2^4,\ \omega_1^4-ik\omega_2^4),$$

то это означает, что каждая из поверхностей

$$\omega_2^3=i\omega_2^4,\ \omega_1^4=-ik\omega_2^4,$$

$$\omega_2^3=-i\omega_2^4,\ \omega_1^4=ik\omega_2^4$$

представляет собой совокупность лучей комплекса, расположенных соответственно в плоскостях σ_1 и σ_2.

Легко проверить, что точки (7.**) гармонически делят не только пару центров луча, но также и пару псевдоцентров. Этим свойством точки, очевидно, определяются однозначно. Назовем точки (7.**) **фокусами** луча.

2. $k^2-1=0$. Это случай клиффордова комплекса. Имеем единственное условие на коэффициенты α и β поверхности:

$$\beta\pm\alpha=0 \quad (7.109)$$

(см. (7.105)). Такая поверхность (соответственно для знака + и для знака —) всегда принадлежит конгруэнции клиффордовых параллелей. При этом, однако, такое ограничение является и единственным — любая поверхность, принадлежащая такой конгруэнции, является поверхностью, удовлетворяющей условию (7.109). Бесконечно близкие лучи каждой такой поверхности есть равноотстоящие прямые, полярно-сопряженные относительно абсолюта.

Исключая оба рассмотренных случая, будем предполагать, что уравнение (7.103), равно как и уравнение (7.104), имеет два и только два корня, и, следовательно, поверхность (7.93) содержит на каждом луче лишь две стрикционных точки.

Исключая из уравнений (7.100), (7.101) τ и принимая во внимание равенство (7.103), мы можем привести результат к виду

$$\mathrm{tg}\,\theta=\frac{t\beta-1}{t\alpha+k}\,\mathrm{tg}\,\frac{h}{R}, \quad (7.110)$$

где t следует считать равным одному из корней уравнения (7.103). По аналогии с евклидовой геометрией назовем коэффициент

$$\lambda=\frac{t\beta-1}{t\alpha+k} \quad (7.111)$$

параметром распределения линейчатой поверхности. Равенство (7.110) запишется в виде

$$\mathrm{tg}\,\theta=\lambda\,\mathrm{tg}\,\frac{h}{R}. \quad (7.112)$$

Это соответствует известной формуле евклидовой геометрии, связывающей параметр распределения линейчатой поверхности, расстояние h от произвольной точки луча до стрикционной точки, а также угол между нормалью к поверхности в этой точке и нормалью к ней в стрикционной точке. Если $\lambda=0$, то $t\beta-1=0$. Из (7.103) находим в этом случае $(k+\alpha t)\,(-\alpha+kt)=0$. Если бы имело место равенство $k+\alpha t=0$, то параметр λ был бы неопределенным. Следовательно, $-\alpha+kt=0$, что возможно только при $\alpha\beta-k=0$. Последнее же условие характеризует развертывающиеся поверхности. Это совпадает с известным фактом евклидовой геометрии, где обращение в нуль параметра распределения также выделяют развертывающиеся поверхности.

Имеет смысл отметить линейчатые поверхности с неопределенным параметром распределения. В этом случае одновременно выполнены равенства

$$t\beta-1=0,\ k+\alpha t=0, \quad (7.113)$$

исключая из которых t, будем иметь

$$\alpha+\beta k=0. \quad (7.114)$$

Из равенства (7.104) следует в этом случае, что у линейчатой поверхности (7.93), описанной ребром A_3A_4, стрикционные точки совпадают с центрами луча комплекса A_3A_4. Что касается комплекса лучей A_1A_2, то у него, как показывают равенства (7.113), поверхность (7.93), описанная прямой A_1A_2, имеет лишь одну стрикционную точку

$$S=A_1+\frac{1}{\beta}A_2. \quad (7.115)$$

Все поверхности, подчиненные условию (7.114), принадлежат конгруэнции

$$\omega_2^3+k\omega_1^4=0. \quad (7.116)$$

Фокусы такой конгруэнции $F=A_1+sA_2$ определяются уравнением

$$k(s^2+1)=0.$$

Если $k=0$, то $dA_1=\omega_1^1 A_1+\omega_1^2 A_2+\omega_1^3 A_3$. Следовательно, комплекс образован касательными к некоторой поверхности. Этот комплекс является специальным комплексом. Исключая его из рассмотрения, будем иметь $s=\pm i$, т. е. фокусы совпадают с точками пересечения луча A_1A_2 с абсолютом.

Выпишем теперь вместе равенства (7.96), (7.98), (7.103) и (7.111)

$$t=\operatorname{tg}\frac{d}{R},\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{\beta+t}{k+\alpha t},\ \frac{\beta+t}{k+\alpha t}=\frac{-\alpha+kt}{1-t\beta},\ \lambda=\frac{t\beta-1}{t\alpha+k}.$$

Из этих четырех равенств исключим t, α, β. Результат исключения может быть приведен к виду

$$\operatorname{tg}\frac{d}{R}\operatorname{tg}\varphi=\frac{1+k\lambda}{k+\lambda}. \qquad (7.117)$$

Эта формула обобщает на эллиптическое пространство формулу Кёнигса. Присвоим ей также название формулы Кёнигса.

Если $\lambda=0$, т. е. если линейчатая поверхность становится развертывающейся, то формула приобретает вид

$$\operatorname{tg}\frac{d}{R}\cdot\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{k}. \qquad (7.118)$$

Здесь, как и в формуле (7.117) d означает расстояние от стрикционной точки луча поверхности (в случае формулы (7.118) — от фокуса этого луча) до центра луча A_1, φ — угол между плоскостью, касательной к поверхности в стрикционной точке, и плоскостью $A_1A_2A_3$, перпендикулярной к бинормали в центре A_1. Следовательно, формула (7.118) представляет собой аналитическое выражение нормальной корреляции на луче и является обобщением известной формулы Шаля.

5. Линейные комплексы. В евклидовой геометрии осью линейного комплекса называется прямая, перпендикулярная к плоскостям, которые соответствуют ее точкам в нуль-системе этого комплекса. Каждый линейный комплекс имеет только одну конечную ось. В качестве второй оси можно было бы назвать бесконечно удаленную прямую, соответствующую первой оси в нуль-системе комплекса.

Если рассмотреть пучок линейных комплексов, касательных к данному произвольному комплексу C, то, как известно, все их конечные оси пересекают ортогонально бинормаль комплекса.

18—81

При этом точка пересечения дважды пробегает на бинормали отрезок, длина которого равна удвоенной кривизне комплекса и середина которого совпадает с центром луча этого комплекса.

Подобное положение мы имеем и в эллиптическом пространстве.

Покажем, что кроме двух действительных осей, линейный комплекс в эллиптическом пространстве имеет также четыре мнимых оси, образующих вместе с действительными осями некоторый тетраэдр.

Пусть

$$c_{ik}p^{ik}=0,\ (c_{ik}=-c_{ki}),\ i,\ k=1,2,3,4 \qquad (7.119)$$

уравнение линейного комплекса. Уравнения плоскостей, полярно-сопряженных с точками (x) и (y) имеют вид

$$c_{ik}x^k\xi^i=0,\ c_{ik}y^k\xi^i=0. \qquad (7.120)$$

Составим матрицу коэффициентов при ξ^i

$$\begin{pmatrix} c_{1k}x^k & c_{2k}x^k & c_{3k}x^k & c_{4k}x^k \\ c_{1k}y^k & c_{2k}y^k & c_{3k}y^k & c_{4k}y^k \end{pmatrix}.$$

Эта матрица определяет тангенциальные плюккеровы координаты линии пересечения плоскостей (7.120), т. е. линии, полярно-сопряженной с прямой (xy) в нуль-системе линейного комплекса

$$\sigma_{\alpha\beta}=c_{\alpha k}c_{\beta l}p^{kl}, \qquad (7.121)$$

где p^{kl} — точечные плюккеровы координаты прямой (xy).

Плоскости, полярно-сопряженные точкам (x), (y) относительно абсолюта, имеют уравнения

$$\sum_{i=1}^{4}x^i\xi^i=0,\quad \sum_{i=1}^{4}y^i\xi^i=0. \qquad (7.122)$$

Тангенциальные плюккеровы координаты линии пересечения этих плоскостей совпадают с точечными плюккеровыми координатами прямой (xy):

$$\bar{\sigma}_{\alpha\beta}=p^{\alpha\beta}. \qquad (7.123)$$

Потребуем, чтобы прямые (7.121) и (7.123) совпадали. Это будет означать как раз, что прямая (xy) является осью линейного комплекса, так как соответствующие ей в нуль-системе комплекса плоскости перпендикулярны к ней. Условие совпадения

$$\sigma_{\alpha\beta}=\lambda\bar{\sigma}_{\alpha\beta}$$

(λ — множитель пропорциональности) приведет к системе равенств

$$c_{\alpha k} c_{\beta l} p^{kl} - \lambda p^{\alpha\beta} = 0. \tag{7.124}$$

Условие совместности этой системы имеет вид следующего характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} c_{12}^2-\lambda & c_{12}c_{13} & c_{12}c_{14} & c_{12}c_{23} & c_{12}c_{24} & c_{12}c_{34}+\Omega \\ c_{13}c_{12} & c_{13}^2-\lambda & c_{13}c_{14} & c_{13}c_{23} & c_{13}c_{24}-\Omega & c_{13}c_{34} \\ c_{14}c_{12} & c_{14}c_{13} & c_{14}^2-\lambda & c_{14}c_{23}+\Omega & c_{14}c_{24} & c_{14}c_{34} \\ c_{23}c_{12} & c_{23}c_{13} & c_{23}c_{14}+\Omega & c_{23}^2-\lambda & c_{23}c_{24} & c_{23}c_{34} \\ c_{24}c_{12} & c_{24}c_{13}-\Omega & c_{24}c_{14} & c_{24}c_{23} & c_{24}^2-\lambda & c_{24}c_{34} \\ c_{34}c_{12}+\Omega & c_{34}c_{13} & c_{34}c_{14} & c_{34}c_{23} & c_{34}c_{24} & c_{34}^2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{7.125}$$

где $\Omega = -c_{12}c_{34} + c_{13}c_{24} - c_{14}c_{23}$.

Как мы отмечали выше, тетраэдр, в котором уравнение абсолюта имеет вид (7.76), автополярен относительно этого абсолюта. При этом координаты вершин такого тетраэдра оказываются определенным образом пронормированными. Положение тетраэдра зависит от 6 произвольных постоянных, которые, очевидно, играют роль параметров эллиптической группы. С помощью подходящего преобразования такой группы, можно упростить уравнение линейного комплекса.

Действительно, пусть $A_1A_2A_3$ — произвольная плоскость пространства. Возьмем в качестве вершины A_1 ту точку этой плоскости, которая ей соответствует в нуль-системе комплекса. В таком случае, как легко сообразить

$$c_{12} = c_{13} = 0. \tag{7.126}$$

Положение вершины A_4 и ребра A_2A_3 на плоскости $A_1A_2A_3$ однозначно определяется через поляритет относительно абсолюта. Примем за вершину A_2 точку пересечения ребра A_2A_3 с плоскостью, соответствующей вершине A_1 в нуль-системе комплекса. Это дает равенство

$$c_{24} = 0. \tag{7.127}$$

Уравнение линейного комплекса в выбранном тетраэдре имеет вид

$$c_{14}p^{14} + c_{23}p^{23} + c_{34}p^{34} = 0 \tag{7.128}$$

Внося (7.126) и (7.127) в уравнение (7.125), мы приведем его к виду

$$(\lambda^2 - c_{14}^2c_{23}^2)^2\left[(c_{14}^2-\lambda)(c_{23}^2-\lambda) - \lambda c_{34}^2\right] = 0. \tag{7.129}$$

Корни этого уравнения

$$\lambda_{1,2} = c_{14}c_{23},\ \lambda_{3,4} = -c_{14}c_{23},\ \lambda_{5,6} = \frac{1}{2}\Big[(c_{14}^2 + c_{23}^2 + c_{34}^2) \pm$$
$$\pm \sqrt{(c_{14}^2 - c_{23}^2)^2 + c_{34}^2(c_{34}^2 + 2c_{14}^2 + 2c_{23}^2)}\,\Big].$$

Мы видим, что все они действительны. Этого и следовало ожидать, так как характеристическое уравнение (7.125) симметрично относительно главной диагонали.

Найдем соответствующие этим корням оси линейного комплекса. С этой целью подставим первый двойной корень $\lambda_1 = \lambda_2$ в уравнения (7.124), где следует положить $c_{12} = c_{13} = c_{24} = 0$. Выписывая лишь независимые уравнения и исключая из рассмотрения специальные комплексы (характеризуемые обращением в нуль любого из коэффициентов c_{14}, c_{23}), мы будем иметь

$$p^{12} + p^{34} = 0,\ p^{13} - p^{24} = 0,\ (c_{14} - c_{23})\,p^{14} + c_{24}p^{34} = 0, \tag{7.130}$$
$$(c_{23} - c_{14})\,p^{23} + c_{34}p^{34} = 0,\ c_{34}(p^{14} + p^{23}) = 0.$$

Возможны следующие случаи:

а) $c_{34} = 0$, $c_{14} - c_{23} = 0$. Комплекс имеет уравнение

$$p^{14} + p^{23} = 0. \tag{7.131}$$

Легко понять, что у такого комплекса плоскость $A_2A_3A_4$ соответствует точке A_4 в нуль-системе этого комплекса. Зато теперь положение вершин A_2A_3 на ребре A_2A_3 становится неопределенным — они связаны лишь полярной сопряженностью относительно абсолюта. Следовательно, ребра A_1A_4 и A_2A_3 полярно сопряжены как относительно абсолюта, так и нуль-системе комплекса. Подобным же образом обнаруживается, что точке A_3 в нуль-системе соответствует плоскость $A_1A_2A_3$, а точке A_4 плоскость $A_1A_2A_3$ (это, впрочем, очевидно).

Строение комплекса (7.131) можно представить себе следующим образом. Возьмем на ребрах A_1A_3 и A_3A_4 тетраэдра какую-нибудь пару точек

$$P_1 = A_1 + mA_3,\ P_2 = A_2 + lA_4. \tag{7.132}$$

Зададим между ними какое-нибудь проективное соответствие

$$aml + bm + cl + d = 0. \tag{7.133}$$

Потребуем, чтобы в этом соответствии точкам A_1, A_3 соответствовали точки A_2, A_4 (соответственно). В таком случае

$$d=a=0.$$

Точки пересечения ребер A_1A_3 и A_3A_4 с абсолютом имеют соответственно координаты

$$A_1 \pm iA_3, \ A_2 \pm iA_4. \qquad (7.134)$$

Потребуем, чтобы эти точки соответствовали друг другу в соответствии (7.133).

Это дает

$$b \pm c=0.$$

Возьмем в левой части этого равенства знак плюс. Это значит, что в координатах (7.134) мы должны взять одинаковые знаки. В таком случае соответствие (7.133) примет вид

$$m-l=0.$$

Следовательно, соответствующие точки P_1 и P_2 будут иметь координаты

$$P_1 = A_1 + mA_3, \ P_2 = A_2 + mA_4.$$

Теперь не составит никакого труда показать, что комплекс (7.131) представляет собой однопараметрическое семейство линейных конгруэнций, директрисами которых являются прямые

$$A_1P_2, \ A_2P_1.$$

Примечание. Легко понять, что если вместо корня $\lambda_1 = \lambda_2$ взять корень $\lambda_3 = \lambda_4$, то в координатах (7.134) мы должны были бы взять противоположные знаки, а вместо комплекса (7.131) — комплекс

$$p^{14}-p^{23}=0. \qquad (7.135)$$

Это означает, что в число лучей комплекса (7.131) входят две образующих l_1, l_2 одной серии абсолюта, проходящих через точки пересечения ребер A_1A_3 и A_2A_4 с абсолютом, но две образующих m_1, m_2 другой серии, проходящих через те же точки, принадлежат комплексу (7.135).

Оси (7.130) комплекса образуют двупараметрическое семейство прямых, составляющих линейную конгруэнцию

$$p^{12}+p^{34}=0, \ p^{13}-p^{24}=0.$$

Директрисами такой конгруэнции являются те прямолинейные образующие абсолюта, которые проходят через точки пересечения абсолюта с ребрами A_1A_4 и A_2A_3. Легко было бы показать, что эти директрисы принадлежат к той же серии, что и прямые l_1, l_2.

б) Общий случай. Взяв кратный корень $\lambda_1 = \lambda_2 = c_{14}c_{23}$, из уравнений (7.130) и условия Плюккера найдем две соответствующие ему оси

$$p^{12} = \mp hi, \ p^{13} = \sqrt{c_{34}^2 + h^2}, \ p^{24} = \sqrt{c_{34}^2 + h^2}, \qquad (7.136)$$
$$p^{14} = \pm c_{34}i, \ p^{23} = \mp c_{34}i, \ p^{34} = \pm hi, \ (h = c_{14} - c_{23}).$$

Аналогично получим пару мнимых осей, соответствующих второму кратному корню

$$p^{12} = \pm gi, \ p^{13} = \sqrt{c_{34}^2 + g^2}, \ p^{24} = -\sqrt{c_{34}^2 + g^2}, \qquad (7.137)$$
$$p^{14} = \mp c_{34}i, \ p^{23} = \mp c_{34}i, \ p^{34} = \pm gi, \ (g = c_{14} + c_{23}).$$

Легко проверяется, что оси составлены из прямолинейных образующих абсолюта и образуют косой четырехугольник.

Наконец, для корней λ_5 и λ_6 будем иметь две действительных оси

$$p^{12} = -c_{14}c_{23}(c_{14}^2 - \lambda)(c_{23}^2 - \lambda), \ p^{13} = 0, \ p^{24} = 0,$$
$$p^{14} = -c_{14}c_{34}\lambda(c_{23}^2 - \lambda), \ p^{23} = -c_{23}c_{34}\lambda(c_{14}^2 - \lambda), \qquad (7.138)$$
$$p^{34} = \lambda(c_{14}^2 - \lambda)(c_{23}^2 - \lambda),$$

где λ — соответствующий из корней λ_5, λ_6. Прямые (7.138) пересекают упомянутый четырехугольник в его противоположных вершинах. Легко видеть, что эти прямые пересекают, кроме того, ребра A_1A_3 и A_2A_4 тетраэдра.

Примечание. Сопоставляя найденный результат о наличии шести осей линейного комплекса со свойствами движений в эллиптическом пространстве, представляющем, как известно, в общем случае произведение двух сдвигов по двум сериям параллелей Клиффорда, мы установим определенную связь между линейным комплексом и геликоидальным движением твердого тела в евклидовом пространстве.

Обратимся теперь к рассмотрению касательных линейных комплексов и, прежде всего, распространим на них результаты, относящиеся к произвольным линейным комплексам.

6. Касательные линейные комплексы. Легко находится пучок касательных линейных комплексов к данному комплексу с кривизной k

$$\nu p^{34} - kp^{14} - p^{23} = 0 \qquad (7.139)$$

(ν — параметр пучка). Сравнивая это уравнение с уравнением (7.128), заключаем, что

$$c_{34} = \nu, \ c_{14} = -k, \ c_{23} = -1. \qquad (7.140)$$

Поскольку теперь ребра A_1A_3 и A_2A_4 совпадают с бинормалями комплекса, то мы скажем, что действительные оси всех касательных линейных комплексов пересекают обе бинормали данного комплекса. Если M $(1:0:t:0)$ и N $(0:1:0:\rho)$ — точки пересечения оси соответственно с ребрами A_1A_3 и A_2A_4, то плюккеровы координаты прямой MN есть

$$p^{12}=1,\ p^{13}=0,\ p^{14}=\rho,\ p^{23}=-t,\ p^{24}=0,\ p^{34}=t\rho.$$

Сопоставляя это с (7.138), где следует учесть (7.140), получим

$$t=\frac{\nu\lambda}{k(1-\lambda)},\ \rho=-\frac{\nu\lambda}{k^2-\lambda}. \tag{7.141}$$

При этом примем во внимание, что λ и ν связаны соотношением

$$(1-\lambda)(k^2-\lambda)=\lambda\nu^2 \tag{7.142}$$

(см. (7.129)). Исключая из (7.141) и (7.142) ν и λ, получим соотношение между t и ρ, которому можно придать вид

$$k=-\frac{t(1+\rho^2)}{\rho(1+t^2)}. \tag{7.143}$$

Эта формула позволяет дать новое геометрическое истолкование кривизне комплекса. Как известно, абсцисса t точки $M=A_1+tA_3$ на ребре A_1A_3 есть тангенс угла наклона плоскости MA_2A_4 к плоскости $A_1A_2A_4$ Обозначим этот угол через φ_1, т. е. $t=\operatorname{tg}\varphi_1$. Аналогично, абсцисса точки $N=A_2+\rho A_4$ на ребре A_2A_4 есть тангенс угла наклона плоскости NA_1A_3 к плоскости $A_2A_1A_3$. Обозначая угол через φ_2, имеем $\rho=\operatorname{tg}\varphi_2$. В таком случае формула (7.143) примет вид

$$k=-\frac{\sin 2\varphi_2}{\sin 2\varphi_1}. \tag{7.144}$$

А это и позволяет геометрически охарактеризовать кривизну.

Действительные оси линейного комплекса всегда полярно сопряжены относительно абсолюта (взаимно перпендикулярны). Ребра A_1A_3 и A_2A_4 в случае касательных линейных комплексов всегда перпендикулярны к этим осям. Если вместо точки N взять точку N', в которой ребро A_2A_4 пересекается со второй осью комплекса, то угол φ_2 мы должны заменить углом $\varphi_2'=\varphi_2+\frac{\pi}{2}$.

В таком случае равенство (7.144) примет вид

$$k=\frac{\sin 2\varphi_2'}{\sin 2\varphi_1}.$$

При исследовании формулы (7.144) следует иметь в виду два случая:

1. $k<1$. В этом случае

$$\sin 2\varphi_2=-k\sin 2\varphi_1.$$

Отсюда видно, что если точка M пробегает все ребро A_1A_3, то точка N дважды описывает на ребре A_2A_4 отрезок, определяемый неравенствами $-k\leqslant\sin 2\varphi_2\leqslant k$.

2. $k>1$. В этом случае ребра A_1A_3 и A_2A_4 следует поменять местами (в приведенных выше рассуждениях).

Таким образом, геометрическая природа кривизны комплекса в эллиптическом пространстве оказывается той же, что и в геометрии Евклида.

§ 6. Комплексы в гиперболическом пространстве

Оставаясь в поле действительных чисел, будем различать два рода гиперболического пространства в зависимости от того, будет ли абсолют такого пространства линейчатой или нелинейчатой поверхностью второго порядка (невырожденной). Будем выбирать подвижной тетраэдр пространства так, чтобы уравнение абсолюта имело соответственно вид

$$(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2-(x^4)^2=0, \tag{7.145}$$

$$(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2-(x^4)^2=0. \tag{7.146}$$

Как в первом, так и во втором случае тетраэдр T $(A_1A_2A_3A_4)$ автополярен относительно абсолюта, причем координаты его вершин определенным образом нормированы.

Пусть T' $(A_{1'}A_{2'}A_{3'}A_{4'})$ — тетраэдр, близкий к T, причем

$$A_{i'}=A_i+dA_i.$$

Следовательно, координаты вершин $A_{i'}$ в тетраэдре T есть

$$A_{1'}(1+\omega_1^1,\ \omega_1^2,\ \omega_1^3,\ \omega_1^4),\ A_{2'}(\omega_2^1,\ 1+\omega_2^2,\ \omega_2^3,\ \omega_2^4),$$

$$A_{3'}(\omega_3^1,\ \omega_3^2,\ 1+\omega_3^3,\ \omega_3^4),\ A_{4'}(\omega_4^1,\ \omega_4^2,\ \omega_4^3,\ 1+\omega_4^4).$$

Формулы проективного преобразования, переводящего T в T', имеют вид

$$\rho x^{i'}=x^i+\omega_k^i x^k. \tag{7.147}$$

В тетраэдре T' уравнения (7.145) и (7.146) сохраняют свой вид

$$(x^{1'})^2+(x^{2'})^2-(x^{3'})^2-(x^{4'})^2=0, \tag{7.148}$$

$$(x^{1'})^2-(x^{2'})^2-(x^{3'})^2-(x^{4'})^2=0. \tag{7.149}$$

Подставим (7.147) в (7.148) и (7.149). Требование инвариантности этих уравнений приводит соответственно к уравнениям структуры (мы по-прежнему отбрасываем члены, содержащие формы ω_i^k в степени, выше первой)

$$\omega_j^i = \omega_i^j,\ \ \omega_1^2 + \omega_2^1 = 0,\ \ \omega_3^4 + \omega_4^3 = 0,$$
$$\omega_1^3 - \omega_3^1 = 0,\ \ \omega_1^4 - \omega_4^1 = 0,$$
$$\omega_2^3 - \omega_3^2 = 0,\ \ \omega_2^4 - \omega_4^2 = 0; \qquad (7.150)$$

$$\omega_j^i = \omega_i^j,\ \ \omega_4^2 + \omega_2^4 = 0,\ \ \omega_3^1 - \omega_1^3 = 0,$$
$$\omega_4^3 + \omega_3^4 = 0,\ \ \omega_4^1 - \omega_1^4 = 0, \qquad (7.151)$$
$$\omega_2^3 + \omega_3^2 = 0,\ \ \omega_2^1 - \omega_1^2 = 0.$$

Если ограничиться классической геометрией Лобачевского, то в качестве абсолюта следует взять лишь нелинейчатую поверхность второго порядка (7.146) и принять за пространство Лобачевского совокупность точек, лежащих внутри этой поверхности.

Впредь мы будем брать в качестве уравнений структуры лишь уравнения (7.151).

Помещая вершины A_1, A_2 на луч комплекса, имеем главные формы $\omega_1^3, \omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4$ и фундаментальное соотношение между ними:

$$\omega_1^3 = a\omega_2^3 + b\omega_1^4 + k\omega_2^4\ . \qquad (7.152)$$

Помня, что вершины A_1 и A_2 полярно сопряжены относительно абсолюта, мы должны учесть, что у нас одна из точек (пусть это будет точка A_1) является конечной точкой пространства Лобачевского, другая же (A_2) — идеальной. Собственно, записывая уравнение абсолюта в виде (7.146), мы уже предполагаем, что вершина A_1 тетраэдра конечна, три же остальные вершины A_2, A_3, A_4 идеальны.

Совмещая плоскости $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$ с плоскостями, соответствующими точкам A_1 и A_2 в нормальной корреляции на луче (соответственно), приведем коэффициенты a и b к нулю

$$a = 0,\ b = 0. \qquad (7.153)$$

Тогда k становится инвариантом. Присвоим этому инварианту название **кривизны** комплекса.

Равенства (7.153) однозначно определяют положение вершин A_1, A_2. Это — **центры** луча. Однако теперь мы должны го-

ворить лишь об одном действительном центре (A_1), другой — идеален.

В терминах гиперболической геометрии центр может быть геометрически охарактеризован следующим образом.

Пусть A_1 — какая-нибудь точка луча комплекса. Проведем плоскость $A_1A_3A_4$, перпендикулярную к лучу в этой точке. Пусть плоскость $A_1A_2A_3$ соответствует точке A_1 в нормальной корреляции на луче A_1A_2 (Примечание. Разумеется, когда мы говорим о точках A_2, A_3, A_4, то в наших рассуждениях это не идеальные точки, а просто какие-то точки, определяющие положение соответствующих плоскостей). Очевидно, плоскость $A_1A_2A_3$ перпендикулярна к $A_1A_3A_4$.

Если луч комплекса, перемещаясь, остается перпендикулярным к плоскости $A_1A_3A_4$ то он, очевидно, все время проходит через идеальную точку, пусть это теперь точка A_2, полярно сопряженную с плоскостью $A_1A_3A_4$ относительно абсолюта. Иначе говоря, этот луч описывает конус с вершиной в идеальной точке.

Конус пересекает плоскость $A_1A_3A_4$ по кривой, касательная к которой, вообще говоря, не перпендикулярна к плоскости $A_1A_2A_3$. Центр луча есть единственная точка на луче, для которой такая перпендикулярность имеет место.

Назовем прямую A_1A_4 — **главной нормалью**, прямую A_1A_3 — **бинормалью** комплекса.

Трехгранник, вершина которого совпадает с центром луча A_1, ребро A_1A_4 — с главной нормалью и ребро A_1A_3 — с бинормалью комплекса, назовем **нормальным** трехгранником комплекса. Нормальный трехгранник характеризуется тем, что в нем дифференциальное уравнение комплекса имеет вид

$$\omega_1^3 = k\omega_2^4. \qquad (7.154)$$

Точки пересечения луча A_1A_2 с абсолютом есть

$$P_1 = A_1 - A_2,\ \ P_2 = A_1 + A_2, \qquad (7.155)$$

Соответствующие им плоскости в нормальной корреляции на луче определяются тангенциальными координатами

$$\Pi_1 = k(A_1A_2A_3) + (A_1A_2A_4), \qquad (7.156)$$
$$\Pi_2 = k(A_1A_2A_3) - (A_1A_2A_4).$$

Назовем эти плоскости предельными плоскостями.

Плоскости, проходящие через A_1A_2 и касающиеся абсолюта, есть

$$\Pi' = (A_1A_2A_3) + i(A_1A_2A_4),$$
$$\Pi'' = (A_1A_2A_3) - i(A_1A_2A_4). \qquad (7.157)$$

Составим сложное отношение четверки плоскостей $\Pi_1, \Pi_2, \Pi', \Pi''$

$$W = (\Pi_1 \Pi' \Pi_2 \Pi'') = \frac{-1 + k^2 + 2ik}{-1 + k^2 - 2ik} = e^{-2i\varphi}, \qquad (7.158)$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2k}{1 - k^2}. \qquad (7.159)$$

Очевидно

$$\varphi = \frac{i}{2} \ln W$$

есть угол между предельными плоскостями.

Из (7.159) следует, что

$$k = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}. \qquad (7.160)$$

Таким образом, **кривизна комплекса есть тангенс половины угла между предельными плоскостями.**

Легко доказывается, что плоскость $A_1A_2A_4$ (равно, как и перпендикулярная к ней плоскость $A_1A_2A_3$) делит пополам угол между предельными плоскостями. Угол, образуемый плоскостью $A_1A_2A_4$ с любой из предельных плоскостей равен $\frac{1}{2}$ φ.

Назовем плоскость $A_1A_2A_4$ **центральной** плоскостью. Тогда кривизна k может быть интерпретирована как тангенс угла между центральной плоскостью и любой из предельных плоскостей.

Из (7.151) и (7.154) следует

$$\omega_1^3 = -k\omega_4^2. \qquad (7.161)$$

Это означает, что точка A_1 является центром луча комплекса главных нормалей A_1A_4. Однако, в отличие от евклидовой геометрии, кривизны основного комплекса и комплекса его главных нормалей равны по модулю, но противоположны по знаку.

Комплекс бинормалей таким свойством не обладает.

Продолжая (7.154), имеем

$$\omega_1^2 + k\omega_3^4 = p\omega_2^3 + \alpha\omega_1^4 + \beta\omega_2^4,$$

$$-k\omega_1^2 + \omega_3^4 = \alpha\omega_2^3 + q\omega_1^4 + \gamma\omega_2^4,$$

$$-\overset{*}{d}k - k(\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4) = \beta\omega_2^3 + \gamma\omega_1^4 + r\omega_2^4.$$

При закрепленном луче

$$\pi_1^2 + k\pi_3^4 = 0,$$
$$-k\pi_1^2 + \pi_3^4 = 0.$$

Определитель этой системы есть

$$\Delta = 1 + k^2.$$

Ни для какого действительного комплекса этот определитель не обращается в нуль. Следовательно, в отличие от эллиптического пространства, в гиперболическом пространстве не существует действительного комплекса, для которого центр луча оказывался бы неопределенным.

Неопределенный центр возможен только для комплекса с мнимой кривизной

$$k = \pm i.$$

Заметим, что точка луча A_1A_2

$$M = A_1 + tA_2$$

конечная, если

$$-1 < t < 1.$$

При $t = \pm 1$ точка бесконечна, при $|t| > 1$ — идеальна.

Выясним смысл координаты t. С этой целью найдем расстояние x от точки M до точки A_1. Как известно, в гиперболической геометрии это расстояние определится как $\frac{1}{2} R \ln W_t$, где R — фундаментальная постоянная пространства Лобачевского, а W_t — сложное отношение точек $A_1P_2MP_1$:

$$W_t = \frac{1 + t}{1 - t},$$

$$x = \frac{1}{2} R \ln \frac{1 + t}{1 - t}.$$

Отсюда

$$t = Sh \frac{x}{R}.$$

Но

$$Sh \frac{x}{R} = \cos \Pi(x),$$

где $\Pi(x)$ — функция Лобачевского. Таким образом,

$$t = \cos \Pi(x).$$

Координата t есть, следовательно, бельтрамиева абсцисса точки M на луче комплекса, если за начало отсчета принять центр этого луча.

ЛИТЕРАТУРА[1]

Акивис М. А.

1. Фокальное семейство лучей как образ пары T комплексов при перенесении Плюккера, ДАН СССР, т. 65, № 4, 1949.

2. Пары T комплексов, Матем. сб., т. 27, в. 3, 1950.

3. Инвариантное построение геометрии гиперповерхности конформного пространства, Матем. сб., т. 31 (73) в. 1, 1952.

Аппель П. (Appel P.).

4. Sur les propriétés des cubiques gauches et le mouvement hélicoidale d'un corps solide, Annales de l'École Normale, 1876, Décembre.

Барнер М. (Barner M.).

5. Zur projektiven Differentialgeometrie der Komplexflächen. I. Komplexflächen als Schiebflächen, Math. Ann., 1953, 126, № 2; II. Konstruktion und integrallose spezieller Schiebungen, Math. Ann., 126, N 5, 1953; III. Schiebungen als abrollvorgänge Singularitätenkurven auf Komplexflächen. Inwariante Gebilde, Math. Ann., 129, № 3, 1955.

Баширова Г. Г.

6. Новая характеристика пар T комплексов, Труды Узбекского гос. ун-та им. А. Навои, нов. сер., Самарканд. № 78, 1958.

7. Расслоение пары комплексов в одном направлении в трехмерном проективном пространстве, Труды Самаркандского гос. ун-та им. А. Навои, нов. сер., № 107, 1960.

Бомпиани Э. (Bompiani E.).

8. Complessi lineari di piani nello spazio a cingue dimensioni, Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis., mat. e natur., 14, № 6, 1953.

Бюшгенс С. С.

9. Геометрия векторного поля, АН СССР, т. 10, № 2, 1946.

Васильев А. М.

10. Инволютивные системы комплексов прямых, ДАН СССР, т. 61, № 2, 1948.

Гайзенгаймер (Geisenheimer).

11. Sur les systémes de rayons formés par tangentes à une surface, Leitschr. für Math. und Phys., 1872.

Георгиев Г. (Gheorghiev Gh.).

12. Despre geometria intrinsecă a unui cîmp de vectori, Studii și cercetări St. Acad. RPR, filiala Jași, 1951, 2, fasc. 3—4.

13. Cîteva problema geometrice legata de un cîmp de vectori unitari, Bul. St. Acăd. RPR, sectiunea de Stiințe matematice si fizice, VI, № 1, 1954.

14. Despre descompunerea unui complex in congruente remarcabile de drepte, An. Stiinț. Univ. Jasi, Sec. I, 1, № 1—2, 1955.

[1] Нижеследующий список не претендует на полноту.

15. Cîteva observații cu privire la teoria metrică a complexelor de drepte studii si cercetări St. Accad. RPR, filiala Jasi, seria 1, VI, fasc. 1—2, 1955.

16. О дифференциальной геометрии векторных полей и о некоторых ее приложениях, Изв. матем. ин-та Болгарской АН, № 4, 1959.

17. О комплексах прямых с постоянной кривизной, там же.

18. Observații cu privire la locul centrelor euclidiene ale raselor unui complex (de drepte) ce trec printre un punct; cazuri particulare remarcabile, studii si cercetări Stiint. mat., 11, f. 1, 1960.

Георгиев Г., Попа И. (Gheorghiev Gh., Popa I.).

19. Проективно-дифференциальная геометрия многообразия конусов, Изв. матем. ин-та Болгарской АН, т. 5, кн. I, 1961.

20. Geometria proiettivo—differenziale di alcune varietà equi—parametriche (III), Analele stiințifice ale universitàti «Al. I. Cuza» din Jasi (ser nouă), sect. 1 (mat.—fiz.—chim), т. VII, fasc. 2, 1961.

Главатый В. (Hlavaty V.).

21. Differenciálni přímková geometrie, Praha, 1941, т. 2.

Гринцевичюс К. И.

22. Комплекс прямых в аффинном пространстве, ДАН СССР, т. 61, № 2, 1948.

23. О гиперкомплексе прямых в четырехмерном проективном пространстве, Автореф. канд. дисс. М., 1955.

24. О гиперкомплексе прямых в проективном пространстве P_4, ДАН СССР, т. 107, № 6, 1956.

25. Линейный комплекс, присоединенный к дифференциальной окрестности второго порядка луча комплекса, Успехи матем. наук, т. 13, в. 2 (80), 1958.

26. Линейчато-геометрический аналог эволюты и эвольвенты, Успехи мат. наук, т. 15 в. 1 (91), 1960.

27. Дифференциальная окрестность второго порядка луча комплекса в многомерном проективном пространстве, Мат. сб., т. 52, в. 4, 1960.

28. Подвижной тетраэдр комплекса прямых в проективном пространстве, Ученые труды Вильнюсского гос. ун-та, т. 3, 1955.

29. К теории проективно-дифференциальной геометрии пары T комплексов, Ученые записки Вильнюсского ун-та, математика, т. 9, 1960.

30. О дифференциальной окрестности третьего порядка комплекса прямых, Литовской сб., т. I, № 1—2, 1961.

31. Об одной паре комплексов прямых, там же.

32. О полном объекте комплекса, там же.

33. О расслоении комплексов прямых, Первая Всесоюзная геометрическая конференция, Тезисы, К., 1962.

П. И. Вашкас, О расслоении семейств комплексов прямых, там же.

Дарбу Г. (Darboux G.).

34. Sur les congruences de courbes et les surfaces normales aux droites d'un complexe, Comptes Rendus, v. 149, N 20, N 21, 1909.

Ермолаев Л. С.

35. Дифференциальная геометрия векторного поля. Комплекс прямых, определяемых полем. Известия НИИ математики и механики Томского ун-та, 3 : 1, 1946.

Ивлев Е. Т.

36. О реперах подмногообразий в теории пар комплексов в P_3, ДАН СССР, т. 139, № 3, 1961.

Кенигс Г. (Koenigs G.).

37. Sur les propriétés infinitésimales de l'éspace reglé, These, 1882.

38. La géométrie réglée et ses applications, Paris, 1895.

Клебш А. (Klebsch A.).

39. Veber die Complexflächen und die Singularitätenflächen der Complexe, Math. Ann., 5, 1872.

Клейн Ф. (Klein F.).
40. Veber Liniengeometrie und metrische Geometrie, Math. Ann., 5, 1872.
41. Лекции о С. Ли, читанные в Эванстоне в 1893 г. в связи с выставкой в Чикаго сб. «Памяти С. Ли», 1899.
42. Высшая геометрия, ОНТИ, 1939.
Кованцов Н. И.
43. Триортогональная система линий комплекса прямых, ДАН СССР, т. 90, № 2, 1953.
44. Кривые линейчатого комплекса, УМЖ, т. 5, № 3, 1953.
45. Пространственная индикатриса геодезических кручений триортогональной системы неголономных поверхностей, ДАН СССР, т. 97, № 5, 1954.
46. Два предложения о граничных точках и фокусах неголономной конгруэнции, Успехи матем. наук, т. 10, в. 1:63, 1955.
47. Линейчато-геометрический аналог триортогональной системы поверхностей, ДАН СССР, т. 113, № 3, 1957. См. также Труды 3-го Всесоюзного математического съезда, т. I, 1956.
48. Канонический тетраэдр комплекса прямых в проективном пространстве, УМЖ, т. 8, № 2, 1956.
49. О векторных полях, присоединенных к комплексу, УМЖ, т. 10, № 1, 1958.
50. К проективной теории комплекса прямых, ДАН СССР, т. 95, № 5, 1954.
51. Приложение идей неголономной геометрии к линейчатому комплексу, УМЖ т. 6, № 3, 1954.
52. Пары комплексов проективного вращения, ДАН СССР, т. 100, № 5, 1955.
53. Безинтегральное представление некоторых специальных классов комплексов, Мат. сб., т. 38(80), № 1, 1956.
54. Линейчатые многообразия комплекса прямых (на укр. яз.), Запорожский пединститут, Научные записки, физ.-мат. серия, т. 2, 1956.
55. Квазиспециальные комплексы, Мат. сб., 41(83), № 3, 1957.
56. Однопараметрические семейства конгруэнций с линейчатыми фокальными поверхностями, Мат. сб., 42(84), № 1, 1957.
57. Теория комплексов, 1958. Автореферат докторской диссертации.
58. Классификация комплексов проективного пространства, основанная на рассмотрении корней характеристического уравнения, Томск, Доклады научной конференции по теоретическим и прикладным вопросам матем. и механ., 1960.
59. Канонические квадрики комплекса прямых в проективном пространстве, Мат. сб., 50(92), № 2, 1960.
60. Об одном проективно-дифференциальном классе конгруэнций, УМЖ, т. 12, № 3, 1960.
61. Изометрическое отображение проективной структуры комплекса на пространство постоянной кривизны, Известия вузов, математика, № 4, 1960.
62. Теория комплексов в неевклидовых пространствах, Первая Всесоюзновая геометрическая конференция, Тезисы сообщений, К., 1962.
Коровин В. И.
63. Преобразование комплекса прямых в проективном пространстве с сохранением его инвариантной формы, ДАН СССР, т. 70, № 5, 1950.
64. Расслоение пары комплексов двумерных плоскостей в пятимерном проективном пространстве, ДАН СССР, т. 72, № 5, 1950.
Ли С. (Lie S.).
65. Geometrie der Berührungstransformationen, I, 1896.
66. Veber Complexe, insbesondere Linien — und Kugel-Complexe mit Anwendung auf die Theorie partieller Differential—Gleichungen, Math. Ann., 5, 1872.
Мантрэ П. (Mentre P.).
67. Sur les complexes qui présentent sur toutes leurs droites, des singularités projectives du deuxiéme ordre infinitésimal. Comptes rendus, 1922, Novembre.
68. Les variétés de l'éspace réglée leur étude par le calcul extérieur, Paris, 1923.
Маськин Н. М.
69. Группы движений линейчатых комплексов, Ученые зап. Бурятского désинст., в. 19, 1960, в. 22, 1961.
70. Группы инфинитезимальных преобразований линейчатых комплексов, Сибирский мат. журн. т. 3, № 2, 1962.
71. Группы бесконечно малых преобразований линейчатых комплексов, Автореф. канд. дисс., Томск, 1962.
Мирон Р. (Miron R.).
72. Asupra sferei neolonome si planului neolonom., An. St. Univ. Sec. I, 1, № 1—2, 1955.
73. Cîteva problema din Geometria unui camp de vectori unitari, Studii si cercetări Stiinţifice Jasi. VI, № 1—2, 1955.
Плюккер Ю. (Plucker J.).
74. Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der Geraden Linie als raumelement, Leipzig, 1868—69.
Санниа (Sannia).
75. Saggio di Geometria differenziale dei complessi di retti, Ann. di Math., ser. 3, t. 17, 1910.
Сегре К. (Segre C.).
76. Sui complessi lineari di piani nello spazio a sinque dimensioni, Annali di Mathematica, 27 (3), 1917.
Трансон А. (Transon A.).
77. Mémoire sur les propriétés d'un ensemble de droites menées de tous les points de l'éspace, suivant une loi continue, Journal de l'école Politechnique. v. 22, № 38, 1861.
Турьер Э. (Tourriere E.).
78. Sur les congruences de normales qui appartiennent à un complexe donné, Annales de la faculté des sciences de l'université de Toulouse, s. III, v. II, 1910.
79. Un application du théoréme de Malus au probleme de Transon, Nouvelles Annales de mathematiques, 1911.
Тихоцкий К. Н.
80. Преобразование К комплексов, Мат. сб., нов. сер., т. 16(58) в. I, 1945. В связи с этой работой см. также Барабошин Н. М., Дуальноконформное преобразование комплекса прямых, Известия вузов, математика, № 3, 1959.
Фиников С. П.
81. Геометрия комплекса прямых, Ученые зап. МГПИ им. В. П. Потемкина, в. I, т. I, 1940.
82. К проблеме расслоения пары комплексов, Успехи матем. наук, т. 9, в. 1(59), 1954.
83. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, М.—Л., 1948.
84. Теория конгруэнций, М.—Л., 1950.
85. Теория пар конгруэнций, М., 1956.
Фосс А. (Voss A.)
86. Veber complexe und Kongruenzen, Math. Ann., 9, 1876.
Хаак В. (Haack W.)
87. Differentialgeometrie der strahlen complexe
I. Mathematische Zeitschrift, 40, 1935.
II. (Kurven und Torsen Komplexes), ibid.
III. Monatsheft für Math. und. Phys., 44, 1936.
IV. (Uber Minimalcomplexe), Math. Zeitschr., 41, 1936.
V. (Ein Strahencomplexe), Math. Zeitschr., 43, 1937.
Циндлер К. (Zindler K.)

88. Liniengeometrie mit Anwendungen, I, 1902, II, 1906, Leipzig.
Die Entwiclung und der gegenwartige stand der differentielen Limiengeometrie, Jahresbericht Dt. Math. Ver., 15, 1906.

Цыпкин М. Е.

89. Дифференциальная геометрия комплекса прямых, Учен. зап. Казанского ун-та, т. 114, кн. 2, 1954.

90. Дифференциальная геометрия комплекса прямых, Ученые зап. Казанского ун-та, т. 114 кн. 2, 1954.

Щербаков Р. Н.

91. Основной цилиндронд линейчатого комплекса, Известия вузов, математика, № 3(28), 1962.

92. Об аффинно-симметричных линейчатых комплексах, Сибирский мат. журн., т. 3, № 1, 1962.

93. Эквиаффинная теория комплекса прямых, Доклады научной конференции по теоретическим и прнкладным вопросам математики и механнки, Томск, 1960.

94. Эквиаффинный полуканонический репер комплекса прямых, Геометрический сб., вып. 1 (Труды Томского ун-та, 1(60), 1962.

95. Построение метрической теории комплексов при помощн репеража подмногообразий, Доклады иаучной конференции; Томск, математика и механика, 1960. См. также Труды Томского гос. ун-та им. П. П. Куйбышева, т. 155, 1961.

96. О неголономных конгруэнциях W, ДАН СССР, т. 138, № 4, 1961.

97. О проективиом полуканоническом репере линейчатого комплекса, Первая Всесоюзная геометрическая конференция, Тезисы сообщений, К., 1962.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть вторая. **Проективная теория комплексов**

Николай Иванович Кованцов

Теория комплексов

Редактор *Миронец Е. М.*

Технический редактор *Окопная Е. Д.*

Корректоры *Крутова З. Н., Зуб Ж. М.*

БФ 02577. Зак. № 81. Тираж 3000. Формат бумаги $60\times90^1/_{16}$. Физич. печ. лист. 18,25. Услов. печ. лист. 18,25. Учетно-издат. листов 14,4. Бум. листов 9,25. Подписано к печати 12.XII 1963 г. Цена 1 крб.

Типография Изд-ва КГУ, Киев, Б. Шевченко, 14.