В. С. Крамор

Готовимся к экзамену по МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие

Москва
ОНИКС
Мир и Образование

УДК 51(075.3)
ББК 22.1я721
К78

Крамор В. С.

К78 Готовимся к экзамену по математике: Учебное пособие / В. С. Крамор. — М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2008. — 544 с.: ил.

ISBN 978-5-488-01543-2 (ООО «Издательство Оникс»)
ISBN 978-5-94666-454-7 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)

Книга предназначена для самостоятельного повторения школьного курса математики. Она поможет учащимся систематизировать имеющиеся знания и ликвидировать в них пробелы. Весь материал разбит на 22 темы, которые содержат: теоретические сведения; контрольные вопросы; упражнения (включая задачи для повторения); методические указания, решения и ответы.

Пособие может быть использовано при подготовке к выпускным экзаменам в средней школе, сдаче ЕГЭ и вступительным экзаменам в вуз. Оно будет полезно школьникам, абитуриентам и преподавателям.

УДК 51(075.3)
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-488-01543-2 (ООО «Издательство Оникс»)
ISBN 978-5-94666-454-7 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга предназначена для самостоятельного повторения школьного курса алгебры и начал анализа, а также для подготовки к выпускным экзаменам в средней школе и вступительным экзаменам в высшее учебное заведение.

Весь учебный материал разбит на 22 темы, которые имеют одну и ту же структуру. Каждая тема содержит: теоретические сведения; контрольные вопросы; упражнения (включая задания для повторения); ответы, решения и методические указания к упражнениям.

В разделе «Теоретические сведения» приводятся формулировки правил, определений, теорем и т. д. Весь учебный материал изложен конспективно в той же последовательности, что и при изучении его в школе. В этом разделе имеются также подробно разобранные примеры, позволяющие частично закрепить усвоение теории. Указанный раздел является узловым, поскольку в случае затруднений при ответах на контрольные вопросы или при решении упражнений учащийся может получить необходимые консультации, обращаясь к справочному материалу.

Раздел «Контрольные вопросы» призван обеспечить контроль за усвоением теоретического материала. Отвечая на поставленные вопросы, учащийся сможет закрепить полученные им теоретические знания.

В разделе «Упражнения» содержатся разнообразные примеры и задачи, относящиеся к данной теме. Ко всем упражнениям даны ответы. Значительная часть упражнений сопровождается подробными решениями и методическими указаниями. Каждый этап решения включает необходимую информацию о правомерности того или иного шага. Среди упражнений имеются примеры и задачи довольно высокого уровня сложности, взятые из вариантов, предлагавшихся на вступительных экзаменах в различные вузы. Наличие именно таких упражнений позволяет приобрести необходимые умения и навыки, усвоить многочисленные стандартные и нестандартные приемы решения математических задач.

Начиная с темы 3 раздел «Упражнения» содержит также задания для повторения. Эти задания включают не только примеры и задачи такого же типа, что и в предыдущих темах, но и упражнения, которые по тем или иным причинам в предыдущие темы не вошли. Кроме того, здесь приводится большое количество текстовых задач, решение которых, как показывает практика, вызывает у учащихся определенные трудности. Подробные решения таких задач, приведенные в книге, позволяют учащемуся устранить имеющиеся у него пробелы.

Книга завершается разделом «Приложение», который содержит 30 вариантов билетов, предлагавшихся на вступительных письменных экзаменах по математике (к 20 вариантам даны ответы) в различных вузах страны. Самостоятельное решение таких задач поможет окончательно закрепить знания и умения, приобретенные в процессе изучения данной книги, и как можно лучше подготовиться к выпускным и вступительным экзаменам по математике.

Успехов вам, настоящие и будущие абитуриенты!

Автор

Тема 1

Натуральные числа и действия над ними. Сложение и законы сложения. Вычитание. Умножение и законы умножения. Деление. Признаки делимости чисел. Понятие множества. Операции над множествами. Взаимно однозначное соответствие. Простые и составные числа. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное

Теоретические сведения

1. Натуральные числа и действия над ними

1°. Понятие натурального числа относится к простейшим, первоначальным понятиям математики и не подлежит определению через другие, более простые понятия.

2°. Натуральные числа получаются в результате счета предметов, например 1, 3, 100 и т. д.

3°. Таким образом, натуральные числа в порядке возрастания можно написать как ряд чисел 1, 2, 3, 4, ...

4°. Для натуральных чисел определены следующие действия: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня.

Заметим, что сложение и умножение выполнимы всегда, т. е. в результате этих действий получаются также натуральные числа.

2. Сложение и законы сложения

1°. Результат сложения двух или нескольких чисел называют их ***суммой***, а сами числа — ***слагаемыми***.

Например, $a + b + c + \ldots + k = P$. Здесь P — сумма; a, b, c, ..., k — слагаемые.

2°. Для любых натуральных чисел a и b верно равенство $a + b = b + a$. Это свойство называют *переместительным* (*ком-*

мутативным) законом сложения, который формулируется так: *от перестановки слагаемых значение суммы не изменится.*

3°. Для любых натуральных чисел a, b и c верно равенство $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$. Это свойство называют *сочетательным (ассоциативным) законом сложения*, который формулируется так: *значение суммы не изменится, если какую-либо группу слагаемых заменить их суммой.*

3. Вычитание

1°. Вычесть из числа a число b — значит найти такое число x, которое в сумме с числом b дает a, т. е. $b + x = a$.

2°. Число x называют ***разностью*** чисел a и b и обозначают $a - b$; число a называют ***уменьшаемым***, число b — ***вычитаемым***.

3°. Для натуральных чисел вычитание не всегда выполнимо. Например, $4 - 4$; $2 - 7$; $17 - 30$, т. е. в результате мы не получим натуральное число.

4. Умножение и законы умножения

1°. Умножить число a на число b — значит найти сумму b слагаемых, каждое из которых равно a. Выражение ab называют ***произведением***, а числа a и b — ***множителями***.

Например, $a \cdot 3 = a + a + a$; $b \cdot 5 = b + b + b + b + b$.

2°. Для любых натуральных чисел a и b верно равенство $ab = ba$. Это свойство называют *переместительным законом умножения*, который формулируется так: *от перестановки множителей значение произведения не изменится.*

3°. Для любых натуральных чисел a, b и c верно равенство $abc = (ab)c = a(bc)$. Это свойство называют *сочетательным законом умножения*, который формулируется так: *значение произведения не изменится, если какую-либо группу множителей заменить их произведением.*

4°. При любых значениях a, b и c верно равенство $(a + b)c = ac + bc$. Это свойство называют *распределительным (дистрибутивным) законом умножения* (относительно сложения), который формулируется так: *чтобы умножить сумму на число, достаточно умножить каждое слагаемое на это число и сложить полученные произведения.*

Аналогично можно записать: $(a - b)c = ac - bc$.

5. Деление

1°. Разделить число a на число b — значит найти такое число x, при умножении которого на число b получается число a, т. е. $a : b = x$, если $x \cdot b = a$.

2°. Число a называют ***делимым*** (или ***кратным***) числа b, число b — ***делителем*** числа a, число x — ***частным*** чисел a и b.

3°. Для натуральных чисел деление нацело не всегда выполнимо, т. е. результат деления двух натуральных чисел не всегда является натуральным числом.

4°. Признак делимости суммы. Если каждое из слагаемых x и y делится на некоторое число c, то и сумма $x + y$ делится на это число c.

6. Признаки делимости чисел

1°. На 2 и на 5 делятся те и только те числа, в записи которых последняя цифра либо 0, либо выражает число, делящееся соответственно на 2 или на 5.

2°. На 4 или на 25 делятся те и только те числа, у которых две последние цифры — нули или выражают число, делящееся соответственно на 4 или на 25.

3°. На 3 (или на 9) делятся те и только те числа, сумма цифр которых делится на 3 (или на 9).

4°. На 10 делятся числа, оканчивающиеся нулем.

5°. Числа, делящиеся на 2, называют ***четными***, а остальные — ***нечетными***.

7. Понятие множества

1°. Одним из фундаментальных понятий математики является понятие множества. Множество можно представить себе как совокупность (собрание) некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку. Множество — понятие неопределяемое.

2°. Множество может состоять из чисел (предметов) и т. п. Каждое число (предмет), входящее в множество, называют ***элементом*** множества. Так, множество однозначных чисел состоит из элементов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

3°. Для записи множества с любыми элементами используют фигурные скобки. Элементы множества можно записать в любом порядке; например, $\{2; 3; 1\}$ и $\{1; 3; 2\}$ — это одно и то же множество, состоящее из чисел 1, 2, 3.

4°. Множества обозначают прописными буквами латинского алфавита. Например, $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ — множество однозначных чисел; число 4 принадлежит множеству A ($4 \in A$); число 20 множеству A не принадлежит ($20 \notin A$).

5°. Множество, которое не содержит элементов, называют ***пустым*** и обозначают символом $\varnothing$.

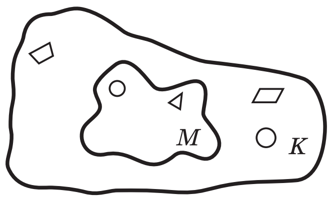


Рис. 1

6°. Из рис. 1 видно, что каждый элемент множества M принадлежит также и множеству K. Если каждый элемент одного множества M является элементом другого множества K, то говорят, что множество M является ***подмножеством*** множества K. Это выражается записью $M \subset K$.

7°. Пустое множество $\varnothing$ и само множество также считают подмножествами данного множества. Так, множество $\{1; 2; 3\}$ имеет 8 подмножеств: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1; 2\}$, $\{1; 3\}$, $\{2; 3\}$, $\{1; 2; 3\}$.

8°. Если каждый элемент множества A является одновременно элементом множества B (т. е. $A \subset B$) и каждый элемент множества B — элементом множества A (т. е. $B \subset A$), то множества A и B называют ***равными*** и пишут $A = B$.

9°. Различают конечные и бесконечные множества. Например, множество всех трехзначных чисел — конечное, а множество $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел — бесконечное.

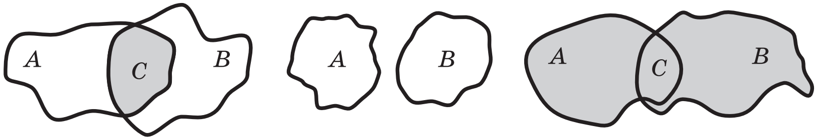
8. Операции над множествами

1°. ***Пересечением*** множеств A и B называют множество, состоящее из элементов, которые принадлежат каждому из данных множеств A и B (рис. 2, *а*). Пересечение множеств обозначают символом $\cap$ и пишут $C = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Пусть, например, $A = \{1; 2; 5; 7\}$, $B = \{3; 5; 7; 8\}$; тогда пересечением этих множеств служит множество $C = \{5; 7\}$.

2°. Если множества A и B не имеют общих элементов, то пересечением таких множеств является пустое множество (рис. 2, *б*).

3°. ***Объединением*** множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов множеств A и B и только из них. Объединение множеств обозначают символом $\cup$ и пишут



а) *б*) *в*)

Рис. 2

$C = A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$ (рис. 2, *в*). При этом если множества A и B имеют общие элементы, то каждый из этих общих элементов в объединение входит только один раз.

Пусть, например, $A = \{1; 2; 5; 7\}$, $B = \{3; 5; 7; 8\}$; тогда объединением этих множеств служит множество $D = \{1; 2; 3; 5; 7; 8\}$.

9. Взаимно однозначное соответствие

1°. Если каждому элементу множества A можно поставить в соответствие один и только один элемент множества B и, наоборот, каждому элементу множества B можно поставить в соответствие один и только один элемент множества A, то такое соответствие между множествами A и B называют ***взаимно однозначным***.

2°. Если между множествами A и B можно установить взаимно однозначное соответствие, то такие множества называют ***эквивалентными*** (***равносильными***).

3°. Установление взаимно однозначного соответствия дает возможность сравнивать множества с бесконечным числом элементов. Например, между множеством $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел и множеством всех четных натуральных чисел можно установить взаимно однозначное соответствие:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \ldots & 2n & \ldots \end{array}$$

Таким образом, эти два множества равносильны.

10. Простые и составные числа

1°. Число a называют ***простым***, если его делителями являются только единица и само число a. Например, числа 2, 3, 5, 13, 29 — простые.

2°. Число a, имеющее другие делители (кроме 1 и a), называют ***составным***. Например, числа 4, 6, 15 — составные.

Заметим, что число 1 не относят ни к простым, ни к составным числам.

3°. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ. *Любое составное натуральное число можно представить в виде произведения простых чисел.* Например, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. Говорят также, что число 12 разложено на простые множители.

Пример. Разложить на простые множители число 525.

Р е ш е н и е. Имеем

$$\begin{array}{r|l} 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad 525 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7.$$

11. Наибольший общий делитель

1°. Рассмотрим множество A делителей числа 45 и множество B делителей числа 60, т. е. $A = \{1; 3; 5; 9; 15; 45\}$; $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60\}$. ***Общими делителями*** чисел 45 и 60 называют числа, являющиеся элементами как множества A, так и множества B, т. е. элементы пересечения этих множеств: $A \cap B = \{1; 3; 5; 15\}$.

2°. Наибольший из этих элементов (число 15) называют ***наибольшим общим делителем*** и обозначают так: НОД(45, 60) = 15.

3°. Если наибольший общий делитель чисел равен 1, то такие числа называют ***взаимно простыми***. Например, числа 16 и 25 — взаимно простые, так как НОД(16, 25) = 1.

Пример. Найти НОД(126, 540, 630).

Р е ш е н и е. Имеем

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 540 & 2 \\ 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} A = (2; 3; 3; 7\}; \\ B = \{2; 2; 3; 3; 3; 5\}; \\ C = \{2; 3; 3; 5; 7\}; \\ A \cap B \cap C = \{2; 3; 3\}; \\ \text{НОД} = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18. \end{array}$$

12. Наименьшее общее кратное

1°. Рассмотрим множество A чисел, кратных 4, и множество B чисел, кратных 6, т. е. $A = \{4; 8; 12; 16; 20; \ldots\}$; $B = \{6; 12; 18; 24; \ldots\}$. Числа 12, 24, 36, ... являются кратными чисел 4 и 6. Их называют ***общими кратными*** чисел 4 и 6. Множество C общих кратных есть пересечение множеств A и B, т. е. $C = A \cap B$.

2°. Наименьший элемент множества C называют ***наименьшим общим кратным*** данных чисел и обозначают так: НОК(4, 6) = 12.

Пример. Найти НОК(270, 300, 315).

Решение. Имеем

$$\begin{array}{r|l}
270 & 2 \\
135 & 3 \\
45 & 3 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
300 & 2 \\
150 & 2 \\
75 & 3 \\
25 & 5 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
315 & 3 \\
105 & 3 \\
35 & 5 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}$$

$A = \{2; 3; 3; 3; 5\}$;
$B = \{2; 2; 3; 5; 5\}$;
$C = \{3; 3; 5; 7\}$;
$A \cup B \cup C = \{2; 2; 3; 3; 3; 5; 5; 7\}$;
$\text{НОК} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 =$
$= 18\,900$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие числа относятся к множеству $\boldsymbol{N}$?

2. Какие операции (действия) всегда выполнимы на множестве $\boldsymbol{N}$?

3. Является ли множество натуральных чисел: конечным; бесконечным? Существует ли наибольшее (наименьшее) натуральное число?

4. Каких чисел $x \in \boldsymbol{N}$ больше: четных или нечетных?

5. Сформулируйте законы сложения.

6. Можно ли утверждать, что: а) $3x + y = y + 3x$, если $x, y \in \boldsymbol{N}$; б) $2x + 3y + 5z = 2x + (3y + 5z)$, если $x, y, z \in \boldsymbol{N}$?

7. Как изменится сумма, если: а) одно из слагаемых увеличить на 6 ед.; б) первое слагаемое увеличить на 9 ед., а второе — на 7 ед.; в) первое слагаемое увеличить на 15 ед., а второе уменьшить на 8 ед.?

8. Как следует понимать вычитание? Что значит из числа a вычесть число b?

9. Всегда ли выполнимо вычитание на множестве $\boldsymbol{N}$?

10. Как изменится разность, если: а) уменьшаемое увеличить на 7 ед., а вычитаемое — на 5 ед.; б) уменьшаемое увеличить на 10 ед., а вычитаемое уменьшить на 7 ед.; в) уменьшаемое уменьшить на 15 ед., а вычитаемое увеличить на 10 ед.?

11. Что значит умножить число a на число b?

12. Всегда ли выполнимо умножение на множестве натуральных чисел?

13. Сформулируйте законы умножения.

14. Как изменится произведение, если: а) один из множителей увеличить в 2 раза; б) один из множителей увеличить в 3 раза, а другой уменьшить в 3 раза?

15. В каких случаях произведение двух чисел равно: одному из них; каждому из них?

16. Что значит разделить число a на число b?

17. Всегда ли выполнимо деление на множестве натуральных чисел?

18. Как изменится частное, если делимое увеличить в 10 раз, а делитель уменьшить в 2 раза?

19. В каких случаях частное двух чисел равно: а) одному из них; б) каждому из них?

20. Делимое увеличили в 4 раза. Как нужно изменить делитель, чтобы частное уменьшилось в 3 раза?

21. Делимое уменьшили в 6 раз. Как нужно изменить делитель, чтобы частное уменьшилось в 2 раза?

22. Сформулируйте признак делимости суммы.

23. Сформулируйте признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25.

24. Приведите примеры множеств.

25. Что называют подмножеством данного множества?

26. Что означают знаки: $\subset$, $\in$, $\notin$, $\varnothing$?

27. Вместо звездочки поставьте знак $\subset$ или $\in$ ($\notin$) так, чтобы полученная запись была верной: а) $\{3;\ 7\} * \{7;\ 8;\ 3\}$; б) $7 * \{3;\ 7;\ 8\}$; в) $\varnothing * \{0;\ 1;\ 2\}$; г) $\{3;\ 4\} * \{3;\ 4\}$; д) $5 * \{1;\ 10;\ 15\}$.

28. Из множества $\{5;\ 28;\ 37;\ 49;\ 121;\ 168;\ 279;\ 415\}$ выделите подмножества простых и составных чисел.

29. Дайте определение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного двух или нескольких чисел.

30. Разложите на простые множители: а) 1176; б) 5400.

31. Найдите: НОД(120, 144, 324); НОД(144, 72).

32. Найдите: НОК(108, 216, 135); НОК(25, 38); НОК(70, 35, 280).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что одно из двух последовательных четных чисел делится на 4 нацело.

2. Докажите, что разность $\overline{ab} - \overline{ba}$ кратна 9.

3. Докажите, что всякое трехзначное число, записанное одинаковыми цифрами, делится нацело на 37.

4. Какой цифрой оканчивается произведение

$$51 \cdot 52 \cdot 53 \ldots 58 \cdot 59?$$

5. Докажите, что сумма двузначного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, кратна 11.

6. Сумма цифр двузначного числа равна 6. Если к этому числу прибавить 18, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите исходное число.

7. Найдите двузначное число, равное сумме квадрата числа единиц и числа десятков.

8. Остаток от деления натурального числа k на 12 равен 5, а остаток от деления числа k на 16 равен 9. Чему равен остаток от деления наименьшего из возможных значений k на 24?

9. Найдите двузначное число, равное утроенной сумме его цифр.

ОТВЕТЫ

4. 0. **6.** 24. **7.** 89. **8.** 17. **9.** 27.

Решения и методические указания

К упражнению 1

1. Как известно, число называется четным, если оно делится на 2 нацело.

2. Формула четного числа имеет следующий вид: а) $2n$; б) $2n - 2$; в) $2n + 2$.

3. Пусть $n \in \boldsymbol{N}$. Тогда $2n$ — четное число, а $2n + 2$ — следующее четное число.

4. Если $n = 2k$, где $k \in \boldsymbol{N}$, то число $2n = 2 \cdot 2k = 4k$ делится на 4 нацело.

5. Если $n = 2k - 1$ (нечетное), где $k \in \boldsymbol{N}$, то число $2n + 2 = 2(2k - 1) + 2 = 4k - 2 + 2 = 4k$ делится на 4 нацело.

К упражнению 2

1. Имеем $\overline{ab} = 10a + b$ (двузначное число, где a — цифра десятков, b — цифра единиц); аналогично $\overline{ba} = 10b + a$.

2. Следовательно,

$$\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b).$$

3. Число $9(a - b)$ делится на 9 нацело.

К упражнению 3

1. Трехзначное число, записанное одинаковыми цифрами, имеет вид $\overline{aaa}$.

2. Имеем $\overline{aaa} = 100a + 10a + a = 111a$.

3. Число 111 делится на 37 нацело; следовательно, и число $111a$ делится на 37.

К упражнению 4

1. Среди данных множителей выделим две пары множителей: 52 и 55; 55 и 56.

2. Если мы умножим 52 на 55 или 55 на 56, то произведение будет оканчиваться нулем.

3. Таким образом, произведение остальных множителей на $52 \cdot 55$ или $55 \cdot 56$ будет оканчиваться нулем.

К упражнению 5

1. Имеем $\overline{ab} = 10a + b$; аналогично $\overline{ba} = 10b + a$.

2. Следовательно, сумма

$$\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b)$$

делится на 11 нацело.

К упражнению 6

1. Пусть x — цифра десятков, а y — цифра единиц исходного числа.

2. Поэтому исходное число можно записать в виде $10x + y$.

3. Тогда задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ 10x + y + 18 = 10y + x. \end{cases}$$

4. Решив эту систему, получим $x = 2$, $y = 4$. Итак, исходное число есть 24.

К упражнению 7

1. Пусть искомое число имеет вид $10a + b$.

2. Тогда в силу условия имеем

$$10a + b = a + b^2,$$

откуда $9a = (b - 1)b$.

3. Ясно, что произведение $b(b - 1)$ должно быть кратно 9.

4. Так как $b \leqslant 9$, а $b - 1 \leqslant 8$, то $b(b - 1)$ делится на 9 лишь тогда, когда $b = 9$.

5. Следовательно, $9a = 9 \cdot 8$, откуда $a = 8$. Итак, искомое число есть 89.

К упражнению 8

1. Пусть k — натуральное число, p и q — целые части от деления k на 12 и 16 соответственно.

2. Тогда, согласно условию, имеем систему

$$\begin{cases} k = 12p + 5, \\ k = 16q + 9. \end{cases}$$

3. Левые части этих соотношений равны, поэтому равны и правые части, т. е.

$$12p + 5 = 16q + 9. \tag{1}$$

4. Выразим p из равенства (1):

$$p = \frac{1 + 4q}{3}. \tag{2}$$

5. Так как в равенстве (2) p и q — целые положительные числа, то с помощью перебора устанавливаем, что наименьшему значению $q = 2$ соответствует целое $p = 3$.

6. Таким образом, наименьшее значение $k = 41$, а остаток от деления 41 на 24 равен 17.

К упражнению 9

1. Имеем $\overline{ab} = 10a + b$.

2. По условию

$$10a + b = 3(a + b), \text{ или } 7a = 2b. \tag{1}$$

3. Из равенства (1) получаем

$$a = \frac{2b}{7}. \tag{2}$$

4. Так как в равенстве (2) a и b — натуральные числа, меньшие 10, то перебором устанавливаем, что наименьшему значению $b = 7$ соответствует целое $a = 2$.

5. Таким образом, искомое число есть 27.

Тема 2

Обыкновенные дроби. Правильные и неправильные дроби. Основное свойство дроби. Сравнение дробей. Сокращение дроби. Сложение и вычитание дробей. Умножение дробей. Деление дробей. Десятичные дроби. Обращение десятичной дроби в обыкновенную и обыкновенной в десятичную. Периодические дроби. Отношение. Пропорция. Свойства пропорций. Свойства отношений. Процент. Основные задачи на проценты. Деление числа на части, прямо и обратно пропорциональные данным числам

Теоретические сведения

1. Обыкновенные дроби

1°. Одну или несколько равных частей единицы называют ***обыкновенной дробью***.

Например, дробь $\frac{1}{5}$ означает, что единица разделена на 5 равных частей и взята такая одна часть; дробь $\frac{2}{7}$ означает, что единица разделена на 7 равных частей и взяты две такие части (рис. 3).

2°. Обыкновенная дробь записывается с помощью черты и двух натуральных чисел. Число, записанное под чертой и показывающее, на сколько равных частей разделена единица, называют ***знаменателем*** дроби. Число, записанное над чертой и показывающее, сколько взято таких равных частей, называют ***числителем*** дроби.

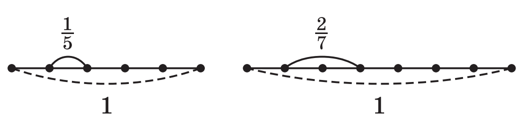


Рис. 3

3°. Из определения дроби следует что дробную черту можно рассматривать как знак деления. Например, $\frac{2}{7} = 2 : 7$.

Таким образом, дробь, у которой числитель равен знаменателю, равна единице. Например, $\frac{5}{5} = 1$.

2. Правильные и неправильные дроби

1°. Дробь, в которой числитель меньше знаменателя, называют ***правильной***. Например, $\frac{3}{8}$ — правильная дробь.

2°. Дробь, в которой числитель равен знаменателю или больше его, называют ***неправильной***. Например, $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{2}$ — неправильные дроби.

3°. Число, состоящее из натурального числа и дроби, называют ***смешанным***. Например, $7\frac{1}{3}$, $8\frac{2}{3}$ — смешанные числа.

4°. Смешанное число можно обратить в неправильную дробь. Например,

$$7\frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 7 + 1}{3} = \frac{22}{3}; \quad 8\frac{2}{3} = \frac{8 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{26}{3}.$$

3. Основное свойство дроби

1°. Две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называют ***равными***, если $ad = bc$. Например, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, так как $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$.

2°. Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной. Это свойство называют ***основным свойством дроби***. Например, $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ (так как $10 \cdot 3 = 15 \cdot 2$) или $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$ (так как $5 \cdot 12 = 6 \cdot 10$).

4. Сравнение дробей. Сокращение дроби

1°. Из двух дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{b}$ с одинаковыми знаменателями та больше, у которой числитель больше. Например, $\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$.

2°. Из двух дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{a}{c}$ с одинаковыми числителями та больше, у которой знаменатель меньше. Например, $\frac{5}{9} > \frac{5}{10}$.

3°. Для сравнения дробей с разными числителями и знаменателями их предварительно приводят к общему знаменателю или к общему числителю.

4°. Деление числителя и знаменателя на их общий делитель называют ***сокращением*** дроби. При этом получается дробь, равная данной.

5. Сложение и вычитание дробей

1°. При сложении дробей с одинаковыми знаменателями к числителю первой дроби прибавляют числитель второй дроби и оставляют тот же знаменатель. Полученную дробь, если это возможно, сокращают. Например,

$$\frac{7}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7+5}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$

2°. ***Наименьшим общим знаменателем*** двух или нескольких дробей является наименьшее общее кратное знаменателей этих дробей.

При сложении дробей с различными знаменателями нужно предварительно привести их к наименьшему общему знаменателю. Например,

$$\frac{8}{15} + \frac{1}{9} = \frac{24}{45} + \frac{5}{45} = \frac{24+5}{45} = \frac{29}{45}.$$

3°. При вычитании смешанных чисел из целой части уменьшаемого вычитают целую часть вычитаемого, а из дробной части уменьшаемого — дробную часть вычитаемого. Например,

$$9\frac{7}{8} - 4\frac{5}{12} = 5\frac{7}{8} - \frac{5}{12} = 5\frac{21-10}{24} = 5\frac{11}{24}.$$

4°. Если дробная часть вычитаемого больше дробной части уменьшаемого, то одну из единиц целой части уменьшаемого нужно заменить равной ей дробью. Например,

$$7\frac{5}{8} - 2\frac{9}{10} = 5\frac{5}{8} - \frac{9}{10} = 5\frac{25-36}{40} =$$

$$= \left(4 + \frac{40}{40}\right) + \frac{25-36}{40} = 4\frac{65-36}{40} = 4\frac{29}{40}.$$

Аналогично выполняется сложение смешанных чисел.

Заметим, что вычитание дробей может привести к понятию отрицательной дроби. Этот случай будет рассмотрен в теме 3.

6. Умножение дробей

1°. Произведение двух дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равно дроби, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель — произведению знаменателей, т. е. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

2°. При умножении смешанных чисел их предварительно представляют в виде неправильных дробей. Например, $2\frac{1}{3} \cdot 3\frac{1}{6} = \frac{7}{3} \cdot \frac{19}{6} = \frac{133}{18}$. Этот результат можно записать в виде смешанного числа, разделив числитель на знаменатель и выделив целую часть числа: $\frac{133}{18} = 7\frac{7}{18}$.

3°. Два числа называют ***взаимно обратными***, если их произведение равно 1. Например, a и $\frac{1}{a}$, 3 и $\frac{1}{3}$ — взаимно обратные числа.

4°. Любые две дроби вида $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ являются взаимно обратными, так как их произведение равно 1.

7. Деление дробей

1°. При делении дроби на дробь числитель делимого умножают на знаменатель делителя, а знаменатель делимого — на числитель делителя. Первое произведение служит числителем, а второе — знаменателем частного. Например,

$$\frac{3}{4} : \frac{6}{7} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 6} = \frac{7}{4 \cdot 2} = \frac{7}{8}.$$

2°. При делении смешанных чисел нужно предварительно представить их в виде дробей и применить правило деления дроби на дробь. Например,

$$3\frac{5}{7} : 2\frac{1}{3} = \frac{26}{7} : \frac{7}{3} = \frac{26 \cdot 3}{7 \cdot 7} = \frac{78}{49}.$$

3°. Любое целое число можно представить в виде дроби. Например, $5 = \frac{5}{1}$, $3 = \frac{3}{1}$ и т. д. Это позволяет производить умножение и деление целого числа на дробь (или наоборот). Например,

$$3 : \frac{4}{5} = \frac{3}{1} : \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 1} = \frac{15}{4}.$$

8. Десятичные дроби

1°. Обыкновенную дробь, знаменатель которой равен 10, 100, 1000 и т. д. (т. е. изображен единицей с нулями), называют ***десятичной дробью***. Например, $\frac{3}{10} = 0{,}3$; $\frac{51}{100} = 0{,}51$; $\frac{7}{1000} = 0{,}007$ и т. д.

2°. Сложение и вычитание десятичных дробей. При сложении (вычитании) десятичных дробей числа записывают так, чтобы одинаковые разряды были помещены один под другим, а запятая — под запятой, и складывают (вычитают) как натуральные числа.

В ответе как при сложении, так и при вычитании ставят запятую под запятой соответственно в слагаемых и в уменьшаемом и вычитаемом. Например:

$$\begin{array}{r} 0{,}132 \\ +\ 2{,}354 \\ \hline 2{,}486 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9{,}871 \\ -\ 7{,}320 \\ \hline 2{,}551 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16{,}200 \\ -\ 4{,}752 \\ \hline 11{,}448 \end{array}$$

3°. Умножение десятичных дробей. Чтобы умножить одну десятичную дробь на другую, надо выполнить умножение, не обращая внимания на запятые, и в полученном произведении отделить справа запятой столько цифр, сколько их имеется после запятой в обоих множителях вместе. Например, $12{,}27 \cdot 0{,}021 = 0{,}25767$.

4°. Деление десятичных дробей.

а) Разделим 4,46 на 2. Делим на 2 сначала целую часть числа, потом десятые и, наконец, сотые доли, т. е. $4{,}46 : 2 = 2{,}23$.

б) Разделим 1,2345 на 5. В целой части частного получим нуль (так как единица не делится на 5), т. е. $1{,}2345 : 5 = 0{,}2469$.

в) Разделим 1,25 на 1,6. Увеличим делимое и делитель в 10 раз, т. е. $12{,}5 : 16 = 0{,}78125$.

5°. Чтобы разделить число на десятичную дробь, нужно отбросить в делителе запятую, а затем увеличить делимое во столько раз, во сколько раз увеличился делитель при отбрасывании в нем запятой, после чего выполнить деление по правилу деления на целое число.

Замечание. При умножении (делении) десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д. достаточно перенести запятую вправо (влево) на столько цифр, сколько нулей во множителе (делителе). Например, $3{,}576 \cdot 100 = 357{,}6$; $2{,}53 : 10 = 0{,}253$.

9. Обращение десятичной дроби в обыкновенную и обыкновенной в десятичную. Периодические дроби

1°. Чтобы обратить десятичную дробь в обыкновенную, достаточно в числителе дроби записать число, находящееся после запятой, а в знаменателе — единицу с нулями, причем нулей должно быть столько, сколько цифр справа от запятой. Например,

$$0{,}7 = \frac{7}{10}; \quad 0{,}25 = \frac{25}{100}; \quad 0{,}007 = \frac{7}{1000}.$$

2°. Чтобы обратить обыкновенную дробь в десятичную, следует разделить числитель на знаменатель по правилу деления десятичной дроби на целое число. Например, для дроби $\frac{7}{25}$ имеем

$$\begin{array}{r|l}
-\,70 & 25 \\ \cline{2-2}
\underline{50} & 0{,}28 \\
-\,200 & \\
\underline{200} & \\
0 &
\end{array}$$

Заметим, что при этом может получиться бесконечная десятичная дробь. Например, для дроби $\frac{3}{7}$ имеем

```
_30  |7
 28   0,428571...
 _20
  14
  _60
   56
   _40
    35
    _50
     49
     _10
        7
        3
```

Таким образом, мы вернулись к началу деления числа 3 на 7, следовательно, этот процесс будет продолжаться бесконечно.

3°. Бесконечную десятичную дробь, в которой, начиная с некоторого разряда, цифры повторяются, называют ***периодической***. Например, 0,333...; 2,6777...; 4,0424242... .

Любую обыкновенную дробь можно записать в виде либо конечной десятичной дроби, либо бесконечной периодической дроби.

Правило перевода бесконечной периодической дроби в обыкновенную таково:

Чтобы обратить периодическую дробь в обыкновенную, надо из числа, находящегося до второго периода, вычесть число, находящееся до первого периода, и записать эту разность в числитель, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и после девяток дописать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Например:

$$0{,}(45) = \frac{45-0}{99} = \frac{5}{11}; \;\; 3{,}1(73) = \frac{3173-31}{990} = \frac{3142}{990} = \frac{1571}{495}.$$

10. Отношение. Пропорция

1°. ***Отношением*** числа x к числу y называют частное чисел x и y, т. е. $\frac{x}{y}$ (или $x : y$).

2°. Отношение $\frac{x}{y}$ означает, во сколько раз x больше y, или какую часть числа y составляет число x.

3°. В отношении $\frac{x}{y}$ число x называют ***предыдущим*** членом, y — ***последующим***.

4°. ***Пропорцией*** называют равенство двух отношений, т. е.

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}.$$

5°. Числа a и y называют ***крайними членами***, а числа x и b — ***средними членами*** пропорции.

11. Свойства пропорций

1°. *Произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов*, т. е. если $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$, то $ay = bx$.

2°. Обратно, числа a, b, x, y составляют пропорцию $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$, если $ay = bx$.

3°. Из пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ вытекают следующие производные пропорции:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a},$$

т. е. *в пропорции можно менять местами крайние и средние члены или те и другие одновременно*.

4°. Чтобы найти неизвестный средний (или крайний) член пропорции, надо произведение крайних (средних) членов разделить на известный средний (крайний) член пропорции:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{c} \Rightarrow x = \frac{ac}{b}; \quad \frac{x}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow x = \frac{ad}{c}.$$

12. Свойства отношений

1°. Если даны два равных отношения $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, то

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}; \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d},$$

т. е. *сумма* (или разность) *членов первого отношения так относится к своему последующему члену, как сумма* (разность) *членов второго отношения к своему последующему.*

2°. Если даны несколько равных отношений $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{x}{y} = \ldots,$ то

$$\frac{a + c + x + \ldots}{b + d + y + \ldots} = \frac{a}{b},$$

т. е. *сумма предыдущих членов так относится к сумме последующих, как каждый из предыдущих к своему последующему.*

13. Процент. Основные задачи на проценты

1°. ***Процентом*** называют сотую часть какого-либо числа. Процент обозначают знаком %. Например, 5%; 100%.

2°. Если данное число принять за 1, то 1% составляет 0,01 этого числа, 25% составляют 0,25 числа $\left(\text{или } \frac{1}{4} \text{ числа}\right)$ и т. д.

Таким образом, чтобы число процентов выразить в виде дроби, достаточно число процентов разделить на 100. Например, 125% = 1,25; 2,3% = 0,023.

3°. Нахождение процентов данного числа. Чтобы найти a% от числа b, надо b умножить на $\frac{a}{100}$.

Например, 30% от 60 р. составляют $\frac{60 \cdot 30}{100} = 18$ (р.).

4°. Нахождение числа по его процентам. Если известно, что a% числа x равны b, то число x можно найти по формуле $x = \frac{b}{a} \cdot 100$.

Например, если 3% вклада в сбербанк составляют 150 р., то этот вклад равен $\frac{150}{3} \cdot 100 = 5000$ (р.).

5°. Нахождение процентного отношения чисел. Чтобы найти процентное отношение двух чисел a и b, надо отношение этих чисел умножить на 100, т. е. вычислить $\frac{a}{b} \cdot 100\%$.

Пусть, например, при плановом задании 60 автомобилей в день завод выпустил 90 автомобилей; тогда он выполнил план на $\frac{90}{60} \cdot 100\%$, т. е. на 150%.

14. Деление числа на части, прямо и обратно пропорциональные данным числам

1°. Чтобы разделить некоторое число пропорционально данным числам (разделить в данном отношении), надо разделить это число на сумму данных чисел и результат умножить на каждое из них.

Пусть, например, данный отрезок длиной в 15 см требуется разделить в отношении 2 : 3. Имеем $\frac{15}{5} \cdot 2 = 6$ (см); $\frac{15}{5} \cdot 3 = 9$ (см).

2°. Чтобы разделить число на части, обратно пропорциональные данным числам, достаточно разделить это число на части, прямо пропорциональные числам, обратным данным.

Пусть, например, требуется разделить число 27 обратно пропорционально числам 4 и 5. Числа, обратные данным, относятся как $\frac{1}{4} : \frac{1}{5} = 5 : 4$; тогда получим $\frac{27}{9} \cdot 5 = 15$; $\frac{27}{9} \cdot 4 = 12$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение обыкновенной дроби.

2. Из множества $\left\{\frac{3}{7}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{7}{7}; \frac{8}{5}\right\}$ выделите подмножество: правильных дробей; неправильных дробей.

3. Сформулируйте основное свойство дроби.

4. Сравните дроби по величине: а) $\frac{11}{14}$ и $\frac{8}{14}$; б) $\frac{7}{13}$ и $\frac{7}{14}$; в) $\frac{3}{14}$ и $\frac{5}{21}$.

5. Сравните выражения $87 \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{12}{13}$ и $87 \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12}$, не производя действий.

6. Какие операции (действия) возможны на множестве дробных чисел?

7. Можно ли применять к дробным числам законы сложения и умножения натуральных чисел?

8. Сформулируйте правила умножения и деления дробей.

9. Какие дроби называют взаимно обратными? Приведите пример.

10. Какую дробь называют десятичной?

11. Выразите в килограммах: а) 33 кг 246 г; б) 7 г.

12. Выразите в метрах: а) 3 м 2 дм; б) 1 м 5 см; в) 3 см.

13. Что называют отношением чисел? Сформулируйте свойства отношений.

14. Что называют пропорцией? Сформулируйте свойства пропорций.

15. Что называют процентом? Какие три основные задачи на проценты вы знаете?

16. Выразите в виде дроби: а) 5%; б) 20%; в) 72%; г) 100%; д) 200%; е) 7,5%; ж) 0,75%.

17. Найдите процентное отношение чисел: а) 1 к 4; б) 3 к 5; в) 5 к 2; г) 12,5 к 50; д) 3,2 к 1,28.

18. Найдите: а) 4% от 75; б) 15% от 84 кг; в) $18\frac{1}{3}$ % от 330 м; г) 160% от 82 р. 25 к.; д) 45% от 1 га 4 а.

19. Найдите число, если: а) 40% его равны 12; б) 1,25% его равны 55; в) 0,8% его равны 1,84; г) 15% его равны 13 р. 50 к.; д) $16\frac{2}{3}$ % его равны 2 ч 30 мин.

20. Найдите x, если:
а) $7\% \cdot x = 182$;
б) $60\% \cdot x = 32$;
в) $1\frac{2}{3}\% \cdot x = 4{,}75$;
г) $7{,}5\% \cdot x = 3{,}3$;
д) $2{,}5\% \cdot x = 0{,}15$;
е) $0{,}8\% \cdot x = 1{,}2$;
ж) $10{,}75\% \cdot x = 8{,}6$.

21. Мясо при варке теряет 35% своей массы. Сколько получится вареного мяса из 2 кг сырого? Сколько потребуется сырого мяса для получения 2,6 кг вареного?

22. Является ли верной пропорция $3\frac{7}{9} : \frac{2}{3} = 3{,}4 : 0{,}6$?

23. Найдите неизвестный член пропорции $0{,}3x : 3\frac{1}{3} = 6 : 1{,}5$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Является ли верной пропорция $3{,}75 : 10{,}4 = 3\frac{11}{13} : 10\frac{2}{3}$?

2. По плану завод должен изготовить 2000 тракторов. Сколько тракторов составляет 1% от плана? 13% от плана?

3. Фабрика выпускала каждый день 1000 кг конфет. Администрация фабрики решила увеличить производство конфет ежедневно на 5%. Сколько килограммов конфет должна выпускать фабрика через 1 день; через 2 дня; через 3 дня?

4. Вкладчик положил в банк 20 000 р. при 8% годовых. Какова будет величина вклада через 3 года?

5. Цена некоторого товара снижается ежегодно на 10%. На сколько процентов по сравнению с первоначальной понизится цена товара через 4 года?

6. Найдите число, 3,6% которого равны значению выражения

$$(3 + 4{,}2 : 0{,}1) : \left(1 : 0{,}3 - 2\frac{1}{3}\right) : 0{,}3125.$$

7. Число 196 разделите на части, пропорциональные числам: а) 1, 2 и 5; б) $\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{3}$ и 3.

ОТВЕТЫ

1. Да. **2.** 20; 260. **3.** 1050 кг; 1102,5 кг; 1157,625 кг. **4.** 25 194 р. 24 к. **5.** На 34,39%. **6.** 4000. **7.** а) 24,5; 49; 122,5; б) 14; 56; 126.

Решения и методические указания

К упражнению 1

1. Как известно, пропорцией называют равенство двух отношений.

2. Перепишем данное условие, исходя из определения пропорции:

$$\frac{3{,}75}{10{,}4} = \frac{3\frac{11}{13}}{10\frac{2}{3}}. \qquad (1)$$

3. Воспользуемся следующим свойством пропорции: произведение ее крайних членов равно произведению средних членов, т. е.

$$3{,}75 \cdot 10\frac{2}{3} = 10{,}4 \cdot 3\frac{11}{13}. \qquad (2)$$

4. Упростим сначала левую часть равенства (2), а затем и его правую часть:

$$\text{а) } 3{,}75 \cdot 10\frac{2}{3} = 3\frac{3}{4} \cdot 10\frac{2}{3} = \frac{15}{4} \cdot \frac{32}{3} = 5 \cdot 8 = 40;$$

$$\text{б) } 10{,}4 \cdot 3\frac{11}{13} = 10\frac{2}{5} \cdot 3\frac{11}{13} = \frac{52}{5} \cdot \frac{50}{13} = 10 \cdot 4 = 40.$$

Итак, данная пропорция является верной.

К упражнению 2

1. Как известно, процентом данного числа A называют число $0{,}01a$. Обозначение: $1\%(a) = 0{,}01a$.

2. Тогда 1% от плана составляет

$$1\%(2000) = 0{,}01 \cdot 2000 = 20 \text{ тракторов.}$$

3. Значит, 13% от плана составляют

$$13\%(2000) = 0{,}13 \cdot 2000 = 260 \text{ тракторов.}$$

К упражнению 3

1. Фабрика выпускала каждый день 1000 кг конфет, что составляло 100% от плана.

2. При увеличении плана на 5% он станет равным 105%.

3. Значит, нам нужно найти 105% от 1000, т. е.

$$105\%(1000) = 1{,}05 \cdot 1000 = 1050 \text{ кг.}$$

4. Таким образом, через день фабрика должна выпустить 1050 кг конфет.

5. Во второй день фабрика должна увеличить количество конфет, равное 1050 кг и принимаемое за 100%, еще на 5%. Следовательно, во второй день она должна выпустить 105% от 1050 кг. Это составляет

$$105\%(1050) = 1{,}05 \cdot 1050 = 1102{,}5 \text{ кг.}$$

6. Аналогично, за третий день фабрика должна выпустить

$$1{,}05 \cdot 1102{,}5 = 1157{,}625 \text{ кг.}$$

К упражнению 4

1. Анализируя решение предыдущего упражнения, заметим, что на самом деле мы определяли следующие величины: $1{,}05 \cdot 1000$; $1{,}05^2 \cdot 1000$; $1{,}05^3 \cdot 1000$.

2. В общем виде имеем:

а) $p\%$ от числа a составляют $0{,}01p \cdot a$;

б) $p\%$ от полученного результата составляют $(0{,}01p)^2 \cdot a$;

в) $p\%$ от нового результата составляют $(0{,}01p)^3 \cdot a$ и т. д.

В результате получаем так называемые сложные проценты.

3. Формулу

$$N = (0{,}01p)^n \cdot a$$

называют <u>*формулой сложных процентов*</u>. Ее можно записать так: $N = q^n \cdot a$, где $q = 0{,}01p$, причем $q > 1$ (так как $p > 100$).

4. В этой задаче мы имеем дело с формулой сложных процентов, где $q = 1{,}08$ и $n = 3$. Поэтому величина вклада через 3 года составит

$$N = 1{,}08^3 \cdot 20\,000 = 25\,194{,}24 \text{ р.}$$

К упражнению 5

1. Эта задача на вычисление пониженного процента.

2. Воспользуемся формулой сложных процентов. Снижение цены на 10% означает, что новая цена составит 90% = 0,9 первоначальной.

3. Согласно формуле сложных процентов, через 4 года цена товара будет равна $0{,}9^4 = 0{,}6561 = 65{,}61\%$ первоначальной, а это на 34,39% ниже.

Тема 3

Координатная прямая. Множество целых чисел. Положительные и отрицательные числа. Множество рациональных чисел. Модуль числа. Сравнение рациональных чисел. Сложение и вычитание рациональных чисел. Умножение и деление рациональных чисел. Возведение рациональных чисел в степень с натуральным показателем

Теоретические сведения

1. Координатная прямая

1°. Прямую с выбранными на ней началом отсчета, единичным отрезком и направлением называют ***координатной прямой***.

2°. Соответствие между множеством натуральных чисел и точками координатной прямой можно установить, выбрав на прямой произвольную точку 0, а затем с помощью единичного отрезка отметив на прямой точки, которым соответствуют натуральные числа (рис. 4).

2. Множество целых чисел

1°. Отметим точки, симметричные точкам 1, 2, 3, ... относительно точки 0. Обозначим их через –1, –2, –3, ... Числа 1 и –1, 2 и –2 и т. д. на координатной прямой расположены симметрично. Такие числа называют ***противоположными***.

2°. Числа натуральные, им противоположные, а также число нуль составляют множество ***целых чисел*** (множество ***Z***).

3°. Каждому целому числу можно поставить в соответствие единственную точку координатной прямой (рис. 5).

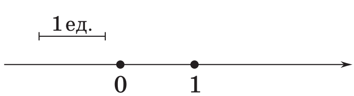


Рис. 4

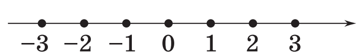


Рис. 5

3. Положительные и отрицательные числа

1°. Условимся считать числа 1, 2, 3, ..., расположенные правее числа 0, ***целыми положительными числами***. Тогда числа, им противоположные, т. е. −1, −2, −3, ..., назовем ***целыми отрицательными числами***.

2°. Множество натуральных чисел, дополненное нулем, называют множеством ***целых неотрицательных чисел*** и обозначают $\boldsymbol{Z}_0 = \{x \mid x = 0 \text{ или } x \in \boldsymbol{N}\}$. Можно также записать: $\boldsymbol{Z}_0 = \boldsymbol{N} \cup \{0\}$.

4. Множество рациональных чисел

1°. Каждой дроби (обыкновенной или десятичной) можно поставить в соответствие какую-либо точку координатной прямой. При этом получим как положительные, так и отрицательные дробные числа.

2°. Объединение множеств целых и дробных чисел (положительных и отрицательных) составляет множество ***рациональных чисел*** (множество $\boldsymbol{Q}$). Любое рациональное число можно записать в виде $\frac{p}{q}$, где $p \in \boldsymbol{Z}_0$, $q \in \boldsymbol{Z}$, причем $q \neq 0$ (так как деление на нуль не имеет смысла). Говорят также, что дробь $\frac{p}{q}$, знаменатель которой равен нулю, не имеет смысла.

3°. Каждому рациональному числу можно поставить в соответствие единственную точку координатной прямой.

4°. На множестве $\boldsymbol{Q}$ можно производить сложение, вычитание, умножение и деление (кроме деления на нуль).

5. Модуль числа

1°. ***Модулем числа** a* называют само это число, если $a \geqslant 0$, или это число, взятое с противоположным знаком, если $a < 0$.

Модуль числа a обозначают символом $|a|$. Таким образом,

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

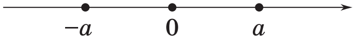


Рис. 6

2°. Если $a \neq 0$, то на координатной прямой модулю числа a соответствуют две точки, равноудаленные от нуля (рис. 6).

Таким образом, модуль числа есть расстояние от начала отсчета до точки, которой соответствует это число.

6. Сравнение рациональных чисел

Из установленного на координатной прямой соответствия следует, что то число больше, которое расположено правее. Отсюда следует, что: а) всякое положительное число больше нуля и больше отрицательного числа; б) всякое отрицательное число меньше нуля; в) из двух отрицательных чисел больше то, модуль которого меньше. Например, $-3{,}8 > -5{,}1$, так как $|-3{,}8| < |-5{,}1|$.

7. Сложение и вычитание рациональных чисел

1°. Сумма двух чисел с одинаковыми знаками равна числу того же знака, модуль суммы равен сумме модулей слагаемых. Например,

$$(-6) + (-5{,}3) = -(6 + 5{,}3) = -11{,}3.$$

2°. Сумма двух чисел с разными знаками равна числу, модуль которого получается вычитанием из большего модуля меньшего, а знак суммы совпадает со знаком слагаемого, имеющего больший модуль. Например,

$$(+4) + (-10) = -(10 - 4) = -6.$$

3°. Сумма противоположных чисел равна нулю. Например,

$$(+6) + (-6) = 0.$$

4°. Чтобы вычесть из числа a число b, достаточно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому. Например,

$$a - b = a + (-b); \quad -5 - (+3) = -5 + (-3) = -8.$$

8. Умножение и деление рациональных чисел

1°. Произведение двух чисел одного знака есть число положительное. Например,

$$(-6) \cdot (-2{,}3) = 13{,}8.$$

2°. Произведение двух чисел с разными знаками есть число отрицательное. Например,

$$(+6) \cdot (-2{,}3) = -13{,}8.$$

3°. Аналогично производится деление. Например:

$$\text{а) } (-18) : (-9) = 2; \quad \text{б) } (+24) : (-3) = -8.$$

9. Возведение рациональных чисел в степень с натуральным показателем

1°. ***Степенью*** числа a с показателем k, где $a \in \boldsymbol{Q}$, $k \in \boldsymbol{N}$, называют произведение k множителей, каждый из которых равен a:

$$a^k = \underbrace{a \cdot a \ \dots \ a}_{k \text{ раз}}.$$

Число a называют ***основанием степени***, а число k — ***показателем степени***.

2°. Четная степень отрицательного числа есть число положительное; например, $(-3)^{24} > 0$.

Нечетная степень отрицательного числа есть число отрицательное; например, $(-0{,}75)^{17} < 0$.

Любая степень положительного числа есть число положительное; например, $12^k > 0$.

3°. При возведении нуля в любую натуральную степень k получается нуль, т. е. $0^k = 0$.

4°. При возведении единицы в любую натуральную степень k получается единица, т. е. $1^k = 1$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение координатной прямой.

2. Какое соответствие существует между множеством натуральных чисел и множеством точек координатной прямой?

3. Можно ли утверждать, что каждой точке координатной прямой соответствует определенное натуральное число?

4. Какие числа составляют множество $\boldsymbol{Z}$?

5. Как расположены на координатной прямой противоположные числа? Чему равна сумма чисел a и $-a$? Какое число противоположно нулю?

6. Какие числа составляют множество $\boldsymbol{Q}$?

7. Дайте определение модуля числа и его геометрическое истолкование.

8. Скольким точкам на прямой соответствует $|5|$? Как расположены эти точки?

9. Какое соответствие существует между множеством рациональных чисел и множеством точек координатной прямой?

10. Как сравнивают: два положительных числа; два отрицательных числа; положительные и отрицательные числа?

11. Сформулируйте правила сложения и вычитания положительных и отрицательных чисел.

12. Сформулируйте правила умножения и деления положительных и отрицательных чисел.

13. Всегда ли выполнимо деление на множестве $\boldsymbol{Q}$?

14. Применимы ли законы сложения и умножения на множестве $\boldsymbol{Q}$?

15. Дайте определение степени числа с натуральным показателем.

16. Чему равно значение: а) $(-1)^{25}$; б) $(-1)^{36}$; в) 0^{15}?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите дополнение множества чисел, кратных 4, до множества чисел, кратных 2.

2. Запишите без знака модуля выражение:

а) $|x-2|+3x$; б) $|x+2|-3x$; в) $|x-2|-3x$;

г) $-3|x-2|+4x$.

3. Освободитесь от знаков модулей в выражении:

а) $2|3-x|-3|3x+7|-7x$; б) $2|x-3|-3|3x+7|+7x$;

в) $|x+2|-x$; г) $|x-|x||+2x$.

4. При каких значениях x верно равенство:

а) $2x=|x|$; б) $x=|-x|$; в) $-x=|-x|$; г) $|x|=-x$?

5. Вычислите:

а) $0{,}5(|a+x|-|a-x|)$ при $a=-2$, $x=-6$;

б) $|a-x|-|y+k|$ при $a=-5$, $x=4$, $y=1$, $k=-3$.

6. Где на координатной прямой расположены числа, для которых:

а) $|x|<1$; б) $|x|>3$; в) $-2<|x|<4$?

7. Пусть x — натуральное число. Какому числовому множеству принадлежит число:

а) $x+2$; б) $2x$; в) $x(x+2)$; г) $(x^3+1):(x+1)$;

д) $(x^3+1):(x^2+1)$?

Задания для повторения

8. Верно ли утверждение:

а) если натуральное число делится нацело на 6, то оно делится на 3;

б) если сумма двух чисел — четное число, то каждое слагаемое четно;

в) если произведение двух чисел равно нулю, то каждый сомножитель равен нулю;

г) если куб некоторого числа делится нацело на 8, то это число четное?

9. Докажите, что сумма трех последовательных натуральных чисел делится нацело на 3, а их произведение делится на 6.

10. Рабочие в теплице собрали 42 кг свежих грибов, содержащих по массе 95% воды. Когда грибы подсушили, их масса стала равной 3 кг. Каков процент содержания воды по массе в сухих грибах?

ОТВЕТЫ

1. $4k+2$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **2.** а) $4x-2$, если $x \geqslant 2$; $2x+2$, если $x<2$; б) $2-2x$, если $x \geqslant -2$; $-4x-2$, если $x<-2$; в) $-2x-2$, если $x \geqslant 2$; $2-4x$, если $x<2$; г) $x+6$, если $x \geqslant 2$; $7x-6$, если $x<2$. **3.** а) 27, если $x<-\frac{7}{3}$; $-18x-15$, если $-\frac{7}{3} \leqslant x<3$; $-14x-27$, если $x \geqslant 3$; б) $14x+27$, если $x<-\frac{7}{3}$; $-4x-15$, если $-\frac{7}{3} \leqslant x<3$; -27, если $x \geqslant 3$; в) 2, если $x \geqslant -2$; $-2-2x$, если $x<-2$; г) $2x$, если $x \geqslant 0$; 0, если $x<0$. **4.** а) $x \geqslant 0$; б) $x \geqslant 0$; в) $x \leqslant 0$; г) $x \leqslant 0$. **5.** а) 2; б) 7. **6.** а) $-1<x<1$; б) $x<-3$ и $x>3$; в) $-4<x<4$. **7.** а) $\boldsymbol{N}$; б) $\boldsymbol{N}$; в) $\boldsymbol{N}$; г) $\boldsymbol{N}$; д) $\boldsymbol{Q}$. **8.** а) Да; б) нет; в) нет; г) да. **10.** 30%.

Решения и методические указания

К упражнению 1

1. Множество чисел, кратных 4, — это числа вида $4k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. Очевидно, эти числа кратны также и 2.

2. Из чисел вида $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$, не кратных 4, кратны 2 только числа вида $4k+2$.

3. Таким образом, искомым является множество чисел вида $4k+2$, где $k \in \boldsymbol{Z}$.

К упражнению 2а

1. В данном выражении $|x - 2| + 3x$ первое слагаемое $|x - 2|$ связано с модулем, а второе $3x$ не связано.

2. Используя определение модуля, получаем

$$|x - 2| + 3x = \begin{cases} x - 2 + 3x, & \text{если } x - 2 \geqslant 0; \\ -(x - 2) + 3x, & \text{если } x - 2 < 0. \end{cases}$$

Итак,

$$|x - 2| + 3x = \begin{cases} 4x - 2, \text{ если } x \geqslant 2; \\ 2x + 2, \text{ если } x < 2. \end{cases}$$

К упражнению 3а

1. Дано выражение $2|3 - x| - 3|3x + 7| - 7x$.

2. Определим точки, в которых выражения, находящиеся под знаком модуля, равны нулю. Из уравнений $3 - x = 0$ и $3x + 7 = 0$ следует, что $x = 3$ и $x = -\frac{7}{3}$.

3. Отметим эти точки на числовой прямой (рис. 7) и получим три промежутка: $x < -\frac{7}{3}$, $-\frac{7}{3} \leqslant x < 3$, $x \geqslant 3$.

Рис. 7

4. Рассмотрим данное выражение на каждом промежутке и упростим:

а) $\begin{cases} x < -\frac{7}{3}, \\ 2(3 - x) + 3(3x + 7) - 7x, \end{cases}$ или $\begin{cases} x < -\frac{7}{3}, \\ 27; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -\frac{7}{3} \leqslant x < 3, \\ 2(3 - x) - 3(3x + 7) - 7x, \end{cases}$ или $\begin{cases} -\frac{7}{3} \leqslant x < 3, \\ -18x - 15; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ -2(3 - x) - 3(3x + 7) - 7x, \end{cases}$ или $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ -14x - 27. \end{cases}$

К упражнению 9

1. Три последовательных натуральных числа могут быть записаны в следующем виде: k; $k + 1$; $k + 2$.

2. Их сумма $k + k + 1 + k + 2 = 3k + 3$ делится на 3, так как каждое слагаемое делится на 3.

3. Произведение этих же чисел равно $k(k + 1)(k + 2)$. Одно из записанных чисел обязательно делится на 2, а другое — на 3.

4. Значит, произведение будет делиться на 6.

К упражнению 10

1. Найдем количество воды, которое содержится в 42 кг свежих грибов:

$$\frac{42 \cdot 95}{100} = 39{,}9 \text{ (кг)}.$$

2. Значит, из 42 кг свежих грибов получили $42 - 39{,}9 = 2{,}1$ кг сухих грибов.

3. Найдем количество воды в подсушенных грибах: $3 - 2{,}1 = 0{,}9$ кг.

4. Искомое процентное отношение составляет

$$\frac{0{,}9}{3} \cdot 100\% = 30\%.$$

Тема 4

Свойства степени с натуральным показателем. Числовые выражения. Выражения с переменными. Тождественно равные выражения. Одночлены. Многочлены. Преобразование суммы и разности многочленов. Умножение многочлена на одночлен и многочлена на многочлен. Разложение многочлена на множители способом вынесения общего множителя за скобки. Разложение многочлена на множители способом группировки. Тождества сокращенного умножения. Выделение квадрата двучлена из квадратного трехчлена. Примеры использования различных способов разложения на множители. Дробь

Теоретические сведения

1. Свойства степени с натуральным показателем

1°. При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, а основание остается прежним:

$$a^k \cdot a^c = a^{k+c}; \quad k, c \in \boldsymbol{N}.$$

Например, $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$.

2°. При делении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней вычитаются, а основание остается прежним:

$$a^k : a^c = a^{k-c}; \quad k, c \in \boldsymbol{N}.$$

Например, $a^5 : a^3 = a^{5-3} = a^2$.

3°. При возведении степени в степень показатели степеней перемножаются, а основание остается прежним:

$$(a^k)^c = a^{kc}; \quad k, c \in \boldsymbol{N}.$$

Например, $(a^4)^3 = a^{12}$.

4°. Степень произведения равна произведению степеней множителей:

$$(abc)^k = a^k b^k c^k; \quad k \in \boldsymbol{N}.$$

Например, $(abc)^2 = a^2 b^2 c^2$.

5°. Степень частного равна частному степеней делимого и делителя:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k};\ b \neq 0,\ k \in \boldsymbol{N}.$$

Например, $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b^4}$.

2. Числовые выражения

1°. С помощью чисел, знаков действий и скобок можно составлять различные числовые выражения. Например, $\frac{25-15}{16}$; $5-(3+8\cdot 4):3$.

2°. Если, соблюдая принятый порядок, выполнить указанные в выражении действия, то получится число; например, $\frac{25-15}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$; число $\frac{5}{8}$ называют ***числовым значением***, или ***значением выражения***.

3°. Выражение $\frac{5+6}{3{,}5\cdot 2-7}$ не имеет числового значения, так как не все указанные действия можно выполнить (деление на нуль невозможно).

3. Выражения с переменными

1°. Примерами выражений с переменными являются выражения $5+\frac{a}{3}$, x^2+y^2-1 и т. д. Значение выражения, содержащего переменную, зависит от значения переменной.

2°. При некоторых значениях переменных выражение с переменными может не иметь смысла. Например, выражение $\frac{3}{x-5}$ при $x=5$ не имеет смысла (деление на нуль!).

3°. Множество значений переменных, при которых выражение с переменными имеет смысл, называют ***областью определения*** этого ***выражения***.

4. Тождественно равные выражения

1°. Два выражения называют ***тождественно равными***, если при всех значениях входящих в них переменных, принадлежащих общей области определения, соответственные значения этих выражений равны. Тождественное равенство обозначается символами = или ≡.

2°. Равенства, в которых левая и правая части — тождественно равные выражения, называют ***тождествами***. Например, $(a-x)^2 = a^2 - 2ax + x^2$; $\frac{a^3-8}{a-2} = a^2 + 2a + 4$ при $a \neq 2$ — тождества.

5. Одночлены

1°. Выражение, представляющее собой произведение чисел, переменных и степеней переменных, называют ***одночленом***. Например, $3ax^4$, $-2b^3$, $0{,}5c^3(-3b^2)$ — одночлены. Выражения $x+1$, a^2+b^4, $\frac{3y^3}{x}$ не являются одночленами, так как представляют сумму или частное переменных и чисел.

2°. ***Стандартным видом одночлена*** называют произведение, составленное из числового множителя (коэффициента) и буквенного выражения, в котором каждая из переменных взята в натуральной степени. Например, -2; a; 5^4; y^3; $-8a^2x^2$; $\frac{3}{5}a$.

3°. ***Степенью одночлена*** стандартного вида называют сумму показателей степеней переменных. Например, $8x^4y^2$ — одночлен шестой степени, степень одночлена $3x$ равна единице, а степень одночлена 5 равна нулю.

4°. Одночлены, отличающиеся только числовым коэффициентом или равные между собой, называют ***подобными***.

6. Многочлены

1°. Алгебраическую сумму одночленов называют ***многочленом***. Например, $2a^2 - 3ax^5 - 3$ есть многочлен. Выражение $\frac{y}{x} - xy^2 + x + 3$ не является многочленом, так как не все его слагаемые — одночлены.

2°. Если в многочлене все одночлены записаны в стандартном виде и приведены подобные члены, то полученный многочлен называют ***многочленом стандартного вида***. Например, $2x^2a^3 + 1{,}8xa^4 - 3a + 7$ — многочлен стандартного вида.

3°. ***Степенью многочлена*** стандартного вида называют наибольшую степень одночлена, входящего в этот многочлен. Например, $1 + 2x^2 - 5x^2y^3$ — многочлен пятой степени.

7. Преобразование суммы и разности многочленов

1°. Для того чтобы преобразовать сумму или разность многочленов в многочлен стандартного вида, надо: а) раскрыть скобки; б) привести подобные члены (слагаемые).

2°. Раскрытие скобок. Если перед скобками стоит знак «плюс», то, раскрывая скобки, следует сохранить знак каждого слагаемого суммы, заключенной в скобки.

Если перед скобками стоит знак «минус», то, раскрывая скобки, надо знаки слагаемых поменять на противоположные.

3°. Приведение подобных членов (слагаемых). Чтобы привести подобные слагаемые, достаточно сложить их коэффициенты (по правилу сложения положительных и отрицательных чисел) и полученное число умножить на буквенное выражение.

Например,

$$(5x^2 - 4x + 3) - (3x^2 - x + 2) =$$
$$= 5x^2 - 4x + 3 - 3x^2 + x - 2 = 2x^2 - 3x + 1.$$

З а м е ч а н и е. Если многочлен следует заключить в скобки, то это делается по правилу, аналогичному раскрытию скобок. Например,

$$17a^4 - 8a^3y - 6a^2y^2 - ay^3 = (17a^4 - 8a^3y) - (6a^2y^2 + ay^3).$$

8. Умножение многочлена на одночлен и многочлена на многочлен

1°. Чтобы умножить многочлен на одночлен, достаточно каждый член многочлена умножить на одночлен и полученные произведения сложить.

2°. Деление многочлена на одночлен производится по аналогичному правилу.

3°. Чтобы умножить многочлен на многочлен, достаточно каждый член первого многочлена умножить на каждый член второго и полученные произведения сложить.

Например,

$$5x(x - y) + (2x + y)(x - y) =$$
$$= 5x^2 - 5xy + 2x^2 - 2xy + xy - y^2 = 7x^2 - 6xy - y^2.$$

9. Разложение многочлена на множители способом вынесения общего множителя за скобки

Преобразование многочлена в произведение двух или нескольких многочленов (среди которых могут быть и одночлены) называют ***разложением многочлена на множители***.

Например, $3ax^4 - 6a^7x^7 + 12ax^3 = 3ax^3(x - 2a^6x^4 + 4)$.

Здесь был применен способ вынесения общего множителя за скобки. Заметим, что выражение в скобках мы получили, разделив каждый член многочлена на общий множитель $3ax^3$.

10. Разложение многочлена на множители способом группировки

1°. Пусть дан многочлен $ab + 2a - 3b - 6$. Представим его в виде суммы двух двучленов:

$$ab + 2a - 3b - 6 = (ab - 3b) + (2a - 6)$$

(здесь перед скобками стоит знак «плюс», поэтому знаки членов многочлена, заключаемых в скобки, не меняются).

Вынеся в первом двучлене за скобки b, во втором 2, получим $b(a - 3) + 2(a - 3)$. Далее вынесем за скобки $a - 3$; имеем

$$b(a - 3) + 2(a - 3) = (a - 3)(b + 2),$$

т. е.

$$ab + 2a - 3b - 6 = (a - 3)(b + 2).$$

2°. Разложим на множители многочлен $3(x - 2y)^2 - 3x + 6y$. Вынеся за скобки общий множитель 3, имеем $3(x - 2y)^2 - 3(x - 2y)$ (здесь перед вторыми скобками стоит знак «минус», поэтому знаки членов многочлена, заключаемых в скобки, меняем на противоположные). Далее выносим $3(x - 2y)$ и получаем $3(x - 2y) \times$ $\times (x - 2y - 1)$.

11. Тождества сокращенного умножения

1°. $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ (***разность квадратов***).
Например,

$$(3a)^2 - (x+a)^2 = (3a - x - a)(3a + x + a).$$

2°. $(a+x)^2 = (a+x)(a+x) = a^2 + 2ax + x^2$ (***квадрат суммы***).
Например,

$$(4 + 3x^2)^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3x^2 + (3x^2)^2 = 16 + 24x^2 + 9x^4.$$

3°. $(a+x)^3 = (a+x)^2(a+x) = (a^2 + 2ax + x^2)(a+x) =$
$= a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$ (***куб суммы***).
Например,

$$(x + 2y^2)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 2y^2 + 3x(2y^2)^2 + (2y^2)^3 =$$
$$= x^3 + 6x^2y^2 + 12xy^4 + 8y^6.$$

4°. $a^3 + x^3 = (a+x)(a^2 - ax + x^2)$ (***сумма кубов***).
Например,

$$(2x)^3 + (3y)^3 = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2).$$

5°. $(a-x)^2 = (a-x)(a-x) = a^2 - 2ax + x^2$ (***квадрат разности***).
Например,

$$(2a - 3x)^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3x + (3x)^2 = 4a^2 - 12ax + 9x^2.$$

6°. $(a-x)^3 = (a-x)^2(a-x) = (a^2 - 2ax + x^2)(a-x) =$
$= a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3$ (***куб разности***).
Например,

$$(a - 2x)^3 = a^3 - 3a^2 \cdot 2x + 3a(2x)^2 - (2x)^3 =$$
$$= a^3 - 6a^2x + 12ax^2 - 8x^3.$$

7°. $a^3 - x^3 = (a-x)(a^2 + ax + x^2)$ (***разность кубов***).
Например,

$$(2x)^3 - (3y)^3 = (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2).$$

8°. Приведем еще две формулы:
$(x + y + a)^2 = x^2 + y^2 + a^2 + 2xy + 2ax + 2ay$
(***квадрат трехчлена***),
$(x - y - a)^2 = x^2 + y^2 + a^2 - 2xy - 2ax + 2ay.$

12. Выделение квадрата двучлена из квадратного трехчлена

Пусть дан квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Преобразуем его следующим образом:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Примеры.

1. $3x^2 - 4x + 1 = 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}\right) =$

$$= 3\left(\left(x^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}\right) + \frac{1}{3} - \frac{4}{9}\right) = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}.$$

2. $-2x^2 - 9x + 5 = -2\left(x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{5}{2}\right) =$

$$= -2\left(\left(x^2 + 2 \cdot \frac{9}{4}x + \frac{81}{16}\right) - \left(-\frac{5}{2} - \frac{81}{16}\right)\right) = -2\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{121}{8}.$$

13. Примеры использования различных способов разложения на множители

1. $12a^2x^3 - 3a^2x^2 = 3a^2x^2(4x - 1)$.

Здесь использован способ вынесения общего множителя за скобки.

2. $a^3 + a^2y + 2ay^2 + 2y^3 = a^2(a + y) + 2y^2(a + y) = (a + y)(a^2 + 2y^2)$.

Здесь использован способ группировки.

3. $8a^3 - c^3b^6 = (2a)^3 - (cb^2)^3 = (2a - cb^2)(4a^2 + 2acb^2 + c^2b^4)$.

Здесь использовано тождество сокращенного умножения (разность кубов).

4. $6x^2 + x - 2 = 6\left(x^2 + \frac{x}{6} - \frac{1}{3}\right) =$

$$= 6\left(x^2 + 2 \cdot \frac{x}{12} + \frac{1}{144} - \frac{1}{144} - \frac{1}{3}\right) = 6\left(\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 - \frac{49}{144}\right) =$$

$$= 6\left(x + \frac{1}{12} - \frac{7}{12}\right)\left(x + \frac{1}{12} + \frac{7}{12}\right) = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right).$$

Здесь использован способ выделения из трехчлена квадрата двучлена, а затем применена формула разности квадратов.

5. $2x^2 + 3x + 1 = 2x^2 + 2x + x + 1 = 2x(x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(2x + 1)$.

Здесь использован способ замены второго члена равной ему суммой двух одночленов.

6. $2x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 2 = 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x^2 + x + 2 =$
$= x^3(2x + 1) + x(2x + 1) + 2(x^2 + 1) =$
$= (2x + 1)(x^3 + x) + 2(x^2 + 1) = (2x + 1)x(x^2 + 1) + 2(x^2 + 1) =$
$= (x^2 + 1)((2x + 1)x + 2) = (x^2 + 1)(2x^2 + x + 2)$.

Здесь были последовательно использованы приведенные выше способы.

14. Дробь

1°. ***Дробью*** называют выражение вида $\frac{a}{b}$, где буквами a и b обозначены числовые выражения или выражения с переменными.

2°. ***Область определения*** дроби $\frac{a}{b}$ — это множество чисел, при которых данная дробь имеет числовое значение. Следовательно, областью определения дроби $\frac{a}{b}$ является множество $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

3°. При умножении числителя и знаменателя дроби на одно и то же выражение, отличное от нуля, значение дроби не меняется.

4°. Дробь $\frac{a}{b}$ равна нулю тогда и только тогда, когда $a = 0$ и $b \neq 0$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте правила умножения и деления степеней с одинаковыми основаниями.

2. Сформулируйте правила возведения степени в степень, произведения в степень и частного в степень.

3. Что следует понимать под значением данного выражения?

4. Всегда ли выражение, содержащее переменную, имеет числовое значение? Приведите примеры.

5. Что называют областью определения данного выражения? Приведите примеры.

6. Какие два выражения называют тождественно равными?

7. Какие равенства называют тождествами?

8. Какое выражение называют одночленом; многочленом?

9. Что называют коэффициентом одночлена? Какие одночлены называют подобными?

10. Сформулируйте правила раскрытия скобок, умножения многочлена на одночлен и многочлена на многочлен.

11. Что значит разложить многочлен на множители?

12. Перечислите известные вам способы разложения многочлена на множители.

13. Напишите в общем виде формулу: а) квадрата и куба двучлена; б) разности квадратов двух выражений; в) суммы и разности кубов двух выражений.

14. Что больше: а) $45^2 - 31^2$ или $44^2 - 30^2$; б) $297 \cdot 299$ или 298^2; в) $26^3 - 24^3$ или $(26 - 24)^3$; г) $(17 + 13)^3$ или $17^3 + 13^3$?

15. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{6^6 \cdot 2^3 - 3^6}{6^6 + 6^3 \cdot 3^3 + 3^6}$;

б) $\dfrac{5^4 + 5 \cdot 3^6}{5^3 + 5^2 \cdot 3^2}$.

16. Что такое квадратный трехчлен? В какой последовательности происходит выделение полного квадрата двучлена?

17. Выделите полный квадрат из квадратного трехчлена: а) $4x^2 - 6x + 5$; б) $-3x^2 + 4x - 3$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{12^5}{2^3 \cdot 3^4} : \dfrac{10^5}{2^6 \cdot 5^7}$; б) $\dfrac{638^2 - 362^2}{1300} \cdot \dfrac{26}{276}$.

2. Докажите, что $8^5 + 2^{21}$ делится нацело на 13.

3. Докажите, что $10^6 - 5^7$ делится нацело на 59.

4. Сравните 19^4 и $16 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 22$.

5. Докажите, что при любом натуральном k значение выражения:

а) $(k + 1)^2 - (k - 1)^2$ делится нацело на 4;

б) $(2k + 3)^2 - (2k - 1)^2$ делится нацело на 8;

в) $k^3 - k$ делится нацело на 6.

6. Разложите на множители:

а) $x^6 - 2^6$; б) $8 + x^3y^3$; в) $\dfrac{x^9}{27} - 8$; г) $\dfrac{x^9}{125} + 8$.

7. Разложите на множители:

а) $x^2 - y^2 - 8x + 16$; б) $9 - c^2 + a^2 + 6a$;

в) $x^3 + y^3 + 2xy(x + y)$; г) $36a^2 - (a^2 + 9)^2$;

д) $a^4 + ax^3 - a^3x - x^4$.

8. Выделите полный квадрат из квадратного трехчлена:

а) $4x^2 - 6x + 8$; б) $-2x^2 + 4x - 12$; в) $2x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{11}{9}$.

9. При каких натуральных значениях k дробь $\frac{5k^2 + 8k + 12}{k}$ принимает натуральные значения?

10. Сократите дробь:

а) $\frac{x^{33} - 1}{x^{33} + x^{22} + x^{11}}$; б) $\frac{a|a - 3|}{a^2 - a - 6}$;

в) $\frac{|x^2 - 1| + x^2}{2x^2 - 1}$; г) $\frac{x^2 - x + 1}{x^4 + x^2 + 1}$.

11. При каких натуральных значениях a дробь $\frac{(a-3)^2}{a}$ принимает натуральные значения?

12. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{x}{x^2 - x - 6} - \frac{x - 1}{3x^2 - 4x - 15}\right) : \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{3x^2 + 11x + 10}$;

б) $\left(\frac{a - 3}{a^2 - 3a + 9} - \frac{2a - 6}{a^3 + 27}\right) : \frac{a + 1}{2a^3 + 54}$;

в) $\left(1 + \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4}\right)\left(\frac{3x}{2x - 2} - \frac{3x + 2}{x} + 1\right)$;

г) $\left(\frac{x^2}{x^2 - y^2} - \frac{x^2y}{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{x}{xy + y^2} + \frac{y}{x^2 + xy}\right)\right) : \frac{y}{x - y}$;

д) $\left(\frac{4(a + b)^2}{ab} - 16\right)\left(\frac{(a + b)^2 - ab}{ab}\right) : \frac{a^3 - b^3}{ab}$;

е) $\frac{2 - x}{5} + \left(\frac{1}{1 - 2x}\right)^2 : \left(\frac{x + 2}{4x^3 - 4x^2 + x} - \frac{2 - x}{1 - 8x^3} \cdot \frac{4x^2 + 2x + 1}{2x^2 + x}\right)$.

13. Вычислите:

а) $\left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{2 - x} + \frac{1}{2 + x}\right) : \left(\frac{x^3 - 4x}{x + 1} : \frac{x^2 + 2x}{x + 1} - \frac{x^2 - 10}{x + 2}\right)$ при $x = -10{,}25$;

б) $\dfrac{a^2-1}{n^2+an}\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{n}}-1\right)\cdot\dfrac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2}:\left(n^2-\dfrac{1}{n}\right)$ при $n=\dfrac{1}{2}$.

14. Выполните тождественные преобразования выражения

$$A=\left(\frac{25}{a^2+5a+25}-\frac{2a}{5-a}-\frac{a^3+25a^2}{a^3-125}\right)\left(a-5+\frac{15a}{a-5}\right).$$

Задания для повторения

15. Из четырех чисел первые три пропорциональны числам 5, 3 и 20, а четвертое число составляет 15% от третьего. Найдите эти числа, если второе из них на 375 меньше суммы всех остальных.

16. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 8, а в остатке 1. Найдите остаток от деления этого числа на произведение его цифр.

17. Найдите размер вклада, 12% которого составляют 2700 р.

18. Жирность молока составляет 5%, а сметаны — 25%. Сколько килограммов сметаны можно получить из 800 кг молока?

ОТВЕТЫ

1. а) 19 200; б) 20. **4.** $19^4>16\cdot18\cdot20\cdot22$. **6.** а) $(x-2)(x+2)\times\times(x^4+4x^2+16)$; б) $(2+xy)(4-2xy+x^2y^2)$; в) $\left(\frac{x^3}{3}-2\right)\left(\frac{x^6}{9}+\frac{2}{3}x^3+4\right)$; г) $\left(\frac{x^3}{5}+2\right)\left(\frac{x^6}{25}-\frac{2}{5}x^3+4\right)$. **7.** а) $(x-4-y)(x-4+y)$; б) $(3+a-c)\times\times(3+a+c)$; в) $(x+y)(x^2+y^2+xy)$; г) $-(a-3)(a-3)(a+3)(a+3)$; д) $(a-x)(a+x)(a^2+x^2-ax)$. **8.** а) $4\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{4}$; б) $-2(x-1)^2-10$; в) $2\left(x-\frac{1}{9}\right)^2+\frac{97}{81}$. **9.** $k=1, 2, 3, 4, 6, 12$. **10.** а) $\frac{x^{11}-1}{x^{11}}$; б) $\frac{a}{a+2}$, если $a>3$; $-\frac{a}{a+2}$, если $-\infty<a<-2$ или $-2<a<3$; в) 1, если $-\infty<x<-1$ или $1<x<+\infty$; $\frac{1}{2x^2-1}$, если $-1\leqslant x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ или $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ или

$\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leqslant 1$; г) $\frac{1}{x^2+x+1}$. **11.** $a = 1$, $a = 9$. **12.** а) $\frac{2}{(x-3)(x-1)^2}$; б) $2(a-3)$; в) -1; г) $\frac{x}{x+y}$; д) $\frac{4(a-b)}{ab}$; е) $\frac{1}{2}$. **13.** а) $\frac{4}{49}$; б) -2. **14.** $a-5$, где $a \neq 5$. **15.** 75; 45; 300; 45. **16.** 1. **17.** 22 500 р. **18.** 160 кг.

Решения и методические указания

К упражнению 1а

1. Здесь в явной форме ни одно из свойств степени с натуральным показателем применить нельзя, так как все степени имеют различные основания.

2. Запишем некоторые степени в другом виде: $12^5 = (2 \cdot 6)^5 = 2^5 \cdot 6^5 = 2^5 \cdot 2^5 \cdot 3^5$ (степень произведения равна произведению степеней множителей); $10^5 = (2 \cdot 5)^5 = 2^5 \cdot 5^5$.

3. Учитывая записанные разложения, получим

$$\frac{12^5}{2^3 \cdot 3^4} : \frac{10^5}{2^6 \cdot 5^7} = \frac{2^{10} \cdot 3^5}{2^3 \cdot 3^4} \cdot \frac{2^6 \cdot 5^7}{2^5 \cdot 5^5} = 2^8 \cdot 3 \cdot 5^2 = 19\,200.$$

К упражнению 2

1. Преобразуем данное выражение так:

$$8^5 + 2^{21} = (2^3)^5 + 2^{21} = 2^{15} + 2^{21}.$$

2. Вынося за скобки общий множитель 2^{15}, получим

$$8^5 + 2^{21} = 2^{15} + 2^{21} = 2^{15}(1 + 2^6) = 2^{15} \cdot 65.$$

3. Следовательно, $8^5 + 2^{21}$ кратно 13.

К упражнению 4

1. Преобразуем произведение $16 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 22$ следующим образом:

$$(19-3)(19-1)(19+1)(19+3) =$$
$$= (19^2 - 3^2)(19^2 - 1) < 19^2 \cdot 19^2 = 19^4.$$

2. Значит, $19^4 > 16 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 22$.

К упражнению 5а

1. Используя формулу разности квадратов, упростим данное выражение:

$$(k+1)^2 - (k-1)^2 = (k+1-k+1)(k+1+k-1) = 2 \cdot 2k = 4k.$$

2. Полученное выражение $4k$ делится нацело на 4.

К упражнению 6в

1. Данный двучлен легко представить в виде разности кубов двух выражений:

$$\frac{x^9}{27} - 8 = \left(\frac{x^3}{3}\right)^3 - 2^3.$$

2. Применив формулу разности кубов, получим

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)^3 - 2^3 = \left(\frac{x^3}{3} - 2\right)\left(\frac{x^6}{9} + \frac{2}{3}x^3 + 4\right).$$

К упражнению 7а

1. Ни одно из тождеств сокращенного умножения непосредственно применить нельзя.

2. Объединив в одну группу первое, третье и четвертое слагаемые, получим квадратный трехчлен $x^2 - 8x + 16$, который можно записать в виде $(x-4)^2$.

3. Учитывая это, перепишем исходное выражение следующим образом:

$$x^2 - 8x + 16 - y^2 = (x-4)^2 - y^2.$$

4. Теперь, применяя формулу разности квадратов, получим

$$(x-4)^2 - y^2 = (x-4-y)(x-4+y).$$

К упражнению 7в

1. Замечаем, что $x^3 + y^3$ представляет собой сумму кубов двух выражений. Разложив эту сумму на множители, имеем

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2). \qquad (1)$$

2. Используя равенство (1), перепишем исходное выражение в виде

$$x^3 + y^3 + 2xy(x+y) = (x+y)(x^2 - xy + y^2) + 2xy(x+y). \qquad (2)$$

3. В выражении (2) общий множитель $x + y$ можно вынести за скобки; значит, окончательно имеем

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2 + 2xy) = (x+y)(x^2 + y^2 + xy).$$

К упражнению 8а

1. Сгруппируем два первых слагаемых и вынесем коэффициент при x^2 за скобки:

$$4\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) + 8.$$

2. Внутри скобок к выражению $x^2 - \frac{3}{2}x$ прибавим и вычтем квадрат числа, равного $\frac{1}{2}$ от $\frac{3}{2}$, т. е. $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$:

$$4\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16}\right) + 8.$$

3. Три первых слагаемых в скобках образуют полный квадрат. Следовательно, получим

$$4\left(\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right) + 8 = 4\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{4} + 8 = 4\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{4}.$$

К упражнению 9

1. Имеем

$$\frac{5k^2 + 8k + 12}{k} = \frac{5k^2}{k} + \frac{8k}{k} + \frac{12}{k} = 5k + 8 + \frac{12}{k}.$$

2. Исследуем полученное выражение:
   а) $k \in \boldsymbol{N}$ — по условию;
   б) $5k$ — натуральное число, т. е. $5k \in \boldsymbol{N}$;
   в) 8 — натуральное число, т. е. $8 \in \boldsymbol{N}$;
   г) следовательно, $5k + 8 \in \boldsymbol{N}$;
   д) $\frac{12}{k}$ — натуральное число, если $k = 1, 2, 3, 4, 6, 12$.

К упражнению 10а

1. В знаменателе вынесем общий множитель x^{11} за скобки.
2. Числитель представим в виде разности кубов.
3. Упростив данное выражение при условии $x \neq 0$, получим

$$\frac{x^{33} - 1}{x^{33} + x^{22} + x^{11}} = \frac{(x^{11})^3 - 1}{x^{11}(x^{22} + x^{11} + 1)} = \frac{x^{11} - 1}{x^{11}}.$$

К упражнению 10б

1. Знаменатель $a^2 - a - 6$ разложим на множители: $a^2 - a - 6 = (a - 3)(a + 2)$, где $a \neq 3$ и $a \neq -2$ — область определения дроби.

2. а) Если $a > 3$, то $a|a-3| = a(a-3)$ и, значит,

$$\frac{a|a-3|}{(a-3)(a+2)} = \frac{a(a-3)}{(a-3)(a+2)} = \frac{a}{a+2}.$$

б) Если $-\infty < a < -2$ или $-2 < a < 3$, то $a|a-3| = -a(a-3)$ и, следовательно,

$$\frac{a|a-3|}{(a-3)(a+2)} = \frac{-a(a-3)}{(a-3)(a+2)} = -\frac{a}{a+2}.$$

3. Итак, получаем ответ:

$$\frac{a}{a+2} \text{ при } a > 3; \ -\frac{a}{a+2} \text{ при } -\infty < a < -2 \text{ или } -2 < a < 3.$$

К упражнению 10г

1. Область определения дроби $\dfrac{x^2-x+1}{x^4+x^2+1}$ есть $x \in \boldsymbol{R}$.

2. Знаменатель дроби представим в следующем виде:

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2+1)^2 - x^2.$$

3. Это выражение представляет собой разность квадратов.

4. Возвращаясь к данной дроби и сократив ее, получим

$$\frac{x^2-x+1}{x^4+x^2+1} = \frac{x^2-x+1}{(x^2+1)^2-x^2} = \frac{x^2-x+1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{x^2+x+1}.$$

К упражнению 12а

1. Разложим знаменатели дробей на множители:

а) $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$;

б) $3x^2 - 4x - 15 = (x-3)(3x+5)$;

в) $3x^2 + 11x + 10 = (x+2)(3x+5)$.

2. Найдем область определения данного выражения: $x \neq 3$; $x \neq -2$; $x \neq -\frac{5}{3}$; $x \neq \pm 1$.

3. Таким образом, имеем

$$\left(\frac{x}{x^2-x-6} - \frac{x-1}{3x^2-4x+5}\right) : \frac{x^4-2x^2+1}{3x^2+11x+10} =$$

$$= \frac{(3x+5)x-(x-1)(x+2)}{(x-3)(x+2)(3x+5)} : \frac{(x^2-1)^2}{(x+2)(3x+5)} =$$

$$= \frac{2x^2+4x+2}{(x-3)(x+2)(3x+5)} \cdot \frac{(x+2)(3x+5)}{(x^2-1)(x^2-1)} =$$

$$= \frac{2(x+1)^2}{(x-3)(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{2}{(x-3)(x-1)^2}.$$

К упражнению 12д

1. Найдем область определения данного выражения: $a \neq 0$; $b \neq 0$; $a \neq b$.

2. Выполнив действия в первых скобках, получим

$$\frac{4(a+b)^2}{ab} - 16 = \frac{4a^2 - 8ab + 4b^2}{ab} = \frac{4(a-b)^2}{ab}. \qquad (1)$$

3. Выполнив действия во вторых скобках, получим

$$\frac{(a+b)^2 - ab}{ab} = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - ab}{ab} = \frac{a^2 + ab + b^2}{ab}. \qquad (2)$$

4. Используя равенства (1) и (2), находим

$$\frac{4(a-b)^2}{ab} \cdot \frac{a^2+b^2+ab}{ab} \cdot \frac{ab}{a^3-b^3} = \frac{4(a-b)^2 \cdot (a^2+b^2+ab)}{ab(a-b)(a^2+b^2+ab)} = \frac{4(a-b)}{ab}.$$

К упражнению 14

Имеем

$$A = \left(\frac{25}{a^2+5a+25} + \frac{2a}{a-5} - \frac{a^3+25a^2}{(a-5)(a^2+5a+25)}\right) \cdot \frac{(a-5)^2+15a}{a-5} =$$

$$= \frac{25(a-5) + 2a(a^2+5a+25) - a^3 - 25a^2}{(a-5)(a^2+5a+25)} \cdot \frac{a^2 - 10a + 25 + 15a}{a-5} =$$

$$= \frac{25a - 125 + 2a^3 + 10a^2 + 50a - a^3 - 25a^2}{(a-5)(a^2+5a+25)} \cdot \frac{a^2+5a+25}{a-5} =$$

$$= \frac{a^3 - 15a^2 + 75a - 125}{(a-5)(a^2+5a+25)} \cdot \frac{a^2+5a+25}{a-5} =$$

$$= \frac{(a-5)^3(a^2+5a+25)}{(a-5)(a^2+5a+25)(a-5)} = a - 5, \text{ где } a \neq 5.$$

К упражнению 15

1. Пусть $5x$ — первое число; тогда $3x$ — второе число, $20x$ — третье, $20x \cdot 0{,}15 = 3x$ — четвертое.

2. По условию

$$5x + 20x + 3x - 3x = 375,$$

откуда $x = 15$.

3. Значит, искомые числа таковы: $5x = 5 \cdot 15 = 75$; $3x = 3 \cdot 15 = 45$; $20x = 20 \cdot 15 = 300$, $3x = 3 \cdot 15 = 45$.

К упражнению 16

1. Пусть a — цифра десятков, а b — цифра единиц исходного числа. Тогда это число равно $10a + b$, а сумма его цифр равна $a + b$.

2. Согласно условию, имеем

$$\frac{10a+b}{a+b}=8+\frac{1}{a+b}. \quad (1)$$

3. Из равенства (1) следует, что

$$2a=7b+1, \text{ или } a=\frac{7b+1}{2}. \quad (2)$$

4. Так как a и b— натуральные числа, меньшие 10, то из равенства (2) перебором устанавливаем, что наименьшему значению $b=1$ соответствует значение $a=4$.

5. Запишем частное от деления исходного числа на произведение его цифр:

$$\frac{10a+b}{ab}. \quad (3)$$

6. Подставив в выражение (3) найденные значения $a=4$, $b=1$, получим

$$\frac{10a+b}{ab}=\frac{10\cdot 4+1}{4\cdot 1}=\frac{41}{4}.$$

7. Итак, искомый остаток равен остатку от деления 41 на 4, т. е. он равен 1.

К упражнению 17

Замечание. Если $p\%$ неизвестного числа x равны b, то само неизвестное число получается делением b на $0{,}01p$.

Таким образом, если $p\%(x)=b$, то

$$x=\frac{b}{0,01p}, \text{ или } x=\frac{100b}{p}.$$

1. Пусть размер вклада равен x (р.); тогда его 12% составляют 2700 р., т. е. $12\%(x)=2700$, или $0{,}12x=2700$.

2. Отсюда

$$x=\frac{2700}{0{,}12}=22\,500 \text{ р.}$$

К упражнению 18

1. В 800 кг молока содержится 5% жира, т. е. $0{,}05\cdot 800=40$ кг жира.

2. Этот же жир сохраняется и в сметане.

3. Пусть из 800 кг молока можно получить x кг сметаны, тогда в ней имеется $0{,}25x$ кг жира.

4. Таким образом, $0{,}25x=40$, откуда $x=160$ (кг).

Тема 5

Понятие об иррациональном числе.
Множество действительных чисел.
Арифметические действия с действительными числами.
Корень k-й степени из действительного числа.
Преобразования арифметических корней.
Степени с целым и дробным показателями.
Примеры применения тождеств сокращенного умножения к действиям над степенями

Теоретические сведения

1. Понятие об иррациональном числе

1°. При измерении отрезков, несоизмеримых с единицей длины, получается число, которое выражается бесконечной непериодической десятичной дробью. Такие числа называют ***иррациональными***; например: 0,131331333125... . Известное в математике число π, число е (основание натуральных логарифмов) также являются числами иррациональными.

2°. Другой пример, приводящий к понятию иррационального числа, дает следующая теорема: *не существует рационального числа, квадрат которого равен двум*. Иными словами, решение уравнения $x^2 - 2 = 0$ невозможно на множестве рациональных чисел. Корнями такого уравнения являются иррациональные числа $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$.

3°. Любое рациональное число вида $\frac{m}{n}$ (где $n \neq 0$) можно представить в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

2. Множество действительных чисел

1°. Объединение множеств рациональных и иррациональных чисел образует множество ***действительных*** (или ***вещественных***) чисел. Это множество принято обозначать через $\boldsymbol{R}$.

2°. Между множеством $\boldsymbol{R}$ и множеством точек координатной прямой существует взаимно однозначное соответствие, т. е. каждому действительному числу соответствует единственная точка координатной прямой и наоборот, каждой точке координатной прямой соответствует единственное действительное число.

Учитывая это взаимно однозначное соответствие, часто множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел и множество точек координатной прямой объединяют общим термином — «числовая прямая».

3°. Действительные числа сравнивают по величине согласно правилу сравнения рациональных чисел (см. тему 3, п. 6). Например, $-0{,}17... < -0{,}15$; $3{,}1... > -5{,}6...$.

4°. Для числовых промежутков вводят следующие обозначения:

$[a; b] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ — ***замкнутый промежуток*** (или ***отрезок***) с началом a и концом b;

$(a; b) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x < b\}$ — ***открытый промежуток*** (или ***интервал***);

$(a; b] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x \leqslant b\}$; $[a; b) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \leqslant x < b\}$ — ***полуоткрытые промежутки***;

$[a; +\infty) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \geqslant a\}$; $(-\infty; b] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \leqslant b\}$ — ***лучи***;

$(a; +\infty) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x > a\}$; $(-\infty; b) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x < b\}$ — ***открытые лучи***;

$(-\infty; +\infty) = \boldsymbol{R}$ — ***числовая прямая.***

3. Арифметические действия с действительными числами

1°. Пусть даны действительные числа a и b. Обозначим через a_k^-, a_k^+, b_k^-, b_k^+ приближенные значения этих чисел с недостатком и с избытком с точностью до $\frac{1}{10^k}$, т. е. $a_k^- < a < a_k^+$ и $b_k^- < b < b_k^+$.

2°. ***Суммой*** действительных чисел a и b называют такое действительное число p, которое при любом целом неотрицательном k удовлетворяет неравенству $a_k^- + b_k^- < p < a_k^+ + b_k^+$.

Например, для чисел $a = \sqrt{2}$ и $b = \sqrt{3}$ имеем

$$1{,}4 + 1{,}7 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 1{,}5 + 1{,}8;$$
$$1{,}41 + 1{,}73 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 1{,}42 + 1{,}74;$$
$$1{,}414 + 1{,}732 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 1{,}415 + 1{,}733;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

3°. ***Произведением*** действительных чисел a и b называют такое действительное число q, которое при любом целом неотрицательном k удовлетворяет неравенству $a_k^- b_k^- < q < a_k^+ b_k^+$.

Например, для чисел $a = \sqrt{2}$ и $b = \sqrt{3}$ имеем

$$\begin{array}{llllll} 1{,}4 & \cdot\, 1{,}7 & < \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} & < 1{,}5 & \cdot\, 1{,}8; \\ 1{,}41 & \cdot\, 1{,}73 & < \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} & < 1{,}42 & \cdot\, 1{,}74; \\ 1{,}414 & \cdot\, 1{,}732 & < \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} & < 1{,}415 & \cdot\, 1{,}733; \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

4°. Известные для рациональных чисел законы арифметических действий (переместительный, сочетательный, распределительный) сохраняются и для любых действительных чисел.

4. Корень k-й степени из действительного числа

1°. ***Корнем k-й степени*** (где $k \in \boldsymbol{N}$ и $k \neq 1$) из действительного числа a называют действительное число x, k-я степень которого равна a.

2°. Корень k-й степени из числа a обозначают символом $\sqrt[k]{a}$. Согласно определению, $(\sqrt[k]{a})^k = a$.

3°. Нахождение корня k-й степени из числа a называют ***извлечением корня***. Число k называют ***показателем корня***, число a — ***подкоренным выражением***.

4°. Заметим, что $\sqrt[2n]{a}$, где $n \in \boldsymbol{N}$ и $a < 0$, не существует. Например, выражения $\sqrt{-4}$; $\sqrt[4]{-16}$ не имеют смысла.

5°. Чтобы устранить двузначность корня k-й степени из числа a, вводят понятие арифметического корня. ***Арифметическим корнем*** k-й степени из числа a ($a \geqslant 0$) называют неотрицательное число b, k-я степень которого равна a, где $k > 1$ — натуральное число.

Например: а) $\sqrt[k]{a^k} = |a|$; б) $\sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} = |x + 1| + |x - 1|$; в) $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$; г) $\sqrt{9} = 3$ (но не ± 3).

Замечание. В школьном курсе рассматривается только арифметическое значение корня, т. е. $\sqrt[k]{a}$ имеет смысл лишь при $a \geqslant 0$ и принимает только неотрицательные значения.

5. Преобразования арифметических корней

1°. Корень k-й степени из произведения неотрицательных чисел равен произведению корней той же степени из сомножителей:

$$\sqrt[k]{ab} = \sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b}$$

(правило извлечения корня из произведения).

2°. Если $a \geqslant 0$, $b > 0$, то

$$\sqrt[k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}}$$

(правило извлечения корня из дроби).

3°. Если $a \geqslant 0$, $k, c \in \boldsymbol{N}$, $k, c > 1$, то

$$\sqrt[k]{\sqrt[c]{a}} = \sqrt[kc]{a}$$

(правило извлечения корня из корня).

4°. Если $a \geqslant 0$, то

$$(\sqrt[k]{a}\,)^m = \sqrt[k]{a^m}$$

(правило возведения корня в степень).

5°. Если $a \geqslant 0$, то

$$\sqrt[k]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{nm}} \text{ (где } m, n \in \boldsymbol{N}),$$

т. е. показатель корня и показатель подкоренного выражения можно умножить на одно и то же число.

6°. Если $a_1 > a_2 > 0$, то $\sqrt[k]{a_1} > \sqrt[k]{a_2} > 0$, т. е. большему положительному подкоренному выражению соответствует и большее значение корня.

7°. Все указанные выше формулы часто применяются в обратном порядке (т. е. справа налево). Например:

а) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3 \cdot 2} = \sqrt{6}$ (правило умножения корней);

б) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{10}{5}} = \sqrt{2}$ (правило деления корней);

в) $\sqrt[6]{5} = \sqrt[3]{\sqrt{5}}$.

8°. Правило вынесения множителя из-под знака корня:

$$\sqrt[k]{a^k \cdot b} = |a|\sqrt[k]{b}.$$

Например, $\sqrt{27a^2} = 3 \cdot |a|\sqrt{3}$.

9°. Обратная задача — внесение множителя под знак корня. Например,

$$b\sqrt{3} = \begin{cases} \sqrt{3b^2}, \text{ если } b \geqslant 0, \\ -\sqrt{3b^2}, \text{ если } b < 0. \end{cases}$$

10°. Уничтожение иррациональности в знаменателе дроби. Если знаменатель дроби содержит иррациональное выражение (т. е. выражение, в котором имеются действия с корнями), то целесообразно избавиться от последнего.

Рассмотрим некоторые типичные случаи.

а) $\dfrac{A}{\sqrt[n]{a}} = \dfrac{A\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}}} = \dfrac{A\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \dfrac{A\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}$, так как $a > 0$.

Например,

$$\frac{5}{\sqrt[3]{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3^2}} = \frac{5\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{5\sqrt[3]{9}}{3}.$$

б) $\dfrac{A}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \dfrac{A(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})} = \dfrac{A(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}$.

Например,

$$\frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})} = \frac{3(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{5 - 2} = \sqrt{5} + \sqrt{2}.$$

в) $\dfrac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}} = \dfrac{A((\sqrt{a} + \sqrt{b}) + \sqrt{c})}{((\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{c})((\sqrt{a} + \sqrt{b}) + \sqrt{c})}$ и т. д.

11°. Применение тождеств сокращенного умножения к действиям с арифметическими корнями:

1) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$;

2) $(\sqrt[3]{a} \mp \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} \pm \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a \mp b$;

3) $a\sqrt{a} \pm b\sqrt{b} = (\sqrt{a})^3 \pm (\sqrt{b})^3 = (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})(a \mp \sqrt{ab} + b)$.

6. Степени с целым и дробным показателями

Рассмотрим степень a^p, где $p \in \boldsymbol{Z}$.

1°. Если $p = 0$, то по определению $a^0 = 1$ (при $a \neq 0$). Например, $5^0 = 1$.

2°. Если $p < 0$, то по определению $a^p = \dfrac{1}{a^{-p}}$ (при $a \neq 0$). Например, $2^{-1} = \dfrac{1}{2}$; $2^{-2} = \dfrac{1}{2^2}$; $(-3)^{-1} = -\dfrac{1}{3}$; $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1} = \dfrac{3}{2}$.

3°. Рассмотрим степень $a^{p/q}$, где $\dfrac{p}{q}$ — рациональное число. Выражение $a^{p/q}$ имеет в общем виде смысл только при $a > 0$. Если $a > 0$, $p \in \boldsymbol{Z}$, $q \in \boldsymbol{N}$, то по определению $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$. Например, $2^{2/3} = \sqrt[3]{2^2}$. Выражение $(-8)^{1/2}$ или $(-8)^{3/4}$ смысла не имеет.

4°. Степень с рациональным показателем обладает теми же свойствами, что и степень с натуральным показателем, а именно, если $a > 0$ и $n \in \boldsymbol{Q}$, $m \in \boldsymbol{Q}$, то:

а) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; б) $a^m : a^n = a^{m-n}$; в) $(a^n)^m = a^{nm}$;

г) $(ab \ldots k)^n = a^n \cdot b^n \ldots k^n$; д) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

7. Примеры применения тождеств сокращенного умножения к действиям над степенями

1. $(a^{1/2} - b^{1/2})(a^{1/2} + b^{1/2}) = a - b$.

2. $(a^{1/3} \pm b^{1/3})(a^{2/3} \mp a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}) = a \pm b$.

3. $a^{3/2} \mp b^{3/2} = (a^{1/2})^3 \mp (b^{1/2})^3 = (a^{1/2} \mp b^{1/2})(a \pm a^{1/2}b^{1/2} + b)$.

4. $a^{2/3} - b^{2/3} = (a^{1/3})^2 - (b^{1/3})^2 = (a^{1/3} - b^{1/3})(a^{1/3} + b^{1/3})$.

5. $$\frac{2x^{-1/3}}{x^{2/3} - 3x^{-1/3}} - \frac{x^{2/3}}{x^{5/3} - x^{2/3}} - \frac{x+1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{2x^{-1/3}}{x^{-1/3}(x-3)} -$$

$$-\frac{x^{2/3}}{x^{2/3}(x-1)} - \frac{x+1}{(x-1)(x-3)} = \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{(x-1)(x-3)} =$$

$$= \frac{2(x-1) - (x-3) - (x+1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{2x - 2 - x + 3 - x - 1}{(x-1)(x-3)} = 0.$$

6. $\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} : (x-y) + \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} =$

$= \dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{xy}+y)}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-y)} + \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} =$

$= \dfrac{x-\sqrt{xy}+y}{x-y} + \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \dfrac{x-\sqrt{xy}+y+\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y} =$

$= \dfrac{x-\sqrt{xy}+y+\sqrt{xy}-y}{x-y} = \dfrac{x}{x-y}.$

7. $((5\sqrt{5})^{-2/3} - 81^{-0,25}) \cdot ((5\sqrt{5})^{-2/3} + 81^{-0,25}) = (5\sqrt{5})^{-4/3} -$

$- 81^{-0,5} = (5^{3/2})^{-4/3} - (9^2)^{-0,5} = 5^{-2} - 9^{-1} = \dfrac{1}{25} - \dfrac{1}{9} = -\dfrac{16}{225}.$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие числа называют иррациональными?

2. Существует ли рациональное число, выражающее длину диагонали квадрата со стороной, равной 1?

3. Может ли быть выражено рациональным числом отношение длины окружности к диаметру?

4. В чем заключается взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством точек координатной прямой?

5. Изобразите на координатной прямой точки, которым соответствуют иррациональные числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

6. Может ли бесконечная десятичная дробь быть числом рациональным, иррациональным?

7. Какие числа называют действительными?

8. С помощью знака $\subset$ запишите соответствие между множествами $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}_0$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$.

9. Сравните числа 0,333... и $\dfrac{1}{3}$.

10. Запишите в виде бесконечной десятичной дроби: $\dfrac{15}{8}$; $\dfrac{3}{7}$; 5; 2,7.

11. Дайте определение корня k-й степени из действительного числа a.

12. Сколько значений имеет корень $\sqrt[k]{a}$, если: а) $k = 2n$; $n \in \boldsymbol{N}$; $a > 0$; б) $k = 2n - 1$; $n \in \boldsymbol{N}$; $a > 0$; в) $k \in \boldsymbol{N}$, $k \neq 1$; $a < 0$; $a = 0$?

13. Какой корень называют арифметическим? Верно ли, что $\sqrt{9} = \pm 3$?

14. Сформулируйте: а) правила извлечения корня из произведения и умножения коней; б) правила извлечения корня из дроби и деления корней; в) правило извлечения корня из корня и основное свойство корня; г) правило сравнения корней с одинаковыми показателями.

15. Внесите множитель под знак корня:

а) $(1-x)\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$, если $x>1$;

б) $(a-3)\sqrt{\dfrac{2a}{a^2-6a+9}}$, если $0<a<3$.

16. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt{(1-a)^3}$, если $a\leqslant 1$;

б) $\sqrt{a^3(a-3)^5}$, если $a\geqslant 3$;

в) $\sqrt{x^5(x-7)^2}$, если $0<x<7$.

17. Дайте определение степени: а) a^p, где $a\neq 0$ и $p\in \boldsymbol{Z}$; б) $a^{p/q}$, где $a>0$ и $p\in\boldsymbol{Z}$, $q\in\boldsymbol{N}$.

18. Сформулируйте правила действия над степенями с рациональным показателем.

19. Сравните выражения:

а) $\dfrac{1}{3}\sqrt{63}$ и $\dfrac{1}{4}\sqrt{80}$;

б) $\sqrt{2}$ и $3\sqrt[3]{3}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. При каких значениях переменной a имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{a^2}$; б) $\sqrt{-a^4}+2$; в) $\sqrt{a^2-6a+9}$; г) $\sqrt{a^2+2a+2}$?

2. При каких значениях x справедливо равенство:

а) $\sqrt{(2-x)^2}=x-2$; б) $\sqrt{(x-2)^2}=2-x$; в) $\sqrt{(2-x)^2}=|x-2|$?

3. Упростите выражение:

а) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$; в) $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$;

г) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$; д) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

4. Вычислите:

а) $\dfrac{\sqrt{5\sqrt{3}-6\sqrt{2}}+\sqrt{8\sqrt{3}-6\sqrt{5}}}{\sqrt{7\sqrt{3}-2\sqrt{30}}}$; б) $\sqrt[4]{32}\,\dfrac{\sqrt{8\sqrt{2}+2\sqrt{30}}-\sqrt{7\sqrt{2}-4\sqrt{5}}}{\sqrt{10+4\sqrt{6}}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{12\sqrt{5}-10\sqrt{7}}+\sqrt{8\sqrt{5}-10\sqrt{3}}}{\sqrt{10\sqrt{5}-2\sqrt{105}}}$; г) $\sqrt[4]{6}\,\dfrac{\sqrt{11\sqrt{6}-24}+\sqrt{5\sqrt{6}-12}}{4\sqrt{3}}$.

5. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^2-3}{\sqrt{\left(\dfrac{a^2+3}{2a}\right)^2-3}}$; б) $\dfrac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-9}}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-9}}}$; в) $\dfrac{\sqrt{(a+2)^2-8a}}{\sqrt{a}-\dfrac{2}{\sqrt{a}}}$.

6. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\dfrac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}$;

б) $\left(\dfrac{12}{\sqrt{15}-3}-\dfrac{28}{\sqrt{15}-1}+\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}\right)(6-\sqrt{3})$;

в) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$; г) $\dfrac{1-a}{\sqrt{1-\sqrt{a}}}$; д) $\dfrac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$;

е) $\left(\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}\right)\left(\sqrt{x^{-2}-1}-\dfrac{1}{x}\right)$ при $0<x<1$;

ж) $\dfrac{47}{2\sqrt{3}-\sqrt[4]{3}}$; з) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}$.

7. Выполните действия:

а) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

б) $a^{0,5}-\dfrac{a-a^{-2}}{a^{0,5}-a^{-0,5}}+\dfrac{1-a^{-2}}{a^{0,5}+a^{-0,5}}+\dfrac{2}{a^{1,5}}$ при $a>0$;

в) $\dfrac{a-b}{a+b+2\sqrt{ab}}:\dfrac{a^{-0,5}-b^{-0,5}}{a^{-0,5}+b^{-0,5}}$;

г) $\dfrac{x^{0,5}+1}{x+x^{0,5}+1}:\dfrac{1}{x^{1,5}-1}$;

д) $\left(\dfrac{a^{0,5}+2}{a+2a^{0,5}+1}-\dfrac{a^{0,5}-2}{a-1}\right)\cdot\dfrac{a^{0,5}+1}{a^{0,5}}$;

е) $\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{ab}}{a-b}$;

ж) $(x+\sqrt{x^2-1})^2+(x+\sqrt{x^2-1})^{-2}+2(1-2x^2)$;

з) $\dfrac{(a^2-b^{-2})^m(b+a^{-1})^{n-m}b^na^{-n}}{(b^2-a^{-2})^n(a-b^{-1})^{m-n}b^{-m}a^m}$;

и) $\left[\left(\dfrac{a+\sqrt[4]{ab^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}-\sqrt[4]{ab}\right)-\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right](\sqrt[4]{ab})^{-1}$.

8. Упростите выражение:

а) $\dfrac{(5\sqrt{3}+\sqrt{50})(5-\sqrt{24})}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}}$;

б) $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$;

в) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{3}{\sqrt{3}-2}+\dfrac{15}{3-\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3}+5)^{-1}$.

Задания для повторения

9. Скорость велосипедиста равна 30 км/ч. Скорость грузовой машины на 80% больше скорости велосипедиста, а скорость легковой машины на 60% больше скорости грузовой. Найдите скорости грузовой и легковой автомашин.

10. При нагревании вода испаряется. Предположим, что за день испаряется 2% воды. Сколько литров воды останется от 100 л через три дня?

11. Вычислите:

а) $\sqrt{25-p^2}+\sqrt{13-p^2}$, если $\sqrt{25-p^2}-\sqrt{13-p^2}=2$;

б) $\sqrt[3]{(b-13)(b+3)}$, если $\sqrt[3]{b+3}-\sqrt[3]{b-13}=4$;

в) $\sqrt{40+3a^2-a^4}$, если $\sqrt{8-a^2}+\sqrt{5+a^2}=5$;

г) $\sqrt[3]{(2+b)^2(21+b)}-\sqrt[3]{(2+b)(21+b)^2}$, если $\sqrt[3]{21+b}-$
$-\sqrt[3]{2+b}=4$.

ОТВЕТЫ

1. а) $a\in \boldsymbol{R}$; б) $a=0$; в) $a\in \boldsymbol{R}$; г) $a\in \boldsymbol{R}$. **2.** а) $x\geqslant 2$; б) $x\leqslant 2$; в) $x\in \boldsymbol{R}$. **3.** а) $\sqrt{2}-1$; б) $\sqrt{5}-2$; в) $3\sqrt{2}+5$; г) 1; д) 4. **4.** а) 1; б) 2; в) 1; г) 0,5. **5.** а) $2a$, если $a>\sqrt{3}$ или $-\sqrt{3}<a<0$; $-2a$, если $0<a<\sqrt{3}$ или $a<-\sqrt{3}$; б) $\frac{a+\sqrt{a^2-9}}{3}$; в) $-\sqrt{a}$, если $0<a<2$; $\sqrt{a}$, если $a>2$. **6.** а) $5-\frac{3}{2}\sqrt{2}$; б) 33; в) $\frac{a(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a-b}$; г) $(1+\sqrt{a})\sqrt{1-\sqrt{a}}$; д) $3(3\sqrt{2}-4)(3+\sqrt{2}+$
$+\sqrt{3})$; е) -1; ж) $\frac{(2\sqrt{3}+\sqrt[4]{3})(12+\sqrt{3})}{3}$; з) $(\sqrt{2}-\sqrt[4]{3})(\sqrt{3}+2)$. **7.** а) 1; б) 0; в) -1; г) $x-1$, где $x\geqslant 0$, $x\neq 1$; д) $\frac{2}{a-1}$; е) 1; ж) 0; з) 1; и) -2. **8.** а) 1; б) 2; в) 0,5. **9.** 54 км/ч; 86,4 км/ч. **10.** 94,1192 л. **11.** а) 6; б) -4; в) 6; г) 15.

Решения и методические указания

К упражнению 2б

1. Напомним, что арифметическим корнем k-й степени из числа a ($a\geqslant 0$) называют неотрицательное число b, k-я степень которого равна a, где $k\in \boldsymbol{N}$, $k\neq 1$.

2. По условию имеем $\sqrt{(x-2)^2} = 2 - x$.

3. Чтобы ответить на поставленный вопрос, используем определение арифметического корня.

4. Здесь числом b является двучлен $2 - x$. Таким образом, $b = 2 - x \geqslant 0$, откуда $x \leqslant 2$.

К упражнению 3в

1. Требуется упростить выражение $\sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$.

2. Нетрудно проверить, что $9 + 4\sqrt{2}$ — полный квадрат, т. е.

$$9 + 4\sqrt{2} = (2\sqrt{2} + 1)^2.$$

3. Упростив $\sqrt{9 + 4\sqrt{2}}$, получим

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{2}} = |2\sqrt{2} + 1| = 2\sqrt{2} + 1.$$

4. Упростив $\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}$, получим

$$\sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = |\sqrt{2} + 1| = \sqrt{2} + 1.$$

5. Упростив $30(\sqrt{2} + 1)$, получим $30\sqrt{2} + 30$.

6. Наконец, упростив $\sqrt{13 + 30\sqrt{2} + 30}$, получим

$$\sqrt{43 + 30\sqrt{2}} = \sqrt{(3\sqrt{2} + 5)^2} = 3\sqrt{2} + 5.$$

К упражнению 3г

1. В предыдущем примере мы имели дело с квадратным корнем, поэтому старались заменить подкоренное выражение полным квадратом. Здесь же мы имеем дело с кубическим корнем. Следовательно, нам нужно каждое подкоренное выражение, если это возможно, представить в виде третьей степени двучлена.

2. Рассмотрим подкоренное выражение $2 + \sqrt{5}$. Оказывается, что $2 + \sqrt{5}$ можно представить так: $2 + \sqrt{5} = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^3$ (проверьте!).

3. Тогда $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

4. Аналогично $2 - \sqrt{5} = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^3$ (проверьте!).

5. Тогда $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, но не $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (почему?).

6. В результате получаем $\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$.

К упражнению 4а

1. Упростим подкоренное выражение $5\sqrt{3} - 6\sqrt{2}$:

$$5\sqrt{3} - 6\sqrt{2} = \sqrt{3}(5 - 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}) = \sqrt{3}(5 - 2\sqrt{6}) = \sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2.$$

Тогда

$$\sqrt{5\sqrt{3}-6\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt[4]{3}. \quad (1)$$

2. Упростим подкоренное выражение $8\sqrt{3} - 6\sqrt{5}$:

$$8\sqrt{3} - 6\sqrt{5} = \sqrt{3}(8 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}) = \sqrt{3}(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2.$$

Тогда

$$\sqrt{8\sqrt{3}-6\sqrt{5}} = \sqrt{\sqrt{3(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}} = (\sqrt{5} - \sqrt{3})\sqrt[4]{3}. \quad (2)$$

3. Найдем сумму выражений (1) и (2):

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt[4]{3} + (\sqrt{5} - \sqrt{3})\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3}(\sqrt{5} - \sqrt{2}). \quad (3)$$

4. Упростим подкоренное выражение $7\sqrt{3} - 2\sqrt{30}$:

$$7\sqrt{3} - 2\sqrt{30} = \sqrt{3}(7 - 2\sqrt{10}) = \sqrt{3}(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2.$$

Тогда

$$\sqrt{7\sqrt{3}-2\sqrt{30}} = \sqrt{\sqrt{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}} = (\sqrt{5} - \sqrt{2})\sqrt[4]{3}. \quad (4)$$

5. Разделив выражение (3) на (4), получим ответ: 1.

К упражнению 5в

1. Найдем область определения данного выражения: $a > 0$, $a \neq 2$.
2. Упростив знаменатель, получим

$$\sqrt{a} - \frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a^2}-2}{\sqrt{a}} = \frac{|a|-2}{\sqrt{a}} = \frac{a-2}{\sqrt{a}}.$$

3. Упростив числитель, получим

$$\sqrt{(a+2)^2-8a} = \sqrt{(a-2)^2} = |a-2|.$$

4. Тогда данное выражение примет вид

$$\frac{\frac{|a-2|}{a-2}}{\sqrt{a}} = \frac{|a-2|\sqrt{a}}{a-2}.$$

5. Упростим последнюю дробь:

а) $\begin{cases} 0 < a < 2, \\ \dfrac{-(a-2)\sqrt{a}}{a-2} = -\sqrt{a}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a > 2, \\ \dfrac{(a-2)\sqrt{a}}{a-2} = \sqrt{a}. \end{cases}$

Ответ: $-\sqrt{a}$, если $0 < a < 2$; $\sqrt{a}$, если $a > 2$.

З а м е ч а н и е. а) Выражение с переменными называют иррациональным, если оно содержит извлечение корня из переменной или возведение переменной в дробную степень (как это имело место в рассмотренном примере).

б) Как правило, тождественные преобразования иррациональных выражений выполняют на множестве неотрицательных чисел. Это вытекает из введенных ранее определений.

в) Пусть, например, требуется сократить дробь $\frac{a-4}{a^{0,5}+2}$. При $a \geqslant 0$ выражение $a-4$ можно представить в виде разности квадратов выражений $(a^{0,5})^2$ и 2^2, а затем сократить дробь:

$$\frac{a-4}{a^{0,5}+2} = \frac{(a^{0,5})^2-2^2}{a^{0,5}+2} = \frac{(a^{0,5}-2)(a^{0,5}+2)}{a^{0,5}+2} = a^{0,5}-2.$$

г) Выполненное тождественное преобразование справедливо для неотрицательных чисел, т. е. при $a \geqslant 0$.

д) В дальнейшем будем это подразумевать и специально не оговаривать.

К упражнению 6а

1. Здесь целесообразно применить прием избавления от иррациональности в знаменателе. Для этого умножим числитель и знаменатель первой дроби на $\sqrt{2}+1$ (это выражение называют ***сопряженным*** для $\sqrt{2}-1$):

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 3+2\sqrt{2}.$$

2. Аналогично поступим со второй дробью (теперь выражением, сопряженным для знаменателя, является $\sqrt{2}-1$):

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = 3-2\sqrt{2}.$$

3. Чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе третьей дроби, умножим числитель и знаменатель этой дроби на $\sqrt{2}$:

$$\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}+3)\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2+3\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

4. Таким образом, имеем

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}} = 3+2\sqrt{2} + 3-2\sqrt{2} - 1 - \frac{3}{2}\sqrt{2} = 5 - \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

К упражнению 6в

Умножим числитель и знаменатель дроби на неполный квадрат суммы радикалов, записанных в знаменателе. Имеем

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \frac{a(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})} = \frac{a(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a-b}.$$

К упражнению 6д

1. Запишем знаменатель данной дроби в виде $(3+\sqrt{2})-\sqrt{3}$; тогда для этого выражения сопряженным является $(3+\sqrt{2})+\sqrt{3}$.

2. Умножив числитель и знаменатель дроби на $(3+\sqrt{2})+\sqrt{3}$, а затем снова избавляясь от иррациональности в знаменателе, получим

$$\frac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{12(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{((3+\sqrt{2})-\sqrt{3})((3+\sqrt{2})+\sqrt{3})} = \frac{12(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{12(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{9+2+6\sqrt{2}-3} = \frac{12(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{8+6\sqrt{2}} = \frac{12(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})(8-6\sqrt{2})}{(8+6\sqrt{2})(8-6\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{12(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})(8-6\sqrt{2})}{64-72} = 3(3\sqrt{2}-4)(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}).$$

К упражнению 6е

1. Сначала упрощаем выражение в первых скобках:

$$\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}-(\sqrt{1-x})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})} = \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2+2\sqrt{1-x^2}}{2x} = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}. \quad (1)$$

2. Теперь упрощаем выражение во вторых скобках:

$$\sqrt{x^{-2}-1} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}. \qquad (2)$$

3. Перемножив дроби (1) и (2), получим

$$\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} = \frac{(\sqrt{1-x^2})^2-1}{x^2} = \frac{1-x^2-1}{x^2} = -1.$$

К упражнению 7а

Замечание. Отметим, что при выполнении тождественных преобразований необходимо своевременно сокращать дроби.

1. Дробь $\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ можно сократить, если выражение, записанное в числителе, преобразовать так: $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = (\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3$. Поэтому

$$\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a^2}-\sqrt{ab}+\sqrt{b^2})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = a+b-\sqrt{ab}.$$

2. Тогда в первых скобках данного выражения получим

$$\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab} = a+b-\sqrt{ab}-\sqrt{ab} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2.$$

3. Далее имеем

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 : (a-b) = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a-b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

4. Окончательно находим

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = 1.$$

К упражнению 7б

1. Рассмотрим дробь $\frac{a-a^{-2}}{a^{0,5}-a^{-0,5}}$. Чтобы сократить ее, вынесем в числителе за скобки a^{-2}, а в знаменателе $a^{-0,5}$. Тогда получим

$$\frac{a-a^{-2}}{a^{0,5}-a^{-0,5}} = \frac{a^{-2}(a^3-1)}{a^{-0,5}(a-1)} = a^{-1,5}(a^2+a+1) =$$
$$= a^{0,5} + a^{-0,5} + a^{-1,5}.$$

2. Аналогично преобразуем вторую дробь:

$$\frac{1-a^{-2}}{a^{0,5}+a^{-0,5}} = \frac{a^{-2}(a^2-1)}{a^{-0,5}(a+1)} = a^{-1,5}(a-1) = a^{-0,5} - a^{-1,5}.$$

3. Окончательно имеем

$$a^{0,5} - (a^{0,5} + a^{-0,5} + a^{-1,5}) + (a^{-0,5} - a^{-1,5}) + 2a^{-1,5} = 0.$$

К упражнению 7з

1. Упростим выражения в числителе данной дроби:

а) $(a^2 - b^{-2})^m = \left(\frac{a^2b^2-1}{b^2}\right)^m = \frac{(ab-1)^m(ab+1)^m}{b^{2m}}$; (1)

б) $(b + a^{-1})^{n-m} = \left(\frac{ab+1}{a}\right)^{n-m} = \frac{(ab+1)^{n-m}}{a^{n-m}}$. (2)

2. Перемножив дроби (1) и (2), получим

$$\frac{(ab-1)^m(ab+1)^m}{b^{2m}} \cdot \frac{(ab+1)^{n-m}}{a^{n-m}} = \frac{(ab-1)^m(ab+1)^n}{b^{2m} \cdot a^{n-m}}. \quad (3)$$

3. Упростим выражения в знаменателе данной дроби:

а) $(b^2 - a^{-2})^n = \left(\frac{a^2b^2-1}{a^2}\right)^n = \frac{(ab-1)^n(ab+1)^n}{a^{2n}}$; (4)

б) $(a - b^{-1})^{m-n} = \left(\frac{ab-1}{b}\right)^{m-n} = \frac{(ab-1)^{m-n}}{b^{m-n}}$. (5)

4. Перемножив дроби (4) и (5), получим

$$\frac{(ab-1)^n(ab+1)^n}{a^{2n}} \cdot \frac{(ab-1)^{m-n}}{b^{m-n}} = \frac{(ab-1)^m(ab+1)^n}{a^{2n} \cdot b^{m-n}}. \quad (6)$$

5. Разделив дроби (3) и (6), имеем

$$\frac{(ab-1)^m(ab+1)^n}{b^{2m} \cdot a^{n-m}} : \frac{(ab-1)^m(ab+1)^n}{a^{2n} \cdot b^{m-n}} = \frac{a^{2n} \cdot b^{m-n}}{b^{2m} \cdot a^{n-m}}.$$

6. Тогда данное выражение примет вид

$$\frac{a^{2n} \cdot b^{m-n}}{b^{2m} \cdot a^{n-m}} \cdot \frac{b^n a^{-n}}{b^{-m} a^m}.$$

7. После упрощений получим ответ: 1.

К упражнению 7и

1. При упрощении данного выражения воспользуемся тем, что $a = \sqrt[4]{a^4}$; $\sqrt{a} = \sqrt[4]{a^2}$, если $a \geqslant 0$.

2. Упростим первую дробь в квадратных скобках:

$$\frac{a+\sqrt[4]{ab^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}=\frac{\sqrt[4]{a^4}+\sqrt[4]{ab^3}}{\sqrt[4]{a^2}+\sqrt[4]{ab}}=\frac{\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{b^3})}{\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})}=$$

$$=\frac{(\sqrt[4]{a})^3+(\sqrt[4]{b})^3}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}=\sqrt[4]{a^2}-\sqrt[4]{ab}+\sqrt[4]{b^2}.$$

3. Найдем разность в круглых скобках:

$$\sqrt[4]{a^2}-\sqrt[4]{ab}+\sqrt[4]{b^2}-\sqrt[4]{ab}=\sqrt{a}-2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}.$$

4. Упростим вторую дробь в квадратных скобках:

$$\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

5. Найдем разность в квадратных скобках:

$$\sqrt{a}-2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}-(\sqrt{a}+\sqrt{b})=-2\sqrt[4]{ab}.$$

6. Окончательно получим $-2\sqrt[4]{ab}\cdot(\sqrt[4]{ab})^{-1}=-2$.

К упражнению 8а

1. Прежде всего отметим, что непосредственное умножение и деление заданных выражений в этом и других подобных примерах ничего не дает.

2. Воспользуемся основным свойством дроби, т. е. умножим числитель и знаменатель данного выражения на выражение, сопряженное знаменателю:

$$\frac{(5\sqrt{3}+\sqrt{50})(5-\sqrt{24})(\sqrt{75}+5\sqrt{2})}{(\sqrt{75}-5\sqrt{2})(\sqrt{75}+5\sqrt{2})}. \qquad (1)$$

3. Знаменатель выражения (1) представляет собой разность квадратов, т. е. $(\sqrt{75})^2-(5\sqrt{2})^2=25$.

4. В числителе выражения (1) имеются два одинаковых множителя $5\sqrt{3}+\sqrt{50}$ и $\sqrt{75}+5\sqrt{2}$, т. е. квадрат суммы: $(5\sqrt{3}+\sqrt{50})^2$. Упростив $(5\sqrt{3}+\sqrt{50})^2$, получим $25(5+\sqrt{24})$.

5. Подставив в выражение (1) найденные значения, окончательно имеем

$$\frac{(5-\sqrt{24})25(5+\sqrt{24})}{25}=25-24=1.$$

К упражнению 8б

1. Заменим множитель $4 + \sqrt{15}$ другим выражением:

$$4 + \sqrt{15} = \frac{(4 + \sqrt{15})(4 - \sqrt{15})}{4 - \sqrt{15}} = \frac{1}{4 - \sqrt{15}} = (4 - \sqrt{15})^{-1}.$$

2. Множитель $\sqrt{4 - \sqrt{15}}$ запишем так:

$$\sqrt{4 - \sqrt{15}} = (4 - \sqrt{15})^{1/2}.$$

3. Перемножив степени с одним и тем же основанием, равным $4 - \sqrt{15}$, имеем

$$(4 - \sqrt{15})^{-1} \cdot (4 - \sqrt{15})^{1/2} = (4 - \sqrt{15})^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{4 - \sqrt{15}}}.$$

4. Остается умножить $\sqrt{10} - \sqrt{6}$ на $\frac{1}{\sqrt{4 - \sqrt{15}}}$, т. е. найти

$$(\sqrt{10} - \sqrt{6})\frac{1}{\sqrt{4 - \sqrt{15}}}.$$

5. Упростим $\sqrt{10} - \sqrt{6}$ и $\sqrt{4 - \sqrt{15}}$:

$$\sqrt{10} - \sqrt{6} = \sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3}),$$

$$\sqrt{4 - \sqrt{15}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}{2}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \text{ (проверьте!).}$$

6. Тогда окончательно получим

$$(\sqrt{10} - \sqrt{6})\frac{1}{\sqrt{4 - \sqrt{15}}} = \sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = 2.$$

К упражнению 9

1. Скорость грузовой машины составляет 180% от скорости велосипедиста (скорость велосипедиста принимаем за 100%), т. е. она равна

$$180\% \cdot 30 = 1{,}8 \cdot 30 = 54 \text{ (км/ч).}$$

2. Скорость легковой машины составляет 160% от скорости грузовой (за 100% принимаем скорость грузовой машины), т. е. она равна

$$160\% \cdot 54 = 1{,}6 \cdot 54 = 86{,}4 \text{ (км/ч).}$$

К упражнению 10

1. Так как за один день испаряется 2% воды, то в конце первого дня останется 98% · 100 л = 98 л воды. Аналогично в конце второго дня останется 98% · 98 л = 96,04 л воды, в конце третьего дня — 98% · 96,04 л = 94,1192 л воды.

2. Этот же результат можно получить, используя формулу сложных процентов: $(0{,}98)^3 \cdot 100 = 94{,}1192$.

К упражнению 11а

1. Используя формулу $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, получим

$$(\sqrt{25 - p^2} + \sqrt{13 - p^2})(\sqrt{25 - p^2} - \sqrt{13 - p^2}) =$$
$$= (25 - p^2) - (13 - p^2) = 12.$$

2. Учитывая, что $\sqrt{25 - p^2} - \sqrt{13 - p^2} = 2$, имеем

$$(\sqrt{25 - p^2} + \sqrt{13 - p^2}) \cdot 2 = 12, \text{ или } \sqrt{25 - p^2} + \sqrt{13 - p^2} = 6.$$

Т е м а 6

Понятие функции. Способы задания функции. Монотонность функции. Четные и нечетные функции. Периодические функции. Промежутки знакопостоянства и корни функции. Уравнения с одной переменной. Понятие о равносильности уравнений. Свойства числовых равенств и теоремы о равносильности уравнений. Примеры решения уравнений с одной переменной

Теоретические сведения

1. Понятие функции

1°. ***Функцией*** называют отношение f между множествами X и Y, при котором каждому элементу $x \in X$ соответствует единственный элемент $y \in Y$. При этом используют запись $y = f(x)$. Множество X называют ***областью определения функции***, а множество $\{y \in Y \mid y = f(x),\ x \in X\}$ — ***множеством значений функции***.

2°. Для функции f приняты обозначения: $D(f)$ — область определения функции; $E(f)$ — множество значений функции; $f(x_0)$ — значение функции в точке x_0.

3°. Если $D(f) \subset \boldsymbol{R}$ и $E(f) \subset \boldsymbol{R}$, то функцию называют ***числовой функцией***.

4°. Функцию называют также ***отображением*** множества $D(f)$ на множество $E(f)$. Например, для функции f, изображенной на рис. 8, *а*, элементы a, b и c множества A отображаются на элементы *1*, *2* и *3* множества B. В этом случае $D(f) = A$, а $E(f) = B$. Для функции f, изображенной на рис. 8, *б*, $D(f) = \{b;\ c\}$, а $E(f) = \{1;\ 3\}$.

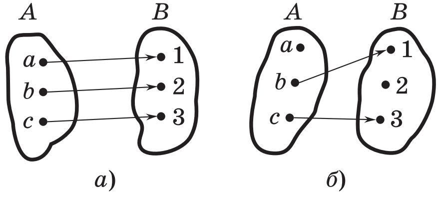


Рис. 8

5°. Элементы множества $D(f)$ также называют ***значениями аргумента***, а соответствующие им элементы множества $E(f)$ — ***значениями функции***.

2. Способы задания функции

1°. Функция может быть задана аналитически в виде формулы $y = f(x)$, где переменная x обозначает множество значений аргумента, а переменная y — множество соответствующих значений функции.

Например, уравнение $y = x^2$ определяет некоторую функцию, где каждому значению переменной x, взятому из области определения функции, соответствует единственное значение переменной $y = x^2$.

2°. Функция f полностью определяется заданием множества пар $(x; f(x))$, где x пробегает все множество $D(f)$, а $f(x)$ — соответствующие значения функции.

3°. Функция может быть задана графически. ***Графиком*** функции $y = f(x)$ называют изображение на координатной плоскости множества пар $\{(x; y) \mid y = f(x)\}$, где $x \in D(f)$.

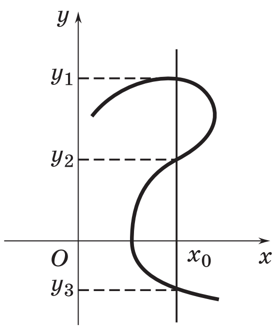


Рис. 9

4°. Заметим, однако, что не всякое множество точек координатной плоскости является графиком некоторой функции. Например, для кривой, изображенной на рис. 9, значению $x = x_0$ соответствуют три значения y (y_1, y_2 и y_3) и, следовательно, такое соответствие не является функцией.

5°. Для того чтобы данное множество являлось графиком некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы прямая, параллельная оси Oy, пересекалась с указанным графиком не более чем в одной точке.

3. Монотонность функции

1°. Функцию $f(x)$ называют ***возрастающей*** на данном числовом промежутке X, если большему значению аргумента x соответствует большее значение функции $f(x)$, т. е. если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$ для любых $x_1, x_2 \in X$.

2°. Функцию $f(x)$ называют ***убывающей*** на данном числовом промежутке X, если большему значению аргумента x соответствует меньшее значение функции $f(x)$, т. е. если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$ для любых $x_1, x_2 \in X$.

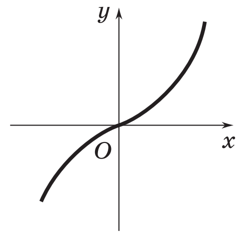


Рис. 10

3°. Функцию, только возрастающую или только убывающую на данном числовом промежутке, называют ***монотонной*** на этом промежутке.

4°. О монотонности функции можно судить по ее графику. Например, функция, график которой изображен на рис. 10, монотонно возрастает при всех значениях x. Функция, график которой изображен на рис. 11, монотонно убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и монотонно возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

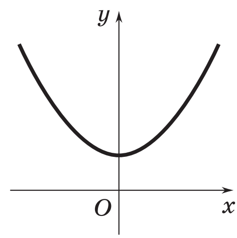


Рис. 11

4. Четные и нечетные функции

1°. Пусть область определения функции симметрична относительно начала координат, т. е. если $x_0 \in D(f)$, то и $-x_0 \in D(f)$. Тогда можно ввести следующие определения.

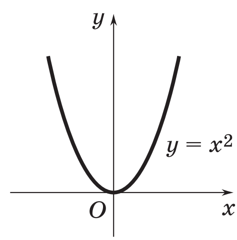


Рис. 12

2°. Функцию $f(x)$ называют ***четной***, если $f(x) = f(-x)$ для любого значения $x \in D(f)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат (таков, например, график функции $y = x^2$, изображенный на рис. 12).

3°. Функцию $f(x)$ называют ***нечетной***, если $f(-x) = -f(x)$ для любого значения $x \in D(f)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат (таков, например, график функции $y = x^3$, изображенный на рис. 13).

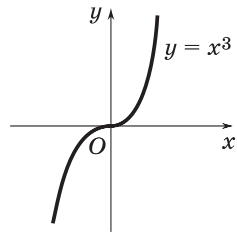


Рис. 13

5. Периодические функции

1°. Функцию f называют ***периодической***, если существует такое число $T \neq 0$, что при любом x из области определения функции числа $x - T$ и $x + T$ также принадлежат этой области и выполняются равенства $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. В этом случае число T называют ***периодом*** функции f.

2°. Если T — период функции, то Tn, где $n \in \boldsymbol{Z}$, — также период функции. Следовательно, всякая периодическая функция имеет бесконечное множество периодов. На практике обычно рассматривают наименьший положительный период.

3°. Значения периодической функции через промежуток, равный периоду, повторяются. Это обстоятельство используется при построении графиков.

6. Промежутки знакопостоянства и корни функции

1°. Числовые промежутки, на которых функция сохраняет свой знак (т. е. остается положительной или отрицательной), называют ***промежутками знакопостоянства*** функции.

2°. О промежутках знакопостоянства функции легко судить по ее графику. Рассмотрим, например, функцию $y = x$ (рис. 14). Здесь $f(x) > 0$ при $x \in \boldsymbol{R}_+$ и $f(x) < 0$ при $x \in \boldsymbol{R}_-$. В первом случае график расположен выше оси Ox, во втором — ниже ее.

3°. Значения аргумента $x \in D(f)$, при которых $f(x) = 0$, называют ***корнями*** (или ***нулями***) ***функции***. Корни функции — это точки пересечения ее графика с осью Ox (рис. 15).

7. Уравнения с одной переменной

1°. ***Уравнением с одной переменной*** называют предложение с переменной $f(x) = g(x)$. Значение переменной, обращающее уравнение в истинное равенство, называют ***корнем уравнения***.

2°. <u>Решить уравнение — значит найти множество его корней.</u> Это множество называют также ***решением уравнения***.

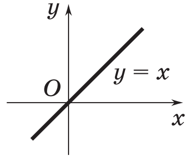


Рис. 14

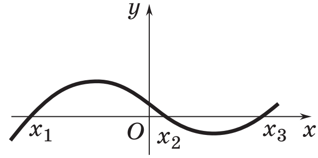


Рис. 15

3°. Множество всех x, при которых одновременно имеют смысл выражения $f(x)$ и $g(x)$, называют ***областью определения уравнения***.

4°. Для того чтобы установить область определения уравнения, необходимо найти пересечение множеств, на которых определены данные функции $f(x)$ и $g(x)$.

Найдем, например, область определения уравнения $\sqrt{x+3} = 1 + \sqrt{-x}$. Здесь $f(x) = \sqrt{x+3}$; $g(x) = 1 + \sqrt{-x}$; $D_1(f) = [-3; +\infty)$; $D_2(g) = (-\infty; 0]$; следовательно, $D = D_1 \cap D_2 = [-3; 0]$.

8. Понятие о равносильности уравнений

1°. Если из истинности высказывания A следует истинность высказывания B, то употребляется знак логического следования $\Rightarrow$, т. е. $A \Rightarrow B$.

2°. Если $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, то такие высказывания (предложения) называют ***равносильными***. Это записывают так: $A \Leftrightarrow B$.

3°. Аналогично два уравнения называют ***равносильными*** (или ***эквивалентными***) на данном числовом множестве, если каждое решение (корень) одного уравнения является решением (корнем) другого, и наоборот.

4°. Заметим, что если оба уравнения не имеют решений на данном числовом множестве, то они также считаются равносильными на этом множестве.

5°. Очевидно, что равносильные уравнения имеют одно и то же множество решений, принадлежащих области определения этих уравнений. Например, уравнения $x^2 - 1 = 0$ и $(x-1)(x+1) = 0$ равносильны: множество их решений таково: $\{-1; 1\}$.

6°. Уравнения $x^2 + 1 = 0$ и $x^4 + 2 = 0$ равносильны на множестве действительных чисел, так как множество решений каждого из них — пустое. На множестве комплексных чисел эти уравнения уже не являются равносильными.

9. Свойства числовых равенств и теоремы о равносильности уравнений

1°. Числовое равенство не нарушится, если к обеим его частям прибавить или отнять одно и то же число.

2°. Числовое равенство не нарушится, если обе его части умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля.

На этих свойствах основаны теоремы о равносильности уравнений.

3°. *Если к обеим частям уравнения $f(x) = \varphi(x)$ прибавить одну и ту же функцию $A(x)$, имеющую смысл при всех допустимых значениях переменной, то получится новое уравнение $f(x) + A(x) = \varphi(x) + A(x)$, равносильное данному.*

4°. *Любое слагаемое можно перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком.*

5°. *Если обе части уравнения $f(x) = \varphi(x)$ умножить (или разделить) на одну и ту же функцию $A(x) \neq 0$, имеющую смысл для любого x из области определения, то получится новое уравнение $A(x)f(x) = A(x)\varphi(x)$ $\left(\text{или } \dfrac{f(x)}{A(x)} = \dfrac{\varphi(x)}{A(x)}\right)$, равносильное данному.*

10. Примеры решения уравнений с одной переменной

Заметим предварительно, что при решении уравнения необходимо производить только такие операции, при которых каждое следующее уравнение являлось бы следствием предыдущего. В противном случае может быть расширена область определения уравнения и получены посторонние корни, или наоборот, сужена область определения уравнения и могут быть потеряны корни.

При решении уравнения рекомендуется следующее:

а) перенести все члены уравнения в одну часть равенства;

б) полученное выражение представить в виде дроби (если это возможно);

в) использовать условие равенства дроби нулю.

Примеры. 1. Решить уравнение

$$\frac{y+5}{y^2-5y} - \frac{y-5}{2y^2-10y} = \frac{y+25}{2y^2-50}.$$

Решение. Имеем

$$\frac{y+5}{y(y-5)} - \frac{y-5}{2y(y-5)} - \frac{y+25}{2(y-5)(y+5)} = 0;$$

$$\begin{cases} 2(y+5)^2 - (y-5)(y+5) - y(y+25) = 0, \\ 2y(y-5)(y+5) \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y^2 + 20y + 50 - y^2 + 25 - y^2 - 25y = 0, \\ 2y(y-5)(y+5) \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 15, \\ 2 \cdot 15(15 - 5)(15 + 5) \neq 0 \text{ — истинное высказывание.} \end{cases}$$

Итак, получаем ответ: $y = 15$.

2. Решить уравнение $\dfrac{x^2}{x+5} = \dfrac{25}{x+5}$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$\frac{x^2}{x+5} - \frac{25}{x+5} = 0; \ \frac{x^2 - 25}{x+5} = 0; \ \begin{cases} (x-5)(x+5) = 0, \\ x + 5 \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5, \\ 5 + 5 \neq 0 \text{ — истинное высказывание;} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5, \\ -5 + 5 \neq 0 \text{ — ложное высказывание.} \end{cases}$$

Таким образом, получаем ответ: $x = 5$.

3. Решить уравнение $x + 2 = ax$, содержащее параметр a (переменную, которая в условии данной задачи сохраняет одно и то же значение).

Р е ш е н и е. Имеем $x - ax = -2$; $(1 - a)x = -2$; если $1 - a \neq 0$, т. е. $a \neq 1$, то $x = \dfrac{2}{a-1}$; если $1 - a = 0$, т. е. $a = 1$, то $0 \cdot x = -2$ — множество корней данного уравнения является пустым. Итак, уравнение имеет единственный корень $\dfrac{2}{a-1}$, если $a \neq 1$; не имеет корней, если $a = 1$.

4. Решить уравнение $ax = a$.

Р е ш е н и е. Если $a \neq 0$, то $x = \dfrac{a}{a}$, т. е. $x = 1$; если же $a = 0$, то $0 \cdot x = 0$, т. е. x — любое действительное число. Итак, если $a \neq 0$, то уравнение имеет единственный корень, равный 1; если $a = 0$, то корнем уравнения служит любое действительное число.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение функции.

2. Что называют областью определения функции и множеством ее значений?

3. Функция f задана множеством пар $\left\{(0{,}5; 2), \left(\dfrac{2}{3}; 6\right)\right\}$. Укажите $D(f)$ и $E(f)$. Найдите $f(0{,}5)$, $f(2)$.

4. Дайте определения четной и нечетной функций.

5. Дайте определение периодической функции.

6. Даны функции: а) $y = x^2$; б) $y = |x|$; в) $y = x^3$; г) $y = 2x^2$, где $x \geqslant 0$; д) $y = x^3$, где $x \geqslant 0$. Укажите, какие из них являются четными и какие нечетными.

7. Какие из следующих высказываний истины: а) число 975 кратно 75; б) сумма чисел 4204 и 36 кратна 3; в) сумма чисел 1617 и 1078 делится на их разность без остатка; г) значение выражения $(75^2 + 319^2)$ — простое число; д) $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$?

8. Что называют уравнением с одной переменной?

9. Что называют корнем уравнения?

10. Что значит решить уравнение?

11. Сколько корней может иметь уравнение?

12. Составьте уравнение, которое имело бы: а) единственный корень; б) бесконечное множество корней; в) три корня; г) пустое множество решений.

13. Сколько корней имеет уравнение $|x| = x$?

14. Имеет ли корни уравнение: а) $x = 10x$; б) $x^4 + 5x^2 = -4$?

15. Какие уравнения называют равносильными?

16. Какие преобразования могут привести к потере корней?

17. Какие преобразования могут привести к появлению посторонних корней уравнения?

18. Если два уравнения не имеют решений на множестве $\boldsymbol{Q}$, то можно ли утверждать, что эти уравнения равносильны на множестве $\boldsymbol{R}$?

19. Сформулируйте свойства числовых равенств.

20. Сформулируйте теоремы о равносильности уравнений.

21. Равносильны ли уравнения $x + \sqrt{2} = 0$ и $x^2 - 2 = 0$ на множестве: а) рациональных чисел; б) целых чисел; в) действительных чисел?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Исследуйте на четность и нечетность функцию:

а) $y = x^6$; б) $y = x^7$; в) $y = \dfrac{x-2}{x^2-9}$; г) $y = \sqrt{x-3}$.

2. Установите четность или нечетность функции:

а) $y = -2x^2$; б) $y = x|x|$; в) $y = (x-3)^2 - (x+3)^2$;

г) $y = \sqrt{9 - x^2}$; д) $y = 0{,}5x^3 - 5x^2$; е) $y = \dfrac{x}{x^2-4}$;

ж) $y = \dfrac{x-3}{x+1}$; з) $y = \sqrt[3]{x^2}$; и) $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2}$;

к) $y = 2x^2$, где $x \geqslant 0$; л) $y = x^5$, где $x \geqslant 0$.

3. Докажите, что функция, заданная формулой $y = 3x^2$, где $x \geqslant 0$, — возрастающая.

4. При каком значении аргумента x функция $y = x^2 - 2x - 15$ принимает наименьшее значение?

5. Докажите, что функция, заданная формулой $y(x) = 3x^2$, где $x \leqslant 0$, — убывающая.

6. При каком значении аргумента x функция $y = x^2 - 4x + 4$ принимает наименьшее значение?

7. Решите уравнение:

а) $2(x - 3) + |x + 2| = 1$; б) $|2x + 5| - |3x - 4| = 3 - 2x$;

в) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x-3} + 1 = 0$; г) $\dfrac{a+5}{x-3} = a$;

д) $\dfrac{b}{x+1} = 2$; е) $a^2x - a = 4x + 2$; ж) $x + \dfrac{3}{a^3} = \dfrac{1}{a^2}(9x + 1)$;

з) $|2x - 5| - |3x - 4| = 3 - 2x$; и) $\sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} = 2$.

8. Установите, равносильны ли уравнения:

а) $(x - 2)^2 = 3(x - 2)$ и $x - 2 = 3$;

б) $\dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{2x-1}{x+1}$ и $x + 3 = 2x - 1$;

в) $x - 2 = 2 - x$ и $x - 2 + \dfrac{1}{x^2+1} = 2 - x + \dfrac{1}{x^2+1}$;

г) $5 - 3x - \dfrac{1}{x-1} = 2x - \dfrac{1}{x-1}$ и $5 - 3x = 2x$;

д) $(x + 3)(x - 3) = 0$ и $x + 3 = 0$;

е) $x^2 = 2x - 1$ и $x^2(x^4 + 1) = (2x - 1)(x^4 + 1)$.

Задания для повторения

9. Имеется кусок сплава меди с оловом массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому сплаву, чтобы получившийся новый сплав содержал 40% меди?

10. Свежие грибы содержат 90% воды, а сухие — 12%. Из какого количества свежих грибов можно получить 450 кг сухих?

11. Первый турист, проехав 1,5 ч на велосипеде со скоростью 16 км/ч, делает остановку на 1,5 ч, а затем продолжает ехать с первоначальной скоростью. Через 4 ч после отправления в дорогу первого туриста вдогонку ему выезжает на мотоцикле второй турист со скоростью 56 км/ч. Какое расстояние они проедут, прежде чем второй турист догонит первого?

12. Трое мальчиков получили за свою работу вознаграждение в размере 1410 р., причем второй получил $\frac{1}{3}$ того, что получил первый, и еще 60 р., а третий получил $\frac{1}{3}$ денег второго и еще 30 р. Сколько денег получил каждый?

ОТВЕТЫ

1. а) Четная; б) нечетная; в) ни четная, ни нечетная; г) ни четная, ни нечетная. **2.** а) Четная; б) нечетная; в) нечетная; г) четная; д) ни четная, ни нечетная; е) нечетная; ж) ни четная, ни нечетная; з) четная; и) нечетная; к) ни четная, ни нечетная; л) ни четная, ни нечетная. **4.** При $x = 1$. **6.** При $x = 2$. **7.** а) $x = \frac{5}{3}$; б) $\frac{2}{7}$; в) нет корней; г) единственный корень $x = \frac{4a + 5}{a}$, если $a \neq 0$, $a \neq -5$; нет корней, если $a = 0$, $a = -5$; д) единственный корень $x = \frac{b - 2}{2}$, если $b \neq 0$; нет корней, если $b = 0$; е) единственный корень $x = \frac{1}{a - 2}$, если $a \neq -2$, $a \neq 2$; $x \in \boldsymbol{R}$, если $a = -2$; нет корней, если $a = 2$; ж) единственный корень $x = \frac{1}{a(a + 3)}$, если $a \neq 0$, $a \neq -3$, $a \neq 3$; $x \in \boldsymbol{R}$, если $a = 3$; нет корней, если $a = 0$, $a = -3$; з) $x \in \left[\frac{2}{3}; 2\right]$; и) нет корней. **8.** а) Нет; б) да; в) да; г) нет; д) нет; е) да. **9.** 1,5 кг. **10.** 3960 кг. **11.** 56 км. **12.** 900 р; 360 р.; 150 р.

Решения и методические указания

К упражнению 1а

1. Напомним, что функцию $y = f(x)$, $x \in X$, называют четной, если:
а) X — симметричное множество;
б) для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

2. Областью определения функции $y = x^6$ служит вся числовая прямая $(-\infty; +\infty)$ — симметричное множество.

3. Имеем $f(x) = x^6$, $f(-x) = (-x)^6 = x^6$. Таким образом, $f(-x) = f(x)$, т. е. функция $y = x^6$ является четной.

К упражнению 1б

1. Напомним, что функция $y = f(x)$, $x \in X$, называют нечетной, если:
а) X — симметричное множество;
б) для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

2. Областью определения функции $y = x^7$ является вся числовая прямая $(-\infty; +\infty)$ — симметричное множество.

3. Имеем $f(x) = x^7$, $f(-x) = (-x)^7 = -x^7$. Значит, $f(-x) = -f(x)$, т. е. функция $y = x^7$ является нечетной.

К упражнению 1в

1. Функция $y = \dfrac{x-2}{x^2-9}$ не определена при тех значениях x, для которых знаменатель $x^2 - 9$ обращается в нуль, т. е. в точках ± 3. Значит, область определения функции — симметричное множество.

2. Имеем

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-9},\ f(-x) = \frac{(-x)-2}{(-x)^2-9} = -\frac{x+2}{x^2-9}.$$

3. Так как $f(-x) \neq f(x)$ и $f(x) \neq -f(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной.

К упражнению 1г

1. Область определения функции $y = \sqrt{x-3}$ есть луч $[3; +\infty)$ — несимметричное множество.

2. Следовательно, функция не является ни четной, ни нечетной.

К упражнению 3

1. Пусть $x_2 > x_1$, где $x_2 > 0$, $x_1 \geqslant 0$. Тогда

$$f(x_2) - f(x_1) = 3x_2^2 - 3x_1^2 = 3(x_2^2 - x_1^2) =$$
$$= 3(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0.$$

2. Следовательно, $x_2 > x_1 \geqslant 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$, т. е. большему значению аргумента $x \in D(f)$ соответствует большее значение функции.

3. Итак, функции $f(x)$ — возрастающая.

К упражнению 4

1. Преобразуем данный квадратный трехчлен:

$$x^2 - 2x - 15 = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 15 = (x-1)^2 - 16.$$

2. Выражение $(x-1)^2 - 16$ принимает наименьшее значение при том же значении x, что и $(x-1)^2$.

3. Так как $(x-1)^2 \geqslant 0$ при любом x, то наименьшее значение функция $(x-1)^2$, а значит, и данная функция принимает при $x = 1$.

К упражнению 7б

1. Найдем корни двучленов, записанных под знаком модуля:

$$2x+5=0 \Rightarrow x=-\frac{5}{2};\ 3x-4=0 \Rightarrow x=\frac{4}{3}.$$

Рис. 16

2. Изобразим эти корни на координатной прямой (рис. 16) и рассмотрим данное уравнение на каждом из трех промежутков: $x < -\frac{5}{2}$, $-\frac{5}{2} \leqslant x < \frac{4}{3}$, $x \geqslant \frac{4}{3}$.

3. В первом промежутке получаем систему

$$\begin{cases} x < -\frac{5}{2}, \\ -(2x+5)+(3x-4)=3-2x, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < -\frac{5}{2}, \\ x = 4. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений.

4. Далее, во втором промежутке получаем систему

$$\begin{cases} -\frac{5}{2} \leqslant x < \frac{4}{3}, \\ 2x+5+(3x-4)=3-2x, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -\frac{5}{2} \leqslant x < \frac{4}{3}, \\ x = \frac{2}{7}. \end{cases}$$

Решением этой системы является $x = \frac{2}{7}$.

5. Наконец, в третьем промежутке получаем систему

$$\begin{cases} x \geqslant \frac{4}{3}, \\ 2x+5-(3x-4)=3-2x, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \geqslant \frac{4}{3}, \\ x = -6, \end{cases}$$

которая не имеет решений.

6. Итак, $x = \frac{2}{7}$ — корень данного уравнения.

К упражнению 7в

1. Найдем область определения уравнения:

$$\begin{cases} x-2 \geqslant 0, \\ x-1 \geqslant 0, \\ x-3 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow x \geqslant 3.$$

2. Если $x = 3$, то $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{0} + 1 > 0$.

3. Если $x > 3$, то выражение, получающееся в левой части уравнения, подавно больше нуля.

4. Итак, множество решений данного уравнения является пустым.

К упражнению 7г

1. Имеем

$$\frac{a+5}{x-3} - a = 0, \text{ или } \frac{4a - ax + 5}{x-3} = 0, \text{ где } x \neq 3.$$

2. Решим систему $\begin{cases} ax = 4a + 5, \\ x \neq 3. \end{cases}$

а) Если $a \neq 0$, то $x = \dfrac{4a+5}{a}$;

б) если $a = 0$, то получаем $0 \cdot x = 5$, что ложно.

3. Найдем, наконец, значение a, при котором $x = 3$; имеем $\dfrac{4a+5}{a} = 3$, откуда $a = -5$.

Итак, получаем <u>ответ</u>: уравнение имеет единственный корень $x = \dfrac{4a+5}{a}$, если $a \neq 0$, $a \neq -5$; уравнение не имеет корней, если $a = 0$, $a = -5$.

К упражнению 9

1. Исходный сплав массой 12 кг содержал 45% меди, т. е. в нем было $0{,}45 \cdot 12$ кг меди.

2. Пусть x (кг) — масса олова, добавленного к данному сплаву. Тогда получится сплав массой $12 + x$ (кг), содержащий 40% меди.

3. Значит, в новом сплаве имеется $0{,}4(12 + x)$ кг меди.

4. Так как масса меди и в первоначальном, и в новом сплаве одна и та же, то приходим к уравнению

$$0{,}4(12 + x) = 0{,}45 \cdot 12.$$

5. Решив это уравнение, находим $x = 1{,}5$. Итак, к первоначальному сплаву надо добавить 1,5 кг олова.

К упражнению 10

1. В 450 кг сухих грибов содержится 12% воды и 88% сухой массы.

2. Значит, сухая масса равна 88% (450 кг) = 396 кг.

3. Эту же сухую массу должны иметь и положенные на сушку свежие грибы, массу которых обозначим через x.

4. Следовательно, получаем уравнение

$$10\%(x) = 396, \text{ т. е. } 0{,}1x = 396,$$

откуда $x = 3960$ кг.

К упражнению 11

1. Согласно условию, первый турист выехал на 4 ч раньше второго.
2. В точке B (рис. 17) он сделал остановку на 1,5 ч.

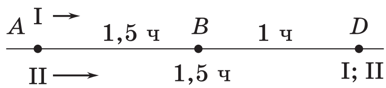


Рис. 17

3. Второй турист догнал первого в точке D.
4. Чтобы преодолеть расстояние AD, первый турист затратил на 2,5 ч больше, чем второй (так как $4 - 1{,}5 = 2{,}5$).
5. Пусть s (км) — расстояние от точки A до точки D.
6. Тогда $t_1 = \frac{s}{16}$ (ч) — время, за которое первый турист проехал расстояние AD; $t_2 = \frac{s}{56}$ (ч) — время, за которое второй турист проехал расстояние AD. Как мы установили, $t_1 - t_2 = 2{,}5$ (ч).
7. Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{s}{16} - \frac{s}{56} = 2{,}5,$$

откуда находим $s = 56$ (км).

К упражнению 12

1. Пусть первый мальчик получил x р.
2. Тогда второй получил $\left(\frac{1}{3}x + 60\right)$ р., а третий получил $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x + 60\right) + 30 = \left(\frac{1}{9}x + 50\right)$ р.
3. Из условия следует, что

$$x + \frac{1}{3}x + 60 + \frac{1}{9}x + 50 = 1410,$$

откуда $x = 900$.

<u>Ответ</u>: 900 р.; 360 р.; 150 р.

Тема 7

Линейная функция и ее график.
Квадратичная функция и ее график.
Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график.
Дробно-линейная функция и ее график.
Квадратные уравнения. Теорема Виета.
Графический способ решения квадратных уравнений.
Уравнения с несколькими переменными.
Системы уравнений

Теоретические сведения

1. Линейная функция и ее график

1°. Функцию, заданную формулой $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа, называют ***линейной***.

2°. Областью определения линейной функции служит множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел, так как выражение $kx + b$ имеет смысл при любых значениях x.

3°. График линейной функции $y = kx + b$ есть прямая. Для построения графика, очевидно, достаточно знать две его точки, например $A(0;\, b)$ и $B\left(-\frac{b}{k};\, 0\right)$.

4°. Коэффициент k характеризует угол, который образует прямая с положительным направлением оси Ox (рис. 18); поэтому k называют ***угловым коэффициентом***. Если $k > 0$, то этот угол — острый, если $k < 0$ — тупой; если $k = 0$, то прямая параллельна оси Ox.

5°. График функции $y = kx + b$ можно также построить с помощью параллельного переноса графика функции $y = kx$.

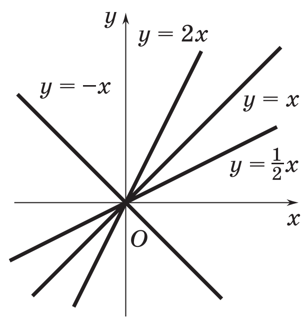


Рис. 18

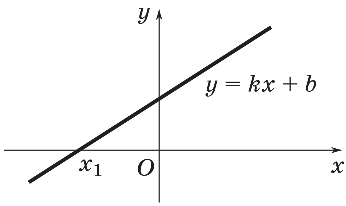


Рис. 19

6°. Уравнение вида $kx + b = 0$ называют ***линейным***. Для того чтобы решить линейное уравнение графически, достаточно построить график функции $y = kx + b$ и найти точку его пересечения с осью Ox (на рис. 19 точка x_1 — корень уравнения).

2. Квадратичная функция и ее график

1°. Функцию, заданную формулой $y = ax^2 + bx + c$, где x, y — переменные, a, b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называют ***квадратичной***.

2°. Областью определения квадратичной функции является множество $\boldsymbol{R}$.

3°. Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола — кривая, симметричная относительно прямой $x = -\frac{b}{2a}$, проходящей через вершину параболы (***вершиной*** параболы называют точку пересечения параболы с ее осью симметрии).

4°. Координаты вершины параболы определяются по формулам

$$x_0 = -\frac{b}{2a}\,;\ y_0 = f(x_0) = \frac{4ac - b^2}{4a}\,.$$

5°. Квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$ всегда можно привести к виду $y = a(x + k)^2 + p$, а затем построить ее график с помощью геометрических преобразований.

6°. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз.

Пример. Построить график функции $y = 3x^2 + 12x + 10$.

Р е ш е н и е. Выделив из квадратного трехчлена квадрат двучлена, получим

$$3x^2 + 12x + 10 = 3(x^2 + 4x) + 10 =$$
$$= 3(x^2 + 4x + 4) - 12 + 10 = 3(x + 2)^2 - 2.$$

Строим сначала график функции $3x^2$, а затем, используя параллельный перенос, получим искомый график — параболу с вершиной в точке $(-2; -2)$ (рис. 20).

Заметим, что параболу можно построить и по так называемым характеристическим точкам, т. е. по координатам вершины и точкам пересечения с осями координат, о чем будет сказано в дальнейшем.

3. Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график

1°. Если переменная y пропорциональна переменной x, то такая зависимость выражается формулой $y = kx$, где $k \neq 0$ — коэффициент пропорциональности. График этой функции мы рассмотрели в п. 1.

2°. Если переменная y обратно пропорциональна переменной x, то такая зависимость выражается формулой $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$ — коэффициент обратной пропорциональности.

3°. Область определения функции $y = \frac{k}{x}$ есть множество всех чисел, отличных от нуля, т. е. $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

4°. Графиком обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ является кривая, состоящая из двух ветвей, симметричных относительно координат. Такую кривую называют ***гиперболой*** (рис. 21). Если $k > 0$, то ветви гиперболы расположены в I и III координатных четвертях; если же $k < 0$ — во II и IV четвертях.

5°. Заметим, что гипербола не имеет общих точек с осями координат, а лишь неограниченно к ним приближается (объясните, почему).

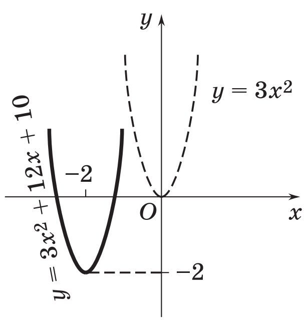


Рис. 20

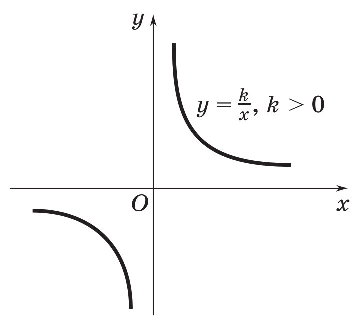


Рис. 21

4. Дробно-линейная функция и ее график

1°. Функцию вида $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(\text{где } a \neq 0,\ c \neq 0,\ \dfrac{b}{a} \neq \dfrac{d}{c}\right)$ называют ***дробно-линейной***.

2°. Преобразуем эту функцию следующим образом:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+d) + b - \frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}.$$

С помощью геометрических преобразований график дробно-линейной функции можно получить из графика функции $y = \dfrac{k}{x}$.

Пример. Построить график функции $y = \dfrac{2x-5}{x-4}$.

Р е ш е н и е. Преобразуем заданную функцию так:

$$y = \frac{2x-5}{x-4} = \frac{2(x-4)-5+8}{x-4} = 2 + \frac{3}{x-4}.$$

Сначала строим график функции $y = \dfrac{3}{x}$; затем смещаем его на 4 ед. вправо вдоль оси Ox и на 2 ед. вверх вдоль оси Oy (рис. 22).

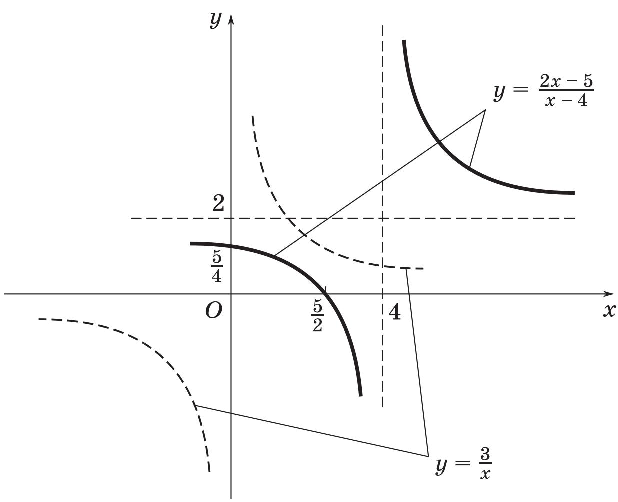


Рис. 22

Заметим, что в отличие от графика функции $y = \frac{k}{x}$ график дробно-линейной функции может пересекать оси координат; в данном случае точками пересечения графика с осями координат служат точки $\left(\frac{5}{2}; 0\right)$ и $\left(0; \frac{5}{4}\right)$.

5. Квадратные уравнения

1°. Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называют ***квадратным.***

2°. В квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ коэффициент a называют ***первым коэффициентом***, b — ***вторым коэффициентом***, c — ***свободным членом.***

3°. Формула корней квадратного уравнения имеет вид

$$x_{1,\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

4°. Выражение $b^2 - 4ac$ называют ***дискриминантом*** квадратного уравнения и обозначают через D.

5°. Если $D = 0$, то существует только одно число, удовлетворяющее уравнению $ax^2 + bx + c = 0$. Однако условились говорить, что в этом случае квадратное уравнение имеет <u>два равных действительных корня</u>, а само число $-\frac{b}{2a}$ называют ***двукратным корнем***: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

6°. Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней.

7°. Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два различных действительных корня.

8°. Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Так как $a \neq 0$, то, разделив обе части данного уравнения на a, получим уравнение $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Полагая $\frac{b}{a} = p$ и $\frac{c}{a} = q$, приходим к уравнению $x^2 + px + q = 0$, в котором первый коэффициент равен 1. Такое уравнение называют ***приведенным.***

9°. Формула корней приведенного квадратного уравнения имеет вид

$$x_{1,\,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

10°. Уравнения вида $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 + c = 0$ и $ax^2 = 0$ называют ***неполными*** квадратными уравнениями. Неполные квадратные уравнения решают разложением левой части уравнения на множители.

11°. Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$ называют ***биквадратным***. С помощью замены переменной по формуле $x^2 = y$ оно приводится к квадратному уравнению $ay^2 + by + c = 0$.

6. Теорема Виета

1°. ТЕОРЕМА ВИЕТА. *Сумма корней квадратного уравнения* $ax^2 + bx + c = 0$ *равна взятому с противоположным знаком отношению второго коэффициента к первому, а произведение корней — отношению свободного члена к первому коэффициенту*, т. е. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

2°. ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА. *Если числа* x_1 *и* x_2 *таковы, что* $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, *то* x_1 *и* x_2 *— корни квадратного уравнения* $ax^2 + bx + c = 0$.

3°. Функцию вида $ax^2 + bx + c$ называют ***квадратным трехчленом***. Корни этой функции являются корнями соответствующего квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

4°. Если дискриминант квадратного трехчлена больше нуля, то этот трехчлен можно представить в виде

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни трехчлена. Например, $2x^2 - x - 15 = 2(x + 2{,}5)(x - 3)$.

5°. Если дискриминант квадратного трехчлена равен нулю, то этот трехчлен можно представить в виде

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2,$$

где x_1 — корень трехчлена. Например, $3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)^2$.

7. Графический способ решения квадратных уравнений

1°. Квадратные уравнения можно решать и графическим способом. Решим графически уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Оно равносильно уравнению $ax^2 = -(bx + c)$. Построим графики функций $y = ax^2$ и $y = -bx - c$ (рис. 23). В точках x_1 и x_2 значения обеих функций равны. Следовательно, x_1 и x_2 являются корнями уравнения $ax^2 = -(bx + c)$ и равносильного ему уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

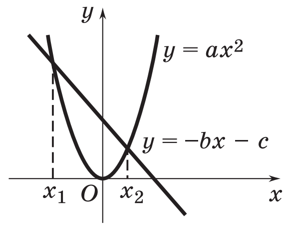


Рис. 23

2°. Если парабола и прямая касаются, то квадратное уравнение имеет два равных корня.

3°. Если же парабола и прямая не пересекаются и не касаются, то квадратное уравнение не имеет корней.

4°. Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ можно решить иначе, построив параболу $y = ax^2 + bx + c$ и найдя ее точки пересечения с осью Ox (рис. 24).

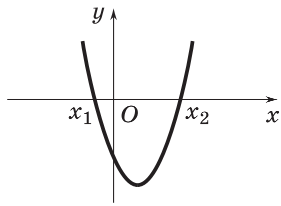


Рис. 24

8. Уравнения с несколькими переменными

1°. ***Уравнение с двумя переменными*** x и y имеет вид $f(x, y) = g(x, y)$, где f и g — выражения с переменными x и y.

2°. ***Решением уравнения с двумя*** (тремя и т. д.) ***переменными*** называют множество упорядоченных пар (троек и т. д.) значений переменных, обращающих это уравнение в верное равенство.

3°. ***Графиком уравнения с двумя переменными*** называют множество точек, координаты которых служат решениями этого уравнения. Например, график уравнения $ax + by + c = 0$ представляет собой прямую, график уравнения $y = ax^2 + bx + c$ — параболу.

9. Системы уравнений

1°. Если требуется найти все пары, тройки и т. д. чисел, являющихся решением всех данных уравнений, то множество этих уравнений называют ***системой уравнений***. Например,

$$\begin{cases} 2xy = x^2 - 5, \\ x - y = 6; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + 2z = x^2, \\ 2x - x^2 = y^2, \\ x + z = 1 \end{cases}$$

— системы уравнений соответственно с двумя и с тремя переменными.

2°. Количество уравнений в системе не обязательно равно количеству переменных. Например, можно рассматривать систему

$$\begin{cases} x + y + z + u = 5, \\ x^2 - xy - 2z + u^3 = 8, \end{cases}$$

решением которой являются упорядоченные четверки чисел $(x; y; z; u)$.

3°. Множество упорядоченных пар, троек и т. д. значений переменных, обращающих в истинное равенство каждое уравнение системы, называют ***решением системы уравнений***. Решить систему уравнений — значит найти множество ее решений.

4°. Две системы уравнений называют ***равносильными***, если они имеют одно и то же множество решений.

5°. Графическое решение системы уравнений сводится к отысканию координат общих точек графиков уравнений.

Как известно, прямые на плоскости могут пересекаться в одной точке и могут быть параллельными (не иметь общих точек или иметь бесконечное множество общих точек). Соответственно этому система линейных уравнений с двумя переменными может иметь: а) единственное решение; б) ни одного решения ($\varnothing$); в) бесконечное множество решений.

6°. Не решая систему линейных уравнений, можно судить о числе ее решений по коэффициентам при соответствующих переменных. Пусть дана система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, т. е. коэффициенты при x и y не пропорциональны, то система имеет единственное решение. Это решение графически иллюстрируется как точка пересечения двух прямых (рис. 25).

Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не имеет решений. В этом случае прямые, служащие графиками уравнений системы, параллельны и не совпадают друг с другом (рис. 26).

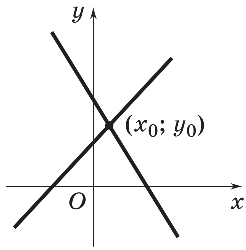


Рис. 25

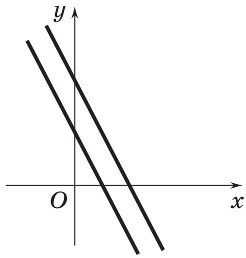


Рис. 26

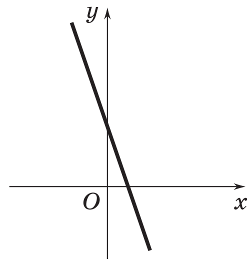


Рис. 27

Если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесконечное множество решений. В этом случае прямые параллельны и совпадают друг с другом (рис. 27).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какую функцию называют линейной? Каковы ее область определения и множество значений?

2. Что является графиком линейной функции?

3. Каковы частные случаи линейной функции и как расположены на координатной плоскости их графики?

4. Каким преобразованием можно получить из графика функции $y = x$ график функции: а) $y = kx + b$; б) $y = k(x + a)$?

5. Сколько точек достаточно иметь на плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = kx + b$, чтобы построить график функции?

6. Как зависит расположение графика функции $y = kx + b$ от величины b?

7. Как влияет коэффициент k на расположение графика функции $y = kx + b$?

8. Какую функцию называют квадратичной? Укажите ее область определения.

9. По каким формулам вычисляют координаты вершины параболы?

10. Как зависит направление ветвей параболы от первого коэффициента функции $y = ax^2 + bx + c$?

11. Преобразуйте функцию $y = ax^2 + bx + c$ к виду $y = a(x + k)^2 + p$ с помощью выделения квадрата двучлена.

12. При каком условии функция $y = (a + 3)x^2 + 2x$ не является квадратичной?

13. Как отражается на графике функции $y = x^2$ свойство четности?

14. Функция задана формулой $y = \dfrac{k}{x}$. Как называют эту формулу? Какие ограничения надо наложить на k; на x?

15. Какое множество является областью определения функции, заданной формулой $y = \frac{k}{x}$?

16. Из формулы $y = \frac{k}{x}$ следует, что $xy = k$. Верно ли обратное: если $xy = k$, то $y = \frac{k}{x}$?

17. Дана функция $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0$, $x \neq 0$. Покажите на частных примерах, что с увеличением (уменьшением) значения x в несколько раз соответствующее значение y уменьшается (увеличивается) во столько же раз.

18. Как называют кривую, служащая графиком функции $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$? Как расположены ее ветви?

19. В каких координатных углах расположен график функции: а) $y = -\frac{6}{x}$; б) $y = \frac{4}{x}$?

20. Может ли гипербола пересекаться с осями координат? Поясните, почему.

21. Какое уравнение называют квадратным?

22. Можно ли назвать квадратным уравнение: а) $ax^2 + c = 0$; б) $ax^2 + bx = 0$; в) $ax^2 = 0$?

23. Какие формулы корней полных квадратных уравнений вы знаете? Целесообразно ли по этим формулам решать неполные квадратные уравнения?

24. Что такое дискриминант?

25. Не решая уравнение, установите по его дискриминанту, сколько оно имеет корней: а) $3x^2 - 14x + 16 = 0$; б) $8x^2 - 4x + 0{,}5 = 0$; в) $x^2 - 10x + 34 = 0$.

26. Какое уравнение называют биквадратным?

27. Сформулируйте теорему Виета и ей обратную.

28. Используя теорему Виета, определите знаки корней уравнения: а) $x^2 + 7x + 1 = 0$; б) $x^2 - 7x + 1 = 0$; в) $5x^2 + 17x + 16 = 0$.

29. Составьте квадратное уравнение по его корням (с помощью теоремы Виета): а) $x_1 = 3$; $x_2 = 10$; б) $x_1 = -7$; $x_2 = -4$; в) $x_1 = 2 - \sqrt{3}$; $x_2 = 2 + \sqrt{3}$.

30. Дайте определение квадратного трехчлена. На какие множители разлагается трехчлен вида $ax^2 + bx + c$?

31. Используя разложение квадратного трехчлена на множители, сократите дробь:

а) $\dfrac{x - 5}{3x^2 - 13x - 10}$;

б) $\dfrac{-2x^2 + 7x - 3}{2x - 1}$.

32. С помощью введения вспомогательной переменной решите уравнение: а) $x^2 + 6x + \sqrt{x^2 + 6x} = 20$ (Указание: положите $\sqrt{x^2 + 6x} = y$); б) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 12$.

33. Какие два способа существуют для графического решения квадратного уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$?

34. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x - 5y = 7, \\ ax + y = -3 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

35. При каком значении a система уравнений

$$\begin{cases} 2x + ay = 8, \\ 3x + 5y = 6 \end{cases}$$

не имеет решений?

36. При каком значении a система

$$\begin{cases} x + ay = 2, \\ 3x - 2 = 6 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений?

37. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} xy = 12, \\ y = 8 - x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy = -5, \\ x + y = -2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = x^2, \\ x + y = 6, \\ y - x = 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} (x - y)(x + y) = 0, \\ y = -x^2. \end{cases}$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Постройте график функции:
а) $y = |3x - 4| + 1$; б) $y = 3 - |3x - 4|$; в) $y = 3|x + 2| - 1$.

2. Постройте график функции:
а) $y = |2x - 1| - |x + 3| + 3x - 1$; б) $y = |1 - 2x| + |x + 3| + 1 - 3x$.

3. Постройте график функции:

а) $y = \frac{1}{x}$; б) $y = \frac{1}{x - 2}$; в) $y = 2 + \frac{1}{x - 3}$; г) $y = \frac{2x - 5}{x - 3}$;

д) $y = \frac{x + 4}{x + 3}$; е) $y = \frac{2x + 4}{x - 2}$; ж) $y = \frac{2x + 1}{3x - 1}$; з) $y = \left|\frac{2x - 3}{x - 2}\right|$.

4. Постройте график функции:

а) $y = -\frac{1}{x}$; б) $y = \frac{1}{2 - x}$; в) $y = 2 - \frac{1}{x + 2}$; г) $y = \frac{4x + 1}{3x + 3}$;

д) $y = \left|\frac{2x + 3}{x + 2}\right|$; е) $y = \frac{1}{|x + 2|}$.

5. Решите уравнение:
а) $x^2 = |5x - 6|$; б) $x^2 - 2|x| - 3 = 0$; в) $x^2 + |x| = 0$;
г) $x^2 + 5|x| + 6 = 0$; д) $x^3 + |x| = 0$; е) $(x - 2)^3 + (1 - x)^3 = -1$;
ж) $(x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 12) = 0$.

6. Решите уравнение:
а) $(3x^2 - 2)^2 + 6(3x^2 - 2) = 7$; б) $(x^2 - 2x)^2 + (x - 1)^2 - 1 = 0$;
в) $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55$; г) $(x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 81$;

д) $7\left(y + \frac{1}{y}\right) - 2\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - 9 = 0$; е) $\frac{x^2 + x}{x - 1} + 2x = 2 + \frac{3x - 1}{x - 1}$.

7. Решите уравнение, содержащее параметр:

а) $\frac{x-a}{a} = \frac{2a}{x-a}$; б) $\frac{a}{x} + \frac{a-1}{x-1} = 2$; в) $\frac{x}{a} + \frac{a-1}{x-1} - 2 = 0$;

г) $x + \frac{bx}{x-2a} = \frac{2ab}{x-2a}$; д) $\frac{x}{2(x+2k)} - \frac{x}{2k-x} = \frac{5k^2}{2(x^2-4k^2)}$.

8. При каких значениях k уравнение:

а) $x^2 - 7x + k = 0$ имеет два равных корня;

б) $x^2 + x\sqrt{k^2-1} + k - 1 = 0$ имеет два равных корня;

в) $(k-2)x^2 - 2kx + 2k - 3 = 0$ имеет единственный корень?

9. Каждый учащийся класса послал к Новому году каждому своему однокласснику поздравительную открытку. При этом оказалось, что было послано 1332 открытки. Сколько учащихся было в этом классе?

10. В выпуклом многоугольнике число всех диагоналей равно 230. Определите число сторон этого многоугольника.

11. Жидкость, содержащую 85% спирта, смешали с другой жидкостью и получили 10 л жидкости, содержащей 79% спирта. Сколько литров каждой жидкости смешали, если число процентов спирта во второй жидкости на 66 больше числа литров этой же жидкости?

12. Двое рабочих могут вместе выполнить $\frac{2}{3}$ некоторого задания за 4 дня. За сколько дней каждый рабочий в одиночку может выполнить все задание, если первый может сделать это на 5 дней быстрее, чем второй?

13. Два туриста вышли одновременно навстречу друг другу из двух пунктов A и B и встретились через 3 ч 20 мин. За какое время каждый турист проходит расстояние от A до B, если первый прибыл в B через 5 ч после того, как второй прибыл в A?

14. При каком значении параметра a уравнение $x^2 + ax + 4 = 0$ имеет два корня, один из которых на 3 больше другого?

15. При каком значении a корни уравнения $3x^2 + (3a - 15)x - 27 = 0$ являются противоположными числами?

16. При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ равна 1,75?

17. Не решая квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$, найдите: а) сумму квадратов его корней; б) сумму кубов его корней.

18. При каком значении c корни уравнения $3x^2 + 2x - c = 0$ относятся как 2 : 3?

19. Решите способом подстановки систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 9, \\ 3x - y - 1 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x - y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$

20. Решите способом сложения систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 11, \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 3y = 9, \\ 2x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 17; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3(x + y) - 7 = 12x + y, \\ 6(y - 2x) = 1 - 45x. \end{cases}$

21. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 + 5xy - 18y^2 = 0, \\ xy + y^2 = 12; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 18, \\ 3y^2 + xy = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = 72, \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ x + y - \sqrt{xy} - 3 = 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ xy(x + y) - 30 = 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x^2 + y^2 = 7 + xy. \end{cases}$

22. Постройте график функции:

а) $y = x^2 + x - 2$; б) $y = -x^2 + 2x + 3$; в) $y = x^2 - 2|x| + 2$;
г) $y = 2x|x| - 3x + 4$; д) $y = -2x^2 + 4x - 12$; е) $y = 3x|x| - 4$.

23. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна $3\sqrt{10}$. Найдите катеты, если известно, что после того как один из них увеличить на $133\frac{1}{3}\,\%$, а другой — на $16\frac{2}{3}\,\%$, сумма их длин будет равна 17,5.

24. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ 2x - y + 2z = -1, \\ 3x - 2y + z = 3. \end{cases}$$

25. Найдите разность радикалов, если известно, что она является целым числом:

а) $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$; б) $\sqrt{|12\sqrt{5}-29|}-\sqrt{12\sqrt{5}+29}$;

в) $\sqrt{|24\sqrt{3}-43|}-\sqrt{24\sqrt{3}+43}$; г) $\sqrt{|20\sqrt{7}-53|}-\sqrt{20\sqrt{7}+53}$.

26. При каком значении k имеют общий корень уравнения:

а) $x^2-kx=0$ и $x^2-x-3k=0$;

б) $x^2+kx+2=0$ и $x^2+2x+k=0$;

в) $4kx^2-5x+k=0$ и $3x^2+2kx-5=0$?

Задания для повторения

27. При каких значениях a верно равенство:

а) $\sqrt{a^2}=-a$; б) $\sqrt[3]{a^3}=a$; в) $\sqrt[5]{a^5}=|a|$; г) $\sqrt[4]{a^4}=a$;

д) $\sqrt[3]{a}=-a$; е) $\sqrt[6]{a^6}=-a$; ж) $\sqrt[4]{a^4}=|a|$; з) $\sqrt[7]{a^7}=a$?

28. Найдите массу оружейного патрона, зная, что заряд весит 0,8 кг, масса снаряда составляет $\frac{2}{3}$ массы всего патрона, а масса гильзы — $\frac{1}{4}$ массы патрона.

29. При продаже товара на сумму 1386 р. получена прибыль в 10%. Определите себестоимость товара.

30. При продаже продукции на сумму 3348 р. был понесен убыток в 4%. Какова себестоимость этой продукции?

31. Из 225 кг руды получили 34,2 кг меди. Каково процентное содержание меди в руде?

32. Полученный при сушке винограда изюм составляет 32% массы винограда. Из какого количества винограда получится 2 кг изюма?

ОТВЕТЫ

5. а) $x_1=-6$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$; б) $x_1=-3$, $x_2=3$; в) $x=0$; г) нет корней; д) $x_1=-1$, $x_2=0$; е) $x_1=1$, $x_2=2$; ж) $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=4$, $x_4=6$. **6.** а) $x_1=-1$, $x_2=1$; б) $x_1=0$, $x_2=x_3=1$, $x_4=2$; в) $x_1=-4$, $x_2=2$; г) $x_1=3-2\sqrt{5}$, $x_2=3$, $x_3=3+2\sqrt{5}$; д) $x=0{,}5$; е) нет корней. **7.** а) $x_{1,\,2}=a(1\pm\sqrt{2})$, $x\neq a$, $a\neq 0$; б) если $a\neq 0$, $a\neq 1$, то $x_1=0{,}5$, $x_2=a$; если

$a = 0$, $a = 1$, то $x = 0{,}5$; в) если $a \neq 0$, $a \neq 1$, то $x_1 = a$, $x_2 = a + 1$; если $a = 1$, то $x = 2$; если $a = 0$, то нет корней; г) если $b \neq -2a$, то $x = -b$; если $b = -2a$, то нет корней; д) если $k \neq 0$, то $x_1 = k$, $x_2 = -\frac{5k}{3}$; если $k = 0$, то нет корней. **8.** а) $k = 12{,}25$; б) $k_1 = 1$, $k_2 = 3$; в) $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 6$. **9.** 37 учащихся. **10.** 23 стороны. **11.** 6 и 4 л. **12.** 10 и 15 дней. **13.** 10 и 5 ч. **14.** $a_1 = -5$, $a_2 = 5$. **15.** $a = 5$. **16.** $a_1 = -0{,}5$; $a_2 = 0{,}5$. **17.** а) $p^2 - 2q$; б) $p(3q - p^2)$. **18.** $c = -\frac{8}{25}$. **19.** а) $x_1 = -1$, $y_1 = -4$; $x_2 = 1$, $y_2 = 2$; б) $x_1 = -1$, $y_1 = -2$; $x_2 = 2$, $y_2 = 1$; в) $x_1 = -3$, $y_1 = -2$; $x_2 = 3$, $y_2 = 2$. **20.** а) $x_1 = -1$, $y_1 = -2$; $x_2 = 3$, $y_2 = -2$; $x_3 = -3$, $y_3 = 2$; $x_4 = 1$, $y_4 = 2$; б) $x_1 = -2{,}5$, $y_1 = -1{,}5$; $x_2 = 1$, $y_2 = 2$; в) $x = -\frac{1}{3}$, $y = 2$. **21.** а) $x_1 = -4$, $y_1 = -2$; $x_2 = -2$, $y_2 = -4$; $x_3 = 4$, $y_3 = 2$; $x_4 = 2$, $y_4 = 4$; б) $x_1 = -4$, $y_1 = -2$; $x_2 = 4$, $y_2 = 2$; в) $x_1 = -3$, $y_1 = -1$; $x_2 = 3$, $y_2 = 1$; г) $x_1 = 64$, $y_1 = 8$; $x_2 = 8$, $y_2 = 64$. **23.** 3 и 9. **24.** $x = 1$, $y = -1$, $z = -2$. **25.** а) -10; б) -6; в) -8; г) -10. **26.** а) $k = 0$; $k = 4$; б) $k = -3$; в) $k = -1$; $k = 1$. **27.** а) При $a \leqslant 0$; б) при любых a; в) при $a \geqslant 0$; г) при $a \geqslant 0$; д) при $a = 0$; е) при $a \leqslant 0$; ж) при любых a; з) при любых a. **28.** 9,6 кг. **29.** 1260 р. **30.** 3487,5 р. **31.** 15,2%. **32.** Из 6,25 кг.

Решения и методические указания

К упражнению 1а

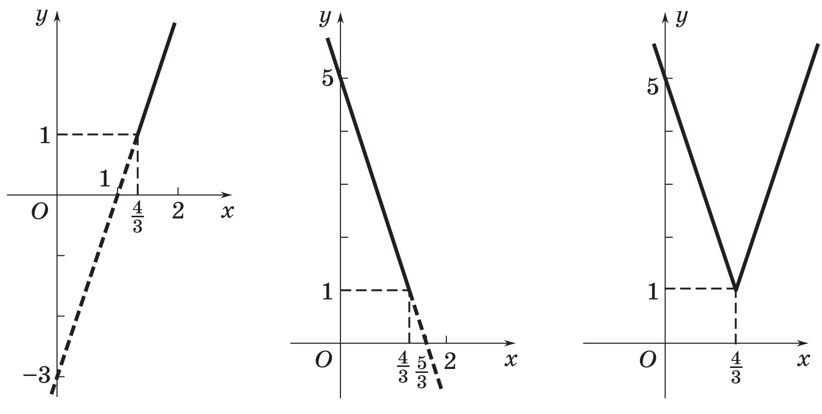
1. Для построения графика данной функции используем определение модуля. Имеем

$$\text{а)} \begin{cases} 3x - 4 \geqslant 0, \\ y = 3x - 4 + 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \geqslant \frac{4}{3}, \\ y = 3x - 3; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} 3x - 4 < 0, \\ y = -(3x - 4) + 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < \frac{4}{3}, \\ y = -3x + 5. \end{cases}$$

Построим график функции $y = 3x - 3$ на множестве $\left[\frac{4}{3};\ +\infty\right)$ (рис. 28, *а*) и график функции $y = -3x + 5$ на множестве $\left(-\infty;\ \frac{4}{3}\right)$ (рис. 28, *б*).

2. Объединив эти графики, получим искомый график (рис. 28, *в*).



а) б) в)

Рис. 28

К упражнению 2а

1. В выражении, определяющем заданную функцию, найдем те значения переменной x, при которых величины, находящиеся под знаком модуля, обращаются в нуль: $x + 3 = 0$, $x_1 = -3$; $2x - 1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

2. Точками $x_1 = -3$ и $x_2 = \frac{1}{2}$ координатная прямая разбивается на три промежутка: $(-\infty; -3)$, $\left[-3; \frac{1}{2}\right)$ и $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

3. Рассмотрим данную функцию в промежутке $(-\infty; -3)$ и запишем ее выражение без знака модуля:

$$\begin{cases} x < -3, \\ y = -(2x - 1) + (x + 3) + 3x - 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < -3, \\ y = 2x + 3. \end{cases}$$

Построим график полученной функции (рис. 29, *а*).

4. Рассмотрим данную функцию в промежутке $\left[-3; \frac{1}{2}\right)$ и запишем ее выражение без знака модуля:

$$\begin{cases} -3 \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ y = -(2x - 1) - (x + 3) + 3x - 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -3 \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ y = -3. \end{cases}$$

Построим график полученной функции (рис. 29, *б*).

5. Рассмотрим данную функцию в промежутке $\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right)$ и запишем ее выражение без знака модуля:

$$\begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2}, \\ y = 2x - 1 - (x + 3) + 3x - 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2}, \\ y = 4x - 5. \end{cases}$$

Построим график полученной функции (рис. 29, *в*).

6. Объединив построенные в пп. 3—5 графики, получим искомый график (рис. 29, *г*).

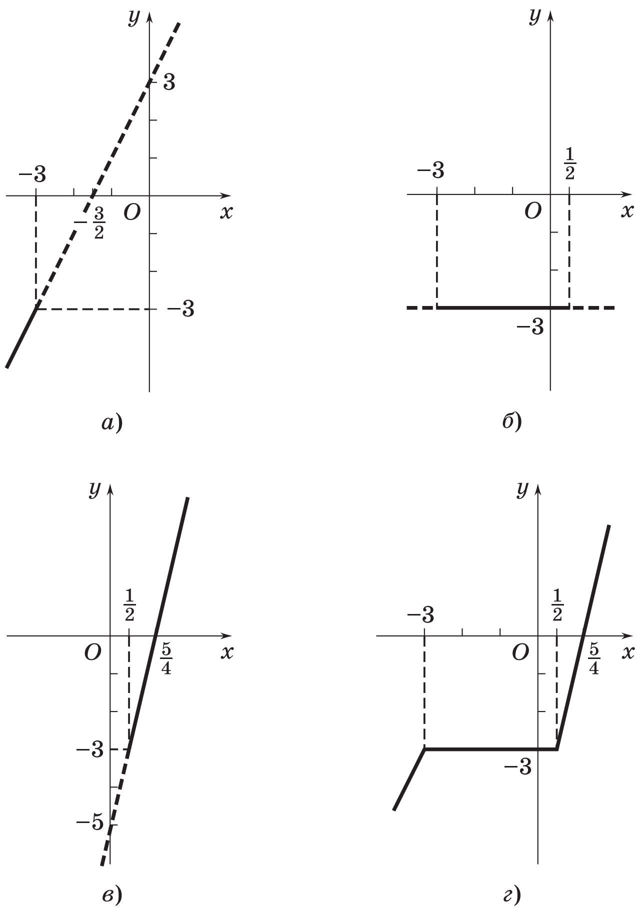


Рис. 29

К упражнению 3а

1. Функция $y = \frac{1}{x}$ определена при всех $x \in \boldsymbol{R}$, $x \neq 0$.

2. Функция нечетная, так как $f(-x) = -f(x)$. Следовательно, ее график симметричен относительно начала координат. Это означает, что достаточно рассмотреть функцию только при $x > 0$.

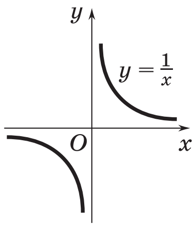


Рис. 30

3. График функции $y = \frac{1}{x}$ изображен на рис. 30; его ветви расположены в I и III четвертях.

4. Оси координат являются асимптотами кривой $y = \frac{1}{x}$. Саму кривую, как известно, называют гиперболой, а точку пересечения асимптот — ее центром.

Замечание 1. Вернемся к функции $y = \frac{1}{x}$ (см. рис. 30) и отметим, что для дроби $\frac{1}{x}$ выполнены следующие условия:

а) числитель дроби равен 1, т. е. положителен;
б) коэффициент при x равен 1, т. е. положителен;
в) перед дробью стоит знак «плюс».

Как мы отмечали, ветви гиперболы $y = \frac{1}{x}$ расположены в I и III четвертях системы координат.

В дальнейшем при построении графика функции $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ (смещенной гиперболы) мы будем проводить аналогичные рассуждения, чтобы установить, в каких четвертях (относительно вспомогательных осей координат) расположен график функции.

Замечание 2. При построении графика дробно-линейной функции $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ можно использовать два способа.

Первый способ заключается в следующем:

а) сначала строят график функции $y = \frac{k}{x}$ в системе координат xOy;

б) затем сдвигают этот график как твердое тело вдоль осей координат;

в) при этом новые оси координат являются асимптотами искомого графика.

Второй способ состоит в следующем:

а) сначала строят график функции $y = \frac{k}{x}$ в системе координат $x'O'y'$;

б) затем выполняют параллельный перенос осей координат;

в) при этом оси координатной системы $x'O'y'$ являются асимптотами искомого графика.

К упражнению 3б

1. Функция $y = \dfrac{1}{x-2}$ определена при всех $x \neq 2$. Отсюда следует, что она определена на двух интервалах $(-\infty; 2)$ и $(2; +\infty)$.

2. Рассматривая дробь $\dfrac{1}{x-2}$, видим, что: а) ее числитель положителен; б) коэффициент при x положителен; в) перед дробью стоит знак «плюс».

3. Таким образом, графиком функции является гипербола, ветви которой расположены в I и III четвертях системы координат, имеющей начало в точке (2; 0) (рис. 31, *а*).

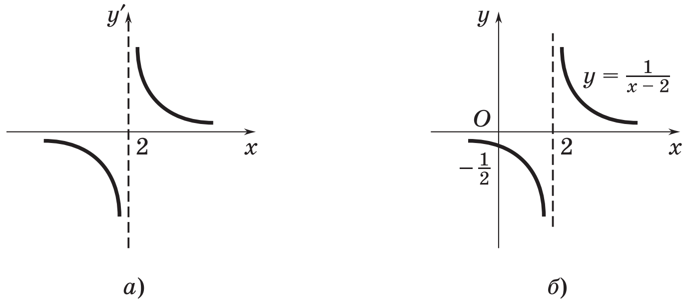


Рис. 31

4. На рис. 31, *а* вертикальная ось проведена пунктиром. Она пересекает ось Ox а точке $x = 2$, которая не принадлежит области определения функции.

5. Остается провести ось Oy по отношению к пунктирной асимптоте, эта ось пройдет левее точки $x = 2$ и изображена на рис. 31, *б* сплошной линией.

6. Из рис. 31, *б* видно, что ось Oy пересекает график в некоторой точке. Ее абсцисса равна нулю, а ординату найдем так: полагая $x = 0$, получим $y = \dfrac{1}{0-2} = -\dfrac{1}{2}$.

Итак, график функции $y = \dfrac{1}{x-2}$ построен (рис. 31, *б*).

К упражнению 3в

1. Найдем область определения функции: $x \neq 3$, т. е. функция определена на двух интервалах: $(-\infty; 3)$ и $(3; +\infty)$.

2. Таким образом, график функции имеет вертикальную асимптоту $x = 3$.

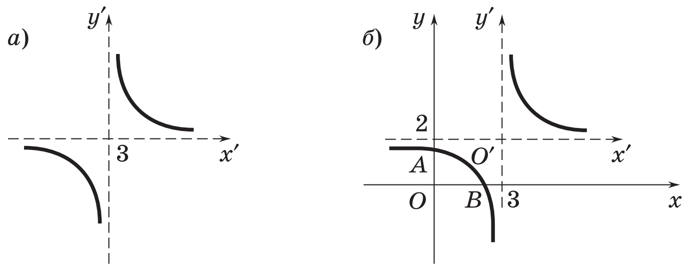


Рис. 32

3. Определим, в каких четвертях относительно вспомогательных осей координат будет находиться график. Рассуждая, как и при решении упр. 3а и 3б, заключаем, что он будет расположен в I и III четвертях относительно вспомогательных осей $O'x'$ и $O'y'$ (рис. 32, *а*).

4. Найдем горизонтальную асимптоту графика функции $f(x) = 2 + \frac{1}{x-3}$. Слагаемое $\frac{1}{x-3}$ стремится к нулю при $x \to \pm\infty$. Поэтому график функции $f(x)$ при больших по модулю значениях x будет неограниченно приближаться к прямой $y = 2$. Эта прямая и есть горизонтальная асимптота графика.

5. Теперь для построения графика функции $f(x) = 2 + \frac{1}{x-3}$ нужно сместить график функции $y = \frac{1}{x}$ на 2 ед. вверх и на 3 ед. вправо.

6. Однако мы не будем перемещать график, а сделаем следующее:

а) проведем ось Ox параллельно оси $O'x'$ ниже ее на 2 ед.;

б) проведем ось Oy параллельно оси $O'y'$ левее ее на 3 ед.;

в) пересечение осей Ox и Oy даст точку O — начало координат.

7. Итак, график функции $f(x) = 2 + \frac{1}{x-3}$ построен (рис. 32, *б*).

8. На рис. 32, *б* видно, что график пересекает основные (сплошные) оси координат в точках A и B. Найдем координаты этих точек:

а) если $x = 0$, то $y = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$, т. е. $A\left(0;\ \frac{5}{3}\right)$;

б) если $y = 0$, то $x = \frac{5}{2}$, т. е. $B\left(\frac{5}{2};\ 0\right)$.

К упражнению 3г

1. Функция $y = \frac{2x-5}{x-3}$ определена при любом значении x, кроме $x = 3$. Таким образом, $x = 3$ — вертикальная асимптота графика.

2. До сих пор мы строили графики таких дробно-линейных функций, где в числителе дроби отсутствовала переменная. Для данной функции переменная в числителе присутствует.

3. Чтобы избавиться от переменной в числителе дроби, нужно выделить целую часть этой дроби.

4. Упростим выражение $\frac{2x-5}{x-3}$ так:

а) вынесем в числителе за скобки коэффициент 2, тогда дробь примет вид

$$\frac{2x-5}{x-3} = \frac{2\left(x-\frac{5}{2}\right)}{x-3};$$

б) к выражению $x-\frac{5}{2}$, записанному в скобках, прибавим 3 и вычтем 3, тогда получим

$$\frac{2\left(x-\frac{5}{2}\right)}{x-3} = \frac{2\left(x-3+3-\frac{5}{2}\right)}{x-3};$$

в) упростим последнюю дробь:

$$\frac{2\left(x-3+3-\frac{5}{2}\right)}{x-3} = \frac{2(x-3)+2\left(3-\frac{5}{2}\right)}{x-3} = 2+\frac{1}{x-3}.$$

5. В результате мы получили ту же функцию, что и в упр. 3в. Ее график изображен на рис. 32, *б*.

З а м е ч а н и е. В данном примере было показано, как в дробно-линейной функции выделить целую часть.

К упражнениям 3д—з

См. соответственно рис. 33—36.

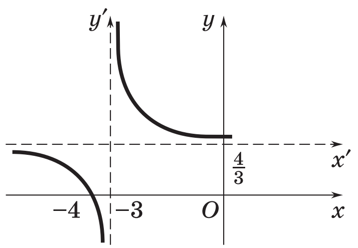


Рис. 33

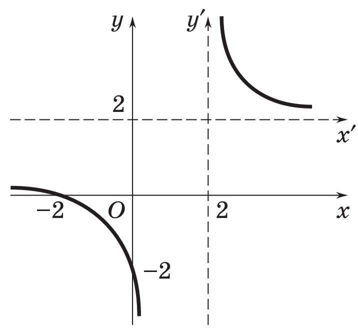


Рис. 34

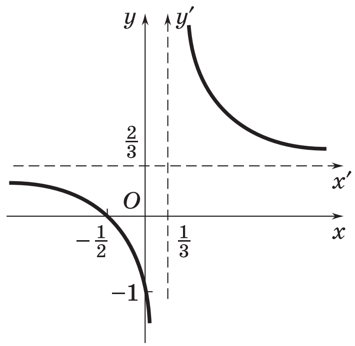


Рис. 35

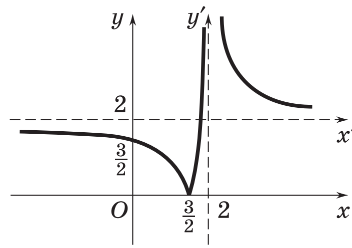


Рис. 36

К упражнению 4а

1. Функция $y = -\frac{1}{x}$ определена при всех $x \in \boldsymbol{R}$, кроме $x = 0$.

2. Функция нечетная, так как $f(-x) = -f(x)$. Поэтому ее график симметричен относительно начала координат.

3. Дробь $-\frac{1}{x}$ запишем так: $-\frac{1}{x} = \frac{-1}{x}$, где $k = -1 < 0$.

4. Это означает, что график данной функции расположен во II и IV координатных четвертях.

5. Искомый график изображен на рис. 37.

К упражнению 4б

1. Функция $y = \frac{1}{2-x}$ определена при всех $x \in \boldsymbol{R}$, кроме $x = 2$.

2. График функции имеет вертикальную асимптоту $x = 2$.

3. Преобразуем данную функцию:

$$y = \frac{1}{2-x} = -\frac{1}{x-2} = \frac{-1}{x-2}.$$

4. Так как $k = -1 < 0$, то ветви гиперболы будут находиться во II и IV четвертях системы координат, началом которой является точка $(2; 0)$.

5. Искомый график изображен на рис. 38.

К упражнениям 4в—е

См. соответственно рис. 39—42.

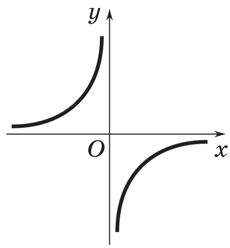


Рис. 37

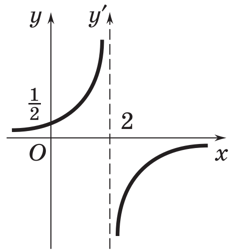


Рис. 38

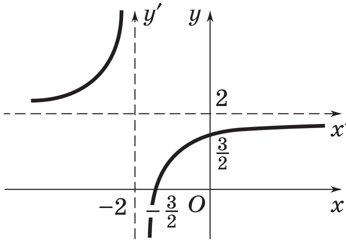


Рис. 39

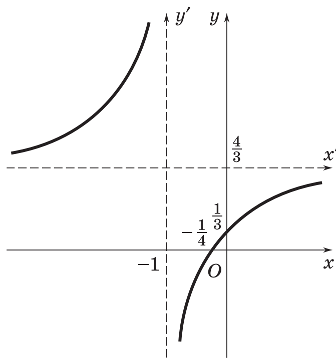


Рис. 40

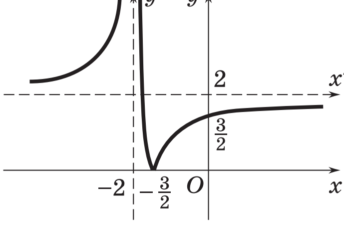


Рис. 41

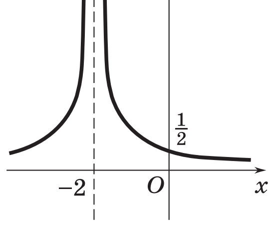


Рис. 42

К упражнению 5а

1. Пусть $5x - 6 \geqslant 0$; тогда данное уравнение примет вид $x^2 = 5x - 6$.
2. Составим систему

$$\begin{cases} 5x - 6 \geqslant 0, \\ x^2 = 5x - 6, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \geqslant \dfrac{6}{5}, \\ x = 2,\ x = 3. \end{cases}$$

Эта система имеет решения $x = 2$, $x = 3$.

3. Пусть $5x - 6 < 0$; тогда данное уравнение примет вид $x^2 = -(5x - 6)$.
4. Составим систему

$$\begin{cases} 5x - 6 < 0, \\ x^2 = -(5x - 6), \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < \dfrac{6}{5}, \\ x = -6,\ x = 1. \end{cases}$$

Решениями этой системы являются $x = -6$, $x = 1$.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -6$, $x_4 = 1$.

К упражнению 5б

1. Снова используем определение модуля и решим уравнение без подробного описания действий.

2. $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 - 2x - 3 = 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x = -1,\ x = 3. \end{cases}$

Значит, $x = 3$.

3. $\begin{cases} x < 0, \\ x^2 + 2x - 3 = 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x < 0, \\ x = -3,\ x = 1. \end{cases}$

Значит, $x = -3$.

Ответ: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

К упражнению 6а

1. Полагая $3x^2 - 2 = y$, перепишем данное уравнение в виде

$$y^2 + 6y - 7 = 0.$$

2. Решив уравнение $y^2 + 6y - 7 = 0$, находим $y_1 = -7$, $y_2 = 1$.
3. Значит, $3x^2 - 2 = -7$ или $3x^2 - 2 = 1$.
4. Уравнение $3x^2 = -5$ не имеет корней.
5. Уравнение $3x^2 = 3$ имеет корни $x = -1$, $x = 1$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

К упражнению 6б

1. Перепишем данное уравнение в виде

$$(x^2 - 2x)^2 + (x^2 - 2x + 1) - 1 = 0. \qquad (1)$$

2. Пусть $x^2 - 2x = y$; тогда уравнение (1) примет вид

$$y^2 + (y + 1) - 1 = 0, \text{ или } y^2 + y = 0. \qquad (2)$$

3. Решив уравнение (2), найдем $y_1 = -1$, $y_2 = 0$.

4. Уравнение $x^2 - 2x = -1$ имеет корни $x_1 = x_2 = 1$.

5. Уравнение $x^2 - 2x = 0$ имеет корни $x_3 = 0$, $x_4 = 2$.

Ответ: $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$.

К упражнению 7а

1. Данное уравнение содержит параметр a (переменную, которая в рассматриваемом примере сохраняет одно и то же значение).

2. Из условия следует, что $a \neq 0$, $x \neq a$.

3. Упрощая уравнение, получим

$$x^2 - 2ax - a^2 = 0,$$

откуда $x = a \pm a\sqrt{2}$.

Ответ: $x \neq a$, $a \neq 0$, $x = a(1 \pm \sqrt{2})$.

К упражнению 7б

1. Из условия следует, что $x \neq 0$, $x \neq 1$.

2. После упрощения данного уравнения имеем

$$2x^2 - (2a + 1)x + a = 0.$$

3. Решив это уравнение, находим

$$x = \frac{2a + 1 \pm (2a - 1)}{4}.$$

Ответ: а) если $a \neq 0$, $a \neq 1$, то $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = a$;

б) если $a = 0$, $a = 1$, то $x = \frac{1}{2}$.

К упражнению 8в

1. Данное уравнение окажется линейным, если $k - 2 = 0$, т. е. $k = 2$. В этом случае уравнение имеет единственный корень.

2. Квадратное уравнение имеет единственный корень, если $D = 0$.

3. Найдем дискриминант данного уравнения и определим, при каких значениях k он равен нулю:

а) $D = 4k^2 - 4(k - 2)(2k - 3) = -4k^2 + 28k - 24$;

б) $-4k^2 + 28k - 24 = 0$, $k = 1$ и $k = 6$.

<u>Ответ</u>: $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $k_3 = 6$.

К упражнению 9

1. Пусть в классе было x учащихся. По условию каждый из них получил по $x - 1$ открыток.

2. Так как всего было послано $x(x - 1)$ открыток, то получаем уравнение $x(x - 1) = 1332$, или

$$x^2 - x - 1332 = 0, \text{ откуда } x = 37.$$

К упражнению 10

1. Пусть x — число сторон данного выпуклого многоугольника.

2. Тогда число диагоналей, проведенных из каждой вершины, равно $x - 3$; таким образом, получаем уравнение $\frac{x(x-3)}{2} = 230$, $x^2 - 3x - 460 = 0$, откуда $x = 23$.

К упражнению 11

1. Пусть было взято x л первой жидкости, тогда в ней содержится $\frac{x \cdot 85}{100}$ л спирта.

2. Число литров второй жидкости есть $10 - x$, а процентное содержание спирта в ней равно $(10 - x + 66)\%$.

3. По условию

$$\frac{(10-x)(76-x)}{100} + \frac{85x}{100} = \frac{10 \cdot 79}{100},$$

откуда $x^2 - x - 30 = 0$, т. е. $x = 6$.

<u>Ответ</u>: 6 и 4 л.

К упражнению 12

1. Пусть объем работы составляет A некоторых условных единиц и x — число дней, за которое первый рабочий может выполнить все задание.

2. Тогда за один день первый рабочий выполняет $\frac{A}{x}$ всего задания, а второй $\frac{A}{x+5}$ всего задания.

3. Следовательно, за 4 дня первый рабочий выполнит $4\frac{A}{x}$ всего задания, а второй выполнит $4\frac{A}{x+5}$ всего задания.

4. Согласно условию, получаем уравнение

$$4\frac{A}{x} + 4\frac{A}{x+5} = \frac{2}{3}A,$$

откуда находим $x = 10$. Итак, получаем ответ: 10 и 15 дней.

К упражнению 13

1. Пусть первый турист прошел расстояние от A до B за t ч, тогда второй прошел это расстояние за $t - 5$ ч.

2. Пусть s — расстояние от A до B. Тогда скорости первого и второго туристов соответственно равны $\frac{s}{t}$ и $\frac{s}{t-5}$ (км/ч).

3. До встречи туристы прошли соответственно $\frac{10}{3} \cdot \frac{s}{t}$ и $\frac{10}{3} \cdot \frac{s}{t-5}$ км.

4. Составим уравнение

$$\frac{10}{3} \cdot \frac{s}{t} + \frac{10}{3} \cdot \frac{s}{t-5} = s,$$

откуда находим $t = 10$.

Ответ: 10 и 5 ч.

К упражнению 17б

1. Требуется определить $x_1^3 + x_2^3$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

2. Из формул Виета следует, что $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$.

3. Упростив сумму кубов и выполнив подстановку, получим

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) =$$
$$= (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = -p(p^2 - 3q) = p(3q - p^2).$$

К упражнению 18

1. По условию корни уравнения $3x^2 + 2x - c = 0$ имеют вид $x_1 = 2k$ и $x_2 = 3k$.

2. Согласно одной из формул Виета, имеем $x_1 + x_2 = 5k = -\frac{2}{3}$, откуда $k = -\frac{2}{15}$.

3. Найдем x_1 и x_2:

$$x_1 = 2k = 2\left(-\frac{2}{15}\right) = -\frac{4}{15}, \quad x_2 = 3k = -\frac{2}{5}.$$

4. Используем другую формулу Виета и найдем значение c:

$$x_1x_2 = -\frac{4}{15} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{c}{3}, \text{ откуда } c = -\frac{8}{25}.$$

К упражнению 19а

З а м е ч а н и е. Основными методами решения систем алгебраических уравнений являются метод подстановки, метод сложения и метод введения новых переменных.

Далее на примерах мы покажем, как используются эти методы применительно к системам произвольных алгебраических уравнений.

1. Дана система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 9, \\ 3x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

2. Из второго уравнения системы выразим y через x: $y = 3x - 1$.

3. Подставив выражение для y в первое уравнение, получим

$$x^2 + (3x - 1)^2 + 2(3x - 1) = 9.$$

4. Раскрыв скобки и приведя подобные члены, имеем $x^2 - 1 = 0$. Следовательно, $x_1 = -1$; $x_2 = 1$. Этим значениям x соответствуют $y_1 = -4$; $y_2 = 2$. Итак, $x_1 = -1$, $y_1 = -4$ и $x_2 = 1$, $y_2 = 2$ — решения системы.

К упражнению 20а

1. Дана система

$$\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 11, \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 10. \end{cases} \qquad (1)$$

2. Почленное сложение уравнений системы (1) не приведет к исключению одной из переменных. Если же умножить все члены первого уравнения системы (1) на (-2), то коэффициенты при x^2 в полученных уравнениях будут противоположными числами:

$$\begin{cases} -2x^2 - 2xy - 4y^2 = -22, \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 10. \end{cases} \qquad (2)$$

3. Сложив почленно уравнения системы (2), получим уравнение $y^2 = 4$, из которого находим $y_1 = -2$, $y_2 = 2$.

4. Так как мы получили два значения y, то следует составить две системы уравнений, взяв одно из уравнений системы (1), и решить их. Имеем:

а) $\begin{cases} y = -2, \\ x^2 + xy + 2y^2 = 11, \end{cases}$ или $\begin{cases} y = -2, \\ x = -1,\ x = 3, \end{cases}$

т. е. $\begin{cases} y_1 = -2, \\ x_1 = -1 \end{cases}$ и $\begin{cases} y_2 = -2, \\ x_2 = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = 2, \\ x^2 + xy + 2y^2 = 11, \end{cases}$ или $\begin{cases} y = 2, \\ x = -3,\ x = 1, \end{cases}$

т. е. $\begin{cases} y_3 = 2, \\ x_3 = -3 \end{cases}$ и $\begin{cases} y_4 = 2, \\ x_4 = 1. \end{cases}$

К упражнению 21а

З а м е ч а н и е. При решении подобных систем лучше всего применять искусственные приемы.

1. Дана система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8. \end{cases}$$

2. Умножив второе уравнение системы на 2 и сложив результат с первым уравнением, получим $(x + y)^2 = 36$, откуда $x + y = \pm 6$.

3. Таким образом, данная система равносильна совокупности двух систем:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 8; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + y = -6, \\ xy = 8. \end{cases}$$

4. Каждая система легко решается. Всего получим четыре решения: $x_1 = -4$, $y_1 = -2$; $x_2 = -2$, $y_2 = -4$; $x_3 = 4$, $y_3 = 2$; $x_4 = 2$, $y_4 = 4$.

Эту систему можно решить другим способом.

1. Возведя второе уравнение системы в квадрат, получим

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ x^2y^2 = 64. \end{cases}$$

2. Полагая $x^2 = a$, $y^2 = b$, приходим к системе

$$\begin{cases} a + b = 20, \\ ab = 64. \end{cases}$$

3. Решив последнюю систему, получим тот же ответ.

К упражнению 21б

1. Дана система

$$\begin{cases} 2x^2 + 5xy - 18y^2 = 0, \\ xy + y^2 = 12. \end{cases}$$

2. Первому уравнению системы удовлетворяют значения $x = 0$ и $y = 0$.

3. Однако второе уравнение системы при $y = 0$ приводится к неверному равенству: $12 = 0$. Следовательно, обе части первого уравнения можно разделить на y^2, тогда получим

$$2\frac{x^2}{y^2} + 5\frac{x}{y} - 18 = 0.$$

4. Полагая $\frac{x}{y} = z$, приходим к квадратному уравнению

$$2z^2 + 5z - 18 = 0,$$

корни которого $z = -\frac{9}{2}$ и $z = 2$.

5. Таким образом, данная система равносильна совокупности двух систем:

$$\text{а)} \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{9}{2}, \\ xy + y^2 - 12 = 0; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} \frac{x}{y} = 2, \\ xy + y^2 - 12 = 0. \end{cases}$$

6. Система а) не имеет действительных решений, система б) имеет два решения: $x_1 = -4$, $y_1 = -2$ и $x_2 = 4$, $y_2 = 2$.

К упражнению 21в

1. Дана система

$$\begin{cases} x^2 + 3xy = 18, \\ 3y^2 + xy = 6. \end{cases}$$

2. После анализа уравнений данной системы убеждаемся в том, что ни один из рассмотренных выше способов решения неприменим.

3. Освободимся от одночленов xy и $3xy$. Умножим второе уравнение системы на (-3), тогда коэффициенты при xy в обоих уравнениях системы будут противоположными числами:

$$\begin{cases} x^2 + 3xy = 18, \\ -9y^2 - 3xy = -18, \end{cases} \quad \text{или} \quad x^2 - 9y^2 = 0. \tag{1}$$

4. Составим новую систему из уравнения (1) и любого уравнения данной системы:

$$\begin{cases} x^2 - 9y^2 = 0, \\ 3y^2 + xy = 6. \end{cases} \qquad (2)$$

5. Система (2) равносильна совокупности двух систем:

$$\text{а)} \begin{cases} x - 3y = 0, \\ 3y^2 + xy = 6; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} x + 3y = 0, \\ 3y^2 + xy = 6. \end{cases}$$

6. Система б) не имеет действительных решений, система а) имеет два решения: $x_1 = -3$, $y_1 = -1$ и $x_2 = 3$, $y_2 = 1$.

К упражнению 21г

1. Дана система

$$\begin{cases} x + y = 72, \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6. \end{cases}$$

2. Если из первого уравнения системы выразить x или y и сделать подстановку во второе уравнение, то задача только усложнится.

3. Возведя второе уравнение системы в куб, получим

$$x + y + 3\sqrt[3]{xy}\,(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) = 6^3, \text{ или } 72 + 3 \cdot 6\sqrt[3]{xy} = 6^3,$$

откуда $\sqrt[3]{xy} = 8$, а $xy = 8^3 = 512$.

4. Составим новую систему

$$\begin{cases} xy = 512, \\ x + y = 72, \end{cases}$$

откуда $x_1 = 64$, $y_1 = 8$ и $x_2 = 8$, $y_2 = 64$.

К упражнению 22а

1. Функция $y = x^2 + x - 2$ — квадратичная; ее графиком является парабола, ветви которой направлены вверх, так как $a = 1 > 0$.

2. Найдем корни функции (если они имеются):

$$x^2 + x - 2 = 0,\ x_1 = -2;\ x_2 = 1.$$

3. Найдем вершину параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2};\ y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -2\frac{1}{4}.$$

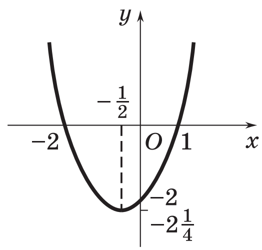


Рис. 43

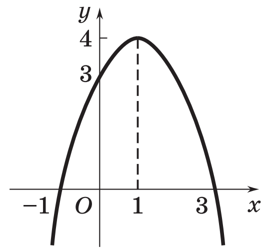


Рис. 44

4. Определим точку, в которой график функции пересекает ось Oy: полагая $x = 0$, находим $y = -2$.

5. Используя полученные данные, изобразим схематически график функции (рис. 43).

К упражнению 22б

1. Функция $y = -x^2 + 2x + 3$ — квадратичная; ее графиком является парабола, ветви которой направлены вниз, так как $a = -1 < 0$.

2. Найдем корни функции: $-x^2 + 2x + 3 = 0$, $x_1 = -1$; $x_2 = 3$.

3. Найдем вершину параболы: $x_0 = 1$; $y_0 = 4$.

4. Определим точку, в которой график функции пересекает ось Oy: при $x = 0$ имеем $y = 3$.

5. На основании полученных данных изобразим схематически график функции (рис. 44).

З а м е ч а н и е. В дальнейшем при построении графика функции $y = ax^2 + bx + c$ мы не будем приводить столь подробных объяснений.

К упражнению 22в

1. Требуется построить график функции

$$y = x^2 - 2|x| + 2.$$

2. Раскрывая модуль, получим

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y = x^2 - 2x + 2; \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} x < 0, \\ y = x^2 + 2x + 2. \end{cases} \quad (2)$$

3. Построим часть искомого графика, определяемую системой (1):

а) дискриминант квадратного трехчлена $x^2 - 2x + 2$ отрицателен, поэтому график функции (1) не пересекает ось Oy и лежит выше этой оси (так как $a = 1 > 0$);

б) $x_0 = -\left(\frac{-2}{2}\right) = 1$, $y_0 = \frac{4 \cdot 1 \cdot 2 - 4}{4} = 1$;

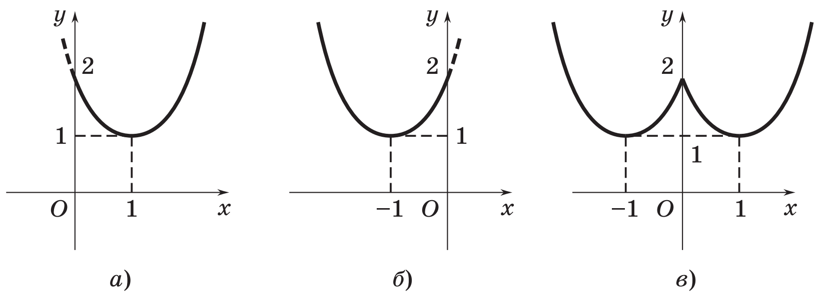


Рис. 45

в) если $x = 0$, то $y = 2$;

г) график функции (1) изображен на рис. 45, *а*.

4. Построим часть искомого графика, определяемую системой (2):

а) дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + 2x + 2$ отрицателен, значит, график функции (2) лежит выше оси Oy (поскольку $a = 1 > 0$);

б) $x_0 = -\frac{2}{2} = -1$, $y_0 = \frac{4 \cdot 1 \cdot 2 - 4}{4} = 1$;

в) график функции (2) изображен на рис. 45, *б*.

5. Объединив графики функций (1) и (2), получим искомый график (рис. 45, *в*).

К упражнению 25а

1. Так как $(40\sqrt{2})^2 = 3200$, а $57^2 = 3249$, то $57 > 40\sqrt{2}$.

2. Отсюда следует, что под знаком модуля в выражении $|40\sqrt{2} - 57|$ находится отрицательное число. Таким образом, $\sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} = \sqrt{57 - 40\sqrt{2}}$.

3. Обозначим искомую разность радикалов через x:

$$\sqrt{57 - 40\sqrt{2}} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57} = x.$$

4. Возведя обе части этого равенства в квадрат, получим

$$x^2 = 57 - 40\sqrt{2} + 40\sqrt{2} + 57 - 2\sqrt{(57 - 40\sqrt{2})(57 + 40\sqrt{2})},$$

или $x^2 = 100$, откуда $x_1 = -10$, $x_2 = 10$. Это означает, что x_1 или x_2 есть одно из искомых чисел.

5. Так как $\sqrt{57 + 40\sqrt{2}} > \sqrt{57 - 40\sqrt{2}}$, то искомым является число $x = -10$.

К упражнению 26а

1. Если заданные уравнения имеют общий корень, то при некотором x выражения $x^2 - kx$ и $x^2 - x - 3k$ совпадают:

$$x^2 - kx = x^2 - x - 3k;\ -kx = -x - 3k;\ k = \frac{x}{x-3}.$$

2. При найденном значении $k = \frac{x}{x-3}$ любое из данных выражений должно обращаться в нуль, т. е.

$$x^2 - \frac{x}{x-3} \cdot x = 0,\ x^2\left(1 - \frac{1}{x-3}\right) = 0,$$

откуда $x_1 = 0$ или $x_2 = 4$.

3. Возьмем любое из данных уравнений, например $x^2 - kx = 0$. Тогда:

а) если $x = 0$, то $0 - k \cdot 0 = 0$, т. е. $k = 0$;

б) если $x = 4$, то $4^2 - k \cdot 4 = 0$, т. е. $k = 4$.

К упражнению 26б

1. Пусть x_0 — общий корень данных уравнений.

2. Составим систему

$$\begin{cases} x_0^2 + kx_0 + 2 = 0, \\ x_0^2 + 2x_0 + k = 0, \end{cases}$$

из которой следует, что $(k - 2)(x_0 - 1) = 0$.

3. Рассмотрим два случая:

а) если $k = 2$, то уравнение $x^2 + 2x + 2 = 0$ не имеет решений (так как $D < 0$);

б) если $x_0 = 1$, то уравнение $x^2 + kx + 2 = 0$ примет вид $1 + k + 2 = 0$, откуда $k = -3$.

4. При $k = -3$ получаем уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$ и $x^2 + 2x - 3 = 0$, которые имеют общий корень $x = 1$.

К упражнению 28

1. Масса патрона состоит из: а) массы снаряда; б) массы заряда; в) массы гильзы.

2. Масса снаряда и гильзы составляет $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$ массы патрона.

3. Таким образом, на долю заряда остается $\frac{1}{12}$ массы патрона.

4. Обозначив массу патрона через x, получаем пропорцию

$$\frac{\frac{1}{12}}{0{,}8} = \frac{1}{x}, \text{ откуда } x = \frac{0{,}8}{\frac{1}{12}} = 9{,}6 \text{ (кг)}.$$

К упражнению 29

1. Процент прибыли берется по отношению к себестоимости (принимаемой за 100%).

2. Следовательно, продажная цена 1386 р. составляет $100\% + 10\% = 110\%$ от себестоимости.

3. Обозначив себестоимость через x, получаем пропорцию

$$\frac{1386}{110\%} = \frac{x}{100\%}, \text{ т. е. } x = 1260 \text{ (р.)}.$$

К упражнению 30

1. Убыток исчисляется в процентах по отношению к себестоимости (принимаемой за 100%).

2. Значит, 3348 р. — это 96% себестоимости.

3. Пусть x — себестоимость продукции. Тогда получим пропорцию

$$\frac{x}{100\%} = \frac{3348}{96\%}, \text{ откуда } x = 3487{,}5 \text{ (р.)}.$$

Тема 8

Неравенства. Основные свойства неравенств. Действия с неравенствами. Доказательство неравенств. Неравенства, содержащие переменную. Решение линейных и квадратных неравенств

Теоретические сведения

1. Неравенства

1°. При сравнении двух действительных чисел x и y возможны три случая: $x = y$ (x равно y); $x > y$ (x больше y) и $x < y$ (x меньше y). При этом:

$x = y$ тогда и только тогда, когда разность $x - y$ равна нулю;

$x > y$ тогда и только тогда, когда разность $x - y$ положительна (например, $6 > 2$, так как $6 - 2 = 4 > 0$);

$x < y$ тогда и только тогда, когда разность $x - y$ отрицательна (например, $6 < 10$, так как $6 - 10 = -4 < 0$).

2°. Используя знак равносильности, утверждения п. 1° можно записать в следующем виде:

$$x = y \Leftrightarrow x - y = 0;\ x > y \Leftrightarrow x - y > 0;\ x < y \Leftrightarrow x - y < 0.$$

3°. Часто употребляется запись $x \geqslant y$ или, что то же самое, $y \leqslant x$. Это означает, что либо $x > y$, либо $x = y$ и читается так: «x не меньше y» или «x больше или равно y».

4°. Символическую запись, в которой два числа или два выражения, содержащие переменные, соединены знаком $>$, $<$, $\geqslant$ или $\leqslant$, называют ***неравенством***.

5°. Неравенства, составленные с помощью знаков $\geqslant$ или $\leqslant$, называют ***нестрогими***; неравенства, составленные с помощью знаков $>$ или $<$, — ***строгими***.

6°. Два неравенства вида $a > b$ и $c > d$ называют ***неравенствами одинакового смысла***. Например, $5 > 2$ и $-3 > -6$ — это неравенства одинакового смысла, а неравенства $5 > 3$ и $6 < 10$ являются неравенствами противоположного смысла.

7°. Кроме неравенств вида $x > y$, $x < y$, употребляются еще неравенства вида $x < a < y$, которые называют ***двойными неравенствами***.

8°. Высказывание $x < a < y$ истинно тогда и только тогда, когда одновременно истинны оба высказывания: $a > x$ и $a < y$, т. е. $(x < a < y) \Leftrightarrow (x < a) \cap (a < y)$.

9°. Двойное неравенство $x \leqslant a < y$ означает, что $(x \leqslant a < y) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow ((x < a) \cup (x = a)) \cap (a < y)$.

10°. Неравенства, содержащие только числа, называют ***числовыми***. Например, $5 > 3$; $-3 < 0$; $-2 > -5$ — числовые неравенства.

11°. Если неравенство представляет собой истинное высказывание, то его называют ***верным***.

12°. Если неравенство содержит буквенные выражения, то оно является верным лишь при определенных значениях входящих в него переменных. Например, неравенство $(a + b)^2 \geqslant 0$ верно при любых значениях a и b, так как квадрат любого числа есть число неотрицательное; неравенство $x^2 > 0$ верно при любых значениях x, кроме нуля.

2. Основные свойства неравенств

1°. Если $a > b$, то $b < a$.

2°. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (*свойство транзитивности*).

3°. *Если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство*, т. е. если $a > b$, то $a + c > b + c$.

4°. *Если из одной части верного неравенства перенести в другую какое-либо слагаемое, изменив его знак на противоположный, то получится верное неравенство*, т. е. если $a + b > c$, то $a - c > -b$.

5°. *Если обе части верного неравенства умножить на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство.* Например, если $a > b$, то $5a > 5b$.

6°. *Если обе части верного неравенства умножить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится верное неравенство.* Например, если $a > b$, то $a \cdot (-1) < b \cdot (-1)$, т. е. $-a < -b$.

7°. Так как деление можно заменить умножением на число, обратное делителю, то аналогичные правила справедливы и для деления. Например, если $a > b$, то $\frac{1}{3}a > \frac{1}{3}b$ и $-\frac{1}{5}a < -\frac{1}{5}b$.

3. Действия с неравенствами

1°. Неравенства одинакового смысла можно почленно складывать. Например,

$$+\begin{array}{c} a > b \\ c > d \\ \hline a + c > b + d \end{array} \quad \text{или} \quad +\begin{array}{c} a < m \\ b < n \\ \hline a + b < m + n \end{array}.$$

2°. Неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать, оставляя знак того неравенства, из которого производится вычитание. Например,

$$-\begin{array}{c} a > b \\ c < d \\ \hline a - c > b - d \end{array}.$$

3°. Неравенства одинакового смысла с положительными членами можно почленно умножать. Например, если $a > b > 0$ и $c > d > 0$, то $ac > bd$.

4°. Обе части неравенства с положительными членами можно возводить в одну и ту же натуральную степень. Например, если $a > b$, то $a^k > b^k$, где $a > 0$, $b > 0$, $k \in \boldsymbol{N}$.

Верно и обратное утверждение: если $a^k > b^k$, $a > 0$, $b > 0$, $k \in \boldsymbol{N}$, то $a > b$.

4. Доказательство неравенств

Укажем некоторые приемы доказательства неравенств.

1°. Использование определения понятия «больше» или «меньше» (т. е. рассмотрение разности между левой и правой частями неравенства).

Пример. Доказать, что $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим разность

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geqslant 0.$$

Следовательно, $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

Это неравенство означает, что *среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического, причем равенство достигается только в том случае, когда $a = b$.*

2°. Использование известных неравенств.

Пример. Доказать, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$, если $a > 0$, $b > 0$.

Р е ш е н и е. Так как числа $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ положительны, то их среднее арифметическое не меньше среднего геометрического, т. е.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}}, \quad \text{или} \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2.$$

Итак, сумма двух взаимно обратных положительных чисел не меньше 2.

3°. Использование действий с неравенствами (почленное сложение, вычитание, умножение и др.).

Примеры. 1. Доказать, что

$$a + b + c \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}, \text{ если } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0.$$

Р е ш е н и е. Для неотрицательных чисел a, b и c верны неравенства

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}; \quad \frac{b+c}{2} \geqslant \sqrt{bc}; \quad \frac{a+c}{2} \geqslant \sqrt{ac}.$$

Складывая эти неравенства почленно, после упрощения получим

$$a + b + c \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}.$$

2. Доказать, что

$$(a + b)(b + c)(a + c) \geqslant 8abc, \text{ если } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0.$$

Р е ш е н и е. Имеем

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}; \quad b + c \geqslant 2\sqrt{bc}; \quad a + c \geqslant 2\sqrt{ac}.$$

Все эти неравенства одинакового смысла с неотрицательными членами можно перемножить:

$$(a + b)(b + c)(a + c) \geqslant 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ac},$$

или

$$(a + b)(b + c)(a + c) \geqslant 8abc.$$

3. Доказать, что при любых значениях x и y верно неравенство

$$5x^2 + 4xy + y^2 + 2x > -5. \qquad (*)$$

Р е ш е н и е. Из данного неравенства следует:

$$5x^2 + 4xy + y^2 + 2x + 5 > 0;$$
$$(4x^2 + 4xy + y^2) + (x^2 + 2x + 1) + 4 > 0;$$
$$(2x + y)^2 + (x + 1)^2 + 4 > 0. \qquad (**)$$

Полученное неравенство (**) верно, поскольку $(2x + y)^2 \geqslant 0$, $(x + 1)^2 \geqslant 0$ и $4 > 0$. Так как неравенство (**) верно, то и неравенство, из которого оно получено, также верно (на основании свойств неравенств); следовательно, верно и предшествующее неравенство, а значит, и данное неравенство (*), что и требовалось доказать.

5. Неравенства, содержащие переменную

1°. Решить неравенство, содержащее переменную, — значит найти множество значений переменной, при которых данное неравенство является верным. Элементы этого множества называют ***решениями неравенства***.

2°. Два неравенства, содержащие одну и ту же переменную, называют ***равносильными***, если они имеют общее множество решений, удовлетворяющих этим неравенствам (множества решений этих неравенств совпадают).

3°. Решение неравенств основано на их свойствах (см. п. 2). Используя эти свойства, можно сформулировать теоремы о равносильности неравенств (аналогичные теоремам о равносильности уравнений).

4°. *Если к обеим частям неравенства* $f_1(x) > f_2(x)$ *прибавить* (*или вычесть*) *любую функцию* $\varphi(x)$, *область определения которой принадлежит области определения данного неравенства**, *то получится новое неравенство, равносильное данному.*

5°. *Любое слагаемое, определенное для всех значений переменной, можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив знак этого слагаемого на противоположный.*

6°. *Если обе части неравенства* $f_1(x) > f_2(x)$ *умножить* (*или разделить*) *на любую функцию* $\varphi(x)$, *определенную для всех значений переменной* x *из области определения данного неравенства, сохраняющую постоянный знак и отличную от ну-*

---

* Здесь и далее под областью определения неравенства будем понимать пересечение множеств, на которых определена каждая из функций f_1 и f_2, входящих в неравенство.

ля, то при $\varphi(x) > 0$ *получится неравенство, равносильное данному, а при* $\varphi(x) < 0$ *равносильным данному является неравенство противоположного смысла.*

6. Решение линейных и квадратных неравенств

1°. ***Линейным неравенством*** называют неравенство вида

$$ax + b > 0 \quad (\text{или } ax + b < 0).$$

Если $a > 0$, то $ax + b > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{b}{a}$;

если $a < 0$, то $ax + b > 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{b}{a}$.

Пример. Решить неравенство $15 - 3x \geqslant 0$.

Решение. Перенеся 15 в правую часть неравенства с противоположным знаком, получим $-3x \geqslant -15$. Теперь разделим обе части последнего неравенства на отрицательное число (-3) и изменим знак неравенства на противоположный: $x \leqslant 5$. Таким образом, множеством решений данного неравенства служит луч $(-\infty; 5]$.

2°. ***Квадратным неравенством*** называют неравенство вида

$$ax^2 + bx + c > 0 \ (\text{или } ax^2 + bx + c < 0).$$

Пусть требуется решить неравенство $ax^2 + bx + c > 0$. В зависимости от знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ имеются три возможности.

1. Если $D < 0$, то график квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ не пересекает ось Ox и лежит выше этой оси при $a > 0$ и ниже ее при $a < 0$. В первом случае множество решений неравенства есть вся числовая прямая (рис. 46, *а*), а во втором оно является пустым (рис. 46, *б*).

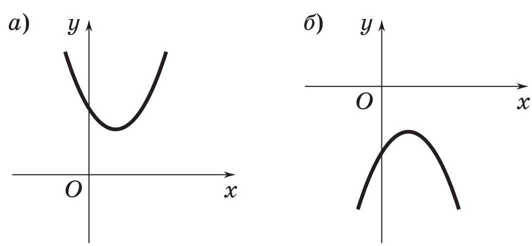


Рис. 46

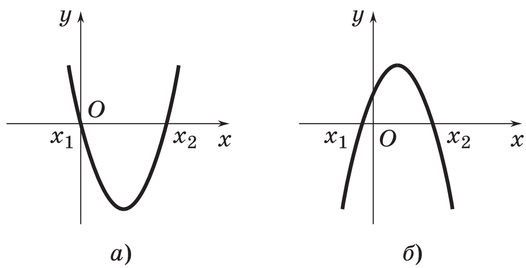


Рис. 47

2. Если $D > 0$, то график квадратного трехчлена пересекает ось Ox в точках x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$), служащих корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Эти точки разбивают числовую прямую на три промежутка: $(-\infty;\ x_1)$, $(x_1;\ x_2)$ и $(x_2;\ +\infty)$.

При этом знак квадратного трехчлена совпадает со знаком коэффициента a во всех точках промежутков $(-\infty;\ x_1)$ и $(x_2;\ +\infty)$ и противоположен знаку коэффициента a во всех точках промежутка $(x_1;\ x_2)$ (рис. 47, *а* и *б*).

3. Если $D = 0$, то график квадратного трехчлена касается оси Ox точке x_1, являющейся единственным корнем уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Точка x_1 разбивает числовую прямую на два промежутка: $(-\infty;\ x_1)$ и $(x_1;\ +\infty)$. Знак квадратного трехчлена совпадает со знаком коэффициента a при всех $x \neq x_1$ (рис. 48, *а* и *б*).

Пример. Решить неравенство:

а) $2x^2 - x - 1 > 0$; б) $x^2 + 3x + 8 \geqslant 0$;

в) $-3x^2 + 10x - 3 > 0$; г) $4x^2 + 4x + 1 > 0$.

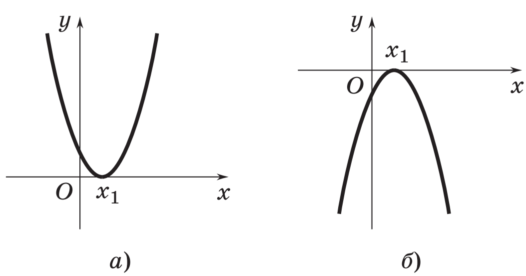


Рис. 48

Р е ш е н и е. а) Здесь $f(x) = 2x^2 - x - 1$, $D = 1 - 4 \cdot 2(-1) = 9 > 0$; $(2x^2 - x - 1 = 0) \Leftrightarrow (x_1 = -0{,}5,\ x_2 = 1)$. В результате получаем три промежутка: $(-\infty; -0{,}5)$, $(-0{,}5; 1)$ и $(1; +\infty)$. Так как $a = 2 > 0$, то $f(x) > 0$ в промежутках $(-\infty; -0{,}5)$ и $(1; +\infty)$. Значит, решением данного неравенства служит объединение этих промежутков: $(-\infty; -0{,}5) \cup (1; +\infty)$.

б) Здесь $f(x) = x^2 + 3x + 8$, $D = 9 - 32 = -21 < 0$. Так как $a = 1 > 0$, то $f(x) > 0$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$, т. е. неравенство справедливо на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

в) Здесь $f(x) = -3x^2 + 10x - 3$, $D = 100 - 4 \cdot 9 = 64 > 0$. Имеем $(-3x^2 + 10x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left(x_1 = \dfrac{1}{3};\ x_2 = 3\right)$. Следовательно, получаем три промежутка: $\left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right)$, $\left(\dfrac{1}{3}; 3\right)$ и $(3; +\infty)$. Так как $a = -3 < 0$, то $f(x) > 0$ в промежутке $\left(\dfrac{1}{3}; 3\right)$. Итак, $\left(\dfrac{1}{3}; 3\right)$ — решение данного неравенства.

г) Здесь $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$, $D = 16 - 16 = 0$, $(4x^2 + 4x + 1 = 0) \Leftrightarrow (x_1 = -0{,}5)$. Так как $a = 4 > 0$, то $f(x) > 0$ при всех $x \neq 0{,}5$. Значит, решением неравенства служит объединение промежутков: $(-\infty; -0{,}5) \cup (-0{,}5; +\infty)$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение неравенства.

2. Какие виды неравенств вы знаете?

3. Истинно ли высказывание: а) $11 \leqslant 12$; б) $11 \leqslant 11$; в) $x \geqslant y$?

4. Запишите в виде двойного неравенства $((b < a) \cup (b = a)) \cap (a < c)$.

5. Сформулируйте свойства неравенств.

6. Докажите, что если $a > b$, то $a^k > b^k$ для любого натурального k.

7. Докажите, что $\sqrt{5} + \sqrt{6} > \sqrt{3} + \sqrt{8}$.

8. Можно ли неравенства $3 > -10$ и $-2 > -7$ почленно: а) сложить; б) вычесть; в) умножить?

9. Дано числовое неравенство $12 > 5$. Является ли верным неравенство: а) $(a^2 + 1) \cdot 12 > 5(a^2 + 1)$; б) $12a > 5a$, если $a < 0$; в) $12|a| > 5|a|$; г) $12(1 - 2a + a^2) > 5(1 - 2a + a^2)$, если $a \neq 1$?

10. Что значит решить неравенство, содержащее переменную?

11. Какие неравенства называют равносильными?

12. Сформулируйте теоремы о равносильности неравенств.

13. Найдите множество решений неравенства: а) $6x - 5 \geqslant 7$; б) $\frac{3}{1-2x} < 0$; в) $\frac{x^2+1}{4-x} > 0$; г) $(2x - 1)^2 + 2(x-2)^2 < (x-2)(2x+3) + (2x+1)^2$.

14. Решите графически неравенство $ax > 5$.

15. Решите графически неравенство: а) $x^2 > 2x - 1$; б) $x^2 < 6 - 5x$.

16. При каких значениях a уравнение $ax^2 - 6x + 1 = 0$ имеет два различных действительных корня?

17. Найдите множество значений k, при которых уравнение $4x^2 + kx + 1 = 0$ не имеет действительных корней.

18. Найдите множество значений n, при которых уравнение $\frac{6x-1}{n-2} + \frac{x}{n+2} = \frac{3}{n+2}$ имеет решение $x > -2$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решите неравенство:

а) $ax - 3 < 2x + 1$; б) $x + 4 > nx - 7$; в) $3 - ax < 2x + 1$.

2. Решите неравенство:

а) $\frac{(76x-532)^3(1-x)^2}{(3x-20)^2} < 0$; б) $\frac{(3-x)^2(2-x)^2}{(5x-8)^3} > 0$.

3. Докажите, что:

а) $(x+y)^2 \geqslant 4xy$; б) $x^3 + y^3 \geqslant x^2y + xy^2$ $(x > 0,\ y > 0)$;

в) $\frac{2a}{a^2+1} \leqslant 1$; г) $\sqrt{ab} \geqslant \frac{2a}{a+b}$ $(a > 0,\ b > 0)$;

д) $3a^2 + 12b^2 \geqslant 12ab$; е) $\frac{a^2+1}{a^2} \geqslant 2$;

ж) $(a+1)(b+1)(a+c)(b+c) > 16abc$, где $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$;

з) $5x^2 + 4xy + y^2 + 2x > -5$; и) $x^2 + 2y^2 + 2xy + 6y + 10 \geqslant 0$.

4. Решите неравенство:

а) $\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x^2-2x+4} \leqslant 0$; б) $\frac{x^2+3x+9}{(x+2)(x^2-2x+4)} \geqslant 0$;

в) $\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+7} \leqslant 0$; г) $\frac{x^2-6x+9}{x^2+3} > 0$; д) $\frac{(x+3)^4(x-4)}{(2-x)^2} < 0$.

5. Решите неравенство:

а) $\frac{2x^2+x-1}{-x^2+5x-7} > 0$; б) $\frac{x^4+x^2+3}{-x^2+x+2} \geqslant 0$; в) $\frac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2-x+20} \leqslant 0$.

6. Найдите наименьшее целое числа, принадлежащее области определения функции:

а) $y = \sqrt{x + \frac{15}{x+2}}$; б) $y = \sqrt{4 - \frac{3}{x^2}}$; в) $y = \sqrt{(9-x^2)^{-1}}$.

Задания для повторения

7. Два спортсмена стартовали один за другим с интервалом в 2 мин. Второй спортсмен догнал первого на расстоянии 1 км от точки старта, а пробежав от точки старта 5 км, он повернул обратно и встретился с первым. Эта встреча произошла через 20 мин после старта первого спортсмена. Найдите скорость второго спортсмена.

8. Два лыжника стартовали на дистанцию 10 км друг за другом с интервалом в 6 мин. Второй лыжник догнал первого через 2 км от точки старта. Дойдя до поворота на отметке 5 км, второй лыжник повернул обратно и встретил первого на расстоянии 1 км от точки поворота. Найдите скорость первого лыжника.

9. Докажите, что:

а) $a^3 - a$ (где $a \in \boldsymbol{N}$) делится нацело на 6;

б) $a^4 + 2a^3 - a^2 - 2a$ (где $a \in \boldsymbol{N}$) делится нацело на 24;

в) число $10^{15} - 1$ делится нацело на 3, на 9 и на 11.

ОТВЕТЫ

1. а) $x < \frac{4}{a-2}$ при $a > 2$; $x > \frac{4}{a-2}$ при $a < 2$; $x \in \boldsymbol{R}$ при $a = 2$; б) $x > \frac{11}{n-1}$ при $n < 1$; $x < \frac{11}{n-1}$ при $n > 1$; $x \in \boldsymbol{R}$ при $n = 1$; в) $x > \frac{2}{a+2}$ при $a > -2$; $x < \frac{2}{a+2}$ при $a < -2$; нет решений при $a = -2$. **2.** а) $x < 7$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{20}{3}$; б) $x > \frac{8}{5}$, $x \neq 2$, $x \neq 3$. **4.** а) $x \leqslant 3$; б) $x > -2$; в) $x = -2$; г) $x \in \boldsymbol{R}$, $x \neq 3$; д) $x < 4$, $x \neq 2$, $x \neq -3$. **5.** а) $-1 < x < \frac{1}{2}$; б) $-1 < x < 2$; в) $1 \leqslant x \leqslant 2$, $x = 0$. **6.** а) $x = -1$; б) $x \in \varnothing$; в) $x = -2$. **7.** 20 км/ч. **8.** 10 км/ч.

Решения и методические указания

К упражнению 1а

1. После упрощения имеем $(a - 2)x < 4$.
2. а) Если $a - 2 = 0$, т. е. $a = 2$, то $x \in \boldsymbol{R}$.

б) Если $a - 2 > 0$, т. е. $a > 2$, то $x < \frac{4}{a-2}$.

в) Если $a - 2 < 0$, т. е. $a < 2$, то $x > \frac{4}{a-2}$.

Ответ: $x < \frac{4}{a-2}$ при $a > 2$; $x > \frac{4}{a-2}$ при $a < 2$; $x \in \boldsymbol{R}$ при $a = 2$.

К упражнению 2а

1. Решим неравенство

$$\frac{(76x - 532)^3(1 - x)^2}{(3x - 20)^2} < 0.$$

2. Так как данное неравенство строгое, то его числитель, а тем более знаменатель не может быть равен нулю.

3. Очевидно, что $(1 - x)^2 > 0$ при любом значении x, кроме $x = 1$, а $(3x - 20)^2 > 0$ при любом значении x, кроме $x = \frac{20}{3}$.

4. Поэтому данная дробь отрицательна при условии $(76x - 532)^3 < 0$, или $76x - 532 < 0$, т. е. $x < 7$.

5. Для записи ответа из промежутка $(-\infty; 7)$ нужно исключить значения $x = 1$ и $x = \frac{20}{3}$.

Ответ: $x < 7$, $x \neq 1$ и $x \neq \frac{20}{3}$.

К упражнению 3б

1. Рассмотрим разность между левой и правой частями доказываемого неравенства:

$$x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 = x^2(x - y) + y^2(y - x) =$$
$$= x^2(x - y) - y^2(x - y) = (x - y)(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)^2.$$

2. Так как при $x > 0$, $y > 0$ имеем $x + y > 0$, а $(x - y)^2 \geqslant 0$, то $x^3 + y^3 \geqslant x^2y + xy^2$.

К упражнению 3ж

1. Для доказательства неравенства используем зависимость между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел.

2. Имеем $a + 1 > 2\sqrt{a \cdot 1}$, $b + 1 > 2\sqrt{b \cdot 1}$, $a + c \geqslant 2\sqrt{ac}$ и $b + c \geqslant 2\sqrt{bc}$. Перемножив эти неравенства, получим

$$(a + 1)(b + 1)(a + c)(b + c) > 2\sqrt{a} \cdot 2\sqrt{b} \cdot 2\sqrt{ac} \cdot 2\sqrt{bc},$$

или

$$(a + 1)(b + 1)(a + c)(b + c) > 16abc.$$

К упражнению 3и

1. Упростим левую часть доказываемого неравенства:

$$x^2 + 2y^2 + 2xy + 6y + 10 = x^2 + y^2 + y^2 + 2xy + 6y + 9 + 1 = \\ = (x + y)^2 + (y + 3)^2 + 1.$$

2. Суммой трех чисел, из которых два неотрицательны, а третье равно 1, является число положительное, т. е. $(x + y)^2 + (y + 3)^2 + 1 > 0$.

3. Итак, $x^2 + 2y^2 + 2xy + 6y + 10 > 0$.

К упражнению 4а

1. Дискриминанты квадратных уравнений $x^2 + 3x + 9 = 0$ и $x^2 - 2x + 4 = 0$ отрицательны ($D_1 = -27$ и $D_2 = -12$), следовательно, эти уравнения не имеют решений.

2. Отсутствие решений означает, что квадратные трехчлены не разлагаются на линейные множители и на всем промежутке изменения x имеют постоянный знак, совпадающий со знаком старшего члена. В данном случае $x^2 + 3x + 9 > 0$ и $x^2 - 2x + 4 > 0$.

3. Таким образом, данное неравенство равносильно неравенству $x - 3 \leqslant 0$, откуда $x \leqslant 3$.

К упражнению 5в

1. Дискриминант квадратного уравнения $x^2 - x + 20 = 0$ отрицателен, значит, $x^2 - x + 20 > 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$.

2. Тогда данное неравенство равносильно следующему:

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 \leqslant 0.$$

3. Вынося x^2 за скобки, получим

$$x^2(x^2 - 3x + 2) \leqslant 0.$$

4. Из последнего неравенства следует, что:

а) $x^2 \geqslant 0$, $x \in \boldsymbol{R}$, причем $x = 0$ является решением неравенства;

б) $x^2 - 3x + 2 \leqslant 0$.

5. Так как квадратный трехчлен $x^2 - 3x + 2$ имеет корни $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, то решениями неравенства $x^2 - 3x + 2 \leqslant 0$ являются все значения x, для которых $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Ответ: $1 \leqslant x \leqslant 2$, $x = 0$.

К упражнению 7

1. Обозначим через x (км/ч) скорость первого спортсмена, а через y (км/ч) — скорость второго.

2. Первый спортсмен пробежал 1 км за $\frac{1}{x}$ ч, а второй — за $\frac{1}{y}$ ч.

3. По условию второй спортсмен пробежал 1 км на 2 мин быстрее, чем первый. Следовательно,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{30}. \qquad (1)$$

4. К моменту второй встречи первый спортсмен, находясь в пути 20 мин, пробежал $\frac{1}{3}x$ км.

5. Значит, второй спортсмен к этому моменту пробежал $(10 - \frac{1}{3}x)$ км.

6. Так как он бежал 18 мин, то справедливо равенство

$$10 - \frac{1}{3}x = \frac{18}{60}y. \qquad (2)$$

7. Уравнения (1) и (2) образуют систему

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{30}; \\ 10 - \dfrac{1}{3}x = \dfrac{18}{60}y. \end{cases}$$

Решив ее, находим, что скорость второго спортсмена равна 20 км/ч.

К упражнению 9а

1. Имеем

$$a^3 - a = a(a^2 - 1) = (a - 1)a(a + 1).$$

Это произведение трех последовательных натуральных чисел.

2. Такое произведение делится нацело на 2 и на 3, т. е. оно делится и на 6.

К упражнению 9б

1. Имеем

$$a^4 + 2a^3 - a^2 - 2a = a^2(a^2 - 1) + 2a(a^2 - 1) =$$
$$= (a^2 - 1)(a^2 + 2a) = (a - 1)a(a + 1)(a + 2),$$

т. е. получили произведение четырех последовательных натуральных чисел.

2. Такое произведение делится нацело на 2, на 3 и на 4. Значит, оно делится и на 24.

К упражнению 9в

Число $10^{15} - 1$ содержит 15 девяток, значит, оно делится на 3, на 9 и на 11.

Тема 9

Системы и совокупности неравенств. Неравенства и системы неравенств с двумя переменными. Решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля. Решение рациональных неравенств методом интервалов. Расположение корней квадратного трехчлена

Теоретические сведения

1. Системы и совокупности неравенств

1°. Если ставится задача найти множество общих решений двух или нескольких неравенств, то говорят, что надо решить ***систему неравенств***.

2°. Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство, называют ***решением системы неравенств***. Множество решений системы неравенств есть пересечение множеств решений входящих в нее неравенств.

3°. Неравенства, входящие в систему, объединяют фигурной скобкой. Иногда вместо фигурной скобки используют запись системы в виде двойного неравенства. Например, систему

$$\begin{cases} 3x - 1 > 2, \\ 3x - 1 < 8 \end{cases}$$

можно записать таким образом: $2 < 3x - 1 < 8$.

4°. Решение системы линейных неравенств с одной переменной сводится к следующим случаям:

$$\begin{cases} x > a, \\ x > b; \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} x > a, \\ x < b; \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} x < a, \\ x < b; \end{cases} \quad (3) \qquad \begin{cases} x < a, \\ x > b; \end{cases} \quad (4)$$

В случае (1) решением системы служит промежуток $(b; +\infty)$ (рис. 49, *а*); в случае (2) — промежуток $(a; b)$ (рис. 49, *б*); в случае (3) — промежуток $(-\infty; a)$ (рис. 49, *в*); в случае (4) система не имеет решений (рис. 49, *г*).

а) *б*) *в*) *г*)

Рис. 49

5°. Две системы неравенств называют ***равносильными***, если они имеют общее множество решений, удовлетворяющих этим неравенствам. Равносильность систем неравенств обозначается так же, как и равносильность систем уравнений, т. е. с помощью знака $\Leftrightarrow$.

Пример. Решить систему неравенств:

$$\text{а)}\ \begin{cases} 3x - 6 > 0, \\ 18x - 5x \leqslant 0, \\ 1{,}7x - 13{,}6 < 0; \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} 1{,}4x < 8{,}4, \\ x^2 - 9x + 14 < 0, \\ -x^2 + 11x - 24 \leqslant 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. а) Имеем

$$\begin{cases} 3x - 6 > 0, \\ 18 - 5x \leqslant 0, \\ 1{,}7x - 13{,}6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 6, \\ 5x \geqslant 18, \\ 1{,}7x < 13{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x \geqslant 3{,}6, \\ x < 8, \end{cases}$$

т. е. множество решений неравенства — полуоткрытый промежуток $[3{,}6;\ 8)$.

б) Имеем

$$\begin{cases} 1{,}4x < 8{,}4, \\ x^2 - 9x + 14 < 0, \\ -x^2 + 11x - 24 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 6, \\ (x - 2)(x - 7) < 0, \\ (x - 3)(8 - x) \leqslant 0. \end{cases}$$

Для первого неравенства множеством решений служит промежуток $(-\infty;\ 6)$, для второго — промежуток $(2;\ 7)$, а для третьего — объединение промежутков $(-\infty;\ 3]$ и $[8;\ +\infty)$. С помощью числовой прямой (рис. 50) находим, что пересечением этих множеств служит промежуток $(2;\ 3]$.

6°. Если ставится задача найти множество всех таких значений переменной, каждое из которых является решением хотя бы одного из данных неравенств, то говорят, что надо решить ***совокупность неравенств***.

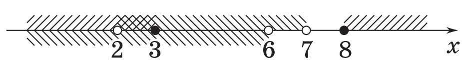


Рис. 50

7°. Значение переменной, при котором хотя бы одно из неравенств совокупности обращается в верное числовое равенство, называют ***решением совокупности неравенств***. Множество решений совокупности неравенств есть объединение множеств решений входящих в нее неравенств.

Неравенства, образующие совокупность, иногда объединяют квадратной скобкой. Например, запись

$$\left[\begin{array}{l} 3x - 5 < 1, \\ 2x + 3 > 4 \end{array}\right.$$

означает, что неравенства образуют совокупность.

Пример. Решить совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} 0{,}2(2x - 3) < x - 2, \\ 5x - 7 > x - 6. \end{array}\right.$$

Р е ш е н и е. Преобразовав каждое из неравенств, получим равносильную совокупность: $x > \frac{7}{3}$, $x > \frac{1}{4}$. Для первого неравенства множеством решений служит промежуток $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$, а для второго — промежуток $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$. С помощью числовой прямой

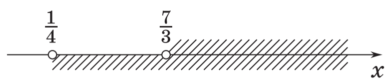


Рис. 51

(рис. 51) находим, что объединением этих множеств является промежуток $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

2. Неравенства и системы неравенств с двумя переменными

1°. ***Неравенство с двумя переменными*** имеет вид $f(x, y) > g(x, y)$, где $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — выражения с переменными. ***Решением неравенства с двумя переменными*** называют упорядоченную пару чисел $(x_0; y_0)$, обращающую данное неравенство в верное числовое неравенство. Решить неравенство — значит найти множество всех его решений.

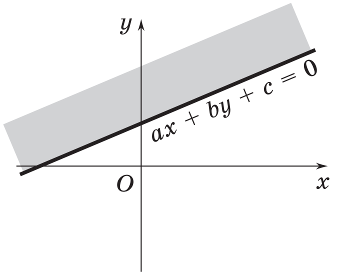


Рис. 52

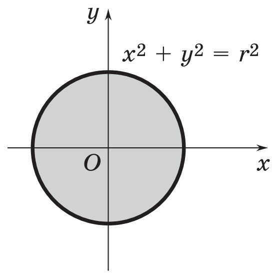


Рис. 53

2°. Множество решений неравенства с двумя переменными можно изобразить графически на координатной плоскости. Например, множеством решений линейного неравенства $ax + by + c \geqslant 0$ является полуплоскость, расположенная над прямой $ax + by + c = 0$, причем сама прямая принадлежит этому множеству (рис. 52), а множеством решений неравенства $x^2 + y^2 \leqslant r^2$ — круг с центром в начале координат и радиусом r, причем окружность принадлежит этому множеству (рис. 53).

3°. Если задана система неравенств с двумя переменными

$$\begin{cases} f_1(x, y) > g_1(x, y), \\ f_2(x, y) > g_2(x, y), \end{cases}$$

то ***решением системы*** называют упорядоченную пару чисел, удовлетворяющую каждому из неравенств этой системы. Поэтому множество решений системы есть пересечение множеств решений входящих в нее неравенств.

4°. Пусть, например, задана система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ 2x + 3y \geqslant 0. \end{cases}$$

Для первого неравенства множество решений есть круг с радиусом 2 и с центром в начале координат, а для второго — полуплоскость, расположенная над прямой $2x + 3y = 0$. Множеством решений данной системы служит пересечение указанных множеств, т. е. полукруг (рис. 54).

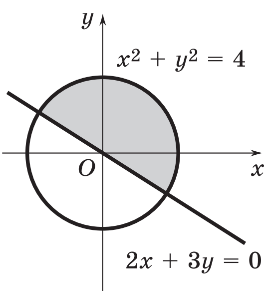


Рис. 54

3. Решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля

При решении неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, используют определение модуля:

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x) & \text{при } f(x) < 0. \end{cases}$$

Кроме того, иногда бывает полезно пользоваться геометрической интерпретацией модуля числа, согласно которой $|x|$ означает расстояние точки x числовой прямой от начала отсчета, а $|x - a|$ означает расстояние на числовой прямой между точками x и a.

Пример. Решить неравенство: а) $|x - 1| < 3$; б) $|x + 1| > 2 - x$.

Решение. а) На основании определения модуля получаем совокупность двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0, \\ x - 1 < 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 1 < 0, \\ -(x - 1) < 3. \end{cases}$$

Из первой системы находим, что $1 \leqslant x < 4$, а из второй — что $-2 < x < 1$. Объединив решения этих систем, получаем ответ: $(-2; 4)$.

Заметим, что данное неравенство можно решить иначе. Так как $|x - 1|$ есть расстояние на числовой прямой между точками x и 1, то нам нужно найти на числовой прямой такие точки x, которые удалены от 1 меньше, чем на 3 ед. Отсюда находим искомое множество решений: $(-2; 4)$ (рис. 55).

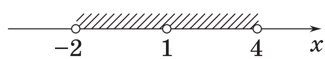


Рис. 55

б) Используя определение модуля, приходим к следующей совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} x + 1 \geqslant 0, \\ x + 1 > 2 - x; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 1 < 0, \\ -(x + 1) > 2 - x. \end{cases}$$

Для первой системы множеством решений служит промежуток $(0{,}5; +\infty)$, а для второй это множество — пустое. Значит, $(0{,}5; +\infty)$ — множество решений данного неравенства.

4. Решение рациональных неравенств методом интервалов

Решение рациональных неравенств (т. е. неравенств вида $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ или $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены) основано на следующем свойстве непрерывной функции: если непрерывная функция обращается в нуль в точках x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) и между этими точками не имеет других корней, то в интервале $(x_1; x_2)$ функция сохраняет знак.

Поэтому для нахождения интервалов знакопостоянства функции $y = f(x)$ поступают так. На числовой прямой отмечают все точки, в которых функция $f(x)$ обращается в нуль или имеет разрыв. Эти точки разбивают числовую прямую на несколько интервалов, внутри каждого из которых функция $f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль, т. е. сохраняет знак. Чтобы определить этот знак, достаточно найти знак функции в какой-либо точке рассматриваемого интервала числовой прямой.

Изменение знаков функции $f(x)$ удобно иллюстрировать с помощью волнообразной кривой, которую чертят справа налево. На тех интервалах, где кривая проходит выше числовой прямой, выполняется неравенство $f(x) > 0$; на тех же интервалах, где кривая проходит ниже, — неравенство $f(x) < 0$.

Примеры. 1. Решить неравенство

$$(x + 3)(x + 2)x(x - 1) > 0.$$

Р е ш е н и е. Многочлен $P(x) = (x + 3)(x + 2)x(x - 1)$ обращается в нуль в точках $x = -3$, $x = -2$, $x = 0$ и $x = 1$. Эти точки разбивают числовую прямую на интервалы $(-\infty; -3)$, $(-3; -2)$, $(-2; 0)$, $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ (рис. 56), внутри каждого из которых функция $P(x)$ сохраняет знак.

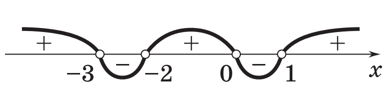


Рис. 56

Так как в интервале $(1; +\infty)$ все сомножители положительны, то и их произведение положительно, т. е. $P(x) > 0$; в интервале $(0; 1)$ последний сомножитель $x - 1$ отрицателен, а остальные три положительны, т. е. $P(x) < 0$; далее, в интервале $(-2; 0)$ имеем $P(x) > 0$, а в интервале $(-3; -2)$ имеем $P(x) < 0$, наконец, в интервале $(-\infty; -3)$ все четыре сомножителя отрицательны, т. е. $P(x) > 0$.

В результате получаем ответ: $(-\infty; -3) \cup (-2; 0) \cup (1; +\infty)$.

2. Решить неравенство

$$(x-2)^3(x+1)(x-1)^2(x^2+2x+5) < 0.$$

Решение. Трехчлен $x^2 + 2x + 5$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$ принимает положительные значения (так как $D = 2^2 - 4 \cdot 5 < 0$). Поэтому данное неравенство равносильно неравенству $P(x) = (x+1) \times \times (x-1)^2(x-2)^3 < 0$ (располагаем множители в порядке возрастания корней). Таким образом, получаем следующие интервалы знакопостоянства: $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; 2)$ и $(2; +\infty)$ (рис. 57).

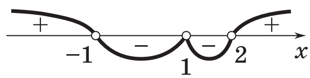


Рис. 57

В интервале $(2; +\infty)$ все три сомножителя положительны и, значит, $P(x) > 0$; в интервале $(1; 2)$ сомножитель $(x-2)^3$ становится отрицательным, а остальные два положительны, т. е. $P(x) < 0$; в интервале $(-1; 1)$ знак второго сомножителя $(x-1)^2$ не меняется, т. е. по-прежнему $P(x) < 0$; наконец, в интервале $(-\infty; -1)$ два сомножителя отрицательны, а один положителен, т. е. $P(x) > 0$. Итак, получаем ответ: $(-1; 1) \cup (1; 2)$.

3. Решить неравенство $\dfrac{(x-3)^2(x-2)x}{(x+1)^4(x+5)} > 0$.

Решение. Отметим на числовой прямой точки $x = -5$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$, $x = 3$ и исследуем изменение знаков левой части неравенства (рис. 58). Решением неравенства служит объединение интервалов: $(-5; -1) \cup (-1; 0) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$.

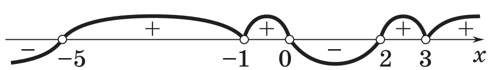


Рис. 58

4. Решить неравенство $\dfrac{7x-12-x^2}{2x^2-x-3}<0.$

Р е ш е н и е. Разложим квадратные трехчлены на линейные множители:

$$\frac{7x-12-x^2}{2x^2-x-3}<0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)(3-x)}{(x+1)(2x-3)}<0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x-4)}{(x+1)(2x-3)}>0.$$

Отметив на числовой прямой точки $x=-1$, $x=\dfrac{3}{2}$, $x=3$ и $x=4$ и исследовав изменение знаков левой части неравенства (рис. 59), получаем ответ: $(-\infty;-1)\cup(\dfrac{3}{2};3)\cup(4;+\infty)$.

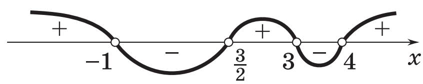


Рис. 59

5. Расположение корней квадратного трехчлена

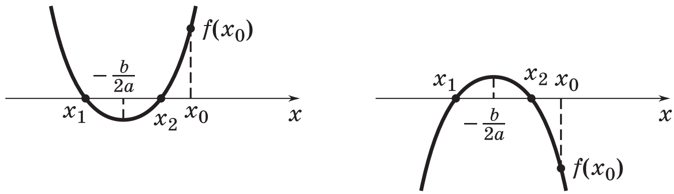
1°. При решении некоторых задач нам потребуется знание ряда теорем о расположении корней квадратного трехчлена на координатной прямой.

2°. Пусть квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ имеет действительные корни x_1 и x_2, а x_0 — какое-нибудь действительное число. Тогда справедливы следующие теоремы (см. пп. 3°—5°).

3°. ТЕОРЕМА 1. <u>Чтобы оба корня квадратного трехчлена были меньше, чем число</u> x_0 (т. е. лежали на координатной прямой левее, чем x_0), необходимо и достаточно выполнение условий (рис. 60, *а* и *б*):

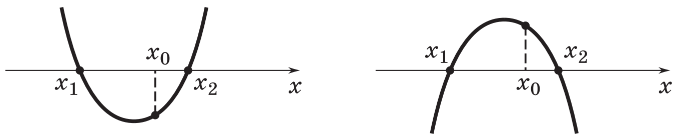
$$\text{а)}\begin{cases} a>0,\\ D\geqslant 0,\\ -\dfrac{b}{2a}<x_0,\\ f(x_0)>0 \end{cases} \quad\text{или}\quad \text{б)}\begin{cases} a<0,\\ D\geqslant 0,\\ -\dfrac{b}{2a}<x_0,\\ f(x_0)<0. \end{cases}$$

4°. ТЕОРЕМА 2. <u>Чтобы один из корней квадратного трехчлена был меньше числа</u> x_0, <u>а другой больше числа</u> x_0 (т. е.



а) *б*)

Рис. 60



а) *б*)

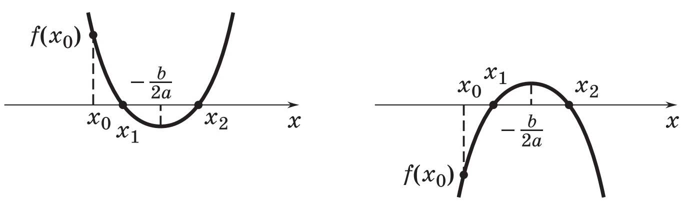
Рис. 61

число x_0 лежало между корнями), необходимо и достаточно выполнение условий (рис. 61, *а* и *б*):

$$\text{а)} \begin{cases} a > 0, \\ f(x_0) < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \text{б)} \begin{cases} a < 0, \\ f(x_0) > 0. \end{cases}$$

5°. ТЕОРЕМА 3. <u>Чтобы оба корня квадратного трехчлена были больше, чем число</u> x_0 (т. е. лежали на координатной прямой правее, чем x_0), необходимо и достаточно выполнение условий (рис. 62, *а* и *б*):

$$\text{а)} \begin{cases} a > 0, \\ D \geqslant 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > x_0, \\ f(x_0) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \text{б)} \begin{cases} a < 0, \\ D \geqslant 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > x_0, \\ f(x_0) < 0. \end{cases}$$



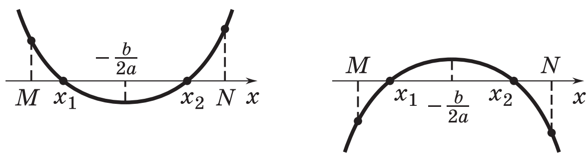
а) *б*)

Рис. 62

Из приведенных теорем вытекают важные следствия (см. пп. 6°—9°).

6°. Следствие 1. Чтобы оба корня квадратного трехчлена были больше, чем число M, но меньше, чем число N (т. е. лежали в интервале между M и N), необходимо и достаточно выполнение условий (рис. 63, *а* и *б*):

$$\text{а)} \begin{cases} a > 0, \\ D \geqslant 0, \\ M < -\dfrac{b}{2a} < N, \\ f(M) > 0, \\ f(N) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \text{б)} \begin{cases} a < 0, \\ D \geqslant 0, \\ M < -\dfrac{b}{2a} < N, \\ f(M) < 0, \\ f(N) < 0. \end{cases}$$



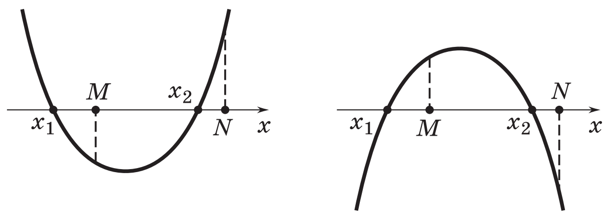
а) *б*)

Рис. 63

7°. Следствие 2. Чтобы только больший корень квадратного трехчлена лежал в интервале $(M; N)$, где $M < N$, необходимо и достаточно выполнение условий (рис. 64, *а* и *б*):

$$\text{а)} \begin{cases} a > 0, \\ f(M) < 0, \\ f(N) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \text{б)} \begin{cases} a < 0, \\ f(M) > 0, \\ f(N) < 0; \end{cases}$$

при этом меньший корень лежит вне отрезка $[M; N]$.



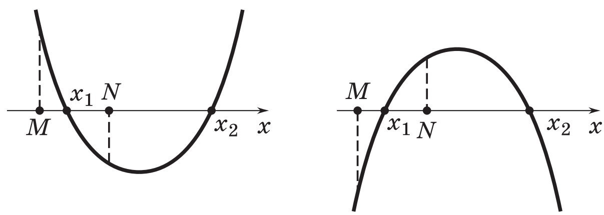
а) *б*)

Рис. 64

8°. С л е д с т в и е 3. Чтобы только меньший корень квадратного трехчлена лежал в интервале $(M; N)$, где $M < N$, необходимо и достаточно выполнение условий (рис. 65, *а* и *б*):

$$\text{а)}\ \begin{cases} a > 0, \\ f(M) > 0, \\ f(N) < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \text{б)}\ \begin{cases} a < 0, \\ f(M) < 0, \\ f(N) > 0; \end{cases}$$

при этом больший корень лежит вне отрезка $[M; N]$.

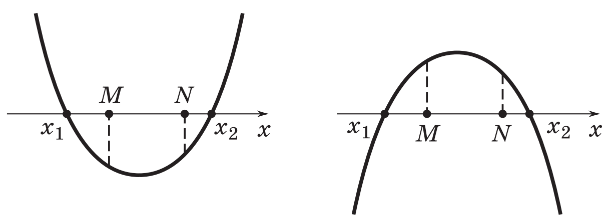


а) *б*)

Рис. 65

9°. С л е д с т в и е 4. Чтобы один из корней квадратного трехчлена был меньше, чем M, а другой больше, чем N $(M < N)$, т. е. отрезок $[M; N]$ целиком лежал внутри интервала между корнями, необходимо и достаточно выполнение условий (рис. 66, *а* и *б*):

$$\text{а)}\ \begin{cases} a > 0, \\ f(M) < 0, \\ f(N) < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \text{б)}\ \begin{cases} a < 0, \\ f(M) > 0, \\ f(N) > 0. \end{cases}$$



а) *б*)

Рис. 66

З а м е ч а н и е. Сформулированные теоремы и следствия очень часто применяются при решении задач с параметрами и поэтому имеют большое значение.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что значит решить систему неравенств?

2. Какие системы неравенств называют равносильными?

3. Даны функции $y = x + 1$ и $y = 8 - 2x$. Найдите множество значений переменной x, при которых обе функции принимают положительные значения.

4. Что значит решить совокупность неравенств?

5. Решите совокупность неравенств: а) $x + 1 > 0$, $-2x + 8 > 0$; б) $1{,}5x + 2 > 9{,}5 - x$, $0{,}6 + 1{,}9x > 0{,}4(x - 3)$.

6. Что является решением неравенства $x^2 + y^2 \leqslant a^2$?

7. Каково множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $y \geqslant 2x^2$?

8. Что представляет собой на плоскости решение системы неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant x, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9? \end{cases}$$

9. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию: а) $0 < x < 1$; б) $-1 \leqslant y \leqslant 1$; в) $x - y \leqslant 0$; г) $a^2 < x^2 + y^2 < b^2$, $a > 0$, $b > 0$.

10. Изобразите штриховкой на координатной плоскости множество точек, для которых:

а) $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \leqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x > 2, \\ y < -1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 4{,}5, \\ 1 \leqslant y \leqslant 5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 0{,}64, \\ y \leqslant 0. \end{cases}$

11. Решите методом интервалов неравенство:

а) $\dfrac{x}{x-1} < 0$; б) $\dfrac{x}{x-1} < 1$;

в) $\dfrac{1}{x} > x$; г) $\dfrac{1}{x^2} > x$;

д) $\dfrac{2}{x-3} > 2$; е) $\dfrac{3-x}{x+4} < 1$;

ж) $x(x-1)(x-2)^2(x-3) < 0$;

з) $(x - 3)(x - 4)(x - 5)^2 \times (x^2 - 4x + 7) > 0$.

12. Равносилен ли переход от неравенства $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ к неравенству $f(x)g(x) > 0$?

13. Равносильны ли неравенства:

а) $x^2 > x - 1$ и $x^2 + 1 > x$;

б) $x^2 < 0$ и $\sin x > 1$?

14. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{2x - 17} + \sqrt{31 - x}$;

б) $y = \sqrt{(1 - 7x)^3} + \sqrt{1 - 8x}$;

в) $y = \sqrt{(2 - 5x)^2} + \sqrt{3 - 4x}$;

г) $y = \dfrac{\sqrt[4]{x + 5}}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$.

15. При каких значениях x верно равенство:

а) $\sqrt{(x^2 - 3x - 10)^2} = x^2 - 3x - 10$;

б) $\sqrt{(x^2 - 9x + 14)^2} = 9x - x^2 - 14$?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решите неравенство:

а) $|2x+5|-|3x-4|\leqslant 2x-4$; б) $|2x-1|-|x-2|\geqslant 4$;

в) $|x-6|>x^2-5x+9$; г) $(|x|-3)(|x|-5)<0$;

д) $(|2x+3|-1)(|2x+3|-4)\geqslant 0$; е) $|x^3-1|(x-9)<0$.

2. Решите неравенство:

а) $\dfrac{(2x-3)x^2(4-x)^3}{(x-6)^5(x^2+4x+6)}\leqslant 0$; б) $\dfrac{(x^2-x-2)(x-5)^2}{(x+2)(3-x)}\geqslant 0$;

в) $\dfrac{(x^2-4x+3)^2}{(4x-x^2)(x+3)}\geqslant 0$; г) $\dfrac{(2-x^2)(x-3)^3}{(x+1)(x^2-3x-4)}\geqslant 0$;

д) $\dfrac{\sqrt{2x+7}}{3x+1}\leqslant 0$; е) $\dfrac{(3x-2)(4-7x)^2}{3x+1}<0$;

ж) $\sqrt{x}\,(x+2)^2(x+3)\geqslant 0$.

3. На координатной плоскости xOy изобразите область, ограниченную линиями: а) осью абсцисс и прямыми $y=x$, $x=2$, $x=4$; б) прямыми $y=x$, $y=x+3$, $y=-2x+1$ и $y=-2x+5$; в) параболами $y=x^2$ и $y=4-x^2$; г) кубической параболой $y=x^3$ и прямой $y=x$; д) параболами $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$; е) параболой $y=x^2$ и полуокружностью $y=\sqrt{1-x^2}$.

4. На координатной плоскости xOy изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют соотношению: а) $-1<y<1$; б) $x-y>0$; в) $y>x^2$; г) $x^2+y^2>1$; д) $y\geqslant|x^2-x|$; е) $x^2-1\leqslant 0$; ж) $x^2-3x+2=0$; з) $|x-y|\geqslant 2$; и) $a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2$, где $a>0$, $b>0$; к) $1\leqslant x\leqslant 2$, $0\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{x}$; л) $x^2+y^2\leqslant 1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$; м) $0\leqslant x\leqslant 1$, $1-x\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}$.

5. При каких значениях p оба корня уравнения

$$x^2+(2p+6)x+4p+12=0$$

больше (-1)?

6. Определите все значения параметра k, при которых оба корня уравнения $x^2+4kx+(1-2k+4k^2)=0$ меньше (-1).

7. При каких значениях c один из корней уравнения

$$(c^2+c+1)\ x^2+(2c-3)x+c-5=0$$

больше 1, а другой меньше 1?

8. Определите все значения t, при которых корни уравнения $x^2+x+t=0$ больше t.

9. Для каких значений k неравенство $x^2 + kx + k^2 + 6k < 0$ выполняется при всех $1 < x < 2$?

10. Найдите значения k, при которых из неравенства

$$kx^2 - x + 1 < k < 0$$

следует неравенство $0 < x < 1$.

11. Найдите все значения параметра a, при которых оба корня уравнения $x^2 - 2ax - 1 = 0$ по модулю не превосходят 2.

12. Найдите все значения параметра k, при которых оба корня уравнения $x^2 - 6k + 2 - 2k + 9k^2 = 0$ больше 3.

13. При каких значениях параметра a уравнение

$$ax^2 - (a + 1)x + 2 = 0$$

имеет два различных корня, которые по модулю меньше 1?

14. При каких значениях параметра p уравнение

$$x^2 + 2(p - 3) + 9 = 0$$

имеет два различных корня, которые принадлежат интервалу $(-6; 1)$?

15. При каких значениях параметра k неравенство

$$x^2 + (4k - 5)x + 3k^2 - 5k > 0$$

справедливо для всех x таких, что $1 \leqslant x \leqslant 4$?

Задания для повторения

16. Из сосуда вместимостью 54 л, наполненного кислотой, вылили несколько литров и долили сосуд водой, затем снова вылили столько же литров смеси. Тогда в оставшейся в сосуде смеси оказалось 24 л чистой кислоты. Сколько кислоты вылили в первый раз?

17. Для перевозки 60 т груза из одного места в другое затребовали некоторое количество машин. Ввиду неисправности дороги на каждую машину пришлось грузить на 0,5 т меньше, чем предполагалось, поэтому дополнительно потребовалось добавить 4 машины. Какое количество машин было затребовано первоначально?

18. Имеет ли смысл выражение:

а) $(-5)^{-1/7}$; б) $(-3)^{-4}$; в) $5^{2/3}$; г) $0^{-2/3}$?

19. Найдите область определения выражения:

а) $(a + 1)^{-2/5}$; б) $x^{3/5}$; в) $a^{-3/4}$; г) $(a - 5)^{2/3}$.

20. Верно ли, что сумма и произведение чисел a и b являются рациональными числами, если:

а) a и b — рациональные числа;

б) a и b — иррациональные числа?

21. Расположите данные числа в порядке возрастания. Укажите, какие из них являются рациональными, а какие — иррациональными числами: а) $\sqrt{3}$; -2; $-1{,}7$; $\frac{\pi}{3}$; б) $0{,}(2)$; $\frac{7}{6}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ОТВЕТЫ

1. а) $-5 \leqslant x \leqslant -\frac{5}{3}$, $\frac{13}{3} \leqslant x < +\infty$; б) $-\infty < x \leqslant -5$, $3 \leqslant x < +\infty$; в) $1 < x < 3$; г) $-5 < x < -3$, $3 < x < 5$; д) $-\infty < x \leqslant -3{,}5$, $-2 \leqslant x \leqslant -1$, $0{,}5 \leqslant x < +\infty$; е) $-\infty < x < 1$, $1 < x < 9$. **2.** а) $x = 0$, $\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 4$, $x > 6$; б) $-2 < x \leqslant -1$, $2 \leqslant x < 3$, $x = 5$; в) $-\infty < x < -3$, $0 < x < 4$, $x = 1$, $x = 3$; г) $-\sqrt{2} < x < -1$, $-1 < x < \sqrt{2}$, $3 \leqslant x < 4$; д) $-\frac{7}{2} \leqslant x < -\frac{1}{3}$; е) $-\frac{1}{3} < x < \frac{4}{7}$, $\frac{4}{7} < x < \frac{2}{3}$; ж) $0 \leqslant x < +\infty$. **5.** $-3{,}5 < p \leqslant -3$. **6.** $k > 1$. **7.** $-2 - \sqrt{11} < c < -2 + \sqrt{11}$. **8.** $t < -2$. **9.** $-0{,}5(7 + 3\sqrt{5}) \leqslant k \leqslant 2\sqrt{3} - 4$. **10.** $k \geqslant 1$. **11.** $-0{,}75 \leqslant a \leqslant 0{,}75$. **12.** $k > \frac{11}{9}$. **13.** $a > 3 + 2\sqrt{2}$. **14.** $6 < p < \frac{27}{4}$. **15.** $k < -4$, $k > \frac{4}{3}$. **16.** 18 л. **17.** 20 машин. **18.** а) Да; б) да; в) да; г) нет. **19.** а) $a \in \boldsymbol{R}$, $a \neq -1$; б) $x \in \boldsymbol{R}$; в) $a > 0$; г) $a \in \boldsymbol{R}$. **20.** а) Да; б) нет. **21.** а) -2; $-1{,}7$; $\frac{\pi}{3}$; $\sqrt{3}$; числа -2 и $-1{,}7$ — рациональные; числа $\frac{\pi}{3}$ и $\sqrt{3}$ — иррациональные; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $0{,}(2)$; $\frac{7}{6}$; числа $0{,}(2)$ и $\frac{7}{6}$ — рациональные, число $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ — иррациональное.

Решения и методические указания

К упражнению 1а

1. Найдем точки, в которых выражения, записанные под знаком модуля, равны нулю: а) $2x + 5 = 0$, $x = -\frac{5}{2}$; б) $3x - 4 = 0$, $x = \frac{4}{3}$.

2. Эти точки разбивают числовую прямую на три промежутка:

$$\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right); \quad \left[-\frac{5}{2}; \frac{4}{3}\right); \quad \left[\frac{4}{3}, +\infty\right).$$

3. Рассмотрим данное неравенство на промежутке $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$ и решим полученную систему:

$$\begin{cases} x < -\frac{5}{2}, \\ -(2x+5) + (3x-4) \leqslant 2x - 4, \end{cases} \text{или} \begin{cases} x < -\frac{5}{2}, \\ x \geqslant -5, \end{cases}$$

т. е. $-5 \leqslant x < -\frac{5}{2}$.

4. Далее рассмотрим данное неравенство на промежутке $\left[-\frac{5}{2}; \frac{4}{3}\right)$ и решим полученную систему:

$$\begin{cases} -\frac{5}{2} \leqslant x < \frac{4}{3}, \\ 2x + 5 + (3x-4) \leqslant 2x - 4, \end{cases} \text{или} \begin{cases} -\frac{5}{2} \leqslant x < \frac{4}{3}, \\ x \leqslant -\frac{5}{3}, \end{cases}$$

т. е. $-\frac{5}{2} \leqslant x \leqslant -\frac{5}{3}$.

5. Наконец, рассмотрим данное неравенство на промежутке $\left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$ и решим полученную систему:

$$\begin{cases} x \geqslant \frac{4}{3}, \\ 2x + 5 - (3x-4) \leqslant 2x - 4, \end{cases} \text{или} \begin{cases} x \geqslant \frac{4}{3}, \\ x \geqslant \frac{13}{3}, \end{cases}$$

т. е. $x \geqslant \frac{13}{3}$.

6. Объединяя все эти множества, получим ответ:

$$\left[-5; -\frac{5}{3}\right] \cup \left[\frac{13}{3}; +\infty\right).$$

К упражнению 1г

1. Положим $y = |x|$; тогда данное неравенство примет вид

$$(y-3)(y-5) < 0.$$

2. Решением этого неравенства является интервал $3 < y < 5$.

3. Вернемся к переменной x и получим неравенство $3 < |x| < 5$. Это двойное неравенство запишем в виде системы и решим ее:

$$\begin{cases} |x| < 5, \\ |x| > 3, \end{cases} \text{или} \begin{cases} -5 < x < 5, \\ x < -3,\ x > 3. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-5; -3) \cup (3; 5)$.

К упражнению 2а

1. Требуется решить неравенство

$$\frac{(2x-3)x^2(4-x)^3}{(x-6)^5(x^2+4x+6)} \leqslant 0. \qquad (1)$$

2. Квадратный трехчлен $x^2 + 4x + 6 > 0$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$, так как $a > 0$ и $D < 0$, поэтому неравенство (1) равносильно следующему:

$$\frac{x^2(2x-3)(4-x)^3}{(x-6)^5} \leqslant 0. \qquad (2)$$

3. При решении неравенств обязательно надо обращать внимание на степень с четным показателем. В неравенстве (2) имеется такая степень — это x^2. Так как неравенство (2) — нестрогое, то значение $x = 0$ является его решением.

4. Учитывая сказанное, получаем неравенство

$$\frac{(2x-3)(4-x)^3}{(x-6)^5} \leqslant 0. \qquad (3)$$

5. На числовой прямой отметим точки, в которых дробь в левой части неравенства (3) обращается в нуль или имеет разрыв. Это точки $x = \frac{3}{2}$, $x = 4$, $x = 6$, которые разбивают числовую прямую на четыре промежутка: $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}; 4\right)$, $(4; 6)$ и $(6; +\infty)$.

6. Определяем знаки неравенства (3) на каждом из указанных промежутков и получаем требуемое решение (рис. 67).

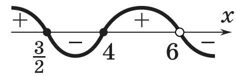


Рис. 67

Ответ: $x = 0$, $\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 4$, $x > 6$.

К упражнениям 3а—е

См. соответственно рис. 68—73.

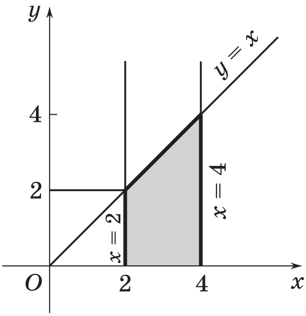


Рис. 68

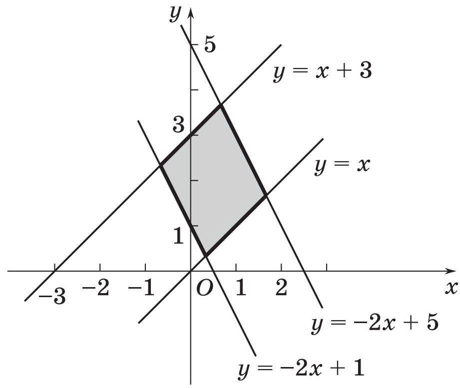


Рис. 69

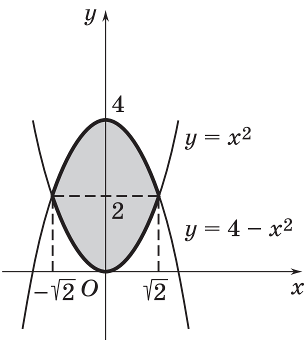


Рис. 70

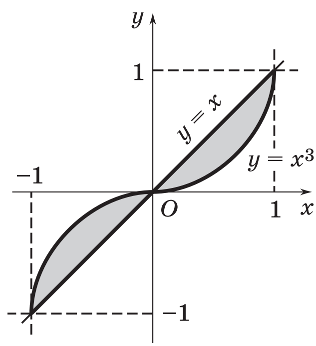


Рис. 71

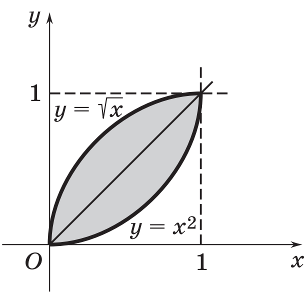


Рис. 72

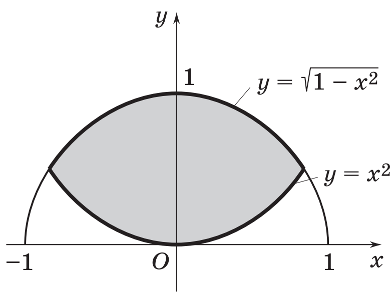


Рис. 73

К упражнениям 4а—м

См. соответственно рис. 74—85.

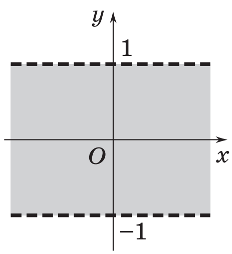


Рис. 74

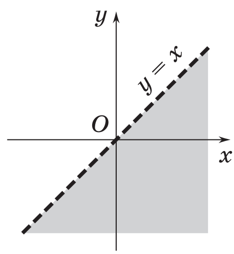


Рис. 75

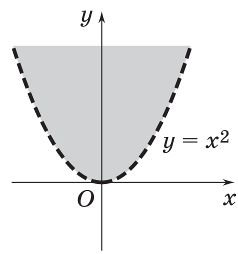


Рис. 76

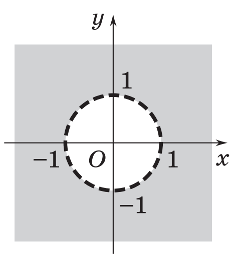


Рис. 77

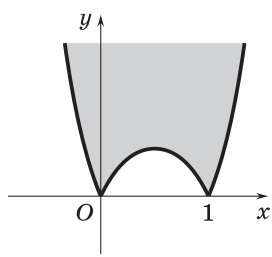


Рис. 78

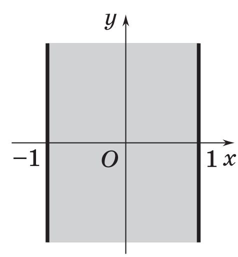


Рис. 79

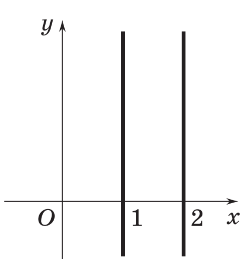


Рис. 80

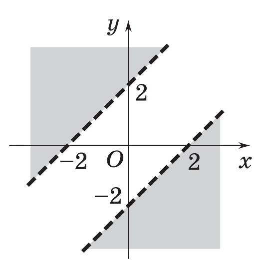


Рис. 81

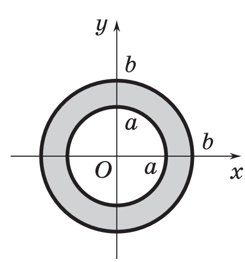


Рис. 82

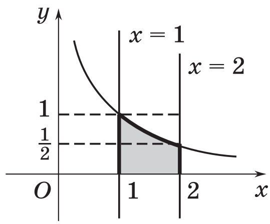


Рис. 83

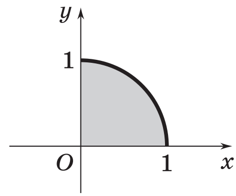


Рис. 84

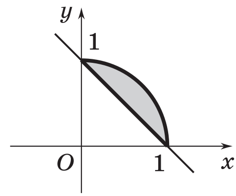


Рис. 85

К упражнению 5

1. Здесь a (первый коэффициент уравнения) равен 1, т. е. $a > 0$. Используя теорему 3 (см. с. 143), запишем систему неравенств

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > -1, \\ f(-1) > 0, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} (2p+6)^2 - 4(p+12) \geqslant 0, \\ -(p+3) > -1, \\ 1 - (2p+6) + 4p + 12 > 0. \end{cases}$$

2. Решив эту систему, находим $-3{,}5 < p \leqslant -3$.

К упражнению 6

1. Здесь $a = 1 > 0$. Применяя теорему 1 (см. с. 142), составим систему

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < -1, \\ f(-1) > 0, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} 4k^2 - (1 - 2k + 4k^2) \geqslant 0, \\ -2k < -1, \\ 1 - 4k + (1 - 2k + 4k^2) > 0. \end{cases}$$

2. Решив эту систему, получим $k > 1$.

К упражнению 7

1. Здесь $a = c^2 + c + 1 > 0$ при $c \in \boldsymbol{R}$.
2. Согласно теореме 2 (см. с. 142, 143), имеем

$$f(1) = c^2 + c + 1 + 2c - 3 + c - 5 < 0.$$

3. Решив это неравенство, находим $-2 - \sqrt{11} < c < -2 + \sqrt{11}$.

К упражнению 8

1. Согласно условию, данное уравнение имеет два корня, которые больше t, поэтому график квадратного трехчлена $x^2 + x + t$ имеет вид, изображенный на рис. 86.

2. Используя теорему 3, запишем систему неравенств

$$\begin{cases} 1 - 4t > 0, \\ t < -\dfrac{1}{2}, \\ t(t + 2) > 0. \end{cases}$$

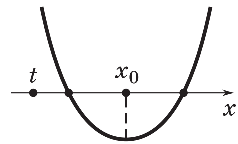


Рис. 86

3. Решением этой системы является промежуток $t < -2$.

К упражнению 9

1. Чтобы неравенство $x^2 + kx + k^2 + 6k < 0$ имело место при всех $1 < x < 2$, т. е. чтобы интервал (1; 2) лежал между корнями квадратного трехчлена $f(x) = x^2 + kx + k^2 + 6k$, нужно, чтобы выполнялись требования следствия 4:

$$\begin{cases} f(1) \leqslant 0, \\ f(2) \leqslant 0. \end{cases}$$

2. Отметим, что здесь записаны нестрогие неравенства, поскольку возможно не только расположение параболы, указанное на рис. 87, *а*, но и расположения, изображенные на рис. 87, *б—г*. В последних трех случаях один или оба корня квадратного трехчлена могут совпадать с точками $x_1 = 1$ или $x_2 = 2$, но внутренние точки интервала между корнями удовлетворяют неравенству $1 < x < 2$.

3. Итак, имеем систему неравенств

$$\begin{cases} f(1) = 1 + k + k^2 + 6k \leqslant 0, \\ f(2) = 4 + 2k + k^2 + 6k \leqslant 0. \end{cases}$$

4. Решив эту систему, получим $\dfrac{-7 - 3\sqrt{5}}{2} \leqslant k \leqslant 2\sqrt{3} - 4$.

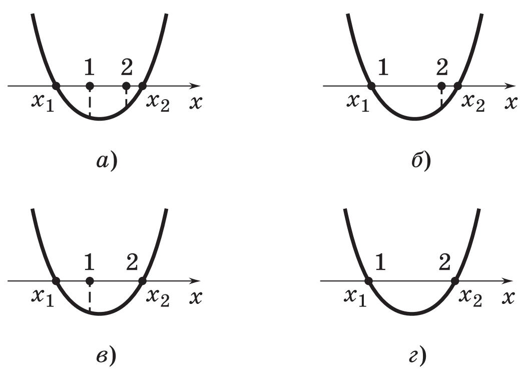


Рис. 87

К упражнению 10

1. Согласно условию, требуется найти все значения k, при которых любое число x, удовлетворяющее неравенству

$$kx^2 - x + 1 - k < 0, \tag{1}$$

удовлетворяет и неравенству

$$0 < x < 1. \tag{2}$$

2. Это означает, что неравенство (1) достаточно для выполнения неравенства (2), а неравенство (2) необходимо для выполнения неравенства (1).

3. Покажем, что число k должно быть положительным.

а) Если $k < 0$, то квадратное неравенство (1) выполняется либо при всех x (рис. 88, *а*), либо при тех x, которые лежат вне отрезка, содержащего корни квадратного уравнения $kx^2 - x + 1 - k = 0$ (рис. 88, *б*).

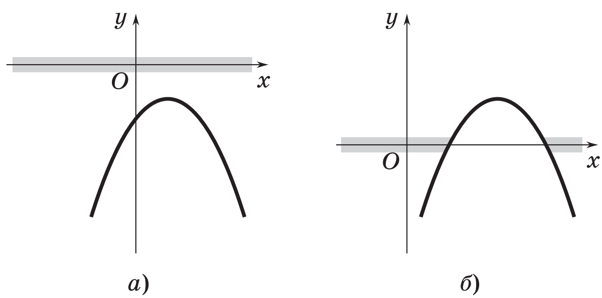


Рис. 88

б) В каждом из рассмотренных случаев обязательно найдутся значения x, удовлетворяющие условию (1), но не удовлетворяющие условию (2), т. е. в этих случаях условие (2) не является необходимым для выполнения условия (1).

в) Если $k = 0$, то из неравенства (1) следует, что $x > 1$, а это противоречит неравенству (2).

4. Итак, $k > 0$. Так как $D = 1 - 4k(1 - k) = (1 - 2k)^2 \geqslant 0$ при любых k, то решения неравенства (1) заключены между корнями квадратного трехчлена.

5. В результате приходим к следующим выводам:

а) чтобы выполнялись требования задачи, нужно, чтобы интервал (0; 1) лежал между корнями квадратного трехчлена;

б) последнее означает, что должны выполняться требования следствия 4.

6. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} f(0) = 1 - k \leqslant 0, \\ f(1) = k - 1 + 1 - k \leqslant 0 \end{cases}$$

(в которой оба неравенства являются нестрогими; см. решение упр. 9). Отсюда находим $k \geqslant 1$.

К упражнению 16

1. Пусть в первый раз было вылито x л кислоты. Тогда в сосуде осталось $(54 - x)$ л кислоты.

2. Долив сосуд водой, получили 54 л смеси, в которой растворилось $(54 - x)$ л кислоты.

3. Значит, в 1 л смеси содержится $\frac{54 - x}{54}$ л кислоты (концентрация раствора).

4. Во второй раз из сосуда вылили x смеси, в этом количестве смеси содержится $\left(\frac{54 - x}{54} \cdot x\right)$ л кислоты.

5. Таким образом, в первый раз было вылито x л кислоты, во второй раз $\frac{54 - x}{54} \cdot x$ л кислоты, а всего за два раза вылили $54 - 24 = 30$ л кислоты.

6. Составим уравнение

$$x + \frac{54 - x}{54} \cdot x = 30,$$

откуда $x_1 = 18$; $x_2 = 90$. Ясно, что $x = 90$ не удовлетворяет условию.

Итак, в первый раз вылили 18 л кислоты.

К упражнению 18

а) $(-5)^{-1/7} = \sqrt[7]{(-5)^{-1}} = \sqrt[7]{-\frac{1}{5}}$;

б) $(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{81}$;

в) $5^{2/3} = \sqrt[3]{5^2}$;

г) $0^{-2/3} = \frac{1}{0^{2/3}}$ — не имеет смысла.

К упражнению 19

а) $(a+1)^{-2/5} = \dfrac{1}{(a+1)^{2/5}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{(a+1)^2}}$, где $a \neq -1$;

б) $x^{3/5} = \sqrt[5]{x^3}$, где $x \in \boldsymbol{R}$;

в) $a^{-3/4} = \dfrac{1}{a^{3/4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$, где $a > 0$;

г) $(a-5)^{2/3} = \sqrt[3]{(a-5)^2}$, где $a \in \boldsymbol{R}$.

К упражнению 20

а) Если a и b — рациональные числа, то сумма $a + b$ и произведение ab также числа рациональные.

б) Если a и b — иррациональные числа, то сумма $a + b$ также число иррациональное (за исключением случая, когда $a = -b$), а произведение ab может быть как рациональным, так и иррациональным числом (например, $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{21}$ — число иррациональное, а $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$ — рациональное).

Тема 10

Обратная функция.
Степенная функция с целым показателем.
Функция $y = \sqrt[k]{x}$.
Иррациональные уравнения.
Иррациональные неравенства

Теоретические сведения

1. Обратная функция

1°. Пусть функция $y = f(x)$ монотонна в своей области определения $D(f)$. Тогда каждому $x \in D(f)$ соответствует единственный $y \in E(f)$ и обратно, каждое значение $y \in E(f)$ соответствует единственному $x \in D(f)$. Значит, в этом случае можно построить новую функцию, определенную на $E(f)$ и такую, что каждому $y \in E(f)$ ставится в соответствие $x \in D(f)$, удовлетворяющее уравнению $y = f(x)$. Эту новую функцию называют ***обратной*** по отношению к функции $y = f(x)$.

2°. Для нахождения функции, обратной данной $y = f(x)$, надо выразить x через y: $x = g(y)$, а затем записать полученную функцию в общепринятой форме $y = g(x)$.

3°. Отметим, что если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ являются взаимно обратными, то область определения функции f совпадает с множеством значений функции g и, наоборот, область определения функции g — с множеством значений функции f, т. е. $D(f) = E(g)$ и $D(g) = E(f)$.

4°. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 89).

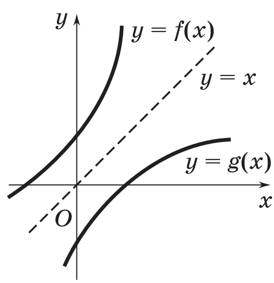


Рис. 89

5°. Рассмотрим, например, функцию $y = x^2$, заданную на промежутке $(-\infty; 0]$. На этом промежутке функция убывает и принимает все значения из множества $[0; +\infty)$. Следовательно, для данной

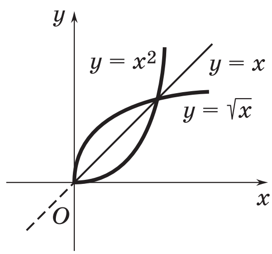


Рис. 90

функции существует обратная. Из уравнения $y = x^2$ находим $x = \sqrt{y}$ или $x = -\sqrt{y}$; так как переменная x может принимать только неположительные значения, то искомая обратная функция имеет вид $x = -\sqrt{y}$. Поменяв обозначения x на y и y на x, получим формулу $y = -\sqrt{x}$, где $x \geqslant 0$, с помощью которой и задается обратная функция.

Если же рассматривать функцию $y = x^2$, заданную на промежутке $[0; +\infty)$, то обратной для нее служит функция $y = \sqrt{x}$, где $x \geqslant 0$. На рис. 90 изображены график функции $y = x^2$ при $x \geqslant 0$ и график обратной ей функции.

2. Степенная функция с целым показателем

1°. Рассмотрим функцию, заданную формулой $y = x^k$ ($k \in \boldsymbol{N}$) и построим ее график при различных значениях k. Если $k = 1$, то получается функция $y = x$, графиком которой является прямая (рис. 91); если $k = 2$, то получается функция $y = x^2$, графиком которой является парабола (рис. 92); если $k = 3$, то получается функция $y = x^3$, график которой есть кубическая парабола (рис. 93).

На рис. 94 и 95 изображены графики функции $y = x^k$ при $k = 4$ и $k = 5$.

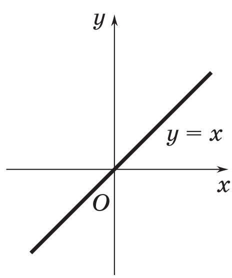


Рис. 91

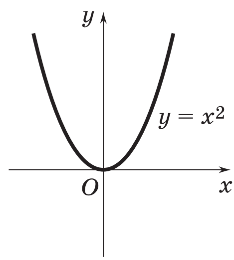


Рис. 92

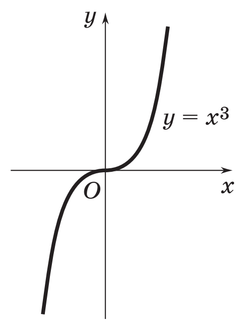


Рис. 93

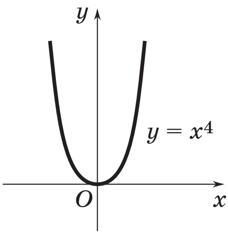


Рис. 94

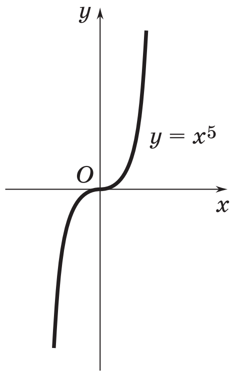


Рис. 95

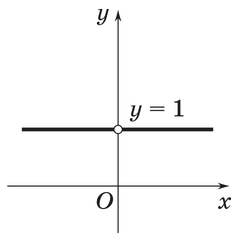


Рис. 96

2°. Отметим некоторые свойства степенной функции $y = x^k$ $(k \in \boldsymbol{N})$:

а) область определения — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел;

б) при любом k график проходит через начало координат и точку (1; 1);

в) если k — четное число, то функция является четной и ось Oy служит осью симметрии графика;

г) если k — нечетное число, то функция является нечетной и начало координат служит центром симметрии графика.

3°. Рассмотрим функцию $y = x^0$, т. е. частный случай степенной функции при $k = 0$. Область определения этой функции — множество всех действительных чисел, кроме нуля, т. е. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Графиком функции $y = x^0$ служит прямая $y = 1$, из которой удалена точка (0; 1) (рис. 96).

4°. Рассмотрим теперь функцию $y = x^k$ $(k \in \boldsymbol{Z}_-)$, т. е. степенную функцию с целым отрицательным показателем. Если $k = -1$, то получается функция $y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$, графиком которой служит гипербола (рис. 97); если $k = -2$, то получается функция $y = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$, график

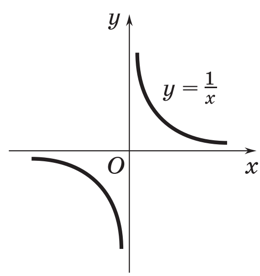


Рис. 97

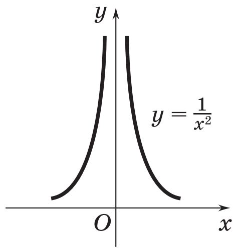


Рис. 98

которой изображен на рис. 98. При нечетном k график функции $y = x^k$ выглядит так же, как и график функции $y = x^{-1}$, а при четном k — как и график функции $y = x^{-2}$.

5°. Отметим некоторые свойства степенной функции $y = x^k$ ($k \in \boldsymbol{Z}_-$):

а) область определения — множество всех действительных чисел, кроме нуля, т. е. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

б) если k — четное число, то функция является четной и ось Oy служит осью симметрии графика;

в) если k — нечетное число, то функция является нечетной и ее график симметричен относительно начала координат.

3. Функция $y = \sqrt[k]{x}$

1°. Функция $y = x^k$, $k \in \boldsymbol{N}$ ($k > 1$) возрастает на множестве $[0; +\infty)$, а множеством ее значений также является множество $[0; +\infty)$ (см. рис. 91—95). Значит, для функции $y = x^k$ существует обратная функция, определенная на множестве $[0; +\infty)$ и принимающая значения из множества $[0; +\infty)$. Эта обратная функция обозначается так: $y = \sqrt[k]{x}$.

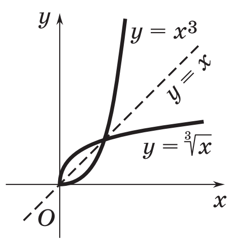


Рис. 99

2°. Для построения графика функции $y = \sqrt[k]{x}$, где $x \in [0; +\infty)$ и $k \in \boldsymbol{N}$ ($k > 1$), можно воспользоваться свойством симметрии графиков взаимно обратных функций относительно прямой $y = x$ (см. п. 1). Например, график функции $y = \sqrt[3]{x}$ симметричен графику функции $y = x^3$ относительно прямой $y = x$ (рис. 99).

4. Иррациональные уравнения

1°. Уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня, называют ***иррациональными***.

2°. Решение иррациональных уравнений сводится к переходу от иррационального к рациональному уравнению с помощью возведения в степень обеих частей уравнения.

3°. При возведении обеих частей уравнения в четную степень возможно появление посторонних корней. Поэтому при использовании указанного метода следует проверить все найденные корни подстановкой в исходное уравнение.

Пример. Решить уравнение:

$$\text{а) } \sqrt{2x-3} = \sqrt{x-2}\,; \quad \text{б) } \sqrt{x-1} = 3 - x.$$

Решение. а) Возведя обе части уравнения в квадрат, получим $2x - 3 = x - 2$, откуда $x = 1$. Проверка показывает, что этот корень — посторонний (при $x = 1$ обе части уравнения не имеют смысла). Значит, данное уравнение не имеет корней.

б) Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$x - 1 = (3 - x)^2; \quad x - 1 = 9 - 6x + x^2; \quad x^2 - 7x + 10 = 0,$$

т. е. $x = 2$, $x = 5$. Проверкой убеждаемся, что $x = 5$ — посторонний корень, а $x = 2$ удовлетворяет уравнению.

4°. Заметим, про проверку можно упростить, если найти область определения данного уравнения. Например, для уравнения $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x-2}$ областью определения служит луч $[2; +\infty)$ и так как $1 \notin [2; +\infty)$, то $x = 1$ — посторонний корень.

5. Иррациональные неравенства

Неравенства, в которых переменная содержится под знаком корня, называют ***иррациональными***. Основным методом решения таких неравенств является метод возведения в степень. При этом решение иррациональных неравенств сводится к решению рациональных неравенств или систем рациональных неравенств.

Пример. Решить неравенство:

$$\text{а) } \sqrt{x-1} < 3 - x; \quad \text{б) } \sqrt{x-1} > 3 - x.$$

Решение. а) Область определения неравенства задается условием $x - 1 \geqslant 0$. Далее, по смыслу неравенства должно выполняться условие $3 - x > 0$. При этих условиях обе части неравенства неотрицательны и поэтому можно использовать метод возведения в квадрат. В результате данное неравенство сводится к следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0, \\ 3 - x > 0, \\ x - 1 < (3 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x < 3, \\ (x-2)(x-5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leqslant x < 2,$$

т. е. решением неравенства служит промежуток $[1; 2)$.

б) Область определения неравенства также задается условием $x - 1 \geqslant 0$. Если при этом $3 - x < 0$, то выполняется и данное неравенство (так как в левой части окажется неотрицательное число, а в правой — отрицательное). Если же $3 - x \geqslant 0$, то, как и в предыдущем случае, обе части неравенства можно возвести в квадрат. Таким образом, данное неравенство сводится к следующей совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0, \\ 3 - x < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 1 \geqslant 0, \\ 3 - x \geqslant 0, \\ x - 1 > (3 - x)^2. \end{cases}$$

Решением первой системы служит открытый луч $(3; +\infty)$, а решением второй системы — промежуток $(2; 3]$. Объединяя эти множества, находим решение данного неравенства: $(2; +\infty)$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какую функцию называют обратной по отношению к данной?

2. Функция задана формулой $y = x^2$ на множестве $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Найдите множество значений функции. Почему эта функция не является обратимой?

3. Функция, заданная формулой $y = 2x - 3$, — возрастающая. Почему она обратима?

4. Функция, заданная формулой $y = x^4$ на множестве отрицательных чисел, — убывающая. Можно ли утверждать, что данная функция имеет обратную?

5. Относительно графика какой функции симметричны графики взаимно обратных функций?

6. Задайте формулой функцию, обратную данной: а) $y = 5x$; б) $y = -4x$; в) $y = 5x - 10$; г) $y = 0{,}1x + 1$.

7. Докажите, что функции, заданные формулами $y = \dfrac{1}{x - 2}$ и $y = \dfrac{2x + 1}{x}$, взаимно обратны.

8. Постройте график функции, заданной формулой $y = x^k$ при: а) $k = 1$; б) $k = 2$; в) $k = 3$; г) $k = -1$; д) $k = -2$; е) $k = 1/2$; ж) $k = 1/3$; з) $k = -1/2$.

9. Докажите, что каково бы ни было натуральное число k, график функции $y = x^k$ проходит через начало координат и точку $(1; 1)$.

10. Докажите, что если k — четное число, то ось Oy служит осью симметрии графика функции $y = x^k$.

11. Докажите, что если k — нечетное число, то начало координат служит центром симметрии графика функции $y = x^k$.

12. Даны две функции: $y = x^k$, где $x \geqslant 0$ и $k \in \boldsymbol{N}$ $(k > 1)$, и $y = \sqrt[k]{x}$. Постройте их в одной системе координат. Какими общими свойствами они обладают?

13. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{x-5}$; б) $y = \sqrt[3]{x-1}$;

в) $y = \sqrt[4]{4-x}$; г) $y = \sqrt{-x^2}$.

14. Постройте график функции:

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = \sqrt{x-1}$;

в) $y = \sqrt{1-x}$;

г) $y = -\sqrt{x-1}$;

д) $y = \sqrt{x-2} + 3$;

е) $y = -\sqrt{x-2} + 3$;

ж) $y = \sqrt{2-x} - 3$.

15. Какое уравнение называют иррациональным?

16. Почему при решении иррациональных уравнений необходимо делать проверку? Каким образом ее можно упростить?

17. Объясните, почему не имеет решений уравнение:

а) $\sqrt{x-15} - \sqrt{12-x} = 3$;

б) $\sqrt{3+\sqrt{x-1}} = 1$;

в) $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+3} = -1$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Задайте формулой функцию, обратную данной функции f. Постройте графики данной и обратной ей функций, если функция f задана формулой $y = \dfrac{5x+4}{x}$, где $x < 0$.

2. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{5+x} = 1$;

б) $\sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{2x^2+2x+9}$;

в) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}} = 4$;

г) $\sqrt{3x^2-2x+15} + \sqrt{3x^2-2x+8} = 7$;

д) $|\sqrt{x-5}-2| + |\sqrt{x-5}-3| = 1$;

е) $\dfrac{x+1}{x-1} - \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = 1{,}5$;

ж) $\dfrac{x}{1-x} + \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} = 2$; з) $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$;

и) $\sqrt{3x} - \sqrt{a-3x} = 1$; к) $\sqrt{a-\sqrt{a+x}} = x$;

л) $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$; м) $\sqrt{2|x|-x^2} = a$.

3. Решите систему:

а) $\begin{cases} y = \sqrt{x-3}, \\ y + |x-3| = 2. \end{cases}$

Найдите частное $x_0 : y_0$; здесь и далее $(x_0; y_0)$ — решение системы.

б) $\begin{cases} \sqrt{x} = y, \\ |x-4| = y-2. \end{cases}$

Найдите разность $x_0 - y_0$.

в) $\begin{cases} \sqrt{x} - y = 0, \\ y + |x-4| = 2. \end{cases}$

Найдите произведение $x_0 y_0$.

г) $\begin{cases} y + 2 = \sqrt{x+4}, \\ y + |x-5| = 1. \end{cases}$

Найдите отношение $\dfrac{x_0}{y_0}$.

д) $\begin{cases} y + \sqrt{16-x^2} = 0, \\ y + 1 = |x-5|. \end{cases}$

Найдите разность $y_0 - x_0$.

е) $\begin{cases} |x-3| = y+4, \\ \sqrt{25-x^2} = y. \end{cases}$

Найдите сумму $x_0 + y_0$.

ж) $\begin{cases} y(x-2) = 6, \\ y + \sqrt{(x-3)^2} = 0. \end{cases}$

Найдите разность $x_0 - y_0$.

4. Решите уравнение:

а) $\sqrt{9-4x|x-4|} = 4x+3$;
б) $\sqrt{25x|x-1|+4} = 5x-3$;
в) $\sqrt{4-7x|x+2|} = 3x+2$;
г) $\sqrt{36+5x|x+3|} = 6+x$.

Замечание. В этом и следующем упражнениях приведены нетрадиционные иррациональные уравнения, которые были предложены на ЕГЭ.

5. Решите уравнение:

а) $\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-9}} + 2x = 9 + 2\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3}$;

б) $\sqrt{4x+2\sqrt{4x^2-25}} + 4 = x + \sqrt{2x+5}$;

в) $\sqrt{6x+2\sqrt{9x^2-49}} + 11 = x + 2\sqrt{3x+7} + \sqrt{3x-7}$;

г) $\sqrt{2x-2\sqrt{x^2-16}} + x = 16 + \sqrt{x+4} - 2\sqrt{x-4}$;

д) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+3+2\sqrt{x+2}} = 4$;

е) $\sqrt{x+5+2\sqrt{x+4}} + \sqrt{x+13-6\sqrt{x+4}} = 4$;

ж) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+7} = 2\sqrt{x-2} + 2\sqrt{x+2}$;

з) $\sqrt{11x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{9x+7}+\sqrt{2-x}$;

и) $2(\sqrt{x+36}-\sqrt{x+1})=5(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})$;

к) $\sqrt{x-3}-\sqrt{4x-19}=\sqrt{18-2x}-\sqrt{x+2}$;

л) $5(\sqrt{x+11}+\sqrt{x+2})=3(\sqrt{x+18}+\sqrt{x+3})$.

6. Решите неравенство:

а) $\dfrac{2x+7}{3x+1}\geqslant 0$; б) $\dfrac{\sqrt{3x+11}}{4+x}\leqslant 0$; в) $\sqrt{x^2-x}>2x+1$;

г) $\sqrt{x^2-x}>2x-1$; д) $\dfrac{\sqrt{10x-1}-x-2}{\sqrt{2x+3}+x-6}\geqslant 0$;

е) $\dfrac{\sqrt{5-2x}+x-3}{\sqrt{2x+7}+x-4}\geqslant 0$; ж) $\dfrac{\sqrt{2x+5}+x-5}{\sqrt{6-x}-2x+9}\leqslant 0$;

з) $\dfrac{\sqrt{5x-4}}{x+4}\geqslant\dfrac{x-2}{\sqrt{5x-4}}$; и) $\dfrac{\sqrt{3x+2}}{x-2}\leqslant\dfrac{x+3}{\sqrt{3x+2}}$;

к) $\sqrt{x^2-x-12}<x$; л) $\sqrt{x^2-3x+2}>x+3$.

Задания для повторения

7. В 4 кг сплава меди и олова содержится 40% олова. Сколько килограммов олова надо добавить к этому сплаву, чтобы его процентное содержание в новом сплаве стало равным 70%?

8. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{10+\sqrt{73}}\cdot\sqrt[3]{10-\sqrt{73}}$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{(4+\sqrt{17})^2}}{\sqrt[3]{4-\sqrt{17}}}+\sqrt{17}$;

в) $\sqrt[4]{9-\sqrt{65}}\cdot\sqrt[4]{9+\sqrt{65}}$; г) $\left(\dfrac{27^3}{125^6}\right)^{2/9}$.

9. Дано уравнение:

а) $ax-2x=3(x-1)$; б) $a(1-x)+2=3x-ax$.

При каких значениях a это уравнение: имеет единственное решение; не имеет решений; имеет бесконечное множество решений?

10. Равносильны ли уравнения $x+\sqrt{3}=0$ и $x^2-3=0$ на множестве: а) рациональных чисел; б) целых чисел; в) действительных чисел?

ОТВЕТЫ

1. $y = \frac{4}{x-5}$, $x < 5$. **2.** а) $x_1 = -\sqrt{52}$, $x_2 = \sqrt{52}$; б) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$; в) $x = 0$; г) $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 1$; д) $x \in [9; 14]$; е) $x = \frac{5}{3}$; ж) $x = \frac{1}{2}$; з) $x = 3$; и) $x = \frac{a + \sqrt{2a-1}}{6}$ при $a \geqslant 1$; к) если $a = 0$, то $x = 0$; если $a \in [1; +\infty)$, то единственный корень $x = \frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$; если $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$, то нет корней; л) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 10$; м) если $a < 0$ или $a > 1$, то нет корней; если $a = 1$, то два корня: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; если $0 < a < 1$, то четыре корня: $x_{3,\,4} = \pm(1 + \sqrt{1-a^2})$, $x_{5,\,6} = \pm(1 - \sqrt{1-a^2})$; если $a = 0$, то $x_7 = x_8 = 0$. **3.** а) 4; б) 2; в) 2; г) 5; д) -4; е) -1; ж) 3. **4.** а) $x = 0$; б) $x = 1$; в) $x = 0$; г) $x_1 = -4{,}5$, $x_2 = -0{,}75$, $x_3 = 0$. **5.** а) $x = 6$; б) $x = 7$; в) $x = 6$; г) $x = 13$; д) $x_1 = 2$, $x_2 = 5{,}84$; е) $x \geqslant 5$; ж) $x = 2$; з) $x = 2$; и) $x = 0$; к) $x_1 = \frac{16}{3}$, $x_2 = 7$; л) $x = -2$. **6.** а) $x = -\frac{7}{2}$, $x > -\frac{1}{3}$; б) $x = -\frac{11}{3}$, $x < -4$; в) $x < \frac{\sqrt{13}-5}{6}$; г) $x \leqslant 0$; д) $0{,}1 \leqslant x \leqslant 1$, $3 < x \leqslant 5$; е) $x = 2$, $-\frac{7}{2} \leqslant x < 1$; ж) $-2{,}5 \leqslant x \leqslant 2$, $5 < x \leqslant 6$; з) $\frac{4}{5} < x \leqslant 4$; и) $-\frac{2}{3} < x < 2$, $x \geqslant 4$; к) $x \geqslant 4$; л) $x < -\frac{7}{9}$. **7.** 2,8 кг. **8.** а) 3; б) -4; в) 2; г) $\frac{9}{625}$. **9.** а) Если $a \neq 5$, то единственное решение $x = \frac{3}{5-a}$; если $a = 5$, то нет решений; б) единственное решение $x = \frac{a+2}{3}$ при всех $a \in \boldsymbol{R}$. **10.** а) Да; б) да; в) нет.

Решения и методические указания

К упражнению 1

1. Выразив x через y, имеем

$$y = 5 + \frac{4}{x}; \quad \frac{4}{x} = y - 5; \quad x = \frac{4}{y-5}.$$

2. Заменив x на y, а y на x, получим $y = \frac{4}{x-5}$.

3. Найдем область определения обратной функции; она совпадает с множеством значений заданной функции.

4. Этим множеством служит промежуток $-\infty < x < 5$ (рис. 100).

5. Итак, $y = \dfrac{4}{x-5}$, $x < 5$ — функция, обратная данной.

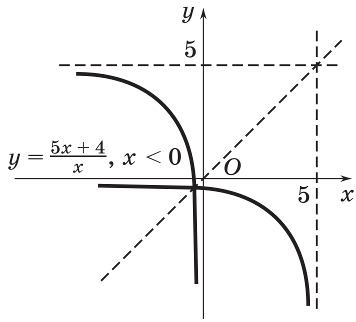


Рис. 100

К упражнению 2а

1. Возведя обе части данного уравнения в куб и используя известное тождество $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, получим

$$(5 - x) + (5 + x) + 3\sqrt[3]{(5 - x)(5 + x)}\,(\sqrt[3]{5 - x} + \sqrt[3]{5 + x}) = 1. \qquad (1)$$

2. Так как по условию $\sqrt[3]{5 - x} + \sqrt[3]{5 + x} = 1$, то после подстановки уравнение (1) примет вид

$$10 + 3\sqrt[3]{25 - x^2} = 1, \text{ или } \sqrt[3]{25 - x^2} = -3. \qquad (2)$$

3. Возведя обе части уравнения (2) в куб, имеем $25 - x^2 = -27$, откуда находим $x_1 = -\sqrt{52}$; $x_2 = \sqrt{52}$.

К упражнению 2д

1. Сначала найдем ОДЗ уравнения: $x - 5 \geqslant 0$, откуда $x \geqslant 5$.

2. Теперь найдем точки на числовой прямой, в которых выражения, записанные под знаком модуля, равны нулю:

$$\sqrt{x-5} - 2 = 0,\ \sqrt{x-5} - 3 = 0, \text{ т. е. } x_1 = 9,\ x_2 = 14.$$

3. Точки $x_1 = 9$ и $x_2 = 14$ делят промежуток $5 \leqslant x < +\infty$ на три промежутка: $5 \leqslant x \leqslant 9$, $9 < x \leqslant 14$ и $14 < x < +\infty$. Отметим знаки выражений $\sqrt{x-5} - 2$ и $\sqrt{x-5} - 3$ в этих промежутках (рис. 101).

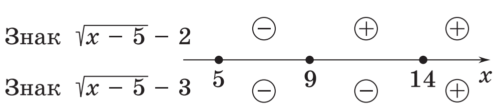


Рис. 101

4. В соответствии с указанными знаками имеем:

а) если $x \in [5; 9]$, то $-\sqrt{x-5}+2-\sqrt{x-5}+3=1$; $\sqrt{x-5}=2$, $x=9$;

б) если $x \in (9; 14]$, то $\sqrt{x-5}-2-\sqrt{x-5}+3=1$; $1=1$; $x \in (9; 14]$;

в) если $x \in (14; +\infty)$, то $\sqrt{x-5}-2+\sqrt{x-5}-3=1$; $\sqrt{x-5}=3$, $x=14 \notin (14; +\infty)$.

5. Объединяя решения, найденные в пп. 4а и б, заключаем, что корнями уравнения являются все числа, принадлежащие отрезку [9; 14].

К упражнению 2з

1. Введем обозначения $\sqrt[3]{x-2}=u$, $\sqrt{x+1}=v$, тогда данное уравнение будет эквивалентно системе

$$\begin{cases} v \geqslant 0, & (1) \\ u+v=3, & (2) \\ v^2-u^3=3. & (3) \end{cases}$$

2. Выразив v через u из уравнения (2) и подставив это выражение в уравнение (3), получим

$$u^2-u^3-6u+6=0, \text{ или } (1-u)(u^2+6)=0,$$

откуда $u=1$. Итак, $x=3$.

К упражнению 2и

1. Требуется решить уравнение

$$\sqrt{3x}-\sqrt{a-3x}=1. \qquad (1)$$

2. Найдем ОДЗ уравнения (1): $x \geqslant 0$, $a-3x \geqslant 0$ ($a \geqslant 3x \Rightarrow a \geqslant 0$); значит, $0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{3}$.

3. Для освобождения от радикалов в данном уравнении надо дополнительно потребовать выполнения неравенства $\sqrt{3x}-\sqrt{a-3x}>0$, так как правая часть уравнения (1) — положительное число.

4. Таким образом, условие для возведения в квадрат имеет вид

$$3x > a-3x, \quad \text{т. е.} \quad x > \frac{a}{6}.$$

5. Итак, должны выполняться следующие ограничения:

$$a \geqslant 0, \quad x > \frac{a}{6} \quad \text{и} \quad x \leqslant \frac{a}{3}.$$

6. Теперь обе части уравнения (1) возведем в квадрат:

$$3x + a - 3x - 2\sqrt{3x} \cdot \sqrt{a - 3x} = 1, \quad \text{или} \quad 2\sqrt{3x(a - 3x)} = a - 1. \quad (2)$$

7. Согласно определению арифметического корня, из уравнения (2) следует, что $a - 1 \geqslant 0$.

8. Возведем обе части уравнения (2) в квадрат и после упрощений получим

$$4(3x)^2 - 4a(3x) + (a - 1)^2 = 0. \quad (3)$$

9. Решив уравнение (3), находим

$$3x = \frac{a \pm \sqrt{2a - 1}}{2}, \quad \text{т. е.} \quad x_{1,\,2} = \frac{a \pm \sqrt{2a - 1}}{6}. \quad (4)$$

10. Полученные значения (4) должны удовлетворять условиям $x > \frac{a}{6}$ и $x \leqslant \frac{a}{3}$ при $a \geqslant 1$.

11. Проверим значение $x_1 = \frac{a - \sqrt{2a - 1}}{6}$ подстановкой в неравенство $x > \frac{a}{6}$; имеем $\frac{a - \sqrt{2a - 1}}{6} > \frac{a}{6}$, откуда следует $-\sqrt{2a - 1} > 0$, что неверно. Итак, $x = \frac{a - \sqrt{2a - 1}}{6}$ — посторонний корень.

12. Проверим значение $x_2 = \frac{a + \sqrt{2a - 1}}{6}$. Подставив его в двойное неравенство $\frac{a}{6} < x_2 \leqslant \frac{a}{3}$, т. е. $\frac{a}{6} < \frac{a + \sqrt{2a - 1}}{6} \leqslant \frac{a}{3}$, после упрощений получим

$$a < a + \sqrt{2a - 1} \leqslant 2a, \quad \text{или} \quad 0 < \sqrt{2a - 1} \leqslant a$$

— верное неравенство при $a \geqslant 1$.

<u>Ответ</u>: $x = \frac{a + \sqrt{2a - 1}}{6}$ при $a \geqslant 1$.

К упражнению 2к

1. Решим уравнение

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x. \quad (1)$$

2. Из уравнения (1) непосредственно следует, что если $a = 0$, то и $x = 0$ — частичный ответ.

3. Согласно определению арифметического корня, имеем: а) $x \geqslant 0$; б) $a - \sqrt{a + x} \geqslant 0$.

4. Решив неравенство $a - \sqrt{a + x} \geqslant 0$, получим:

$$x \leqslant a(a - 1). \tag{2}$$

5. Так как $x \geqslant 0$, то с учетом сказанного ранее заключаем, что неравенство (2) справедливо при $a = 0$ или при $a \geqslant 1$.

6. Сведем уравнение (1) к системе уравнений с помощью подстановки $t = \sqrt{a + x}$, где $t \geqslant 0$. Из уравнения (1) получаем $x = \sqrt{a - t} \geqslant 0$ и приходим к системе

$$\begin{cases} t = \sqrt{a + x}, \\ x = \sqrt{a - t}. \end{cases} \tag{3}$$

7. Возведя в квадрат оба уравнения системы (3), получим

$$\begin{cases} t^2 = a + x, \\ x^2 = a - t. \end{cases} \tag{4}$$

8. Вычитая второе уравнение системы (4) из первого, имеем

$$t^2 - x^2 = x + t, \quad \text{т. е.} \quad (t + x)(t - x - 1) = 0. \tag{5}$$

9. Рассмотрим уравнение (5). Так как $t \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$, то $t - x - 1 = 0$; после обратной замены t на $\sqrt{a + x}$ получим уравнение $\sqrt{a + x} = x + 1$; тогда

$$a + x = (x + 1)^2, \text{ или } x^2 + x + 1 - a = 0. \tag{6}$$

10. Решив уравнение (6), находим

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{4a - 3}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2} \text{ при } a \geqslant \frac{3}{4}.$$

11. Проверим найденные значения:

а) x_1 не удовлетворяет условию $x \geqslant 0$;

б) неравенство $x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2} \geqslant 0$ выполняется при $\sqrt{4a - 3} \geqslant 1$, т. е. при $a \geqslant 1$.

<u>Ответ</u>: если $a = 0$, то $x = 0$; если $a \in [1; +\infty)$, то уравнение имеет единственный корень $x = \dfrac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2}$; если $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$, то уравнение не имеет корней.

К упражнению 2м

1. Решим уравнение

$$\sqrt{2|x| - x^2} = a. \tag{1}$$

2. Если $a < 0$, то уравнение (1) не имеет решений.

3. Если $a \geqslant 0$, то уравнение (1) равносильно уравнению

$$2|x| - x^2 = a^2, \text{ или } |x|^2 - 2|x| + a^2 = 0. \quad (2)$$

4. Положим $|x| = z$; тогда получим уравнение

$$z^2 - 2z + a^2 = 0, \quad (3)$$

откуда $z = 1 \pm \sqrt{1 - a^2}$.

5. Рассмотрим следующие случаи: $a > 1$, $a = 1$, $0 < a < 1$, $a = 0$.

6. Пусть $a > 1$; тогда уравнение (3), а значит, и уравнение (2) не имеет решений.

7. Пусть $a = 1$; тогда уравнение (3) имеет единственный корень $z = 1$, а уравнение (2) равносильно уравнению $|x| = 1$, которое имеет два корня: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$.

8. Пусть $0 < a < 1$; тогда уравнение (3) имеет два корня: $z_1 = 1 - \sqrt{1 - a^2}$; $z_2 = 1 + \sqrt{1 - a^2}$. Следовательно, уравнение (2) равносильно совокупности двух уравнений:

$$|x| = 1 + \sqrt{1 - a^2}, \quad (4)$$

$$|x| = 1 - \sqrt{1 - a^2}. \quad (5)$$

9. Так как z_1 и z_2 — неотрицательные числа, то уравнение (4) имеет два корня: $x_{3,\,4} = \pm(1 + \sqrt{1 - a^2})$, а уравнение (5) — также два корня: $x_{5,\,6} = \pm(1 - \sqrt{1 - a^2})$. Все эти числа различны, поскольку $a \neq 0$.

10. Пусть $a = 0$; тогда $x_7 = x_8 = 0$.

<u>Ответ</u>: если $a < 0$ или $a > 1$, то нет корней; если $a = 1$, то $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; если $0 < a < 1$, то $x_{3,\,4} = \pm(1 + \sqrt{1 - a^2})$, $x_{5,\,6} = \pm(1 - \sqrt{1 - a^2})$; если $a = 0$, то $x_7 = x_8 = 0$.

К упражнению 3а

1. Решим систему

$$\begin{cases} y = \sqrt{x - 3}, & (1) \\ y + |x - 3| = 2. & (2) \end{cases}$$

2. Подкоренное выражение $x - 3$ должно принимать только неотрицательные значения, следовательно, $x \geqslant 3$.

3. Записав уравнение (2) в виде $y = 2 - |x - 3|$ и подставив это выражение в уравнение (1), получим

$$\sqrt{x - 3} = 2 - |x - 3|. \quad (3)$$

4. Так как $x \geqslant 3$, то уравнение (3) примет вид

$$\sqrt{x-3} = 5 - x. \qquad (4)$$

5. Решив уравнение (4), находим $x = 4$, $x = 7$. Однако значение $x = 7$ является посторонним корнем этого уравнения.

6. Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} x = 4, \\ y + |x - 3| = 2. \end{cases}$$

7. Эта система имеет решение $x_0 = 4$, $y_0 = 1$.

8. Итак, $x_0 : y_0 = 4$.

К упражнению 3б

1. Решим систему

$$\begin{cases} \sqrt{x} = y, & (1) \\ |x - 4| = y - 2. & (2) \end{cases}$$

2. Подкоренное выражение должно быть неотрицательным: $x \geqslant 0$.

3. Из уравнения (2) выразим y:

$$y = |x - 4| + 2. \qquad (3)$$

4. Из уравнений (1) и (3) следует, что

$$\sqrt{x} = |x - 4| + 2. \qquad (4)$$

5. Чтобы освободиться от знака модуля, рассмотрим уравнение (4) на промежутках $0 \leqslant x \leqslant 4$ и $x > 4$.

6. В промежутке $0 \leqslant x < 4$ от уравнения (4) переходим к системе

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ \sqrt{x} = 4 - x + 2, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ \sqrt{x} = 6 - x. \end{cases} \qquad (5)$$

Решив уравнение (5), находим $x = 4$ и $x = 9$ (это — посторонний корень). Подставив $x = 4$ в уравнение (2), получим $y = 2$. Значит, $x = 4$, $y = 2$ — решение данной системы.

7. В промежутке $x > 4$ от уравнения (4) переходим к системе

$$\begin{cases} x > 4, \\ \sqrt{x} = x - 4 + 2, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x > 4, \\ \sqrt{x} = x - 2. \end{cases} \qquad (6)$$

Решив уравнение (6), находим $x = 4$ (это значение не удовлетворяет неравенству $x > 4$) и $x = 1$ (это — посторонний корень). Таким образом, рассмтариваемая система не имеет решений.

8. Итак, $x_0 = 4$, $y_0 = 2$, откуда $x_0 - y_0 = 2$.

К упражнению 3е

1. Решим систему

$$\begin{cases} |x-3| = y+4, & (1) \\ \sqrt{25-x^2} = y. & (2) \end{cases}$$

2. Согласно определению арифметического корня, имеем $25 - x^2 \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$.

3. Из уравнения (1) выразим y и подставим это выражение в уравнение (2):

$$\sqrt{25-x^2} = |x-3| - 4. \qquad (3)$$

4. Уравнение (3) равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 3 \leqslant x \leqslant 5, \\ \sqrt{25-x^2} = x-3-4; \end{cases} \qquad (4)$$

$$\begin{cases} -5 \leqslant x < 3, \\ \sqrt{25-x^2} = -(x-3)-4. \end{cases} \qquad (5)$$

5. Решим систему (4):

$$\begin{cases} 3 \leqslant x \leqslant 5, \\ \sqrt{25-x^2} = x-7, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} 3 \leqslant x \leqslant 5, \\ x = 3,\ x = 4. \end{cases}$$

Нетрудно установить, что значения $x = 3$ и $x = 4$ являются посторонними корнями, так как правая часть второго уравнения системы (4) при этих значениях x отрицательна.

6. Решим систему (5):

$$\begin{cases} -5 \leqslant x < 3, \\ \sqrt{25-x^2} = -x-1, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} -5 \leqslant x < 3, \\ x = -4,\ x = 3. \end{cases}$$

Ясно, что значение $x = 3$ является посторонним корнем, поскольку оно не удовлетворяет двойному неравенству системы (5).

7. Подставив значение $x = -4$ в уравнение (2), находим $y = 3$. При $x = -4$, $y = 3$ уравнение (1) также удовлетворяется.

8. Итак, $x_0 = -4$, $y_0 = 3$ — решение системы, откуда $x_0 + y_0 = -1$.

К упражнению 4б

1. Решим уравнение

$$\sqrt{25x|x-1|+4} = 5x - 3. \qquad (1)$$

2. Очевидно, что в данном случае отыскание ОДЗ уравнения приведет к громоздким вычислениям. Однако можно поступить иначе: не

находить ОДЗ, но обязательно выполнить проверку всех полученных корней непосредственной подстановкой в данное уравнение.

3. Возведя обе части уравнения (1) в квадрат, получим

$$25x|x-1|+4=(5x-3)^2, \text{ или } 5x^2-5x|x-1|-6x+1=0. \qquad (2)$$

4. Уравнение (2) равносильно совокупности двух систем:

а) $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ 5x^2-5x(x-1)-6x+1=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x < 1, \\ 5x^2+5x(x-1)-6x+1=0. \end{cases}$

5. Решим систему (а):

$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ 5x^2-5x^2+5x-6x+1=0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x=1, \end{cases}$$

откуда $x=1$.

Выполним проверку:

$$\begin{cases} x=1, \\ \sqrt{25\cdot 1(1-1)+4}=5\cdot 1-3, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=1, \\ 2=2, \end{cases}$$

т. е. $x=1$ — корень уравнения.

6. Решим систему (б):

$$\begin{cases} x<1, \\ 5x^2+5x(x-1)-6x+1=0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x<1, \\ x=0{,}1; \quad x=1, \end{cases}$$

откуда $x=0{,}1$.

Выполним проверку:

$$\begin{cases} x=0{,}1, \\ \sqrt{25\cdot 0{,}1\,|0{,}1-1|+4}=5\cdot 0{,}1-3. \end{cases}$$

Так как при $x=0{,}1$ правая часть уравнения (1) отрицательна, то последнее равенство неверно и $x=0{,}1$ — посторонний корень.

Ответ: $x=1$.

К упражнению 4в

1. Решим уравнение

$$\sqrt{4-7x|x+2|}=3x+2. \qquad (1)$$

2. Возведем уравнение (1) в квадрат и после упрощений получим

$$\sqrt{4-7x|x+2|}=3x+2 \Rightarrow 9x^2+12x+7x|x+2|=0,$$

или

$$x(9x+12+7|x+2|)=0.$$

3. Значит, $x = 0$. Проверка показывает, что $x = 0$ — корень уравнения (1).

4. Остается решить уравнение

$$9x + 12 + 7|x + 2| = 0. \qquad (2)$$

а) При $x \geqslant -2$ из уравнения (2) получаем $16x = -26$, т. е. $x = -\frac{13}{8}$.

Подставляя значение $x = -\frac{13}{8}$ в уравнение (1), видим, что его правая часть отрицательна, что невозможно.

б) При $x < -2$ из уравнения (2) получаем $2x = 2$, откуда $x = 1$, что противоречит неравенству $x < -2$.

Итак, $x = 0$ — корень уравнения (1).

К упражнению 5б

1. Решим уравнение

$$\sqrt{4x + 2\sqrt{4x^2 - 25}} + 4 = x + \sqrt{2x + 5}. \qquad (1)$$

2. Замечаем, что выражение, записанное под знаком первого радикала, является полным квадратом, т. е. $\sqrt{4x + 2\sqrt{4x^2 - 25}} = \sqrt{(\sqrt{2x + 5} + \sqrt{2x - 5})^2}$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$|\sqrt{2x + 5} + \sqrt{2x - 5}| + 4 = x + \sqrt{2x + 5}. \qquad (2)$$

3. Так как выражение, находящееся под знаком модуля в уравнении (2), неотрицательно, то

$$\sqrt{2x + 5} + \sqrt{2x - 5} + 4 = x + \sqrt{2x + 5}, \text{ или } \sqrt{2x - 5} = x - 4. \qquad (3)$$

4. При условии $x \geqslant 4$ возведем уравнение (3) в квадрат:

$$2x - 5 = (x - 4)^2,$$

откуда $x = 3$, $x = 7$. Легко убедиться в том, что $x = 3$ — посторонний корень. Итак, $x = 7$.

К упражнению 5г

1. Решим уравнение

$$\sqrt{2x - 2\sqrt{x^2 - 16}} + x = 16 + \sqrt{x + 4} - 2\sqrt{x - 4}. \qquad (1)$$

2. Выражение $\sqrt{2x - 2\sqrt{x^2 - 16}}$ можно представить так:

$$\sqrt{2x - 2\sqrt{x^2 - 16}} = \sqrt{(\sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 4})^2} = |\sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 4}|.$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\left|\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}\right|+x=16+\sqrt{x+4}-2\sqrt{x-4}. \qquad (2)$$

3. Чтобы решить уравнение (2), нужно освободиться от знака модуля, т. е. от этого уравнения перейти к следующей совокупности систем:

$$\text{а)}\ \begin{cases} x \geqslant 4, \\ \sqrt{x+4}-\sqrt{x-4} \geqslant 0, \\ \sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}+x=16+\sqrt{x+4}-2\sqrt{x-4}; \end{cases}$$

$$\text{б)}\ \begin{cases} x \geqslant 4, \\ \sqrt{x+4}-\sqrt{x-4} < 0, \\ \sqrt{x-4}-\sqrt{x+4}+x=16+\sqrt{x+4}-2\sqrt{x-4}. \end{cases}$$

4. Решим систему (а):

$$\begin{cases} x \geqslant 4, \\ 8 \geqslant 0, \\ \sqrt{x-4}=16-x. \end{cases}$$

Эта система имеет решение $x = 13$.

5. Система (б) не имеет решений, так как ее второе неравенство не выполняется ни при каких $x \geqslant 4$.

Ответ: $x = 13$.

К упражнению 5з

1. Требуется решить уравнение

$$\sqrt{11x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{9x+7}+\sqrt{2-x}.$$

2. Замечаем, что левая часть уравнения определена при $x \geqslant 2$, а правая — при $x \leqslant 2$.

3. Значит, уравнение имеет смысл только при $x = 2$.

4. Подставив $x = 2$ в уравнение, получим тождество $5 = 5$, т. е. $x = 2$ — корень уравнения.

К упражнению 5и

1. Требуется решить уравнение

$$2(\sqrt{x+36}-\sqrt{x+1})=5(\sqrt{x+4}-\sqrt{x}). \qquad (1)$$

2. Перепишем уравнение (1) так:

$$2\sqrt{x+36}+5\sqrt{x}=5\sqrt{x+4}+2\sqrt{x+1}. \qquad (2)$$

3. Возведем обе части уравнения (2) в квадрат:

$$4(x+36)+25x+20\sqrt{x(x+36)} =$$
$$= 25(x+4)+4(x+1)+20\sqrt{(x+4)(x+1)},$$

откуда после приведения подобных членов получаем

$$2+\sqrt{x(x+36)} = \sqrt{(x+4)(x+1)}. \qquad (3)$$

4. Решив уравнение (3), получим ответ: $x = 0$.

К упражнению 6в

1. Требуется решить неравенство

$$\sqrt{x^2-x} > 2x+1. \qquad (1)$$

2. Находим ОДЗ: $x^2 - x \geqslant 0$, откуда $x \leqslant 0$ или $x \geqslant 1$.
3. От неравенства (1) перейдем к совокупности систем:

$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ \sqrt{x^2-x} > 2x+1; \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} x \leqslant 0, \\ \sqrt{x^2-x} > 2x+1. \end{cases} \qquad (3)$$

4. Решим систему (2). Так как во втором ее неравенстве обе части неотрицательны, то возведем их в квадрат. Тогда после упрощений система (2) примет вид

$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ 3x^2+5x+1 < 0. \end{cases}$$

Разложив квадратный трехчлен $3x^2 + 5x + 1$ на множители, получим систему

$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ 3\left(x+\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}\right)\left(x+\dfrac{5-\sqrt{13}}{6}\right) < 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Система (4) не имеет решений (рис. 102).

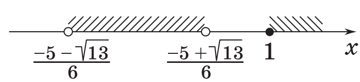


Рис. 102

5. Решим систему (3). В отличие от системы (2) правая часть ее второго неравенства может быть как неот-

рицательной $\left(\text{при } -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0\right)$, так и отрицательной $\left(\text{при } x < -\frac{1}{2}\right)$. Поэтому нужно рассмотреть совокупность двух систем:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0, \\ \sqrt{x^2 - x} > 2x + 1; \end{cases} \qquad (5)$$

$$\begin{cases} x < -\frac{1}{2}, \\ \sqrt{x^2 - x} > 2x + 1. \end{cases} \qquad (6)$$

6. Возведя обе части второго неравенства системы (5) в квадрат, получим

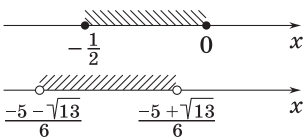


Рис. 103

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0, \\ 3\left(x + \frac{5+\sqrt{13}}{6}\right)\left(x + \frac{5-\sqrt{13}}{6}\right) < 0. \end{cases}$$

Система (5) имеет решение $-\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{-5+\sqrt{13}}{6}$ (рис. 103).

7. Теперь решим систему (6). При $x < -\frac{1}{2}$ правая часть ее второго неравенства отрицательна, а левая положительна. Поэтому решением этого неравенства и всей системы (6) являются значения $x < -\frac{1}{2}$.

8. Объединяя решения систем (5) и (6), получаем ответ: $x < \frac{-5+\sqrt{13}}{6}$.

К упражнению 6д

Требуется решить неравенство

$$\frac{\sqrt{10x-1} - x - 2}{\sqrt{2x+3} + x - 6} \geqslant 0. \qquad (1)$$

I способ. 1. Находим ОДЗ: $x \geqslant 0{,}1$; $x \neq 3$.

2. Заметим, что неравенство $\frac{a}{b} \geqslant 0$ выполняется при следующих условиях:

$$\text{а)} \begin{cases} a \geqslant 0, \\ b > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \text{б)} \begin{cases} a \leqslant 0, \\ b < 0. \end{cases}$$

3. Согласно условию а), запишем систему

$$\begin{cases} \sqrt{10x-1} - x - 2 \geqslant 0, \\ \sqrt{2x+3} + x - 6 > 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} \sqrt{10x-1} \geqslant x + 2, \\ \sqrt{2x+3} > 6 - x. \end{cases} \qquad (2)$$

4. При решении системы (2) нужно рассмотреть два случая: $0{,}1 \leqslant x < 3$, $3 < x < 6$ и $x > 6$. Поэтому система (2) равносильна следующей совокупности:

$$\begin{cases} 0{,}1 \leqslant x < 3,\ 3 < x \leqslant 6, \\ \sqrt{10x-1} \geqslant x + 2, \\ \sqrt{2x+3} > 6 - x; \end{cases} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} x > 6, \\ \sqrt{10x-1} \geqslant x + 2, \\ \sqrt{2x+3} > 6 - x. \end{cases} \qquad (4)$$

5. Решим систему (3):

$$\begin{cases} 0{,}1 \leqslant x < 3,\ 3 < x \leqslant 6, \\ (\sqrt{10x-1})^2 \geqslant (x+2)^2, \\ (\sqrt{2x+3})^2 > (6-x)^2, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} 0{,}1 \leqslant x < 3,\ 3 < x \leqslant 6, \\ (x-1)(x-5) \leqslant 0, \\ (x-3)(x-11) < 0. \end{cases}$$

Отсюда находим, что $3 < x \leqslant 5$ (рис. 104).

6. Решим систему (4):

$$\begin{cases} x > 6, \\ (x-1)(x-5) \leqslant 0, \\ (x-3)((x-11) < 0. \end{cases}$$

Система (4) не имеет решений (рис. 105).

7. Теперь составим систему, используя условие б):

$$\begin{cases} \sqrt{10x-1} \leqslant x + 2, \\ \sqrt{2x+3} < 6 - x. \end{cases} \qquad (5)$$

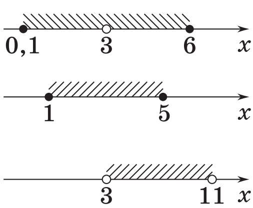


Рис. 104

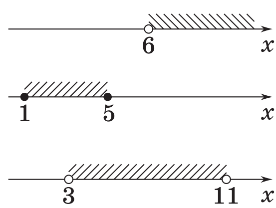


Рис. 105

8. Как и в п. 4, при решении системы (5) нужно рассмотреть два случая: $0{,}1 \leqslant x < 3$, $3 < x \leqslant 6$ и $x > 6$. В соответствии с этим получаем следующую совокупность систем:

$$\begin{cases} 0{,}1 \leqslant x < 3,\ 3 < x \leqslant 6, \\ \sqrt{10x-1} \leqslant x+2, \\ \sqrt{2x+3} < 6-x; \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} x > 6, \\ \sqrt{10x-1} \leqslant x+2, \\ \sqrt{2x+3} < 6-x. \end{cases} \tag{7}$$

9. Решим систему (6):

$$\begin{cases} 0{,}1 \leqslant x < 3,\ 3 < x \leqslant 6, \\ (x-1)(x-5) \geqslant 0, \\ (x-3)(x-11) > 0. \end{cases}$$

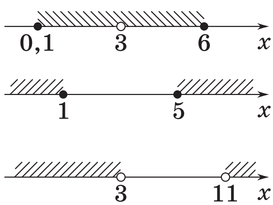


Рис. 106

Отсюда находим, что $0{,}1 \leqslant x \leqslant 1$ (рис. 106).

10. Легко установить, что система (7) не имеет решений, так как в ее третьем неравенстве левая часть положительна, а правая отрицательна.

11. Итак, получаем ответ: $0{,}1 \leqslant x \leqslant 1$, $3 < x \leqslant 5$.

II способ. 1. Находим ОДЗ: $x \geqslant 0{,}1$, $x \neq 3$.

2. Воспользуемся методом интервалов. Для этого найдем корни числителя и знаменателя данной дроби (1) и определим интервалы, в которых знаки числителя и знаменателя совпадают.

а) $\sqrt{10x-1} - x - 2 = 0$, или $\sqrt{10x-1} = x+2$, т. е.

$$\begin{cases} x+2 \geqslant 0, \\ 10x-1 = (x+2)^2, \end{cases}$$

откуда $x = 1$, $x = 5$.

б) $\sqrt{2x+3} + x - 6 = 0$, или $\sqrt{2x+3} = 6-x$, т. е.

$$\begin{cases} x \leqslant 6, \\ 2x+3 = (6-x)^2, \end{cases}$$

откуда $x = 3$.

С учетом ОДЗ дроби отметим на одной координатной прямой точки $x = 0{,}1$, $x = 1$, $x = 3$, $x = 5$ (рис. 107, *а*), а на другой координатной прямой — точки $x = 0{,}1$, $x = 3$, $x = 6$ (рис. 107, *б*). Проследим за изме-

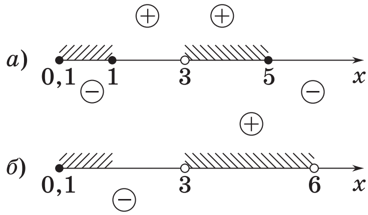


Рис. 107

нением знаков в полученных интервалах и найдем интервалы, в которых знаки совпадают.

В результате получим ответ: $0{,}1 \leqslant x \leqslant 1$, $3 < x \leqslant 5$.

К упражнению 6з

Требуется решить неравенство

$$\frac{\sqrt{5x-4}}{x+4} \geqslant \frac{x-2}{\sqrt{5x-4}}. \qquad (1)$$

<u>I способ</u>. 1. Находим ОДЗ:

$$\begin{cases} 5x-4>0, \\ x+4 \neq 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad x > \frac{4}{5}.$$

2. Напрашивается мысль о возведении обеих частей неравенства (1) в квадрат, но это привело бы к довольно громоздкому неравенству. Кроме того, выражение $x-2$ в ОДЗ может быть как положительным, так и отрицательным, что создало бы дополнительные сложности.

3. Преобразуем неравенство (1) следующим образом:

$$\frac{\sqrt{5x-4}}{x+4} - \frac{x-2}{\sqrt{5x-4}} \geqslant 0; \quad \frac{\sqrt{5x-4}\cdot\sqrt{5x-4}-(x-2)(x+4)}{(x+4)(\sqrt{5x-4})} \geqslant 0;$$

$$\frac{5x-4-x^2+2x-4x+8}{(x+4)(\sqrt{5x-4})} \geqslant 0; \quad \frac{x^2-3x-4}{(x+4)(\sqrt{5x-4})} \leqslant 0. \qquad (2)$$

4. Поскольку в неравенстве (2) знаменатель положителен, это неравенство равносильно следующему: $x^2-3x-4 \leqslant 0$.

5. С учетом ОДЗ имеем систему

$$\begin{cases} x > \dfrac{4}{5}, \\ x^2-3x-4 \leqslant 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $\frac{4}{5} < x \leqslant 4$.

II способ. 1. Находим ОДЗ: $x > \frac{4}{5}$.

2. Учитывая, что в ОДЗ выражения $x + 4$ и $\sqrt{5x-4}$ положительны и только выражение $x - 2$ может менять знак, будем решать неравенство (1) на двух промежутках: $\frac{4}{5} < x < 2$ и $x \geqslant 2$.

3. В промежутке $\frac{4}{5} < x < 2$ имеем систему

$$\begin{cases} \frac{4}{5} < x < 2, \\ \frac{\sqrt{5x-4}}{x+4} \geqslant \frac{x-2}{\sqrt{5x-4}}. \end{cases} \qquad (3)$$

Так как левая часть ее второго неравенства положительна, а правая — отрицательна, то это неравенство выполняется при всех x из промежутка $\frac{4}{5} < x < 2$. Итак, $\frac{4}{5} < x < 2$ — решение системы (3).

4. В промежутке $x \geqslant 2$ имеем систему

$$\begin{cases} x \geqslant 2, \\ \frac{\sqrt{5x-4}}{x+4} \geqslant \frac{x-2}{\sqrt{5x-4}}. \end{cases} \qquad (4)$$

При $x \geqslant 2$ все члены второго неравенства системы (4) положительны, а потому от этого неравенства можно перейти к равносильному:

$$5x - 4 \geqslant (x+4)(x-2), \quad \text{или} \quad x^2 - 3x - 4 \leqslant 0,$$

откуда $-1 \leqslant x \leqslant 4$. Учитывая, что $x \geqslant 2$, получаем решение системы (4): $2 \leqslant x \leqslant 4$.

5. Объединяя решения систем (3) и (4), запишем ответ: $\frac{4}{5} < x \leqslant 4$.

К упражнению 7

1. Масса сплава, равная 4 кг, содержит 40% олова. Значит, масса олова в первоначальном сплаве равна $4 \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$ (кг).

2. В этом же сплаве содержится $4 - \frac{8}{5} = \frac{12}{5}$ кг меди.

3. Пусть x — количество олова, которое нужно добавить к первоначальному сплаву. Тогда имеем пропорцию:

$$\frac{40\,\%}{\frac{8}{5}} = \frac{70\,\%}{x}, \quad \text{т. е.} \quad x = \frac{70 \cdot \frac{8}{5}}{40} = 2{,}8 \text{ кг}.$$

К упражнению 8а

Имеем

$$\sqrt[3]{10+\sqrt{73}} \cdot \sqrt[3]{10-\sqrt{73}} = \sqrt[3]{(10+\sqrt{73})(10-\sqrt{73})} = \sqrt[3]{27} = 3.$$

К упражнению 8б

Находим

$$\frac{\sqrt[3]{(4+\sqrt{17})^2}}{\sqrt[3]{4-\sqrt{17}}} + \sqrt{17} = \frac{\sqrt[3]{(4+\sqrt{17})^2(4-\sqrt{17})^2}}{4-\sqrt{17}} + \sqrt{17} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(16-17)^2}}{4-\sqrt{17}} + \sqrt{17} = \frac{1}{4-\sqrt{17}} + \sqrt{17} =$$

$$= \frac{1+4\sqrt{17}-17}{4-\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}-16}{4-\sqrt{17}} = \frac{4(\sqrt{17}-4)}{4-\sqrt{17}} = -4.$$

К упражнению 9а

1. Преобразуем данное уравнение:

$$ax - 2x - 3x = -3, \quad \text{или} \quad x(a-5) = -3. \qquad (1)$$

2. Если $a \neq 5$, то уравнение (1) имеет единственное решение $x = \frac{3}{5-a}$.

3. Если $a = 5$, то уравнение (1) примет вид $x \cdot 0 = -3$, т. е. оно не имеет решений.

К упражнению 9б

1. Имеем

$$a - ax + 2 - 3x + ax = 0, \quad \text{или} \quad 3x = a + 2. \qquad (1)$$

2. Уравнение (1) при всех значениях a имеет единственное решение $x = \frac{a+2}{3}$.

К упражнению 10а

1. Уравнение $x + \sqrt{3} = 0$ имеет корень $x = -\sqrt{3}$.

2. Уравнение $x^2 - 3 = 0$ имеет корни $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$.

3. Как известно, множество рациональных чисел представляет собой объединение множеств целых и дробных чисел (положительных и отрицательных). Корни данных уравнений не являются рациональными числами.

4. Далее, известно, что если два уравнения не имеют решений на данном числовом множестве, то такие уравнения считаются равносильными на этом множестве.

5. Итак, на множестве рациональных чисел данные уравнения равносильны.

К упражнению 10б

1. Корень первого уравнения $x = -\sqrt{3}$ и корни второго уравнения $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$ не принадлежат множеству целых чисел.

2. Таким образом, на множестве целых чисел данные уравнения равносильны.

К упражнению 10в

1. Корень первого уравнения $x = -\sqrt{3}$ и корни второго уравнения $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$ принадлежат множеству действительных чисел.

2. Известно, что два уравнения называются равносильными на данном числовом множестве, если каждое решение (корень) одного уравнения является решением (корнем) другого, и наоборот.

3. Следовательно, уравнения $x + \sqrt{3} = 0$ и $x^2 - 3 = 0$ на множестве действительных чисел неравносильны.

Тема 11

Понятие о степени положительного числа с иррациональным показателем. Показательная функция, ее свойства и график. Показательные уравнения. Показательные неравенства. Системы показательных уравнений и неравенств

Теоретические сведения

1. Понятие о степени положительного числа с иррациональным показателем

1°. В теме 5 было расширено понятие степени с натуральным показателем и введено понятие степени числа с любым рациональным показателем.

Пользуясь этим понятием, можно задать функцию $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \boldsymbol{Q}$, которую называют показательной функцией, определенной на множестве рациональных чисел.

2°. Можно доказать, что существует монотонно возрастающая функция, определенная на множестве действительных чисел и совпадающая с рассмотренной на множестве рациональных чисел. Она задается формулой $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \boldsymbol{R}$. В курсе средней школы это положение принимают без доказательства.

3°. Таким образом, теперь можно рассматривать степени с иррациональными показателями (например, $3^{\sqrt{2}}$, 5^{π}).

Используя монотонность функции, можно указать границы для a^{α}, выраженные степенями числа a с рациональными показателями. Например, так как

$$1 < \sqrt{2} < 2; \quad 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5;$$

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42; \quad 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415; \ldots,$$

то в силу монотонности показательной функции имеем

$$3^1 < 3^{\sqrt{2}} < 3^2; \quad 3^{1{,}4} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1{,}5};$$

$$3^{1{,}41} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1{,}42}; \quad 3^{1{,}414} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1{,}415}; \ldots .$$

Доказывается, что существует единственное число, удовлетворяющее всем этим неравенствам. Это число и принимают за степень числа 3 с иррациональным показателем $\sqrt{2}$.

4°. Аналогичные рассуждения можно провести для любого числа $a > 0$ и любого иррационального показателя x.

2. Показательная функция, ее свойства и график

1°. Функцию, заданную формулой вида $y = a^x$, где a — некоторое положительное число, не равное единице, называют ***показательной***.

2°. Функция $y = a^x$ при $a > 1$ обладает следующими свойствами, которые иллюстрируются ее графиком (рис. 108):

а) область определения — множество всех действительных чисел, т. е. $D(f) = \boldsymbol{R}$;

б) множество значений — множество всех положительных чисел, т. е. $E(f) = \boldsymbol{R}_+$;

в) функция возрастает;

г) при $x = 0$ значение функции равно 1;

д) если $x > 0$, то $a^x > 1$;

е) если $x < 0$, то $0 < a^x < 1$.

3°. Функция $y = a^x$ при $0 < a < 1$ обладает следующими свойствами, которые иллюстрируются ее графиком (рис. 109):

а) область определения $D(f) = \boldsymbol{R}$;

б) множество значений $E(f) = \boldsymbol{R}_+$;

в) функция убывает;

г) при $x = 0$ значение функции равно 1;

д) если $x > 0$, то $0 < a^x < 1$;

е) если $x < 0$, то $a^x > 1$.

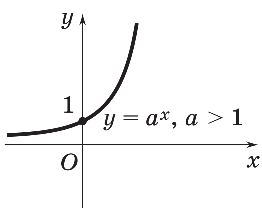


Рис. 108

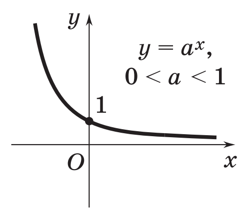


Рис. 109

3. Показательные уравнения

1°. Уравнение, содержащее переменную в показателе степени, называют ***показательным.*** Простейшим примером показательного уравнения служит уравнение $a^x = b$ (где $a > 0$, $a \neq 1$). Это уравнение можно решить графически (рис. 110).

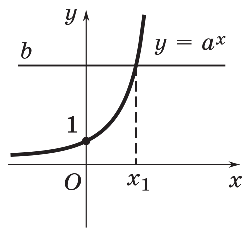


Рис. 110

2°. Решение показательного уравнения вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) основано на том, что это уравнение равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Пример. Решить уравнение:

$$\text{а) } 3^{x^2 - \frac{5}{7}x} = \sqrt[7]{9}\,; \quad \text{б) } 3^{2x+2} + 3^{2x} = 30.$$

Р е ш е н и е. а) Представив $\sqrt[7]{9}$ как $3^{\frac{2}{7}}$, получим $3^{x^2 - \frac{5}{7}x} = 3^{\frac{2}{7}}$, т. е. левая и правая части уравнения приведены к одному основанию. Следовательно, данное уравнение равносильно квадратному уравнению $x^2 - \frac{5}{7}x = \frac{2}{7}$, откуда $x_1 = -\frac{2}{7}$; $x_2 = 1$.

б) Представим 3^{2x+2} как $3^{2x} \cdot 3^2$ и положим $3^{2x} = y$. Тогда получим $9y + y = 30 \Leftrightarrow 10y = 30 \Leftrightarrow y = 3$; $3^{2x} = 3 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 0{,}5$.

3°. Уравнение вида $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$ с помощью подстановки $a^x = y$ сводится к квадратному уравнению $Ay^2 + By + C = 0$.

Пример. Решить уравнение:

$$\text{а) } 5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0; \quad \text{б) } 3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x.$$

Р е ш е н и е. а) Положим $5^x = y$. Тогда $5^{2x} = (5^x)^2 = y^2$ и данное уравнение примет вид $y^2 - 6y + 5 = 0$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = 5$. Следовательно, $5^x = 1$, т. е. $x = 0$; $5^x = 5$, т. е. $x = 1$. Итак, получаем ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

б) Разделив обе части уравнения на $36^x \neq 0$, получим

$$3 \cdot \left(\frac{16}{36}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{81}{36}\right)^x = 5; \quad 3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x = 5.$$

Положим $\left(\frac{4}{9}\right)^x = y$; тогда имеем

$$3y + \frac{2}{y} = 5; \quad 3y^2 - 5y + 2 = 0; \quad y_1 = 1; \quad y_2 = \frac{2}{3};$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = 1; \quad x_1 = 0; \quad \left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}; \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Итак, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$ — корни данного уравнения.

4. Показательные неравенства

1°. Неравенство, содержащее переменную в показателе степени, называют ***показательным***.

2°. Решение показательных неравенств вида $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) основано на следующих утверждениях:

если $a > 1$, то $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$;

если $0 < a < 1$, то $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

(это следует из того, что при $a > 1$ показательная функция возрастает, а при $0 < a < 1$ — убывает).

Пример. Решить неравенство:

а) $3^x < \frac{1}{9}$; б) $(0,25)^{6x - x^2} > 0,25^5$; в) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$.

Решение. а) Замечая, что $\frac{1}{9} = 3^{-2}$, перепишем данное неравенство в виде $3^x < 3^{-2}$. Так как основание степени больше 1, то $x < -2$. Итак, получаем ответ: $(-\infty; -2)$.

б) Поскольку $0 < 0,25 < 1$, заданное неравенство равносильно неравенству $6x - x^2 < 5$, т. е. $(x - 1)(x - 5) > 0$. Решая последнее, получаем ответ: $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$.

в) Положим $2^x = y$; тогда $4^x = (2^x)^2 = y^2$ и данное неравенство примет вид $y^2 - 6y + 8 < 0$. Решив это неравенство, находим $2 < y < 4$. Возвращаясь к переменной x, получаем $2 < 2^x < 2^2$, откуда $1 < x < 2$. Итак, $(1; 2)$ — решение данного неравенства.

5. Системы показательных уравнений и неравенств

Известные способы решения систем алгебраических уравнений и неравенств применяются и к решению систем, содержащих показательные уравнения и неравенства.

Примеры. 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24, \\ 2^y \cdot 3^x = 54. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Запишем данную систему в виде

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 2^3 \cdot 3, & (*) \\ 2^y \cdot 3^x = 2 \cdot 3^3. & (**) \end{cases}$$

Перемножив уравнения (*) и (**), получим

$$2^{x+y} \cdot 3^{x+y} = 2^4 \cdot 3^4 \Leftrightarrow 6^{x+y} = 6^4 \Leftrightarrow x + y = 4.$$

Разделим почленно уравнение (*) на уравнение (**):

$$2^{x-y} \cdot 3^{y-x} = 2^2 \cdot 3^{-2} \Leftrightarrow \frac{2^{x-y}}{3^{x-y}} = \frac{2^2}{3^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x - y = 2.$$

Решив теперь систему $x + y = 4$, $x - y = 2$, получаем ответ: $x = 3$, $y = 1$.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x-y)0{,}5^{y-x} = 5 \cdot 2^{x-y}, \\ (x-y)^{\frac{x+y}{7}} = 125. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Перепишем первое уравнение системы в виде $(x - y)2^{x-y} = 5 \cdot 2^{x-y}$; разделив обе части этого уравнения на $2^{x-y} \neq 0$, получим $x - y = 5$.

Подставив теперь во второе уравнение системы вместо разности $x - y$ ее значение, равное 5:

$$5^{\frac{x+y}{7}} = 125 \Leftrightarrow 5^{\frac{x+y}{7}} = 5^3 \Leftrightarrow \frac{x+y}{7} = 3 \Leftrightarrow x + y = 21.$$

Остается решить систему уравнений $x - y = 5$, $x + y = 21$; в результате получаем ответ: $x = 13$, $y = 8$.

3. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{-x} > \frac{27}{64}, \\ 2^{x^2-6x-3{,}5} < 8\sqrt{2}. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Имеем

$$\begin{cases} \left(\dfrac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\dfrac{8}{9}\right)^{-x} > \dfrac{27}{64}, \\ 2^{x^2-6x-3,5} < 8\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{3}{4}\right)^x > \left(\dfrac{3}{4}\right)^3, \\ 2^{x^2-6x-3,5} < 2^{3,5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x^2 - 6x - 3,5 < 3,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x^2 - 6x - 7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ (x+1)(x-7) < 0. \end{cases}$$

Итак, интервал $(-1; 3)$ — решение данной системы.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какую функцию называют показательной?

2. Что является областью определения и множеством значений показательной функции?

3. Что понимают под степенью с иррациональным показателем? Приведите примеры.

4. Перечислите свойства функции $y = a^x$ при $a > 1$.

5. Перечислите свойства функции $y = a^x$ при $0 < a < 1$.

6. Докажите, что функция $y = 2^x$ является возрастающей.

7. Постройте графики функций: а) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ и $y = 1,5^x$; б) $y = 0,75^x$ и $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$. Каково их взаимное расположение?

8. С помощью какого преобразования плоскости можно получить график функции $y = 0,5^x$ из графика функции $y = 2^x$?

9. Сколько точек пересечения имеют графики функций $y = 2^x$ и $y = 0,28^x$?

10. Какое заключение можно сделать о знаке числа x, если $3^x = 0,9$?

11. Какое уравнение называют показательным?

12. Почему при решении показательных уравнений полагают, что $a > 0$, $a \neq 1$?

13. Дано уравнение вида $a^{f(x)} = 1$. Можно ли утверждать, что $f(x) = 0$?

14. Дано уравнение вида $a^{f(x)} = a^k$. Когда можно утверждать, что $f(x) = k$?

15. Дано уравнение вида $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$. С помощью какой подстановки оно сведется к квадратному уравнению?

16. Уравнение вида $Aa^x + Ba^{x/2} \cdot b^{x/2} + Cb^x = 0$ преобразуйте к квадратному уравнению.

17. Решите графически уравнение: а) $2^x = 6$; б) $2^x = 3^x$; в) $0,2^x = 0,7^x$.

18. Какое неравенство называют показательным?

19. Дано неравенство вида $a^{f(x)} < a^{g(x)}$. Можно ли утверждать, что: а) $f(x) < g(x)$; б) $f(x) > g(x)$?

20. Какие свойства показательной функции применяются при решении неравенства: а) $2^x > 2^m$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^n$?

21. Используя свойства показательной функции:

а) сравните с единицей: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$; $(\sqrt{3})^{1/2}$; $(0{,}9)^{-\sqrt{5}}$; $\pi^{-2/3}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^{\pi}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{1/4}$;

б) сравните значения выражений: $\pi^{-\sqrt{3}}$ и $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-\sqrt{3}}$; $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{1+\sqrt{3}}$ и $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{1+\sqrt{6}}$ и $\left(\frac{2}{3}\right)^{12+\sqrt{5}}$;

в) установите, равносильны ли неравенства: $a^x > a^4$ и $x > 4$; $5^{x^2} < 5^x$ и $x^2 < x$; $\left(\frac{1}{16}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$ и $2x < x - 1$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Постройте график функции (схематически):
а) $y = -2 \cdot 2^{|x|}$; б) $y = 2^{|x+3|}$; в) $y = 2^{|x|+1}$; г) $y = -2^{|x|+1}$;
д) $y = 2^{1-x^2}$; е) $y = 2^{1/x}$.

2. Решите уравнение:
а) $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$; б) $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$;
в) $9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x$; г) $2^{2x+1} + 3^{2x+1} = 5 \cdot 6^x$;
д) $5^{4\sqrt{x}} - 14 \cdot 5^{2\sqrt{x}} = 275$; е) $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x = 8$;
ж) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$; з) $(x-3)^{3-x^2} = (x-3)^{2x}$;
и) $(x+3)^{x^2-3} = (x+3)^{2x}$; к) $(x^2-x-1)^{x^2-1} = 1$.

3. Решите уравнение:
а) $8^x \cdot 7^{x-4} = 2^{4+2x}$; б) $6^x \cdot 5^{x-2} = 9 \cdot 2^x$; в) $27 \cdot 7^{x+3} = 147^x$;
г) $625 \cdot 9^{x-2} = 15^x$; д) $7 \cdot 16^x = 2 \cdot 56^x$; е) $125 \cdot 8^x = 50^{x+1}$.

4. Решите уравнение:
а) $\left(42 - 6^{\frac{2x-1}{x}}\right)^{\frac{x}{x+1}} = 6$; б) $\left(100 + 5^{\frac{3x-1}{x}}\right)^{\frac{x}{2x+1}} = 5$;
в) $\left(4^{\frac{x+1}{x}} - 12\right)^{\frac{x}{2x-1}} = 4$; г) $4 \cdot 3^x + 3\sqrt{6^x} - 27 \cdot 2^{x-1} = 0$;
д) $8^x + 2 \cdot 50^x = 3 \cdot 125^x$; е) $24^x + 6^x = 10 \cdot 3^x$;
ж) $6^{2x+1} - 6^x \cdot 3^{x+2} + 3^{2x+1} = 0$.

5. Решите уравнение:
а) $3^{\frac{x+6}{x+2}} - 3^{\frac{x+4}{x+2}} = 18$; б) $5^{\frac{x+1}{x-3}} - 23 \cdot 5^{\frac{x-1}{x-3}} = 250$;
в) $2^{\frac{x+1}{x-1}} - 6 \cdot 2^{\frac{x}{x-1}} + 16 = 0$; г) $3^{\frac{4x}{2x-1}} - 6 \cdot 3^{\frac{4x-1}{2x-1}} = 243$.

6. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2^{2x} - 3^y = -17, \\ 2^x - 3^{y/2} = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^{2x} - 5^y = -16, \\ 3^x - 5^{y/2} = -2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2^{x+1} \cdot 3^{y+2} = 2, \\ x - y = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^{x+y} = y^{12}, \\ y^{x+y} = x^3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^{y^2 - 15y + 56} = 1, \\ y - x = 5; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12, \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2}; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2^{x+y} + 2 = 0, \\ 5 \cdot 2^{x+1} - 2^{x+y-1} = 16. \end{cases}$

7. Найдите множество значений a, при которых система уравнений:

а) $\begin{cases} 3 \cdot 5^{y^2} + 2|x| = 21 - a, \\ 5^{1+y^2} - 3|x| = 11a + 16 \end{cases}$

не имеет решений (в ответе запишите сумму целых значений a, не входящих в это множество);

б) $\begin{cases} 7^{x+1} + 2y^2 = 3a + 31, \\ 2 \cdot 7^x - 7y^2 = 16a - 29 \end{cases}$

совместна (в ответе запишите наибольшее значение a из этого множества);

в) $\begin{cases} 3^{1-|x|} + 2^{1+y} = 3a + 4, \\ 2 \cdot 3^{-|x|} + 2^y = 2a \end{cases}$

не имеет решений (в ответе запишите целое значение a, не входящее в это множество);

г) $\begin{cases} x^2 + 2^{1-\sqrt{y}} = 5, \\ 3x^2 - 2^{2-\sqrt{y}} = 2a + 9 \end{cases}$

совместна (в ответе запишите наименьшее значение a из этого множества);

д) $\begin{cases} 3^{1-x^2} + 2\sqrt{y} = 7a + 12, \\ 2 \cdot 3^{-x^2} - 3\sqrt{y} = -4a - 5 \end{cases}$

совместна (в ответе запишите наибольшее значение a из этого множества).

8. Найдите xy, если x и y — решение системы

$$\begin{cases} (x+2)^2 + 2 \cdot 3^{|y-2|} = a - 1, \\ 3^{1+|y-2|} - (x+2)^2 = 4a - 9. \end{cases}$$

9. Найдите $x^2 - y^2$, если x и y — решение системы

$$\begin{cases} 4^{1+\sqrt{x+3}} + 2(y-4)^2 = 2a - 4, \\ (y-4)^2 - 4^{\sqrt{x+3}} = 7 - 2a. \end{cases}$$

10. Решите неравенство:

а) $\dfrac{24 \cdot 5^x}{5^x - 5} + \dfrac{5^x}{5^x - 30} \leqslant 25;$ б) $\dfrac{7 \cdot 2^x}{2^x - 1} + \dfrac{5 \cdot 2^x}{2^x - 7} \geqslant 12;$

в) $5^{\sqrt{x-2}} > 5^{1-\sqrt{x-2}} + 4;$ г) $2 \cdot 7^{\sqrt{2x-5}} > 7^{1-\sqrt{2x-5}};$

д) $5^{(x+1)^2} + 625 \leqslant 5^{x^2+2} + 5^{2x+3};$

е) $3^{(x+2)^2} + 1 \geqslant 3^{x^2-1} + 3 \cdot 81^{x+1};$

ж) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{x^3-2x+5}{x-3}} \geqslant 9;$ з) $5^{\frac{x^3-x-4}{x-4}} \geqslant 0{,}2;$

и) $(x+3)^{x^2-5x+6} > 1;$

к) $15^x - 625 \cdot 3^x - \sqrt{3} \cdot 5^x + 25\sqrt{1875} \leqslant 0.$

11. При каких значениях k уравнение $25^x - 5^{x+1} - 5k - k^2 = 0$ имеет два решения?

12. Определите все значения параметра c, при которых уравнения $4^x + 2 \cdot 2^x - 3 = 0$ и $c \cdot 49^x + |c - 7| \cdot 7^x - 7 = 0$ имеют одинаковые корни.

13. При каких значениях a уравнение $4^x - 2^{x+2} - 4a - a^2 = 0$ имеет два решения? В ответе укажите сумму целых значений a.

Задания для повторения

14. Товарный поезд был задержан в пути на 12 мин, а затем на расстоянии 60 км наверстал потерянное время, увеличив скорость на 15 км/ч. Найдите первоначальную скорость поезда.

15. Пассажир поезда знает, что на данном участке пути скорость этого поезда равна 40 км/ч. Как только мимо окна начал проходить встречный поезд, пассажир включил секундомер и заметил, что встречный поезд проходил мимо окна в течение 3 с.

Определите скорость встречного поезда, если известно, что его длина равна 75 м.

16. Решите неравенство $kx + 4 > 2x + k^2$.

17. При каких значениях k система уравнений

$$\begin{cases} kx + 4y = 4, \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$

имеет решения?

ОТВЕТЫ

2. а) $x = 2$; б) $x = 0$; в) $x = 0$; г) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$; д) $x = 1$; е) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$; ж) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$; з) $x_1 = -1$, $x_2 = 4$; и) $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$; к) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. **3.** а) $x = 4$; б) $x = 2$; в) $x = 3$; г) $x = 4$; д) $x = 1$; е) $x = 0{,}5$. **4.** а) $x = 1$; б) $x = 1$; в) $x = 1$; г) $x = 2$; д) $x = 0$; е) $x = 1$; ж) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$. **5.** а) $x = 0$; б) $x = 4$; в) $x = 2$; г) $x = 0{,}75$. **6.** а) $x = 3$, $y = 4$; б) $x = 1$, $y = 2$; в) $x = 0$, $y = -2$; г) $x_1 = 1$, $y_1 = 1$; $x_2 = 4$, $y_2 = 2$; д) $x_1 = 1$, $y_1 = 6$; $x_2 = 2$, $y_2 = 7$; $x_3 = 3$, $y_3 = 8$; е) $x_1 = \frac{1}{4}$, $y_1 = \frac{1}{6}$; $x_2 = \frac{1}{6}$, $y_2 = \frac{1}{4}$; ж) $x = 1$, $y = 2$. **7.** а) -9; б) $a = 2$; в) $a = 4$; г) $a = 2$; д) $a = -1$. **8.** -4. **9.** -7. **10.** а) $x < 1$, $2 \leqslant x < \log_5 30$; б) $-\log_2 6 \leqslant x < 0$, $x > \log_2 7$; в) $x > 3$; г) $x > 3$; д) $x \leqslant -\sqrt{2}$, $0{,}5 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$; е) $-1{,}25 \leqslant x < -1$, $x \geqslant 1$; ж) $1 \leqslant x < 3$; з) $x \leqslant 2$, $x > 4$; и) $-2 < x < 2$, $x > 3$; к) $0{,}5 \leqslant x \leqslant 4$. **11.** $-5 < k < -2{,}5$; $-2{,}5 < k < 0$. **12.** $0 \leqslant c \leqslant 7$, $c = -7$. **13.** -4. **14.** 60 км/ч. **15.** 50 км/ч. **16.** Если $k = 0$, то нет решений; если $k < 2$, то $x < k + 2$; если $k > 2$, то $x > k + 2$. **17.** Система имеет решения при любых k.

Решения и методические указания

К упражнению 1а

1. Функция $y = -2 \cdot 2^{|x|}$ определена для любых значений аргумента x. Так как $2^{|-x|} = 2^{|x|}$, то функция четная, а ее график симметричен относительно оси ординат.

2. При любых значениях x функция отрицательна, поэтому ее график расположен под осью абсцисс.

3. Если $x = 0$, то $y = -2 \cdot 2^0 = -2$.

4. Если $x \geqslant 0$, то $y = -2 \cdot 2^x$, а, значит, часть графика, расположенная справа от оси ординат, получается симметричным отражением от оси абсцисс части графика функции $y = 2 \cdot 2^x$ при $x \geqslant 0$ (рис. 111, a).

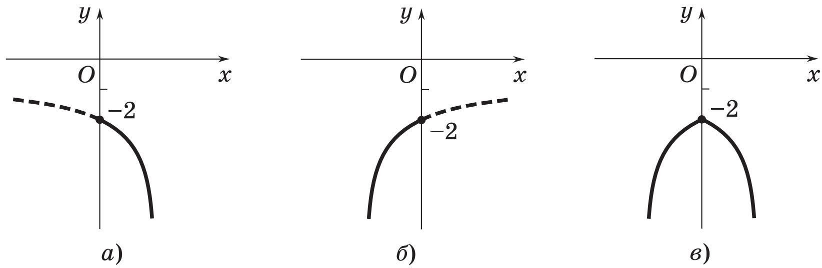


Рис. 111

5. Если $x < 0$, то $y = -2 \cdot 2^{-x} = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и аналогично получаем часть графика, расположенную слева от оси ординат (рис. 111, *б*).

6. Объединив построенные графики, получим искомый график (рис. 111, *в*).

К упражнениям 1б—г

См. соответственно рис. 112—114.

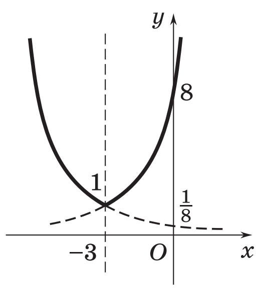


Рис. 112

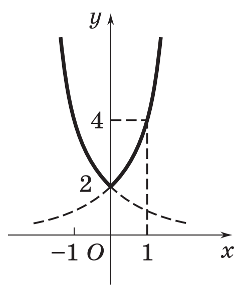


Рис. 113

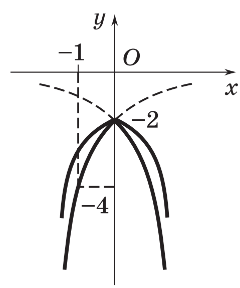


Рис. 114

К упражнению 1д

1. Областью определения функции $y = 2^{1-x^2}$ является вся числовая прямая. Так как $2^{1-(-x)^2} = 2^{1-x^2}$, то функция четная, а ее график симметричен относительно оси ординат.

2. Известно, что $a^x > 0$ при любом значении x. Следовательно, график функции целиком расположен над осью абсцисс.

3. Запишем функцию в виде

$$y = 2^{1-x^2} = 2^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}.$$

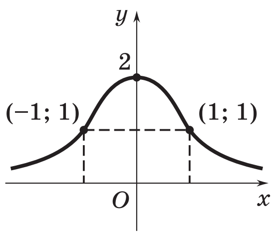


Рис. 115

а) Если $x \to \pm\infty$, то $y \to 0$, т. е. ось абсцисс является асимптотой графика.

б) Если $x = \pm 1$, то $y = 1$; следовательно, точки $(1; 1)$ и $(-1; 1)$ принадлежат графику.

в) При $x = 0$ функция достигает максимума, равного 2.

г) При изменении x от $-\infty$ до 0 функция возрастает, а при изменении x от 0 до $+\infty$ она убывает.

4. График функции изображен на рис. 115.

К упражнению 1е

1. Область определения функции $y = 2^{1/x}$ состоит из двух промежутков: $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Следовательно, график функции состоит из двух частей.

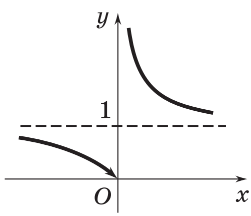


Рис. 116

2. Анализ функции $y = 2^{1/x}$ показывает, что:

а) если $x \to 0$ слева, то $y \to 0$, причем $y > 0$; если $x \to 0$ справа, то $y \to +\infty$;

б) если $x \to -\infty$, то $y \to 1$, причем $y < 1$; если $x \to +\infty$, то $y \to 1$, причем $y > 1$;

в) значит, прямая $y = 1$ является асимптотой графика при $x \to \pm\infty$.

3. График функции изображен на рис. 116.

К упражнению 2в

1. Так как $x \neq 0$, то обе части данного уравнения можно разделить на 4^x:

$$\left(\frac{9}{4}\right)^x + \left(\frac{6}{4}\right)^x - 2 = 0, \quad \text{или} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0. \qquad (1)$$

2. Положим $\left(\frac{3}{2}\right)^x = y$ $(y > 0)$; тогда уравнение (1) запишется так: $y^2 + y - 2 = 0$, откуда $y = 1$, $y = -2$.

Однако значение $y = -2$ не удовлетворяет условию $y > 0$. Следовательно, $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1$, т. е. $x = 0$.

К упражнению 2е

1. Упростим подкоренное выражение: $4 - \sqrt{15} = \frac{(4 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15})}{4 + \sqrt{15}} =$

$= \frac{1}{4 + \sqrt{15}}$, тогда $\left(\sqrt{4 - \sqrt{15}}\right)^x = \frac{1}{\left(\sqrt{4 + \sqrt{15}}\right)^x}$.

2. Полагая $\left(\sqrt{4 + \sqrt{15}}\right)^x = y$, перепишем данное уравнение в виде

$$\frac{1}{y} + y - 8 = 0. \quad (1)$$

3. Решив уравнение (1), находим $y_1 = 4 - \sqrt{15}$, $y_2 = 4 + \sqrt{15}$. Следовательно,

$$y_1 = 4 - \sqrt{15} = \left(\sqrt{4 + \sqrt{15}}\right)^x, \quad (2)$$

$$y_2 = 4 + \sqrt{15} = \left(\sqrt{4 + \sqrt{15}}\right)^x. \quad (3)$$

4. Решим уравнение (2), для чего преобразуем его левую часть, как в п. 1:

$4 - \sqrt{15} = \frac{1}{4 + \sqrt{15}} = (4 + \sqrt{15})^{-1} = (4 + \sqrt{15})^{x/2}$, откуда $x = -2$.

5. Наконец, из уравнения (3) следует, что $4 + \sqrt{15} = (4 + \sqrt{15})^{x/2}$, откуда $x = 2$.

Ответ: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

К упражнению 2з

1. Выражение в левой части уравнения представляет собой функцию, которая содержит переменную как в основании, так и в показателе степени. Такое уравнение называют ***показательно-степенным***.

2. При решении подобных уравнений нужно рассматривать четыре случая:

а) основание степени равно 1;

б) основание степени равно 0;

в) основание степени равно −1;

г) оно отлично от указанных значений.

3. Если $x - 3 = 1$, т. е. $x = 4$, то получим $1^{-13} = 1^8$ — верное равенство; поэтому $x = 4$ — корень уравнения.

4. Если $x - 3 = 0$, т. е. $x = 3$, то получим $0^{-6} = 0^6$ — выражение, не имеющее смысла; значит, $x = 3$ не является корнем уравнения.

5. Если $x - 3 = -1$, т. е. $x = 2$, то получим $(-1)^{-1} = (-1)^4$ — неверное равенство; следовательно, $x = 2$ не является корнем уравнения.

6. Наконец, приравняв показатели, имеем $3 - x^2 = 2x$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Проверим найденные значения:

а) $x_1 = -1$, $(-4)^{3-1} = (-4)^{-2}$ — верное равенство;

б) $x_2 = 3$ — это значение уже было рассмотрено в п. 4.

<u>Ответ</u>: $x_1 = -1$, $x_2 = 4$.

К упражнению 3а

1. Упростим данное уравнение:

$$\frac{2^{3x} \cdot 7^x}{7^4} = 2^4 \cdot 2^{2x}, \quad \text{или} \quad 2^{3x} \cdot 7^x = 7^4 \cdot 2^4 \cdot 2^{2x}. \qquad (1)$$

2. Так как $2^{2x} \neq 0$, то левую и правую части уравнения (1) можно разделить на 2^{2x}:

$$2^x \cdot 7^x = 2^4 \cdot 7^4, \quad \text{или} \quad (2 \cdot 7)^x = (2 \cdot 7)^4, \text{ т. е. } x = 4.$$

К упражнению 4а

1. Анализ данного уравнения показывает, что, видимо, есть только один способ освободиться от показателя степени $\frac{x}{x+1}$ — это возвести обе части уравнения в степень $\frac{x+1}{x}$. Тогда получим равносильное уравнение

$$42 - 6^{\frac{2x-1}{x}} = 6^{\frac{x+1}{x}}. \qquad (1)$$

2. В каждом показателе степени выделим целую часть:

а) $\frac{2x-1}{x} = 2 - \frac{1}{x}$; б) $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$, где $x \neq -1$ и $x \neq 0$.

3. После этого уравнение (1) примет вид

$$42 - 36 \cdot 6^{-1/x} = 6 \cdot 6^{1/x}. \qquad (2)$$

4. Полагая $t = 6^{1/x}$, получим квадратное уравнение $t^2 - 7t + 6 = 0$, имеющее корни $t_1 = 1$; $t_2 = 6$.

5. Далее имеем $6^{1/x} = 1$, т. е. $\frac{1}{x} = 0$, — решений нет; $6^{1/x} = 6$, т. е. $\frac{1}{x} = 1$, откуда $x = 1$.

К упражнению 4е

1. Так как все члены уравнения содержат множитель 3^x, а $3^x \neq 0$, то, разделив на 3^x обе части уравнения, получим

$$\left(\frac{24}{3}\right)^x + \left(\frac{6}{3}\right)^x - 10 = 0, \quad \text{или} \quad 8^x + 2^x - 10 = 0. \qquad (1)$$

2. Полагая $2^x = t$, приходим к кубическому уравнению

$$t^3 + t - 10 = 0. \qquad (2)$$

3. Как решить уравнение (2)?

I способ. Подбором находим $t = 2$ — корень уравнения. Далее, разделив многочлен $t^3 + t - 10$ на двучлен $t - 2$, понизим степень уравнения на единицу:

$$t^3 + t - 10 = (t - 2)(t^2 + 2t + 5) = 0, \qquad (3)$$

а это уравнение легко решить.

II способ. Левую часть уравнения (2) преобразуем так:

$$t^3 + t - 10 = t^3 - 2t^2 + 2t^2 - 4t + 5t - 10 =$$
$$= t^2(t - 2) + 2t(t - 2) + 5(t - 2),$$

откуда

$$(t - 2)(t^2 + 2t + 5) = 0.$$

4. Остается решить уравнение (3):

а) $t - 2 = 0$, $t = 2 = 2^x$, т. е. $x = 1$;

б) $t^2 + 2t + 5 = 0$ — уравнение не имеет решений.

К упражнению 5г

1. Упростим показатели степеней, для чего в каждой дроби выделим ее целую часть:

а) $\dfrac{4x}{2x-1} = \dfrac{2(2x-1+1)}{2x-1} = 2 + \dfrac{2}{2x-1}$;

б) $\dfrac{4x-1}{2x-1} = \dfrac{2\left(2x-1+\frac{1}{2}\right)}{2x-1} = 2 + \dfrac{1}{2x-1}$.

2. Тогда данное уравнение примет вид

$$3^{2+\frac{2}{2x-1}} - 6 \cdot 3^{2+\frac{1}{2x-1}} - 243,$$

или

$$9 \cdot 3^{\frac{2}{2x-1}} - 6 \cdot 9 \cdot 3^{\frac{1}{2x-1}} - 243 = 0.$$

3. Полагая $3^{\frac{1}{2x-1}} = t$ $(t > 0)$, получим квадратное уравнение, корнями которого являются $t_1 = -3$ и $t_2 = 9$. Корень $t_1 = -3$ является посторонним, поскольку не удовлетворяет условию $t > 0$, а корню $t_2 = 9$ соответствует уравнение $3^{\frac{1}{2x-1}} = 9$, или $3^{\frac{1}{2x-1}} = 3^2$, откуда $x = 0{,}75$.

К упражнению 6а

1. Воспользуемся тождеством $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ применительно к первому уравнению данной системы; тогда система запишется в виде

$$\begin{cases} (2^x + 3^{y/2})(2^x - 3^{y/2}) = -17, \\ 2^x - 3^{y/2} = -1. \end{cases}$$

2. Так как $2^x - 3^{y/2} = -1$, то первое уравнение этой системы примет вид

$$(2^x + 3^{y/2})(-1) = -17, \quad \text{или} \quad 2^x + 3^{y/2} = 17.$$

3. Остается решить систему

$$\begin{cases} 2^x + 3^{y/2} = 17, \\ 2^x - 3^{y/2} = -1. \end{cases}$$

Имеем: а) $2 \cdot 2^x = 16$, $x = 3$; б) $2^3 + 3^{y/2} = 17$; $3^{y/2} = 9$; $y = 4$.

Ответ: $x = 3$, $y = 4$.

К упражнению 6е

1. Положим $64^x = u$, $64^y = v$. Тогда получим новую систему

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 12, \\ uv = 4\sqrt{2}. \end{cases}$$

2. Возведем второе уравнение в квадрат: $u^2v^2 = 32$.

3. Используя теорему Виета, составим квадратное уравнение $z^2 - 12z + 32 = 0$, имеющее корни $z_1 = 8$ и $z_2 = 4$.

4. Этими корнями являются u^2 и v^2. Значит, $u = 2\sqrt{2}$, $v = 2$ или $u = 2$, $v = 2\sqrt{2}$, т. е. $64^x = 2^{3/2}$, $64^y = 2$ или $64^x = 2$, $64^y = 2\sqrt{2}$.

5. Отсюда находим x и y:

а) $x_1 = \frac{1}{4}$, $y_1 = \frac{1}{6}$; б) $x_2 = \frac{1}{6}$, $y_2 = \frac{1}{4}$.

К упражнению 7а

1. Здесь требуется найти множество значений a, при которых система

$$\begin{cases} 3 \cdot 5^{y^2} + 2|x| = 21 - a, \\ 5 \cdot 5^{y^2} - 3|x| = 11a + 16 \end{cases} \tag{1}$$

не имеет решений.

2. Для упрощения введем обозначения $u = 5^{y^2}$, $v = |x|$; тогда система (1) примет вид

$$\begin{cases} 3u + 2v = 21 - a, \\ 5u - 3v = 11a + 16. \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 \\ -3 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

3. Воспользуемся способом сложения. Умножив первое уравнение системы (2) на 3, а второе на 2, приходим к системе

$$\begin{cases} 9u + 6v = 63 - 3a, \\ 10u - 6v = 22a + 32. \end{cases} \qquad (3)$$

4. Сложив уравнения системы (3), получим $19u = 95 + 19a$, или

$$u = 5 + a. \qquad (4)$$

5. Уравнение (4) не имеет решений, если $u = 5^{y^2} < 1$, т. е. $5 + a < 1$, откуда $a < -4$.

Примечание. Если бы мы искали значения a, при которых система (1) имеет решение, то написали бы $1 \leqslant 5^{y^2} < +\infty$, т. е. $1 \leqslant u < +\infty$. Но мы ищем те значения a, при которых система (1) не имеет решений, следовательно, должно выполняться неравенство $-\infty < 5^{y^2} < 1$, т. е. $u < 1$.

6. Вернемся к системе (2) и исключим из нее u. Умножив первое уравнение на 5, а второе на (−3), приходим к системе

$$\begin{cases} 15u + 10v = 105 - 5a, \\ -15u + 9v = -33a - 48. \end{cases} \qquad (5)$$

7. Сложив уравнения системы (5), получим $19v = 57 - 38a$, т. е.

$$v = 3 - 2a. \qquad (6)$$

8. Уравнение (6) не имеет решений, если $v = |x| < 0$, т. е. $3 - 2a < 0$, откуда $a > \frac{3}{2}$.

9. Рассмотрим найденные для a промежутки и изобразим решения графически (на рис. 117 заштрихованы те промежутки значений a, при которых система (1) не имеет решений).

10. Остается найти сумму целых значений a, не принадлежащих заштрихованным промежуткам, т. е. принадлежащих отрезку $\left[-4; \frac{3}{2}\right]$: она равна $-4 - 3 - 2 - 1 + 0 + 1 = -9$.

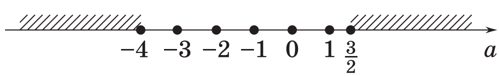


Рис. 117

З а м е ч а н и е. Приведенное подробное решение можно оформить короче.

Введем новые неизвестные

$$\begin{cases} |x| = v, \\ 5^{y^2} = u, \end{cases}$$

откуда получим систему

$$\begin{cases} 3u + 2v = 21 - a, \\ 5u - 3v = 11 + a + 16. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим

$$\begin{cases} v = 3 - 2a, \\ u = 5 + a, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} |x| = 3 - 2a, \\ 5^{y^2} = 5 + a. \end{cases}$$

Далее имеем $|x| = 3 - 2a < 0$, т. е. $a > \frac{3}{2}$; $5^{y^2} = 5 + a < 1$, т. е. $a < -4$.

Затем ищем ответ.

К упражнению 7д

1. Здесь требуется найти множество значений a, при которых система

$$\begin{cases} 3^{1 - x^2} + 2\sqrt{y} = 7a + 12, \\ 2 \cdot 3^{-x^2} - 3\sqrt{y} = -4a - 5 \end{cases} \tag{1}$$

является совместной.

2. Находим ОДЗ: $y \geqslant 0$. Положим $u = 3^{-x^2}$, $v = \sqrt{y}$.

3. Тогда система (1) примет вид

$$\begin{cases} 3u + 2v = 7a + 12, \\ 2u - 3v = -4a - 5. \end{cases} \tag{2}$$

4. После преобразований системы (2) получим

$$\begin{cases} u = a + 2, \\ v = 2a + 3 \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} 3^{-x^2} = a + 2, \\ \sqrt{y} = 2a + 3. \end{cases} \tag{3}$$

5. Чтобы система (3) имела решения, необходимо выполнение следующих условий:

а) выражение 3^{-x^2} должно удовлетворять неравенствам $0 < 3^{-x^2} \leqslant 1$;

б) выражение $\sqrt{y}$ должно удовлетворять неравенствам $0 \leqslant \sqrt{y} < +\infty$.

6. Таким образом, приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} 0 < a + 2 \leqslant 1, \\ 0 \leqslant 2a + 3 < +\infty, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -2 < a \leqslant -1, \\ -1{,}5 \leqslant a < +\infty, \end{cases}$$

откуда $-1{,}5 \leqslant a \leqslant -1$.

Ответ: $a = -1$.

К упражнению 8

1. Здесь требуется найти xy, где x и y — решение системы

$$\begin{cases} (x + 2)^2 + 2 \cdot 3^{|y-2|} = a - 1, \\ 3^{1+|y-2|} - (x + 2)^2 = 4a - 9. \end{cases} \qquad (1)$$

2. Положим $u = (x + 2)^2$, $v = 3^{|y-2|}$, где $u \geqslant 0$, $v \geqslant 1$. Тогда система (1) примет вид

$$\begin{cases} u + 2v = a - 1, \\ 3v - u = 4a - 9. \end{cases} \qquad (2)$$

3. Сложив уравнения системы (2), получим $5v = 5a - 10$, или $v = a - 2$.

4. Составим новую систему

$$\begin{cases} v = a - 2, \\ u + 2v = a - 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} v = a - 2, \\ u = -a + 3, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} a - 2 \geqslant 1, \\ -a + 3 \geqslant 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} a \geqslant 3, \\ a \leqslant 3. \end{cases}$$

Значит, $a = 3$.

5. Отсюда следует, что $u = -a + 3 = 0$, $v = a - 2 = 1$.

6. Найдем x и y. Имеем:

а) $u = (x + 2)^2 = 0$, т. е. $x = -2$; б) $v = 3^{|y-2|} = 1$, т. е. $y = 2$.

7. Итак, $xy = -4$.

К упражнению 10а

1. Пусть $5^x = y$; тогда данное неравенство примет вид

$$\frac{24y}{y-5} + \frac{y}{y-30} - 25 \leqslant 0. \qquad (1)$$

2. После упрощения неравенства (1) получим

$$\frac{125(y-25)}{(y-30)(y-5)} \leqslant 0. \qquad (2)$$

3. Используя метод интервалов, находим $y < 5$, $25 \leqslant y < 30$. Окончательно имеем:

а) $5^x < 5$; так как $a = 5 > 1$, то $x < 1$;

б) $25 \leqslant 5^x < 30$; так как $a = 5 > 1$, то $2 \leqslant x < \log_5 30$.

Ответ: $x < 1$, $2 \leqslant x < \log_5 30$.

К упражнению 10в

1. Находим ОДЗ: $x \geqslant 2$.

2. Введем новую переменную $5^{\sqrt{x-2}} = y > 0$; тогда данное неравенство будет равносильно следующему:

$$y > \frac{5}{y} + 4. \qquad (1)$$

3. Упростив неравенство (1), имеем

$$\frac{y^2 - 4y - 5}{y} > 0. \qquad (2)$$

4. Так как $y > 0$, то неравенство (2) равносильно следующему:

$$y^2 - 4y - 5 > 0, \quad \text{или} \quad (y + 1)(y - 5) > 0. \qquad (3)$$

5. Решив неравенство (3), получим $y < -1$ (не удовлетворяет условию $y > 0$), $y > 5$. Значит, $5^{\sqrt{x-2}} > 5$, т. е. $\sqrt{x-2} > 1$, откуда $x > 3$.

К упражнению 10д

1. Предварительный анализ неравенства свидетельствует о том, что какая-либо замена исключена. Нужно искать другой способ решения.

2. Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$5 \cdot 5^{x^2 + 2x} + 625 \leqslant 25 \cdot 5^{x^2} + 125 \cdot 5^{2x};$$

$$5 \cdot (5^{x^2 + 2x} + 125) \leqslant 5 \cdot (5 \cdot 5^{x^2} + 25 \cdot 5^{2x}),$$

$$5^{x^2 + 2x} + 125 \leqslant 5 \cdot 5^{x^2} + 25 \cdot 5^{2x}. \qquad (1)$$

3. Группируя члены и разлагая на множители, получим

$$5^{x^2 + 2x} - 25 \cdot 5^{2x} \leqslant 5 \cdot 5^{x^2} - 125; \quad 5^{2x}(5^{x^2} - 25) \leqslant 5(5^{x^2} - 25);$$

$$(5^{x^2} - 25)(5^{2x} - 5) \leqslant 0. \qquad (2)$$

4. Неравенство (2) равносильно совокупности двух систем:

$$\text{а)} \begin{cases} 5^{x^2} - 25 \leqslant 0, \\ 5^{2x} - 5 \geqslant 0; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} 5^{x^2} - 25 \geqslant 0, \\ 5^{2x} - 5 \leqslant 0. \end{cases}$$

5. Решив эти системы, находим $x \leqslant -\sqrt{2}$, $0{,}5 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$.

К упражнению 11

1. Пусть $5^x = y > 0$; тогда данное уравнение примет вид

$$y^2 - 5y - 5k - k^2 = 0. \qquad (1)$$

2. Чтобы уравнение (1) имело два положительных корня, необходимо выполнение условий

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ c > 0. \end{cases}$$

3. Имеем $D = 5^2 + 4(5k + k^2) = (2k + 5)^2 > 0$, $k \in \boldsymbol{R}$, $k \neq -2{,}5$.

4. Решив неравенство $c > 0$, т. е.$-5k - k^2 > 0$, находим $-5 < k < 0$.

5. Значит, данное уравнение имеет два решения, если $-5 < k < -2{,}5$ или $-2{,}5 < k < 0$.

К упражнению 12

1. Решим уравнение

$$4^x + 2 \cdot 2^x - 3 = 0. \qquad (1)$$

Полагая $2^x = y > 0$, придем к квадратному уравнению $y^2 + 2y - 3 = 0$, имеющему корни $y = 1$; $y = -3$ (посторонний корень, так как он не удовлетворяет условию $y > 0$). Значит, $2^x = 1$, откуда $x = 0$. Следовательно, уравнение (1) имеет единственный корень $x = 0$.

2. Согласно условию, уравнение

$$c \cdot 49^x + |c - 7| \cdot 7^x - 7 = 0 \qquad (2)$$

также должно иметь только один корень $x = 0$. Подставив в уравнение (2) значение $x = 0$, получим уравнение относительно c:

$$c + |c - 7| - 7 = 0, \quad \text{или} \quad |c - 7| = 7 - c. \qquad (3)$$

3. В силу определения модуля решением уравнения (3) являются все значения $c \leqslant 7$.

4. При таких значениях c уравнение (2) примет вид

$$c \cdot 7^{2x} - (c - 7) \cdot 7^x - 7 = 0. \qquad (4)$$

5. Положим $7^x = z > 0$ и получим уравнение

$$cz^2 - (c - 7)z - 7 = 0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) при $c = 0$ имеет единственный корень $z = 1$, а при $c \neq 0$ — два корня $z = 1$ и $z = -\frac{7}{c}$. Чтобы уравнение (5) при $c \neq 0$ имело только один корень, нужно, чтобы корень $z = -\frac{7}{c}$ был:

а) либо равен 1, т. е. $-\frac{7}{c} = 1$, откуда $c = -7$;

б) либо отрицателен, т. е. $-\frac{7}{c} < 0$, откуда $c > 0$.

6. Учитывая отмеченные ранее условия, при выполнении которых уравнение (2) должно иметь единственный корень $x = 0$, получаем ответ: $0 \leqslant c \leqslant 7$ и $c = -7$.

К упражнению 13

1. Положим $y = 2^x > 0$; тогда уравнение примет вид

$$y^2 - 4y - 4a - a^2 = 0. \qquad (1)$$

2. Чтобы уравнение (1) имело два положительных корня, необходимо выполнение условий

$$\begin{cases} D > 0, \\ c > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

3. Находим $D = 16 + 4 \cdot (4a + a^2) = 16 + 16a + 4a^2 = 4(a + 2)^2 > 0$ при $a \in \boldsymbol{R}$, $a \neq -2$.

4. Решив неравенство $c > 0$, т. е. $-4a - a^2 > 0$, получим $-4 < a < 0$.

5. Таким образом, условия (2) выполняются при $-4 < a < -2$ и при $-2 < a < 0$.

6. Итак, получаем ответ: $-3 - 1 = -4$.

К упражнению 14

1. Из условия следует, что если бы поезд после остановки продолжал двигаться с прежней скоростью, то затратил бы на 12 мин (12 мин $= \frac{1}{5}$ ч) больше, чем предусмотрено расписанием.

2. Пусть v (км/ч) — первоначальная скорость поезда. Тогда

$$t_1 = \frac{60}{v},\ t_2 = \frac{60}{v + 15},\ t_1 - t_2 = \frac{1}{5}.$$

3. Таким образом, получаем уравнение $\frac{60}{v} - \frac{60}{v + 15} = \frac{1}{5}$, откуда $v_1 = 60$, $v_2 = -75$ (не удовлетворяет условию).

Ответ: $v = 60$ км/ч.

К упражнению 15

1. Пусть v (м/с) — скорость встречного поезда; скорость поезда, в котором ехал пассажир, равна 40 км/ч $= \frac{40\,000}{3600} = \frac{100}{9}$ м/с.

2. Встречный поезд за 3 с прошел $3v$ м, а поезд, в котором ехал пассажир, прошел $\frac{3 \cdot 100}{9} = 33\frac{1}{3}$ м.

3. По условию оба поезда вместе прошли 75 м. Следовательно, $33\frac{1}{3} + 3v = 75$, откуда $v = 13\frac{8}{9}$ м/с $= \frac{125 \cdot 3600}{9 \cdot 1000} = 50$ км/ч.

К упражнению 16

1. Преобразуем данное неравенство:

$$(k-2)x > (k-2)(k+2). \qquad (1)$$

2. Рассмотрим три случая:

а) если $k = 2$, то неравенство (1) примет вид $0 \cdot x > 0$, т. е. оно не имеет решений;

б) если $k < 2$, то решение неравенства (1) имеет вид $x < k + 2$;

в) если $k > 2$, то решение неравенства (1) имеет вид $x > k + 2$.

К упражнению 17

1. Требуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} kx + 4y = 4, \\ 3x + y = 1. \end{cases}$$

2. Из второго уравнения выразим $y = 1 - 3x$ и, подставив это выражение в первое уравнение, получим

$$kx + 4(1 - 3x) = 4, \quad \text{или} \quad (k - 12)x = 0.$$

3. Если $k \neq 12$, то $x = 0$, а $y = 1$.

4. Если $k = 12$, то система имеет решения вида $x = t$, $y = 1 - 3t$ (где $t \in \boldsymbol{R}$).

5. Итак, система имеет решения при любых k.

Тема 12

Понятие логарифма. Свойства логарифмов.
Логарифмическая функция, ее свойства и график.
Теоремы о логарифме произведения, частного и степени.
Формула перехода к новому основанию.
Десятичные логарифмы и их свойства.
Логарифмирование и потенцирование.
Логарифмические уравнения.
Логарифмические неравенства.
Системы логарифмических уравнений и неравенств

Теоретические сведения

1. Понятие логарифма

1°. ***Логарифмом*** числа b по основанию a (где $a > 0$, $a \neq 1$) называют показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить число b.

Логарифм числа b по основанию a обозначают символом $\log_a b$.

2°. Если $a > 0$, $a \neq 1$, то $\log_a b$ по определению есть показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b. Поэтому равенство $a^{\log_a b} = b$ есть тождество, которое называют ***основным логарифмическим тождеством***.

Например, $3^{\log_3 6} = 6$; $6^{\log_6 7} = 7$.

3°. Для обозначения десятичных логарифмов принята специальная запись: вместо $\log_{10} b$, где b — произвольное положительное число, пишут $\lg b$.

2. Свойства логарифмов

1°. Логарифмы существуют только для положительных чисел, т. е. $\log_a N$ (где $a > 0$ и $a \neq 1$) существует, если $N > 0$.

2°. При основании $a > 1$ логарифмы чисел $N > 1$ положительны, а логарифмы чисел $0 < N < 1$ отрицательны. Например, $\log_2 5 > 0$; $\log_3 0{,}5 < 0$.

3°. При основании $0 < a < 1$ логарифмы чисел $N > 1$ отрицательны, а логарифмы чисел $0 < N < 1$ положительны. Например, $\log_{0,5} 5 < 0$; $\log_{0,5} \frac{1}{3} > 0$.

4°. Равным положительным числам соответствуют и равные логарифмы, т. е. если $N_1 = N_2$, то $\log_a N_1 = \log_a N_2$.

5°. Если $a > 1$, то большему числу соответствует и больший логарифм, т. е. если $N_1 > N_2$, то $\log_a N_1 > \log_a N_2$. Например, $\log_3 7 > \log_3 5$.

6°. Если $0 < a < 1$, то большему числу соответствует меньший логарифм, т. е. если $N_1 > N_2$, то $\log_a N_1 < \log_a N_2$. Например, $\log_{1/3} 9 < \log_{1/3} 7$.

7°. Логарифм единицы по любому основанию ($a > 0$, $a \neq 1$) равен нулю, т. е. $\log_a 1 = 0$.

8°. Логарифм самого основания равен 1, т. е. $\log_a a = 1$.

3. Логарифмическая функция, ее свойства и график

1°. Так как показательная функция $y = a^x$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) является монотонной (возрастающей при $a > 1$ и убывающей при $0 < a < 1$), то она имеет обратную функцию. Чтобы найти эту обратную функцию, нужно из формулы $y = a^x$ выразить x через y: $x = \log_a y$, а затем поменять обозначения x на y и y на x; тогда получим $y = \log_a x$. Функцию $y = \log_a x$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) называют ***логарифмической***.

Итак, показательная и логарифмическая функции при одном и том же основании являются взаимно обратными функциями.

2°. График логарифмической функции $y = \log_a x$ можно построить, воспользовавшись тем, что функция $y = \log_a x$ обратна показательной функции $y = a^x$. Поэтому достаточно построить график функции $y = a^x$, а затем отобразить его симметрично относительно прямой $y = x$. На рис. 118 изображен график функции $y = \log_a x$ при $a > 1$, а на рис. 119 — график функции $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$.

3°. Отметим свойства функции $y = \log_a x$ при $a > 1$:

а) $D(f) = \boldsymbol{R}_+$;

б) $E(f) = \boldsymbol{R}$;

в) функция возрастает;

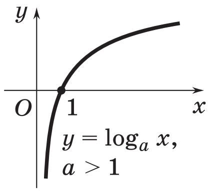


Рис. 118

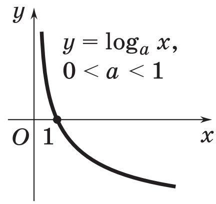


Рис. 119

г) $x = 1 \Leftrightarrow \log_a x = 0$;

д) $0 < x < 1 \Leftrightarrow \log_a x < 0$;

е) $x > 1 \Leftrightarrow \log_a x > 0$.

4°. Отметим свойства функции $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$:

а) $D(f) = \boldsymbol{R}_+$;

б) $E(f) = \boldsymbol{R}$;

в) функция убывает;

г) $x = 1 \Leftrightarrow \log_a x = 0$;

д) $0 < x < 1 \Leftrightarrow \log_a x > 0$;

е) $x > 1 \Leftrightarrow \log_a x < 0$.

4. Теоремы о логарифме произведения, частного и степени. Формула перехода к новому основанию

1°. Логарифм произведения двух или нескольких положительных чисел равен сумме логарифмов сомножителей, т. е.

$$\log_a (N_1 N_2 \ldots N_k) = \log_a N_1 + \log_a N_2 + \ldots + \log_a N_k.$$

Например, $\log_a (3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7) = \log_a 3 + \log_a 4 + \log_a 6 + \log_a 7$.

2°. Логарифм частного положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя, т. е.

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2.$$

Например, $\log_a \frac{3}{4} = \log_a 3 - \log_a 4$.

3°. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм ее основания, т. е.

$$\log_a N^c = c \log_a N.$$

З а м е ч а н и е. Если $N < 0$, а c — четное число, то справедлива формула

$$\log_a N^c = c \log_a |N|.$$

Например, $\log_a (-3)^4 = 4\log_a |-3|$.

4°. Формула перехода от основания b к основанию a имеет вид

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

Например, $\log_2 7 = \frac{\log_4 7}{\log_4 2} = \frac{\lg 7}{\lg 2}$ и т. д.

5°. Если $a = N$, то формула перехода примет вид

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}, \quad \text{или} \quad 1 = \log_b a \cdot \log_a b.$$

Например, $1 = \log_2 7 \cdot \log_7 2$.

6°. Если основание логарифма и число, находящееся под знаком логарифма, возвести в одну и ту же степень, отличную от нуля, то значение логарифма не изменится, т. е.

$$\log_a N = \log_{a^c} N^c; \quad \log_{a^k} N = \log_a N^{1/k} = \frac{\log_a N}{k}.$$

Например, $\log_2 4 = \log_{2^3} 4^3$; $\log_8 64 = \log_{2^3} 2^6 = \frac{6}{3}\log_2 2 = 2$.

Примеры. 1. Найти $25^{1 - \frac{1}{4}\log_5 49}$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$25^{1 - \frac{1}{4}\log_5 49} = (5^2)^{1 - \frac{1}{4}\log_5 49} = 5^{2 - \frac{1}{2}\log_5 49}.$$

Преобразуем теперь показатель степени:

$$2 - \frac{1}{2}\log_5 49 = 2\log_5 5 - \log_5 49^{1/2} =$$

$$= \log_5 5^2 - \log_5 7 = \log_5 \frac{25}{7}.$$

Следовательно, $5^{2 - \frac{1}{2}\log_5 49} = 5^{\log_5 \frac{25}{7}} = \frac{25}{7}$ (в силу основного логарифмического тождества).

2. Найти $\log_{\sqrt[4]{3}} \sqrt[8]{243}$.

Р е ш е н и е. Основание логарифма и логарифмируемое число можно возвести в одну и ту же степень. Поэтому

$$\log_{\sqrt[4]{3}} \sqrt[8]{243} = \log_{(\sqrt[4]{3})^4} (\sqrt[8]{243})^4 = \log_3 \sqrt{243} = \log_3 3^{5/2} = \frac{5}{2}.$$

3. Найти $\log_{30} 8$, если $\lg 5 = a$ и $\lg 3 = b$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$\log_{30} 8 = \log_{30} 2^3 = 3 \log_{30} 2 = \frac{3 \lg 2}{\lg 30};$$

$$\lg 2 = \lg \frac{10}{5} = \lg 10 - \lg 5 = 1 - a;$$

$$\lg 30 = \lg (2 \cdot 15) = \lg 2 + \lg 15 = \lg 2 + \lg (3 \cdot 5) =$$
$$= \lg 2 + \lg 3 + \lg 5 = 1 - a + b + a = 1 + b.$$

Итак, $\log_{30} 8 = \dfrac{3(1-a)}{1+b}$.

5. Десятичные логарифмы и их свойства

1°. ***Десятичный логарифм*** числа — это логарифм с основанием, равным 10; например, $\lg a$, $\lg 5$, $\lg 1$. Десятичные логарифмы обладают теми же свойствами, что и логарифмы чисел с любым положительным основанием.

2°. Десятичные логарифмы чисел находят по специальным таблицам (рекомендуется использовать «Четырехзначные математические таблицы» В. М. Брадиса).

3°. Целую часть десятичного логарифма числа называют его ***характеристикой***, а дробную часть — ***мантиссой***. Пусть, например, $\lg x = 2{,}7536$. Здесь 2 — характеристика, а 0,7536 — мантисса.

4°. Известно, что любое положительное число можно записать в стандартном виде: $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$; $n \in \boldsymbol{Z}$. Показатель n называют ***порядком*** данного числа.

5°. Характеристика десятичного логарифма числа $a \cdot 10^n$ равна n, а мантисса равна $\lg a$. Например:

$$\lg 4650 = \lg (4{,}65 \cdot 10^3) = 3 + \lg 4{,}65;$$
$$\lg 46{,}5 = \lg(4{,}65 \cdot 10^1) = 1 + \lg 4{,}65;$$
$$\lg 0{,}0465 = \lg (4{,}65 \cdot 10^{-2}) = -2 + \lg 4{,}65.$$

Таким образом, логарифмы чисел, отличающихся друг от друга только порядком, имеют одну и ту же мантиссу.

6°. Из указанных выше свойств следует, что

$$\lg 1 = 0,\ \lg 10 = 1,\ \lg 100 = 2,\ \ldots,\ \lg 10^n = n\ (n \in \boldsymbol{Z});$$
$$\lg 0{,}1 = -1,\ \lg 0{,}01 = -2,\ \ldots,\ \lg 10^{-n} = -n\ (n \in \boldsymbol{Z}).$$

6. Логарифмирование и потенцирование

1°. ***Логарифмирование*** — это преобразование, при котором логарифм выражения с переменными приводится к сумме или разности логарифмов переменных.

2°. Необходимо четко различать сумму логарифмов $\lg a + \lg b$ и логарифм суммы $\lg(a + b)$. Сумма логарифмов равна логарифму произведения, т. е. $\lg a + \lg b = \lg(ab)$, а для логарифма суммы $\lg(a + b)$ формулы нет.

Пример. Дано: $x = \dfrac{3a^2\sqrt[5]{b^3}}{c^4(a+b)}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Найти $\lg x$.

Р е ш е н и е. Логарифмируя, получим

$$\lg x = \lg 3 + \lg a^2 + \lg \sqrt[5]{b^3} - \lg c^4 - \lg(a + b) =$$
$$= \lg 3 + 21\mathrm{g}\, a + \frac{3}{5}\lg b - 4\lg c - \lg(a + b).$$

3°. ***Потенцирование*** — это преобразование, обратное логарифмированию.

Пример. Дано: $\lg x = 2\lg a - 5\lg b + \dfrac{3}{7}\lg c$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Требуется найти выражение для x.

Р е ш е н и е. Потенцируя, получим

$$\lg x = \lg a^2 - \lg b^5 + \lg c^{3/7} =$$
$$= \lg(a^2c^{3/7}) - \lg b^5 = \lg\frac{a^2c^{3/7}}{b^5};\ x = \frac{a^2c^{3/7}}{b^5}.$$

7. Логарифмические уравнения

1°. Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называют ***логарифмическим***. Простейшим примером логарифмического уравнения служит уравнение $\log_a x = b$ (где $a > 0$, $a \neq 1$).

2°. Решение логарифмического уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ основано на том, что такое уравнение равносильно уравнению $f(x) = g(x)$ при дополнительных условиях $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.

3°. Отметим, что переход от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$ может привести к появлению посторонних корней. Такие корни можно выявить либо с помощью подстановки найденных значений в исходное логарифмическое уравнение, либо с помощью нахождения области определения исходного уравнения (эта область задается системой неравенств $f(x) > 0$, $g(x) > 0$).

Пример. Решить уравнение:

а) $\log_{\sqrt[3]{4}} (x - 1) = 6$; б) $\log_3 (x^2 - 4x - 5) = \log_3 (7 - 3x)$;

в) $\lg (x - 6) - 0{,}5 \lg 2 = \lg 3 + \lg \sqrt{x - 10}$.

Р е ш е н и е. а) Согласно определению логарифма, имеем

$$x - 1 = (\sqrt[3]{4})^6; \quad x - 1 = (2^{2/3})^6; \quad x - 1 = 2^4; \quad x = 17.$$

б) Данное уравнение сводится к уравнению $x^2 - 4x - 5 = 7 - 3x$, откуда получаем $x^2 - x - 12 = 0$, т. е. $x_1 = 4$, $x_2 = -3$. Проверку выполняем с помощью условий $x^2 - 4x - 5 > 0$, $7 - 3x > 0$. Значение $x = 4$ этой системе неравенств не удовлетворяет (и, следовательно, является посторонним корнем), а значение $x = -3$ удовлетворяет. Итак, $x = -3$ — единственный корень данного уравнения.

в) Умножая обе части уравнения на 2 и используя свойства логарифмов, имеем

$$2 \lg (x - 6) - \lg 2 = 2 \lg 3 + \lg (x - 10);$$
$$\lg (x - 6)^2 = \lg 2 + \lg 3^2 + \lg (x - 10);$$
$$\lg (x - 6)^2 = \lg 18(x - 10).$$

В результате данное уравнение сводится к уравнению

$$(x - 6)^2 = 18(x - 10), \text{ или } x^2 - 30x + 216 = 0,$$

откуда $x_1 = 12$, $x_2 = 18$. Для проверки полученных значений найдем область определения данного уравнения; она задается системой неравенств $x - 6 > 0$, $x - 10 > 0$. Оба найденных значения этой системе удовлетворяют и, значит, служат корнями исходного уравнения.

4°. При решении логарифмических уравнений часто бывает полезен метод введения новой переменной.

Пример. Решить уравнение $\log_x 5\sqrt{5} - 1{,}25 = \log_x^2 \sqrt{5}$.

Р е ш е н и е. Преобразуем данное уравнение:

$$\log_x 5^{3/2} - \frac{5}{4} = (\log_x 5^{1/2})^2; \quad \frac{3}{2}\log_x 5 - \frac{5}{4} = \left(\frac{1}{2}\log_x 5\right)^2.$$

Полагая $\log_x 5 = y$, получаем

$$\frac{3y}{2} - \frac{5}{4} = \frac{y^2}{4}, \quad \text{или} \quad y^2 - 6y + 5 = 0,$$

откуда $y_1 = 1$, $y_2 = 5$. Таким образом, приходим к совокупности двух уравнений: $\log_x 5 = 1$; $\log_x 5 = 5$. Из первого уравнения находим $x_1 = 5$, а из второго получим $x_2 = \sqrt[5]{5}$.

5°. При решении уравнений, содержащих переменную и в основании, и в показателе степени, используют метод логарифмирования. Если при этом в показателе степени содержится логарифм, то обе части уравнения надо прологарифмировать по основанию этого логарифма.

Пример. Решить уравнение:

$$\text{а) } x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x; \quad \text{б) } x^{\log_2 x + 2} = 8.$$

Р е ш е н и е. а) Логарифмируем обе части уравнения по основанию x:

$$\sqrt{x}\ \lg x = x\ \lg\ \sqrt{x}\,; \ \sqrt{x}\lg x = \frac{1}{2}x\lg x; \ \frac{1}{2}\sqrt{x}\,(2 - \sqrt{x}\,)\lg x = 0.$$

Так как из условия следует, что $x > 0$, то последнее уравнение равносильно совокупности уравнений $2 - \sqrt{x} = 0$; $\lg x = 0$. Первое из них имеет корень $x_1 = 4$, а второе — корень $x_2 = 1$. Проверка показывает, что оба корня удовлетворяют данному уравнению.

б) Прологарифмировав обе части уравнения по основанию 2, получим

$$\log_2 (x^{\log_2 x + 2}) = \log_2 8; (\log_2 x + 2)\log_2 x = 3.$$

Теперь положим $\log_2 x = y$; тогда уравнение примет вид $y^2 + 2y - 3 = 0$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = -3$. Из уравнения $\log_2 x = 1$ находим $x_1 = 2$, а из уравнения $\log_2 x = -3$ находим $x_2 = \frac{1}{8}$.

8. Логарифмические неравенства

1°. Неравенство, содержащее переменную под знаком логарифма, называют ***логарифмическим***. Например, неравенства вида

$$\log_a f(x) > \log_a \varphi(x); \quad \log_a f(x) < \log_a \varphi(x),$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, являются логарифмическими.

2°. Неравенство $\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$ равносильно системе $f(x) > \varphi(x) > 0$ при $a \in (1; +\infty)$ и системе $0 < f(x) < \varphi(x)$ при $a \in (0; 1)$.

3°. При решении логарифмических неравенств следует учитывать общие свойства неравенств, свойство монотонности логарифмической функции и область ее определения.

Примеры. 1. Решить неравенство $\log_{0,5} \frac{5x-3}{x+2} > 1$.

Р е ш е н и е. Выразив правую часть неравенства через логарифм, получим $\log_{0,5} \frac{5x-3}{x+2} > \log_{0,5} 0{,}5$. Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{5x-3}{x+2} > 0, \\ \dfrac{5x-3}{x+2} < 0{,}5, \end{cases}$$

первое неравенство которой характеризует область определения логарифмической функции, а второе — ее убывание при основании $0 < 0{,}5 < 1$. Далее имеем

$$\begin{cases} \dfrac{5x-3}{x+2} > 0, \\ \dfrac{5x-3-0{,}5(x+2)}{x+2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5x-3}{x+2} > 0, \\ \dfrac{4{,}5x-4}{x+2} < 0. \end{cases}$$

Решение последней системы иллюстрирует рис. 120. В результате получаем ответ: $\left(\frac{3}{5}; \frac{8}{9}\right)$.

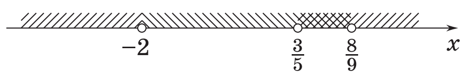


Рис. 120

2. Решить неравенство $\log_a x + \log_a (x+1) \leqslant \log_a (2x+6)$, $a \in (1; +\infty)$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$\begin{cases} x > 0, \\ x+1 > 0, \\ 2x+6 > 0, \\ \log_a x(x+1) \leqslant \log_a (2x+6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x(x+1) \leqslant 2x+6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 - x - 6 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ (x-3)(x+2) \leqslant 0. \end{cases}$$

Ответ: (0; 3].

3. Решить неравенство $\log_2(2^x - 1) \cdot \log_2(2^{x+1} - 2) < 2$.

Р е ш е н и е. Так как $2^{x+1} - 2 = 2(2^x - 1)$, то данное неравенство можно записать в виде

$$\log_2(2^x - 1) \cdot (\log_2 2 + \log_2(2^x - 1)) < 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_2(2^x - 1) \cdot (1 + \log_2(2^x - 1)) < 2.$$

Полагая $\log_2(2^x - 1) = y$ и учитывая, что $x > 0$, получим неравенство $y(1 + y) < 2$, или $y^2 + y - 2 < 0$, откуда $-2 < y < 1$. Возвращаясь к переменной x, получим

$$2^{-2} < 2^x - 1 < 2; \quad \frac{5}{4} < 2^x < 3; \quad \log_2 \frac{5}{4} < x < \log_2 3.$$

Итак, интервал $\left(\log_2 \frac{5}{4}; \log_2 3\right)$ — решение данного неравенства.

9. Системы логарифмических уравнений и неравенств

Известные способы решения систем алгебраических уравнений и неравенств применяются и к решению систем, содержащих логарифмические уравнения и неравенства.

Примеры. 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^{\lg y} = 100, \\ \log_y x = 2. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Логарифмируя первое уравнение при условиях $x > 0$, $y > 0$, $x \neq 1$, $y \neq 1$, получим $\lg y \cdot \lg x = 2$. Из второго уравнения следует, что $y^2 = x$.

Решаем теперь полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} x = y^2, \\ \lg y \cdot \lg x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2, \\ \lg y \cdot \lg y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2, \\ 2\lg^2 y = 2. \end{cases}$$

Последняя система распадается на две:

$$\begin{cases} x = y^2, \\ \lg y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 100, \\ y_1 = 10 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = y^2, \\ \lg y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0{,}01, \\ y_2 = 0{,}1. \end{cases}$$

Ответ: (100; 10); (0,01; 0,1).

2. Решить неравенство $\frac{\lg 7 - \lg(-8x - x^2)}{\lg(x+3)} > 0.$

Р е ш е н и е. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \lg 7 - \lg(-8x - x^2) > 0, \\ \lg(x+3) > 0; \end{cases} \qquad (*)$$

$$\begin{cases} \lg 7 - \lg(-8x - x^2) < 0, \\ \lg(x+3) < 0. \end{cases} \qquad (**)$$

Решаем сначала систему (*):

$$\begin{cases} \lg \frac{7}{-8x - x^2} > \lg 1, \\ \lg(x+3) > \lg 1, \\ -8x - x^2 > 0, \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{-8x - x^2} > 1, \\ x + 3 > 1, \\ 8x + x^2 < 0, \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{8x + x^2} + 1 < 0, \\ x > -2, \\ 8x + x^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7 + 8x + x^2}{8x + x^2} < 0, \\ x > -2, \\ 8x + x^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 + 8x + x^2 > 0, \\ 8x + x^2 < 0, \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)(x+1) > 0, \\ x(x+8) < 0, \\ x > -2. \end{cases}$$

Множеством решений системы (*) служит промежуток $(-1; 0)$ (рис. 121, *а*).

Решаем теперь систему (**):

$$\begin{cases} \lg \frac{7}{-8x - x^2} < \lg 1, \\ \lg(x+3) < \lg 1, \\ -8x - x^2 > 0, \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{-8x - x^2} < 1, \\ x + 3 < 1, \\ 8x + x^2 < 0, \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7 + 8x + x^2}{8x + x^2} > 0, \\ x < -2, \\ 8x + x^2 < 0, \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)(x+1) < 0, \\ -3 < x < -2, \\ x(x+8) < 0. \end{cases}$$

Множеством решений системы (**) служит промежуток $(-3; -2)$ (рис. 121, *б*). Таким образом, получаем ответ: $(-3; -2) \cup$ $\cup (-1; 0)$.

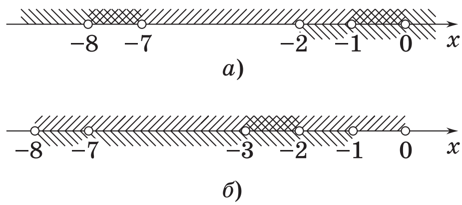


Рис. 121

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение логарифма данного числа по данному основанию.

2. Запишите основное логарифмическое тождество. Из чего оно следует?

3. Имеет ли смысл выражение: $\log_3(-5)$; $\log_2 0$?

4. Почему логарифмы существуют только для положительных чисел?

5. Сформулируйте свойства логарифмов чисел при основании $a > 1$; $0 < a < 1$.

6. Упростите выражение (пользуясь основным логарифмическим тождеством):

а) $10^{\lg 0,3}$; б) $10^{2 + \lg 0,4}$;

в) $10^{\lg 3 - \lg 2}$; г) $3^{2 \log_3 9}$.

7. Запишите данное равенство с помощью логарифма: а) $2^2 = 4$; б) $3^3 = 27$; в) $2^{-2} = \frac{1}{4}$; г) $7^0 = 1$.

8. Сравните выражения:

а) $\log_5 \frac{1}{2}$ и $\log_5 \frac{1}{3}$;

б) $\log_{1/3} 2$ и $\log_{1/3} 4$.

9. Какие из данных чисел являются положительными и какие отрицательными: а) $\log_{1/2} 5$; б) $\log_2 \frac{1}{3}$; в) $\log_{1/3} \frac{1}{2}$; г) $\log_n 3$?

10. Какую функцию называют логарифмической?

11. Сформулируйте свойства логарифмической функции при $a > 1$ и при $0 < a < 1$. Поясните их на графике.

12. Что является областью определения и множеством значений функции $y = \log_a x$?

13. Верно ли равенство $\lg x^2 =$ $= 2 \lg x$?

14. Верно ли равенство

$$\log_a x^k = k \log_a x,$$

где $a > 0$, $a \neq 1$?

15. Какие уравнения называют логарифмическими?

16. Является ли уравнение $\lg 5 + x \lg 6 = 3$ логарифмическим?

17. Существует ли хотя бы одно значение x, при котором верно равенство $\lg(x + 3) = \lg x +$ $+ \lg 3$?

18. Запишите область определения логарифмического уравнения $\log_a f(x) = \log_b g(x)$ в виде системы неравенств.

19. Как решается уравнение, содержащее неизвестное и в основании, и в показателе степени, например $x^{\lg x} = 10$?

20. Нужна ли проверка полученных корней при решении логарифмических уравнений? Почему?

21. Какие неравенства называют логарифмическими?

22. Чем следует руководствоваться при решении логарифмических неравенств?

23. Дано логарифмическое неравенство $\log_{1/2} x > 1$. Почему при его решении знак неравенства изменится на противоположный?

24. Дано логарифмическое неравенство $\lg x > 4$. Почему при его решении знак неравенства сохранится?

25. Можно ли утверждать, что неравенство $\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$ равносильно системе: а) $f(x) > \varphi(x) > 0$ при $a \in (1; +\infty)$; б) $0 < f(x) < \varphi(x)$ при $a \in (0; 1)$? Почему?

26. Найдите область определения функции, записав ее в виде системы неравенств:

а) $y = \sqrt{\lg \dfrac{1-2x}{x+3}}$;

б) $y = \log_3 \log_{0,5} x$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите область определения функции:

а) $y = x + \log_{0,4}(5x + 4) - \log_6(8x + 7)$;

б) $y = 2 + \log_3 \dfrac{9x+4}{5+8x}$;

в) $y = \log_7(x^2 - 3x) - \log_4 x$;

г) $y = 3\lg(3 + 5x) - \lg(4 + 9x)^2$.

2. Постройте график функции:

а) $y = 3^{\log_3(-x)}$; б) $y = \log_2 |x|$;

в) $y = \log_{0,1} |x|$; г) $y = |\log_2 x|$;

д) $y = |\log_{0,5} x|$; е) $y = \log_2 \log_2 x$;

ж) $y = 0,5 \log_3 (x - 1)^2$; з) $y = \log_2(1 - x^2)$;

и) $y = |\log_2 x - 1|$; к) $|y| = \log_{1/3} x$.

3. Решите уравнение:

а) $\log_2(3x - 1) - \log_2(4 - x) = 4 - \log_2(x - 1)$;

б) $\log_{0,5} x = 0,5 \log_{0,5}(2x^2 - x)$; в) $\log_{3-x}(3 + x) = 0,5$;

г) $\log_{0,2} 4x + \log_5(x^2 + 75) = 1$; д) $x^{\log_2 x - 1} = 4$;

е) $\log_5 (5^{\frac{1}{x}} + 125) = \log_5 6 + 1 + \frac{1}{2x}$;

ж) $\lg^2 x + \lg x^2 = \lg^2 2 - 1$; з) $\sqrt{\lg x} = \lg \sqrt{x}$;

и) $\frac{1}{3} \log_2 x^3 + \log_2 \frac{x+4}{x+1} = 2 \log_4 (0{,}5x + 3)$;

к) $\log_2 \frac{x-1}{4x+3} = 3 + \log_{16} x^4 - \log_4 (x-3)^2$;

л) $x^{\log_a x} = a^2 x$, где $a > 0$, $a \neq 1$;

м) $\log_x 9x^2 \cdot \log_3^2 x = 4$.

4. Решите неравенство:

а) $\log_{1/6} (x^2 - 3x + 2) < -1$;

б) $\log_{0,5} (2x^2 - 4x - 14) \leqslant -1$;

в) $\log_{x-6} (x^2 - 5) > \log_{x-6} (2x + 19)$;

г) $\log_{x-2} (2x - 3) > \log_{x-2} (24 - 6x)$;

д) $\log_{1/3} x + 2\log_{1/9} (x - 1) \leqslant \log_{1/3} 6$;

е) $\log_3 (16^x - 2 \cdot 12^x) \leqslant 2x + 1$;

ж) $\log_{0,3} |2x + 1| > 1$; з) $\log_2 \frac{4x-1}{x+3} < 1$;

и) $\log_{1/3} (3^{x+2} - 9) \cdot \log_3 (3^x - 1) > -3$;

к) $2^x < 3^{\frac{1}{x}}$; л) $\log_2 \log_{0,5} (x^2 - 2) < 1$;

м) $\lg \lg \lg x < 0$; н) $\log_{0,3} \log_6 \frac{x^2 + x}{x+4} < 0$.

5. Решите неравенство и укажите два значения x, являющихся его решениями:

а) $\frac{\log_{0,5}(2 - 3x)}{\log_{0,5} 625} < 0$; б) $(x - 5)\log_2 (8 + x) < 0$;

в) $\frac{\log_{0,5}(9 + x)}{10 + 10x} > 0$; г) $\frac{4x - 16}{\log_{0,8}(x + 5)} > 0$;

д) $0{,}09 > 0{,}3^{\log_{0,3}(5 - 4x)}$.

Задания для повторения

6. На прокладке двух параллельных трубопроводов работали два экскаватора. Первый из них начал работать на 30 мин раньше второго. Когда второй экскаватор выкопал 27 м^3, оказалось, что он отстает от первого на 1 м^3. С какой скоростью работали экскаваторы, если известно, что второй выкапывает в час на 4 м^3 больше, чем первый?

7. Две машинистки вместе напечатали 65 страниц, причем первая работала на 1 ч больше второй. Вторая машинистка, работая в одиночку, печатает в час на 2 страницы больше, чем первая, и при совместной работе она напечатала на 5 страниц больше. Сколько страниц в час печатает каждая машинистка?

8. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 8x^2 + 2xy - y^2 = 0, \\ y^2 - 8x + 4 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 + 2xy - 8y^2 = 0, \\ 4y^2 - x + 1 = 0. \end{cases}$$

9. Дано уравнение:

$$\text{а) } |x + 3|(x - 5) + k = 0; \quad \text{б) } |x - 1|(x - 5) + k = 0.$$

При каких значениях k оно имеет ровно три решения? В ответе укажите наибольшее целое значение k.

10. Решите неравенство:

а) $\dfrac{|x + 3| + x}{2 - |x|} \geqslant 1$ (в ответе укажите сумму целых решений);

б) $\dfrac{|x - 3| + x}{2 + |x|} \geqslant 1$ (в ответе укажите наименьшее решение).

ОТВЕТЫ

1. а) $x > -\frac{4}{5}$; б) $x < -\frac{5}{8}$, $x > -\frac{4}{9}$; в) $x > 3$; г) $-\frac{3}{5} < x < -\frac{4}{9}$, $-\frac{4}{9} < x < +\infty$. **3.** а) $x = 3$; б) $x = 1$; в) $x = -1$; г) $x_1 = 5$, $x_2 = 15$; д) $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 4$; е) $x_1 = 0{,}25$, $x_2 = 0{,}5$; ж) $x_1 = 0{,}05$, $x_2 = 0{,}2$; з) $x_1 = 1$, $x_2 = 10^4$; и) $x = 2$; к) нет корней; л) $x_1 = a^2$, $x_2 = \frac{1}{a}$; м) $x_1 = \frac{1}{9}$, $x_2 = 3$. **4.** а) $x < -1$, $x > 4$; б) $x \leqslant -2$, $x \geqslant 4$; в) $x > 6$; г) $2 < x < 3$, $\frac{27}{8} < x < 4$; д) $x \geqslant 3$; е) $\log_{4/3} 2 < x \leqslant \log_{4/3} 3$; ж) $-\frac{13}{20} < x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < x < -\frac{7}{20}$; з) $\frac{1}{4} < x < \frac{7}{20}$; и) $\log_3 \frac{28}{27} < x < \log_3 4$; к) $x < -\sqrt{\log_2 3}$, $0 < x < \sqrt{\log_2 3}$; л) $-\sqrt{3} < x < -1{,}5$, $1{,}5 < x < \sqrt{3}$; м) $10 < x < 10^{10}$; н) $-4 < x < -3$, $x > 8$. **5.** а) $0{,}2 < x < 0{,}4$; б) $-7 < x < 5$; в) $-8 < x < -1$; г) $-4 < x < 4$; д) $1{,}2275 < x < 1{,}25$. **6.** 14 и 18 м^3/ч. **7.** 5 и 7 страниц. **8.** а) $x = 1$, $y = -2$; б) $x = 2$, $y = -0{,}5$. **9.** а) 15; б) 3. **10.** а) -12; б) -1.

Решения и методические указания

К упражнению 1а

Так как логарифмы определены только для положительных чисел, то должна выполняться система неравенств

$$\begin{cases} 5x + 4 > 0, \\ 8x + 7 > 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x > -\dfrac{4}{5}, \\ x > -\dfrac{7}{8}, \end{cases}$$

откуда $x > -\dfrac{4}{5}$.

З а м е ч а н и е. Чтобы сравнить $-\dfrac{4}{5}$ и $-\dfrac{7}{8}$, достаточно привести дроби к общему знаменателю и затем сравнить числители:

а) $-\dfrac{4}{5} = -\dfrac{32}{5 \cdot 8}$; б) $-\dfrac{7}{8} = -\dfrac{35}{8 \cdot 5}$; в) так как $-32 > -35$, то $-\dfrac{4}{5} > -\dfrac{7}{8}$.

К упражнению 1г

1. Логарифмы определены только для положительных чисел, поэтому имеем систему

$$\begin{cases} 3 + 5x > 0, \\ (4 + 9x)^2 > 0. \end{cases}$$

2. Решив эту систему, получим

$$\begin{cases} x > -\dfrac{3}{5}, \\ x \neq -\dfrac{4}{9}. \end{cases}$$

Ответ: $x > -\dfrac{3}{5}$, $x \neq -\dfrac{4}{9}$.

К упражнению 2а

З а м е ч а н и е. При построении графиков функций будем находить ***характерные точки.***

К характерным точкам графика относят:

а) точки его пересечения с осью Ox, т. е. значения x при $y = 0$;

б) точку его пересечения с осью Oy, т. е. значение функции y при $x = 0$;

в) граничные значения функций, т. е. ее значения на границах промежутков существования;

г) точки, в которых функция принимает максимум или минимум, т. е. $y_{\max}$, $y_{\min}$ и соответствующие им значения x.

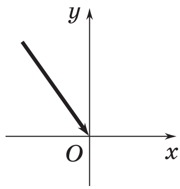


Рис. 122

1. Область определения функции $y = 3^{\log_3(-x)}$ — промежуток $(-\infty; 0)$.

2. По определению логарифма имеем $a^{\log_a b} = b$, поэтому $y = -x$.

3. Учитывая сказанное, запишем систему

$$\begin{cases} -x > 0, \\ y = -x, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 0, \\ y = -x. \end{cases}$$

4. Искомый график изображен на рис. 122.

К упражнению 2б

1. Так как $x \neq 0$, то область определения функции состоит из двух промежутков: $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

2. Функция четная, поскольку $\log_2 |-x| = \log_2 |x|$.

3. Сначала построим часть графика при $x > 0$, а затем отразим эту часть симметрично относительно оси Oy (рис. 123). Для более точного построения графика возьмем две контрольные точки: $(2; 1)$ и $(-2; 1)$.

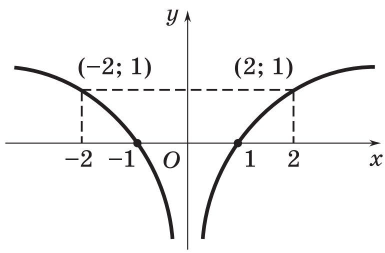


Рис. 123

К упражнению 2в

1. Так как $\log_{0,1} |x| = -\lg |x|$, то график данной функции представляет собой симметричное отображение относительно оси Ox графика функции $y = \lg x$ (рис. 124).

2. Искомый график можно получить и непосредственно с помощью тех же рассуждений, что и в упр. 2б.

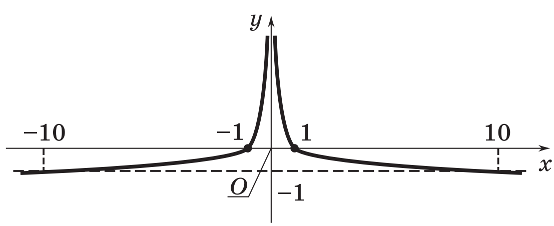


Рис. 124

К упражнению 2г

1. Строим график функции $y = \log_2 x$, затем ту часть графика, которая расположена под осью абсцисс, отражаем относительно этой оси.

2. На рис. 125 искомый график изображен сплошной линией.

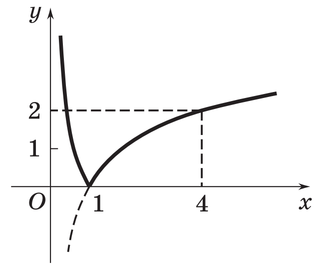


Рис. 125

К упражнению 2е

1. Для существования $\log_2 x$ необходимо, чтобы $x > 0$, а для существования $\log_2 \log_2 x$ — чтобы $\log_2 x > 0$, т. е. $x > 1$. Значит, прямая $x = 1$ является асимптотой графика.

2. Если $\log_2 x = 1$, т. е. если $x = 2$, то $y = 0$. Следовательно, график пересекает ось Ox в точке (2; 0).

3. Если $x \to 1$, то $y \to -\infty$, а если $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$, причем x увеличивается быстрее, чем y.

4. При $x = 4$ функция принимает значение $y = 1$.

5. На основании исследования строим график (рис. 126).

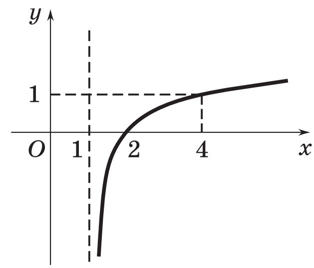


Рис. 126

К упражнению 2ж

1. Находим область определения функции: $x \in \boldsymbol{R}$, $x \neq 1$.

2. Прямая $x = 1$ служит асимптотой графика функции.

3. При изменении x от $-\infty$ до 1 функция убывает от $+\infty$ до $-\infty$, а при изменении x от 1 до $+\infty$ функция возрастает от $-\infty$ до $+\infty$.

4. Искомый график изображен на рис. 127.

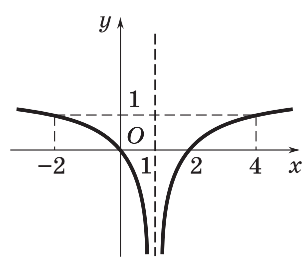


Рис. 127

К упражнениям 2з—к

См. соответственно рис. 128—130.

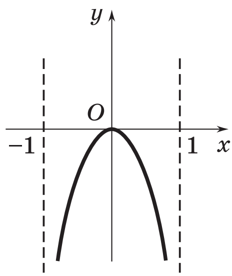


Рис. 128

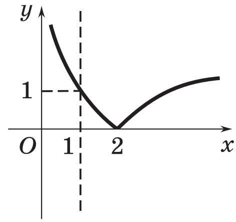


Рис. 129

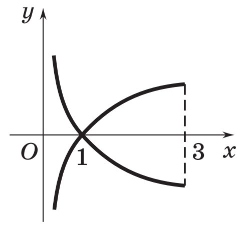


Рис. 130

З а м е ч а н и е. Дальнейшие упражнения будут связаны с решением логарифмических уравнений, неравенств и систем. При этом будем использовать следующие формулы:

1. $a^{\log_a x} = x$. **2.** $\log_a a^x = x$.

3. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$. **4.** $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

5. $\log_a x^k = k \log_a x$. **6.** $\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x$.

7. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$. **8.** $\log_a a = 1$.

9. $\log_a 1 = 0$. **10.** $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$.

Кроме того, будем использовать следующие свойства:

а) если $a > 1$, то $\log_a x$ возрастает;

б) если $0 < a < 1$, то $\log_a x$ убывает.

Особенности формул 1, 3, 4 и 5 состоят в том, что их правые и левые части, взятые по отдельности, имеют разные области определения.

В формуле 1: левая часть определена при $x > 0$, а правая — при $x \in \boldsymbol{R}$.

В формулах 3 и 4: левые части определены при $xy > 0$, а правые — только при $x > 0$ и $y > 0$.

В формуле 5: если $k = 2n$, где $n \neq 0$, n — целое, то левая часть определена при всех $x \neq 0$, а правая — только при $x > 0$.

Отмеченные особенности следует учитывать, применяя указанные формулы для преобразования уравнений или неравенств. Это может привести как к потере решений (корней), так и к появлению посторонних корней.

К упражнению 3а

1. Находим ОДЗ: $1 < x < 4$.

2. Данное уравнение равносильно уравнению

$$\log_2 (3x - 1) - \log_2 (4 - x) + \log_2 (x - 1) = 4,$$

или

$$\log_2 \frac{(3x-1)(x-1)}{4-x} = 4. \tag{1}$$

3. Используя определение логарифма, от уравнения (1) перейдем к следующему:

$$\frac{(3x-1)(x-1)}{4-x} = 16. \tag{2}$$

4. Из уравнения (2) следует, что

$$(3x - 1)(x - 1) = 16(4 - x),$$

или

$$x^2 + 4x - 21 = 0. \tag{3}$$

5. Решив уравнение (3), находим $x_1 = 3$, $x_2 = -7$ (посторонний корень, так как он не входит в ОДЗ уравнения). Итак, $x = 3$.

К упражнению 3б

1. Находим ОДЗ: $x > \frac{1}{2}$.

2. Данное уравнение равносильно уравнению

$$\log_{0,5} x = \log_{0,5} \sqrt{2x^2 - x}\,. \tag{1}$$

3. Из уравнения (1) следует, что

$$x = \sqrt{2x^2 - x}\,. \tag{2}$$

4. Решив уравнение (2), получим $x_1 = 0$ (этот корень — посторонний), $x_2 = 1$. Итак, $x = 1$.

К упражнению 3в

1. Находим ОДЗ: $-3 < x < 3$, $x \neq 2$.

2. Согласно определению логарифма, имеем

$$(3 - x)^{0,5} = 3 + x, \text{ или } \sqrt{3-x} = x + 3.$$

3. Решив это уравнение, находим $x_1 = -6$ (посторонний корень), $x_2 = -1$.

<u>Ответ</u>: $x = -1$.

К упражнению 3г

1. Находим ОДЗ: $x > 0$.

2. Данное уравнение содержит различные основания. Используя формулу 6, получим $\log_{0,2} 4x = \log_{5^{-1}} 4x = -\log_5 4x$; тогда уравнение примет вид

$$\log_5 (x^2 + 75) - \log_5 4x = 1. \qquad (1)$$

3. От уравнения (1) перейдем к уравнению

$$\log_5 \frac{x^2 + 75}{4x} = 1. \qquad (2)$$

4. Из уравнения (2) следует, что $\frac{x^2 + 75}{4x} = 5$, или $x^2 - 20x + 75 = 0$, откуда находим $x_1 = 5$, $x_2 = 15$.

К упражнению 3д

1. Находим ОДЗ: $x > 0$.

2. В этой области выражения, входящие в обе части данного уравнения, принимают только положительные значения; поэтому, прологарифмировав обе части по основанию 2, получим уравнение

$$\log_2 x^{\log_2 x - 1} = \log_2 4, \qquad (1)$$

равносильное данному.

3. Упростим уравнение (1):

$$(\log_2 x - 1)\log_2 x = 2. \qquad (2)$$

4. Пусть $y = \log_2 x$; тогда уравнение (2) примет вид $(y - 1)y = 2$, откуда $y_1 = -1$, $y_2 = 2$.

5. Остается решить два уравнения: а) $\log_2 x = -1$, т. е. $x_1 = \frac{1}{2}$; б) $\log_2 x = 2$, т. е. $x_2 = 4$.

К упражнению 3е

1. Находим ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$, $x \neq 0$.

2. Преобразуем выражение $1 + \frac{1}{2x}$. Используя основное логарифмическое тождество, получим $1 + \frac{1}{2x} = \log_5 5^{1 + \frac{1}{2x}}$. Тогда данное уравнение примет вид

$$\log_5 (5^{\frac{1}{x}} + 125) = \log_5 6 + \log_5 5^{1 + \frac{1}{2x}}.$$

3. Далее имеем

$\log_5 (5^{\frac{1}{x}} + 125) = \log_5 \left(6 \cdot 5^{1 + \frac{1}{2x}}\right)$, или $5^{\frac{1}{x}} + 125 = 30 \cdot 5^{\frac{1}{2x}}$.

Получили показательное уравнение, которое можно решить введением новой переменной: полагая $u = 5^{\frac{1}{2x}}$, придем к квадратному уравнению $u^2 - 30u + 125 = 0$, имеющему корни $u_1 = 5$, $u_2 = 25$.

4. Теперь остается решить два уравнения: а) $u_1 = 5^{\frac{1}{2x}} = 5$, т. е. $x_1 = \frac{1}{2}$; б) $u_2 = 5^{\frac{1}{2x}} = 25$, т. е. $x_2 = \frac{1}{4}$.

К упражнению 3ж

1. Находим ОДЗ: $x > 0$.

2. Перепишем данное уравнение так:

$$\lg^2 x + 2 \lg |x| + 1 - \lg^2 2 = 0. \qquad (1)$$

Учитывая, что $x > 0$, освободимся от знака модуля, после чего уравнение (1) примет вид

$$\lg^2 x + 2 \lg x + 1 - \lg^2 2 = 0. \qquad (2)$$

3. Находим корни уравнения (2): $(\lg x)_{1,\,2} = -1 \pm \lg 2$.

4. Далее имеем:

а) $\lg x = -1 - \lg 2$, или $\lg x + \lg 2 = -1$, т. е. $\lg 2x = -1$, откуда $x_1 = 0{,}05$;

б) $\lg x = -1 + \lg 2$, или $\lg x - \lg 2 = -1$, т. е. $\lg \frac{x}{2} = -1$, откуда $x_2 = 0{,}2$.

К упражнению 3з

1. Найдем ОДЗ: обе части уравнения имеют смысл при $\lg x \geqslant 0$, откуда $x \geqslant 1$.

2. Учитывая, что $\lg \sqrt{x} = \lg x^{1/2} = \frac{1}{2} \lg x$, получим уравнение

$$\sqrt{\lg x} = \frac{1}{2} \lg x.$$

3. Возведя обе части последнего уравнения в квадрат, имеем

$$\lg x = \frac{1}{4} \lg^2 x.$$

4. Следовательно, $\lg x = 0$, откуда $x_1 = 1$, и $\lg x = 4$, откуда $x_2 = 10^4$.

К упражнению 3и

1. Здесь ОДЗ определяется системой неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x+4}{x+1} > 0, \\ x > 0, \\ 0{,}5x + 3 > 0, \end{cases}$$

откуда $x > 0$.

2. Упростим правую часть данного уравнения:

$$2\log_4(0{,}5x+3) = 2\log_{2^2}(0{,}5x+3) = \log_2(0{,}5x+3).$$

3. Тогда уравнение примет вид

$$\log_2 x + \log_2 \frac{x+4}{x+1} = \log_2(0{,}5x+3),$$

или

$$\log_2 \frac{x(x+4)}{x+1} = \log_2(0{,}5x+3). \qquad (1)$$

4. Из уравнения (1) следует, что

$$\frac{x(x+4)}{x+1} = \frac{x+6}{2}. \qquad (2)$$

5. Решив уравнение (2), находим $x_1 = -3$ (посторонний корень), $x_2 = 2$. Итак, $x = 2$.

К упражнению 3к

1. Находим ОДЗ:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{4x+3} > 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq 3, \end{cases}$$

т. е. $x > 1$, $x \neq 3$.

2. Упростим правую часть данного уравнения:

$$3 + \log_{16} x^4 - \log_4(x-3)^2 = \log_2 8 + \log_2 x - \log_2|x-3| =$$

$$= \log_2 8x - \log_2|x-3| = \log_2 \frac{8x}{|x-3|}.$$

3. Тогда уравнение примет вид

$$\log_2 \frac{x-1}{4x+3} = \log_2 \frac{8x}{|x-3|},$$

или

$$\frac{x-1}{4x+3} = \frac{8x}{|x-3|}.$$

4. Для решения этого уравнения нужно рассмотреть две системы с учетом ОДЗ:

$$\text{а)}\begin{cases} 1 < x < 3, \\ \dfrac{x-1}{4x+3} = \dfrac{8x}{3-x} \end{cases}; \quad \text{б)}\begin{cases} x > 3, \\ \dfrac{x-1}{4x+3} = \dfrac{8x}{x-3}. \end{cases}$$

Обе системы не имеют решений. Значит, не имеет корней и данное уравнение.

З а м е ч а н и е. Любое логарифмическое неравенство сводится в конечном счете к неравенству вида

$$\log_a f(x) > \log_a g(x), \qquad (*)$$

где $a > 0$ и $a \neq 1$.

При переходе от неравенства (*) к неравенству, связывающему $f(x)$ и $g(x)$, нужно обязательно учитывать, что логарифмическая функция возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$.

Таким образом, в случае $a > 1$ от неравенства (*) нужно перейти к неравенству того же смысла, т. е. $f(x) > g(x)$, а в случае $0 < a < 1$ от неравенства (*) — к неравенству противоположного смысла, т. е. $f(x) < g(x)$.

Разумеется, и в том и в другом случае следует учитывать, что должны также выполняться неравенства $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$.

К упражнению 4а

1. Для отыскания ОДЗ решим неравенство

$$x^2 - 3x + 2 > 0,$$

откуда следует, что $x < 1$ или $x > 2$.

2. Так как $-1 = \log_{1/6} 6$, то данное неравенство можно переписать так:

$$\log_{1/6}(x^2 - 3x + 2) < \log_{1/6} 6. \qquad (1)$$

3. Здесь основание логарифма равно $\frac{1}{6}$, т. е. $0 < a < 1$, и, следовательно, неравенство (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0, \\ x^2 - 3x + 2 > 6. \end{cases} \qquad (2)$$

4. Очевидно, что система (2) равносильна неравенству $x^2 - 3x + 2 > 6$, решая которое находим $x < -1$; $x > 4$.

К упражнению 4в

1. Здесь нужно рассмотреть два случая: а) $x - 6 > 1$; б) $0 < x - 6 < 1$.

2. Таким образом, задача сводится к решению следующей совокупности двух систем неравенств:

$$\text{а)} \begin{cases} x - 6 > 1, \\ x^2 - 5 > 0, \\ 2x + 19 > 0, \\ x^2 - 5 > 2x + 19; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} 0 < x - 6 < 1, \\ x^2 - 5 > 0, \\ 2x + 19 > 0, \\ x^2 - 5 < 2x + 19. \end{cases}$$

3. Система а) имеет решение $x > 6$, а система б) не имеет решений. Итак, $x > 6$.

К упражнению 4е

1. Воспользуемся тем, что $2x + 1 = \log_3 3^{2x+1}$, и перепишем данное неравенство так:

$$\log_3 (16^x - 2 \cdot 12^x) \leqslant \log_3 3^{2x+1}. \tag{1}$$

2. Здесь основание логарифма равно 3, т. е. $a > 1$, и, следовательно, неравенство (1) равносильно системе

$$\begin{cases} 16^x - 2 \cdot 12^x > 0, \\ 16^x - 2 \cdot 12^x \leqslant 3^{2x+1}, \end{cases} \quad \text{или} \quad 0 < 16^x - 2 \cdot 12^x \leqslant 3^{2x+1}. \tag{2}$$

3. Разделим обе части неравенства (2) на $3^{2x} > 0$ и положим $t = \left(\frac{4}{3}\right)^x$; тогда получим следующую систему алгебраических неравенств:

$$0 < t^2 - 2t \leqslant 3. \tag{3}$$

4. Система (3) имеет решение $2 < t \leqslant 3$. Отсюда следует, что $2 < \left(\frac{4}{3}\right)^x \leqslant 3$, т. е. $\log_{4/3} 2 < x \leqslant \log_{4/3} 3$.

К упражнению 4к

1. Находим ОДЗ: $x \neq 0$.

2. Заметим, что обе части данного неравенства положительны, следовательно, определены логарифмы этих выражений.

3. Прологарифмируем обе части неравенства, например по основанию 2 (можно и по основанию 3).

4. Согласно свойству логарифмической функции, данное неравенство равносильно неравенству

$$\log_2 2^x < \log_2 3^{\frac{1}{x}}. \tag{1}$$

5. Преобразуем неравенство (1) и получим

$$x < \frac{1}{x} \log_2 3. \tag{2}$$

6. Решим неравенство (2) методом интервалов; имеем

$$\frac{x^2 - \log_2 3}{x} < 0, \text{ или } \frac{(x - \sqrt{\log_2 3})(x + \sqrt{\log_2 3})}{x} < 0,$$

откуда $x < -\sqrt{\log_2 3}$, $0 < x < \sqrt{\log_2 3}$.

З а м е ч а н и е. Если бы мы прологарифмировали обе части данного неравенства по основанию $0 < a < 1$, то знак неравенства должны были бы изменить на противоположный.

К упражнению 4л

1. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 2 > 0, \\ \log_{0,5}(x^2 - 2) > 0, \\ \log_{0,5}(x^2 - 2) < 2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 - 2 > 0, \\ \log_{0,5}(x^2 - 2) > \log_{0,5} 1, \\ \log_{0,5}(x^2 - 2) < \log_{0,5} 0{,}25. \end{cases} \qquad (1)$$

2. Перейдем от системы (1) к следующей:

$$\begin{cases} x^2 - 2 < 1, \\ x^2 - 2 > 0{,}25, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) < 0, \\ (x - 1{,}5)(x + 1{,}5) > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

3. Решив систему (2), получим ответ: $-\sqrt{3} < x < -1{,}5$; $1{,}5 < x < \sqrt{3}$.

К упражнению 5в

1. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\text{а) } \begin{cases} 9 + x > 0, \\ \log_{0,5}(9 + x) > 0, \\ 10 + 10x > 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 9 + x > 0, \\ \log_{0,5}(9 + x) < 0, \\ 10 + 10x < 0. \end{cases}$$

2. Решаем систему а):

$$\begin{cases} 9 + x > 0, \\ \log_{0,5}(9 + x) > \log_{0,5} 1, \\ 10 + 10x > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > -9, \\ x < -8, \\ x > -1; \end{cases}$$

система не имеет решений.

3. Решаем систему б):

$$\begin{cases} 9 + x > 0, \\ \log_{0,5}(9 + x) < \log_{0,5} 1, \\ 10 + 10x < 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > -9, \\ x > -8, \\ x < -1; \end{cases}$$

решением системы является интервал $-8 < x < -1$.

Ответ: $-8 < x < -1$.

К упражнению 6

1. Пусть v (м^3/ч) — скорость, с которой работал первый экскаватор; тогда $v + 4$ (м^3/ч) — скорость, с которой работал второй экскаватор.

2. Пусть t (ч) — время, за которое второй экскаватор выкопал 27 м^3.

3. Используя условие, составим систему уравнений

$$\begin{cases} v\left(t + \frac{1}{2}\right) = 28, \\ (v + 4)t = 27. \end{cases}$$

4. Выразив из второго уравнения t и подставив это выражение в первое уравнение, получим квадратное уравнение

$$v^2 + 2v - 224 = 0,$$

имеющее корни $v_1 = -16$, $v_2 = 14$.

5. Положительный корень $v = 14$ служит решением задачи.

Ответ: 14 и 18 м^3/ч.

К упражнению 8а

1. Рассмотрим первое уравнение системы как квадратное относительно x и решим его:

$$x_{1,\,2} = \frac{-y \pm 3y}{8}\text{, т. е. } x_1 = -\frac{y}{2}\text{, } x_2 = \frac{y}{4}\text{.}$$

2. Перейдем от данной системы к совокупности систем:

$$\text{а) } \begin{cases} x = -\frac{y}{2}, \\ y^2 - 8x + 4 = 0; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} x = \frac{y}{4}, \\ y^2 - 8x + 4 = 0. \end{cases}$$

3. Решаем систему а):

$$\begin{cases} x = -\frac{y}{2}, \\ y^2 + 4y + 4 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -\frac{y}{2}, \\ (y + 2)^2 = 0, \end{cases}$$

откуда $y = -2$, $x = 1$.

4. Решаем систему б):

$$\begin{cases} x = \frac{y}{4}, \\ y^2 - 2y + 4 = 0 \end{cases} \text{ — эта система не имеет решений.}$$

Ответ: $x = 1$, $y = -2$.

К упражнению 9б

1. Перепишем данное уравнение в виде

$$|x-1|(x-5)=-k. \qquad (1)$$

2. Построим график функции $y = |x-1|(x-5)$, находящейся в левой части уравнения (1). При $x \geqslant 1$ — это часть параболы $y=(x-1)(x-5)=x^2-6x+5$, а при $x<1$ — часть параболы $y=(1-x)\times(x-5)=-x^2+6x-5$ (рис. 131).

3. Графиком функции $y=-k$ является прямая, параллельная оси Ox.

4. Из рис. 131 видно, что прямая $y=-k$ пересекает график, составленный из частей парабол, в трех точках при условии $-4<-k<0$, откуда $4>k>0$.

<u>Ответ</u>: $k=3$.

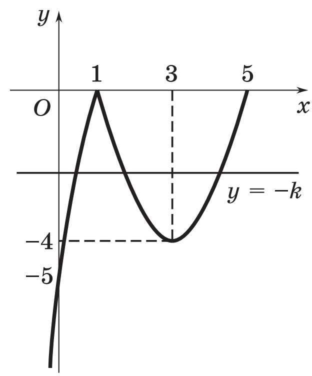


Рис. 131

К упражнению 10а

1. Для решения данного неравенства освободимся от знаков модулей.

2. Точки $x=-3$ и $x=0$ разбивают числовую прямую на три промежутка: $(-\infty; -3]$; $(-3; 0]$ и $(0; +\infty)$.

3. Решим исходное неравенство на каждом из этих промежутков:

а) на $(-\infty; -3]$ имеем

$$\frac{-x-3+x}{2+x} \geqslant 1; \quad \frac{-3}{2+x}-1 \geqslant 0; \quad \frac{x+5}{2+x} \leqslant 0, \text{ т. е. } x \in [-5; -3];$$

б) на $(-3; 0]$ имеем

$$\frac{x+3+x}{2+x} \geqslant 1; \quad \frac{2x+3}{2+x}-1 \geqslant 0; \quad \frac{x+1}{2+x} \geqslant 0,$$
$$\text{т. е. } x \in (-3; -2) \cup [-1; 0];$$

в) на $(0; +\infty)$ имеем

$$\frac{x+3+x}{2-x} \geqslant 1; \quad \frac{2x+3}{2-x}-1 \geqslant 0; \quad \frac{3x+1}{2-x} \geqslant 0, \text{ т. е. } x \in (0; 2).$$

4. Объединив найденные решения, запишем решение данного неравенства: $x \in [-5; -2) \cup [-1; 2)$.

5. Найдем сумму целых решений: $-5 -4 -3 - 1 + 0 + 1 = -12$.

Тема 13

Арифметическая прогрессия. Геометрическая прогрессия. Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$

Теоретические сведения

1. Арифметическая прогрессия

1°. Числовую последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему члену, сложенному с одним и тем же числом, называют ***арифметической прогрессией***. Обозначение: $\div a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$.

2°. Из определения арифметической прогрессии следует, что разность между любым ее членом и ему предшествующим равна одному и тому же числу, т. е. $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_k - a_{k-1} = = \ldots$. Это число называют ***разностью*** арифметической прогрессии и обычно обозначают буквой d.

3°. Для того чтобы задать арифметическую прогрессию (a_n), достаточно знать ее первый член a_1 и разность d.

4°. Если разность арифметической прогрессии — положительное число, то такая прогрессия является возрастающей; если отрицательное число, то — убывающей. Если разность арифметической прогрессии равна нулю, то все ее члены равны между собой, и прогрессия является постоянной последовательностью. Такую прогрессию обычно не рассматривают.

5°. Характеристическое свойство арифметической прогрессии. *Любой ее член, начиная со второго, является средним арифметическим предшествующего и последующего членов*, т. е.

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}, \quad \text{где} \quad n \in \boldsymbol{N}. \tag{1}$$

6°. Формула n-го члена арифметической прогрессии имеет вид

$$a_n = a_1 + d(n - 1). \qquad (2)$$

7°. Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии имеет вид

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \qquad (3)$$

8°. Если в формулу (3) подставить вместо a_n его выражение по формуле (2), то получится соотношение

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n. \qquad (4)$$

9°. Из определения разности арифметической прогрессии следует, что $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots$, т. е. *сумма членов, равноудаленных от концов прогрессии, есть величина постоянная.*

Примеры. 1. Найти сумму двадцати членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$.

Р е ш е н и е. Согласно свойству арифметической прогрессии (см. п. 9°), имеем $a_1 + a_{20} = a_6 + a_{15} = a_9 + a_{12}$. Следовательно, $a_1 + a_{20} = \frac{20}{2} = 10$. Теперь по формуле (3) находим

$$S_{20} = 10 \cdot \frac{20}{2} = 100.$$

2. Последовательность задана формулой ее n-го члена: $y_n = 2n - 5$. Доказать, что (y_n) — арифметическая прогрессия.

Р е ш е н и е. Для доказательства воспользуемся характеристическим свойством арифметической прогрессии (см. п. 5°). Так как $y_{n-1} = 2(n - 1) - 5 = 2n - 7$, $y_{n+1} = 2(n + 1) - 5 = 2n - 3$, то

$$\frac{y_{n-1} + y_{n+1}}{2} = \frac{2n - 7 + 2n - 3}{2} = 2n - 5 = y_n,$$

т. е. (y_n) — арифметическая прогрессия.

3. Найти арифметическую прогрессию, если $a_1 + a_5 = 24$, $a_2 a_3 = 60$.

Р е ш е н и е. Согласно условию, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 + a_5 = 24, \\ a_2 a_3 = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 + 4d = 24, \\ (a_1 + d)(a_1 + 2d) = 60 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2d = 12, \\ (a_1 + d) \cdot 12 = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2d = 12, \\ a_1 + d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d + 5 = 12, \\ a_1 + d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 7, \\ a_1 = -2. \end{cases}$$

Итак, получаем ответ: $\div -2, 5, 12, \ldots$.

2. Геометрическая прогрессия

1°. Числовую последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число, называют ***геометрической прогрессией***. Обозначение: $\div\div\, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$.

2°. Из определения геометрической прогрессии следует, что отношение любого ее члена к предшествующему равно одному и тому же числу, т. е. $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \ldots = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \ldots$. Это число называют ***знаменателем*** геометрической прогрессии и обычно обозначают буквой q.

3°. Для того чтобы задать геометрическую прогрессию (b_n), достаточно знать ее первый член b_1 и знаменатель q. Например, условиями $b_1 = 4$, $q = -3$ ($q < 0$) задается геометрическая прогрессия $4, -12, 36, -108, \ldots$. Эта прогрессия не является ни возрастающей, ни убывающей последовательностью.

4°. Если $q > 0$ ($q \neq 1$), то прогрессия является монотонной последовательностью. Пусть, например, $b_1 = -2$, $q = 3$; тогда геометрическая прогрессия $-2, -6, -18, \ldots$ есть монотонно убывающая последовательность.

Если $q = 1$, то все члены прогрессии равны между собой. В этом случае прогрессия является постоянной последовательностью. Такую прогрессию обычно не рассматривают.

5°. <u>Характеристическое свойство геометрической прогрессии.</u> *В геометрической прогрессии, все члены которой — поло-*

жительные числа, любой ее член, начиная со второго, равен арифметическому квадратному корню из произведения предшествующего и последующего членов, т. е.

$$b_{n+1} = \sqrt{b_n \cdot b_{n+2}}\,, \text{ где } n \in \boldsymbol{N}. \qquad (1)$$

6°. Формула n-го члена геометрической прогрессии имеет вид

$$b_n = b_1 q^{n-1}. \qquad (2)$$

7°. Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии имеет вид

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} \quad (q \neq 1). \qquad (3)$$

8°. Если в формулу (3) подставить вместо b_n его выражение по формуле (2), то получится соотношение

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (q \neq 1). \qquad (4)$$

9°. Из определения знаменателя геометрической прогрессии следует, что $b_1 b_n = b_2 b_{n-1} = \ldots$, т. е. *произведение членов, равноотстоящих от концов прогрессии, есть величина постоянная.*

Примеры. 1. Доказать, что последовательность (x_n), заданная формулой общего члена $x_n = 2b^n$, где $b \neq 0$, является геометрической прогрессией.

Р е ш е н и е. Воспользуемся характеристическим свойством геометрической прогрессии (см. п. 5°). Так как $x_{n-1} = 2b^{n-1}$, $x_{n+1} = 2b^{n+1}$, то

$$x_{n-1} \cdot x_{n+1} = 2b^{n-1} \cdot 2b^{n+1} = 4b^{2n} = x_n^2\,,$$

т. е. (x_n) — геометрическая прогрессия.

2. Известно, что числа 3^{2x^2+1}; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4x-1}$; $(\sqrt{3})^{2x^2+6x-2}$ образуют геометрическую прогрессию. Найти x.

Р е ш е н и е. Так как $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, то

$$\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-4x-1}\right)^2 = 3^{2x^2+1} \cdot 3^{x^2+3x-1} \Leftrightarrow 3^{8x+2} = 3^{3x^2+3x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x + 2 = 3x^2 + 3x \Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0;\ x_1 = 2;\ x_2 = -\frac{1}{3}.$$

3. Сумма трех чисел, являющихся последовательными членами арифметической прогрессии, равна 21. Если второе число уменьшить на 1, а третье увеличить на 1, то получатся три последовательных члена геометрической прогрессии. Найти эти числа.

Р е ш е н и е. Пусть a_1, a_2, a_3 — члены арифметической прогрессии. Тогда a_1, $a_2 - 1$, $a_3 + 1$ — члены геометрической прогрессии. В результате приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 21, \\ (a_2 - 1)^2 = a_1(a_3 + 1), \end{cases}$$

первое уравнение которой получается из условия задачи, а второе — на основании характеристического свойства геометрической прогрессии.

Выразив теперь все величины через a_1 и d, имеем

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 21, \\ (a_1 + d - 1)^2 = a_1(a_1 + 2d + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + d = 7, \\ 6^2 = a_1(8 + d) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 7 - d, \\ 36 = (7 - d)(8 + d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 7 - d, \\ d^2 + d - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 7 - d, \\ \left[\begin{array}{l} d_1 = 4, \\ d_2 = -5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 3, \\ d = 4 \end{cases} \text{или} \begin{cases} a_1 = 12, \\ d = -5. \end{cases}$$

Итак, получаем ответ: 3, 7, 11 или 12, 7, 2.

3. Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$

1°. Пусть (b_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем q, где $|q| < 1$ и первый член $b_1 \neq 0$. ***Суммой бесконечной геометрической прогрессии***, знаменатель которой удовлетворяет условию $|q| < 1$, называют предел суммы n первых ее членов при $n \to \infty$.

2°. Обозначим сумму бесконечной геометрической прогрессии через S. Тогда справедлива формула

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Примеры. 1. Найти сумму бесконечной геометрической прогрессии $2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, -\frac{2}{27}, \ldots$.

Р е ш е н и е. Здесь $b_1 = 2$, $|q| = \frac{1}{3} < 1$. Следовательно,

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{2}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{2}.$$

2. Обратить периодическую дробь 0,58333... в обыкновенную.

Р е ш е н и е. Данную дробь можно записать в виде

$$0{,}58333\ldots = \frac{58}{100} + \left(\frac{3}{1000} + \frac{3}{10\,000} + \ldots\right).$$

Выражение в скобках представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии, у которой первый член $b_1 = 0{,}003$, а знаменатель $q = 0{,}0003 : 0{,}003 = 0{,}1$. Следовательно,

$$0{,}58(3) = \frac{58}{100} + \frac{0{,}003}{1 - 0{,}1} = \frac{58}{100} + \frac{1}{300} = \frac{7}{12}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какую числовую последовательность называют арифметической прогрессией?

2. Как определяется разность арифметической прогрессии?

3. Какому условию удовлетворяет разность арифметической прогрессии, если эта прогрессия является возрастающей (убывающей) последовательностью?

4. Какими свойствами обладают члены арифметической прогрессии?

5. Сформулируйте характеристическое свойство арифметической прогрессии.

6. Докажите, что

$$a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k+2}}{2}.$$

7. Из какого свойства арифметической прогрессии вытекает равенство:

а) $a_{k+1} - a_k = a_{k+2} - a_{k+1}$;

б) $a_1 + a_k = a_2 + a_{k-1}$?

8. Найдите разность и 7-й член арифметической прогрессии, у которой известны ее первые два члена: а) 10, 100, ...; б) -20, -15, ...; в) $\frac{1}{3}$, 1, ...

9. Напишите формулу n-го члена арифметической прогрессии.

10. Найдите 15-й, 37-й, k-й члены арифметической прогрессии: а) 3, 7, ...; б) -5, -1, ...

11. Напишите формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии.

12. Найдите сумму k первых членов арифметической прогрессии (x_k), у которой: а) $x_k = 2k - 1$; б) $x_k = 3k + 2$; в) $x_k = -12k + 7$.

13. Найдите сумму 10 первых членов арифметической прогрессии (x_k): а) 2, 5, ...; б) -17, -11, ...; в) -2, 6, ...

14. Найдите сумму: а) первых 50 натуральных чисел; б) всех двузначных чисел; в) всех нечетных чисел, меньших 100; г) всех двузначных чисел, кратных 5.

15. Дайте определение геометрической прогрессии.

16. Какой последовательностью является геометрическая прогрессия, если: а) $q > 0$; б) $q < 0$; в) $q = 1$; г) $0 < q < 1$; д) $q > 1$?

17. Сформулируйте характеристическое свойство геометрической прогрессии.

18. Докажите, что

$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

19. Из какого свойства геометрической прогрессии вытекает равенство:

а) $b_2 : b_1 = b_3 : b_2 = \ldots$;

б) $b_1 \cdot b_k = b_2 \cdot b_{k-1} = \ldots$?

20. Напишите формулу n-го члена геометрической прогрессии.

21. Задайте геометрическую прогрессию формулой k-го члена, если: а) $b_1 = 3$, $b_{k+1} = b_k \cdot 2$; б) $b_1 = 4$, $b_{k+1} = b_k(-3)$.

22. Найдите номер k члена геометрической прогрессии (b_k), если: а) $b_k = 162$, $b_1 = 2$, $q = 3$; б) $b_k = -32$, $b_1 = -1$, $q = \sqrt{2}$.

23. Напишите формулу суммы k первых членов геометрической прогрессии.

24. Чему равна сумма k членов геометрической прогрессии, если знаменатель прогрессии равен 1?

25. Найдите сумму первых трех, пяти, k членов геометрической прогрессии (b_k), заданной формулой k-го члена: а) $b_k = 1{,}5 \cdot 4^k$; б) $b_k = 2 \cdot 3^{1+k}$.

26. Напишите формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии ($|q| < 1$).

27. Обратите периодическую дробь 0,(6) в обыкновенную, используя формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. В конечной арифметической прогрессии (a_n) известны три числа из пяти (a_1, d, n, a_n, S_n). Требуется найти остальные два числа:

а) $a_1 = 10$, $d = 4$, $a_n = 50$; найдите n и S_n;

б) $a_1 = 10$, $d = 4$, $S_n = 330$; найдите n и a_n;

в) $a_1 = 10$, $n = 11$, $S_n = 330$; найдите a_n и d;

г) $d = 4$, $a_n = 50$, $S_n = 330$; найдите a_1 и n.

2. Известно, что 4-й член арифметической прогрессии равен 9, а 9-й член равен (−6). Сколько нужно взять членов, чтобы их сумма была равна 54?

3. Два тела, находясь на расстоянии 153 м друг от друга, движутся навстречу. Первое проходит 10 м в секунду, второе в первую секунду прошло 3 м, а в каждую следующую секунду проходит на 5 м больше, чем в предыдущую. Через сколько секунд эти тела встретятся?

4. Найдите первый член a_1 и разность d арифметической прогрессии, в которой $a_2 + a_5 - a_3 = 10$, $a_2 + a_9 = 17$.

5. Сумма квадратов 5-го и 11-го членов арифметической прогрессии равна 3, а произведение 2-го и 14-го членов этой же прогрессии равно k. Найдите произведение 1-го и 15-го членов прогрессии.

6. Найдите сумму всех четных трехзначных чисел, кратных трем.

7. Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые при делении на 3 дают остаток 2.

8. Найдите четыре числа между числами 4 и 40 так, чтобы получилась арифметическая прогрессия.

9. При делении 13-го члена арифметической прогрессии на 3-й член в частном получится 3, а при делении 18-го члена на 7-й член в частном получится 2 и в остатке 8. Определите первый член прогрессии и ее разность.

10. Найдите x из уравнения

$$1{,}5 + 2 + 2{,}5 + \ldots + x = 37{,}5.$$

11. Определите, при каких значениях x три числа a_1, a_2, a_3, взятые в указанной последовательности, образуют арифметическую прогрессию, если $a_1 = \lg 2$; $a_2 = \lg(3^x - 3)$; $a_3 = \lg(3^x + 9)$.

12. Сумма 2-го и 5-го членов арифметической прогрессии равна 18, а произведение 2-го члена на 3-й равно 21. Найдите эту прогрессию, если известно, что ее 2-й член — натуральное число.

13. Докажите, что если числа a, b и c образуют арифметическую прогрессию, то числа $\dfrac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ также образуют арифметическую прогрессию.

14. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если известно, что $b_4 - b_2 = -\frac{45}{32}$ и $b_6 - b_4 = -\frac{45}{512}$.

15. В геометрической прогрессии известно, что $b_1 + b_5 = 51$ и $b_2 + b_6 = 102$. При каких значениях n сумма n ее членов равна 3069?

16. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то полученные числа составят арифметическую прогрессию. Если же затем третье число увеличить на 9, то тогда получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.

17. Сумма трех положительных чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 21. Если к этим числам прибавить соответственно 2, 3 и 9, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

18. Если от третьего члена геометрической прогрессии отнять 4, а ее первые два члена оставить без изменения, то эти три числа, взятые в том же порядке, составят арифметическую прогрессию с разностью, равной 2. Найдите эту геометрическую прогрессию.

19. Сумма трех чисел, являющихся последовательными членами арифметической прогрессии, равна 60. Если второе уменьшить на 5, а третье увеличить на 10, то получатся три последовательных члена геометрической прогрессии. Найдите эти числа.

20. Четыре числа образуют геометрическую прогрессию. Если из первого числа вычесть 11, из второго 1, из третьего 3, а из четвертого 9, то получится арифметическая прогрессия. Найдите эти числа.

21. Между числами 1 и 256 вставьте три средних геометрических.

22. Число членов геометрической прогрессии — четное. Сумма всех ее членов в 3 раза больше суммы членов, находящихся на нечетных местах. Найдите знаменатель прогрессии.

23. Запишите бесконечную периодическую дробь 0,777... = = 0,(7) в виде обыкновенной дроби.

24. Запишите в виде обыкновенной дроби число 3,(81).

25. В квадрат, сторона которого равна k, вписан другой квадрат, вершинами которого являются середины сторон данного квадрата; в этот квадрат аналогично вписан новый квадрат и т. д. Найдите сумму периметров и сумму площадей всех квадратов.

26. В круг радиуса R вписан квадрат, в который вписан круг; в этот круг — второй квадрат и т. д. Найдите сумму площадей всех кругов и сумму площадей всех квадратов.

Задания для повторения

27. Мотоциклист отправился из пункта A в пункт B, отстоящий от A на 120 км. Обратно он ехал с той же скоростью, но через 1 ч после выезда должен был остановиться на 10 мин. После этой остановки он продолжал путь до A, увеличив скорость на 6 км/ч. Какова была первоначальная скорость мотоциклиста, если известно, что на обратный путь он затратил столько же времени, сколько на путь от A до B?

28. Расстояние между станциями A и B равно 103 км. Из A в B вышел поезд, который, пройдя некоторое расстояние, был задержан, а затем оставшийся путь до B проходил со скоростью на 4 км/ч больше прежней. Найдите первоначальную скорость поезда, если известно, что оставшийся путь до B был на 23 км длиннее пути, пройденного до задержки, и на прохождение пути после задержки было затрачено на 15 мин больше, чем до задержки.

29. При каких значениях k система уравнений:

а) $\begin{cases} kx + y = 2, \\ x - y = 3 \end{cases}$ имеет единственное решение;

б) $\begin{cases} 3x + (k - 1)y = k + 1, \\ (k + 1)x + y = 3 \end{cases}$ не имеет решений;

в) $\begin{cases} 2kx + y = 6k^2 - 5k + 1, \\ x + 2ky = 0 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

30. При каких значениях a и b система

$$\begin{cases} a^2x - by = a^2 - b, \\ bx - b^2y = 2 + 4b \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

31. Решите неравенство:

а) $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{-x^2 + 2 - x} \leqslant \sqrt{x} - 1$;

б) $\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{x^2 + x - 6} \leqslant 2 - \sqrt{6 - x}$.

ОТВЕТЫ

1. а) $n = 11$, $S_n = 330$; б) $n = 11$, $a_n = 50$; в) $a_n = 50$; $d = 4$; г) $a_1 = 10$, $n = 11$. **2.** 4 или 9 членов. **3.** Через 6 с. **4.** $a_1 = 13$, $d = -1$. **5.** $\frac{116k^2 - 39}{90}$. **6.** 82 350. **7.** 164 850. **8.** 11,2; 18,4; 25,6; 32,8. **9.** $a_1 = 12$, $d = 4$. **10.** $x = 6$. **11.** $x = 2$. **12.** −1, 3, 7, ... **14.** $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{4}$ или $b_1 = -6$, $q = -\frac{1}{4}$. **15.** $n = 10$. **16.** 4, 8, 16 или $\frac{4}{25}$, $-\frac{16}{25}$, $\frac{64}{25}$. **17.** 3, 7, 11. **18.** 1, 3, 9. **19.** 5, 20, 35 или 45, 20, −5. **20.** 27, 9, 3, 1. **21.** 4, 16, 64. **22.** $q = 2$. **23.** $\frac{7}{9}$. **24.** $\frac{42}{11}$. **25.** $4(2 + \sqrt{2})k$; $2k^2$. **26.** $2\pi R^2$; $4R^2$. **27.** 48 км/ч. **28.** 80 км/ч. **29.** а) $k \neq -1$; б) $k = -2$; в) $k = 0{,}5$. **30.** $a = 1$, $b = -1$; $a = 1$, $b = -2$; $a = -1$, $b = -1$; $a = -1$, $b = -2$. **31.** а) $x = 1$; б) $x = 2$.

Решения и методические указания

К упражнению 1а

1. Из формулы $a_n = a_1 + d(n - 1)$ выразим n:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1.$$

Следовательно, $n = \frac{50 - 10}{4} + 1 = 11$.

2. Используя формулу $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, находим

$$S_{11} = \frac{10 + 50}{2} \cdot 11 = 330.$$

К упражнению 1б

1. Чтобы найти n, воспользуемся формулой

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} n.$$

2. Подставив в эту формулу $a_1 = 10$, $d = 4$, $S_n = 330$, получим

$$330 = \frac{2 \cdot 10 + 4(n - 1)}{2} n$$

и после преобразований придем к квадратному уравнению $n^2 + 4n - 165 = 0$.

3. Решив это уравнение, находим $n_1 = -15$ (не подходит по условию), $n_2 = 11$.

4. Теперь, используя формулу $a_n = a_1 + d(n-1)$, находим

$$a_{11} = 10 + 4 \cdot 10 = 50.$$

К упражнению 1в

1. Для нахождения d воспользуемся формулой

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n.$$

Выразим отсюда d:

$$d = \frac{2S_n - 2a_1 n}{n(n-1)}, \text{ т. е. } d = \frac{2 \cdot 330 - 2 \cdot 10 \cdot 11}{11 \cdot 10} = 4.$$

2. Далее находим $a_{11} = 10 + 4 \cdot 10 = 50$.

К упражнению 2

1. Согласно условию, имеем:

а) $a_4 = 9$, т. е. $a_1 + 3d = 9$; б) $a_9 = -6$, т. е. $a_1 + 8d = -6$.

2. Таким образом, получим систему

$$\begin{cases} a_1 + 3d = 9, \\ a_1 + 8d = -6, \end{cases}$$

откуда $d = -3$, $a_1 = 18$.

3. Теперь воспользуемся формулой

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n, \text{ т. е. } 54 = \frac{2 \cdot 18 - 3(n-1)}{2} n.$$

4. В результате приходим к квадратному уравнению $n^2 - 13n + 36 = 0$, имеющему корни $n_1 = 4$ и $n_2 = 9$. Итак, нужно взять 4 или 9 членов.

К упражнению 3

1. Предположим, что тела встретятся через x секунд; тогда первое тело пройдет путь, равный $10x$ (м), а второе — путь, равный сумме членов арифметической прогрессии:

$$S = 3 + (3 + 5) + (3 + 5 \cdot 2) + \ldots + (3 + 5(x-1)),$$

т. е.

$$S = \frac{3 + 3 + 5x - 5}{2} x = \frac{5x + 1}{2} x.$$

2. По условию

$$10x + S = 153, \text{ или } 10x + \frac{5x+1}{2}x = 153.$$

3. После упрощений получаем квадратное уравнение $5x^2 + 21x - 306$, откуда находим $x_1 = -\frac{51}{5}$ (не годится), $x_2 = 6$. Итак, тела встретятся через 6 с.

К упражнению 6

1. Наименьшим числом, удовлетворяющим данному условию, является 102, за ним следует число 108, затем 114 и т. д.

2. Получаем арифметическую прогрессию:

$$\div\ 102, 108, 114, \ldots .$$

3. Наибольшим (последним) числом, удовлетворяющим условию, является число 996.

4. Таким образом, в арифметической прогрессии (a_n), у которой $a_1 = 102$, $d = 6$, $a_n = 996$, нам нужно определить S_n.

5. Подставив в формулу $a_n = a_1 + d(n-1)$ вместо a_n, a_1, d их значения, получим

$$996 = 102 + 6(n-1), \text{ откуда } n = 150.$$

6. Далее, подставив в формулу $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ вместо a_1, a_n и n их значения, находим

$$S_{150} = \frac{102 + 996}{2} \cdot 150 = 82\,350.$$

К упражнению 11

1. Так как числа a_1, a_2, a_3 образуют арифметическую прогрессию, то для них выполняется характеристическое свойство этой прогрессии:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}.$$

2. Тогда

$$\lg(3^x - 3) = \frac{\lg 2 + \lg(3^x + 9)}{2}, \text{ или } \lg(3^x - 3)^2 = \lg(2(3^x + 9)).$$

3. Полагая $3^x = y > 0$, получим уравнение

$$(3^x - 3)^2 = 2(3^x + 9), \text{ или } (y-3)^2 = 2(y+9).$$

4. Решив последнее уравнение, находим $y_1 = -1$ (не подходит); $y_2 = 9$, т. е. $3^x = 9$. Итак, $x = 2$.

К упражнению 14

1. Имеем $b_2 = b_1q$, $b_4 = b_1q^3$, $b_6 = b_1q^5$. Тогда, согласно условию, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} b_1q^3 - b_1q = -\dfrac{45}{32}, \\ b_1q^5 - b_1q^3 = -\dfrac{45}{512}. \end{cases}$$

2. Перепишем эту систему так:

$$\begin{cases} b_1q(q^2 - 1) = -\dfrac{45}{32}, \\ b_1q^3(q^2 - 1) = -\dfrac{45}{512}. \end{cases}$$

3. Разделив почленно второе уравнение на первое, получим $q^2 = \dfrac{1}{16}$.

Следовательно, $q_1 = \dfrac{1}{4}$, $q_2 = -\dfrac{1}{4}$.

4. Подставим поочередно эти значения q в первое уравнение системы:

а) $b_1 \cdot \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{16} - 1\right) = -\dfrac{45}{32}$, откуда $b_1 = 6$;

б) $b_1\left(-\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{1}{16} - 1\right) = -\dfrac{45}{32}$, откуда $b_1 = -6$.

5. Итак, получаем два решения: а) $b_1 = 6$, $q = \dfrac{1}{4}$; б) $b_1 = -6$, $q = -\dfrac{1}{4}$.

К упражнению 15

1. Так как $b_2 = b_1q$, $b_5 = b_1q^4$, $b_6 = b_1q^5$, то, используя условие, получаем систему

$$\begin{cases} b_1(1 + q^4) = 51, \\ b_1q(1 + q^4) = 102. \end{cases}$$

2. Решив эту систему, находим $q = 2$, $b_1 = 3$.

3. Теперь воспользуемся формулой суммы членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Подставив в эту формулу значения $q = 2$ и $b_1 = 3$, получим

$$3069 = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1}, \text{ или } 1024 = 2^n, \text{ или } 2^{10} = 2^n,$$

откуда $n = 10$.

К упражнению 16

1. Перепишем условие так:
а) $\div\div\ b_1, b_2, b_3$; б) $\div\ b_1, b_2 + 2, b_3$; в) $\div\div\ b_1, b_2 + 2, b_3 + 9$.

2. Используя характеристические свойства арифметической и геометрической прогрессий, запишем систему

$$\begin{cases} 2(b_2 + 2) = b_1 + b_3, \\ (b_2 + 2)^2 = b_1(b_3 + 9). \end{cases}$$

3. Выразим теперь b_2 и b_3 через b_1 и q и получим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 2(b_1q + 2) = b_1 + b_1q^2, \\ (b_1q + 2)^2 = b_1(b_1q^2 + 9). \end{cases}$$

4. Решив эту систему, найдем $b_1 = 4$, $q = 2$ или $b_1 = \frac{4}{25}$, $q = -4$.

Ответ: 4, 8, 16 или $\frac{4}{25}, -\frac{16}{25}, \frac{64}{25}$.

К упражнению 18

1. Пусть b — первый член искомой прогрессии, а q — ее знаменатель. По условию числа b, bq, $bq^2 - 4$ образуют арифметическую прогрессию с разностью 2; следовательно,

$$bq - b = bq^2 - 4 - bq = 2. \tag{1}$$

2. Из равенств (1) составим систему с двумя неизвестными b и q:

$$\begin{cases} b(q - 1) = 2, \\ bq(q - 1) = 6. \end{cases} \tag{2}$$

3. Решив систему (2), найдем $q = 3$, $b = 1$.
4. Итак, искомая прогрессия имеет вид 1, 3, 9, ...

К упражнению 22

1. Пусть S — сумма всех членов геометрической прогрессии, а S_1 — сумма членов этой прогрессии, находящихся на нечетных местах.

2. Члены геометрической прогрессии, находящиеся на нечетных местах, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q^2, где q — знаменатель данной прогрессии.

3. По условию $S = 3S_1$, т. е.

$$\frac{b_1(q^{2n}-1)}{q-1} = 3\frac{b_1(q^{2n}-1)}{q^2-1}.$$

4. Решив это уравнение, находим $q = 2$.

К упражнению 23

1. Представим данную дробь в следующем виде:

$$0,(7) = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \ldots = \frac{7}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots\right).$$

2. Выражение в скобках представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{10}$.

3. Эту сумму найдем по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$, т. е. $S = \frac{1}{0,9} = \frac{10}{9}$.

4. Итак, $0,(7) = \frac{7}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{7}{9}$.

К упражнению 25

1. Пусть $ABCD$ — данный квадрат, $A_1B_1C_1D_1$ — вписанный в $ABCD$ квадрат, $A_2B_2C_2D_2$ — вписанный в $A_1B_1C_1D_1$ квадрат и т. д. (рис. 132).

2. Положим $B_1C_1 = x$ и $B_2C_2 = y$; тогда $P_1 = P_{A_1B_1C_1D_1} = 4x$, а $P_2 = P_{A_2B_2C_2D_2} = 4y$.

3. В равнобедренном прямоугольном треугольнике B_1CC_1 имеем $B_1C_1 = \sqrt{2}\,B_1C = \frac{\sqrt{2}}{2}BC$, т. е $x = \frac{k}{\sqrt{2}}$. Тогда $P_1 = 4x = 2\sqrt{2}\,k$.

4. В равнобедренном прямоугольном треугольнике $B_2B_1C_2$ имеем $B_2C_2 = \sqrt{2}\,B_1C_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$, т. е. $y = \frac{k}{2}$. Тогда $P_2 = 4y = 2k$.

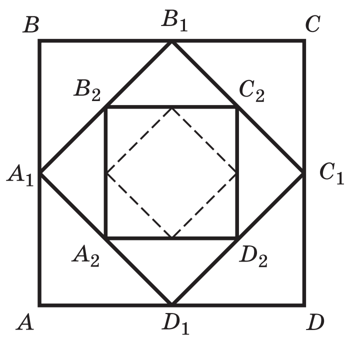


Рис. 132

5. Итак, нам известны периметры трех квадратов: $P_{ABCD} = P = 4k$, $P_{A_1B_1C_1D_1} = P_1 = 2\sqrt{2}\,k$, $P_{A_2B_2C_2D_2} = P_2 = 2k$.

6. Легко установить, что числа P, P_1 и P_2 являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии. Действительно, для этих чисел выполняется ее характеристическое свойство: $P_1^2 = PP_2$, так как $(2\sqrt{2}\,k)^2 = 4k \cdot 2k$, или $8k^2 = 8k^2$.

7. Найдем знаменатель прогрессии:

$$q = \frac{P_1}{P} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ т. е. } 0 < q < 1.$$

8. Чтобы найти сумму периметров всех вписанных квадратов, воспользуемся формулой $S = \frac{P}{1-q}$. Тогда получим

$$S = \frac{4k}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4\sqrt{2}\,k}{\sqrt{2} - 1} = 4\sqrt{2}\,(\sqrt{2} + 1)k = 4(2 + \sqrt{2})k.$$

9. Рассуждая аналогично, найдем сумму площадей всех вписанных квадратов. Пусть F — площадь квадрата $ABCD$, т. е. $F = k^2$; далее, $F_1 = x^2 = \frac{k^2}{2}$ — площадь квадрата $A_1B_1C_1D_1$; $F_2 = y^2 = \frac{k^2}{4}$ — площадь квадрата $A_2B_2C_2D_2$ и т. д. Последовательность этих площадей образует геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{2}$. Таким образом, сумма площадей всех вписанных квадратов составит

$$S = \frac{F}{1-q} = \frac{k^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2k^2.$$

К упражнению 27

1. Пусть v (км/ч) — первоначальная скорость мотоциклиста.

2. Тогда на поездку от A до B (рис. 133) он затратил $\frac{120}{v}$ (ч).

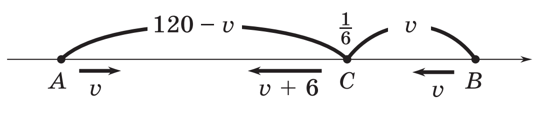


Рис. 133

3. Путь от B до C (пункта, где он остановился) мотоциклист в течение 1 ч ехал со скоростью v (км/ч), т. е. расстояние между B и C равно $v \cdot 1 = v$ (км).

4. Следовательно, расстояние между C и A равно $120 - v$ (км).

5. Это расстояние мотоциклист проехал со скоростью $v + 6$ (км/ч).

6. Значит, на поездку от C до A он затратил $\frac{120 - v}{v + 6}$ (ч).

7. Так как на поездку от A до B мотоциклист затратил столько же времени, что и на поездку от B до A, то получаем уравнение

$$\frac{120}{v} = 1 + \frac{1}{6} + \frac{120 - v}{v + 6}.$$

8. Решив его, находим $v = 48$ (км/ч).

К упражнению 29

З а м е ч а н и е. Напомним некоторые теоретические сведения, позволяющие, не решая систему линейных уравнений, определить количество ее решений по известным коэффициентам при неизвестных и свободным членам.

Пусть дана система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

где a_1, a_2, b_1 и b_2 — коэффициенты при неизвестных, а c_1 и c_2 — свободные члены. Возможны три случая.

1. Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, т. е. коэффициенты при неизвестных не пропорциональны, то система имеет единственное решение.

2. Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, т. е. коэффициенты при неизвестных пропорциональны между собой, но не пропорциональны свободным членам, то система не имеет решений.

3. Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, т. е. коэффициенты при неизвестных и свободные члены пропорциональны между собой, то система имеет бесконечное множество решений.

Решение упражнения 29а. I способ. Система имеет единственное решение, если $\frac{k}{1} \neq \frac{1}{-1}$, т. е. если $k \neq -1$.

II способ. 1. Сложив оба уравнения системы, получим $x(k + 1) = 5$.

2. Если $k \neq -1$, то система имеет единственное решение $x = \dfrac{5}{k+1}$, $y = x - 3 = \dfrac{5}{k+1} - 3 = \dfrac{2-3k}{k+1}$.

3. Если $k = -1$, то получим систему

$$\begin{cases} -x + y = 2, \\ x - y = 3, \end{cases}$$

которая не имеет решений.

Решение упражнения 29б. I способ. 1. Система не имеет решений, если

$$\frac{3}{k+1} = \frac{k-1}{1} \neq \frac{k+1}{3}. \qquad (1)$$

2. Из равенства $\dfrac{3}{k+1} = \dfrac{k-1}{1}$ следует, что $k_1 = 2$, $k_2 = -2$.

3. Подставив значение $k_1 = 2$ в (1), получим

$$\frac{3}{3} = \frac{1}{1} = \frac{3}{3}$$

(в этом случае система имеет бесконечное множество решений, см. замечание).

4. Подставив значение $k_2 = -2$ в (1), получим

$$\frac{3}{-1} = \frac{-3}{1} \neq \frac{-1}{3},$$

т. е. при $k = -2$ система не имеет решений.

II способ. 1. Из второго уравнения системы выразим $y = 3 - (k+1)x$ и подставим это выражение в первое уравнение:

$$3x + (k-1)(3 - (k+1)x) = k + 1, \text{ или } x(k-2)(k+2) = 2(k-2).$$

2. Последнее уравнение, а, значит, и данная система не имеют решений при $k = -2$.

Решение упражнения 29в. 1. Система имеет бесконечное множество решений, если

$$\frac{2k}{1} = \frac{1}{2k} = \frac{6k^2 - 5k + 1}{0}. \qquad (1)$$

2. Из равенства $\dfrac{2k}{1} = \dfrac{1}{2k}$ следует, что $k_1 = -\dfrac{1}{2}$, $k_2 = \dfrac{1}{2}$.

3. Равенство $\dfrac{1}{2k} = \dfrac{6k^2 - 5k + 1}{0}$ следует понимать так, что числитель второй дроби также равен нулю, т. е.

$$6k^2 - 5k + 1 = 0. \qquad (2)$$

4. Из уравнения (2) находим $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = \frac{1}{3}$. Итак, система имеет бесконечное множество решений при $k = \frac{1}{2}$.

К упражнению 31а

1. Сначала определим множество значений x, для которых данное неравенство существует:

$$\begin{cases} x^2 - x \geqslant 0, \\ 2 - x^2 - x \geqslant 0, \\ x \geqslant 0, \\ \sqrt{x} - 1 \geqslant 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x(x-1) \geqslant 0, \\ (x+2)(x-1) \leqslant 0, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$$

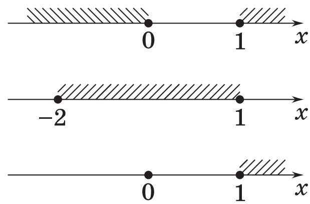


Рис. 134

2. Решив эту систему неравенств (рис. 134), заключаем, что ОДЗ неравенства состоит только из двух чисел: $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

3. Проверка показывает, что решением данного неравенства является лишь одно число, а именно $x = 1$.

Тема 14

Поворот точки вокруг начала координат.
Градусное и радианное измерение угловых величин.
Тригонометрические функции числового аргумента.
Знаки тригонометрических функций.
Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.
Вычисление значений тригонометрических функций некоторых углов.
Четность и нечетность тригонометрических функций.
Периодичность тригонометрических функций.
Свойства тригонометрических функций.
Формулы сложения. Формулы приведения

Теоретические сведения

1. Поворот точки вокруг начала координат

1°. В теме 3 было отмечено, что между множеством действительных чисел $\boldsymbol{R}$ и множеством точек числовой прямой можно установить соответствие, при котором каждой точке числовой прямой соответствует единственное действительное число и, наоборот, каждому действительному числу соответствует единственная точка числовой прямой.

2°. Между действительными числами и точками окружности также можно установить соответствие, что позволяет определить тригонометрические функции числового аргумента.

3°. Окружность единичного радиуса с выбранными началом отсчета и направлением обхода называют ***числовой окружностью***.

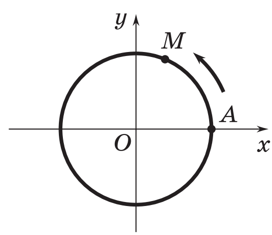


Рис. 135

4°. Каждой точке M окружности соответствует бесконечное множество дуг, начинающихся в точке A (рис. 135) и заканчивающихся в точке M. Одной

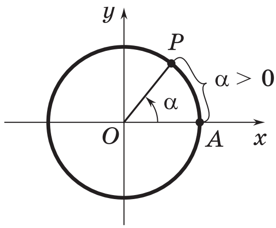


Рис. 136

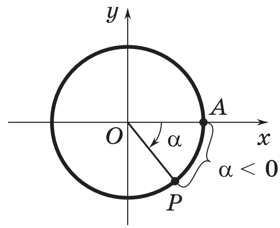


Рис. 137

из них является кратчайшая дуга, соединяющая эти две точки, а все остальные получаются из кратчайшей дуги прибавлением или вычитанием целого числа полных оборотов.

5°. а) Если точка, двигаясь по числовой окружности от точки A против часовой стрелки, прошла путь длиной α (рис. 136), то принято считать, что $\alpha > 0$. Конечную точку пути обозначим через P.

В этом случае говорят, что точка P получена из точки A ***поворотом*** (обходом) вокруг начала координат на угол α.

Отметим, что если $0 < \alpha \leqslant \pi$, то угол AOP равен α как центральный угол числовой окружности.

б) Если точка, двигаясь по числовой окружности от точки A по часовой стрелке, прошла путь длиной α (рис. 137), то принято считать, что $\alpha < 0$.

в) Поворот на 0° означает, что точка A остается на месте.

2. Градусное и радианное измерение угловых величин

1°. Из курса геометрии известно, что углы можно измерять в градусах. Например, развернутый угол равен 180°, прямой угол равен 90°.

2°. За единицу измерения углов и дуг принимают угол в один ***градус*** (обозначение: 1°).

3°. Угол в 1° — это угол, который опишет начальный радиус, совершив $\frac{1}{360}$ часть полного оборота вокруг своей начальной точки против часовой стрелки.

4°. ***Минутой*** (обозначение: 1′) называют $\frac{1}{60}$ часть градуса.

5°. ***Секундой*** (обозначение: 1″) называют $\frac{1}{60}$ часть минуты.

6°. Кроме градусной меры существуют и другие единицы измерения углов. В математике и физике обычно используют радианную меру угла.

7°. Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу, называют углом в один ***радиан*** (рад).

8°. Угол в один радиан содержит $\frac{180}{\pi}$ градусов:

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}. \qquad (1)$$

9°. Один радиан приближенно равен 57° 18′.

10°. Из равенства (1) следует, что угол в α радианов содержит $\frac{180}{\pi}\alpha$ градусов, т. е.

$$\alpha \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\alpha\right)^{\circ}. \qquad (2)$$

11°. Из равенства $180° = \pi$ вытекает, что:

а) $360° = 2\pi$; б) $90° = \frac{\pi}{2}$; в) $30° = \frac{\pi}{6}$; г) $20° = \frac{20°\pi}{180°} = \frac{\pi}{9}$.

3. Тригонометрические функции числового аргумента

1°. Пусть задано некоторое число x; отметим соответствующую ему точку $K(x)$ числовой окружности.

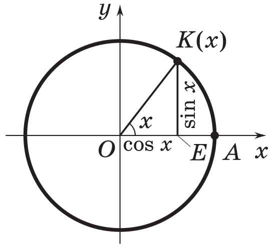


Рис. 138

2°. Ординату точки $K(x)$ называют ***синусом*** числа x и обозначают $\sin x$, а абсциссу этой точки называют ***косинусом*** числа x и обозначают $\cos x$.

3°. Другими словами, $\sin x$ равен величине (т. е. длине, взятой с соответствующим знаком) отрезка KE, а $\cos x$ — величине отрезка OE (рис. 138).

4°. При вращении радиуса окружности он будет «пробегать» через точку $K(x)$ бесконечное множество раз (как по часовой стрелке, так и против нее), а величины KE и OE будут оставаться постоянными.

Значит,

$$\sin(x + 360°k) = \sin x, \quad \cos(x + 360°k) = \cos x, \ k \in \mathbf{Z},$$

т. е. синус и косинус — периодические функции с периодом 360° (или 2π).

5°. В п. 4° каждому числу x мы сопоставили значения $\sin x$ и $\cos x$. Тем самым определены две функции числового аргумента: $y = \sin x$, $y = \cos x$. Эти функции называют ***тригонометрическими***.

6°. Помимо названных тригонометрических функций рассматривают и их отношения:

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \ (\textbf{\textit{тангенс}} \text{ числа } x);$$

$$y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \ (\textbf{\textit{котангенс}} \text{ числа } x).$$

7°. Область определения функции $\operatorname{tg} x$ состоит из всех углов, для которых $\cos x \neq 0$.

8°. Область определения функции $\operatorname{ctg} x$ состоит из всех углов, для которых $\sin x \neq 0$.

4. Знаки тригонометрических функций

1°. Оси координат делят числовую окружность на четыре равные дуги; эти дуги называют ***четвертями*** (рис. 139).

2°. Знаки синуса. Выясним, при каких значениях x выполняются неравенства $\sin x > 0$ и $\sin x < 0$, т. е. определим, в каких четвертях числовой окружности синус положителен, и в каких четвертях он отрицателен.

а) Числу x соответствует точка числовой окружности, полученная поворотом точки (1; 0) на угол x радианов, а число $\sin x$ — это ордината соответствующей точки. Поэтому $\sin x > 0$, если точка расположена выше оси абсцисс, т. е. в I и II четвертях синус положителен.

б) Если же точка лежит ниже оси абсцисс, то ее ордината отрицательна, т. е. $\sin x < 0$ в III и IV четвертях.

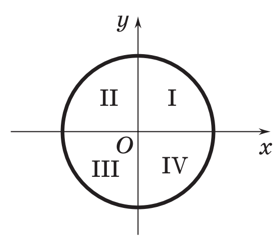


Рис. 139

3°. Знаки косинуса. Выясним, при каких значениях x выполняются неравенства $\cos x > 0$ и $\cos x < 0$.

а) Известно, что $\cos x$ — это абсцисса точки, соответствующей повороту на угол x, поэтому $\cos x > 0$, если точка лежит правее оси ординат, т. е. в I и IV четвертях косинус положителен.

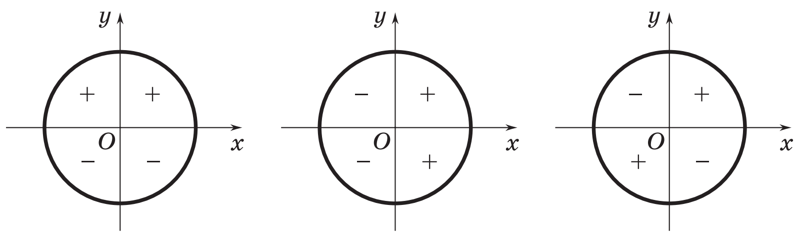
б) Если же точка лежит левее оси ординат, то $\cos x < 0$, т. е. во II и III четвертях косинус отрицателен.

4°. Знаки тангенса и котангенса.

а) Согласно определению, $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, поэтому $\operatorname{tg} x > 0$, если $\sin x > 0$ и $\cos x > 0$ или $\sin x < 0$ и $\cos x < 0$, т. е. тангенс положителен в I и III четвертях.

б) Согласно определению, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, поэтому знаки $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ совпадают.

5°. Обобщая сказанное, проиллюстрируем знаки тригонометрических функций на рис. 140.



Знаки синуса   Знаки косинуса   Знаки тангенса и котангенса

Рис. 140

5. Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

1°. Так как точка $A(x; y)$ принадлежит единичной окружности (рис. 141), то $x^2 + y^2 = 1$, т. е.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \tag{1}$$

2°. Равенство (1) выполняется при любых значениях α и называется ***основным тригонометрическим тождеством.***

3°. Из равенства (1) можно выразить $\cos\alpha$ через $\sin\alpha$, и наоборот:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha},$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha},$$

причем знак перед радикалом определяется той координатной четвертью, в которой находится угол α.

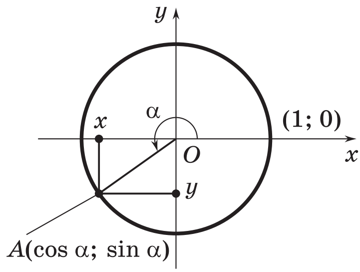


Рис. 141

4°. Согласно определению тангенса и котангенса, имеем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Перемножив эти два равенства, получим

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1. \qquad (2)$$

5°. Из равенства (2) можно выразить $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{ctg}\alpha$, и наоборот:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \qquad (3)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (4)$$

6°. Заметим, что равенства (2)—(4) справедливы при $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

7°. Иногда рассматривают еще две тригонометрические функции — секанс и косеканс.

Секансом называют величину, обратную косинусу, а ***косекансом*** — величину, обратную синусу. Таким образом,

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \text{ где } \cos\alpha \neq 0;$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \text{ где } \sin\alpha \neq 0.$$

6. Вычисление значений тригонометрических функций некоторых углов

1°. Пусть $\alpha = 0$; тогда точка A имеет координаты $(1;\ 0)$ (рис. 142).

Так как абсцисса и ордината этой точки соответственно равны 1 и 0, то:

а) $\cos 0^\circ = 1$; б) $\sin 0^\circ = 0$;

в) $\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0$; г) $\operatorname{ctg} 0^\circ = \frac{\cos 0^\circ}{\sin 0^\circ} = \frac{1}{0}$ не определен.

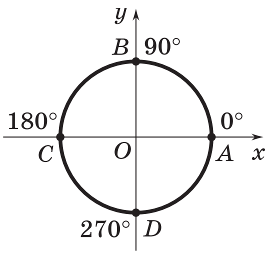


Рис. 142

2°. Пусть $\alpha = 90^\circ$ $\left(\text{или } \alpha = \frac{\pi}{2}\right)$; тогда точка B имеет координаты $(0;\ 1)$ (рис. 142). Так как абсцисса и ордината этой точки соответственно равны 0 и 1, то:

а) $\cos 90^\circ = 0$; б) $\sin 90^\circ = 1$;

в) $\operatorname{tg} 90^\circ = \frac{1}{0}$ не определен;

г) $\operatorname{ctg} 90^\circ = \frac{\cos 90^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{0}{1} = 0$.

3°. Пусть $\alpha = 180^\circ$ (или $\alpha = \pi$); тогда точка C имеет координаты $(-1;\ 0)$ (рис. 142). Имеем:

а) $\cos 180^\circ = -1$; б) $\sin 180^\circ = 0$;

в) $\operatorname{tg} 180^\circ = \frac{0}{-1} = 0$; г) $\operatorname{ctg} 180^\circ = \frac{-1}{0}$ не определен.

4°. Пусть $\alpha = 270^\circ$ $\left(\text{или } \alpha = \frac{3\pi}{2}\right)$; тогда точка D имеет координаты $(0;\ -1)$ (рис. 142). Имеем:

а) $\cos 270^\circ = 0$; б) $\sin 270^\circ = -1$;

в) $\operatorname{tg} 270^\circ = \frac{-1}{0}$ не определен; г) $\operatorname{ctg} 270^\circ = \frac{0}{-1} = 0$.

5°. Пусть $\alpha = 360^\circ$ (или $\alpha = 2\pi$); тогда точка A имеет координаты $(1;\ 0)$ (рис. 142). Имеем:

а) $\cos 360^\circ = 1$; б) $\sin 360^\circ = 0$;

в) $\operatorname{tg} 360^\circ = \frac{0}{1} = 0$; г) $\operatorname{ctg} 360^\circ = \frac{1}{0}$ не определен.

6°. Вычислим теперь значения тригонометрических функций угла $\alpha = 30°$ $\left(\text{или } \alpha = \frac{\pi}{6}\right)$.

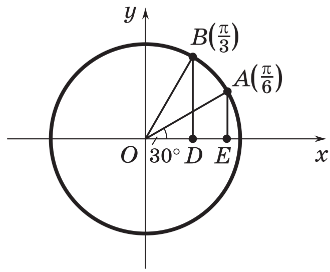


Рис. 143

а) Пусть A — точка числовой окружности, соответствующая числу $\frac{\pi}{6}$ (рис. 143).

б) Тогда $\angle EOA = 30°$ и из прямоугольного треугольника OEA получаем $AE = \frac{1}{2}$ (согласно свойству катета, лежащего против угла в 30°).

в) По определению синуса имеем $AE = \sin 30°$, следовательно, $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

г) Далее из треугольника OEA находим

$$\cos 30° = OE = \sqrt{OA^2 - AE^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

д) Тогда $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\operatorname{ctg} 30° = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

7°. Пусть B — точка числовой окружности, соответствующая числу $\frac{\pi}{3}$ (рис. 143).

а) Тогда $\angle DOB = 60°$ и из треугольника ODB получаем $OD = \frac{1}{2}$, но по определению косинуса $OD = \cos 60°$, следовательно, $\cos 60° = \frac{1}{2}$.

б) Далее находим $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

8°. Аналогично получим

$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45° = 1.$$

9°. Все полученные значения можно свести в следующую таблицу:

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.	0	не сущ.
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не сущ.	0

7. Четность и нечетность тригонометрических функций

1°. Напомним, что функцию $f(x)$ называют четной, если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

2°. Функцию $f(x)$ называют нечетной, если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

3°. Из шести тригонометрических функций косинус и секанс — четные, а остальные — нечетные, т. е.

$$\cos(-x) = \cos x;\ \sin(-x) = -\sin x;\ \mathrm{tg}\,(-x) = -\mathrm{tg}\,x;$$
$$\mathrm{ctg}\,(-x) = -\mathrm{ctg}\,x;\ \mathrm{cosec}\,(-x) = -\mathrm{cosec}\,x;\ \sec(-x) = \sec x.$$

8. Периодичность тригонометрических функций

1°. Напомним, что функцию $y = f(x)$ называют периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения функции выполняются равенства $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$, где число T называют периодом функции $f(x)$.

2°. Периодом функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является число $T = 2\pi$.

3°. Периодом функций $y = \mathrm{tg}\,x$ и $y = \mathrm{ctg}\,x$ является число $T = \pi$.

4°. Период функций $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ и $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ вычисляется по формуле $T = \frac{2\pi}{w}$.

5°. Период функций $y = A\ \mathrm{tg}\ (\omega x + \varphi)$ и $y = A\ \mathrm{ctg}\ (\omega x + \varphi)$ вычисляется по формуле $T = \frac{\pi}{w}$.

6°. Если период функции $y = f(x)$ равен T_1, а период функции $y = g(x)$ равен T_2, то период функций $y = f(x) + g(x)$ и $y = f(x) - g(x)$ равен наименьшему общему кратному чисел T_1 и T_2.

9. Свойства тригонометрических функций

1°. Область определения. Имеем:
$D(\sin) = (-\infty; +\infty)$; $D(\cos) = (-\infty; +\infty)$;

$D(\mathrm{tg}) = \boldsymbol{R}$, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Это вытекает из того, что в точках, соответствующих числам указанного вида, косинус равен нулю и, следовательно, тангенс не существует;

$D(\mathrm{ctg}) = \boldsymbol{R}$, кроме чисел вида πn, где $n \in \boldsymbol{Z}$ (в соответствующих точках котангенс не существует).

2°. Множество значений. Имеем: $E(\sin) = [-1; 1]$; $E(\cos) = [-1; 1]$, так как координаты любой точки P числовой окружности по модулю не превосходят единицы; $E(\mathrm{tg}) = (-\infty; +\infty)$; $E(\mathrm{ctg}) = (-\infty; +\infty)$.

3°. Четность и нечетность. Исходя из определений четной и нечетной функций, можно установить, что косинус — четная функция, а синус, тангенс и котангенс — нечетные функции. Следовательно, $\sin(-\alpha) = = -\sin\alpha$ (рис. 144), $\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$; $\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ (рис. 145), где α — заданное число.

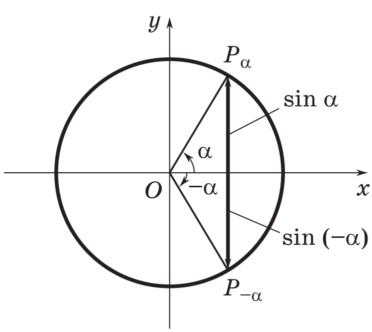


Рис. 144

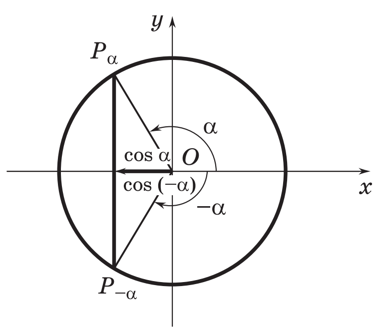


Рис. 145

4°. Периодичность. Исходя из определения периодической функции, можно установить, что функции синус, косинус, тангенс и котангенс являются периодическими, причем для синуса и косинуса наименьший положительный период равен 2π, а для тангенса и котангенса он равен π. Таким образом, $\sin(\alpha \pm 2\pi) = \sin \alpha$; $\cos(\alpha \pm 2\pi) = \cos \alpha$; $\operatorname{tg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{tg} \alpha$; $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{ctg} \alpha$.

5°. Монотонность. Исходя из определения монотонности функции, можно установить, что:

$\sin \alpha$ возрастает от -1 до 1 на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$, и убывает от 1 до -1 на промежутке $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

$\cos \alpha$ возрастает от -1 до 1 на промежутке $[-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$, и убывает от 1 до -1 на промежутке $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

$\operatorname{tg} \alpha$ возрастает в каждом промежутке $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

$\operatorname{ctg} \alpha$ убывает в каждом промежутке $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Примеры. 1. Упростить: $\sin \frac{17\pi}{3}$; $\cos(-2195°)$; $\operatorname{tg}(-1759°)$.

Р е ш е н и е. Используя свойства периодичности, четности и нечетности тригонометрических функций, получим

$$\sin \frac{17\pi}{3} = \sin\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos(-2195°) = \cos 2195° = \cos(360° \cdot 6 + 35°) = \cos 35°;$$

$$\operatorname{tg}(-1759°) = \operatorname{tg}(41° - 180° \cdot 10) = \operatorname{tg} 41°.$$

2. Сравнить $\sin 735°$ и $\sin(-1066°)$.

Р е ш е н и е. Имеем $\sin 735° = \sin(735° - 360° \cdot 2) = \sin 15°$; $\sin(-1066°) = \sin(-1066° + 360° \cdot 3) = \sin 14°$. Так как функция $\sin \alpha$ при $0 < \alpha < 90°$ монотонно возрастает, то $\sin 15° > \sin 14°$ и, значит, $\sin 735° > \sin(-1066°)$.

3. Установить четность или нечетность функции $F(x) = x^3 + \sin x$.

Р е ш е н и е. Так как $F(-x) = (-x)^3 + \sin(-x) = -x^3 - \sin x = -(x^3 + \sin x) = -F(x)$, то данная функция — нечетная.

4. Определить знак выражения $\sin(-4{,}2) \cdot \cos(-5{,}6)$.

Решение. Имеем $\sin(-4{,}2) \cdot \cos(-5{,}6) = -\sin 4{,}2 \cdot \cos 5{,}6$. Поскольку $\sin 4{,}2 < 0$, а $\cos 5{,}6 > 0$, данное выражение положительно.

10. Формулы сложения

1°. Формулы синуса суммы и разности двух аргументов:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \tag{1}$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \tag{2}$$

2°. Формулы косинуса суммы и разности двух аргументов:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \tag{3}$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \tag{4}$$

3°. Формулы тангенса суммы и разности двух аргументов:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \tag{5}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \tag{6}$$

Формулы (5) справедливы при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, а формулы (6) — при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ $(m, n, k \in \boldsymbol{Z})$.

4°. Формулы котангенса суммы и разности двух аргументов:

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}, \tag{7}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}. \tag{8}$$

Формулы (7) справедливы при $\alpha \neq \pi m$, $\beta \neq \pi n$, $\alpha + \beta \neq \pi k$, а формулы (8) — при $\alpha \neq \pi m$, $\beta \neq \pi n$, $\alpha - \beta \neq \pi k$ $(m, n, k \in \boldsymbol{Z})$.

Примеры. 1. Вычислить без таблиц $\operatorname{tg} 75°$.

Решение. Используя формулу (5), находим

$$\operatorname{tg} 75° = \operatorname{tg}(45° + 30°) = \frac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} 30°}{1 - \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°} =$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{3 - 1} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$

2. Вычислить $\cos(\alpha - \beta)$, если $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\sin\beta = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

Р е ш е н и е. Находим значения $\sin\alpha$ и $\cos\beta$ с учетом четвертей, которым принадлежат α и β:

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5};$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

Подставляя найденные значения в соотношение (4), получим

$$\cos(\alpha-\beta) = \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{4}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{7}{25}.$$

11. Формулы приведения

1°. Формулами приведения называют соотношения, с помощью которых значения тригонометрических функций аргументов $90° \pm \alpha$, $180° \pm \alpha$, $270° \pm \alpha$, $360° \pm \alpha$ выражаются через значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$.

2°. Все формулы приведения можно свести в следующую таблицу:

Функция	Аргумент							
	$90° - \alpha$	$90° + \alpha$	$180° - \alpha$	$180° + \alpha$	$270° - \alpha$	$270° + \alpha$	$360° - \alpha$	$360° + \alpha$
sin	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
ctg	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$

3°. Для облегчения запоминания формул приведения нужно использовать следующие правила:

а) при переходе от функций углов $90° \pm \alpha$, $270° \pm \alpha$ к функциям угла α название функции изменяют: синус — на косинус, тангенс — на котангенс, и наоборот;

б) при переходе от функций углов $180° \pm \alpha$, $360° \pm \alpha$ к функциям угла α название функции сохраняют;

в) считая α острым углом $\left(\text{т. е. } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, перед функцией угла α ставят такой знак, какой имеет приводимая функция углов $90° \pm \alpha$, $180° \pm \alpha$, $270° \pm \alpha$, $360° \pm \alpha$.

Примеры. 1. Привести к тригонометрической функции острого угла: а) $\sin 1914°$; б) $\cos(-1560°)$; в) $\text{ctg}\, 23{,}7\pi$.

Решение. Имеем

а) $\sin 1914° = \sin(360° \cdot 5 + 114°) = \sin 114° = \sin(90° + 24°) =$
$= \cos 24°$;

б) $\cos(-1560°) = \cos 1560° = \cos(360° \cdot 4 + 120°) = \cos 120° =$
$= \cos(90° + 30°) = -\sin 30° = -0{,}5$;

в) $\text{ctg}\, 23{,}7\pi = \text{ctg}(23\pi + 0{,}7\pi) = \text{ctg}\, 0{,}7\pi = \text{ctg}(\pi - 0{,}3\pi) =$
$= -\text{ctg}\, 0{,}3\pi$.

2. Упростить выражение

$$A = \frac{\text{tg}(180° - \alpha)\cos(180° - \alpha)\text{tg}(90° - \alpha)}{\sin(90° + \alpha)\text{ctg}(90° + \alpha)\text{tg}(90° + \alpha)}.$$

Решение. $A = \dfrac{(-\text{tg}\,\alpha)(-\cos\alpha)\text{ctg}\,\alpha}{\cos\alpha(-\text{tg}\,\alpha)(-\text{ctg}\,\alpha)} = 1.$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называют числовой окружностью?

2. Какие единицы измерения угловых величин вы знаете?

3. Что называют радианом?

4. Какие соотношения существуют между градусной и радианной мерами угла?

5. Выразите в радианах угол: 115°; 150°.

6. Выразите в градусах угол: а) $\alpha = 1{,}3$; $\alpha = 0{,}85$; б) $\alpha = \frac{\pi}{8}$; $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

7. Что называют синусом и косинусом числа?

8. Что называют тангенсом и котангенсом числа?

9. Что означает запись:

$\sin 1{,}5$; $\cos 0{,}7$; $\text{tg}\, 2$?

10. Определите знаки всех тригонометрических функций следующих углов и чисел: а) 125°; б) −250°; в) 715°; г) −715°; д) 0,27; е) 5,8; ж) −3,7; з) −7,4; и) 7,4.

11. Запишите основное тригонометрическое тождество.

12. Чему равны синус и косинус угла: а) 30°; б) 60°; в) 90°; г) 180°; д) −180°; е) 270°; ж) −270°?

13. Чему равны тангенс и котангенс угла: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) −60°; д) 90°; е) 180°?

14. Какие свойства синуса и косинуса вы знаете? Что общего в этих свойствах?

15. Какие свойства тангенса и котангенса вы знаете? Что общего в этих свойствах?

16. Даны левые части равенств: а) $\cos(\alpha \pm \beta)$; б) $\sin(\alpha \pm \beta)$; в) $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$; г) $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta)$. Напишите правые части этих равенств.

17. Запишите формулы приведения для углов: а) $90° - \alpha$; б) $90° + \alpha$; в) $180° - \alpha$; г) $180° + \alpha$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите значения остальных тригонометрических функций угла α, если известно, что:

а) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, α — в III четверти; б) $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$, α — в IV четверти; в) $\operatorname{tg}\alpha = 3$, α — в III четверти; г) $\operatorname{ctg}\alpha = -2$, α — в IV четверти.

2. Найдите значения остальных тригонометрических функций угла α, если известно, что:

а) $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$, α — в I четверти;

б) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, α — в IV четверти;

в) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{a}$, α — во II четверти.

3. Найдите значение выражения:

а) $\sin(\alpha + \beta)$, если $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$, α и β — в I четверти;

б) $\cos(\alpha + \beta)$, если $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$, α и β — в I четверти;

в) $\sin(\alpha + \beta)$, если $\sin\alpha = \frac{9}{41}$, $\sin\beta = -\frac{40}{41}$, α — во II, β — в IV четверти;

г) $\cos(\alpha - \beta)$, если $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$, α и β — в I четверти.

4. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin\alpha + 2\sin(60° - \alpha)}{2\cos(30° - \alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha}$; б) $\dfrac{\sin 90° - \operatorname{tg}(45° + \beta)\operatorname{tg}(3\beta + 45°)}{\operatorname{tg}(45° + \beta) + \operatorname{ctg}(45° - 3\beta)}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}$; г) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{9} + \operatorname{tg}\frac{5\pi}{36}}{1 + \operatorname{tg}\frac{8\pi}{9} \cdot \operatorname{tg}\frac{5\pi}{36}}$.

5. Вычислите:

а) $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{5}$;

б) $\dfrac{\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha}{3\sin^2\alpha + 12\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -2$;

в) $\dfrac{3\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 12\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 2$;

г) $\dfrac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{2}$.

6. Найдите период функции:

а) $y = 2\sin 4x + 3\sin x + \sin(x - \pi) + 2\sin(x + \pi)$;

б) $y = 3\sin 4x + 2\operatorname{tg} 5x$;

в) $y = 1 - \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; г) $y = \sin\dfrac{x}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{x}{5}$;

д) $y = \cos\dfrac{x}{3} + \operatorname{tg}\dfrac{x}{5}$; е) $y = \cos\dfrac{3x}{4} + 5\sin\dfrac{2x}{3}$;

ж) $y = 2\sin(x + 2) + 6\cos\pi x$.

7. Найдите множество значений функции:

а) $y = 1 - 2|\sin 2x|$; б) $y = 1 - |\cos x|$;

в) $y = \sin 3x + 2$; г) $y = \operatorname{tg}^2 x - 2$.

8. Какие из данных функций являются четными, какие нечетными, какие не являются ни четными, ни нечетными:

а) $\sin x + \operatorname{tg} x$; б) $\sin x + \cos x$; в) $\sin^2 x$; г) $\cos(2x + 1)$;

д) $\operatorname{tg} 5x + \operatorname{ctg} 7x$; е) $\cos 3x + \operatorname{ctg}^2 x$; ж) $\sin|2x| + \cos^3 3x$?

9. Какой знак имеет произведение:

а) $\cos 4° \cdot \sin 4$; б) $\sin 1 \cdot \cos 2 \cdot \operatorname{ctg} 3$?

10. Что больше: косинус или котангенс одного и того же угла прямоугольного треугольника?

Задания для повторения

11. Из пункта A в пункт B через равные промежутки времени отправились три автомашины. Они прибывают в пункт B одновременно, а затем выезжают в пункт C, расположенный на расстоянии 120 км от B. Третья машина, прибыв в C, сразу поворачивает обратно и в 40 км от C встречает первую машину, которая прибывает в C через 1 ч после второй. Какова скорость второй машины?

12. Два автомобилиста одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу. Они встретились в 40 км от пункта B.

Продолжая двигаться дальше, первый автомобилист, достигнув пункта B, сразу повернул обратно и в пункт A автомобилисты прибыли одновременно через 2 ч после встречи. Каково расстояние между пунктами A и B?

13. Решите уравнение:

а) $30 - 5^{1-x} = \sqrt{5^{2-x} - 100}$; б) $2^{x+1} + 1 = \sqrt{4^x + 21}$.

14. Найдите множество значений a и b, при которых корни x_1 и x_2 уравнения:

а) $x^2 - (a^2 + 3a + 1)x + 2a + b + 3 = 0$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 5, \\ 2x_1 + x_2 = 8; \end{cases}$$

б) $x^2 + (2a - 7)x + b^2 - 8b + 3a + 18 = 0$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 = 13. \end{cases}$$

15. Решите неравенство:

а) $\dfrac{x^2 - 4x + 8}{x + 2} \leqslant 1$ (в ответе укажите наибольшее решение);

б) $\dfrac{7x^2 + 3x - 7}{2x - 1} \geqslant 3x$ (в ответе укажите наименьшее решение).

16. Вычислите:

а) $\sqrt{x + y}$, если $\begin{cases} 2x + xy + 2y = 8, \\ x - xy - 2y = 22; \end{cases}$

б) $\sqrt{x} + 2y^2$, если $\begin{cases} \dfrac{9}{x} + \dfrac{9}{y} = 10, \\ \dfrac{6x}{y} + \dfrac{6y}{x} = 13. \end{cases}$

ОТВЕТЫ

1. а) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$; б) $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -2\sqrt{2}$; в) $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$; г) $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$. **2.** а) $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$, $\operatorname{tg}\alpha = a$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{a}$; б) $\sin\alpha = -\frac{|b|}{a}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{|b|}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{|b|}$; в) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$, $\cos\alpha =$

$= \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$, $\operatorname{ctg} \alpha = a$. **3.** а) $\frac{77}{85}$; б) $\frac{36}{85}$; в) 1; г) $\frac{84}{85}$. **4.** а) $\sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha$; б) $-\operatorname{tg} 4\beta$; в) 1; г) 1. **5.** а) $-\frac{3}{7}$; б) 0; в) −6,2; г) $\frac{3}{2}$. **6.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) π; в) 2π; г) 20π; д) 30π; е) 24π; ж) нет периода. **7.** а) $-1 \leqslant y \leqslant 1$; б) $0 \leqslant y \leqslant 1$; в) $1 \leqslant y \leqslant 3$; г) $-2 \leqslant y < +\infty$. **8.** а) Нечетная; б) ни четная, ни нечетная; в) четная; г) ни четная, ни нечетная; д) нечетная; е) четная; ж) четная. **9.** а) «Минус»; б) «плюс». **10.** Если $\alpha < 90°$, то $\operatorname{ctg} \alpha > \cos \alpha$; если $\alpha = 90°$, то $\operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha$. **11.** 40 км/ч. **12.** 120 км. **13.** а) $x = -1$; б) $x = 1$. **14.** а) $a_1 = -4$, $b_1 = 11$; $a_2 = 1$, $b_2 = 1$; б) $a_1 = 1$, $b_1 = 5$; $a_2 = 1$, $b_2 = 3$. **15.** а) $x = 3$; б) $x = -7$. **16.** а) 3; б) 6.

Решения и методические указания

К упражнению 1а

1. Так как угол α принадлежит III четверти, то $\sin \alpha < 0$, поэтому в формуле $\sin \alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ перед корнем нужно поставить знак «минус»:

$$\sin \alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

2. Находим тангенс угла α:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{5} : \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{3}.$$

3. Котангенс угла α найдем из формулы $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1$, откуда $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{3}{4}$.

4. Котангенс угла α можно найти и так: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{3}{4}$.

К упражнению 1в

1. Используя формулу $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, получим

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{10}.$$

2. Так как α — угол III четверти, то $\cos \alpha < 0$, и значит, $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$.

3. Так как α — угол III четверти, то $\sin\alpha < 0$; поэтому

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

4. Котангенс угла α найдем из формулы $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, т. е. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$.

К упражнению 2б

1. Так как α — угол IV четверти, то $\sin\alpha < 0$; поэтому

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}} = -\frac{|b|}{|a|} = -\frac{|b|}{a}.$$

2. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{|b|}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

3. $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{|b|}$.

К упражнению 3в

1. Запишем формулу синуса суммы:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha. \tag{1}$$

2. Подставив в формулу (1) известные значения $\sin\alpha$ и $\sin\beta$, имеем

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{9}{41}\cdot\cos\beta - \frac{40}{41}\cdot\cos\alpha. \tag{2}$$

3. Остается найти $\cos\beta$ и $\cos\alpha$. Имеем

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \frac{9}{41}; \quad \cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{40}{41}.$$

4. Подставив в выражение (2) найденные значения $\cos\beta$ и $\cos\alpha$, окончательно получим

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{9}{41}\cdot\frac{9}{41} + \frac{40}{41}\cdot\frac{40}{41} = 1.$$

К упражнению 4б

1. Преобразуем второе слагаемое в знаменателе дроби, для чего воспользуемся формулой приведения:

$$\operatorname{ctg}(45^\circ - 3\beta) = \operatorname{tg}(90^\circ - (45^\circ - 3\beta)) = \operatorname{tg}(45^\circ + 3\beta).$$

2. Заменив $\sin 90°$ на 1 и используя формулу тангенса суммы, получим

$$\frac{\sin 90° - \operatorname{tg}(45° + \beta)\operatorname{tg}(3\beta + 45°)}{\operatorname{tg}(45° + \beta) + \operatorname{ctg}(45° - 3\beta)} = \frac{1 - \operatorname{tg}(45° + \beta)\operatorname{tg}(3\beta + 45°)}{\operatorname{tg}(45° + \beta) + \operatorname{tg}(45° + 3\beta)} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}(45° + \beta + 45° + 3\beta)} = \operatorname{ctg}(45° + \beta + 45° + 3\beta) =$$

$$= \operatorname{ctg}(90° + 4\beta) = -\operatorname{tg} 4\beta.$$

К упражнению 4г

1. Выразим $\operatorname{tg}\frac{8\pi}{9}$ через тангенс острого угла. Используя формулу приведения, получим $\operatorname{tg}\frac{8\pi}{9} = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{9}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}$.

2. Перепишем данную дробь и применим формулу тангенса суммы. Имеем

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{9} + \operatorname{tg}\frac{5\pi}{36}}{1 + \operatorname{tg}\frac{8\pi}{9} \cdot \operatorname{tg}\frac{5\pi}{36}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{9} + \operatorname{tg}\frac{5\pi}{36}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{9} \cdot \operatorname{tg}\frac{5\pi}{36}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

К упражнению 5а

1. Поскольку значение $\operatorname{tg}\alpha$ дано в условии, следует преобразовать заданное выражение так, чтобы появился тангенс.

2. Разделим числитель и знаменатель дроби на $\cos\alpha$ (это можно сделать, так как $\cos\alpha \neq 0$). Тогда получим

$$\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha + 1} = \frac{\frac{2}{5} - 1}{\frac{2}{5} + 1} = -\frac{3}{7}.$$

К упражнению 5г

Разделим числитель и знаменатель дроби на $\sin^2\alpha$ (это можно сделать, так как $\sin\alpha \neq 0$):

$$\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1 - \operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}.$$

К упражнению 6а

1. Используя формулы приведения, упростим данную функцию:

$$y = 2\sin 4x + 3\sin x - \sin x - 2\sin x = 2\sin 4x.$$

2. Найдем период функции $\sin 4x$; имеем $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Ясно, что тот же период имеет и функция $y = 2 \sin 4x$.

З а м е ч а н и е. Период суммы периодических функций равен наименьшему общему кратному (НОК) периодов всех слагаемых.

При этом не должны учитываться периоды тех подобных членов, сумма которых после приведения обращается в нуль (как это имеет место в рассмотренном примере).

К упражнению 6б

1. Период функции $\sin 4x$ равен $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

2. Период функции $\operatorname{tg} 5x$ равен $\frac{\pi}{5}$.

3. Период данной функции равен НОК периодов ее слагаемых.

4. Очевидно, что НОК чисел $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{5}$ равно π.

5. Итак, период данной функции равен π.

К упражнению 6е

1. Период функции $\cos \frac{3x}{4}$ равен $\frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{8\pi}{3}$.

2. Период функции $5 \sin \frac{2x}{3}$ равен $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$.

3. Найдем НОК чисел $\frac{8\pi}{3}$ и 3π. Оно равно 24π, т. е. 24π — период данной функции.

К упражнению 6ж

1. Период функции $2 \sin (x + 2)$ равен $T_1 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$.

2. Период функции $6 \cos \pi x$ равен $T_2 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

3. Очевидно, что не существует такого числа, при делении которого на 2π и на 2 получались бы целые числа.

4. Значит, данная функция не имеет периода.

К упражнению 7а

1. Так как $-1 \leqslant \sin 2x \leqslant 1$, а $|\sin 2x| \geqslant 0$, то

$$0 \leqslant |\sin 2x| \leqslant 1. \qquad (1)$$

2. Умножив все члены двойного неравенства (1) на (−2) и изменив знаки неравенств на противоположные, получим

$$0 \geqslant -2|\sin 2x| \geqslant -2. \qquad (2)$$

3. Прибавим теперь ко всем членам двойного неравенства (2) по 1:

$$1 \geqslant 1 - 2|\sin 2x| \geqslant -1, \text{ или } -1 \leqslant 1 - 2|\sin 2x| \leqslant 1.$$

4. Итак, [−1; 1] — множество значений данной функции.

К упражнению 9

1. Так как 4° — угол I четверти, то $\cos 4° > 0$.

2. Синусом числа x называется число, равное синусу угла в x радианов. Следовательно,

$$\sin 4 = \sin\left(4 \cdot \frac{180°}{\pi}\right) = \sin\frac{720°}{\pi} < 0,$$

поскольку $180° < \frac{720°}{\pi} < 270°$, а синус угла III четверти отрицателен.

3. Итак, $\cos 4° \cdot \sin 4 < 0$.

К упражнению 10

1. Если α — острый угол, то $\operatorname{ctg}\alpha > \cos\alpha$. Действительно,

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cos\alpha \cdot \frac{1}{\sin\alpha} > \cos\alpha \cdot 1,$$

так как $\frac{1}{\sin\alpha} > 1$.

2. Если $\alpha = 90°$, то $\operatorname{ctg}\alpha = \cos\alpha = 0$.

К упражнению 11

1. Пусть s (км) — расстояние между A и B.

2. Пусть v_1, v_2, v_3 (км/ч) — соответственно скорость первой, второй и третьей машины.

3. Тогда можно составить следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{s}{v_1} - \frac{s}{v_2} = \frac{s}{v_2} - \frac{s}{v_3}, \\ \frac{160}{v_3} = \frac{80}{v_1}, \\ \frac{120}{v_1} = \frac{120}{v_2} + 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_3} = \frac{2}{v_2}, \\ v_3 = 2v_1, \\ \frac{120}{v_1} = \frac{120}{v_2} + 1, \end{cases}$$

откуда находим $v_2 = 40$ км/ч.

К о м м е н т а р и й. Сложность этой задачи заключается в составлении первого уравнения системы. Для этого нужно рассуждать так:

а) все машины имели разные скорости, что вытекает из условия;

б) машины отправлялись из A в B через равные промежутки времени;

в) все машины затратили разное время на прохождение расстояния от A до B;

г) время, затраченное каждой машиной на прохождение пути от A до B, выражается формулами $t_1 = \frac{s}{v_1}$, $t_2 = \frac{s}{v_2}$ и $t_3 = \frac{s}{v_3}$.

К упражнению 13а

1. Положим $5^{1-x} = y > 0$. Тогда уравнение примет вид

$$30 - y = \sqrt{5y - 100}\,. \qquad (1)$$

2. Уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} 30 - y \geqslant 0, \\ 5y - 100 \geqslant 0, \\ (30 - y)^2 = 5y - 100, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y \leqslant 30, \\ y \geqslant 20, \\ y^2 - 65y + 1000 = 0, \end{cases}$$

откуда $y = 25$.

3. Учитывая, что $y = 5^{1-x}$, имеем $25 = 5^{1-x}$, т. е. $x = -1$.

К упражнению 14а

1. Сначала решим систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 5, \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$$

и получим $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

2. Следовательно, $x_1 + x_2 = 5$, $x_1x_2 = 6$.

3. Используя теорему Виета, запишем систему уравнений для определения параметров a и b:

$$\begin{cases} a^2 + 3a + 1 = 5, & (1) \\ 2a + b + 3 = 6. & (2) \end{cases}$$

4. Из уравнения (1) следует, что $a_1 = -4$, $a_2 = 1$.

5. Соответствующие значения b найдем из уравнения (2):

а) $2(-4) + b + 3 = 6$, т. е. $b_1 = 11$;

б) $2 \cdot 1 + b + 3 = 6$, т. е. $b_2 = 1$.

Ответ: $a = -4$, $b = 11$; $a = 1$, $b = 1$.

К упражнению 15а

1. Преобразуем данное неравенство:

$$\frac{x^2-4x+8}{x+2} \leqslant 1; \quad \frac{x^2-4x+8-x-2}{x+2} \leqslant 0; \quad \frac{(x-2)(x-3)}{x+2} \leqslant 0.$$

2. Используя метод интервалов (рис. 146), найдем решение последнего неравенства: $x \in (-\infty; -2) \cup [2; 3]$.

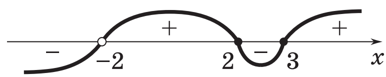


Рис. 146

3. Итак, $x = 3$ — наибольшее решение.

К упражнению 16а

1. Сложив уравнения системы, получим $3x = 30$, т. е. $x = 10$.

2. Подставив $x = 10$ во второе уравнение системы, имеем $10 - 10y - 2y = 22$, откуда $y = -1$.

3. Значит, $\sqrt{x+y} = \sqrt{10-1} = 3$.

Тема 15

Тригонометрические функции двойного аргумента. Тригонометрические функции половинного аргумента. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму. Формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций

Теоретические сведения

1. Тригонометрические функции двойного аргумента

1°. Из формул синуса и косинуса суммы (см. тему 14, п. 10) получаются формулы синуса и косинуса двойного аргумента. Если в соотношениях

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

положить $\alpha = \beta$, то получим

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \tag{1}$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \tag{2}$$

2°. Выразив правую часть формулы (2) через одну тригонометрическую функцию (синус или косинус), приходим к соотношениям

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha, \quad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1. \tag{3}$$

3°. Из формул (3) можно выразить $\sin^2\alpha$ и $\cos^2\alpha$ через $\cos 2\alpha$:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}. \tag{4}$$

Равенства (4) называются формулами понижения степени.

4°. Из формулы тангенса суммы получается формула тангенса двойного аргумента. Полагая $\alpha = \beta$ в соотношении

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

получим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \qquad (5)$$

Эта формула справедлива при условиях $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$.

5°. Кроме перечисленных формул (1)—(5), полезно знать и формулы тригонометрических функций тройного аргумента:

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}. \qquad (6)$$

Примеры. 1. Вычислить без таблиц $\sin 75° \sin 15°$.

Р е ш е н и е. $\sin 75° \sin 15° = \sin (90° - 15°) \sin 15° =$

$= \cos 15° \sin 15° = \frac{2 \cos 15° \sin 15°}{2} = \frac{\sin 30°}{2} = \frac{1}{4}$.

2. Упростить $1 - \cos\left(\frac{\alpha}{2} - 3\pi\right) - \cos^2 \frac{\alpha}{4} + \sin^2 \frac{\alpha}{4}$.

Р е ш е н и е. $1 - \cos\left(\frac{\alpha}{2} - 3\pi\right) - \cos^2 \frac{\alpha}{4} + \sin^2 \frac{\alpha}{4} =$

$= 1 - \cos\left(3\pi - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(\cos^2 \frac{\alpha}{4} - \sin^2 \frac{\alpha}{4}\right) = 1 + \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} = 1.$

3. Доказать тождество $\operatorname{tg} 4\alpha - \sec 4\alpha = \frac{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}$.

Р е ш е н и е. $\operatorname{tg} 4\alpha - \sec 4\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha} - \frac{1}{\cos 4\alpha} =$

$$= \frac{2 \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha} - \frac{1}{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha} - \frac{\frac{1}{\cos^2 2\alpha}}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha} - \frac{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} 2\alpha - 1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha} =$$

$$= -\frac{(1 - \operatorname{tg} 2\alpha)^2}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha} = -\frac{1 - \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg} 2\alpha} = \left(\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} - 1\right) : \left(\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} + 1\right) =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}.$$

2. Тригонометрические функции половинного аргумента

1°. Если в формулах

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha,\ \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

(см. п. 1) положить $\alpha = \frac{x}{2}$, то получим

$$\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}, \quad \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1. \qquad (1)$$

2°. Из формул (1) следует, что

$$\sin \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}, \qquad (2)$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}. \qquad (3)$$

С помощью формул (2) и (3) можно вычислять значения синуса и косинуса половинного аргумента $\frac{x}{2}$ по заданному косинусу аргумента x.

3°. Разделив почленно равенства (2) и (3), получим формулу

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \qquad (4)$$

4°. В формулах (2)—(4) знак перед радикалом зависит от того, в какой координатной четверти находится угол $\frac{x}{2}$.

5°. Умножив числитель и знаменатель подкоренного выражения формулы (4) на $1 + \cos x$ (или на $1 - \cos x$), после упрощений получим

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}; \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}. \qquad (5)$$

Примеры. 1. Упростить выражение $1 - 2\sin^2 \alpha + \cos 2\alpha$.

Решение. I способ. $(1 + \cos 2\alpha) - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 2\sin^2 \alpha = 2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 2\cos 2\alpha$.

II способ. $(1 - 2\sin^2 \alpha) + \cos 2\alpha = \cos 2\alpha + \cos 2\alpha = 2\cos 2\alpha$.

2. Вычислить без таблиц tg 112° 30′.

Р е ш е н и е. $\operatorname{tg} 112^\circ 30' = \dfrac{1-\cos 225^\circ}{\sin 225^\circ} = \dfrac{1-\cos(180^\circ+45^\circ)}{\sin(180^\circ+45^\circ)} =$

$$= \frac{1+\cos 45^\circ}{-\sin 45^\circ} = -\frac{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 2}{\sqrt{2}} = -(1+\sqrt{2}).$$

3. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента

1°. При решении тригонометрических уравнений, доказательстве неравенств и т. п. часто возникает необходимость выразить все четыре тригонометрические функции ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$) через какую-нибудь одну функцию $f(x)$.

2°. Так как

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}, \quad \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2},$$

то, разделив правые части этих равенств на $\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1$, получим

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}.$$

Разделим теперь числитель и знаменатель каждого из этих равенств на $\cos^2\frac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}. \qquad (1)$$

Здесь $x \neq (2k+1)\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3°. Выразим теперь $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}. \qquad (2)$$

Первая из этих формул имеет смысл при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x \neq \pi + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, а вторая — при $x \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Примеры. 1. Доказать тождество

$$\sin 4\alpha + \cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{ctg} 2\alpha.$$

Р е ш е н и е. Выразив $\sin 4\alpha$ и $\cos 4\alpha$ через $\operatorname{tg} 2\alpha$ по формулам (1), получим

$$\sin 4\alpha + \cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha} + \frac{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} =$$

$$= \frac{2\operatorname{tg}^2 2\alpha + 1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha}{(1+\operatorname{tg}^2 2\alpha)\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 2\alpha + 1}{(1+\operatorname{tg}^2 2\alpha)\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha.$$

2. Найти $A = \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

Р е ш е н и е. Упростим данное выражение:

$$A = \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = -(\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha) =$$
$$= -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) =$$
$$= -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = -\cos 2\alpha.$$

Далее находим

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5};$$

$$\sin \alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm\frac{4}{5}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \pm\frac{4}{5} : \frac{3}{5} = \pm\frac{4}{3}.$$

Следовательно,

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{16}{9}}{1 + \frac{16}{9}} = -\frac{7}{25}, \text{ т. е. } A = \frac{7}{25}.$$

4. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

1°. Формулы преобразования произведения синуса и косинуса в сумму получаются из формул сложения для синуса и косинуса.

2°. Запишем формулы для синуса суммы и синуса разности аргументов x и y:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y;$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

Сложив почленно эти равенства и разделив результат на 2, получим

$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}. \qquad (1)$$

3°. Запишем формулы для косинуса суммы и косинуса разности аргументов x и y:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y;$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Сложив почленно эти равенства и разделив результат на 2, получим

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}. \qquad (2)$$

Аналогично, вычитая из второго равенства первое, в результате получаем

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}. \qquad (3)$$

Пример. Представить $\cos^2 x \cos 3x$ в виде суммы тригонометрических функций.

Р е ш е н и е. Заменив $\cos^2 x$ на $\frac{1+\cos 2x}{2}$, имеем

$$\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\cos 3x = \frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos 2x \cos 3x.$$

Теперь применим формулу (2):

$$\frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos 2x \cos 3x = \frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{4}(\cos x + \cos 5x).$$

Итак,

$$\cos^2 x \cos 3x = \frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 5x.$$

4°. Полезно также знать формулы преобразования произведения тангенсов и котангенсов в сумму:

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}, \tag{4}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta=\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}. \tag{5}$$

5. Формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций

1°. Выведем формулу, позволяющую преобразовать сумму $\sin\alpha+\sin\beta$ в произведение тригонометрических функций. Положим $\alpha=x+y$, $\beta=x-y$ и найдем

$$\begin{gathered}\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=\\=\sin x\cos y+\cos x\sin y+\sin x\cos y-\cos x\sin y=\\=2\sin x\cos y.\end{gathered}$$

Решив теперь систему уравнений $\alpha=x+y$, $\beta=x-y$ относительно x и y, получим $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$. Следовательно,

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{1}$$

2°. Аналогично выводятся формулы

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \tag{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{3}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{4}$$

3°. Для суммы тангенсов имеем

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta},$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\ \left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k;\ k\in\boldsymbol{Z}\right). \tag{5}$$

4°. Точно так же получаются следующие формулы:

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \ \cos\beta} \ \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k;\ k \in \boldsymbol{Z}\right), \quad (6)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \ \sin\beta} \ (\alpha \neq \pi k,\ \beta \neq \pi k;\ k \in \boldsymbol{Z}), \quad (7)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha \ \sin\beta} \ (\alpha \neq \pi k,\ \beta \neq \pi k;\ k \in \boldsymbol{Z}). \quad (8)$$

5°. Полезно также знать формулу для преобразования в произведение выражения $a \sin \alpha + b \cos \alpha$ (a и b — любые действительные числа, не равные нулю). Эта формула имеет вид

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = r \sin (\alpha + \varphi), \quad (9)$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$.

Примеры. 1. Преобразовать в произведение:

а) $1 + \sin \alpha + \cos \alpha$; б) $\sqrt{3} - 2 \sin \alpha$;

в) $3 \sin x + 4 \cos x$; г) $\dfrac{\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha}{\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha}$.

Р е ш е н и е. а) $1 + \sin \alpha + \cos \alpha = (1 + \cos \alpha) + \sin \alpha =$

$= 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cos \frac{\alpha}{2}\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}\right) =$

$= 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\sin \left(90^{\circ} - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin \frac{\alpha}{2}\right) =$

$= 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin 45^{\circ} \cdot \cos \left(45^{\circ} - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(45^{\circ} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

б) $\sqrt{3} - 2 \sin \alpha = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin \alpha\right) = 2 (\sin 60^{\circ} - \sin \alpha) =$

$= 4 \sin \left(30^{\circ} - \frac{\alpha}{2}\right) \cos \left(30^{\circ} + \frac{\alpha}{2}\right)$.

в) $3 \sin x + 4 \cos x = \sqrt{3^2 + 4^2} \sin (x + \varphi) = 5 \sin (x + \varphi)$, где $\operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{3}$.

г) I способ. Разделив числитель и знаменатель дроби на 2, получим

$$M=\frac{\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}{\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}=\frac{\cos 60^\circ\ \cos\alpha+\sin 60^\circ\ \sin\alpha}{\cos 60^\circ\ \cos\alpha-\sin 60^\circ\ \sin\alpha}=\frac{\cos(60^\circ-\alpha)}{\cos(60^\circ+\alpha)}.$$

II способ. Используя формулу (9), получим

$$M=\frac{\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha}{-(\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha)}=\frac{\sqrt{1+3}\sin(\alpha+\varphi)}{-\sqrt{1+3}\sin(\alpha-\varphi)}=\frac{2\sin(\alpha+\varphi)}{-2\sin(\alpha-\varphi)},$$

где $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$, т. е. $\varphi=30^\circ$. Следовательно,

$$M=\frac{\sin(\alpha+30^\circ)}{-\sin(\alpha-30^\circ)}=\frac{\cos(60^\circ-\alpha)}{\cos(60^\circ+\alpha)}.$$

2. Упростить $\frac{\sin\alpha+2\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\sin 3\alpha+2\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}$.

Р е ш е н и е. $\frac{\sin\alpha+2\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\sin 3\alpha+2\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}=$

$$=\frac{(\sin\alpha+\sin 5\alpha)+2\sin 3\alpha}{(\sin 3\alpha+\sin 7\alpha)+2\sin 5\alpha}=\frac{2\sin 3\alpha\cos 2\alpha+2\sin 3\alpha}{2\sin 5\alpha\cos 2\alpha+2\sin 5\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin 3\alpha(\cos 2\alpha+1)}{2\sin 5\alpha(\cos 2\alpha+1)}=\frac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. На основании каких соотношений выводятся формулы тригонометрических функций двойного аргумента?

2. Выразите $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ только через: а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$.

3. Выразите $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ через $\cos\alpha$.

4. Выведите формулы для тригонометрических функций половинного аргумента.

5. Найдите $\sin 4\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$.

6. Найдите $\cos 4\alpha$, если $\operatorname{tg} 2\alpha=8$.

7. Какие соотношения положены в основу для вывода формул преобразования произведения тригонометрических функций в сумму? Выведите эти формулы.

8. Какие соотношения положены в основу для вывода формул суммы и разности одноименных тригонометрических функций? Выведите эти формулы.

9. Разложите на множители:

а) $\sqrt{2}+2\cos x$;

б) $\sqrt{3}-2\cos x$;

в) $\sin x+\cos y$; г) $\sqrt{3}-\operatorname{tg}x$;

д) $1+\operatorname{tg}x$; е) $1+\sin x-\cos x$;

ж) $3-4\cos^2(270^\circ-\alpha)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решите уравнение:

а) $\log_2 \sin 10° \sin 50° \sin 70° = x$;

б) $\log_2 \cos 20° \cos 40° \cos 80° \cos 60° = x$.

2. Найдите:

а) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 3$;

б) $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2n}{1+n^2}$;

в) $\operatorname{tg}(\beta-\alpha)$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{7}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{1}{2}$;

г) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right) = a$;

д) $\operatorname{tg} 4\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$;

е) $(\sin 2\alpha)^{-1} - 13\cos 2\alpha + 2$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -0{,}2$.

3. Упростите выражение до числового значения:

а) $\dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{8\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}$;

б) $\dfrac{3\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-3x\right)}{1-\cos(\pi-3x)}$, если $\operatorname{tg}\dfrac{3x}{2} = \dfrac{2}{3}$;

в) $17 - \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}$;

г) $\cos^2 x + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$;

д) $\dfrac{3\cos 2\alpha - 2}{2 - 9\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -4$;

е) $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x)$;

ж) $\dfrac{\left(\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{4}\right) - \sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{4}\right)\right)\cdot\cos\dfrac{x}{2}}{2\sin x}$.

4. Найдите период функции:

а) $y = \cos x\cos 6x$; б) $y = 5\sin\dfrac{x}{2} - 2\cos\left(\dfrac{2x}{3} + \dfrac{\pi}{2}\right)$;

в) $y = \sin 2x - 2\,\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; г) $y = \sin \frac{\pi x}{6} + \mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{30}$;

д) $y = \cos \pi x + \sin 2x$; е) $y = \mathrm{tg}\,\frac{x}{3} + \sin 2\pi x$;

ж) $y = 2 \sin 3x \sin 2x$; з) $y = 2 \sin 3x \cos 7x$.

5. В каком треугольнике его углы α и β связаны соотношением $\cos \alpha + \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) - \frac{3}{2} = 0$?

6. Преобразуйте в произведение:

а) $\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$; б) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha - 1$;

в) $\sqrt{1 + \cos\alpha} + \sqrt{1 - \cos\alpha}$, если α — угол I четверти;

г) $1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \mathrm{tg}\,\alpha$; д) $1 - \sin \alpha + \cos \alpha - \mathrm{tg}\,\alpha$;

е) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)$; ж) $3 - 4\cos^2 \alpha$.

Задания для повторения

7. Если к сплаву меди с цинком добавить 20 г меди, то ее содержание в сплаве увеличится на 10%. Если же к первоначальному сплаву добавить 100 г цинка, то содержание меди уменьшится на 20%. Найдите первоначальную массу сплава.

8. Если к раствору серной кислоты добавить 100 г воды, то концентрация кислоты уменьшится на 40%. Если же к первоначальному раствору добавить 100 г серной кислоты, то ее концентрация увеличится на 10%. Найдите первоначальную концентрацию кислоты.

З а м е ч а н и е. Прежде чем решать задачи на сплавы, растворы, смеси, усвойте следующее:

если смесь, раствор, сплав имеет массу m и состоит из трех веществ, массы которых равны m_1, m_2, m_3, то величины $\frac{m_1}{m}$, $\frac{m_2}{m}$, $\frac{m_3}{m}$ называют ***концентрациями*** соответствующих веществ;

величины $\frac{m_1}{m} \cdot 100$, $\frac{m_2}{m} \cdot 100$, $\frac{m_3}{m} \cdot 100$ называют ***процентным содержанием*** этих веществ;

справедливо равенство $\frac{m_1}{m} + \frac{m_2}{m} + \frac{m_3}{m} = 1$, т. е. концентрации двух веществ определяют концентрацию третьего вещества.

При составлении уравнений прослеживают содержание какого-либо одного вещества из тех, которые смешиваются или сплавляются.

9. Может ли синус острого угла быть равным:

а) $\frac{4}{5}$; б) $\frac{8}{7}$; в) $\frac{\sqrt{10}}{3}$; г) $a + \frac{1}{a}$?

10. Может ли косинус острого угла быть равным:

а) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$; б) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}$; в) $\frac{1}{\sin 18°}$; г) $\sin^2 3x + \cos^2 3x$?

11. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{\sin x \cos x}$; б) $y = \sqrt{x} \cdot \operatorname{tg} x$;

в) $y = \sqrt{\sin^2 x - \cos^2 x}$; г) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$.

12. Найдите период функции:

а) $y = \cos^2 x$; б) $y = |\cos x|$; в) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;

г) $y = \sin^3 x$; д) $y = \sin 2\pi x$.

13. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 6^{\sqrt{y-4}}(x + y - 3) = 0, \\ x^3 + x^2 y = 12 \end{cases}$ (в ответе запишите значение x);

б) $\begin{cases} 3^{\sqrt{-x-0,8}}(y - 7 - 3x) = 0, \\ xy + x^2 + 3 = 0 \end{cases}$ (в ответе запишите значение y).

ОТВЕТЫ

1. а) $x = -3$; б) $x = -4$. **2.** а) $\frac{3}{5}$; $-\frac{4}{5}$; $-\frac{3}{4}$; б) $\pm\frac{4n(1-n^2)}{(1+n^2)^2}$; $\pm\frac{4n(1-n^2)}{6n^2-n^4-1}$; в) $\frac{3}{4}$; г) $\frac{1-a^2}{2a}$; д) $-\frac{24}{7}$; е) 11,4. **3.** а) $\frac{1}{4}$; б) 2; в) 17; г) $\frac{3}{2}$; д) −3,16; е) −1; ж) $\frac{1}{4}$. **4.** а) 2π; б) 12π; в) π; г) 60; д) не существует; е) не существует; ж) 2π; з) π. **5.** В правильном треугольнике. **6.** а) $\cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta)$; б) $\frac{2\sin(\alpha - 30°)}{\cos\alpha}$; в) $2\cos\left(\frac{\alpha}{2} - 45°\right)$; г) $\frac{2\sqrt{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos(\alpha - 45°)}{\cos\alpha}$; д) $\frac{2\sqrt{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin(45° - \alpha)}{\cos\alpha}$; е) $4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$; ж) $4\sin(\alpha + 30°) \times \times \sin(\alpha - 30°)$. **7.** 100 г. **8.** 80%. **9.** а) Да; б) нет; в) нет; г) нет. **10.** а) Да;

б) нет; в) нет; г) да. **11.** а) $\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; б) $x \in \left[0; \frac{\pi}{2} + \pi k\right) \cup \cup \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{3\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in \boldsymbol{N}$; в) $\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; г) $x \in \left[2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right],\ k \in \boldsymbol{Z}$. **12.** а) π; б) π; в) $\frac{\pi}{2}$; г) 2π; д) 1. **13.** а) −2; б) 4.

Решения и методические указания

К упражнению 1а

1. Обозначим через A число, записанное под знаком логарифма, т. е.

$$A = \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ. \tag{1}$$

2. Умножив и разделив правую часть равенства (1) на $2 \cos 10^\circ$, получим

$$A = \frac{2\cos 10^\circ \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}{2\cos 10^\circ} = \frac{\sin 20^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}{2\cos 10^\circ}. \tag{2}$$

3. Так как $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$, $\sin 50^\circ = \cos 40^\circ$, то равенство (2) преобразуется так:

$$A = \frac{\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ}{2\cos 10^\circ} = \frac{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ}{2 \cdot 2\cos 10^\circ} =$$
$$= \frac{\sin 40^\circ \cos 40^\circ}{4\cos 10^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{2 \cdot 4\cos 10^\circ} = \frac{1}{8}.$$

4. Теперь вернемся к данному уравнению и решим его:

$$\log_2 \frac{1}{8} = x, \quad \text{или} \quad \log_2 2^{-3}, \quad \text{т. е.} \ \ x = -3.$$

К упражнению 2а

1. Нам известен тангенс половинного аргумента.

2. Связь между $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ выражается формулой

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \text{т. е.} \quad \sin \alpha = \frac{2 \cdot 3}{1 + 9} = \frac{3}{5}.$$

3. Связь между $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ выражается формулой

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \text{т. е.} \quad \cos\alpha = \frac{1-9}{1+9} = -\frac{4}{5}.$$

4. Связь между $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ выражается формулой

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\cdot 3}{1-9} = -\frac{3}{4}.$$

К упражнению 2д

1. Требуется найти $\operatorname{tg}4\alpha$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.

2. Сначала воспользуемся формулой тангенса двойного аргумента и найдем $\operatorname{tg}2\alpha$:

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

3. Теперь снова используем формулу двойного аргумента и найдем $\operatorname{tg}4\alpha$:

$$\operatorname{tg}4\alpha = \frac{2\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{tg}4\alpha = \frac{2\cdot\frac{4}{3}}{1-\frac{16}{9}} = -\frac{24}{7}.$$

К упражнению 3г

1. Воспользуемся формулой понижения степени:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

2. Тогда данное выражение преобразуется следующим образом:

$$\cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right) =$$

$$= \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}{2} + \frac{1+\cos 2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{2}.$$

3. Далее, продолжая упрощения, получим

$$\frac{1}{2}\left(3 + \cos 2x + 2\cos\frac{2\pi}{3}\cos 2x\right) = \frac{1}{2}(3 + \cos 2x - \cos 2x) = \frac{3}{2}.$$

К упражнению 3ж

1. Здесь воспользуемся следующей формулой понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

2. Тогда получим

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{4}\right) = \frac{1 - \cos 2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{4}\right)}{2} = \frac{1 + \sin\frac{x}{2}}{2};$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4}\right) = \frac{1 - \cos 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4}\right)}{2} = \frac{1 - \sin\frac{x}{2}}{2}.$$

3. Выражение в скобках примет вид

$$\frac{1 + \sin\frac{x}{2}}{2} - \frac{1 - \sin\frac{x}{2}}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}}{2} = \sin\frac{x}{2}.$$

4. Окончательно находим

$$\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin x} = \frac{\sin x}{4\sin x} = \frac{1}{4}.$$

К упражнению 4а

1. Используя формулу

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2},$$

получим

$$y = \cos x\cos 6x = \frac{1}{2}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos 7x.$$

2. Период функции $y = \cos 5x$ есть $T_1 = \frac{2\pi}{5}$, а период функции $y =$ $= \cos 7x$ равен $T_2 = \frac{2\pi}{7}$.

3. Очевидно, что НОК чисел T_1 и T_2 равно 2π.

4. Итак, 2π — период данной функции.

К упражнению 4ж

1. Воспользуемся формулой

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$$

и запишем данную функцию в виде

$$y = 2 \sin 3x \sin 2x = \cos x - \cos 5x.$$

2. Период функции $\cos x$ равен $T_1 = 2\pi$, а период функции $\cos 5x$ равен $T_2 = \frac{2\pi}{5}$.

3. Ясно, что НОК чисел T_1 и T_2 равно 2π.

4. Итак, функция имеет период 2π.

К упражнению 5

1. Так как

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\ \cos(\alpha+\beta) = 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 1,$$

то данное соотношение можно записать в виде

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

2. Преобразуем левую часть этого равенства:

$$\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 0,$$

или

$$\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 0.$$

3. Учитывая, что сумма квадратов действительных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из этих чисел равно нулю, имеем:

а) $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$; б) $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$.

Но α и β — углы треугольника, поэтому из равенства а) следует, что $\alpha = \beta$.

5. Теперь, подставив $\alpha = \beta$ в равенство б), получим $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, т. е. $\alpha = 60°$.

6. Итак, $\alpha = \beta = 60°$, а, значит, и третий угол равен $60°$, т. е. треугольник правильный.

К упражнению 6а

1. Воспользуемся тем, что данное выражение представляет собой разность квадратов и разложим его на множители:

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = (\cos \alpha - \sin \beta)(\cos \alpha + \sin \beta). \qquad (1)$$

2 Правая часть равенства (1) в явной форме не выражает сумму или разность одноименных тригонометрических функций.

3. Используя формулы приведения, получим

$$\cos \alpha - \sin \beta = \cos \alpha - \cos (90^\circ - \beta), \qquad (2)$$
$$\cos \alpha + \sin \beta = \cos \alpha + \cos (90^\circ - \beta). \qquad (3)$$

4. Перепишем правую часть равенства (1) с учетом равенств (2) и (3):

$$(\cos \alpha - \sin \beta)(\cos \alpha + \sin \beta) =$$
$$= (\cos \alpha - \cos (90^\circ - \beta))(\cos \alpha + \cos (90^\circ - \beta)). \qquad (4)$$

5. Применяя к правой части равенства (4) формулы суммы и разности косинусов, получим

$$-2 \sin \frac{\alpha + 90^\circ - \beta}{2} \sin \frac{\alpha - 90^\circ + \beta}{2} \cdot 2 \cos \frac{\alpha + 90^\circ - \beta}{2} \cos \frac{\alpha - 90^\circ + \beta}{2}. \qquad (5)$$

6. Упростим выражение (5); используя формулу синуса двойного угла и формулы приведения, имеем

$$-\sin (\alpha - \beta + 90^\circ) \sin (\alpha + \beta - 90^\circ) = \cos (\alpha - \beta) \cos (\alpha + \beta).$$

К упражнению 6е

1. Первые два слагаемых данного выражения преобразуем в произведение, используя формулу суммы синусов:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \qquad (1)$$

2. Последнее слагаемое данного выражения преобразуем как синус двойного аргумента:

$$\sin (\alpha + \beta) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}. \qquad (2)$$

3. Учитывая равенства (1) и (2), перепишем исходное выражение так:

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2}\right). \qquad (3)$$

4. Наконец, для упрощения выражения (3) воспользуемся формулой суммы косинусов и получим

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} = 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}.$$

К упражнению 7

1. Пусть x (г) — количество меди в сплаве, а y (г) — первоначальная масса сплава.

2. Тогда, используя условия задачи, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x+20}{y+20} - \dfrac{x}{y} = 0{,}1, & (1) \\ \\ \dfrac{x}{y} - \dfrac{x}{y+100} = 0{,}2. & (2) \end{cases}$$

3. Решив эту систему, находим $y = 100$, т. е. первоначальная масса сплава равна 100 г.

Комментарий. 1. Рассмотрим уравнение (1) из записанной системы. Что означают в нем дроби $\dfrac{x}{y}$ и $\dfrac{x+20}{y+20}$?

2. За x было принято количество меди в сплаве, а за y — первоначальная масса сплава.

3. Поэтому дробь $\dfrac{x}{y}$ выражает концентрацию меди (т. е. содержание меди в исходном сплаве).

4. Согласно условию, к первоначальной массе меди в сплаве было добавлено 20 г меди, т. е. количество меди в новом сплаве составит $x + 20$ (г), но в то же время масса нового сплава будет равна $y + 20$ (г).

5. Следовательно, концентрация меди в новом сплаве выразится дробью $\dfrac{x+20}{y+20}$.

6. После добавления 20 г меди к первоначальному сплаву ее содержание в сплаве увеличилось на 10%, т. е. на 0,1. Этот факт и выражает уравнение (1).

7. Аналогичные рассуждения приводят к уравнению (2).

К упражнению 9

а) Равенство $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ возможно, так как $0 < \dfrac{4}{5} < 1$.

б) Равенство $\sin\alpha = \dfrac{8}{7}$ невозможно, поскольку $\dfrac{8}{7} > 1$.

в) Равенство $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$ невозможно, так как $\dfrac{\sqrt{10}}{3} > 1$.

г) Равенство $\sin\alpha = a + \dfrac{1}{a}$ невозможно: если $a = 0$, то выражение $a + \dfrac{1}{a}$ не имеет смысла; если $a > 0$, то $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2$; если $a < 0$, то $a + \dfrac{1}{a} \leqslant -2$.

К упражнению 10

а) Равенство $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ возможно. Действительно:

1) $\sqrt{3} - \sqrt{2} \approx 1{,}73 - 1{,}41 = 0{,}32$;

2) $\sqrt{2} - 1 \approx 1{,}41 - 1 = 0{,}41$;

3) $0 < \dfrac{0{,}32}{0{,}41} < 1$.

б) Равенство $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}$ невозможно, поскольку

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[6]{3^2}}{\sqrt[6]{2^3}} = \frac{\sqrt[6]{9}}{\sqrt[6]{8}} = \sqrt[6]{\frac{9}{8}} > 1.$$

в) Равенство $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sin 18^\circ}$ невозможно, так как $0 < \sin 18^\circ < 1$ — правильная дробь и, значит, $\dfrac{1}{\sin 18^\circ} > 1$.

г) Равенство $\cos\alpha = \sin^2 3x + \cos^2 3x$ возможно, поскольку $\sin^2 3x + \cos^2 3x = 1$.

К упражнению 11

а) Имеем

$$\sin x \cos x \geqslant 0; \quad \frac{1}{2}\sin 2x \geqslant 0; \quad \sin 2x \geqslant 0,$$

откуда

$$2\pi k \leqslant 2x \leqslant \pi + 2\pi k, \text{ т. е. } \pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

б) Здесь должны выполняться условия

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ \cos x \neq 0, \end{cases}$$

т. е. $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi k; \dfrac{3\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{N}$.

в) Имеем

$$\sin^2 x - \cos^2 x \geqslant 0, \quad \text{или} \quad \cos 2x \leqslant 0,$$

откуда

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant 2x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

г) Область определения функции задается системой неравенств

$$\begin{cases} \sin x \geqslant 0, \\ \cos x \geqslant 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2\pi k \leqslant x \leqslant \pi + 2\pi k, \\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases}$$

откуда $x \in [2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

К упражнению 12а

1. Имеем $y = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

2. Так как функция $\cos 2x$ имеет период π, то и данная функция имеет тот же период π.

К упражнению 12г

1. Пусть T — период данной функции; тогда справедливо тождество

$$\sin^3 (x + T) = \sin^3 x, \text{ или } \sin^3 (x + T) - \sin^3 x = 0. \tag{1}$$

2. Разложив левую часть уравнения (1) по формуле разности кубов, получим

$$\sin^3 (x + T) - \sin^3 x = (\sin (x + T) - \sin x) \times$$
$$\times (\sin^2 (x + T) + \sin (x + T) \sin x + \sin^2 x) = 0. \tag{2}$$

3. Упростим второй множитель в уравнении (2):

$$\sin^2 (x + T) + \sin (x + T) \sin x + \sin^2 x =$$
$$= \left(\sin \left(x + T\right) + \frac{1}{2} \sin x\right)^2 + \frac{3}{4} \sin^2 x. \tag{3}$$

4. Так как выражение (3) неотрицательно, т. е. оно тождественно не равно нулю, то из равенства (2) следует, что должно выполняться тождество

$$\sin (x + T) - \sin x = 0, \text{ или } 2 \sin \frac{T}{2} \cos \left(x + \frac{T}{2}\right) = 0.$$

3. Выражение $\cos \left(x + \frac{T}{2}\right)$ тождественно не равно нулю, поэтому $\sin \frac{T}{2} = 0$. Наименьшее положительное значение T, при котором это равенство справедливо, есть 2π. Итак, 2π — период данной функции.

К упражнению 13а

1. Так как $y \geqslant 4$, то $6^{\sqrt{y-4}} \neq 0$; тогда систему можно переписать так:

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ x^3 + x^2 y = 12. \end{cases} \tag{1}$$

2. Решим систему (1):

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2(x + y) = 12, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ 3x^2 = 12. \end{cases} \tag{2}$$

3. Решениями системы (2) являются две пары чисел: $x_1 = 2$, $y_1 = 1$ и $x_2 = -2$, $y_2 = 5$.

4. Но $y \geqslant 4$, поэтому решение данной системы есть единственная пара чисел: $x = -2$, $y = 5$.

<u>Ответ</u>: -2.

Тема 16

Свойства функции $y = \sin x$ и ее график.
Функция $y = \arcsin x$ и ее график. Решение уравнения $\sin x = a$.
Свойства функции $y = \cos x$ и ее график.
Функция $y = \arccos x$ и ее график. Решение уравнения $\cos x = a$.
Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ и ее график.
Функция $y = \operatorname{arctg} x$ и ее график. Решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$.
Свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$ и ее график.
Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ и ее график. Решение уравнения $\operatorname{ctg} x = a$.
Некоторые соотношения для аркфункций

Теоретические сведения

1. Свойства функции $y = \sin x$ и ее график

1°. Отметим основные свойства функции $y = \sin x$:

а) область определения — вся числовая прямая, т. е. $D(\sin) = \boldsymbol{R}$;

б) множество значений — отрезок $[-1; 1]$, т. е. $E(\sin) = [-1; 1]$; значит, синус — функция ограниченная;

в) функция нечетная: $\sin(-x) = -\sin x$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$;

г) функция периодическая с наименьшим положительным периодом 2π, т. е. $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$;

д) $\sin x = 0$ при $x = \pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$;

е) $\sin x > 0$ при всех $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

ж) $\sin x < 0$ при всех $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

з) функция возрастает от -1 до 1 в промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

и) функция убывает от 1 до -1 в промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

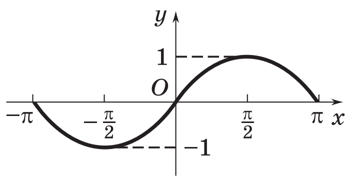


Рис. 147

к) функция принимает наибольшее значение, равное 1, в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

л) функция принимает наименьшее значение, равное −1, в точках $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2°. Все перечисленные свойства синуса позволяют построить его график на промежутке [−π; π], т. е. на промежутке, длина которого равна периоду функции (рис. 147).

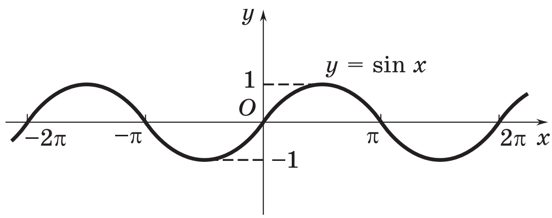


Рис. 148

3°. Так как функция $y = \sin x$ имеет период 2π, то ее график переходит в себя при параллельном переносе $\bar{r}\,(2\pi;\ 0)$. Поэтому график функции $y = \sin x$ на $[-\pi + 2\pi k;\ \pi + 2\pi k]$ получается из графика, изображенного на рис. 147, с помощью параллельного переноса $\bar{r}\,(2\pi k;\ 0)$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 148).

2. Функция $y = \arcsin x$ и ее график

1°. Функция $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает и принимает все значения из отрезка [−1; 1] (см. рис. 147). Поэтому функция $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ обратима, т. е. имеет обратную функцию, которую называют ***арксинусом*** и обозначают $y = \arcsin x$. Геометрически $\arcsin x$ означает величину угла (дуги), заключенного в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен x.

2°. График функции $y = \arcsin x$ изображен на рис. 149. Этот график симметричен графику функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, относительно прямой $y = x$.

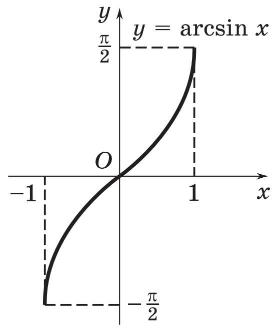


Рис. 149

3°. Отметим свойства функции $y = \arcsin x$:

а) $D(\arcsin) = [-1;\ 1]$;

б) $E(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$;

в) функция нечетная, т. е. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;

г) функция возрастающая.

Пример. Вычислить:

$$\text{а) } \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \text{б) } \operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{2}\right).$$

Р е ш е н и е. Имеем:

а) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12}$;

б) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Решение уравнения $\sin x = a$

1°. Формула корней уравнения $\sin x = a$ (где $|a| \leqslant 1$) имеет вид

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

2°. Частные случаи:

а) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$;

в) $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

3°. Формула корней уравнения $\sin^2 x = a$ (где $a \leqslant 1$) имеет вид

$$x = \pm\arcsin\sqrt{a} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример. Решить уравнение $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\sqrt{3}=0$.

Р е ш е н и е. $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}+x=(-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\pi k \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}+x=$

$=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\pi k \Leftrightarrow x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$.

4. Свойства функции $y = \cos x$ и ее график

1°. Отметим основные свойства функции $y = \cos x$:

а) область определения — вся числовая прямая, т. е. $D(\cos) = \boldsymbol{R}$;

б) множество значений — отрезок $[-1; 1]$, т. е. $E(\cos) = [-1; 1]$; значит, косинус — функция ограниченная;

в) функция четная: $\cos(-x) = \cos x$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$;

г) функция периодическая с наименьшим положительным периодом 2π, т. е. $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$;

д) $\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$;

е) $\cos x > 0$ при всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}$;

ж) $\cos x < 0$ при всех $x \in \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}$;

з) функция убывает от 1 до -1 в промежутках $[2\pi k;\ \pi + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

и) функция возрастает от -1 до 1 в промежутках $[-\pi + 2\pi k;\ 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

к) функция принимает наибольшее значение, равное 1, в точках $x = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$;

л) функция принимает наименьшее значение, равное -1, в точках $x = \pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

2°. Все перечисленные свойства косинуса позволяют построить его график на промежутке $[-\pi; \pi]$, т. е. на промежутке, длина которого равна периоду функции (рис. 150).

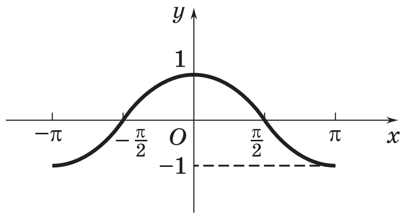


Рис. 150

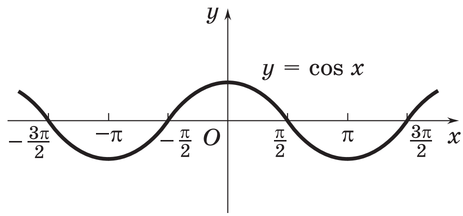


Рис. 151

3°. В силу того что период функции $y = \cos x$ равен 2π, ее график переходит в себя при параллельном переносе $\bar{r}(2\pi;\ 0)$. Следовательно, график функции $y = \cos x$ на $[-\pi + 2\pi k;\ \pi + 2\pi k]$ получается из графика, изображенного на рис. 150, с помощью параллельного переноса $\bar{r}(2\pi k;\ 0)$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 151).

5. Функция $y = \arccos x$ и ее график

1°. Функция $y = \cos x$ на отрезке $[0;\ \pi]$ убывает и принимает все значения из отрезка $[-1;\ 1]$ (см. рис. 150). Поэтому функция $y = \cos x$ на отрезке $[0;\ \pi]$ обратима, т. е. имеет обратную функцию, которую называют ***арккосинусом*** и обозначают $y = \arccos x$. Геометрически $\arccos x$ означает величину угла (дуги), заключенного в промежутке $[0;\ \pi]$, косинус которого равен x.

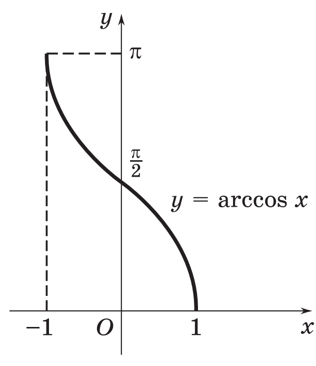


Рис. 152

2°. График функции $y = \arccos x$ изображен на рис. 152. Этот график симметричен графику функции $y = = \cos x$, $x \in [0; \pi]$, относительно прямой $y = x$.

3°. Отметим свойства функции $y = \arccos x$:

а) $D(\arccos) = [-1; 1]$;

б) $E(\arccos) = [0; \pi]$;

в) функция убывающая;

г) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

Пример. Вычислить $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$.

Р е ш е н и е. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) =$

$= \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right) =$

$= \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = -1.$

6. Решение уравнения $\cos x = a$

1°. Формула корней уравнения $\cos x = a$ (где $|a| \leqslant 1$) имеет вид

$$x = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

2°. Частные случаи:

а) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

в) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3°. Формула корней уравнения $\cos^2 x = a$ (где $a \leqslant 1$) имеет вид

$$x = \pm\arccos\sqrt{a} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример. Решить уравнение

$$\cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\right) - 1 = 0.$$

Р е ш е н и е. $\cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x - \frac{1}{2} = 2\pi k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x = \frac{1}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow x = \frac{3}{4} + 3\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$

7. Свойства функции $y = \mathrm{tg}\, x$ и ее график

1°. Отметим основные свойства функции $y = \mathrm{tg}\, x$:

а) область определения — множество всех действительных чисел, кроме чисел вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

б) множество значений — вся числовая прямая, т. е. $E(\mathrm{tg}) = \boldsymbol{R}$; таким образом, тангенс — функция неограниченная;

в) функция нечетная: $\mathrm{tg}\,(-x) = -\mathrm{tg}\, x$ при всех $x \in D(\mathrm{tg})$;

г) функция периодическая с наименьшим положительным периодом π, т. е. $\mathrm{tg}\,(x + \pi) = \mathrm{tg}\, x$ при всех $x \in D(\mathrm{tg})$;

д) $\mathrm{tg}\, x = 0$ при $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

е) $\mathrm{tg}\, x > 0$ при всех $x \in \left(\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

ж) $\mathrm{tg}\, x < 0$ при всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

з) функция возрастает в каждом промежутке $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2°. Все перечисленные свойства тангенса позволяют построить его график на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. на промежутке, длина которого равна периоду функции (рис. 153).

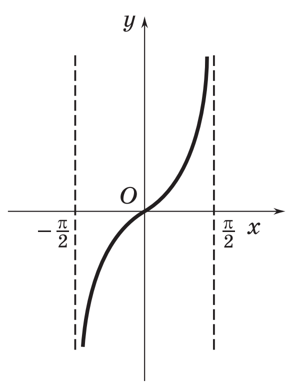


Рис. 153

3°. В силу того что период функции $y = \mathrm{tg}\, x$ равен π, ее график переходит в себя при параллельном переносе $\bar{r}(\pi;\ 0)$. Поэтому график функции $y = \mathrm{tg}\, x$ на $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ получается

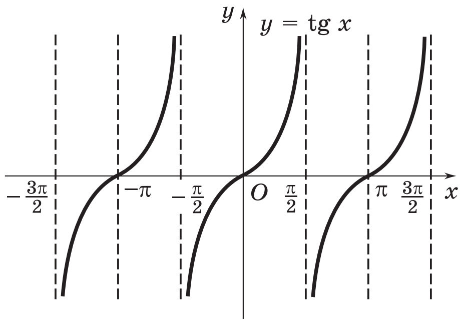


Рис. 154

из графика, изображенного на рис. 153, с помощью параллельного переноса $\bar{r}(\pi k;\ 0)$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 154).

8. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ и ее график

1°. На промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ тангенс возрастает (см. рис. 154) и принимает все числовые значения, т. е. $E(\operatorname{tg}) = (-\infty;\ +\infty)$. Поэтому функция $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ обратима, т. е. имеет обратную функцию, которую называют ***арктангенсом*** и обозначают $y = \operatorname{arctg} x$. Геометрически $\operatorname{arctg} x$ означает величину угла (дуги), заключенного в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен x.

2°. График функции $y = \operatorname{arctg} x$ изображен на рис. 155. Этот график симметричен графику функции $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, относительно прямой $y = x$.

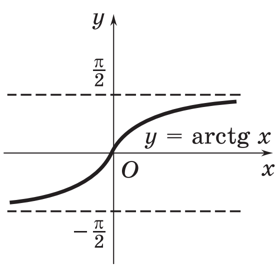


Рис. 155

3°. Отметим свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$:

а) $D(\operatorname{arctg}) = (-\infty;\ +\infty)$;

б) $E(\operatorname{arctg}) = \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$;

в) функция нечетная, т. е. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$;

г) функция возрастающая.

Пример. Вычислить

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right).$$

Р е ш е н и е. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) =$

$= \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

9. Решение уравнения tg $x = a$

1°. Формула корней уравнения $\operatorname{tg} x = a$ имеет вид

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

2°. Частные случаи:

а) $\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$;

в) $\operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

3°. Формула корней уравнения $\operatorname{tg}^2 x = a$ имеет вид

$$x = \pm\operatorname{arctg}\sqrt{a} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример. Решить уравнение $3\operatorname{tg}^2 3x - 1 = 0$.

Р е ш е н и е. $\operatorname{tg}^2 3x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 3x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3x = \pm\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} +$

$+ \pi k \Leftrightarrow 3x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18}(6k \pm 1),\ k \in \boldsymbol{Z}$.

10. Свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$ и ее график

1°. Отметим основные свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$:

а) область определения — множество всех действительных чисел, кроме чисел вида $\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$;

б) множество значений — вся числовая прямая, т. е. $E(\operatorname{ctg}) = \boldsymbol{R}$; таким образом, котангенс — функция неограниченная;

в) функция нечетная: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$ при всех $x \in D(\operatorname{ctg})$;

г) функция периодическая с наименьшим положительным периодом π, т. е. $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$ при всех $x \in D(\operatorname{ctg})$;

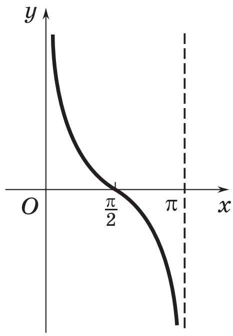


Рис. 156

д) $\operatorname{ctg} x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

е) $\operatorname{ctg} x > 0$ при всех $x \in (\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

ж) $\operatorname{ctg} x < 0$ при всех $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

з) функция убывает в каждом промежутке $(\pi k;\ \pi + \pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2°. Все перечисленные свойства котангенса позволяют построить его график на промежутке $(0;\ \pi)$, т. е. на промежутке, длина которого равна периоду функции (рис. 156).

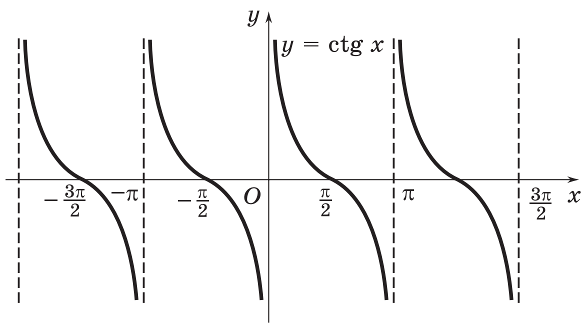


Рис. 157

3°. Так как период функции $y = \operatorname{ctg} x$ равен π, то ее график переходит в себя при параллельном переносе $\bar{r}(\pi;\ 0)$. Поэтому график функции $y = \operatorname{ctg} x$ на $(\pi k;\ \pi + \pi k)$ получается из графика, изображенного на рис. 156, с помощью параллельного переноса $\bar{r}(\pi k;\ 0)$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 157).

11. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ и ее график

1°. На промежутке $(0;\ \pi)$ котангенс убывает (см. рис. 156) и принимает все числовые значения, т. е. $E(\operatorname{ctg}) = (-\infty;\ +\infty)$. Поэтому функция $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0;\ \pi)$ обратима, т. е.

имеет обратную функцию, которую называют ***арккотангенсом*** и обозначают $y = \operatorname{arcctg} x$. Геометрически $\operatorname{arcctg} x$ означает величину угла (дуги), заключенного в промежутке $(0; \pi)$, котангенс которого равен x.

2°. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ изображен на рис. 158. Этот график симметричен графику функции $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$, относительно прямой $y = x$.

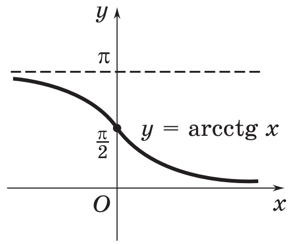


Рис. 158

3°. Отметим свойства функции $y = \operatorname{arcctg} x$:

а) $D(\operatorname{arcctg}) = (-\infty; +\infty)$;

б) $E(\operatorname{arcctg}) = (0; \pi)$;

в) функция убывающая;

г) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

Пример. Вычислить $\sin(\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arcctg} 1)$.

Р е ш е н и е. $\sin(\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arcctg} 1) =$

$$= \sin\left(\pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{13\pi}{12} =$$

$$= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = -\sin\frac{\pi}{12}.$$

12. Решение уравнения $\operatorname{ctg} x = a$

1°. Формула корней уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ имеет вид

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

2°. Частные случаи:

а) $\operatorname{ctg} x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\operatorname{ctg} x = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$;

в) $\operatorname{ctg} x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

3°. Формула корней уравнения $\operatorname{ctg}^2 x = a$ имеет вид

$$x = \pm\operatorname{arcctg}\sqrt{a} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример. Решить уравнение $\operatorname{ctg}^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 3$.

Решение. $\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = \pm\operatorname{arcctg}\sqrt{3} + \pi k \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \pi k \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

13. Некоторые соотношения для аркфункций

Сведем вместе уже выведенные соотношения и дополним их новыми.

1°. Записи $y = \arcsin x$ и $x = \sin y$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, равносильны. Следовательно, для любого x, взятого на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$, имеем

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}; \tag{1}$$

$$\sin(\arcsin x) = x. \tag{2}$$

2°. Записи $y = \arccos x$ и $x = \cos y$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$, равносильны. Поэтому для любого x такого, что $-1 \leqslant x \leqslant 1$, имеем

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi; \tag{3}$$

$$\cos(\arccos x) = x. \tag{4}$$

3°. Записи $y = \operatorname{arctg} x$ и $x = \operatorname{tg} y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, равносильны. Значит, для любого x такого, что $-\infty < x < +\infty$, имеем

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}; \tag{5}$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x. \tag{6}$$

4°. Запись $y = \operatorname{arcctg} x$ и $\operatorname{ctg} y = x$, $0 < y < \pi$, равносильны. Таким образом, для любого x такого, что $-\infty < x < +\infty$, имеем

$$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi; \tag{7}$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x. \tag{8}$$

5°. Функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ называют ***обратными тригонометрическими функциями*** (или ***аркфункциями***).

6°. Приведем еще некоторые формулы, позволяющие находить значения тригонометрических функций от аркфункций.

Например, вычислим $\cos(\arcsin x)$. Положим $\arcsin x = y$. Тогда $\sin y = x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$; нам нужно найти $\cos y$.

а) Известно, что $\cos y = \pm\sqrt{1 - \sin^2 y}$.

б) Значит, $\cos y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

в) Но $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, а на этом отрезке косинус принимает неотрицательные значения.

г) Таким образом, $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$, т. е.

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}, \text{ где } -1 \leqslant x \leqslant 1. \qquad (9)$$

7°. Выведем еще одну формулу. Так как $\operatorname{tg} y = \frac{\sin y}{\cos y}$, то из формул (2) и (9) следует, что

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \text{где} \quad -1 < x < 1. \qquad (10)$$

8°. Аналогично получаются следующие формулы:

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, \quad \text{где} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1;\ x \neq 0; \qquad (11)$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{где} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1; \qquad (12)$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, \quad \text{где} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1;\ x \neq 0; \qquad (13)$$

$$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \text{где} \quad -1 < x < 1. \qquad (14)$$

9°. Справедливы тождества:

а) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1; 1]$;

б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, $x \in \boldsymbol{R}$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Перечислите основные свойства синуса.

2. Обратима ли функция $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$? Почему?

3. Дана функция $y = \sin x$. Как называют и обозначают обратную ей функцию? Что означает геометрически $\arcsin x$?

4. Постройте график функции $y = \arcsin x$. Укажите $D(\arcsin)$ и $E(\arcsin)$.

5. Докажите, что функция арксинус является: а) нечетной; б) возрастающей.

6. Эквивалентны ли выражения: а) $y = x$ и $y = \sin(\arcsin x)$; б) $y = \arcsin x$ и $\sin y = x$?

7. Вычислите:

а) $\arcsin(-1)$;

б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

в) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

г) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; д) $\arcsin 0$;

е) $\arcsin\frac{1}{2}$; ж) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$;

з) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; и) $\arcsin 1$.

8. Дано уравнение $\sin x = a$. Запишите его решения и дайте их графическую иллюстрация при: а) $a = 0$; б) $a = 1$; в) $a = -1$; г) $a = \sqrt{3}$.

9. Перечислите основные свойства косинуса.

10. Назовите обратную функцию по отношению к косинусу на отрезке $[0;\ \pi]$. Что означает геометрически $\arccos x$?

11. Постройте график функции $y = \arccos x$. Укажите область определения и множество значений функции.

12. Как изменяется функция $y = \arccos x$ на отрезке $[-1;\ 1]$?

13. Эквивалентны ли выражения $y = \arccos x$ и $\cos y = x$?

14. Вычислите:

а) $\arccos 1$; б) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\arccos\frac{1}{2}$;

д) $\arccos 0$; е) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

ж) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

з) $\arccos(-1)$.

15. Дано уравнение $\cos x = a$. Запишите его решения и дайте их графическую иллюстрацию при: а) $a = 0$; б) $a = 1$; в) $a = -1$; г) $a = \sqrt{3}$.

16. Перечислите основные свойства тангенса.

17. Напишите обратную функцию по отношению к тангенсу на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Как называют и обозначают эту функцию? Что означает геометрически $\operatorname{arctg} x$?

18. Какой функцией, возрастающей или убывающей, является арктангенс на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$?

19. Эквивалентны ли выражения $y = \operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{tg} y = x$?

20. Вычислите:

а) $\operatorname{arctg} 1$; б) $\operatorname{arctg} (-1)$;

в) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$; г) $\operatorname{arctg} 3$;

д) $\operatorname{arctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

21. Дано уравнение $\operatorname{tg} x = a$. Запишите его решения и дайте их графическую иллюстрацию при: а) $a = 0$; б) $a = 1$; в) $a = -1$; г) $a = \sqrt{3}$.

22. Перечислите основные свойства котангенса.

23. Дана функция $y = \operatorname{ctg} x$. Назовите функцию, обратную данной. Как ее обозначают? Что означает геометрически $\operatorname{arcctg} x$?

24. Постройте график функции $y = \operatorname{arcctg} x$. Укажите $D(\operatorname{arcctg} x)$ и $E(\operatorname{arcctg} x)$.

25. Эквивалентны ли выражения $y = \operatorname{arcctg} x$ и $\operatorname{ctg} y = x$?

26. Вычислите: а) $\operatorname{arcctg} (-1)$;

б) $\operatorname{arcctg} 1$; в) $\operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$;

г) $\operatorname{arcctg} (-\sqrt{3})$.

27. Дано уравнение $\operatorname{ctg} x = a$. Запишите его решения и дайте их графическую иллюстрацию при: а) $a = 0$; б) $a = 1$; в) $a = -1$; г) $a = \sqrt{3}$.

28. Верно ли равенство:

а) $\arcsin \frac{1}{2} = 30°$;

б) $\sin \left(\arcsin \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$;

в) $\sin (\arcsin x) = x$;

г) $\arcsin (\sin 30°) = 30°$?

29. Верно ли равенство:

а) $\arccos \frac{1}{2} = 60°$;

б) $\cos \left(\arccos \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$;

в) $\cos(\arccos x) = x$;

г) $\arccos (\cos 60°) = 60°$?

30. Верно ли равенство:

а) $\operatorname{arctg} 1 = 45°$;

б) $\operatorname{tg} (\operatorname{arctg} 1) = 1$;

в) $\operatorname{tg} (\operatorname{arctg} x) = x$;

г) $\operatorname{arctg} (\operatorname{tg} 45°) = 45°$?

31. Верно ли равенство:

а) $\operatorname{arcctg} \sqrt{3} = 30°$;

б) $\operatorname{ctg} (\operatorname{arcctg} \sqrt{3}) = \sqrt{3}$;

в) $\operatorname{ctg} (\operatorname{arcctg} x) = x$;

г) $\operatorname{arcctg} (\operatorname{ctg} 60°) = 60°$?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Постройте график функции:

а) $y = \sin |-x|$; б) $y = -|\sin x|$; в) $y = |-\cos x|$; г) $y = \operatorname{tg} |-x|$; д) $y = -|\operatorname{tg} x|$; е) $y = \cos^4 x - \sin^4 x$; ж) $y = \sin x + \cos x$;

з) $y = \operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x$; и) $y = 4\left(\cos^4 \frac{x}{2} + \sin^4 \frac{x}{2}\right)$.

2. Вычислите:

а) $\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{7\pi}{8}\right)$; б) $\arccos \left(\sin \frac{15\pi}{7}\right)$; в) $\cos \left(2 \arcsin \frac{4}{5}\right)$;

г) $\operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{5}{13}\right)$; д) $\sin \left(\arccos \left(-\frac{1}{3}\right)\right)$; е) $\arccos \left(\cos \frac{5\pi}{4}\right)$;

ж) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)$; з) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{7}\right)$; и) $\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{5}\right)$;

к) $\arcsin\left(-\sin\frac{7\pi}{3}\right)$; л) $\arccos\left(-\cos\frac{3\pi}{4}\right)$; м) $\arccos\left(-\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}\right)$.

3. Найдите область определения функции:

а) $y = \arccos\frac{2x-1}{3x+2}$; б) $y = \arcsin\frac{3x-1}{3}$; в) $y = \arcsin(x^2-1)$;

г) $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{x^2-9}$; д) $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{x^2-5x+6}$.

4. Вычислите:

а) $\sin\left(\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{12}{13}\right)$;

б) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right) + \arcsin\frac{4}{5}\right)$;

в) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right)$;

г) $\cos\left(\operatorname{arcctg}\frac{3}{4} + \operatorname{arcctg}\left(-\frac{12}{5}\right)\right)$;

д) $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{7}\right)$;

е) $\sin(2\operatorname{arctg}4)$;

ж) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}\right)$;

з) $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\frac{2}{3}\right)$;

и) $\sin\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)$;

к) $\cos(2\arccos x)$;

л) $\sin(2\operatorname{arctg}x)$.

5. Найдите корни уравнения, принадлежащие заданному отрезку:

а) $\sin 4x + \cos 3x - \sin 2x = 0$, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$;

б) $\sin 4x + \cos 3x - \sin 2x = 0$, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$;

в) $\sqrt{3}\operatorname{ctg} x + 2|\cos x| = 0$, $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$;

г) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 2|\sin x|$, $\left[\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right]$;

д) $\dfrac{|\cos x|}{\sin x} + 2\cos^2 x = 0$, $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$;

е) $2|\sin x| - \operatorname{tg} x = 0$, $\left[\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right]$;

ж) $2\sin^2 x - \dfrac{|\sin x|}{\cos x} = 0$, $\left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

В ответе укажите количество корней.

6. Решите уравнение (в ответе укажите в градусах сумму корней, принадлежащих заданному отрезку):

а) $\sin 3x - |\sin x| = 0$, $\left[\dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}\right]$;

б) $\operatorname{tg} 3x + |\operatorname{tg} x| = 0$, $\left[\dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}\right]$;

в) $\cos 3x + |\cos x| = 0$, $\left[\dfrac{5\pi}{4}; \dfrac{9\pi}{4}\right]$;

г) $\sin 3x + |\sin x| = 0$, $\left[\dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}\right]$;

д) $\operatorname{tg} 3x - |\operatorname{tg} x| = 0$, $\left[\dfrac{5\pi}{4}; \dfrac{9\pi}{4}\right]$;

е) $\cos 3x - |\cos x| = 0$, $\left[\dfrac{5\pi}{4}; \dfrac{9\pi}{4}\right]$;

ж) $\sin 4x + \cos 3x - \sin 2x = 0$, $\left[\dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}\right]$.

7. Вычислите:

а) $15(\sin 2x - \cos 2x)$, если $\sin x - 6 = 3\operatorname{tg} x - 2\cos x$;

б) $8\cos 2x + 4\cos^2 x$, если $2\sin 2x + 3\cos x - 20\sin x = 15$;

в) $10(\cos 2x - \sin 2x)$, если $2\operatorname{ctg} x - 3\sin x = 6 - \cos x$;

г) $4\cos 2x + 3\sin 2x$, если $2 + 4\operatorname{tg} x = \cos x + 2\sin x$;

д) $\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha$, если $2\cos 2\alpha + 4\sqrt{3}\cos\alpha + 5 = 0$.

8. Решите уравнение:

а) $\sqrt{3}\cos x - \cos 2x = 1$; найдите сумму корней удовлетворяющих неравенствам $6 < x < 13$;

б) $\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 1$; сколько корней удовлетворяют неравенствам $3 \leqslant x < 10$?

в) $\cos x - \cos \frac{5x}{2} = 1 - \cos \frac{3x}{2}$; сколько корней удовлетворяют неравенствам $3 < x < 7$?

г) $\sin 3x - 2 \cos^2 2x = \sin x$; сколько корней удовлетворяют неравенствам $-7 < x < -5$?

д) $\sin x \cos 3x = 1 - 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x\right)$; сколько корней удовлетворяют неравенствам $6 < x < 10$?

е) $\sqrt{2} \sin x = 1 - \cos 2x$; в ответе запишите в градусах наименьший корень на отрезке $[-5; -3]$.

9. Определите, при каких значениях a имеет решение уравнение:

а) $\cos^2 x + 6 \sin x = 4a^2 - 2$;

б) $\sin^4 x + 2 \sin x \cos x + \cos^4 x = a$;

в) $\sin 2x + 2a\sqrt{2}(\sin x - \cos x) = 4a - 1$;

г) $\sin^2 x + 4 \sin x = a$;

д) $\cos^2 x - 3 \cos x + a = 0$.

10. Решите уравнение $\sin 4x = a \operatorname{tg} x$ (где $0 < a < 4$).

11. Найдите все решения уравнения:

а) $\sin \left(\frac{4}{3}\pi \sin x\right) = \frac{1}{2}$; б) $\sin \left(\frac{11}{8}\pi \cos x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sin \left(\frac{3\pi}{2} \cos x\right) = -\frac{1}{2}$; г) $\operatorname{ctg} (3 \cos x) = 1$.

12. Найдите все значения x, для которых величина:

а) $y = \frac{4}{3}\pi \sin x \cos x$ удовлетворяет уравнению

$$\log_4 (\operatorname{ctg} 2y + \operatorname{tg} y) = 1 + 0{,}5 \log_{0,5} (9 \operatorname{ctg} y - \operatorname{tg} y);$$

б) $y = \frac{\pi}{3}(\sin x + \sqrt{3} \cos x)$ удовлетворяет уравнению

$$\log_4 (\operatorname{tg} 2y - 3 \operatorname{ctg} y) = 1 - 0{,}5 \log_2 (\operatorname{ctg} y - \operatorname{tg} y);$$

в) $y = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi(\sin x + \cos x)$ удовлетворяет уравнению

$$0{,}5 \log_2 (\operatorname{ctg} y + \operatorname{tg} 2y) = 1 - \log_4 (9 \operatorname{ctg} y - 5 \operatorname{tg} y);$$

г) $y = \frac{2}{3}\pi \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\log_4\left(\frac{1}{\operatorname{ctg} 2y} - \frac{3}{\operatorname{tg} y}\right) = 1 - 0{,}5 \log_2 (\operatorname{ctg} y - \operatorname{tg} y).$$

13. Докажите, что:

а) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$;

б) $2\operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{4} = \operatorname{arctg} \frac{32}{43}$;

в) $\arccos \frac{1}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) = \arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$;

г) $\arcsin \frac{9}{41} - \arccos \frac{4}{5} = -\arcsin \frac{84}{205}$.

Задания для повторения

14. Из полного бака, содержащего 729 л чистой кислоты, вылили k литров кислоты и долили бак водой. После перемешивания (до получения однородного раствора) из бака вылили k литров раствора, затем долили бак водой и перемешали. После того как такая операция была проделана 6 раз, жидкость в баке содержала 64 л чистой кислоты. Определите значение k.

15. В сосуде было 10 л соляной кислоты. Часть соляной кислоты отлили, а сосуд дополнили таким же количеством воды. Затем снова отлили такое же количество смеси и долили такое же количество воды. Сколько литров отливали каждый раз, если в результате в сосуде оказался 64%-ный раствор соляной кислоты?

16. Найдите сумму 20 членов арифметической прогрессии, если ее 1-й член равен 2, а 7-й член равен 20.

17. Сумма 1-го и 5-го членов арифметической прогрессии равна 26, а произведение 2-го и 4-го ее членов равно 160. Найдите сумму первых шести членов прогрессии.

18. Три числа, каждое из которых является степенью с основанием a ($a > 0$, $a \neq 1$), составляют геометрическую прогрессию. Докажите, что логарифмы этих чисел образуют арифметическую прогрессию.

19. Найдите знаменатель и сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, в которой $b_1 = \sqrt{3}$, $b_2 = \frac{2}{\sqrt{3} + 1}$.

20. Докажите справедливость неравенства:

а) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geqslant 2$, если $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

б) $2 \sin 4\alpha \sin 2\alpha + \cos 6\alpha \geqslant -1$.

ОТВЕТЫ

2. а) $-\frac{\pi}{8}$; б) $\frac{5\pi}{14}$; в) $-\frac{7}{25}$; г) $\frac{1}{5}$; д) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; е) $\frac{3\pi}{4}$; ж) $\frac{\pi}{5}$; з) $-\frac{\pi}{14}$; и) $\frac{\pi}{5}$; к) $-\frac{\pi}{3}$; л) $\frac{\pi}{4}$; м) $-\frac{2\pi}{5}$. **3.** а) $-\infty < x \leqslant -3$, $-\frac{1}{2} \leqslant x < +\infty$; б) $-\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}$; в) $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$; г) $-\infty < x < -3$, $-3 < x < 3$, $3 < x < +\infty$; д) $-\infty < x \leqslant 2$, $3 \leqslant x < +\infty$. **4.** а) 1; б) $\frac{63}{65}$ в) $\frac{2}{9}$; г) $-\frac{56}{65}$; д) $\frac{8\sqrt{3}}{49}$; е) $\frac{8}{17}$; ж) $\frac{4\sqrt{7}-3}{10\sqrt{2}}$; з) $\frac{\sqrt{5}}{20}$; и) $\frac{24}{25}$; к) $2x^2 - 1$; л) $\frac{2x}{1+x^2}$. **5.** а) Один корень; б) пять корней; в) три корня; г) три корня; д) три корня; е) три корня; ж) два корня. **6.** а) 855°; б) 405°; в) 990°; г) 720°; д) 675°; е) 855°; ж) 840°. **7.** а) -3; б) 0,75; в) 2; г) 0; д) 1. **8.** а) 12π; б) шесть корней; в) три корня; г) два корня; д) пять корней; е) $-225°$. **9.** а) $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$; б) $-0{,}5 \leqslant a \leqslant 1{,}5$; в) $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin(2a-1) + \pi k$, где $0 \leqslant a \leqslant 1$, $k \in \boldsymbol{Z}$; г) если $a \in [-3;\ 5]$, то $x = (-1)^k \arcsin(\sqrt{4+a} - 2) + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; в частности, если $a = 0$, то $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; д) если $a \in [-4;\ 2]$, то $x = \pm\arccos \frac{3-\sqrt{9-4a}}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; если $a \in (-\infty;\ -4)$ или $a \in (2;\ +\infty)$, то нет решений. **10.** $x = \pi k$; $x = \pi k \pm \frac{1}{2}\arccos \frac{-1+\sqrt{1+2a}}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **11.** а) $x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{8} + \pi k$, $x = (-1)^k \arcsin \frac{5}{8} + \pi k$, $x = (-1)^{k+1} \times \arcsin \frac{7}{8} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; б) $x = \pm\arccos \frac{2}{11} + 2\pi k$, $x = \pm\arccos \frac{6}{11} + 2\pi k$, $x = \pm\arccos\left(-\frac{10}{11}\right) + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; в) $x = \pm\arccos \frac{7}{9} + 2\pi k$, $x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{9}\right) + 2\pi k$, $x = \pm\arccos\left(-\frac{5}{9}\right) + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; г) $x = \pm\arccos \frac{\pi}{12} + 2\pi k$, $x = \pm\arccos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **12.** а) $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

в) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **14.** $k = 243$. **15.** 2 л. **16.** 610. **17.** 87 или 69. **19.** $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$; 3.

Решения и методические указания

К упражнению 1а

1. Функция четная, так как $\sin|-x| = \sin|x|$.

2. При $x \geqslant 0$ имеем $\sin|x| = \sin x$, т. е. на положительной полуоси Ox кривая является обыкновенной синусоидой (сплошная линия на рис. 159); при $x \leqslant 0$, т. е. на отрицательной полуоси, получаем кривую, симметричную построенной относительно оси Oy (пунктирная линия на рис. 159).

К упражнению 1б

1. Найдем множество значений функции: $-1 \leqslant -|\sin x| \leqslant 0$.

2. Значит, график функции будет целиком расположен ниже оси Ox.

3. Если $\sin x \geqslant 0$, то $y = -\sin x$. Следовательно, в промежутках, где $\sin x \geqslant 0$, график будет тот же, что и график функции $y = -\sin x$ (на рис. 160 эта часть искомого графика изображена сплошной линией).

4. Если $\sin x \leqslant 0$, то $y = \sin x$. Значит, часть графика функции $y = \sin x$, расположенная выше оси Ox, симметрично отразится относительно оси Ox и будет расположена под этой осью (как показано на рис. 160 пунктирной линей).

5. Из рисунка видно, что данная функция четная и периодическая с периодом π.

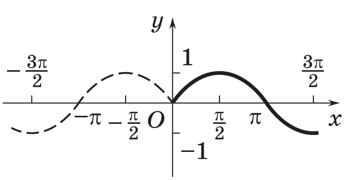


Рис. 159

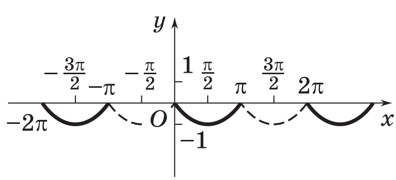


Рис. 160

К упражнению 1г

1. Функция четная, поскольку $\operatorname{tg}|-x| = \operatorname{tg}|x|$.

2. Если $x \geqslant 0$, то $y = \operatorname{tg} x$, следовательно, на положительной полуоси Ox график тот же, что и график функции $y = \operatorname{tg} x$. На рис. 161 эта часть искомого графика изображена сплошной линией.

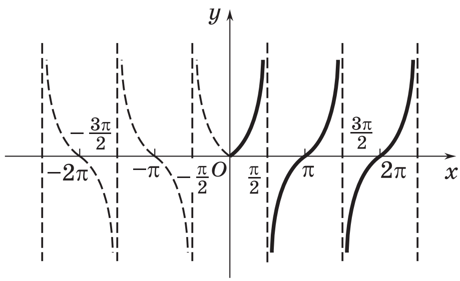


Рис. 161

3. Часть графика при $x \leqslant 0$ симметрична построенной части и изображена на рис. 161 пунктирной линией.

К упражнению 1ж

1. Функция определена на всей числовой прямой.

2. Имеем $y = \cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

3. Так как $\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant 1$, то $\sqrt{2}$ — максимум функции, а $-\sqrt{2}$ есть ее минимум.

4. Период функции равен $T = 2\pi$.

5. Корнями функции являются точки $x = \pi k - \frac{\pi}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

6. График функции получается растяжением синусоиды $y = \sin x$ в $\sqrt{2}$ раз вдоль оси ординат и сдвигом влево на $\frac{\pi}{4}$.

7. Искомый график изображен на рис. 162.

К упражнению 1з

1. Так как $\operatorname{tg} x$ и $\sec x$ теряют смысл при $\cos x = 0$, то $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

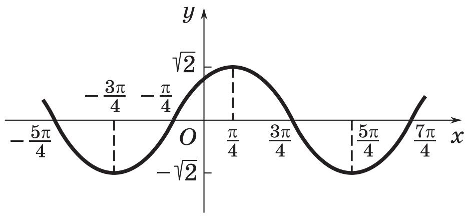


Рис. 162

2. Упростим данную функцию:

$$y = \operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} = -1.$$

3. Таким образом, графиком функции является прямая $y = -1$, из которой исключены точки, соответствующие значениям $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

4. Искомый график изображен на рис. 163.

К упражнению 1и

1. Функция определена на всей числовой прямой, т. е. $x \in \boldsymbol{R}$.

2. Пусть $\cos \frac{x}{2} = a$, $\sin \frac{x}{2} = b$; тогда

$$y = 4(a^4 + b^4) = 4[(a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2].$$

Выполнив подстановку, получим

$$y = 4\left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\cos^2 \frac{x}{2}\right), \text{ или } y = 4 - 2\sin^2 x, \text{ или } y = 3 + \cos 2x.$$

3. Итак, строим график функции $y = \cos 2x$, а затем сдвигаем его вдоль оси ординат на 3 ед. вверх (рис. 164).

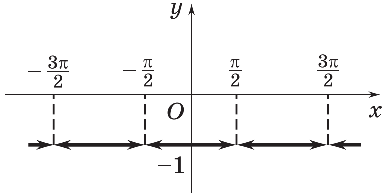


Рис. 163

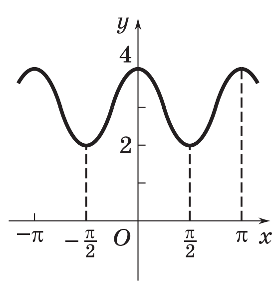


Рис. 164

4. График функции $y = 3 + \cos 2x$ можно построить иначе, если воспользоваться тем же исходным графиком ($y = \cos 2x$), но вместо переноса всей кривой на 3 ед. вверх перенести ось Ox на 3 ед. вниз.

5. Тем самым относительно новой оси Ox все ординаты кривой $y = \cos 2x$ увеличатся на 3 ед. и получится искомый график.

К упражнению 2а

1. Из определения арктангенса следует, что $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ при условии $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

2. Поэтому нужно, чтобы выражение под знаком тангенса было заключено в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}\right) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)\right) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right) = -\frac{\pi}{8}.$$

К упражнению 2б

1. Используя формулу приведения, получим

$$\arccos\left(\sin\frac{15\pi}{7}\right) = \arccos\left(\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{7}\right)\right) = \arccos\left(\sin\frac{\pi}{7}\right).$$

2. Теперь, чтобы воспользоваться формулой $\arccos(\cos x) = x$, нужно заменить $\sin\frac{\pi}{7}$ на косинус дополнительного угла:

$$\arccos\left(\sin\frac{\pi}{7}\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right)\right) = \arccos\left(\cos\frac{5\pi}{14}\right) = \frac{5\pi}{14}.$$

К упражнению 2в

1. Пусть $\alpha = \arcsin\frac{4}{5}$. Тогда $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, а $\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$.

2. Перед радикалом взят знак «плюс», так как по определению арксинуса угол α лежит в I четверти, а косинус такого угла положителен.

3. Теперь вернемся к данному выражению и получим

$$\cos\left(2\arcsin\frac{4}{5}\right) = \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -\frac{7}{25}.$$

К упражнению 2г

1. Пусть $\alpha = \arcsin \frac{5}{13}$. Тогда

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin \frac{5}{13}\right) = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

2. Для нахождения $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ воспользуемся формулой

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

3. Из равенства $\alpha = \arcsin \frac{5}{13}$ следует, что $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, а $\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$, где перед радикалом взят знак «плюс», поскольку α — угол I четверти.

4. Итак,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin \frac{5}{13}\right) = \frac{\frac{5}{13}}{1+\frac{12}{13}} = \frac{1}{5}.$$

К упражнению 2д

1. Так как $0 < \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) < \pi$, то $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right) > 0$.

2. Следовательно,

$$\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)} = \sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

К упражнению 2е

1. Сначала вычислим $\cos\frac{5\pi}{4}$, для чего используем формулу приведения:

$$\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Значит,

$$\arccos\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

К упражнению 2з

1. Пусть $y = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{7}\right)$. Тогда $\operatorname{tg} y = \operatorname{ctg}\frac{11\pi}{7}$, где $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

2. Упростив $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{7}$, получим $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{7} = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{11\pi}{7}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{14}\right)$.

3. Таким образом, $\operatorname{tg} y = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{14}\right)$, т. е. $y = -\frac{\pi}{14}$.

К упражнению 2и

1. Пусть $\alpha = \arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{5}\right)$. Тогда $\sin\alpha = \sin\frac{4\pi}{5}$, где $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

2. Отсюда нельзя заключить, что $\alpha = \frac{4\pi}{5}$, поскольку $\frac{4\pi}{5} > \frac{\pi}{2}$.

3. Упростим $\sin\frac{4\pi}{5}$; имеем $\sin\frac{4\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{\pi}{5}$.

4. Так как $\sin\frac{4\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{5}$, то $\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{5}$. Итак, $\alpha = \frac{\pi}{5}$.

К упражнению 3а

1. Так как $y = \arccos\frac{2x-1}{3x+2}$, то $\cos y = \frac{2x-1}{3x+2}$.

2. Задача сводится к решению следующего двойного неравенства:

$$-1 \leqslant \frac{2x-1}{3x+2} \leqslant 1, \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{2x-1}{3x+2} \leqslant 1, \\ \dfrac{2x-1}{3x+2} \geqslant -1. \end{cases}$$

3. Решив систему неравенств, получим ответ: $-\infty < x \leqslant -3$, $-\frac{1}{2} \leqslant x < +\infty$.

К упражнению 3г

1. Задача сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} -\infty < \dfrac{x}{x^2-9} < +\infty, \\ x^2 - 9 \neq 0. \end{cases}$$

2. Решением этой системы является множество всех действительных чисел, кроме $x = -3$ и $x = 3$.

К упражнению 3д

1. Задача сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geqslant 0, \\ 0 \leqslant \sqrt{x^2 - 5x + 6} < +\infty. \end{cases}$$

2. Решение этой системы состоит из двух промежутков: $x \leqslant 2$, $x \geqslant 3$.

К упражнению 4б

1. Используя тождество $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, перепишем данное выражение так:

$$\cos\left(\arcsin\frac{4}{5} - \arcsin\frac{12}{13}\right). \qquad (1)$$

2. Пусть $\arcsin\frac{4}{5} = \alpha$; тогда $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

3. Пусть $\arcsin\frac{12}{13} = \beta$; тогда $-\frac{\pi}{2} \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\sin\beta = \frac{12}{13}$.

4. Значит, выражение (1) примет вид

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \qquad (2)$$

5. В выражении (2) известны $\sin\alpha$ и $\sin\beta$; найдем $\cos\alpha$ и $\cos\beta$:

а) $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{3}{5}$, где перед радикалом взят знак «плюс», поскольку косинус в I четверти положителен;

б) $\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \frac{5}{13}$, где перед радикалом взят знак «плюс» по той же причине.

6. Подставив в выражение (2) значения тригонометрических функций, получим

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13} + \frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13} = \frac{63}{65}.$$

К упражнению 4г

1. Пусть $\operatorname{arcctg}\frac{3}{4} = \alpha$; тогда $0 < \alpha < \pi$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$, т. е. α — угол I четверти.

2. Пусть $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{12}{5}\right) = \beta$; тогда $0 < \beta < \pi$, $\operatorname{ctg}\beta = -\frac{12}{5}$, т. е. β — угол II четверти.

3. С учетом введенных обозначений данное выражение примет вид

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \qquad (1)$$

4. Найдем $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$:

а) $\cos\alpha=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}=\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}=\dfrac{3}{5}$; б) $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{4}{5}$.

5. Найдем $\cos\beta$ и $\sin\beta$:

а) $\cos\beta=\dfrac{\operatorname{ctg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\beta}}=\dfrac{-\frac{12}{5}}{\frac{13}{5}}=-\dfrac{12}{13}$; б) $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\dfrac{5}{13}$.

6. Подставив в выражение (1) найденные значения тригонометрических функций, получим

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}\left(-\frac{12}{13}\right)-\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=-\frac{56}{65}.$$

К упражнению 4ж

1. Пусть $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}=\alpha$; тогда $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$, т. е. α — угол I четверти.

2. Пусть $\arccos\dfrac{3}{4}=\beta$; тогда $0<\beta<\pi$, $\cos\beta=\dfrac{3}{4}$, т. е. β — угол I четверти.

3. Следовательно, данное выражение примет вид

$$\sin\left(2\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\sin 2\alpha\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\cos 2\alpha. \qquad (1)$$

4. В выражении (1) содержится угол $\dfrac{\beta}{2}$. Так как $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$, то $0<\dfrac{\beta}{2}<\dfrac{\pi}{4}$, т. е. $\dfrac{\beta}{2}$ — угол I четверти.

5. Теперь по известным значениям $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$ и $\cos\beta=\dfrac{3}{4}$ будем искать $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\sin\dfrac{\beta}{2}$ и $\cos\dfrac{\beta}{2}$.

6. Для нахождения $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ используем формулы синуса и косинуса двойного аргумента:

$$\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5},\ \cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{3}{5}.$$

7. Для нахождения $\sin\frac{\beta}{2}$ и $\cos\frac{\beta}{2}$ воспользуемся формулами синуса и косинуса половинного аргумента:

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{4}}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}},\ \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}.$$

8. Подставив найденные значения тригонометрических функций в выражение (1), получим

$$\sin\left(2\alpha-\frac{\beta}{2}\right) = \frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{5} = \frac{4\sqrt{7}-3}{10\sqrt{2}}.$$

К упражнению 4к

1. Пусть $\arccos x = \alpha$; тогда $0 < \alpha < \pi$, $\cos\alpha = x$. Нам нужно найти $\cos 2\alpha$.

2. Так как $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, то воспользуемся следующими формулами:

$$\cos(\arccos x) = x,\quad \text{где } -1 \leqslant x \leqslant 1;$$
$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2},\quad \text{где } -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

3. В результате получим

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = x^2 - (1-x^2) = 2x^2 - 1.$$

К упражнению 4л

1. Так как $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, то воспользуемся следующими формулами:

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. Тогда получим

$$\sin(2\operatorname{arctg} x) = 2\sin(\operatorname{arctg} x)\cos(\operatorname{arctg} x) =$$
$$= 2\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{1+x^2}.$$

К упражнению 5а

1. Перед нами поставлены две задачи:

а) решить уравнение

$$\sin 4x + \cos 3x - \sin 2x = 0; \qquad (1)$$

б) найти количество корней этого уравнения на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

2. Преобразуем уравнение (1):

$$2 \sin x \cos 3x + \cos 3x = 0, \quad \text{или} \quad \cos 3x(2 \sin x + 1) = 0, \tag{2}$$

3. Левая часть уравнения (2) представляет собой произведение двух множителей. Следовательно, это уравнение распадается на два уравнения:

$$\cos 3x = 0, \tag{3}$$
$$2 \sin x + 1 = 0. \tag{4}$$

4. Решим уравнение (3). Имеем

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \boldsymbol{Z}. \tag{5}$$

а) Равенство (5) частично отвечает на вопрос о решении данного уравнения (1).

б) Теперь нужно выяснить, сколько корней уравнения (3) принадлежит отрезку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$. Для этого запишем неравенство

$$\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} \leqslant \frac{3\pi}{4}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{6} + \frac{k}{3} \leqslant \frac{3}{4}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{4} \leqslant k \leqslant \frac{7}{4}. \tag{6}$$

в) Так как k — целое число, то из двойного неравенства (6) следует, что $k = 1$, т. е. уравнение (3) на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ имеет один корень.

5. Решим уравнение (4). Имеем $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда

$$x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}. \tag{7}$$

а) Равенство (7) частично отвечает на вопрос о решении данного уравнения (1).

б) Однако это равенство не позволяет непосредственно выяснить, сколько корней уравнения (4) принадлежит отрезку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

в) Чтобы преодолеть возникшее затруднение, перепишем равенство (7) в виде следующих двух равенств:

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}; \tag{8}$$

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}. \tag{9}$$

г) Так как корни уравнения (7) должны принадлежать отрезку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$, то из равенства (8) следует, что

$$\frac{\pi}{4} \leqslant -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leqslant \frac{3\pi}{4}, \quad \text{или} \quad \frac{5}{24} \leqslant k \leqslant \frac{11}{24}. \qquad (10)$$

Неравенство (10) не выполняется ни при каких целых k.

д) Аналогично из неравенства (9) следует, что

$$\frac{\pi}{4} \leqslant -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leqslant \frac{3\pi}{4}, \text{ или } \frac{13}{24} \leqslant k \leqslant \frac{19}{24}. \qquad (11)$$

Неравенство (11) также не выполняется ни при каких целых k.

6. Итак, получаем ответ: один корень.

Замечание. Уравнение (4) можно было не решать, поскольку на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ синус положителен и, значит, на этом отрезке уравнение не имеет корней.

Приведем краткую запись решения данного примера:

$$\cos 3x\,(2\sin x + 1) = 0;$$

а) $\cos 3x = 0$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

$$\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} \leqslant \frac{3\pi}{4}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{4} \leqslant k \leqslant \frac{7}{4} \text{ — один корень;}$$

б) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ синус положителен — нет корней.

К упражнению 5в

1. Здесь требуется решить уравнение

$$\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,x + 2|\cos x| = 0 \qquad (1)$$

и указать количество его корней, принадлежащих отрезку $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

2. Найдем область определения уравнения (1): $\sin x \neq 0$, т. е. $x \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3. Пусть $\cos x \geqslant 0$; тогда уравнение (1) примет вид

$$\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,x + 2\cos x = 0, \quad \text{или} \quad \cos x\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{\sin x}\right) = 0. \qquad (2)$$

4. Уравнение (2) распадается на два уравнения:

$$\cos x = 0, \tag{3}$$

$$2 + \frac{\sqrt{3}}{\sin x} = 0, \quad \text{т. е.} \ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{4}$$

5. Решив уравнение (3), получим

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{5}$$

6. Найдем количество корней уравнения (3) на заданном отрезке:

$$0 \leqslant \frac{\pi}{2} + \pi k \leqslant \frac{3\pi}{2}, \quad \text{или} \quad -\frac{1}{2} \leqslant k \leqslant 1,$$

т. е. уравнение (3) на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ имеет два корня.

7. Решение уравнения (4) запишем с помощью двух формул:

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}, \tag{6}$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{7}$$

Серия корней (7) — посторонняя, так как для нее не выполняется условие $\cos x \geqslant 0$.

8. Вернемся к серии корней (6) и определим количество корней уравнения (4) на данном отрезке:

$$0 \leqslant -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leqslant \frac{3\pi}{2}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{6} \leqslant k \leqslant \frac{11}{12},$$

т. е. уравнение (4) на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ не имеет корней.

9. Пусть теперь $\cos x < 0$; тогда уравнение (1) примет вид

$$\sqrt{3} \operatorname{ctg} x - 2\cos x = 0, \quad \text{или} \quad \cos x\left(\frac{\sqrt{3}}{\sin x} - 2\right) = 0. \tag{8}$$

10. Так как $\cos x \neq 0$ (согласно предположению $\cos x < 0$), то уравнение (8) равносильно следующему:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin x} - 2 = 0, \quad \text{или} \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{9}$$

11. Решение уравнения (9) запишем с помощью двух формул:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}; \tag{10}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{11}$$

Серия корней (10) — посторонняя, поскольку для нее не выполнено условие $\cos x < 0$.

12. Для серии корней (11) имеем

$$0 \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leqslant \frac{3\pi}{2}, \quad \text{или} \quad -\frac{1}{3} \leqslant k \leqslant \frac{5}{12},$$

т. е. уравнение (9) на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ имеет один корень.

13. Итак, получаем ответ: три корня.

К упражнению 6а

1. Требуется решить уравнение

$$\sin 3x - |\sin x| = 0 \tag{1}$$

и указать в ответе сумму его корней, принадлежащих отрезку $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

2. Пусть $\sin x \geqslant 0$; тогда уравнение (1) примет вид

$$\sin 3x - \sin x = 0, \quad \text{или} \quad 2 \sin x \cos 2x = 0. \tag{2}$$

3. Уравнение (2) распадается на два уравнения:

$$\sin x = 0, \tag{3}$$

$$\cos 2x = 0. \tag{4}$$

4. Решив уравнение (3), получим $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Чтобы найти количество его корней на заданном отрезке, запишем двойное неравенство

$$\frac{3\pi}{4} \leqslant \pi k \leqslant \frac{7\pi}{4}, \quad \text{или} \quad \frac{3}{4} \leqslant k \leqslant \frac{7}{4},$$

откуда следует, что $k = 1$. Значит, данное уравнение на отрезке $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$ имеет один корень $x_1 = \pi$.

5. Решив уравнение (4), получим $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Для отыскания количества его корней на указанном отрезке составим неравенство

$$\frac{3\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \leqslant \frac{7\pi}{4}, \quad \text{или} \quad 1 \leqslant k \leqslant 3,$$

которое выполняется при $k = 1$, $k = 2$ и $k = 3$. Однако условию $\sin x \geqslant 0$ удовлетворяет только значение $k = 1$, которому соответствует корень $x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$.

6. Пусть теперь $\sin x < 0$; тогда уравнение (1) примет вид

$$\sin 3x + \sin x = 0, \quad \text{или} \quad 2 \sin 2x \cos x = 0. \tag{5}$$

7. Уравнение (5) распадается на два уравнения:

$$\sin 2x = 0, \tag{6}$$
$$\cos x = 0. \tag{7}$$

8. Решив уравнение (6), получим $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Для отыскания количества его корней на заданном отрезке запишем неравенство

$$\frac{3\pi}{4} \leqslant \frac{\pi k}{2} \leqslant \frac{7\pi}{4}, \quad \text{или} \quad \frac{3}{2} \leqslant k \leqslant \frac{7}{2},$$

которое выполняется при $k = 2$ и $k = 3$. Однако условию $\sin x < 0$ удовлетворяет только значение $k = 3$, которому соответствует корень $x_3 = \frac{3\pi}{2}$.

9. Решив уравнение (7), получим $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Далее запишем неравенство

$$\frac{3\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{2} + \pi k \leqslant \frac{7\pi}{4}, \text{ или } \frac{1}{2} \leqslant k \leqslant \frac{5}{4},$$

откуда следует, что $k = 1$. Этому значению k соответствует корень $x_4 = \frac{3\pi}{2}$, совпадающий с корнем x_3. Однако при записи ответа мы будем учитывать этот корень дважды.

10. Найдем сумму корней данного уравнения на указанном отрезке:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \pi + \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = \frac{19\pi}{4} = 855°.$$

К упражнению 6ж

1. Требуется решить уравнение

$$\sin 4x + \cos 3x - \sin 2x = 0 \tag{1}$$

и указать сумму его корней, принадлежащих отрезку $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

2. Данное уравнение равносильно уравнению

$$\cos 3x(2\sin x + 1) = 0,$$

которое в свою очередь равносильно совокупности уравнений

$$\cos 3x = 0, \tag{2}$$
$$\sin x = -\frac{1}{2}. \tag{3}$$

3. Запишем решение уравнения (2):

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3},\ k \in \boldsymbol{Z}. \qquad (4)$$

4. Количество корней уравнения (2) на заданном отрезке определим из неравенства

$$\frac{3\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} \leqslant \frac{7\pi}{4}, \quad \text{или} \quad \frac{7}{4} \leqslant k \leqslant \frac{19}{4},$$

которое выполняется при $k = 2$, $k = 3$ $k = 4$.

Этим значениям k соответствуют следующие корни:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} = 150^\circ \text{ (при } k = 2\text{)};$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} = 210^\circ \text{ (при } k = 3\text{)};$$

$$x_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ \text{ (при } k = 4\text{)}.$$

Таким образом, $x_1 + x_2 + x_3 = 630^\circ$.

5. Запишем корни уравнения (3) в виде двух равенств:

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}; \qquad (5)$$

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \qquad (6)$$

6. Используя равенство (5), найдем количество корней уравнения (3) в заданном отрезке:

$$\frac{3\pi}{4} \leqslant -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leqslant \frac{7\pi}{4}, \quad \text{или} \quad \frac{11}{24} \leqslant k \leqslant \frac{23}{24}.$$

Этому неравенству не удовлетворяет ни одно целое значение k.

7. Аналогично, используя равенство (6), имеем

$$\frac{3\pi}{4} \leqslant -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leqslant \frac{7\pi}{4}, \quad \text{или} \quad \frac{19}{24} \leqslant k \leqslant \frac{31}{24}.$$

Последнему неравенству удовлетворяет значение $k = 1$, которому соответствует корень $x_4 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{7\pi}{6} = 210^\circ$, совпадающий с корнем x_2.

8. Итак, получаем ответ: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 630^\circ + 210^\circ = 840^\circ$.

К упражнению 7а

1. Преобразуем данное уравнение:

$$\sin x - 6 = 3\,\mathrm{tg}\,x - 2\cos x; \quad \mathrm{tg}\,x\,(\cos x - 3) = 2(3 - \cos x);$$
$$(\cos x - 3)(\mathrm{tg}\,x + 2) = 0.$$

2. Так как $\cos x - 3 \neq 0$, то $\operatorname{tg} x = -2$.

3. Нам требуется найти значение выражения $15(\sin 2x - \cos 2x)$. Для этого воспользуемся формулами, выражающими $\sin 2x$ и $\cos 2x$ через $\operatorname{tg} x$:

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

откуда находим $\sin 2x = -\frac{4}{5}$, $\cos 2x = -\frac{3}{5}$.

4. Подставив эти значения в заданное выражение, получим

$$15(\sin 2x - \cos 2x) = 15\left(-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\right) = -3.$$

К упражнению 8а

1. Требуется решить уравнение $\sqrt{3}\cos x - \cos 2x = 1$ и найти сумму его корней, удовлетворяющих неравенствам $6 < x < 13$.

2. Преобразуем данное уравнение:

$$\sqrt{3}\cos x - 2\cos x = 1; \quad \sqrt{3}\cos x = 1 + \cos 2x;$$

$$\sqrt{3}\cos x = 2\cos^2 x, \quad \text{т. е. } \cos x(\sqrt{3} - 2\cos x) = 0.$$

3. Последнее уравнение равносильно следующей совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$$

4. Решением этой совокупности являются числа

$$\left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, & (1) \\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, & (2) \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi t, & (3) \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} x_1 \approx \dfrac{3{,}14}{2} + 3{,}14k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x_2 \approx \dfrac{3{,}14}{6} + 6{,}28n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x_3 \approx -\dfrac{3{,}14}{6} + 6{,}28t,\ t \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

5. Теперь отберем корни, принадлежащие заданному интервалу $6 < x < 13$:

$$\left[\begin{array}{l} 6 < \dfrac{3{,}14}{2} + 3{,}14k < 13, \\ 6 < \dfrac{3{,}14}{6} + 6{,}28n < 13, \\ 6 < -\dfrac{3{,}14}{6} + 6{,}28t < 13, \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} 1{,}41 < k < 3{,}64, \\ 0{,}87 < n < 1{,}98, \\ 1{,}03 < t < 2{,}15, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 2,\ k = 3, \\ n = 1, \\ t = 2. \end{array}\right.$$

6. Вернемся к сериям корней (1), (2), (3) и найдем значения корней в зависимости от k, n, t:

а) для серии (1), т. е. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, имеем

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2} \text{ (при } k = 2);$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7\pi}{2} \text{ (при } k = 3);$$

б) для серии (2), т. е. $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, находим

$$x_3 = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6} \text{ (при } n = 1);$$

в) для серии (3), т е. $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi t$, получим

$$x_4 = -\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{23\pi}{6} \text{ (при } t = 2).$$

7. Итак, сумма корней, удовлетворяющих заданному неравенству, есть $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12\pi$.

К упражнению 8в

1. Требуется решить уравнение $\cos x - \cos\frac{5x}{2} = 1 - \cos\frac{3x}{2}$ и найти количество его корней, удовлетворяющих неравенствам $3 < x < 7$.

2. Преобразуем данное уравнение:

$$\cos x - 1 + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2} = 0; \quad -2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin 2x \cdot \sin\frac{x}{2} = 0;$$

$$2\sin\frac{x}{2}\left(\sin 2x - \sin\frac{x}{2}\right) = 0; \quad 2\sin\frac{x}{2} \cdot 2\sin\frac{3x}{4}\cos\frac{5x}{4} = 0.$$

3. Последнее уравнение равносильно совокупности простейших уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{x}{2} = 0, \\ \sin\frac{3x}{4} = 0, \\ \cos\frac{5x}{4} = 0, \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \frac{4\pi k}{3},\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \frac{2\pi}{5} + \frac{4\pi k}{5},\ k \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Заметим, что серию корней $x = 2\pi k$ можно отбросить, так как эти корни при некоторых значениях k содержатся в серии $x = \frac{4\pi k}{3}$

(проверьте!). Поэтому последнюю совокупность корней перепишем так:

$$\left[\begin{aligned} &x = \frac{4\pi k}{3},\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ &x = \frac{2\pi}{5} + \frac{4\pi k}{5},\ k \in \boldsymbol{Z}. \end{aligned}\right.$$

4. Отберем корни уравнения, принадлежащие интервалу (3; 7). Для серии корней $x = \frac{4\pi k}{3}$ получаем двойное неравенство $3 < \frac{4\pi k}{3} < 7$, которое удовлетворяется только при $k = 1$. Этому значению соответствует один корень исходного уравнения: $x_1 = \frac{4\pi}{3}$.

5. Для серии корней $x = \frac{2\pi}{5} + \frac{4\pi k}{5}$ имеем неравенство

$$3 < \frac{2\pi}{5} + \frac{4\pi k}{5} < 7,$$

которому удовлетворяют два значения $k = 1$ и $k = 2$. Им соответствуют два корня исходного уравнения: $x_2 = \frac{6\pi}{5}$ и $x_3 = 2\pi$.

6. Итак, данное уравнение на указанном интервале имеет три корня.

К упражнению 9а

1. Преобразуем данное уравнение к виду

$$\sin^2 x - 6 \sin x + 4a^2 - 3 = 0.$$

2. Полагая $\sin x = z$, приходим к квадратному уравнению $z^2 - 6z + 4a^2 - 3 = 0$, имеющему корни

$$z_1 = 3 - 2\sqrt{3 - a^2}, \qquad (1)$$

$$z_2 = 3 + 2\sqrt{3 - a^2}. \qquad (2)$$

3. Если $D = 3 - a^2 \geqslant 0$, то уравнение (2) не имеет решений, так как $z_2 = \sin x$ не может быть больше 1.

4. Уравнение (1) имеет решение при условиях

$$\begin{cases} 3 - a^2 \geqslant 0, \\ -1 \leqslant 3 - 2\sqrt{3 - a^2} \leqslant 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3 - a^2 \geqslant 0, \\ 3 - 2\sqrt{3 - a^2} \leqslant 1, \\ 3 - 2\sqrt{3 - a^2} \geqslant -1, \end{cases}$$

откуда в результате получаем $a^2 \leqslant 2$, т. е. $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$.

К упражнению 9б

1. Выделим полный квадрат относительно $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$; тогда левая часть уравнения преобразуется следующим образом:

$$\sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin x \cos x =$$
$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \sin x \cos x.$$

После упрощений уравнение запишется в виде

$$\sin^2 2x - 2 \sin 2x - 2(1 - a) = 0. \qquad (1)$$

2. Получили квадратное уравнение относительно $\sin 2x$. Для существования его решений должно выполняться условие $D \geqslant 0$, т. е. $a \leqslant \frac{3}{2}$. Кроме того, необходимо, чтобы корни уравнения (1) не превосходили по модулю 1, т. е. $|\sin 2x| \leqslant 1$.

3. Пусть $y = \sin 2x$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$y^2 - 2y - 2(1 - a) = 0, \qquad (2)$$

откуда $y = 1 \pm \sqrt{1 + 2(1 - a)} = 1 \pm \sqrt{3 - 2a}$.

4. Итак, уравнение (2) имеет два корня: $y_1 = 1 - \sqrt{3 - 2a}$, $y_2 = 1 + \sqrt{3 - 2a}$, которые при условии $a \leqslant \frac{3}{2}$ должны удовлетворять неравенствам

$$-1 \leqslant 1 - \sqrt{3 - 2a} \leqslant 1 \quad \text{и} \quad -1 \leqslant 1 + \sqrt{3 - 2a} \leqslant 1.$$

5. Решим эти неравенства:

а) $-1 \leqslant 1 - \sqrt{3 - 2a} \leqslant 1$, или $0 \leqslant \sqrt{3 - 2a} \leqslant 2$, т. е. $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{3}{2}$;

б) $-1 \leqslant 1 + \sqrt{3 - 2a} \leqslant 1$, или $-2 \leqslant \sqrt{3 - 2a} \leqslant 0$, т. е. $a = \frac{3}{2}$.

Ответ: $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{3}{2}$.

К упражнению 9в

1. Положим $\sin x - \cos x = y$; возведя это равенство в квадрат, получим

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = y^2, \quad \text{или} \quad 1 - \sin 2x = y^2,$$

откуда $\sin 2x = 1 - y^2$.

2. Таким образом, данное уравнение примет вид

$$y^2 - 2a\sqrt{2}\, y + 4a - 2 = 0$$

и, значит, $y_1 = \sqrt{2}$, $y_2 = (2a - 1)\sqrt{2}$.

3. Так как

$$y = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

то данное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \quad (1)$$

$$\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = (2a - 1)\sqrt{2}. \quad (2)$$

4. Из уравнения (1) следует, что $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$, т. е.

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

5. Из уравнения (2) следует, что

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2a - 1. \quad (3)$$

6. Уравнение (3) имеет решение лишь при условии $-1 \leqslant 2a - 1 \leqslant 1$, т. е. при $0 \leqslant a \leqslant 1$. Запишем это решение:

$$x = \frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin(2a - 1) + \pi k, \quad \text{где } 0 \leqslant a \leqslant 1.$$

К упражнению 10

1. Запишем данное уравнение в виде

$$4\sin x\cos x\cos 2x = a\frac{\sin x}{\cos x}. \quad (1)$$

а) $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

б) Ясно, что $\cos x \neq 0$. В дальнейшем будем считать, что и $\sin x \neq 0$.

2. Тогда от уравнения (1) перейдем к следующему:

$$4\cos x\cos 2x - \frac{a}{\cos x} = 0, \quad \text{или} \quad 4\cos^2 x\cos 2x - a = 0. \quad (2)$$

3. Преобразуем уравнение (2):

$$2\cos 2x(1 + \cos 2x) - a = 0, \quad \text{или} \quad 2\cos^2 2x + 2\cos 2x - a = 0,$$

откуда $\cos 2x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2a}}{2}$. Так как $|\cos\alpha| \leqslant 1$, то $\cos 2x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2a}}{2}$ для всех a, принадлежащих интервалу $0 < a < 4$ (согласно условию).

4. Итак,

$$2x = \pm \arccos \frac{-1 + \sqrt{1 + 2a}}{2} + 2\pi k,$$

т. е.

$$x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{-1 + \sqrt{1 + 2a}}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $x = \pi k,\ x = \pi k \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{-1 + \sqrt{1 + 2a}}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}.$

К упражнению 11а

1. Пусть $\frac{4}{3}\pi \sin x = \alpha$; тогда уравнение примет вид

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}.$$

2. Запишем решение этого уравнения в виде совокупности двух серий корней:

$$\left[\begin{array}{ll} \alpha_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, & (1) \\ \alpha_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k. & (2) \end{array}\right.$$

3. С учетом выполненной замены равенства (1) и (2) примут вид

$$\left[\begin{array}{l} \frac{4}{3}\pi \sin x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ \frac{4}{3}\pi \sin x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{array}\right.$$

откуда после упрощений получим

$$\left[\begin{array}{ll} \sin x = \frac{1}{8} + \frac{3k}{2}, & (3) \\ \sin x = \frac{5}{8} + \frac{3k}{2}. & (4) \end{array}\right.$$

4. Уравнение (3) имеет решение при условиях

$$-1 \leqslant \frac{1}{8} + \frac{3k}{2} \leqslant 1. \quad (5)$$

Решив неравенства (5), заключаем, что они выполняются только при $k = 0$ (так как $k \in \boldsymbol{Z}$). Тогда уравнение (3) примет вид $\sin x = \frac{1}{8}$.

5. Аналогично уравнение (4) имеет решение при условиях

$$-1 \leqslant \frac{5}{8} + \frac{3k}{2} \leqslant 1. \tag{6}$$

Неравенства (6) выполняются при двух значениях k: $k = 0$ и $k = -1$. Этим значениям соответствуют уравнения $\sin x = \frac{5}{8}$ и $\sin x = -\frac{7}{8}$.

6. Итак, получили три уравнения: $\sin x = \frac{1}{8}$, $\sin x = \frac{5}{8}$ и $\sin x = -\frac{7}{8}$. Решив их, запишем ответ:

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{8} + \pi k, \quad x = (-1)^k \arcsin \frac{5}{8} + \pi k,$$

$$x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{7}{8} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

К упражнению 12а

1. Требуется найти все значения x, для которых величина $y = \frac{4}{3}\pi \sin x \cos x$ удовлетворяет уравнению

$$\log_4 (\operatorname{ctg} 2y + \operatorname{tg} y) = 1 + 0{,}5 \log_{0,5} (9 \operatorname{ctg} y - \operatorname{tg} y). \tag{1}$$

2. Положим $\operatorname{tg} y = t$. Тогда $\operatorname{ctg} 2y = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 y}{2 \operatorname{tg} y} = \frac{1 - t^2}{2t}$ и уравнение (1) примет вид

$$\log_4 \left(\frac{1 - t^2}{2t} + t\right) = 1 + \frac{1}{2} \log_{0,5} \left(\frac{9}{t} - t\right). \tag{2}$$

3. Приведем все члены уравнения (2) к одному основанию, равному 2:

$$\frac{1}{2} \log_2 \frac{1 - t^2 + 2t^2}{2t} = 1 - \frac{1}{2} \log_2 \frac{9 - t^2}{t}, \quad \text{или} \quad \log_2 \frac{t^2 + 1}{2t} = \log_2 \frac{4t}{9 - t^2},$$

откуда

$$\frac{t^2 + 1}{2t} = \frac{4t}{9 - t^2}. \tag{3}$$

4. Решив уравнение (3), получим $t^2 = 3$, откуда $t_{1,\,2} = \pm\sqrt{3}$, т. е. $\operatorname{tg} y = -\sqrt{3}$ и $\operatorname{tg} y = \sqrt{3}$.

5. Однако среди найденных корней могут оказаться и посторонние корни уравнения (1). Поэтому выполним проверку.

а) Проверим корень $\operatorname{tg} y = -\sqrt{3}$. Так как

$$\operatorname{ctg} 2y + \operatorname{tg} y = \frac{1 - 3}{-2\sqrt{3}} - \sqrt{3} = -\frac{2}{\sqrt{3}} < 0,$$

то независимо от знака выражения $9 \operatorname{ctg} y - \operatorname{tg} y$ этот корень посторонний (под знаком логарифма не может находиться отрицательное число).

б) Проверим корень $\operatorname{tg} y = \sqrt{3}$. Имеем

$$\operatorname{ctg} 2y + \operatorname{tg} y = \frac{1-3}{2\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} > 0,$$

$$9 \operatorname{ctg} y - \operatorname{tg} y = \frac{9}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} > 0,$$

т. е. этот корень не посторонний.

6. Запишем решение уравнения $\operatorname{tg} y = \sqrt{3}$:

$$y = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

7. Так как заданная величина $y = \frac{4}{3}\pi \sin x \cos x$ должна удовлетворять уравнению (1), то получаем

$$\frac{4}{3}\pi \sin x \cos x = \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad \text{или} \quad \sin 2x = \frac{1+3k}{2}. \tag{4}$$

8. Уравнение (4) имеет решение при условиях

$$-1 \leqslant \frac{1+3k}{2} \leqslant 1,$$

которые выполняются при $k = 0$ и $k = -1$.

9. Остается решить уравнение (4):

а) если $k = 0$, то оно примет вид $\sin 2x = \frac{1}{2}$, откуда

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ k \in \boldsymbol{Z};$$

б) если $k = -1$, то оно примет вид $\sin 2x = -1$, откуда

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Замечание. а) При решении логарифмических уравнений любого уровня сложности могут появиться посторонние корни, а также корни легко потерять.

б) Особенно внимательным надо быть тогда, когда в логарифмических уравнениях присутствуют тригонометрические функции.

в) Опыт показывает, что многие абитуриенты не могут справиться с решением примеров такого типа.

К упражнению 13а

1. Пусть $\arcsin x = \alpha$ и $\arccos x = \beta$. Тогда, согласно определению, $\sin\alpha = x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$, и $\cos\beta = x$, $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$.

2. Обозначим левую часть доказываемого равенства через $P(x)$. Определим промежуток, в котором находится $P(x)$. Имеем

$$\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ +\quad 0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi. \\ \hline -\frac{\pi}{2} \leqslant \quad P(x) \quad \leqslant \frac{3\pi}{2}. \end{array}$$

3. Найдем

$$\sin P(x) = \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta =$$
$$= x \cdot x + \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - x^2} = x^2 + 1 - x^2 = 1,$$

где перед радикалами берем знак «плюс», поскольку $\cos\alpha > 0$ в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а $\sin\beta > 0$ в промежутке $[0; \pi]$.

4. Следовательно, $P(x)$ принимает значения $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant P(x) \leqslant \frac{3\pi}{2}$, то среди чисел указанного вида только $\frac{\pi}{2}$ принадлежит промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

5. Итак, $P(x) = \frac{\pi}{2}$ для любого значения $x \in [-1; 1]$.

К упражнению 13б

1. Требуется доказать справедливость равенства

$$2\operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{4} = \operatorname{arctg}\frac{32}{43}. \qquad (1)$$

2. Воспользуемся определением арктангенса:

а) пусть $\operatorname{arctg}\frac{1}{5} = \alpha$; тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

б) пусть $\operatorname{arctg}\frac{1}{4} = \beta$; тогда $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{4}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;

в) пусть $\operatorname{arctg}\frac{32}{43} = \gamma$; тогда $\operatorname{tg}\gamma = \frac{32}{43}$, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$.

3. Определим интервал, в котором заключена левая часть равенства (1), т. е. $2\alpha + \beta$. Имеем:

а) так как $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5} < \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$, то $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$;

б) так как $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{4} < \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$, то $0 < \beta < \frac{\pi}{6}$;

в) значит, $0 < 2\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$.

4. Правая часть равенства (1) заключена в интервале $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$.

5. Таким образом, обе части равенства (1) заключены в интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, на котором функция $y = \operatorname{tg} x$ является монотонной. Поэтому на указанном интервале из равенства тангенсов двух выражений будет следовать равенство самих этих выражений.

6. Возьмем тангенсы от обеих частей равенства (1):

а) $\operatorname{tg}(2\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \beta}$, где $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{5}{12}$,

а $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{4}$; значит, $\operatorname{tg}(2\alpha + \beta) = \frac{\frac{5}{12} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{32}{43}$;

б) $\operatorname{tg} \gamma = \frac{32}{43}$.

7. Итак, равенство (1) доказано.

К упражнению 13г

1. Требуется доказать справедливость равенства

$$\arcsin \frac{9}{41} - \arccos \frac{4}{5} = -\arcsin \frac{84}{205}. \qquad (1)$$

2. Найдем интервал, в котором заключена левая часть равенства (1). Имеем:

а) $0 < \arcsin \frac{9}{41} < \frac{\pi}{2}$, $0 < \arccos \frac{4}{5} < \frac{\pi}{2}$;

б) умножив последнее неравенство на (-1), получим

$$0 > -\arccos \frac{4}{5} > -\frac{\pi}{2}, \text{ т. е. } -\frac{\pi}{2} < -\arccos \frac{4}{5} < 0;$$

в) сложим почленно двойные неравенства:

$$+\begin{array}{l} 0 < \arcsin \dfrac{9}{41} < \dfrac{\pi}{2}, \\ -\dfrac{\pi}{2} < -\arccos \dfrac{4}{5} < 0 \\ \hline -\dfrac{\pi}{2} < \arcsin \dfrac{9}{41} - \arccos \dfrac{4}{5} < \dfrac{\pi}{2}. \end{array}$$

3. Найдем интервал, в котором заключена правая часть равенства (1): так как $-\frac{\pi}{2} < \arcsin \frac{84}{205} < \frac{\pi}{2}$, то, умножив все члены этого неравенства на (-1), получим

$$-\frac{\pi}{2} > -\arcsin \frac{84}{205} > -\frac{\pi}{2}, \quad \text{или} \quad -\frac{\pi}{2} < -\arcsin \frac{84}{205} < \frac{\pi}{2}.$$

4. Таким образом, обе части равенства (1) заключены в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, на котором функция $y = \sin x$ является монотонной. Поэтому из равенства синусов двух выражений будет следовать равенство самих этих выражений.

5. Пусть $\arcsin \frac{9}{41} = \alpha$; тогда $\sin \alpha = \frac{9}{41}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, пусть $\arccos \frac{4}{5} = \beta$; тогда $\cos \beta = \frac{4}{5}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

6. Найдем $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{40}{41}$, $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \frac{3}{5}$.

7. Теперь возьмем синусы от обеих частей равенства (1):

а) $\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{9}{41} \cdot \frac{4}{5} - \frac{40}{41} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{84}{205}$;

б) $\sin \left(-\arcsin \frac{84}{205}\right) = -\frac{84}{205}$.

8. Итак, равенство (1) доказано.

К упражнению 14

1. После первой операции в баке осталось $(729 - k)$ л чистой кислоты. Значит, в одном литре раствора оказалось $\frac{729 - k}{729}$ л чистой кислоты.

2. При втором выливании из бака удалили $\frac{(729 - k)k}{729}$ л кислоты и в баке осталось $729 - k - \frac{(729 - k)k}{729} = \frac{(729 - k)^2}{729}$ л кислоты.

3. Таким образом, после второго доливания в одном литре раствора оказалось $\frac{(729 - k)^2}{729^2}$ л кислоты.

4. В результате третьего выливания количество кислоты в баке уменьшилось еще на $\frac{(729 - k)^2}{729^2}$ л, т. е. после третьей операции в баке осталось $\frac{(729 - k)^2}{729} - \frac{(729 - k)^2 k}{729^2} = \frac{(729 - k)^3}{729^2}$ л кислоты.

5. Очевидно, что величины

$$729 - k,\ \frac{(729 - k)^2}{729},\ \frac{(729 - k)^3}{729^2},\ \ldots,$$

характеризующие количество кислоты в баке после каждого выливания, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{729 - k}{729}$.

6. Следовательно, после шестой операции в баке окажется $\frac{(729 - k)^6}{729^5}$ л кислоты.

7. Согласно условию, получаем уравнение

$$\frac{(729 - k)^6}{729^5} = 64, \quad \text{или} \quad (729 - k)^6 = 2^6 \cdot 3^{6 \cdot 5},$$

откуда $729 - k = 2 \cdot 243$, т. е. $k = 243$.

К упражнению 17

1. Согласно условию, имеем систему

$$\begin{cases} a_1 + a_5 = 26, \\ a_2 a_4 = 160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 + 4d = 26, \\ (a_1 + d)(a_1 + 3d) = 160 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2d = 13, \\ a_1^2 + 4a_1 d + 3d^2 = 160. \end{cases}$$

2. Решим последнюю систему:

$$\begin{cases} a_1 = 13 - 2d, \\ (13 - 2d)^2 + 4d(13 - 2d) + 3d^2 = 160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 13 - 2d, \\ d_1 = 3,\ d_2 = -3. \end{cases}$$

3. Значит, существуют две прогрессии, удовлетворяющие заданным условиям:

а) $d_1 = 3$, $a_1 = 13 - 2 \cdot 3 = 7$; б) $d_2 = -3$, $a_1 = 13 - 2(-3) = 19$.

4. Используя формулу $a_6 = a_1 + 5d$, найдем 6-е члены этих прогрессий:

а) $a_6 = 7 + 3 \cdot 5 = 22$; б) $a_6 = 19 - 3 \cdot 5 = 4$.

5. Наконец, по формуле $S_6 = \frac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6 = 3(a_1 + a_6)$ находим суммы первых шести членов прогрессий:

а) $S_6 = 3(7 + 22) = 87$; б) $S_6 = 3(19 + 4) = 69$.

Ответ: 87 или 69.

К упражнению 18

1. Пусть a^n, a^{n+k}, a^{n+2k} — три числа, составляющие геометрическую прогрессию.

2. Рассмотрим логарифмы этих чисел по произвольному основанию b такому, что $b > 0$, $b \neq 1$, т. е. $\log_b a^n$, $\log_b a^{n+k}$, $\log_b a^{n+2k}$.

3. Имеем

$$\log_b a^{n+k} = \log_b a^n + \log_b a^k,$$
$$\log_b a^{n+2k} = \log_b a^n + \log_b a^{2k} = \log_b a^n + 2\log_b a^k,$$

т. е. числа $\log_b a^n$, $\log_b a^{n+k}$, $\log_b a^{n+2k}$ образуют арифметическую прогрессию с первым членом $\log_b a^n$ и разностью $\log_b a^k$.

К упражнению 20а

1. Составим разность между левой и правой частями доказываемого неравенства и установим, что она неотрицательна при всех $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Имеем

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - 2 = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} - 2 = \frac{\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x} = \frac{(\operatorname{tg} x - 1)^2}{\operatorname{tg} x} \geqslant 0,$$

поскольку $(\operatorname{tg} x - 1)^2 \geqslant 0$ как квадрат двучлена, а $\operatorname{tg} x > 0$ при всех $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Тема 17

Решение тригонометрических уравнений методом разложения на множители. Решение тригонометрических уравнений методом введения новой переменной. Решение тригонометрических уравнений, однородных относительно синуса и косинуса. Решение тригонометрических уравнений вида $a \cos x + b \sin x = c$. Решение простейших тригонометрических неравенств

Теоретические сведения

1. Решение тригонометрических уравнений методом разложения на множители

Применение метода разложения на множители основано на том, что уравнение

$$f_1(x)f_2(x) = 0 \qquad (*)$$

равносильно совокупности уравнений $f_1(x) = 0$; $f_2(x) = 0$ в области определения уравнения (*).

Пример. Решить уравнение:

а) $\sin 3x = \sin x$; б) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1{,}5$.

Р е ш е н и е. а) Имеем

$$\sin 3x - \sin x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos 2x = 0.$$

Значит, либо $\sin x = 0$, откуда $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, либо $\cos 2x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

б) Используя формулу $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, имеем

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\cos 2x + \cos 6x) + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 \cos 4x \cos 2x + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x\,(2 \cos 2x + 1) = 0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности уравнений $\cos 4x = 0$; $2 \cos 2x + 1 = 0$. Из первого уравнения находим $4x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, т. е. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; из второго получаем $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, откуда $2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, т. е. $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2. Решение тригонометрических уравнений методом введения новой переменной

Если уравнение, содержащее лишь одну какую-либо тригонометрическую функцию (например, $\sin x$ или $\cos x$), удается решить алгебраически относительно этой функции, то тем самым исходное уравнение сводится к одному или к совокупности нескольких простейших уравнений.

Пример. Решить уравнение:

а) $2 \sin^2 x + 7 \cos x - 5 = 0$; б) $\cos 2x - 5 \sin x - 3 = 0$.

Р е ш е н и е. а) Так как $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, то уравнение можно переписать следующим образом:

$$2(1 - \cos^2 x) + 7 \cos x - 5 = 0, \quad \text{т. е.} \quad 2 \cos^2 x - 7 \cos x + 3 = 0.$$

Полагая $\cos x = y$, приходим к квадратному уравнению $2y^2 - 7y + 3 = 0$, откуда получаем совокупность двух простейших уравнений: $y_1 = \frac{1}{2}$; $y_2 = 3$. Первое из них имеет решения $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, а второе решений не имеет. Итак, $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ — решения данного уравнения.

б) Используя формулу $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$, получим

$$1 - 2 \sin^2 x - 5 \sin x - 3 = 0, \quad \text{т. е.} \quad 2 \sin^2 x + 5 \sin x + 2 = 0.$$

Положим $\sin x = y$; тогда задача сводится к решению квадратного уравнения $2y^2 + 5y + 2 = 0$, откуда $y_1 = -2$, $y_2 = -\frac{1}{2}$. Уравнение $\sin x = -2$ решений не имеет, а уравнению $\sin x = -\frac{1}{2}$ удовлетворяют значения $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, т. е. $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3. Решение тригонометрических уравнений, однородных относительно синуса и косинуса

1°. Тригонометрическое уравнение вида

$$a_0 \sin^k x + a_1 \sin^{k-1} x \cos x + a_2 \sin^{k-2} x \cos^2 x + \\ + \ldots + a_k \cos^k x = 0, \qquad (1)$$

все члены которого имеют одну и ту же k-ю степень относительно синуса и косинуса, называют ***однородным***.

Например, $2 \sin^3 x - 5 \sin^2 x \cos x + \cos^3 x = 0$ — однородное уравнение третьей степени.

2°. Уравнение (1) легко сводится к уравнению относительно $\operatorname{tg} x$, если все его члены разделить на $\cos^k x$. При этом если $a_0 \neq 0$, то такое деление не приведет к потере решений, поскольку значения x, при которых $\cos x = 0$, не удовлетворяют уравнению (1). Если же $a_0 = 0$, то такое деление приведет к потере корней, а потому в ответ следует дополнительно включить решения уравнения $\cos x = 0$.

Пример. Решить уравнение:

а) $2 \sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$;

б) $\cos^2 x + 3 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x = 3$.

Р е ш е н и е. а) Данное уравнение является однородным уравнением второй степени относительно синуса и косинуса. Разделив все его члены на $\cos^2 x$, получим

$$2 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 = 0; \quad \operatorname{tg} x = \frac{1 \pm 3}{4}; \quad \operatorname{tg} x = 1,\ \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}.$$

Из уравнения $\operatorname{tg} x = 1$ находим, что $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, а из уравнения $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$ — что $x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

б) Это уравнение не является однородным, поскольку его правая часть отлична от нуля. Однако оно легко преобразуется в однородное уравнение, если использовать тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Тогда получим

$$\cos^2 x + 3 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x = 3 (\sin^2 x + \cos^2 x);$$

$$\cos^2 x + 3 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 3 \sin^2 x - 3 \cos^2 x = 0;$$

$$2 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x = 0. \qquad (*)$$

Разделив все члены уравнения (*) на $\cos^2 x$, имеем $2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x = 0$, т. е. $\mathrm{tg}\, x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Кроме того, в ответ надо включить решения уравнения $\cos x = 0$, т. е. значения $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Заметим, что уравнение (*) можно решить иначе. Разложив его левую часть на множители, получим $2\cos x\,(\cos x - \sqrt{3}\sin x) = 0$. Тогда задача сводится к решению совокупности уравнений $\cos x = 0$; $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$. Первое из них имеет решения $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Второе же является однородным уравнением первой степени относительно синуса и косинуса; поэтому оно равносильно уравнению $1 - \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x = 0$, т. е. $\mathrm{tg}\, x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

4. Решение тригонометрических уравнений вида $a\cos x + b\sin x = c$

Тригонометрическое уравнение вида $a\cos x + b\cos x = c$ можно решить различными методами. Рассмотрим два из них: первый основан на введении вспомогательного аргумента, а второй — на применении универсальной подстановки $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = y$.

При использовании метода введения вспомогательного аргумента выражение $a\cos x + b\sin x$ заменяют на $r\sin(x + \varphi)$, где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (см. тему 15, п. 5). Угол φ называют ***вспомогательным аргументом***.

При использовании универсальной подстановки функции $\sin x$, $\cos x$ и $\mathrm{tg}\, x$ выражаются через $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ по следующим формулам:

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \mathrm{tg}\, x = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$$

(см. тему 15, п. 3).

Пример. Решить уравнение $3\cos x + 4\sin x = 5$.

Р е ш е н и е. I способ. Разделив обе части уравнения на $\sqrt{3^2+4^2} = 5$, получим

$$\frac{3}{5}\cos x + \frac{4}{5}\sin x = 1.$$

Так как $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, то существует такое φ, что $\frac{3}{5} =$ $= \sin\varphi$ и $\frac{4}{5} = \cos\varphi$. Тогда уравнение примет вид

$$\sin\varphi\cos x + \cos\varphi\sin x = 1, \quad \text{или} \quad \sin(x+\varphi) = 1.$$

Следовательно, $x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - \varphi$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Поскольку $\varphi = \arcsin\frac{3}{5}$, окончательно находим

$$x = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{5} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

II способ. Выразив $\cos x$ и $\sin x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и полагая $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = y$, приходим к уравнению

$$3\cdot\frac{1-y^2}{1+y^2} + 4\cdot\frac{2y}{1+y^2} = 5, \quad \text{или} \quad 3 - 3y^2 + 8y = 5 + 5y^2,$$

или

$$4y^2 - 4y + 1 = 0,$$

откуда $y = \frac{1}{2}$. Из уравнения $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ находим $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k$, т. е. $= 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Заметим, что использование универсальной подстановки возможно лишь при $x \neq \pi + 2\pi n$ (при этих значениях $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не существует). Поэтому нужно проверить, не являются ли числа вида $x = \pi + 2\pi n$ решениями заданного уравнения. Проверка показывает, что числа указанного вида уравнению не удовлетворяют. Итак, получаем ответ: $x =$ $= 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

5. Решение простейших тригонометрических неравенств

Графический способ решения простейших тригонометрических неравенств (т. е. неравенств вида $\sin x < a$, $\sin x > a$ и т. д.) состоит в следующем. Строят график данной тригонометрической функции и прямую $y = a$, а затем, используя построенные графики, выделяют промежутки, служащие решениями неравенства.

Существует и другой способ решения простейших тригонометрических неравенств — с помощью числовой окружности.

Пример. Решить неравенство:

$$\text{а) } \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{б) } \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} \geqslant 1.$$

Р е ш е н и е. а) <u>I способ.</u> Строим график функции $y = \sin x$ и прямую $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, которая пересекает синусоиду в бесконечном числе точек (рис. 165). Выделим один из промежутков значений аргумента, являющихся решениями данного неравенства (там, где график синуса расположен ниже прямой $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$); таким является, например, промежуток $\left(-\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$. Используя периодичность синуса, получаем ответ:

$$-\frac{4\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

<u>II способ.</u> Построим числовую окружность и прямую $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, которая пересекается с окружностью в точках, соответствующих числам $-\frac{4\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{3}$ (рис. 166). Решением данного неравенства на

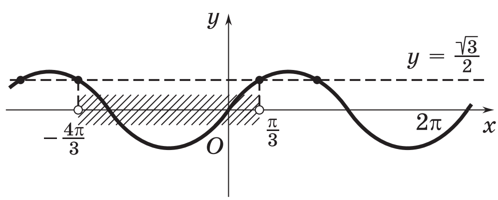


Рис. 165

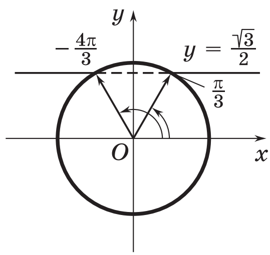


Рис. 166

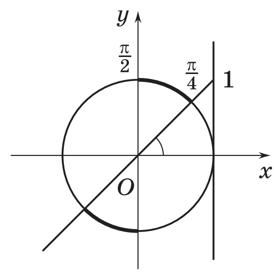


Рис. 167

числовой окружности является промежуток $\left(-\frac{4\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right)$. Используя периодичность синуса, получаем ответ:

$$-\frac{4\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

б) Данное неравенство равносильно простейшему неравенству $\operatorname{tg} 3x \geqslant 1$. Решим последнее с помощью числовой окружности (рис. 167):

$$\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant 3x < \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ откуда } \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3} \leqslant x < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3},\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие тригонометрические уравнения называют однородными? Как они решаются?

2. Напишите общий вид однородного тригонометрического уравнения относительно $\sin x$ и $\cos x$.

3. Какую степень однородности имеет уравнение $a \sin x + b \cos x = 0$? Решите его.

4. Какими методами можно решить уравнение $a \sin x + b \cos x = c$?

5. Какую подстановку называют универсальной?

6. Решите уравнение:

а) $\sin^4 x - 3 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \cos^4 x = 0$;

б) $2 \cos^4 x - 3 \cos^2 x = 1$;

в) $1 - \cos 2x = 2 \sin x$;

г) $\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x - 1 = 0$;

д) $1 - \sin 4x = 2 \sin (2x - 45°)$;

е) $\sin x \sin 3x = 0{,}5$;

ж) $2\cos^2 (x + 30°) + 3 \sin (60° - x) + 1 = 0$.

7. Какими способами можно решить простейшее тригонометрическое неравенство?

8. Какому условию должно удовлетворять a, чтобы имело смысл неравенство:

а) $\sin x < a$; б) $\sin x \geqslant a$?

9. Решите неравенство:

а) $\sin x > \frac{1}{2}$; б) $\sin 2x \leqslant \frac{1}{2}$;

в) $\sin 3x \geqslant -\frac{1}{3}$;

г) $2\cos x > 1$;

д) $2\cos 2x < 1$;

е) $3\cos 2x \geqslant -2$;

ж) $\mathrm{tg}^2\, x \geqslant 3$;

з) $-1 \leqslant \mathrm{ctg}\, x \leqslant 2$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решите уравнение:

а) $\sin 2x - 4\sin x - 4\cos x + 4 = 0$;

б) $\sin 2x + 5\sin x + 5\cos x + 1 = 0$; в) $3\sin 2x + \cos 2x + 1 = 0$;

г) $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}$; д) $\cos^2 3x - \mathrm{tg}^2\, 3x - \sin^2 3x + 1 = 0$;

е) $-2 + \cos x = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$; ж) $2\sin 11x + \sqrt{3}\sin 5x + \cos 5x = 0$;

з) $2\sin^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x} - 3 = 0$; и) $2\cos^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x} = 3$.

2. Решите уравнение:

а) $\dfrac{1+\cos 2x}{\cos x} = 0$; б) $\dfrac{\cos 3x}{1+\cos 2x} = 0$; в) $\dfrac{\cos 4x - 1}{\cos x} = 0$;

г) $\dfrac{\cos 3x}{\mathrm{tg}\, x} = 0$; д) $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} = 0$; е) $\dfrac{\sin x}{\sin 3x} = 0$; ж) $\dfrac{\mathrm{tg}\, 2x}{\sin x} = 0$;

з) $\dfrac{\sin x}{\mathrm{tg}\, 2x} = 0$; и) $\sin 3x\, \mathrm{ctg}\, x = 0$; к) $\dfrac{\cos 2x}{1+\mathrm{tg}\, x} = 0$.

3. Решите уравнение:

а) $\cos^2 x + 2\sin x\cos x - 3\sin^2 x = 0$;

б) $\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$;

в) $5\cos^2 x - 3\sin x\cos x - 4\sin^2 x = 2$;

г) $5\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 2$;

д) $3\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0$; е) $\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$;

ж) $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x = 0$; з) $3\cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0$;

и) $\sqrt{3}\sin^2 x - 0{,}5\sin 2x = 0$; к) $\sin^4 x - \cos^4 x + \sin 2x + 3 = 0$.

4. Найдите количество корней уравнения:

а) $\cos 6\pi x \sin 9\pi x = \cos \pi x \sin 14\pi x$, принадлежащих отрезку $[3; 4]$;

б) $\cos 4\pi x \sin 8\pi x = \cos \pi x \sin 11\pi x$, принадлежащих отрезку $[-2; -1]$.

5. Найдите наименьший положительный корень уравнения:

а) $8 \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} - 3 + 2 \cos 2x = 0$;

б) $8 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} - 3 = 6 \cos 2x$.

6. Найдите сумму:

а) первых 48 положительных корней уравнения

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi x}{5}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi x}{5} + \frac{\pi}{4}\right);$$

б) первых 50 положительных корней уравнения

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{5} + \frac{3\pi x}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi x}{2}\right).$$

7. Решите уравнение:

а) $35 \cos 4x + 12 \cos 2x = 35 \sin 2x + 12 \sin 4x$;

б) $9 \cos 3x + 40 \cos 4x = 9 \sin 4x - 40 \sin 3x$;

в) $\sin^2 x + \sin^2 5x + \sin^2 7x + \sin^2 11x = 2$;

г) $\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 9x + \cos^2 10x = 2$.

8. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = \frac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2\sin y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x \cos y = p, \\ x + y = q; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = p, \\ x + y = q; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + y = \frac{3\pi}{4}, \\ \cos^2 x + \sin^2 y = 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \sin x \cos y = -\frac{1}{2}, \\ \cos x \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

9. Какое наибольшее и какое наименьшее значение может принимать данное выражение:

а) $3 \sin x + 4 \cos x$; б) $|3 \sin x - 4 \cos x|$; в) $-5 \sin x + 12 \cos x$;

г) $5 - 7 \sin x - 24 \cos x$; д) $\sqrt{\sin x - \cos x}$; е) $\frac{1}{|\sin x + \cos x|}$?

10. Решите неравенство:

а) $\sin x > -\frac{1}{2}$; б) $\cos x > -\frac{1}{2}$; в) $\sin \frac{x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

д) $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$; е) $\operatorname{ctg} x > -\sqrt{3}$; ж) $\operatorname{tg} 3x < -1$; з) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} < 1$;

и) $2 \cos^2 x - 7 \sin x < 5$; к) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 < 0$;
л) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geqslant -3$; м) $\cos x < a$; н) $\operatorname{ctg} x \geqslant a$.

11. Найдите значения a, при которых совместна система уравнений:

а) $\begin{cases} 3^{1 - \sqrt{x}} + 1 = 5a - 2 \operatorname{tg}^2 y, \\ 4 \operatorname{tg}^2 y + 2 = 3a + 3^{-\sqrt{x}}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sin x - 4 = 3a - 2^{1 + y^2}, \\ 2^{2 + y^2} - 3 = a + 3 \sin x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 1 + 2 \cos x = 4a - 2^{1 + \sqrt{y}}, \\ 2 - 2^{\sqrt{y}} = 3a - 4 \cos x; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2 \operatorname{ctg}^2 x + 1 = 5a - 3^{1 - \sqrt{y}}, \\ 2 - 3^{-\sqrt{y}} = 3a - 4 \operatorname{ctg}^2 x; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3^{1 + \sqrt{x}} + 1 = 5a - 2 \operatorname{tg}^2 y, \\ 4 \operatorname{tg}^2 y + 2 = 3a + 3^{\sqrt{x}}. \end{cases}$

В ответе укажите наименьшее из этих значений.

12. Найдите все значения параметра a, при которых совместна система уравнений:

а) $\begin{cases} 2 + \cos x = 4a - 6 \cdot 2^{y^2}, \\ 10 - 2^{3 + y^2} = a - 5 \cos x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2^{1 + \sqrt{y}} - 4 = 3a - \cos^2 x, \\ 3 \cos^2 x + 3 = 2^{2 + \sqrt{y}} - a; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3^{1 + x^2} - 2 = 4a - \sin^2 y, \\ -6 - 4 \sin^2 y = 5a - 3^{2 + x^2}. \end{cases}$

В ответе укажите наибольшее из этих значений.

13. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} 6 \cdot 2^{x^2} + 2 = 4a - \sin y, \\ 5 \sin y + 10 = a + 2^{3 + x^2} \end{cases}$$

несовместна?

Задания для повторения

14. Имеются два слитка сплавов золота и меди. В первом слитке отношение золота к меди равно 1 : 2, а во втором — 2 : 3. Если сплавить $\frac{1}{3}$ первого слитка с $\frac{5}{6}$ второго слитка, то в полученном слитке окажется столько золота, сколько было меди в первом, а если $\frac{2}{3}$ первого слитка сплавить с $\frac{1}{2}$ второго, то в полученном слитке окажется меди на 1 кг больше, чем было золота во втором слитке. Сколько золота в каждом слитке?

15. Проценты содержания (по массе) спирта в трех растворах образуют геометрическую прогрессию. Если смешать первый, второй и третий растворы в новом отношении 2 : 3 : 4, то получится раствор, содержащий 32% спирта. Если же смешать их в отношении 3 : 2 : 1, то получится раствор, содержащий 22% спирта. Сколько процентов спирта содержит первый раствор?

16. Сравните числа:

а) $a = \sqrt[4]{11}$ и $b = \sqrt[3]{5}$; б) $a = \sqrt{7} + \sqrt{10}$ и $b = \sqrt{6} + \sqrt{11}$.

17. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 14 см, гипотенуза равна 10 см. Найдите произведение синусов острых углов треугольника.

18. Один из катетов прямоугольного треугольника втрое больше другого. Найдите отношение суммы синусов острых углов треугольника к разности синусов этих углов.

19. Найдите множество значений функции $y = \sin 2x$, если:

а) $x \in \left[\arccos \frac{5}{13}; \frac{5\pi}{12}\right]$; б) $x \in [\operatorname{arctg} 0{,}5; \operatorname{arctg} 3]$.

20. При каких значениях a имеют общий корень уравнения:

а) $x^2 - (a + 3)x + 2a + 2 = 0$ и $x^2 + (a + 3)x + 4a - 4 = 0$;

б) $x^2 - (a + 5)x + a + 4 = 0$ и $x^2 + (a - 2)x + 3a - 15 = 0$?

В ответе укажите сумму найденных значений a.

21. При каких значениях x являются последовательными числами геометрической прогрессии заданные числа:

а) $5 \cdot 4^{-x}$; $1 - 4^{-x}$; $1 + 29 \cdot 4^{-x}$;

б) $1 + 137 \cdot 5^{x}$; $1 - 7 \cdot 5^{x}$; $2 \cdot 5^{x}$?

22. При каких значениях k имеет хотя бы одно решение система:

а) $\begin{cases} x^2 - 2kx + k^2 - 1 = 0, \\ |x + 1| \leqslant 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - 2(k - 1)x + k^2 - 2k = 0, \\ |x - 2| \leqslant 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 2(k + 2)x + k^2 + 4k + 3 = 0, \\ |x - 2| \leqslant 1? \end{cases}$

23. Найдите сумму корней уравнения:

а) $(2x^2 - 12x + 13)\left|\log_3 \frac{x}{3}\right| = 3 \log_3 \frac{x}{3}$;

б) $(x^2 - 4x + 9)\log_5 \frac{x}{5} = 3\left|\log_5 \frac{x}{5}\right|$;

в) $(2x^2 - 16x + 27)\left|\log_4 \frac{x}{4}\right| = 3 \log_4 \frac{x}{4}$.

ОТВЕТЫ

1. а) $x = 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; б) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; в) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; г) $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; д) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; е) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; ж) $x = -\frac{\pi}{96} + \frac{\pi k}{8}$, $x = \frac{7\pi}{36} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; з) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; и) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **2.** а) Нет корней; б) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; в) $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; г) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; д) $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; е) нет корней; ж) нет корней; з) нет корней; и) $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; к) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **3.** а) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; б) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; в) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; г) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; д) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \operatorname{arctg} \frac{5}{3} +$

$+\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; е) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; ж) $x = \pi k,\ x = \frac{\pi}{3} + \pi k,$ $k \in \boldsymbol{Z}$; з) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; и) $x = \pi k,\ x = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; к) нет корней. **4.** а) 14 корней; б) 14 корней. **5.** а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{3}$. **6.** а) 5760; б) 5000. **7.** а) $x = (-1)^k \frac{\pi}{2} + \pi k$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ x = -\operatorname{arctg} \frac{47}{23} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; б) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ x = \frac{\pi}{14} + \frac{2}{7}\operatorname{arctg} \frac{40}{9} + \frac{2\pi k}{7},\ k \in \boldsymbol{Z}$; в) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4},\ x =$ $= \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{12},\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6},\ k \in \boldsymbol{Z}$; г) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ x = \frac{\pi}{26} + \frac{\pi k}{13},\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6},$ $k \in \boldsymbol{Z}$. **8.** а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ y = -\frac{7\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; б) $x = \frac{1}{2}(q + \pi k + (-1)^k \times$ $\times \arcsin(2p - \sin q)),\ y = \frac{1}{2}(q - - \pi k - (-1)^k \arcsin(2p - \sin q)),\ k \in \boldsymbol{Z}$, где $|2p - \sin q| \leqslant 1$; в) $x = \frac{q}{2} + \pi k \pm \pm \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin q}{p} - \cos q\right),\ y = \frac{q}{2} - \pi k \mp$ $\mp \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin q}{p} - \cos q\right),\ k \in \boldsymbol{Z}$, где $\left|\frac{2\sin q}{p} - \cos q\right| \leqslant 1$; г) $x = \frac{\pi}{3} +$ $+ \pi(n + k),\ y = \frac{\pi}{3} + \pi(n - k);\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi(n + k),\ y = -\frac{\pi}{3} + \pi(n - k),\ n, k \in \boldsymbol{Z}$; д) $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ y = \frac{7\pi}{8} - \frac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}$; е) $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} - \pi k,\ y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} + \pi k,$ $n,\ k \in \boldsymbol{Z}$. **9.** а) 5 и −5; б) 5 и 0; в) 13 и −13; г) 30 и −20; д) $\sqrt[4]{2}$ и 0; е) наибольшее значение не существует; наименьшее значение равно $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

10. а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; б) $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{4\pi}{3} + 4\pi k < x < \frac{14\pi}{3} + 4\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{12} + \pi k < x < \frac{11\pi}{12} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; д) $-\frac{\pi}{3} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; е) $\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; ж) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} <$ $< x < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{3},\ k \in \boldsymbol{Z}$; з) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < 2\pi + 2\pi k$; и) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{7\pi}{6} +$ $+ 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; к) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ -\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; л) $\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \pi k - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant -\frac{1}{2}\arcsin \frac{2}{3} + \pi k.\ k \in \boldsymbol{Z}$; м) если $a \leqslant -1$, то решений нет; если $-1 < a \leqslant 1$, то $\arccos a + 2\pi k < x <$ $< 2\pi - \arccos a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; если $a > 1$, то $x \in \boldsymbol{R}$; н) $\pi k < x \leqslant \operatorname{arcctg} a + \pi k,$

$k \in \boldsymbol{Z}$. **11.** а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) 1; г) 1; д) $\frac{1}{2}$. **12.** а) 3; б) 0; в) 1. **13.** $-\infty < a < 2$, $3 < a < +\infty$. **14.** 1,2 кг; 2,4 кг. **15.** 12%. **16.** а) $a > b$; б) $a > b$. **17.** $\frac{12}{25}$.

18. 2. **19.** а) $\left[\frac{1}{2};\ \frac{120}{169}\right]$; б) $[0{,}6;\ 1]$. **20.** а) -6; б) $-2{,}5$. **21.** а) 2; б) -2.

22. а) $-4 \leqslant k \leqslant 2$; б) $-1 \leqslant k \leqslant 7$; в) $-2 \leqslant k \leqslant 2$. **23.** а) 10; б) 18; в) 13.

Решения и методические указания

Ниже даны решения различных видов уравнений. При решении каждого из этих уравнений используется тот или иной способ (часто одно и то же уравнение можно решить разными способами). Мы проиллюстрируем эти способы в процессе решения заданных уравнений.

К упражнению 1а

1. Положим $y = \sin x + \cos x$; тогда $(\sin x + \cos x)^2 = y^2$, или $y^2 = 1 + \sin 2x$.

2. Следовательно, данное уравнение примет вид

$$y^2 - 1 - 4y + 4 = 0, \quad \text{т. е.} \quad y^2 - 4y + 3 = 0,$$

откуда находим $y_1 = 1$, $y_2 = 3$.

3. Теперь задача сводится к решению совокупности уравнений:

$$\sin x + \cos x = 1; \quad \sin x + \cos x = 3.$$

4. Так как

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right),$$

то получаем следующую совокупность уравнений:

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1, \quad \text{или} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \qquad (1)$$

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 3, \quad \text{или} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}. \qquad (2)$$

5. Уравнение (1) имеет решения

$$\frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{4} - x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},$$

т. е. $x = 2\pi k$ и $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

6. Уравнение (2) не имеет решений, поскольку $\frac{3}{\sqrt{2}} > 1$.

Ответ: $x = 2\pi k,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

К упражнению 1в

1. Так как $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, а $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$, то данное уравнение примет вид

$$6 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0, \quad \text{или} \quad 2 \cos x\,(3 \sin x + \cos x) = 0.$$

2. Теперь задача сводится к решению совокупности уравнений:

$$\cos x = 0; \quad 3 \sin x + \cos x = 0.$$

3. Первое из этих уравнений имеет решения

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

4. Второе уравнение является однородным. Разделив обе его части на $\sin x$ (так как $\sin x \neq 0$), получим

$$\operatorname{ctg} x = -3, \quad \text{или} \quad x = -\operatorname{arcctg} 3 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Замечание. Данное уравнение можно решить другим способом, если воспользоваться универсальной тригонометрической подстановкой $\operatorname{tg} x = t$. Тогда

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

В результате исходное уравнение сведется к алгебраическому уравнению относительно переменной $t = \operatorname{tg} x$.

К упражнению 1г

1. Используя известное тождество $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$, запишем данное уравнение в виде

$$\left(\sin^2 \frac{x}{3} + \cos^2 \frac{x}{3}\right)^2 - 2 \sin^2 \frac{x}{3} \cos^2 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}. \qquad (1)$$

2. После преобразования уравнения (1) получим

$$1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{2x}{3} = \frac{5}{8}; \quad \sin^2 \frac{2x}{3} = \frac{3}{4}; \quad \sin \frac{2x}{3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad (2)$$

3. Решим уравнение (2):

а) $\sin\frac{2x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, т. е. $x = \frac{3}{2}\left((-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k\right)$;

б) $\sin\frac{2x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, т. е. $x = \frac{3}{2}\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k\right)$.

4. Объединив полученные корни, находим

$$x = \pm\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi k}{2},\ k \in \mathbf{Z}.$$

5. Последнее выражение можно упростить:

$$x = \pi k,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Замечание. Это уравнение можно решить другим способом, если воспользоваться формулами понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};\quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Тогда данное уравнение примет вид

$$\left(\frac{1-\cos\frac{2x}{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos\frac{2x}{3}}{2}\right)^2 = \frac{5}{8}\quad \text{и т. д.}$$

К упражнению 1д

1. Найдем ОДЗ уравнения:

$$\cos 3x \neq 0,\ \text{т. е. } x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3},\ k \in \mathbf{Z}.$$

2. Так как $\cos^2 3x - \sin^2 3x = \cos 6x$, то данное уравнение можно переписать в виде

$$\cos 6x - \mathrm{tg}^2\, 3x + 1 = 0.$$

3. Выразив $\cos 6x$ через $\mathrm{tg}\, 3x$ и используя подстановку $\mathrm{tg}^2\, 3x = y$, получим

$$\frac{1-\mathrm{tg}^2\, 3x}{1+\mathrm{tg}^2\, 3x} - \mathrm{tg}^2\, 3x + 1 = 0,\quad \text{или}\quad \frac{1-y}{1+y} - y + 1 = 0.$$

Это уравнение имеет корни $y_1 = -2$ и $y_2 = 1$.

4. Ясно, что уравнение $\mathrm{tg}^2\, 3x = -2$ не имеет решений.

5. Остается решить уравнение $\mathrm{tg}^2\, 3x = 1$, т. е. $\mathrm{tg}\, 3x = \pm 1$. Имеем:

а) $\mathrm{tg}\, 3x = -1$, $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$;

б) $\mathrm{tg}\, 3x = 1$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

З а м е ч а н и е. Это уравнение можно решить другим способом. Так как

$$\cos^2 3x - \sin^2 3x = \cos 6x, \quad 1 - \operatorname{tg}^2 3x = \frac{\cos^2 3x - \sin^2 3x}{\cos^2 3x} = \frac{\cos 6x}{\cos^2 3x},$$

то после преобразований уравнение примет вид

$$\cos 6x + \frac{\cos 6x}{\cos^2 3x} = \cos 6x \left(1 + \frac{1}{\cos^2 3x}\right) = 0.$$

Далее имеем:

а) $\cos 6x = 0$, $6x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, откуда $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

б) $1 + \frac{1}{\cos^2 3x} = 0$ — это уравнение не имеет решений.

<u>Ответ</u>: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}$.

К упражнению 1е

1. Найдем ОДЗ уравнения:

$$\cos \frac{x}{2} \neq 0, \text{ т. е. } x \neq \pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

2. Положив $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$ и выразив $\cos x$ через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, получим

$$-2 + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - 2\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0, \quad \text{или} \quad -2 + \frac{1 - y^2}{1 + y^2} - 2y = 0. \qquad (1)$$

3. После упрощения уравнения (1) придем к кубическому уравнению

$$2y^3 + 3y^2 + 2y + 1 = 0. \qquad (2)$$

4. Заменим одночлен $3y^2$ суммой одночленов $2y^2 + y^2$, тогда в левой части уравнения (2) получим произведение двух множителей:

$$(y + 1)(2y^2 + y + 1) = 0.$$

Далее имеем:

а) $y = -1$, $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1$, $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

б) уравнение $2y^2 + y + 1 = 0$ не имеет решений, так как $D < 0$.

<u>Ответ</u>: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

З а м е ч а н и е. Это уравнение можно решить иначе, например так:

$$-2-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\cos x=0;\quad -2\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=0;$$

$$-2\left(\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)+\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)=0;$$

$$\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(\frac{-2}{\cos\frac{x}{2}}+\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)=0 \text{ и т. д.}$$

К упражнению 1ж

1. Преобразуем два последних слагаемых следующим образом:

$$\sqrt{3}\sin 5x+\cos 5x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 5x+\frac{1}{2}\cos 5x\right)=$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin 5x+\sin\frac{\pi}{6}\cos 5x\right)=2\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right).$$

2. Тогда данное уравнение примет вид

$$2\sin 11x+2\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)=0, \text{ или } \sin 11x+\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)=0.$$

3. Используя формулу суммы синусов, имеем

$$2\sin\frac{11x+5x+\frac{\pi}{6}}{2}\cos\frac{11x-5x-\frac{\pi}{6}}{2}=0,$$

или

$$\sin\left(8x+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(3x-\frac{\pi}{12}\right)=0.$$

4. Остается решить последнее уравнение; в результате получаем ответ: $x=-\frac{\pi}{96}+\frac{\pi k}{8}$, $x=\frac{7\pi}{36}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

З а м е ч а н и е. Это уравнение можно решить иначе, если сумму $\sqrt{3}\sin 5x+\cos 5x$ преобразовать так:

$$\sqrt{3}\sin 5x+\cos 5x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 5x+\frac{1}{2}\cos 5x\right)=$$

$$=2\left(\sin\frac{\pi}{3}\sin 5x+\cos\frac{\pi}{3}\cos 5x\right)=2\cos\left(5x-\frac{\pi}{3}\right).$$

Тогда в данном уравнении слагаемое $2\sin 11x$ следует заменить на $2\cos\left(\frac{\pi}{2} - 11x\right)$ и записать уравнение в виде

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2} - 11x\right) + 2\cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = 0,$$

а затем преобразовать сумму косинусов в произведение и т. д.

К упражнению 1з

1. Найдем ОДЗ уравнения: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

2. Положим $y = \sin^2 x$; тогда $\cos^2 x = 1 - y$ и данное уравнение преобразуется так

$$2y + \frac{1}{1-y} - 3 = 0;\quad 2y(1-y) + 1 - 3(1-y) = 0;\quad 2y^2 - 5y + 2 = 0.$$

Последнее уравнение имеет корни $y_1 = 2$; $y_2 = \frac{1}{2}$.

3. Подставив $\sin^2 x$ вместо y, получим:

а) $\sin^2 x = 2$ — это уравнение не имеет решений;

б) $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ — это уравнение решим следующим образом:

$$2\sin^2 x = 1;\quad 1 - \cos 2x = 1;\quad \cos 2x = 0,$$

откуда

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

4. Так как $\cos^2 x \neq 0$ при $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, то среди найденных значений нет посторонних корней.

Замечание. Это уравнение можно решить иначе, полагая $\cos^2 x = y$; тогда получим

$$2(1-y) + \frac{1}{y} - 3 = 0,\quad \text{или}\quad 2y^2 + y - 1 = 0.$$

Корнями последнего уравнения являются $y_1 = -1$; $y_2 = \frac{1}{2}$.

Подставив $\cos^2 x$ вместо y, получим:

а) $\cos^2 x = -1$ — это уравнение не имеет решений;

б) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$, или $2\cos^2 x = 1$, откуда $1 + \cos 2x = 1$, т. е. $\cos 2x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}$.

К упражнению 2а

З а м е ч а н и е. При решении рассмотренных ниже довольно простых с виду тригонометрических уравнений учащиеся часто допускают грубую ошибку. Эта ошибка заключается в том, что хотя они предварительно находят область допустимых значений, но при записи корней уравнения ее совершенно не учитывают.

1. Требуется решить уравнение $\frac{1 + \cos 2x}{\cos x} = 0$.

2. Найдем ОДЗ уравнения:

$$\cos x \neq 0, \text{ т. е. } x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

3. Для наглядности числа $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, не входящие в ОДЗ, отметим на единичной окружности «крестиками» (рис. 168, *а*).

4. Если $k = 0$, то $x = \frac{\pi}{2}$; если $k = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$; если $k = 2$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$ и т. д. Так как числа $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{5\pi}{2}$ отличаются друг от друга на 2π, то соответствующие этим числам точки единичной окружности совпадают $\left(\text{аналогично совпадут точки, соответствующие числам } \frac{3\pi}{2} \text{ и } \frac{7\pi}{2}\right)$.

5. Теперь найдем корни данного уравнения. Имеем $1 + \cos 2x = 0$, откуда $\cos 2x = -1$, т. е. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

6. Отметим эти значения на единичной окружности сплошными точками (рис. 168, *б*).

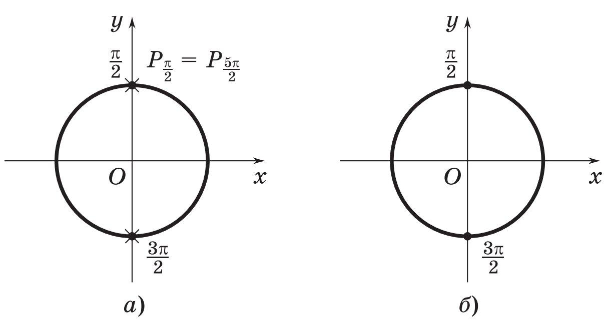


Рис. 168

7. Однако из найденных значений надо исключить те, при которых знаменатель данной дроби обращается в нуль, т. е. значения $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

8. Из рис. 168, *а* и *б* видно, что данное уравнение не имеет решений.

К упражнению 2б

1. Найдем ОДЗ уравнения: $\cos 2x \neq -1$, т. е. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. При $k = 0$ имеем $x = \frac{\pi}{2}$, а при $k = 1$ имеем $x = \frac{3\pi}{2}$. Отметим не входящие в ОДЗ числа «крестиками» на единичной окружности (рис. 169, *а*).

2. Приравняв нулю числитель дроби, получим уравнение $\cos 3x = 0$, откуда $3x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, т. е. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3. Отметим соответствующие точки на единичной окружности (рис. 169, *б*): если $k = 0$, то $x = \frac{\pi}{6}$ (точка P_0); если $k = 1$, то $x = \frac{\pi}{2}$ (точка P_1); если $k = 2$, то $x = \frac{5\pi}{6}$ (точка P_2); если $k = 3$, то $x = \frac{7\pi}{6}$ (точка P_3); если $k = 4$, то $x = \frac{3\pi}{2}$ (точка P_4); если $k = 5$, то $x = \frac{11\pi}{6}$ (точка P_5); если $k = 6$, то $x = \frac{13\pi}{6}$ (точка P_6 совпадает с P_0) и т. д.

4. Теперь из множества отмеченных точек нужно оставить те, которые входят в ОДЗ: это P_0, P_2, P_3 и P_5 (рис. 169, *б*).

5. Итак, получаем ответ: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

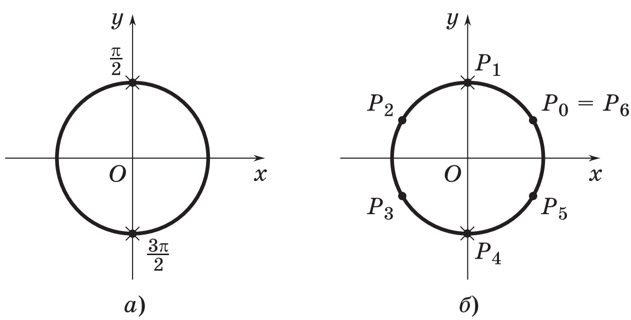


Рис. 169

К упражнению 3а

1. Требуется решить уравнение

$$\cos^2 x + 2\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0. \qquad (1)$$

Отметим следующее:

а) левая часть уравнения (1) состоит только из алгебраической суммы, причем каждое слагаемое этой суммы является произведением числового множителя и двух функций синуса или косинуса одного и того же аргумента;

б) сумма показателей степеней синуса и косинуса в каждом слагаемом одна и та же (в данном уравнении она равна 2);

в) свободный член в уравнении (1) отсутствует, т. е. он равен нулю;

г) такое уравнение называют однородным относительно функций $\sin x$ и $\cos x$, а 2 — это степень его однородности.

2. Значения аргумента, при которых $\cos x = 0$, не являются решениями уравнения (1), так как если $\cos x = 0$, то должно выполняться равенство $-3\sin^2 x = 0$, а косинус и синус одного и того же аргумента не могут одновременно быть равными нулю. Поэтому обе части уравнения (1) можно разделить на $\cos^2 x$ или на $\sin^2 x$, причем получится уравнение, равносильное уравнению (1).

3. Разделив все члены уравнения (1) на $\cos^2 x \neq 0$, получим

$$1 + 2\mathrm{tg}\, x - 3\mathrm{tg}^2\, x = 0, \text{ или } 3\mathrm{tg}^2\, x - 2\mathrm{tg}\, x - 1 = 0. \qquad (2)$$

4. Решим уравнение (2):

$$\mathrm{tg}\, x = 1,\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};$$

$$\mathrm{tg}\, x = -\frac{1}{3},\ x = \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k = -\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

К упражнению 3в

1. Данное уравнение не является однородным тригонометрическим уравнением, так как в нем есть отличный от нуля свободный член, равный 2.

2. Очевидно, что данное уравнение легко свести к однородному уравнению второй степени, если свободный член умножить на выражение $\sin^2 x + \cos^2 x$, равное 1.

3. Тогда придем к однородному тригонометрическому уравнению

$$5\cos^2 x - 3\sin x \cos x - 4\sin^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x), \qquad (1)$$

равносильному данному. После упрощений получим

$$\cos^2 x - \cos x \sin x - 2\sin^2 x = 0,$$

т. е. однородное уравнение второй степени относительно $\sin x$ и $\cos x$.

4. Разделив каждый его член на $\cos^2 x \neq 0$, имеем

$$1 - \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{tg}^2 x = 0. \qquad (2)$$

5. Решим уравнение (2):

$$\operatorname{tg} x = -1,\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2},\ x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

К упражнению 3д

1. Это однородное тригонометрическое уравнение второй степени.
2. Чтобы решить его, разложим левую часть уравнения на множители:

$$\cos x(3 \sin x - 5 \cos x) = 0.$$

3. Таким образом, нужно решить простейшее тригонометрическое уравнение $\cos x = 0$ и однородное уравнение первой степени $3 \sin x - 5 \cos x = 0$.
4. Имеем

$$\cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};$$

$$3 \sin x - 5 \cos x = 0, \quad \text{или} \quad 3 \operatorname{tg} x = 5, \quad x = \operatorname{arctg} \frac{5}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Замечание. Было бы ошибочным следующее «решение»: разделив обе части данного уравнения на $\cos^2 x$, получим

$$3 \operatorname{tg} x - 5 = 0,$$

откуда $x = \operatorname{arctg} \frac{5}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Таким образом, те значения x, при которых $\cos x = 0$, оказались потерянными. Чтобы не произошло потери корней, подобные уравнения следует решать разложением на множители, как это было сделано выше.

К упражнению 4а

1. Применяя формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму, запишем данное уравнение в виде

$$\frac{1}{2}(\sin 15\pi x + \sin 3\pi x) = \frac{1}{2}(\sin 15\pi x + \sin 13\pi x),$$

или

$$\sin 3\pi x - \sin 13\pi x = 0. \qquad (1)$$

2. Далее, используя формулу разности синусов, приведем уравнение (1) к виду

$$2\sin 5\pi x \cos 8\pi x = 0. \qquad (2)$$

3. Из уравнения $\sin 5\pi x = 0$ следует, что $5\pi x = \pi k$, т. е. $x = \frac{k}{5}$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. Теперь воспользуемся тем, что корни уравнения принадлежат отрезку [3; 4], т. е. $3 \leqslant \frac{k}{5} \leqslant 4$, или $15 \leqslant k \leqslant 20$. Этому неравенству удовлетворяют 6 корней.

4. Из уравнения $\cos 8\pi x = 0$ следует, что $8\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, откуда $x = \frac{1+2k}{16}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Значит,

$$3 \leqslant \frac{1+2k}{16} \leqslant 4, \text{ или } \frac{47}{2} \leqslant k \leqslant \frac{63}{2}.$$

Этому неравенству удовлетворяют 8 корней.

Ответ: 14 корней.

К упражнению 6а

1. Используя формулу приведения, перепишем данное уравнение так:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi x}{5}\right)\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi x}{5} + \frac{\pi}{4}\right),$$

или

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi x}{5}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi x}{5} + \frac{\pi}{4}\right) = 0. \qquad (1)$$

2. Теперь применим формулу разности тангенсов:

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \text{где } \cos\alpha \neq 0, \cos\beta \neq 0.$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{\sin\left(-\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi x}{5} - \frac{2\pi x}{5} - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{5} - \frac{5\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{5} + \frac{\pi}{4}\right)} = 0. \qquad (2)$$

3. Приравняем нулю числитель дроби:

$$\sin\left(-\frac{6\pi}{4} - \frac{\pi x}{5}\right) = 0; \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi x}{5}\right) = 0; \quad \cos\frac{\pi x}{5} = 0,$$

откуда

$$\frac{\pi x}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}.$$

Из этого равенства следует, что

$$2x = 5 + 10k, \quad \text{или} \quad x = \frac{5 + 10k}{2}. \tag{3}$$

Можно показать, что при этих значениях x знаменатель дроби (2) не обращается в нуль, т. е. что равенство (3) задает серию корней исходного уравнения.

4. Далее мы должны найти сумму 48 положительных корней уравнения. Для этого совсем не обязательно придавать k значения от 0 до 47 и непосредственно складывать 48 чисел.

5. Пусть $k = 0$, тогда $x = \frac{5 + 10 \cdot 0}{2} = \frac{5}{2}$; пусть $k = 1$, тогда $x = \frac{5 + 10 \cdot 1}{2} = \frac{15}{2}$; пусть $k = 2$, тогда $x = \frac{5 + 10 \cdot 2}{2} = \frac{25}{2}$ и т. д. Замечаем, что числа $\frac{5}{2}, \frac{15}{2}, \frac{25}{2}, \ldots$ образуют арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = \frac{5}{2}$ и разностью $d = 5$. Остается найти сумму 48 первых членов этой прогрессии. Имеем

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n, \text{ т. е. } S_{48} = \frac{(5 + 5 \cdot 47) \cdot 48}{2} = 5760.$$

К упражнению 7а

1. Перегруппируем члены данного уравнения следующим образом:

$$35(\cos 4x - \sin 2x) = 12(\sin 4x - \cos 2x). \tag{1}$$

2. Разложим на множители левую часть уравнения (1):

$$35(1 - 2\sin^2 2x - \sin 2x) = -35(\sin 2x + 1)(2\sin 2x - 1).$$

3. Разложим на множители правую часть уравнения (1):

$$12(2\sin 2x \cos 2x - \cos 2x) = 12\cos 2x(2\sin 2x - 1).$$

4. Тогда уравнение (1) примет вид

$$-35(\sin 2x + 1)(2\sin 2x - 1) - 12\cos 2x(2\sin 2x - 1) = 0,$$

или

$$(2\sin 2x - 1)[35(\sin 2x + 1) + 12\cos 2x] = 0. \tag{2}$$

5. Решим уравнение (2):

а) $2\sin 2x - 1 = 0$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

б) $35(\sin 2x + 1) + 12 \cos 2x = 0$, или $35 \sin 2x + 12 \cos 2x + 35 = 0$; полагая $\operatorname{tg} x = t$, получим

$$\frac{35 \cdot 2t}{1 + t^2} + 12\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 35 = 0,$$

откуда $t_1 = -1$, $t_2 = -\frac{47}{23}$. Значит, $\operatorname{tg} x = -1$, т. е. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\operatorname{tg} x = -\frac{47}{23}$, т. е. $x = -\operatorname{arctg} \frac{47}{23} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

К упражнению 8а

1. Из первого уравнения выразим $y = x - \frac{5\pi}{3}$. Тогда правая часть второго уравнения преобразуется так:

$$2\sin y = 2\sin\left(x - \frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\sin x \cos \frac{5\pi}{3} - \cos x \sin \frac{5\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = \sin x + \sqrt{3}\cos x.$$

2. Значит, второе уравнение системы примет вид

$$\sin x = \sin x + \sqrt{3}\cos x,$$

откуда $\cos x = 0$, т. е. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3. Следовательно,

$$y = x - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi k - \frac{5\pi}{3} = \pi k - \frac{7\pi}{6}, \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

К упражнению 8б

1. Воспользуемся формулой

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]. \qquad (1)$$

2. Так как по условию $x + y = q$, то из равенства (1) следует, что

$$\sin(x - y) = 2p - \sin q. \qquad (2)$$

3. Решив уравнение (2), получим

$$x - y = (-1)^k \arcsin(2p - \sin q) + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},\ \text{где } |2p - \sin q| \leqslant 1.$$

4. Остается решить систему

$$\begin{cases} x + y = q, \\ x - y = (-1)^k \arcsin (2p - \sin q) + \pi k, \end{cases}$$

откуда находим

$$x = \frac{q}{2} + \frac{\pi k}{2} + \frac{(-1)^k}{2} \arcsin (2p - \sin q),$$

$$y = \frac{q}{2} - \frac{\pi k}{2} - \frac{(-1)^k}{2} \arcsin (2p - \sin q), \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

К упражнению 8в

1. Находим ОДЗ системы:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \cos y \neq 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}, \\ y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

2. Преобразуем первое уравнение системы:

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = p, \text{ или } \cos x \cos y = \frac{\sin(x+y)}{p}. \tag{1}$$

3. Так как

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos (x + y) + \cos (x - y)],$$

а $x + y = q$, то уравнение (1) примет вид

$$\cos q + \cos (x - y) = \frac{2\sin q}{p}, \text{ т. е. } \cos (x - y) = \frac{2\sin q}{p} - \cos q. \tag{2}$$

4. Решив уравнение (2), находим

$$x - y = 2\pi k \pm \arccos\left(\frac{2\sin q}{p} - \cos q\right), \text{ где } \left|\frac{2\sin q}{p} - \cos q\right| \leqslant 1.$$

5. Остается решить систему

$$\begin{cases} x + y = q, \\ x - y = 2\pi k \pm \arccos\left(\frac{2\sin q}{p} - \cos q\right), \end{cases}$$

откуда получим

$$x = \frac{q}{2} + \pi k \pm \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2\sin q}{p} - \cos q\right),$$

$$y = \frac{q}{2} - \pi k \mp \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2\sin q}{p} - \cos q\right).$$

К упражнению 8г

1. Находим ОДЗ системы:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \cos y \neq 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ y \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

2. Упростим второе уравнение системы:

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3;\ \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = 3, \text{ откуда } \cos x \cos y = \frac{1}{4}.$$

3. Теперь получаем новую систему

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{3}{4}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{4}. \end{cases} \tag{1}$$

4. Складывая левые и правые части системы (1), а затем вычитая из второго уравнения системы (1) первое, имеем

$$\begin{cases} \sin x \sin y + \cos x \cos y = 1, \\ -\sin x \sin y + \cos x \cos y = -\dfrac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos(x - y) = 1, \\ \cos(x + y) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{2}$$

5. Решим систему (2):

$$\text{а) } \begin{cases} x - y = 2\pi k, \\ x + y = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x - y = 2\pi k, \\ x + y = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n. \end{cases}$$

6. Наконец, решив системы а) и б), получим ответ:

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi(n + k),\ y = \frac{\pi}{3} + \pi(n - k);\ n, k \in \boldsymbol{Z};$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi(n + k),\ y = -\frac{\pi}{3} + \pi(n - k),\ n, k \in \boldsymbol{Z}.$$

К упражнению 9а

1. Преобразуем данное выражение с помощью введения вспомогательного угла. Напомним формулу, содержащую вспомогательный угол:

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x\right).$$

2. В рассматриваемом случае имеем $a = 3$, $b = 4$, $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$,

$$3\sin x + 4\cos x = 5\left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x\right),$$

где $\frac{3}{5} = \cos\alpha$, $\frac{4}{5} = \sin\alpha$.

3. Тогда данное выражение запишется следующим образом:

$$5(\cos\alpha \sin x + \sin\alpha \cos x) = 5\sin(x + \alpha).$$

4. Выражение $5\sin(x + \alpha)$ принимает наибольшее значение, равное 5, и наименьшее значение, равное -5.

К упражнению 10и

1. После преобразований данное неравенство примет вид

$$2(1 - \sin^2 x) - 7\sin x < 5, \quad \text{или} \quad 2\sin^2 x + 7\sin x + 3 > 0. \qquad (1)$$

2. Так как квадратный трехчлен $2y^2 + 7y + 3$ (где $y = \sin x$) имеет корни $y_1 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = -3$, то, разложив левую часть неравенства (1) на множители, получим

$$2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x + 3) > 0. \qquad (2)$$

3. Ясно, что $\sin x + 3 > 0$ при всех x, поэтому остается решить неравенство

$$\sin x + \frac{1}{2} > 0, \quad \text{или} \quad \sin x > -\frac{1}{2}. \qquad (3)$$

4. Для решения неравенства (3) воспользуемся числовой окружностью (рис. 170). Решением неравенства являются все числа, удовлетворяющие условиям $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}$, или, учитывая период синуса, все числа такие, что

$$2\pi k - \frac{\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \; k \in \boldsymbol{Z}.$$

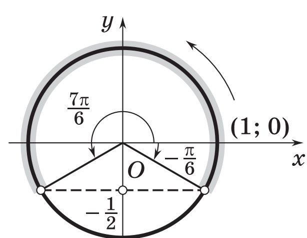


Рис. 170

К упражнению 10к

1. Найдем ОДЗ неравенства:

$$\cos x \neq 0, \text{ т. е. } x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

2. Разложив левую часть данного неравенства на множители, получим

$$\operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg} x + 1) - (\operatorname{tg} x + 1) < 0; \quad (\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg}^2 x - 1) = 0;$$

$$(\operatorname{tg} x + 1)^2(\operatorname{tg} x - 1) < 0. \tag{1}$$

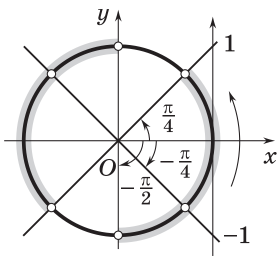


Рис. 171

3. Решением неравенства (1) являются значения x, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \neq -1, \\ \operatorname{tg} x < 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ -\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{cases} \tag{2}$$

4. Ответ можно дать в виде системы (2). Однако для более компактной записи ответа воспользуемся числовой окружностью (рис. 171) и получим следующий ответ:

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ -\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

К упражнению 10л

1. Найдем ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \neq \pi k, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \end{cases} \text{ или } x \neq \frac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

2. Преобразуем данное неравенство:

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \geqslant -3;\ \frac{2}{\sin 2x} + 3 \geqslant 0;$$

$$\frac{2 + 3\sin 2x}{\sin 2x} \geqslant 0;\ (2 + 3\sin 2x)\sin 2x \geqslant 0.$$

3. Полагая $\sin 2x = y$, получим неравенство $(2 + 3y)y \geqslant 0$. Решив его методом интервалов, придем к совокупности неравенств

$$\sin 2x \geqslant 0; \qquad (1)$$

$$\sin 2x \leqslant -\frac{2}{3}. \qquad (2)$$

4. Решим неравенство (1). Учитывая область определения исходного неравенства, имеем

$$2\pi k < 2x < \pi + 2\pi k, \text{ или } \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

5. Решим неравенство (2) двумя способами.

I способ. а) Известно, что если повернуть начальный радиус около точки O по часовой стрелке, то угол поворота считается отрицательным.

б) Положим $2x = t$, тогда неравенство (2) примет вид

$$\sin t \leqslant -\frac{2}{3}. \qquad (3)$$

в) Решение неравенства (3) иллюстрирует рис. 172, *а*.

г) Запишем решение неравенства (3):

$$2\pi k - \pi + \arcsin\frac{2}{3} \leqslant t \leqslant -\arcsin\frac{2}{3} + 2\pi k,$$

или

$$\pi k - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant -\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3} + \pi k, \; k \in \boldsymbol{Z}.$$

II способ. а) Известно, что если повернуть начальный радиус около точки O против часовой стрелки, то угол поворота считается положительным.

б) Полагая $2x = t$, запишем неравенство (2) в виде (3).

в) Решение неравенства (3) иллюстрирует рис. 172, *б*.

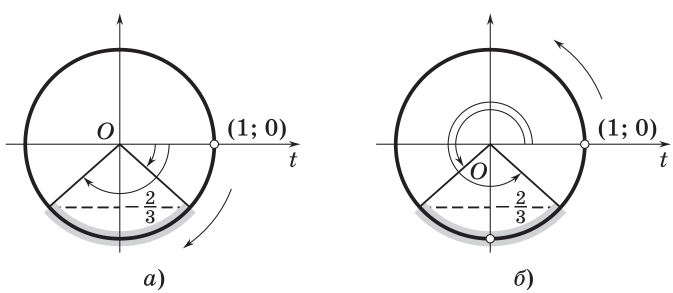


Рис. 172

г) Запишем решение неравенства (3):

$$\pi + \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi k \leqslant t \leqslant 2\pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi k,$$

или

$$\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3} + \pi k \leqslant x \leqslant \pi - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

К упражнению 10м

1. Если $a \leqslant -1$, то неравенство не имеет решений.
2. Если $-1 < a \leqslant 1$, то $\arccos a + 2\pi k < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
3. Если $a > 1$, то $x \in \boldsymbol{R}$.

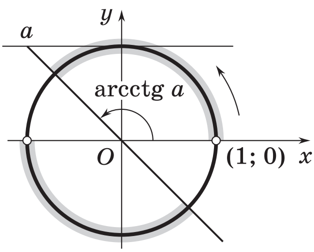


Рис. 173

К упражнению 10н

1. Решение неравенства $\operatorname{ctg} x \geqslant a$ изображено на числовой окружности (рис. 173).
2. Это решение записывается так:

$$\pi k < x \leqslant \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

К упражнению 11а

З а м е ч а н и е. Специфика рассматриваемых ниже систем обусловлена наличием показательных и тригонометрических функций, входящих в каждое уравнение системы.

1. Полагая $u = 3^{-\sqrt{x}}$, $v = \operatorname{tg}^2 y$, перепишем данную систему:

$$\begin{cases} 3 \cdot 3^{-\sqrt{x}} + 1 = 5a - 2\operatorname{tg}^2 y, \\ 4\operatorname{tg}^2 y + 2 = 3a + 3^{-\sqrt{x}}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3u + 1 = 5a - 2v, \\ 4v + 2 = 3a + u. \end{cases} \qquad (1)$$

2. Учитывая, что a — параметр, а u и v — неизвестные, запишем систему (1) в виде

$$\begin{cases} 3u + 2v = 5a - 1, \\ -u + 4v = 3a - 2. \end{cases} \qquad (2)$$

3. Умножив второе уравнение системы (2) на 3 и сложив результат с первым уравнением, получим

$$14v = 14a - 7, \quad \text{или} \quad v = a - \frac{1}{2}.$$

4. Аналогично, умножив первое уравнение системы (2) на (−2) и сложив результат со вторым уравнением, получим

$$-7u = -7a, \quad \text{или} \quad u = a.$$

5. Вернемся к первоначальным переменным и запишем систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 y = a - \dfrac{1}{2}, \\ 3^{-\sqrt{x}} = a, \end{cases} \tag{3}$$

равносильную системе (2).

6. Левые части уравнений системы (3) удовлетворяют следующим ограничениям:

$$0 \leqslant \operatorname{tg}^2 y,\ 0 < 3^{-\sqrt{x}} \leqslant 1 \left(\text{поскольку } 3^{-\sqrt{x}} = \frac{1}{3^{\sqrt{x}}}\right).$$

7. Отсюда получаем систему неравенств для параметра a:

$$\begin{cases} 0 \leqslant a - \dfrac{1}{2}, \\ 0 < a \leqslant 1. \end{cases}$$

8. Решим эту систему:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} \leqslant a, \\ 0 < a \leqslant 1, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1.$$

9. Итак, наименьшим значением параметра, при котором данная система уравнений совместна, является $a = \dfrac{1}{2}$.

К упражнению 11б

1. Пусть $u = \sin x$, $v = 2^{y^2}$. Тогда получим систему

$$\begin{cases} u + 2v = 3a + 4, \\ -3u + 4v = a + 3. \end{cases}$$

2. Исключив из этой системы u, имеем

$$10v = 10a + 15, \quad \text{или} \quad v = a + \frac{3}{2}.$$

3. Аналогично исключив v, получим

$$-5u = -5a - 5, \quad \text{или} \quad u = a + 1.$$

4. Таким образом, приходим к системе

$$\begin{cases} 2^{y^2} = a + \dfrac{3}{2}, \\ \sin x = a + 1. \end{cases}$$

5. Учитывая, что $1 \leqslant 2^{y^2}$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, запишем систему неравенств для параметра a:

$$\begin{cases} 1 \leqslant a + \dfrac{3}{2}, \\ -1 \leqslant a + 1 \leqslant 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \leqslant a, \\ -2 \leqslant a \leqslant 0, \end{cases} \quad \text{т. е. } -\dfrac{1}{2} \leqslant a \leqslant 0.$$

Ответ: $a = -\dfrac{1}{2}$.

К упражнению 11г

1. Полагая $\operatorname{ctg}^2 x = u$, $3^{-\sqrt{y}} = v$, получим систему

$$\begin{cases} 2u + 1 = 5a - 3v, \\ 2 - v = 3a - 4u, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2u + 3v = 5a - 1, \\ 4u - v = 3a - 2. \end{cases}$$

2. Исключив из этой системы u, имеем

$$-7v = -7a, \quad \text{или} \quad v = a.$$

3. Аналогично исключив v, имеем

$$14u = 14a - 7, \quad \text{или} \quad u = a - \frac{1}{2}.$$

4. Следовательно, приходим к системе

$$\begin{cases} \operatorname{ctg}^2 x = a - \dfrac{1}{2}, \\ 3^{-\sqrt{y}} = a. \end{cases}$$

5. Так как $0 \leqslant \operatorname{ctg}^2 x$, $1 \leqslant 3^{-\sqrt{y}}$, то получаем систему неравенств для параметра a:

$$\begin{cases} 0 \leqslant a - \dfrac{1}{2}, \\ 1 \leqslant a, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2} \leqslant a, \\ 1 \leqslant a, \end{cases} \quad \text{т. е. } 1 \leqslant a.$$

Ответ: $a = 1$.

К упражнению 14

1. Пусть в первом слитке содержится x (кг) золота, тогда в нем имеется $2x$ (кг) меди.

2. Пусть во втором слитке содержится y (кг) золота, тогда в нем имеется $\frac{2}{3}y$ (кг) меди.

3. После того как сплавили $\frac{1}{3}$ первого слитка и $\frac{5}{6}$ второго, в полученном слитке будет содержаться $\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y$ (кг) золота — столько же, сколько меди в первом слитке, т. е. $2x$ (кг).

4. Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y = 2x. \tag{1}$$

5. Рассуждая аналогично, составим другое уравнение:

$$\frac{4}{3}x + \frac{3}{4}y = y + 1. \tag{2}$$

7. Решив систему уравнений (1) и (2), получим ответ: $x = 1{,}2$ кг, $y = 2{,}4$ кг.

К упражнению 15

1. Пусть в первом растворе содержится $x\%$ спирта, $y\%$ — во втором и $z\%$ — в третьем.

2. Это означает, что 1 г первого раствора содержит $\frac{x}{100}$ г спирта, 1 г второго раствора — $\frac{y}{100}$ г спирта и 1 г третьего раствора — $\frac{z}{100}$ г спирта.

3. После того как взяли 2 г первого раствора, 3 г — второго и 4 г — третьего, получили 9 г смеси, содержащей $2 \cdot \frac{x}{100} + 3 \cdot \frac{y}{100} + 4 \cdot \frac{z}{100}$ г спирта.

4. По условию такая смесь содержит 32% спирта, т. е. в 9 г смеси содержится $9 \cdot \frac{32}{100}$ г спирта. Отсюда получаем уравнение

$$\frac{2x + 3y + 4z}{100} = \frac{9 \cdot 32}{100}.$$

5. Аналогично составляем другое уравнение:

$$\frac{3x + 2y + z}{100} = \frac{6 \cdot 22}{100}.$$

6. Наконец, так как числа x, y, z образуют геометрическую прогрессию, то $y^2 = xz$.

7. Итак, приходим к системе

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 9 \cdot 32, \\ 3x + 2y + z = 6 \cdot 22, \\ y^2 = xz, \end{cases}$$

откуда находим $x = 12\%$.

К упражнению 16б

1. Пусть $a \vee b$, где символ $\vee$ означает либо знак «>», либо знак «<», либо знак «=». Здесь $a > 0$ и $b > 0$, значит, после возведения обеих частей неравенства в квадрат знак неравенства сохранится:

$$(\sqrt{7} + \sqrt{10})^2 \vee (\sqrt{6} + \sqrt{11})^2, \quad \text{откуда} \quad 17 + 2\sqrt{70} \vee 17 + 2\sqrt{66}.$$

2. Прибавив к обеим частям этого неравенства по (-17), получим $2\sqrt{70} \vee 2\sqrt{66}$.

3. Далее, умножив обе части этого неравенства на положительное число $\frac{1}{2}$, получим $\sqrt{70} \vee \sqrt{66}$ и, следовательно, $70 \vee 66$.

Так как $70 > 66$ и в процессе преобразований неравенства $a \vee b$ его знак не менялся, то в исходном неравенстве символ $\vee$ нужно заменить знаком «>». Итак, $a > b$.

К упражнению 17

1. Нужно найти $\sin\alpha \sin\beta$, где α и β — острые углы прямоугольного треугольника ABC (рис. 174).

2. Положим $AB = x$; тогда $AC = 14 - x$. Согласно теореме Пифагора, имеем

$$10^2 = x^2 + (14 - x)^2,$$

или

$$x^2 - 14x + 48 = 0,$$

откуда $AB = x = 6$, $AC = 14 - x = 8$.

3. Значит, $\sin\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

4. Итак, $\sin\alpha \sin\beta = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{25}$.

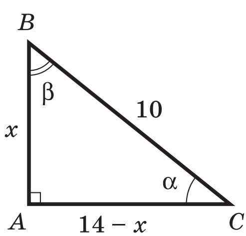


Рис. 174

К упражнению 19а

1. Так как $x \in \left[\arccos\frac{5}{13}; \frac{5\pi}{12}\right]$, т. е. x принадлежит I четверти, то $2x \leqslant \frac{5\pi}{6} < \pi$.

2. Так как $\frac{5}{13} < \frac{1}{2}$ и арккосинус убывает при $x \in [-1; 1]$, то $\arccos\frac{5}{13} > \arccos\frac{1}{2}$.

3. Значит, $2\arccos\frac{5}{13} > 2\arccos\frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}$, откуда следует, что $2x$ находится во II четверти.

4. Во II четверти функция синус убывает и непрерывна. Поэтому данная функция $y = \sin 2x$ принимает все значения от $y\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ до $y\left(\arccos\frac{5}{13}\right)$.

5. Вычислим эти значения:

$$\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}; \quad \sin\left(2\arccos\frac{5}{13}\right) = 2\sin\left(\arccos\frac{5}{13}\right)\cos\left(\arccos\frac{5}{13}\right) =$$

$$= 2\sqrt{1-\frac{25}{169}}\cdot\frac{5}{13} = 2\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{5}{13} = \frac{120}{169}.$$

6. Итак, $\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{120}{169}$.

К упражнению 20а

1. Найдем корни первого уравнения:

$$x_{1,\,2} = \frac{a+3 \pm \sqrt{(a+3)^2 - 8(a+1)}}{2} = \frac{a+3 \pm \sqrt{a^2-2a+1}}{2} = \frac{a+3 \pm (a-1)}{2},$$

т. е. $x_1 = a + 1$, $x_2 = 2$.

2. Найдем корни второго уравнения:

$$x_{3,\,4} = \frac{-(a+3) \pm \sqrt{(a+3)^2 - 16(a-1)}}{2} = \frac{-(a+3) \pm \sqrt{a^2-10a+25}}{2} =$$

$$= \frac{-(a+3) \pm (a-5)}{2},$$

т. е. $x_3 = 1 - a$, $x_4 = -4$.

3. Уравнения имеют общий корень в следующих трех случаях:

а) $a + 1 = 1 - a$, откуда $a_1 = 0$;

б) $a + 1 = -4$, откуда $a_2 = -5$;

в) $1 - a = 2$, откуда $a_3 = -1$.

4. Сумма найденных значений a есть $a_1 + a_2 + a_3 = -6$.

К упражнению 21а

1. Воспользуемся характеристическим свойством геометрической прогрессии (квадрат ее среднего члена равен произведению предыдущего и последующего членов):

$$(1 - y)^2 = 5y(1 + 29y), \quad \text{где} \quad y = 4^{-x} > 0.$$

2. Решив это уравнение, находим $y_1 = -\frac{1}{9} < 0$ (не подходит), $y_2 = \frac{1}{16}$, откуда $x = 2$.

К упражнению 22а

1. Найдем корни уравнения, входящего в систему:

$$x_{1,\,2} = k \pm \sqrt{k^2 - k^2 + 1} = k \pm 1, \quad \text{т. е.} \quad x_1 = k - 1,\ x_2 = k + 1.$$

2. Теперь найдем решение неравенства $|x + 1| \leqslant 2$; это множество $-3 \leqslant x \leqslant 1$.

3. Очевидно, что данная система имеет хотя бы одно решение, если корень уравнения принадлежит множеству $-3 \leqslant x \leqslant 1$.

4. Все искомые значения k определяются из совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} -3 \leqslant k - 1 \leqslant 1, \\ -3 \leqslant k + 1 \leqslant 1, \end{array}\right.$$

откуда находим $-4 \leqslant k \leqslant 2$.

К упражнению 23а

1. Рассмотрим три случая: $x = 3$; $x > 3$; $0 < x < 3$.

2. Если $x = 3$, то уравнение имеет корень $x = 3$.

3. Если $x > 3$, то уравнение примет вид

$$(2x^2 - 12x + 13 - 3)\log_3 \frac{x}{3} = 0, \quad \text{или} \quad x^2 - 6x + 5 = 0,$$

откуда $x = 1$, $x = 5$. Условию $x > 3$ удовлетворяет только корень $x = 5$.

4. Если $x < 3$, то уравнение примет вид

$$(2x^2 - 12x + 13 + 3)\log_3 \frac{x}{3}, \text{ или } x^2 - 6x + 8 = 0,$$

откуда $x = 4$, $x = 2$. Условию $x < 3$ удовлетворяет только корень $x = 2$.

5. Сумма корней уравнения есть $3 + 5 + 2 = 10$.

Тема 18

Приращение аргумента и приращение функции. Предел функции. Непрерывность функции. Определение производной. Производная суммы. Производная произведения. Производная частного. Производная степенной функции. Производная сложной функции

Теоретические сведения

1. Приращение аргумента и приращение функции

1°. Пусть x и x_0 — два значения независимой переменной из $D(f)$; тогда их разность $x - x_0$ называют ***приращением независимой переменной*** (или ***приращением аргумента***) и обозначают через Δx (читается: «дельта икс»). Таким образом,

$$\Delta x = x - x_0. \quad (1)$$

2°. Из равенства (1) следует, что

$$x = x_0 + \Delta x, \quad (2)$$

т. е. первоначальное значение переменной получило приращение Δx. Вследствие этого значение функции изменится на величину

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \quad (3)$$

3°. Разность между новым значением функции $f(x_0 + \Delta x)$ и первоначальным ее значением $f(x_0)$ называют ***приращением функции*** f в точке x_0 и обозначают символом $\Delta f(x_0)$ (читается: «дельта эф в точке x_0»), т. е.

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \quad (4)$$

4°. Приращение функции f в данной точке x_0 кратко обозначают через Δf или Δy (рис. 175).

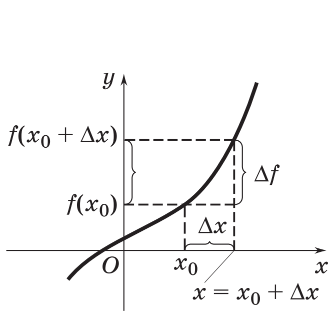


Рис. 175

Пример. Для функции $y = x^2$ найти Δy, если $x = 2{,}5$; $x_0 = 2$.

Р е ш е н и е. Имеем $\Delta x = x - x_0 = 2{,}5 - 2 = 0{,}5$; $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(2{,}5) - f(2) = 6{,}25 - 4 = 2{,}25$.

5°. Понятия приращения функции и приращения аргумента позволяют дать следующие определения возрастающей и убывающей функций.

Функцию называют ***возрастающей***, если $\Delta f(x_0) > 0$ при любых $\Delta x > 0$; функцию называют ***убывающей***, если $\Delta f(x_0) < 0$ при любых $\Delta x > 0$.

2. Предел функции

1°. Число b называют ***пределом функции*** $f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. При этом употребляют запись $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

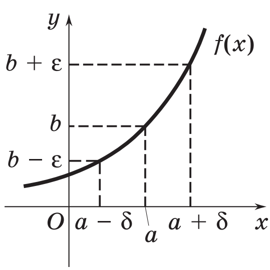


Рис. 176

2°. Так как неравенство $|x - a| < \delta$ равносильно двойному неравенству $a - \delta < x < a + \delta$, а неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ — двойному неравенству $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$, то определение предела функции можно дать в такой форме:

число b есть ***предел функции*** $f(x)$ при $x \to a$, если, какова бы ни была ε-окрестность точки b, найдется такая δ-окрестность точки a, что для любого значения $x \neq a$, принадлежащего δ-окрестности точки a, значение $f(x)$ принадлежит ε-окрестности точки b (рис. 176).

3°. Из определения предела функции следует, что функция должна быть определена на промежутке $(a - \delta;\ a + \delta)$, кроме, возможно, самой точки a.

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 2} (2x - 1) = 3$.

Р е ш е н и е. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $|x - 2| < \delta$ вытекает неравенство $|(2x - 1) - 3| < \varepsilon$. Имеем

$$|(2x - 1) - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, если положить $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, то выполнение неравенства $|x - 2| < \delta$ влечет за собой выполнение неравенства $|(2x - 1) - 3| < \varepsilon$. Таким образом, согласно определению, заключаем, что $\lim\limits_{x \to 2} (2x - 1) = 3$.

4°. ТЕОРЕМА. *Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$, то этот предел — единственный.*

5°. Практически предел функции находят не на основании его определения, а с помощью теорем о пределе функции, аналогичных теоремам о пределе числовой последовательности.

6°. Теоремы о пределе суммы, произведения и частного. *Если при $x \to a$ существуют пределы функций f и g, то*:

1) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to a} (f(x)g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$, *где* $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$;

4) $\lim\limits_{x \to a} kf(x) = \lim k \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x) = k \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, *где k — постоянный множитель.*

Из этих теорем вытекает, в частности, что предел многочлена $P(x)$ при $x \to x_0$ равен $P(x_0)$, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$.

Пример. Найти: а) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 + 2}{3x^3 - 1}$; б) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$.

Р е ш е н и е. а) Так как $\lim\limits_{x \to -2} (x^4 + 2) = (-2)^4 + 2 = 18$, а $\lim\limits_{x \to -2} (3x^3 - 1) = 3(-2)^3 - 1 = -25$, то по теореме о пределе частного получаем, что $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 + 2}{3x^3 - 1} = -\dfrac{18}{25}$.

б) Здесь при $x = -1$ и числитель, и знаменатель обращаются в нуль; поэтому теоремой о пределе частного пользоваться нельзя. Заметим, что $\dfrac{x^3 + 1}{x + 1} = \dfrac{(x^2 - x + 1)(x + 1)}{x + 1}$. Так как при вычислении предела при $x \to -1$ предполагается, что $x \neq -1$, то дробь можно сократить на $x + 1$. В результате получим

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1} (x^2 - x + 1) = (-1)^2 - (-1) + 1 = 3.$$

3. Непрерывность функции

1°. Функцию $f(x)$ называют ***непрерывной в точке*** x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и если предел функции при $x \to x_0$ равен значению функции в этой точке, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2°. Функцию $f(x)$, непрерывную в каждой точке заданного промежутка, называют ***непрерывной на*** всем ***промежутке***.

3°. Любые рациональные и иррациональные функции непрерывны при всех значениях независимой переменной, при которых они определены.

Например, функция $y = x^2$ непрерывна в любой точке числовой прямой, а функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна в любой точке $x \geqslant 0$.

4°. Если функция в какой-либо точке x_0 не определена или ее предел в точке x_0 не равен значению функции в этой точке, то говорят, что функция имеет разрыв в точке x_0, а точку x_0 называют ***точкой разрыва***.

Например, функция $y = \dfrac{k}{x}$ непрерывна в любой точке $x \neq 0$, а в точке $x = 0$ имеет разрыв.

Примеры. 1. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 \text{ при } x > 0, \\ x - 1 \text{ при } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Найти точку разрыва и значение функции в этой точке.

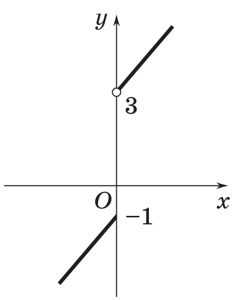


Рис. 177

Р е ш е н и е. Функция имеет разрыв в точке $x = 0$, так как при $x \to 0$ предел этой функции не существует (рис. 177). Значение функции при $x = 0$ есть $f(0) = 0 - 1 = -1$.

2. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{\sqrt{x + 4} - 1}$.

Р е ш е н и е. Здесь при $x = -3$ и числитель, и знаменатель обращаются в нуль, т. е. применить теорему о пределе частного нельзя. Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное знаменателю:

$$\lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(\sqrt{x+4}+1)}{(\sqrt{x+4}-1)(\sqrt{x+4}+1)} = \lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(\sqrt{x+4}+1)}{(x+4)-1} =$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(\sqrt{x+4}+1)}{x+3} = \lim_{x \to -3} (\sqrt{x+4}+1).$$

Функция $\sqrt{x+4}+1$ определена в точке $x = -3$ и, следовательно, непрерывна в этой точке. Поэтому ее предел при $x \to -3$ равен значению функции при $x = -3$. В результате получаем

$$\lim_{x \to -3} (\sqrt{x+4}+1) = \sqrt{-3+4}+1 = 2.$$

4. Определение производной

1°. ***Производной*** функции $f(x)$ в точке x_0 называют предел отношения приращения Δf функции в точке x_0 к приращению Δx аргумента, когда последнее стремится к нулю. Это можно записать так: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x_0)$ (читается: «эф штрих от x_0»).

2°. Из определения производной следует, что функция может иметь производную в точке x_0 только в том случае, если функция определена в некоторой окрестности точки x_0, включая эту точку.

3°. Необходимым условием существования производной функции в данной точке является непрерывность функции в этой точке.

Заметим, однако, что обратное утверждение является неверным. Например, функция $f(x) = |x-1|$ непрерывна на $(-\infty; +\infty)$, но в точке $x = 1$ производной не имеет: можно показать, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \begin{cases} 1 \text{ при } \Delta x \geqslant 0, \\ -1 \text{ при } \Delta x < 0, \end{cases}$$

т. е. данная функция не имеет предела при Δx, стремящемся к нулю.

4°. Нахождение производной $f'(x)$ от данной функции $f(x)$ называют ***дифференцированием*** этой функции.

5°. Вычисление производной функции $y = f(x)$ производится по общему правилу дифференцирования:

а) дают аргументу x приращение Δx и, подставив вместо x значение $x + \Delta x$, находят значение функции:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x);$$

б) находят приращение функции, вычитая из значения функции $f(x + \Delta x)$ ее первоначальное значение:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

в) делят приращение функции Δy на приращение аргумента Δx, т. е. составляют отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

г) находят предел этого отношения при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Найденный предел и есть производная от функции $y = f(x)$.

Пример. Дана функция $y = \sqrt{x}$. Найти $y'_{x = 4}$.

Р е ш е н и е. а) $y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$;

б) $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$;

в) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$;

г) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x + 0} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

д) $y'_{x = 4} = \left.\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x = 4} = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$.

5. Производная суммы

1°. Пусть u и v — две функции, определенные на одном и том же промежутке. Тогда производная суммы этих функций равна сумме их производных, т. е.

$$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x).$$

2°. Методом математической индукции доказывается, что эта формула справедлива для любого конечного числа слагаемых:

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_k)' = u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_k.$$

3°. Производная постоянной равна нулю: $(C)' = 0$, где $C =$ $=$ const.

Пример. Найти $f'(x)$ если $f(x) = x + 5$.

Решение. $f'(x) = (x + 5)' = (x)' + (5)' = 1 + 0 = 1$.

6. Производная произведения

1°. Производная произведения двух функций u и v вычисляется по формуле

$$(uv)' = u'v + uv'$$

в предположении, что производные u' и v' существуют.

2°. Постоянный множитель можно выносить на знак производной:

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

Пример. Найти $f'(x)$, если $f(x) = (2x - 3)(3x + 1)$.

Решение. $f'(x) = (2x - 3)'(3x + 1) + (2x - 3)(3x + 1)' =$ $= 2(3x + 1) + (2x - 3) \cdot 3 = 6x + 2 + 6x - 9 = 12x - 7$.

Этот же пример можно решить иначе: $f(x) = (2x - 3)(3x + 1) =$ $= 6x^2 + 2x - 9x - 3 = 6x^2 - 7x - 3$; $f'(x) = (6x^2 - 7x - 3)' = 12x - 7$.

7. Производная частного

Если функции u и v имеют в точке x производные и если $v(x) \neq 0$, то в этой точке существует производная их частного $\frac{u}{v}$, которая вычисляется по формуле

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Пример. Найти $f'(x)$, если $f(x) = \dfrac{3 + 5x}{1 - 3x}$.

Решение. $\left(\dfrac{3 + 5x}{1 - 3x}\right)' = \dfrac{(3 + 5x)'(1 - 3x) - (3 + 5x)(1 - 3x)'}{(1 - 3x)^2} =$

$$= \frac{(3' + (5x)')(1 - 3x) - (3 + 5x)(1' - (3x)')}{(1 - 3x)^2} =$$

$$= \frac{5(1 - 3x) - (3 + 5x)(-3)}{(1 - 3x)^2} = \frac{14}{(1 - 3x)^2}.$$

8. Производная степенной функции

1°. Производная степенной функции x^k, где $k \in \boldsymbol{Q}$, $x > 0$, равна произведению показателя k на степень x^{k-1}, т. е.

$$(x^k)' = kx^{k-1}. \qquad (1)$$

2°. Заметим, что если $k \in \boldsymbol{Z}$, то формула (1) справедлива при всех значениях $x \in (-\infty; +\infty)$, кроме $x = 0$. Если же при этом $k > 1$, то формула (1) справедлива при любом x.

3°. Из формулы (1) вытекают, в частности, формулы для нахождения производных функций $y = \frac{1}{x}$ и $y = \sqrt{x}$.

При $k = -1$ и $k = \frac{1}{2}$ получаем:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \ (x \neq 0); \qquad (2)$$

$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ (x > 0). \qquad (3)$$

9. Производная сложной функции

Производная сложной функции $h(x) = g(f(x))$ находится по формуле

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x),$$

т. е. производная сложной функции равна произведению производных функций, ее составляющих.

Пример. Найти производную функции $y = (3 - 5x + x^2)^{100}$.

Р е ш е н и е. $y' = 100\,(3 - 5x + x^2)^{99} \cdot (3 - 5x + x^2)' =$
$= 100(3 - 5x + x^2)^{99} \cdot (-5 + 2x)$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Пусть x и x_0 — два значения независимой переменной из $D(f)$. Как называют и как обозначают разность $x - x_0$?

2. Как называют разность между новым значением функции $f(x_0 + \Delta x)$ и ее первоначальным значением $f(x_0)$? Каким символом обозначают эту разность?

3. Сформулируйте определения возрастающей и убывающей функции, используя понятия приращения аргумента и приращения функции.

4. Что означает запись $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$?

5. Для функции $y = 2x + 5$ найдите: а) x, если $x_0 = 3$ и $\Delta x = 0{,}2$; б) Δy, если $x_0 = 4$ и $\Delta x = 0{,}1$.

6. Сформулируйте теоремы о пределе суммы, произведения и частного функций.

7. Найдите предел:

а) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} (-x^3 + 9x^2 + x - 1)$;

б) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x-4)(x+3)}{x^2 + 2x - 3}$;

в) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 8x + 4}{8 - 14x + 5x^2}$;

г) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{9 - x}{3 - \sqrt{x}}$;

д) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5}$;

е) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$.

8. Дайте определение непрерывности функции в точке.

9. Почему рациональная функция непрерывна в любой точке, где она определена?

10. В каком случае функция имеет разрыв в данной точке? Как называют такую точку?

11. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 0{,}5x \text{ при } x \geqslant 1, \\ 1 - 3x \text{ при } x < 1. \end{cases}$$

Найдите значение функции в точке разрыва.

12. Дайте определение производной функции в данной точке.

13. Какие существуют обозначения для производной функции $y = f(x)$?

14. Сформулируйте необходимое условие существования производной в данной точке.

15. Если некоторая функция f не является непрерывной в точке x_0, то она в этой точке не имеет производной (это следует из утверждения п. 4). Верно ли обратное утверждение: «если функция непрерывна в точке x_0, то она имеет в этой точке производную»? Если не верно, то приведите пример.

16. Что называют дифференцированием?

17. Назовите по порядку все операции, которые следует произвести при вычислении производной по общему правилу дифференцирования.

18. Дана функция $y = 2x^2 - 3x$. Применяя общее правило дифференцирования, найдите $y'(x)$ и $y'(3)$.

19. Найдите производную функции:

а) $y = 2x - 5$; б) $y = 0{,}6x(x - 2)$; в) $y = (0{,}7x + 1)(0{,}5x - 2)$; г) $y = (3 - 2x)(5x + 4)$; д) $y = \dfrac{1}{3 + 4x}$;

е) $y = \dfrac{1 - 3x}{1 + 2x}$; ж) $y = \dfrac{5x + 1}{2 - 3x}$.

20. Найдите производную функции:

а) $y = (x - 5)^4$;

б) $y = 7 - 2x^2 + x^3 - 3x^4$;

в) $y = \dfrac{1}{x^2}$; г) $y = \dfrac{4}{x}$;

д) $y = \dfrac{6}{x^3}$; е) $y = 3x^{-5}$;

ж) $y = \sqrt[3]{x^2}$; з) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x^3}}$.

21. Найдите область определения сложной функции:

а) $y = \sqrt{1 - x^2}$;
б) $y = \lg(9 - x^2)$;
в) $y = \sqrt{4 - \sqrt{x}}$;
г) $y = \dfrac{1}{1 + \lg(3 - x)}$.

22. Как находится производная сложной функции $h(x) = g(f(x))$?

23. Найдите производную сложной функции:

а) $y = (x^2 - 3x + 1)^4$;

б) $y = \sqrt[4]{3x^3 - 2x + 3}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите предел:

а) $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 3x^2 + 8x + 5)$; б) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$; в) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$;

г) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1 + x} - 1}$; д) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$; е) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{2x^2 - 3x + 7}$;

ж) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$; з) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 + 2}{x^2 + x + 1}$.

2. Найдите производную функции:

а) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; б) $f(x) = \sqrt[7]{x^3}$; в) $f(x) = x^2(5x - 4)$;

г) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{7x + 1}$; д) $y = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}}$; е) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$;

ж) $y = \dfrac{\sqrt{9 + x^2}}{x}$; з) $y = \sqrt[3]{(x^3 + 1)^2}$.

3. Для заданных функций $f(x)$ и $g(x)$ найдите значение выражения $(g(x)f(x))' - g(x)f'(x)$ в указанной точке x_0, если:

а) $f(x) = 2x + 4$, $g(x) = x^2 - 8$, $x_0 = 2{,}5$;

б) $f(x) = x + 3$, $g(x) = x^2 - 5$, $x_0 = 3{,}5$;

в) $f(x) = x^2 - 8$, $g(x) = 2x + 4$, $x_0 = 3$.

4. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если:

а) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$; б) $f(x) = -\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{10x^3}{3} - 9x$.

Задания для повторения

5. Сначала зарплату повысили на $k\%$, а затем новую зарплату повысили на $2k\%$. В результате двух повышений зарплата увеличилась в 1,32 раза. На сколько процентов зарплата была повышена во второй раз?

6. Вклад, положенный в банк два года назад, достиг 23 328 р. Каков был первоначальный вклад при 8% годовых?

7. Сравните числа:

а) $a = \sqrt{47}$ и $b = \sqrt{26} + \sqrt{6} + 1$;

б) $\sqrt[4]{9 - \sqrt{15}}$ и $b = \sqrt{\dfrac{\sqrt{30} - \sqrt{2}}{2}}$.

8. Вычислите:

а) b^b, если $a^b = 81$, $b^c = 2$, $a^c = 3$;

б) c^a, если $b^c = 25$, $c^c = 36$, $b^a = 5$;

в) a^c, если $b^a = 64$, $a^a = 27$, $b^c = 4$.

9. Решите неравенство:

а) $\sqrt{2x - x^2} < 5 - x$; б) $\sqrt{2x + 14} > x + 3$;

в) $\dfrac{\sqrt{8 - 10x}}{x - 2} \geqslant \dfrac{x - 5}{\sqrt{8 - 10x}}$; г) $\log_{\sqrt{x}}(6 - x) \leqslant 4$.

В ответе запишите наибольшее целое решение.

10. Решите уравнение:

а) $\sqrt{14x - x^2 - 40}\,(\cos 2x + 7\sqrt{3}\sin x + 11) = 0$;

б) $\sqrt{-x^2 + 9x - 20}\,(\cos 2x - 5\sqrt{3}\sin x - 7) = 0$;

в) $\sqrt{\log_{0,(3)}(x - 2) + 1}\,(5 + \cos 2x + 9\cos x) = 0$.

В ответе укажите количество корней.

11. Решите уравнение (в ответе запишите корень, удовлетворяющий данному неравенству):

а) $\dfrac{x}{x - 2} = \dfrac{2 + x}{2x - 5}$, $\log_{1/3}\log_8 \dfrac{2x^2 + 12}{x + 1} < 0$;

б) $\dfrac{106 - 11x}{10 - x} = x + 1$, $\log_{1/9} x + \log_3 9x < 3$;

в) $\dfrac{2}{x - 5} = \dfrac{x + 1}{x + 11}$, $\log_{1/2}\log_6 \dfrac{x(x + 1)}{4 + x} < 0$.

12. Упростите выражение до числового значения:

а) $\dfrac{x - 1}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x}} : \dfrac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x})\sqrt[4]{x}} - \sqrt{x} + 7$;

б) $\dfrac{\cos(2\pi - \alpha)}{\cos\alpha - \sin\alpha \operatorname{ctg} 0,5\alpha} : 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$;

в) $\left(\dfrac{1 - x^{-0,5}}{1 + \sqrt{x^{-1}}} + \dfrac{1 + (\sqrt{x})^{-1}}{1 - x^{-0,5}}\right) \cdot \dfrac{x - 1}{x + 1} - 3$.

ОТВЕТЫ

1. а) 17; б) 4; в) 6; г) 2; д) $\frac{2}{3}$; е) $\frac{1}{2}$; ж) -1; з) 3. **2.** а) $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$; б) $\frac{3}{7\sqrt[7]{x^4}}$; в) $15x^2 - 8x$; г) $\frac{21x^2+6x-9}{(7x+1)^2}$; д) $-\frac{3}{\sqrt{x^2-1}(x^2-1)}$; е) $\frac{4}{\sqrt{x^2+4}(x^2+4)}$; ж) $-\frac{9}{x^2\sqrt{x^2+9}}$; з) $\frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}$. **3.** а) 45; б) 45,5; в) 2. **4.** а) $x_1 = 0$, $x_{2,\,3} = \pm 1$; б) $x_{1,\,2} = \pm 1$, $x_{3,\,4} = \pm 3$. **5.** На 20%. **6.** 20 000 р. **7.** а) $a < b$; б) $a > b$. **8.** а) 16; б) 6; в) 3. **9.** а) 2; б) 0; в) 1; г) 5. **10.** а) Четыре корня; б) три корня; в) 3. **11.** а) 4; б) 8; в) 9. **12.** а) 6; б) $-0{,}5$; в) -1.

Решения и методические указания

К упражнению 1а

1. Сначала применяем теорему о пределе алгебраической суммы и выносим постоянные множители за знак предела, а затем подставляем вместо x его предельное значение $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2}(x^3 - 3x^2 + 8x + 5) = \lim_{x \to 2} x^3 - 3\lim_{x \to 2} x^2 + 8\lim_{x \to 2} x + 5 =$$
$$= 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 5 = 17.$$

2. Этот предел можно найти проще, если вместо x сразу подставить его предельное значение:

$$\lim_{x \to 2}(x^3 - 3x^2 + 8x + 5) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 5 = 17.$$

К упражнению 1б

1. При $x \to 3$ числитель и знаменатель данной дроби стремятся к нулю. Поэтому непосредственное применение теоремы о пределе частного здесь невозможно.

2. Однако данную дробь можно сократить:

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x+1}{x-2}.$$

3. Теперь находим искомый предел:

$$\lim_{x \to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6} = \lim_{x \to 3}\frac{x+1}{x-2} = \frac{3+1}{3-2} = 4.$$

К упражнению 1г

1. Предел знаменателя дроби при $x \to 0$ равен нулю. Поэтому непосредственно использовать теорему о пределе частного здесь нельзя.

2. Кроме того, данную дробь нельзя сократить, как мы сделали это в предыдущем примере.

3. В данном случае числитель и знаменатель дроби следует умножить на выражение $\sqrt{1+x}+1$, сопряженное знаменателю дроби.

4. В результате получим

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}-1} = \frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{1+x-1} = \sqrt{1+x}+1.$$

5. Теперь легко найти искомый предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1} = \lim_{x \to 0} (\sqrt{1+x}+1) = 1+1 = 2.$$

З а м е ч а н и е. Считая, что $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{1+x} = 1$, мы тем самым используем свойство непрерывности функции $y = \sqrt{1+x}$:

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{1+x} = \sqrt{1+0} = 1.$$

К упражнению 1е

1. Поскольку с символом ∞ нельзя обращаться как с числом, нужно преобразовать данную дробь, например так:

$$\frac{x^2-5x+4}{2x^2-3x+7} = \frac{1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}{2-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}.$$

Мы разделили почленно и числитель, и знаменатель заданной дроби на x^2.

2. Теперь применим известные теоремы и найдем искомый предел:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-5x+4}{2x^2-3x+7} = \lim_{x \to \infty} \frac{1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}{2-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}} =$$

$$= \frac{1-5\lim\limits_{x \to \infty}\frac{1}{x}+4\lim\limits_{x \to \infty}\frac{1}{x^2}}{2-3\lim\limits_{x \to \infty}\frac{1}{x}+7\lim\limits_{x \to \infty}\frac{1}{x^2}} = \frac{1-5\cdot 0+4\cdot 0}{2-3\cdot 0+7\cdot 0} = \frac{1}{2}.$$

З а м е ч а н и е. Мы воспользовались тем, что:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0; \ \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right) = 0 \cdot 0 = 0.$$

К упражнению 1ж

1. Этот предел легко найти, если данную дробь предварительно сократить на $\sqrt{x}$;

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{0 + 1}{0 - 1} = -1.$$

2. В данном случае нужно обратить внимание на следующую важную особенность. Когда мы рассматриваем предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, то обычно предполагаем, что функция $f(x)$ определена во <u>всех</u> точках, достаточно близких к точке $x = a$.

3. Однако в данном примере функция $\dfrac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$ определена лишь для <u>положительных</u> значений x.

4. Поэтому при нахождении предела этой функции мы фактически предполагаем, что $x \to 0$, оставаясь все время положительным.

З а м е ч а н и е. В подобных случаях говорят не просто о пределе, а об <u>одностороннем</u> пределе.

К упражнению 2а

1. Здесь мы должны использовать определения степеней с дробным и отрицательным показателями, а также формулы дифференцирования суммы и степени. Напомним, что:

$$\sqrt{a} = a^{1/2}; \quad \frac{1}{\sqrt{a}} = (\sqrt{a})^{-1} = a^{-1/2};$$

$$(u + v)' = u' + v'; \quad (x^p)' = px^{p-1}.$$

2. Учитывая сказанное, находим

$$f'(x) = (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})' = (x^{1/2} + x^{-1/2})' = (x^{1/2})' + (x^{-1/2})' =$$

$$= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{1}{2}x^{-3/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

К упражнению 2в

1. Используя формулу для производной произведения двух функций, получим

$$f'(x) = (x^2(5x-4))' = (x^2)'(5x-4) + x^2(5x-4)' =$$
$$= 2x(5x-4) + x^2 \cdot 5 = 15x^2 - 8x.$$

2. Тот же результат получится, если сначала раскрыть скобки, а затем выполнить дифференцирование.

В самом деле, имеем $f(x) = 5x^3 - 4x^2$ и, следовательно,

$$f'(x) = (5x^3 - 4x^2)' = (5x^3)' - (4x^2)' = 15x^2 - 8x.$$

К упражнению 2д

1. Здесь нужно использовать следующие формулы: а) производную частного, б) производную квадратного корня; в) производную сложной функции.

2. Учитывая сказанное, находим

$$f'(x) = \left(\frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}\right)' = \frac{(3x)'\sqrt{x^2-1} - 3x(\sqrt{x^2-1})'}{(\sqrt{x^2-1})^2} =$$
$$= \frac{3\sqrt{x^2-1} - 3x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}(x^2-1)'}{x^2-1} = \frac{3\sqrt{x^2-1} - \dfrac{3x \cdot 2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} =$$
$$= \frac{3(\sqrt{x^2-1})^2 - 3x^2}{\sqrt{x^2-1}(x^2-1)} = \frac{3(x^2-1) - 3x^2}{\sqrt{x^2-1}(x^2-1)} = -\frac{3}{\sqrt{x^2-1}(x^2-1)}.$$

К упражнению 3а

1. Пусть

$$y = (g(x)f(x))' - g(x)f'(x). \qquad (1)$$

2. Воспользуемся формулой для производной произведения; тогда выражение (1) примет вид

$$y = g'(x)f(x) + g(x)f'(x) - g(x)f'(x) = g'(x)f(x). \qquad (2)$$

3. Так как $f(x) = 2x + 4$, $g(x) = x^2 - 8$, то выражение (2) запишется так:

$$y = g'(x)f(x) = (x^2-8)'(2x+4) = 2x(2x+4) = 4x^2 + 8x. \qquad (3)$$

4. Наконец, подставив значение $x_0 = 2{,}5$ в выражение (3), получим

$$y = 4 \cdot 2{,}5^2 + 8 \cdot 2{,}5 = 45.$$

К упражнению 4б

1. Найдем производную данной функции:

$$f'(x) = -x^4 + 10x^2 - 9.$$

2. Приравняв производную нулю, получим уравнение

$$-x^4 + 10x^2 - 9 = 0, \quad \text{или} \quad x^4 - 10x^2 + 9 = 0. \tag{1}$$

3. Положим $x^2 = y$; тогда уравнение (1) примет вид

$$y^2 - 10y + 9 = 0,$$

откуда $y_1 = 1$, $y_2 = 9$.

4. Значит, уравнение (1) имеет корни $x_{1,\,2} = \pm 1$, $x_{3,\,4} = \pm 3$.

К упражнению 5

1. Пусть первоначальная зарплата составляла x (р.). Тогда после первого повышения (на $k\%$) она стала равной $x\left(1 + \frac{k}{100}\right)$ (р.).

2. После второго повышения (на $2k\%$) зарплата стала равной

$$x\left(1 + \frac{k}{100}\right) + x\left(1 + \frac{k}{100}\right) \cdot \frac{2k}{100} = x\left(1 + \frac{k}{100}\right)\left(1 + \frac{2k}{100}\right) \text{ (р.).}$$

3. С другой стороны, в результате двух повышений зарплата составила $1{,}32x$.

4. Таким образом, получаем уравнение

$$x\left(1 + \frac{k}{100}\right)\left(1 + \frac{k}{50}\right) = 1{,}32x.$$

5. Корнями этого уравнения являются числа $k = -160$ и $k = 10$. Согласно условию, подходит только $k = 10$.

6. Итак, $2k = 20\%$.

К упражнению 8а

1. Запишем равенство $a^b = 81$ в виде

$$a^b = 3^4. \tag{1}$$

2. Так как $3 = a^c$, то равенство (1) примет вид

$$a^b = 3^4 = (a^c)^4 = a^{4c},$$

откуда

$$b = 4c. \tag{2}$$

3. Нам нужно найти степень b^b, или с учетом равенства (2), степень

$$b^b = b^{4c}. \tag{3}$$

4. Но $2 = b^c$, поэтому равенство (3) запишется так:

$$b^b = (b^c)^4 = 2^4 = 16.$$

К упражнению 9б

1. Найдем ОДЗ неравенства: $x \geqslant -7$.

2. В зависимости от знака правой части данного неравенства нужно рассмотреть два случая: $x \in [-7;\ -3)$ и $[-3;\ +\infty)$.

3. Если $x \in [-7;\ -3)$, то правая часть неравенства отрицательна и, значит, его решением является промежуток $-7 \leqslant x < -3$.

4. Если же $x \in [-3;\ +\infty)$, то правая часть неравенства положительна. Тогда, возведя обе части неравенства в квадрат, получим

$$2x + 14 > (x + 3)^2, \quad \text{или} \quad x^2 + 4x - 5 < 0,$$

откуда $-4 - \sqrt{21} < x < -4 + \sqrt{21}$.

5. Объединив найденные решения, окончательно имеем

$$-7 \leqslant x \leqslant -4 + \sqrt{21}.$$

6. Итак, наибольшее целое решение есть 0.

К упражнению 10а

1. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 14x - x^2 - 40 \geqslant 0, \\ \cos 2x + 7\sqrt{3}\sin x + 11 = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (x - 4)(x - 10) \leqslant 0, & (1) \\ 1 - 2\sin^2 x + 7\sqrt{3}\sin x + 11 = 0. & (2) \end{cases}$$

2. Запишем решения неравенства (1):

$$4 \leqslant x \leqslant 10. \tag{3}$$

3. Положим $\sin x = y$, где $|y| \leqslant 1$; тогда уравнение (2) примет вид

$$2y^2 - 7\sqrt{3}\,y - 12 = 0,$$

откуда $y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_2 = 4\sqrt{3}$ (не подходит).

4. Из равенства $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ находим

$$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}. \tag{4}$$

5. Равенства (4) задают множества корней уравнения, но двойное неравенство (3) ограничивает эти множества. Воспользуемся этим при отыскании корней.

6. Из неравенства $4 \leqslant x_1 \leqslant 10$ следует, что

$$4 \leqslant -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leqslant 10, \quad \text{или} \quad 5{,}05 \leqslant 6{,}28k \leqslant 11{,}05,$$

откуда $k = 1$.

7. Из неравенства $4 \leqslant x_2 \leqslant 10$ следует, что

$$4 \leqslant -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leqslant 10, \quad \text{или} \quad 6{,}09 \leqslant 6{,}28k \leqslant 12{,}09,$$

откуда $k = 1$.

8. Итак, данное уравнение имеет четыре корня:

$$x = 4,\ x = \frac{4\pi}{3},\ x = \frac{5\pi}{3},\ x = 10.$$

К упражнению 11а

1. С учетом ОДЗ данного уравнения оно равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0, \\ x \neq 2,\ x \neq 2{,}5, \end{cases}$$

откуда получим $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

2. Нам нужно найти корень, удовлетворяющий неравенству

$$\log_{1/3} \log_8 \frac{2x^2 + 12}{x + 1} < 0. \tag{1}$$

3. Имеем:

а) если $x_1 = 1$, то $\log_{1/3} \log_8 \frac{14}{2} = \log_{1/3} \log_8 7 > 0$ — не удовлетворяет неравенству (1);

б) если $x_2 = 4$, то $\log_{1/3} \log_8 \frac{44}{5} = \log_{1/3} \log_8 8{,}8 < 0$ — удовлетворяет неравенству (1).

4. Итак, $x = 4$.

Т е м а 19

Касательная к графику функции.
Скорость и ускорение в данный момент времени.
Применение производной к нахождению промежутков монотонности функции.
Критические точки функции, ее максимумы и минимумы.
Общая схема исследования функции.
Задачи на отыскание наименьшего и наибольшего значений функции

Теоретические сведения

1. Касательная к графику функции

1°. ***Касательной*** к кривой в данной точке M называют предельное положение секущей NM, когда точка N стремится вдоль кривой к точке M (рис. 178).

2°. Используя это определение, найдем угловой коэффициент касательной к кривой в данной точке. Пусть через точку $M(x;\ y)$ кривой, представляющей собой график функции $y = f(x)$, непрерывной в некоторой окрестности этой точки (включающей точку M), проведена секущая MN_1, образующая с положительным направлением оси Ox угол α (рис. 179). Тогда из

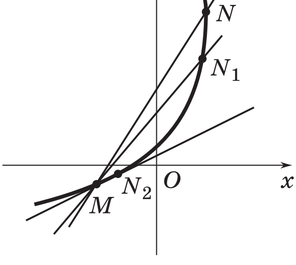


Рис. 178

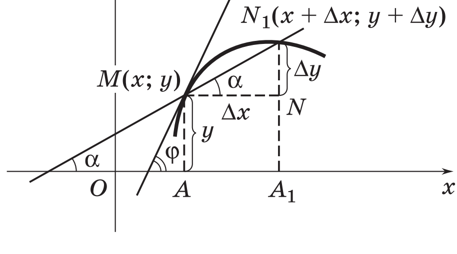


Рис. 179

треугольника MNN_1 можно найти угловой коэффициент этой секущей: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. При стремлении точки N_1 по кривой к точке M секущая MN_1 поворачивается вокруг точки M, причем угол α стремится к углу φ между касательной MT и положительным направлением оси Ox. В соответствии с определением касательной получаем

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x). \qquad (1)$$

Таким образом, *угловой коэффициент касательной к графику функции равен значению производной этой функции в точке касания*. В этом заключается геометрический смысл производной.

3°. Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в заданной точке имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \qquad (2)$$

где $(x_0;\ y_0)$ — координаты точки касания, $(x;\ y)$ — текущие координаты, т. е. координаты любой точки, принадлежащей касательной, а $f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$ — угловой коэффициент касательной.

Примеры. 1. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

Р е ш е н и е. Из уравнения кривой найдем ординату точки касания: $y_0 = 3^2 - 2 \cdot 3 = 3$. Затем найдем производную и вычислим ее значение в точке $x_0 = 3$; имеем $y' = 2x - 2$; $f'(3) = 2 \cdot 3 - 2 = 4$. Теперь, зная точку $(3;\ 3)$ на кривой и угловой коэффициент $f'(3) = 4$ касательной в этой точке, получаем искомое уравнение:

$$y - 3 = 4(x - 3), \quad \text{или} \quad 4x - y - 9 = 0.$$

2. Дана кривая $y = -x^2 + 1$. Найти точку ее графика, в которой касательная параллельна прямой $y = 2x + 3$.

Р е ш е н и е. Так как касательная параллельна прямой $y = 2x + 3$, то их угловые коэффициенты равны, т. е. $k = y'(x) = 2$. Следовательно, $-2x = 2$, т. е. $x_0 = -1$, а $y_0 = f(-1) = -(-1)^2 + 1 = 0$. Итак, $(-1;\ 0)$ — искомая точка.

3. В какой точке кривой $y = \sqrt[3]{x}$ касательная наклонена к оси абсцисс под углом 60°?

Р е ш е н и е. Находим $y'(x) = (\sqrt[3]{x})' = (x^{1/3})' = \frac{1}{3}x^{-2/3}$. Так как по условию $y'(x) = k = \operatorname{tg} 60°$, то

$$\frac{1}{3}x^{-2/3} = \sqrt{3}; \quad x^{-2/3} = 3\sqrt{3}; \quad x^{-2/3} = 3^{3/2},$$

т. е.

$$x = (3^{3/2})^{-3/2} = 3^{-9/4}.$$

Остается найти ординату точки касания: $y = (3^{-9/4})^{1/3} = 3^{-3/4}$. Итак, $(3^{-9/4}; 3^{-3/4})$ — искомая точка.

2. Скорость и ускорение в данный момент времени

1°. Пусть точка движется прямолинейно по закону $s = s(t)$, где s — перемещение точки за время t, отсчитываемое от начального момента времени. Этот закон называют законом движения. Выберем какой-либо момент времени t_0 и рассмотрим промежуток времени Δt от момента t_0 до момента $t = t_0 + \Delta t$. За этот промежуток времени точка переместится на величину $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$. Средняя скорость точки за промежуток времени $[t_0; t_0 + \Delta t]$ составляет

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

С уменьшением Δt средняя скорость все точнее характеризует скорость точки в данный момент времени t_0. Поэтому целесообразно определить ***мгновенную скорость*** $v(t_0)$ в момент времени t_0 как предел средней скорости $v_{\text{ср}}$ при условии, что Δt стремится к нулю, т. е.

$$v(t_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = s'(t_0).$$

Итак, *мгновенная скорость точки в данный момент времени равна значению производной от закона движения.* В этом состоит физический смысл производной.

2°. Очевидно, что мгновенная скорость $v(t)$ также является функцией времени. Поэтому можно рассмотреть скорость изменения скорости движения, т. е. ускорение прямолинейного движения точки:

$$a(t) = v'(t) = (s'(t))' = s''(t).$$

Итак, *ускорение точки в данный момент времени равно значению второй производной от закона движения.* В этом состоит физический смысл второй производной.

Примеры. 1. Найти скорость и ускорение точки, движение которой происходит по закону $x(t) = kx + b$.

Решение. Находим $v(t) = x'(t) = k$, $a(t) = v'(t) = 0$, т. е. скорость движения постоянна, а его ускорение равно нулю. Такое движение называют равномерным прямолинейным.

2. Найти скорость и ускорение точки, движущейся по квадратичному закону $x(t) = pt^2 + qt + r$.

Решение. Имеем $v(t) = x'(t) = 2pt + q$, $a(t) = v'(t) = 2p$, т. е. ускорение при движении по квадратичному закону является постоянным.

Можно доказать и обратное утверждение: если при прямолинейном движении точки ускорение постоянно, то движение происходит по квадратичному закону $x(t) = pt^2 + qt + r$, где коэффициент при t^2 численно равен половине ускорения, т. е. $p = a/2$.

3. Пусть тело свободно падает под действием силы тяжести. Известно, что это движение происходит с постоянным ускорением g — ускорением свободного падения. Тогда пройденное телом расстояние является квадратичной функцией времени:

$$s = s(t) = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + s_0,$$

причем скорость и ускорение в момент t определяются соотношениями $v(t) = s'(t) = gt + v_0$ и $a(t) = v'(t) = g$. При $t = 0$ из этих соотношений находим $s = s_0$, а $v = v_0$. Отсюда становится понятным смысл постоянных s_0 и v_0: это — начальное положение и начальная скорость точки (рис. 180).

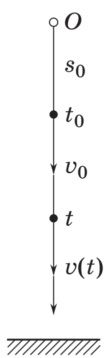


Рис. 180

3. Применение производной к нахождению промежутков монотонности функции

1°. ТЕОРЕМА. *Если производная функции f в точке x_0 положительна, то функция f возрастает в некоторой окрестности этой точки. Если производная функции f в точке x_0 отрицательна, то функция f убывает в некоторой окрестности этой точки.*

2°. На рис. 181, *а* и *б* графически иллюстрируются возрастание и убывание функции в зависимости от знака ее производной в окрестности данной точки x_0. Функция, график которой изображен на рис. 181, *а*, возрастает в окрестности точки x_0, так как $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha > 0$; функция, график которой изображен на рис. 181, *б*, убывает в окрестности точки x_0, поскольку $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha < 0$.

3°. Достаточное условие возрастания (убывания) функции на интервале. ТЕОРЕМА. *Если функция f имеет положительную производную в каждой точке интервала $(a; b)$, то функция возрастает на этом интервале. Если функция f имеет отрицательную производную в каждой точке интервала $(a; b)$, то функция убывает на этом интервале.*

4°. Отметим также, что если функция f монотонна на интервале $(a; b)$ и непрерывна в точках a и b, то она монотонна и на отрезке $[a; b]$.

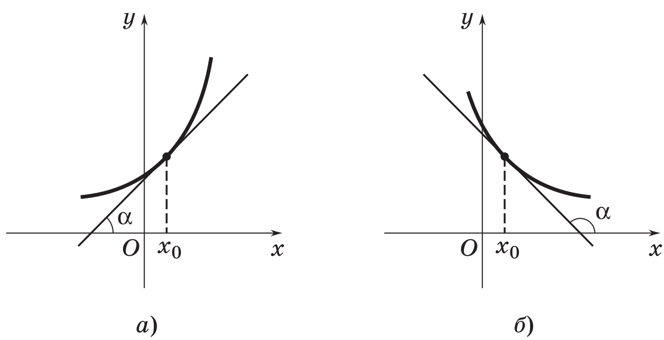


Рис. 181

Пример. Найти промежутки монотонности функции:

$$\text{а) } f(x) = 5x^2 - 3x + 1; \quad \text{б) } f(x) = \frac{2}{x}.$$

Р е ш е н и е. а) Данная функция определена на всей числовой прямой. Находим производную: $f'(x) = 10x - 3$. Так как $f'(x) < 0$ при $x < 0{,}3$ и $f'(x) > 0$ при $x > 0{,}3$, то в промежутке $(-\infty;\ 0{,}3]$ функция убывает, а в промежутке $[0{,}3;\ +\infty)$ — возрастает (точка $x = 0{,}3$ включается в промежутки монотонности, поскольку в этой точке функция определена и непрерывна; см. п. 4°).

б) Область определения функции — вся числовая прямая за исключением точки $x = 0$. Находим $f'(x) = -\dfrac{2}{x^2}$. Очевидно, что $f'(x) < 0$ при всех $x \neq 0$, т. е. данная функция убывает в промежутках $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$.

4. Критические точки функции, ее максимумы и минимумы

1°. Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует, называют ***критическими***.

2°. Точку x_0 из области определения функции f называют ***точкой минимума*** этой функции, если найдется такая δ-окрестность $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

3°. Точку x_0 из области определения функции f называют ***точкой максимума*** этой функции, если найдется такая δ-окрестность $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

4°. Точки минимума и максимума называют ***точками экстремума*** данной функции, а значения функции в этих точках — соответственно ***минимумом*** и ***максимумом*** функции (или ***экстремумом*** функции).

5°. Функция $y = f(x)$, график которой изображен на рис. 182, в точках x_1 и x_3 имеет минимумы ($y_{\min}$), а в точках x_2 и x_4 — максимумы ($y_{\max}$). Заметим, что точки a и b не считаются точками экстремума функции f, так как у каждой из этих точек нет окрестности, целиком входящей в область определения функции.

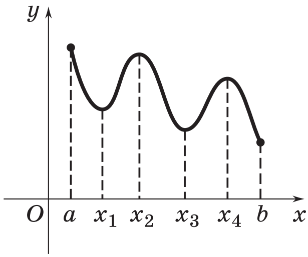


Рис. 182

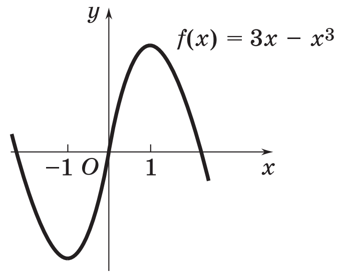


Рис. 183

6°. <u>Необходимое условие существования экстремума функции.</u> ТЕОРЕМА ФЕРМА. *Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$ и в этой точке существует производная, то она равна нулю, т. е.* $f'(x_0) = 0$.

Например, в точках $x = -1$ и $x = 1$ функция $f(x) = 3x - x^3$ имеет экстремумы (рис. 183) и, следовательно, по теореме Ферма производная в этих точках равна нулю: $f'(x) = 3 - 3x^2$; $f'(1) = f'(-1) = 0$.

7°. Отметим, что теорема Ферма выражает лишь необходимое условие существования экстремума: из того, что производная обращается в нуль или не существует в данной точке x_0, не обязательно следует, что x_0 — точка экстремума.

Так, производная функции $f(x) = x^3$ (рис. 184) в точке $x = 0$ равна нулю: $f'(x) = 3x^2$; $f'(0) = 0$. Однако в этой точке функция не имеет экстремума.

Производная функции $f(x) = 2x + |x|$ (рис. 185) в точке $x = 0$ не существует. В этой точке функция не имеет экстремума.

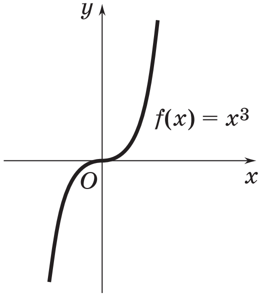


Рис. 184

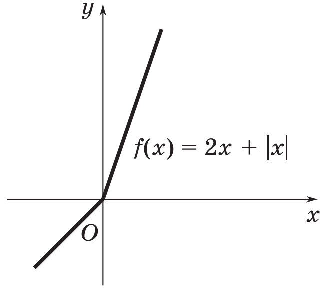


Рис. 185

8°. Достаточные условия существования экстремума. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 *и имеет производную* $f'(x)$ *в некоторой окрестности этой точки. Тогда*:

если $f'(x) < 0$ *на интервале* $(a;\ x_0)$ *и* $f'(x_0) > 0$ *на интервале* $(x_0;\ b)$ (т. е. производная меняет знак с минуса на плюс), *то* x_0 — *точка минимума функции* $f(x)$;

если $f'(x) > 0$ *на интервале* $(a;\ x_0)$ *и* $f'(x_0) < 0$ *на интервале* $(x_0;\ b)$ (т. е. производная меняет знак с плюса на минус), *то* x_0 — *точка максимума функции* $f(x)$.

Пример. Дана функция $y = 4x^2 - 6x$. Найти ее критические точки, промежутки монотонности, точки экстремума.

Р е ш е н и е. Имеем $y' = 8x - 6$; $8x - 6 = 0$; $x = \frac{3}{4}$ — критическая точка. Так как $y' < 0$ на $\left(-\infty;\ \frac{3}{4}\right)$ и $y' > 0$ на $\left(\frac{3}{4};\ +\infty\right)$, то в промежутке $\left(-\infty;\ \frac{3}{4}\right]$ функция убывает, а в промежутке $\left[\frac{3}{4};\ +\infty\right)$ — возрастает. В точке $x = \frac{3}{4}$ функция непрерывна, а производная в этой точке меняет знак с минуса на плюс. Таким образом, $x = \frac{3}{4}$ — точка минимума. Находим значение функции при $x = \frac{3}{4}$: $y_{\min} = 4 \cdot \frac{9}{16} - 6 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{9}{4}$.

5. Общая схема исследования функции

Общее исследование функции и построение ее графика рекомендуется выполнять по следующей схеме.

1. Найти область определения функции.
2. Проверить, не является ли функция четной или нечетной; проверить также, не является ли она периодической.
3. Найти, если это возможно, точки пересечения графика функции с осями координат. Иногда для уточнения построения графика следует найти две-три дополнительные точки.
4. Найти производную функции и ее критические точки.
5. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции.

6. Построить график функции, используя полученные результаты исследования.

Примеры. 1. Исследовать функцию $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$ и построить ее график.

Р е ш е н и е. 1. Здесь $D(f) = \boldsymbol{R}$.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

3. Найдем точки пересечения графика с осью Ox (т. е. корни функции):

$$\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2(3x^2 - 4x - 12) = 0 \Leftrightarrow x_{1,\,2} = 0,\ x_3 \approx -1{,}4,\ x_4 \approx 2{,}8.$$

Возьмем также две дополнительные точки: например, $f(1) = -\frac{13}{12}$, $f(3) = \frac{9}{4}$.

4. Находим производную:

$$f'(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = (x + 1)x(x - 2).$$

Приравняв производную нулю, получим критические точки: $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$.

5. Найденные критические точки разбивают числовую прямую на четыре промежутка: $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 2)$ и $(2; +\infty)$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	—	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\searrow$ убыв.	$-\frac{5}{12}$ min	$\nearrow$ возр.	0 max	$\searrow$ убыв.	$-\frac{8}{3}$ min	$\nearrow$ возр.

В первой строке таблицы в порядке возрастания расположены критические точки функции и ограниченные ими промежутки; во второй — отмечены знаки производной в этих промежутках. В третьей строке сделаны выводы об изменении функции и характере ее критических точек, а также вычислены значения функции в точках экстремума.

6. Используя результаты исследования, строим график функции (рис. 186).

2. Исследовать функцию $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ и построить ее график.

Р е ш е н и е. 1. Функция определена при всех значениях x, кроме $x = -2$ и $x = 2$, т. е. $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$. Отметим, что $y \to 0$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$; кроме того, $y \to \pm\infty$ при $x \to 2$ и $x \to -2$.

2. Функция является нечетной, так как $f(-x) = -f(x)$. Следовательно, ее график симметричен относительно начала координат и достаточно исследовать функцию лишь на промежутке $[0; +\infty)$.

3. Если $x = 0$, то $y = 0$, т. е. точка (0; 0) принадлежит графику функции. Возьмем также две дополнительные точки: например, $f(1) = -\dfrac{1}{3}$, $f(3) = 0{,}6$.

4. Находим производную:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4 - x \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = -\frac{x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2}.$$

5. Очевидно, что $f'(x) < 0$ при всех значениях $x \in D(f)$. Следовательно, функция убывает на промежутках $(-\infty; -2)$, $(-2; 2)$ и $(2; +\infty)$. Экстремумов функция не имеет.

6. На основании полученных сведений строим график функции (рис. 187).

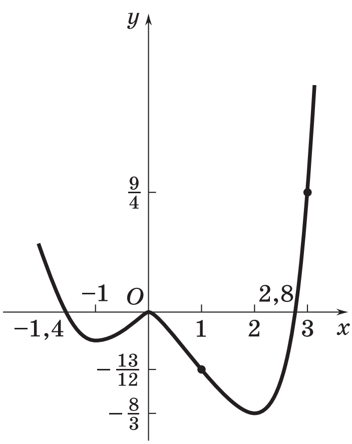


Рис. 186

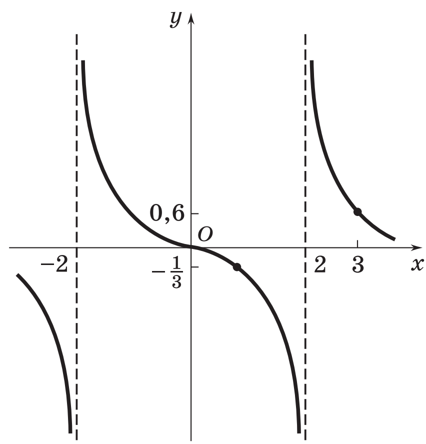


Рис. 187

6. Задачи на отыскание наименьшего и наибольшего значений функции

1°. На рис. 188 изображен график некоторой функции f, определенной на отрезке $[a; b]$. В точке x_2 функция имеет максимум, а в точках x_1 и x_3 — минимумы. Своего наименьшего значения, как это видно из рисунка, функция достигает в точке x_3 — точке наименьшего из минимумов. Наибольшее значение функция принимает на конце отрезка в точке b, в которой функция не имеет экстремума (так как справа от точки b функция не определена).

2°. Для отыскания наименьшего и наибольшего значений функции, дифференцируемой в данном промежутке, следует найти все критические точки функции, лежащие внутри промежутка, вычислить значения функции в этих точках и на концах промежутка, а затем из всех полученных таким образом чисел выбрать наименьшее и наибольшее.

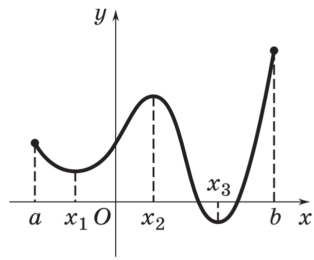


Рис. 188

Примеры. 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4$ в промежутке: а) $[-2; -0{,}5]$; б) $[1; 3)$.

Р е ш е н и е. Находим критические точки функции. Так как $y'(x) = -6x^2 - 6x = -6x(x + 1)$, то имеются две критические точки: $x = 0$ и $x = -1$.

а) В промежутке $[-2; -0{,}5]$ лежит одна из критических точек: $x = -1$. Так как $y(-2) = 8$, $y(-1) = 3$, $y(-0{,}5) = 3{,}5$, то наименьшее значение функции $y(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4$ достигается в точке $x = -1$ и равно 3, а наибольшее — в точке $x = -2$ и равно 8. Кратко это можно записать так:

$$\min_{[-2;\,-0,5]} y(x) = y(-1) = 3, \quad \max_{[-2;\,-0,5]} y(x) = y(-2) = 8.$$

б) В промежутке $[1; 3)$ данная функция убывает. Поэтому $\max\limits_{[1;\,3]} y(x) = y(1) = -1$. Наименьшего значения в промежутке $[1; 3)$ функция не достигает, так как точка $x = 3$ не принадлежит этому промежутку.

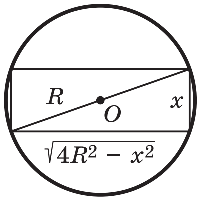


Рис. 189

2. Вписать в круг радиуса R прямоугольник наибольшей площади.

Р е ш е н и е. Обозначим длину одной из сторон прямоугольника через x (рис. 189); тогда длина другой стороны равна $\sqrt{4R^2 - x^2}$. Заметим, что $0 \leqslant x \leqslant 2R$, так как $4R^2 - x^2 \geqslant 0$. Значит, площадь прямоугольника выразится равенством $S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$.

Найдем наибольшее значение функции $S(x)$ на отрезке $[0; 2R]$. Имеем $S'(x) = 0$, т. е.

$$\sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = 0; \quad 4R^2 - 2x^2 = 0,$$

откуда $x = R\sqrt{2}$ (значение $x = -R\sqrt{2}$, очевидно, не удовлетворяет условию.) Следовательно, надо сравнить значения функции при $x = R\sqrt{2}$ (в точке экстремума), $x = 0$ и $x = 2R$ (на концах отрезка). Так как $S(0) = S(2R) = 0$, а $S(R\sqrt{2}) = 2R^2$, то функция принимает наибольшее значение при $x = R\sqrt{2}$. Тогда длина другой стороны прямоугольника равна $\sqrt{4R^2 - x^2} = R\sqrt{2}$, т. е. искомым прямоугольником служит квадрат.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение касательной к кривой в данной точке.

2. Что такое угловой коэффициент касательной?

3. В чем заключается геометрический смысл производной?

4. Напишите уравнение касательной к кривой в данной точке.

5. В чем заключается физический смысл производной?

6. В чем состоит физический смысл второй производной?

7. Верно ли, что: а) если $f'(x_0) > 0$, то функция f возрастает в некоторой окрестности точки x_0; б) если $f'(x_0) < 0$, то функция f убывает в некоторой окрестности точки x_0? Поясните это графически.

8. Сформулируйте теорему, выражающую достаточное условие возрастания (убывания) функции на интервале.

9. Какие точки называют критическими?

10. Дайте определение точки минимума и точки максимума функции.

11. В чем различие понятий «точка экстремума функции» и «экстремум функции»?

12. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума функции (теорему Ферма).

13. Можно ли утверждать, что если производная в данной точке равна нулю (или не существует), то такая точка является точкой максимума или минимума? Приведите пример.

14. Сформулируйте достаточное условие существования экстремума функции.

15. Почему одним из достаточных условий существования экстремума функции является непрерывность функции в данной точке?

16. Как следует понимать наибольшее и наименьшее значения функции?

17. Можно ли утверждать, что если в какой-либо точке, взятой из области определения, функция имеет максимум, то значение функции в этой точке является наибольшим на всем промежутке, где функция определена?

18. Как найти наименьшее и наибольшее значения функции, дифференцируемой на данном промежутке?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Через данную точку A проведена касательная к указанной кривой $y = f(x)$. Найдите координаты точки касания, если:

а) $A(9;\ 2)$, $y = \sqrt{17 - x^2}$;

б) $A(-5;\ 1)$, $y = -\sqrt{13 - x^2}$;

в) $A(7;\ 1)$, $y = \sqrt{10 - x^2}$.

2. К графику данной функции $f(x)$ проведена касательная в точке с указанной абсциссой x_0. Найдите расстояние от начала координат до этой касательной, если:

а) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{11}{9}x + \frac{58}{3}$, $x_0 = 3$;

б) $f(x) = x^4 + x^3 - \frac{4}{3}x + 8$, $x_0 = 0$;

в) $f(x) = x^3 - 6x^2 + \frac{32}{3}x$, $x_0 = 2$.

3. Установите, при каком значении k данная прямая является касательной к указанной параболе, если прямая и парабола заданы соответственно уравнением:

а) $y = kx + 5, \quad y = x^2 - 4x - k$;

б) $y = kx - 3, \quad y = k - 2x - x^2$;

в) $y = kx + 7, \quad y = x^2 + 6x + k$.

4. Составьте уравнение касательной к кривой $y = \dfrac{3x^2+2}{x-1}$ в точке ее пересечения с осью ординат.

5. Составьте уравнение такой касательной к заданной кривой $y = y(x)$, которая проходит через указанную точку, если:

а) $y = \dfrac{1-x}{x}$, $A(1; -1)$;

б) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2}$, $B(-0{,}75; 1)$;

в) $y = \dfrac{x-1-x^2}{x}$, $C(0; -3)$.

В ответе укажите сумму координат точки касания.

6. Найдите значение k, при котором касательная к указанной кривой y в точке с заданной абсциссой x_0 является одновременно и касательной к заданной параболе $\varphi(x)$, если:

а) $y = 3x^2 + 5x + 4$, $\varphi(x) = 5x^2 - 7x + k$, $x_0 = 0$;

б) $y = x^2 - 3x + 2$, $\varphi(x) = 2x^2 - 13x + k$, $x_0 = 2$;

в) $y = 3 + 2x - x^3$, $\varphi(x) = x^2 - 6x + k$, $x_0 = -2$.

7. Найдите ординату точки на кривой:

а) $y = x^3 - x^2 - 16x + 5$, если в этой точке касательная параллельна прямой $y + 11x - 4 = 0$, а абсцисса точки является целым числом;

б) $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5}{4}x^2 + 11$, если в этой точке касательная параллельна прямой $3x - 12y - 12 = 0$, а абсцисса точки положительна;

в) $y = 29x - 13x^2 - x^3$, если в этой точке касательная параллельна прямой $y + 35x = 4$, а абсцисса точки положительна.

8. Найдите площадь треугольника, образованного осями координат и касательной, проведенной к графику функции:

а) $y = x + \dfrac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = \dfrac{1}{3}$;

б) $y = \dfrac{2}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$;

в) $y = \dfrac{1}{x^2}$ в точке с абсциссой $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

9. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $y = 3x - 5$; б) $y = 2x^2 - 7x + 3$; в) $y = 2 - \frac{3}{x+1}$; г) $y = \frac{x^4+1}{x^4}$;

д) $y = 4 - (x + 2)^4$; е) $y = x^3 + 2$.

10. Найдите наибольшее значение функции:

а) $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ на отрезке $[-2; 2]$;

б) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ на отрезке $[0; 2{,}4]$;

в) $y = -x^3 - 3x^2$ на отрезке $[-1; 2]$;

г) $y = x - \frac{16}{\sqrt{4-x}} - 2$ на отрезке $[-12; 3]$;

д) $y = \frac{x^2-6x+13}{x-3}$ на отрезке $[0; 2]$.

11. Найдите наименьшее значение функции:

а) $y = x + \frac{4}{x+1}$ на отрезке $[-5; -2]$;

б) $y = x + \frac{8}{x^4}$ на отрезке $[1; 3]$;

в) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$ на отрезке $[0{,}5; 2]$.

12. Найдите модуль разности наименьшего и наибольшего значений функции:

а) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}$ на отрезке $[4; 25]$;

б) $y = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 9$ на отрезке $[-1; 2]$;

в) $y = 4\sqrt[3]{x} + x\sqrt[3]{x} + 3$ на отрезке $[-8; 0]$.

13. При каком значении a:

а) максимум функции $y = ax^2 + 2ax - a^2 + 1$ равен (-1);

б) минимум функции $y = 3a - 15x + 9x^2 - x^3$ равен 2;

в) минимум функции $y = ax^2 + 4ax + 7a^2 - 1$ равен 2?

14. Установите, при каких значениях a касательная к графику функции:

а) $y = 3x^3 - 4x^2 + a^2x + a$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$ проходит через точку $A(2; 1)$;

б) $y = -x^3a^2 + 2ax^2 + 4a$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$ проходит через точку $A(-1; 8)$;

в) $y = x^4 + a^2x^2 - ax - a$ в точке с абциссой $x_0 = -1$ проходит через точку $A(-2; 9)$.

15. Найдите значение функции:

а) $y = \dfrac{3x^2 - 10x + 11}{x^2 - 4x + 5}$ в точке минимума;

б) $y = \dfrac{x + 1}{x^2 + 2x + 2}$ в точке максимума;

в) $y = \dfrac{x + 5}{x^2 + 10x + 26}$ в точке максимума.

16. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции:

а) $y = \dfrac{-x^8 + x^4 - 3\sqrt{7}}{4}$ в его точке с абсциссой 1;

б) $y = \dfrac{-x^{20} + x^5 + 2\sqrt{3}}{5}$ в его точке с абсциссой 1;

в) $y = \dfrac{x^{16} + 28x^8}{16}$ в его точке с ординатой 0;

г) $y = \dfrac{x^{18} + 13x^8}{26}$ в его точке с ординатой 0;

д) $y = x^3 - x^2 - 7x + 6$ в его точке с абциссой 2.

17. Найдите значение производной данной функции в нуле этой функции, если:

а) $y = (3x^2 - x + 1)(x + 3)$; б) $y = (2x^2 - 4x + 3)(x + 2)$.

18. Найдите наименьшее значение функции:

а) $y = 3x + \dfrac{27}{x}$ на множестве решений системы неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{9}{x+3} \geqslant 1, \\ |x - 4| \leqslant 3; \end{cases}$$

б) $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$ на множестве решений системы неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{2}{5-x} \leqslant 1, \\ x^2 - 5 + 4 \leqslant 0. \end{cases}$$

19. Найдите наибольшее значение функции $y = -2x^2 - 12x + 20$ на множестве решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 5x - 6 \leqslant 0, \\ x^2 - 25 \leqslant 0. \end{cases}$$

20. В каких точках касательная к графику функции $y = \frac{2x - 15}{3 - x}$ образует с осью Ox угол $135°$? В ответе укажите наименьшее значение x.

21. Под каким углом к оси Ox наклонена касательная, проведенная к кривой $y = 2x^4 - 3x^3 - x + 2$ в точке ее пересечения с осью Oy? Ответ укажите в градусах.

22. В какой точке касательная к параболе $y = 4 - x^2$ перпендикулярна прямой $-2y + x + 2 = 0$?

23. Под каким углом ось Ox пересекает параболу $y = x + x^2$?

24. Найдите координаты точки, в которой касательная к параболе $y = x^2 - x - 12$ образует с осью Ox угол $45°$.

25. Под каким углом прямая $x = 2$ пересекается с параболой $y = x^2$?

26. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Найдите размеры окна, имеющего наибольшую площадь при заданном периметре P.

27. Объем правильной треугольной призмы равен V. Какова должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?

28. На параболе $y = x^2$ найдите точку, расстояние от которой до точки $A(2;\ 0{,}5)$ является наименьшим.

29. Найдите наибольшее значение объема:

а) правильной треугольной пирамиды, боковое ребро которой равно 6;

б) правильной четырехугольной пирамиды, апофема которой равна $3\sqrt{3}$;

в) правильной шестиугольной пирамиды, боковое ребро которой равно 3.

Задания для повторения

30. Время, за которое автобус проходил расстояние 325 км, при составлении нового расписания движения автобусов сокращено на 40 мин. Найдите скорость движения автобуса по новому расписанию, если она на 10 км/ч больше скорости, предусмотренной старым расписанием.

31. Два тракториста вспахали 18 га. При этом первый проработал 3 ч, а второй — 4 ч. Сколько гектаров вспахал второй тракторист, если каждый гектар он вспахивал на 10 мин быстрее, чем первый?

32. Решите систему:

а) $\begin{cases} 2\cos\dfrac{2\pi}{x} + 4\cos\dfrac{\pi}{x} - 1 = 0, \\ \dfrac{4}{1-x} \geqslant 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2\cos\dfrac{2\pi}{x} + 8\sin\dfrac{\pi}{x} + 3 = 0, \\ \dfrac{5}{x+2} \geqslant 3. \end{cases}$

33. Найдите все значения k, при которых оба корня квадратного уравнения:

а) $(2-k)x^2 - 3kx + 2k = 0$ действительны и больше $\dfrac{1}{2}$;

б) $x^2 - 6kx + (2 - 2k + 9k^2) = 0$ действительны и больше 3;

в) $x^2 + 4kx + (1 - 2k + 4k^2) = 0$ действительны и меньше (-1).

34. Найдите сумму целых корней уравнения:

а) $7|\cos x| = (2x^2 - 4x - 23)\cos x$;

б) $3|\mathrm{ctg}\, x| = (2x^2 - 12x + 13)\mathrm{ctg}\, x$.

35. Решите неравенство:

а) $\sqrt{x^2 - 2x - 8} \cdot \log_{0,5}(6 - x) \geqslant 0$;

б) $(x-2) \cdot \log_{1/3}(x+2) \geqslant 0$.

В ответе укажите сумму целых решений.

ОТВЕТЫ

1. а) (1; 4); б) (−3; −2); в) (1; 3). **2.** а) 12; б) 4,8; в) 4,8. **3.** а) −6; б) −4; в) 8. **4.** $y = -2x - 2$. **5.** а) 1,5; б) −3,5; в) −1. **6.** а) 11,2; б) 22,5; в) 17. **7.** а) 19; б) 38; в) −2. **8.** а) 2,25; б) 2,25; в) 4,5. **10.** а) 2; б) 5; в) 0; г) −10; д) −4. **11.** а) −6; б) 2,5; в) 1,5. **12.** а) 0,125; б) 31,25; в) 11. **13.** а) −2; б) 3; в) 1. **14.** а) −1 и $\dfrac{1}{2}$; б) −1 и 2; в) $-\dfrac{4}{3}$ и 1. **15.** а) 2; б) 0,5; в) 0,5. **16.** а) −1; б) −3; в) 0; г) 0; д) 1. **17.** а) 31; б) 19. **18.** а) 18; б) 2. **19.** 38. **20.** 0. **21.** 135°. **22.** (1; 3). **23.** 45° и 135°. **24.** (1; −12). **25.** $\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\, 4$. **26.** Прямоугольник с основанием $\dfrac{2P}{4+\pi}$ и боковой стороной $\dfrac{P}{4+\pi}$; радиус полукруга равен боковой стороне. **27.** $\sqrt[3]{4V}$. **28.** (1; 1). **29.** а) 36; б) 72; в) 9. **30.** 75 км/ч. **31.** 12 га. **32.** а) $\dfrac{3}{13}$; $\dfrac{3}{11}$; $\dfrac{3}{7}$; $\dfrac{3}{5}$; б) $-\dfrac{6}{17}$; $-\dfrac{6}{13}$; $-\dfrac{6}{5}$. **33.** а) $\dfrac{16}{17} \leqslant k < 2$; б) $\dfrac{11}{9} < k < +\infty$; в) $1 < k < +\infty$. **34.** а) 7; б) 3. **35.** а) 7; б) 3.

Решения и методические указания

К упражнению 1а

1. Запишем уравнение касательной в общем виде:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \quad (1)$$

2. В уравнении (1) нам известны $x = 9$, $y = 2$, а нужно найти x_0 и y_0.

3. Пусть x_0 — абсцисса точки касания; тогда $y_0 = \sqrt{17 - x_0^2}$.

4. Найдем производную данной функции:

$$f'(x) = \left(\sqrt{17 - x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{17 - x^2}}(17 - x^2)' = -\frac{x}{\sqrt{17 - x^2}},$$

т. е. $f'(x_0) = -\frac{x_0}{\sqrt{17 - x_0^2}}$.

5. Подставив x, y, x_0, y_0 и $f'(x_0)$ в равенство (1), получим

$$2 - \sqrt{17 - x_0^2} = -\frac{x_0}{\sqrt{17 - x_0^2}}(9 - x_0). \quad (2)$$

6. Решив уравнение (2), находим $x_0 = 1$, $y_0 = 4$.

К упражнению 2а

1. Запишем уравнение касательной в общем виде:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \quad (1)$$

2. В этом уравнении нам известно лишь, что $x_0 = 3$, а следует найти y_0 и $f'(x_0)$.

3. Полагая $x_0 = 3$, получим $y_0 = \frac{1}{3} - \frac{11 \cdot 3}{9} + \frac{58}{3} = 16$.

4. Найдем производную данной функции:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{11}{9}x + \frac{58}{3}\right)' = -\frac{1}{x^2} - \frac{11}{9},$$

откуда $f'(3) = -\frac{4}{3}$.

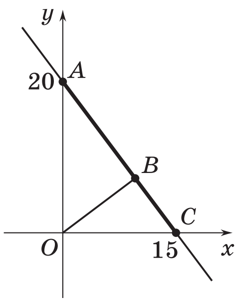


Рис. 190

5. Подставив найденные значения в равенство (1), получим уравнение касательной:

$$y - 16 = -\frac{4}{3}(x - 3), \text{ или } y = -\frac{4}{3}x + 20. \quad (2)$$

6. Построим эту касательную в системе координат xOy (рис. 190) и найдем искомое расстояние OB от начала координат до касательной:

а) $AC = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25;$

б) $S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 15 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot OB$, откуда $OB = 12$.

К упражнению 3а

1. Так как прямая $y = kx + 5$ является касательной к параболе $y = x^2 - 4x - k$, то они имеют общую точку касания. Поэтому можно записать равенство

$$kx + 5 = x^2 - 4x - k. \quad (1)$$

2. Далее найдем производные данных функций и приравняем их. Имеем $y' = (kx + 5)' = k$, $y' = (x^2 - 4x - k)' = 2x - 4$, откуда

$$k = 2x - 4. \quad (2)$$

3. Таким образом, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} kx + 5 = x^2 - 4x - k, \\ k = 2x - 4. \end{cases}$$

4. Исключив из этой системы k, имеем $x^2 + 2x + 1 = 0$, откуда $x = -1$.

5. Теперь получаем новую систему

$$\begin{cases} x = -1, \\ k = 2x - 4, \end{cases}$$

откуда находим $k = -6$.

К упражнению 5в

1. Заметим, что точка C не лежит на данной кривой.

2. Пусть x_0 — абсцисса точки касания; тогда ордината этой точки равна

$$y_0 = y(x_0) = \frac{x_0 - 1 - x_0^2}{x_0}. \quad (1)$$

3. Запишем данную функцию в виде $y = 1 - \frac{1}{x} - x$ и найдем ее производную:

$$y' = \left(1 - \frac{1}{x} - x\right)' = \frac{1}{x^2} - 1,$$

откуда $y'(x_0) = \frac{1}{x_0^2} - 1$.

4. Уравнение касательной в точке $(x_0; y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{или} \quad y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0),$$

т. е.

$$y = \frac{x_0 - 1 - x_0^2}{x_0} + \left(\frac{1}{x_0^2} - 1\right)(x - x_0). \tag{2}$$

5. Подставив в равенство (2) координаты точки C, через которую проходит касательная, получим

$$-3 = \frac{x_0 - 1 - x_0^2}{x_0} + \left(\frac{1}{x_0^2} - 1\right)(0 - x_0). \tag{3}$$

Из уравнения (3) находим $x_0 = \frac{1}{2}$.

6. Теперь подставим $x_0 = \frac{1}{2}$ в равенство (1) и получим $y_0 = -\frac{3}{2}$.

7. Наконец, найдем сумму координат точки касания: $x_0 + y_0 = -1$.

К упражнению 6а

1. Запишем уравнение касательной в общем виде:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{1}$$

2. Чтобы составить уравнение касательной к кривой $y = 3x^2 + 5x + 4$, нужно знать y_0 и $f'(x_0)$.

3. Находим $y_0 = y(x_0) = 4$, $f'(x) = (3x^2 + 5x + 4)' = 6x + 5$, откуда $f'(x_0) = 5$.

4. Подставив эти значения в равенство (1), имеем

$$y - 4 = 5(x - 0), \quad \text{или} \quad y = 5x + 4. \tag{2}$$

5. Прямая (2) является касательной к заданной параболе $\varphi(x) = 5x^2 - 7x + k$ только в том случае, когда прямая и парабола имеют лишь одну общую точку. Это означает, что уравнение

$$5x^2 - 7x + k = 5x + 4, \text{ или } 5x^2 - 12x + k - 4 = 0 \tag{3}$$

должно иметь единственное решение.

6. Отсюда следует, что дискриминант уравнения (3) должен быть равен нулю, т. е. $D = 144 - 20k + 80 = 0$, откуда $k = 11{,}2$.

К упражнению 7а

1. Известно, что условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов, т. е. $k_1 = k_2$.

2. Найдем угловой коэффициент данной прямой $y + 11x - 4 = 0$, или $y = -11x + 4$; он равен $k_1 = -11$.

3. Найдем производную функции $y = x^3 - x^2 - 16x + 5$:

$$y' = 3x^2 - 2x - 16 = k_2$$

(напомним, что угловой коэффициент касательной к графику функции равен значению производной этой функции в точке касания).

4. Таким образом, получаем уравнение

$$3x^2 - 2x - 16 = -11, \quad \text{откуда} \quad x_1 = -1,\ x_2 = \frac{5}{3}.$$

5. По условию абсцисса точки касания является целым числом, т. е. $x = -1$.

6. Значит, $y(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 16 \cdot (-1) + 5 = 19$.

К упражнению 8а

1. Найдем значения функции $y = x + \frac{1}{x}$ и ее производной $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{1}{3}$:

$$y_0 = y(x_0) = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3};\ f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = -8.$$

2. Таким образом, уравнение касательной к графику данной функции в точке с абсциссой $x_0 = \frac{1}{3}$ имеет вид

$$y - \frac{10}{3} = -8\left(x - \frac{1}{3}\right), \quad \text{или} \quad y = -8x + 6.$$

3. Построим эту прямую на координатной плоскости xOy (рис. 191).

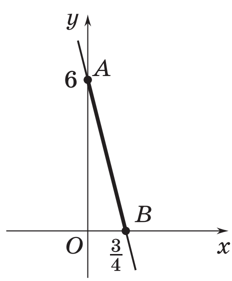


Рис. 191

4. Найдем площадь полученного треугольника AOB:

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4}.$$

К упражнению 9а

1. Область определения $D(y)$: $x \in \boldsymbol{R}$.

2. Множество значений $E(y)$: $y \in \boldsymbol{R}$.

3. Функция не является ни четной, ни нечетной, поскольку, например, $y(-1) \neq y(1)$ и $y(-1) \neq -y(1)$.

4. Функция непериодическая.

5. Нули (корни) функции: $y = 0$ при $x = \frac{5}{3}$.

6. Промежутки знакопостоянства:

а) $y > 0$ при $x > \frac{5}{3}$; б) $y < 0$ при $x < \frac{5}{3}$.

7. Так как $y' = 3 > 0$, то функция возрастает при всех x.

8. Экстремумов нет.

9. График функции изображен на рис. 192.

К упражнению 9б

1. Область определения $D(y)$: $x \in \boldsymbol{R}$.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Функция непериодическая.

4. Нули функции: $2x^2 - 7x + 3 = 0$; $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 3$.

5. Найдем вершину параболы: $x_0 = \frac{7}{4}$, $y_0 = -\frac{25}{8}$.

6. Множество значений $E(y)$: $y \in \left[-\frac{25}{8}; +\infty\right)$.

7. Построим график функции (рис. 193).

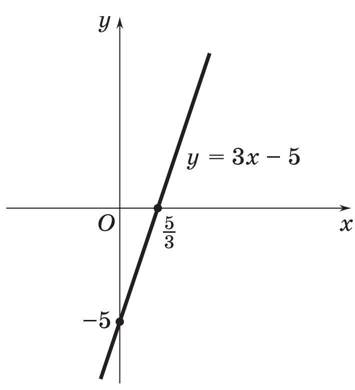


Рис. 192

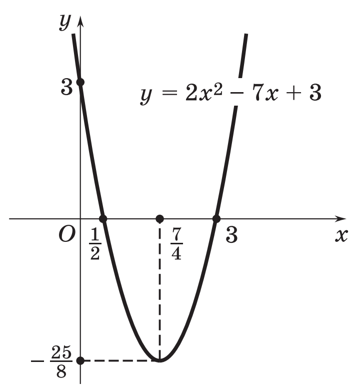


Рис. 193

8. Промежутки знакопостоянства:

а) $y > 0$ при $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (3; +\infty)$;

б) $y < 0$ при $x \in \left(\frac{1}{2}; 3\right)$.

9. Найдем производную:

$$y' = (2x^2 - 7x + 3)' = 4x - 7;$$

$x = \frac{7}{4}$ — точка минимума. Функция убывает на $\left(-\infty; \frac{7}{4}\right]$ и возрастает на $\left[\frac{7}{4}; +\infty\right)$.

К упражнению 9в

1. Область определения $D(y)$: $x \in \boldsymbol{R}$, $x \neq -1$.
2. Функция не является ни четной, ни нечетной.
3. Функция непериодическая.
4. Нули функции: $2 - \frac{3}{x+1} = 0$; $x = \frac{1}{2}$.
5. Построим график функции (рис. 194).
6. Множество значений $E(y)$: $y \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

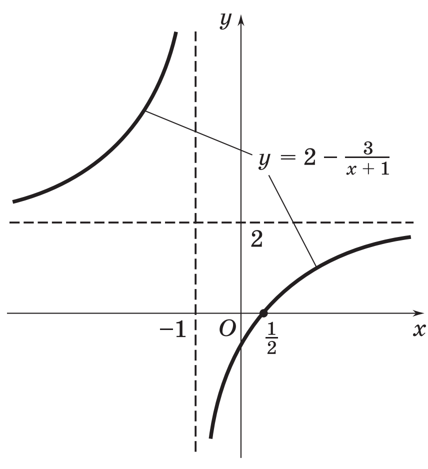


Рис. 194

7. Промежутки знакопостоянства:

а) $y > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$;

б) $y < 0$ при $x \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

8. Найдем производную: $y' = \frac{3}{(x+1)^2}$. Экстремумов нет; функция возрастает на $(-\infty; -1)$ и на $(-1; +\infty)$.

К упражнению 9г

1. Область определения $D(y)$: $x \in \boldsymbol{R}$, $x \neq 0$.
2. Множество значений $E(y)$: $y \in (1; +\infty)$.
3. Функция четная, так как $y(-x) = y(x)$.
4. Функция непериодическая.
5. Корней нет, так как $\frac{x^4+1}{x^4} \neq 0$.
6. Промежутки знакопостоянства: $y > 0$ при всех $x \in D(y)$.
7. Найдем производную:

$$y' = \left(1 + \frac{1}{x^4}\right)' = -\frac{4}{x^5}.$$

Экстремумов нет; функция возрастает на $(-\infty; 0)$ и убывает на $(0; +\infty)$.

8. График функции изображен на рис. 195.

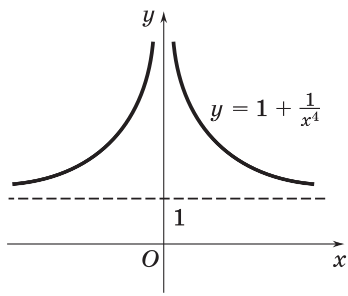


Рис. 195

К упражнению 10а

1. Найдем производную данной функции:

$$y' = \left(\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\right)' = \frac{2(x-1)(x^2+1) - (x-1)^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}.$$

2. Приравняв производную нулю, найдем критические точки функции:

$$\frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2} = 0, \text{ откуда } x_1 = -1,\ x_2 = 1.$$

Эти точки принадлежат заданному отрезку.

3. Вычислим значения функции в критических точках и на концах заданного отрезка: $y(-1) = 2$, $y(1) = 0$, $y(-2) = 1{,}8$, $y(2) = 0{,}2$.

4. Итак, $\max\limits_{x \in [-2;\, 2]} y(x) = y_{\text{наиб}} = y(-1) = 2$.

К упражнению 11в

1. Найдем $D(y)$: $x \in \boldsymbol{R}$, $x \neq 0$.

2. Найдем производную:

$$y' = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}\right)' = x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^3 - 1}{x^2}.$$

3. Приравняв производную нулю, получим $x = 1$ — критическую точку, которая принадлежит заданному отрезку $[0,5; 2]$.

4. Вычислим значения функции в критической точке и на концах отрезка: $y(1) = 1,5$, $y(0,5) = 2,125$, $y(2) = 2,5$.

5. Итак, $\min\limits_{x \in [-0,5;\, 2]} y(x) = y_{\text{наим}} = y(1) = 1,5$.

К упражнению 12а

1. Найдем $D(y)$: $x > 0$.

2. Запишем данную функцию в виде $y = x^{-1/2} - 2x^{-1}$ и найдем ее производную:

$$y' = (x^{-1/2} - 2x^{-1})' = -\frac{1}{2}x^{-3/2} + 2x^{-2} = \frac{1}{2}x^{-2}(-x^{1/2} + 4) = \frac{4 - \sqrt{x}}{2x^2}.$$

3. Критическую точку функции найдем из уравнения $\dfrac{4 - \sqrt{x}}{2x^2} = 0$, откуда $x = 16$.

4. Вычислим значения функции в критической точке и на концах заданного отрезка:

а) $y(16) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8} = 0,125$;

б) $y(4) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{4} = 0$;

в) $y(25) = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{25} = \dfrac{3}{25} = 0,12$.

5. Значит, $\max\limits_{x \in [4;\, 25]} y(x) = 0,125$, $\min\limits_{x \in [4;\, 25]} y(x) = 0$.

6. Остается найти модуль разности наименьшего и наибольшего значений функции: $|0 - 0,125| = 0,125$.

К упражнению 13а

1. Найдем $D(y)$: $x \in \boldsymbol{R}$.

2. Найдем производную и критические точки данной функции. Имеем

$$y' = (ax^2 + 2ax - a^2 + 1)' = 2ax + 2a;\ y' = 0 \text{ при } x = -1.$$

3. Следовательно, нужно определить такое a, чтобы значение функции в критической точке $x = -1$ было равно (-1). Так как $y(-1) = a(-1)^2 + 2a(-1) - a^2 + 1 = -a^2 - a + 1$, то получаем уравнение

$$-a^2 - a + 1 = -1, \text{ или } a^2 + a - 2 = 0,$$

откуда $a_1 = -2$, $a_2 = 1$.

4. Согласно условию, данная функция в точке $x = -1$ имеет максимум, поэтому коэффициент при x^2 должен быть отрицательным, откуда следует, что $a = -2$.

К упражнению 14а

1. Зная $x_0 = 1$, найдем ординату точки касания:

$$y_0 = 3 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 + a^2 \cdot 1 + a = a^2 + a - 1.$$

2. Находим производную данной функции:

$$y'(x) = (3x^3 - 4x^2 + a^2x + a)' = 9x^2 - 8x + a^2,$$

откуда $y'(1) = a^2 + 1$.

3. Запишем уравнение касательной в точке $(x_0; y_0)$ с учетом того, что эта касательная проходит через точку $A(2; 1)$. Имеем

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0),$$

или

$$1 = a^2 + a - 1 + (a^2 + 1)(2 - 1), \quad \text{т. е.} \quad 2a^2 + a - 1 = 0,$$

откуда $a_1 = -1$, $a_2 = \frac{1}{2}$.

К упражнению 15а

1. Найдем производную данной функции:

$$y' = \frac{(6x - 10)(x^2 - 4x + 5) - (2x - 4)(3x^2 - 10x + 11)}{(x^2 - 4x + 5)^2} = \frac{-x^2 + 4x - 3}{(x^2 - 4x + 5)^2}.$$

2. Приравняв производную нулю получим уравнение $-x^2 + 4x - 3 = 0$, имеющее корни $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Эти числа разбивают числовую прямую на три промежутка, в которых знаки y' изменяются так, как показано на рис. 196.

3. Таким образом, минимум функции достигается в точке с абсциссой $x = 1$. Итак, $y_{\min} = y(1) = 2$.

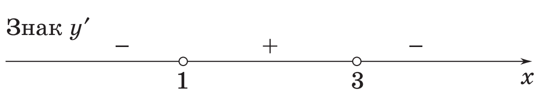


Рис. 196

К упражнению 16а

1. Сначала найдем производную данной функции:

$$y' = \left(\frac{-x^8 + x^4 - 3\sqrt{7}}{4}\right)' = -2x^7 + x^3.$$

2. Теперь определим угловой коэффициент касательной в точке с абсциссой $x = 1$:

$$y'(1) = -2 + 1 = -1.$$

К упражнению 16в

1. Нам известна ордината точки касания: $y = 0$. Чтобы найти абсциссу этой точки, решим уравнение

$$0 = \frac{x^{16} + 28x^8}{16}, \quad \text{или} \quad x^8(x^8 + 28) = 0, \text{ откуда } x = 0.$$

2. Находим производную данной функции:

$$y' = \left(\frac{x^{16} + 28x^8}{16}\right)' = \frac{16x^{15} + 224x^7}{16}.$$

3. Найдем угловой коэффициент касательной в точке с абсциссой $x = 0$; имеем $y'(0) = 0$.

К упражнению 17б

1. Найдем нули функции $y = (2x^2 - 4x + 3)(x + 2)$:
а) $2x^2 - 4x + 3 = 0$ — это уравнение не имеет корней, так как $D < 0$;
б) $x + 2 = 0$, откуда $x = -2$.
2. Найдем производную данной функции:

$$y' = (4x - 4)(x + 2) + (2x^2 - 4x + 3) \cdot 1 = 6x^2 - 5.$$

3. Теперь вычислим значение производной при $x = -2$:

$$y'(-2) = 6 \cdot (-2)^2 - 5 = 19.$$

К упражнению 18а

1. Сначала решим данную систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{9}{x+3} \geqslant 1, \\ |x - 4| \leqslant 3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{x-6}{x+3} \leqslant 0, \\ x \neq -3, \\ -3 \leqslant x - 4 \leqslant 3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{x-6}{x+3} \leqslant 0, \\ x \neq -3, \\ 1 \leqslant x \leqslant 7. \end{cases}$$

С помощью числовой прямой (рис. 197) находим, что $1 \leqslant x \leqslant 6$.

2. Итак, мы установили, что данная система неравенств имеет решение на отрезке [1; 6]. Теперь нужно определить наименьшее значение заданной функции на этом отрезке.

3. Находим производную:

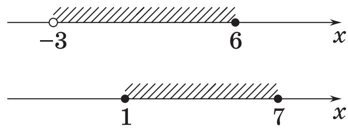


Рис. 197

$$y' = \left(3x + \frac{27}{x}\right)' = 3 - \frac{27}{x^2};$$

уравнение $y' = 0$ имеет корни $x_1 = -3$, $x_2 = 3$. Отрезку [1; 6] принадлежит только корень $x = 3$.

4. Вычислим следующие значения: $y(3) = 18$, $y(1) = 30$, $y(6) = 22{,}5$. Итак, получаем ответ: 18.

К упражнению 25

1. Углом между прямой и кривой называют угол между этой прямой и касательной к кривой в точке их пересечения (рис. 198).

2. Пусть φ — искомый угол; тогда $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$, где α — угол, образуемый касательной с осью Ox.

3. Найдем производную функции $y = x^2$; имеем $y' = 2x$.

4. Так как $\operatorname{tg} \alpha = y'(2) = 2 \cdot 2 = 4$, то $\alpha = \operatorname{arctg} 4$.

5. Итак, $\varphi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 4$.

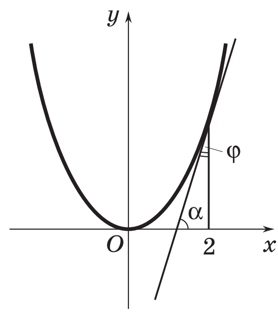


Рис. 198

К упражнению 26

1. Пусть R — радиус полукруга (рис. 199); тогда длина полуокружности равна πR, нижнее основание прямоугольника равно $2R$, а его боковая сторона равна $\frac{1}{2}(P - 2R - \pi R)$.

2. Площадь окна выразится функцией

$$S(R) = 2R \cdot \frac{1}{2}(P - 2R - \pi R) + \frac{1}{2}\pi R^2 =$$

$$= PR - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) R^2.$$

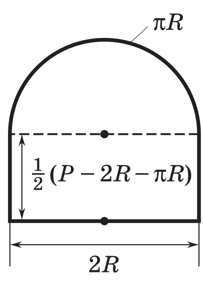


Рис. 199

3. Так как $S(R)$ — квадратичная функция, а коэффициент при R^2 отрицателен, то она имеет точку максимума.

4. Находим производную функции $S(R)$:

$$S'(R) = \left(PR - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) R^2\right)' = P - (4 + \pi)R;$$

$$S'(R) = 0 \quad \text{при} \quad R = \frac{P}{4 + \pi}.$$

5. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2}(P - (2 + \pi)R) = \frac{1}{2}\left(P - \frac{2 + \pi}{4 + \pi}P\right) = \frac{1}{2}P \cdot \frac{4 + \pi - 2 - \pi}{4 + \pi} = \frac{P}{4 + \pi} = R,$$

т. е. основание прямоугольной части окна должно быть вдвое больше его боковой стороны.

К упражнению 27

1. Пусть x — сторона основания призмы; тогда площадь основания призмы равна $S = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

2. Объем призмы равен $V = \frac{Hx^2\sqrt{3}}{4}$, где H — высота призмы. Значит, $H = \frac{4V}{x^2\sqrt{3}}$.

3. Полная поверхность призмы выразится так:

$$S(x) = 2 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + 3x \cdot \frac{4V}{x^2\sqrt{3}} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} + \frac{4V\sqrt{3}}{x}. \qquad (1)$$

4. Нам нужно определить наименьшее значение функции (1) на $(0; +\infty)$.

5. Найдем производную функции (1):

$$S'(x) = x\sqrt{3} - \frac{4V\sqrt{3}}{x^2}.$$

Имеем $S'(x) = 0$ при $x^3 = 4V$, т. е. $x = \sqrt[3]{4V}$ — критическая точка функции $S(x)$.

6. Так как $S(x)$ убывает на $(0; \sqrt[3]{4V})$ и возрастает на $(\sqrt[3]{4V}; +\infty)$, то при $x = \sqrt[3]{4V}$ функция $S(x)$ имеет минимум. Итак, искомая сторона основания призмы равна $\sqrt[3]{4V}$.

К упражнению 28

1. Расстояние между искомой точкой $B(x;\ x^2)$, лежащей на параболе (рис. 200), и данной точкой $A(2;\ 0{,}5)$ выразится формулой

$$r(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (x^2 - 0{,}5)^2}\,.$$

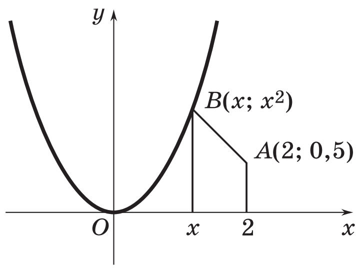


Рис. 200

2. Рассмотрим функцию $f(x) = r^2(x) = (x-2)^2 + (x^2 - 0{,}5)^2$; так как функция $r(x)$ положительна при всех x, то минимумы этих функций должны достигаться при одном и том же значении x.

3. Найдем производную функции $f(x)$:

$$f'(x) = 2(x-2) + 2(x^2 - 0{,}5)\cdot 2x = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1).$$

4. Имеем $f'(0) = 0$ при $x = 1$, причем если $x < 1$, то $f'(x) < 0$, а если $x > 1$, то $f'(x) > 0$. Отсюда следует, что $x = 1$ — точка минимума функции $f(x)$, а, значит, и функции $r(x)$.

Ответ: (1; 1).

К упражнению 29а

1. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ (рис. 201), у которой $SA = 6$.

2. Пусть $SO = x$ — высота пирамиды. Тогда $OA = \sqrt{36 - x^2}$, $AD = \frac{3}{2}\sqrt{36 - x^2}$, $AC = \frac{2}{\sqrt{3}}AD =$
$= \sqrt{3}\cdot\sqrt{36 - x^2}$.

3. Запишем функцию, выражающую объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}\cdot 3(36 - x^2)\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot x = \frac{\sqrt{3}}{4}(36x - x^3).$$

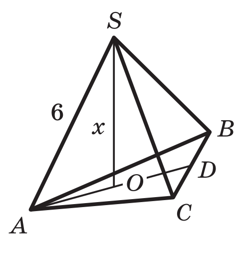


Рис. 201

4. Найдем производную этой функции:

$$V' = \frac{\sqrt{3}}{4}(36 - 3x^2);$$

из равенства $V' = 0$ следует, что $x = 2\sqrt{3}$. Легко убедиться в том, что это точка максимума функции V.

5. Остается вычислить наибольшее значение объема:

$$V_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4}(72\sqrt{3} - 24\sqrt{3}) = 36.$$

К упражнению 30

1. Пусть v (км/ч) — скорость автобуса при старом расписании; тогда $v + 10$ (км/ч) — его скорость при новом расписании.

2. Пусть t (ч) — время движения автобуса при старом расписании; тогда $t - \frac{2}{3}$ (ч) — время его движения при новом расписании.

3. Используя формулу $s = vt$, составим систему

$$\begin{cases} vt = 325, \\ (v+10)\left(t - \frac{2}{3}\right) = 325, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} v = \frac{325}{t}, \\ vt - \frac{2}{3}v + 10t - \frac{20}{3} = vt, \end{cases}$$

откуда получаем уравнение

$$3t^2 - 2t - 65 = 0.$$

Оно имеет корни $t_1 = 5$, $t_2 = -\frac{13}{3}$ (не подходит по смыслу задачи). Значит, $t = 5$ (ч).

4. Теперь находим $v = 325 : 5 = 65$ (км/ч), откуда $v + 10 = 75$ (км/ч).

К упражнению 32а

1. Требуется решить систему

$$\begin{cases} 2\cos\frac{2\pi}{x} + 4\cos\frac{\pi}{x} - 1 = 0, & (1) \\ \frac{4}{1-x} \geqslant 5. & (2) \end{cases}$$

2. Находим область определения системы:

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ 1 - x \neq 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad x \neq 0,\ x \neq 1.$$

3. Решим неравенство (2):

$$5 + \frac{4}{x-1} \leqslant 0, \text{ или } \frac{5x-1}{x-1} \leqslant 0, \text{ т. е. } x \in \left[\frac{1}{5}; 1\right).$$

4. Таким образом, решением системы являются корни уравнения (1), принадлежащие промежутку $\left[\frac{1}{5}; 1\right)$.

5. Теперь решим уравнение (1). Имеем

$$2\cos\frac{2\pi}{x} + 4\cos\frac{\pi}{x} - 1 = 0, \quad \text{или} \quad 4\cos^2\frac{\pi}{x} + 4\cos\frac{\pi}{x} - 3 = 0. \qquad (3)$$

Найдем корни уравнения (3):

а) $\cos\frac{\pi}{x} = -\frac{3}{2}$ (не подходит);

б) $\cos\frac{\pi}{x} = \frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{x} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{1}{x} = \pm\frac{1}{3} + 2k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{3}{6k \pm 1}$.

6. Из этих значений промежутку $\left[\frac{1}{5}; 1\right)$ принадлежат: $\frac{3}{7}$; $\frac{3}{13}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{3}{11}$.

К упражнению 33а

1. Так как оба корня квадратного уравнения должны быть больше заданного числа $x_0 = \frac{1}{2}$, то в силу известной теоремы (см. тему 9, п. 5, теорему 3) должны выполняться следующие условия (рис. 202, *а* и *б*):

$$\text{а)} \begin{cases} a > 0, \\ D \geqslant 0, \\ -\frac{b}{2a} > x_0, \\ f(x_0) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \text{б)} \begin{cases} a < 0, \\ D \geqslant 0, \\ -\frac{b}{2a} > x_0, \\ f(x_0) < 0. \end{cases}$$

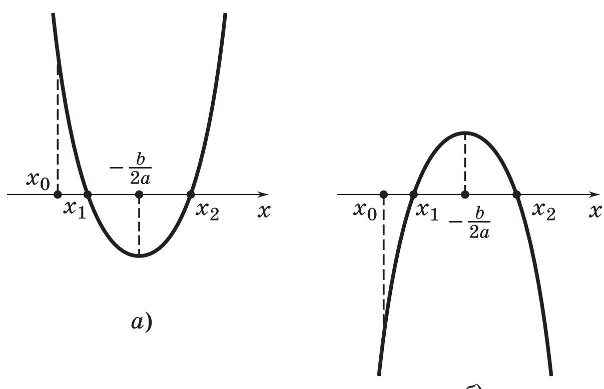


Рис. 202

2. Решим систему а):

$$\begin{cases} 2-k>0, \\ 9k^2-8k(2-k)\geqslant 0, \\ \dfrac{3k}{2(2-k)}>\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{4}(2-k)-\dfrac{3}{2}k+2k>0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} k<2, \\ k(17k-16)\geqslant 0, \\ \dfrac{2k-1}{2-k}>0, \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{k}{4}>0, \end{cases}$$

откуда $\dfrac{16}{17}\leqslant k<2$.

3. Решим систему б):

$$\begin{cases} 2-k<0, \\ 9k^2-8k(2-k)\geqslant 0, \\ \dfrac{3k}{2(2-k)}>\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{4}(2-k)-\dfrac{3}{2}k+2k<0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} k>2, \\ k(17k-16)\geqslant 0, \\ \dfrac{2k-1}{2-k}>0, \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{k}{4}<0. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений.

Ответ: $\dfrac{16}{17}\leqslant k<2$.

К упражнению 34а

1. Рассмотрим три случая: $\cos x=0$, $\cos x>0$, $\cos x<0$.

2. Если $\cos x=0$, то $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$; здесь при любых $k\in \boldsymbol{Z}$ мы не получим никаких целых корней.

3. Если $\cos x>0$, то $2x^2-4x-23-7=0$, или $x^2-2x-15=0$, откуда $x_1=-3$, $x_2=5$. Но $\cos(-3)<0$, а $\cos 5>0$, т. е. $x=5$ есть корень уравнения.

4. Если $\cos x<0$, то $2x^2-4x-23+7=0$, или $x^2-2x-8=0$, откуда $x_1=-2$, $x_2=4$. Так как $\cos(-2)<0$ и $\cos 4<0$, то $x=-2$ и $x=4$ являются корнями уравнения.

5. Найдем сумму целых корней: $5-2+4=7$.

К упражнению 35а

1. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-2x-8\geqslant 0, \\ \log_{0,5}(6-x)\geqslant 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2-2x-8\geqslant 0, \\ 6-x>0, \\ 6-x\leqslant 1. \end{cases}$$

2. Решив эту систему, находим $x\in\{-2\}\cup\{4\}\cup[5;\,6)$.

3. Сумма целых решений есть $-2+4+5=7$.

Тема 20

Непрерывность тригонометрических функций.
Первый замечательный предел.
Производные тригонометрических функций.
Производные логарифмической и показательной функций.
***Число* e**

Теоретические сведения

1. Непрерывность тригонометрических функций

1°. Функции синус и косинус непрерывны на всей числовой прямой, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$.

2°. Каждая из функций тангенс и котангенс непрерывна в своей области определения, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0$ для любого $x_0 \in D(\operatorname{tg})$, $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0$ для любого $x_0 \in D(\operatorname{ctg})$.

2. Первый замечательный предел

На практике часто используется предел отношения синуса дуги к самой дуге:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(x — в радианах). Это соотношение называют ***первым замечательным пределом***.

Примеры. 1. Найти предел:

$$\text{а) } \lim_{x \to \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x}; \quad \text{б) } \lim_{x \to 0} \frac{5x}{\sin 4x}.$$

Р е ш е н и е. а) Положим $\pi - x = y$; тогда $y \to 0$ при $x \to \pi$. Следовательно,

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

б) Имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{5x}{\sin 4x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\sin 4x}{5x}} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{5x}} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0} \frac{4 \sin 4x}{5 \cdot 4x}} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}.$$

2. Доказать, что функция

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

непрерывна для любого $x \in \boldsymbol{R}$.

Р е ш е н и е. При $x_0 \neq 0$ по теореме о пределе частного имеем

$$\lim_{x \to x_0} y(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} \sin x}{\lim\limits_{x \to x_0} x} = \frac{\sin x_0}{x_0} = y(x_0).$$

При $x_0 = 0$ получаем

$$\lim_{x \to 0} y(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = y(0).$$

Таким образом, для любого $x_0 \in \boldsymbol{R}$ имеем $\lim\limits_{x \to x_0} y(x) = y(x_0)$, а это и означает, что функция непрерывна.

3. Производные тригонометрических функций

1°. Производные тригонометрических функций находят по следующим формулам:

$$(\sin x)' = \cos x, \ (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \ (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Каждая из этих формул справедлива в любой точке области определения соответствующей функции.

2°. Формулы дифференцирования

При условии $u = x$	При условии $u = \varphi(x)$
$(\sin x)' = \cos x$ (1)	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ (1a)
$(\cos x)' = -\sin x$ (2)	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ (2a)
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ (3)	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$ (3a)
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ (4)	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$ (4a)

Примеры. 1. Найти производную функции:

а) $y(x) = 2x + 3{,}6 \sin^5 (\pi - x)$;

б) $y(x) = \frac{3\cos(2x+1)}{\sin(2x+1)} - \operatorname{tg}(1 - 4x)$.

Р е ш е н и е. а) Используя правила дифференцирования, имеем

$$y'(x) = (2x)' + (3{,}6 \sin^5 (\pi - x))' = 2 + (3{,}6 \sin^5 x)' =$$
$$= 2 + 3{,}6 \cdot 5 \sin^4 x \,(\sin x)' = 2 + 18 \sin^4 x \cos x.$$

б) Так как $y(x) = 3 \operatorname{ctg}(2x + 1) - \operatorname{tg}(1 - 4x)$, то

$$y'(x) = -\frac{3}{\sin^2(2x+1)} \cdot (2x+1)' - \frac{(1-4x)'}{\cos^2(1-4x)} =$$
$$= -\frac{6}{\sin^2(2x+1)} + \frac{4}{\cos^2(1-4x)}.$$

2. Составить уравнение касательной к графику функции $y(x) = \cos x$ в точке с абсциссой: а) $x = -\frac{\pi}{2}$; б) $x = 2\pi$.

Р е ш е н и е. а) Уравнение касательной к кривой $y = y(x)$ в точке $(x_0; y_0)$ имеет вид $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$. Подставив в это уравнение значения $y_0 = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, $y'(x_0) = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$, получим

$$y - 0 = 1 \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{или} \quad y = x + \frac{\pi}{2}.$$

б) Аналогично, подставляя в уравнение касательной соответствующие значения для точки $x_0 = 2\pi$, получим

$$y - 1 = 0 \cdot (x - 2\pi), \quad \text{т. е.} \quad y = 1.$$

4. Производные логарифмической и показательной функций. Число е

1°. Существует такое число, которое больше 2 и меньше 3 (это число обозначают буквой е), что показательная функция $y = \mathrm{e}^x$ в точке $x = 0$ имеет производную, равную 1.

2°. Приближенное значение числа е таково: $\mathrm{e} \approx 2{,}7$.

3°. Показательная функция e^x дифференцируема в каждой точке, причем $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

4°. ***Натуральным логарифмом*** (обозначение: ln) называют логарифм по основанию е:

$$\ln x = \log_{\mathrm{e}} x.$$

5°. При любом положительном a функция a^x дифференцируема в каждой точке x, причем

$$(a^x)' = (\mathrm{e}^{x \ln a})' = \mathrm{e}^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

6°. Производная логарифмической функции $y = \ln x$ выражается формулой

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

7°. Формулы дифференцирования

При условии $u = x$		При условии $u = \varphi(x)$	
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	(1)	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$	(1а)
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	(2)	$(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$	(2а)
$(a^x)' = a^x \ln a$	(3)	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$	(3а)
$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	(4)	$(\mathrm{e}^u)' = \mathrm{e}^u \cdot u'$	(4а)

Пример. Найти производную функции:

$$\text{а) } e^{2x-1}; \text{ б) } \ln\left(\frac{1}{2}x - 3\right); \text{ в) } 7^x; \text{ г) } \log_4 x; \text{ д) } 5^{-2x}.$$

Р е ш е н и е. а) $(e^{2x-1})' = e^{2x-1} \cdot (2x-1)' = 2e^{2x-1}$;

б) $\left(\ln\left(\frac{1}{2}x - 3\right)\right)' = \frac{1}{\frac{1}{2}x - 3} \cdot \left(\frac{1}{2}x - 3\right)' = \frac{1}{x-6}$;

в) $(7^x)' = 7^x \ln 7$;

г) $(\log_4 x)' = \frac{1}{x \ln 4}$;

д) $(5^{-2x})' = 5^{-2x} \cdot \ln 5 \cdot (-2x)' = -2 \cdot 5^{-2x} \cdot \ln 5$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Найдите:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x$;

в) $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{tg} x$; г) $\lim\limits_{x \to \pi/4} \operatorname{ctg} x$.

2. Что называют первым замечательным пределом?

3. Докажите, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

4. Найдите:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin 2x}$;

б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 6x}{x}$;

в) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x}{2x}$.

5. По каким формулам находят производные тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$?

6. Найдите производную функции:

а) $f(x) = \sin 2x$;

б) $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

в) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin 2x} - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

г) $f(x) = \operatorname{tg}(2x^2 - 1)$;

д) $f(x) = \operatorname{ctg}(2 - 3x^2)$;

е) $f(x) = \cos 2\pi \cos 3x + \sin 3x \sin 2\pi$;

ж) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}(x-1)}{(1 + \operatorname{tg} x)\operatorname{tg}(x-1)}$;

з) $f(x) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x+1)}{2 \operatorname{tg}(x+1)}$.

7. Найдите уравнение касательной к синусоиде $y = \sin x$ в точке с абсциссой:

а) $x = 0$; б) $x = \frac{\pi}{2}$; в) $x = \pi$.

8. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = \operatorname{tg} 2x$ в точке с абсциссой $x = -\frac{\pi}{8}$.

9. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \cos x + 1$ в точке $(\pi; 0)$.

10. Что называют числом e?

11. Что называют натуральным логарифмом?

12. По каким формулам находят производные показательных функций $y = \mathrm{e}^x$ и $y = a^x$?

13. По каким формулам находят производные логарифмических функций $y = \ln x$ и $y = \log_a x$?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите производную функции:

а) $y = \sin^2 x$; б) $y = \cos x^3$; в) $y = x^2 \sin^2 x^2$; г) $y = \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$;

д) $y = \mathrm{e}^{\sin^2 x}$; е) $y = \ln \sqrt{x^2 + 2x + 3}$; ж) $y = \ln \sqrt{\dfrac{1 + 2x}{1 - 2x}}$;

з) $y = \cos 2x \cdot \mathrm{e}^{2\cos^2 x}$; и) $y = 3^{\operatorname{tg} x}$; к) $y = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

2. Найдите абсциссы всех точек, в каждой из которых касательная к графику функции $y(x) = 12x - 9 \operatorname{tg} x + 1$ параллельна оси Ox.

3. Напишите уравнение касательной к графику функции $y(x) = 2x - 5\sin x + 1$ в его точке с абсциссой $x_0 = 0$.

4. Напишите уравнение касательной к графику функции $y(x) = \sqrt{2x + 1} - \cos^2 2x + \sin^2 2x - 6$ в его точке с абсциссой $x_0 = 0$.

5. Напишите уравнение прямой, которая касается графика функции $y(x) = 3\operatorname{ctg}\left(4x + \dfrac{\pi}{2}\right) + \sqrt[5]{x^9} + 5$ в точке его пересечения с осью Oy.

6. Напишите уравнения всех касательных к графику функции $y(x) = 3 - 6\operatorname{tg} x$, параллельных прямой $y = -6x - 5$.

7. Напишите уравнение той из касательных к графику функции $y(x) = 3\cos x - 4x$, параллельных прямой $y = -x - 2$, абсцисса точки касания которой наименее удалена от начала координат.

8. Для функции $y(x) = -2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ найдите точки, в которых угловой коэффициент касательной к графику этой функции равен значению функции.

9. Найдите абсциссы всех точек, в каждой из которых касательная к графику функции $y(x) = 8x - 6\operatorname{tg} x - 1$ параллельна оси Ox.

10. Напишите уравнение той из касательных к графику функции $y(x) = 2\cos x - 3x$, параллельных прямой $y = -x - 1$, абсцисса точки касания которой наименее удалена от начала координат.

11. Напишите уравнения всех касательных к графику функции $y(x) = 4\operatorname{tg} x + 1$, которые параллельны прямой $y - 4x - 5 = 0$.

12. Для функции $y(x) = -6\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ найдите точки, в которых угловой коэффициент касательной к графику этой функции равен значению функции.

13. Напишите уравнение касательной к графику функции:

а) $f(x) = e^{5-x}(3x - 14)^4$ в его точке с абсциссой $x_0 = 5$;

б) $f(x) = e^{2-x}(4x - 7)^4$ в его точке с абсциссой $x_0 = 2$.

14. Касательная к графику функции $f(x)$ перпендикулярна оси ординат. Найдите абсциссу точки касания, если:

а) $f(x) = 11^x \cdot \ln 29 - 29^x \cdot \ln 11$;

б) $f(x) = 19^x \cdot \ln 28 - 28^x \cdot \ln 19$.

15. Касательная к графику функции $f(x)$ параллельна заданной прямой y. Найдите ординату точки касания, если:

а) $f(x) = 14^x - 1$, $y = x\ln 14 - 20$;

б) $f(x) = 21^x + 11$, $y = x\ln 21 - 11$.

16. Прямая касается графика функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0. Найдите тангенс угла, образованного этой прямой с положительным направлением оси абсцисс, если:

а) $f(x) = (4x - 1)\ln(5x + 3)$, $x_0 = -\frac{2}{5}$;

б) $f(x) = (5x - 3)\ln(3x + 5)$, $x_0 = \frac{4}{3}$.

17. Касательная к графику функции $f(x)$ образует с положительным направлением оси абсцисс угол α. Найдите абсциссу точки касания, если:

а) $f(x) = 4x - 3 - \ln 2 \cdot \log_2(3x + 1)$, $\alpha = \operatorname{arctg} 3$;

б) $f(x) = 3x - 2 - \ln 4 \cdot \log_4(3x + 2)$, $\alpha = \operatorname{arctg} 2$.

18. В какой точке отрезка [3; 6] касательная к кривой $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ параллельна оси Ox? (Дайте ответ с точностью до 0,1.)

19. В какой точке отрезка [−4; 0] касательная к кривой $y = \sin x + \operatorname{tg} x + 3x$ параллельна прямой $y = 3x + 1$? (Дайте ответ с точностью до 0,1.)

20. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции:

а) $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\cos 2x$ на отрезке $[0; \pi]$;

б) $f(x) = \mathrm{tg}^2\, x - 2\mathrm{tg}\, x + 3$ на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$;

в) $f(x) = \cos^2 x + \sin x - 3$ на отрезке $[0; \pi]$.

21. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $f(x) = \sqrt{x}\ln x$; б) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$; в) $f(x) = 2^{x^2 - 4x}$; г) $f(x) = x - \ln x$.

Задания для повторения

22. При каких значениях k неравенство:

а) $4x^2 - 9kx + 2k^2 < 0$ выполняется для всех x таких, что $|x - 3| \leqslant 1$;

б) $3x^2 - 16kx + 5k^2 < 0$ выполняется для всех x таких, что $|x - 2| < 1$?

23. Решите неравенство:

а) $|x + 6| - |x + 2| \leqslant x + 3$; б) $|x - 2| - |x - 4| \geqslant x - 3$.

24. Найдите площадь фигуры, задаваемой на плоскости множеством решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 \leqslant 0, \\ |y - 1| \leqslant |x + 1| - 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 \leqslant 0, \\ |x - 1| \geqslant |y - 1| - 2. \end{cases}$

25. При каких значениях a имеет единственное решение уравнение:

а) $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{3^{2x - a} - 3^{a - x}} = 0$; б) $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{2^{x - 2} - 2^{2a - x}} = 0$;

в) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{4^{3x - a} - 4^{2a - x}} = 0$; г) $\dfrac{x^2 - 8x + 15}{2^{3x - a} - 2^{a + 2x}} = 0$?

ОТВЕТЫ

1. а) $\sin 2x$; б) $-3x^2\sin x^3$; в) $2x(\sin^2 x^2 + x^2\sin 2x^2)$; г) $-\cos x(1 + \mathrm{cosec}^2\, x)$; д) $e^{\sin^2 x}\sin 2x$; е) $\dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$; ж) $\dfrac{2}{1-4x^2}$; з) $-4\sin 2x\cos^2 x \times$

$\times\ e^{2\cos^2 x}$; и) $\frac{3^{\operatorname{tg} x}\ln 3}{\cos^2 x}$; к) $\frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$. **2.** $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. **3.** $y = -3x + 1$. **4.** $y = x - 6$. **5.** $y = -12x + 5$. **6.** $y = -6x + 3 + 6\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. **7.** $y = -x + \frac{3\pi}{2}$. **8.** $-\frac{\pi}{12} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. **9.** $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. **10.** $y = -x + \pi$. **11.** $y = 4x + 1 - 4\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **12.** $-\frac{5\pi}{12} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. **13.** а) $y = 11x - 54$; б) $y = 15x - 29$. **14.** а) 0; б) 0. **15.** а) 0; б) 12. **16.** а) -13; б) -29. **17.** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{3}$. **18.** 5,8. **19.** $-3{,}1$. **20.** а) $\frac{1}{4}$; б) 1; в) $\frac{1}{4}$. **22.** а) $k \in (2; 8)$; б) $k \in \left(\frac{3}{5}; 3\right)$. **23.** а) $[-7; -5] \cup [1; +\infty)$; б) $(-\infty; 1] \cup [3; 5]$. **24.** а) $\frac{\pi}{4}$ кв. ед.; б) 3π кв. ед. **25.** а) $a = \frac{9}{2}$, $a = 6$; б) $a = \frac{4}{3}$, $a = \frac{10}{3}$; в) $a = \frac{8}{3}$, $a = 4$; г) $a = \frac{3}{2}$, $a = \frac{5}{2}$.

Решения и методические указания

К упражнению 1а

1. Данная функция $y = \sin^2 x$ является сложной функцией.
2. Найдем ее производную:

$$y' = (\sin^2 x)' = 2\sin x\,(\sin x)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$$

(сначала взяли производную степенной функции, а затем — производную синуса).

К упражнению 1б

1. Функция $y = \cos x^3$ представляет собой сложную функцию.
2. Найдем ее производную:

$$y' = (\cos x^3)' = (\cos x^3)'(x^3)' = -\sin x^3 \cdot 3x^2 = -3x^2\sin x^3$$

(сначала взяли производную косинуса, а затем — степенной функции).

К упражнению 1в

1. Функция $y = x^2\sin^2 x^2$ представляет собой произведение двух функций, одна из которых есть сложная функция.

2. Дифференцируем данную функцию сначала как произведение, а затем как сложную функцию:

$$y' = (x^2\sin^2 x^2)' = (x^2)'\sin^2 x^2 + x^2(\sin^2 x^2)' =$$
$$= 2x\sin^2 x^2 + x^2 \cdot 2\sin x^2 \cos x^2 \cdot 2x = 2x(\sin^2 x^2 + x^2\sin 2x^2).$$

К упражнению 1г

Дифференцируя данную функцию сначала как частное, а затем как сложную функцию, находим

$$y' = \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos^2 x)'\sin x - \cos^2 x(\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{2\cos x(-\sin x)\sin x - \cos^2 x\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x(2\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\cos x(1 + \sin^2 x)}{\sin^2 x} = -\cos x(1 + \operatorname{cosec}^2 x).$$

К упражнению 1д

Сначала воспользуемся формулой дифференцирования показательной функции, а затем — сложной функции:

$$y' = (\mathrm{e}^{\sin^2 x})' = \mathrm{e}^{\sin^2 x}(\sin^2 x)' =$$

$$= \mathrm{e}^{\sin^2 x} \cdot 2\sin x\cos x = \mathrm{e}^{\sin^2 x}\sin 2x.$$

К упражнению 1е

1. Положим $\sqrt{x^2 + 2x + 3} = z$; тогда данная функция примет вид $y = \ln z$.

2. Теперь воспользуемся формулой дифференцирования логарифмической функции, а также — сложной функции:

$$y' = (\ln z)' = \frac{1}{z} \cdot z',$$

или

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2x + 3}}(x^2 + 2x + 3)' = \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 3}.$$

Замечание. Данную функцию можно записать так:

$$y = \ln\sqrt{x^2 + 2x + 3} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 3).$$

Тогда получим

$$y' = \left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 2x + 3\right)\right)' =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + 2x + 3}(x^2 + 2x + 3)' = \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 3}.$$

К упражнению 1ж

1. Запишем данную функцию в виде

$$y = \ln \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}} = \ln \left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{1+2x}{1-2x} = \frac{1}{2} [\ln (1+2x) - \ln (1-2x)].$$

2. Тогда получим

$$y' = \frac{1}{2} [\ln (1+2x) - \ln (1-2x)]' =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1+2x} + \frac{2}{1-2x}\right) = \frac{2}{1-4x^2}.$$

З а м е ч а н и е. Если требуется продифференцировать логарифмическую функцию, которая содержит выражение, подлежащее логарифмированию (произведение, частное, степень, корень), то полезно сначала выполнить логарифмирование (как это было сделано выше).

К упражнению 1з

Дифференцируя произведение и используя формулу для производной показательной функции, а также сложной функции, находим

$$y' = (\cos 2x \cdot e^{2\cos^2 x})' = (\cos 2x)' e^{2\cos^2 x} + \cos 2x (e^{2\cos^2 x})' =$$

$$= -2\sin 2x \cdot e^{2\cos^2 x} + \cos 2x \cdot e^{2\cos^2 x} \cdot 4\cos x\,(-\sin x) =$$

$$= -2\sin 2x \cdot e^{2\cos^2 x} - 2\sin 2x \cos 2x \cdot e^{2\cos^2 x} =$$

$$= -2\sin 2x \cdot e^{2\cos^2 x} (1 + \cos 2x) = -4\sin 2x \cos^2 x \cdot e^{2\cos^2 x}.$$

К упражнению 1и

Находим

$$y' = (3^{\operatorname{tg} x})' = 3^{\operatorname{tg} x} \cdot \ln 3 \cdot (\operatorname{tg} x)' = \frac{3^{\operatorname{tg} x} \ln 3}{\cos^2 x}.$$

К упражнению 1к

Имеем

$$y' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \frac{(e^x - e^{-x})'(e^x + e^{-x}) - (e^x + e^{-x})'(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

К упражнению 2

1. Найдем производную данной функции:

$$y'(x) = (12x - 9\mathrm{tg}\, x + 1)' = 12 - \frac{9}{\cos^2 x}.$$

2. Из уравнения $12 - \dfrac{9}{\cos^2 x} = 0$ находим

$$\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad (1)$$

3. Решив уравнение (1), получим

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2},\ x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}; \qquad (2)$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \qquad (3)$$

4. Серии корней (2) и (3) можно объединить в одну:

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

К упражнению 3

1. Запишем уравнение касательной в общем виде:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0). \qquad (1)$$

2. Находим:
а) $y_0 = y(x_0) = 2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 1 = 1$;
б) $y'(x) = (2x - 5\sin x + 1)' = 2 - 5\cos x$, т. е. $y'(0) = 2 - 5 = -3$.
3. Подставив найденные значения в уравнение (1), получим

$$y - 1 = -3(x - 0), \quad \text{или} \quad y = -3x + 1.$$

К упражнению 4

1. Запишем данную функцию в виде

$$y = \sqrt{2x + 1} - (\cos^2 2x - \sin^2 2x) - 6 = \sqrt{2x + 1} - \cos 4x - 6.$$

2. Находим:
а) $y_0 = y(x_0) = -6$;
б) $y'(x) = (\sqrt{2x + 1} - \cos 4x - 6)' = \dfrac{1}{\sqrt{2x + 1}} + 4\sin 4x$, откуда $y'(0) = 1$.
3. Теперь составим уравнение касательной:

$$y - (-6) = 1 \cdot (x - 0),\ \text{или}\ y + 6 = x,\ \text{т. е.}\ y = x - 6.$$

К упражнению 5

1. Найдем производную данной функции:

$$y'(x) = \left(3\mathrm{ctg}\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) + x^{9/5} + 5\right)' = -\frac{12}{\sin^2\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)} + \frac{9}{5}x^{4/5}.$$

При $x_0 = 0$ получим $y'(0) = -12$.

2. Найдем значение функции при $x_0 = 0$:

$$y(0) = 3\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{2} + 0 + 5 = 5.$$

3. Составим уравнение касательной к графику в точке (0; 5):

$$y - 5 = -12(x - 0), \quad \text{т. е.} \quad y = -12x + 5.$$

К упражнению 6

1. Находим производную данной функции:

$$y'(x) = (3 - 6\mathrm{tg}\,x)' = -\frac{6}{\cos^2 x}.$$

2. Угловой коэффициент прямой $y = -6x - 5$ равен (-6).

3. Пусть a — абсцисса точки касания; тогда $-\frac{6}{\cos^2 a} = -6$, откуда $\cos^2 a = 1$, или $\cos a = 1$, $\cos a = -1$, т. е. $a = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

4. Найдем значение данной функции в точках касания:

$$y_0 = y(\pi k) = 3 - 6\mathrm{tg}\,\pi k = 3.$$

5. Составим уравнения касательных:

$$y - 3 = -6(x - \pi k), \quad \text{или} \quad y = -6x + 3 + 6\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

К упражнению 7

1. Найдем производную данной функции:

$$y'(x) = (3\cos x - 4x)' = -3\sin x - 4.$$

2. Угловой коэффициент прямой $y = -x - 2$ есть (-1).

3. Обозначим через a абсциссу точек касания; тогда получим уравнение

$$-3\sin a - 4 = -1, \quad \text{откуда} \quad a = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

4. Среди множества найденных точек наименее удалена от начала координат точка $a = -\frac{\pi}{2}$ (при $k = 0$).

5. Имеем $y_0 = y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 4\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi.$

6. Составим уравнение касательной в точке $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$:

$$y - 2\pi = -\left(x - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right), \quad \text{или} \quad y = -x + \frac{3\pi}{2}.$$

К упражнению 8

1. Находим производную данной функции:

$$y'(x) = \left(-2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)' = -2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

2. По условию угловой коэффициент касательной в искомой точке равен значению функции в этой же точке:

$$-2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right). \qquad (1)$$

3. Решим уравнение (1):

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right); \ \mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1,$$

откуда $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. Итак, $x = -\frac{\pi}{12} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

К упражнению 13а

1. Находим значение функции при $x_0 = 5$: $f(5) = 1$.

2. Далее имеем

$$\begin{gathered} f'(x) = (e^{5-x}(3x-14)^4)' = (e^{5-x})'(3x-14)^4 + ((3x-14)^4)'e^{5-x} = \\ = -e^{5-x}(3x-14)^4 + 12(3x-14)^3e^{5-x} = \\ = e^{5-x}(3x-14)^3(12 - 3x + 14) = e^{5-x}(3x-14)^3(26-3x), \end{gathered}$$

откуда $f'(5) = 11$.

3. Составим уравнение касательной:

$$y - 1 = 11(x - 5), \quad \text{или} \quad y = 11x - 54.$$

К упражнению 14а

1. Найдем производную данной функции:

$$\begin{gathered} f'(x) = (11^x \cdot \ln 29 - 29^x \cdot \ln 11)' = \\ = 11^x \cdot \ln 11 \cdot \ln 29 - 29^x \cdot \ln 11 \cdot \ln 29 = \ln 11 \cdot \ln 29 \cdot (11^x - 29^x). \end{gathered}$$

2. По условию касательная перпендикулярна оси ординат, т. е. параллельна оси абсцисс. Таким образом, получаем уравнение

$$\ln 11 \cdot \ln 29 \cdot (11^x - 29^x) = 0, \quad \text{откуда} \quad x = 0.$$

К упражнению 15а

1. Имеем

$$f'(x) = (14^x - 1)' = 14^x \cdot \ln 14.$$

2. Угловой коэффициент прямой $y = x\ln 14 - 20$ равен $\ln 14$.

3. Так как касательная параллельна заданной прямой, то их угловые коэффициенты равны:

$$14^x \cdot \ln 14 = \ln 14, \quad \text{или} \quad 14^x = 1, \text{ т. е. } x = 0.$$

4. При $x = 0$ находим $f(0) = 0$.

К упражнению 16а

1. Сначала найдем производную данной функции:

$$f'(x) = ((4x - 1)\ln(5x + 3))' = 4\ln(5x + 3) + \frac{5(4x - 1)}{5x + 3}.$$

2. Теперь найдем угловой коэффициент касательной в точке с абсциссой $x_0 = -\frac{2}{5}$:

$$f'\left(-\frac{2}{5}\right) = 4\ln\left(5\left(-\frac{2}{5}\right) + 3\right) + \frac{5\left(4\left(-\frac{2}{5}\right) - 1\right)}{5\left(-\frac{2}{5}\right) + 3} = -13.$$

К упражнению 17а

1. Напомним формулу перехода от одного основания логарифма к другому:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

2. Используя эту формулу, преобразуем выражение $\ln 2 \cdot \log_2(3x + 1)$. Имеем:

а) $\log_2(3x + 1) = \dfrac{\ln(3x + 1)}{\ln 2}$;

б) $\ln 2 \cdot \log_2(3x + 1) = \ln 2 \cdot \dfrac{\ln(3x + 1)}{\ln 2} = \ln(3x + 1)$.

3. Тогда заданная функция примет вид

$$f(x) = 4x - 3 - \ln(3x + 1). \qquad (1)$$

4. Найдем производную функции (1):

$$f'(x) = (4x - 3 - \ln(3x + 1))' = 4 - \frac{3}{3x + 1}.$$

5. По условию угол, который образует касательная с положительным направлением оси абсцисс, есть $\alpha = \operatorname{arctg} 3$. Это означает, что $\operatorname{tg} \alpha = 3$, т. е. угловой коэффициент касательной равен 3.

6. Для отыскания абсциссы точки касания составим уравнение

$$4 - \frac{3}{3x + 1} = 3,$$

откуда находим $x = \frac{2}{3}$.

К упражнению 18

1. Найдем производную данной функции:

$$y' = (\sin x - \sqrt{3}\cos x)' = \cos x + \sqrt{3}\sin x.$$

2. Так как касательная параллельна оси Ox, то ее угловой коэффициент равен нулю, т. е. $y' = 0$.

3. Следовательно, получаем уравнение

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

откуда

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \qquad (1)$$

4. Из серии корней (1) отрезку [3; 6] принадлежит только один корень $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$ (при $k = 2$). Итак, $x = \frac{11\pi}{6} \approx \frac{11}{6} \cdot 3{,}14 \approx 5{,}8$.

К упражнению 20а

1. Найдем производную и приравняем ее нулю:

$$f'(x) = \left(\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)' = \cos x - \sin 2x;$$

$$\cos x - \sin 2x = 0; \quad \cos x(1 - 2\sin x) = 0. \qquad (1)$$

2. Решив уравнение (1), получим

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}; \tag{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}; \tag{3}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{4}$$

3. Из серий корней (2)—(4) заданному отрезку $[0; \pi]$ принадлежат три корня: $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \frac{5\pi}{6}$.

4 Вычислим значения функции в найденных точках и на концах данного отрезка:

$$f(0) = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}, \quad f(\pi) = \frac{1}{2}.$$

5. Итак, $f_{\text{наиб}} - f_{\text{наим}} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

К упражнению 21а

1. Область определения $D(f) : x > 0$, т. е. $x \in (0; +\infty)$.
2. Функция не является ни четной, ни нечетной.
3. Функция непериодическая.
4. Промежутки знакопостоянства: а) $y > 0$ при $x > 1$; б) $y < 0$ при $0 < x < 1$ (рис. 203).
5. Находим производную

$$f'(x) = (\sqrt{x}\ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x\ln x + 2x}{2x\sqrt{x}},$$

а затем — критические точки функции:

$$\frac{x(\ln x + 2)}{2x\sqrt{x}} = 0,\ x(\ln x + 2) = 0,\ x_1 \neq 0,\ \ln x = -2,\ x_2 = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

6. С помощью рис. 204 устанавливаем, что при $0 < x < \frac{1}{e^2}$ функция убывает, а при $x > \frac{1}{e^2}$ возрастает. При $x = \frac{1}{e^2}$ функция имеет минимум: $f_{\min} = f\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\frac{2}{e}$.

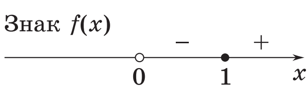


Рис. 203

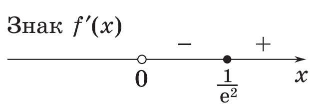


Рис. 204

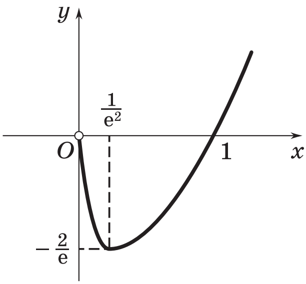


Рис. 205

7. График функции изображен на рис. 205.

8. Множество значений $E(f)$: $y \in$ $\in \left[-\frac{2}{e}; +\infty\right)$.

К упражнению 21б

1. Область определения $D(f)$: $x \in \boldsymbol{R}$, $x \neq 0$, т. е. $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Функция непериодическая.

4. Промежутки знакопостоянства: а) $y > 0$ при $x > 0$; б) $y < 0$ при $x < 0$ (рис. 206).

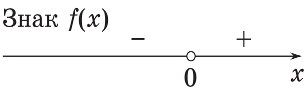


Рис. 206

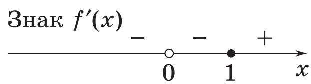


Рис. 207

5. Находим производную

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2},$$

а затем — критические точки функции:

$$\frac{e^x(x-1)}{x^2} = 0,\ x = 1.$$

6. С помощью рис. 207 устанавливаем, что при $x < 0$ и при $0 < x < 1$ функция убывает, а при $x > 1$ возрастает.

При $x = 1$ функция имеет минимум: $f_{\min} = f(1) = e$.

7. График функции изображен на рис. 208.

8. Множество значений $E(f)$: $(-\infty; 0) \cup$ $\cup$ $[e; +\infty)$.

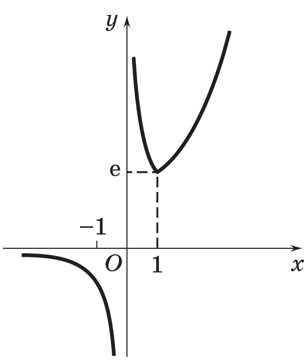


Рис. 208

К упражнениям 21в, г

См. соответственно рис. 209 и 210.

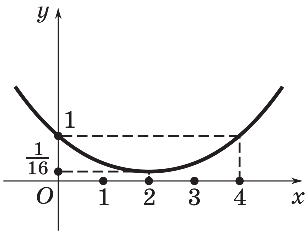


Рис. 209

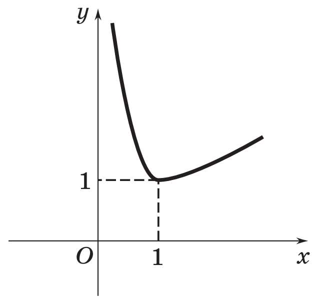


Рис. 210

К упражнению 22а

1. Решив неравенство $|x - 3| \leqslant 1$, или $-1 \leqslant x - 3 \leqslant 1$, получим $x \in [2; 4]$.

2. Рассмотрим функцию

$$y(x) = 4x^2 - 9kx + 2k^2. \qquad (1)$$

3. Для того чтобы функция (1) была отрицательной на отрезке [2; 4], нужно, чтобы выполнялась система неравенств (рис. 211)

$$\begin{cases} f(2) < 0, \\ f(4) < 0. \end{cases} \qquad (2)$$

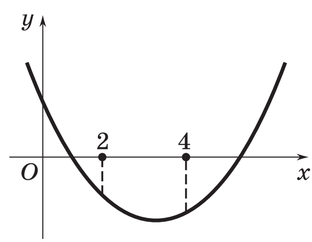


Рис. 211

4. Решим систему (2):

$$\begin{cases} 16 - 18k + 2k^2 < 0, \\ 64 - 36k + 2k^2 < 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 < k < 8, \\ 2 < k < 16, \end{cases}$$

откуда $2 < k < 8$.

К упражнению 24а

1. Преобразуем первое неравенство системы:

$$x^2 + 6x + 9 - 9 + y^2 - 2y + 1 - 1 + 9 \leqslant 0,$$

или

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 1. \qquad (1)$$

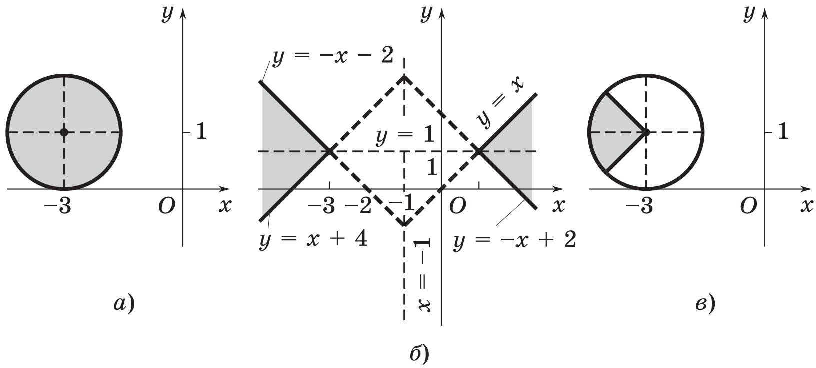


Рис. 212

2. Неравенство (1) задает на плоскости множество точек, лежащих внутри и на границе круга, имеющего радиус 1 и центр в точке (−3; 1) (рис. 212, *а*).

3. Рассмотрим второе неравенство системы для следующих четырех случаев:

а) если $x \geqslant -1$, $y \geqslant 1$, то неравенство примет вид $y \leqslant x$;

б) если $x \leqslant -1$, $y \geqslant 1$, то оно примет вид $y \leqslant -x - 2$;

в) если $x \geqslant -1$, $y \leqslant 1$, то оно примет вид $y \geqslant -x + 2$;

г) если $x \leqslant -1$, $y \leqslant 1$, то оно примет вид $y \geqslant x + 4$.

4. Пересечение множеств решений полученных неравенств определяет множество решений второго неравенства системы. Это множество на рис. 212, *б* заштриховано.

5. Наконец, пересечение множеств решений первого неравенства системы (рис. 212, *а*) и ее второго неравенства (рис. 212, *б*) определяет множество решений исходной системы. Этим множеством является фигура, заштрихованная на рис. 212, *в*.

6. Найдем площадь полученной фигуры:

$$S = \frac{1}{4}\pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{4} \text{ (кв. ед.)}.$$

К упражнению 25а

1. Данное уравнение равносильно системе условий

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 12 = 0, & (1) \\ 3^{2x - a} - 3^{a - x} \neq 0. & (2) \end{cases}$$

2. Находим корни уравнения (1): $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

3. Если существует такое a, что при $x = 4$ условие (2) не выполняется, т. е. имеет место равенство $3^{2x - a} - 3^{a - x} = 0$, то знаменатель данной дроби обращается в нуль. Последнее означает, что в точке $x = 4$ данная дробь не определена и, следовательно, $x = 4$ не может быть корнем исходного уравнения.

4. Таким образом, исходное уравнение имеет единственное решение $x = 3$, если корнем знаменателя данной дроби является $x = 4$. Тогда этот знаменатель при $x = 4$ должен обращаться в нуль, т. е.

$$3^{2 \cdot 4 - a} - 3^{a - 4} = 0,$$

откуда $a = 6$.

5. Рассуждая аналогично, заключаем, что исходное уравнение имеет единственное решение $x = 4$, если корнем знаменателя данной дроби является $x = 3$ (в этом случае дробь при $x = 3$ не определена). Значит, знаменатель при $x = 3$ должен обращаться в нуль, т. е.

$$3^{2 \cdot 3 - a} - 3^{a - 3},$$

откуда $a = \frac{9}{2}$.

Ответ: $a = 6$, $a = \frac{9}{2}$.

Т е м а 21

Первообразная. Основное свойство первообразной. Правила нахождения первообразных. Площадь криволинейной трапеции

Теоретические сведения

1. Первообразная

1°. Функцию F называют ***первообразной*** на заданном промежутке для функции f, если при всех x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Например, функция $F(x) = \frac{x^4}{4}$ есть первообразная для функции $f(x) = x^3$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$, так как $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3 = f(x)$ при всех $x \in (-\infty; +\infty)$.

2°. Нетрудно заметить, что $\frac{x^4}{4} + 6$ имеет ту же самую производную x^3; поэтому и функция $\frac{x^4}{4} + 6$ есть первообразная для x^3 на $\boldsymbol{R}$. Ясно, что вместо 6 можно взять любую постоянную C.

Таким образом, задача нахождения первообразной неоднозначна. Она имеет бесконечное множество решений.

Пример. Доказать, что функция $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ есть первообразная для функции $f(x) = \sqrt{x}$ на промежутке $[0; +\infty)$.

Р е ш е н и е. Так как $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} = \frac{2}{3}x^{3/2}$, то

$$F'(x) = \left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} = x^{1/2} = \sqrt{x} = f(x)$$

при всех $x \in [0; +\infty)$, что и требовалось доказать.

2. Основное свойство первообразной

1°. ТЕОРЕМА. *Если функция F есть первообразная для функции f на промежутке X, то при любой постоянной C функция*

$$F(x) + C \qquad (1)$$

также является первообразной для функции f на промежутке X. Любую первообразную для функции f на промежутке X можно записать в виде $F(x) + C$.

2°. Какую бы постоянную в формуле (1) ни подставить вместо C, получится первообразная для функции f. Выражение $F(x) + C$ называют общим видом первообразных для функции f.

3°. Какую бы первообразную для функции f ни взять, ее можно получить из формулы (1) при соответствующем подборе постоянной C.

4°. Геометрически основное свойство первообразных можно интерпретировать так: графики всех первообразных данной функции $f(x)$ получаются из любого из них параллельным переносом вдоль оси Oy (рис. 213).

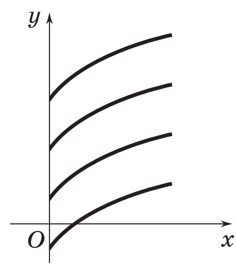


Рис. 213

Пример. Для функции $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\dfrac{\pi}{4}; 0\right)$.

Р е ш е н и е. Общим видом первообразных для f является функция $F(x) = \operatorname{tg} x + C$. Решив уравнение $0 = \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{4} + C$ относительно C, находим $C = -1$. Таким образом, $\operatorname{tg} x - 1$ есть искомая первообразная.

3. Правила нахождения первообразных

1°. Если F есть первообразная для f, а G — первообразная для g, то $F + G$ есть первообразная для $f + g$, т. е. $(F + G)' = f + g$.

2°. Если F есть первообразная для f, а k — постоянная, то kF есть первообразная для kf, т. е. $(kF)' = kf$.

3°. Если $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, а k и b — постоянные, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ есть первообразная для функции $f(kx+b)$, т. е. $\left(\frac{1}{k}F\Big(kx+b\Big)\right)' = f(kx+b)$.

Пример. Найти первообразные для функции:

$$\text{а) } f(x) = \frac{3}{\cos^2 5x}; \quad \text{б) } f(x) = 2\sin\frac{x}{5} + 3\cos 6x.$$

Р е ш е н и е. а) $F(x) = 3\cdot\frac{1}{5}\,\mathrm{tg}\,5x + C = \frac{3}{5}\,\mathrm{tg}\,5x + C$;

б) $F(x) = -2\cdot 5\cos\frac{x}{5} + 3\cdot\frac{1}{6}\sin 6x + C =$

$= -10\cos\frac{x}{5} + \frac{1}{2}\sin 6x + C.$

4. Площадь криволинейной трапеции

1°. ***Криволинейной трапецией*** называют фигуру, ограниченную графиком неотрицательной и непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции f, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$.

2°. ТЕОРЕМА. *Пусть f — непрерывная и неотрицательная на отрезке* $[a; b]$ *функция, а S — площадь соответствующей криволинейной трапеции* (рис. 214). *Тогда если F — первообразная для f на интервале, содержащем отрезок* $[a; b]$, *то*

$$S = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Примеры. 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$ и $y = 0$ (рис. 215).

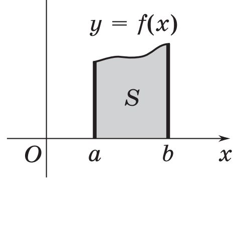


Рис. 214

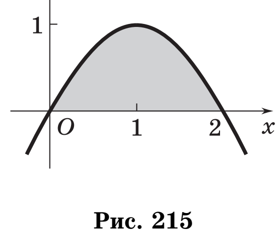


Рис. 215

Р е ш е н и е. Для функции $y = 2x - x^2$ первообразная есть $F(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^3$. Найдем точки пересечения кривой $2x - x^2$ с осью абсцисс: $2x - x^2 = 0$; $x = 0$, $x = 2$, т. е. (0; 0) и (2; 0). Значит, $a = 0$, $b = 2$.

Искомую площадь находим по формуле (1):

$$S = F(2) - F(0) =$$
$$= 4 - \frac{8}{3} - 0 + 0 = \frac{4}{3} \text{ (кв. ед.)}.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 2x$ (рис. 216).

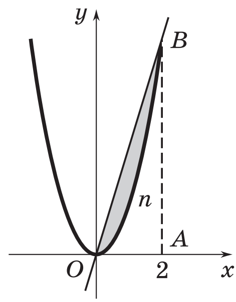


Рис. 216

Р е ш е н и е. Для функции $y = x^2$ первообразная $F(x) = \frac{x^3}{3}$, а для функции $y = 2x$ первообразная $P(x) = x^2$.

Найдем координаты точек пересечения заданных линий:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2x, \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) = 0, \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = 2, \\ y = 4. \end{cases}$$

Искомая площадь равна разности площадей треугольника OAB и криволинейной трапеции $OnBA$, т. е. $S = S_{\Delta OAB} - S_{OnBA}$. Так как $S_{\Delta OAB} = P(2) - P(0) = 4 - 0 = 4$ (кв. ед.), $S_{OnBA} = F(2) - F(0) = \frac{2^3}{3} - 0 = \frac{8}{3}$ (кв. ед.), то $S = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$ (кв. ед.).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение первообразной.

2. Первообразная определяется неоднозначно. Как вы это понимаете?

3. Что подразумевают под C в записи $F(x) + C$? Имеет ли C произвольное значение или конкретное?

4. Дайте геометрическое истолкование основного свойства первообразных.

5. Для функции f найдите первообразную, график которой проходит через заданную точку: а) $f(x) = x^3$, $M(2; 1)$; б) $f(x) = -2$, $M(3; 5)$; в) $f(x) = \sin x$, $M(0; 3)$; г) $f(x) = x^{-3}$, $M(-0{,}5; 3)$.

6. Какие правила нахождения первообразных вы знаете?

7. Найдите первообразные для функции:

а) $5x^2 - 1$;

б) $x^{-2} - 4\sin x$;

в) $\dfrac{5}{\sqrt{2x+7}}$.

8. Какую фигуру называют криволинейной трапецией?

9. Сформулируйте теорему о вычислении площади криволинейной трапеции.

10. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$;

б) $y = x^{-2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

в) $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$;

г) $y = (x + 2)^2$, $y = 0$, $x = 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите первообразные для функции:

а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = \sin 3x$; в) $f(x) = e^x + \sin x$;

г) $f(x) = x^2 + 3\cos x$; д) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} - e^{2x}$;

е) $f(x) = 5\sin x + 2\cos x$; ж) $f(x) = 3e^x - \sin x$;

з) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{x} - 2e^x$.

2. Известно, что для заданной функции $f(x)$ график ее первообразной проходит через указанную точку $M(x; y)$. Найдите эту первообразную, если:

а) $f(x) = \dfrac{5x+1}{4}$, $M(-3; -5)$; б) $f(x) = \dfrac{3x-4}{3}$, $M(-1; -4)$;

в) $f(x) = x^2(2x - 1)$, $M(1; 2)$; г) $f(x) = x^2(3x - 2)$, $M(-2; 2)$.

3. Для заданной функции $f(x)$ найдите такие ее первообразные, графики которых пересекают график функции $f(x)$ в точке с указанной ординатой y_0, если:

а) $f(x) = 3x^2 + 10x - 5$, $y_0 = 3$; б) $f(x) = 3x^2 + 2x - 2$, $y_0 = -1$.

4. Известно, что график первообразной заданной функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в точках, расстояние между которыми равно указанной величине d. Найдите точку, в которой график первообразной пересекает ось ординат, если:

а) $f(x) = 10x - 3$, $d = 1$; б) $f(x) = 6x + 5$, $d = 3$.

5. Известно наибольшее значение $F_{\text{наиб}}$ первообразной заданной функции $f(x)$ на указанном отрезке $[\alpha; \beta]$. Найдите наименьшее значение этой первообразной на том же отрезке, если:

а) $f(x) = x^2 - 10x + 32$, $[-5; 0]$, $F_{\text{наиб}} = 86$;

б) $f(x) = x^2 + 8x + 32$, $[-6; 0]$, $F_{\text{наиб}} = 85$.

6. Сравните значения первообразной $F(x)$ для функции:

а) $f(x) = \dfrac{2 - x}{\log_4(5x - 2)}$ в точках $x = \dfrac{21}{50}$ и $x = \dfrac{29}{50}$;

б) $f(x) = \dfrac{1 - x}{\log_4(7x - 5)}$ в точках $x = \dfrac{3}{4}$ и $x = \dfrac{7}{9}$.

7. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$; б) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$;

в) $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$; г) $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

д) $y = x^3 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;

е) $y = 1 + 2\sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$; ж) $y = 4 - x^2$, $y = 0$;

з) $y = 1 + \dfrac{1}{2}\cos x$, $y = 0$, $x = -\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.

8. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = \dfrac{1}{2}(x + 2)^2$, $y = 0$, $x = 0$;

б) $y = \dfrac{1}{(x+1)^2} + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;

в) $y = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$, $y = 0$, $x = -\dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{\pi}{4}$;

г) $y = \sin x - \dfrac{1}{2}$, $y = 0$, $x = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{5\pi}{6}$;

д) $y = 1 - \cos x$, $y = 0$, $x = -\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Задания для повторения

9. Имелось два раствора, из которых первый содержал 800 г безводной серной кислоты, а второй — 600 г такой же кислоты. Затем их соединили вместе и получили 10 кг нового раствора серной кислоты. Определите массу первого и второго растворов, вошедших в смесь, если известно, что в первом растворе безводной серной кислоты содержится на 10% больше, чем во втором.

10. Имелось два разных сплава меди. В первом сплаве содержалось меди на 40% меньше, чем во втором. Затем их соединили вместе и получили сплав, содержащий 36% меди. Определите процентное содержание меди в первом и втором сплавах, если известно, что в первом сплаве было 6 кг меди, а во втором — 12 кг.

11. На обработку одной детали первый рабочий затрачивает на 6 мин меньше, чем второй. Сколько деталей обрабатывает каждый из них за 7 ч, если первый обрабатывает за это время на 8 деталей больше?

12. Дорога от пункта A до пункта B, имеющая длину 11,5 км, идет сначала в гору, далее по равнине, а затем под гору. Пешеход, двигаясь из пункта A в пункт B, прошел весь путь за 2 ч 54 мин, а на обратную дорогу он затратил 3 ч 6 мин. Скорость ходьбы составила: в гору — 3 км/ч, по равнине — 4 км/ч, под гору — 5 км/ч. На каком протяжении дорога идет по равнине?

13. Решите систему:

а) $\begin{cases} 2\sin^2 x - 5|\sin 2x| + 8\cos^2 x = 0, \\ |\operatorname{tg} x| \leqslant 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6\sin^2 x - 3\sqrt{3}\,|\sin 2x| + 4\cos^2 x = 0, \\ |\operatorname{tg} x| \leqslant 1. \end{cases}$

В ответе укажите сумму решений в градусах на отрезке $[\pi; 3\pi]$.

14. Постройте график функции:

а) $y = 2^{\log_2 x}$; б) $y = 3^{\log_3 \sqrt{x}}$; в) $y = 5^{\log_5 (x-1)}$; г) $y = 5^{\log_5 (1-x)}$;

д) $y = 2^{\log_2 (x^2-1)}$; е) $y = 3^{\log_3 (1-x^2)}$.

15. Если две трубы открыть одновременно, то бассейн наполнится за 2 ч 24 мин. В действительности же сначала была открыта только первая труба в течение $\frac{1}{4}$ времени, которое необходимо второй трубе, чтобы наполнить бассейн, действуя отдельно. Затем была открыта вторая труба также в течение $\frac{1}{4}$ времени, которое необходимо первой, чтобы одной наполнить бассейн, после чего оказалось, что остается наполнить $\frac{11}{24}$ вместимости бассейна. Какое время необходимо для наполнения бассейна каждой трубой в отдельности?

16. Чан наполняется двумя кранами A и B. Наполнение чана только через кран A длится на 22 мин дольше, чем через кран B. Если же открыть оба крана, то чан наполнится за 1 ч. За какое время каждый кран в отдельности может наполнить чан?

17. Найдите разность наибольшего и наименьшего значений функции на заданном отрезке:

а) $y = |x^2 - 4x - 5| - |x - 4|$, $[-2; 6]$;

б) $y = |x^2 - 10x + 9| - |x - 4|$, $[0; 10]$.

18. Постройте график функции $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ и определите разность между ее наибольшим и наименьшим значениями.

ОТВЕТЫ

1. а) $\frac{x^4}{4} + C$; б) $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$; в) $e^x - \cos x + C$; г) $\frac{x^3}{3} + 3\sin x + C$; д) $-\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}e^{2x} + C$; е) $2\sin x - 5\cos x + C$; ж) $3e^x + \cos x + C$; з) $8\sqrt{x} + 3\ln|x| - 2e^x + C$. **2.** а) $\frac{5x^2}{8} + \frac{x}{4} - \frac{79}{8}$; б) $\frac{x^2}{2} - \frac{4x}{3} - \frac{35}{6}$; в) $\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{11}{6}$; г) $\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{46}{3}$. **3.** а) $x^3 + 5x^2 - 5x - 33$ и $x^3 + 5x^2 - 5x + \frac{103}{27}$; б) $x^3 + x^2 - 2x - 3$ и $x^3 + x^2 - 2x - \frac{13}{27}$. **4.** а) $\left(0; -\frac{4}{5}\right)$; б) $\left(0; -\frac{14}{3}\right)$. **5.** а) $-\frac{722}{3}$; б) -35. **6.** а) $F\left(\frac{21}{50}\right) > F\left(\frac{29}{50}\right)$; б) $F\left(\frac{3}{4}\right) > F\left(\frac{7}{9}\right)$. **7.** а) 9 кв. ед.; б) 1 кв. ед.; в) 2 кв. ед.; г) $\frac{1}{2}$ кв. ед.; д) 6 кв. ед.; е) $2 + \frac{\pi}{2}$ кв. ед.; ж) $\frac{32}{3}$ кв. ед.; з) $1 + \pi$ кв. ед. **8.** а) $\frac{4}{3}$ кв. ед.; б) $\frac{8}{3}$ кв. ед.; в) 2 кв. ед.; г) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ кв. ед.; д) $\pi - 2$ кв. ед. **9.** 4 и 6 кг. **10.** 20% и 60%. **11.** 28 и 20 деталей. **12.** 4 км. **13.** а) 1440°; б) 1440°. **15.** 4 и 6 ч или 6 и 4 ч. **16.** За 132 и 110 мин. **17.** а) 12,25; б) 20,25. **18.** 4.

Решения и методические указания

К упражнению 1а

1. Для заданной функции $f(x) = x^3$ первообразной является $F(x) = \frac{x^4}{4}$, так как $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3 = f(x)$.

2. Таким образом, для функции $f(x)$ мы нашли первообразную $F(x) = \frac{x^4}{4}$, но это не единственное решение поставленной задачи.

3. Например, в качестве первообразной можно взять и функцию $F_1(x) = \frac{x^4}{4} + 5$, поскольку $\left(\frac{x^4}{4} + 5\right)' = x^3$, и функцию $F_2 = \frac{x^4}{4} - 6$, поскольку $\left(\frac{x^4}{4} - 6\right)' = x^3$, и т. д.

4. Итак, любая функция вида $\frac{x^4}{4} + C$ является первообразной заданной функции x^3.

К упражнению 1б

1. Заданная функция $f(x) = \sin 3x$ имеет первообразную $F(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x$, так как $F'(x) = \left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)' = -\frac{1}{3}(-\sin 3x) = \sin 3x = f(x)$.

2. Как и в предыдущем примере, заключаем, что в качестве первообразной можно взять любую функцию вида $F(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$.

З а м е ч а н и е. Здесь и далее при нахождении общего вида первообразных данной функции мы используем теорему об основном свойстве первообразной (п. 2): если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на промежутке X, то функция $f(x)$ имеет бесконечное множество первообразных, причем все эти первообразные записываются в виде $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

К упражнению 1в

1. Так как e^x является первообразной для e^x, а $(-\cos x)$ — первообразной для $\sin x$, то $e^x - \cos x$ есть одна из первообразных функции $e^x + \sin x$.

2. Значит, $F(x) = e^x - \cos x + C$ — это общий вид первообразных заданной функции.

К упражнению 1г

1. Для функции x^2 первообразная равна $\frac{x^3}{3}$, а для функции $\cos x$ первообразная равна $\sin x$; поэтому одной из первообразных функции $x^2 + 3\cos x$ является $\frac{x^3}{3} + 3\sin x$.

2. Итак, все первообразные заданной функции имеют вид $F(x) = \frac{x^3}{3} + 3\sin x + C$.

К упражнению 1д

1. Положим $y_1(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$, $y_2(x) = e^{2x}$.

2. Тогда $F_1(x) = -\frac{1}{x+1}$, $F_2(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$.

3. Первообразной для разности $y_1(x) - y_2(x)$ является функция

$$F_1(x) - F_2(x) = -\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}e^{2x}.$$

4. Итак, $-\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}e^{2x} + C$ — это общий вид всех первообразных заданной функции.

З а м е ч а н и е. а) Известно, что дифференцирование — это операция отыскания функции $f'(x)$ по заданной функции $f(x)$. При этом функцию $f'(x)$ называют производной функции $f(x)$.

б) Существует также и обратная операция, которую называют интегрированием.

в) Интегрирование функции $f(x)$ — это операция отыскания для данной функции $f(x)$ такой функции $F(x)$, по отношению к которой исходная функция $f(x)$ является производной. Функцию $F(x)$, для которой на заданном промежутке X выполняется равенство $F'(x) = f(x)$, как известно, называют первообразной функции $f(x)$ на промежутке X.

К упражнению 2а

1. Запишем общий вид первообразных данной функции:

$$F(x) = \frac{5x^2}{8} + \frac{x}{4} + C, C \in \boldsymbol{R}.$$

2. Нужно определить C. Для этого воспользуемся тем, что график первообразной проходит через точку $M(-3; -5)$. Это означает, что $F(-3) = -5$.

3. Так как

$$F(-3) = \frac{5 \cdot (-3)^2}{8} - \frac{3}{4} + C = \frac{39}{8} + C,$$

то получаем уравнение $\frac{39}{8} + C = -5$, откуда $C = -\frac{79}{8}$.

4. Итак, искомой первообразной является $F(x) = \frac{5x^2}{8} + \frac{x}{4} - \frac{79}{8}$.

К упражнению 2в

1. Записав данную функцию в виде $f(x) = 2x^3 - x^2$, найдем общий вид ее первообразных:

$$F(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + C.$$

2. Воспользуемся тем, что $F(1) = 2$.

3. Имеем

$$F(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + C = \frac{1}{6} + C,$$

т. е. $\frac{1}{6} + C = 2$, откуда $C = \frac{11}{6}$.

4. Итак, искомая первообразная есть $F(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{11}{6}$.

К упражнению 3а

1. Найдем общий вид первообразных заданной функции:

$$F(x) = x^3 + 5x^2 - 5x + C,\ C \in \boldsymbol{R}.$$

2. Так как график первообразной пересекает график данной функции $f(x)$ в точке, ордината которой равна 3, то получаем систему

$$\begin{cases} 3x^2+10x-5=3, & (1) \\ x^3 + 5x^2 - 5x + C = 3. & (2) \end{cases}$$

3. Решим эту систему:

а) уравнение (1) имеет корни $x_1 = -4$, $x_2 = \frac{2}{3}$;

б) подставив $x_1 = -4$ в уравнение (2), имеем

$$(-4)^3 + 5 \cdot (-4)^2 - 5 \cdot (-4) + C = 3,$$

откуда $C = -33$;

в) подставив $x_2 = \frac{2}{3}$ в уравнение (2), имеем

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 5\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 5 \cdot \frac{2}{3} + C = 3, \text{ откуда } C = \frac{103}{27}.$$

4. Теперь запишем искомые первообразные:

$$F_1(x) = x^3 + 5x^2 - 5x - 33, \quad F_2(x) = x^3 + 5x^2 - 5x + \frac{103}{27}.$$

К упражнению 4а

1. Запишем общий вид первообразных заданной функции:

$$F(x) = 5x^2 - 3x + C,\ C \in \boldsymbol{R}.$$

2. Тогда корнями первообразной являются следующие числа:

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{9 - 20C}}{10},\ x_2 = \frac{3 + \sqrt{9 - 20C}}{10}.$$

3. Найдем расстояние между корнями первообразной:

$$x_2 - x_1 = \frac{3 + \sqrt{9 - 20C}}{10} - \frac{3 - \sqrt{9 - 20C}}{10} = \frac{\sqrt{9 - 20C}}{5}.$$

4. Так как по условию это расстояние равно 1, то

$$\frac{\sqrt{9 - 20C}}{5} = 1,$$

откуда $C = -\frac{4}{5}$.

5. Значит, нужная нам первообразная имеет вид

$$F(x) = 5x^2 - 3x - \frac{4}{5}.$$

6. Остается найти ее значение при $x = 0$: $F(0) = -\frac{4}{5}$, т. е. $\left(0; -\frac{4}{5}\right)$ — искомая точка.

К упражнению 5б

1. Рассмотрим данную функцию $f(x) = x^2 + 8x + 32$. Квадратный трехчлен $x^2 + 8x + 32$ имеет отрицательный дискриминант ($D = 64 - 128 = -64 < 0$), поэтому $f(x) = x^2 + 8x + 32 > 0$ при всех x.

2. Найдем общий вид первообразных функции $f(x)$:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 4x^2 + 32x + C, \quad \text{где} \quad C \in \boldsymbol{R}.$$

3. Так как производная первообразной $F(x)$, т. е. заданная функция $f(x)$, положительна при всех x, то первообразная $F(x)$ возрастает при всех x.

4. Это означает, что наибольшее значение первообразной достигается на правом конце данного отрезка — в точке $x = 0$. Таким образом, $F(0) = 85$, т. е. $C = 85$.

5. Итак, искомая первообразная имеет вид

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 4x^2 + 32x + 85.$$

6. Остается найти ее наименьшее значение, которое достигается в точке $x = -6$:

$$F(-6) = -\frac{6^3}{3} + 4 \cdot 6^2 - 32 \cdot 6 + 85 = -35.$$

К упражнению 6б

1. При $x < 1$ числитель дроби, равный $1 - x$, положителен.

2. Найдем теперь значения x, при которых знаменатель дроби, равный $\log_4(7x - 5)$, отрицателен. Для этого решим неравенство $\log_4(7x - 5) < 0$. Имеем

$$0 < 7x - 5 < 1, \text{ т. е. } \frac{5}{7} < x < \frac{6}{7}.$$

3. Точки $x = \frac{3}{4}$ и $x = \frac{7}{9}$ принадлежат найденному интервалу $\frac{5}{7} < x < \frac{6}{7}$ (рис. 217).

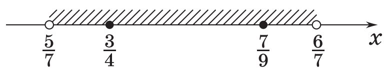


Рис. 217

4. Значит, на отрезке $\left[\frac{3}{4}; \frac{7}{9}\right]$ дробь $f(x) = \dfrac{1 - x}{\log_4(7x - 5)}$ отрицательна, т. е. первообразная $F(x)$ данной функции убывает на этом отрезке.

5. Итак, $F\left(\frac{3}{4}\right) > F\left(\frac{7}{9}\right)$.

К упражнению 7а

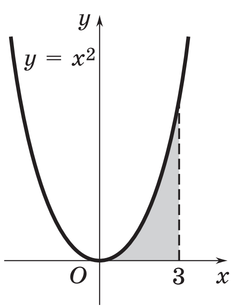


Рис. 218

1. Фигура, площадь которой нужно найти, изображена на рис. 218. Здесь $a = 0$, $b = 3$.

2. Для функции $y = x^2$ одной из первообразных является функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

3. Искомую площадь находим по формуле

$$S = F(b) - F(a),$$

т. е.

$$S = F(3) - F(0) = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9 \text{ (кв. ед.)}.$$

К упражнению 7б

1. Предварительно изобразим данную фигуру (рис. 219). Здесь $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$.

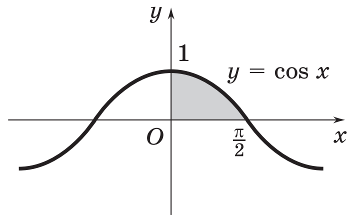


Рис. 219

2. Для функции $y = \cos x$ одной из первообразных является функция $F(x) = \sin x$.

3. Следовательно,

$$S = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) =$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 \text{ (кв. ед.)}.$$

К упражнению 7г

1. Фигура, площадь которой требуется найти, изображена на рис. 220. Здесь $a = 1$, $b = 2$.

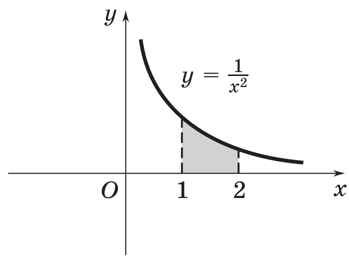


Рис. 220

2. Для функции $y = \frac{1}{x^2}$ одной из первообразных является функция $F(x) = -\frac{1}{x}$.

3. Таким образом,

$$S = F(2) - F(1) =$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \text{ (кв. ед.)}.$$

К упражнению 7д

1. Изобразим данную фигуру (рис. 221). Здесь $a = 0$, $b = 2$.

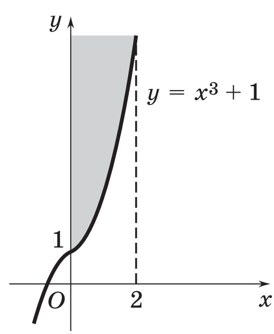


Рис. 221

2. Одной из первообразных для функции $y = x^3 + 1$ является функция $F(x) = \frac{x^4}{4} + x$.

3. Значит,

$$S = F(2) - F(0) =$$

$$= \frac{2^4}{4} + 2 = 6 \text{ (кв. ед.)}.$$

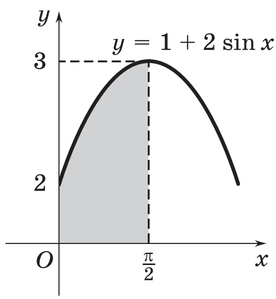


Рис. 222

К упражнению 7е

1. Данная фигура изображена на рис. 222. Здесь $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$.

2. Одна из первообразных функции $y = 1 + 2\sin x$ — это функция $F(x) = x - 2\cos x$.

3. Поэтому

$$S = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\cos\frac{\pi}{2} - 0 + 2\cos 0 =$$

$$= 2 + \frac{\pi}{2} \text{ (кв. ед.).}$$

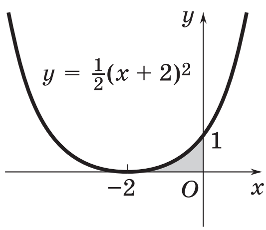


Рис. 223

К упражнению 8а

1. Изобразим данную фигуру (рис. 223). Здесь $a = -2$, $b = 0$.

2. Одной из первообразных функции $y = \frac{1}{2}\left(x + 2\right)^2 = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$ является функция $F(x) = \frac{x^3}{6} + x^2 + 2x$.

3. Значит,

$$S = F(0) - F(-2) =$$

$$= 0 - \left(-\frac{4}{3} + 4 - 4\right) = \frac{4}{3} \text{ (кв. ед.).}$$

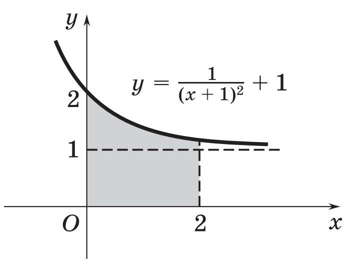


Рис. 224

К упражнению 8б

1. Изобразим данную фигуру (рис. 224). Здесь $a = 0$, $b = 2$.

2. Для функции $y = \frac{1}{(x+1)^2} + 1$ одна из первообразных есть функция $F(x) = \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + x = -\frac{1}{x+1} + x$.

3. Следовательно,

$$S = F(2) - F(0) =$$

$$= -\frac{1}{3} + 2 + 1 = \frac{8}{3} \text{ (кв. ед.).}$$

К упражнению 8д

1. Построим график данной функции (рис. 225). Очевидно, что полученная фигура симметрична относительно оси Oy.

2. Одной из первообразных функции $y = 1 - \cos x$ является функция $F(x) = x - \sin x$.

3. Учитывая симметрию фигуры, находим

$$S = 2\left(F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right) = \pi - 2 \text{ (кв. ед.)}.$$

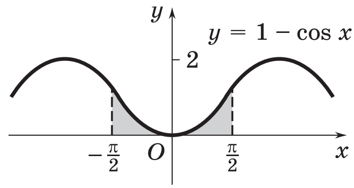


Рис. 225

К упражнению 9

1. Пусть x (кг) — масса первого раствора; тогда $10 - x$ (кг) — масса второго раствора.

2. Процентное содержание кислоты в первом растворе равно $\frac{0{,}8 \cdot 100}{x}$, а во втором растворе оно равно $\frac{0{,}6 \cdot 100}{10 - x}$.

3. Согласно условию, составим уравнение

$$\frac{80}{x} - \frac{60}{10 - x} = 10,$$

откуда находим $x_1 = 20$ (не подходит), $x_2 = 4$.

Ответ: 4 и 6 кг.

К упражнению 11

1. Это — задача на производительность.

2. Пусть x — количество деталей, которое обрабатывает первый рабочий за 7 ч. Тогда одну деталь он обрабатывает за $\frac{7}{x}$ ч.

3. Аналогично, второй рабочий обрабатывает $x - 8$ деталей за 7 ч. Поэтому одну деталь он обрабатывает за $\frac{7}{x - 8}$ ч.

4. Согласно условию, имеем уравнение

$$\frac{7}{x - 8} - \frac{7}{x} = \frac{1}{10},$$

откуда $x = 28$.

Ответ: 28 и 20 деталей.

К упражнению 12

1. Пусть x (км) — протяженность дороги по равнине, а y (км) — в гору.

2. Тогда, используя условия, составим систему

$$\begin{cases} \dfrac{y}{3} + \dfrac{x}{4} + \dfrac{11{,}5 - (x + y)}{5} = 2\dfrac{9}{10}, \\ \dfrac{11{,}5 - (x + y)}{3} + \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{5} = 3\dfrac{1}{10}. \end{cases}$$

3. Решив эту систему, находим $x = 4$.

К упражнению 13а

1. Используя формулу синуса двойного угла, перепишем уравнение в виде

$$\sin^2 x - 5|\sin x|\,|\cos x| + 4\cos^2 x = 0. \qquad (1)$$

2. Разделив обе части уравнения (1) на $\cos^2 x$, получим

$$|\mathrm{tg}\, x|^2 - 5|\mathrm{tg}\, x| + 4 = 0,$$

откуда $|\mathrm{tg}\, x| = 1$, $|\mathrm{tg}\, x| = 4$ (не подходит, так как по условию должно выполняться неравенство $|\mathrm{tg}\, x| \leqslant 3$).

3. Решим уравнение $|\mathrm{tg}\, x| = 1$. Имеем:

а) $\mathrm{tg}\, x = 1$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\mathrm{tg}\, x = -1$, $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Объединив эти решения, имеем

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

4. Теперь найдем корни, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$, — это значения $\dfrac{5\pi}{4}$, $\dfrac{7\pi}{4}$, $\dfrac{9\pi}{4}$, $\dfrac{11\pi}{4}$. Их сумма равна 8π, т. е. $1440°$.

К упражнению 14

З а м е ч а н и е. а) Напомним, что логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b (здесь $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$).

б) Согласно определению логарифма, справедливо тождество

$$a^{\log_a b} = b,$$

которое называется основным логарифмическим тождеством.

в) Графики функций, заданных в упр. 14 а)—е), построены с учетом области определения логарифма и основного логарифмического тождества. Эти графики изображены соответственно на рис. 226—231.

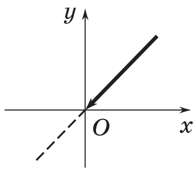


Рис. 226

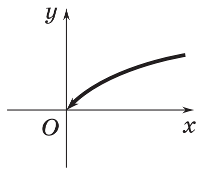


Рис. 227

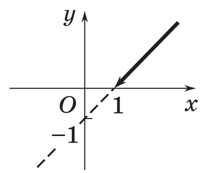


Рис. 228

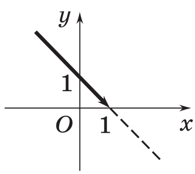


Рис. 229

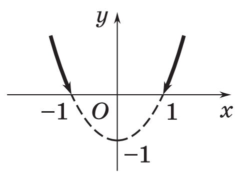


Рис. 230

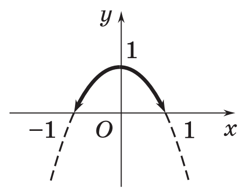


Рис. 231

К упражнению 15

1. Пусть первая труба наполняет бассейн за x (ч), а вторая — за y (ч). Тогда производительность первой трубы составит $\frac{1}{x}$, а второй — $\frac{1}{y}$ (объем бассейна примем за 1).

2. Из условия следует, что первая труба наполнила $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{4} y$ часть бассейна, а вторая — $\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{4} x$ часть бассейна.

3. Так как вместе обе трубы наполнили $1 - \frac{11}{24} = \frac{13}{24}$ бассейна, то получаем уравнение

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{4} y + \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{4} x = \frac{13}{24}. \qquad (1)$$

4. Кроме того, обе трубы при одновременной работе наполняют бассейн за 2 ч 24 мин, поэтому можно записать уравнение

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \frac{12}{5} = 1. \qquad (2)$$

5. Решим систему уравнений (1) и (2). Имеем

$$\begin{cases} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{4} y + \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{4} x = \frac{13}{24}, \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \frac{12}{5} = 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 6\frac{y}{x} + 6\frac{x}{y} = 13, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{12}. \end{cases}$$

Полагая $\frac{x}{y} = t$, приходим к системе

$$\begin{cases} \frac{6}{t} + 6t = 13, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{12}. \end{cases} \tag{3}$$

Из первого уравнения системы (3) находим $t_1 = \frac{3}{2}$, $t_2 = \frac{2}{3}$. Тогда из второго уравнения этой системы следует, что $x_1 = 4$, $y_1 = 6$ или $x_1 = 6$, $y_1 = 4$.

Ответ: 4 и 6 ч или 6 и 4 ч.

К упражнению 17а

1. Определим промежутки знакопостоянства выражений, записанных под знаком модуля. Имеем

$$x^2 - 4x - 5 = 0, \quad \text{откуда} \quad x_1 = -1, x_2 = 5;$$
$$x - 4 = 0, \quad \text{откуда} \quad x_3 = 4.$$

Учитывая, что функция задана на отрезке $[-2; 6]$, получаем четыре промежутка знакопостоянства, в которых знаки выражений $x^2 - 4x + 5$ и $x - 4$ изменяются так:

x	$[-2; -1]$	$(-1; 4]$	$(4; 5]$	$(5; 6]$
$x^2 - 4x - 5$	+	−	−	+
$x - 4$	−	−	+	+

2. Будем раскрывать модули на каждом промежутке, а затем вычислять значения данной функции на концах заданного отрезка и в критических точках, принадлежащих этим промежуткам (отметим, что точки $x = -1$, $x = 4$ и $x = 5$ также являются критическими, поскольку в них производная не существует).

а) $x \in [-2; -1]$; $y = x^2 - 4x - 5 + x - 4 = x^2 - 3x - 9$, $y' = 2x - 3$, $x_{кр} = 1{,}5 \notin [-2; -1]$; $y(-2) = 4 + 6 - 9 = 1$; $y(-1) = 1 + 3 - 9 = -5$;

б) $x \in (-1; 4]$; $y = -x^2 + 4x + 5 + x - 4 = -x^2 + 5x + 1$, $y' = -2x + 5$, $x_{кр} = 2{,}5 \in (-1; 4]$; $y(2{,}5) = -6{,}25 + 12{,}5 + 1 = 7{,}25$, $y(4) = -16 + 20 + 1 = 5$;

в) $x \in (4; 5]$; $y = -x^2 + 4x + 5 - x + 4 = -x^2 + 3x + 9$, $y' = -2x + 3$, $x_{кр} = 1{,}5 \notin (4; 5]$, $y(5) = -25 + 15 + 9 = -1$;

г) $x \in (5; 6]$; $y = x^2 - 4x - 5 - x + 4 = x^2 - 5x - 1$, $y' = 2x - 5$, $x_{кр} = 2{,}5 \notin (5; 6]$, $y(6) = 36 - 30 - 1 = 5$.

3. Значения функции в критических точках и на концах данного отрезка поместим в таблицу:

x	-2	-1	$2{,}5$	4	5	6
$f(x)$	1	-5	$7{,}25$	5	-1	5

Итак, наибольшее значение есть $f(2{,}5) = 7{,}25$, а наименьшее значение есть $f(-1) = -5$. Значит, их разность равна $7{,}25 - (-5) = 12{,}25$.

К упражнению 18

1. Находим область определения функции: $x \in \boldsymbol{R}$, $x \neq 0$.

2. Чтобы найти корни функции, решим уравнение

$$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = 0, \text{ или } \frac{x^2 + 4}{2x} = 0.$$

Ясно, что это уравнение не имеет корней.

3. Найдем производную:

$$y' = \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right)' = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{2x^2}.$$

Отсюда следует, что $x = -2$ и $x = 2$ — критические точки.

4. Точки $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ (точка разрыва функции и ее производной) и $x_3 = 2$ разбивают числовую прямую на четыре интервала. Изменение знаков производной в этих интервалах иллюстрирует рис. 232.

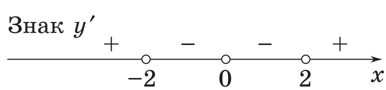


Рис. 232

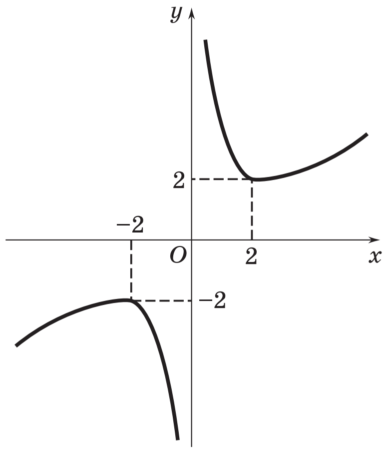


Рис. 233

Таким образом, в интервалах $(-\infty; -2)$ и $(2; +\infty)$ функция возрастает, а в интервалах $(-2; 0)$ и $(0; 2)$ — убывает.

5. При $x = -2$ функция имеет максимум, равный

$$y(-2) = \frac{-2}{2} + \frac{2}{-2} = -2,$$

а при $x = 2$ — минимум, равный

$$y(2) = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = 2.$$

Значит,

$$f_{\text{наиб}} - f_{\text{наим}} = y(2) - y(-2) = \\ = 2 - (-2) = 4.$$

6. График функции изображен на рис. 233.

Тема 22

Формула Ньютона—Лейбница.
Основные правила интегрирования.
Вычисление площадей с помощью интеграла.
Физические приложения интеграла

Теоретические сведения

1. Формула Ньютона—Лейбница

1°. ***Интегралом*** от a до b функции f называют приращение первообразной F этой функции, т. е. разность $F(b) - F(a)$ (очевидно, что это приращение не зависит от выбора первообразной).

2°. Интеграл от a до b функции f обозначают так: $\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ (читается: «интеграл от a до b эф от икс дэ икс»). Числа a и b называют ***пределами интегрирования***, a — ***нижним***, b — ***верхним*** пределом. Знак $\int$ называют ***знаком интеграла***; функцию f — ***подынтегральной функцией***; x — ***переменной интегрирования***. Отрезок с концами a и b называют ***отрезком интегрирования***.

3°. Заметим, что верхний предел интегрирования не обязательно больше нижнего; может быть и $a > b$, и $a = b$.

4°. Согласно определению интеграла, если $F' = f$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Это равенство называют ***формулой Ньютона—Лейбница***.

5°. Для удобства записи приращение первообразной $F(b) - F(a)$ сокращенно обозначают через $F(x)\big|_a^b$, т. е. $F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b$.

Пример. Вычислить $\int\limits_{-1}^{2} x^3\ \mathrm{d}x$.

Р е ш е н и е. Для функции $f(x) = x^3$ первообразной служит функция $\frac{x^4}{4}$. Следовательно, по формуле Ньютона—Лейбница получаем

$$\int_{-1}^{2} x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{2} = \frac{2^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

6°. Формулу для вычисления площади криволинейной трапеции (см. тему 21, п. 4) с помощью интеграла можно записать следующим образом:

$$S = \int_{a}^{b} f(x) \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{2}$$

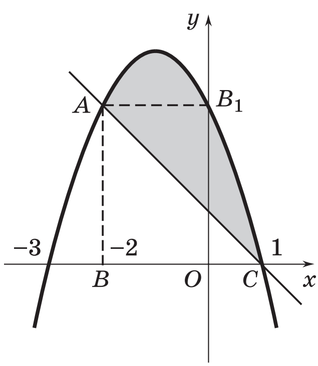


Рис. 234

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 1 - x$ и $y = 3 - 2x - x^2$ (рис. 234).

Р е ш е н и е. Найдем абсциссы точек пересечения графиков заданных линий:

$$\begin{cases} y = 1 - x, \\ y = 3 - 2x - x^2, \end{cases}$$

откуда $1 - x = 3 - 2x - x^2$, т. е. $x = -2$, $x = 1$. Искомая площадь равна разности площадей криволинейной трапеции BAB_1C и треугольника BAC (рис. 234).

По формуле (2) находим

$$S_{BAB_1C} = \int_{-2}^{1} (3 - 2x - x^2) \, \mathrm{d}x =$$

$$= \left(3x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1} = 9 \text{ (кв. ед.)}.$$

Так как $S_{\Delta BAC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2}$ (кв. ед.), то искомая площадь $S = S_{BAB_1C} - S_{\Delta BAC} = \frac{9}{2}$ (кв. ед.).

7°. Интеграл вида $\int\limits_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ называют ***интегралом с переменным верхним пределом.*** Этот интеграл есть такая первообразная функции f, которая в точке $x = a$ обращается в нуль и, следовательно, справедлива формула $\left(\int\limits_a^x f(t)\ \mathrm{d}t\right)' = f(x)$.

2. Основные правила интегрирования

1°. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int\limits_a^b kf(x)\ \mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \text{ где } k \text{ — постоянная.}$$

2°. Интеграл от суммы равен сумме интегралов:

$$\int\limits_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3°. Справедлива следующая формула замены переменной:

$$\int\limits_a^b f(kx + p)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\int\limits_{ka+p}^{kb+p} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

где $t = kx + p$, k и p — постоянные, причем новые пределы интегрирования получаются из формулы $t = kx + p$ заменой x на a и на b.

Пример. Вычислить интеграл:

$$\text{а) } \int\limits_{-8}^{8}\frac{1}{\sqrt{5+0{,}5x}}\ \mathrm{d}x; \quad \text{б) } \int\limits_{-\pi/6}^{0}\frac{1}{\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}\ \mathrm{d}x.$$

Р е ш е н и е. а) Имеем

$$\int\limits_{-8}^{8}\frac{1}{\sqrt{5+0{,}5x}}\ \mathrm{d}x = \int\limits_{-8}^{8}(5+0{,}5x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{2(5+0{,}5x)^{1/2}}{1/2}\Bigg|_{-8}^{8} =$$

$$= 4\sqrt{5+0{,}5x}\,\Big|_{-8}^{8} = 4(\sqrt{5+4} - \sqrt{5-4}) = 4\cdot 2 = 8.$$

б) Вычислим этот интеграл с помощью замены переменной по формуле $t = 2x + \frac{\pi}{3}$. Подставив в эту формулу $x = -\frac{\pi}{6}$, находим $t = 2\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3} = 0$; это — новый нижний предел интегрирования. Аналогично получаем новый верхний предел интегрирования $t = \frac{\pi}{3}$. Следовательно,

$$\int\limits_{-\pi/6}^{0} \frac{1}{\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2 t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \operatorname{tg} t \Big|_{0}^{\pi/3} =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Вычисление площадей с помощью интеграла

1°. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a; b]$. Тогда, как известно, площадь соответствующей криволинейной трапеции (рис. 235) находится по формуле

$$S = \int\limits_{a}^{b} f(x)\, \mathrm{d}x = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

2°. В том случае, когда непрерывная функция $f(x)$ неположительна на отрезке $[a; b]$, для вычисления площади соответствующей криволинейной трапеции (рис. 236) следует использовать формулу

$$S = -\int\limits_{a}^{b} f(x)\, \mathrm{d}x. \qquad (2)$$

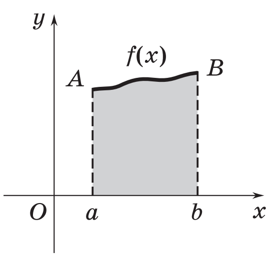


Рис. 235

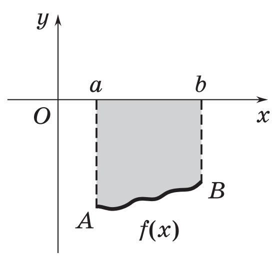


Рис. 236

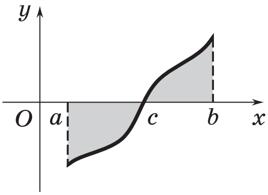


Рис. 237

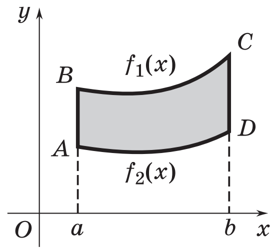


Рис. 238

3°. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на этом отрезке как положительные, так и отрицательные значения. Тогда нужно разбить отрезок $[a; b]$ на такие части, в каждой из которых функция не меняет знак, затем вычислить по приведенным выше формулам соответствующие этим частям площади и эти площади сложить. Например, площадь фигуры, изображенной на рис. 237, равна

$$S = -\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (3)$$

4°. Площадь фигуры, ограниченной графиками двух непрерывных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, где $f_1(x) \geqslant f_2(x)$ на отрезке $[a; b]$ (рис. 238), находится по формуле

$$S = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (4)$$

Примеры. 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -2x$, $y = 0$ и $x = 3$ (рис. 239).

Решение. На отрезке $[0; 3]$ функция $f(x) = -2x$ отрицательна. Поэтому для вычисления искомой площади следует воспользоваться формулой (2):

$$S = -\int_0^3 (-2x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^3 x\,\mathrm{d}x =$$

$$= x^2\Big|_0^3 = 9 \text{ (кв. ед.)}.$$

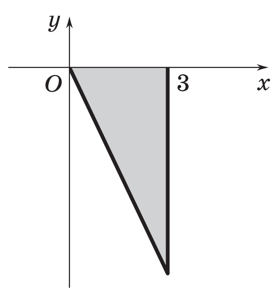


Рис. 239

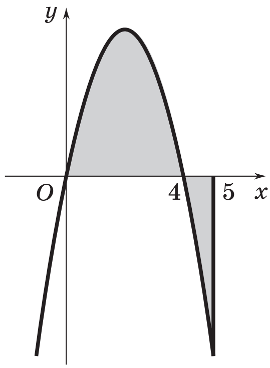


Рис. 240

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4x - x^2$, $y = 0$ и $x = 5$.

Р е ш е н и е. Парабола $y = 4x - x^2$ пересекает ось абсцисс в точках $x = 0$ и $x = 4$. Фигура, площадь которой требуется найти, заштрихована на рис. 240. Пусть S_1 и S_2 — площади частей этой фигуры, соответствующих отрезкам [0; 4] и [4; 5], а S — искомая площадь; тогда $S = S_1 + S_2$.

Используя формулу (1), находим

$$S_1 = \int_0^4 (4x - x^2)\,\mathrm{d}x = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 =$$

$$= 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3} \text{ (кв. ед.)},$$

а по формуле (2) получаем

$$S_2 = -\int_4^5 (4x - x^2)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2\right)\Bigg|_4^5 =$$

$$= \left(\frac{125}{3} - 50\right) - \left(\frac{64}{3} - 32\right) = \frac{7}{3} \text{ (кв. ед.)}.$$

Следовательно, $S = S_1 + S_2 = \dfrac{32}{3} + \dfrac{7}{3} = 13$ (кв. ед.).

4. Физические приложения интеграла

1°. Решим задачу о нахождении координаты точки по заданной скорости. Пусть точка движется по прямой, причем координата точки есть функция от времени движения t, т. е. $x = x(t)$. Как известно, скорость движения $v(t)$ является производной от координаты по времени: $v(t) = x'(t)$. Таким образом, если задана скорость как функция времени, то в силу формулы Ньютона—Лейбница имеем

$$\int_{t_0}^{t} v(z)\,\mathrm{d}z = x(t) - x(t_0). \qquad (1)$$

Число $x(t_0) = x_0$ называют ***начальной координатой***. Тогда по известной скорости и начальной координате можно определить положение точки в текущий момент времени t:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(z)\,\mathrm{d}z. \tag{2}$$

2°. Решим теперь аналогичную задачу о нахождении скорости точки по заданному ускорению. Так как ускорение движения $a(t)$ есть производная от скорости по времени, т. е. $a(t) = v'(t)$, то, согласно формуле Ньютона—Лейбница, получаем

$$\int_{t_0}^{t} a(z)\,\mathrm{d}z = v(t) - v(t_0). \tag{3}$$

Число $v(t_0) = v_0$ называют ***начальной скоростью***. Следовательно, по известному ускорению и начальной скорости можно определить скорость точки в текущий момент времени t:

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(z)\,\mathrm{d}z. \tag{4}$$

3°. С помощью интеграла можно решить и ряд других физических задач, например задачу о вычислении работы, производимой переменной силой. Пусть материальная точка перемещается под действием переменной силы $F(x)$ по оси Ox от $x = a$ до $x = b$. Тогда работа, производимая этой силой, находится по формуле

$$A = \int_{0}^{b} F(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Примеры. 1. При прямолинейном движении точки ее скорость изменяется по закону $v(t) = 10 - 10t$ м/с, а в момент $t = 0$ точка имела координату $x_0 = x(0) = 1$ м. Найти: а) перемещение точки за время $t = 2$ с; б) путь, пройденный точкой за это же время.

Р е ш е н и е. Заметим, что следует различать понятия перемещения точки и пути, пройденного точкой. Путь определяется как расстояние, пройденное точкой вдоль траектории движения за рассматриваемый промежуток времени, и является существенно положительной величиной. Перемещение же за этот промежуток времени (при отличной от нуля скорости) может оказаться равным нулю или отрицательным.

а) Чтобы найти перемещение, воспользуемся формулой (2):

$$x(2) = 1 + \int_0^2 (10 - 10t)\,\mathrm{d}t = 1 + 10t\Big|_0^2 - 5t^2\Big|_0^2 =$$
$$= 1 + 20 - 20 = 1 \text{ (м)}.$$

Отсюда получаем, что $x(2) - x(0) = 1 - 1 = 0$, т. е. перемещение точки равно нулю.

б) Чтобы найти путь, пройденный точкой, разобьем рассматриваемый промежуток времени [0; 2] на промежутки, в течение которых скорость точки не меняет знак; в данном случае — это промежутки [0; 1] и [1; 2] (в первом из них скорость положительна, а во втором отрицательна). Найдем перемещения точек в каждом из этих промежутков:

$$x(1) - x(0) = \int_0^1 (10 - 10t)\,\mathrm{d}t = 10t\Big|_0^1 - 5t^2\Big|_0^1 = 10 - 5 = 5 \text{ м};$$

$$x(2) - x(1) = \int_1^2 (10 - 10t)\,\mathrm{d}t = 10t\Big|_1^2 - 5t^2\Big|_1^2 =$$
$$= 20 - 10 - (20 - 5) = -5 \text{ м}.$$

Для того чтобы найти путь, пройденный точкой за промежуток [0; 2], следует взять сумму модулей этих перемещений:

$$s = |x(1) - x(0)| + |x(2) - x(1)| = 5 + 5 = 10 \text{ (м)}.$$

2. Сила упругости пружины, растянутой на 4 см, равна 6 Н. Какую работу нужно произвести, чтобы растянуть пружину на 10 см?

Р е ш е н и е. Согласно закону Гука, сила, растягивающая пружину на величину x, вычисляется по формуле $F = kx$, где k — коэффициент пропорциональности. Так как по условию $x = 0{,}04$ м при $F = 6$ Н, то, подставляя эти значения в равенство $F = kx$, получим $6 = k \cdot 0{,}04$, откуда $k = 150$ Н/м. Подставив теперь в это же равенство значение k, находим $F = 150x$. Искомую работу найдем по формуле (5), полагая $a = 0$, $b = 10$:

$$A = \int_0^{10} 150x\,\mathrm{d}x = 75x^2\Big|_0^{10} = 7500 \text{ Дж}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение интеграла.

2. Что означают в записи $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$: а) числа a и b; б) знак $\int\limits_a^b$; в) $f(x)$; г) x; д) $f(x)\,\mathrm{d}x$? Может ли быть $a = b$; $a > b$?

3. Зависит ли приращение $F(b) - F(a)$ от выбора первообразной?

4. Какое сокращенное обозначение принято для приращения первообразной $F(b) - F(a)$?

5. Вычислите:

а) $\int\limits_{-1}^{2} x^2\,\mathrm{d}x$;

б) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$;

в) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$.

6. Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_{0,25}^{4} \left(x^2 - \frac{3}{4} + \frac{5}{x\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$;

б) $\int\limits_{-\pi}^{-2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{3}\right)}$;

в) $\int\limits_{0}^{-4} \frac{x}{\sqrt{1-2x}}\,\mathrm{d}x$.

7. В чем заключается геометрический смысл интеграла?

8. В чем заключается разница между понятиями «перемещение точки» и «путь, пройденный точкой»?

9. Пружина растягивается на 1 см под действием силы 10 Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на 4 см?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_{-1}^{2} x^4\,\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x$; в) $\int\limits_{1}^{3} x^3\,\mathrm{d}x$; г) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$;

д) $\int\limits_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^2}$; е) $\int\limits_{0}^{\pi} 3\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$; ж) $\int\limits_{1}^{10} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$; з) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 2x\,\mathrm{d}x$.

2. Докажите справедливость равенства:

а) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int\limits_{0}^{1} \mathrm{d}x$; б) $\int\limits_{0}^{\pi/3} \sin x\,\mathrm{d}x = \int\limits_{1/16}^{1/4} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$;

в) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\sqrt[3]{3}} x^2\,\mathrm{d}x$; г) $\int\limits_{0}^{1} (2x+1)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{2} (x^3 - 1)\,\mathrm{d}x$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = x^4$; $y = 1$; б) $y = x^2 - 4x + 4$; $y = 0$, $x = 4$;

в) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5$; г) $y = -x^2 - 4x$; $y = 0$, $x = -3$, $x = -1$;

д) $y = -x^2 - 4x$; $y = 1$, $x = -3$, $x = -1$; е) $y = x^3$; $y = 8$; $x = 1$;

ж) $y = 2 - x^3$, $y = 1$; $x = -1$, $x = 1$; з) $y = \frac{1}{x^2}$; $y = x$; $x = 2$;

и) $y = \sqrt{x}$, $y = x$; к) $y = -(x-1)^3$, $y = 0$, $x = 0$;

л) $y = 3\sin(x + \frac{3\pi}{4})$, $y = 0$, $x = -\frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = x^2 - 4x + 4$, $y = 4 - x^2$; б) $y = x^2 - 2x + 2$; $y = -x^2 + 6x + 2$;

в) $y = x^2$, $y = 2x - x^2$; г) $y = x^2$; $y = x^3$.

5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции:

а) $y = 8x - 2x^2$, касательной к этой параболе в ее вершине и прямой $x = 0$;

б) $y = 8 - \frac{1}{2}x^2$, касательной к нему в точке с абсциссой $x = -2$ и прямой $x_0 = 1$.

Задания для повторения

6. Для составления букетов закупили 60 роз и гвоздик. Если бы роз закупили в 2 раза больше, то общее число цветов было бы меньше 88, а если бы закупили в 2 раза больше гвоздик, то общее число цветов было бы меньше 94. Сколько роз было закуплено?

7. На изготовление 20 порций первого блюда расходуется 0,5 кг мяса и 1 кг риса, а на изготовление одной порции второго блюда — 100 г мяса и 150 г риса. Требуется изготовить вторых блюд в 1,5 раза больше, чем первых, при этом израсходовать не менее 11,1 кг мяса и не более 17,7 кг риса. Сколько всего порций блюд было изготовлено?

8. Найдите площадь фигуры, задаваемой на плоскости множеством решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} |x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5| \leqslant 1, \\ 3x - y + 6 \geqslant 0, \\ x + 3y - 8 \leqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} |x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1{,}5| \leqslant 0{,}5, \\ 4x - y - 9 \leqslant 0, \\ x + 4y + 2 \leqslant 0. \end{cases}$

9. При каких значениях a имеет два различных корня уравнение:

а) $4^x + 2(a-2)2^x - 3a^2 + 8a - 5 = 0$;

б) $9^x - (4a+2)\cdot 3^x - 5a^2 + 34a - 24 = 0$?

10. Решите уравнение:

а) $\log_{\sin\frac{\pi x}{3}}\left(\sin\frac{2\pi x}{3} + \sin\frac{\pi x}{3} + 1\right) = 0$;

б) $\log_{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{3}}\left(2\sqrt{2}\cos^2\frac{\pi x}{3} + \left(\sqrt{x} - 2\right)\cos\frac{\pi x}{3}\right) = 0$.

11. Решите неравенство:

а) $\sqrt{x^2 - 8|x| + 7} > x + 2$; б) $\sqrt{x^2 - 9|x| + 14} > 1 - x$.

ОТВЕТЫ

1. а) 6,6; б) 1; в) 20; г) 1; д) $\frac{1}{15}$; е) 6; ж) 0,9; з) 0,5. **3.** а) 1,6 кв. ед.; б) $\frac{16}{3}$ кв. ед.; в) $\frac{32}{3}$ кв. ед.; г) $\frac{22}{3}$ кв. ед.; д) $\frac{16}{3}$ кв. ед.; е) $\frac{17}{4}$ кв. ед.; ж) 2 кв. ед.; з) 1 кв. ед.; и) $\frac{1}{6}$ кв. ед.; к) $\frac{1}{4}$ кв. ед.; л) 9 кв. ед. **4.** а) $\frac{8}{3}$ кв. ед.; б) $\frac{64}{3}$ кв. ед.; в) $\frac{1}{3}$ кв. ед.; г) $\frac{1}{12}$ кв. ед. **5.** а) $\frac{16}{3}$ кв. ед.; б) $\frac{9}{2}$ кв. ед. **6.** 27. **7.** 160. **8.** а) $\frac{\pi}{2}$ кв. ед.; б) $\frac{\pi}{4}$ кв. ед. **9.** а) $a \in \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$; б) $a \in \left(\frac{4}{5}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; 6\right)$. **10.** а) $2 + 6n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $4 + 6n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **11.** а) $-\infty < x \leqslant -7$, $-\frac{3}{4} < x < \frac{1}{4}$; б) $-\frac{13}{11} < x \leqslant 2$, $7 \leqslant x < +\infty$.

Решения и методические указания

К упражнению 1а

1. Для функции $f(x) = x^4$ первообразной служит функция $\frac{x^5}{5}$.
2. Следовательно, по формуле Ньютона—Лейбница находим

$$\int_{-1}^{2} x^4\,dx = \frac{x^5}{5}\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{2^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = 6{,}6.$$

К упражнению 1б

1. Для функции $f(x) = \cos x$ первообразной является функция $\sin x$.
2. Таким образом, по формуле Ньютона—Лейбница имеем

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

К упражнению 1д

1. Для заданной функции $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$ первообразной является функция $-\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2x+1}$.

2. Значит, согласно формуле Ньютона—Лейбница, получаем

$$\int_1^2 \frac{dx}{(2x+1)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x+1} \Big|_1^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{15}.$$

К упражнению 1е

1. Для функции $f(x) = 3\cos\dfrac{x}{2}$ первообразная есть функция $6\sin\dfrac{x}{2}$.

2. Следовательно, по формуле Ньютона—Лейбница находим

$$\int_0^{\pi} 3\cos\frac{x}{2}\, dx = 6\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} = 6\sin\frac{\pi}{2} - 6\sin 0 = 6.$$

К упражнению 2а

1. Требуется доказать справедливость равенства

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^1 dx. \qquad (1)$$

2. Для функции $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ первообразная есть функция $\operatorname{tg} x$.

3. Таким образом, в левой части равенства (1) имеем

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \Big|_0^{\pi/4} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0 = 1.$$

4. Вычислим теперь правую часть равенства (1):

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}x = x\Big|_0^1 = 1 - 0 = 1.$$

5. Итак, равенство (1) справедливо.

К упражнению 2б

1. Докажем справедливость равенства

$$\int\limits_0^{\pi/3} \sin x \, \mathrm{d}x = \int\limits_{1/16}^{1/4} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}. \qquad (1)$$

2. Для функции $f(x) = \sin x$ первообразная есть функция $(-\cos x)$.
3. Значит, в левой части равенства (1) имеем

$$\int\limits_0^{\pi/3} \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\pi/3} = -\cos\frac{\pi}{3} + \cos 0 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

4. Для функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ первообразной является функция $2\sqrt{x}$.
5. Поэтому в правой части равенства (1) имеем

$$\int\limits_{1/16}^{1/4} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\,\Big|_{1/16}^{1/4} = 2\left(\sqrt{\frac{1}{4}} - \sqrt{\frac{1}{16}}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

6. Итак, справедливость равенства (1) доказана.

К упражнению 3а

1. Построив данные линии, получим фигуру, площадь которой нужно найти (на рис. 241 эта фигура заштрихована).

2. Пределы интегрирования найдем из равенства $x^4 = 1$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

3. Искомая площадь равна разности между площадью прямоугольника $ABCD$ и площадями двух равных фи-

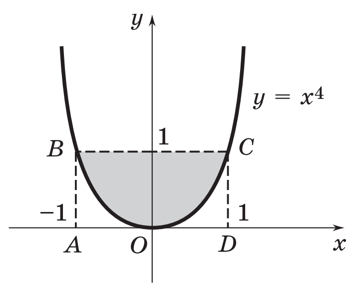


Рис. 241

гур ABO и DCO. В силу симметрии заданной фигуры относительно оси Oy можно найти половину искомой площади и результат удвоить. Имеем

$$S = 2\left(\int_0^1 \mathrm{d}x - \int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x\right) = 2\left(x\Big|_0^1 - \frac{x^5}{5}\Big|_0^1\right) = 2\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{5} \text{ (кв. ед.).}$$

К упражнению 3б

1. Фигура, площадь которой требуется определить, заштрихована на рис. 242.

2. Найдем искомую площадь:

$$S = \int_0^4 (x^2 - 4x + 4)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\Big|_0^4 =$$

$$= \frac{64}{3} - 32 + 16 = \frac{16}{3} \text{ (кв. ед.).}$$

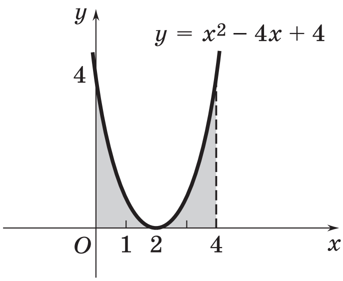


Рис. 242

К упражнению 3в

1. Построим заданные линии и изобразим фигуру, площадь которой нужно определить (рис. 243).

2. Пределы интегрирования найдем из равенства $x^2 - 4x + 5 = 5$, или $x^2 - 4x = 0$, т. е. $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

3. Вычислим искомую площадь:

$$S = \int_0^4 5\,\mathrm{d}x - \int_0^4 (x^2 - 4x + 5)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^4 (5 - x^2 + 4x - 5)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^4 (4x - x^2)\,\mathrm{d}x = 2x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 =$$

$$= 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3} \text{ (кв. ед.).}$$

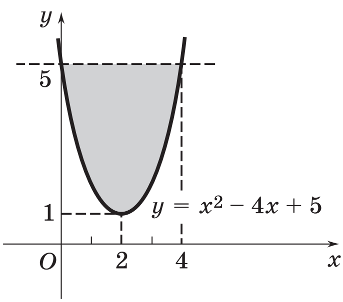


Рис. 243

К упражнению 3г

1. Фигура, площадь которой требуется найти, заштрихована на рис. 244.

2. Вычислим искомую площадь:

$$S = \int\limits_{-3}^{-1} (-x^2 - 4x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} - 2x^2\right)\Bigg|_{-3}^{-1} = -\frac{(1)^3}{3} - 2(-1)^2 -$$

$$-\left(-\frac{(-3)^3}{3} - 2\left(-3\right)^2\right) = \frac{22}{3} \text{ (кв. ед.).}$$

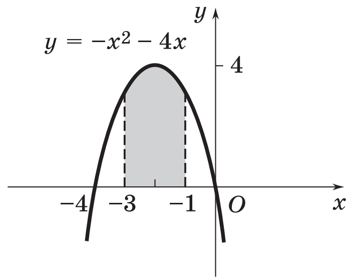


Рис. 244

К упражнению 3д

1. Изобразим заданные линии и получим фигуру, площадь которой нужно найти (эта фигура на рис. 245 заштрихована).

2. Искомая площадь равна разности между площадью криволинейной трапеции $ACDEM$ и площадью прямоугольника $ABKM$.

3. Таким образом,

$$S = \int\limits_{-3}^{-1} (-x^2 - 4x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-3}^{-1} \mathrm{d}x =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} - 2x^2\right)\Bigg|_{-3}^{-1} - x\Bigg|_{-3}^{-1} =$$

$$= \frac{22}{3} + 1 - 3 = \frac{16}{3} \text{ (кв. ед.).}$$

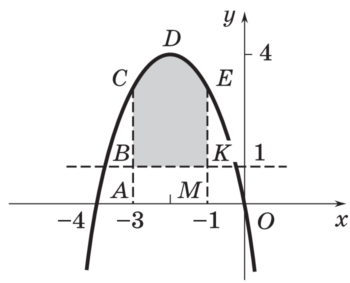


Рис. 245

К упражнению 3е

1. Фигура, площадь которой нужно определить, заштрихована на рис. 246.

2. Чтобы найти верхний предел интегрирования, решим уравнение $x^3 = 8$, откуда $x = 2$.

3. Следовательно,

$$S = \int\limits_{1}^{2} 8\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{2} x^3\,\mathrm{d}x = \left(8x - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{1}^{2} =$$

$$= 16 - 4 - 8 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4} \text{ (кв. ед.).}$$

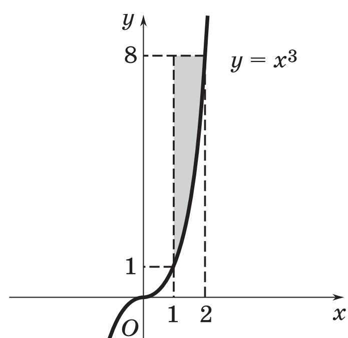


Рис. 246

К упражнению 3л

1. Построим график функции $y = 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ (рис. 247).

2. Для функции $y = 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ одной из первообразных является функция $F(x) = -3\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$.

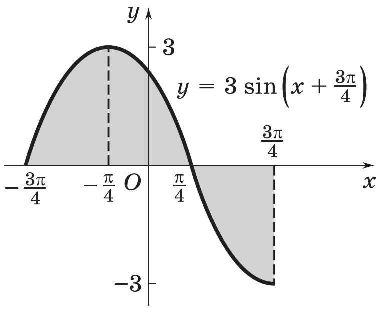


Рис. 247

3. Значит,

$$S = F(x)\Big|_{-3\pi/4}^{\pi/4} - F(x)\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} =$$

$$= \left(F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) -$$

$$- \left(F\left(\frac{3\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= (-3\cos\pi + 3\cos 0) -$$

$$- \left(-3\cos\frac{3\pi}{2} + 3\cos\pi\right) = 9 \text{ (кв. ед.)}.$$

К упражнению 4б

1. Построим заданные линии и получим фигуру, площадь которой требуется определить (на рис. 248 эта фигура заштрихована).

2. Для нахождения пределов интегрирования решим уравнение $x^2 - 2x + 2 = -x^2 + 6x + 2$, или $2x^2 - 8x = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

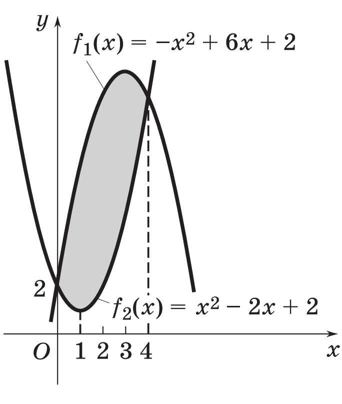


Рис. 248

3. Искомую площадь находим по известной формуле

$$S = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx,$$

т. е.

$$\int_0^4 (-x^2 + 6x + 2)\,dx -$$

$$- \int_0^4 (x^2 - 2x + 2)\,dx =$$

$$= \int_0^4 (-2x^2 + 8x)\,dx =$$

$$= \left(-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2\right)\Big|_0^4 =$$

$$= -\frac{2}{3} \cdot 64 + 64 = \frac{64}{3} \text{ (кв. ед.)}.$$

К упражнению 5б

1. Кроме указанных в условии линий, необходимо найти еще одну — касательную к графику функции $f(x) = 8 - \frac{1}{2}x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

2. Запишем уравнение касательной в общем виде:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (1)$$

3. Находим:

а) $f(x_0) = f(-2) = 8 - \frac{1}{2}(-2)^2 = 6$;

б) $f'(x) = -x$, откуда $f'(x_0) = f'(-2) = 2$.

4. Подставив эти значения в уравнение (1), получим уравнение касательной:

$$f(x) - 6 = 2(x + 2),$$

или

$$f(x) = 2x + 10.$$

5. Построим все эти линии и изобразим фигуру, площадь которой требуется определить (на рис. 249 эта фигура заштрихована).

6. Имеем

$$S = \int_{-2}^{1} (2x + 10)\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^{1} \left(8 - \frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x =$$

$$= (x^2 + 10x)\Big|_{-2}^{1} - \left(8x - \frac{x^3}{6}\right)\Big|_{-2}^{1} =$$

$$= \frac{9}{2} \text{ (кв. ед.).}$$

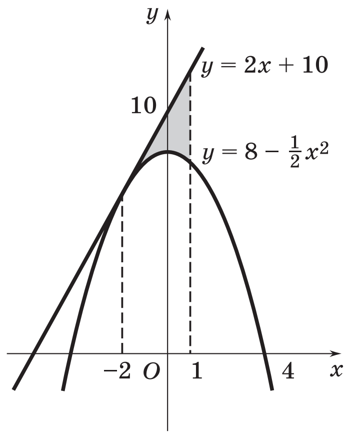


Рис. 249

К упражнению 6

1. Обозначим искомое число роз через x, а число гвоздик — через y (где $x, y \in \boldsymbol{N}$).

2. Используя условие задачи, составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 60, \\ 2x + y < 88, \\ x + 2y < 94, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = 60 - x, \\ 2x + 60 - x < 88, \\ x + 2(60 - x) < 94, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 28, \\ x > 26. \end{cases}$$

Учитывая, что x — натуральное число, получим $x = 27$.

К упражнению 8а

1. Исходная система неравенств равносильна следующей:

$$\begin{cases} -1 \leqslant x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - 6y + 9 - 9 + 5 \leqslant 1, \\ y \leqslant 3x + 6, \\ y \leqslant -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{8}{3}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 4 \leqslant (x+1)^2 + (y-3)^2 \leqslant 6, & (1) \\ y \leqslant 3x + 6, & (2) \\ y \leqslant -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{8}{3}. & (3) \end{cases}$$

2. Неравенство (1) задает на координатной плоскости кольцо (рис. 250), образованное концентрическими окружностями с общим центром $C(-1; 3)$ и радиусами $r_1 = 2$ и $r_2 = \sqrt{6}$.

3. Прямые $y = 3x + 6$ и $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{8}{3}$ перпендикулярны, так как произведение их угловых коэффициентов $k_1k_2 = 3(-\dfrac{1}{3}) = -1$, и пересекаются в точке $C(-1; 3)$.

4. Итак, находим площадь фигуры, заштрихованной на рис. 250:

$$S = \frac{1}{4}\left(\pi r_2^2 - \pi r_1^2\right) = \frac{1}{4}(6\pi - 4\pi) = \frac{\pi}{2} \text{ (кв. ед.).}$$

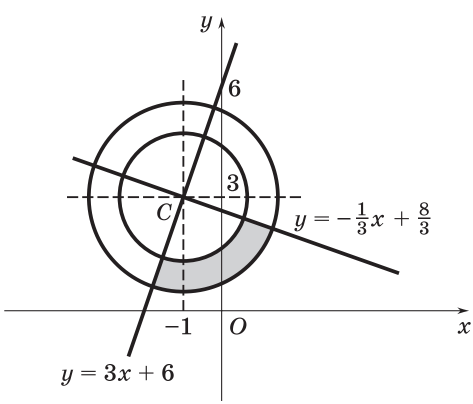


Рис. 250

К упражнению 9б

1. Пусть $3^x = y$. Тогда данное уравнение примет вид

$$y^2 - 2(2a + 1)y - 5a^2 + 34a - 24 = 0. \qquad (1)$$

2. Найдем дискриминант уравнения (1):

$$\frac{D}{4} = (2a + 1)^2 + 5a^2 - 34a + 24 = (3a - 5)^2.$$

3. Найдем корни уравнения (1):

$$y_1 = 2a + 1 - (3a - 5) = 6 - a, \ y_2 = 2a + 1 + 3a - 5 = 5a - 4.$$

4. Для того чтобы исходное уравнение имело два различных корня, необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} y_1 \neq y_2, \\ y_1 > 0, \\ y_2 > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 6 - a \neq 5a - 4, \\ 6 - a > 0, \\ 5a - 4 > 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} a \neq \dfrac{5}{3}, \\ a < 6, \\ a > \dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

<u>Ответ</u>: $a \in \left(\frac{4}{5}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; 6\right)$.

К упражнению 10а

1. Здесь $\sin\frac{\pi x}{3} > 0, \quad \sin\frac{\pi x}{3} \neq 1$.

2. Из данного уравнения следует, что

$$\sin\frac{2\pi x}{3} + \sin\frac{\pi x}{3} + 1 = 1, \text{ или } 2\sin\frac{\pi x}{3}\cos\frac{\pi x}{3} + \sin\frac{\pi x}{3} = 0,$$

откуда

$$\sin\frac{\pi x}{3}\left(2\cos\frac{\pi x}{3} + 1\right) = 0. \qquad (1)$$

3. В уравнении (1) множитель $\sin\frac{\pi x}{3}$ не обращается в нуль, поэтому

$$\cos\frac{\pi x}{3} = -\frac{1}{2}. \qquad (2)$$

4. Учитывая, что $\sin\frac{\pi x}{3} > 0$, запишем решение уравнения (2):

$$\frac{\pi x}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}, \text{ или } x = 2 + 6n, \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

К упражнению 11а

1. Для нахождения ОДЗ данного неравенства нужно решить неравенство $x^2 - 8|x| + 7 \geqslant 0$. Оно равносильно совокупности двух систем:

$$\text{а)} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 - 8x + 7 \geqslant 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \geqslant 0, \\ (x-1)(x-7) \geqslant 0, \end{cases}$$

откуда $x \in [0; 1] \cup [7; +\infty)$;

$$\text{б)} \begin{cases} x < 0, \\ x^2 + 8x + 7 \geqslant 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 0, \\ (x+7)(x+1) \geqslant 0, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty; -7] \cup [-1; 0)$.

2. Объединив решения систем а) и б), получим

$$x \in (-\infty; -7] \cup [-1; 1] \cup [7; +\infty).$$

3. При решении исходного неравенства

$$\sqrt{x^2 - 8|x| + 7} > x + 2 \qquad (1)$$

следует рассмотреть два случая: $x + 2 < 0$ и $x + 2 \geqslant 0$.

а) Если $x + 2 < 0$, т. е. $x < -2$, то правая часть неравенства (1) отрицательна и, значит, множеством решений этого неравенства является промежуток $(-\infty; -7]$.

б) Если же $x + 2 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant -2$, то правая часть неравенства (1) положительна, а потому обе части этого неравенства можно возвести в квадрат:

$$x^2 - 8|x| + 7 > x^2 + 4x + 4. \qquad (2)$$

4. Дальнейшие рассуждения связаны с двумя возможными промежутками изменения x: $x \geqslant 0$ и $x < 0$.

а) Если $x \geqslant 0$, то неравенство (2) примет вид $-8x + 7 > 4x + 4$, откуда $x < \frac{1}{4}$, т. е. множеством решений является промежуток $\left[0; \frac{1}{4}\right)$.

б) Если же $x < 0$, то неравенство (2) примет вид $8x + 7 > 4x + 4$, откуда $x > -\frac{3}{4}$, т. е. множество решений есть промежуток $\left(-\frac{3}{4}; 0\right)$.

5. Объединив найденные решения неравенства (2), получим промежуток $\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

6. Итак, решением исходного неравенства (1) является множество значений x таких, что $x \in \left(-\infty; -7\right] \cup \left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Варианты билетов для вступительных письменных экзаменов

Варианты I—X и XI—XX в разные годы предлагались на экзаменах в РЭА им. Г. В. Плеханова, а варианты XXI—XXX — в МИУ им. С. Орджоникидзе (к вариантам XI—XXX приведены ответы).

Вариант I

1. Упростите до числового значения выражение

$$\left(\frac{1-a^{-1/2}}{1+a^{1/2}}-\frac{a^{1/2}-a^{-1/2}}{a-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}}{(1-\sqrt{a})(1-a)^{-1}}.$$

2. Вычислите

$$\left(9^{2+\log_3 2}+3\cdot 4^{5-\log_{\sqrt{2}} 4}\right):16^{1-\frac{1}{2}\log_4 2}.$$

3. Упростите до числового значения выражение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}.$$

4. Найдите решения уравнения

$$3\log_2(2-x)-\log_2^2(2-x)=3-\log_{2-x}(2-x)^3.$$

В ответе запишите количество решений.

5. Найдите решения уравнения $\sqrt{3}\cos x+4\cos^2 x\sin x=0$, принадлежащие отрезку $[0;\pi]$. В ответе запишите количество решений.

6. Найдите множество решений неравенства

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{13x+9}{x+5}-x}\geqslant\frac{1}{27}.$$

В ответе запишите наименьшее целое решение.

7. Найдите точку максимума функции

$$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\left(x+\frac{7}{4}\right).$$

В ответе запишите значение функции в точке максимума.

8. Экскаватор вырыл траншею длиной 15 м, а затем в его работе произошел перерыв. После перерыва экскаватор вырыл вторую траншею длиной 12 м. Перерыв и рытье второй траншеи заняло на 24 мин больше, чем рытье первой траншеи. Если бы производительность экскаватора была в 3 раза больше, то на рытье первой траншеи он затратил бы время, равное времени перерыва. Определите производительность экскаватора, т. е. длину траншеи (в метрах), которую он рыл в течение 1 ч.

9. В треугольник, у которого длина основания равна 30 см, а длина высоты равна 10 см, вписан равнобедренный прямоугольный треугольник так, что его гипотенуза параллельна основанию данного треугольника, а вершина прямого угла лежит на этом основании. Найдите длину гипотенузы.

10. Точка O является центром симметрии куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Разложите вектор $\overline{OC}$ по векторам $\overline{AB_1}$, $\overline{AD_1}$ и $\overline{AA_1}$. В ответе запишите сумму коэффициентов разложения.

Вариант II

1. Упростите до числового значения выражение

$$\left(\frac{1-a^{-2}}{a^{1/2}-a^{-1/2}} - 2a^{-3/2} + \frac{a^{-2}-a}{a^{1/2}-a^{-1/2}}\right) \cdot \frac{3(a^2+2)^{-1}}{2a^{-3/2}}.$$

2. Вычислите

$$\left(2^{1-\log_{\sqrt{2}}4} \cdot \sqrt{4^{2+\log_2 16}}\right) : 10^{3-\frac{1}{2}\lg 4}.$$

3. Упростите до числового значения выражение

$$\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right]\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1\right).$$

4. Найдите решения уравнения

$$\log_3|x-1| = 1 + \log_3(x+2).$$

В ответе запишите количество решений.

5. Найдите решения уравнения $\sqrt{2}\cos x - \sin 2x = 0$, принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$. В ответе запишите количество решений.

6. Найдите множество решений неравенства

$$(0{,}8)^{\frac{2}{x+2}} \leqslant \left(\frac{4}{5}\right)^{3+x}.$$

В ответе запишите наибольшее решение неравенства.

7. Найдите точку максимума функции

$$y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}.$$

В ответе запишите значение функции в точке максимума.

8. Рабочий изготовил 180 деталей и сделал перерыв. После перерыва к нему присоединился второй рабочий и они вместе изготовили еще 420 деталей. За время перерыва рабочие вдвоем смогли бы изготовить 60 деталей. Перерыв и совместная работа заняли на 1 ч больше, чем время, затраченное на изготовление 180 деталей. Определите количество деталей, изготовленных одним рабочим за час, если оно у каждого из рабочих одинаково.

9. В равнобедренном треугольнике ABC длина основания AC равна 15 см, а длина высоты AE равна 12 см. Найдите площадь треугольника.

10. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ точка M — середина стороны основания BC; точка K лежит на ребре DB, причем $KB = 2DK$. Разложите вектор $\overline{MK}$ по векторам $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$. В ответе запишите наименьший из коэффициентов разложения.

Вариант III

1. Упростите до числового значения выражение

$$(1 - 2a^{-1/2} + a^{-1})\left(\frac{1 - a^{-2}}{\sqrt{a} + a^{-1/2}}\right)^{-1} - \left(\frac{1 + a^{-1/2}}{a^{1/2 - 1}}\right)^{-1}.$$

2. Вычислите

$$\left(25^{\frac{1}{3}\log_5 27} - 5^{\log_{25} 4} + \frac{1}{2} \cdot 10^{\log_{\sqrt{10}} \sqrt{50}}\right) : 64^{\log_8 \sqrt{8}}.$$

3. Упростите до числового значения выражение

$$\frac{2\cos^2\alpha - 1}{8\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}.$$

4. Найдите решения уравнения

$$x^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{x}}(x^2 - x)} = 12.$$

В ответе запишите количество решений.

5. Найдите решения уравнения $\cos x - \cos 2x = \sin^2 x$, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$. В ответе запишите количество решений.

6. Найдите множество решений неравенства

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{2-x}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{x+2}}.$$

В ответе запишите наибольшее целое решение.

7. Найдите максимум функции $y = (x - 5)^2(2x + 8)$. В ответе запишите значение функции в точке максимума.

8. Бригада пробурила скважину глубиной 1440 м и переехала в другое место, где пробурила еще одну скважину глубиной 600 м. Бурение первой скважины продолжалось на 1 месяц больше, чем переезд и бурение второй скважины. Если бы первую скважину бригада бурила с удвоенной скоростью, то затратила бы время, равное времени переезда. Определите скорость бурения (в метрах за месяц).

9. Длина стороны квадрата $ABCD$ равна 6 см. Точка M делит сторону CD в отношении $2 : 1$, считая от вершины C; пусть E — точка пересечения прямых AM и BD. Найдите площадь треугольника DEM.

10. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка O является центром симметрии грани DCC_1D_1. Разложите вектор $\overline{OB}$ по векторам $\overline{AB_1}$, $\overline{AD_1}$ и $\overline{AA_1}$. В ответе запишите сумму коэффициентов разложения.

Вариант IV

1. Упростите до числового значения выражение

$$\left(a^{1/2} - \frac{a - a^{-2}}{a^{1/2} - a^{-1/2}} - \frac{1 - a^{-2}}{a^{1/2} + a^{-1/2}} - \frac{2}{a^{3/2}}\right)\left(\frac{a+1}{a^{3/2}}\right)^{-1}.$$

2. Вычислите

$$4^{3 - \log_{1/2} 4} + \sqrt{100^{1 + \frac{1}{2}\lg 625}}.$$

3. Упростите до числового значения выражение

$$\sin\alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) + 3.$$

4. Найдите решения уравнения

$$2\log_8 x - 3\log_8^2 x = 3 + \log_{x/4}\frac{64}{x^3}.$$

В ответе запишите количество решений.

5. Найдите решения уравнения $1 + \cos 2x = \sqrt{3}\sin 2x$, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$. В ответе запишите количество решений.

6. Найдите множество решений неравенства

$$(0,6)^{\frac{2}{1-2x}} \geqslant \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{x+5}}.$$

В ответе запишите наибольшее отрицательное решение.

7. Найдите точку максимума функции

$$y = \frac{x^2 + 4x - 1}{x - 1}.$$

В ответе запишите значение функции в этой точке.

8. Пассажир выходит из трамвая на остановке A и идет до почты пешком, затратив для этого на 1 мин больше, чем если бы он проехал дальше на трамвае до остановки B и прошел от B до почты пешком. Расстояние от A до почты равно 300 м, а от B до почты — 100 м. Если бы пассажир шел от A до почты с удвоенной скоростью, то он затратил бы на это расстояние такое же время, что и трамвай на расстояние от A до B Определите скорость пассажира.

9. Площадь треугольника AMC равна 10 см^2. Точка K лежит на продолжении стороны AM, причем $MK = 2AM$. Найдите площадь треугольника AKC.

10. В правильной четырехугольной пирамиде $ABCDE$ точка K — середина бокового ребра EC; точка M лежит на стороне основания DC, причем $MC = 3DM$. Разложите вектор $\overline{MK}$ по векторам $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AE}$. В ответе запишите сумму коэффициентов разложения.

Вариант V

1. Упростите до числового значения выражение

$$\frac{x^{4/3} - 8x^{1/3}y}{x^{2/3} + 2(xy)^{1/3} + 4y^{2/3}}\left(1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}\right)^{-1} - \frac{1}{x^{-2/3}}.$$

2. Вычислите

$$\left(7^{\log_{\sqrt{7}}\sqrt{3}} + 2^{3-\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}4} - 3\cdot 6^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}4}\right) : 3^{-\log_{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{27}} - 1}.$$

3. Упростите до числового значения выражение

$$\sin^2\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right).$$

4. Найдите решения уравнения

$$\log_{1/2}|x - 2| = -1 + \log_{1/2} x.$$

В ответе запишите количество решений.

5. Найдите решения уравнения $\sqrt{3}\sin^2 x + 0{,}5\sin 2x = 0$, принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$. В ответе запишите количество решений.

6. Найдите множество решений неравенства

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7x^2+3x-7}{2x-1}} < \left(\frac{1}{8}\right)^x.$$

В ответе запишите наименьшее целое решение.

7. Найдите точку минимума функции $y = (x + 2)^2(2x + 1)$. В ответе запишите значение функции в этой точке.

8. Бригада лесорубов заготовила 216 м^3 древесины и переехала на другое место, где заготовила еще 288 м^3 древесины. Переезд занял время, за которое бригада смогла бы заготовить еще 144 м^3 древесины, если бы ее производительность увеличилась вдвое. На заготовку 216 м^3 древесины ушло на 6 дней меньше, чем на переезд и на заготовку 288 м^3 древесины. Найдите производительность бригады, т. е. количество древесины (в м^3), заготавливаемой за день.

9. В равнобедренном треугольнике основание равно 30 см, а высота, опущенная на это основание, равна 20 см. Определите длину высоты, опущенной на боковую сторону треугольника.

10. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка O является центром симметрии грани D_1C_1CD. Разложите вектор $\overline{OA_1}$ по векторам $\overline{AB_1}$, $\overline{AD_1}$ и $\overline{AA_1}$. В ответе запишите сумму коэффициентов разложения.

Вариант VI

1. Упростите до числового значения выражение

$$\left(\frac{9a - 25a^{-1}}{3a^{1/2} - 5a^{1/2}} - \frac{a + 7 + 10a^{-1}}{a^{1/2} + 2a^{-1/2}}\right)^2 \cdot 3a^{-1}.$$

2. Вычислите

$$\left(9^{2 - \log_{\sqrt{3}} \sqrt[4]{27}} - (\sqrt{5})^{\log_5 49} + 6^{1 - \log_{\sqrt{6}} \sqrt{3}}\right) : \sqrt{10^{\lg 25}}.$$

3. Упростите до числового значения выражение

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}{\sqrt{2}\sin 2\alpha}.$$

4. Найдите решения уравнения

$$(x^2)^{(\log_x \sqrt{8}) - 1} = 32.$$

В ответе запишите количество решений.

5. Найдите решения уравнения

$$4\cos^2 x + 0{,}5\sin 2x + 3\sin^2 x = 3,$$

принадлежащие отрезку $\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]$. В ответе запишите количество решений.

6. Найдите множество решений неравенства

$$(0,5)^{x - \frac{3}{x}} > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

В ответе запишите наибольшее целое решение.

7. Найдите точку минимума функции $y = (x + 5)^2(x - 1)$. В ответе запишите значение функции в этой точке.

8. Первый насос выкачал из котлована 12 000 л воды и остановился. После перерыва второй насос выкачал еще 30 000 л воды. Производительность второго насоса вдвое больше, чем у первого. За время перерыва первый насос смог бы выкачать 3000 л воды. Время перерыва вместе со временем работы второго насоса на 1 ч больше, чем время работы первого насоса. Найдите производительность первого насоса, т. е. количество литров воды, которое он выкачивал за 1 мин.

9. В треугольнике ABC биссектриса угла ACB пересекает сторону AB в точке D. Из точки D проведена прямая, параллельная основанию AC, и пересекающая сторону BC в точке E. Длина стороны BC равна 12 см, а длина стороны AC равна 18 см. Определите длину отрезка DE.

10. В правильной четырехугольной пирамиде $ABCDE$ с вершиной E точка O — центр основания; точка K лежит на ребре CE, причем $EK = 3KC$. Разложите вектор $\overline{OK}$ по векторам $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ и $\overline{AE}$. В ответе запишите сумму коэффициентов разложения.

Вариант VII

1. Упростите до числового значения выражение

$$\left(\frac{4a - 9a^{-1}}{2a^{1/2} - 3a^{-1/2}} + \frac{a - 4 + 3a^{-1}}{a^{1/2} - a^{-1/2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

2. Вычислите

$$\left(49^{1 - \log_7 2} + 6^{-\log_{\sqrt{6}} 2}\right) : \sqrt{16^{-\log_{1/16} 25}}.$$

3. Упростите до числового значения выражение

$$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

4. Найдите решения уравнения

$$\log_2 |x-3| = 2 + \log_2 (x+1).$$

В ответе запишите количество решений.

5. Найдите решения уравнения

$$1 - \cos 2x + 4\sin^2 x \cos x = 0,$$

принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$. В ответе запишите количество решений.

6. Найдите множество решений неравенства

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3x^2-6}{2x-1}} \geqslant 2^{-x}.$$

В ответе запишите наименьшее целое число, не являющееся решением.

7. Найдите точку максимума функции

$$y = \frac{x^2-3x}{x+1}.$$

В ответе запишите значение функции в этой точке.

8. На станке было обработано 400 деталей. После перерыва производительность станка увеличилась в 2 раза и было обработано еще 1200 деталей за время, равное времени перерыва. Обработка 400 деталей заняла на 0,5 ч меньше, чем перерыв и обработка 1200 деталей. Найдите производительность станка (количество деталей, обрабатываемых за 1 ч) до перерыва в работе.

9. В равнобедренной трапеции $ABCD$ длина основания AD равна 9 см, длина основания BC равна 3 см, длина боковой стороны равна 5 см. Через вершину B проведена прямая, делящая пополам диагональ AC и пересекающая AD в точке K. Найдите площадь треугольника BDK.

10. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина ребра B_1C_1, точка K лежит на ребре DC, причем $KC = 2DK$. Разложите вектор $\overline{MK}$ по векторам $\overline{AD}$, $\overline{AA_1}$ и $\overline{AB_1}$. В ответе запишите сумму коэффициентов разложения.

Вариант VIII

1. Упростите до числового значения выражение

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}.$$

2. Вычислите

$$\left(\sqrt{36^{1+\frac{1}{2}\log_6 4}}+9^{1-\frac{1}{3}\log_3 27}-(\sqrt{2})^{\log_2 49}\right):11^{\log_{\sqrt{11}} 2}.$$

3. Упростите до числового значения выражение

$$\frac{1-2\sin^2\alpha}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}.$$

4. Найдите решения уравнения

$$\log_{1/2}(2-x)-\log^2_{1/2}(2-x)=2-\log_{2x/3}\frac{4x^2}{9}.$$

В ответе запишите количество решений.

5. Найдите решения уравнения $3\sin^2 x = 2 - \cos^2 x$, принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$. В ответе запишите количество решений.

6. Найдите множество решений неравенства

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x < (0{,}2)^{\frac{2}{3-x}}.$$

В ответе запишите наименьшее целое решение.

7. Найдите точку минимума функции $y=(x+5)^2(x-1)$. В ответе запишите значение функции в этой точке.

8. Ученик прочитал 105 страниц книги. Отдохнув, он увеличил скорость чтения в 1,5 раза и прочитал еще 90 страниц за время, равное времени отдыха. Отдых и чтение после него заняли на 0,5 ч больше, чем прочтение 105 страниц. Сколько страниц в час читал ученик до отдыха?

9. Длина стороны квадрата $ABCD$ равна 6 см. Пусть K — середина стороны BC, а P — точка пересечения прямых AK и BD. Найдите площадь треугольника BKP.

10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M — середина стороны основания CB; точка K — середина ребра A_1C_1. Разложите вектор $\overline{MK}$ по векторам $\overline{CA}$, $\overline{CC_1}$ и $\overline{CB_1}$. В ответе запишите наибольший из коэффициентов разложения.

Вариант IX

1. Упростите до числового значения выражение

$$\left(\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}}:\frac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab}\right)\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{-1}+\frac{ab}{(a+b)^2}.$$

2. Вычислите

$$\left(5^{2-\log_{\sqrt{5}}4}-10^{1-\frac{1}{2}\lg 25}\right):7^{4\log_{49}\sqrt{7}}.$$

3. Упростите до числового значения выражение

$$\cos^2\alpha+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right).$$

4. Найдите решения уравнения

$$2+\log_4^2 x+\log_4 x=\log_{4x}16x^2.$$

В ответе запишите количество решений.

5. Найдите решения уравнения $(\sin x-\cos x)^2=\sin 2x$, принадлежащие отрезку $\left[0;\ \frac{5\pi}{4}\right]$. В ответе запишите количество решений.

6. Найдите множество решений неравенства

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{6-x}>16^{\frac{1}{1-x}}.$$

В ответе запишите наименьшее целое решение.

7. Найдите точку минимума функции $y=(x-1)^2(x+2)$. В ответе запишите значение функции в этой точке.

8. Туристы прошли 30 км и сделали привал. Если бы это расстояние они прошли с удвоенной скоростью, то затратили бы время, равное времени отдыха на привале. Весь обратный путь туристы проехали на автобусе, скорость которого в 10 раз больше скорости, с которой туристы шли пешком. Время пешего перехода на 1 ч больше, чем время, затраченное на отдых и на обратный путь. Определите скорость, с которой туристы шли пешком.

9. В прямоугольном треугольнике ABC длина катета CA равна 4 см, длина катета CB равна 3 см. Найдите площадь треугольника BMH, где CH — высота, а AM — медиана треугольника ABC.

10. В тетраэдре $ABCD$ точка M — середина ребра AB; точка K лежит на ребре DC, причем $DK=3KC$. Разложите вектор $\overline{MK}$ по векторам $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$. В ответе запишите сумму коэффициентов разложения.

Вариант X

1. Решите уравнение $\log_{x-4}(x^2 - 10x + 26) = 1$.

2. Преобразуйте до числового значения выражение

$$\left(\sqrt{a} + \frac{1 - \frac{1}{a^2}}{\sqrt{a} + \sqrt{a^{-1}}} - \frac{a - a^{-2}}{a^{1/2} - a^{-1/2}}\right) + \frac{2}{a\sqrt{a}}.$$

3. Найдите сумму корней уравнения

$$\log_4 \frac{x + 10}{x - 5} + \log_4 (x - 2) = 3.$$

4. Найдите наименьшее из чисел, составляющих решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 1, \\ x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 2. \end{cases}$$

5. Вычислите $y = 4\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + \sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}6$, а $\cos\alpha = -0{,}8$.

6. Из всех прямоугольников, имеющих периметр 10 см, найдите тот, площадь которого наибольшая. В ответе запишите площадь этого прямоугольника.

7. Решите уравнение $\frac{15}{\cos x + 1} = 11 - 2\cos x$. В ответе укажите количество корней этого уравнения, принадлежащих отрезку $\left[0; \frac{9\pi}{4}\right]$.

8. Найдите наибольшее целое положительное число, для которого выполняется неравенство $2^x - 2 < 2^{3-x}$.

9. Радиус сектора с центральным углом α равен 3, а радиус окружности, вписанной в этот сектор, равен 1. Найдите угол α (в градусах).

10. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Диагонали ромба имеют длину 6 и 8 см. Длина диагонали боковой грани равна 13 см. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

Вариант XI

1. Стоимость ручки была на 20% больше стоимости тетради. Стоимость ручки возросла на 40%, а общая стоимость ручки и тетради возросла на 50%. На сколько процентов возросла стоимость тетради?

2. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} y - 4x > 4, \\ y = a(x + 0{,}5)^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение. В ответе укажите наименьшее целое значение a.

3. Высота, проведенная к основанию AC равнобедренного треугольника ABC, равна 12, а $\cos A = 0{,}6$. Найдите расстояние от точки пересечения медиан до точки пересечения биссектрис треугольника.

4. Апофема правильной треугольной пирамиды равна $12\sqrt{3}$, а тангенс угла наклона бокового ребра к плоскости основания равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите расстояние между центрами вписанного и описанного шаров.

5. Решите неравенство

$$[\log_6 (x^2 - x) - 1](4x^2 - 8x - 5) > 0.$$

В ответе укажите наибольшее целое отрицательное решение.

6. Среди точек, лежащих на параболе $y = \frac{x^2}{4} - 1$, найдите ближайшую к точке (8; 1). В ответе укажите ординату этой точки.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = \frac{1}{2}, \\ \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

В ответе запишите (в градусах) наименьшее значение x, принадлежащее отрезку [0°; 180°].

8. Решите неравенство

$$\frac{x^3 - 8 + 6x(2 - x)}{|3 - 4x|} \leqslant \sqrt{4x - 3}.$$

В ответе укажите наибольшее решение.

9. Решите уравнение

$$2^{(1 - 2x)/(2x + 1)} - 12 \cdot 2^{-2x/(2x + 1)} - 32 = 0.$$

10. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, построенном на векторах $\overline{AB} = (1;\ 0;\ 1)$, $\overline{AD} = (0;\ 1;\ 1)$ и $\overline{AA_1} = (1;\ 1;\ 1)$, известно, что $\overline{AP} = \frac{1}{4}\overline{AC_1}$, $\overline{B_1Q} = \frac{1}{8}B_1D$. Найдите наибольшую координату вектора $\overline{PQ}$.

Вариант XII

1. Добыча угля на второй шахте была на 40% больше, чем на первой. На первой шахте добыча уменьшилась на 18%, а общая добыча на двух шахтах уменьшилась на 25%. На сколько процентов уменьшилась добыча угля на второй шахте?

2. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} x - ay < -4, \\ x = y^2 - 2y \end{cases}$$

не имеет решений. В ответе укажите наименьшее значение a.

3. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 24, а $\operatorname{tg} A = 0{,}75$. Найдите расстояние от точки пересечения высот до точки пересечения медиан треугольника.

4. Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна стороне ее основания и равна $16\sqrt{3}$. Найдите расстояние между центрами вписанного и описанного шаров.

5. Решите неравенство

$$(6x^2 + 31x + 18)[\log_2 (x^2 + 4x + 3) - 3] > 0.$$

В ответе укажите наименьшее целое положительное решение.

6. Среди точек, лежащих на параболе $y = 1 - 2x^2$, найдите ближайшую к точке $\left(1; \frac{3}{4}\right)$. В ответе укажите абсциссу этой точки.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ \cos x - \cos y = \sqrt{3}. \end{cases}$$

В ответе запишите (в градусах) наименьшее значение x, принадлежащее отрезку $[0°; 180°]$.

8. Решите неравенство

$$\frac{x^2(x + 6) + 2(7x - 6)}{|2x - 20|} \leqslant \sqrt{20 - 2x} - 1.$$

В ответе укажите наибольшее решение.

9. Решите уравнение

$$5^{(x + 1)/(x - 3)} - 23 \cdot 5^{(x - 1)/(x - 3)} - 250 = 0.$$

10. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, построенном на векторах $\overline{AB} = (1; -1; 2)$, $\overline{AD} = (2; 1; -3)$ и $\overline{AA_1} = (3; -2; 4)$, известно, что $\overline{AP} = \frac{1}{8}\overline{AB_1}$, $\overline{B_1Q} = \frac{3}{4}\overline{B_1C}$. Найдите наибольшую координату вектора $\overline{PQ}$.

Вариант XIII

1. Сезонная цена на овощи снизилась на 20%, благодаря чему на сумму 150 р. было приобретено овощей на 5 кг больше, чем до снижения. Сколько килограммов овощей было приобретено по новой цене?

2. Вычислите

$$\sqrt{\log_2 112 - 4\sqrt{\log_2 7}} + \sqrt{\log_2 14 - 2\sqrt{\log_2 7}}.$$

3. Решите уравнение $\sin x \sin 3x + \cos 4x = 0$. В ответе укажите (в градусах) наименьшее из решений, принадлежащих интервалу $(0; \pi)$.

4. Решите уравнение $(0{,}3)^x \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{x-1} = \left(\frac{5}{24}\right)^{-1}$.

5. Решите неравенство $-7 \leqslant 3x + \frac{2}{x} < 0$. В ответе укажите сумму целых решений неравенства.

6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{1/3}(3x - 9) > -2, \\ \dfrac{x^2 + 3}{x + 2} \leqslant 4. \end{cases}$$

В ответе укажите наибольшее решение.

7. Для каких значений k точка минимума функции

$$f(x) = 2x^3 + 3kx^2 - 6(k + 5)x + 3$$

лежит на отрезке [2; 5]? В ответе укажите наименьшее значение k.

8. Найдите $7\ \mathrm{tg}\ 2\alpha$, если $|\sin \alpha| = \frac{3}{5}$ и $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$.

9. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $6\sqrt{5}$, а площадь боковой грани в 3 раза больше площади основания. Найдите объем пирамиды.

10. В равнобедренный треугольник MNP, у которого основание MP равно высоте NO, вписан прямоугольник $ABCD$, площадь которого равна 12. Вершины A и B лежат на боковой стороне NP, вершина C — на основании MP так, что $MC : CP = 1 : 3$, а вершина D лежит на MN. Найдите площадь треугольника MNP.

Вариант XIV

1. В связи с увеличением надежности работы изделия его цена поднялась на 5%, благодаря чему при реализации 100 изделий доход предприятия возрос на 12 500 р. Какова новая цена изделия?

2. Вычислите

$$\frac{\sqrt{\log_2 48 - 4\sqrt{\log_2 3} - 3}}{\sqrt{\log_2 6 + 2\sqrt{\log_2 3}}} - 2.$$

3. Решите уравнение $\sin 5x - \sin x \cos 4x = 0$. В ответе укажите (в градусах) наименьшее из решений, принадлежащих интервалу $(-\pi; 0)$.

4. Решите уравнение $2^{2x-3} \cdot 5^{3x-2} = 50^{x+1}$.

5. Решите неравенство $1 \leqslant \frac{x-1}{2x+1} < 2$. В ответе укажите наименьшее решение.

6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_4 (3x + 9) < 2, \\ \dfrac{x^2 - 31}{x - 5} \geqslant 5. \end{cases}$$

В ответе укажите наименьшее решение.

7. Для каких значений k точка максимума функции

$$f(x) = -2x^3 + (9k + 6)x^2 - 36kx - 1$$

лежит на отрезке $[6; 12]$? В ответе укажите наибольшее значение k.

8. Найдите $(3\sqrt{3} + 4)\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$, если $|\cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{10}}$ и $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

9. Высота правильной треугольной пирамиды $2\sqrt{26}$, а ее боковое ребро равно $2\sqrt{30}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

10. В равнобедренный треугольник ABC $\left(AB = BC = 6,\ AC = \frac{12}{\sqrt{5}}\right)$, вписан прямоугольник $KLMN$. Вершины K и L лежат на стороне BC, причем $BK = KC$, вершина M лежит на AC, а вершина N — на AB. Найдите площадь прямоугольника.

Вариант XV

1. Из пункта A в пункт B выезжает велосипедист. Через 2 ч вслед за ним выезжает мотоциклист, а еще через 2 ч он обгоняет велосипедиста на $\frac{1}{6}$ часть расстояния от A до B. За какое время проедет расстояние от A до B велосипедист, если мотоциклисту на это требуется на 3 ч 36 мин меньше?

2. При каких значениях a уравнения

$$x^2 + (a - 7)x + 6 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + (1 - a)x - 2 = 0$$

имеют общий корень? В ответе укажите наибольшее значение a.

3. Найдите $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, если $\operatorname{tg} x = -\frac{4}{3}$, $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

4. Основания трапеции равны 4 и 25, а боковые стороны — 10 и 17. Найдите площадь трапеции.

5. Найдите ординату точки пересечения с осью Oy общей касательной к кривым $y = \frac{x+1}{x}$ и $y = 1 - x^2$.

6. Решите уравнение

$$\log_2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \log_2 \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = -1.$$

В ответе укажите количество корней на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

7. Решите неравенство

$$2 \log_5 x + \log_2 x < \log_2 x \cdot \log_5 x.$$

В ответе укажите наименьшее целое решение.

8. Решите неравенство

$$|2^x - 4| + |2^x - 6| \leqslant 2^x + 4.$$

В ответе укажите наибольшее целое решение.

9. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt[3]{45 - x} + \sqrt[3]{20 + x} = 5$.

10. Сторона основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна $2\sqrt{3}$, а высота пирамиды равна $\sqrt{26}$. Точка D лежит на боковом ребре SC и делит его в отношении 2 : 1, считая от вершины S. Найдите площадь сечения ABD.

Вариант XVI

1. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля. Через 1 ч расстояние между ними составило $\frac{2}{3}$ расстояния от A до B (встреча состоялась позже). За какое время проедет расстояние от A до B первый автомобиль, если второму для этого требуется на 2,5 ч меньше?

2. При каких значениях a уравнения

$$x^2 + (1 - a)x - 8 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + (a - 8)x + 4 = 0$$

имеют общий корень? В ответе укажите наименьшее значение a.

3. Найдите $\cos\frac{x}{2}$, если $\sin x = -0{,}96$, $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

4. Высота трапеции равна 12, а ее диагонали равны 15 и 20. Найдите площадь трапеции.

5. Найдите абсциссу точки пересечения с осью Ox общей касательной к кривым $y = x^2 + 3$ и $y = \frac{3x+1}{x}$.

6. Решите уравнение

$$\log_3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \log_3 \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1 - 2\log_3 2.$$

В ответе укажите количество корней на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

7. Решите неравенство

$$\log_3 x + \log_4 x > 2\log_3 x \cdot \log_4 x.$$

В ответе укажите наибольшее целое решение.

8. Решите неравенство

$$|3^x - 4| + |3^x - 6| \leqslant 3^x + 7.$$

В ответе укажите наибольшее целое решение.

9. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt[3]{50 + x} - \sqrt[3]{x - 22} = 6$.

10. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна $6\sqrt{2}$, а боковое ребро равно $3\sqrt{7}$. Точка E лежит на боковом ребре SC и делит его в отношении $1 : 2$, считая от вершины S. Найдите площадь сечения BDE.

Вариант XVII

1. Сумма трех чисел, составляющих возрастающую геометрическую прогрессию, равна 39. Если сумму первого и третьего чисел разделить на второе, то в частном и в остатке получится 3. Найдите третье число.

2. При каких значениях a корни уравнения

$$4^x - 2^{x+3} + 8a - a^2 = 0$$

различны и удовлетворяют условию $x > 1$? В ответе укажите сумму целых значений a.

3. Найдите $\sin^3 x + \cos^3 x$, если $\sin x + \cos x = 0{,}4$.

4. Основания равнобедренной трапеции равны 2 и 8. Найдите радиус вписанной в нее окружности.

5. Решите уравнение $2\cos^2 \frac{\pi}{x} + \sin \frac{\pi}{x} - 1 = 0$. В ответе укажите наибольшее решение на интервале $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

6. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - x - 2}\,(2^x + 2^{4-x} - 10) \leqslant 0$. В ответе укажите наименьшее решение.

7. Найдите сумму корней уравнения $\log_6^2 \frac{36}{x} - 3 = \log_6 \frac{6}{x^2}$.

8. Решите неравенство $\frac{\sqrt{3-2x} + 6x - 5}{x} > 2$. В ответе укажите наибольшее целое решение.

9. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{2 - 2x - \sqrt{1-2x}}{\sqrt{1-2x}}$ на отрезке $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{8}\right]$.

10. Конус вписан в шар. Найдите отношение площади поверхности шара к площади основания конуса, если высота конуса равна диаметру его основания.

Вариант XVIII

1. Сумма трех чисел, составляющих убывающую геометрическую прогрессию, равна 63. Если сумму первого и третьего чисел разделить на второе, то в частном получится 4, а в остатке 3. Найдите знаменатель прогрессии.

2. При каких значениях a корни x_1 и x_2 уравнения

$$9^x - (2a + 6)3^x + a^2 + 6a = 0$$

удовлетворяют условию $x_1 < 2 < x_2$? В ответе укажите сумму целых значений a.

3. Найдите $\sin^4 x + \cos^4 x$, если $\sin x + \cos x = 1{,}2$.

4. Разность оснований равнобедренной трапеции равна 12, а радиус вписанной в нее окружности равен 4. Найдите площадь трапеции.

5. Решите уравнение $2\sin^2 \frac{\pi}{x} - \cos \frac{\pi}{x} - 1 = 0$. В ответе укажите наибольшее решение на интервале $\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$.

6. Решите неравенство

$$\sqrt{-x^2 + 4x - 3}\,(3^x + 3^{6-x} - 90) \geqslant 0.$$

В ответе укажите наибольшее решение.

7. Найдите сумму корней уравнения $\log_3^2 \frac{27}{x} = 5 - \log_3 \frac{9}{x}$.

8. Решите неравенство $\frac{10x + 3 - \sqrt{2x + 2}}{x} > 6$. В ответе укажите наименьшее решение.

9. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{6 - 3x + 2\sqrt{2 - 3x}}{\sqrt{2 - 3x}}$ на отрезке $\left[-\frac{7}{3}; \frac{1}{3}\right]$.

10. Высота конуса относится к его образующей как 4 : 5. Найдите отношение площади поверхности вписанного в конус шара к площади боковой поверхности конуса.

Вариант XIX

1. Два комбайна, из которых второй начал работу на 4 ч позже, убрали урожай с участка за 16 ч. За какое время мог бы убрать урожай каждый из комбайнов в отдельности, если известно, что первому на это понадобилось бы на 8 ч больше, чем второму? В ответе укажите меньшее время.

2. Вычислите $\log_{\sqrt{a}} (b\sqrt[4]{a}) + \log_{\sqrt{b}} a + \log_a \sqrt{ab}$, если $\log_{a^2b} \frac{b}{a} = \frac{1}{4}$.

3. Решите неравенство $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{4}{3x+1}} > (0{,}2)^{\frac{3}{2-x}}$. В ответе запишите наибольшее целое отрицательное решение.

4. Решите уравнение $\sin 9x - 2\sin 3x = 0$. В ответе запишите количество корней, принадлежащих отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 2, \\ 2x^2 - y^2 + 2x - y = 4. \end{cases}$$

В ответе запишите большее значение x.

6. Решите уравнение $3 \cdot 2^{2x} + 6^x - 2 \cdot 3^{2x} = 0$.

7. Найдите высоту BD треугольника ABC, образованного осью Ox ($AC \in Ox$) и касательными к кривой $y = 2x^3 - 2x^2 + 12x - 10$, проведенными в точках с абсциссами $x_0 = 1$, $x_1 = 2$.

8. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $\sqrt[4]{48}$, а боковая грань наклонена к плоскости основания под углом $60°$. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

9. Решите неравенство $\log_5 (x + 11) - \log_5 (x^2 - 10x + 21) > 0$. В ответе запишите большее значение середин промежутков, на которых выполняется неравенство.

10. В прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 8, и одним из углов, равным 60°, вписан прямоугольник максимальной площади. Определите длины сторон прямоугольника, если две его вершины лежат на гипотенузе. В ответе запишите большее значение длины.

Вариант XX

1. Первая труба может заполнить бассейн на 36 мин быстрее, чем вторая. Если сначала половину бассейна заполнит первая труба, а затем другую половину — вторая труба, то бассейн заполнится на 30 мин позже, чем при заполнении двумя трубами одновременно. За сколько минут может заполнить бассейн каждая труба в отдельности? В ответе укажите большее время.

2. Вычислите $\log_{\sqrt[4]{ab}} \dfrac{b}{\sqrt{a}} + \log_{\sqrt[4]{ab}} \sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}$, если $\log_{ab} \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{2}$.

3. Решите неравенство $3^{\frac{x^2 - 3x + 4}{x - 1}} \leqslant 9$. В ответе запишите наибольшее решение.

4. Решите уравнение $\sin 3x = 2\cos \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$. В ответе запишите количество корней, принадлежащих отрезку $[0; \pi]$.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 5y = 5, \\ xy - 2y - 3x = -6. \end{cases}$$

В ответе запишите большее значение x.

6. Решите уравнение $2 \cdot 81^{x+1} - 36^{x+1} - 3 \cdot 16^{x+1} = 0$.

7. Найдите длину высоты BD треугольника ABC, образованного осью Oy ($AC \in Oy$) и касательными к кривой $y = (3 - 2x)\sqrt{3 - 2x} - x^2$, проведенными в точках с абсциссами $x_0 = -3$, $x_1 = 1$.

8. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 4, а высота равна $\sqrt{12}$. Найдите объем пирамиды.

9. Решите неравенство

$$\log_4 (21 - 4x - x^2) - \log_4 (x + 4) < 1{,}5.$$

В ответе запишите середину интервала, на котором выполняется неравенство.

10. Бассейн объемом 32 м^3 имеет форму прямоугольного параллелепипеда, в основании которого лежит квадрат. Определите сторону квадрата, если общая площадь боковой поверхности и дна минимальна.

Вариант XXI

1. Решите уравнение $4 \sin^2 x + 9 \operatorname{tg}^2 x = 4$.

2. Решите неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} > \dfrac{1}{2-x}$. Сколько его целых решений входит в область определения функции $y = \log_2 (28 - x)$?

3. Трапеция $KLMN$ с основаниями LM и KN вписана в окружность, центр которой лежит на основании KN. Диагональ LN трапеции равна 4 см, а $\angle MNK = 60°$. Определите длину основания LM.

4. Два стрелка сделали по 30 выстрелов каждый, при этом было 44 попадания, остальные выстрелы не попали в цель. Сколько попаданий было у каждого стрелка, если известно, что у первого на каждый промах приходилось в 2 раза больше попаданий, чем у второго?

5. Решите систему

$$\begin{cases} 2^{x+1} = 4y^2 + 1, \\ 2^x \leqslant 2y. \end{cases}$$

6. Решите уравнение $25^{-x} + 5^{-x+1} = 50$.

7. Найдите все значения x, для которых величина $y = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi (\sin x + \cos x)$ удовлетворяет уравнению

$$2 \log_9 (6 \operatorname{ctg} 2y + 5 \operatorname{tg} y) = 2 + \log_{1/3} (6 \operatorname{ctg} y - \operatorname{tg} y).$$

8. При каких значениях параметра a уравнение $x(x^2 - 27) - 5a + 4 = 0$ имеет два решения?

Вариант XXII

1. Решите уравнение $2 \sin 3x \sin x + (3\sqrt{2} - 1)\cos 2x = 3$. В ответе запишите количество корней, удовлетворяющих неравенствам $2\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$.

2. Решите неравенство $\log_{1/3} (x^2 - 6) + \log_9 x^2 \geqslant 0$. В ответе запишите целые решения.

3. Решите неравенство $\log_9 (x + 7) > \log_3 (x + 1)$.

4. Учебник алгебры, 2 учебника геометрии и 2 учебника тригонометрии стоят вместе 210 р., а 3 учебника алгебры, учебник геометрии и учебник тригонометрии стоят вместе 230 р. Сколько стоят учебник геометрии и учебник тригонометрии вместе?

5. Дана трапеция $ABCD$, причем $BC = 1$, $AD = 2$. Параллельно основаниям BC и AD проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке P, диагональ AC — в точке L, диагональ BD — в точке R и сторону CD — в точке Q. Найдите PQ, если известно, что $PL = LR$.

6. Сколько раз пересекаются графики функций $y = \sin 2x$ и $y = \sqrt{2}\cos x$ на отрезке $[0; 2\pi]$?

7. Найдите все решения уравнения $\sin\left(\frac{4}{3}\pi\sin x\right) = \frac{1}{2}$.

8. Числа a и b таковы, что система

$$\begin{cases} a^2x - ay = 1 - a, \\ bx + (3 - 2b)y = 3 + a \end{cases}$$

имеет единственное решение $x = 1$, $y = 1$. Найдите a и b.

Вариант XXIII

1. Решите уравнение

$$\cos x + 3\sin x = 1 + 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}.$$

В ответе запишите количество корней, удовлетворяющих неравенствам $2\pi < x < 3\pi$.

2. Решите неравенство $\log_3(x + 2) < \log_9(3x + 6)$.

3. Решите уравнение $3 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 3 = 10 \cdot 2^{\sqrt{2-x}}$.

4. Известно, что 2 кг картофеля, 2 кг моркови и 5 кг огурцов стоят в 4 раза дороже, чем 1 кг картофеля, 1 кг моркови и 1 кг огурцов, а 6 кг картофеля, 3 кг моркови и 1 кг огурцов — в 2 раза дороже, чем 1 кг картофеля, 1 кг моркови и 1 кг огурцов. Во сколько раз 1 кг огурцов дороже 1 кг картофеля?

5. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$, площадь которого равна 1, взяты точки: K на AB, L на BC, M на CD и N на AD. При этом $\frac{AK}{KB} = 2$, $\frac{BL}{LC} = \frac{1}{3}$, $\frac{CM}{MD} = 1$, $\frac{DN}{NA} = \frac{1}{5}$. Найдите площадь шестиугольника $AKLCMN$.

6. Найдите точки пересечения графиков функций $y = 4\cos 2x$ и $y = 1 + \sin 4x - 2\sin^2 x$.

7. Найдите все решения уравнения $\sin\left(\frac{11}{8}\pi\cos x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. При каких значениях a и b система

$$\begin{cases} a^2x - by = a^2 - b, \\ bx - b^2y = 2 + 4b \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

Вариант XXIV

1. Решите уравнение $3 + 2\sin 3x \sin x = 3\cos 2x$. В ответе запишите количество корней, удовлетворяющих неравенствам $3 < x < 10$.

2. Решите неравенство $\log_2 (5 - 4x) + \log_{0,5} (2x - x^2) \geqslant 2$.

3. Решите уравнение $4^{-x + 0,5} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 = 0$.

4. Ящик гаек, ящик гвоздей и 2 ящика шурупов весят вместе 100 кг, а 3 ящика гаек, 3 ящика гвоздей и ящик шурупов весят вместе 200 кг. Сколько весят ящик гаек и ящик гвоздей вместе?

5. Дана трапеция $ABCD$. Параллельно ее основаниям проведена прямая, пересекающая боковые стороны AB и CD соответственно в точках P и Q, а диагонали AC и BD — соответственно в точках L и R. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Известно, что $BC = 1$, $AD = 2$, а площади треугольников BOC и LOR равны. Найдите длину отрезка PQ.

6. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \cos 3x - \sin x$ и $y = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

7. Найдите все решения уравнения $\sin\left(\frac{3}{2}\pi\cos x\right) = -\frac{1}{2}$.

8. При каких значениях a система

$$\begin{cases} a^2x + (2 - a)y = 4 + a^3, \\ ax + (2a - 1)y = a^5 - 2. \end{cases}$$

не имеет решений?

Вариант XXV

1. Решите уравнение

$$\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} - 1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\cos x.$$

Сколько корней удовлетворяют неравенствам $0 < x < 4\pi$?

2. Решите неравенство $2 \cdot 3^{2x^2} + 4 \leqslant 3^{x^2 + 2}$.

3. Решите уравнение $2\log_5 \sqrt{x} - 2 = \log_x \frac{1}{5}$.

4. Одну и ту же площадку можно покрыть разноцветной плиткой тремя способами. При первом способе требуется по 100 штук плиток белого, красного и синего цветов; при втором — 150 белых, 150 красных и 50 синих плиток, при третьем — 200 белых, 50 красных и 50 синих. Во сколько раз площадь синей плитки больше площади красной плитки?

5. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \sqrt{3}\sin(3x + \pi)$ и $y = \sin x + \cos\left(5x - \frac{9\pi}{2}\right)$. Сколько таких точек имеется на отрезке $[0; \pi]$?

6. Дан треугольник ABC, площадь которого равна 1. На медианах AK, BL и CN взяты соответственно точки P, Q, R так, что $\frac{AP}{PK} = 1$; $\frac{BQ}{QL} = \frac{1}{2}$; $\frac{CR}{RN} = \frac{5}{4}$. Найдите площадь треугольника PQR.

7. Найдите все решения уравнения $\sin\left(\frac{13}{9}\pi\sin x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. Числа a, b, c таковы, что система

$$\begin{cases} ax - by = 2a - b, \\ (c + 1)x + cy = 10 - a + 3b \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений, причем $x = 1$, $y = 3$ — одно из этих решений. Найдите a, b, c.

Вариант XXVI

1. Решите уравнение $6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$. Сколько корней удовлетворяет неравенствам $\frac{\pi}{2} < x < 3\pi$?

2. Решите неравенство $\log_{0,5} \log_2 \frac{x}{x+1} > 0$.

3. Решите уравнение $\sqrt{2x - 3} + \sqrt{4x + 1} = 4$.

4. Известно, что за 0,5 кг лука, 3 кг картофеля и 1 кг огурцов заплатили 23 р. 80 к., а за 2 кг лука и 4 кг огурцов — 82 р. Сколько стоят 1 кг лука, 2 кг картофеля и 2 кг огурцов?

5. Дан параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = 2$ и $BC = 3$. Найдите его площадь, если известно, что диагональ AC перпендикулярна отрезку BE, соединяющему вершину B с серединой E стороны AD.

6. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = 2\cos^2 x - \sin\left(\frac{3}{2}\pi - 4x\right)$ и $y = \sin^2 5x + \cos^2 5x$. Сколько таких точек имеется на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$?

7. Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg}(4\sin x) = \sqrt{3}$.

8. Числа m и n таковы, что система

$$\begin{cases} m^2x - my = 1 - m, \\ -nx + (2n - 3)y = -m - 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение $x = 1$, $y = 1$. Найдите m и n.

Вариант XXVII

1. Решите уравнение $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} = -\frac{1}{2}\sin x$. В ответе запишите сумму корней, удовлетворяющих неравенствам $-2 < x < 100$.

2. Решите неравенство $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x}{2}} \leqslant (0{,}4)^{\frac{3-0{,}5x^2}{x+2}}$.

3. Решите уравнение $\sqrt{x+3} + \sqrt{7-x} = 4$.

4. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^3 + x$ в точке с абсциссой $x = 1$.

5. Две машины подметали участок шоссе между пунктами A и B. Они выехали одновременно (первая из A, а вторая из B) и двигались навстречу друг другу каждая со своей постоянной скоростью. Когда вторая машина проехала 14 км, она встретила первую. Если бы первая машина работала одна, то после 4 ч работы ей бы еще оставалось подмести 23 км шоссе. Какова скорость первой машины, если известно, что вторая машина за 4 ч подметала на 1 км меньше, чем первая за 3 ч?

6. Решите неравенство $\log_3 x - \log_3^2 x \leqslant \frac{3}{2}\log_{1/2\sqrt{2}} 4$. В ответе запишите наименьшее целое решение.

7. Найдите все решения уравнения $\sqrt{(1+\cos x)^2 + \sin^2 x} + 2\sin x = 0$, заключенные между $\frac{3\pi}{2}$ и $\frac{5\pi}{2}$.

8. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3\sqrt{39}$ и $BC = \sqrt{39}$. Известно, что $\angle BAD = 30°$ и $\angle ADC = 60°$. Через точку D проходит прямая, делящая трапецию на две равновеликие фигуры. Найдите длину отрезка этой прямой, находящегося внутри трапеции.

Вариант XXVIII

1. Решите уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) + \sin x = 2\cos 3x$. В ответе запишите сумму корней, удовлетворяющих неравенствам $-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4}$.

2. Решите неравенство $(0{,}2)^{\frac{2x-3}{x-2}} > 5$. В ответе запишите наибольшее целое решение.

3. Решите уравнение $4 + \sqrt{26 - x^2} = x$.

4. Составьте уравнения касательных к графику функции $f(x) = x^2 - 2x$ в точках его пересечения с осью абсцисс.

5. Из города A в город B выезжает велосипедист, а через 3 ч после этого из города B навстречу ему выезжает мотоциклист, скорость которого в 3 раза больше скорости велосипедиста. Велосипедист и мотоциклист встречаются посередине между A и B. Если бы мотоциклист выехал не через 3 ч, а через 2 ч после велосипедиста, то встреча произошла бы на 15 км ближе к A. Найдите расстояние между A и B.

6. Решите неравенство $\log_2 (2 - x) - \log_2 (x - 1) > \log_{\sqrt{2}} 3$.

7. Решите уравнение $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$. Сколько корней этого уравнения имеется на отрезке $[-1; 4]$?

8. На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая отрезок AB в точке D. Найдите отношение площадей треугольников ABC и BCD, если известно, что $AC = 15$ см, $BC = 20$ см и $\angle ABC = \angle ACD$.

Вариант XXIX

1. Найдите меньший корень уравнения $(x^2 + 2x)\sqrt{x + 1} = 0$.

2. Решите уравнение $(x^2 - x + 1)^{\frac{x-2}{x}} = 1$.

3. Найдите решения системы

$$\begin{cases} 2x^2 - y = 3, \\ 2y^2 - x = 3, \end{cases}$$

являющиеся рациональными числами.

4. Решите уравнение $\log_{2x} x = \log_{4x} x$.

5. При каких значениях a уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = a$ имеет решение?

6. Решите неравенство $x^2 - 7x + 12 < |x - 4|$. В ответе запишите целое решение.

7. Два спортсмена стартовали один за другим с интервалом в 2 мин. Второй спортсмен догнал первого на расстоянии 1 км от точки старта, а пробежав от точки старта 5 км, повернул обратно и встретился с первым. Эта встреча произошла через 20 мин после старта первого спортсмена. Найдите скорость второго спортсмена.

8. В прямоугольном треугольнике ABC (C — прямой угол) проведена высота CD. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники CDB и ADC, если $BC = 4$, $AC = 3$.

Вариант XXX

1. Найдите больший корень уравнения $(x-4)\sqrt{3+2x-x^2}=0$.

2. Решите уравнение

$$\sin^2\frac{3x}{2}+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5x}{2}\right)=\sin^2\frac{11x}{2}+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{13x}{2}\right).$$

Сколько его корней удовлетворяют неравенствам $0<x<\frac{\pi}{4}$?

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=17, \\ x+xy+y=9. \end{cases}$$

4. Решите уравнение $\log_{1-x}3-\log_{1-x}2=\frac{1}{2}$.

5. При каком значении a хотя бы одно число, большее 1, удовлетворяет неравенству $x^2-ax+2a\leqslant 0$?

6. Найдите целочисленные решения неравенства

$$\log_2\left(1+\frac{1}{x}\right)+\log_{1/2}\left(1+\frac{x}{4}\right)>1.$$

7. Пешеход вышел из пункта A в пункт B. Через $\frac{3}{4}$ ч из A в B выехал велосипедист. Когда велосипедист прибыл в пункт B, пешеходу оставалось пройти $\frac{3}{8}$ всего пути. Какое время затратил пешеход на весь путь, если известно, что велосипедист догнал пешехода на половине пути из A в B, а скорости велосипедиста и пешехода постоянны?

8. Найдите длину стороны квадрата, вписанного в прямоугольный треугольник с катетами, равными 3 и 4. Одна из сторон квадрата лежит на гипотенузе.

Ответы

Вариант XI. **1.** На 62%. **2.** –1. **3.** 0,5. **4.** 9. **5.** –3. **6.** 3. **7.** 90°. **8.** 7. **9.** $-\frac{3}{8}$. **10.** 1,25.

Вариант XII. **1.** На 30%. **2.** –6. **3.** 13. **4.** 4. **5.** 2. **6.** 0,5. **7.** 30°. **8.** 2. **9.** 4. **10.** 2,75.

Вариант XIII. **1.** 25 кг. **2.** 1. **3.** 30°. **4.** –3. **5.** –3. **6.** 5. **7.** –5. **8.** –24. **9.** 900. **10.** 32.

Вариант XIV. **1.** 2625 р. **2.** –3. **3.** –135°. **4.** 4. **5.** –2. **6.** –1. **7.** 4. **8.** 1,1. **9.** 108. **10.** 4.

Вариант XV. **1.** За 6 ч. **2.** 2. **3.** −0,5. **4.** 116. **5.** 5. **6.** Два корня. **7.** 21. **8.** 3. **9.** 25. **10.** 5.

Вариант XVI. **1.** За 7,5 ч. **2.** 3. **3.** −0,6. **4.** 150. **5.** −0,25. **6.** Два корня. **7.** 3. **8.** 2. **9.** −28. **10.** 24.

Вариант XVII. **1.** 27. **2.** 8. **3.** 0,568. **4.** 2. **5.** 0,4. **6.** −1. **7.** 37. **8.** −1. **9.** 1. **10.** 6,25.

Вариант XVIII. **1.** 0,25. **2.** 30. **3.** 0,9032. **4.** 80. **5.** 0,6. **6.** 3 **7.** 732. **8.** −1. **9.** 6. **10.** 0,6.

Вариант XIX. **1.** За 24 ч. **2.** 7. **3.** −3. **4.** Пять корней. **5.** 1. **6.** 1. **7.** 10. **8.** 9. **9.** 8,5. **10.** 4.

Вариант XX. **1.** За 72 мин. **2.** 2. **3.** 3. **4.** Четыре корня. **5.** 2,5. **6.** −0,5. **7.** 2. **8.** 6. **9.** 1. **10.** 4.

Вариант XXI. **1.** $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. **2.** 26 решений. **3.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см. **4.** 24 и 20. **5.** $x = 0,\ y = 0{,}5$. **6.** $x = -1$. **7.** $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \pi k;\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. **8.** $a = -10;\ a = \frac{58}{5}$.

Вариант XXII. **1.** Два корня. **2.** −3; 3. **3.** $-1 < x < 2$. **4.** 80 р. **5.** 1,5. **6.** Четыре раза. **7.** $x = (-1)^n\arcsin\frac{1}{8} + \pi n,\ x = (-1)^n\arcsin\frac{5}{8} + \pi n,\ x = (-1)^n\arcsin\frac{7}{8} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **8.** $a = 1,\ b = -1$.

Вариант XXIII. **1.** Два корня. **2.** $-2 < x < 1$. **3.** $x = 2 - \log_2^2 3$. **4.** В 2 раза. **5.** $\frac{11}{12}$. **6.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}$. **7.** $x = \pm\arccos\frac{2}{11} + 2\pi k,\ x = \pm\arccos\frac{6}{11} + 2\pi k,\ x = \pm\arccos\left(-\frac{10}{11}\right) + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. **8.** $a_1 = 1,\ b_1 = -1;\ a_2 = 1,\ b_2 = -2;\ a_3 = -1,\ b_3 = -1;\ a_4 = -1,\ b_4 = -2$.

Вариант XXIV. **1.** Три корня. **2.** $0 < x \leqslant 0{,}5$. **3.** $x = -2$. **4.** 60 кг. **5.** $\frac{5}{3}$. **6.** $\frac{\pi}{8};\ \frac{\pi}{12}$. **7.** $x = \pm\arccos\frac{7}{9} + 2\pi k,\ x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{9}\right) + 2\pi k,\ x = \pm\arccos\left(-\frac{5}{9}\right) + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. **8.** $a = 1$.

Вариант XXV. **1.** Четыре корня. **2.** $-\sqrt{\log_3 4} \leqslant x \leqslant \sqrt{\log_3 4}$. **3.** $x = 5$. **4.** В 3 раза. **5.** Шесть точек. **6.** $\frac{1}{12}$. **7.** $x = (-1)^n\arcsin\frac{3}{13} + \pi n,\ x = (-1)^n\arcsin\frac{6}{13} + \pi n,\ x = (-1)^n\arcsin\frac{12}{13} + \pi n$. **8.** $a_1 = 0,\ b_1 = 0,\ c_1 = 2{,}25;\ a_2 = 2,\ b_2 = -1,\ c_2 = 1$.

Вариант XXVI. **1.** Четыре корня. **2.** $x < -2$. **3.** $x = 2$. **4.** 43 р. 20 к. **5.** $\sqrt{35}$. **6.** Семь точек. **7.** $x = (-1)^n \arcsin \frac{\pi}{12} + \pi n$, $x = (-1)^{n+1} \times \arcsin \frac{\pi}{6} + + \pi n$. **8.** $m = 1$, $n = -1$.

Вариант XXVII. **1.** $\frac{2015\pi}{2}$. **2.** $-3 \leqslant x < -2$. **3.** $x_1 = -2$, $x_2 = 6$. **4.** $y = = 4x - 2$. **5.** 3 км/ч. **6.** 9. **7.** $\frac{5\pi}{3}$. **8.** 13.

Вариант XXVIII. **1.** $\frac{5\pi}{4}$. **2.** Такого корня нет. **3.** $x = 5$. **4.** $y = -2x$; $y = 2x - 4$. **5.** 180 км. **6.** $1 < x < 1{,}1$. **7.** Пять корней. **8.** 25 : 16.

Вариант XXIX. **1.** -1. **2.** $x_1 = 1$; $x_2 = 2$. **3.** $x_1 = -1$, $y_1 = -1$; $x_2 = \frac{3}{2}$, $y_2 = \frac{3}{2}$. **4.** $x = 1$. **5.** $0{,}5 \leqslant a \leqslant 1$. **6.** 3. **7.** 20 км/ч. **8.** $\sqrt{2}$.

Вариант XXX. **1.** 3. **2.** Два корня. **3.** $x_1 = 1$, $y_1 = 4$; $x_2 = 4$, $y_2 = 1$. **4.** $x = -1{,}25$. **5.** $a < -1$; $a \geqslant 8$. **6.** -3. **7.** 2 ч. **8.** $\frac{60}{37}$.

Содержание

Тема 17

Теоретические сведения

Тема 18

Теоретические сведения

Учебное издание

Крамор Виталий Семенович

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ ПО МАТЕМАТИКЕ

Ведущий редактор *О. А. Фёдорова*
Редактор *А. М. Суходский*
Корректор *Е. В. Морозова*
Технический редактор *Е. А. Вишнякова*
Компьютерная верстка *В. В. Пучкова*

Подписано в печать 09.01.2008. Формат 60x90 $^1/_{16}$.
Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 34,00. Тираж 5000 экз. Заказ № .

Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953005 — учебная литература

ООО «Издательство Оникс».
127422, Москва, ул. Тимирязевская, д. 38/25.
Почтовый адрес: 117418, Москва, а/я 26.
Отдел реализации: тел. (499) 619-02-20, 610-02-50.
Internet: www.onyx.ru; e-mail: mail@onyx.ru

ООО «Издательство «Мир и Образование».
Изд. лиц. ИД № 05088 от 18.06.2001.
109193, Москва, ул. 5-я Кожуховская, д. 13, стр. 1.
Тел./факс (495) 129-09-60, 120-51-47, 742-43-54.
E-mail: mir-obrazovanie@onyx.ru

Издание осуществлено при техническом содействии
ООО «Издательство АСТ»