В. С. КРАМОР

ПОВТОРЯЕМ И СИСТЕМАТИЗИРУЕМ ШКОЛЬНЫЙ КУРС АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА

«ПРОСВЕЩЕНИЕ»

ББК 22.14
К78

Рецензенты:

старший научный сотрудник лаборатории обучения математике НИИ школ МНО РСФСР *А. Я. Крысин;*
учитель математики школы № 415 Москвы *О. Ф. Фролова*

Крамор В. С.
К78 Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа.— М.: Просвещение, 1990.— 416.: ил.— ISBN 5-09-001295-4.

В книге в конспективной форме изложен теоретический материал по алгебре и началам анализа. К каждому пункту теоретического материала приведены упражнения с решениями и упражнения трех уровней сложности для самостоятельного решения. Она может быть использована при подготовке к экзаменам в высшие учебные заведения.

К $\frac{4306020000-687}{103(03)-90}$ 224—90 ББК 22.14 + 22.161

ISBN 5-09-001295-4

20-летию создания подготовительных отделений при вузах посвящается эта книга.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга предназначена для самостоятельного повторения школьного курса алгебры и начал анализа. Она поможет систематизировать имеющиеся знания и ликвидировать пробелы в них, если такие окажутся. Особенно она может быть полезной при подготовке к выпускным экзаменам в десятых классах средней школы и при подготовке к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения. Ею могут пользоваться как школьники, так и учащиеся СПТУ и слушатели подготовительных отделений вузов.

Прообразом данной книги является книга того же автора «Учебное пособие для подготовительных отделений вузов» (М.: Высшая школа, 1981).

Назначение данной книги определило и ее структуру. Весь учебный материал в книге разбит на главы. Каждая глава состоит из нескольких параграфов, которыми определяется ее теоретическая часть.

Все параграфы главы (за некоторым исключением) построены по одной и той же схеме. Они содержат:

1) справочный материал;
2) упражнения с решениями;
3) дидактический материал;
4) контрольные вопросы.

В конце книги дано приложение, в котором рассматриваются приемы решения текстовых задач.

Дадим краткую характеристику каждому разделу параграфа.

Раздел «Справочный материал» содержит формулировки правил, определений, теорем и т. д. Изложение теоретических вопросов в книге соответствует изложению этих вопросов в действующих школьных пособиях. Последовательность рассмотрения материала примерно та же, что и при изучении школьного курса. В случае затруднений при выполнении упражнений или ответах на контрольные вопросы можно получить необходимые теоретические сведения, прочитав справочный материал. Этот раздел является как бы консультантом по вопросам теории.

Раздел «Упражнения с решениями» содержит примеры решения упражнений, разбирая которые можно восстановить, а если отсутствовали, то и приобрести необходимые умения и навыки, связанные с соответствующим теоретическим материалом.

Решение каждого упражнения сопровождается подробным пояснением со ссылкой на используемый теоретический материал. Все этапы решения включают необходимую информацию о правомочности того или иного шага.

При решении упражнений теоретический материал находит практическое применение. Очень часто именно использование теоретического материала в практической деятельности вызывает наибольшие затруднения. Этот раздел может устранить многие трудности, если они возникнут при самостоятельном решении упражнений.

Раздел «Дидактический материал» содержит набор упражнений трех уровней сложности. Буквой **А** отмечены самые легкие упражнения, буквой **Б** — упражнения, более сложные по сравнению с предыдущими, буквой **В** — упражнения наибольшей сложности. Таким образом, сначала можно выбрать упражнения, соответствующие вашему уровню математической подготовки, а затем по мере приобретения навыков и умений переходить ко все более трудным упражнениям. Некоторые упражнения не отмечены никакой буквой. Желательно, чтобы эти упражнения решили все учащиеся.

Раздел «Контрольные вопросы» призван обеспечить определенный контроль за усвоением теоретического и практического материала.

ГЛАВА I

§ 1. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Понятие натурального числа относится к простейшим, первоначальным понятиям математики и не определяется через другие, более простые понятия.

2. Натуральные числа возникли в результате счета предметов. В порядке возрастания их можно записать как ряд чисел 1, 2, 3, 4, ...

3. Для натуральных чисел определены следующие действия: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня.

Заметим, что действия сложения и умножения выполнимы всегда, т. е. в результате этих действий получаются также натуральные числа.

§ 2. СЛОЖЕНИЕ И ЗАКОНЫ СЛОЖЕНИЯ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Результат сложения двух или нескольких чисел называется их суммой, а сами числа — слагаемыми.

Например, $a+b+c+\ldots+k=p$. Здесь p — сумма; $a, b, c, \ldots, k$ — слагаемые.

2. Для любых натуральных чисел a и b верно равенство $a+b=b+a$. Это свойство называют переместительным (коммутативным) законом сложения, который формулируется так: от перестановки слагаемых значение суммы не изменяется.

3. Для любых натуральных чисел a, b и c верно равенство $(a+b)+c=a+(b+c)$. Это свойство называют сочетательным (ас-

социативным) законом сложения, который формулируется так: значение суммы не изменится, если какую-либо группу слагаемых заменить их суммой.

§ 3. ВЫЧИТАНИЕ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Вычесть из числа a число b — значит найти такое число x, которое в сумме с числом b дает a, т. е. $b+x=a$.

2. Число x называется разностью чисел a и b и обозначается $a-b$; число a называют уменьшаемым, число b — вычитаемым.

3. Для натуральных чисел вычитание не всегда выполнимо. Например, в результате вычитания $4-4$, $2-7$, $17-30$ мы не получим натуральное число.

§ 4. УМНОЖЕНИЕ И ЗАКОНЫ УМНОЖЕНИЯ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Умножить число a на число b — значит найти сумму b слагаемых, каждое из которых равно a. Выражение ab называется произведением, а числа a и b — множителями.

Например, $a\cdot 3=a+a+a$; $b\cdot 5=b+b+b+b+b$.

2. Для любых натуральных чисел a и b верно равенство $ab=ba$. Это свойство называют переместительным законом умножения, который формулируется так: от перестановки множителей значение произведения не изменяется.

3. Для любых натуральных чисел a, b и c верно равенство $(ab)c=a(bc)$. Это свойство называют сочетательным законом умножения, который формулируется так: значение произведения не изменится, если какую-либо группу множителей заменить их произведением.

4. При любых значениях a, b и c верно равенство $(a+b)c=ac+bc$. Это свойство называют распределительным (дистрибутивным) законом умножения (относительно сложения), который формулируется так: чтобы умножить сумму на число, достаточно умножить каждое слагаемое на это число и сложить полученные произведения.

Аналогично можно записать: $(a-b)c=ac-bc$.

§ 5. ДЕЛЕНИЕ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Разделить число a на число b — значит найти такое число x, при умножении которого на число b получается число a, т. е. $a:b=x$, если $x\cdot b=a$.

2. Число a называется делимым (или кратным) числа b, число b — делителем числа a, число x — частным чисел a и b.

3. Для натуральных чисел деление нацело не всегда выполнимо, т. е. результат деления двух натуральных чисел не всегда является натуральным числом.

4. Признак делимости суммы: если каждое из слагаемых x и y делится на некоторое число c, то и сумма $x+y$ делится на это число c.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Доказать, что одно из двух последовательных четных чисел делится на 4.

Решение. Пусть $n \in N$. Тогда $2n$ — четное число, а $2n+2$ — следующее четное число.

Если $n=2k$ (четное), где $k \in N$, то число $2n=2 \cdot 2k=4k$ делится на 4.

Если $n=2k-1$ (нечетное), где $k \in N$, то число $2n+2= =2(2k-1)+2=4k-2+2=4k$ делится на 4.

2. Доказать, что сумма двузначного числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, кратна 11.

Решение. Имеем $\overline{ab}=10a+b$ (двузначное число, где a — цифра десятков, b — цифра единиц); аналогично $\overline{ba}=10b+a$; следовательно, $\overline{ab}+\overline{ba}=10a+b+10b+a=11a+11b=11(a+b)$ делится на 11.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1) Докажите, что произведение трех последовательных натуральных чисел делится на 6.

2) Докажите, что разность $\overline{ab}-\overline{ba}$ кратна 9.

Б. Найдите двузначное число, равное утроенной сумме его цифр.

В. 1) Докажите, что всякое трехзначное число, записанное одинаковыми цифрами, делится нацело на 37.

2) Какой цифрой оканчивается произведение $71 \cdot 72 \cdot \ldots \cdot 78 \cdot 79$?

Ответ. Б. 27. В. 2) 0.

§ 6. ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ ЧИСЕЛ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. На 2 делятся числа, оканчивающиеся нулем или четной цифрой.

2. На 5 делятся числа, оканчивающиеся нулем или цифрой 5.

3. На 4 (на 25) делятся те и только те числа, у которых две последние цифры — нули или выражают число, делящееся на 4 (или 25).

4. На 3 (на 9) делятся те и только те числа, сумма цифр которых делится на 3 (на 9).

5. На 10 делятся числа, оканчивающиеся нулем.

§ 7. ПОНЯТИЕ МНОЖЕСТВА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Одним из фундаментальных понятий математики является понятие множества. Множество можно представить себе как совокупность некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку. Множество — понятие неопределяемое.

2. Множество может состоять из чисел, точек, прямых и т. д., называемых элементами множества. Так, множество однозначных чисел состоит из элементов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

3. Множество, которое не содержит элементов, называют пустым и обозначают символом $\varnothing$.

4. Из рисунка 1 видно, что каждый элемент множества M принадлежит также и множеству K. Если каждый элемент множества M является элементом множества K, то говорят, что множество M является подмножеством множества K. Это выражается записью $M \subset K$.

5. Если каждый элемент множества A является одновременно элементом множества B (т. е. $A \subset B$) и каждый элемент множества B — элементом множества A (т. е. $B \subset A$), то множества A и B называют равными и пишут: $A = B$.

6. Различают конечные и бесконечные множества. Например, множество всех трехзначных чисел конечное, а множество натуральных чисел бесконечное.

7. Множество натуральных чисел обозначают $\boldsymbol{N}$.

§ 8. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Пересечением множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов, которые принадлежат каждому из данных множеств A и B (рис. 2, *а*). Пересечение множеств обозначают символом $\cap$ и пишут: $C = A \cap B$.

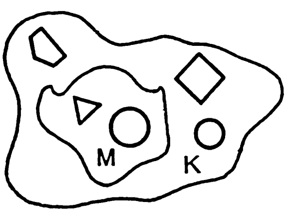


Рис. 1

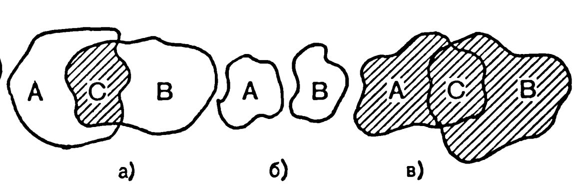


Рис. 2

2. Если множества A и B не имеют общих элементов, то пересечением таких множеств является пустое множество (рис. 2, *б*).

3. Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множеств A и B и только из них. Объединение множеств обозначают символом $\cup$ и пишут: $C=A \cup B$ (рис. 2, *в*). При этом если множества A и B имеют общие элементы, то каждый из этих общих элементов в объединение входит только один раз.

§ 9. ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНОЕ СООТВЕТСТВИЕ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Если каждому элементу множества A можно поставить в соответствие один и только один элемент множества B и, наоборот, каждому элементу множества B можно поставить в соответствие один и только один элемент множества A, то такое соответствие между множествами A и B называется взаимно однозначным.

2. Если между множествами A и B можно установить взаимно однозначное соответствие, то такие множества называются эквивалентными (равномощными).

3. Установление взаимно однозначного соответствия дает возможность сравнивать множества с бесконечным числом элементов. Например, между множеством N натуральных чисел и множеством всех четных натуральных чисел можно установить взаимно однозначное соответствие:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & & 2n & \ldots \end{array}$$

Таким образом, эти два множества эквивалентны.

§ 10. ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Число a называется простым, если его делителями являются только единица и само число a. Например, числа 2, 3, 5, 13, 29 простые.

2. Число a, имеющее более двух натуральных делителей (кроме 1 и a), называется составным. Например, числа 4, 6, 15 составные.

Заметим, что число 1 не относят ни к простым, ни к составным числам.

3. Основная теорема арифметики. Любое составное натуральное число можно представить единственным образом

в виде произведения простых чисел. Например, $12=2\cdot2\cdot3$. Говорят также, что число 12 разложено на простые множители.

4. Пример. Разложить на простые множители число 525.

Решение.
$$\begin{array}{r|l}525 & 3\\ 175 & 5\\ 35 & 5\\ 7 & 7\\ 1 & \end{array}\qquad 525=3\cdot5\cdot5\cdot7$$

§ 11. НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Рассмотрим множество A делителей числа 45 и множество B делителей числа 60, т. е. $A=\{1; 3; 5; 9; 15; 45\}$, $B=\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60\}$. Общими делителями чисел 45 и 60 называются числа, являющиеся элементами как множества A, так и множества B, т. е. элементы пересечения этих множеств: $A\cap B=\{1; 3; 5; 15\}$.

2. Наибольший из этих элементов (число 15) называется наибольшим общим делителем и обозначается так: $D(45; 60)=15$.

3. Если наибольший общий делитель чисел равен 1, то такие числа называются взаимно простыми. Например, числа 16 и 25 взаимно простые, так как $D(16, 25)=1$.

4. Пример. Найти $D(126; 540; 630)$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l}126 & 2\\ 63 & 3\\ 21 & 3\\ 7 & 7\\ 1 & \end{array}\qquad\begin{array}{r|l}540 & 2\\ 270 & 2\\ 135 & 3\\ 45 & 3\\ 15 & 3\\ 5 & 5\\ 1 & \end{array}\qquad\begin{array}{r|l}630 & 2\\ 315 & 3\\ 105 & 3\\ 35 & 5\\ 7 & 7\\ 1 & \end{array}$$

$$126=2\cdot3^2\cdot7$$
$$540=2^2\cdot3^3\cdot5$$
$$630=2\cdot3^2\cdot5\cdot7$$
$$D(126; 540; 630)=2\cdot3\cdot3=18.$$

§ 12. НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Рассмотрим множество A чисел, кратных 4, и множество B чисел, кратных 6, т. е. $A=\{4; 8; 12; 16; 20; \ldots\}$, $B=\{6; 12; 18; 24; \ldots\}$. Числа 12, 24, 36, ... являются кратными чисел 4 и 6. Их называют общими кратными чисел 4 и 6. Множество C общих кратных есть пересечение множеств A и B, т. е. $C=A\cap B$.

2. Наименьший элемент множества C называется наименьшим общим кратным данных чисел и обозначается так: $K(4;\ 6)=$ $=12$.

3. Пример. Найти $K(270;\ 300;\ 315)$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l}270 & 2\\ 135 & 3\\ 45 & 3\\ 15 & 3\\ 5 & 5\\ 1 & \end{array}\qquad\begin{array}{r|l}300 & 2\\ 150 & 2\\ 75 & 3\\ 25 & 5\\ 5 & 5\\ 1 & \end{array}\qquad\begin{array}{r|l}315 & 3\\ 105 & 3\\ 35 & 5\\ 7 & 7\\ 1 & \end{array}$$

$$270=2\cdot 3^3\cdot 5$$
$$300=2^2\cdot 3\cdot 5^2$$
$$315=3^2\cdot 5\cdot 7$$
$$K(270;\ 300;\ 315)=$$
$$=2^2\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7=18\,900$$

Контрольные вопросы

1. Какие числа относятся к множеству N?
2. Какие операции (действия) всегда выполнимы на множестве N?
3. Является ли множество натуральных чисел конечным; бесконечным?
4. Существует ли наибольшее натуральное число? Существует ли наименьшее натуральное число?
5. Сформулируйте законы сложения.
6. Как изменится сумма, если: а) одно из слагаемых увеличить на 6; б) первое слагаемое увеличить на 9, а второе — на 7; в) первое слагаемое увеличить на 15, а второе уменьшить на 8?
7. Что значит из числа a вычесть число b?
8. Всегда ли выполнимо вычитание на множестве N?
9. Как изменится разность, если: а) уменьшаемое увеличить на 7, а вычитаемое — на 5; б) уменьшаемое увеличить на 10, а вычитаемое уменьшить на 7; в) уменьшаемое уменьшить на 15, а вычитаемое увеличить на 10?
10. Что значит умножить число a на число b?
11. Всегда ли выполнимо умножение на множестве натуральных чисел?
12. Сформулируйте законы умножения.
13. Как изменится произведение, если: а) один из множителей увеличить в 2 раза; б) один из множителей увеличить в 3 раза, а другой уменьшить в 3 раза?
14. В каких случаях произведение двух чисел равно одному из них; каждому из них?

15. Что значит разделить число a на число b?
16. Всегда ли выполнимо деление на множестве натуральных чисел?
17. Как изменится частное, если делимое увеличить в 10 раз, а делитель уменьшить в 2 раза?
18. В каких случаях частное двух чисел равно: а) одному из них; б) каждому из них?
19. Делимое увеличили в 4 раза. Как нужно изменить делитель, чтобы частное уменьшилось в 3 раза?
20. Делимое уменьшили в 6 раз. Как нужно изменить делитель, чтобы частное уменьшилось в 2 раза?
21. Сформулируйте признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25.
22. Укажите множество трехзначных чисел, кратных 3; кратных 9.
23. Дайте определение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного двух или нескольких чисел.
24. Разложите на простые множители числа: 1176; 5400.
25. Найдите: а) $D(144; 72)$; б) $D(120; 144; 324)$.
26. Найдите: а) $K(25; 38)$; б) $K(108; 216; 135)$; в) $K(70; 35; 280)$.

ГЛАВА II

§ 1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Одна или несколько равных частей единицы называется обыкновенной дробью.

Например, дробь $\frac{1}{5}$ означает, что единица разделена на 5 равных частей и взята одна такая часть; дробь $\frac{2}{7}$ означает, что единица разделена на 7 равных частей и взяты две такие части (рис. 3).

2. Обыкновенная дробь записывается с помощью черты и двух натуральных чисел. Число, стоящее под чертой и показывающее, на сколько равных частей разделена единица, называется знаменателем дроби. Число, стоящее над чертой и показывающее, сколько взято таких равных частей, называется числителем дроби.

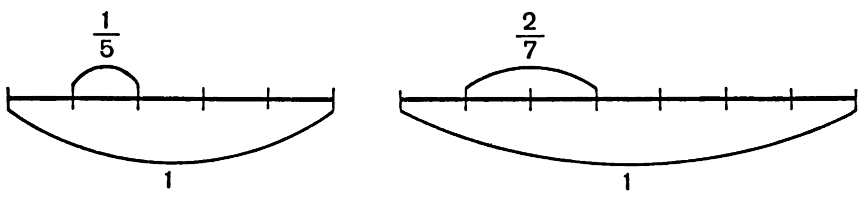


Рис. 3

3. Из определения дроби следует, что дробную черту можно рассматривать как знак деления. Например, $\frac{2}{7}=2:7$.

Таким образом, дробь, у которой числитель равен знаменателю, равна единице. Например, $\frac{5}{5}=1$.

§ 2. ПРАВИЛЬНЫЕ И НЕПРАВИЛЬНЫЕ ДРОБИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Дробь, в которой числитель меньше знаменателя, называется правильной. Например, $\frac{3}{8}$ — правильная дробь.

2. Дробь, в которой числитель равен знаменателю или больше его, называется неправильной. Например, $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{2}$ — неправильные дроби.

3. Число, состоящее из целой и дробной частей, можно обратить в неправильную дробь. Например, $7\frac{1}{3}=\frac{3\cdot7+1}{3}=\frac{22}{3}$; $8\frac{2}{3}=$ $=\frac{8\cdot3+2}{3}=\frac{26}{3}$.

Вообще, чтобы записать число в виде неправильной дроби, нужно умножить его целую часть на знаменатель дробной части и к произведению прибавить числитель дробной части. Полученная сумма будет числителем дроби, а знаменателем будет знаменатель дробной части.

4. Из любой неправильной дроби можно выделить целую часть. Для этого нужно разделить с остатком числитель на знаменатель. Частное от деления будет целой частью числа, остаток — числителем, а делитель — знаменателем. Например, $\frac{26}{3}=8\frac{2}{3}$.

§ 3. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ДРОБИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называются равными, если $ad=bc$. Например, $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$, так как $2\cdot6=3\cdot4$.

2. Сократить дробь: 1) $\frac{226}{134}$; 2) $\frac{123}{12\,345}$.

Решение. 1) Числитель и знаменатель данной дроби — четные числа. Следовательно, данную дробь можно сократить на 2. Получим $\frac{226}{134}=\frac{113}{67}$.

2) Сумма цифр числителя дроби $1+2+3$ равна 6, следова-

тельно, числитель дроби делится на 3. Сумма цифр знаменателя дроби $1+2+3+4+5$ равна 15, следовательно, знаменатель делится на 3. Поэтому дробь можно сократить на 3, т. е. $\frac{123}{12\,345}=\frac{41}{4115}$.

§ 4. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ДРОБЕЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. При сложении (вычитании) дробей с одинаковыми знаменателями к числителю первой дроби прибавляют числитель второй дроби (из числителя первой дроби вычитают числитель второй дроби) и оставляют тот же знаменатель. Полученную дробь, если это возможно, сокращают. Например, $\frac{7}{9}+\frac{5}{9}=\frac{7+5}{9}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$.

2. Наименьшим общим знаменателем двух или нескольких дробей является наименьшее общее кратное знаменателей этих дробей.

При сложении (вычитании) дробей с различными знаменателями нужно предварительно привести их к наименьшему общему знаменателю, затем сложить (вычесть) полученные дроби, используя правило сложения (вычитания) дробей с одинаковыми знаменателями. Полученную дробь, если можно, сократить и исключить из нее целую часть. Например,

$$\frac{7}{9}+\frac{5}{12}=\frac{28}{36}+\frac{15}{36}=\frac{28+15}{36}=\frac{43}{36}=1\frac{7}{36}.$$

3. При вычитании чисел, состоящих из целой части и дробной, из целой части уменьшаемого вычитают целую часть вычитаемого, а из дробной части уменьшаемого — дробную часть вычитаемого. Например, $9\frac{7}{8}-4\frac{5}{12}=5\frac{7}{8}-\frac{5}{12}=5\frac{21-10}{24}=5\frac{11}{24}$.

4. Если дробная часть вычитаемого больше дробной части уменьшаемого, то одну из единиц целой части уменьшаемого нужно заменить равной ей дробью. Например, $7\frac{5}{8}-2\frac{9}{10}=5\frac{5}{8}-\frac{9}{10}=$ $=5\frac{25-36}{40}=4+\frac{40}{40}+\frac{25-36}{40}=4\frac{65-36}{40}=4\frac{29}{40}$.

Аналогично выполняется сложение смешанных чисел.

Заметим, что действие вычитания может привести к понятию отрицательной дроби. Этот случай будет рассмотрен в главе III.

§ 5. УМНОЖЕНИЕ ДРОБЕЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Произведение двух дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равно дроби, числитель

которой равен произведению числителей, а знаменатель — произведению знаменателей, т. е. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

2. При умножении чисел, состоящих из целой части и дробной, их предварительно представляют в виде неправильных дробей, а затем умножают согласно п. 1. Например, $2\frac{1}{3}\cdot3\frac{1}{6}=\frac{7}{3}\cdot\frac{19}{6}=$ $=\frac{133}{18}=7\frac{7}{18}$.

3. Два числа называются взаимно обратными, если их произведение равно 1. Например, 3 и $\frac{1}{3}$, a и $\frac{1}{a}$ — взаимно обратные числа.

4. Любые две дроби вида $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ являются взаимно обратными, так как их произведение равно 1.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Найти значение выражения:

1) $\left(5+2\frac{3}{8}\right)\cdot\left(4\frac{1}{6}+10\right)$; 2) $\left(5-2\frac{3}{8}\right)\cdot\left(4\frac{1}{6}-3\right)$.

Решение. 1) Выполним действия, указанные в скобках:

$$5+2\frac{3}{8}=7+\frac{3}{8}=7\frac{3}{8},\quad 4\frac{1}{6}+10=14+\frac{1}{6}=14\frac{1}{6}.$$

Теперь перемножим два числа $7\frac{3}{8}$ и $14\frac{1}{6}$. Для этого каждое из чисел сначала превратим в неправильную дробь, а затем выполним умножение:

$$7\frac{3}{8}\cdot14\frac{1}{6}=\frac{56+3}{8}\cdot\frac{84+1}{6}=\frac{59}{8}\cdot\frac{85}{6}=\frac{59\cdot85}{6\cdot8}=\frac{5015}{48}=104\frac{23}{48}.$$

2) $\left(5-2\frac{3}{8}\right)\cdot\left(4\frac{1}{6}-3\right)=\left(3-\frac{3}{8}\right)\cdot1\frac{1}{6}=\left(2+\frac{8}{8}-\frac{3}{8}\right)\cdot1\frac{1}{6}=$ $=2\frac{5}{8}\cdot1\frac{1}{6}=\frac{21}{8}\cdot\frac{7}{6}=\frac{49}{16}=3\frac{1}{16}$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Найдите значение выражения:

А. 1) $\frac{9}{10}\cdot\frac{5}{6}$; 2) $\frac{40}{7}\cdot\frac{14}{5}$; 3) $\frac{9}{10}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{40}{7}\cdot\frac{14}{5}$; 4) $\left(\frac{5}{12}+\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{12}{19}$;

5) $\frac{6}{7}\cdot\left(\frac{11}{18}-\frac{5}{12}\right)$; 6) $\frac{5}{22}\cdot\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{22}+\frac{3}{11}$;

7) $\left(3\frac{1}{14}-2\frac{5}{7}\right)\cdot\left(7-6\frac{3}{5}\right)$; 8) $1\frac{2}{7}\cdot1\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9}\cdot2\frac{3}{4}$.

Б. 1) $\frac{9}{56}-\left(\frac{7}{15}-\frac{5}{12}\right)\cdot\left(\frac{3}{14}+\frac{1}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{2}{3}+\frac{7}{8}-\frac{5}{6}\right)\cdot\left(1-\frac{5}{17}\right)$;

3) $\frac{7}{11}\left(\frac{40}{49}+\frac{5}{7}\right)$; 4) $\left(1\frac{4}{9}+2\frac{5}{6}-2\frac{3}{4}\right)\cdot\left(2\frac{1}{2}-\frac{11}{14}\right)$;

5) $\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}-\frac{10}{6}\right)\cdot 13$.

Ответы. А. 1) $\frac{3}{4}$; 2) 16; 3) 12; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{6}$; 6) $\frac{17}{55}$.
Б. 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{4}{7}$; 5) 0.

§ 6. ДЕЛЕНИЕ ДРОБЕЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. При делении дроби на дробь числитель делимого умножают на знаменатель делителя, а знаменатель делимого — на числитель делителя. Первое произведение служит числителем, а второе — знаменателем частного. Например, $\frac{3}{4}:\frac{6}{7}=\frac{3\cdot 7}{4\cdot 6}=\frac{7}{4\cdot 2}=\frac{7}{8}$.

2. При делении чисел, состоящих из целой части и дробной, нужно предварительно представить их в виде дроби и применить правило деления дроби на дробь. Например, $3\frac{5}{7}:2\frac{1}{3}=\frac{26}{7}:\frac{7}{3}=$ $=\frac{26\cdot 3}{7\cdot 7}=\frac{78}{49}$.

3. Любое целое число можно представить в виде дроби. Например, $5=\frac{5}{1}$, $3=\frac{3}{1}$ и т. д. Это позволяет производить умножение и деление целого числа на дробь (или наоборот). Например, $3:\frac{4}{5}=\frac{3}{1}:\frac{4}{5}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 1}=\frac{15}{4}$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Выполнить действия:

1) $\left(8\frac{11}{12}-6\frac{5}{12}\right):\frac{5}{8}$; 2) $2\frac{3}{4}:\left(1\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right):3\frac{1}{6}$.

Решение. 1) $8\frac{11}{12}-6\frac{5}{12}=2\frac{11}{12}-\frac{5}{12}=2+\frac{11}{12}-\frac{5}{12}=2+$ $+\frac{6}{12}=2\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{2}:\frac{5}{8}=\frac{5}{2}:\frac{5}{8}=\frac{5}{2}\cdot\frac{8}{5}=4$.

2) $1\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{3}{2}-\frac{2}{5}=\frac{15-4}{10}=\frac{11}{10}$; $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{9+10}{12}=\frac{19}{12}$. Данное выражение перепишем в виде $2\frac{3}{4}:\frac{11}{10}+\frac{19}{12}:3\frac{1}{6}$. Числа $2\frac{3}{4}$ и $3\frac{1}{6}$ заменим неправильными дробями: $2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$, а $3\frac{1}{6}=\frac{19}{6}$.

С учетом всех преобразований данное выражение примет вид $2\frac{3}{4}:\frac{11}{10}+\frac{19}{12}:3\frac{1}{6}=\frac{11}{4}\cdot\frac{10}{11}+\frac{19}{12}\cdot\frac{6}{19}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3.$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Найдите значение выражения:

А. 1) $\left(\frac{51}{60}\cdot\frac{12}{17}\right):\frac{3}{10}$; 2) $\left(\frac{12}{95}:\frac{9}{38}\right)\cdot\frac{15}{16}$; 3) $\left(3\frac{1}{12}+1\frac{5}{12}\right):1\frac{1}{2}$;

4) $\frac{3}{4}:\frac{5}{6}+2\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}-1:1\frac{1}{9}$; 5) $7\frac{1}{8}:4\frac{3}{4}\cdot 8$.

В. 1) $\dfrac{3\frac{3}{4}:1\frac{1}{2}+\left(1\frac{1}{2}:3\frac{3}{4}\right)\cdot 2\frac{1}{2}+\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}}{2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}-\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}}$;

2) $\dfrac{\left(\left(3\frac{7}{12}-2\frac{11}{18}+2\frac{1}{24}\right)\cdot 1\frac{5}{31}-\frac{3}{52}\left(3\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\right)\cdot 1\frac{7}{13}}{\frac{19}{84}:\left(5\frac{13}{42}-2\frac{13}{28}+\frac{5}{24}\right)+1\frac{2}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}}$.

Ответы. **А.** 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$. **В.** 1) 16; 2) 5.

§ 7. ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Обыкновенную дробь, знаменатель которой равен 10, 100, 1000 и т. д., называют десятичной дробью. Например, $\frac{3}{10}=0{,}3$; $\frac{51}{100}=0{,}51$; $\frac{7}{1000}=0{,}007$ и т. д.

2. Сложение и вычитание десятичных дробей. При сложении (вычитании) десятичных дробей числа записывают так, чтобы одинаковые разряды были записаны один под другим, а запятая — под запятой, и складывают (вычитают) как натуральные числа. Например,

$$\begin{array}{r} 0{,}132 \\ +\ 2{,}354 \\ \hline 2{,}486 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9{,}871 \\ -\ 7{,}320 \\ \hline 2{,}551 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16{,}200 \\ -\ 4{,}752 \\ \hline 11{,}448 \end{array}$$

3. Умножение десятичных дробей. Чтобы умножить одну десятичную дробь на другую, надо выполнить умножение, не обращая внимание на запятые, и в полученном произведении отделить справа запятой столько цифр, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе. Например, $12{,}27\cdot 0{,}021=0{,}25767$.

4. Деление десятичных дробей.

а) Разделим 4,46 на 2. Делим на 2 сначала целую часть числа, потом десятые и, наконец, сотые доли, т. е. $4{,}46:2=2{,}23$.

б) Разделим 1,2345 на 5. В целой части частного получим нуль (так как единица не делится на 5), т. е. $1{,}2345:5=0{,}2469$.

в) Разделим 1,25 на 1,6. Увеличим делимое и делитель в 10 раз, получим $12{,}5:16=0{,}78125$.

5. Чтобы разделить число на десятичную дробь, нужно в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе, а потом выполнить деление на натуральное число.

З а м е ч а н и е. При умножении (делении) десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д. достаточно перенести запятую вправо (влево) на столько цифр, сколько нулей во множителе (делителе). Например, $3{,}576\cdot 100=357{,}6$; $2{,}53:10=0{,}253$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Найдите значение выражения:

А. 1) $\dfrac{\left(152\frac{3}{4}-148\frac{3}{8}\right)\cdot 0{,}3}{0{,}2}$; 2) $\dfrac{172\frac{5}{6}-170\frac{1}{3}+3\frac{5}{12}}{0{,}8\cdot 0{,}25}$;

3) $\dfrac{\left(1\frac{1}{12}+2\frac{5}{32}+\frac{1}{24}\right)\cdot 9{,}6+2{,}13}{0{,}4}$; 4) $\dfrac{\left(6{,}6-3\frac{3}{14}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{(21-1{,}25):2{,}5}$.

Б. 1) $\dfrac{215\frac{9}{16}-208\frac{3}{4}+0{,}5}{0{,}0001:0{,}005}$; 2) $\dfrac{(2{,}1-1{,}965):(1{,}2\cdot 0{,}045)}{0{,}00325:0{,}013}-\dfrac{1:0{,}25}{1{,}6\cdot 0{,}625}$.

О т в е т ы. **А.** 1) 6,5625; 2) $29\frac{7}{12}$; 3) 84,075; 4) 2,5. **Б.** 1) $365\frac{5}{8}$; 2) 6.

§ 8. ОБРАЩЕНИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ В ОБЫКНОВЕННУЮ И ОБЫКНОВЕННОЙ В ДЕСЯТИЧНУЮ. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДРОБИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Чтобы обратить десятичную дробь в обыкновенную, достаточно в числителе дроби записать число, стоящее после запятой, а в знаменателе — единицу с нулями, причем нулей должно быть столько, сколько цифр справа от запятой. Например, $0{,}7=\frac{7}{10}$; $0{,}25=\frac{25}{100}$; $0{,}007=\frac{7}{1000}$.

2. Чтобы обратить обыкновенную дробь в десятичную, следует разделить числитель на знаменатель по правилу деления десятичной дроби на целое число. Например,

$$\begin{array}{r|l} 7{,}0 & 25 \\ \cline{2-2} \underline{50} & 0{,}28 \\ \underline{200} & \\ -\underline{200} & \\ 0 & \end{array}$$

Заметим, что при этом может получиться бесконечная десятичная дробь. Например,

$$
\begin{array}{r|l}
-\,3{,}0 & 7 \\ \cline{2-2}
\underline{28} & 0{,}428571\ldots \\
-\,20 & \\
\underline{14} & \\
-\,60 & \\
\underline{56} & \\
-\,40 & \\
\underline{35} & \\
-\,50 & \\
\underline{49} & \\
-\,10 & \\
\underline{7} & \\
3 &
\end{array}
$$

3. Бесконечная десятичная дробь, в которой, начиная с некоторого разряда, цифры повторяются, называется периодической. Например, 0,333...; 2,6777...; 4,0424242... .

Любую обыкновенную дробь можно записать в виде либо конечной десятичной дроби, либо бесконечной периодической дроби.

Правило перевода бесконечной периодической дроби в обыкновенную таково:

Чтобы обратить периодическую дробь в обыкновенную, надо из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и записать эту разность числителем, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и после девяток дописать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом. Например,

$$0{,}(45)=\frac{45-0}{99}=\frac{5}{11};\quad 3{,}1(73)=\frac{3173-31}{990}=\frac{3142}{990}=\frac{1571}{495}.$$

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Обратить периодическую дробь в обыкновенную:

1) 0,(3); 2) 0,2(1); 3) 0,2(19); 4) 3,(73); 5) 2,2(41).

Решение. 1) Числитель искомой дроби равен периоду данной дроби, т. е. 3, а знаменатель содержит цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, т. е. один раз. Итак, $0,(3)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

2) Числитель дроби есть разность между числом, стоящим после запятой (включая период 1), и числом, стоящим до периода (после запятой). Знаменатель содержит цифру 9 один раз (так как в периоде одна цифра) и один нуль (столько цифр между запятой и периодом). Итак, $0{,}2(1)=\frac{21-2}{90}=\frac{19}{90}$.

3) $0{,}2(19)=0{,}2191919\ldots=\frac{219-2}{990}=\frac{217}{990}$.

4) $3,(73)=3,737373...=\frac{373-3}{99}=\frac{370}{99}$.

5) $2,2(41)=2,2414141...=\frac{2241-22}{990}=\frac{2219}{990}$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Обратите периодическую дробь в обыкновенную:

А. 1) 0,(4); 2) 0,(44); 3) 2,(44); 4) 3,1(44); 5) 2,(123).

2. Найдите значение выражения:

Б. 1) $\frac{0,8333...-0,4(6)}{1\frac{5}{6}}\cdot\frac{1,125+1,75-0,41(6)}{0,59}$;

2) $\frac{\left(\frac{5}{8}+2,708333...\right):2,5}{(1,3+0,7(6)+0,(36))\cdot\frac{110}{401}}\cdot\frac{1}{2}$;

3) $\frac{\left(2\frac{38}{45}-\frac{1}{15}\right):13\frac{8}{9}+3\frac{3}{65}\cdot0,(26)}{(18,5-13,777...)\frac{1}{85}}\cdot0,5$.

Ответы. 2. Б. 1) $\frac{5}{6}$; 2) 1; 3) 9.

§ 9. ОТНОШЕНИЕ. ПРОПОРЦИЯ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Отношением числа x к числу y называется частное чисел x и y, т. е. $\frac{x}{y}$ (или $x:y$).

2. Отношение $\frac{x}{y}$ означает, во сколько раз x больше y или какую часть числа y составляет число x.

3. В отношении $\frac{x}{y}$ число x называется предыдущим членом, y — последующим.

4. Пропорцией называется равенство двух отношений, т. е. $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$; a и y называются крайними членами, x и b — средними членами пропорции.

§ 10. СВОЙСТВА ПРОПОРЦИИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов, т. е. если $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$, то $ay=bx$.

2. Обратно: числа a, b, x, y составляют пропорцию $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$, если $ay=bx$.

3. Из пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ вытекают следующие пропорции: $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$, $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$, т. е. в пропорции можно менять местами крайние и средние члены или те и другие одновременно.

4. Чтобы найти неизвестный средний (крайний) член пропорции, надо произведение крайних (средних) членов разделить на известный средний (крайний) член пропорции: $\frac{a}{x}=\frac{b}{c}\Rightarrow x=\frac{ac}{b}$, $\frac{x}{a}=\frac{d}{c}\Rightarrow x=\frac{ad}{c}$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Найдите x из пропорции:

1) $$\frac{\left(4-3{,}5\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right):0{,}16}{x}=\frac{3\frac{2}{7}-\frac{3}{14}:\frac{1}{6}}{41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}};$$

2) $$\frac{1{,}2:0{,}375-0{,}2}{6\frac{4}{25}:15\frac{2}{5}+0{,}8}=\frac{0{,}016:0{,}12+0{,}7}{x};$$

3) $$\frac{0{,}125x}{\left(\frac{19}{24}-\frac{21}{40}\right)\cdot 8\frac{7}{16}}=\frac{\left(1\frac{28}{63}-\frac{17}{21}\right)\cdot 0{,}7}{0{,}675\cdot 2{,}4-0{,}02}.$$

Ответы. 1) 1; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 5.

§ 11. ПРОЦЕНТ. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТЫ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Процентом называется сотая часть какого-либо числа. Процент обозначается знаком %. Например, 5%, 100%.

2. Если данное число принять за 1, то 1% составляет 0,01 этого числа, 25% составляют 0,25 числа $\left(\text{или } \frac{1}{4} \text{ числа}\right)$ и т. д.

Таким образом, чтобы число процентов выразить в виде дроби, достаточно число процентов разделить на 100. Например, $125\%=1{,}25$; $2{,}3\%=0{,}023$.

3. Нахождение процентов данного числа. Чтобы найти $a\%$ от числа b, надо b умножить на $\frac{a}{100}$.

Например, 30% от 60 составляют $\frac{60\cdot 30}{100}=18$.

4. Нахождение числа по его процентам. Если известно, что $a\%$ числа x равно b, то число x можно найти по формуле $x=\frac{b}{a}\cdot 100$.

Например, если 3% вклада в сберкассу составляют 150 р., то этот вклад равен $\left(\frac{150}{3}\right)\cdot 100=5000$ р.

5. Нахождение процентного отношения чисел. Чтобы найти процентное отношение двух чисел a и b, надо отношение этих чисел умножить на 100%, т. е. вычислить $\left(\frac{a}{b}\right)\cdot 100\%$.

Пусть, например, при плановом задании 60 автомобилей в день завод выпустил 66 автомобилей, тогда он выполнил план на $\left(\frac{66}{60}\right)\cdot 100\%$, т. е. на 110%.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Сберегательные банки начисляют по вкладам ежегодно 2% вклада. Вкладчик внес в сберегательный банк 150 р. Какой станет сумма вклада через 2 года?

Решение. Вклад к концу первого года составит $150+150\cdot 0{,}02=150\cdot 1{,}02=153$ р., а к концу второго года $153+153\cdot 0{,}02=153\cdot 1{,}02=156$ р. 6 к.

Вообще имеет место формула сложных процентов: $N=a(1+0{,}01p)^n$, где a — первоначальная величина вклада, n — срок вклада, N — величина вклада через n лет, p — число процентов.

§ 12. ДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА НА ЧАСТИ, ПРЯМО И ОБРАТНО ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ДАННЫМ ЧИСЛАМ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Чтобы разделить некоторое число пропорционально данным числам (разделить в данном отношении), надо разделить это число на сумму данных чисел и результат умножить на каждое из них.

2. Чтобы разделить число на части, обратно пропорциональные данным числам, достаточно разделить это число на части, прямо пропорциональные числам, обратным данным.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Отрезок длиной 15 см разделить в отношении 2:3.

Решение. $\frac{15}{5}\cdot 2=6$ см; $\frac{15}{5}\cdot 3=9$ см.

2. Число 27 разделить обратно пропорционально числам 4 и 5.

Р е ш е н и е. Числа, обратные данным, относятся как $\frac{1}{4}:\frac{1}{5}=$ $=5:4$. Получим $\frac{27}{9}\cdot 5=15$; $\frac{27}{9}\cdot 4=12$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Отрезок AB длиной 70 м разделили на четыре части, пропорциональные числам 2, 3, 4 и 5. Найдите длины этих частей.

2. Стороны треугольника, периметр которого 30 м, пропорциональны числам 5, 7 и 8. Найдите стороны треугольника.

3. Число 196 разделите на части, пропорциональные числам: а) 3, 7, 11; б) $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{3}$, 3.

4. Число 434 разделите на части, обратно пропорциональные числам: а) 15 и 16; б) 2, 3 и 5.

Б. 1. Площади полей, засеянных рожью, пшеницей и ячменем, пропорциональны числам 9, 5 и 3. Сколько гектаров засеяно рожью и сколько ячменем, если известно, что пшеницей засеяно 410 га?

2. Даны отрезки длиной 8,5; 15 и 25 м. Найдите длины пропорциональных им отрезков, если больший из них равен 20 м.

О т в е т ы. А. 1. 10; 15; 20 и 25 м. 2. 7,5; 10,5 и 12 м. Б. 1. 738 и 246 га. 2. 6,8; 12; 20 м.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение обыкновенной дроби.
2. Сформулируйте основное свойство дроби.
3. Сравните дроби по величине: а) $\frac{11}{14}$ и $\frac{8}{14}$; б) $\frac{7}{13}$ и $\frac{7}{14}$; в) $\frac{3}{14}$ и $\frac{5}{21}$.
4. Сравните выражения $87\cdot\left(\frac{11}{12}\right)\cdot\left(\frac{12}{13}\right)$ и $87\cdot\left(\frac{11}{12}\right)\cdot\left(\frac{13}{12}\right)$, не производя вычислений.
5. Сократите дробь $\frac{198}{126}$. Какое свойство дроби вы применили? На какое число надо сократить указанную дробь, чтобы получить несократимую дробь?
6. Какие операции (действия) возможны на множестве дробных чисел?
7. Можно ли применять к дробным числам законы сложения и умножения натуральных чисел?
8. Сформулируйте правило умножения и деления дробей.
9. Какие дроби называются взаимно обратными? Приведите пример.

10. Какая дробь называется десятичной?
11. Обратите десятичные дроби в обыкновенные дроби и смешанные дроби: 0,5; 1,7; 3,75; 25,04; 0,08.
12. Обратите обыкновенные дроби в десятичные: $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{31}{2}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{9}$.
13. Выполните действия: а) $3{,}12 \cdot 10$; б) $0{,}14 \cdot 100$; в) $3{,}6 : 10$; г) $0{,}4 : 100$.
14. Выразите в килограммах: а) 33 кг 246 г; б) 7 г.
Выразите в метрах: а) 3 м 2 дм; б) 1 м 5 см; в) 3 см.
15. Что называется пропорцией? Сформулируйте свойства пропорции.
16. Что называется процентом? Какие три основные задачи на проценты вы знаете?
17. Выразите в виде дроби: а) 5%; б) 20%; в) 72%; г) 100%; д) 200%; е) 7,5%; ж) 0,75%.
18. Выразите данные дроби в виде числа процентов: а) 0,5; б) 2,15; в) 1,75; г) 2,0.
19. Найдите процентное отношение чисел: а) 1 к 4; б) 3 к 5; в) 5 к 2; г) 12,5 к 50; д) 3,2 к 1,28.
20. Найдите: а) 4% от 75; б) 15% от 84 кг; в) $18\frac{1}{3}\%$ от 330 м; г) 160% от 82 р. 25 к.
21. Найдите число, если: а) 40% его равны 12; б) 1,25% его равны 55; в) 0,8% его равны 1,84; г) 15% его равны 1 р. 35 к.; д) $16\frac{2}{3}\%$ его равны 2 ч 30 мин.
22. Найдите x, если: а) $7\% \cdot x = 182$; б) $60\% \cdot x = 32$; в) $1\frac{2}{3}\% \cdot x = 4{,}75$; г) $7{,}5\% \cdot x = 3{,}3$; д) $2{,}5\% \cdot x = 0{,}15$; е) $0{,}8\% \cdot x = 1{,}2$; ж) $10{,}75\% \cdot x = 8{,}6$.
23. Является ли верной пропорция $3{,}75 : 10{,}4 = 3\frac{11}{13} : 10\frac{2}{3}$?
24. Найдите неизвестный член пропорции $0{,}3x : 3\frac{1}{3} = 6 : 1{,}5$.

ГЛАВА III

§ 1. КООРДИНАТНАЯ ПРЯМАЯ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Прямую линию с выбранными на ней началом отсчета, единичным отрезком и направлением называют координатной прямой.
2. Каждому натуральному числу можно поставить в соответствие единственную точку на координатной прямой (рис. 4).

§ 2. МНОЖЕСТВО ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Два числа, отличающиеся друг от друга только знаком, называются противоположными числами. Например, числа 1 и -1, 5 и -5 противоположные. На координатной прямой противоположные числа расположены симметрично относительно начала отсчета.
2. Числа натуральные, им противоположные, а также число нуль составляют множество целых чисел. Оно обозначается $\boldsymbol{Z}$.
3. Множество натуральных чисел, дополненное нулем, называют множеством целых неотрицательных чисел и обозначают $\boldsymbol{Z}_0$.
4. Каждому целому числу можно поставить в соответствие единственную точку координатной прямой (рис. 5).

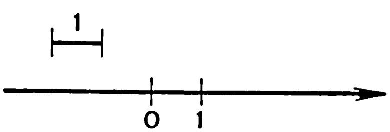


Рис. 4

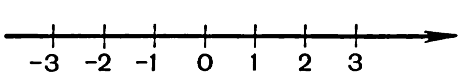


Рис. 5

§ 3. МНОЖЕСТВО РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Объединение множеств целых и дробных чисел (положительных и отрицательных) составляет множество рациональных чисел. Его обозначают $\boldsymbol{Q}$. Любое рациональное число может быть записано в виде $\frac{p}{q}$, где $p \in \boldsymbol{Z}$, $q \in \boldsymbol{N}$.

2. На множестве $\boldsymbol{Q}$ можно производить действия сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на нуль).

3. Каждому рациональному числу можно поставить в соответствие единственную точку координатной прямой.

§ 4. МОДУЛЬ ЧИСЛА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Модулем (абсолютной величиной) действительного числа a называется само это число, если $a \geqslant 0$, и противоположное число $-a$, если $a < 0$. Модуль a обозначается $|a|$. Итак,

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0, \\ (-1) \cdot a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

2. Геометрически $|a|$ означает расстояние на координатной прямой от точки, изображающей число a, до начала отсчета.

3. Модуль нуля равен нулю.

4. Если $a \neq 0$, то на координатной прямой существуют две точки a и $-a$, равноудаленные от нуля (рис. 6), модули которых равны.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Записать выражение без знака модуля:

1) $|x-2|$; 2) $3|x+2|$; 3) $|x^2-x|$; 4) $|x+2|-x$.

Решение. 1) Здесь под $|a|$ имеется в виду $|x-2|$. По определению модуля имеем:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & x-2 \geqslant 0, \\ -(x-2), & x-2 < 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad |x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geqslant 2, \\ -x+2, & x < 2. \end{cases}$$

2) Здесь под $|a|$ имеется в виду $|x+2|$. По определению модуля имеем:

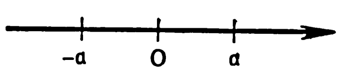


Рис. 6

$$3|x+2|=\begin{cases} 3(x+2), & x+2\geqslant 0, \\ -1\cdot 3(x+2), & x+2<0, \end{cases}$$

или

$$3|x+2|=\begin{cases} 3x+6, & x\geqslant -2, \\ -3x-6, & x<-2. \end{cases}$$

3) Здесь под $|a|$ имеется в виду $|x^2-x|$. Используем определение модуля:

$$|x^2-x|=\begin{cases} x^2-x, & x^2-x\geqslant 0, \\ -(x^2-x), & x^2-x<0. \end{cases}$$

4) Здесь под $|a|$ имеется в виду $|x+2|$, выражение $(-x)$ от модуля не зависит.

Используем определение раскрытия модуля:

$$|x+2|-x=\begin{cases} x+2-x, & x+2\geqslant 0, \\ -(x+2)-x, & x+2<0, \end{cases}$$

или

$$|x+2|-x=\begin{cases} 2, & x\geqslant -2, \\ -2x-2, & x<-2. \end{cases}$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Запишите выражение без знака абсолютной величины:

А. 1) $|x+2|$; 2) $|2+x|$; 3) $|x+2|+x$; 4) $-3|x-4|-x$.

Б. 1) $|6-x|$; 2) $|6-2x|$; 3) $|3x-2|+x+2$; 4) $-2|4-x|+4-x$.

В. 1) $|x-|x||$; 2) $|x+2|x||+2x$.

2. Покажите на числовой прямой множество решений уравнений или неравенств:

В. 1) $|x|=2$; 2) $|-x|=2$; 3) $|x|<5$; 4) $|x|\geqslant 5$; 5) $|x|\leqslant 2$.

3. При каких значениях x верно равенство:

В. 1) $x=|x|$; 2) $-x=|-x|$; 3) $-x=|x|$?

4. Где на координатной прямой расположены числа x, если:

В. 1) $|x|<2$; 2) $|x|>3$; 3) $2<|x|<3$? Назовите несколько таких чисел и изобразите их на координатной прямой.

§ 5. СРАВНЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Из двух чисел то больше, которое на координатной прямой расположено правее. Следовательно: а) всякое положительное число больше нуля и больше отрицательного числа; б) всякое отрицательное число меньше нуля; в) из двух отрицательных чисел больше то, модуль которого меньше. Например, $-3{,}8>-5{,}1$, так как $|-3{,}8|<|-5{,}1|$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Запишите числа, противоположные данным: 3,5; —7,2; —0,4; 12,6; 7,04; —2; x; 0.

2. Чему равны модули чисел: —6; 10; —6,3; 5,2; —0,4; —3,56; 0?

3. Следующие числа запишите в порядке их возрастания: —6,3; —5,7; —10; 16,3; —0,1; —104; 23; 0; $|-13|$.

§ 6. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Сумма двух чисел с одинаковыми знаками равна числу того же знака, модуль которого равен сумме модулей слагаемых. Например, $(-6)+(-5{,}3)=-(6+5{,}3)=-11{,}3$.

2. Сумма двух чисел с разными знаками равна числу, модуль которого получается вычитанием из большего модуля меньшего, а знак суммы совпадает со знаком слагаемого, имеющего больший модуль. Например, $(+4)+(-10)=-(10-4)=-6$.

3. Сумма противоположных чисел равна нулю. Например, $(+6)+(-6)=0$.

4. Чтобы вычесть из числа a число b, достаточно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому. Например, $a-b=a+(-b)$; $-5-(+3)=-5+(-3)=-8$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Выполните указанные действия:

А. 1) $32+(-6)$; 2) $(-13)+4$; 3) $(-6)+(-3)$; 4) $2+(-4)+(-6)$.

Б. 1) $\frac{3}{2}-\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)+\left(-2\frac{7}{12}\right)$; 2) $|-7|+|+4|-6$;

3) $|-7-3|+|5|-4$.

§ 7. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Произведение двух чисел одного знака есть число положительное. Например, $(-6)\cdot(-2{,}3)=13{,}8$.

2. Произведение двух чисел с разными знаками есть число отрицательное. Например, $(+6)\cdot(-2{,}3)=-13{,}8$.

3. Аналогично производится деление. Например, $(-18):(-9)=2$; $(+24):(-3)=-8$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Не производя вычислений, определите знак числового выражения:

А. 1) $(-2{,}3)\cdot 6{,}2\cdot 5{,}1\cdot(-2{,}4)\cdot(-3{,}1)$; 2) $23\cdot(-15)\cdot(-17)\cdot(-6)\cdot 0$.

2. Найдите неизвестный компонент умножения или деления:

А. 1) $(-2{,}6):x=-1\frac{11}{15}$; 2) $x:(-2{,}6)=-1\frac{11}{15}$;

3) $\left(-2\frac{1}{4}\right)\cdot x=1\frac{7}{12}$; 4) $x\cdot(-0{,}2)\cdot 0{,}2\cdot 4{,}2=3\cdot(-2)$.

Б. 1) $2\left(-3\frac{1}{2}\right)-3:x=5$; 2) $2\left(-\frac{3}{8}\right)+3:x=5$;

3) $-2\left(5\frac{1}{3}\right)+3\cdot x=2$; 4) $3:x-2=5:6\frac{1}{2}$.

Ответы. **2. А.** 1) 1,5; 4) $-\frac{250}{7}$. **Б.** 1) $-0{,}25$.

§ 8. ВОЗВЕДЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Степенью числа a с показателем k, где $k\in N$, $a\in Q$, называется произведение k множителей, каждый из которых равен a:

$$a^k=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{k\ \text{раз}}.$$

Число a называется основанием степени, а число k — показателем степени.

2. Четная степень отрицательного числа есть число положительное. Например, $(-3)^{24}>0$.

Нечетная степень отрицательного числа есть число отрицательное. Например, $\left(-\frac{3}{4}\right)^{17}<0$.

Любая степень положительного числа есть число положительное. Например, $12^k>0$.

3. При возведении нуля в любую натуральную степень k получается нуль, т. е. $0^k=0$.

4. При возведении единицы в любую натуральную степень k получается единица, т. е. $1^k=1$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Вычислите:

А. 1) $(-2)^2\cdot(-2)^3\cdot(-2)^4\cdot(-2)^5$; 2) $(-3)^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot(-6)^2$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot(-4)^2\cdot(-0{,}5)^2\cdot(-4)$;

4) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^3\cdot(1{,}5)^3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^3$.

Б. 1) $\frac{1+a+a^2}{1+a-a^2}$ при $a=0{,}5$; 2) $2a^3+3a^2-5a+6$ при $a=2$, $a=\frac{1}{2}$;
3) $3a^2-2b^3$ при $a=-1$, $b=-2$;
4) $5a^2b^3+4(a-b)$ при $a=-0{,}5$, $b=-1$;
5) $x^2+2xy+y^2$ при $x=-5$, $y=-4$;
6) a^2-3a+6 при $a=-0{,}(3)$.

2. Из следующих выражений, где $a\neq0$ и $b\neq0$, выпишите отдельно те выражения, которые при любых значениях входящих в них букв: 1) будут принимать только положительные значения; 2) будут принимать только отрицательные значения; 3) могут иметь и положительные, и отрицательные значения:

В. 1) a^2+b^2; 2) a^2-b^2; 3) $-a^2-b^2$; 4) $(a-b)^2$; 5) a^2+1; 6) a^3+1; 7) $-a^2-1$; 8) $2a^2+b^2$; 9) a^2+b^2+1; 10) a^3-1; 11) a^4+a^2; 12) $2a^2+3a^4+1$.

Ответы. 1. А. 3) $\frac{1}{2}$; 4) 1,5. Б. 1) $1\frac{2}{5}$; 2) 24; $\frac{9}{2}$; 3) 19; 4) 0,75; 5) 81; 6) $7\frac{1}{9}$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение координатной прямой.
2. Какое соответствие существует между множеством натуральных чисел и множеством точек координатной прямой?
3. Можно ли утверждать, что каждой точке координатной прямой соответствует определенное натуральное число?
4. Какие числа составляют множество $\boldsymbol{Z}$?
5. Как расположены на координатной прямой противоположные числа? Чему равна сумма чисел a и $-a$? Какое число противоположно нулю?
6. Какие числа составляют множество $\boldsymbol{Q}$?
7. Дайте определение модуля числа и его геометрическое истолкование.
8. Может ли быть отрицательным значение суммы $2+|x|$? Может ли равняться нулю значение разности $2|x|-|x|$?
9. Какое соответствие существует между множеством рациональных чисел и множеством точек координатной прямой?
10. Как сравниваются два положительных числа, два отрицательных числа, положительное и отрицательное числа?
11. Отметьте на координатной прямой и запишите целые числа: а) большие -8, но меньшие 3; б) меньшие 0, но большие -5; в) меньшие -2, но большие -7.
12. Сформулируйте правило сложения и вычитания положительных и отрицательных чисел.
13. Сформулируйте правило умножения и деления положительных и отрицательных чисел.
14. Всегда ли выполнимо действие деления на множестве $\boldsymbol{Q}$?
15. Дайте определение степени числа с натуральным показателем.
16. Чему равно значение: а) $(-1)^{25}$; б) $(-1)^{36}$; в) 0^{15}?

ГЛАВА IV

§ 1. СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, а основание остается прежним:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};\ m,\ n \in N.$$

Например, $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$.

2. При делении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней вычитаются, а основание остается прежним:

$$a^m : a^n = a^{m-n};\ m,\ n \in N.$$

Например, $a^5 : a^3 = a^2$.

3. При возведении степени в степень показатели степеней перемножаются, а основание остается прежним:

$$(a^m)^n = a^{mn};\ m,\ n \in N.$$

Например, $(a^4)^3 = a^{12}$.

4. Степень произведения равна произведению степеней множителей:

$$(abc)^k = a^k b^k c^k;\ k \in N.$$

Например, $(a \cdot b)^2 = a^2 b^2$.

5. Степень частного равна частному степеней делимого и делителя:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^k=\frac{a^k}{b^k};\ b\neq 0,\ k\in N.$$

Например, $\left(\frac{a}{b}\right)^4=\frac{a^4}{b^4}$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Найти значение выражения:

$$\frac{14^{10}}{2^8\cdot 7^9}\cdot\frac{13^6\cdot 8^4}{26^5}.$$

Решение. В данном случае в явной форме ни одно из свойств степени с натуральным показателем применить нельзя, так как все степени имеют разные основания. Запишем некоторые степени в другом виде:

$14^{10}=(2\cdot 7)^{10}=2^{10}\cdot 7^{10}$ (степень произведения равна произведению степеней множителей);

$8^4=(2\cdot 2\cdot 2)^4=(2^3)^4=2^{12}$ (при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, а основание остается прежним, при возведении степени в степень показатели степеней перемножаются, а основание остается прежним).

$26^5=(2\cdot 13)^5=2^5\cdot 13^5$.

Тогда получим:

$$\frac{14^{10}\cdot 13^6\cdot 8^4}{2^8\cdot 7^9\cdot 26^5}=\frac{2^{10}\cdot 7^{10}\cdot 13^6\cdot 2^{12}}{2^8\cdot 7^9\cdot 2^5\cdot 13^5}=\frac{2^{10+12}\cdot 7^{10}\cdot 13^6}{2^{8+5}\cdot 7^9\cdot 13^5}=\frac{2^{22}\cdot 7^{10}\cdot 13^6}{2^{13}\cdot 7^9\cdot 13^5}=$$

$$=2^{22-13}\cdot 7^{10-9}\cdot 13^{6-5}=2^9\cdot 7\cdot 13=46\,592.$$

В данном примере были использованы первые четыре свойства степени с натуральным показателем.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Запишите в виде степени с основанием x выражение:

А. 1) $x^2\cdot x^4$; 2) $x^2\cdot x^4\cdot x^3$; 3) $-x^3\cdot x^3$; 4) $(x^2)^4$; 5) $(x^4)^2$; 6) $(x^2\cdot x^3)^3$; 7) $((x^2)^3)^3$; 8) $x^2\cdot x^a$; 9) $(x^2x)^a$; 10) $x^2\cdot(x^2)^5$; 11) $(x^2)^3\cdot(x^3)^2$; 12) $(x\cdot x^2)^3$.

2. Найдите значение выражения:

Б. 1) $\frac{2^8\cdot 7^9}{14^{10}}\cdot\frac{26^5\cdot 2^{10}}{13^6\cdot 8^4}$; 2) $\frac{2^8\cdot 7^9}{14^{10}}:\frac{26^5}{13^6\cdot 8^4}$; 3) $\frac{14^{10}}{2^8\cdot 7^9}:\frac{13^6\cdot 8^4}{26^5}$;

4) $\frac{12^5}{2^3\cdot 4^4}$; 5) $\frac{12^5}{2^3\cdot 3^4}:\frac{10^5}{2^6\cdot 5^7}$; 6) $\frac{12^5}{2^3\cdot 3^4}\cdot\frac{10^5}{2^6\cdot 5^7}$; 7) $\frac{10^5}{2^6\cdot 5^7}:\frac{12^5}{2^3\cdot 3^4}$.

Ответы. 2. Б. 1) $\frac{2}{91}$; 2) $59\frac{3}{7}$; 3) $\frac{7}{416}$.

§ 2. ЧИСЛОВЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Из чисел, знаков действий и скобок можно составить различные числовые выражения. Например, $\frac{25-15}{16}$; $5-(3+8\cdot4):3$.

2. Выполняя указанные в выражении действия, получим число. Например, $\frac{25-15}{16}=\frac{5}{8}$, число $\frac{5}{8}$ называется числовым значением или значением выражения.

3. Если в выражении встречается деление на нуль, то выражение не имеет смысла. Например, выражение $\frac{5+6}{3{,}5\cdot2-7}$ не имеет смысла, так как $3{,}5\cdot2-7=0$, а на нуль делить нельзя.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Имеет ли смысл выражение:

1) $6{,}3:(2{,}5\cdot9-22{,}5)$; 2) $(15-2{,}5\cdot6):4{,}2$?

§ 3. ВЫРАЖЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Примерами выражений с переменными являются выражения $\frac{5+a}{3}$, x^2+y^2-1 и т. д. Значение выражения, содержащего переменную, зависит от значения переменной.

2. При некоторых значениях переменных выражение с переменными может не иметь смысла. Например, выражение $\frac{3}{x-5}$ при $x=5$ не имеет смысла, так как при $x=5$ знаменатель дроби обращается в нуль.

3. Множество значений переменных, при которых выражение с переменными имеет смысл, называется областью определения этого выражения.

§ 4. ТОЖДЕСТВЕННО РАВНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Два выражения называются тождественно равными, если при всех значениях входящих в них переменных, принадлежащих общей области определения, соответственные значения этих выражений равны.

2. Равенства, верные при всех допустимых значениях переменных, называются тождествами. Например, $(a-x)^2=a^2-2ax+x^2$, $\frac{a^3-8}{a-2}=a^2+2a+4$ при $a\neq2$ — тождества.

§ 5. ОДНОЧЛЕНЫ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Выражение, представляющее собой произведение чисел, переменных и их степеней, называется одночленом. Например, $3ax^4$, $-2b^3$, $0{,}5c^3(-3b^2)$ — одночлены. Выражения $x+1$, a^2+b^4, $\frac{3y^3}{x}$ не являются одночленами, так как представляют сумму или частное переменных и чисел.

2. Стандартным видом одночлена называется произведение, составленное из числового множителя (коэффициента) и степеней различных переменных. Например, -2, a, 5^4, y^3, $-8a^3x^2$, $\frac{3}{5}a$ — одночлены стандартного вида.

3. Степенью одночлена стандартного вида называется сумма показателей степеней переменных. Например, $8x^4y^2$ — одночлен шестой степени, степень одночлена $3x$ равна единице, а степень одночлена 5 равна нулю.

4. Одночлены, отличающиеся только числовым коэффициентом или равные между собой, называются подобными.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Представить одночлен в стандартном виде и назвать его коэффициент: $2a^2bc^2\cdot(-3ab^3c^2)\cdot(4abc^3)$.

Решение. Воспользуемся переместительным и сочетательным свойствами умножения, сгруппируем числовые множители и степени с одинаковыми основаниями: $(2\cdot(-3)\cdot 4)(a^2\cdot a\cdot a)\times\times(b\cdot b^3\cdot b)(c^2\cdot c^2\cdot c^3)$. Перемножим числовые множители и степени с одинаковыми основаниями: $(2\cdot(-3)\cdot 4)(a^2\cdot a\cdot a)(b\cdot b^3\cdot b)\times(c^2\cdot c^2\cdot c^3)=-24a^4b^5c^7$. Коэффициент одночлена равен (-24).

2. Возвести в степень одночлен: $(-3a^2b^3c)^3$.

Решение. Выражение $(-3a^2b^3c)^3$ представляет собой третью степень одночлена $(-3a^2b^3c)$. Для решения задачи воспользуемся правилами возведения в степень произведения и степени. Имеем $(-3a^2b^3c)^3=(-3)^3(a^2)^3(b^3)^3c^3=-27a^6b^9c^3$.

Таким образом, мы преобразовали степень одночлена $(-3a^2b^3c)^3$ в одночлен стандартного вида: $(-3a^2b^3c)^3=-27a^6b^9c^3$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Какова степень одночлена:

А. 1) $2x^2xy^3$; 2) $-2x^3y^4$; 3) $0{,}8x^2y^2c^3$; 4) 7?

2. Представьте одночлен в стандартном виде и назовите его коэффициент:

А. 1) $6xx^3$; 2) $3xy(-1{,}5)y^3$; 3) $\frac{2}{3}ax^2y^2\cdot 6{,}5x^3$.

3. Возведите одночлен:

А. 1) $2x^2y^2$ в квадрат; 2) $(-2x^2y^3)$ в куб; 3) $(-2a^2bx^3)^2$ в четвертую степень.

§ 6. МНОГОЧЛЕНЫ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Алгебраическая сумма одночленов называется многочленом. Например, $2a^2-3ax^5-3$ — многочлен. Выражение $\frac{y}{x-xy^2+x+3}$ не является многочленом, так как оно не является суммой одночленов.

2. Если в многочлене все одночлены записаны в стандартном виде и приведены подобные члены, то полученный многочлен называется многочленом стандартного вида. Например, $2x^2a^3+1{,}8xa^4-3a+7$ — многочлен стандартного вида.

3. Степенью многочлена стандартного вида называется наибольшая степень одночлена, входящего в этот многочлен. Например, $1+2x^2-5x^2y^3$ — многочлен пятой степени.

4. Сумму подобных членов можно заменить одним членом, сложив их коэффициенты и оставив ту же буквенную часть. Такое тождественное преобразование многочленов называют приведением подобных членов.

Например, в многочлене $5ab^2c^3+6ab^2c^3-ab$ члены $5ab^2c^3$ и $6ab^2c^3$ являются подобными слагаемыми, так как они имеют одну и ту же буквенную часть.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Выяснить, какова степень многочлена $3a^5+8ab-2a^5-a^5+6a$, и привести его к стандартному виду.

Решение.

$$3a^5-2a^5-a^5+8ab+6a=8ab+6a.$$

Степень многочлена $8ab+6a$ равна двум, а поэтому и степень многочлена $3a^5-2a^5-a^5+8ab+6a$ равна двум.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Приведите подобные члены многочлена и найдите значение многочлена:

А. 1) $-a^4+2a^3-4a^4+2a^2-3a^2$ при $a=-3$;
2) $2a^3+a^2-17-3a^2+a^3-a+80$ при $a=-3$;
3) $12ax^2-x^3-6ax^2+3a^2x-5ax^2+2x^3$ при $a=-3$, $x=-1$;
4) $2a^2-ax^3-a^4-a^2x^3+ax^3+2a^4$ при $a=-3$, $x=1$.

Б. 1) $5x^6-3x^2+7-2x^6-3x^6+4x^2$ при $x=-1$;
2) $4a^2x-ax^2-3a^2x+ax^2-ax+6$ при $a=-3$, $x=2$;
3) $6a^3-a^{10}+4a^3+a^{10}-8a^3+a$ при $a=-3$;

4) $4x^6y^3-3x^6y^3+2x^2y^2-x^6y^3-x^2y^2$ при $x=-3$, $y=-1$.

Ответы. А. 1) -468; 2) -33; 3) -31; 4) 90. Б. 1) 8; 2) 30; 3) -57; 4) 9.

§ 7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СУММЫ И РАЗНОСТИ МНОГОЧЛЕНОВ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Для того чтобы преобразовать сумму или разность многочленов в многочлен стандартного вида, надо: а) раскрыть скобки; б) привести подобные члены (слагаемые).

2. Раскрытие скобок. Если перед скобками стоит знак «плюс», то, раскрывая скобки, следует сохранить знак каждого слагаемого суммы, заключенной в скобки.

Если перед скобками стоит знак «минус», то, раскрывая скобки, надо знаки слагаемых поменять на противоположные.

3. Приведение подобных членов (слагаемых). Чтобы привести подобные слагаемые, достаточно сложить их коэффициенты (по правилу сложения положительных и отрицательных чисел) и полученное число умножить на буквенное выражение.

Например,

$$(5x^2-4x+3)-(3x^2-x+2)=$$
$$=5x^2-4x+3-3x^2+x-2=$$
$$=2x^2-3x+1.$$

Замечание. Если многочлен следует заключить в скобки, то это делается по правилу, аналогичному раскрытию скобок. Например,

$$17a^4-8a^3y-6a^2y^2-ay^3=(17a^4-8a^3y)-(6a^2y^2+ay^3).$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Упростите выражение и найдите его значение при $a=-1$, $x=1$, $y=-1$:

А. 1) $(12a+16x)-(6a-7x)$; 2) $(11x^3-2x^2)-(x^3-x^2)$;
3) $(3a^3x-13x^2)-(3a^3x+6x^2)$; 4) $(4x^2y+8xy^2)-(3x^2y-5xy^2)$;
5) $(13x-11y+10a)-(-15x+10y-15a)$;
6) $(7a^2-4ax-x^2)-(2a^2-ax+2x^2)$.

Б. 1) $(4a^2-2ax-y^2)-(-a^2+x^2-2ax)+(3a^2-ax+y^2)$;
2) $3x-(5x-(2x-1))$; 3) $9a^2+(7a^2-2a-(a^2-3a))$;
4) $(5a^2-3x^2)+(-(a^2-2ax-x^2)+(5a^2-2ax-3y^2))$;
5) $3a-(2x-(6a-(x-y)+x+(a+8y-xy)))$.

Ответы. А. 1) 17; 2) 9; 3) -19; 4) 12; 5) 24; 6) 5. Б. 1) 8; 2) -1; 3) 14; 4) 4; 5) -20.

§ 8. УМНОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА ОДНОЧЛЕН И МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Чтобы умножить многочлен на одночлен, достаточно каждый член многочлена умножить на одночлен и полученные произведения сложить.

2. Деление многочлена на одночлен производится по аналогичному правилу.

3. Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член первого многочлена умножить на каждый член второго и полученные произведения сложить.

Например, $5x(x-y)+(2x+y)(x-y)=5x^2-5xy+2x^2-2xy+$ $+xy-y^2=7x^2-6xy-y^2$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Выполните умножение:

А. 1) $(a+x)4$; 2) $(3a-2x)x$; 3) $5a(6a+3x)$;
4) $-6x(5y-2x)$; 5) $(2a-5x+6y)(-3)$;
6) $(4x^3+7x^2-x)\cdot(-5)$; 7) $(2x^2-5x+3)(-4x)$.

Б. 1) $(a^k+2a)\cdot a^k$; 2) $(3x^{k+11}-2x^k)\cdot 5x$;
3) $8a^{k-1}(0{,}5a^{k+1}-0{,}75a)$; 4) $-6a^xc^x\left(-\frac{1}{3}a^{2-x}-\frac{c}{2}^{4-x}\right)$.

2. Выполните действия и упростите:

А. 1) $a(a+x)-x(a-x)$; 2) $3(x+y)+5(x-y)$;
3) $2(a-3x)+3(a-2x)$; 4) $7(2a-3x)+3(a+x)$;
5) $-3(a-x)-2(a+x)-(3a-2x)+5(a-2x)$.

3. Упростите выражение и вычислите результат:
1) $(a-4)(a-2)-(a-1)(a-3)$ при $a=1{,}75$;
2) $(a-5)(a-1)-(a+2)(a-3)$ при $a=-2{,}6$;
3) $(x-2)(x-3)+(x+6)(x-5)-2(x^2-7x+13)$ при $x=5{,}6$;
4) $(x+1)(x+2)+(x+3)(x+4)$ при $x=-0{,}4$;
5) $(a-1)(a-2)+(a-3)(a-4)$ при $a=0{,}2$.

Ответы. 1. Б. 1) $a^{2k}+2a^{k+1}$; 2) $15x^{k+12}-10x^{k+1}$; 3) $4a^{2k}-6a^k$; 4) $2a^2c^x+3a^xc^4$. 3. 1) 1,5; 2) 24; 3) 6; 4) 10,32; 5) 12,08.

§ 9. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ СПОСОБОМ ВЫНЕСЕНИЯ ОБЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ ЗА СКОБКИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Преобразование многочлена в произведение двух или нескольких многочленов (среди которых могут быть и одночлены) называется разложением многочлена на множители.

Например, $3ax^4-6a^7x^7+12ax^3=3ax^3(x-2a^6x^4+4)$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Вынести за скобки общий множитель:

1) $x^3+3x^2+4x^4$; 2) $4x^4-8x^3+2x^2-6x$.

Решение. 1) Каждый член многочлена $4x^4+x^3+3x^2$ можно заменить произведением двух множителей, один из которых равен x^2: $4x^4+x^3+3x^2=x^2\cdot 4x^2+x^2\cdot x+x^2\cdot 3$.

Полученное выражение на основе распределительного свойства умножения относительно сложения можно представить в виде произведения двух множителей, один из которых — общий множитель x^2, а второй — сумма $4x^2+x+3$:

$$x^2\cdot 4x^2+x^2\cdot x+x^2\cdot 3=x^2(4x^2+x+3).$$

Итак, $4x^4+x^3+3x^2=x^2(4x^2+x+3)$.

2) Данный многочлен $4x^4-8x^3+2x^2-6x$ имеет общий множитель $2x$, вынесем его за скобки:

$$4x^4-8x^3+2x^2-6x=2x\,(2x^3-4x^2+x-3).$$

2. Доказать, что значение выражения 25^7+5^{13} кратно 30.

Решение. Требуется доказать, что выражение 25^7+5^{13} делится нацело на 30. Преобразуем данное нам выражение так:

$$25^7+5^{13}=(5^2)^7+5^{13}=5^{14}+5^{13}.$$

Вынесем за скобки общий множитель 5^{13}, получим:

$$25^7+5^{13}=5^{14}+5^{13}=5^{13}(5+1)=6\cdot 5^{13}.$$

Число $6\cdot 5^{13}$ делится на 30, так как $6\cdot 5^{13}=6\cdot 5\cdot 5^{12}=30\cdot 5^{12}$. Следовательно, 25^7+5^{13} кратно 30.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Разложите на множители:

А. 1) $7ax+7ay$; 2) $-15ax-20ay$; 3) $3a^2x+6ax^3$;
4) $ax+bx+x$; 5) a^3-2a^2-a; 6) $5x-15xy+10ax$;
7) $5x^2-10xy+5y^2$; 8) $x^4+3x^3-x^2$; 9) $3ax+3ay-12a$.

Б. 1) $x\,(a-c)+y\,(c-a)$; 2) $a\,(x-y)-c\,(y-x)$;
3) $2y\,(x-3)-5c\,(3-x)$; 4) $a^2(x-1)-y\,(1-x)$;
5) $x^2(a-2)+y\,(2-a)$; 6) $5\,(x-3)-a\,(3-x)$;
7) $3\,(x+y)+(x+y)^2$; 8) $(a+x)^3-a\,(a+x)^2$.

В. 1) a^x+a^{x+1}; 2) $x^{a+c}-x^a$; 3) $y^{a+1}-y$;
4) $5x^{a+2}+10x^2$; 5) $a^{3x}-a^{2x}$; 6) $a^cx^{2c}+a^cx^c$;
7) $4x^{a+2}+20x^a$; 8) $15x^{2c+3}-25x^{c+1}$.

2. **В.** Докажите, что если x — целое число, то x^2-x делится на 2 без остатка. Приведите числовые примеры.

Ответы. **1. А.** 5) $a(a^2-2a-1)$. **Б.** 1) $(a-c)(x-y)$; 8) $(a+x)^2x$. **В.** 4) $5x^2(x^a+2)$; 5) $a^{2x}(a^x-1)$. **2. В.** Указание. См. гл. I, § 5.

§ 10. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ СПОСОБОМ ГРУППИРОВКИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Если члены многочлена не имеют общего множителя, отличного от 1, то следует попытаться разложить такой многочлен способом группировки.

Для этого надо объединить в группы те члены, которые имеют общие множители, и вынести за скобки общий множитель каждой группы. Если после такого преобразования окажется общий множитель у всех получившихся групп, то его выносят за скобки.

Способ, с помощью которого предлагается разложить многочлен на множители, называют способом группировки.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Разложить многочлен на множители:
1) $ax+2a-3x-6$; 2) $3(x-2y)^2-3x+6y$.

Решение. 1) Объединим в одну группу первые два члена, а в другую — последние два члена: $ax+2a-3x-6=(ax+2a)+$ $+(-3x-6)$.

Дальнейшие преобразования выглядят так:

$$a(x+2)-3(x+2)=(x+2)(a-3).$$

Из первых скобок вынесли общий множитель a, из вторых — общий множитель -3. Многочлен $a(x+2)-3(x+2)$ имеет общий множитель $(x+2)$, который вынесли за скобки, а в скобках получили двучлен $(a-3)$.

2) $3(x-2y)^2-3x+6y$. Объединим $-3x+6y$ в группу и вынесем за скобки общий множитель -3. Получим $3(x-2y)^2-$ $-3(x-2y)$. Далее выносим за скобки $3(x-2y)$: $3(x-2y)^2-$ $-3(x-2y)=3(x-2y)(x-2y)-3(x-2y)=3(x-2y)(x-2y-1)$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Разложите на множители:

А. 1) $5a(x+y)-x-y$; 2) $4x(a-y)-a+y$;
3) $x(a+y)+ay+y^2$; 4) $x^2-2x-xy+2y$;
5) $10ay-5cy+2ax-cx$; 6) $6cy-15cx-4ay+10ax$.

Б. 1) $ax^2-cx^2-cx+ax-a+c$; 2) $ax^2+cx^2-cx-ax+a+c$;
3) $ax^2+yx^2+ax+cx^2+yx+cx$; 4) $5ax^2-10ax-yx+2y-x+2$;
5) $12a^2y^2-6ayc+3ac^2-6a^2yc-c+2ay$.

Ответы. **А.** 1) $(x+y)(5a-1)$; 6) $(3c-2a)(2y-5x)$.
Б. 1) $(a-c)(x^2+x-1)$; 4) $(x-2)(5ax-c-1)$.

§ 11. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$. (1)

Если эту формулу записать справа налево, то получим $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$, т. е. разность квадратов двух выражений равна произведению разности этих выражений и их суммы.

Например, $49x^2-9y^2=(7x)^2-(3y)^2=(7x-3y)(7x+3y)$.

2. $(x+y)^2=(x+y)(x+y)=x^2+2xy+y^2$. (2)

Тождество (2) называют формулой квадрата суммы. Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

Например, $(5+3x)^2=5^2+2\cdot5\cdot3x+(3x)^2=25+30x+9x^2$.

3. $(x-y)^2=(x-y)(x-y)=x^2-2xy+y^2$. (3)

Тождество (3) называют формулой квадрата разности. Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

Например, $(5-3x)^2=5^2-2\cdot5\cdot3x+(3x)^2=25-30x+9x^2$.

4. $(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$. (4)

Если эту формулу записать справа налево, то, получим $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$, т. е. сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности.

Примечание. Выражение x^2-xy+y^2 напоминает нам трехчлен $x^2-2xy+y^2$, который равен квадрату разности x и y. Однако в данном выражении x^2-xy+y^2 вместо удвоенного произведения x и y стоит просто их произведение. Именно поэтому выражение x^2-xy+y^2 называют неполным квадратом разности.

Например, $27a^3+8=(3a)^3+2^3=(3a+2)(9a^2-6a+4)$.

5. $(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$. (5)

Если эту формулу записать справа налево, то получим $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$, т. е. разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы.

Например, $8-y^3=(2-y)(4+2y+y^2)$.

Выражение вида x^2+xy+y^2 называют неполным квадратом суммы.

Приведем еще четыре формулы:

6. $(a+x)^3=(a+x)(a+x)(a+x)=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$. (6)

Тождество (6) называют кубом суммы.

7. $(a-x)^3=(a-x)(a-x)(a-x)=a^3-3a^2x+3ax^2-x^3$. (7)

Тождество (7) называют кубом разности.

8. $(a+x+y)^2=a^2+x^2+y^2+2ax+2ay+2xy$. (8)

9. $(a-x-y)^2=a^2+x^2+y^2-2ax-2ay+2xy$. (9)

Тождества (8) и (9) называют квадратом трехчлена.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Разложить на множители:

1) $(x+3)^2-16$; 2) $4a^2-x^2+2xy-y^2$; 3) $6x^2+24yx+24y^2$;
4) x^6-2^6; 5) $8+x^3y^3$.

Решение. 1) Выражение $(x+3)^2-16$ в явной форме ни одно из семи тождеств не представляет, но число 16 можно представить в виде степени с основанием 4, т. е. $16=4^2$. Тогда выражение $(x+3)^2-16$ примет иной вид:

$$(x+3)^2-16=(x+3)^2-4^2,$$

а это уже формула разности квадратов, и, применив эту формулу, получим:

$$(x+3)^2-16=(x+3)^2-4^2=(x+3-4)(x+3+4)= (x-1)(x+7).$$

2) Объединим в одну группу последние три члена, вынеся -1 за скобки. Получим

$$4a^2-(x^2-2xy+y^2)=(2a)^2-(x-y)^2= =(2a-x+y)(2a+x-y),$$

так как $(2a)^2-(x-y)^2$ можно разложить по формуле разности квадратов.

3) Это выражение в явной форме ни под одно тождество не подходит. Анализируя пример, видим, что в каждом слагаемом можно вынести общий множитель 6 за скобки. Получим:

$$6x^2+24xy+24y^2=6(x^2+4xy+4y^2).$$

Выражение в скобках $x^2+4xy+4y^2$ представляет собой разложенный квадрат суммы двух выражений: $x^2+4xy+4y^2= =(x+2y)^2$.

Теперь наше выражение примет вид:

$$6x^2+24xy+24y^2=6(x+2y)^2=6(x+2y)(x+2y).$$

4) Представим данный многочлен x^6-2^6 в виде разности кубов двух выражений и, применив формулу, получим:

$$x^6-2^6=(x^2)^3-(2^2)^3=(x^2-2^2)(x^4+4x^2+16)= =(x-2)(x+2)(x^4+4x^2+16).$$

Этот пример можно решить и вторым способом. Для этого представим данный многочлен x^6-2^6 в виде разности квадратов двух выражений, получим:

$$x^6-2^6=(x^3)^2-(2^3)^2=(x^3-2^3)(x^3+2^3).$$

Теперь мы получили выражение, состоящее из двух сомножителей: разности кубов двух выражений и суммы кубов двух выражений. Первый из них разлагается на множители по формуле (5), а второй — по формуле (4):

$$x^6-2^6=(x^3-2^3)(x^3+2^3)=(x-2)(x^2+2x+4)(x+2)(x^2-2x+4)=$$
$$=(x-2)(x+2)(x^4+4x^2+16).$$

5) Данный многочлен легко можно представить в виде суммы кубов двух выражений таким образом:

$$8+x^3y^3=2^3+(xy)^3.$$

Применив формулу суммы кубов, получим:

$$2^3+(xy)^3=(2+xy)(4-2xy+x^2y^2).$$

2. Сравнить числа: 24^4 и $18\cdot21\cdot25\cdot28$.

Решение. $18\cdot21\cdot25\cdot28=(23-5)(23-2)(23+2)(23+5)=$ $=(23^2-5^2)(23^2-2^2)<23^2\cdot23^2<24^2\cdot24^2$.

Следовательно, $24^4>18\cdot21\cdot25\cdot28$.

3. Найти значение выражения $\frac{(8^{k+1}+8^k)^2}{(4^k-4^{k-1})^3}$, где $k\in N$.

Решение. $\frac{(8^{k+1}+8^k)^2}{(4^k-4^{k-1})^3}=\frac{(8^k(8+1))^2}{(4^{k-1}(4-1))^3}=\frac{8^{2k}\cdot9^2}{4^{3(k-1)}\cdot3^3}=\frac{2^{6k}\cdot3^4}{2^{6(k-1)}\cdot3^3}=$

$=\frac{2^{6k}\cdot3^4}{2^{6k}\cdot2^{-6}\cdot3^3}=\frac{3}{2^{-6}}=3\cdot64=192.$

4. Доказать, что при любом натуральном k значение выражения $(3k+1)^2-(3k-1)^2$ делится на 12.

Решение. Воспользовавшись формулой a^2-b^2, упростим данное выражение:

$$(3k+1)^2-(3k-1)^2=$$
$$=(3k+1-3k+1)(3k+1+3k-1)=$$
$$=2\cdot6k=12k.$$

Полученное выражение $12k$ делится на 12 без остатка.

5. Доказать, что значение выражения $(x+7)^2-(x-5)(x+19)$ не зависит от переменной x.

Решение. Выполним указанные действия:

$$(x+7)^2-(x-5)(x+19)=$$
$$=x^2+14x+49-(x^2+19x-5x-95)=$$
$$=x^2+14x+49-x^2-14x+95=49+95=144.$$

После преобразования данного выражения получили число 144, а это и означает, что выражение $(x+7)^2-(x-5)(x+19)$ не зависит от переменной x.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Разложите на множители:

А. 1) $4x^3-4y^3$; 2) $7x^3+7y^3$; 3) $2x^2-4x+2$;
4) $36+24x+4x^2$; 5) x^2-y^2-x-y; 6) x^2-y^2-x+y;
7) $x^2-2xy+y^2-c^2$; 8) $c^2-x^2+2xy-y^2$;
9) $(x-5)^2-16$; 10) $16-(x-5)^2$; 11) $36-x^2y^2$.

Б. 1) ax^2-a-x^2+x; 2) $ax^2+2a^2-a^3-2x^2$;
3) $x^2-y^2-8x+16$; 4) $9-c^2+a^2+6a$; 5) $x^3+y^3+2xy(x+y)$;
6) $x^3-y^3-5x(x^2+xy+y^2)$; 7) $x^3+y^3+2x^2-2xy+2y^2$;
8) $a^4+ax^3-a^3x-x^4$.

В. 1) $(x+y)(x^2+y^2)-x^3-y^3$; 2) $(x-y)(x^3+y^3)(x^2+xy+y^2)-$
$-(x^6-y^6)$; 3) $36a^2-(a^2+9)^2$; 4) $8x^3-27y^{18}$.

2. Докажите, что при любом натуральном k значение выражения:

Б. 1) $(k+1)^2-(k-1)^2$ делится на 4;
2) $(2k+3)^2-(2k-1)^2$ делится на 8;
3) k^3-k делится на 6.

3. Найдите значение дроби:

А. 1) $\frac{38^2-17^2}{72^2-16^2}$; 2) $\frac{39{,}5^2-3{,}5^2}{57{,}5^2-14{,}5^2}$; 3) $\frac{856^2-44^2}{406}$.

Б. 1) $\frac{71^2-23^2+94\cdot42}{62^2-32^2}$; 2) $\frac{63^2-23^2}{71^2-15^2+86\cdot24}$.

В. $\frac{(4^{k+1}+6\cdot4^k)^3}{(8^{k+1}+2\cdot8^k)^2}$, где k — натуральное число.

4. Докажите, что данное равенство есть тождество:

Б. 1) $(a-b)^3=-(b-a)^3$; 2) $36a^2-(a^2+9)^2=-(a^2-9)^2$.

В. 1) $3x^4+1=(x^2+x)^2+(x^2-x)^2+(x^2-1)^2$;
2) $(a+x+c)^3=(a+x-c)^3+(x+c-a)^3+(a+c-x)^3+24axc$.

5. В. Докажите, что сумма кубов трех последовательных целых чисел делится нацело на 3.

6. В. Докажите, что если $a+x+c=0$, то $a^3+x^3+c^3=3axc$.

7. Что больше: 19^4 или $16\cdot18\cdot20\cdot22$?

Ответы. **1. А.** 1) $4(x-y)(x^2+xy+y^2)$; 3) $2(x-1)(x-1)$; 5) $(x+y)(x-y-1)$; 7) $(x-y-c)(x-y+c)$; 10) $(9-x)(x-1)$. **Б.** 1) $(x-1)(ax+a-x)$; 5) $(x+y)(x^2+xy+y^2)$. **В.** 1) $(x+y)xy$; 2) 0; 3) $-(x-3)(x-3)(x+3)(x+3)$. **3. А.** 2) $\frac{1}{2}$. **Б.** 1) 3. **В.** 10.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте правила умножения и деления степеней с одинаковыми основаниями.
2. Сформулируйте правило возведения степени в степень, произведения в степень и частного в степень.
3. Что следует понимать под значением данного выражения?
4. Всегда ли выражение, содержащее переменную, имеет числовое значение? Приведите примеры.
5. Что называется областью определения данного выражения? Приведите примеры.
6. В чем сходство и различие понятий «тождественно равные выражения» и «тождество»?
7. Какие два выражения называются тождественно равными?
8. Какие равенства называются тождествами?

9. Какое выражение называется одночленом; многочленом?
10. Что называется коэффициентом одночлена? Какие одночлены называются подобными?
11. Что называется степенью одночлена и многочлена, заданных в стандартном виде?
12. Каковы степени одночленов: а) xy; б) x^2; в) x^2y^2; г) $5ax^3$; д) 7?
13. Какова степень многочлена $3x^2+xy+2x^3y$?
14. Сформулируйте правила раскрытия скобок, умножения многочлена на одночлен и многочлена на многочлен.
15. Что значит разложить многочлен на множители?
16. Перечислите известные вам способы разложения многочлена на множители.
17. Напишите в общем виде формулу: а) квадрата и куба двучлена; б) разности квадратов двух выражений; в) суммы и разности кубов двух выражений.
18. Что больше: а) 45^2-31^2 или 44^2-30^2; б) $297\cdot299$ или 298^2; в) 26^3-24^3 или $(26-24)^3$; г) $(17+13)^3$ или 17^3+13^3?

ГЛАВА V

§ 1. ДРОБЬ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Дробью называется выражение вида $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$, где буквами a и b обозначены числовые выражения или выражения с переменными.

2. Область определения дроби $\frac{a}{b}$ — это множество чисел, при которых эта дробь имеет числовое значение. Следовательно, областью определения дроби $\frac{a}{b}$ является множество пар чисел $(a;\ b)$, где $b \in (-\infty,\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

3. При умножении числителя и знаменателя дроби на одно и то же выражение, отличное от нуля, значение дроби не меняется.

4. Дробь $\frac{a}{b}$ равна нулю тогда и только тогда, когда $a=0$ и $b \neq 0$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Указать допустимые значения переменных дроби:

1) $\frac{x-2}{x+1}$; 2) $\frac{2(5x-4)}{(x+2)(x-3)}$; 3) $\frac{x+y}{x(3x-5y)}$; 4) $\frac{x}{x^2+4}$.

Решение. 1) Дробь $\frac{x-2}{x+1}$ не имеет смысла при значении $x=-1$, так как при $x=-1$ знаменатель дроби обращается в нуль. Областью определения данной дроби (или допустимыми значениями) служит множество всех чисел, кроме $x=-1$.

Эта область есть объединение двух числовых промежутков $(-\infty;\ -1) \cup (-1;\ +\infty)$, или $-\infty < x < +\infty$, $x \neq -1$.

2) Дробь $\frac{2(5x-4)}{(x+2)(x-3)}$ не имеет смысла при значениях $x=-2$ и $x=3$.

Ответ. $(-\infty; -2)\cup(-2; 3)\cup(3; +\infty)$.

3) Дробь $\frac{x+y}{x(3x-5y)}$ не имеет смысла при $x=0$, а также при всех парах значений x и y, для которых выполняется условие $3x=5y$.

Ответ. Множество пар чисел $(x; y)$, где $x\neq 0$ и $x\neq\frac{5}{3}y$.

4) Знаменатель данной дроби равен x^2+4. Выражение x^2+4 больше нуля при любом значении x.

Ответ. x — любое число.

2. Сократить дробь:

1) $\frac{a^2-16}{ax+4x}$; 2) $\frac{3x^2+15xy}{x+5y}$; 3) $\frac{3(x-2)}{7(2-x)}$.

Решение. 1) Разложим числитель и знаменатель дроби $\frac{a^2-16}{ax+4x}$ на множители, имея в виду, что $ax+4x\neq 0$, получим:

$$\frac{a^2-16}{ax+4x}=\frac{(a-4)(a+4)}{x(a+4)}.$$

На основании основного свойства дроби сократим полученную дробь на общий множитель $a+4$:

$$\frac{(a-4)(a+4)}{x(a+4)}=\frac{a-4}{x}.$$

Итак,

$$\frac{a^2-16}{ax+4x}=\frac{a-4}{x}.$$

2) $\frac{3x^2+15xy}{x+5y}=\frac{3x(x+5y)}{x+5y}=3x.$

3) Дробь $\frac{3(x-2)}{7(2-x)}$ имеет смысл, если $2-x\neq 0$.

Чтобы использовать основное свойство дроби, надо преобразовать числитель (или знаменатель) дроби путем вынесения общего множителя -1 за скобки и тогда дробь можно будет сократить на общий множитель:

$$\frac{3(x-2)}{7(2-x)}=\frac{-3(2-x)}{7(2-x)}=-\frac{3}{7}.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. При каких значениях переменных имеет смысл выражение:

А. 1) $\frac{3}{y}$; 2) $\frac{1}{x-1}$; 3) $\frac{a-3}{4}$; 4) $\frac{3a}{2+a}$; 5) $\frac{2x}{10-x}$; 6) x^2+x-3?

Б. 1) $\frac{x}{x^2+3}$; 2) $\frac{x}{x^2-9}$; 3) $\frac{x-1}{x}+\frac{6}{x+3}$; 4) $\frac{3x}{x(x+2)}$; 5) $\frac{x-2}{a^2-x^2}$;

6) $\frac{y}{y^2+x^2+1}$; 7) $\frac{y^2}{x^2-y^2}$?

2. Сократите дробь:

А. 1) $\frac{x^2-16}{3x+12}$; 2) $\frac{x^2-16}{3x-12}$; 3) $\frac{3x+12}{x^2-16}$; 4) $\frac{x^2+10x+25}{(x+5)^2}$;

5) $\frac{x^3+8}{x+2}$; 6) $\frac{x^3+8}{x^2-2x+4}$; 7) $\frac{(x+2)^3}{x^2+4x+4}$; 8) $\frac{x-y}{y-x}$.

Б. 1) $\frac{(x-2)^2}{2-x}$; 2) $\frac{(x-2)^2}{(2-x)^2}$; 3) $\frac{(x-2)^3}{(2-x)^2}$; 4) $\frac{3-3x}{x^2-2x+1}$.

В. 1) $\frac{x^6+x^4}{x^4+x^2}$; 2) $\frac{y^6-y^8}{y^4-y^2}$; 3) $\frac{x^7-x^{10}}{x^5-x^2}$; 4) $\frac{x^6-x^4}{x^3+x^2}$.

Ответы. **1. А.** 6) x — любое число. **Б.** 1) x — любое число; 6) x и y — любые числа. **2. А.** 2) $\frac{x+4}{3}$; 4) 1; 5) x^2-2x+4. **В.** 1) x^2; 4) $(x-1)x^2$.

§ 2. ЦЕЛЫЕ И ДРОБНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Целыми выражениями называются: а) все числовые выражения; б) выражения с переменными, содержащие операции сложения, вычитания, умножения и возведения переменных в натуральную степень.

Примеры целых выражений: $\frac{6-2{,}5}{0{,}4}+1\frac{1}{3}$, $(a+b)^2$, $2a-\frac{7}{8}a$.

Выражения $4ab^{-3}$, $\frac{x}{y}$, $\frac{x-y}{x+y}$ не являются целыми, так как они содержат операции возведения в целую отрицательную степень и деления на переменную.

2. Одночлены и многочлены являются целыми выражениями.

3. Если в выражении с переменными, кроме операций сложения, умножения, вычитания и возведения в натуральную степень, производится и операция деления на переменную, то такие выражения называются дробными выражениями.

Например, $\frac{3ab}{a+b}$, $\frac{4}{x}$, $x\left(1+\frac{2}{x}\right)$ — дробные выражения.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Какие из выражений $3x^2y$, $4a^2-x(a-3x)$, $\frac{x^2}{x-3}$, $\frac{x^3}{4}$, $6x-\frac{1}{2}$ являются целыми, какие — дробными?

2. Найдите значение выражения:

А. 1) $x+\frac{8}{x-1}$ при $x=\frac{1}{2}$; 2) $\frac{x+3}{x}-\frac{x}{x-3}$ при $x=1{,}5$.

Ответы. **2.** 1) $-15{,}5$; 2) 4.

§ 3. ТОЖДЕСТВЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СУММЫ И РАЗНОСТИ ДВУХ ДРОБЕЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Пусть задана сумма двух дробей $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$. Если переменным a, b, c придавать числовые значения, причем $b\neq 0$, то получится сумма обыкновенных дробей, для которых равенство $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=$ $=\frac{a+c}{b}$ есть тождество.

2. Аналогично справедливо тождество $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$, где $b\neq 0$.

3. Пусть теперь даны две дроби $\frac{a}{c}$ и $\frac{x}{y}$ с различными знаменателями. В этом случае поступают так. Умножив числитель и знаменатель первой дроби на знаменатель второй дроби, а числитель и знаменатель второй дроби на знаменатель первой дроби, получим две дроби, тождественно равные соответственно двум данным дробям, но имеющие одинаковые знаменатели. Последовательность такова:

$$\frac{a}{c}+\frac{x}{y}=\frac{ay}{cy}+\frac{xc}{cy}=\frac{ay+xc}{cy}.$$

Итак, при преобразовании в дробь суммы (или разности) дробей с различными знаменателями предварительно приводят дроби к общему знаменателю.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Упростить выражение:

1) $\frac{a}{4x}+\frac{5}{12y}-\frac{c}{9xy^2}$; 2) $3x-\frac{x-y}{2-x}+\frac{x+y}{4}$; 3) $\frac{x-12a}{x^2-16a^2}+\frac{4a}{4ax-x^2}$.

Решение. 1) Наименьшее общее кратное коэффициентов знаменателей дробей $\frac{a}{4x}$, $\frac{5}{12y}$, $\frac{c}{9xy^2}$ равно 36, а в качестве общего знаменателя можно взять выражение $36xy^2$.

Разделим общий знаменатель на каждый из знаменателей дробей:

$$\frac{36xy^2}{4x}=9y^2;\ \frac{36xy^2}{12y}=3xy;\ \frac{36xy^2}{9xy^2}=4.$$

Выражения $9y^2$, $3xy$ и 4 называются дополнительными множителями соответственно для первой, второй и третьей дробей.

Умножим числитель и знаменатель каждой дроби на соответствующий ей дополнительный множитель и преобразуем сумму в дробь:

$$\frac{a}{4x}+\frac{5}{12y}-\frac{c}{9xy^2}=\frac{9y^2\cdot a+5\cdot 3xy-c\cdot 4}{36xy^2}=\frac{9ay^2+15xy-4c}{36xy^2}.$$

2) Целое число или выражение можно представить в виде дроби с любым знаменателем. Например, $5=\frac{5\cdot x}{x}$; $x=\frac{x\cdot 3}{3}$; $-2x^2=$ $=-\frac{2x^2(y-a)}{y-a}$.

Этим будем пользоваться при решении второго примера. Представим выражение $3x$ в виде дроби со знаменателем 1, тогда общим знаменателем дробей будет выражение $4(2-x)$. Выполним действия:

$$\frac{3x}{1}-\frac{x-y}{2-x}+\frac{x+y}{4}=\frac{3x\cdot 4(2-x)-(x-y)\cdot 4+(x+y)(2-x)}{4(2-x)}=$$
$$=\frac{22x-13x^2+6y-xy}{4(2-x)}.$$

3) Разложим на множители знаменатели дробей: $x^2-16a^2=$ $=(x-4a)(x+4a)$ и $4ax-x^2=x(4a-x)$. Перепишем наше выражение в виде

$$\frac{x-12a}{x^2-16a^2}+\frac{4a}{4ax-x^2}=\frac{x-12a}{(x-4a)(x+4a)}+\frac{4a}{x(4a-x)}.$$

Перед тем как определить общий знаменатель для полученных дробей, надо произвести некоторые действия со знаменателем второй (можно и первой) дроби, после чего вторая дробь примет вид:

$$\frac{4a}{x(4a-x)}=\frac{4a}{-x(x-4a)}=-\frac{4a}{x(x-4a)}.$$

Эти рассуждения можно выполнить устно и решение записать так:

$$\frac{x-12a}{x^2-16a^2}+\frac{4a}{4ax-x^2}=\frac{x-12a}{(x-4a)(x+4a)}+\frac{4a}{x(4a-x)}=$$
$$=\frac{x-12a}{(x-4a)(x+4a)}-\frac{4a}{x(x-4a)}=\frac{x(x-12a)-4a(x+4a)}{(x-4a)x(x+4a)}=$$
$$=\frac{x^2-12ax-4ax-16a^2}{x(x^2-16a^2)}=\frac{x^2-16ax-16a^2}{x(x^2-16a^2)}.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Упростите выражение:

А. 1) $\frac{a-2}{2}-1-\frac{a-3}{3}$; 2) $\frac{a+x}{4}-a+x$; 3) $4a-\frac{a-1}{4}-\frac{a+2}{3}$;

4) $\frac{(a-x)^2}{2a}+x$; 5) $c-\frac{(x+c)^2}{2x}$; 6) $a+x-\frac{a^2+x^2}{a-x}$.

Б. 1) $\frac{a^2}{ax-x^2}+\frac{x}{x-a}$; 2) $\frac{x^2-4xy}{2y^2-xy}-\frac{4y}{x-2y}$;

3) $\frac{x}{2a^2-ax}-\frac{4a}{2ax-x^2}$; 4) $\frac{4y}{3x^2+2xy}-\frac{9x}{3xy+2x^2}$;

5) $\frac{x-25}{5x-25}-\frac{3x+5}{5x-x^2}$; 6) $\frac{12-y}{6y-36}+\frac{6}{6y-y^2}$.

В. 1) $\frac{a^2+3a}{ax-5x+8a-40}-\frac{a}{x+8}$; 2) $\frac{y}{3x-2}-\frac{3y}{6xy+9x-4y-6}$;

3) $\frac{x^2}{3ax-2-x+6a}-\frac{x}{3a-1}$; 4) $\frac{3x}{2y+3}+\frac{x^2+3x}{4xy-3-2y+6x}$.

Ответы. А. 1) $\frac{a-6}{6}$; 2) $\frac{5x-3a}{4}$; 3) $\frac{41a-5}{12}$; 4) $\frac{a^2+x^2}{2a}$; 5) $-\frac{x^2+c^2}{2x}$; 6) $\frac{2x^2}{x-a}$. **Б.** 1) $\frac{a+x}{x}$; 2) $\frac{2y-x}{y}$; 3) $-\frac{2a+x}{ax}$; 5) $\frac{x-5}{5x}$. **В.** 3) $\frac{2x}{(1-3a)(x+2)}$; 4) $\frac{7x^2}{(2x-1)(2y+3)}$

§ 4. ТОЖДЕСТВЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО ДВУХ ДРОБЕЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Произведение двух дробей тождественно равно дроби, числитель которой равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель — произведению знаменателей. Например, $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$, $b\neq 0$, $d\neq 0$.

2. Аналогично для частного двух дробей верно тождество $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$, $b\neq 0$, $d\neq 0$, $c\neq 0$, т. е. частное двух дробей тождественно равно произведению делимого на дробь, обратную делителю.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Упростить выражение

$$\left(\frac{1}{x-y}+\frac{3xy}{y^3-x^3}\right):\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x+y}{2x-2y}\right).$$

Решение. Преобразуем выражение в первых скобках:

$$\frac{1}{x-y}+\frac{3xy}{y^3-x^3}=\frac{1}{x-y}-\frac{3xy}{x^3-y^3}=$$
$$=\frac{1}{x-y}-\frac{3xy}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=\frac{x^2+xy+y^2-3xy}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=$$
$$=\frac{(x-y)^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=\frac{x-y}{x^2+xy+y^2},\ \text{если } x-y\neq 0. \qquad (1)$$

Выражение же во вторых скобках преобразуется так:

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x+y}{2(x-y)}=\frac{2(x^2+y^2)-(x+y)(x+y)}{2(x-y)(x+y)}=\frac{x-y}{2(x+y)}. \qquad (2)$$

Нам осталось разделить выражение (1) на выражение (2). Имеем:

$$\frac{x-y}{x^2+xy+y^2}:\frac{x-y}{2(x+y)}=\frac{(x-y)(x+y)\cdot 2}{(x^2+xy+y^2)(x-y)}=\frac{2(x+y)}{x^2+xy+y^2}.$$

2. Выполнить тождественные преобразования:

$$\left(\frac{25}{a^2+5a+25}-\frac{2a}{5-a}-\frac{a^3+25a^2}{a^3-125}\right)\cdot\left(a-5+\frac{15a}{a-5}\right).$$

Решение.

$$\left(\frac{25}{a^2+5a+25}+\frac{2a}{a-5}-\frac{a^3+25a^2}{(a-5)(a^2+5a+25)}\right)\cdot\frac{(a-5)^2+15a}{a-5}=$$

$$=\frac{25(a-5)+2a(a^2+5a+25)-a^3-25a^2}{(a-5)(a^2+5a+25)}\cdot\frac{a^2-10a+25+15a}{a-5}=$$

$$=\frac{25a-125+2a^3+10a^2+50a-a^3-25a^2}{(a-5)(a^2+5a+25)}\cdot\frac{a^2+5a+25}{a-5}=$$

$$=\frac{a^3-15a^2+75a-125}{(a-5)(a^2+5a+25)}\cdot\frac{a^2+5a+25}{a-5}=$$

$$=\frac{(a-5)^3(a^2+5a+25)}{(a-5)(a^2+5a+25)(a-5)}=a-5, \text{ если } a-5\neq 0.$$

3. При каких натуральных значениях k дробь $\frac{5k^2+8k+12}{k}$ принимает натуральные значения?

Решение. Имеем:

$$\frac{5k^2+8k+12}{k}=\frac{5k^2}{k}+\frac{8k}{k}+\frac{12}{k}=5k+8+\frac{12}{k}.$$

Очевидно, что $5k+8\in N$ при любом $k\in N$, а $\frac{12}{k}\in N$ при $k=1, 2, 3, 4, 6, 12$.

4. Сократить дробь:

1) $\frac{x^{33}-1}{x^{33}+x^{22}+x^{11}}$; 2) $\frac{a|a-3|}{a^2-a-6}$.

Решение.

1) $$\frac{x^{33}-1}{x^{33}+x^{22}+x^{11}}=\frac{(x^{11})^3-1}{x^{11}(x^{22}+x^{11}+1)}=\frac{(x^{11}-1)(x^{22}+x^{11}+1)}{x^{11}(x^{22}+x^{11}+1)}=\frac{x^{11}-1}{x^{11}}.$$

2) Так как знаменатель $a^2-a-6=a^2-3a+2a-6=$ $=a(a-3)+2(a-3)=(a-3)(a+2)$, то a — любое число, кроме $a=3$ и $a=-2$.

Если $a>3$, то $a|a-3|=a(a-3)$ и получим:

$$\frac{a|a-3|}{a^2-a-6}=\frac{a(a-3)}{(a-3)(a+2)}=\frac{a}{a+2}.$$

Если $a<-2$ или $-2<a<3$, то $a\,|a-3|=a(3-a)$, и, следовательно,

$$\frac{a\,|a-3|}{a^2-a-6}=\frac{a(3-a)}{(a-3)(a+2)}=-\frac{a}{a+2}.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Упростите выражение:

А. 1) $\frac{x^2-xy}{y}\cdot\frac{y^2}{x}$; 2) $\frac{3a}{b^2}\cdot\frac{ab+b^2}{9}$; 3) $\frac{x-y}{xy}\cdot\frac{2xy}{xy-y^2}$;

4) $\frac{4ab}{cx+bx}\cdot\frac{ax+bx}{2ab}$; 5) $\frac{xa-xy}{3c^2}\cdot\frac{2x}{cy-ca}$; 6) $\frac{ax-ay}{5x^2y^2}\cdot\frac{5xy}{by-bx}$;

7) $\frac{kx+k^2}{x^2}\cdot\frac{x}{x+k}$; 8) $\frac{ax+ay}{xy^2}\cdot\frac{x^2y}{3x+3y}$; 9) $\frac{xy}{a^2+a^3}\cdot\frac{a+a^2}{x^2y^2}$;

10) $\frac{6a}{x^2-x}\cdot\frac{2x-2}{3ax}$; 11) $\frac{x^2-y^2}{2xy}\cdot\frac{2x}{x+y}$; 12) $\frac{4x^2}{x^2-9}\cdot\frac{3a-ax}{4x}$;

13) $\frac{b-a}{a}\cdot\frac{3a}{a^2-b^2}$; 14) $\frac{a^2-1}{a-b}\cdot\frac{7a-7b}{a^2+a}$; 15) $\frac{4a-4b}{3a+3x}\cdot\frac{(a+x)^2}{a^2-b^2}$;

16) $\frac{(x+3)^2}{2x-4}\cdot\frac{x^2-4}{3x+9}$; 17) $\frac{(x+3)^2}{2x-4}:\frac{3x+9}{x^2-4}$.

Б. 1) $\left(\frac{x}{x+1}+1\right)\cdot\frac{1-x^2}{4x^2-1}$; 2) $\left(\frac{1}{1-y}-y\right):\frac{y^2-y+1}{y^2-2y+1}$;

3) $\frac{ab+b^2}{3}\cdot\frac{3a}{b^3}+\frac{a+b}{b}$; 4) $\frac{x-y}{4y}\cdot\frac{8y^2}{x^2-xy}-\frac{3}{x^2}$;

5) $\left(\frac{6a+1}{a^2-6a}+\frac{6a-1}{a^2+6a}\right)\cdot\frac{a^2-36}{a^2+1}$; 6) $\left(a-\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)\cdot\left(\frac{1}{b}+\frac{2}{a-b}\right)$;

7) $\left(\frac{4a}{2-a}-a\right):\left(2+\frac{a^2+4}{a-2}\right)$; 8) $1+\frac{24}{(x-2)^2}\cdot\frac{4x-x^2-4}{3(x+6)}$;

9) $\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right):\left(\frac{a+b}{b}-\frac{a-b}{a}\right)$;

10) $\left(2x+1-\frac{1}{1-2x}\right):\left(2x-\frac{4x^2}{2x-1}\right)$;

11) $\left(p-q+\frac{4q^2-p^2}{p+q}\right):\left(\frac{p}{p^2-q^2}+\frac{2}{q-p}+\frac{1}{p+q}\right)$;

12) $\left(\frac{2}{2x+y}-\frac{1}{2x-y}-\frac{3y}{y^2-4x^2}\right)\cdot\left(\frac{y^2}{8x^2}-\frac{1}{2}\right)$;

13) $\left(\frac{5x+y}{x^2-5xy}+\frac{5x-y}{x^2+5xy}\right)\cdot\frac{x^2-25y^2}{x^2+y^2}$;

14) $\frac{9a^2-16b^2}{7a}\cdot\left(\frac{3b-4a}{4b^2-3ab}-\frac{3b+4a}{4b^2+3ab}\right)$;

15) $\frac{4xy}{y^2-x^2}:\left(\frac{1}{y^2-x^2}+\frac{1}{x^2+2xy+y^2}\right)$;

16) $\frac{a-2}{a^2+2a}:\left(\frac{a}{a^2-2a}-\frac{a^2+4}{a^3-4a}-\frac{1}{a^2+2a}\right)$.

Упростите выражение и вычислите:

В. 1) $\frac{4a-5}{a^2-9}+\frac{9(a-3)}{15-7a-4a^2}\cdot\frac{4a^2-17a+15}{a-2}-\frac{7}{a+3}$ при $a=1$;

2) $(a^2-y^2-x^2+2xy):\frac{a+y-x}{a+y+x}$ при $a=8{,}6$, $y=11\frac{14}{15}$, $x=\frac{10}{3}$;

3) $\frac{a^2-1}{x^2+ax}\cdot\left(\frac{x}{x-1}-1\right)\cdot\frac{a-ax^3-x^4+x}{1-a^2}$ при $x=-1$;

4) $\frac{x}{ax-2a^2}-\frac{2}{x^2+x-2ax-2a}\cdot\left(1+\frac{3x+x^2}{x+3}\right)$ при $a=0{,}5$.

2. Сократите дробь:

В. 1) $\frac{x^2-x+1}{x^4+x^2+1}$; 2) $\frac{x^{14}-x^7+1}{x^{21}+1}$; 3) $\frac{x(y-a)-y(x-a)}{x(y-a)^2-y(x-a)^2}$.

3. При каких натуральных значениях k дробь $\frac{(k-3)^2}{k}$ принимает натуральные значения?

Ответы. **1. А.** 1) $y(x-y)$; 2) $\frac{a(a+b)}{3b}$; 6) $-\frac{a}{xyb}$; 9) $\frac{1}{axy}$; 10) $\frac{4}{x^2}$; 14) $\frac{7a-7}{a}$; 15) $\frac{4a+4x}{3(a+b)}$; 16) $\frac{x^2+5x+6}{6}$; 17) $\frac{x^2+5x+6}{6}$. **Б.** 1) $\frac{1-x}{2x-1}$; 2) $1-y$; 3) $\left(\frac{a+b}{b}\right)^2$; 5) $\frac{12}{a}$; 6) 1; 8) $\frac{x-2}{x+6}$; 9) $\frac{ab}{a^2-b^2}$; 10) $-2x$; 11) q^2-pq; 12) $-\frac{1}{4x}$; 13) $\frac{30x^2+6y^2-16xy}{x(x^2+y^2)}$; 14) 2; 15) $2x(x+y)$; 16) $a-2$. **В.** 1) 7,375; 2) 0; 3) -1; 4) 2. **2. В.** 1) $\frac{1}{x^2+x+1}$; 2) $\frac{1}{x^7+1}$; 3) $\frac{a}{xy-a^2}$. **3.** 1 и 9.

§ 5. СТЕПЕНЬ ДРОБИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Степень дроби тождественно равна дроби, у которой числитель есть степень числителя, а знаменатель — степень знаменателя.

Например, $\left(\frac{a^2-1}{ab+b}\right)^4=\frac{((a-1)(a+1))^4}{(b(a+1))^4}=\frac{(a-1)^4(a+1)^4}{b^4(a+1)^4}=\frac{(a-1)^4}{b^4}$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение целого и дробного рационального выражения.
2. Укажите, какие из данных выражений являются целыми и какие — дробными: а) $\frac{3}{5}$; б) $5x$; в) $\frac{x}{2}$; г) $\frac{(a+b)}{3}$; д) $\frac{4}{x}$; е) $\frac{2}{(5-a)}$; ж) $0{,}7x$; з) $\frac{a}{b}$.

3. Что называется областью определения дроби?
4. Найдите области определения следующих выражений:

а) $\frac{1}{x-6}$; б) $\frac{3}{5-a}$; в) $\frac{a}{2a-1}$; г) $\frac{a+1}{7-2a}$; д) x^2+x+3.

5. Сформулируйте свойства дроби.
6. При каком значении переменной y равно нулю значение дроби:

а) $\frac{y-12}{y^2+1}$; б) $\frac{y(y-3)}{8}$; в) $\frac{(y-7)(y+2)}{y}$; г) $\frac{y^2+1}{3}$?

7. Сократите дробь: а) $\frac{5(a-x)}{x-a}$; б) $\frac{a-1}{(1-a)^2}$; в) $\frac{(x-2)^3}{2-x}$; г) $\frac{(2x-2y)^2}{4x^2-4y^2}$;

д) $\frac{x^2-2x+1}{1-x}$; е) $\frac{a^6-a^8}{a^4-a^5}$; ж) $\frac{y^6-1}{y^4+y^2+1}$; з) $\frac{xy-x+y-y^2}{x^2-y^2}$.

8. Преобразуйте сумму в дробь: а) $x+\frac{1}{a}$; б) $b+\frac{a}{c}$; в) $\frac{3}{5}+x$.
9. Преобразуйте дробь в сумму: а) $\frac{x+3}{x^2}$; б) $\frac{3(a-2)+7}{a^2-4}$.

ГЛАВА VI

§ 1. ПОНЯТИЕ ОБ ИРРАЦИОНАЛЬНОМ ЧИСЛЕ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Иррациональным числом называют бесконечную десятичную непериодическую дробь, например, 0,131331333125... . Известные в математике число π, число e (основание натуральных логарифмов) также являются числами иррациональными.

2. Другой пример, приводящий к понятию иррационального числа, дает следующая теорема: «Не существует рационального числа, квадрат которого равен двум». Иными словами, решение уравнения $x^2-2=0$ невозможно на множестве рациональных чисел. Корнями такого уравнения являются иррациональные числа $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$.

3. Любое рациональное число вида $\frac{m}{n}$, где $n\neq 0$, может быть представлено в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

§ 2. РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЯ О ЧИСЛЕ. МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Первоначально под числами понимали лишь натуральные числа, которых достаточно для счета отдельных предметов. Множество $N=\{1; 2; 3; ...\}$ натуральных чисел замкнуто относительно операций сложения и умножения — сумма и произведение натуральных чисел также являются числами натуральными.

2. Однако разность двух натуральных чисел уже не всегда является натуральным числом. Так, результат вычитания двух одина-

ковых натуральных чисел приводит к понятию нуля и введению множества целых неотрицательных чисел: $\boldsymbol{Z}_0=\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$.

Чтобы сделать выполнимой операцию вычитания, вводят отрицательные целые числа и таким образом получают множество целых чисел $\boldsymbol{Z}=\{\ldots-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$.

3. Чтобы сделать выполнимой операцию деления на любое число, не равное нулю, необходимо к множеству всех целых чисел присоединить множество всех положительных и отрицательных дробей. В результате получается множество рациональных чисел $\boldsymbol{Q}=\left\{\frac{m}{n}\ \middle|\ m\in\boldsymbol{Z},\ n\in\boldsymbol{N}\right\}$. Уравнение $ax=b$, где $a\neq0$, имеет на множестве рациональных чисел корень $x=\frac{b}{a}$ при любых рациональных a и b.

4. Необходимость дальнейшего расширения множества чисел связана в основном с двумя причинами. Во-первых, рациональных чисел недостаточно для выражения результатов измерений (например, нельзя выразить рациональным числом длину диагонали квадрата со стороной 1). Во-вторых, такие числовые выражения, как $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\lg 2$, $\sin 1°$ и т. д., не являются рациональными числами.

Объединение множества рациональных чисел и множества иррациональных чисел (бесконечных десятичных непериодических дробей) дает множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел.

5. Действительные числа сравниваются по величине аналогично правилу сравнения рациональных чисел (см. гл. III, § 5). Например, $-0{,}17\ldots<-0{,}15$; $3{,}1\ldots>-5{,}6\ldots$.

6. Для числовых промежутков вводятся следующие обозначения:

$[a;\ b]$ или $a\leqslant x\leqslant b$ — замкнутый промежуток (или отрезок) с началом a и концом b;

$(a;\ b)$ или $a<x<b$ — открытый промежуток (или интервал);

$(a;\ b]$ или $a<x\leqslant b$; $[a;\ b)$ или $a\leqslant x<b$ — полуоткрытые промежутки (полуинтервалы);

$[a;\ +\infty)$ или $x\geqslant a$, $(-\infty;\ b]$ или $x\leqslant b$ — лучи;

$(a;\ +\infty)$ или $x>a$, $(-\infty;\ b)$ или $x<b$ — открытые лучи;

$(-\infty;\ +\infty)=\boldsymbol{R}$ — координатная прямая.

§ 3. КОРЕНЬ k-й СТЕПЕНИ ИЗ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Корнем k-й степени, где $k\in\boldsymbol{N}$ и $k\neq1$, из действительного числа a называется действительное число x, k-я степень которого равна a.

2. Корень k-й степени из числа a обозначается символом $\sqrt[k]{a}$. Согласно определению $(\sqrt[k]{a})^k=a$.

3. Нахождение корня k-й степени из числа a называется

извлечением корня. Число k называют показателем корня, число a — подкоренным выражением.

4. Заметим, что $\sqrt[2n]{a}$, где $n \in N$ и $a<0$, не существует. Например, выражения $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-16}$ не имеют смысла. Корень нечетной степени извлекается и из отрицательного числа. Например $\sqrt[3]{-8}=-2$, так как $(-2)^3=-8$.

5. Чтобы устранить двузначность корня k-й степени из числа a, вводится понятие арифметического корня. Арифметическим корнем k-й степени из числа a $(a \geqslant 0)$ называется неотрицательное число b, k-я степень которого равна a, где $k>1$ — натуральное число.

Например: а) $\sqrt[k]{a^k}=|a|$; б) $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}=$ $=|x+1|+|x-1|$; в) $\sqrt[4]{(-3)^4}=|-3|=3$; г) $\sqrt{9}=3$ (но не ± 3).

Замечание. В школьном курсе рассматривается только арифметическое значение корня, т. е. $\sqrt[k]{a}$ имеет смысл лишь при $a \geqslant 0$ и принимает только неотрицательные значения.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. При каких значениях x данное выражение имеет смысл: 1) $\sqrt{-x}$; 2) $\sqrt{x+3}$; 3) $\sqrt{(x-6)^2}$?

Решение. 1) Из определения арифметического квадратного корня следует, что $-x \geqslant 0$. Умножим обе части этого неравенства на -1 и получим $x \leqslant 0$.

2) На основании определения арифметического квадратного корня имеем $x+3 \geqslant 0$, или $x \geqslant -3$.

3) $(x-6)^2 \geqslant 0$ для всех $x \in R$, значит, выражение имеет смысл при любом значении x.

2. При каких значениях x справедливо равенство $\sqrt{(x-7)^2}=$ $=x-7$?

Решение. Так как $\sqrt{(x-7)^2}=|x-7|$, то исходное равенство примет вид $|x-7|=x-7$. А это равенство справедливо только при $x-7 \geqslant 0$, т. е. при $x \geqslant 7$.

3. Упростить выражение:

1) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}$.

Решение. 1) Обратим внимание, что $7-4\sqrt{3}=4-4\sqrt{3}+$ $+3=(2-\sqrt{3})^2$. Поэтому $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=|2-\sqrt{3}|=2-$ $-\sqrt{3}$, так как $2-\sqrt{3}>0$.

2) Выражение $9+4\sqrt{2}$ представим так: $9+4\sqrt{2}=(2\sqrt{2}+1)^2$. Тогда $\sqrt{9+4\sqrt{2}}=\sqrt{(2\sqrt{2}+1)^2}=|2\sqrt{2}+1|=2\sqrt{2}+1$.

Теперь выражение $\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}$ примет вид $\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}$. Упростим его:

$$\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Какие из указанных чисел являются иррациональными: -2; 1; 0; $\sqrt{12}$; $\sqrt{16}$; $-1{,}5$; $\sqrt{17}$; $0{,}7\sqrt{225}$?

2. При каких значениях переменной x имеет смысл выражение:

А. 1) $\sqrt{x}$; 2) $\sqrt{x^2}$; 3) $\sqrt{x^2+4}$; 4) $\sqrt{(x+4)^2}$; 5) $\sqrt{16x}$; 6) $\sqrt{-x^2+2}$?

Б. 1) $\sqrt{-x^4}$; 2) $\sqrt{1+2x+x^2}$; 3) $\sqrt{x^2-6x+9}$; 4) $\sqrt{x^2+2x+2}$?

3. При каких значениях x справедливо равенство:

В. 1) $\sqrt{(x-2)^2}=x-2$; 2) $\sqrt{(x+3)^2}=x+3$; 3) $\sqrt{(x-2)^2}=2-x$; 4) $\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$?

4. Упростите выражение:

А. 1) $\sqrt{x^2}$, если $x<-1$; 2) $\sqrt{(x-5)^2}$, если $x\geqslant 5$;

3) $\sqrt{(x+3)^2}$, если $x<-3$; 4) $\sqrt{1+4x+4x^2}$, если $x\geqslant -0{,}5$.

Б. 1) $\sqrt{x^2-8x+16}+\sqrt{x^2-12x+36}$ при: а) $x<4$; б) $4\leqslant x\leqslant 6$; в) $x>6$;

2) $\sqrt{4x^2-4x+1}+\sqrt{9x^2-6x+1}$ при: а) $x<\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 0{,}5$; в) $x>\frac{1}{2}$;

3) $\sqrt{x^2-2x+1}+|x-3|$ при: а) $x<1$; б) $1\leqslant x\leqslant 3$; в) $x>3$.

В. 1) $\dfrac{a^2-3}{\sqrt{\left(\frac{a^2+3}{2a}\right)^2-3}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-9}}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-9}}}$; 3) $\dfrac{\sqrt{(a+2)^2-8a}}{\sqrt{a}-\frac{2}{\sqrt{a}}}$.

5. Упростите выражение:

Б. 1) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$.

В. 1) $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$; 2) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$;

3) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$; 4) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}$;

5) $\sqrt{8+\sqrt{40}+\sqrt{20}+\sqrt{8}}$ (представить в виде суммы трех радикалов).

Ответы. **2. А.** 6) 0. **Б.** 2), 3), 4) x — любое действительное число. **3. В.** 1) $x\geqslant 2$; 3) $x\leqslant 2$. **4. А.** 1) $-x$; 2) $x-5$; 3) $-(x+3)$; 4) $2x+1$. **Б.** 1) а) $10-2x$; б) 2; в) $2\cdot x-10$; 2) а) $2-5x$; б) x; в) $5x-2$. **В.** 1) $2a$ при $a>\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}<a<0$; $-2a$ при $0<a<\sqrt{3}$ и $a<-\sqrt{3}$; 2) $\frac{a+\sqrt{a^2-9}}{3}$; 3) $\sqrt{a}$, если $a>2$; $-\sqrt{a}$, если $0<a<2$. **5. Б.** 1) $\sqrt{2}-1$; 2) $\sqrt{5}-2$. **В.** 1) $5+3\sqrt{2}$; 2) 1; 3) 4; 4) $\sqrt{2}-1$; 5) $1+\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

§ 4. АЛГОРИТМ ИЗВЛЕЧЕНИЯ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ИЗ ЧИСЛА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Рассмотрим этот алгоритм на примере. Найдем $\sqrt{655\,901}$.

1-й шаг. Число под корнем разбиваем на грани по две цифры (справа налево): $\sqrt{65'59'01}$.

2-й шаг. Извлекаем квадратный корень из первой грани, т. е. из числа 65, получаем число 8. Под первой гранью пишем квадрат числа 8 и вычитаем. К остатку приписываем вторую грань (59):

$$\begin{array}{l} -\sqrt{65'59'01}=8\ldots \\ \quad \underline{64} \\ \quad 159 \end{array}$$

(число 159 — первый остаток).

3-й шаг. Удваиваем найденный корень и пишем результат слева:

$$\begin{array}{r|l} 16 & -\sqrt{65'59'01}=8\ldots \\ & \quad \underline{64} \\ & \quad 159 \end{array}$$

4-й шаг. Отделяем в остатке (159) одну цифру справа, слева получаем число десятков (оно равно 15). Затем делим 15 на удвоенную первую цифру корня, т. е. на 16, так как 15 на 16 не делится, то в частном получается нуль, который записываем как вторую цифру корня. Итак, в частном получили число 80, которое опять удваиваем, и сносим следующую грань (01):

$$\begin{array}{r|l} 160 & -\sqrt{65'59'01}=80\ldots \\ & \quad \underline{64} \\ & \quad 1590'1 \end{array}$$

(число 15 901 — второй остаток).

5-й шаг. Отделяем во втором остатке одну цифру справа и полученное число 1590 делим на 160. Результат (цифру 9) записываем как третью цифру корня и приписываем к числу 160. Полученное число 1609 умножаем на 9 и находим следующий остаток (1420):

$$\begin{array}{r|l} 1609 & -\sqrt{65'59'01}=809\ldots \\ 9 & \quad \underline{64} \\ & \quad -15901 \\ & \quad \ \ \underline{14481} \\ & \qquad 1420 \end{array}$$

В дальнейшем действия выполняются в той последовательности, которая указана в алгоритме (корень можно извлекать с нужной степенью точности).

З а м е ч а н и е. Если подкоренное выражение — десятичная дробь, то ее целую часть разбивают на грани по две цифры справа налево, дробную часть — по две цифры слева направо и извлекают корень по указанному алгоритму.

Например,

$$\begin{array}{r|l}
26 & -\sqrt{2'57{,}25'7}=16{,}03\ldots \ \text{(приближенное значение корня)} \\
\underline{6} & \quad \underline{1} \\
3203 & \quad 15'7 \\
\underline{3} & \quad \underline{156} \\
 & \qquad 1257'0 \\
 & \qquad \underline{9609} \\
 & \qquad 2961 \quad \text{(остаток)}
\end{array}$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Извлеките квадратный корень из числа: а) 32; б) 32,45; в) 249,5; г) 0,9511:

А. с точностью до 0,1;
Б. с точностью до 0,01;
В. с точностью до 0,001.

2. Извлеките квадратный корень из числа: а) 2; б) 3; в) 5:

А. с точностью до 0,1;
Б. с точностью до 0,01;
В. с точностью до 0,001.

3. Сравните числа:

А. 1) 4 и $\sqrt{15}$; 2) 2,7 и $\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{3{,}26}$ и 1,8; 4) $\sqrt{18{,}49}$ и 4,3.

Б. 1) $\frac{\sqrt{68}}{3}$ и $0{,}25\sqrt{80}$; 2) $2\sqrt{2}$ и $3\sqrt[3]{3}$.

4. Вычислите с точностью до 0,01:

В. 1) $\sqrt{2}+\frac{5}{8}$; 2) $0{,}75-\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

§ 5. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Пусть даны действительные числа a и b. Обозначим через a_k^-, a_k^+, b_k^-, b_k^+ приближенные значения этих чисел соответственно с недостатком и с избытком с точностью до $\frac{1}{10^k}$, т. е. $a_k^- < a < a_k^+$ и $b_k^- < b < b_k^+$.

2. Суммой действительных чисел a и b называется такое действительное число p, которое при любом целом неотрицательном k удовлетворяет неравенству $a_k^- + b_k^- < p < a_k^+ + b_k^+$.

Например, для чисел $a=\sqrt{2}$ и $b=\sqrt{3}$ имеем:

$$1{,}4+1{,}7<\sqrt{2}+\sqrt{3}<1{,}5+1{,}8;$$

$$1,41+1,73<\sqrt{2}+\sqrt{3}<1,42+1,74;$$
$$1,414+1,732<\sqrt{2}+\sqrt{3}<1,415+1,733.$$

3. Произведением действительных чисел a и b называется такое действительное число q, которое при любом целом неотрицательном k удовлетворяет неравенству $a_k^-\cdot b_k^-<q<a_k^+\cdot b_k^+$.

Например, для чисел $a=\sqrt{2}$ и $b=\sqrt{3}$ имеем:

$$1,4\cdot 1,7<\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}<1,5\cdot 1,8;$$
$$1,41\cdot 1,73<\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}<1,42\cdot 1,74;$$
$$1,414\cdot 1,732<\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}<1,415\cdot 1,733.$$

4. Известные для рациональных чисел законы арифметических действий (переместительный, сочетательный, распределительный) сохраняются и для любых действительных чисел.

§ 6. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ КОРНЕЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Корень k-й степени из произведения неотрицательных чисел равен произведению корней той же степени из сомножителей: $\sqrt[k]{ab}=\sqrt[k]{a}\cdot\sqrt[k]{b}$, где $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ (правило извлечения корня из произведения).

2. Если $a\geqslant 0$, $b>0$, то $\sqrt[k]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}}$ (правило извлечения корня из дроби).

3. Если $a\geqslant 0$, k, $c\in \boldsymbol{N}$, $k>1$, $c>1$, то $\sqrt[k]{\sqrt[c]{a}}=\sqrt[kc]{a}$ (правило извлечения корня из корня).

4. Если $a\geqslant 0$, то $(\sqrt[k]{a})^m=\sqrt[k]{a^m}$ правило возведения корня в степень).

5. Если $a\geqslant 0$, то $\sqrt[k]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{nm}}$, где $m\in\boldsymbol{N}$, $n\in\boldsymbol{N}$, т. е. показатель корня и показатель подкоренного выражения можно умножить на одно и то же число.

6. Если $a_1>a_2>0$, то $\sqrt[k]{a_1}>\sqrt[k]{a_2}>0$, т. е. большему положительному подкоренному выражению соответствует и большее значение корня.

7. Все указанные выше формулы часто применяются в обратном порядке (т. е. справа налево). Например,

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{3\cdot 2}=\sqrt{6}$ (правило умножения корней);

$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{10}{5}}=\sqrt{2}$ (правило деления корней);

$\sqrt[6]{5}=\sqrt[3]{\sqrt{5}}$.

8. Правило вынесения множителя из-под знака корня. При $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ $\sqrt[k]{ba^k}=a\sqrt[k]{b}$.

9. Обратная задача — внесение множителя под знак корня. Например,

$$b\sqrt{3}=\begin{cases}\sqrt{3b^2}, \text{ если } b\geqslant 0,\\ -\sqrt{3b^2}, \text{ если } b\leqslant 0.\end{cases}$$

10. Уничтожение иррациональности в знаменателе дроби. Рассмотрим некоторые типичные случаи.

а) $\frac{m}{\sqrt[k]{a}}=\frac{m\sqrt[k]{a^{k-1}}}{\sqrt[k]{a}\cdot\sqrt[k]{a^{k-1}}}=\frac{m\sqrt[k]{a^{k-1}}}{\sqrt[k]{a^k}}=\frac{m\sqrt[k]{a^{k-1}}}{a}$, так как $a>0$.

Например, $\frac{5}{\sqrt[3]{3}}=\frac{5\cdot\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3^2}}=\frac{5\sqrt[3]{9}}{3}$.

б) $\frac{m}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{m(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}=\frac{m(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}{a-b}$.

Например, $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

в) $\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}=\frac{m((\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c})}{((\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c})((\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c})}$ и т. д.

11. Применение тождеств сокращенного умножения к действиям с арифметическими корнями:

1) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$;

2) $(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a\pm b$;

3) $a\sqrt{a}\pm b\sqrt{b}=(\sqrt{a})^3\pm(\sqrt{b})^3=(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})(a\mp\sqrt{ab}+b)$.

12. Множитель, стоящий перед корнем, называется его коэффициентом. Например, $3\sqrt{7}$. Здесь 3 является коэффициентом.

13. Корни (радикалы) называются подобными, если они имеют одинаковые показатели корней и одинаковые подкоренные выражения, а отличаются только коэффициентом. Чтобы судить о том, подобны данные корни (радикалы) или нет, нужно привести их к простейшей форме.

Например, $\sqrt[3]{54}$ и $\sqrt[3]{16}$ подобны, так как $\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{27\cdot2}=3\sqrt[3]{2}$, а $\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{8\cdot2}=2\sqrt[3]{2}$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Упростить выражения:

1) $\sqrt{100\cdot49\cdot64}$; 2) $\sqrt[3]{27\cdot54\cdot16}$; 3) $\sqrt[5]{32a^6}$.

Решение. 1) Перемножать подкоренное выражение нет смысла, так как каждый из сомножителей представляет квадрат целого числа. Воспользуемся правилом извлечения корня из произведения:

$$\sqrt{100\cdot49\cdot64}=\sqrt{100}\cdot\sqrt{49}\cdot\sqrt{64}=10\cdot7\cdot8.$$

В дальнейшем такие действия будем выполнять устно.

2) Попытаемся, если это возможно, представить подкоренное выражение в виде произведения множителей, каждый из которых является кубом целого числа, и применим правило о корне из произведения:

$$\sqrt[3]{27\cdot54\cdot16}=\sqrt[3]{27\cdot(27\cdot2)\cdot(8\cdot2)}=\sqrt[3]{27\cdot27\cdot8\cdot4}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{8}\times$$

$$\times\sqrt[3]{4}=3\cdot3\cdot2\cdot\sqrt[3]{4}=18\sqrt[3]{4}.$$

3) $\sqrt[5]{32a^6}=\sqrt[5]{2^5\cdot a^5\cdot a}=\sqrt[5]{2^5}\cdot\sqrt[5]{a^5}\cdot\sqrt[5]{a}=2a\sqrt[5]{a}.$

2. Найти значение выражения:

1) $\sqrt{\frac{121}{169}}$; 2) $\frac{\sqrt{121\cdot169}}{\sqrt{169}}$; 3) $\sqrt{3\frac{1}{16}\cdot2\frac{1}{4}}$.

Р е ш е н и е. 1) По правилу извлечения корня из дроби имеем:

$$\sqrt{\frac{121}{169}}=\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{169}}=\frac{11}{13}.$$

2) $\frac{\sqrt{121\cdot169}}{\sqrt{169}}=\sqrt{\frac{121\cdot169}{169}}=\sqrt{121}=11.$

3) Преобразуем подкоренные выражения и извлечем корень:

$$\sqrt{3\frac{1}{16}\cdot2\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{49}{16}\cdot\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{49}{16}}\cdot\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{21}{8}.$$

3. Упростить при $a\geqslant0$, $x\geqslant0$:

1) $\sqrt{\sqrt[3]{ax^5}}$; 2) $\sqrt[3]{\sqrt{ax^5}}$; 3) $\sqrt[3]{2\sqrt{ax^5}}$;4) $\sqrt{2\sqrt[3]{ax^5}}$.

Р е ш е н и е. При извлечении корня из корня показатели корней перемножаются, а подкоренное выражение остается без изменения.

1) $\sqrt{\sqrt[3]{ax^5}}=\sqrt[6]{ax^5}$; 2) $\sqrt[3]{\sqrt{ax^5}}=\sqrt[6]{ax^5}$.

Если перед корнем, находящимся под корнем, имеется коэффициент, то прежде чем выполнить операцию извлечения корня, вводят этот коэффициент под знак радикала, перед которым он стоит.

Извлечем на основании изложенных правил два последних корня:

3) $\sqrt[3]{2\sqrt{ax^5}}=\sqrt[3]{\sqrt{4ax^5}}=\sqrt[6]{4ax^5}$;

4) $\sqrt{2\sqrt[3]{ax^5}}=\sqrt{\sqrt[3]{8ax^5}}=\sqrt[6]{8ax^5}$.

4. Возвести в степень:

1) $(\sqrt[4]{a^3})^4$; 2) $(\sqrt[4]{2a^3})^5$; 3) $(-2a\sqrt[6]{3x^2})^4$;4) $(\sqrt{3}+2\sqrt[3]{2})^3$.

Р е ш е н и е. При возведении корня в степень показатель корня остается без изменения, а показатели подкоренного выражения умножаются на показатель степени.

1) $(\sqrt[4]{a^3})^4=\sqrt[4]{a^{12}}=|a^3|=a^3$ (так как $\sqrt[4]{a^3}$ определен, то $a^3\geqslant0$);

2) $(\sqrt[4]{2a^3})^5=\sqrt[4]{(2a^3)^5}=\sqrt[4]{2^5a^{15}}=2a^3\sqrt[4]{2a^3}$.

Если данный корень имеет коэффициент, то этот коэффициент возводится в степень отдельно и результат записывается коэффициентом при корне.

3) $(-2a\sqrt[6]{3x^2})^4=(-2a)^4\sqrt[6]{(3x^2)^4}=16a^4\sqrt[6]{3^4x^8}=16a^4|x|\sqrt[6]{3^4x^2}=$
$=16a^4|x|\sqrt[3]{3^2|x|}$.

Здесь мы использовали правило, что показатель корня и показатель подкоренного выражения можно умножать на одно и то же число (мы умножили на $\frac{1}{2}$, т. е. разделили на 2).

Например, $\sqrt[4]{2^4}=2$ или $\sqrt[4]{2^8}=2^2$.

4) Выражение в скобках, представляющее сумму двух различных радикалов, возведем в куб и упростим:

$$(\sqrt{3}+2\sqrt[3]{2})^3=(\sqrt{3})^3+3(\sqrt{3})^2\cdot 2\sqrt[3]{2}+3\sqrt{3}\cdot(2\sqrt[3]{2})^2+(2\sqrt[3]{2})^3=$$
$$=3\sqrt{3}+18\sqrt[3]{2}+12\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}+16.$$

Поскольку $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{4^2}=\sqrt[6]{27\cdot 16}=\sqrt[6]{432}$, имеем:

$$(\sqrt{3}+2\sqrt[3]{2})^3=3\sqrt{3}+18\sqrt[3]{2}+12\cdot\sqrt[6]{432}+16.$$

5. Исключить иррациональность в знаменателе:

1) $\dfrac{a}{1-\sqrt{a}}$; 2) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2}}$; 3) $\dfrac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2-\sqrt{x^2-4}}+\dfrac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}}$.

Решение. Для исключения (уничтожения) иррациональности в знаменателе дроби нужно подыскать простейшее из выражений, которое в произведении со знаменателем дает рациональное выражение, и умножить на подысканный множитель числитель и знаменатель данной дроби.

Например, если в знаменателе дроби двучлен $\sqrt{a}\pm\sqrt{x}$, то надо числитель и знаменатель дроби умножить на выражение, сопряженное знаменателю, т. е. сумму надо умножить на соответствующую разность и наоборот.

В более сложных случаях уничтожают иррациональность не сразу, а в несколько приемов.

1) В выражении $\dfrac{a}{1-\sqrt{a}}$ должно быть $a\geqslant 0$ и $1-\sqrt{a}\neq 0$.

Умножая числитель и знаменатель дроби на $1+\sqrt{a}$, получим:

$$\frac{a}{1-\sqrt{a}}=\frac{a(1+\sqrt{a})}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})}=\frac{a(1+\sqrt{a})}{1^2-(\sqrt{a})^2}=\frac{a(1+\sqrt{a})}{1-a}.$$

2) Умножая числитель и знаменатель дроби на неполный квадрат суммы, получим:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2}}=\frac{a(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{4})}{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{4})}=$$
$$=\frac{a(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{4})}{(\sqrt[3]{a})^3-(\sqrt[3]{2})^3}=\frac{a(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{4})}{a-2}.$$

3) Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2-\sqrt{x^2-4}}+\frac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}}=$$
$$=\frac{(x+2+\sqrt{x^2-4})(x+2+\sqrt{x^2-4})}{(x+2-\sqrt{x^2-4})(x+2+\sqrt{x^2-4})}+\frac{(x+2-\sqrt{x^2-4})(x+2-\sqrt{x^2-4})}{(x+2+\sqrt{x^2-4})(x+2-\sqrt{x^2-4})}=$$
$$=\frac{(x+2+\sqrt{x^2-4})^2+(x+2-\sqrt{x^2-4})^2}{(x+2)^2-(\sqrt{x^2-4})^2}=x.$$

Решая данный пример, мы должны иметь в виду, что каждая дробь имеет смысл, т. е. знаменатель каждой дроби отличен от нуля. Кроме того, $x^2-4\geqslant 0$.

При преобразовании выражений, содержащих радикалы, часто допускают ошибки. Они вызваны неумением правильно применять понятие (определение) арифметического корня и абсолютной величины.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Найдите значение выражения:

А. 1) $\sqrt{4\cdot 144\cdot 0{,}25}$; 2) $\sqrt{9\cdot 121\cdot 64}$; 3) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{40}$; 4) $\sqrt{72\cdot 32}$.

Б. 1) $\sqrt{13^2-12^2}$; 2) $\sqrt{313^2-312^2}$; 3) $\sqrt{4{,}9\cdot 360}$; 4) $\sqrt{160\cdot 6{,}4}$.

В. 1) $\sqrt{4\,410\,000}$; 2) $\sqrt{435\,600}$; 3) $\sqrt{7{,}29}$; 4) $\sqrt{0{,}1521}$; 5) $\sqrt{3136}$; 6) $\sqrt{6084}$; 7) $\sqrt{4356}$; 8) $\sqrt[4]{64a^{14}}$.

2. Найдите значение выражения:

А. 1) $\sqrt{0{,}09}+\sqrt{0{,}16}$; 2) $\sqrt{0{,}16}-\sqrt{0{,}09}$; 3) $7\sqrt{0{,}01}-\sqrt{0{,}09}$.

Б. 1) $\sqrt{2}+3\sqrt{32}+0{,}5\sqrt{128}-6\sqrt{18}-\sqrt{2a^2}+\sqrt[4]{a^4 4}$;

2) $20\sqrt{245}-\sqrt{5}+\sqrt{125}-2{,}5\sqrt{180}+\sqrt{(x^2-2)^2}-\sqrt[4]{(2-x^2)^4}$.

3. Возведите в степень:

А. 1) $(\sqrt[3]{4x^2})^2$; 2) $(2\sqrt[3]{3x^2})^3$; 3) $(2+3\sqrt{3})^2$; 4) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$.

Б. 1) $(a^2x\sqrt[3]{3a^2x})^4$; 2) $(\sqrt{3}-2\sqrt[3]{2})^3$; 3) $(\sqrt[6]{2}-\sqrt{2})^2$.

В. 1) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{5}-\sqrt{10})^2$; 2) $(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}})^2$.

4. Исключите иррациональность в знаменателе:

А. 1) $\frac{2}{2-\sqrt{3}}$; 2) $\frac{2}{2+\sqrt{3}}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}$; 4) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$; 5) $\frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}$.

Б. 1) $\frac{2}{\sqrt{11}-3}-\frac{7}{\sqrt{11}-2}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{7}-2}-\frac{2}{\sqrt{7}+2}-2\sqrt{7}$;

3) $\frac{a}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}$; 4) $\frac{x-y}{\sqrt{x+y}}$; 5) $\frac{1-a}{\sqrt{1-\sqrt{a}}}$; 6) $\frac{x+y}{\sqrt{x-y}}$.

В. 1) $\frac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; 2) $\frac{a}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}$; 4) $\frac{47}{2\sqrt{3}-\sqrt[4]{3}}$.

5. Найдите значение выражения:

1) $\frac{9}{5-\sqrt{7}}+\frac{22}{7+\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$; 2) $\left(\frac{12}{\sqrt{15}-3}-\frac{28}{\sqrt{15}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)\cdot(6-\sqrt{3})$.

Ответы. **1. В.** 8) $2|a^3|\sqrt{2|a|}$. **2. Б.** 1) $-\sqrt{2}$; 2) $129\sqrt{5}$. **3. А.** 1) $2|x|\sqrt[3]{2|x|}$; 2) $24x^2$. **В.** 2) 8. **4. А.** 1) $2(2+\sqrt{3})$; 5) $\frac{2(\sqrt{a}-\sqrt{x})}{a+x}$. **Б.** 2) $\frac{10-5\sqrt{7}}{3}$; 4) $\frac{(x-y)\sqrt{x+y}}{(x+y)}$. **В.** 1) $3(5\sqrt{2}-6+3\sqrt{6}-4\sqrt{3})$; 3) $(\sqrt{2}-\sqrt[4]{3})(\sqrt{3}+2)$; 4) $\frac{(2\sqrt{3}+\sqrt[4]{3})(12+\sqrt{3})}{3}$. **5.** 1) 6; 2) 33.

§ 7. СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ И ДРОБНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Рассмотрим степень a^p, где $p \in \mathbf{Z}$.

1. Если $p=0$, то по определению $a^0=1$ (при $a \neq 0$). Например, $5^0=1$.

2. Если $p<0$, то по определению $a^p=\frac{1}{a^{-p}}$ (при $a \neq 0$). Например, $2^{-1}=\frac{1}{2}$; $5^{-2}=\frac{1}{5^2}$; $(-3)^{-1}=-\frac{1}{3}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{2}$.

3. Рассмотрим степень $a^{\frac{p}{q}}$, где $\frac{p}{q}$ — рациональное число. Выражение $a^{\frac{p}{q}}$ имеет в общем виде смысл только при $a>0$. Если $a>0$, $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$, то по определению $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$; $0^q=0$.

Например, $5^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{5^2}$. Выражения $(-8)^{\frac{1}{2}}$ и $(-8)^{\frac{3}{4}}$ смысла не имеют.

4. Степень с рациональным показателем обладает теми же свойствами, что и степень с натуральным показателем, а именно если $a>0$ и $n \in \mathbf{Q}$, $m \in \mathbf{Q}$, то:

а) $a^m \cdot a^n=a^{m+n}$; б) $a^m : a^n=a^{m-n}$; в) $(a^n)^m=a^{mn}$; г) $(ab \cdot \ldots \times$ $\times k)^n=a^n b^n \cdot \ldots \cdot k^n$; д) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Упростить выражение:

1) $6^{\frac{1}{4}} \cdot 6^{\frac{3}{4}}$; 2) $16^{\frac{2}{3}} : 16^{\frac{1}{6}}$; 3) $(16^{\frac{1}{3}})^{\frac{4}{3}}$; 4) $25^{\frac{2}{3}}$; 5) $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Решение. 1) $6^{\frac{1}{4}} \cdot 6^{\frac{3}{4}}=6^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=6$. Или $6^{\frac{1}{4}} \cdot 6^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{6} \times$ $\times \sqrt[4]{6^3}=\sqrt[4]{6 \cdot 6^3}=\sqrt[4]{6^4}=6$.

2) $16^{\frac{2}{3}} : 16^{\frac{1}{6}}=16^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}=16^{\frac{4-1}{6}}=16^{\frac{1}{2}}=(2^4)^{\frac{1}{2}}=2^{4 \cdot \frac{1}{2}}=2^2$.

3) $(16^{\frac{1}{3}})^{\frac{4}{3}}=16^{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}}=16^{\frac{4}{9}}=(2^4)^{\frac{4}{9}}=2^{\frac{16}{9}}=\sqrt[9]{2^{16}}=2\sqrt[9]{2^7}$.

4) $25^{\frac{2}{3}}=(5^2)^{\frac{2}{3}}=5^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{5^4}=5\sqrt[3]{5}$.

5) $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\left(\frac{3}{4}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{3 \cdot \frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$.

2. Вычислить:

1) $\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$; 2) $\left(\frac{1}{8} \cdot 125^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 3) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} : \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$.

Решение. 1) Освободимся от отрицательного показателя и упростим данное нам выражение:

$$\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{2}{3}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{2\cdot\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}=\frac{3}{4}+\frac{3}{2}=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}.$$

2) Освободимся от отрицательных показателей и упростим данное нам выражение:

$$\left(\frac{1}{8}\cdot125^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\left(\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\right)^{3}\right)^{\frac{1}{3}}}=$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)^{3\cdot\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\frac{1}{10}}=10.$$

3) Освободимся от отрицательных показателей и упростим данное нам выражение:

$$\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}:\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{2}{3}}}:\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{2}}=\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^{3\cdot\frac{2}{3}}}:\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{2}}=$$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)^{2}:\left(\frac{4}{3}\right)^{2}=\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{2}=\left(\frac{3}{4}\right)^{4}=\frac{81}{256}.$$

3. Примеры применения тождеств сокращенного умножения к действиям над степенями:

1) $(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})=a-b.$

2) $(a^{\frac{1}{3}}\pm b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}\mp a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})=a\pm b.$

3) $a^{\frac{3}{2}}\pm b^{\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}})^3\pm(b^{\frac{1}{2}})^3=(a^{\frac{1}{2}}\pm b^{\frac{1}{2}})(a\mp a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b).$

4) $a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}=(a^{\frac{1}{3}})^2-(b^{\frac{1}{3}})^2=(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}).$

5) $$\frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}}-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}-\frac{x+1}{x^2-4x+3}=$$

$$=\frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{1}{3}}(x-3)}-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)}-\frac{x+1}{(x-1)(x-3)}=$$

$$=\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{(x-1)(x-3)}=\frac{2(x-1)-(x-3)-(x+1)}{(x-1)(x-3)}=$$

$$=\frac{2x-2-x+3-x-1}{(x-1)(x-3)}=0, \quad \text{где } x>0,\ x\neq 1,\ x\neq 3.$$

6) $$\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}:(x-y)+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{xy}+y)}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-y)}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{x-\sqrt{xy}+y}{x-y}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{x-\sqrt{xy}+y+\sqrt{y}\,(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}=$$

$$=\frac{x-\sqrt{xy}+y+\sqrt{xy}-y}{x-y}=\frac{x}{x-y}.$$

7) $$((5\sqrt{5})^{-\frac{2}{3}}-81^{-0,25})\cdot((5\sqrt{5})^{-\frac{2}{3}}+81^{-0,25})=$$

$$=(5\sqrt{5})^{-\frac{4}{3}}-81^{-0,5}=(5^{\frac{3}{2}})^{-\frac{4}{3}}-(9^2)^{-0,5}=5^{-2}-9^{-1}=\frac{1}{25}-\frac{1}{9}=$$

$$=-\frac{16}{225}.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Вычислите:

А. 1) $4^{\frac{1}{2}}\cdot 16^{\frac{3}{4}}\cdot 16^{-\frac{3}{4}}\cdot 32^{-\frac{4}{5}}\cdot 2^3$; 2) $27^{\frac{1}{3}}\cdot 81^{\frac{3}{4}}\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}$.

Б. $(0,64)^{0,5}\cdot 7^0\cdot(0,027)^{\frac{2}{3}}:9^{-0,5}\cdot 16^0:(0,25)^{-1,5}-\frac{192}{125}$.

2. Выполните указанные действия:

А. 1) $a^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{3}{5}}\cdot a^{\frac{3}{4}}\cdot x^{\frac{2}{3}}$; 2) $a^{\frac{7}{12}}\cdot x^{\frac{5}{6}}:a^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{3}{4}}\cdot 6^0$.

Б. 1) $(a^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}):(a^{0,5}-x^{0,5})$;

2) $(a^{0,5}+(ax)^{0,25}+x^{0,5})\cdot(a^{0,5}-(ax)^{0,25}+x^{0,5})$;

3) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}x+ax^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x}}$; 4) $\dfrac{y-16y^{0,5}}{5y^{0,25}+20}$.

В. 1) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$;

2) $\dfrac{2\cdot x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}}+\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}-\dfrac{2}{x-1}$;

3) $\dfrac{x-1}{x+x^{0,5}+1}:\dfrac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\dfrac{2}{x^{-0,5}}$;

4) $\left(\dfrac{a\cdot a^{0,5}+x\cdot x^{0,5}}{a^{0,5}+x^{0,5}}-(ax)^{0,5}\right)\cdot\left(\dfrac{a^{0,5}+x^{0,5}}{a-x}\right)^2$;

5) $\left(\dfrac{|x-1|}{x}+x|x-1|+2-\dfrac{2}{x}\right):(x-2+x^{-1})^{0,5}$.

Ответы. 1 А. 1) 1; 2) $53\frac{1}{3}$. 2. А. 1) $a^{\frac{17}{12}}\cdot x^{\frac{19}{15}}$. Б. 1) $a+\sqrt{ax}+x$, где $a\geqslant 0$, $x\geqslant 0$, $a\neq x$; 3) ax, где $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x}\neq 0$; 4) $y^{0,5}(y^{0,25}-4):5$. В. 1) $x-1$, если $x>0$, $x\neq 1$; 2) 0, если $x>0$, $x\neq 1$, $x\neq 3$; 3) $x+1$, если $x>0$, $x\neq 1$; 5) $\frac{x^2+3}{\sqrt{x}}$ при $x>1$; $\frac{x^2-1}{\sqrt{x}}$ при $0<x<1$.

Контрольные вопросы

1. Какие числа называются иррациональными?
2. Существует ли рациональное число, выражающее длину диагонали квадрата со стороной, равной 1?
3. Может ли быть выражено рациональным числом отношение длины окружности к диаметру?
4. Докажите, что нет такого рационального числа, квадрат которого равнялся бы 2.
5. В чем заключается взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством точек координатной прямой?
6. Изобразите на координатной прямой точки, которым соответствуют иррациональные числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.
7. Какие числа из множества X, где $X=\{-50;\ -13,5;\ -\frac{1}{3};\ 0;\ \frac{1}{7};\ \sqrt{5};\ 10;\ 4^{0,5};\ 11^{0,5};\ 6,(6)\}$, являются: а) натуральными; б) целыми; в) рациональными; г) иррациональными; д) действительными?
8. Может ли бесконечная десятичная дробь быть числом рациональным; иррациональным?
9. Какие числа называются действительными?
10. С помощью знака $\subset$ запишите соответствие между множествами $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}_0$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$.
11. Сравните числа 0,333 и $\frac{1}{3}$.
12. Запишите в виде бесконечной десятичной дроби: $\frac{15}{8}$; $\frac{3}{7}$; 5; 2,7.
13. Дайте определение корня k-й степени из действительного числа a.
14. Сколько значений имеет корень $\sqrt[k]{a}$, если: а) $k=2n$, $n\in \boldsymbol{N}$, $a>0$; б) $k=2n-1$, $n\in \boldsymbol{N}$, $a>0$; в) $k\in \boldsymbol{N}$, $k\neq 1$, $a<0$, $a=0$?
15. Какой корень называется арифметическим? Верно ли, что $\sqrt{9}=\pm 3$?
16. Сформулируйте правила: а) извлечения корня из произведения и умножения корней; б) извлечения корня из дроби и деления

корней; в) извлечения корня из корня и основное свойство корня; г) сравнения корней с одинаковыми показателями.

17. Внесите множитель под знак корня:

а) $(1-x)\sqrt{\frac{x}{x-1}}$, если $x>1$; б) $(a-3)\sqrt{\frac{2a}{a^2-6a+9}}$, если $0<a<3$.

18. Вынесите множитель за знак корня: а) $\sqrt{(1-a)^3}$, если $a\leqslant 1$; б) $\sqrt{a^3(a-3)^5}$, если $a\geqslant 3$; в) $\sqrt{x^5(x-7)^2}$, если $0<x<7$.

19. Извлеките квадратный корень из числа (с точностью до 0,01): а) $\sqrt{32{,}45}$; б) $\sqrt{249{,}5}$; в) $\sqrt{0{,}9541}$.

20. Дайте определение степени: а) a^p, где $a\neq 0$ и $p\in \boldsymbol{Z}$; б) $a^{\frac{p}{q}}$, где $a>0$ и $p\in\boldsymbol{Z}$, $q\in\boldsymbol{N}$.

21. Сформулируйте правила действия над степенями с рациональным показателем.

ГЛАВА VII

§ 1. УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Пусть заданы функции $f(x)$ и $\varphi(x)$. Если относительно равенства $f(x)=\varphi(x)$ поставлена задача отыскания всех значений переменной, при которых получается верное числовое равенство, то говорят, что задано уравнение с одной переменной. Значение переменной, обращающее уравнение в истинное равенство, называется корнем уравнения.

2. Решить уравнение — значит найти множество его корней или доказать, что их нет. Это множество называют также решением уравнения.

3. Множество всех x, при которых одновременно имеют смысл выражения $f(x)$ и $\varphi(x)$, называется областью определения уравнения.

4. Для того чтобы установить область определения уравнения, необходимо найти пересечение множеств, на которых определены данные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Найдем, например, область определения уравнения $\sqrt{x+3}=1+\sqrt{-x}$. Здесь $f(x)=\sqrt{x+3}$, $\varphi(x)=1+\sqrt{-x}$, $D_1(f)=[-3;\ +\infty)$, $D_2(\varphi)=(-\infty;\ 0]$; следовательно, $D=D_1\cap D_2=[-3;\ 0]$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Является ли корнем уравнения $2x^2-10x=12$ число: 1) -1; 2) 1; 3) 6; 4) -6?

2. Докажите, что каждое из чисел 1,3 и $-1{,}3$ является корнем уравнения $x^2=1{,}69$.

3. Имеет ли корни уравнение:

1) $3x+3=3x+6$; 2) $3x+3=3x+3$; 3) $3x=x$?

4. Имеет ли корни уравнение и если имеет, то сколько: 1) $|x|=0$; 2) $|x|=1$; 3) $|x|=-3$; 4) $|-x|=2$; 5) $|x|=1{,}2$?

§ 2. ПОНЯТИЕ О РАВНОСИЛЬНОСТИ УРАВНЕНИЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Если из истинности высказывания A следует истинность высказывания B, то употребляется знак логического следования $\Rightarrow$, т. е. $A \Rightarrow B$.

2. Если $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, то такие высказывания (предложения) называются равносильными. Это записывают так: $A \Leftrightarrow B$.

3. Аналогично два уравнения называются равносильными (или эквивалентными) на данном числовом множестве, если каждое решение (корень) одного уравнения является решением (корнем) другого и наоборот.

4. Заметим, что если оба уравнения не имеют решений на данном числовом множестве, то они также считаются равносильными на этом множестве.

5. Очевидно, что равносильные уравнения имеют одно и то же множество решений, принадлежащих области определения этих уравнений. Например, уравнения $x^2-1=0$ и $(x-1)(x+1)=0$ равносильны, они имеют корни: $x_1=-1$, $x_2=1$.

6. Уравнения $x^2+1=0$ и $x^4+2=0$ равносильны на множестве действительных чисел, так как множество решений каждого из них пустое.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Равносильны ли уравнения:

1) $x=0$ и $x(x^2+1)=0$; 2) $x^2=x$ и $\frac{x^2+2}{x}=\frac{x^2+2}{x}$; 3) $x+1=0$ и $(x+1)^3=0$; 4) $2x=10$ и $(x+1)(2x-10)=0$?

Решение. 1) Уравнения $x=0$ и $x(x^2+1)=0$ равносильны; оба имеют единственный корень $x=0$.

2) Уравнения $x^2=x$ и $\frac{x^2+2}{x}=\frac{x^2+2}{x}$ неравносильны: число $x=0$ является корнем первого уравнения, но не удовлетворяет второму уравнению, так как при $x=0$ левая и правая части второго уравнения не определены.

3) Число $x=-1$ является корнем первого уравнения и корнем кратности 3 второго уравнения.

Замечание. Если среди корней имеются совпадающие, то говорят, что у многочлена есть кратные корни. Поэтому эти два уравнения, имеющие одни и те же корни (без учета кратности), считаются равносильными.

4) Уравнения $2x=10$ и $(2x-10)(x+1)=0$ неравносильны: первое из них имеет единственный корень $x=5$, а второе, кроме корня $x=5$, имеет еще корень $x=-1$, который не служит решением первого уравнения.

Равносильны ли уравнения:

А. 1) $7(x-3)=49$ и $x-3=7$; 2) $2x-7=0$ и $2x=7$;

3) $\frac{2x}{3}=9$ и $2x=27$; 4) $x=0$ и $x^2=0$?

Б. 1) $x^2=5x-6$ и $x^2-5x+6=0$;

2) $x+5=x-1$ и $x(x-3)=x^2+8-3x$;

3) $(x+2)(x^2+1)=3(x^2+1)$ и $x+2=3$;

4) $(x+3)(x-3)=0$ и $x+3=0$?

§ 3. СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ РАВЕНСТВ И ТЕОРЕМЫ О РАВНОСИЛЬНОСТИ УРАВНЕНИЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Числовое равенство не нарушится, если к обеим его частям прибавить или отнять одно и то же число.

2. Числовое равенство не нарушится, если обе его части умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля.

На этих свойствах основаны теоремы о равносильности уравнений.

3. Если к обеим частям уравнения $f(x)=\varphi(x)$ прибавить одну и ту же функцию $A(x)$, имеющую смысл при всех допустимых значениях переменного, то получится новое уравнение $f(x)+A(x)=\varphi(x)+A(x)$, равносильное данному.

4. Любое слагаемое можно перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком.

5. Если обе части уравнения $f(x)=\varphi(x)$ умножить (или разделить) на одну и ту же функцию $A(x)\neq 0$, имеющую смысл для любого x из области определения, то получится новое уравнение $A(x)f(x)=A(x)\varphi(x)$ $\left(\text{или } \frac{f(x)}{A(x)}=\frac{\varphi(x)}{A(x)}\right)$, равносильное данному.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Решить уравнение:

1) $6(x+4)=3-2x$; 2) $\frac{5(x-2)}{x+2}-\frac{2(x-3)}{x+3}=3$;

3) $2x+5=2(x-7)$; 4) $3(x+3)+x=9+4x$;

5) $\frac{x^2-1}{x}=x^2-\frac{1}{x}$; 6) $\frac{y+5}{y^2-5y}-\frac{y-5}{2y^2-10y}=\frac{y+25}{2y^2-50}$;

7) $\frac{x^2}{x+5}=\frac{25}{x+5}$; 8) $x^3-7=x^3-7$.

Решение. Заметим предварительно, что при решении уравнения необходимо производить только такие операции, при которых каждое следующее уравнение было бы равносильно предыдущему. В противном случае может быть расширена область определения уравнения и получены посторонние корни или, наоборот, сужена область определения уравнения и могут быть потеряны корни.

1) Раскроем скобки в данном уравнении, получим:

$$6x+24=3-2x. \qquad (1)$$

Перенесем слагаемое $-2x$ в левую часть уравнения (1), а слагаемое 24 в правую, изменив при этом их знаки:

$$6x+2x=3-24. \qquad (2)$$

Приведем подобные слагаемые в уравнении (2), получим:

$$8x=-21. \qquad (3)$$

Мы заменили последовательно одно уравнение другим, равносильным ему, получили линейное уравнение, в котором коэффициент при x отличен от нуля. Теперь разделим обе части уравнения (3) на этот коэффициент, тем самым найдем корень уравнения:

$$x=-\frac{21}{8}=-2\frac{5}{8}.$$

Число $-2\frac{5}{8}$ является корнем уравнения $6(x+4)=3-2x$ (в этом можно убедиться проверкой).

2) Корнями уравнения не могут быть числа -2 и -3, в противном случае левая часть уравнения не имела бы смысла (на нуль делить нельзя).

Перенесем все члены уравнения в левую часть и приведем дроби к общему знаменателю, получим:

$$\frac{5(x-2)(x+3)-2(x-3)(x+2)-3(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)}=0, \qquad (1)$$

$$\frac{-4(2x+9)}{(x+2)(x+3)}=0. \qquad (2)$$

Дробь равна нулю, когда ее числитель равен нулю (знаменатель отличен от нуля), т. е. $-4(2x+9)=0$. Так как $-4\neq 0$, то $2x+9=0$. Откуда $x=-\frac{9}{2}$.

3) Раскроем скобки, получим:

$$2x+5=2x-14. \qquad (1)$$

Перенесем слагаемое $2x$ в левую часть уравнения (1), а слагаемое 5 в правую, изменив при этом их знаки, получим:

$$0\cdot x=-19. \qquad (2)$$

В этом случае исходное уравнение не имеет корней.

4) Уравнение $3(x+3)+x=9+4x$ сводится к уравнению $3x+$

$+9+x=9+4x$, т. е. к уравнению $0\cdot x=0$, и, значит, любое число является его решением.

5) Упростим левую часть уравнения:

$$\frac{x^2-1}{x}=\frac{x^2}{x}-\frac{1}{x}=x-\frac{1}{x}.$$

Записав данное уравнение в виде $x-\frac{1}{x}=x^2-\frac{1}{x}$, после приведения подобных членов получим уравнение

$$x=x^2 \qquad (1)$$

Корни уравнения (1) $x_1=0$ и $x_2=1$. Но корень $x_1=0$ не является корнем исходного уравнения $\left(\frac{1}{x}\right.$ при $x=0$ не имеет $\left.\text{смысла}\right)$.

Это произошло за счет того, что множество допустимых значений исходного уравнения не содержит $x=0$, а полученного содержит. Итак, $x=1$.

6) Имеем:

$$\frac{y+5}{y(y-5)}-\frac{y-5}{2y(y-5)}-\frac{y+25}{2(y-5)(y+5)}=0;$$

$$\begin{cases} 2(y+5)^2-(y-5)(y+5)-y(y+25)=0; \\ 2y(y-5)(y+5)\neq 0; \end{cases}$$

$$2y(y-5)(y+5)\neq 0 \Rightarrow y\neq 0,\ y\neq 5,\ y\neq -5;$$

$$2y^2+20y+50-y^2+25-y^2-25y=0;$$

$$y=15.$$

Итак, получаем ответ: $y=15$.

7) Имеем:

$$\frac{x^2}{x+5}-\frac{25}{x+5}=0;\ \frac{x^2-25}{x+5}=0;\ \begin{cases}(x-5)(x+5)=0, \\ x+5\neq 0.\end{cases}$$

$$x+5\neq 0 \Rightarrow x\neq -5.$$

$$(x-5)(x+5)=0,\ x=5,\ x=-5.$$

Так как $x=-5$ не является корнем уравнения, то получаем ответ: $x=5$.

8) $0=0$, x — любое действительное число.

§ 4. ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ, СОДЕРЖАЩЕЕ ПАРАМЕТР

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Пусть дано уравнение вида

$$f(a,\ b,\ c,\ ...,\ k,\ x)=\varphi(a,\ b,\ c,\ ...,\ k,\ x), \qquad (1)$$

где a, b, c, ..., k, x — переменные величины.

Переменные a, b, c, ..., k, которые при решении уравнения (1) считаются постоянными, называются параметрами, а само уравнение называется уравнением, содержащим параметры.

2. Решить уравнение (1) — значит указать, при каких значениях параметров существуют значения x, удовлетворяющие данному уравнению.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Решить уравнение с параметром:

1) $ax=0$; 2) $ax=a$; 3) $x+2=ax$; 4) $(a^2-1)x=2a^2+a-3$.

Решение. 1) Данное уравнение $ax=0$ содержит параметр a (переменную, которая в условии данного примера сохраняет одно и то же значение). Если $a=0$, то $0\cdot x=0$; x — любое действительное число. Если $a\neq 0$, то $x=\frac{0}{a}=0$.

2) Данное уравнение также содержит параметр a. Если $a=0$, то $0\cdot x=0$, т. е. x — любое действительное число. Если $a\neq 0$, то $x=\frac{a}{a}$, т. е. $x=1$.

3) Данное уравнение также содержит параметр a. Перенесем ax в левую часть уравнения, а слагаемое 2 в правую часть, изменив при этом их знаки, и упростим: $x-ax=-2$, т. е. $x(1-a)=-2$.

Если $1-a=0$, т. е. $a=1$, то получим уравнение $x\cdot 0=-2$, которое не имеет корней.

Если $1-a\neq 0$, т. е. $a\neq 1$, то уравнение имеет единственный корень $x=\frac{2}{a-1}$.

Итак, если $a\neq 1$, то $x=\frac{2}{a-1}$; если $a=1$, то уравнение не имеет корней.

4) Данное уравнение является линейным относительно x. Оно имеет смысл при любых действительных значениях параметра a. Приведем его к виду $(a-1)(a+1)x=(2a+3)(a-1)$.

Если $a=1$, то уравнение примет вид $0\cdot x=0$, его решением является любое действительное число.

Если $a=-1$, то уравнение примет вид $0\cdot x=-2$, это уравнение не имеет решений.

Если $a\neq\pm 1$, то уравнение имеет единственное решение $x=\frac{2a+3}{a+1}$.

Как понимать выражение «имеет единственное решение»? Это значит, что каждому допустимому значению a соответствует единственное значение x. Например, если $a=5$, то $x=\frac{10+3}{6}=\frac{13}{6}$; если $a=0$, то $x=3$ и т. д.

2. Решить относительно x уравнение

$$\frac{3ax-5}{(a-1)(x+3)}+\frac{3a-11}{a-1}=\frac{2x+7}{x+3}. \qquad (1)$$

Решение. Из условия следует, что $(a-1)(x+3)\neq 0$, т. е. $a\neq 1$, $x\neq -3$. Умножив обе части уравнения (1) на $(a-1)(x+3)$, получим уравнение

$3ax-5+(3a-11)(x+3)=(2x+7)(a-1)$, или $x(4a-9)=31-2a$.

При $a\neq 2{,}25$ $x=\frac{31-2a}{4a-9}$.

Теперь необходимо проверить, нет ли таких значений a, при которых найденное значение $x=-3$: $\frac{31-2a}{4a-9}=-3$ при $a=-0{,}4$.

Таким образом, при $a\neq 1$, $a\neq 2{,}25$ и $a\neq -0{,}4$ уравнение (1) имеет единственное решение $x=\frac{31-2a}{4a-9}$.

При $a=2{,}25$ и при $a=-0{,}4$ решений нет, при $a=1$ уравнение (1) не имеет смысла.

Заметим, что если при каком-либо значении параметра $a=a_0$ данное уравнение не имеет смысла, то оно при этом значении параметра и не имеет решения. Обратное утверждение неверно. Нельзя, например, утверждать, что при $a=-0{,}4$ решенное выше уравнение (1) не имеет смысла. Если подставить в уравнение (1) $a=-0{,}4$, получим вполне определенное уравнение

$$\frac{6x+25}{7(x+3)}+\frac{61}{7}=\frac{2x+7}{x+3}. \qquad (2)$$

Значит, при $a=-0{,}4$ уравнение (1) имеет смысл. Однако корней это уравнение не имеет, так как корень $x=-3$ уравнения $53x=-159$, к которому сводится уравнение (2), является для него посторонним.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Решите относительно x уравнение:

А. 1) $\frac{0{,}75(8x-12)+x-5}{4x-8}=0$; 2) $\frac{0{,}75(12x-4)-x-1}{2x-1}=0$;

3) $\frac{3(9x-3)}{9x-6}=2+\frac{3x+1}{3x-2}$; 4) $\frac{3-7x}{2x+4}=\frac{1{,}5-3{,}5x}{x+2}$.

Б. 1) $ax=x+3$; 2) $4+ax=3x+1$.

В. 1) $a=\frac{1}{a}+\frac{a-1}{a(x-1)}$; 2) $\frac{2(a+1)x}{a}=\frac{7}{a}+3(x+1)$;

3) $\frac{a+3}{a+2}=\frac{2}{x}-\frac{5}{(a+2)x}$; 4) $\frac{1+x}{1-x}=\frac{a}{c}$.

Ответы. **А.** 1), 2) корней нет; 3) x — любое действительное число, кроме $x=\frac{2}{3}$; 4) x — любое действительное число, кроме $x=-2$. **Б.** 1) При $a\neq 1$ $x=\frac{3}{a-1}$; при $a=1$ корней нет;

2) при $a\neq3$ $x=\frac{3}{3-a}$; при $a=3$ корней нет. **В.** 1) При $a\neq\pm1$, $a\neq0$ $x=\frac{a+2}{a+1}$; при $a=1$ x — любое действительное число, кроме $x=1$; при $a=-1$, $a=0$ решений нет; 2) при $a\neq2$, $a\neq0$ $x=\frac{7+3a}{2-a}$; при $a=0$, $a=2$ решений нет; 3) при $a\neq-3$, $a\neq-2$, $a\neq0{,}5$ $x=\frac{2a-1}{a+3}$; при $a=-3$, $a=0{,}5$, $a=-2$ решений нет; 4) при $a+c\neq0$, $c\neq0$ $x=\frac{a-c}{a+c}$; при $a=-c$, $c=0$ решений нет.

Контрольные вопросы

1. Какие из следующих высказываний истинны: а) число 975 кратно 75; б) сумма чисел 4204 и 36 кратна 3; в) сумма чисел 1617 и 1078 делится на их разность без остатка; г) значение выражения 75^2+319^2 — простое число; д) $3^3+4^3+5^3=6^3$?
2. Что называется уравнением с одной переменной?
3. Что называется корнем уравнения?
4. Что значит решить уравнение?
5. Сколько корней может иметь уравнение?
6. Сколько корней имеет уравнение $|x|=x$?
7. Имеет ли корни уравнение: а) $x=10x$; б) $x^4+5a^2=-4$?
8. Какие уравнения называются равносильными?
9. Какие преобразования могут привести к потере корней уравнения?
10. Какие преобразования могут привести к появлению посторонних корней уравнения?
11. Если оба уравнения не имеют решений на множестве $\boldsymbol{Q}$, то можно ли утверждать, что эти уравнения равносильны на множестве $\boldsymbol{Q}$?
12. Сформулируйте свойства числовых равенств.
13. Сформулируйте теоремы о равносильности уравнений.
14. Равносильны ли уравнения $x+\sqrt{2}=0$ и $x^2-2=0$ на множестве: а) рациональных чисел; б) целых чисел; в) действительных чисел?

ГЛАВА VIII

§ 1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Зависимости одной переменной от другой называются функциональными зависимостями.

2. Зависимость переменной y от переменной x называется функцией, если каждому значению x соответствует единственное значение y. При этом используют запись $y=f(x)$.

3. Переменную x называют независимой переменной или аргументом, а переменную y — зависимой переменной. Говорят, что y является функцией от x.

4. Значение y, соответствующее заданному значению x, называют значением функции.

5. Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют область определения функции; все значения, которые принимает зависимая переменная, образуют множество значений функции.

6. Для функции f приняты обозначения: $D(f)$ — область определения функции, $E(f)$ — множество значений функции, $f(x_0)$ — значение функции в точке x_0.

7. Если $D(f)\subset \boldsymbol{R}$ и $E(f)\subset \boldsymbol{R}$, то функцию называют числовой.

8. Элементы множества $D(f)$ также называют значениями аргумента, а соответствующие им элементы $E(f)$ — значениями функции.

9. Если функция задана формулой и область определения функции не указана, то считают, что область определения состоит из всех значений независимой переменной, при которых эта формула имеет смысл.

Например, область определения функции, заданной формулой $y=\frac{2}{x+3}$, состоит из всех чисел, кроме числа -3.

10. Графиком функции называется множество всех точек, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Найдите область определения функции, заданной формулой:

А. 1) $y=\frac{x}{x-1}$; 2) $y=\frac{1}{x+2}$; 3) $y=\frac{1}{x^2}$; 4) $y=6$.

Б. 1) $y=\frac{1}{x(x-1)}$; 2) $y=\frac{1}{x^2(1-x)}$; 3) $y=\frac{x}{|x|}$;

4) $y=\frac{x}{(x^2+8)(x-3)^2}$.

В. 1) $y=\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt{-x}$; 3) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2}}$; 4) $y=\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+2}}$.

2. Формула $y=-5x+6$ задает некоторую функцию. Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному $-1{,}2$; 2,8. При каком значении аргумента значение функции равно 6; 8; 100?

Ответы. **1. А.** 1) Все числа, кроме числа 1; 4) все числа. **Б.** 2) Все числа, кроме 0 и 1. **В.** 1) Все неотрицательные числа; 2) $x\leqslant 0$; 3) $x\neq 0$; 4) все числа. **2.** 12, -8; 0; $-0{,}4$; $-18{,}8$.

§ 2. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Функция может быть задана аналитически в виде формулы $y=f(x)$, где переменная x — элемент множества значений аргумента, а переменная y — соответствующее значение функции.

Например, формула $y=x^2$ определяет некоторую функцию, где каждому значению переменной x, взятому из области определения функции, соответствует единственное значение переменной $y=x^2$.

2. Функция f полностью определяется заданием множества пар $(x; f(x))$, где x принимает все значения из $D(f)$, а $f(x)$ — соответствующие значения функции.

3. Функция может быть задана графически. Графиком функции $y=f(x)$ называется изображение на координатной плоскости множества пар $\{(x; y) | y=f(x)$, где $x \in D(f)\}$.

4. Заметим, однако, что не всякое множество точек координатной плоскости является графиком некоторой функции. Например, на кривой, изображенной на рисунке 7, значению $x=x_0$ соответствуют три значения y (y_1, y_2 и y_3), и, следовательно, такое соответствие не является функцией.

5. Для того чтобы множество точек координатной плоскости являлось графиком некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы любая прямая, параллельная оси Oy, пересекалась с указанным графиком не более чем в одной точке.

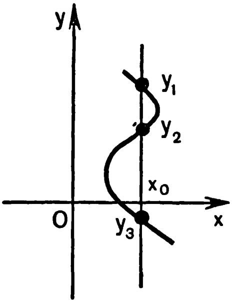


Рис. 7

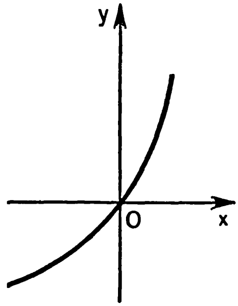


Рис. 8

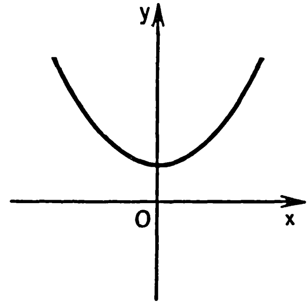


Рис. 9

§ 3. МОНОТОННОСТЬ ФУНКЦИИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Функция $f(x)$ называется возрастающей на данном числовом промежутке X, если большему значению аргумента $x \in X$ соответствует большее значение функции $f(x)$, т. е. для любых x_1 и x_2 из промежутка X, таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

2. Функция $f(x)$ называется убывающей на данном числовом промежутке X, если большему значению аргумента $x \in X$ соответствует меньшее значение функции $f(x)$, т. е. для любых x_1 и x_2 из промежутка X, таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

3. Функция, только возрастающая или только убывающая на данном числовом промежутке, называется монотонной на этом промежутке.

4. О монотонности функции можно судить по ее графику. Например, функция, график которой изображен на рисунке 8, возрастает при всех значениях x. Функция, график которой изображен на рисунке 9, убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Доказать, что функция, заданная формулой $f(x) = 3x^2$, где $x \geqslant 0$, возрастающая.

Решение. Пусть $x_2 > x_1$, где $x_2 > 0$ и $x_1 \geqslant 0$. Тогда

$$f(x_2) - f(x_1) = 3x_2^2 - 3x_1^2 = 3(x_2^2 - x_1^2) = 3(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0.$$

Итак, из неравенства $x_2 > x_1 \geqslant 0$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$, т. е. большему значению аргумента $x \in D(f)$ соответствует большее значение функции. Следовательно, функция $f(x)$ возрастающая на промежутке $[0; \infty)$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Докажите, что функция, заданная формулой $y=3x^2$, где $x \leqslant 0$, убывающая.

§ 4. ЧЕТНЫЕ И НЕЧЕТНЫЕ ФУНКЦИИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Функция $y=f(x)$ называется четной, если она обладает следующими двумя свойствами:

1) область определения этой функции симметрична относительно точки O (т. е. если точка a принадлежит области определения, то точка $-a$ также принадлежит области определения);

2) для любого значения x, принадлежащего области определения этой функции, выполняется равенство $f(x)=f(-x)$.

2. Функция $y=f(x)$ называется нечетной, если:

1) область определения этой функции симметрична относительно точки O;

2) для любого значения x, принадлежащего области определения этой функции, выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$.

3. График четной функции $y=x^2$ изображен на рисунке 10.

4. График нечетной функции $y=x^3$ изображен на рисунке 11.

5. Заметим, что не всякая функция является четной или нечетной. Например, каждая из функций $y=12x+1$, $y=x^4+x$, $y=(x+3)^2$ не является ни четной, ни нечетной.

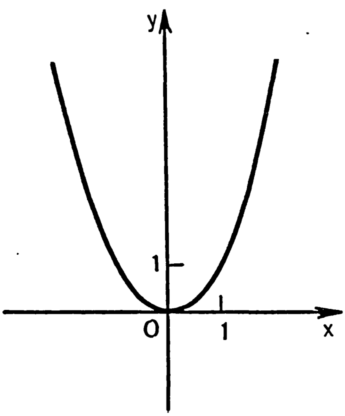


Рис. 10

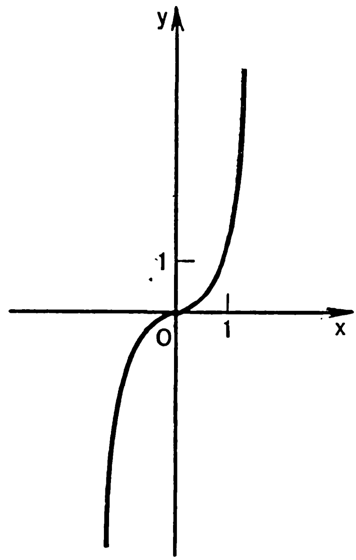


Рис. 11

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Доказать, что функция $y=3x+1$ не является ни четной, ни нечетной.

Доказательство. Областью определения данной функции $y=3x+1$ является вся координатная прямая, т. е. условие 1 в определении четной и нечетной функций выполнено. Чтобы доказать, что функция $y=3x+1$ не является четной, мы должны доказать, что условие 2 в определении четной функции не выполнено, т. е. что существует (хотя бы одно) значение x, для которого $f(x)\neq f(-x)$. Возьмем $x=1$. Тогда $f(1)=4$, а $f(-1)=-2$, т. е. $f(1)\neq f(-1)$. Таким образом, функция $f(x)$ не является четной. Аналогично так как $f(-1)\neq -f(1)$, то функция $y=3x+1$ не является нечетной.

2. Выяснить четность или нечетность функции:

1) $y=x+\frac{1}{x}$; 2) $y=(x-3)^2+(x+3)^2$; 3) $y=x^2-x+3$.

Решение. 1) Дана функция $y=x+\frac{1}{x}$, где $x\neq 0$. Найдем $y(-x)$:

$$y(-x)=(-x)+\frac{1}{(-x)}=-x-\frac{1}{x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

Получили, что $f(-x)=-f(x)$, следовательно, $y=x+\frac{1}{x}$ — функция нечетная.

2) Дана функция $y=(x-3)^2+(x+3)^2$, $D(y)=\boldsymbol{R}$. Переменим знак у аргумента функции и упростим:

$$y(-x)=(-x-3)^2+(-x+3)^2=(-(x+3))^2+(-(x-3))^2=$$
$$=(-1)^2(x+3)^2+(-1)^2(x-3)^2=(x-3)^2+(x+3)^2.$$

Получили, что $f(-x)=f(x)$. Следовательно, $y=(x-3)^2+(x+3)^2$ — функция четная.

3) Дана функция $y=x^2-x+3$, $D(y)=\boldsymbol{R}$. Переменим знак у аргумента данной функции и упростим:

$$y(-x)=(-x)^2-(-x)+3=x^2+x+3.$$

Следовательно, функция $y=x^2-x+3$ не является ни четной, ни нечетной, поскольку, например, $y(-1)\neq y(1)$ и $y(-1)\neq -y(1)$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Установите четность или нечетность функции:

А. 1) $y=x^4$; 2) $y=x^5$; 3) $y=-2x^2$; 4) $y=x^7+2x^3$.

Б. 1) $y=x|x|$; 2) $y=(x-3)^2-(x+3)^2$; 3) $y=\sqrt{9-x^2}$;
4) $y=0{,}5x^3-5x^2$.

В. 1) $y=\frac{x}{x^2-4}$; 2) $y=\frac{x-3}{x+1}$; 3) $y=\sqrt[3]{x^2}$; 4) $y=\frac{x-x^3}{1+x^2}$;

5) $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{(x+1)^2}$; 6) $y=2x^2$, где $x\geqslant 0$;
7) $y=x^5$, где $x\geqslant 0$.

Ответы. **А.** 1) и 3) Четные функции; 2) и 4) нечетные функции. **Б.** 1) и 2) Нечетные функции; 3) четная функция; 4) функция не является ни четной, ни нечетной. **В.** 1), 4) и 5) Функции нечетные; 2) функция не является ни четной, ни нечетной; 3) функция четная.

§ 5. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Функция f называется периодической, если существует такое число $T\neq 0$, что при любом x из области определения функции числа $x-T$ и $x+T$ также принадлежат этой области и выполняется равенство $f(x)=f(x-T)=f(x+T)$. В этом случае число T называется периодом функции f.

2. Если T — период функции, то Tk, где $k\in \mathbf{Z}$, $k\neq 0$, также период функции. Следовательно, всякая периодическая функция имеет бесконечное множество периодов. На практике обычно рассматривают наименьший положительный период.

3. Значения периодической функции через промежуток, равный периоду, повторяются. Это обстоятельство используется при построении графиков.

§ 6. ПРОМЕЖУТКИ ЗНАКОПОСТОЯНСТВА И КОРНИ ФУНКЦИИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Числовые промежутки, на которых функция сохраняет свой знак (т. е. остается положительной или отрицательной), называются промежутками знакопостоянства функции.

2. О промежутках знакопостоянства функции легко судить по ее графику. Рассмотрим, например, функцию $y=x$ (рис. 12). Здесь $f(x)>0$ при $x\in \mathbf{R}_+$, $f(x)<0$ при $x\in \mathbf{R}_-$. В первом случае график расположен выше оси Ox, во втором — ниже ее.

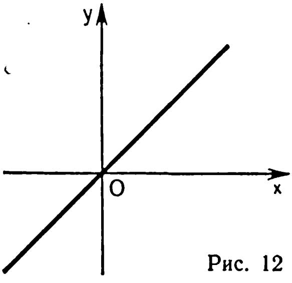


Рис. 12

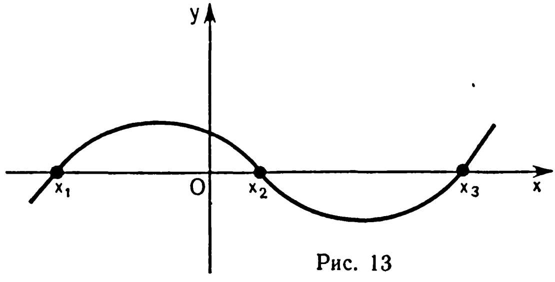


Рис. 13

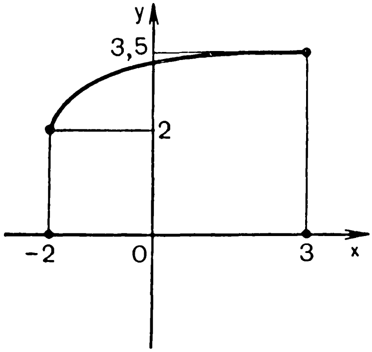


Рис. 14

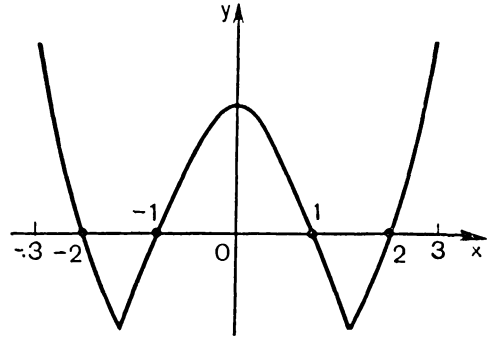


Рис. 15

3. Значения аргумента $x \in D(f)$, при которых $f(x)=0$, называются корнями (или нулями) функции. Значения аргумента, при которых функция обращается в нуль,— это абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox (рис. 13).

Контрольные вопросы

1. Дайте определение функции.
2. Что называется областью определения функции и множеством ее значений?
3. Функция f задана множеством пар $\left(\frac{1}{2}; 2\right), \left(\frac{2}{3}; 6\right), \left(\frac{3}{4}; 12\right)$, $(2; 2)$. Укажите $D(f)$ и $E(f)$. Найдите $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{3}{4}\right)$, $f(2)$.
4. Функция задана формулой $y=5-x$ на множестве X. Найдите множество Y значений функции, если $X=\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.
5. Функция f задана графически (рис. 14). Укажите $D(f)$ и $E(f)$.
6. Дайте определение возрастающей и убывающей функции.
7. Докажите, что функция, заданная формулой $f(x)=2x+3$, возрастающая.
8. Докажите, что функция, заданная формулой $f(x)=-0{,}5x+5$, убывающая.
9. Дайте определение четной и нечетной функции.
10. Дайте определение периодической функции.
11. Укажите промежутки знакопостоянства функции, график которой изображен на рисунке 15. Найдите по графику корни функции.

ГЛАВА IX

§ 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Если известен график функции $y=f(x)$, то с помощью некоторых преобразований плоскости (параллельного переноса, осевой и центральной симметрии и т. п.) можно построить графики более сложных функций.

1. График функции $f(bx)$ получается сжатием графика $f(x)$ в b раз к оси Oy при $b>1$ или растяжением в $\frac{1}{b}$ раз от этой оси Oy при $0<b<1$ (рис. 16).

2. График функции $f(x+c)$ получается параллельным переносом графика $f(x)$ в отрицательном направлении оси Ox на $|c|$ при $c>0$ и в положительном направлении на $|c|$ при $c<0$ (рис. 17).

3. График функции $af(x)$ получается растяжением графика $f(x)$

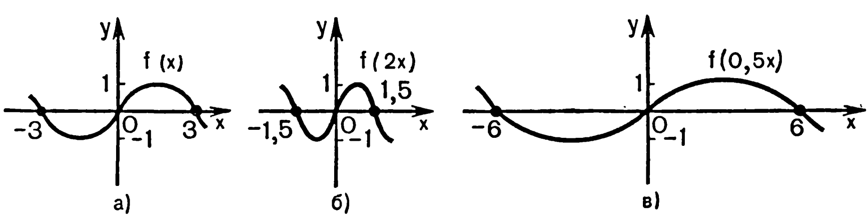


Рис. 16

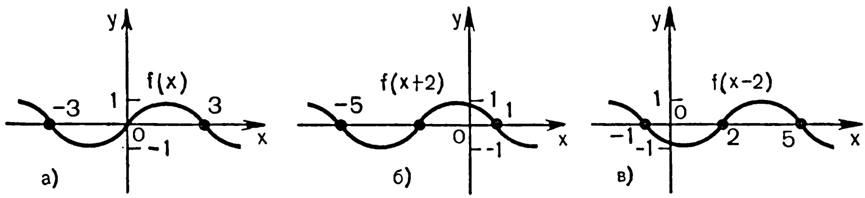


Рис. 17

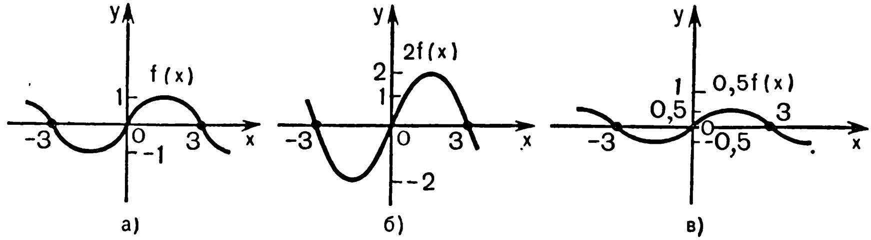


Рис. 18

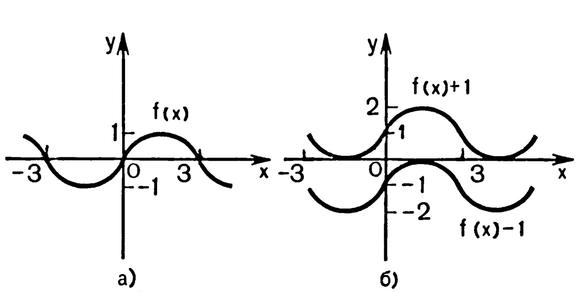


Рис. 19

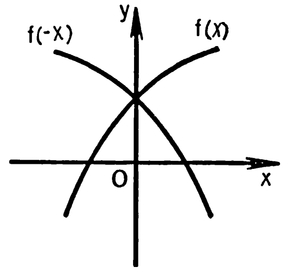


Рис. 20

вдоль оси Oy в a раз при $a>1$ и сжатием вдоль этой оси в $\frac{1}{a}$ раз при $0<a<1$ (рис. 18).

4. График функции $f(x)+k$ получается параллельным переносом графика $f(x)$ в положительном направлении оси Oy на k при $k>0$ и в отрицательном направлении этой оси на $|k|$ при $k<0$ (рис. 19).

5. График функции $y=f(-x)$ получается симметричным отображением графика $f(x)$ относительно оси Oy (рис. 20).

6. График функции $y=-f(x)$ получается симметричным отображением графика $f(x)$ относительно оси Ox (рис. 21).

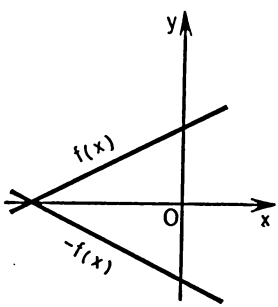


Рис. 21

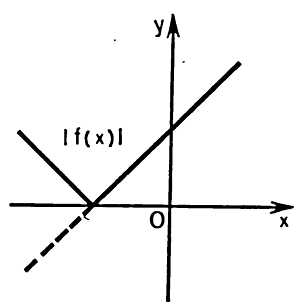


Рис. 22

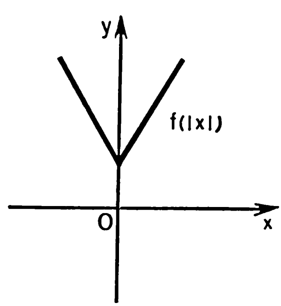


Рис. 23

7. График функции $y=|f(x)|$ получается из графика функции $y=f(x)$ следующим образом: часть графика $y=f(x)$, лежащая над осью Ox, сохраняется, часть его, лежащая под осью Ox, отображается симметрично относительно оси Ox (рис. 22).

8. График функции $y=f(|x|)$ получается из графика функции $y=f(x)$ следующим образом: при $x \geqslant 0$ график $y=f(x)$ сохраняется, а при $x<0$ полученная часть графика отображается симметрично относительно оси Oy (рис. 23).

§ 2. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Функция, заданная формулой $y=kx+b$, где k и b — некоторые числа, называется линейной.

2. Областью определения линейной функции служит множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел, так как выражение $kx+b$ имеет смысл при любых значениях x.

3. График линейной функции $y=kx+b$ есть прямая линия. Для построения графика, очевидно, достаточно двух точек, например $A(0; b)$ и $B\left(-\frac{b}{k}; 0\right)$, если $k \neq 0$.

4. Коэффициент k характеризует угол, который образует прямая $y=kx$ с положительным направлением оси Ox (рис. 24), поэтому k называется угловым коэффициентом. Если $k>0$, то этот угол острый; если $k<0$ — тупой; если $k=0$, то прямая совпадает с осью Ox.

5. График функции $y=kx+b$ может быть также построен с помощью параллельного переноса графика функции $y=kx$ (см. § 1, п. 4).

6. Уравнение вида $kx+b=0$ называется линейным. Для того чтобы решить линейное уравнение графически, достаточно построить график функции $y=kx+b$ и найти точку его пересечения с осью Ox (на рис. 25 x_1 — корень уравнения).

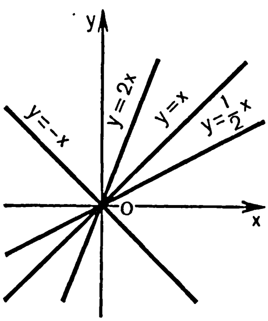


Рис. 24

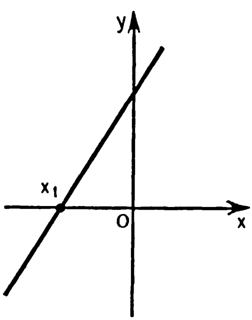


Рис. 25

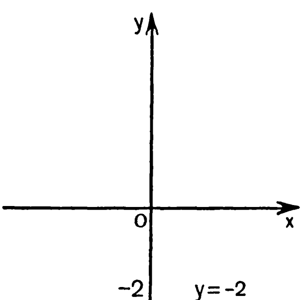


Рис. 26

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Построить график функции:

1) $y=-2$; 2) $y=-\frac{1}{2}x+1$; 3) $y=\sqrt{3}x-1$; 4) $y=3|x+2|-1$.

Решение. 1) Линейная функция имеет вид $y=kx+b$, где k и b — заданные числа.

В данной функции $y=-2$ $k=0$, x — любое действительное число, $b=-2$, т. е. $y=0\cdot x-2$.

Эта функция задана на всей оси Ox и для каждого x принимает одно и то же значение, равное -2. Следовательно, ее график — прямая, параллельная оси Ox и отстоящая от нее на 2 единицы вниз (рис. 26).

2) Данная функция $y=-\frac{1}{2}x+1$ линейная, где $k=-\frac{1}{2}$, $b=1$.

Для построения графика линейной функции достаточно двух точек. Найдем их: если $x=0$, то $y=1$; если $y=0$, то $x=2$. Соединяя прямой найденные точки, получим график данной функции (рис. 27).

3) Дана функция $y=\sqrt{3}x-1$. Здесь $k=\sqrt{3}$, $b=-1$. Найдем две точки, принадлежащие графику функции: при $x=0$ $y=-1$; если $y=0$, то $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Соединяя прямой найденные точки, получаем график данной функции (рис. 28).

4) Для построения графика данной функции используем определение модуля:

а) $\begin{cases} x+2\geqslant 0, \\ y=3(x+2)-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x\geqslant -2, \\ y=3x+5. \end{cases}$

Построим график функции $y=3x+5$ при $x\geqslant -2$ (рис. 29).

б) $\begin{cases} x+2\leqslant 0, \\ y=-3(x+2)-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x\leqslant -2, \\ y=-3x-7. \end{cases}$

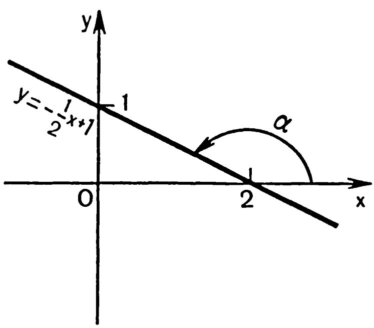


Рис. 27

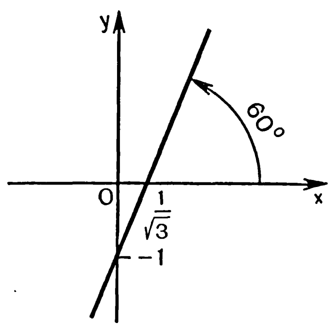


Рис. 28

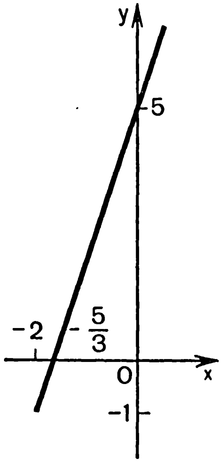


Рис. 29

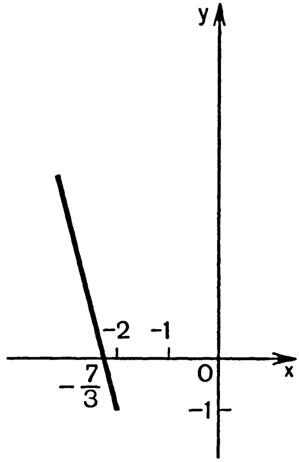


Рис. 30

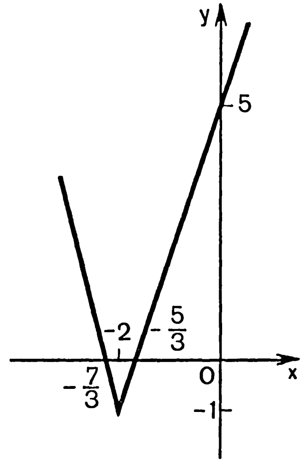


Рис. 31

Построим график функции $y=-3x-7$ при $x\leqslant -2$ (рис. 30). График функции $y=3|x+2|-1$ построен на рисунке 31.

§ 3. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Функция, заданная формулой $y=ax^2+bx+c$, где x, y — переменные, а a, b и c — заданные числа, причем $a\neq 0$, называется квадратичной.

2. Областью определения квадратичной функции является множество $\boldsymbol{R}$.

3. Графиком функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола. Если $a>0$, то ветви параболы направлены вверх; если $a<0$, то ветви параболы направлены вниз. Осью симметрии параболы служит прямая $x=-\frac{b}{2a}$.

4. Координаты вершины параболы определяются по формулам

$$x_0=-\frac{b}{2a},\ y_0=y(x_0)=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

5. Квадратичную функцию $y=ax^2+bx+c$ всегда можно привести к виду $y=a(x+k)^2+p$ путем выделения полного квадрата следующим образом:

сгруппировать два первых слагаемых и вынести коэффициент a за скобки:

$$y=a\left(x^2+\frac{bx}{a}\right)+c;$$

внутри скобок к выражению $x^2+\frac{bx}{a}$ прибавить и вычесть квадрат половины $\frac{b}{a}$, т. е. $\frac{b^2}{4a^2}$:

$$y=a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c.$$

Три первых слагаемых в скобках образуют полный квадрат.

$$y=a\left(\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=$$
$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Здесь $k=\frac{b}{2a}$, $p=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Точка с координатами $(-k;\ p)$ есть вершина параболы.

6. График квадратичной функции $y=a(x+k)^2+p$ получается из графика функции $y=ax^2$ с помощью параллельного переноса.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Выделить из квадратного трехчлена полный квадрат:
1) x^2-3x-3; 2) $2x^2-8x-1$; 3) $-3x^2+4x-2$.

Решение. 1) Воспользуемся теоретическим материалом, который изложен в п. 5.

1) $x^2-3x-3=\left(x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)-3=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-3=$
$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-5\frac{1}{4}$.

2) $2x^2-8x-1=2(x^2-4x)-1=2(x^2-4x+4-4)-1=$
$=2((x-2)^2-4)-1=2(x-2)^2-8-1=2(x-2)^2-9$.

3) $-3x^2+4x-2=-3\left(x^2-\frac{4x}{3}\right)-2=-3\left(x^2-\frac{4x}{3}+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\right)-$
$-2=-3\left(\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}\right)-2=-3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{3\cdot 4}{9}-2=$
$=-3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{2}{3}$.

2. Построить график функции:
1) $y=x^2-3x-3$; 2) $y=-3x^2+4x-2$; 3) $y=x|x|-2x$.

Решение. 1) Выделим полный квадрат: $y=x^2-3x-3=$ $=(x-1{,}5)^2-5{,}25$. Следовательно, $A(1{,}5;\ -5{,}25)$ — вершина параболы. Найдем точку пересечения параболы с осью Oy. Если $x=0$, то $y=0^2-3\cdot 0-3=-3$; $(0;\ -3)$ — точка пересечения параболы с осью Oy. Ветви параболы направлены вверх, так как $a=1>0$ (рис. 32).

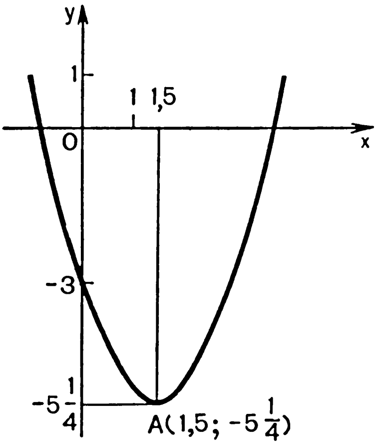


Рис. 32

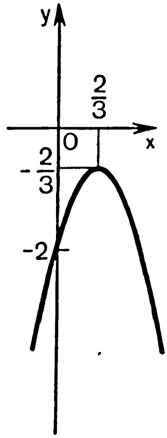


Рис. 33

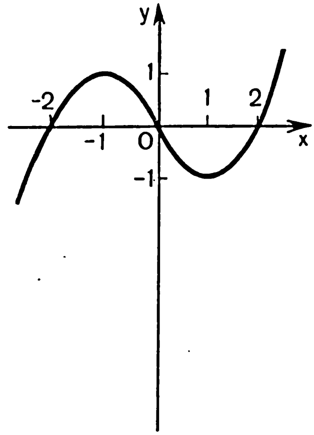


Рис. 34

2) Выделим полный квадрат:

$$y=-3x^2+4x-2=-3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{2}{3}.$$

Следовательно, точка $A\left(\frac{2}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$ — вершина параболы; $(0;\ -2)$ — точка пересечения параболы с осью Oy, ветви параболы направлены вниз, так как $a=-3<0$ (рис. 33).

3) Воспользуемся определением модуля:

$$\text{а)}\ \begin{cases} x\geqslant 0, \\ y=x^2-2x; \end{cases} \qquad \begin{cases} x\geqslant 0, \\ y=x\,(x-2). \end{cases}$$

Корни данной функции: $\begin{cases} y=0, \\ x_1=0,\ x_2=2. \end{cases}$

Построим график функции $y=x\,(x-2)$ с учетом, что $x\geqslant 0$ (рис. 34).

$$\text{б)}\ \begin{cases} x<0, \\ y=-x^2-2x; \end{cases} \qquad \begin{cases} x<0, \\ y=-x\,(x+2). \end{cases}$$

Корни данной функции: $\begin{cases} y=0, \\ x_1=0,\ x_2=-2. \end{cases}$

Построим график функции $y=-x\,(x+2)$ с учетом, что $x<0$ (рис. 34).

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Выделите из квадратного трехчлена полный квадрат:

А. 1) x^2-6x+8; 2) $x^2+6x+10$; 3) x^2-2x-2; 4) x^2-2x.

Б. 1) $4x^2-6x+8$; 2) $-2x^2+4x-12$; 3) $2x^2-\frac{4x}{9}+1\frac{2}{9}$; 4) x^2+x.

2. Постройте график функции:

А. 1) $y=x^2-6x+8$; 2) $y=x^2+6x+10$; 3) $y=x^2-2x-2$; 4) $y=x^2-2x$.

Б. 1) $y=4x^2-6x+8$; 2) $y=-2x^2+4x-12$; 3) $y=2x^2-\frac{4x}{9}+\frac{4}{9}$; 4) $y=x^2-2x$.

В. 1) $y=2x|x|-3x+4$; 2) $y=2x^2-3|x|+4$; 3) $y=x-2x|x|$.

Ответы. **1. А.** 1) $(x-3)^2-1$; 2) $(x+3)^2+1$; 3) $(x-1)^2-3$; 4) $(x-1)^2-1$.

§ 4. ФУНКЦИЯ $y=\frac{k}{x}$ И ЕЕ ГРАФИК

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Если переменная y пропорциональна переменной x, то эта зависимость выражается формулой $y=kx$, где $k\neq0$ — коэффициент пропорциональности. График этой функции мы рассмотрели в § 2.

2. Если переменная y обратно пропорциональна переменной x, то эта зависимость выражается формулой $y=\frac{k}{x}$, где $k\neq0$ — коэффициент обратной пропорциональности.

3. Область определения функции $y=\frac{k}{x}$ есть множество всех чисел, отличных от нуля, т. е. $(-\infty, 0)\cup(0; +\infty)$.

4. Графиком обратной пропорциональности $y=\frac{k}{x}$ является кривая, состоящая из двух ветвей, симметричных относительно начала координат. Такая кривая называется гиперболой (рис. 35). Если $k>0$, то ветви гиперболы расположены в I и III координатных четвертях; если же $k<0$, то во II и IV координатных четвертях.

5. Заметим, что гипербола не имеет общих точек с осями координат, а лишь сколь угодно близко к ним приближается (объясните почему).

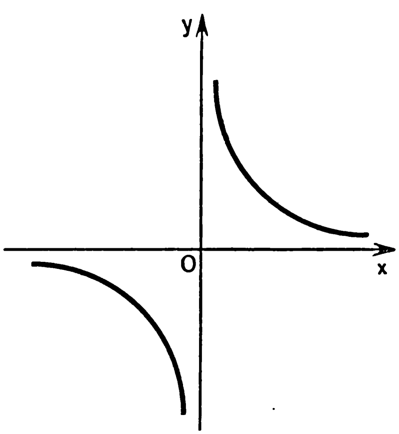


Рис. 35

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Построить график функции:

1) $y=\frac{1}{x}$; 2) $y=\frac{k}{x}$.

Решение. 1) Для построения графика данной функции, часто встречающейся на практике, установим сначала некоторые ее свойства.

а) Функция определена при всех действительных $x\neq 0$. При $x=0$ функция не определена (делить на нуль нельзя!). Таким образом, область определения функции состоит из двух промежутков: $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

б) Функция нечетная, так как $f(-x)=-f(x)$. Следовательно, ее график симметричен относительно начала координат. Поэтому достаточно рассмотреть данную функцию только для $x>0$.

в) При $x>0$ функция убывает. Действительно, пусть $x_2>x_1>$ >0, тогда $\frac{1}{x_2}<\frac{1}{x_1}$, т. е. $y_2<y_1$.

График функции $y=\frac{1}{x}$ построен на рисунке 35. Эта кривая называется гиперболой. Она состоит из двух ветвей, расположенных в I и III координатных четвертях.

2) График функции $y=\frac{k}{x}$ имеет такой же вид, что и график функции $\frac{1}{x}$; при $k>0$ ветви гиперболы расположены в I и III координатных четвертях, при $k<0$ ветви расположены во II и IV четвертях.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Постройте на одном рисунке графики функций:

1) $y=\frac{2}{x}$ и $y=\frac{4}{x}$; 2) $y=\frac{0{,}5}{x}$ и $y=\frac{0{,}25}{x}$;

3) $y=-\frac{2}{x}$ и $y=-\frac{4}{x}$; 4) $y=-\frac{0{,}5}{x}$ и $y=\frac{0{,}25}{-x}$.

Назовите в каждом случае значение k.

§ 5. ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Функция вида $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, где a, b, c, d — постоянные, причем $c\neq 0$ (иначе мы имели бы линейную функцию) и $ad\neq bc$ (иначе получили бы функцию вида $y=\text{const}$).

Функция определена всюду, кроме $x=-\frac{d}{c}$.

2. Для построения графика преобразуем правую часть равенства, выделив целую часть:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a\left(x+\frac{d}{c}-\frac{d}{c}\right)+b}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)+\left(b-\frac{ad}{c}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=$$

$$=\frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}.$$

Полагая $k=\frac{bc-ad}{c^2}$, $m=\frac{d}{c}$, $n=\frac{a}{c}$, получаем что дробно-линейную функцию всегда можно привести к виду $y=n+\frac{k}{x+m}$.

3. Согласно правилам, данным в § 1, график функции $y=n+\frac{k}{x+m}$ можно получить сдвигом гиперболы $y=\frac{k}{x}$ на $|m|$ единиц вдоль оси Ox и на $|n|$ единиц вдоль оси Oy. В каком направлении выполняется сдвиг, зависит от знаков m и n (рис. 36).

При этом сдвиге асимптоты гиперболы $y=\frac{k}{x}$ (координатные оси) перейдут в прямые $y=n$ $\left(y=\frac{a}{c}\right)$, $x=-m$ $\left(x=-\frac{d}{c}\right)$. Эти прямые будут асимптотами дробно-линейной функции.

4. Для более точного построения графика целесообразно найти точки его пересечения с координатными осями. Итак, график дробно-линейной функции есть гипербола.

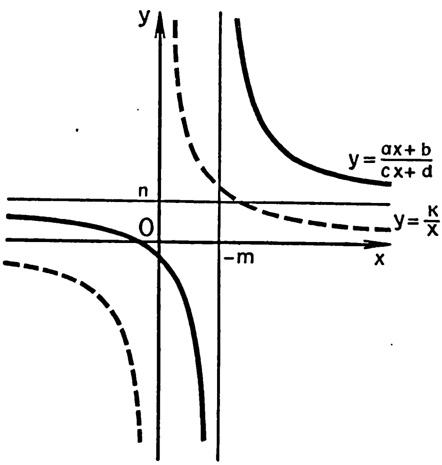


Рис. 36

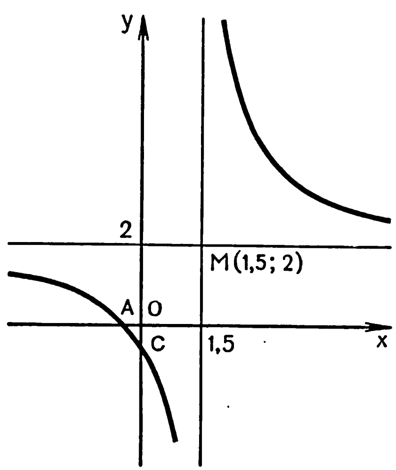


Рис. 37

Построить график функции:

1) $y=\frac{4x+1}{2x-3}$; 2) $y=\frac{4x+1}{3-2x}$; 3) $y=\left|\frac{2x-3}{x-2}\right|$.

Решение. 1) Построим график функции $y=\frac{4x+1}{2x-3}$.

Выделим целую часть:

$$y=\frac{4x+1}{2x-3}=\frac{4x+1}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}=\frac{4\left(x-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)+1}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}=$$

$$=\frac{4\left(x-\frac{3}{2}\right)+4\cdot\frac{3}{2}+1}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}=\frac{4\,(x-1{,}5)}{2\,(x-1{,}5)}+\frac{7}{2\,(x-1{,}5)}=2+\frac{\frac{7}{2}}{x-1{,}5}.$$

Отсюда следует, что прямые $x=1{,}5$ и $y=2$ являются асимптотами этой гиперболы.

Теперь находим точки ее пересечения с осями Ox и Oy.

При $x=0$ $y=\frac{4\cdot0+1}{2\cdot0-3}=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$.

Если $y=0$, то $0=\frac{4x+1}{2x-3}$, т. е. $x=-\frac{1}{4}$.

Следовательно, гипербола пересекает ось Ox в точке $A\left(-\frac{1}{4};0\right)$, а ось Oy в точке $C\left(0;-\frac{1}{3}\right)$.

Взяв еще несколько контрольных точек, построим график (гиперболу) (рис. 37).

Замечание. В отличие от графика функции $y=\frac{k}{x}$ график дробно-линейной функции может пересекать оси координат.

2) Построим график функции $y=\frac{4x+1}{3-2x}$. Поскольку $y=-\frac{4x+1}{2x-3}$, то график данной функции симметричен графику функции из упражнения 1 относительно оси Ox (рис. 38).

3) Построим график функции $y=\left|\frac{2x-3}{x-2}\right|$. Выделяя целую часть, имеем:

$$y=\left|\frac{2x-3}{x-2}\right|=\left|2+\frac{1}{x-2}\right|.$$

Следовательно, сначала надо построить график функции $y=\frac{1}{x-2}$, затем переместить его вверх на 2 единицы, после этого часть графика, оказавшуюся в нижней полуплоскости, отобразить в верхнюю полуплоскость (рис. 39).

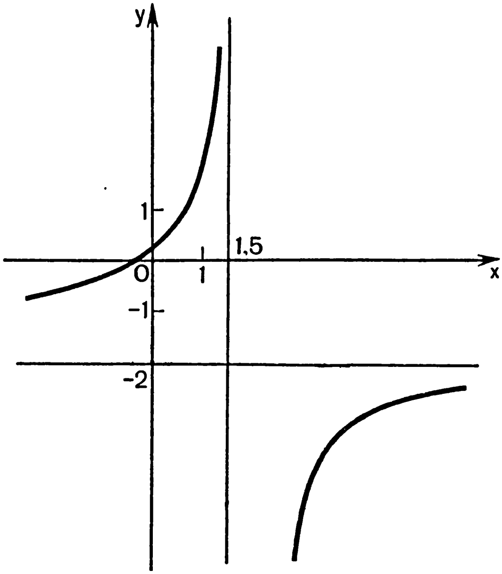


Рис. 38

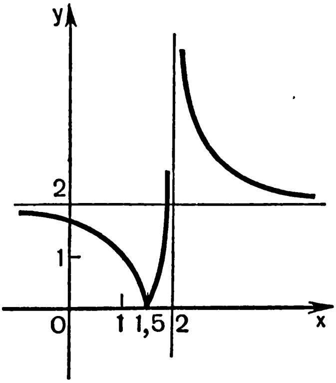


Рис. 39

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Постройте график функции:

А. 1) $y=\frac{1}{x-2}$; 2) $y=\frac{2}{x+2}$; 3) $y=\frac{1}{2-x}$; 4) $y=2+\frac{3}{x-4}$.

Б. 1) $y=\frac{2x-5}{x-4}$; 2) $y=\frac{2-x}{3-x}$; 3) $y=\frac{2x-3}{4x+1}$.

В. 1) $y=\frac{1}{|x-2|}$.

Ответы. **А.** 1) Рис. 40; 3) Рис. 41; 4) Рис. 42.. **Б.** 1) Рис. 42; 2) Рис. 43. **В.** 1) Рис. 44.

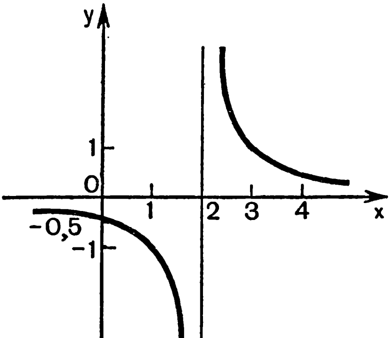


Рис. 40

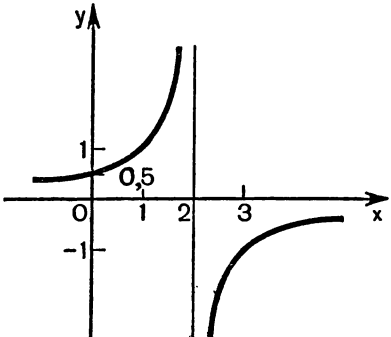


Рис. 41

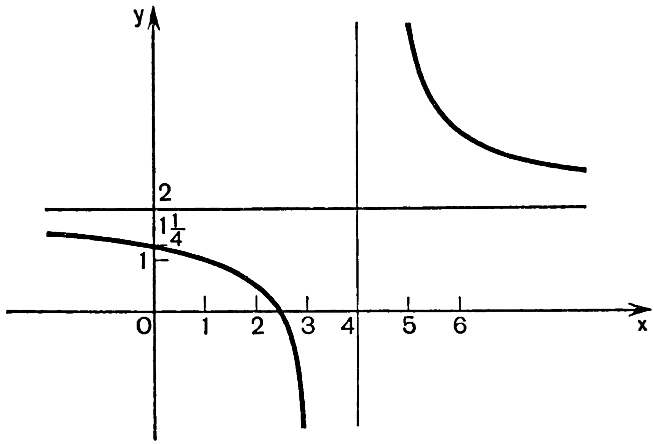


Рис. 42

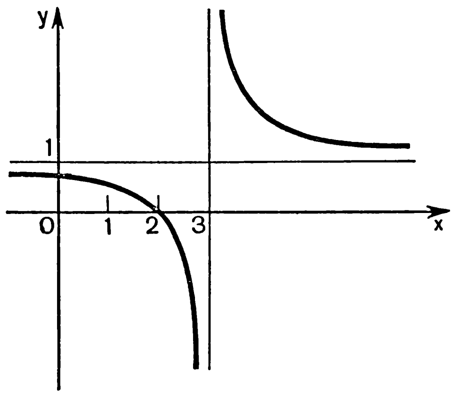


Рис. 43

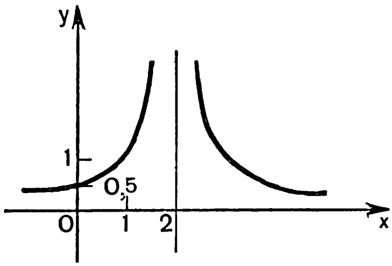


Рис. 44

Контрольные вопросы

1. Какая функция называется линейной? Каковы область ее определения и множество значений?
2. Что является графиком линейной функции?
3. Каковы частные случаи линейной функции и как расположены на координатной плоскости графики в этих случаях?
4. Каким преобразованием можно получить из графика функции $y=x$ графики функций: а) $y=kx+b$; б) $y=k(x+a)$?
5. Сколько точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y=kx+b$, достаточно иметь на плоскости, чтобы построить график функции?
6. Как зависит расположение графика функции $y=kx+b$ от величины b?

7. Как влияет коэффициент k на расположение графика функции $y=kx+b$?
8. Функция задана формулой $y=kx+6$. При каком значении k график этой функции параллелен графику функции: а) $y=100x-1$; б) $y=-8{,}2x$; в) $y=x+3{,}7$?
9. Какая функция называется квадратичной? Укажите ее область определения.
10. По каким формулам вычисляются координаты вершины параболы?
11. Как зависит направление ветвей параболы от первого коэффициента функции $y=ax^2+bx+c$?
12. Преобразуйте функцию $y=ax^2+bx+c$ к виду $y=a(x+k)^2+p$ с помощью выделения квадрата двучлена.
13. При каком условии функция $y=(a+3)x^2+2x$ не является квадратичной?
14. Как иллюстрируется на графике свойство четности функции $y=x^2$?
15. Как с помощью геометрических преобразований построить график функции: а) $y=3(x-2)^2+1$; б) $y=(2x+3)^2-1$?
16. Функция задана формулой $y=\frac{k}{x}$. Как называется эта функция? Какие ограничения надо наложить на k, на x?
17. Какое множество является областью определения функции, заданной формулой $y=\frac{k}{x}$?
18. Из формулы $y=\frac{k}{x}$ следует, что $xy=k$. Верно ли обратное: если $xy=k$, то $y=\frac{k}{x}$?
19. Дана функция $y=\frac{k}{x}$, где $k>0$, $x>0$. Покажите на частных примерах, что с увеличением (уменьшением) значения x в несколько раз соответствующее значение y уменьшается (увеличивается) во столько же раз.
20. Как называется кривая, являющаяся графиком функции $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$? Как расположены ее ветви?
21. В каких координатных четвертях расположен график функции: а) $y=-\frac{6}{x}$; б) $y=\frac{4}{x}$?
22. Может ли гипербола пересекаться с осями координат? Поясните почему.

ГЛАВА X

§ 1. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где x — переменная, a, b, c — некоторые числа, причем $a\neq0$, называется квадратным.

2. В квадратном уравнении $ax^2+bx+c=0$ коэффициент a называют первым коэффициентом, b — вторым коэффициентом, c — свободным членом.

3. Формула корней квадратного уравнения имеет вид:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

4. Выражение b^2-4ac называется дискриминантом квадратного уравнения и обозначается буквой D.

5. Если $D=0$, то существует только одно значение переменной, удовлетворяющее уравнению $ax^2+bx+c=0$. Однако условились говорить, что в этом случае квадратное уравнение имеет два равных действительных корня, а само число $-\frac{b}{2a}$ называют корнем кратности два.

6. Если $D<0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней.

7. Если $D>0$, то квадратное уравнение имеет два различных действительных корня.

8. Пусть дано квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$. Так как $a\neq0$, то, разделив обе части данного уравнения на a, получим уравнение $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$. Полагая $\frac{b}{a}=p$ и $\frac{c}{a}=q$, приходим к уравнению $x^2+px+q=0$, в котором первый коэффициент равен 1. Такое уравнение называется приведенным.

9. Формула корней приведенного квадратного уравнения имеет вид:

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

10. Уравнения вида $ax^2+bx=0$ $(c=0)$, $ax^2+c=0$ $(b=0)$ и $ax^2=0$ $(b=0,\ c=0)$ называются неполными квадратными уравнениями.

11. Уравнение вида $ax^4+bx^2+c=0$ называется биквадратным. С помощью замены переменной по формуле $x^2=y$ оно приводится к квадратному уравнению $ay^2+by+c=0$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Решить уравнение:

1) $x^2+5x-6=0$; 2) $2x^2-3x+1=0$; 3) $2x^2-3x+4=0$;
4) $9x^2+6x+1=0$; 5) $x^2-10x+24=0$.

Решение. 1) Найдем дискриминант: $D=25+24=49$, $D>0$. Применим формулу корней квадратного уравнения: $x=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{2}$. Отсюда

$$x_1=\frac{-5-7}{2}=-6,\ x_2=\frac{-5+7}{2}=1.$$

2) Найдем дискриминант: $D=3^2-4\cdot2\cdot1=1$, $D>0$. Применим формулу корней квадратного уравнения: $x=\frac{3\pm\sqrt{1}}{4}$. Отсюда $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=1$.

3) Найдем дискриминант: $D=3^2-4\cdot2\cdot4=9-32$, $D<0$. Так как дискриминант отрицателен, то уравнение не имеет корней.

4) Уравнение можно решить двумя способами.

1-й способ. Преобразуем левую часть уравнения, получим:

$$(3x+1)^2=0,\ 3x+1=0,\ x=-\frac{1}{3}.$$

2-й способ. Найдем дискриминант: $D=6^2-4\cdot9\cdot1=36-36=0$, $D=0$. Применим формулу корней квадратного уравнения $x=\frac{-6\pm\sqrt{0}}{18}$. Отсюда $x_1=\frac{-6+0}{18}=-\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{-6-0}{18}=-\frac{1}{3}$.

Таким образом, уравнение имеет единственный корень: $x=-\frac{1}{3}$.

5) Применим формулу корней для приведенного квадратного уравнения: $x_{1,2}=5\pm1$. Отсюда $x_1=5-1=4$, $x_2=5+1=6$.

2. Решить уравнение:

1) $2x^2-x=0$; 2) $-2x^2+5x=0$; 3) $3x^2+24=0$.

Решение. 1) Чтобы решить данное неполное квадратное уравнение, разложим его левую часть на множители. Получим $2x^2-x=x(2x-1)$.

Произведение $x(2x-1)$ равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю: $x=0$ или $2x-1=0$. Решая уравнение $2x-1=0$ находим $x=\frac{1}{2}$.

Следовательно, произведение $x(2x-1)$ обращается в нуль при $x=0$ и при $x=\frac{1}{2}$. Поэтому числа 0 и $\frac{1}{2}$ являются корнями уравнения $2x^2-x=0$.

2) Разложим левую часть на множители. Получим:

$$5x-2x^2=x(5-2x),\ x(5-2x)=0.$$

Значит, $x=0$ или $5-2x=0$. Решая уравнение $5-2x=0$, находим, что $x=2{,}5$. Числа 0 и 2,5 являются корнями уравнения $5x-2x^2=0$.

3) Чтобы решить такое уравнение, перенесем в его правую часть свободный член с противоположным знаком и разделим обе части уравнения на 3. Получим уравнение $x^2=-8$, равносильное уравнению $3x^2+24=0$.

Так как $x^2\geqslant 0$, то уравнение $x^2=-8$ не имеет корней.

Замечание. Данное уравнение можно решить иначе. Так как $3x^2\geqslant 0$, $24>0$, то сумма неотрицательного и положительного чисел не может быть числом, равным нулю. Следовательно, уравнение $3x^2+24=0$ не имеет корней.

3. Решить уравнение:

1) $\frac{5+2x}{4x-3}=\frac{3(x+1)}{7-x}$; 2) $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=\frac{10}{3}+\frac{36}{x^2-9}$;

3) $\frac{30}{x^2-1}-\frac{13}{x^2+x+1}-\frac{18x+7}{x^3-1}=0$.

Решение. При решении дробных уравнений целесообразно поступать следующим образом:

— найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение, если каждая дробь имеет смысл;

— заменить данное уравнение целым, умножив обе его части на общий знаменатель;

— решить получившееся целое уравнение;

— исключить из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель.

1) Воспользуемся основным свойством дроби и представим левую и правую части этого уравнения в виде дробей с одинаковым знаменателем:

$$\frac{(5+2x)\cdot(7-x)}{(4x-3)\cdot(7-x)}=\frac{3(x+1)(4x-3)}{(7-x)(4x-3)}. \qquad (1)$$

Эти дроби равны при тех и только тех значениях, при которых равны их числители, а знаменатель отличен от нуля. Если знаменатель равен нулю, то дроби, а следовательно, и уравнение не имеет смысла.

Таким образом, чтобы найти корни данного уравнения, нужно решить уравнение

$$(5+2x)(7-x)=3(x+1)(4x-3). \qquad (2)$$

Упростив уравнение (2), получим:

$$7x^2-3x-22=0. \qquad (3)$$

Решим уравнение (3): $x_1=-\frac{11}{7}$, $x_2=2$.

Найденные корни не обращают знаменатель в нуль, поэтому они являются корнями исходного уравнения.

2) Найдем общий знаменатель дробей, входящих в уравнение.

$$\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=\frac{10}{3}+\frac{36}{(x-3)(x+3)}. \qquad (1)$$

Общий знаменатель — выражение $3(x-3)(x+3)$. Заменим уравнение (1) целым. Для этого умножим обе его части на общий знаменатель, получим:

$$3(x+3)(x+3)+3(x-3)(x-3)=10(x-3)(x+3)+3\cdot 36. \qquad (2)$$

Выполним необходимые преобразования в уравнении (2), придем к квадратному уравнению $x^2-9=0$. Его корни: $x_1=-3$ и $x_2=3$.

Если $x=-3$, то $3(x-3)(x+3)=0$; если $x=3$, то $3(x-3)(x+3)=0$.

Следовательно, числа -3 и 3 не являются корнями уравнения (1), а потому данное уравнение решений не имеет.

3) Найдем общий знаменатель дробей, входящих в уравнение. Для этого знаменатели дробей разложим на множители:

$$\frac{30}{(x-1)(x+1)}-\frac{13}{x^2+x+1}=\frac{18x+7}{(x-1)(x^2+x+1)}. \qquad (1)$$

Общий знаменатель — выражение $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)$. Заменим уравнение (1) целым, умножив обе его части на общий знаменатель, получим:

$$30(x^2+x+1)-13(x-1)(x+1)=(18x+7)(x+1). \qquad (2)$$

Выполнив преобразования, придем к квадратному уравнению

$$x^2-5x-36=0. \qquad (3)$$

Корни уравнения (3): $x_1=-4$ и $x_2=9$.

Если $x_1=-4$, то $(x+1)(x-1)(x^2+x+1)\neq 0$; если $x_2=9$, то $(x+1)(x-1)(x^2+x+1)\neq 0$. Следовательно, числа -4 и 9 — корни данного уравнения.

4. Решить уравнение:

1) $2x^4-9x^2+4=0$; 2) $(5x^2-4)^2+6(5x^2-4)-7=0$;

3) $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55$; 4) $\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2$.

Решение. 1) Уравнение $2x^4-9x^2+4=0$ является биквадратным. Для того чтобы решить его, выполним замену, обозначив x^2 через y. Получим квадратное уравнение с переменной y

$$2y^2-9y+4=0.$$

Решив его, найдем $y_1=0{,}5$, $y_2=4$. Значит, $x^2=\frac{1}{2}$ или $x^2=4$.

Из уравнения $x^2=\frac{1}{2}$ находим, что $x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Из уравнения $x^2=4$ находим, что $x_3=-2$, $x_4=2$.

Итак, данное уравнение имеет четыре корня:

$$x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_2=\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_3=-2,\ x_4=2.$$

2) Пусть $5x^2-4=y$. Тогда данное уравнение примет вид $y^2+6y-7=0$. Решив его, найдем, что $y_1=-7$, $y_2=1$. Поэтому $5x^2-4=-7$ или $5x^2-4=1$.

Уравнение $5x^2-4=-7$, или $5x^2=-3$, не имеет корней.

Уравнение $5x^2-4=1$, или $5x^2=5$, имеет два корня: $x_1=-1$, $x_2=1$.

Итак, данное уравнение имеет два корня: $x_1=-1$, $x_2=1$.

3) Перепишем данное уравнение в виде

$$(x^2+2x)^2-(x^2+2x+1)=55. \qquad (1)$$

Пусть $x^2+2x=y$, тогда уравнение (1) примет вид $y^2-(y+1)-55=0$, откуда $y^2-y-56=0$.

Решив его, найдем $y_1=-7$, $y_2=8$. Значит, $x^2+2x=-7$ или $x^2+2x=8$.

Уравнение $x^2+2x+7=0$ корней не имеет, так как $D<0$.

Уравнение $x^2+2x-8=0$ имеет корни $x_1=-4$ и $x_2=2$.

Получили, что данное уравнение имеет два корня: $x_1=-4$, $x_2=2$.

4) $\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2$. Введем новую переменную, обозначив $x^2+2x-3=y$. Получим уравнение с переменной y:

$$\frac{24}{y-5}-\frac{15}{y}=2.$$

Корни этого уравнения: $y_1=-3$, $y_2=\frac{25}{2}$. Значит, $x^2+2x-3=-3$ или $x^2+2x-3=\frac{25}{2}$.

Из уравнения $x^2+2x-3=-3$ находим, что $x_1=-2$, $x_2=0$.

Из уравнения $x^2+2x-3=\frac{25}{2}$ находим, что $x_{3,4}=\frac{-2\pm\sqrt{66}}{2}$.

Итак, данное уравнение имеет четыре корня: $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_{3,4}=\frac{-2\pm\sqrt{66}}{2}$.

Решите уравнение:

А. 1) $x^2=3x$; 2) $x^2+3x=0$; 3) $3x-x^2=0$; 4) $2x^2+4=0$; 5) $2x^2-4=0$; 6) $3x^2+27=0$; 7) $-3x^2+27=0$; 8) $\frac{x^2}{3}=3$; 9) $x^2-4x-5=0$; 10) $x^2-14x+48=0$; 11) $105+x^2=22x$; 12) $4x+x^2+15=0$; 13) $x^2+8x+7=0$; 14) $\frac{x^2}{x+3}=\frac{x}{x+3}$; 15) $\frac{x^2-6x}{x-5}=\frac{5}{5-x}$; 16) $\frac{x^2-6x}{x-5}-\frac{5}{x-5}=0$; 17) $\frac{x^2-4}{x}=\frac{3+2x}{2}$; 18) $\frac{8}{x}=3x+2$.

Б. 1) $x^2-9x+8=0$; 2) $x^2+x-6=0$; 3) $x^2-\frac{5x}{4}+\frac{3}{8}=0$; 4) $x^2+\frac{1}{3}=\frac{7x}{6}$; 5) $-x^2+2x+3=0$; 6) $-x^2+4x=3$; 7) $\frac{3x+1}{x+2}=1+\frac{x-1}{x-2}$; 8) $\frac{2x-2}{x+3}-\frac{x+3}{3-x}=5$; 9) $\frac{4}{9y^2-1}-\frac{4}{3y+1}=\frac{5}{1-3y}$; 10) $\frac{4}{x+3}+1=\frac{1}{x-3}+\frac{5}{3-x}$; 11) $\frac{3}{x}-\frac{4}{1-x}=\frac{5-x}{x^2-1}$; 12) $\frac{3x-2}{x}+\frac{1}{2-x}=\frac{3x+4}{x^2-2x}$; 13) $\frac{2}{x^2-x+1}=\frac{1}{x+1}+\frac{2x-1}{x^3+1}$; 14) $\frac{3}{x+2}-\frac{2}{x^3+8}=\frac{4}{x^2-2x+4}$; 15) $\frac{4}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{1}{1-x^2}$.

В. 1) $\frac{2x-1}{14x^2+7x}+\frac{8}{12x^2-3}=\frac{2x+1}{6x^2-3x}$; 2) $\frac{3}{8x^3+1}-\frac{1}{2x+1}=\frac{x+3}{4x^2-2x+1}$; 3) $\frac{32}{x^3-2x^2-x+2}+\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x+1}$; 4) $\frac{1}{3(x-4)}+\frac{1}{2(x^2+3)}=\frac{1}{12-3x+4x^2-x^3}$; 5) $\frac{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{10x}{3x^2-2}$; 6) $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81$; 7) $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$; 8) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=-2{,}5$.

Ответы. **А.** 1) 0; 3; 2) 0; -3; 3) 0; 3; 4) корней нет; 5) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; 6) корней нет; 7) -3; 3; 8) -3; 3; 9) -1; 5; 10) 6; 8; 11) 7; 15; 12) корней нет; 13) -7; -1; 14) 0; 1; 15) 1; 16) $3-\sqrt{14}$; $3+\sqrt{14}$; 17) $-\frac{8}{3}$; 18) -2; $\frac{4}{3}$. **Б.** 1) 1; 8; 2) -3; 2; 3) 0,5; 0,75; 4) 0,5; $\frac{2}{3}$; 5) -1; 3; 6) 1; 3; 7) $3\pm\sqrt{5}$; 8) -6; 5; 9) $-4\frac{1}{3}$; 10) -9; 1; 11) $\frac{1+\sqrt{97}}{16}$; $\frac{1-\sqrt{97}}{16}$; 12) 4; 13) 2; 14) $\frac{5\pm\sqrt{19}}{3}$; 15) $\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$. **В.** 1) $\frac{-5\pm\sqrt{77}}{4}$; 2) $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$;

3) $2\pm\sqrt{35}$; 4) $-1{,}5$; 0; 5) $\frac{2}{3}$; 1; 6) 3; $3\pm2\sqrt{5}$; 7) $\frac{1}{2}$; 2; 8) -1; -1.

§ 2. ТЕОРЕМА ВИЕТА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Сумма корней приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену, т. е. $x_1+x_2=-p$, а $x_1\cdot x_2=q$.

2. Теорема, обратная теореме Виета. Если p, q, x_1, x_2 таковы, что $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$, то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$.

3. Выражение вида ax^2+bx+c называется квадратным трехчленом. Корни этой функции являются корнями соответствующего квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

4. Если дискриминант квадратного трехчлена больше нуля, то этот трехчлен можно представить в виде $ax^2+bx+c=a(x-x_1)\times(x-x_2)$, где x_1 и x_2 — корни трехчлена.

5. Если дискриминант квадратного трехчлена равен нулю, то этот трехчлен можно представить в виде $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$, где x_1 — корень трехчлена. Например, $3x^2-12x+12=3(x-2)^2$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Составить квадратное уравнение по его корням:
1) $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{4}$; 2) $4-\sqrt{3}$ и $4+\sqrt{3}$; 3) $\frac{a}{1-b}$ и $\frac{b}{1-a}$.

Решение. 1) Так как $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{4}$ — корни уравнения $x^2+px+q=0$, то по теореме, обратной теореме Виета, составим уравнение:

$$p=-(x_1+x_2)=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4},$$
$$q=x_1\cdot x_2=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{8}.$$

Искомое уравнение $x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}=0$, или $8x^2-2x-1=0$.

2) Так как $x_1=4-\sqrt{3}$, $x_2=4+\sqrt{3}$ — корни уравнения $x^2+px+q=0$, то по теореме, обратной теореме Виета, составим уравнение:

$$p=-(x_1+x_2)=-(4-\sqrt{3}+4+\sqrt{3})=-8,$$
$$q=x_1x_2=(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})=16-3=13.$$

Искомое уравнение $x^2-8x+13=0$.

3) Так как $x_1=\frac{a}{1-b}$, $x_2=\frac{b}{1-a}$ — корни уравнения x^2+px+ $+q=0$, то по теореме, обратной теореме Виета,

$$p=-(x_1+x_2)=-\left(\frac{a}{1-b}+\frac{b}{1-a}\right)=$$
$$=\frac{b^2+a^2-a-b}{(1-b)(1-a)},$$

$$q=x_1\cdot x_2=\frac{a}{1-b}\cdot\frac{b}{1-a}=\frac{a\cdot b}{(1-b)(1-a)}.$$

Искомое уравнение

$$x^2+\frac{b^2+a^2-a-b}{(1-b)(1-a)}\cdot x+\frac{ab}{(1-a)(1-b)}=0.$$

2. Не вычисляя корней x_1 и x_2 уравнения

$$2x^2+5x-3=0, \qquad (1)$$

найти: 1) $x_1+x_2+x_1x_2$; 2) $x_1^2+x_2^2$; 3) $x_1^3+x_2^3$.

Решение. 1) Преобразуем уравнение (1) в приведенное, для этого разделим обе части уравнения (1) на 2, получим:

$$x^2+2{,}5x-1{,}5=0. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) по теореме Виета следует, что $x_1+x_2=-2{,}5$, а $x_1\cdot x_2=-1{,}5$. Тогда $x_1+x_2+x_1x_2=-2{,}5-1{,}5=-4$.

2) Уравнение (1) равносильно уравнению (2). Так как

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2, \text{ то } x_1^2+x_2^2=(-2{,}5)^2-2\cdot(-1{,}5)=$$
$$=6{,}25+3=9{,}25.$$

3) Уравнение (1) равносильно уравнению (2). Так как

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=$$
$$=(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2), \text{ то}$$
$$x_1^3+x_2^3=-2{,}5\,(6{,}25-3\cdot(-1{,}5))=-2{,}5\cdot 10{,}75=-26{,}875.$$

3. Сократить дробь $\frac{6a^2+11a+3}{3+5a-12a^2}$.

Решение. Найдем корни квадратных трехчленов, записанных в числителе и знаменателе:

$$6a^2+11a+3=0,\ a_1=-\frac{3}{2},\ a_2=-\frac{1}{3}.$$

$$3+5a-12a^2=0,\ 12a^2-5a-3=0,\ a_1=-\frac{1}{3},\ a_2=\frac{3}{4}.$$

Значит,

$$6a^2+11a+3=6\left(a+\frac{3}{2}\right)\left(a+\frac{1}{3}\right),$$
$$3+5a-12a^2=-12\left(a+\frac{1}{3}\right)\left(a-\frac{3}{4}\right).$$

Получили

$$\frac{6a^2+11a+3}{3+5a-12a^2}=\frac{6\left(a+\frac{3}{2}\right)\left(a+\frac{1}{3}\right)}{-12\left(a+\frac{1}{3}\right)\left(a-\frac{3}{4}\right)}=\frac{2a+3}{3-4a}.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Составить приведенное уравнение, имеющее корни x_1 и x_2:

А. 1) $x_1=3$, $x_2=-1$; 2) $x_1=2$, $x_2=3$; 3) $x_1=-4$, $x_2=-5$.

Б. 1) $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=-\sqrt{6}$; 2) $x_1=2a-b$, $x_2=a-2b$; 3) $x_1=1$, $x_2=\frac{a-b}{a+b}$.

Ответы. **1. А.** 1) $x^2-2x-3=0$; 3) $x^2+9x+20=0$.

Б. 1) $x^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})x-2\sqrt{3}=0$; 2) $x^2+3(b-a)x+2a^2-5ab+2b^2=0$.

§ 3. ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Квадратные уравнения можно решать и графическим способом. Решим графически уравнение $ax^2+bx+c=0$. Оно равносильно уравнению $ax^2=-(bx+c)$. Построим графики функций $y=ax^2$ и $y=-bx-c$ в одной системе координат (рис. 45). В точках x_1 и x_2 значения обеих функций равны. Следовательно, x_1 и x_2 являются корнями уравнения $ax^2=-(bx+c)$ и равносильного ему уравнения $ax^2+bx+c=0$.

2. Если парабола и прямая касаются, то квадратное уравнение имеет два равных корня.

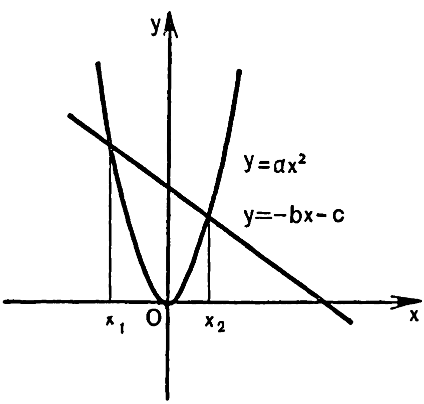


Рис. 45

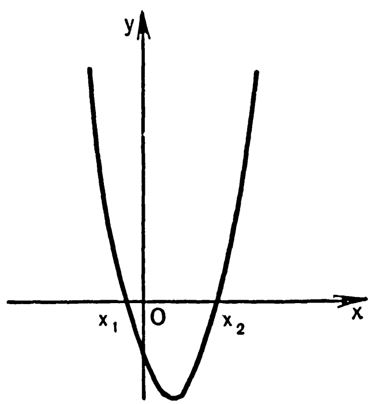


Рис. 46

3. Если же парабола и прямая не пересекаются и не касаются, то квадратное уравнение не имеет корней.

4. Уравнение $ax^2+bx+c=0$ можно решить иначе, построив параболу $y=ax^2+bx+c$ и найдя точки ее пересечения с осью Ox, если $D \geqslant 0$ (рис. 46).

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Решить графически уравнение:

1) $2x^2+6x-5=0$; 2) $x^2+2x+5=0$; 3) $9x^2+6x+1=0$.

Решение. 1) При графическом способе решения квадратного уравнения часто бывает целесообразно записать его в виде приведенного уравнения. Данное уравнение примет вид:

$$x^2+3x-2{,}5=0.$$

Представим это уравнение в виде $x^2=-3x+2{,}5$. Построим в одной и той же системе координат графики функций $y=x^2$ и $y=-3x+2{,}5$ (рис. 47). Найдем абсциссы точек пересечения параболы $y=x^2$ и прямой $y=-3x+2{,}5$. Приближенные значения корней: $-3{,}7$ и $0{,}6$.

2) Уравнение $x^2+2x+5=0$ представим в виде $x^2=-2x-5$. Построим в одной и той же системе координат графики функций $y=x^2$ и $y=-2x-5$ (рис. 48). Из рисунка видно, что графики функций $y=x^2$ и $y=-2x-5$ не пересекаются. Следовательно, уравнение $x^2+2x+5=0$ не имеет решений.

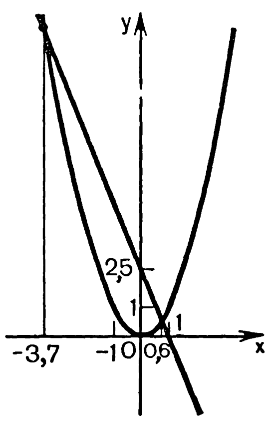


Рис. 47

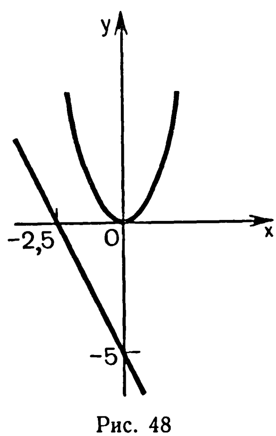


Рис. 48

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Решите уравнения сначала графически, а затем аналитически.

А. 1) $x^2-1=0$; 2) $x^2+1=0$; 3) $2x^2-8=0$; 4) $x^2-x=0$.

Б. 1) $x^2+3x-4=0$; 2) $x^2-2x-3=0$; 3) $12x^2=6x-1$; 4) $3x^2+12x+10=0$; 5) $7+3x-4x^2=0$; 6) $(x+1)^2=9$.

§ 4. УРАВНЕНИЕ СО МНОГИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Уравнение с двумя переменными x и y имеет вид $f(x, y)=\varphi(x, y)$, где f и φ — выражения с переменными x и y.

2. Решением уравнения с двумя (тремя и т. д.) переменными называют множество упорядоченных пар (троек и т. д.) значений переменных, обращающих это уравнение в верное равенство.

3. Графиком уравнения с двумя переменными называется множество точек, координаты которых служат решениями этого уравнения. Например, график уравнения $ax+by+c=0$ представляет собой прямую, график уравнения $y=ax^2+bx+c$ — параболу, график уравнения $xy=k$ $(k\neq 0)$ — гиперболу.

Графиком уравнения $x^2+y^2=r^2$, где x и y — переменные, r — положительное число, является окружность с центром в начале координат и радиусом, равным r.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Является ли решением уравнения $x^2-y=-2$ пара значений переменных:

А. 1) $x=1$, $y=3$; 2) $x=0$, $y=0$; 3) $x=-2$; $y=2$; 4) $x=-1$, $y=-3$?

2. Найдите два каких-либо решения уравнения:

А. 1) $x-3y=1$; 2) $x(1-y)=15$; 3) $(x-1)(y-2)=0$; 4) $(x^2+1)y=0$.

3. Докажите, что уравнение:

Б. 1) $(x+5)^2+(y-3)^2=-1$ не имеет решения;
2) $(x-7)^2+(y+3)^2=0$ имеет единственное решение.

4. Выясните, что представляет собой график уравнения, и постройте этот график:

В. 1) $(x-y)(x+y)=0$; 2) $(x-3)(y+1)=0$.

5. Постройте график уравнения:

А. 1) $x^2+y^2=16$; 2) $x^2+(-y)^2=9$; 3) $x^2+y^2=0$.

Б. 1) $x^2+y^2=-1$; 2) $x^2+y^2=6\frac{1}{4}$; 3) $x^2+y^2=6$.

6. В. Напишите уравнение окружности с центром в начале координат, если известно, что она проходит через точку:
1) $A(5; 12)$; 2) $B(-1; -2)$.

7. Принадлежат ли окружности $x^2+y^2=144$ точки:

А. 1) $A(6;\ 10)$; 2) $C(0;\ -12)$?

Б. 1) $A(-8;\ 4\sqrt{5})$; 2) $C(4\sqrt{5};\ -8)$?

§ 5. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Если ставится задача найти множество общих решений двух или нескольких уравнений с двумя (или более) переменными, то говорят, что надо решить систему уравнений.

Систему двух уравнений с двумя переменными будем записывать так:

$$\begin{cases} f_1(x, y)=y_1(x, y), \\ f_2(x, y)=y_2(x, y). \end{cases}$$

2. Число переменных может, вообще говоря, не равняться числу уравнений.

3. Решить систему — значит найти все ее решения.

4. Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет ни одного решения.

5. Система называется определенной, если она имеет конечное число решений, и неопределенной, если она имеет бесконечное множество решений.

6. Две системы называются равносильными, если они имеют одно и то же множество решений.

7. Графическое решение системы уравнений с двумя переменными сводится к отысканию координат общих точек графиков уравнений.

8. Как известно, прямые на плоскости могут пересекаться в одной точке, быть параллельными или совпадать. Соответственно этому система линейных уравнений с двумя переменными может: а) иметь единственное решение; б) не иметь решений; в) иметь бесконечное множество решений.

9. Не решая системы линейных уравнений, можно определить число ее решений по коэффициентам при соответствующих переменных. Пусть дана система

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

Если $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, т. е. коэффициенты при x и y не пропорциональны, то система имеет единственное решение. Это решение графически иллюстрируется как точка пересечения двух прямых (рис. 49).

Если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$, то система решений не имеет. В этом случае

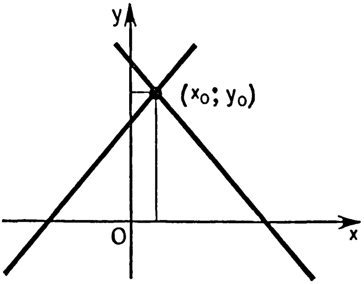


Рис. 49

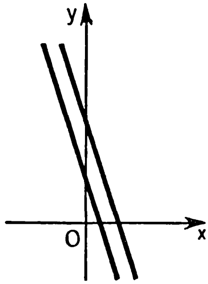


Рис. 50

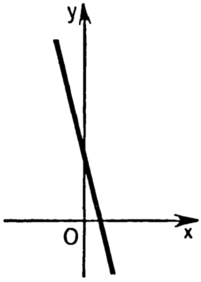


Рис. 51

прямые, являющиеся графиками уравнений системы, параллельны и не совпадают (рис. 50).

Если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесконечное множество решений. В этом случае прямые совпадают друг с другом (рис. 51).

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Решить графическим способом систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2x+3y=-4, \\ 3x+8y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 9x-15y=21, \\ 6x-10y=14; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=3, \\ 2x+2y=4. \end{cases}$

Решение. 1) Каждое уравнение системы

$$\begin{cases} 2x+3y=-4, \\ 3x+8y=1 \end{cases}$$

является линейной функцией. Графиком линейной функции является прямая. Для построения графика линейной функции достаточно найти две точки графика и провести через них прямую.

Построим график линейной функции $3y+2x=-4$. Пусть $y=0$, тогда $3\cdot 0+2x=-4$, т. е. $x=-2$. Пусть $x=0$, тогда $3y+2\cdot 0=-4$, т. е. $y=-\frac{4}{3}$. Через две точки с координатами

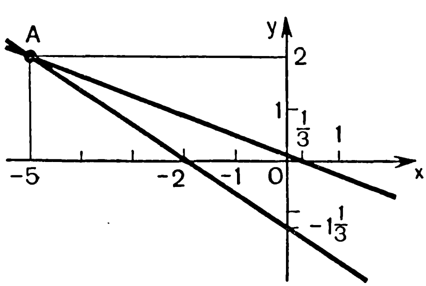


Рис. 52

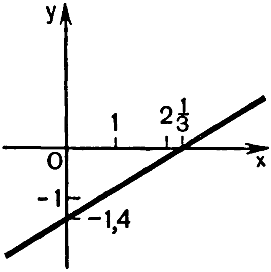


Рис. 53

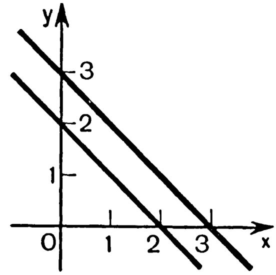


Рис. 54

$(-2;\ 0)$ и $\left(0;\ -\frac{4}{3}\right)$ проведем прямую (рис. 52).

Построим график линейной функции $3x+8y=1$. Пусть $x=0$, тогда $3\cdot 0+8y=1$, т. е. $y=\frac{1}{8}$. Если $y=0$, то $3x+8\cdot 0=1$, т. е. $x=\frac{1}{3}$. Через точки с координатами $\left(0;\ \frac{1}{8}\right)$ и $\left(\frac{1}{3};\ 0\right)$ проведем прямую (рис. 52).

Оба графика пересекаются в точке $A\ (-5;\ 2)$. Следовательно, система имеет единственное решение: $x=-5$, $y=2$.

2) Каждое из уравнений данной системы

$$\begin{cases} 9x-15y=21, \\ 6x-10y=14 \end{cases} \qquad (1)$$

является линейной функцией.

Графики этих функций построены на рисунке 53 — прямые совпадают. Каждую их точку можно рассматривать как общую точку обеих прямых. Это означает, что данная система уравнений имеет бесконечное множество решений. Решением является любая пара чисел вида $\left(\frac{5\alpha+7}{3};\ \alpha\right)$, где $\alpha\in \boldsymbol{R}$.

3) Графики системы уравнений

$$\begin{cases} x+y=3, \\ 2x+2y=4 \end{cases}$$

параллельны и не совпадают (рис. 54). Система не имеет ни одного решения.

2. Решить систему уравнений способом подстановки:

1) $\begin{cases} 2x+3y=-4, \\ 3x+8y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=-2, \\ x^2+y^2=100. \end{cases}$

Решение. При решении способом подстановки сначала из какого-нибудь уравнения выражают одну переменную через другую. Полученное выражение подставляют в другое уравнение, в результате чего приходят к уравнению с одной переменной. Решают это уравнение. Затем находят соответствующее значение второй переменной.

1) Выразим из первого уравнения $2x+3y=-4$ данной системы y через x (можно наоборот), получим:

$$y=\frac{-4-2x}{3}=-\frac{4+2x}{3}.$$

Подставив во второе уравнение данной системы вместо y выражение $-\frac{4+2x}{3}$, получим систему

$$\begin{cases} 2x+3y=-4, \\ 3x-8\cdot\frac{4+2x}{3}=1. \end{cases}$$

Данная и полученная системы равносильны.

В последней системе второе уравнение содержит только одну переменную. Решим это уравнение:

$$3x-8\cdot\frac{4+2x}{3}=1,\ 9x-32-16x=3,\ x=-5.$$

Соответствующее значение y найдем, подставив вместо x число -5 в выражение $y=-\frac{4+2x}{3}$, откуда $y=2$.

Пара $(-5;\ 2)$ — решение системы.

2) Выразив из первого уравнения данной системы x через переменную y, получим $x=-y-2$. Подставим во второе уравнение данной системы вместо переменной x выражение $-y-2$, имеем:

$$\begin{cases} x=-y-2, \\ (-y-2)^2+y^2=100. \end{cases} \qquad (2)$$

Из уравнения $(-y-2)^2+y^2=100$ найдем, что $y_1=-8$, $y_2=6$. Поэтому данная система имеет два решения:

а) $\begin{cases} x_1=-y-2, \\ y_1=-8; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=6, \\ y_1=-8. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_2=-y-2, \\ y_2=6; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-8, \\ y_2=6. \end{cases}$

3. Решить систему уравнений способом сложения:

1) $\begin{cases} 2x+11y=15, \\ 10x-11y=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x-7y=-12, \\ 6x+3y=-18. \end{cases}$

Р е ш е н и е. При решении систем этим способом, как и при решении способом подстановки, мы переходим от данной системы к другой, равносильной ей системе, в которой одно из уравнений содержит только одну переменную.

1) Дана система

$$\begin{cases} 2x+11y=15, \\ 10x-11y=9. \end{cases} \qquad (1)$$

В уравнениях системы (1) коэффициенты при y — противоположные числа. Сложив почленно левые и правые части уравнений, получим уравнение с одной переменной:

$$2x+11y+(10x-11y)=15+9, \text{ или } 12x=24, \ x=2.$$

Заменим одно из уравнений системы (1), например первое, уравнением $x=2$. Получим систему

$$\begin{cases} x=2, \\ 10x-11y=9. \end{cases} \qquad (2)$$

Решим систему (2). Подставив значение $x=2$ в уравнение $10x-11y=9$, получим уравнение с одной переменной y: $20-11y=9$, $y=1$.

Пара (2; 1) — решение системы (2). Она является также решением системы (1), так как системы (1) и (2) равносильны.

2) Почленное сложение уравнений системы

$$\begin{cases} 4x-7y=-12, \\ 6x+3y=-18 \end{cases} \qquad (1)$$

не приводит к исключению одной из переменных. Но если умножить все члены первого уравнения системы (1) на -3, а второго уравнения на 2, то коэффициенты при x в полученных уравнениях будут противоположными числами:

$$\begin{cases} -12x+21y=36, \\ 12x+6y=-36. \end{cases} \qquad (2)$$

Почленное сложение уравнений системы (2) приводит к уравнению с одной переменной: $27y=0$. Из этого уравнения находим, что $y=0$. Получили

$$\begin{cases} y=0, \\ 4x-7y=-12. \end{cases} \qquad (3)$$

Решением системы (3), а следовательно, и системы (1) является пара чисел $(-3; 0)$.

4. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2-y^2=24, \\ x-y=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=12; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{10}{2x+3y}+\dfrac{15}{4x-y}=8, \\ \dfrac{15}{2x+3y}-\dfrac{9}{4x-y}=0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3, \\ x+y-\sqrt{xy}=3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy(x+y)=30, \\ x^3+y^3=35; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ x^3+y^3=35. \end{cases}$

Решение. При решении систем, предложенных в этом пункте, лучше всего применять искусственные приемы, рекомендуемые в курсе алгебры.

1) Дана система уравнений

$$\begin{cases} x^2-y^2=24, \\ x-y=4. \end{cases} \qquad (1)$$

Разделив первое уравнение системы (1) на второе уравнение, получим уравнение первой степени $x+y=6$, которое со вторым уравнением системы (1) образует новую систему:

$$\begin{cases} x+y=6, \\ x-y=4. \end{cases} \qquad (2)$$

Решим эту систему: $x=5$, $y=1$. Исходная система (1) имеет то же решение.

2) Дана система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=12. \end{cases} \qquad (1)$$

Умножим второе уравнение системы (1) на 2, результат сначала сложим с первым уравнением, а затем вычтем из него. Получим:

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=49, \\ x^2-2xy+y^2=1; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+y)^2=49, \\ (x-y)^2=1, \end{cases}$$

откуда $x+y=\pm 7$ и $x-y=\pm 1$.

Поэтому решения данной системы получатся из решений следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} x+y=7, \\ x-y=1; \end{cases} \begin{cases} x+y=7, \\ x-y=-1; \end{cases} \begin{cases} x+y=-7, \\ x-y=1; \end{cases} \begin{cases} x+y=-7, \\ x-y=-1. \end{cases}$$

Решая эти системы уравнений, получим:

$x_1=4$, $y_1=3$; $x_2=3$, $y_2=4$; $x_3=-3$, $y_3=-4$; $x_4=-4$, $y_4=-3$.

3) Дана система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{10}{2x+3y}+\dfrac{15}{4x-y}=8, \\ \dfrac{15}{2x+3y}-\dfrac{9}{4x-y}=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Положим $A=\frac{1}{2x+3y}$, $B=\frac{1}{4x-y}$. Тогда придем к системе уравнений:

$$\begin{cases} 10A+15B=8, \\ 15A-9B=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 10A+15B=8, \\ 5A-3B=0. \end{cases} \qquad (2)$$

Умножим второе уравнение системы (2) на -2 и сложим с первым уравнением, получим $21B=8$, $B=\frac{8}{21}$. Тогда $A=\frac{8}{35}$. Следовательно, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x+3y}=\dfrac{8}{35}, \\ \dfrac{1}{4x-y}=\dfrac{8}{21}, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} 16x+24y=35, \\ 32x-8y=21. \end{cases} \qquad (3)$$

Умножим второе уравнение системы (3) на 3 и сложим с первым уравнением, получим $112x=98$, $x=\frac{7}{8}$, $y=\frac{7}{8}$.

4) Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3, \\ x+y-\sqrt{xy}=3. \end{cases} \qquad (1)$$

Преобразуем второе уравнение системы (1):

$x+y-\sqrt{xy}=3$, $x+y+2\sqrt{xy}-3\sqrt{xy}=3$, $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-3\sqrt{xy}=3$, но $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3$. Следовательно, $9-3\sqrt{xy}=3$, или $\sqrt{xy}=2$. Таким образом, получили равносильную систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3, \\ \sqrt{xy}=2. \end{cases} \qquad (2)$$

Для решения этой системы воспользуемся искусственным приемом, основанным на теореме Виета. Составим квадратное уравнение, корнями которого были бы $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$: $m^2-3m+2=0$, $m_1=2$ и $m_2=1$, или $\sqrt{x}=2$, $x=4$, $y=1$; $\sqrt{x}=1$, $x=1$, $y=4$.

Итак, $x_1=4$, $y_1=1$; $x_2=1$, $y_2=4$.

5) Решим систему уравнений

$$\begin{cases} xy(x+y)=30, \\ x^3+y^3=35. \end{cases} \qquad (1)$$

Умножим первое уравнение системы на 3 и сложим почленно со вторым уравнением:

$$x^3+3xy(x+y)+y^3=125. \qquad (2)$$

Левая часть уравнения (2) представляет собой $(x+y)^3$.

$$(x+y)^3=5^3. \qquad (3)$$

Решая уравнение (3), получим $x+y=5$. Это уравнение первой степени с первым уравнением системы (1) определяет новую систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy(x+y)=30. \end{cases} \qquad (4)$$

Так как $x+y=5$, то второе уравнение системы (4) принимает вид $xy\cdot 5=30$, или $xy=6$. Полученное уравнение вместе с первым уравнением системы (4) определяет новую систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6. \end{cases}$$

Решив ее, получим $x_1=2$, $y_1=3$; $x_2=3$, $y_2=2$.

6) Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ x^3+y^3=35. \end{cases} \qquad (1)$$

Левую часть второго уравнения системы (1) разложим на множители:

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=35. \qquad (2)$$

Так как $x^2-xy+y^2=7$, то уравнение (2) примет вид $(x+y)\times$ $\times 7=35$, или $x+y=5$. Получили уравнение первой степени $x+y=5$, которое с первым уравнением системы (1) определяет новую систему:

$$\begin{cases} x+y=5, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases} \qquad (3)$$

Систему уравнений (3) решим способом подстановки: $x_1=2$, $y_1=3$; $x_2=3$, $y_2=2$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Решите графическим способом систему уравнений:

А. 1) $\begin{cases} 4x-y=0, \\ x-y=-6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x+3y=-6, \\ 2x-5y=10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x+6y=2, \\ 2x+4y=5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x+4y=6, \\ x+y=0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4x-6y=10, \\ 6x-9y=15. \end{cases}$

2. Решите систему уравнений способом подстановки:

А. 1) $\begin{cases} y=x-5, \\ x+y=37; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-3y=16, \\ x+2y=1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x-3y=-3, \\ x+3y=21; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y=14, \\ x=8+y. \end{cases}$

Б. 1) $\begin{cases} \frac{4x}{3}+\frac{3y}{4}=18, \\ \frac{7x}{3}-\frac{5y}{8}=16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x+y}{3}=2y-5, \\ 3y-\frac{y-x}{5}=16; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{1-3y}{3}-\frac{1-2x}{2}=\frac{5}{6}, \\ \frac{x}{2}+\frac{2y}{3}=4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{y-1}{4}-2=\frac{x+1}{3}; \\ \frac{x+3}{4}+4=\frac{y+1}{3}. \end{cases}$

В. 1) $\begin{cases} x^2+xy-y^2=11, \\ x-2y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+xy=9+3y, \\ 3x+2y=-1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2+3xy=-1, \\ x+2y=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+2y=4, \\ x^2+xy=y-5; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x+2y=1, \\ x^2-3xy-2y^2=2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2-y^2=5, \\ xy=6. \end{cases}$

3. Решите систему уравнений способом сложения:

А. 1) $\begin{cases} y-2x-1=0, \\ 7x-y=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x-3y=13, \\ x-2y=5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=6, \\ 3x-5y=2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y-x=20, \\ 2x-15y+1=0. \end{cases}$

Б. 1) $\begin{cases} 3(x-5)-1=6-2x, \\ 3(x-y)-7y+4=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6(x+y)-y+1=0, \\ 7(y+4)-(y+2)=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2(3x-2y)+1=7x, \\ 12(x+y)-15=7x+12y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3(x+y)-7=12x+y, \\ 6(y-2x)-1+45x=0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2-y^2=7, \\ x^2+y^2=25; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2+2y^2=228, \\ 3x^2-2y^2=172. \end{cases}$

4. Решите систему уравнений:

А. 1) $\begin{cases} xy+3x-4y=12, \\ xy+2x-2y=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-3xy+4y=0, \\ x+3xy-3x=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+3x-4y=20, \\ x^2-2x+y=-5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y^2+3x-y=1, \\ y^2+6x-2y=1. \end{cases}$

Б. 1) $\begin{cases} \dfrac{2}{x+y}+\dfrac{9}{2x+y}=2, \\ \dfrac{4}{x+y}=\dfrac{12}{2x+y}-1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y-1}+\dfrac{2}{3x+2y-3}=2, \\ \dfrac{3}{x+y-1}+\dfrac{4}{3x+2y-3}=5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=100, \\ x(y+6)=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (x+y)(x-y)=0, \\ 2x-y=1. \end{cases}$

В. 1) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{3}{2}, \\ x+y+xy=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+4y+2\sqrt{xy}=12, \\ x+4y-2\sqrt{xy}=4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy-\sqrt{x^2+y^2}=7, \\ xy+\sqrt{x^2+y^2}=17; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5, \\ x+y-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=32, \\ x^2+y^2-3x-3y=4; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+y+xy=11, \\ x^2y+xy^2=30; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x+y^2=7, \\ xy^2=12; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2+y^2=2{,}5xy, \\ x-y=0{,}25xy. \end{cases}$

Ответы. **1. А.** 1) (2; 8); 2) (0; —2); 3) нет решений; 4) (—6; 6). **2. А.** 1) (21; 16); 2) (5; —2); 3) (6; 5); 4) (11; 3). **Б.** 1) (9; 8); 2) (10; 5); 3) (4; 3); 4) (5; 17). **В.** 1) (—3; —2), (3; 1); 2) (3; —5), (5; —8); 3) (—2; 1), (2; —1); 4) (—2; 3), (—3; 3,5); 5) $\left(1\frac{1}{4}; -\frac{1}{8}\right)$, (—1; 1); 6) (—3; —2), (3; 2). **3. А.** 1) (2; 5); 2) (1; —2); 3) (4; 2); 4) $\left(-\frac{301}{17}; \frac{39}{17}\right)$. **Б.** 1) (4,4; 1,72); 2) $\left(3\frac{4}{9}; -4\frac{1}{3}\right)$; 3) (3; —0,5); 4) $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$; 5) (—4; —3), (—4; 3), (4; —3), (4; 3); 6) (—10; 8), (10; —8),

$(-10; -8)$, $(10; 8)$. **4. А.** 1) $(-3; -3)$, $(4; 0{,}5)$; 2) $\left(\frac{4}{9}; -\frac{1}{3}\right)$, $(1; -2)$; 3) $(0; -5)$, $(1; -4)$; 4) $\left(-\frac{1}{3}; -1\right)$, $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.
Б. 1) $(2; 2)$; 2) $(1; 1)$; 3) $(0; -10)$, $(0; 10)$, $(-8; -6)$, $(8; -6)$; 4) $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, $(1; 1)$. **В.** 1) $(4; 1)$, $\left(-9; \frac{9}{4}\right)$; 2) $(4; 1)$; 3) $(\pm 3; \pm 4)$ или $(\pm 4; \pm 3)$; 4) $(2; 2)$; 5) $(3; 4)$, $(4; 3)$; 6) $(5; 1)$, $(1; 5)$, $(2; 3)$, $(3; 2)$; 7) $(4; \sqrt{3})$, $(4; -\sqrt{3})$, $(3; 2)$, $(3; -2)$; 8) $(0; 0)$, $(4; 2)$, $(-2; -4)$.

Контрольные вопросы

1. Какое уравнение называется квадратным?
2. Можно ли назвать квадратным уравнение: а) $ax^2+c=0$; б) $ax^2+x=0$; в) $ax^2=0$?
3. Напишите формулы решения полных квадратных уравнений. Целесообразно ли по этим формулам решать неполные квадратные уравнения?
4. Что такое дискриминант?
5. Не решая уравнения, установите по его дискриминанту, сколько корней оно имеет: а) $3x^2-14x+16=0$; б) $8x^2-4x+0{,}5=0$; в) $x^2-10x+34=0$.
6. Какое уравнение называется биквадратным?
7. Сформулируйте теорему Виета и обратную ей теорему. Докажите теорему Виета.
8. Используя теорему Виета, определите знаки корней уравнения: а) $x^2+7x+1=0$; б) $x^2-7x+1=0$; в) $5x^2+17x+16=0$.
9. Составьте квадратное уравнение по его корням: а) $x_1=3$, $x_2=10$; б) $x_1=-7$, $x_2=-4$; в) $x_1=2-\sqrt{3}$, $x_2=2+\sqrt{3}$.
10. В уравнении $x^2+8x-k=0$ найдите значение k, если $x_1=3x_2$.
11. В уравнении $2x^2+kx+25=0$ найдите значение коэффициента k, если $2x_1=x_2$.
12. Один из корней уравнения $5x^2+7x-c=0$ равен -4. Найдите значение c и другой корень.
13. Дайте определение квадратного трехчлена. Разложите на множители трехчлен вида ax^2+bx+c.
14. Используя разложение квадратного трехчлена на множители, сократите дробь: а) $\frac{x-5}{3x^2-13x-10}$; б) $\frac{-2x^2+7x-3}{2x-1}$.
15. С помощью введения вспомогательной переменной решите уравнение: а) $x^2+6x+\sqrt{x^2+6x}=20$; б) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$.
16. Какие два способа существуют для графического решения квадратного уравнения вида $ax^2+bx+c=0$?

ГЛАВА XI

§ 1. НЕРАВЕНСТВА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. При сравнении двух действительных чисел x и y возможны три случая: 1) $x=y$ (x равно y); 2) $x>y$ (x больше y); 3) $x<y$ (x меньше y). Число x равно числу y, если разность $x-y$ равна нулю; число x больше числа y, если разность $x-y$ — положительное число (например, $6>2$, так как $6-2=4>0$); число x меньше числа y, если разность $x-y$ — отрицательное число (например, $6<10$, так как $6-10=-4<0$).

2. Запись $x\geqslant y$ ($y\leqslant x$) означает, что либо $x>y$, либо $x=y$, и читается так: «x больше или равно y» или «x не меньше y».

3. Запись, в которой два числа или два выражения, содержащие переменные, соединены знаком $>$, $<$, $\geqslant$ или $\leqslant$, называется неравенством.

4. Неравенства, составленные с помощью знаков $>$ или $<$, называются строгими; неравенства, составленные с помощью знаков $\leqslant$ или $\geqslant$, — нестрогими.

5. Два неравенства вида $a>b$ и $c>d$ называются неравенствами одинакового смысла, а вида $a>b$, $c<d$ — неравенствами противоположного смысла. Например, $5>2$ и $-3>-6$ — неравенства одинакового смысла, а неравенства $5>3$ и $6<10$ являются неравенствами противоположного смысла.

6. Вместо двух неравенств $x<a$, $a<y$ употребляется запись $x<a<y$. Такое неравенство называется двойным.

7. Неравенства, содержащие только числа, называются числовыми неравенствами.

8. Если неравенство представляет собой истинное высказывание, то оно называется верным.

9. Если неравенство содержит буквенные выражения, то оно является верным лишь при определенных значениях входящих в него переменных. Например, неравенство $(a+b)^2\geqslant 0$ верно при любых значениях a и b, так как квадрат любого числа есть число неотрицательное; неравенство $x^2>0$ верно при любых значениях x, кроме нуля.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Верно ли неравенство:

А. 1) $0 \leqslant 2$; 2) $3 \leqslant 3$; 3) $3 \leqslant 4$; 4) $6 \geqslant 6$; 5) $25 \leqslant 20$; 6) $7 \geqslant 8$?

2. Найдите наименьшее целое число x, удовлетворяющее неравенству:

А. 1) $x \geqslant -4$; 2) $x \geqslant 5$; 3) $x > 3$; 4) $x > -4$; 5) $x \geqslant 3{,}5$.

3. Найдите наибольшее целое число x, удовлетворяющее неравенству:

А. 1) $x \leqslant -3$; 2) $x \leqslant 3$; 3) $x < 4$; 4) $x < -5$; 5) $x \leqslant -0{,}4$.

Б. 1) $\frac{x}{3} \leqslant 1$; 2) $\frac{x}{3} \leqslant -2$; 3) $\frac{3}{7} \geqslant \frac{x}{7}$; 4) $\frac{2}{3} \geqslant \frac{x}{15}$.

§ 2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НЕРАВЕНСТВ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Если $a > b$, то $b < a$.

2. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (свойство транзитивности).

3. Если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство, т. е. если $a > b$, то $a + c > b + c$.

4. Если из одной части верного неравенства перенести в другую какое-либо слагаемое, изменив его знак на противоположный, то получится верное неравенство, т. е. если $a + b > c$, то $a - c > -b$.

5. Если обе части верного неравенства умножить на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство. Например, если $a > b$, то $5a > 5b$.

6. Если обе части верного неравенства умножить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится верное неравенство. Например, если $a > b$, то $a \cdot (-1) < b \cdot (-1)$, т. е. $-a < -b$.

7. Так как деление можно заменить умножением на число, обратное делителю, то аналогичные правила можно применить и к делению. Например, если $a > b$, то $\frac{1}{3}a > \frac{1}{3}b$; $-\frac{1}{5}a < -\frac{1}{5}b$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Сравнить числа $\frac{1}{3}$ и 0,33.

Решение. Рассмотрим способ сравнения дробей, основанный на свойствах неравенств.

Вычислим разность дробей:

$$\frac{1}{3} - 0{,}33 = \frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{100-99}{300} = \frac{1}{300}.$$

Так как разность чисел $\frac{1}{3}$ и 0,33 положительна, то $\frac{1}{3}$ больше 0,33, т. е. верно неравенство $\frac{1}{3} > 0{,}33$.

2. Доказать, что если $4a-2b>3a-b$, то $a>b$.

Доказательство. Рассмотрим разность левой и правой частей данного неравенства.

$4a-2b-(3a-b)=a-b>0$, следовательно, $a>b$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Пусть $a<b$. Сравните числа:

А. 1) $a+x$ и $b+x$; 2) $a-5$ и $b-5$;
3) $a-a^2$ и $b-b^2$; 4) $a+x^2$ и $b+x^2$.

Б. 1) $-2(a+4)$ и $-2(b+4)$; 2) $\frac{2}{3}(a-5{,}2)$ и $\frac{2}{3}(b-5{,}2)$.

2. Умножьте обе части данного неравенства на указанное число:

А. 1) $3{,}25<4$ на 3; 2) $3{,}4>2{,}3$ на 4; 3) $2a>1$ на 0,5; 4) $-3<2$ на 2; 5) $-3<2$ на -2; 6) $-13<-7{,}5$ на -3.

Б. 1) $1\frac{2}{3}>\frac{5}{6}$ на -12; 2) $-2\frac{1}{3}<-1\frac{2}{3}$ на -6; 3) $-4a<-3$ на $-0{,}25$;4) $3x>-y$ на x^2+3.

3. Докажите, что:

В. 1) если $x(x+2)<(x-2)(x+3)$, то $x<-6$;
2) если $x(x+6)>(x+1)(x+4)$, то $x>4$;
3) если $(x-3)^2<x(x-5)$, то $x>9$;
4) если $x(x+3)<(x+2)^2$, то $x>-4$.

4. Разделите обе части данного неравенства на указанное число:

А. 1) $-2<3$ на 3; 2) $-25>-30$ на -5; 3) $-3{,}9<2{,}7$ на -3; 4) $-20<-12$ на -4.

Б. 1) $3x<9a-15b$ на 3; 2) $-5x>10a-5b$ на -5; 3) $-\frac{2x}{3}<-\frac{1}{4}$ на $-\frac{2}{3}$; 4) $-0{,}75x>\frac{1}{3}$ на $-0{,}75$.

В. 1) $a^3+2a<-2a^2-4$ на a^2+2; 2) $a^3+a<2a^2+2$ на a^2+1.

§ 3. ДЕЙСТВИЯ С НЕРАВЕНСТВАМИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Неравенства одинакового смысла можно почленно складывать. Например,

$$+\begin{array}{c} a>b \\ c>d \\ \hline a+c>b+d \end{array} \quad \text{или} \quad +\begin{array}{c} a<m \\ b<n \\ \hline a+b<n+m \end{array}$$

2. Неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать, оставляя знак того неравенства, из которого производится вычитание. Например,

$$
\begin{array}{r}
-\begin{array}{r} a>b \\ c<d \end{array} \\
\hline
a-c>b-d
\end{array}
$$

3. Неравенства одинакового смысла с положительными членами можно почленно умножать. Например, если $a>b>0$ и $c>d>0$, то $ac>bd$.

4. Обе части неравенства с положительными членами можно возводить в одну и ту же натуральную степень. Например, если $a>b$, то $a^k>b^k$, где $a>0$, $b>0$, $k\in \mathbf{N}$.

Верно и обратное утверждение: если $a^k>b^k$, $a>0$, $b>0$, $k\in \mathbf{N}$, то $a>b$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Выполнить сложение неравенств:

1) $5>-8$ и $8>5$; 2) $-8<2$ и $3<5$; 3) $7>3$ и $-4>-9$; 4) $x^2>a+1$ и $2x>a-5$.

Решение.

1) $$+\begin{array}{r} 5>-8 \\ 8>5 \\ \hline \end{array}$$
$5+8>-8+5$, $13>-3$.

2) $$+\begin{array}{r} -8<2 \\ 3<5 \\ \hline \end{array}$$
$-8+3<2+5$, $-5<7$.

3) $$+\begin{array}{r} 7>3 \\ -4>-9 \\ \hline \end{array}$$
$7-4>3-9$, $3>-6$.

4) $$+\begin{array}{r} x^2>a+1 \\ 2x>a-5 \\ \hline \end{array}$$
$x^2+2x>2a+1-5$, $x^2+2x>2a-4$.

2. Выполнить умножение неравенств:

1) $14>6$ и $2>1$; 2) $12<13$ и $3<4$.

Решение.

1) $$\times\begin{array}{r} 14>6 \\ 2>1 \\ \hline \end{array}$$
$14\cdot2>6\cdot1$, $28>6$.

2) $$\times\begin{array}{r} 12<13 \\ 3<4 \\ \hline \end{array}$$
$12\cdot3<13\cdot4$, $36<52$.

3. Доказать, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри треугольника, до его вершин больше полупериметра этого треугольника.

Пусть x, y, z — расстояния от внутренней точки M до вершин треугольника ABC (рис. 55).

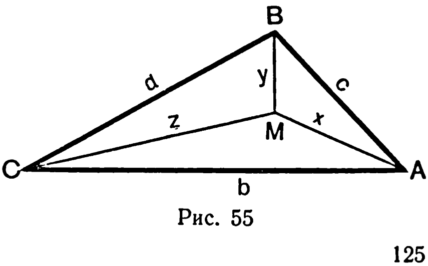


Рис. 55

Из получившихся трех треугольников AMB, BMC и AMC по теореме о сумме длин двух сторон треугольника имеем:

$$x+y>c,\ x+z>b,\ z+y>a.$$

Складывая эти неравенства, получаем:

$$2x+2y+2z>a+b+c, \text{ или } x+y+z>\frac{a+b+c}{2}.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Выполните сложение неравенств:

А. 1) $2<5$ и $-7<-3$; 2) $-2>-4$ и $3>-2$; 3) $-5<-3$ и $-7<-4$.

Б. 1) $3a^2<x+1$ и $2a-a^2<x^2-1$; 2) $3x+y<2a+1$ и $3y-2x<$ $<14-2a$;

3) $3x^2+2y>4a-2$ и $5y-2x^2>8+3a$.

В. 1) $2<3^2$ и $2^2<3^3$; 2) $2^2\cdot3^2>5$ и $2^2>2$.

2. Выполните умножение неравенств:

А. 1) $2<x$ и $3<y$; 2) $x>1$ и $y>5$; 3) $0{,}7>0{,}6$ и $3{,}2>2{,}3$.

Б. 1) $a+1>a$ и $a>5$; 2) $b<b+2$ и $3<b$.

В. 1) $2<3^2$ и $2^2<3^2$; 2) $2^2\cdot3^2>5^2$ и $2^2>2$;

3) $4^2>5$ и $\frac{1}{4^2}>\frac{1}{25}$; 4) $3<7$ и $\frac{1}{81}<\frac{1}{49}$.

3. В. Стороны треугольника меньше соответственно 73 см, 1 м 15 см и 1 м 11 см. Докажите, что его периметр меньше 3 м.

4. В. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри прямоугольника, до его вершин больше полупериметра этого прямоугольника.

5. В. Куплены 4 общие тетради и 8 блокнотов. Цена тетради меньше 45 к., а блокнота меньше 40 к. Покажите, что стоимость всей покупки меньше 5 р.

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕРАВЕНСТВ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Некоторые приемы доказательства неравенств.

1. Использование определения понятий «больше» и «меньше» (т. е. рассмотрение разности между левой и правой частями неравенства).

Пример. Доказать, что $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$, если $a\geqslant0$, $b\geqslant0$.

Решение. Рассмотрим разность

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqslant0.$$

Следовательно, $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.

Это неравенство означает, что среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического, причем равенство достигается только в том случае, когда $a=b$.

2. Использование известных неравенств.

Пример. Доказать, что $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$, если $a>0$, $b>0$.

Решение. Так как числа $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ положительны, то их среднее арифметическое не меньше среднего геометрического, т. е.

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}, \text{ или } \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2.$$

Итак, сумма двух взаимно обратных положительных чисел не меньше 2.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Доказательство неравенств с использованием определения понятия неравенства.

1. Доказать неравенство $a^2+b^2+c^2+3\geqslant 2(a+b+c)$.

Доказательство. Рассмотрим разность между левой и правой частями неравенства:

$$\begin{gathered} a^2+b^2+c^2+3-2(a+b+c)= \\ =a^2+b^2+c^2+1+1+1-2a-2b-2c= \\ =(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2. \end{gathered}$$

Выражение $(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\geqslant 0$, так как сумма неотрицательных чисел есть число неотрицательное. Следовательно,

$$a^2+b^2+c^2+3\geqslant 2(a+b+c).$$

2. Доказать, что при любых значениях x и y верно неравенство

$$5x^2+4xy+y^2+2x>-5. \qquad (1)$$

Доказательство. Неравенство (1) равносильно

$$5x^2+4xy+y^2+2x+5>0;$$

$$(4x^2+4xy+y^2)+(x^2+2x+1)+4=(2x+y)^2+(x+1)^2+4>0. \qquad (2)$$

Полученное неравенство (2) верное, так как $(2x+y)^2\geqslant 0$, $(x+1)^2\geqslant 0$ и $4>0$.

Доказательство неравенств путем преобразования очевидного неравенства к виду доказываемого неравенства.

3. Доказать, что если a, b, c — целые положительные числа, то $ab+bc+ac\leqslant 3abc$.

Доказательство. При заданном условии задачи неравенства $ab\leqslant abc$, $bc\leqslant abc$, $ac\leqslant abc$ очевидны. Сложив их почленно, получим $ab+bc+ac\leqslant 3abc$, что и требовалось доказать.

Доказательство неравенств при помощи зависимости между средним арифметическим и средним геометрическим двух неотрицательных чисел.

4. а) Доказать неравенство

$$a+b+c\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac},$$

если a, b, c — неотрицательные числа.

$$a+b\geqslant2\sqrt{ab};\ b+c\geqslant2\sqrt{bc};\ a+c\geqslant2\sqrt{ac}.$$

Сложим эти неравенства:

$$2a+2b+2c\geqslant2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac}.$$

Сократив обе части неравенства на 2, получим неравенство

$$a+b+c\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}.$$

б) Доказать, что

$$(a+b)(b+c)(a+c)\geqslant8abc,$$

если a, b, c — неотрицательные числа.

Доказательство. Имеем $a+b\geqslant2\sqrt{ba}$; $b+c\geqslant2\sqrt{bc}$; $a+c\geqslant2\sqrt{ac}$. Перемножив эти неравенства почленно, получим неравенство

$$(a+b)(b+c)(a+c)\geqslant8abc.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Докажите, что при любом значении a верно неравенство:

А. 1) $3(a+1)+a-4(2+a)<0$; 2) $(a-2)^2-a(a-4)>0$;

3) $(7a-1)(7a+1)<49a^2$; 4) $a^2+15a+56>a(a+15)$.

Б. 1) $\frac{(1+a)^2}{2}\geqslant2a$; 2) $a+\frac{1}{a}\geqslant2$ при $a>0$;

3) $4a^2+1\geqslant4a$; 4) $a^2+2a\geqslant-1$.

В. $1+2a^4\geqslant a^2+2a^3$.

2. Докажите неравенство:

1) $a^4+b^4\geqslant a^3b+ab^3$, где $a\geqslant0$, $b\geqslant0$;

2) $a^4+2a^3b+2ab^3+b^4\geqslant6a^2b^2$, где a и b одного знака;

3) $\frac{a^3+b^3}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$, где a и b — неотрицательные числа;

4) $\frac{2a}{1+a^2}\leqslant1$, где a — неотрицательное число;

5) $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+ac+bc$, где a, b, c — действительные числа;

6) $(a+1)(b+1)(a+c)(b+c)>16abc$, где $a>1$, $b>1$, $c>1$;

7) $x^2+2y^2+2xy+6y+10>0$;

8) $x^2+5y^2+2xy+4y+3>0$.

§ 5. НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ПЕРЕМЕННУЮ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Решение неравенств основано на их свойствах (см. § 2).

2. Если к обеим частям неравенства $f_1(x) > f_2(x)$ прибавить (или вычесть) одну и ту же функцию $\varphi(x)$, область определения которой принадлежит области определения данного неравенства, то получится неравенство, равносильное данному. (Здесь и далее под областью определения неравенства будем понимать пересечение множеств, на которых определена каждая из функций f_1 и f_2, входящих в неравенство.)

3. Любое слагаемое, определенное для всех значений переменной, можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив знак этого слагаемого на противоположный.

4. Если обе части неравенства $f_1(x) > f_2(x)$ умножить (или разделить) на одну и ту же функцию $\varphi(x)$, определенную для всех значений переменной x из области определения данного неравенства, сохраняющую постоянный знак и отличную от нуля, то при $\varphi(x) > 0$ получится неравенство, равносильное данному, а при $\varphi(x) < 0$ равносильным данному является неравенство противоположного смысла.

§ 6. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ И КВАДРАТНЫХ НЕРАВЕНСТВ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Линейным неравенством называется неравенство вида $ax+b>0$ (или $ax+b<0$). Если $a>0$, то неравенство $ax+b>0$ равносильно неравенству $x>-\frac{b}{a}$; если $a<0$, то неравенство $ax+b>0$ равносильно неравенству $x<-\frac{b}{a}$.

2. Квадратным неравенством называется неравенство вида $ax^2+bx+c>0$ (или $ax^2+bx+c<0$), где $a\neq 0$.

3. Решить неравенство, содержащее переменную,— значит найти множество значений переменной, при которых это неравенство является верным. Элементы этого множества называются решениями неравенства.

4. Два неравенства называются равносильными, если множества решений этих неравенств совпадают.

Пусть требуется решить неравенство $ax^2+bx+c>0$. В зависимости от знака дискриминанта $D=b^2-4ac$ могут представиться три случая.

1) Если $D<0$, то график квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ не пересекает ось Ox и лежит выше этой оси при $a>0$ и ниже ее при $a<0$. В первом случае множество решений неравенства есть вся числовая прямая (рис. 56, *а*), а во втором оно является пустым (рис. 56, *б*).

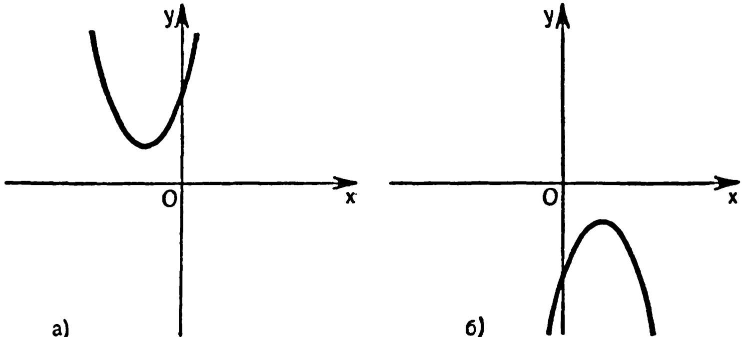


Рис. 56

2) Если $D > 0$, то график квадратного трехчлена пересекает ось Ox в точках x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$, служащих корнями уравнения $ax^2+bx+c=0$. Эти точки разбивают числовую прямую на три промежутка $(-\infty;\ x_1)$, $(x_1;\ x_2)$ и $(x_2;\ +\infty)$. При этом знак квадратного трехчлена совпадает со знаком коэффициента a во всех точках промежутков $(-\infty;\ x_1)$ и $(x_2;\ +\infty)$ и противоположен знаку коэффициента a во всех точках промежутка $(x_1;\ x_2)$ (рис. 57).

3) Если $D=0$, то график квадратного трехчлена касается оси Ox в точке x_1, являющейся единственным корнем уравнения $ax^2+bx+c=0$. Точка x_1 разбивает числовую прямую на два промежутка $(-\infty;\ x_1)$ и $(x_1;\ +\infty)$. Знак квадратного трехчлена совпадает со знаком коэффициента a при всех $x \neq x_1$ (рис. 58).

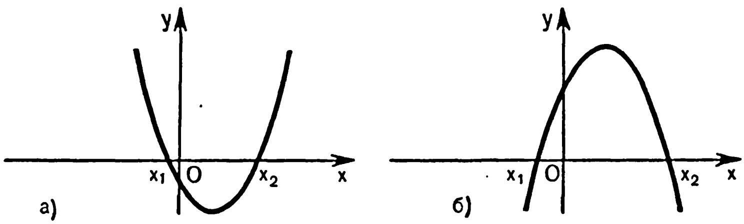


Рис. 57

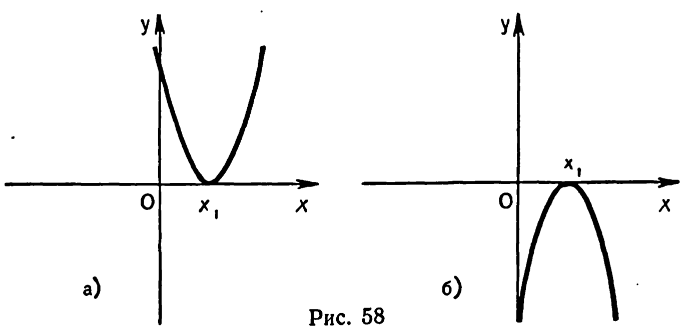


Рис. 58

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Решить неравенство:

1) $16-3x\geqslant 0$; 2) $2x^2-x-1>0$; 3) $x^2+3x+8\geqslant 0$;
4) $-3x^2+10x-3<0$; 5) $4x^2+4x+1>0$.

Решение. 1) Чтобы решить неравенство $16-3x\geqslant 0$, перенесем 16 в правую часть с противоположным знаком, получим $-3x\geqslant -16$. Теперь разделим обе части этого неравенства на отрицательное число -3 и изменим знак неравенства на противоположный: $x\leqslant\frac{16}{3}$.

Таким образом, множеством решений данного неравенства служит промежуток $\left(-\infty;\ \frac{16}{3}\right]$.

2) Рассмотрим функцию $y=2x^2-x-1$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх, так как $a=2>0$.

Решим уравнение $2x^2-x-1=0$. Корни этого уравнения: $x_1=-0{,}5$, $x_2=1$.

Следовательно, данная парабола $y=2x^2-x-1$ пересекает ось Ox в точках с абсциссами $-0{,}5$ и 1.

Изобразив схематически параболу $y=2x^2-x-1$ (рис. 59), найдем, что $y>0$, если $x\in(-\infty;\ -0{,}5)$ и $x\in(1;\ +\infty)$.

Множеством решений неравенства $2x^2-x+1>0$ является объединение промежутков $(-\infty;\ -0{,}5)$ и $(1;\ +\infty)$. Объединение промежутков можно записать с помощью знака $\cup$ следующим образом: $(-\infty;\ -0{,}5)\cup(1;\ +\infty)$.

3) Рассмотрим функцию $y=x^2+3x+8$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх, так как $a=1>0$.

Решим уравнение $x^2+3x+8=0$. $D=9-16=-7<0$, следовательно, это уравнение корней не имеет, поэтому парабола $y=x^2+3x+8$ не имеет общих точек с осью Ox.

Изобразив параболу $y=x^2+3x+8$ схематически (рис. 60), найдем, что $y\geqslant 0$ при любом значении x.

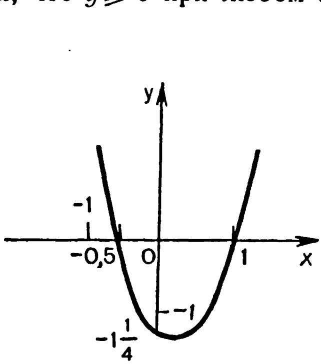


Рис. 59

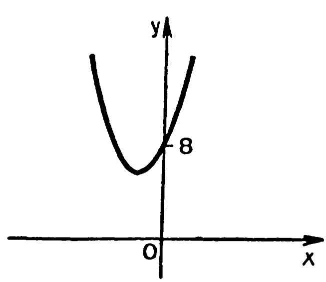


Рис. 60

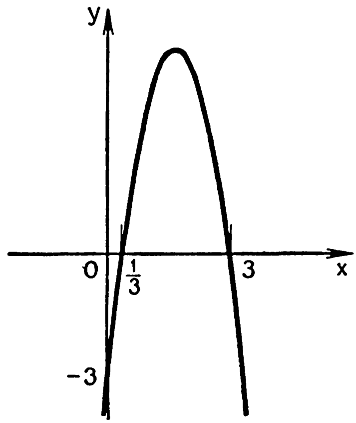


Рис. 61

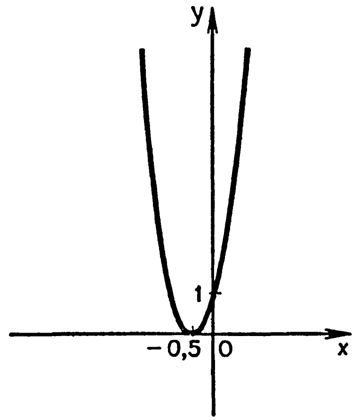


Рис. 62

4) Рассмотрим функцию $y=-3x^2+10x-3$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз, так как $a=-3<0$.

Решим уравнение $-3x^2+10x-3=0$, или $3x^2-10x+3=0$. Корни этого уравнения $x_1=\frac{1}{3}$ и $x_2=3$.

Изобразив схематически параболу $y=-3x^2+10x-3$ (рис. 61), найдем, что $y<0$ в каждом из промежутков: $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right)$, $(3;\ +\infty)$.

5) Рассмотрим функцию $y=4x^2+4x+1$. Графиком данной функции является парабола, ветви которой направлены вверх, так как $a=4>0$. Решим уравнение $4x^2+4x+1=0$. Корень этого уравнения $x=-0{,}5$. Значит, парабола касается оси Ox в точке с абсциссой $-0{,}5$.

Изобразив схематически параболу $y=4x^2+4x+1$ (рис. 62), найдем, что $y>0$ при любом x, не равном $-0{,}5$.

Ответ. $(-\infty;\ -0{,}5)\cup(-0{,}5;\ +\infty)$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Решите неравенство:

А. 1) $x^2-4x>0$; 2) $x^2+4x\geqslant 0$; 3) $x^2-x<0$; 4) $x^2+4x\leqslant 0$; 5) $x^2-4x-5>0$; 6) $x^2-4x-5\leqslant 0$; 7) $x^2-4x+6>0$; 8) $x^2-4x+6\leqslant 0$; 9) $x^2+4x+4\leqslant 0$; 10) $x^2+4x+4\geqslant 0$.

Б. 1) $-x^2+x-2<0$; 2) $x-x^2-2>0$; 3) $3x-x^2-4<0$; 4) $-x^2+3x-4>0$; 5) $3x^2-6x+8\leqslant 0$; 6) $-2x^2+4x-5\leqslant 0$; 7) $4x-2x^2-5\geqslant 0$; 8) $\frac{x^2}{10}+2>\frac{7x}{10}$; 9) $\frac{x^2}{3}-\frac{2x}{3}>\frac{3x-10}{4}$.

В. 1) $x(x+1)<2(1-2x-x^2)$; 2) $x(x+1)>2(1-2x-x^2)$;

3) $x^2+2<3x-\frac{1}{8}x^2$; 4) $x^2+2\geqslant 3x-\frac{1}{8}x^2$;

5) $6x^2+1<5x-\frac{1}{4}x^2$; 6) $6x^2+1>5x-\frac{x^2}{4}$;

7) $2x(x-1)<3(x+1)$; 8) $2x(x-1)>3(x+1)$;

9) $x^2+9<0$; 10) $4x^2+12x+9\leqslant 0$;

11) $(x-5)^2>37-(x-10)^2$.

2. В. Одна сторона прямоугольника на 7 м больше другой. Какой может быть эта сторона, если площадь прямоугольника меньше 60 м^2?

3. В. Длина прямоугольника на 5 м больше ширины. Какую ширину должен иметь прямоугольник, чтобы его площадь была больше 36 м^2?

Ответы. **1. А.** 1) $(-\infty;\ 0)\cup(4;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -4]\cup[0;\ +\infty)$; 3) $(0;\ 1)$; 4) $[-4;\ 0]$; 5) $(-\infty;\ -1)\cup(5;\ +\infty)$; 6) $[-1;\ 5]$; 7) $(-\infty;\ +\infty)$; 8) нет решений; 9) -2; 10) $(-\infty;\ +\infty)$. **Б.** 1) $(-\infty;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ +\infty)$; 4) нет решений; 5) нет решений; 6) нет решений; 7) нет решений; 8) $(-\infty;\ +\infty)$; 9) $(-\infty;\ +\infty)$. **В.** 1) $\left(-2;\ \frac{1}{3}\right)$; 3) нет решений; 4) $\frac{4}{3}$; 5) нет решений; 6) 0,4; 7) $(-0{,}5;\ 3)$; 9) нет решений; 10) $-1{,}5$. **2. В.** Больше 7 м, но меньше 12 м. **3. В.** Больше 4 м.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение неравенства.
2. Какие виды неравенств вы знаете?
3. Истинно ли высказывание: а) $11\leqslant 12$; б) $11\leqslant 11$; в) $x\geqslant y$?
4. Сформулируйте свойства неравенств.
5. Докажите, что если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.
6. Докажите, что если $a>b$ и $x>0$, то $ax>bx$.
7. Сформулируйте правила действий с неравенствами.
8. Что значит решить неравенство, содержащее переменную?
9. Какие неравенства называются равносильными?
10. Сформулируйте теоремы о равносильности неравенств.
11. При каких значениях a уравнение $ax^2-6x-1=0$ имеет два различных действительных корня?

ГЛАВА XII

§ 1. СИСТЕМЫ И СОВОКУПНОСТИ НЕРАВЕНСТВ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Если ставится задача найти множество общих решений двух или нескольких неравенств, то говорят, что надо решить систему неравенств.

2. Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство, называется решением системы неравенств. Множество решений системы неравенств есть пересечение множеств решений входящих в нее неравенств.

3. Неравенства, входящие в систему, объединяются фигурной скобкой. Иногда системы неравенств записывают в виде двойного неравенства. Например, систему $\begin{cases} 3x-1>2, \\ 3x-1<8 \end{cases}$ можно записать так: $2<3x-1<8$.

4. Решение системы линейных неравенств с одной переменной сводится к следующим случаям. Будем считать, что $a<b$:

$$\begin{cases} x>a, \\ x>b; \end{cases} (1) \quad \begin{cases} x>a, \\ x<b; \end{cases} (2) \quad \begin{cases} x<a, \\ x<b; \end{cases} (3) \quad \begin{cases} x<a, \\ x>b. \end{cases} (4)$$

В случае (1) решением системы служит промежуток $(b; +\infty)$ (рис. 63, *а*); в случае (2) — промежуток $(a; b)$ (рис. 63, *б*); в случае (3) — промежуток $(-\infty; a)$ (рис. 63, *в*); в случае (4) система не имеет решений (рис. 63, *г*).

5. Две системы неравенств называются равносильными, если они имеют общее множество решений, удовлетворяющих этим

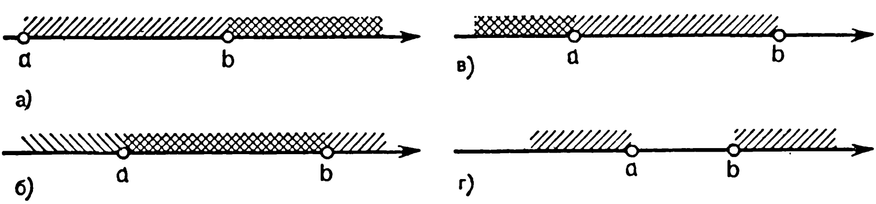


Рис. 63

неравенствам. Равносильность систем неравенств обозначается так же, как и равносильность систем уравнений, т. е. с помощью знака $\Leftrightarrow$.

6. Если ставится задача найти множество всех таких значений переменной, каждое из которых является решением хотя бы одного из данных неравенств, то говорят, что надо решить совокупность неравенств.

7. Значение переменной, при котором хотя бы одно из неравенств совокупности обращается в верное числовое неравенство, называется решением совокупности неравенства. Множество решений совокупности неравенств есть объединение множеств решений входящих в нее неравенств.

Неравенства, образующие совокупность, объединяют квадратной скобкой. Например, запись $\left[\begin{array}{l}3x-5<1,\\2x+3>4\end{array}\right.$ означает, что неравенства образуют совокупность.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases}1-5x>12,\\6x-18>0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x-6>0,\\18-5x\leqslant 0,\\1{,}7x-13{,}6<0;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x<0,\\21x^2+39x-6<0;\end{cases}$

4) $\begin{cases}x^2+x-6<0,\\-x^2+2x+3\leqslant 0;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}x^2+x-6>0,\\x^2+x+6>0.\end{cases}$

Решение.

1) Имеем $\begin{cases}-5x>12-1,\\6x>18;\end{cases}$ $\begin{cases}x<-\frac{11}{5},\\x>3.\end{cases}$

На координатной прямой изобразим множество чисел, удовлетворяющих последней системе неравенств (рис. 64). Из рисунка видно, что эта система, а значит, и данная система не имеют решений.

2) Заменим каждое неравенство данной системы равносильным ему неравенством, получим систему

$$\begin{cases}3x>6,\\-5x\leqslant -18,\\1{,}7x<13{,}6;\end{cases}\qquad\begin{cases}x>2,\\x\geqslant 3{,}6,\\x<8.\end{cases}$$

Рис. 64

Рис. 65

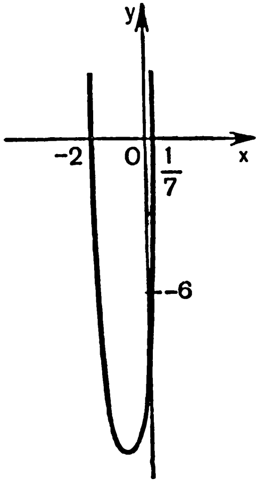


Рис. 66

Изобразим на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих последней системе неравенств (рис. 65).

Множество решений есть промежуток [3,6; 8).

3) Рассмотрим функцию $y=21x^2+39x-6$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх, так как $a=21>0$. Решим уравнение $21x^2+39x-6=0$. Имеем $D=39^2+4\cdot6\cdot21=2025>0$;

$$x=\frac{-39\pm45}{42},\ x_1=-2,\ x_2=\frac{1}{7}.$$

Следовательно, парабола пересекает ось Ox в точках с абсциссами -2 и $\frac{1}{7}$. Изобразив схематически эту параболу (рис. 66), найдем, что $y=21x^2+39x-6<0$, если $x\in\left(-2;\ \frac{1}{7}\right)$.

Теперь данная система неравенств примет вид:

$$\begin{cases} x<0, \\ -2<x<\frac{1}{7}. \end{cases}$$

Изобразим на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих этой системе неравенств (рис. 67). Множество решений этой системы есть промежуток $(-2;\ 0)$.

4) Умножим обе части второго неравенства данной системы на -1, получим систему

$$\begin{cases} x^2+x-6<0, \\ x^2-2x-3\geqslant0. \end{cases} \qquad (1)$$

Рассмотрим функцию $y=x^2+x-6$. Корни функции: $x_1=-3$, $x_2=2$.

Изображая схематически параболу $y=x^2+x-6$ (рис. 68), найдем, что $y=x^2+x-6<0$, если $x\in(-3;\ 2)$.

Рассмотрим функцию $y=x^2-2x-3$. Корни функции: $x_1=-1$, $x_2=3$.

Изображая схематически параболу $y=x^2-2x-3$ (рис. 69), найдем, что $y=x^2-2x-3\geqslant0$, если $x\in(-\infty;\ -1]$ и $x\in[3;\ +\infty)$.

Изобразим на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих данной системе неравенств (рис. 70).

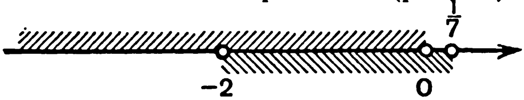


Рис. 67

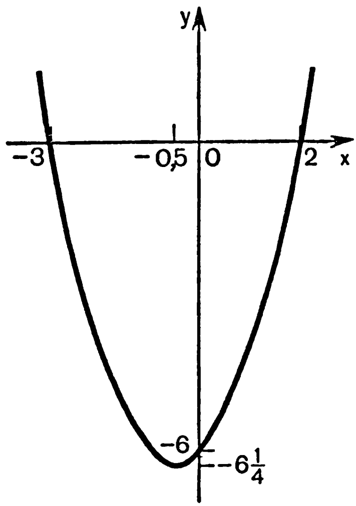


Рис. 68

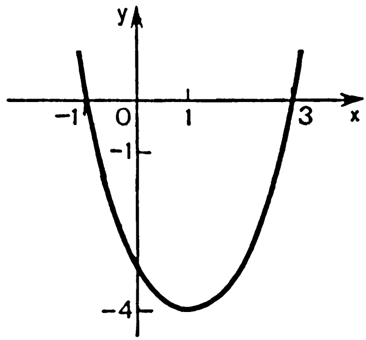


Рис. 69

Рис. 70

Таким образом, множество решений системы (1) есть промежуток $(-3;\ -1]$.

5) Дана система

$$\begin{cases} x^2+x-6>0, \\ x^2+x+6>0. \end{cases} \quad (1)$$

Неравенство $x^2+x-6>0$ справедливо, если $x \in (-\infty;\ -3)$ и $x \in (2;\ \infty)$ (см. решение примера 4).

Найдем корни функции $y=x^2+x+6$: $D=1-24=-23<0$. Так как $D<0$, то уравнение $x^2+x+6=0$ корней не имеет. Это означает, что парабола $y=x^2+x+6$ не имеет общих точек с осью Ox.

Изображая схематически параболу $y=x^2+x+6$ (рис. 71), найдем, что $x^2+x+6>0$ при любом значении x.

Изобразим на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих системе неравенств (1) (рис. 72).

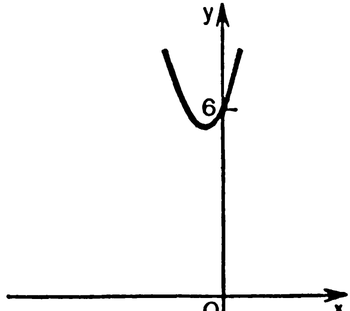


Рис. 71

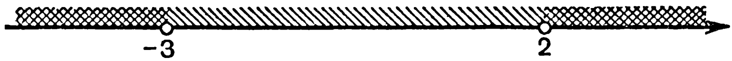


Рис. 72

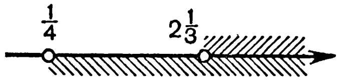


Рис. 73

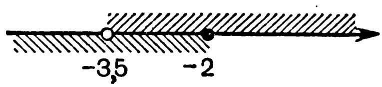


Рис. 74

Таким образом, множество решений системы (1) есть $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

2. Решить совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} 0,2\,(2x-3)<x-2, \\ 5x-7>x-6. \end{array}\right.$$

Решение. Преобразуем каждое из неравенств, получим равносильную совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} x>\frac{7}{3}, \\ x>\frac{1}{4}. \end{array}\right.$$

Для первого неравенства множеством решений служит промежуток $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$, а для второго — промежуток $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$. Изобразим на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих неравенствам $x>\frac{7}{3}$ и $x>\frac{1}{4}$ (рис. 73).

Находим, что объединением этих множеств, т. е. решением данной совокупности неравенств, является промежуток $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

3. Решить двойное неравенство:

1) $-1<3+2x\leqslant 4$; 2) $1\leqslant -2x-3<4$.

Решение. 1) Запишем данное неравенство в виде системы неравенств

$$\begin{cases} 3+2x\leqslant 4, \\ 3+2x>-1. \end{cases}$$

Решив ее, найдем, что оба неравенства верны при $-2<x\leqslant 0,5$.

Примечание. Этот пример можно решить так:

$$-1<3+2x\leqslant 4,$$
$$-1-3<2x\leqslant 4-3,$$
$$-2<x\leqslant 0,5.$$

2) Запишем данное двойное неравенство в виде системы

$$\begin{cases} -2x-3<4, \\ -2x-3\geqslant 1. \end{cases}$$

Первое неравенство верно при $x>-3{,}5$, второе — при $x\leqslant -2$. Используя координатную прямую, находим, что решением системы служат значения x, удовлетворяющие условию $-3{,}5<x\leqslant -2$ (рис. 74).

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Решите систему неравенств:

А. 1) $\begin{cases} 3x-18>0, \\ 4x-12>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x-14\geqslant 0, \\ 2x\geqslant 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3-2x\geqslant 0, \\ 4x+8<0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x+4\leqslant 0, \\ 4-3x>0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x+5\leqslant 0, \\ 9x+18\leqslant 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 10-2x\geqslant 0, \\ 4x-8\geqslant 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x+3\leqslant 2x+1, \\ 3x-2\leqslant 4x+2; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 4x+2\geqslant 5x+3, \\ 2-3x<7-2x. \end{cases}$

Б. 1) $\begin{cases} \frac{3-2x}{15}\leqslant\frac{x-2}{3}+\frac{x}{5}, \\ \frac{1-3x}{12}\geqslant\frac{5x-1}{3}-\frac{7x}{4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{5x+7}{6}-\frac{3x}{4}<\frac{11x-7}{12}, \\ \frac{1-3x}{2}-\frac{1-4x}{3}\geqslant\frac{x}{6}-1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2(4x-1)-3x>5(x-2)+7, \\ \frac{x-2}{3}\leqslant\frac{x-3}{2}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x-4<8x+6, \\ 2x-1>5x-4, \\ 11x-9\leqslant 15x+3. \end{cases}$

В. 1) $\begin{cases} 21x^2+39x-6<0, \\ x>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x>0, \\ 4x^2+5x-6>0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-144>0, \\ x-3<0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+5x<0, \\ x>-7; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2+4x-5>0, \\ x^2-2x-8<0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} (x^2+1)(x^2+3)(x^2-2)\geqslant 0, \\ x<3. \end{cases}$

2. Решите двойное неравенство:

Б. 1) $-3<2x-1<3$; 2) $-12<5-x<17$; 3) $2<6-2y<5$; 4) $-1<5y+4<19$; 5) $-1\leqslant 15x+14<44$; 6) $-1\leqslant\frac{6-x}{3}\leqslant 1$; 7) $-1{,}2<1-2y<2{,}4$; 8) $-2<\frac{4x-1}{3}\leqslant 0$.

3. Укажите допустимые значения переменной:

А. 1) $\sqrt{2x-4}$; 2) $\sqrt{4-6a}$; 3) $\sqrt{\frac{1+3x}{2}}$; 4) $\sqrt{-3(1-5x)}$.

Б. 1) $\sqrt{3-2x}+\sqrt{1-x}$; 2) $\sqrt{6-x}+\sqrt{3x+9}$; 3) $\sqrt{x^2}-\sqrt{3x-1}$; 4) $\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+3}$; 5) $\sqrt{x}-\sqrt{3x-1}$; 6) $\sqrt{2x+2}-\sqrt{6-4x}$.

В. 1) $\frac{1}{\sqrt{144-9x^2}}$; 2) $\frac{\sqrt{16-24x+9x^2}}{x+2}$; 3) $\frac{\sqrt{x^2-x+42}}{x-11}$;

4) $\frac{x-3}{\sqrt{x+30-x^2}}$; 5) $\sqrt{x^2(x-2)}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{x^2(x-2)}}$.

При решении следующих упражнений использовать теорему Виета, зависимость количества корней квадратного трехчлена от знака дискриминанта и др.

4. В. Установите, для каких значений a корни уравнения

$$x^2-2(a-1)x+a+5=0:$$

1) положительные; 2) отрицательные; 3) имеют разные знаки; 4) совпадают.

5. В. При каких значениях k уравнение $(k-1)x^2-4x+k+2=0$ имеет равные корни?

6. В. Найдите все значения k, при которых уравнение $(k-4)x^2-2(k-3)x+k=0$ имеет положительные корни.

7. В. Найдите все значения k, для которых при всех действительных значениях x выполняется неравенство:

1) $x^2-(2+k)x+4>0$; 2) $(k^2-1)x^2+2(k-1)x+2>0$;

3) $(k^2-1)x^2+2(k-1)x+2<0$; 4) $\frac{x^2-8x+20}{kx^2+2(k+1)x+9k+4}<0$.

Ответы: **1. А.** 1) $(6;\ +\infty)$; 2) $[4;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ -2)$; 8) $(-5;\ -1]$. **Б.** 1) $[1{,}3;\ 2{,}5]$; 2) $(2{,}1;\ 3{,}5]$; 3) $[5;\ +\infty)$; 4) $(-2;\ 1)$. **В.** 1) $\left(0;\ \frac{1}{7}\right)$; 2) $(0{,}75;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ -12)$; 5) $(1;\ 4)$; 6) $(-\infty;\ -\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\ 3)$. **2. Б.** 1) $(-1;\ 2)$; 2) $(-12;\ 17)$; 3) $(0{,}5;\ 2)$; 4) $(-1;\ 3)$; 5) $[-1;\ 2)$; 6) $[3;\ 9]$; 7) $(-0{,}7;\ 1{,}1)$; 8) $\left(-\frac{5}{4};\ \frac{1}{4}\right]$. **3. А.** 1) $[2;\ +\infty)$; 2) $\left(-\infty;\ \frac{2}{3}\right]$; 3) $\left[-\frac{1}{3};\ +\infty\right)$; 4) $\left[\frac{1}{5};\ \infty\right)$. **Б.** 1) $(-\infty;\ 1]$; 2) $[-3;\ 6]$; 3) $\left[\frac{1}{3};\ \infty\right)$; 4) $(-\infty;\ +\infty)$. **В.** 1) $(-4;\ 4)$; 2) $\left[\frac{4}{3};\ +\infty\right)$; 3) $(-\infty;\ -6]\cup\cup[7;\ 11)\cup(11;\ +\infty)$; 4) $(-5;\ 6)$; 5) $x=0$, $[2;\ +\infty)$; 6) $(2;\ +\infty)$. **4. В.** 1) $[4;\ +\infty)$; 2) $(-5;\ -1]$; 3) $(-\infty;\ -5)$; 4) $a=-1$ и $a=4$. **5. В.** $k=-3$ и $k=2$. **6. В.** $(-\infty;\ 0)\cup[4;\ 4{,}5]$. **7. В.** 1) $(-6;\ 2)$; 2) $(-\infty;\ -3)\cup(1;\ +\infty)$; 3) $(-1;\ 1)$; 4) $(0{,}25;\ +\infty)$.

§ 2. НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Неравенство с двумя переменными имеет вид $f(x, y)>\varphi(x, y)$, где $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ — выражения с переменными. Решением неравенства с двумя переменными называется упорядоченная пара чисел $(x_0;\ y_0)$, обращающая данное неравенство в верное числовое неравенство. Решить неравенство — значит найти множество всех его решений.

2. Множество решений неравенства с двумя переменными можно изобразить графически на координатной плоскости. Например, геометрическим изображением множества решений линейного неравенства $ax+by+c\geqslant 0$ является полуплоскость, расположенная над прямой $ax+by+c=0$, и сама эта прямая (рис. 75), а геометрическим изображением множества решений неравенства $x^2+y^2\leqslant r^2$ — круг с центром в начале координат и радиусом r (рис. 76).

3. Если задана система неравенств с двумя переменными

$$\begin{cases} f_1(x, y) > \varphi_1(x, y), \\ f_2(x, y) > \varphi_2(x, y), \end{cases}$$

то решением системы называется упорядоченная пара чисел, удовлетворяющая каждому из неравенств этой системы. Поэтому множество решений системы есть пересечение множеств решений входящих в нее неравенств.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Изобразить множество решений системы неравенств на координатной плоскости:

$$\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 4, \\ 2x+3y\geqslant 0. \end{cases}$$

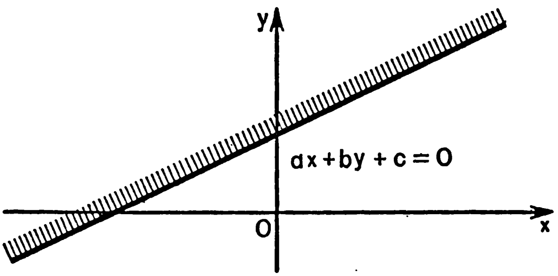


Рис. 75

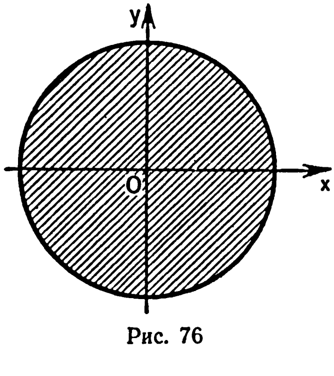


Рис. 76

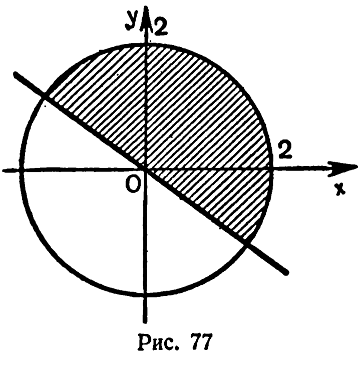


Рис. 77

Решение. Для первого неравенства множество решений есть круг с центром в начале координат и радиусом 2, а для второго — полуплоскость, расположенная над прямой $2x+3y=0$, и сама эта прямая. Множеством решений данной системы служит пересечение указанных множеств, т. е. полукруг (рис. 77).

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Изобразите множество решений линейного неравенства или системы неравенств на координатной плоскости:

А. 1) $x-y+1\geqslant 0$; 2) $x+y-3\leqslant 0$; 3) $x+3y+1\geqslant 0$;
4) $x\geqslant 0$; 5) $y\geqslant 0$.

Б. 1) $y+x^2-2x-2\leqslant 0$; 2) $\begin{cases} x+y\geqslant 0, \\ x-y\leqslant 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x-2y-1\geqslant 0, \\ 3x-2y+3\leqslant 0. \end{cases}$

В. 1) $\begin{cases} x-y+1\geqslant 0, \\ x+y-3\leqslant 0, \\ x+3y+1\geqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y-1\geqslant 0, \\ y-x+4\geqslant 0, \\ 5x+4y-38\leqslant 0, \\ 2x-y+3\geqslant 0, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0. \end{cases}$

Ответы. **А.** 1) Рис. 78; 2) рис. 79; 3) рис. 80; 4) рис. 81; 5) рис. 82. **Б.** 1) Рис. 83; 2) рис. 84; 3) рис. 85; 4) множество решений каждого из неравенств системы геометрически изображается полуплоскостью (рис. 86, *а*, *б*). Границы полуплоскостей — параллельные прямые, пересечение указанных полуплоскостей пусто, следовательно, система несовместна (рис. 87). **В.** 1) Рис. 88; 2) рис. 89.

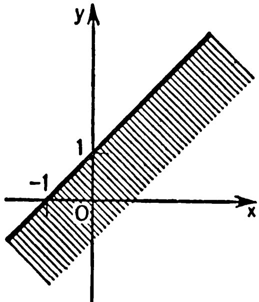


Рис. 78

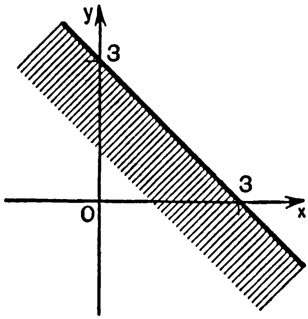


Рис. 79

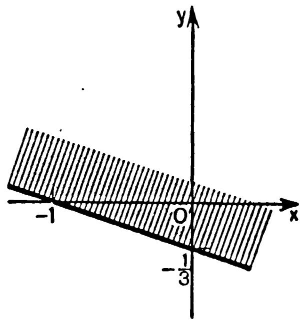


Рис. 80

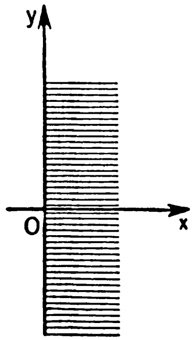


Рис. 81

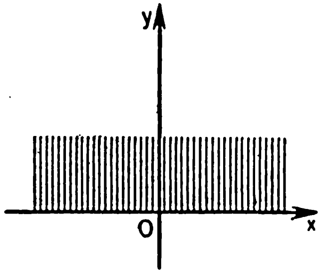


Рис. 82

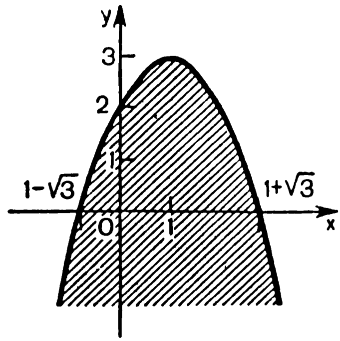


Рис. 83

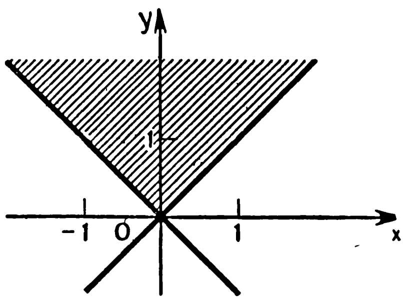


Рис. 84

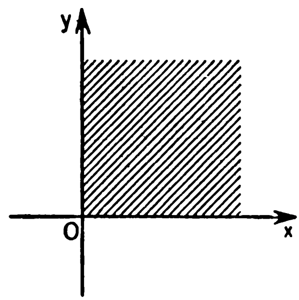


Рис. 85

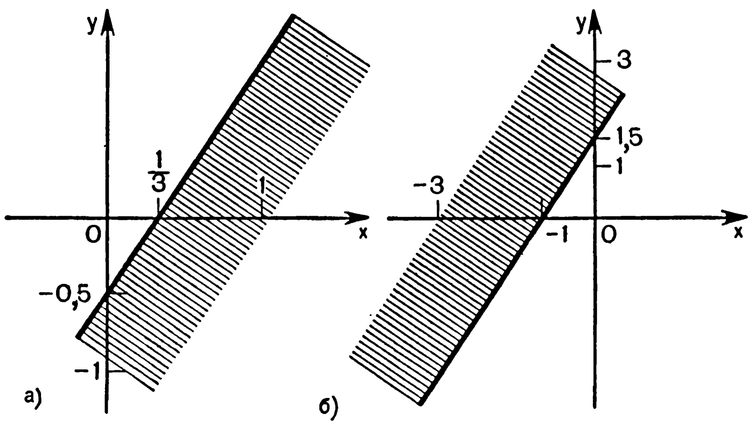


Рис. 86

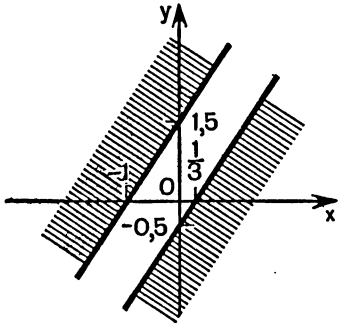


Рис. 87

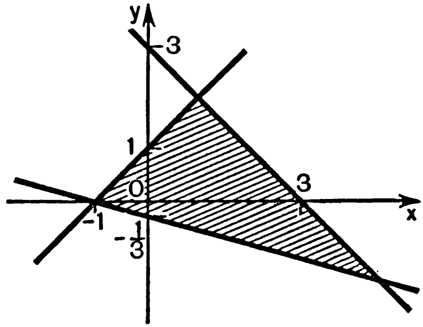


Рис. 88

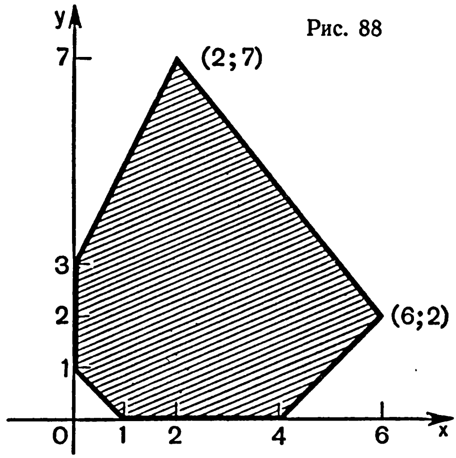


Рис. 89

§ 3. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ ПЕРЕМЕННУЮ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

При решении неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, используется определение модуля:

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & \text{при } f(x)\geqslant 0, \\ -f(x) & \text{при } f(x)<0. \end{cases}$$

Кроме того, иногда бывает полезно пользоваться геометрической интерпретацией модуля числа, согласно которой $|x|$ означает расстояние от точки x числовой прямой до начала отсчета, а $|x-a|$ означает расстояние на числовой прямой между точками x и a.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Решить неравенство:

1) $|x-1|<3$; 2) $|x+1|>2-x$;
3) $|x-2|\geqslant x-2$; 4) $x^2-2|x|-8\geqslant 0$.

Решение. 1) На основании определения модуля данное неравенство запишем в виде системы неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} x-1\geqslant 0, \\ x-1<3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x-1<0, \\ -(x-1)<3. \end{cases}$$

Решая первую систему неравенств, находим, что $1\leqslant x<4$. Решая вторую систему неравенств, находим, что $-2<x<1$. Множество решений данного неравенства $(-2;\ 4)$.

2) Данное неравенство можно заменить двумя системами:

$$\text{а) } \begin{cases} x+1\geqslant 0, \\ x+1>2-x; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x+1<0, \\ -(x+1)>2-x. \end{cases}$$

Решая первую систему, найдем, что $x>0{,}5$. Вторая система решений не имеет. Решением данного неравенства является $(0{,}5;\ +\infty)$.

3) Решим неравенство $|x-2|\geqslant x-2$. (1)

Если $x-2\geqslant 0$, то $|x-2|=x-2$ и неравенство примет вид $x-2\geqslant x-2$. Если $x-2<0$, то $|x-2|=-(x-2)$ и неравенство примет вид $-(x-2)\geqslant x-2$. Таким образом, данное неравенство можно записать в виде совокупности двух систем:

$$\text{а) } \begin{cases} x-2\geqslant 0, \\ x-2\geqslant x-2; \end{cases} \quad \begin{cases} x\geqslant 2, \\ 0\geqslant 0; \end{cases} \quad x\geqslant 2.$$

$$\text{б) } \begin{cases} x-2<0, \\ -(x-2)\geqslant x-2; \end{cases} \quad \begin{cases} x<2, \\ x\leqslant 2; \end{cases} \quad x<2.$$

Решением неравенства является $x\in(-\infty;\ +\infty)$.

4) Пусть $|x|=u$, тогда данное неравенство примет вид $u^2-2u-8\geqslant 0$, решая которое находим, что $u\leqslant -2$ или $u\geqslant 4$ (рис. 90). Неравенство $|x|\leqslant -2$ не имеет решений, решением неравенства $|x|\geqslant 4$ является объединение промежутков $(-\infty;\ -4)\cup(4;\ +\infty)$. Следовательно, данному неравенству удовлетворяют $x\in(-\infty;\ -4)\cup(4;\ +\infty)$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Решите неравенство:

А. 1) $|x-3|\geqslant 2x+1$; 2) $|3x+1|\geqslant 7x-5$;
3) $|x+5|\geqslant 2x-4$.

Б. 1) $|2(x-3)|<9x-5$; 2) $|2(x+1)|\geqslant 3x+3$;
3) $|x|x\geqslant x$.

В. 1) $2x^2-|x|-1\geqslant 0$; 2) $x^2+8|x|+7\geqslant 0$;
3) $x^2-6|x|-7\leqslant 0$.

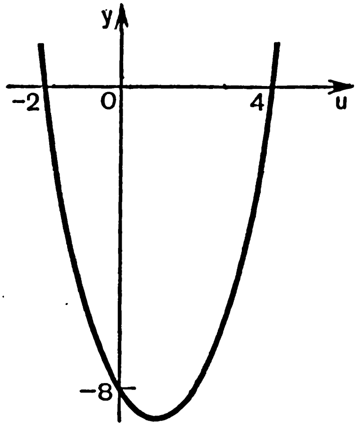


Рис. 90

2. Решите уравнение:

В. 1) $\sqrt{(x+1)^2}=2x-1$;
2) $\sqrt{(1-2x)^2}=1-2x$;
3) $\sqrt{(x-3)^2}=x-3$.

Ответы. 1. А. 1) $\left(-\infty;\ \frac{2}{3}\right]$; 2) $(-\infty;\ 1{,}5]$; 3) $(-\infty;\ 9]$.
Б. 1) $(1;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -1]$; 3) $[-1;\ 0]\cup[1;\ +\infty)$.
В. 1) $(-\infty;\ -1]\cup[1;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ +\infty)$; 3) $[-7;\ 7]$.
2. В. 1) 2; 2) $(-\infty;\ 0{,}5]$; 3) $[3;\ +\infty)$.

§ 4. РЕШЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ МЕТОДОМ ПРОМЕЖУТКОВ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Решение рациональных неравенств вида $\frac{P(x)}{Q(x)}>0$ $\left(\frac{P(x)}{Q(x)}<0\right)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, основано на следующем свойстве непрерывной функции: если непрерывная функция обращается в нуль в точках x_1 и x_2 ($x_1<x_2$) и между этими точками не имеет других корней, то в промежутке $(x_1;\ x_2)$ функция сохраняет знак.

Поэтому для нахождения промежутков знакопостоянства функции $y=f(x)$ поступают так. На координатной прямой отмечают все точки, в которых функция $f(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв. Эти точки разбивают координатную прямую на несколько промежутков, внутри каждого из которых функция $f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль, т. е. сохраняет знак. Чтобы определить этот знак, достаточно найти знак функции в какой-либо точке рассматриваемого промежутка координатной прямой.

Изменение знаков функции $f(x)$ удобно иллюстрировать с помощью волнообразной кривой, которую чертят справа налево. На тех промежутках, где кривая проходит выше координатной прямой, выполняется неравенство $f(x)>0$; на тех же промежутках, где кривая проходит ниже,— неравенство $f(x)<0$.

Решить неравенство:

1) $(x+3)(x+2)x(x-1)>0$;
2) $(x-2)^3(x+1)(x-1)^2(x^2+2x+5)<0$;
3) $\frac{(x-3)^2(x-2)x}{(x+1)^4(x+5)}>0$; 4) $\frac{7x-12-x^2}{2x^2-x-3}<0$; 5) $\left|\frac{x+3}{x-2}\right|\leqslant 2$.

Решение. 1) Многочлен $P(x)=(x+3)(x+2)x(x-1)$ обращается в нуль в точках $x=-3$; $x=-2$, $x=0$, $x=1$. Эти точки разбивают координатную прямую на промежутки $(-\infty;\ -3)$, $(-3;\ -2)$, $(-2;\ 0)$, $(0;\ 1)$ и $(1;\ +\infty)$ (рис. 91), внутри каждого из которых функция $P(x)$ сохраняет свой знак.

Так как в промежутке $(1;\ +\infty)$ все сомножители положительны, то и их произведение положительно, т. е. $P(x)>0$; в промежутке $(0;\ 1)$ последний сомножитель $x-1$ отрицателен, а остальные три положительны, т. е. $P(x)<0$; далее, в промежутке $(-2;\ 0)$ $P(x)>0$, в промежутке $(-3;\ -2)$ $P(x)<0$, наконец, в промежутке $(-\infty;\ -3)$ все четыре сомножителя отрицательны, т. е. $P(x)>0$. В результате получаем ответ: $x<-3$, $-2<x<0$, $x>1$.

2) Трехчлен x^2+2x+5 при всех $x\in R$ принимает положительные значения (так как $D=2^2-4\cdot 5<0$). Поэтому данное неравенство равносильно неравенству $P(x)=(x+1)(x-1)^2(x-2)^3<0$: (располагаем множители в порядке возрастания корней). Получаем следующие промежутки знакопостоянства: $(-\infty;\ -1)$, $(-1;\ 1)$, $(1;\ 2)$ и $(2;\ +\infty)$ (рис. 92).

В промежутке $(2;\ +\infty)$ все три сомножителя положительны, и, значит, $P(x)>0$.

В промежутке $(1;\ 2)$ сомножитель $(x-2)^3$ отрицателен, а остальные два положительны, т. е. $P(x)<0$.

В промежутке $(-1;\ 1)$ знак второго сомножителя $(x-1)^2$ не меняется и $P(x)<0$ по-прежнему.

Наконец, в промежутке $(-\infty;\ -1)$ два сомножителя отрицательны, а один положителен, т. е. $P(x)>0$.

Итак, получаем $x\in(-1;\ 1)\cup(1;\ 2)$.

3) Нанесем на координатную прямую точки $x=-5$, $x=-1$, $x=0$, $x=2$, $x=3$ и исследуем изменение знаков левой части нера-

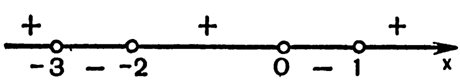


Рис. 91

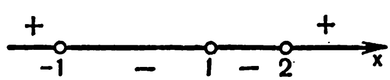


Рис. 92

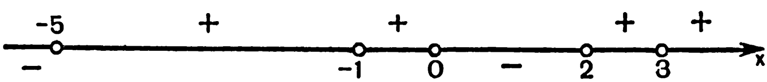


Рис. 93

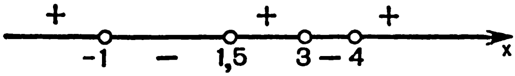


Рис. 94

венства (рис. 93). Решением неравенства служит объединение промежутков $(-5;\ -1)\cup(-1;\ 0)\cup(2;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$.

4) Разложим квадратные трехчлены в числителе и знаменателе на линейные множители:

$$\frac{7x-12-x^2}{2x^2-x-3}<0;\ \frac{(x-4)(3-x)}{(x+1)(2x-3)}<0;\ \frac{(x-3)(x-4)}{(x+1)(2x-3)}>0.$$

Отметив на координатной прямой точки $x=-1$, $x=\frac{3}{2}$, $x=3$ и $x=4$ и исследовав изменение знаков левой части неравенства (рис. 94), получаем ответ: $(-\infty;\ -1)\cup\left(\frac{3}{2};\ 3\right)\cup(4;\ +\infty)$.

5) Данное неравенство равносильно двум системам:

а) $\begin{cases} \frac{x+3}{x-2}\geqslant 0, \\ \frac{x+3}{x-2}\leqslant 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x+3}{x-2}<0, \\ -\frac{x+3}{x-2}\leqslant 2. \end{cases}$

Из первой системы получаем $0\leqslant\frac{x+3}{x-2}\leqslant 2$, из второй $-2\leqslant\frac{x+3}{x-2}<0$. Объединяя полученные результаты, заключаем, что $-2\leqslant\frac{x+3}{x-2}\leqslant 2$.

Итак, данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{x+3}{x-2}\leqslant 2, \\ \frac{x+3}{x-2}\geqslant -2; \end{cases}\qquad \begin{cases} \frac{x-7}{x-2}\geqslant 0, \\ \frac{3x-1}{x-2}\geqslant 0. \end{cases}$$

Решая первое неравенство, находим, что $x<2$ или $x\geqslant 7$; из второго неравенства имеем $x\leqslant\frac{1}{3}$ или $x>2$. Окончательно получаем, что $x\leqslant\frac{1}{3}$ или $x\geqslant 7$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Решите методом интервалов неравенство:

А. 1) $(x-1)(x+2)>0$; 2) $(x-1)(x+2)\geqslant 0$; 3) $x^2-5x\geqslant 0$;

4) $\frac{x-1}{x+2}>0$; 5) $\frac{x-1}{x+2}\geqslant 0$; 6) $\frac{x}{x-5}\geqslant 0$.

Б. 1) $(x^2-1)(x+3)<0$; 2) $(1-x^2)(x+3)>0$;
3) $(x-3)^2(x^2-25)\geqslant 0$; 4) $(x+3)(x^2-9)<0$; 5) $(x+3)(x^2-9)\leqslant 0$;
6) $x^2>3$; 7) $\frac{x^2-x-12}{x-1}>0$; 8) $\frac{x^2-4x-12}{x-2}<0$;
9) $\frac{x^2-4x-12}{x-2}\geqslant 0$; 10) $\left|\frac{x+2}{x-3}\right|>2$; 11) $\left|\frac{x}{x-1}\right|>-2$.

В. 1) $|x^2-2x-8|>5$; 2) $\frac{x-2}{x+2}>\frac{2x-3}{4x-1}$; 3) $\frac{2x^2-4x-6}{4x-11}\geqslant 2$;
4) $(x^2+1)(x^2+x+1)(x+5)^3>0$;
5) $(x+4)^2(x+5)^2(x-6)(x+3)\leqslant 0$.

2. Решите неравенство:

Б. 1) $x^2+x+|x|+1\leqslant 0$; 2) $x^2-4|x|+3>0$; 3) $\frac{2x}{1+x^2}\leqslant 1$.

В. 1) $\sqrt{x}(x+2)>0$; 2) $\sqrt{x}(x-2)<0$; 3) $\sqrt{x}(x-2)\geqslant 0$;
4) $\frac{(2x-3)(4-x)^3\cdot x^2}{(x-6)(x^2+4x+6)}\leqslant 0$; 5) $|2x+5|-|3x-4|\leqslant 2x-4$.

3. Найдите целые значения x, удовлетворяющие системе неравенств:

В. 1) $\begin{cases} \frac{3x^2-5x-1}{x^2+4}<1, \\ \frac{9x-2}{3}>2\frac{1}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x^2-6x+5}{-3x^2+2x-7}>0, \\ x^2<16. \end{cases}$

Ответы: **1. А.** 1) $(-\infty;\ -2)\cup(1;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ 0]\cup[5;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ -2)\cup(1;\ +\infty)$; 5) $(-\infty;\ -2)\cup[1;\ +\infty)$; 6) $(-\infty;\ 0]\cup(5;\ +\infty)$. **Б.** 1) $(-\infty;\ -3)\cup(-1;\ 1)$; 3) $(-\infty;\ -5]\cup[5;\ \infty)$, $x=3$; 4) $(-\infty;\ 3)$, $x\neq -3$; 7) $(-3;\ 1)\cup(4;\ +\infty)$; 9) $[-2;\ 2)\cup[6;\ +\infty)$; 10) $\left(\frac{4}{3};\ 3\right)\cup(3;\ 8)$; 11) любое число, кроме $x=1$. **В.** 1) $(-\infty;\ 1-\sqrt{14})\cup(-1;\ 3)\cup(1+\sqrt{14};\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -2)\cup(0{,}25;\ 1]\cup[4;\ +\infty)$; 3) $[2;\ 2{,}75)\cup[4;\ +\infty)$; 4) $(-5;+\infty)$; 5) $[-3;\ 6]$, $x=-5$ и $x=-4$. **2. Б.** 1) Не имеет решений; 2) $(-\infty;\ -3)\cup(-1;\ 1)\cup(3;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ +\infty)$. **В.** 1) $(0;\ +\infty)$; 2) $(0;\ 2)$; 3) $[2;\ \infty)$, $x=0$; 4) $[1{,}5;\ 4]\cup(6;\ \infty)$, $x=0$; 5) $\left[-5;\ -\frac{5}{3}\right]\cup\left[\frac{13}{3};\ +\infty\right)$. **3. В.** 1) 2, 3; 2) 2, 3.

Контрольные вопросы

1. Что значит решить систему неравенств?
2. Какие системы неравенств называются равносильными?
3. Что значит решить совокупность неравенств?
4. Что является решением неравенства $x^2+y^2\leqslant a^2$?
5. Каково множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $y\geqslant 2x^2$?
6. Что представляет собой на плоскости решение системы неравенств

$$\begin{cases} y\geqslant x, \\ x^2+y^2\leqslant 9? \end{cases}$$

ГЛАВА XIII

§ 1. ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Бесконечной числовой последовательностью называется функция, определенная на множестве натуральных чисел. Числовую последовательность принято обозначать (x_n), где $n \in N$.

2. Пусть числовая последовательность задана формулой $x_n = \frac{1}{2n-1}$. Это означает, что каждому натуральному n соответствует определенный член последовательности (x_n). Придавая n значения 1, 2, 3, ..., получим последовательность (x_n): $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2n-1}, \ldots$.

3. Последовательность (x_n) называется ограниченной, если существуют два числа m и M, такие, что для любого $n \in N$ имеет место неравенство $m \leqslant x_n \leqslant M$. Например, последовательность (x_n): $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ ограничена, так как $0 < x_n \leqslant 1$.

4. Последовательность (x_n) называется возрастающей, если каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего, т. е. если $x_{n+1} > x_n$ для всех натуральных n.

Например, последовательность (x_n): $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots$ возрастающая, так как $x_{n+1} - x_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$, т. е. $x_{n+1} > x_n$.

5. Последовательность (x_n) называется убывающей, если каждый ее член, начиная со второго, меньше предыдущего, т. е. если $x_{n+1} < x_n$ для всех натуральных n.

Например, последовательность (x_n): $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ убывающая, поскольку $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$, т. е. $x_{n+1} < x_n$.

§ 2. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему члену, сложенному с одним и тем же числом, называется арифметической прогрессией. Обозначение: $\div a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$.

2. Из определения арифметической прогрессии следует, что разность между любым ее членом и ему предшествующим равна одному и тому же числу, т. е. $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_k - a_{k-1} = \ldots$. Это число называется разностью арифметической прогрессии и обычно обозначается буквой d.

3. Для того чтобы задать арифметическую прогрессию (a_n), достаточно знать ее первый член a_1 и разность d.

4. Если разность арифметической прогрессии — положительное число, то такая прогрессия является возрастающей; если отрицательное число, то убывающей. Если разность арифметической прогрессии равна нулю, то все ее члены равны между собой и прогрессия является постоянной последовательностью.

5. Характеристическое свойство арифметической прогрессии. Последовательность (a_n) является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда любой ее член, начиная со второго, является средним арифметическим предшествующего и последующего членов, т. е.

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}, \text{ где } n \in N. \qquad (1)$$

6. Формула n-го члена арифметической прогрессии имеет вид:

$$a_n = a_1 + d(n-1). \qquad (2)$$

7. Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии имеет вид:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n. \qquad (3)$$

8. Если в формулу (3) подставить вместо a_n его выражение по формуле (2), то получим соотношение

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n. \qquad (4)$$

9. Из определения разности арифметической прогрессии следует, что $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots$, т. е. сумма членов, равноудаленных от концов прогрессии, есть величина постоянная.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Найти пятнадцатый член арифметической прогрессии:
1) 3; 7; ...; 2) -5; -1; ... .

Решение. 1) Дано: $a_1=3$, $a_2=7$, $n=15$. Найдем разность арифметической прогрессии: $d=a_2-a_1=7-3=4$. По формуле (2)

$$a_{15}=a_1+d(15-1)=3+4\cdot14=59.$$

2) Дано: $a_1=-5$, $a_2=-1$, $n=15$. Найдем разность данной прогрессии: $d=a_2-a_1=-1-(-5)=4$.

$$a_{15}=a_1+d(15-1)=-5+4\cdot14=51.$$

2. Разность арифметической прогрессии равна 4, сумма первых ее семи членов равна 105. Найти первый и седьмой члены этой прогрессии.

Решение. Дано: $d=4$, $S_7=105$.

Подставив заданные значения переменных в формулы $a_n=a_1+d(n-1)$ и $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$, получим $a_7=a_1+4\cdot6$, $105=\frac{(a_1+a_7)\cdot7}{2}$. Составим систему:

$$\begin{cases} a_7-a_1=24, \\ a_7+a_1=30. \end{cases}$$

Сначала сложим почленно оба равенства, а затем вычтем почленно из второго равенства первое. Получим $2a_7=54$, $2a_1=6$, $a_1=3$, $a_7=27$.

3. Найти первый член арифметической прогрессии и количество членов n, если $d=-3$, $a_n=2$ и $S_n=57$.

Решение. Подставив заданные значения из условия задачи в формулы $a_n=a_1+d(n-1)$ и $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2=a_1-3(n-1), \\ 57=\frac{a_1+2}{2}\cdot n; \end{cases} \quad \begin{cases} 2=a_1-3n+3, \\ 114=n(a_1+2). \end{cases}$$

Из первого уравнения системы найдем $a_1=3n-1$. Подставив это выражение вместо a_1 во второе уравнение, получим:

$$3n^2+n-114=0.$$

Решив квадратное уравнение, найдем два значения n: $n_1=-\frac{19}{3}$ и $n_2=6$. Значение $n=-\frac{19}{3}$ не удовлетворяет условию задачи, так как n должно быть натуральным числом.

При $n=6$ находим $a_1=3\cdot6-1=17$.

4. Между числами 17 и 32 вставить пять таких чисел, чтобы они вместе с данными числами составили арифметическую прогрессию.

Решение. Дано: $a_1=17$, $a_7=32$. Задача сводится к определению разности прогрессии по формуле $a_n=a_1+d(n-1)$, $32=17+d\cdot6$, $d=2{,}5$.

Найдем искомые числа и запишем прогрессию: 17; 19,5; 22; 24,5; 27; 29,5; 32.

5. Найти сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=20$.

Решение. Согласно свойству арифметической прогрессии (п. 9) имеем $a_1+a_{20}=a_6+a_{15}=a_9+a_{12}$. Следовательно, $a_1+a_{20}=$ $=\frac{20}{2}=10$. Теперь по формуле (3) находим:

$$S_{20}=\frac{10}{2}\cdot 20=100.$$

6. Последовательность (y_n) задана формулой ее n-го члена: $y_n=2n-5$. Доказать, что (y_n) — арифметическая прогрессия.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся характеристическим свойством арифметической прогрессии. Имеем $y_{n-1}=2(n-1)-5=2n-7$, $y_{n+1}=2(n+1)-5=2n-3$, поэтому

$$\frac{y_{n-1}+y_{n+1}}{2}=\frac{2n-7+2n-3}{2}=2n-5=y_n,$$

т. е. (y_n) — арифметическая прогрессия.

7. Найти арифметическую прогрессию, если $a_1+a_5=24$, $a_2\cdot a_3=60$.

Решение. Согласно условию получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1+a_5=24, \\ a_2a_3=60; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1+a_1+4d=24, \\ (a_1+d)(a_1+2d)=60; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1+2d=12, \\ (a_1+d)\cdot 12=60; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1+2d=12, \\ a_1+d=5; \end{cases} \quad \begin{cases} d+5=12, \\ a_1+d=5; \end{cases} \quad \begin{cases} d=7, \\ a_1=-2. \end{cases}$$

Получили прогрессию -2, 5, 12, ...

8. Найти сумму всех двузначных натуральных чисел.

Решение. Дано: $a_1=10$, $d=1$, $a_n=99$. По формуле (2) найдем номер последнего члена: $99=10+1(n-1)$, т. е. $n=90$.

По формуле (3) найдем сумму всех двузначных чисел:

$$S_{90}=\frac{(10+99)\cdot 90}{2}=4905.$$

9. Решить уравнение $1+7+13+...+x=280$, $x\in N$, и слагаемые являются последовательными членами арифметической прогрессии.

Решение. Левая часть уравнения представляет собой сумму членов арифметической прогрессии, в которой $a_1=1$, $a_n=x$, $d=6$. Найдем n: $a_n=a_1+d(n-1)$, $x=1+6(n+1)$, откуда $n=\frac{x+5}{6}$.

Используя формулу суммы членов арифметической прогрессии, имеем:

$$S_n=\frac{1+x}{2}\cdot\frac{x+5}{6},\quad \frac{(1+x)(x+5)}{12}=280,\ x^2+6x-3355=0,$$

$x_1=55$, $x_2=-61$ (не удовлетворяют уравнению, так как $d>0$). Итак, $x=55$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1) $a=7$, $d=4$, $n=13$. Найдите a_n и S_n;
2) $a=2$, $d=2$, $n=40$. Найдите a_n и S_n;
3) $a=56$, $d=-3$, $n=11$. Найдите a_n и S_n;
4) $a=2$, $a_n=87$, $S_n=801$. Найдите d и n;
5) $a_n=21$, $n=7$, $S_n=105$. Найдите a и d.

Б. 1) Найдите пятнадцатый член и сумму пятнадцати членов прогрессии 2, 5, 8, ...
2) Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если $a_3=25$, $a_{10}=-3$.
3) Найдите сумму десяти членов арифметической прогрессии, если $a_4=10$, $a_7=19$.
4) Сколько нужно взять членов арифметической прогрессии, чтобы сумма их равнялась 54, если $a_4=9$, $a_9=-6$?

В. 1) Числа -100 и -78 являются соответственно седьмым и девятым членами арифметической прогрессии. Найдите пятнадцатый член этой прогрессии и сумму ее первых пятнадцати членов.
2) Четыре числа являются последовательными членами арифметической прогрессии. Сумма первых трех равна -21, а сумма трех последних равна -6. Найдите эти числа.
3) В арифметической прогрессии третий и пятый члены равны соответственно 11 и 19. Найдите сумму первых десяти членов этой прогрессии.
4) Докажите, что если числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ образуют арифметическую прогрессию, то верно равенство:
а) $ab+bc+ac=3ac$; б) $\frac{b}{c}+\frac{b}{a}=2$.
5) Докажите, что если числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$ образуют арифметическую прогрессию, то числа a^2, b^2, c^2 также образуют арифметическую прогрессию.
6) Найдите сумму: $1+2+3+\ldots+18+19+20+19+18+{}+\ldots+3+2+1$.
7) Сумма первого и пятого членов возрастающей арифметической прогрессии равна 14, а произведение второго ее члена на четвертый равно 45. Сколько членов прогрессии надо взять, чтобы в сумме получить 24?
8) Сумма второго и пятого членов арифметической прогрессии равна 18, а произведение второго члена на третий равно

21. Найдите эту прогрессию, если известно, что второй ее член — натуральное число.

Ответы. А. 1) 55; 403; 3) 26; 451; 4) 5; 18; 5) 9; 2. Б. 1) 44; 345; 2) 33; -4; 3) 145; 4) 9 или 4. В. 1) -12; -1335; 2) -12; -7; -2; 3; 3) 210; 6) 400; 7) 4; 8) -1; 3; 7; ... .

§ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число, называется геометрической прогрессией.

2. Из определения геометрической прогрессии следует, что отношение любого ее члена к предшествующему равно одному и тому же числу, т. е. $b_2:b_1=b_3:b_2=...=b_n:b_{n-1}=b_{n+1}:b_n=...$. Это число называется знаменателем геометрической прогрессии и обычно обозначается буквой q.

3. Для того, чтобы задать геометрическую прогрессию (b_n), достаточно знать ее первый член b_1 и знаменатель q. Например, условиями $b_1=4$, $q=-3$ $(q<0)$ задается геометрическая прогрессия 4, -12, 36, -108... . Эта прогрессия не является ни возрастающей, ни убывающей последовательностью.

4. Если $q>0$ $(q\neq 1)$, то прогрессия является монотонной последовательностью. Пусть, например, $b_1=-2$, $q=3$, тогда геометрическая прогрессия -2, -6, -18, ... есть монотонно убывающая последовательность.

Если $q=1$, то все члены прогрессии равны между собой. В этом случае прогрессия является постоянной последовательностью.

5. Характеристическое свойство геометрической прогрессии. Последовательность (b_n) является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, начиная со второго, есть среднее геометрическое соседних с ним членов, т. е.

$$b_{n+1}^2=b_n\cdot b_{n+2}, \text{ где } n\in \mathbf{N}. \qquad (1)$$

6. Формула n-го члена геометрической прогрессии имеет вид:

$$b_n=b_1q^{n-1}, \text{ где } n\in \mathbf{N}. \qquad (2)$$

7. Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии имеет вид:

$$S_n=\frac{b_nq-b_1}{q-1} \quad (q\neq 1). \qquad (3)$$

8. Если в формулу (3) подставить вместо b_n его выражение по формуле (2), то получится соотношение

$$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}\ (q\neq 1). \qquad (4)$$

9. Из определения знаменателя геометрической прогрессии следует, что $b_1b_n=b_2b_{n-1}=...$, т. е. произведение членов, равноотстоящих от концов прогрессии, есть величина постоянная.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. В геометрической прогрессии:

1) $b_1=6$, $q=3$, $n=8$; найти b_n и S_n;

2) $q=2$, $n=7$, $S_n=635$; найти b_1 и b_n.

Решение. 1) Для того чтобы найти b_8, используем формулу (2):

$$b_8=6\cdot 3^7=13\,122.$$

Для нахождения S_8 используем формулу (4):

$$S_8=\frac{6\cdot(3^8-1)}{3-1}=19\,680.$$

2) Для нахождения b_7 используем формулу (2):

$$b_7=b_1\cdot 2^6=64b_1. \qquad (1)$$

Для нахождения b_1 используем формулу (3):

$$S_7=\frac{64b_1\cdot 2-b_1}{2-1}=127b_1,$$

т. е. $635=127b_1$, откуда $b_1=5$.

Найденное значение $b_1=5$ подставим в уравнение (1), получим $b_7=64\cdot 5=320$.

2. Сумма первого и третьего членов геометрической прогрессии равна 15, а сумма второго и четвертого 30. Найти сумму первых десяти членов.

Решение. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} b_1+b_3=15, \\ b_2+b_4=30; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1(1+q^2)=15, \\ b_1q(1+q^2)=30. \end{cases} \qquad (1)$$

Разделив почленно второе уравнение системы (1) на первое уравнение, получим $q=2$. Подставляя найденное значение q в первое уравнение, находим $b_1=3$.

По формуле (4) найдем S_{10}:

$$S_{10}=\frac{3\cdot(2^{10}-1)}{2-1}=3069.$$

3. Найти четыре числа, составляющие геометрическую прогрессию, зная, что первое больше второго на 36, а третье больше четвертого на 4.

Р е ш е н и е. Согласно условию имеем $b_1=b_2+36$ и $b_3=b_4+4$. Составим систему:

$$\begin{cases} b_1=b_1q+36, \\ b_1q^2=b_1q^3+4; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1(1-q)=36, \\ b_1q^2(1-q)=4. \end{cases} \tag{2}$$

Разделим почленно второе уравнение системы (2) на первое уравнение, получим $q^2=\frac{1}{9}$, откуда $q_1=-\frac{1}{3}$, $q_2=\frac{1}{3}$.

Если $q=-\frac{1}{3}$, то $b_1=27$, $b_2=-9$, $b_3=3$, $b_4=-1$.

Если $q=\frac{1}{3}$, то $b_1=54$, $b_2=18$, $b_3=6$, $b_4=2$.

О т в е т. 54; 18; 6 и 2 или 27; -9; 3; -1.

4. Сумма трех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 15. Если к ним прибавить соответственно числа 1, 4 и 19, то получатся три числа, составляющие геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

Р е ш е н и е. По условию $a_1+a_2+a_3=15$. Так как $a_2-a_1=$ $=a_3-a_2$, то $2a_2=a_1+a_3$. Из условия имеем $a_2+2a_2=15$. Отсюда $3a_2=15$, $a_2=5$. Тогда $a_1=5-d$, $a_2=5$, $a_3=5+d$.

По условию $b_1=a_1+1=6-d$, $b_2=a_2+4=9$, $b_3=a_3+19=$ $=5+d+19=24+d$.

Используя формулу (1), можно записать, что $b_2^2=b_1\cdot b_3$, тогда имеем:

$$9^2=(6-d)(24+d). \tag{1}$$

Решим уравнение (1), получим $d_1=3$, $d_2=-21$.

Тогда $a_1=2$ или $a_1=26$. Получаем две тройки чисел: 2; 5; 8 и 26; 5; -16.

5. Сумма трех чисел, являющихся последовательными членами арифметической прогрессии, равна 21. Если второе число уменьшить на единицу, а третье увеличить на единицу, то получатся три последовательных члена геометрической прогрессии. Найти эти числа.

Р е ш е н и е. Пусть a_1, a_2, a_3 — члены арифметической прогрессии. Тогда a_1, a_2-1, a_3+1 — члены геометрической прогрессии. В результате приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=21, \\ (a_2-1)^2=a_1(a_3+1), \end{cases}$$

первое уравнение которой получается из условия задачи, а второе — на основании характеристического свойства геометрической прогрессии. Выразив все величины через a_1 и d, получим:

$$\begin{cases} a_1+a_1+d+a_1+2d=21, \\ (a_1+d-1)^2=a_1(a_1+2d+1); \end{cases} \quad \begin{cases} a_1+d=7, \\ 6^2=a_1(8+d); \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1=7-d, \\ 36=(7-d)(8+d); \end{cases} \quad \begin{cases} a_1=7-d, \\ d^2+d-20=0; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1=7-d, \\ \left[\begin{array}{l} d_1=4, \\ d_2=-5; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1=3, \\ d=4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a_1=12, \\ d=-5. \end{cases}$$

Итак, получаем ответ: 3, 7, 11 или 12, 7, 2.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Найдите сумму:

А. 1) Десяти первых членов прогрессии: 10; 20; 40; ...;

2) семи первых членов прогрессии: 5; 15; 45; ...;

3) семи первых членов прогрессии: -4; 16; -64; ...;

4) восьми первых членов прогрессии: 3; -1; $\frac{1}{3}$; ... .

Б. 1) Пяти первых членов прогрессии: $\sqrt{\frac{2}{3}}$; 1; $\sqrt{\frac{3}{2}}$; ...;

2) n первых членов прогрессии: $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{8}$; ...;

3) n первых членов прогрессии: $\sqrt{6}$; $3\sqrt{2}$; $3\sqrt{6}$; ... .

2. А. 1) $b_1=5$, $q=-\frac{1}{5}$, $n=6$. Найдите b_n и S_n;

2) $b_n=128$, $q=2$, $n=7$. Найдите b_1 и S_n;

3) $b_1=3$, $q=2$, $b_n=96$. Найдите n и S_n;

4) $b_1=81$, $b_n=-10\frac{2}{3}$. Найдите q и S_n, если $n=6$.

Б. 1) Первый член геометрической прогрессии равен 1, сумма третьего и пятого членов 90. Найдите прогрессию.

2) Три числа, сумма которых равна 114, можно рассматривать как три последовательных члена геометрической прогрессии или как 1, 4, 25-й члены арифметической прогрессии. Найдите эти числа.

3) Числа, выражающие длину, ширину и высоту прямоугольного параллелепипеда, образуют геометрическую прогрессию, объем параллелепипеда равен 216 м^3, а диагональ $\sqrt{364}$ м. Найдите измерения параллелепипеда.

4) Между числами 1 и 16 вставьте три таких числа, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию.

5) Разность между первым и вторым членами геометрической прогрессии равна 8, а сумма второго и третьего ее членов равна 12. Найдите прогрессию, если известно, что она является убывающей.

В. 1) Найдите прогрессию из шести членов, зная, что сумма трех первых равна 112, а трех последних 14.

2) Три числа, составляющие геометрическую прогрессию, дают в сумме 26; если к этим числам прибавить соответственно 1, 6 и 3, то получатся три числа, составляющие ~~геометрическую~~ прогрессию. Найдите числа, составляющие геометрическую прогрессию.

1) и ариф.

3) Сумма трех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 30. Если из второго члена этой прогрессии вычесть 2, а остальные числа оставить без изменения, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.
4) Сумма трех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 93. Если из первого числа вычесть 48, а остальные числа оставить без изменения, то получится арифметическая прогрессия. Найдите эти числа.
5) Если из четырех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, вычесть соответственно 2, 7, 9 и 5, то получатся числа, составляющие геометрическую прогрессию. Найдите числа, составляющие арифметическую прогрессию.
6) Четыре числа составляют геометрическую прогрессию. Если из первого числа вычесть 11, из второго 1, из третьего 3, а из четвертого 9, то получится арифметическая прогрессия. Найдите эти числа.

Ответы. 1. А. 1) 10 230; 3) $-13\,108$; 4) $\frac{1640}{729}$.
Б. 1) $\frac{19\sqrt{6}+30}{12}$; 2) $\frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$; 3) $\frac{\sqrt{6}\,(\sqrt{3^n}-1)}{\sqrt{3}-1}$.
2. А. 1) $-\frac{1}{625}$; $4\frac{104}{625}$; 2) 2; 254; 3) 6; 189; 4) $-\frac{2}{3}$; $\frac{133}{3}$.
Б. 1) $q=\pm 3$; 2) 2; 14; 98; 3) $18\times 6\times 2$ м; 4) 1; 2; 4; 8; 16; 5) 16; 8;
4. В. 1) 64; 32; 16; 8; 4; 2; 2) 2; 6; 18; 3) 4; 10; 16 или 16; 10; 4; 4) 3; 15; 75 или 75; 15; 3; 5) 5; 13; 21; 29; 6) 27; 9; 3; 1.

§ 4. СУММА БЕСКОНЕЧНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ ПРИ $|q|<1$

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Пусть (x_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем q, где $|q|<1$ и $x_1\neq 0$. Суммой бесконечной геометрической прогрессии, знаменатель которой удовлетворяет условию $|q|<1$, называется предел суммы n первых ее членов при $n\to\infty$.

2. Обозначим сумму бесконечной геометрической прогрессии через S. Тогда справедлива формула

$$S=\frac{x_1}{1-q}.$$

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Найти сумму бесконечной прогрессии 2, $-\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, $-\frac{2}{27}$, ...

Решение. По формуле $S=\frac{x_1}{1-q}$ получим $S=\frac{2}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=$ $=\frac{3}{2}$.

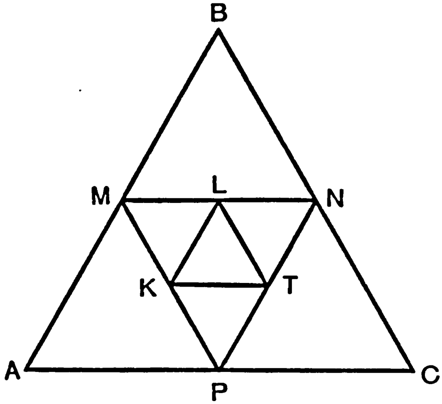


Рис. 95

2. Обратить периодическую дробь 0,58(3) в обыкновенную.

Решение. Данную дробь можно записать в виде

$$0{,}58333\ldots=\frac{58}{100}+$$
$$+\left(\frac{3}{1000}+\frac{3}{10\,000}+\ldots\right).$$

Выражение в скобках представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии, у которой $x_1=0{,}003$, а $q=0{,}0003:0{,}003=0{,}1$. Следовательно,

$$0{,}58(3)=\frac{58}{100}+\frac{0{,}003}{1-0{,}1}=\frac{58}{100}+\frac{1}{300}=\frac{7}{12}.$$

3. В равносторонний треугольник со стороной a вписан новый треугольник, вершинами которого служат середины сторон данного треугольника; в этот треугольник тем же способом вписан новый треугольник и т. д. (рис. 95). Доказать, что последовательность площадей полученных треугольников является геометрической прогрессией, и найти сумму их площадей.

Решение. Находим:

$$S_1=S_{\triangle ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4};\ S_2=S_{\triangle MNP}=\frac{a^2\sqrt{3}}{16};\ S_3=S_{\triangle KLF}=\frac{a^2\sqrt{3}}{64}\ \text{и т. д.};$$
$$S_n=\frac{a^2\sqrt{3}}{4^n};\ S_{n+1}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4^{n+1}}.\qquad \frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4^{n+1}}\cdot\frac{4^n}{a^2\sqrt{3}}=\frac{1}{4},$$

т. е. это отношение есть величина постоянная. Следовательно, (S_n) — геометрическая прогрессия (по определению).

Так как $q=\frac{1}{4}<1$, то $S=\frac{x_1}{1-q}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Найдите сумму:

А. 1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$; 2) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots$; 3) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\ldots$;

4) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\ldots$.

Б. 1) $\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}+\ldots$; 2) $\sqrt{5}+\sqrt{\frac{5}{2}}+\frac{\sqrt{5}}{2}+\ldots$;

3) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}-\ldots$; 4) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}-1+\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}-\ldots$;

5) $\sqrt{3}+\frac{3}{\sqrt{3}+1}+\frac{2\sqrt{3}-3}{2}+\ldots$.

В. 1) В квадрат, сторона которого равна a, вписан другой квадрат, вершинами которого являются середины сторон данного квадрата; в этот квадрат аналогично вписан новый квадрат и т. д. Найдите сумму длин сторон и сумму площадей всех квадратов.

2) В круг радиуса a вписан квадрат, в квадрат вписан круг, в этот круг — второй квадрат и т. д. Найдите сумму площадей всех кругов и сумму площадей всех квадратов.

Ответы. **1. А.** 1) 2; 3) 0,75; 4) $\frac{2}{3}$. **Б.** 1) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$; 3) $\frac{16+11\sqrt{2}}{7}$; 5) $\sqrt{3}+1$. **В.** 1) $4a(2+\sqrt{2})$ и $2a^2$; 2) $2\pi a^2$ и $4a^2$.

Контрольные вопросы

1. Какая числовая последовательность называется арифметической прогрессией?
2. Как определяется разность арифметической прогрессии?
3. Какому условию удовлетворяет разность арифметической прогрессии, если эта прогрессия является возрастающей (убывающей) последовательностью?
4. Какими свойствами обладают члены арифметической прогрессии?
5. Докажите, что в арифметической прогрессии

$$a_{k+1}=\frac{a_k+a_{k+2}}{2},\ k\in N.$$

6. Обоснуйте для членов арифметической прогрессии справедливость следующих равенств: а) $a_{k+1}-a_k=a_{k+2}-a_{k+1}$; б) $a_1+a_k=a_2+a_{k-1}$.
7. Напишите формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии. Докажите ее справедливость.
8. Дайте определение геометрической прогрессии.
9. Какой последовательностью является геометрическая прогрессия, если: а) $q>0$; б) $q<0$; в) $q=1$; г) $0<q<1$; д) $q>1$?
10. Сформулируйте характеристическое свойство геометрической прогрессии.
11. Докажите, что $b_n^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$, $n\in N$, $n\geqslant 2$.
12. Обоснуйте для членов геометрической прогрессии справедливость следующих равенств: а) $\frac{b_2}{b_1}=\frac{b_3}{b_2}$; б) $b_1\cdot b_k=b_2\cdot b_{k-1}$, $k\in N$, $k\geqslant 2$.
13. Чему равна сумма k членов геометрической прогрессии, если знаменатель прогрессии равен 1?
14. Напишите формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии.
15. Обратите периодическую дробь 0,(6) в обыкновенную, используя формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии при $|q|<1$.

ГЛАВА XIV

§ 1. ГРАДУСНОЕ ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВЫХ ВЕЛИЧИН

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Фигура, состоящая из двух различных лучей с общим началом и ограниченной ими части плоскости, называется углом.

2. Если стороны угла образуют прямую, то такой угол называется развернутым. Величина развернутого угла равна 180°.

3. Отметим на оси Ox справа от начала координат точку A и проведем через нее окружность с центром в точке O (рис. 96). Радиус OA называется начальным радиусом.

4. Условились:

если повернуть начальный радиус около точки O по часовой стрелке, то угол поворота считать отрицательным;

если повернуть начальный радиус около точки O против часовой стрелки, то угол поворота считать положительным.

На рисунке 96 показаны повороты на $-64°$ и на $+64°$. В первом случае начальный радиус перешел в радиус OC, во втором — в радиус OB.

5. За единицу измерения углов и дуг принимают соответственно угол в 1 градус и дугу в 1 градус (обозначают 1°).

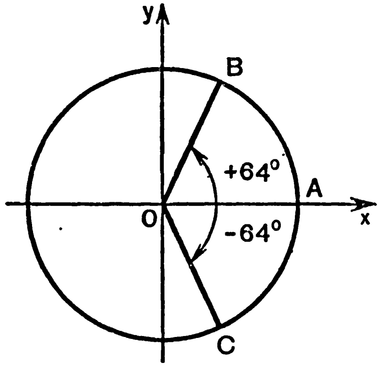


Рис. 96

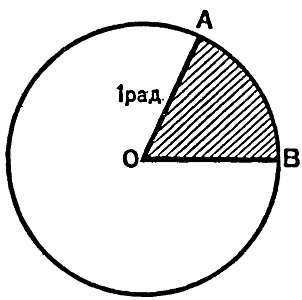


Рис. 97

6. Угол в 1° — это угол, который опишет начальный радиус, совершив $\frac{1}{360}$ часть полного оборота вокруг своей начальной точки против часовой стрелки.

7. $\frac{1}{60}$ часть градуса называется минутой (обозначают $1'$).

8. $\frac{1}{60}$ часть минуты называется секундой (обозначают $1''$).

§ 2. РАДИАННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВЫХ ВЕЛИЧИН

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Рассмотрим еще одну единицу измерения величины угла — 1 радиан.

2. Угол в 1 радиан есть центральный угол, опирающийся на такую дугу окружности, длина которой равна радиусу этой окружности (рис. 97).

3. Если начальный радиус совершит один полный оборот, то получится угол, равный 360° или 2π радианам.

4. Радианная мера 1° равна $\frac{2\pi}{360}=\frac{\pi}{180}$.

5. Если угол содержит $A°$, то его радианная мера равна

$$\alpha=\frac{A\pi}{180}. \qquad (1)$$

6. Из равенства (1) следует, что угол, равный α радианам, содержит

$$\frac{\alpha\cdot 180}{\pi} \text{ градусов.} \qquad (2)$$

7. Длина дуги в α радиан определяется по формуле

$$C=\alpha\cdot R \ (R \text{ — радиус окружности}). \qquad (3)$$

8. Длина дуги в $A°$ определяется по формуле

$$C=\frac{\pi RA°}{180°}. \qquad (4)$$

9. Из формулы $180°=\pi$ следует:

а) $360°=2\pi$; б) $90°=\frac{\pi}{2}$; в) $60°=\frac{\pi}{3}$; г) $30°=\frac{\pi}{6}$ и т. д.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Выразить в радианах величину угла A, если $A=150°$.

Решение. $150°=150\cdot\frac{\pi}{180}$ рад $=\frac{5\pi}{6}$ рад.

2. Выразить в градусах величину угла α, если $\alpha=4{,}5$ рад.

Решение. 4,5 рад$=4{,}5\cdot\frac{180°}{\pi}\approx 258°$.

3. Найти длину дуги окружности радиуса 16 см, если дуга содержит $\frac{\pi}{4}$ радиана.

Решение. Длина дуги в k радиан определяется формулой $C=kR$. Поэтому

$$C=16\cdot\frac{\pi}{4}=4\pi \text{ см}.$$

4. Найти площадь сектора радиуса 20 см, если дуга сектора содержит $\frac{3\pi}{4}$ радиана.

Решение. Площадь сектора в k радиан определяется формулой $S=\frac{kr^2}{2}$, где r — радиус круга. Поэтому площадь сектора равна:

$$S=\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{20^2}{2}=150\pi \text{ см}^2.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Данные углы выразите в радианах:

А. 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90°; 5) 120°; 6) 160°.

Б. 1) 17°; 2) 24°; 3) 315°; 4) 1000°; 5) 15°15′.

В. 1) 17°15′; 2) 10°5″; 3) 35′20″.

2. Найдите угловую величину дуги в градусах, если ее радианная мера равна:

А. 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) 2; 3) 125°?

Б. 1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{2}{3}\pi$; 3) $\frac{\pi}{12}$; 4) 7π; 5) $\frac{5\pi}{2}$.

В. 1) $\cos 0{,}5\pi$; 2) $-0{,}75\pi$; 3) $\sin 90°+\cos 0°-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$.

3. В какой четверти оканчиваются углы:

А. 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) 2; 3) 125°?

Б. 1) 216°; 2) 7π; 3) 0,80?

В. 1) $\frac{21\pi}{4}$; 2) 100; 3) $-0{,}(3)$?

4. А. 1) Зубчатое колесо, имеющее 56 зубцов, повернулось на 14 зубцов против часовой стрелки. Выразите в радианах угол поворота колеса.

2) Определите радианную меру дуги, длина и радиус которой равны соответственно 17 см и 20 см.

Б. Определите длину дуги окружности радиуса 25 см, если:
1) радианная мера дуги равна 1,25 рад;
2) градусная мера дуги равна 144°.

В. Найдите радианную меру угла сектора, длина дуги которого:
1) втрое меньше периметра сектора;
2) составляет половину периметра сектора.

5. А. Радиус сектора равен 5 см, а его площадь 75 $см^2$. Найдите радианную меру дуги сектора.

Б. Радианная мера дуги равна 2, а площадь сектора равна 256 $см^2$. Найдите радиус сектора.

В. Радиус окружности равен 36 см. Найдите периметр и площадь сектора, дуга которого содержит $\frac{7}{9}$ радиана.

Ответы. 4. А. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 0,85. Б. 1) 31,25 см; 2) 62,83 см. В. 1) 1; 2) 2. 5. А. 6. Б. 16 см. В. 100 см.

§ 3. СИНУС И КОСИНУС ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Рассмотрим единичную окружность, т. е. окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1 (рис. 98). На единичной окружности отметим точку $P_0(1;\ 0)$. При повороте начального радиуса около центра O на угол α радиан точка $P_0(1;\ 0)$ перейдет в некоторую точку P_α. Обозначим координаты этой точки x_α и y_α. (Заметим, что поворот можно осуществить как в положительном, так и в отрицательном направлении.)

2. Определения:

а) Синусом угла α называется отношение ординаты точки P_α к радиусу. Таким образом, $\sin\alpha=\frac{y}{R}$.

б) Косинусом угла α называется отношение абсциссы точки P_α к радиусу. Таким образом, $\cos\alpha=\frac{x}{R}$.

3. Каждому углу α соответствует единственная точка $P_\alpha(x_\alpha;\ y_\alpha)$ и, следовательно, единственное значение синуса и косинуса этого числа. Таким образом, $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ являются функциями числового аргумента. (Заметим, что в курсе геометрии мы рассматривали $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ как функции угловой величины α, а не числа α.)

4. Основное соотношение между $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Координаты любой точки $P_\alpha(x_\alpha;\ y_\alpha)$ единичной окружности удовлетворяют уравнению: $x^2+y^2=1$ (это следует из прямоугольного треугольника, катеты которого $|x_\alpha|$ и $|y_\alpha|$, а гипотенуза равна 1; см. рис. 98). Отсюда $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, где $\alpha\in R$.

Из этой формулы следует, что: а) $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$; б) $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

5. Значения синуса и косинуса некоторых чисел. В практических вычислениях часто используются значения синуса и косинуса, приведенные в таблице:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

6. Знаки значений функций синуса и косинуса. Знаки $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определяются знаками ординаты y_α и абсциссы x_α соответствующей точки единичной окружности. Если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ (P_α в первой координатной четверти), то числу α соответствует точка окружности P_α, координаты которой $x_\alpha>0$ и $y_\alpha>0$. Следовательно, на числовом промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $\sin\alpha>0$ и $\cos\alpha>0$ (рис. 99). Если $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ (P_α во второй координатной четверти), то, рассуждая аналогично, получаем $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha<0$ (рис. 100). Если $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$ (P_α в третьей координатной

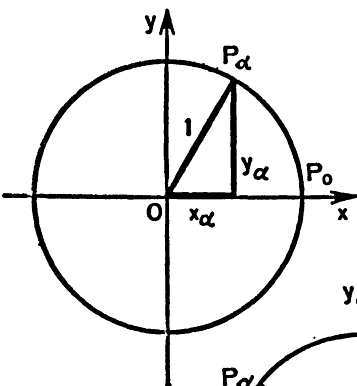


Рис. 98

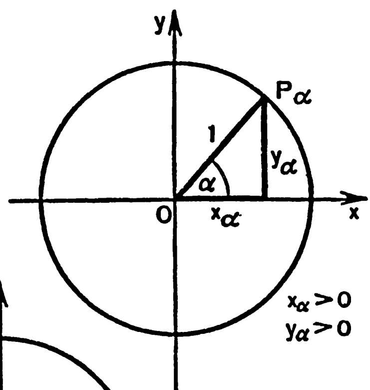


Рис. 99

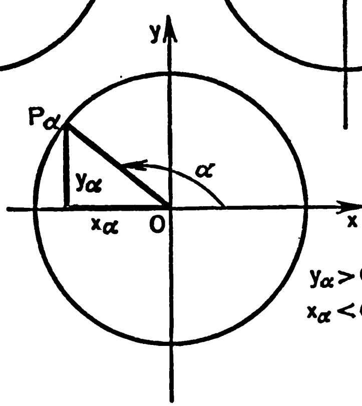


Рис. 100

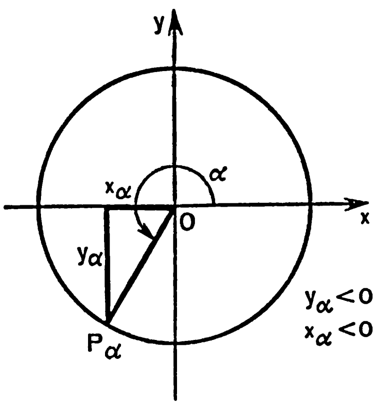


Рис. 101

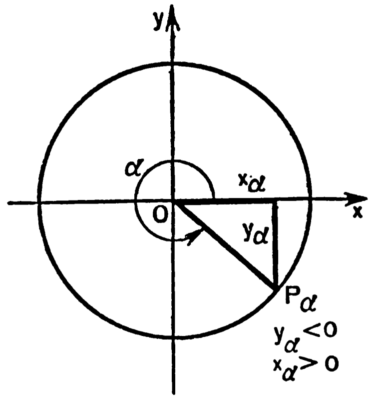


Рис. 102

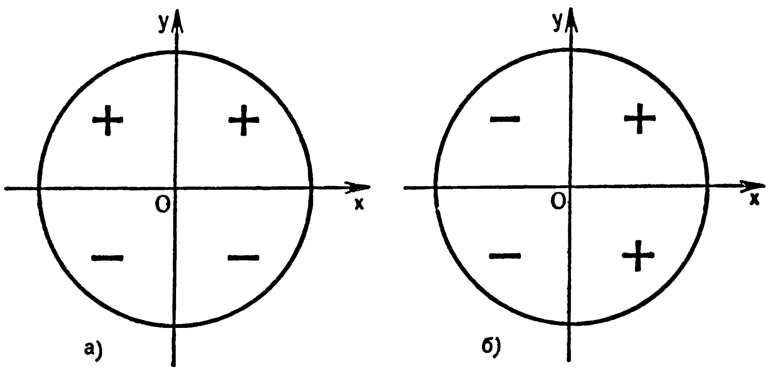


Рис. 103

четверти), то имеем $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha<0$ (рис. 101). Если $\frac{3}{2}\pi<$ $<\alpha<2\pi$ (P_α в четвертой координатной четверти), то $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha>0$ (рис. 102). Схематически знаки $\sin\alpha$ изображены на рисунке 103, *а*, а $\cos\alpha$ на рисунке 103, *б*.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Определить знак произведения

$$\sin 67^\circ \cos 267^\circ \cos 375^\circ \sin(-68^\circ)\cdot\cos(-68^\circ)\cdot\sin 2.$$

Решение. $\sin 67^\circ>0$, так как угол 67° является углом первой четверти, а синус в первой четверти положителен.

$\cos 267^\circ<0$, так как угол 267° является углом третьей чет верти, а косинус в этой четверти отрицателен

$\cos 375° > 0$, так как угол $375°$ является углом первой четверти, а косинус в этой четверти положителен.

$\sin(-68°) < 0$, так как угол $-68°$ является углом четвертой четверти, а синус в этой четверти отрицателен.

$\cos(-68°) > 0$, так как угол $-68°$ является углом четвертой четверти, а косинус в этой четверти положителен.

$\sin 2 > 0$, так как угол, величина которого 2 радиана, является углом второй четверти, а синус во второй четверти положителен. Следовательно, произведение положительно.

2. Сравнить значения выражений:

$$\sin 45°;\ \cos(-90°);\ \sin 210°;\ \sin 180°;\ \cos(-45°).$$

Решение. $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos(-90°) = 0$; $\sin 210° = -\frac{1}{2}$; $\sin 180° = 0$; $\cos(-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ. $\sin 210° < \sin 180° = \cos(-90°) < \sin 45° = \cos(-45°)$.

3. Доказать тождество

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + \sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha = 2 + \sin^2\alpha.$$

Доказательство. В левой части тождества произведем указанные действия и приведем подобные члены, получим:

$$2 + \sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha = 2 + \sin^2\alpha.$$

Левую часть равенства преобразуем так:

$$2 + (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha = 2 + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 2 + \sin^2\alpha.$$

Следовательно, $2 + \sin^2\alpha = 2 + \sin^2\alpha$. Тождество доказано.

4. Вычислить значение $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{8}$, где $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

Решение. Найдем значение косинуса, используя формулу $\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$. Имеем

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{64}} = \pm\frac{\sqrt{63}}{8}.$$

Выясним, какой знак надо оставить перед корнем. По условию $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$, т. е. P_α принадлежит III четверти, а косинус в этой четверти отрицателен. Следовательно, перед корнем надо оставить знак «минус». Итак, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{63}}{8}$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Определите знак произведения:

А. $\sin 50° \cos 60° \sin 188° \cos 189°$.

Б. $\sin 210° \sin 465° \cos 465° \cos 540°$.

В. $\sin 365° \cos 725° \sin \alpha$, если $\cos \alpha > 0$.

2. Сравните значения выражений:

А. $\sin 30°$; $\cos 30°$; $\cos 180°$; $\sin 90°$.

Б. $\sin(-30°)$; $\cos 60°$; $\cos(-180°)$; $\sin 360°$.

В. $\sin 0°$; $\cos 90°$; $\cos 270°$; $\sin 180°$; $\sin 270°$; $\cos 180°$.

3. Упростите выражение:

А. 1) $1-\sin^2 x$; 2) $1-\cos^2 x$; 3) $\sin^2 3x+\cos^2 3x-1$.

Б. 1) $\sin^2 x-1+\cos^2 x+(1-\sin x)(1+\sin x)$; 2) $\frac{\cos^2 x}{1-\sin^2 x}$.

В. 1) $2-\sin^2 6x-\cos^2 6x$;

2) $2\sin^2 x+\cos^2 x-1+(1-\sin x)(1+\sin x)$.

4. Вычислите значение $\sin \alpha$, если:

А. 1) $\cos \alpha=\frac{1}{2}$, $0°<\alpha<90°$; 2) $\cos \alpha=-\frac{1}{2}$, $90°<\alpha<180°$.

Б. 1) $\cos \alpha=\frac{1}{2}$, $270°<\alpha<360°$; 2) $\cos \alpha=\frac{1}{2}$, $-180°<\alpha<0°$.

В. 1) $\cos \alpha=\frac{1}{2}$, $\sin \alpha<0$; 2) $\cos \alpha=-\frac{1}{3}$, $\sin \alpha>0$.

5. Докажите тождество:

А. $\sin^4 \alpha+\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha+\cos^2 \alpha=1$.

Б. $(\sin^3 \alpha+\cos^3 \alpha):(\sin \alpha+\cos \alpha)+\sin \alpha \cos \alpha=1$.

В. $\sin^4 \alpha+\cos^4 \alpha-\sin^6 \alpha-\cos^6 \alpha=\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

Ответы. 2. В. $\sin 270°=\cos 180°<\sin 0°=\cos 90°=\cos 270°=\sin 180°$.

§ 4. ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА. СЕКАНС И КОСЕКАНС ЧИСЛА α

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Определения:

1. Тангенсом числа α называется отношение ординаты точки P_α к ее абсциссе (рис. 98). Таким образом, $\operatorname{tg} \alpha=\frac{y}{x}$.

2. Котангенсом числа α называется отношение абсциссы точки P_α к ее ординате (рис. 98). Таким образом, $\operatorname{ctg} \alpha=\frac{x}{y}$.

3. Значения тангенса и котангенса для чисел 0; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3\pi}{2}$; 2π легко найти из формул $\operatorname{tg} \alpha=\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\cos \alpha \neq 0$ и $\operatorname{ctg} \alpha=\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, $\sin \alpha \neq 0$ (значения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ возьмем из таблицы § 3 этой главы).

Аналогично находим остальные значения. Заметим, что для некоторых чисел $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ не существуют. Например, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{0}$$ (не имеет смысла).

Приведем таблицу этих значений:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не существует	0	Не существует	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	Не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Не существует	0	Не существует

4. Знаки значений функций тангенса и котангенса. Знаки значений тангенса и котангенса можно определить по знакам значений синуса и косинуса. Так как в I и III четвертях знаки значений синуса и косинуса одинаковые, а именно в I четверти $\sin\alpha>0$ и $\cos\alpha>0$, а в III четверти $\sin\alpha<0$ и $\cos\alpha<0$, то в этих четвертях $\operatorname{tg}\alpha>0$ и $\operatorname{ctg}\alpha>0$.

Так как во II и IV четвертях знаки значений синуса и косинуса разные, а именно во II четверти $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha<0$, а в IV четверти $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha>0$, то в этих четвертях $\operatorname{tg}\alpha<0$ и $\operatorname{ctg}\alpha<0$. Заметим, что знаки значений тангенса и котангенса можно легко определить по знаку ординаты и абсциссы.

5. Секансом числа α, называется величина, обратная $\cos\alpha$, т. е. $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$, $\cos\alpha\neq0$.

6. Косекансом числа α называется величина, обратная $\sin\alpha$, т. е. $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$, $\sin\alpha\neq0$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Найдите значение выражения:

А. 1) $2\sin30^\circ\cos30^\circ\operatorname{tg}30^\circ\operatorname{ctg}30^\circ$; 2) $\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{ctg}45^\circ-1$;
3) $\sin(-30^\circ)\cdot\operatorname{ctg}30^\circ+\sin60^\circ$; 4) $\operatorname{tg}45^\circ\sin60^\circ\operatorname{ctg}30^\circ-1{,}5$.

Б. 1) $\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha-\sin4\alpha+\sin5\alpha+\sin6\alpha$, при $\alpha=30^\circ$.
2) $\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}\right)^2$ при $\alpha=90^\circ$.

В. 1) $\frac{\sin^2 315^\circ\cos300^\circ+\operatorname{tg}(-315^\circ)}{\sin(-120^\circ)\cdot\cos150^\circ}$; 2) $\frac{6\cos^2(-240^\circ)\cdot\operatorname{ctg}210^\circ}{\sin(-300^\circ)\cdot\cos^2180^\circ}$.

2. Определите знак произведения:

А. 1) $\sin 100° \cos 100° \operatorname{tg} 230° \operatorname{ctg} 320° \operatorname{tg} 3$;

2) $-\sin 50° \operatorname{tg} 170° (-\cos(-100°)) \operatorname{ctg}(-640°) \sin 530°$.

3. Какой знак имеет произведение:

В. $\sin x \operatorname{tg}^3 x \cos x \operatorname{ctg} x \sec^3 x$ при:

а) $0° < x < 90°$; б) $90° < x < 180°$;

в) $180° < x < 270°$; г) $270° < x < 360°$?

Ответы. 1. А. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 0; 3) 0; 4) 0. Б. 1) 2. В. 1) $\frac{5}{3}$; 2) 3. 2. А. 1) Положительно; 2) положительно. 3. а) Положительно; б) положительно; в) отрицательно; г) отрицательно.

§ 5. ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Мы уже рассмотрели тождества:

$$1.\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\ \alpha \in R. \tag{1}$$

$$2.\ \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}. \tag{2}$$

$$3.\ \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}. \tag{3}$$

$$4.\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \cos\alpha \neq 0. \tag{4}$$

$$5.\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \sin\alpha \neq 0. \tag{5}$$

$$6.\ \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},\ \cos\alpha \neq 0. \tag{6}$$

$$7.\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha},\ \sin\alpha \neq 0. \tag{7}$$

Добавим к ним следующие:

8. Из формул (4) и (5) следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1,\ \sin\alpha \neq 0,\ \cos\alpha \neq 0. \tag{8}$$

9. Из формулы (8) следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha},\ \sin\alpha \neq 0,\ \cos\alpha \neq 0. \tag{9}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},\ \sin\alpha \neq 0,\ \cos\alpha \neq 0. \tag{10}$$

10. Разделив обе части равенства (1) на $\cos^2\alpha$, получим:

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha\ (\cos\alpha \neq 0). \tag{11}$$

11. Разделив обе части равенства (1) на $\sin^2\alpha$, получим:

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha\ (\sin\alpha \neq 0). \tag{12}$$

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Упростить $\frac{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

Решение. Будем полагать, что данное выражение имеет смысл при всех допустимых значениях α.

Упростим числитель:

$$\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha(\cos^2\alpha-1)=-\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha.$$

Упростим знаменатель:

$$\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha(\sin^2\alpha-1)=-\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha.$$

Таким образом,

$$\frac{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{-\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha}{-\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}^6\alpha.$$

2. Дано: $\cos\alpha=-0,6$, $90°<\alpha<180°$; вычислить значения остальных тригонометрических функций.

Решение. Используем тождество $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Перед радикалом оставим знак «плюс», потому что синус во второй четверти положителен. Таким образом,

$$\sin\alpha=\sqrt{1-0,36}=0,8;$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{0,8}{-0,6}=-\frac{4}{3};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{-0,6}{0,8}=-\frac{3}{4}.$$

3. Дано: $\sin x+\cos x=k$. Найти $\sin^4 x+\cos^4 x$.

Решение. Дополним выражение $\sin^4 x+\cos^4 x$ до квадрата двучлена:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=$$
$$=1-2\sin^2 x\cos^2 x=1-2(\sin x\cos x)^2.$$

Возведем обе части равенства $\sin x+\cos x=k$ в квадрат. Получим $1+2\cos x\sin x=k^2$, откуда $\sin x\cos x=\frac{k^2-1}{2}$. Тогда

$$1-2(\sin x\cos x)^2=1-2\left(\frac{k^2-1}{2}\right)^2=0,5+k^2-0,5k^4.$$

Следовательно,

$$\sin^4 x+\cos^4 x=0,5+k^2-0,5k^4.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Упростите:

А 1) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha$; 2) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-2$.

Б. 1) $(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y):(\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y)$;

2) $(1+\operatorname{tg}^4\alpha):(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha)$.

В. 1) $\sin\alpha-\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha}$, если $180°<\alpha<360°$;

2) $\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}+\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}$, если $3\pi<\alpha<4\pi$.

2. Вычислите:

А. 1) $\cos 60°+2\sin 30°+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 60°-\operatorname{ctg}45°$;

2) $3\cos 180°+5\operatorname{ctg}270°-2\operatorname{tg}0°+3\operatorname{tg}180°-\operatorname{tg}60°$.

Б. 1) $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{5}$;

2) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{4}$.

В. 1) $\frac{3\sin^2 a+12\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$;

2) $\sin 150°\sin 240°-\operatorname{tg}360°\cos 315°-\operatorname{ctg}(-30°)\cdot\sin^2 330°+$ $+3\operatorname{tg}^2 30°$.

3. Вычислите значения остальных тригонометрических функций, если известно значение:

А. 1) $\sin\alpha=0{,}6$, $0°<\alpha<90°$;

2) $\sin\alpha=-0{,}6$, $270°<\alpha<360°$.

Б. 1) $\operatorname{tg}\alpha=2$, $180°<\alpha<270°$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha=-3$, $270°<\alpha<360°$.

В. 1) $\operatorname{tg}\alpha=k^{-1}$, $180°<\alpha<270°$;

2) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, $270°<\alpha<360°$.

4. Дано: $\sin\alpha+\cos\alpha=k$. Найдите:

А. $\sin\alpha\cos\alpha$.

Б. $\cos^3\alpha+\sin^3\alpha$.

В. $\sin\alpha-\cos\alpha$.

Ответы. **1. А.** 2) 0. **Б.** 2) $\operatorname{tg}^2\alpha$. **В.** 1) $\frac{1}{\sin\alpha}$; 2) $\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}$. **2. А.** 1) 2; 2) $-\sqrt{3}(1+\sqrt{3})$. **Б.** 1) -4; 2) $1\frac{5}{7}$. **В.** 1) $9\frac{1}{4}$; 2) 1. **3. А.** 1) $\cos\alpha=0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha=0{,}75$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$. **Б.** 1) $\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=-\frac{1}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha=0{,}5$. **В.** 1) $\operatorname{ctg}\alpha=k$, $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$, $\cos\alpha=-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$. **4. А.** $\frac{k^2-1}{2}$. **Б.** $\frac{k(3-k^2)}{2}$. **В.** $\pm\sqrt{2-k^2}$.

§ 6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса не изменяются при прибавлении к данному углу целого числа оборотов.

2. При повороте радиуса OA на угол α получим радиус OB (рис. 104), тот же радиус получится и при повороте OA на угол, отличающийся от α на любое целое число оборотов. Этот факт позволяет свести нахождение значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса любого угла к нахождению их значения для неотрицательного угла, меньшего 360°. Например,

$$\cos 785° = \cos(2\cdot 360° + 65°) = \cos 65°.$$

3. Формулы, выражающие зависимость между синусами, косинусами, тангенсами и котангенсами противолежащих углов.

Пусть координаты точки B равны x и y (рис. 105). Тогда координаты точки C равны x и $-y$. Пользуясь этим, найдем:

$$\sin(-\alpha) = \frac{-y}{R} = -\frac{y}{R} = -\sin\alpha, \text{ т. е. } \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$

$$\cos(-\alpha) = \frac{x}{R} = \cos\alpha, \text{ т. е. } \cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\operatorname{tg}\alpha, \text{ т. е. } \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\operatorname{ctg}\alpha, \text{ т. е. } \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

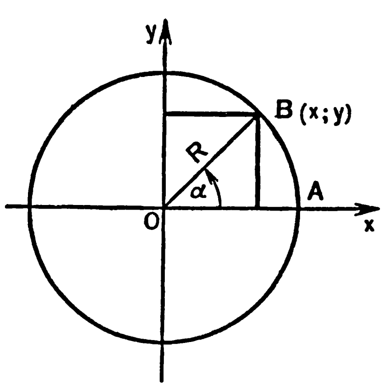


Рис. 104

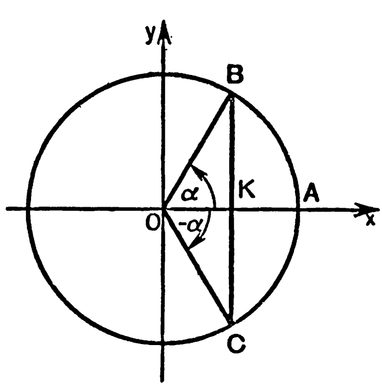


Рис. 105

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Найдите значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла α, если:
1) $\alpha=750°$; 2) $\alpha=810°$; 3) $\alpha=1260°$; 4) $\alpha=390°$;
5) $\alpha=420°$; 6) $\alpha=540°$; 7) $\alpha=450°$; 8) $\alpha=405°$.

2. Найдите значение выражения:
1) $\sin(-30°)$; 2) $\cos(-60°)$; 3) $\operatorname{tg}(-45°)$; 4) $\operatorname{ctg}(-30°)$;
5) $\cos(-90°)$; 6) $\sin(-45°)$; 7) $\sin(-90°)$; 8) $\sin(-720°)$;
9) $\cos(-405°)$; 10) $\cos(-780°)$; 11) $\operatorname{ctg}(-1110°)$; 12) $\operatorname{tg}(-900°)$.

3. Какой знак имеет:
1) $\sin 181°$; 2) $\cos 280°$; 3) $\operatorname{tg} 175°$; 4) $\operatorname{ctg} 358°$; 5) $\cos(-116°)$?

Ответы. 1. Значения синуса данных углов: 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) 0; 4) 0,5; 5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) 0; 7) 1; 8) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значения косинуса данных углов: 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 0; 3) -1; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) 0,5; 6) -1; 7) 0; 8) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. 1) $-0{,}5$; 2) 0,5; 3) -1; 4) $-\sqrt{3}$; 5) 0; 6) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 7) -1; 8) 0; 9) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 10) 0,5; 11) $-\sqrt{3}$; 12) 0. 3. 1), 3), 4) и 5) отрицательный; 2) положительный.

Контрольные вопросы

1. Назовите единицы измерения величины угла.
2. Что принимается за 1°; за 1 радиан?
3. По каким формулам вычисляется длина дуги, выраженная в градусах; в радианах?
4. По каким формулам вычисляется площадь сектора, дуга которого выражена в градусах; в радианах?
5. Величина угла равна k градусов. Выразите величину этого угла в радианах.
6. Величина угла равна k радиан. Выразите величину этого угла в градусах.
7. Выразите в радианах углы: 180°, 270°, 360°.
8. Дайте определение единичной окружности.
9. Что называется синусом числа α?
10. Что называется косинусом числа α?
11. Почему $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ являются функциями числового аргумента α?
12. Какая формула выражает зависимость между функциями $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$? Из чего она следует?
13. Докажите, что катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.
14. Укажите знаки значений $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если P_α принадлежит: а) первой координатной четверти; б) второй координатной четверти.

15. Укажите знаки значений $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если P_α принадлежит: а) третьей координатной четверти; б) четвертой координатной четверти.
16. Верно ли неравенство: 1) $\sin\alpha > 1$; 2) $\cos\alpha > 1$; 3) $\sin\alpha < -1$; 4) $\cos\alpha < -1$; 5) $|\sin\alpha| \leqslant 1$; 6) $|\cos\alpha| \leqslant 1$?
17. Как вы понимаете выражения $\sin 1°$ и $\sin 1$? В чем их различие?
18. Что больше: $\cos 2°$ или $\cos 2$?
19. Дайте определение тангенса и котангенса числа α.
20. Назовите какое-либо значение α, при котором формула $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ не имеет смысла. Поясните почему.
21. Назовите какое-либо значение α, при котором формула $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ не имеет смысла. Поясните почему.
22. Какие знаки имеют $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ в каждой из координатных четвертей?
23. Что называется секансом и косекансом числа α?
24. Назовите все известные вам тригонометрические тождества.
25. Верно ли, что: а) $|\sec\alpha| > 1$; б) $|\sec\alpha| < 1$; в) $|\operatorname{cosec}\alpha| > 1$; г) $|\operatorname{cosec}\alpha| < 1$?

ГЛАВА XV

§ 1. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Формулами приведения называются соотношения, с помощью которых значения тригонометрических функций аргументов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$, выражаются через значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

2. Все формулы приведения можно свести в следующую таблицу:

Функция α	Аргумент α							
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$

3. Для облегчения запоминания приведенных формул нужно использовать следующие правила:

а) при переходе от функций углов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ к функциям угла α название функции изменяют: синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот;

при переходе от функций углов $\pi\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$ к функциям угла α название функции сохраняют;

б) считая α острым углом (т. е. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$), перед функцией угла α ставят такой знак, какой имеет приводимая функция углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$.

4. Исходя из известных значений тригонометрических функций некоторых углов (см. главу XIV), соответствия между градусной и радианной мерой величины угла и формул приведения, можно составить таблицу значений тригонометрических функций для наиболее часто встречающихся значений аргумента (см. ниже).

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Привести к тригонометрической функции острого угла: 1) $\sin 1914°$; 2) $\cos 1914°$; 3) $\cos(-1560°)$; 4) $\sin(-1560°)$; 5) $\operatorname{tg} 23{,}7\pi$.

Решение.

1) $\sin 1914° = \sin(360° \cdot 5 + 114°) = \sin 114° = \sin(90° + 24°) = \cos 24°$ (у синуса период 360°, или 2π).

2) $\cos 1914° = \cos(360° \cdot 5 + 114°) = \cos 114° = \cos(90° + 24°) = -\sin 24°$ (у косинуса период 360°, или 2π).

3) $\cos(-1560°) = \cos 1560° = \cos(360° \cdot 4 + 120°) = \cos 120° = \cos(90° + 30°) = -\sin 30° = -0{,}5$.

Здесь использовали соотношение $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

4) $\sin(-1560°) = -\sin 1560° = -\sin(360° \cdot 4 + 120°) = -\sin 120° = -\sin(90° + 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Здесь использовали соотношение $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

5) $\operatorname{tg} 23{,}7\pi = \operatorname{tg}(23\pi + 0{,}7\pi) = \operatorname{tg}(0{,}7\pi) = \operatorname{tg}(\pi - 0{,}3\pi) = -\operatorname{tg} 0{,}3\pi$.

2. Упростить выражение

$$\frac{\operatorname{tg}(180° - \alpha)\cos(180° - \alpha)\operatorname{tg}(90° - \alpha)}{\sin(90° + \alpha)\operatorname{ctg}(90° + \alpha)\operatorname{tg}(90° + \alpha)}.$$

Функция	Аргу							
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не существует	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	Не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

Решение.

$$\frac{\operatorname{tg}(180°-\alpha)\cos(180°-\alpha)\operatorname{tg}(90°-\alpha)}{\sin(90°+\alpha)\operatorname{ctg}(90°+\alpha)\operatorname{tg}(90°+\alpha)}=\frac{(-\operatorname{tg}\alpha)(-\cos\alpha)\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha(-\operatorname{tg}\alpha)(-\operatorname{ctg}\alpha)}=1.$$

3. Упростить выражение

$$\cos(\alpha-90°)+\sin(\alpha-180°)+\operatorname{tg}^2(180°-\alpha)+\operatorname{ctg}^2(\alpha-180°).$$

Решение.

$$\cos(\alpha-90°)=\cos(-(90°-\alpha))=\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha.$$

Здесь мы использовали соотношение $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.

$$\sin(\alpha-180°)=\sin(-(180°-\alpha))=-\sin(180°-\alpha)=-\sin\alpha.$$

Здесь мы использовали соотношение $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$.

$$\operatorname{tg}^2(180°-\alpha)=(\operatorname{tg}(180°-\alpha))^2=(-\operatorname{tg}\alpha)^2=\operatorname{tg}^2\alpha.$$

$$\operatorname{ctg}^2(\alpha-180°)=(\operatorname{ctg}(\alpha-180°))^2=(\operatorname{ctg}(-(180°-\alpha)))^2=$$
$$=(-\operatorname{ctg}(180°-\alpha))^2=(\operatorname{ctg}(180°-\alpha))^2=(-\operatorname{ctg}\alpha)^2=\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Здесь мы использовали соотношение $\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$ и свойство степени с четным показателем.

Теперь данное выражение можно записать в виде

$$\sin\alpha-\sin\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Замените тригонометрической функцией угла α:

А. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 5) $\sin(\pi-\alpha)$; 6) $\cos(\pi+\alpha)$;

мент α								
π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не существует	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
Не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	Не существует

7) $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$; 8) $\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)$; 9) $\sin(360°+\alpha)$;
10) $\cos(360°-\alpha)$; 11) $\operatorname{ctg}(360°-\alpha)$; 12) $\operatorname{tg}(360°+\alpha)$;
13) $\sin(90°-\alpha)-\cos(180°-\alpha)+\operatorname{tg}(180°-\alpha)-\operatorname{ctg}(270°+\alpha)$.

Б. 1) $\sin(\alpha-90°)$; 2) $\cos(\alpha-\pi)$; 3) $\operatorname{ctg}(\alpha-360°)$;
4) $\operatorname{tg}(-\alpha+270°)$; 5) $\sin^2(180°+\alpha)$; 6) $\cos^2(270°-\alpha)$;
7) $\operatorname{tg}^2(90°+\alpha)$; 8) $\operatorname{ctg}^2(360°-\alpha)$;
9) $\dfrac{\cos(\alpha-90°)}{\sin(180°-\alpha)}+\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha-180°)\cos(180°+\alpha)\sin(270°+\alpha)}{\operatorname{tg}(270°+\alpha)}$;
10) $\sin^2(180°-\alpha)+\operatorname{tg}^2(180°+\alpha)\operatorname{tg}^2(270°+\alpha)+\sin(90°+\alpha)\times$ $\times\cos(\alpha-360°)$.

2. Вычислите:

В. 1) $\left(\dfrac{1}{\sin 260° \sin 620°}-\operatorname{tg}185° \operatorname{tg}805°\right)(\sec^2 800°-1)$;
2) $(\sec 352°-\sin 172° \operatorname{ctg}262°)(\cos^2 100°+\cos^2 350°)-\cos 8°$;
3) $\sin 810° \cos 900°+\operatorname{tg}585° \operatorname{ctg}1845°+\cos 135° \sin 405°$;
4) $\cos 105°-\sin 195°+\sin(-135°)$;
5) $\operatorname{tg}18° \operatorname{tg}288°+\sin 32° \sin 148°-\sin 302° \sin 122°$.

3. В. Докажите, что если A, B и C — углы треугольника, то:
1) $\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$; 2) $\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}=\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$.

Ответы. 1. **А.** 13) $2\cos\alpha$. **Б.** 9) $\cos^2\alpha$; 10) 2. **2. В.** 1) 1; 2) 0; 3) $-0{,}5$; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) 0.

§ 2. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Формулы синуса суммы и разности двух аргументов:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \quad (1)$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \quad (2)$$

2. Формулы косинуса суммы и разности двух аргументов:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta, \quad (3)$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \quad (4)$$

3. Формулы тангенса суммы и разности двух аргументов:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \quad (5)$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \quad (6)$$

4. Формулы котангенса суммы и разности двух аргументов:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}, \quad (7)$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}. \quad (8)$$

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Вычислить без таблиц: 1) $\sin 105°$; 2) $\operatorname{tg} 15°$.

Решение. 1) Представим $105°$ в виде суммы $60°+45°$. Тогда

$$\sin 105° = \sin(60°+45°) = \sin 60° \cos 45° + \sin 45° \cos 60° =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1).$$

2) Представим $15°$ в виде разности $45°-30°$. Тогда

$$\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(45°-30°) = \frac{\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} 30°}{1+\operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°} = 2-\sqrt{3}.$$

2. Вычислить $\cos(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\sin\beta = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

Решение. Находим значения $\sin\alpha$ и $\cos\beta$ с учетом четверти, которой принадлежат P_α и P_β.

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5};$$
$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

Подставляя найденные значения в соотношение (4), получим:

$$\cos(\alpha-\beta) = -\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{7}{25}.$$

3. Доказать, что

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha = 1, \text{ если } \alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha) = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right) \times$$
$$\times(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha) = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}(\alpha+\beta)(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha) =$$
$$= \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \frac{1-\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta) =$$
$$= \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + 1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 1.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Найдите значение выражения:

А. 1) $\cos 24° \cos 31° - \sin 24° \sin 31° - \cos 55°$;
2) $\cos 107° \cos 17° + \sin 107° \sin 17°$;
3) $\sin 63° \cos 27° + \cos 63° \sin 27°$;
4) $\sin 51° \cos 21° - \cos 51° \sin 21°$.

Б. 1) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \cos\alpha - \sin\alpha$; 2) $2\cos(60°-\alpha) - \sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha$; 3) $\sqrt{2}\sin(\alpha-45°) - \sin\alpha + \cos\alpha$;
4) $\sqrt{3}\cos\alpha - 2\cos(\alpha-30°) + \sin\alpha$.

В. 1) $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{8}{17}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$, α и β — углы первой четверти;

2) $\cos(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{8}{17}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$, α и β — углы первой четверти;

3) $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{8}{17}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$, α и β — углы первой четверти;

4) $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{9}{41}$, $\sin\beta=\frac{-40}{41}$, α — угол второй четверти, β — угол четвертой четверти.

2. Упростите.

В. 1) $\frac{\cos\alpha\sin(\alpha-3)-\sin\alpha\cos(3-\alpha)}{\cos(3-30^\circ)-0{,}5\sin 3}+\frac{2\operatorname{tg}3}{3}$;

2) $\frac{\sin 90^\circ-\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)\operatorname{tg}(45^\circ+3\alpha)}{\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)+\operatorname{ctg}(45^\circ-3\alpha)}+\operatorname{tg}4\alpha$;

3) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)}-1$; 4) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}+\operatorname{tg}\frac{5\pi}{36}}{1+\operatorname{tg}\frac{8\pi}{9}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{36}}-1$;

5) $1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

6) $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)-\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$;

7) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$;

8) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}+\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}-2$.

Ответы. **1. А.** 1) 0; 2) 0; 3) 1; 4) 0,5. **Б.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **В.** 1) $\frac{77}{85}$; 2) $\frac{36}{85}$; 3) $\frac{84}{85}$; 4) 1. **2. В.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 5) 0; 6) 0; 7) 0; 8) 0.

§ 3. ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Из формул синуса и косинуса суммы получаются формулы синуса и косинуса двойного угла. Если в соотношениях

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

положить $\alpha=\beta$, то получим:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad (1)$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha. \qquad (2)$$

2. Выразив правую часть формулы (2) через одну тригонометрическую функцию (синус или косинус), придем к соотношениям

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha,\ \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1. \qquad (3)$$

3. Из формул (3) можно выразить $\sin^2\alpha$ и $\cos^2\alpha$ через $\cos 2\alpha$:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},\ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}. \qquad (4)$$

4. Полагая в формуле тангенса суммы $\alpha = \beta$, получаем формулу тангенса двойного угла:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (5)$$

Эта формула справедлива при $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, где $k \in Z$, и $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$, где $m \in Z$.

5. Кроме перечисленных выше формул (1) — (5), полезно знать и формулы

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,\quad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (6)$$

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Вычислить без таблиц: $\sin 75° \sin 15°$.

Решение. $\sin 75° \sin 15° = \sin(90° - 15°)\sin 15° = \cos 15° \sin 15° = \frac{2\cos 15° \sin 15°}{2} = \frac{\sin 30°}{2} = \frac{1}{4}$.

2. Упростить $1 - \cos\left(\frac{\alpha}{2} - 3\pi\right) - \cos^2\frac{\alpha}{4} + \sin^2\frac{\alpha}{4}$.

Решение. $1 - \cos\left(\frac{\alpha}{2} - 3\pi\right) - \cos^2\frac{\alpha}{4} + \sin^2\frac{\alpha}{4} = 1 - \cos\left(3\pi - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(\cos^2\frac{\alpha}{4} - \sin^2\frac{\alpha}{4}\right) = 1 + \cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = 1$.

3. Доказать тождество $\operatorname{tg} 4\alpha - \sec 4\alpha = \frac{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}$.

Решение.

$$\operatorname{tg} 4\alpha - \sec 4\alpha = \frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha} - \frac{1}{\cos 4\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha - \sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha} =$$

$$= -\frac{(\sin 2\alpha - \cos 2\alpha)^2}{(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}.$$

4. Доказать, что $\sin 10° \sin 50° \sin 70° = \frac{1}{8}$.

Решение. Умножив и разделив левую часть равенства на $2\cos 10°$, получим:

$$\frac{2\cos 10° \sin 10° \sin 50° \sin 70°}{2\cos 10°} = \frac{\sin 20° \sin 50° \sin 70°}{2\cos 10°} =$$

$$=\frac{\sin 20^\circ \cos 20^\circ \sin 50^\circ}{2\cos 10^\circ}=\frac{\sin 40^\circ \sin 50^\circ}{2\cdot 2\cos 10^\circ}=\frac{\sin 40^\circ \cos 40^\circ}{4\cos 10^\circ}=$$
$$=\frac{\sin 80^\circ}{2\cdot 4\cos 10^\circ}=\frac{\cos 10^\circ}{8\cos 10^\circ}=\frac{1}{8}.$$

5. Доказать тождество $3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=8\cos^4\alpha$.

Решение. $3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=2+4\cos 2\alpha+1+$
$$+\cos 4\alpha=2+4\cos 2\alpha+2\cos^2 2\alpha=2(1+2\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha)=$$
$$=2(1+\cos 2\alpha)^2=2(2\cos^2\alpha)^2=2\cdot 4\cos^4\alpha=8\cos^4\alpha.$$

6. Дано: $\sin\alpha=0{,}8$, $0^\circ<\alpha<90^\circ$. Вычислить:
1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$.

Решение. 1) Найдем $\cos\alpha$: $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=$
$=\sqrt{1-0{,}64}=0{,}6$.

Значения функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ подставим в формулу $\sin 2\alpha=$
$=2\cos\alpha\sin\alpha$. Получим $\sin 2\alpha=2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}8=0{,}96$.

2) Значения двух функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ подставим в формулу $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$, получим $\cos 2\alpha=(0{,}6)^2-(0{,}8)^2=-0{,}28$.

3) Значения $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ подставим в формулу $\operatorname{tg} 2\alpha=$
$=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$, получим $\operatorname{tg} 2\alpha=-\frac{0{,}96}{0{,}28}=-\frac{24}{7}$.

7. Упростить выражение:
1) $2\sin^2(45^\circ+1{,}5\alpha)-1$; 2) $1-8\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; 3) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Решение. 1) Вынесем -1 за скобки и воспользуемся формулой (3):
$$2\sin^2(45^\circ+1{,}5\alpha)-1=-(1-2\sin^2(45^\circ+1{,}5\alpha))=$$
$$=-(\cos 2(45^\circ+1{,}5\alpha))=-\cos(90^\circ+3\alpha)=\sin 3\alpha.$$

2) Воспользуемся формулой (1), получим:
$1-8\cos^2\alpha\sin^2\alpha=1-2\cdot 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-2\cdot(2\sin\alpha\cos\alpha)^2=$
$=1-2\sin^2 2\alpha$, а это выражение по формуле (3) равно $\cos 4\alpha$. Таким образом, $1-2\sin^2 2\alpha=\cos 4\alpha$.

3) Имеем:
$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},\ 1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Разложим числитель и знаменатель данного выражения на множители:
$$\frac{\sin\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}}=$$
$$=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\left(2\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\left(2\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Упростите выражение:

А. 1) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$; 2) $\frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}$; 3) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$;

4) $\cos 2\alpha+\sin^2\alpha$; 5) $\frac{\sin 40^\circ}{2\cos 20^\circ}$; 6) $\frac{\sin 100^\circ}{\cos 50^\circ}$;

7) $\frac{\cos 36^\circ+\sin^2 18^\circ}{\cos^2 18^\circ}$; 8) $\frac{\sin\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Б. 1) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$; 2) $\frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}}$; 3) $\frac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ+\sin 40^\circ}$;

4) $4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\sin(270^\circ-\alpha)$; 5) $\frac{\sin^2\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{\sin 2\alpha}$;

6) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1+\sin 2\alpha}$; 7) $\left(\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\right)\sin 2\alpha$;

8) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$; 9) $\operatorname{ctg}\alpha\,(1-\cos 2\alpha)$; 10) $\frac{1+\cos(180^\circ+\alpha)}{\sin(180^\circ-\alpha)}$.

В. 1) $\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{3}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}\right)\operatorname{tg}\frac{2\alpha}{3}$; 2) $\frac{\operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha)}{\operatorname{ctg}^2(45-\alpha)-1}$;

3) $\sqrt{0{,}5-0{,}5\sqrt{0{,}5+0{,}5\cos\alpha}}$ при $0^\circ\leqslant\alpha\leqslant 360^\circ$;

4) $\frac{1+\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}$; 5) $\frac{\sin(80^\circ+\alpha)}{4\sin\left(20^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(70^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}$;

6) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$; 7) $\operatorname{tg}(\alpha+45^\circ)+\operatorname{tg}(\alpha-45^\circ)-2\operatorname{tg}2\alpha$.

2. 1) Пусть $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найдите: а) $\sin 2\alpha$; б) $\cos 2\alpha$; в) $\operatorname{ctg}2\alpha$.

2) Пусть $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Найдите: а) $\sin 2\alpha$; б) $\cos 2\alpha$; в) $\operatorname{ctg}2\alpha$.

3) Пусть $\cos\alpha=-0{,}6$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Найдите: а) $\sin 2\alpha$; б) $\cos 2\alpha$; в) $\operatorname{tg}2\alpha$.

Ответы. 1. А. 1) $2\cos\alpha$; 2) $\sin\alpha$; 3) $\operatorname{tg}2\alpha$; 4) $\cos^2\alpha$; 5) $\sin 20^\circ$; 6) $2\sin 50^\circ$; 7) 1; 8) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Б. 1) $\cos\alpha+\sin\alpha$; 2) $-\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)$; 3) $\cos 40^\circ-\sin 40^\circ$; 4) $-\sin 2\alpha$; 5) 0,5; 6) 1; 7) $4\sin\alpha$; 8) $\operatorname{tg}\alpha$; 9) $\sin 2\alpha$; 10) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. В. 1) 2; 2) $0{,}5\operatorname{ctg}2\alpha$; 3) $\sin\frac{\alpha}{4}$, если $0^\circ\leqslant\alpha\leqslant 180^\circ$; $\cos\frac{\alpha}{4}$, если $180^\circ\leqslant\alpha\leqslant 360^\circ$; 4) $-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$; 5) $\cos\left(40^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)$; 6) $\frac{1}{8}$; 7) 0. 2. 1) а) $-\frac{120}{169}$; б) $\frac{119}{169}$; в) $-\frac{119}{120}$; 2) а) 0,96; б) 0,28; в) $\frac{7}{24}$; 3) а) 0,96; б) $-0{,}28$; в) $-\frac{24}{7}$.

§ 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СУММУ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Формулы для преобразования произведения синуса и косинуса в сумму получаются из формул сложения для синуса и косинуса. Запишем формулы для синуса суммы и синуса разности углов α и β:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Сложив почленно эти равенства и разделив результат на 2, получим:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

2. Запишем формулы для косинуса суммы и косинуса разности углов α и β:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Сложив почленно эти равенства и разделив результат на 2, получим:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}. \tag{2}$$

3. Аналогично, вычитая из второго равенства первое, в результате получаем:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}. \tag{3}$$

4. Полезно также знать формулы преобразования произведения тангенсов и котангенсов в сумму:

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}, \tag{4}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta=\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}. \tag{5}$$

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Представить $\cos^2 x\cos 3x$ в виде суммы тригонометрических функций.

Решение. Заменив $\cos^2 x$ выражением $\frac{1+\cos 2x}{2}$, получим:

$$\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\cos 3x=\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos 2x\cos 3x.$$

Теперь применим формулу (2):

$$\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos 2x\cos 3x=\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{4}(\cos x+\cos 5x).$$

Итак,

$$\cos^2 x\cos 3x=\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 5x.$$

2. Упростить: $\sin 4°\sin 86°-\cos 2°\sin 6°+0{,}5\sin 4°$.

Решение. Заменим $\sin 86°$ на $\cos 4°$ (по формуле $\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$). Тогда $\sin 4°\sin 86°=\sin 4°\cos 4°$. По формуле синуса двойного угла имеем $\sin 4°\cos 4°=\frac{\sin 8°}{2}$.

Произведение синуса на косинус преобразуем в сумму: $\sin 6°\cos 2°=\frac{\sin 8°+\sin 4°}{2}$. Теперь данное выражение примет вид:

$$\frac{1}{2}\sin 8°-\frac{\sin 8°+\sin 4°}{2}+\frac{1}{2}\sin 4°=0.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Вычислите, не пользуясь таблицами:

А. 1) $\sin 37°30'\sin 7°30'$; 2) $\cos 75°\cos 15°$; 3) $\sin 75°\cos 15°$; 4) $\sin 75°\sin 15°$.

Б. 1) $\cos 5°\cos 55°\cos 65°$; 2) $\operatorname{tg} 20°\operatorname{tg} 40°\operatorname{tg} 60°\operatorname{tg} 80°$;

3) $2\cos 20°\cos 40°-\cos 20°$; 4) $\sin 2x+2\sin(75°-x)\times\cos(75°+x)$;

5) $\cos^2 5°+\cos^2 1°-\cos 6°\cos 4°$; 6) $\cos 20°\sin 50°\cos 80°$.

2. Преобразуйте в сумму выражения:

В. 1) $\sin 10°\cos 8°\cos 6°$; 2) $\cos 3x\cos 5x\cos 7x$; 3) $\sin x\sin 2x\sin 3x\sin 4x$; 4) $8\sin^3 x\cos x$.

Ответы. 1. А. 1) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$; 2) 0,25; 3) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$; 4) 0,25.

Б. 1) $\frac{1}{16}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$; 2) 3; 3) 0,5; 4) 0,5; 5) 1; 6) 0,125.

2. В. 1) $\frac{1}{4}(\sin 24°+\sin 12°+\sin 8°-\sin 4°)$; 2) $\frac{1}{2}(\cos 15x+\cos 5x+\cos 9x+\cos x)$; 3) $\frac{1}{8}(1+\cos 10x-\cos 8x-\cos 6x)$; 4) $2\sin 2x-\sin 4x$.

§ 5. ФОРМУЛЫ СУММЫ И РАЗНОСТИ ОДНОИМЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Выведем формулу, позволяющую преобразовать сумму $\sin\alpha+\sin\beta$ в произведение тригонометрических функций. Положим $\alpha=x+y$, $\beta=x-y$ и найдем

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=$$
$$=\sin x\cos y+\cos x\sin y+\sin x\cos y-\cos x\sin y=$$
$$=2\sin x\cos y.$$

Решив теперь систему уравнений $\alpha=x+y$, $\beta=x-y$ относительно x и y, получим $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$. Следовательно,

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{1}$$

2. Аналогичным образом выводят формулы

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \tag{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{3}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{4}$$

3. Для суммы тангенсов имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta},$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ k\in\boldsymbol{Z},\ n\in\boldsymbol{Z}\right). \tag{5}$$

4. Точно так же получаются следующие формулы:

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ k\in\boldsymbol{Z},\ n\in\boldsymbol{Z}\right), \tag{6}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\left(\alpha\neq\pi k,\ \beta\neq\pi n,\ k\in\boldsymbol{Z},\ n\in\boldsymbol{Z}\right), \tag{7}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}\left(\alpha\neq\pi k,\ \beta\neq\pi n,\ k\in\boldsymbol{Z},\ n\in\boldsymbol{Z}\right). \tag{8}$$

5. Полезно также знать формулу для преобразования в произведение выражения $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ (a и b — любые действительные числа, не равные нулю). Эта формула имеет вид:

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=r\sin(\alpha+\varphi), \tag{9}$$

где $r=\sqrt{a^2+b^2}$, аргумент φ определяется из условий $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Преобразовать в произведение или частное:

1) $1+\sin\alpha+\cos\alpha$; 2) $\sqrt{3}-2\sin\alpha$; 3) $3\sin x+4\cos x$;
4) $\frac{\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha}{\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha}$.

Решения.

1)

$$1+\sin\alpha+\cos\alpha=(1+\cos\alpha)+\sin\alpha=$$
$$=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=$$

$$=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin 45^\circ\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).$$

2) $\sqrt{3}-2\sin\alpha=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\alpha\right)=2(\sin 60^\circ-\sin\alpha)=$
$=4\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right).$

3) $3\sin x+4\cos x=\sqrt{3^2+4^2}\sin(x+\varphi)=5\sin(x+\varphi)$, где $\cos\varphi=\frac{3}{5}$ и $\sin\varphi=\frac{4}{5}$.

4) Разделив числитель и знаменатель дроби на 2, получим:

$$\frac{\frac{\cos\alpha}{2}+\frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{2}}{\frac{\cos\alpha}{2}-\frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{2}}=\frac{\cos 60^\circ\cos\alpha+\sin 60^\circ\sin\alpha}{\cos 60^\circ\cos\alpha-\sin 60^\circ\sin\alpha}=\frac{\cos(60^\circ-\alpha)}{\cos(60^\circ+\alpha)}.$$

2. Доказать, что

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

где A, B, C — углы треугольника.

Решение. Имеем:

$$\sin C=\sin(180^\circ-(A+B))=\sin(A+B)=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}.$$

Следовательно,

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}=$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)=4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=$$

$$=4\sin\frac{180^\circ-C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Представьте в виде произведения:

А. 1) $\sin 40^\circ+\sin 16^\circ$; 2) $\sin 2\alpha+\sin\alpha$;
3) $\sin 20^\circ-\sin 40^\circ$; 4) $\sin\alpha-\sin 3\alpha$;
5) $\cos 15^\circ+\cos 45^\circ$; 6) $\cos 2x+\cos 3x$;
7) $\cos 20^\circ-\cos 30^\circ$; 8) $\cos x-\cos 3x$;
9) $\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} x$; 10) $\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} x$.

Б. 1) $\cos 18^\circ-\sin 22^\circ$; 2) $\cos\alpha-\sin\alpha$; 3) $\cos 50^\circ+\sin 80^\circ$;
4) $\cos\alpha+\sin\alpha$; 5) $\operatorname{tg} 4x+\operatorname{ctg} 2x$; 6) $\sin^2 x-\sin^2 y$;
7) $\cos^2\alpha-\cos^2 x$; 8) $2\sin x+1$; 9) $1+2\cos x$.

В. 1) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x$;

2) $\cos 2x - \cos 4x - \cos 6x + \cos 8x$;

3) $3 - \sqrt{3}\operatorname{ctg} 2x$; 4) $\frac{4\sin^2 5x - 3}{4\cos^2 5x - 1}$.

Ответы. 1. А. 1) $2\sin 28^\circ \cos 12^\circ$; 3) $-\sqrt{3}\sin 10^\circ$; 5) $\sqrt{3}\cos 15^\circ$; 7) $2\sin 25^\circ \sin 5^\circ$; 9) $\frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x}$. Б. 1) $2\sin 25^\circ \times \cos 47^\circ$; 2) $\sqrt{2}\sin(45^\circ - \alpha)$; 3) $\sqrt{3}\cos 20^\circ$; 4) $\sqrt{2}\cos(\alpha - 45^\circ)$ или $\sqrt{2}\cos(45^\circ - \alpha)$; 5) $\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\cos 4x}$; 6) $\sin(x+y)\sin(x-y)$; 7) $\sin(x-\alpha)\sin(\alpha+x)$; 8) $4\sin\frac{x+30^\circ}{2}\cdot\cos\frac{x-30^\circ}{2}$; 9) $4\cos(30^\circ + 0{,}5x)\cos(30^\circ - 0{,}5x)$. В. 1) $4\sin 2{,}5x \cos x \cos 0{,}5x$; 2) $-4\cos 5x \sin 2x \sin x$; 3) $\frac{2\sqrt{3}\sin(2x - 30^\circ)}{\sin 2x}$; 4) -1.

§ 6. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Если в формулах

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha,\quad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1\quad (\text{см. § 3})$$

положить $\alpha = \frac{x}{2}$, то получим:

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2},\quad \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1. \tag{1}$$

2. Из формул (1) следует, что

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}, \tag{2}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}. \tag{3}$$

С помощью формул (2) и (3) можно вычислять значения синуса и косинуса половинного аргумента $\frac{x}{2}$ по заданному значению косинуса аргумента x.

3. Разделив почленно равенство (2) на равенство (3), получим формулу

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \tag{4}$$

4. В формулах (2), (3) и (4) знак перед радикалом зависит от того, в какой координатной четверти находится угол $\frac{x}{2}$.

5. Полезно знать следующие формулы:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin x}{1+\cos x};$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x},\quad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}. \qquad (5)$$

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Упростить выражение $1-2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha$.

Решение. 1-й способ. $(1+\cos 2\alpha)-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha=2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=2\cos 2\alpha$.

2-й способ. $(1-2\sin^2\alpha)+\cos 2\alpha=\cos 2\alpha+\cos 2\alpha=2\cos 2\alpha$.

2. Вычислить без таблиц: $\operatorname{tg} 112°30'$.

Решение. $\operatorname{tg} 112°30'=\frac{1-\cos 225°}{\sin 225°}=\frac{1-\cos(180°+45°)}{\sin(180°+45°)}=$

$$=\frac{1+\cos 45°}{-\sin 45°}=-\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-(1+\sqrt{2}).$$

3. Вычислить без таблиц:

$$\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}.$$

Решение. Используя формулу приведения $\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, получим:

$$\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}=$$

$$=\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\cos^4\frac{3\pi}{16}+\cos^4\frac{\pi}{16}=$$

$$=\left(\sin^4\frac{\pi}{16}+2\sin^2\frac{\pi}{16}\cos^2\frac{\pi}{16}+\cos^4\frac{\pi}{16}\right)+$$

$$+\left(\sin^4\frac{3\pi}{16}+2\sin^2\frac{3\pi}{16}\cos^2\frac{3\pi}{16}+\cos^4\frac{3\pi}{16}\right)-$$

$$-2\sin^2\frac{\pi}{16}\cos^2\frac{\pi}{16}-2\sin^2\frac{3\pi}{16}\cos^2\frac{3\pi}{16}=$$

$$=2-\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}\right)=2-\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}\right)=1{,}5.$$

4. Дано: $\sin\alpha=0{,}8$ и $90°<\alpha<180°$. Найти:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 3) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; 4) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Решение. Поскольку $90°<\alpha<180°$, то $45°<\frac{\alpha}{2}<90°$.

Чтобы воспользоваться формулами (2) и (3), надо знать $\cos\alpha$. Найдем его: $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-0{,}64}=-0{,}6$ (знак «минус» потому что $90°<\alpha<180°$).

1) $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+0{,}6}{2}}=\sqrt{0{,}8}.$

2) $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-0{,}6}{2}}=\sqrt{0{,}2}.$

3) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{0{,}2}{0{,}8}}=\frac{1}{2}.$

4) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2.$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Вычислите без помощи таблиц:
А. 1) $\sin 15°$; 2) $\operatorname{tg} 22{,}5°$; 3) $\cos 15°$. Б. 1) $\sin 75°$; 2) $\cos 75°$; 3) $\operatorname{tg} 75°$; 4) $\operatorname{ctg} 75°$. В. $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}$.

2. Найдите $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если:

1) $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$, $180°<\alpha<270°$;

2) $\cos\alpha=\frac{2}{5}$, $270°<\alpha<360°$; 3) $\cos\alpha=0{,}8$, $0<\alpha<90°$.

3. Преобразуйте в произведение:
В. 1) $1+\sin\alpha+\cos\alpha$; 2) $1-\sin\alpha+\cos\alpha$;
3) $1+\sin\alpha-\cos\alpha$; 4) $1-\sin\alpha-\cos\alpha$.

Ответы. 1. А. 1) $0{,}5\sqrt{2-\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{2}-1$. В. 1,5. 2. 1) $\frac{5}{\sqrt{26}}$; $-\frac{1}{\sqrt{26}}$; -5; 3) $\sqrt{0{,}1}$; $\sqrt{0{,}9}$; 0,(3). 3. В. 1) $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\times$ $\times\cos\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$; 3) $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$.

§ 7. ВЫРАЖЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЧЕРЕЗ ТАНГЕНС ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. При решении тригонометрических уравнений, доказательстве тождеств и т. п. часто возникает необходимость выразить все четыре тригонометрические функции ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$) через какую-нибудь одну функцию $f(x)$.

2. Воспользуемся тригонометрическими формулами двойного аргумента:

$$\text{а) } \sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \qquad (1)$$

$$\text{б) } \cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}. \qquad (2)$$

Область определения рассматриваемых дробей и функций: $x\neq(2k+1)\pi$, $k\in Z$.

$$\text{в) } \operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \qquad (3)$$

$$\text{г) } \operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}. \qquad (4)$$

Третья формула имеет смысл при $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x\neq\pi+2\pi k$, $k\in Z$, и четвертая — при $x\neq\pi k$, $k\in Z$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Вычислить $\sin 4\alpha+\cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg} 2\alpha=4$.

Решение. Выразив $\sin 4\alpha$ и $\cos 4\alpha$ через $\operatorname{tg} 2\alpha$ по формулам (1), (2), получим:

$$\sin 4\alpha+\cos 4\alpha\operatorname{ctg} 2\alpha=$$
$$=\frac{2\operatorname{tg} 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}+\frac{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha}=$$
$$=\frac{2\cdot 4}{1+16}+\frac{1-16}{1+16}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

2. Найти $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=0{,}5$.

Решение. Упростим данное выражение:

$$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=-(\cos^4\alpha-\sin^4\alpha)=$$
$$=-(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-\cos 2\alpha.$$

Далее находим:

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{3}{5},$$

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot\frac{9}{25}-1=-\frac{7}{25}, \text{ т. е.}$$
$$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\frac{7}{25}.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Найдите:

А. 1) $\sin 4\alpha$, если $\operatorname{tg} 2\alpha=3$; 2) $\cos 4\alpha$, если $\operatorname{tg} 2\alpha=8$; 3) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=0{,}5$.

Б. 1) $\cos\alpha+\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=3$; 2) $\sin\alpha-\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=3$.

2. В. Что больше: $\operatorname{tg} 2\alpha$ или $2\operatorname{tg}\alpha$, где $0°<\alpha<90°$, $\alpha\neq 45°$? При каких значениях α имеет место равенство $\operatorname{tg} 2\alpha=2\operatorname{tg}\alpha$?

3. В. Дано: $\operatorname{tg} x=-0{,}75$, $\operatorname{tg} y=2{,}4$, $90°<x<180°$, $0°<y<90°$. Определите: 1) $\sin(x-2y)$; 2) $\cos(2x+y)$.

4. Б. Вычислите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-2{,}4$ и $90°<\frac{\alpha}{2}<$ $<135°$.

Ответы. **1. А.** 1) 0,6; 2) $-\frac{63}{65}$; 3) $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{4}$. **Б.** 1) $-0{,}2$; 2) 1,4. **2. В.** $\operatorname{tg} 2\alpha>2\operatorname{tg}\alpha$, если $0°<\alpha<45°$; $\operatorname{tg} 2\alpha<2\operatorname{tg}\alpha$, если $45°<\alpha<90°$. **3. В.** 1) $\frac{123}{845}$; 2) $\frac{323}{325}$. **4. Б.** $-\frac{120}{169}$; $-\frac{119}{169}$.

Контрольные вопросы

1. На основании каких соотношений выводятся формулы тригонометрических функций двойного аргумента?
2. Докажите тождество: а) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$; б) $\sin 2\alpha=$ $=2\sin\alpha\cos\alpha$; в) $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$; г) $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$.
3. На каком множестве указанное равенство является тождеством:

   а) $\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; б) $\operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}$?

4. Выразите $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ только через: а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$.
5. Докажите тождество:

   а) $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; б) $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$; в) $1+\sin\alpha=$ $=2\cos^2\left((45°-\frac{\alpha}{2}\right)$; г) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$.
6. Какие соотношения используются при выводе формул преобразования произведения тригонометрических функций в сумму?
7. Какие соотношения используются при выводе формул суммы и разности одноименных тригонометрических функций?
8. Разложите на множители: а) $\sqrt{2}+2\cos x$; б) $\sqrt{3}-2\cos x$; в) $\sin x+\cos y$; г) $\sqrt{3}-\operatorname{tg} x$; д) $1+\operatorname{tg} x$; е) $1+\sin x-\cos x$; ж) $3-4\cos^2(270°-\alpha)$.
9. Докажите тождество
   $\frac{\sin 2\alpha-\sin 3\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 3\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg} 3\alpha.$

ГЛАВА XVI

---

§ 1. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $y=\sin x$ И ЕЕ ГРАФИК

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Основные свойства функции $y=\sin x$:

а) область определения — множество всех действительных чисел;

б) множество значений — отрезок $[-1;\ 1]$, значит, синус — функция ограниченная;

в) функция нечетная: $\sin(-x)=-\sin x$ для всех $x\in \boldsymbol{R}$;

г) функция периодическая с наименьшим положительным периодом 2π, т. е. $\sin(x+2\pi)=\sin x$ для всех $x\in \boldsymbol{R}$;

д) $\sin x=0$ при $x=\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$;

е) $\sin x>0$ для всех $x\in(2\pi k;\ \pi+2\pi k)$, $k\in \boldsymbol{Z}$;

ж) $\sin x<0$ для всех $x\in(\pi+2\pi k;\ 2\pi+2\pi k)$, $k\in \boldsymbol{Z}$;

з) функция возрастает от -1 до 1 на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in \boldsymbol{Z}$;

и) функция убывает от 1 до -1 на промежутках $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in \boldsymbol{Z}$;

к) функция принимает наибольшее значение, равное 1, в точках $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$;

л) функция принимает наименьшее значение, равное -1, в точках $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

2. Используя свойства синуса, сначала строим его график на промежутке $[-\pi;\ \pi]$, т. е. на промежутке, длина которого равна периоду функции (рис. 106).

3. Используя периодичность функции $y=\sin x$, строим график функции на всей числовой прямой (рис. 107).

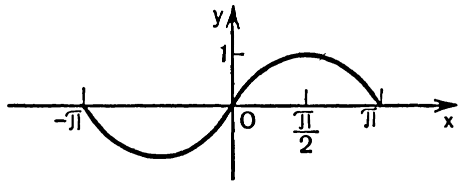


Рис. 106

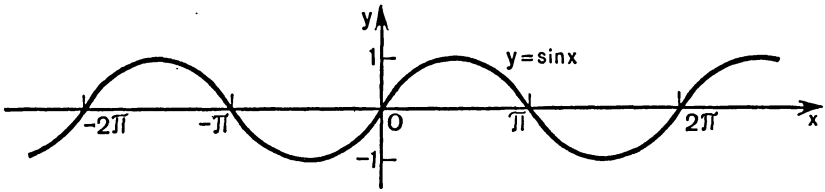


Рис. 107

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Построить график функции: 1) $y=\sin\frac{1}{2}x$; 2) $y=\sin 3x$.

Для построения данных графиков будет использован прием растяжения и сжатия графика по оси абсцисс. Этот прием часто применяется при построении графиков тригонометрических функций.

Решение. 1) $y=\sin\frac{1}{2}x$. Область определения функции — вся числовая прямая. Множество значений функции $-1\leqslant y\leqslant 1$.

Функция нечетная, периодическая. Период данной функции найдем из равенства $\sin\frac{x}{2}=\sin\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)=\sin\left(\frac{x+4\pi}{2}\right)$, $\omega=4\pi$.

Следовательно, сначала достаточно построить часть графика на отрезке $[0; 2\pi]$.

Найдем точки пересечения графика с осью Ox. Если $y=0$, то $\sin\frac{x}{2}=0$, откуда $\frac{x}{2}=\pi k$, $x=2\pi k$, где $k=0,1$, т. е. на данном полупериоде кривая пересекает ось Ox в двух точках $(0; 0)$ и $(2\pi; 0)$.

Максимум функции равен 1 при $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}$, т. е. при $x=\pi$.

По этим данным построим график функции $y=\sin\frac{x}{2}$. Сначала график строим для положительного полупериода $[0; 2\pi]$, затем на отрезке, соответствующем отрицательному полупериоду $[0; -2\pi]$ (рис. 108), и, наконец, на всей области определения (штриховая линия).

Замечание. График функции $y=\sin\frac{x}{2}$ можно построить

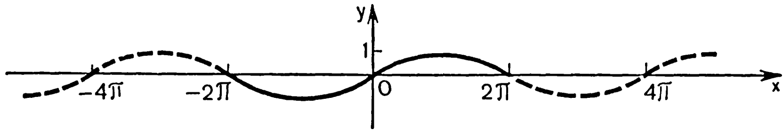


Рис. 108

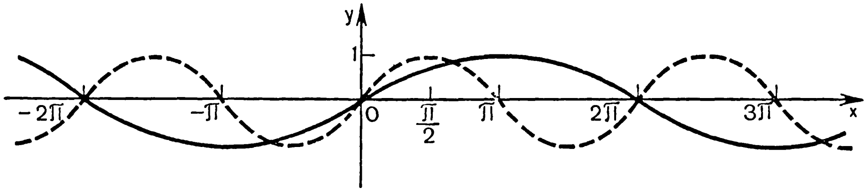


Рис. 109

иначе, приняв за исходный известный нам график функции $y = \sin x$, нанесенный штриховой линией на рисунке 109.

Замечаем, что период исходной функции $y = \sin x$ равен $\omega_0 = 2\pi$, а период заданной функции $y = \sin \frac{x}{2}$ составляет $\omega = 4\pi$, т. е. вдвое больше периода исходной функции. Таким образом, график, который требуется построить, получится из исходного графика (штрихового, на рисунке 109) путем растяжения его вдоль оси Ox вдвое.

2) $y = \sin 3x$. Область определения функции — вся числовая прямая. Множество значений — отрезок $[-1;\ 1]$.

Период функции находится из равенства $\sin 3x = \sin (3x + 2\pi) = \sin 3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$, откуда период $\omega = \frac{2\pi}{3}$, полупериод $\frac{1}{2}\omega = \frac{\pi}{3}$.

Найдем точки пересечения графика с осью Ox.

Если $y = 0$, то $\sin 3x = 0$, откуда $3x = \pi k$, $x = \frac{\pi k}{3}$, где $k = 0;\ 1$, т. е. на данном полупериоде кривая пересекает ось Ox в двух точках $(0;\ 0)$ и $\left(\frac{\pi}{3};\ 0\right)$.

Максимум функции равен 1 при $3x = \frac{\pi}{2}$, т. е. при $x = \frac{\pi}{6}$.

По этим данным построим график $y = \sin 3x$ (рис. 110).

З а м е ч а н и е. График функции $y = \sin 3x$ можно построить путем сжатия по оси Ox исходного графика $y = \sin x$ в 3 раза (рис. 111), так как период $\frac{2\pi}{3}$ заданной функции в 3 раза меньше периода 2π исходной функции.

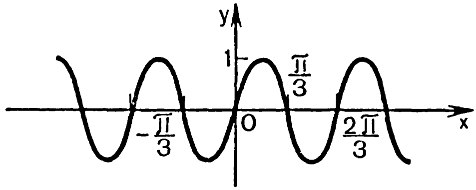


Рис. 110

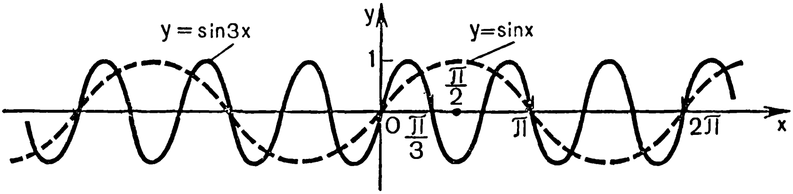


Рис. 111

Таким образом, если известен график $y=f(x)$, то график функции $y=f(kx)$ строится посредством сжатия по оси Ox исходного графика пропорционально коэффициенту k при аргументе (см. гл. IX), а именно:

если $k>1$, то сжатие в k раз;

если $0<k<1$, то растяжение в $\frac{1}{k}$ раз.

2. Построить график функции:

1) $y=3\sin x$; 2) $y=\frac{1}{2}\sin x$.

Для построения данных графиков будет использован прием растяжения и сжатия по оси ординат.

Решение. 1) $y=3\sin x$. Строить этот график методом полного исследования функции, как это мы делали в предыдущих примерах, нецелесообразно.

Нетрудно заметить, что ординаты графика $y=3\sin x$ в 3 раза больше соответствующих ординат графика $y=\sin x$. Поэтому график заданной функции строится путем увеличения всех ординат исходного графика в 3 раза, т. е. путем растяжения исходного графика по оси Oy в 3 раза (рис. 112).

2) $y=0{,}5\sin x$. По тем же соображениям этот график строится способом уменьшения всех ординат исходного графика в 2 раза, т. е. путем сжатия исходного графика по оси Oy в 2 раза (рис. 112).

Таким образом, если известен график функции $y=f(x)$, то график функции $y=kf(x)$ строится посредством растяжения вдоль оси Oy исходного графика пропорционально коэффициенту k, а именно:

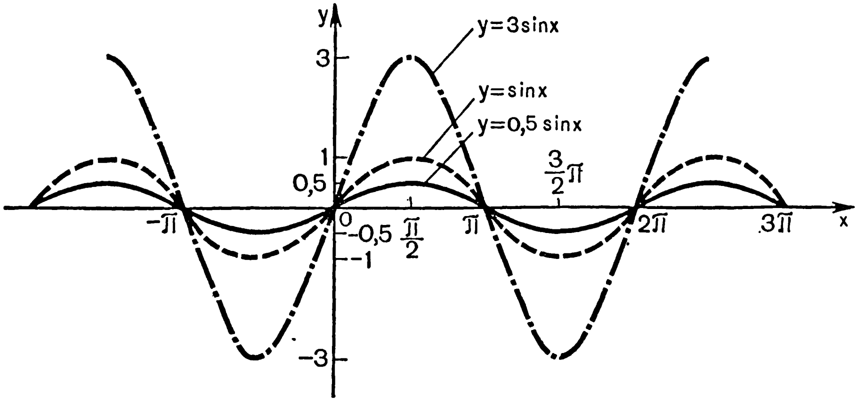


Рис. 112

если $k>1$, то растяжение в k раз;

если $0<k<1$, то сжатие в $\frac{1}{k}$ раз.

3. Построить график функции $y=1{,}5-2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Решение. Запишем функцию так:

$$y=-2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+1{,}5.$$

Преобразуем выражение в скобках таким образом, чтобы выявить «добавок» к аргументу x:

$$y=-2\sin\left(3\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right)+1{,}5.$$

Строим график функции $y=-\sin x$.

Деформация по оси абсцисс (сжатие втрое) обязательно предшествует горизонтальному сдвигу оси ординат на $\left(+\frac{\pi}{12}\right)$, а деформация по оси ординат (растяжение вдвое) должна предшествовать вертикальному сдвигу оси абсцисс на $(-1{,}5)$, так как график весь поднимать сложнее.

Следовательно, порядок построения графика такой:
строим график функции $y=-\sin x$;
этот график сжимаем по оси абсцисс в 3 раза;
ось ординат переносим по горизонтали на $\frac{\pi}{12}$;
график растягиваем по оси ординат в 2 раза;
ось абсцисс переносим по вертикали на $-1{,}5$.

График функции построен на рисунке 113.

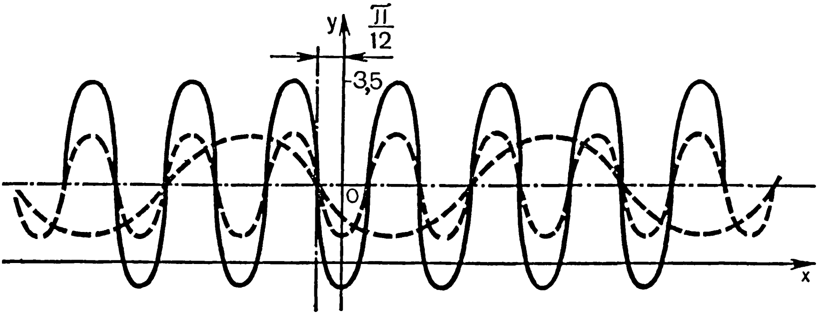


Рис. 113

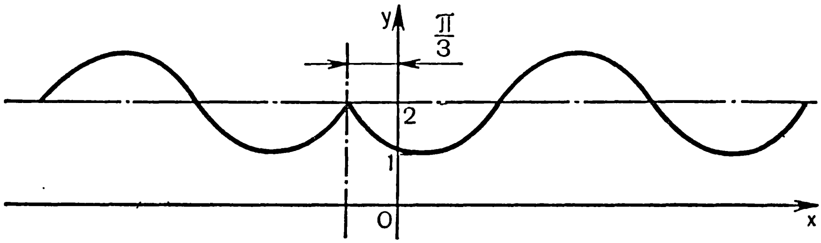


Рис. 114

4. Построить график функции $y=2-\sin\left|x+\frac{\pi}{3}\right|$.

Решение. 1-й способ. Строим график функции $y=$ $=-\sin|x|$. Ось ординат переносим на $+\frac{\pi}{3}$, а ось абсцисс — на -2 (рис. 114).

2-й способ. График имеет две ветви, уравнения которых различны.

1) Если $x+\frac{\pi}{3}\geqslant 0$, т. е. $x\geqslant -\frac{\pi}{3}$, то $y=2-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

2) Если $x+\frac{\pi}{3}<0$, т. е. $x<-\frac{\pi}{3}$, то $y=2-\sin\left(-\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)=$ $=2+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

Область определения функции — вся числовая прямая.
Интервал изменения функции определяем из условия

$$-1\leqslant -\sin\left|x+\frac{\pi}{3}\right|\leqslant 1, \text{ т. е. } -1+2\leqslant y\leqslant 1+2,\ 1\leqslant y\leqslant 3.$$

Общая точка для обеих ветвей графика: $x=-\frac{\pi}{3}$; $y=$ $=-\sin|0|+2=2$; точка $\left(-\frac{\pi}{3};\ 2\right)$.

1. Постройте график функции:

А. 1) $y=\sin 2x$; 2) $y=-\sin 2x$; 3) $y=1-0{,}5\sin 2x$;
4) $y=1-2\sin 2x$.

Б. 1) $y=1+0{,}5\sin(2x+60^\circ)$; 2) $y=1-0{,}5\cos(90^\circ-(2x-60^\circ))$.

В. 1) $y=\operatorname{tg} x\operatorname{ctg} x$; 2) $y=\sec x\,|\cos x|$; 3) $y=\operatorname{tg} x\cos x$;

4) $y=|\sin x|$; 5) $y=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$; 6) $y=2\sin x\,|\cos x|$;

7) $y=\sin x+|\sin x|$; 8) $y=(\sin x-\cos x)^2$.

Ответы. **1. А.** 1) и 2) Рис. 115; 3) и 4) рис. 116. **В.** 1) Рис. 117; 2) рис. 118; 3) график данной функции — синусоида с исклю-

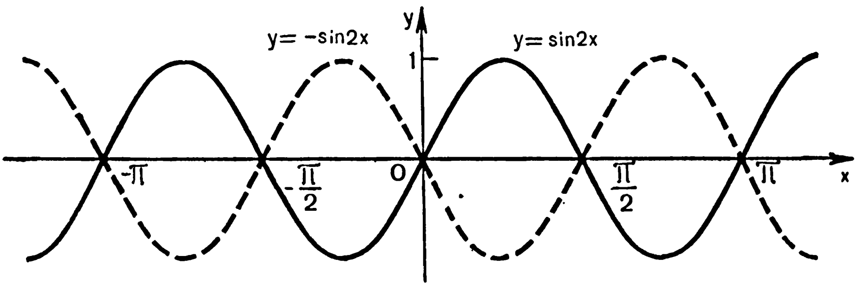


Рис. 115

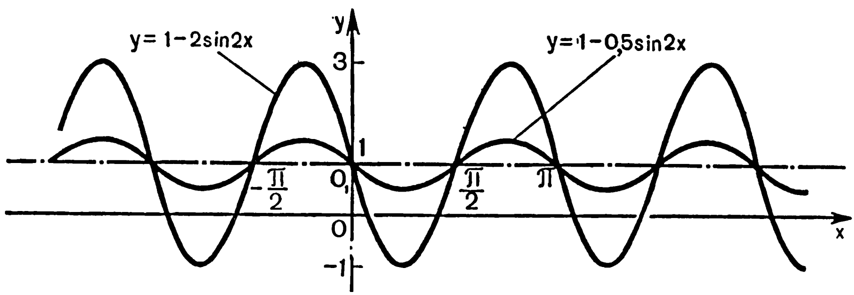


Рис. 116

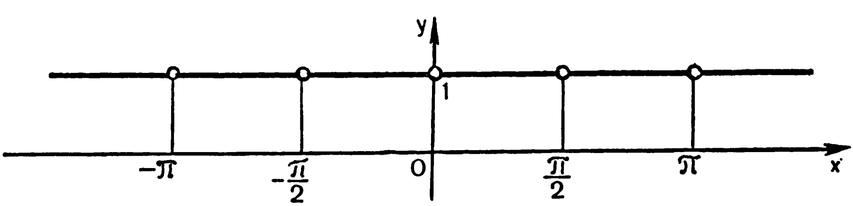


Рис. 117

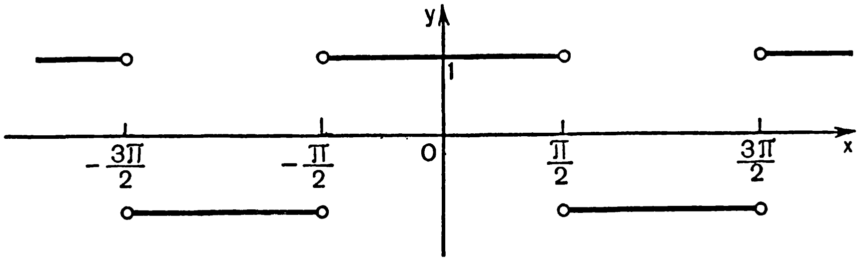


Рис. 118

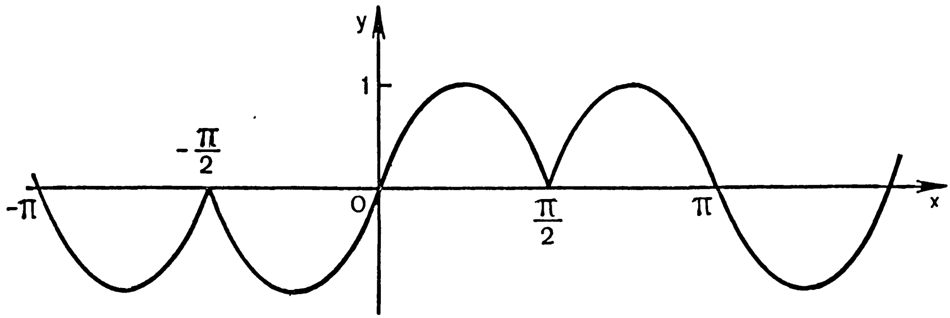


Рис. 119

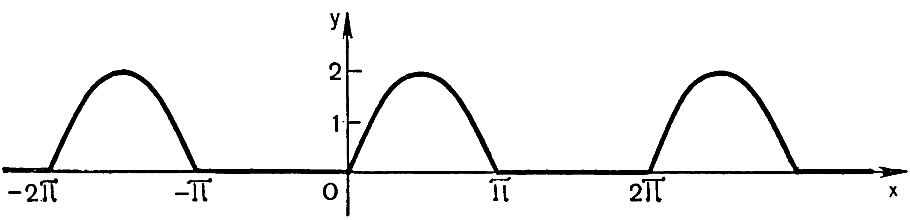


Рис. 120

ченными точками $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$; 6) рис. 119; 7) рис. 120; 8) после упрощения получите $y=1-\sin 2x$.

§ 2. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $y=\cos x$ И ЕЕ ГРАФИК

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Основные свойства функции $y=\cos x$:

а) область определения — множество всех действительных чисел;

б) множество значений — отрезок $[-1;\ 1]$, значит, косинус — функция ограниченная;

в) функция четная: $\cos(-x)=\cos x$ для всех $x\in R$;

г) функция периодическая с наименьшим положительным периодом 2π, т. е. $\cos(x+2\pi)=\cos x$ для всех $x\in R$;

д) $\cos x=0$ при $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$;

е) $\cos x>0$ для всех $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in Z$;

ж) $\cos x<0$ для всех $x\in\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in Z$;

з) функция убывает от 1 до -1 на промежутках $[2\pi k;\ \pi+2\pi k]$, $k\in Z$;

и) функция возрастает от -1 до 1 на промежутках $[-\pi+2\pi k;\ 2\pi k]$, $k\in Z$;

к) функция принимает наибольшее значение, равное 1, в точках $x=2\pi k$, $k\in Z$;

л) функция принимает наименьшее значение, равное -1, в точках $x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$.

2. Используя свойства косинуса, сначала строим его график на промежутке $[-\pi;\ \pi]$, т. е. на промежутке, длина которого равна периоду функции (рис. 121).

3. Перечисленные свойства функции $y=\cos x$ позволяют построить график этой функции на всей числовой прямой (рис. 122).

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Построить график функции:

1) $y=3\cos\frac{x}{2}$; 2) $y=\cos|x|$; 3) $y=|\cos x|$;

4) $y=2+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

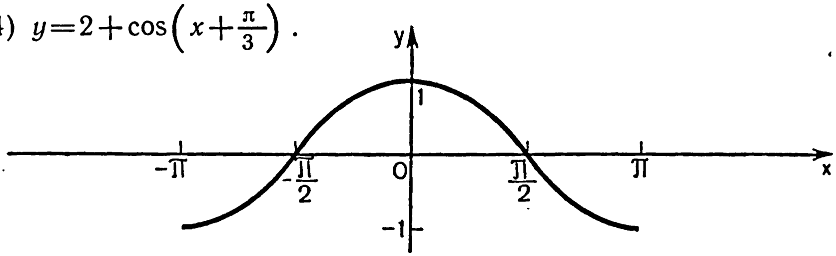


Рис. 121

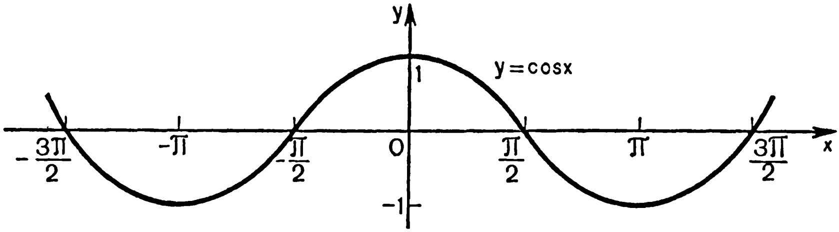


Рис. 122

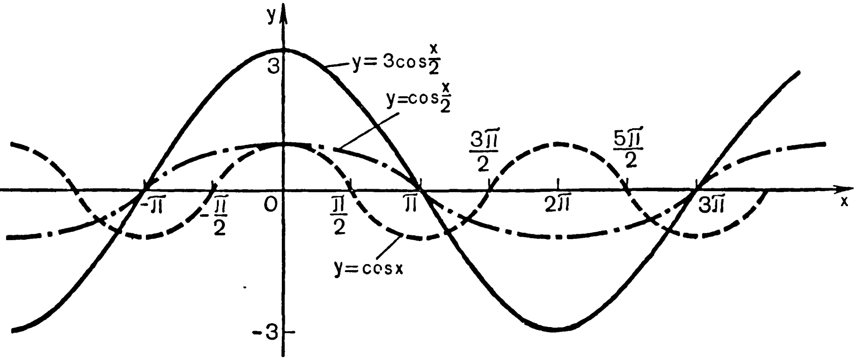


Рис. 123

Решение. 1) $y=3\cos\frac{x}{2}$. Мы знаем, как построить график функции $y=\cos x$ (на рисунке 123 он изображен штриховой линией). Растягивая график функции $y=\cos x$ вдоль оси абсцисс в 2 раза, получим график функции $y=\cos\frac{x}{2}$ (рис. 123).

Затем полученный график растягиваем еще раз, но теперь по оси ординат в 3 раза, получим график функции $y=3\cos\frac{x}{2}$ (рис. 123).

Замечание. В том, что график функции $y=\cos\frac{x}{2}$ пересекает ось абсцисс, можно убедиться так: $y=0$, т. е. $\cos\frac{x}{2}=0$, откуда $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k$, или $x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) $y=\cos|x|$.

$\cos|x|=\cos x$, так как $\cos x=\cos(-x)$. Следовательно, график данной функции тот же, что и график функции $y=\cos x$ (рис. 122).

3) $y=|\cos x|$.

При $\cos x\geqslant 0$ $y=\cos x$. Следовательно, на участке, где $\cos x\geqslant\geqslant 0$, график будет тот же, что и график функции $y=\cos x$ (на рисунке 124 эти участки показаны утолщенными линиями).

При $\cos x<0$ $y=-\cos x$. Следовательно, части графика функции $y=\cos x$, расположенные ниже оси абсцисс, зеркально отобразятся и будут расположены в верхней полуплоскости (как показано на рисунке 124 тонкими линиями).

4) $y=2+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

Строим график функции $y=\cos x$. Потом ось ординат переносим на $+\frac{\pi}{3}$. Затем ось абсцисс переносим на -2, т. е. на 2 единицы вниз. График данной функции изображен на рисунке 125.

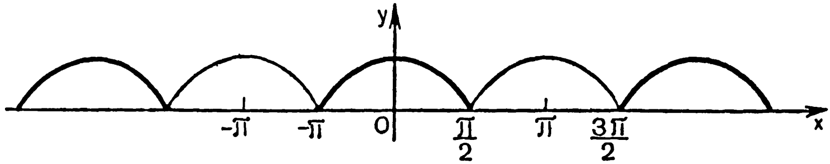


Рис. 124

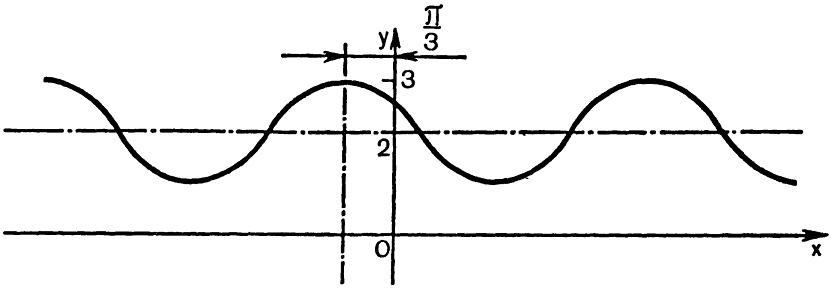


Рис. 125

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Постройте график функции:

А. 1) $y=\cos 2x$; 2) $y=-\cos 2x$; 3) $y=1-0{,}5\cos(-2x)$; 4) $y=1-2\cos 2x$.

Б. 1) $y=1+0{,}5\cos(-2x+60°)$; 2) $y=1-0{,}5\cos(2x+60°)$; 3) $y=\operatorname{ctg} x\,|\sin x|$.

В. 1) $y=4(\cos^4 x+\sin^4 x)$; 2) $y=\cos^2 x$; 3) $y=\sin^2 x$; 4) $y=\cos x+\sin x$.

Ответы: **Б.** 3) Рис. 126. **В.** 1) После понижения степеней и упрощения данная функция примет вид $y=3+\cos 4x$.

§ 3. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $y=\operatorname{tg} x$ И ЕЕ ГРАФИК

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Основные свойства функции $y=\operatorname{tg} x$:

а) область определения функции — множество всех действительных чисел, кроме чисел вида $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$;

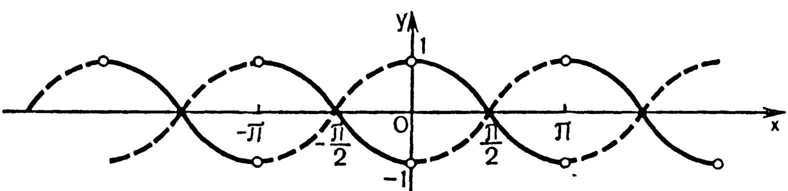


Рис. 126

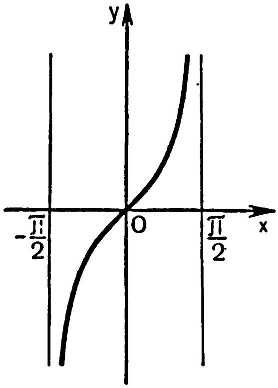


Рис. 127

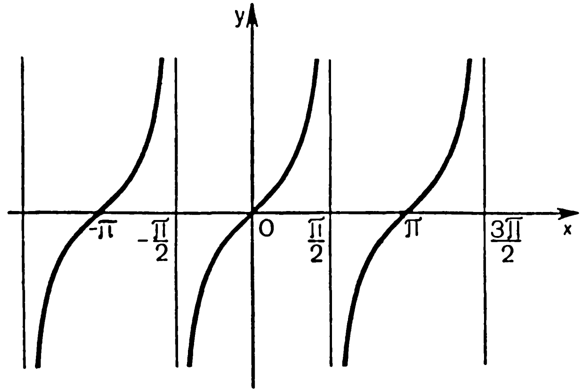


Рис. 128

б) множество значений — вся числовая прямая, таким образом, тангенс — функция неограниченная;

в) функция нечетная: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ для всех x из области определения;

г) функция периодическая с наименьшим положительным периодом π, т. е. $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$ для всех x из области определения;

д) $\operatorname{tg} x = 0$ при $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

е) $\operatorname{tg} x > 0$ для всех $x \in \left(\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$;

ж) $\operatorname{tg} x < 0$ для всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$;

з) функция возрастает на промежутках $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

2. Все перечисленные свойства тангенса позволяют построить его график сначала на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. на промежутке, длина которого равна периоду функции (рис. 127), и затем на всей числовой прямой (рис. 128).

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Построить график функции:

1) $y = \operatorname{tg} 2x$; 2) $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$; 3) $y = \operatorname{tg}|x|$; 4) $y = |\operatorname{tg} x|$.

Решение. 1) $y = \operatorname{tg} 2x$.

а) Область определения — x — любое число, кроме $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, где $k \in \mathbf{Z}$, так как $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

б) область значений (изменения) — вся числовая прямая, т. е. $(-\infty; +\infty)$;

в) функция не является ограниченной;

г) функция не принимает экстремальных значений;

д) функция периодическая, главный период $T=\frac{\pi}{2}$, так как $y=\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg}(2x+\pi)=\operatorname{tg} 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$;

е) функция не является монотонной на всей области определения, но функция возрастает на каждом из промежутков $\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, где $k \in \mathbf{Z}$;

точки пересечения с осями координат — точки $\left(\frac{\pi k}{2}; 0\right)$, где $k \in \mathbf{Z}$, так как $\sin 2x=0$ при $2x=\pi k$, т. е. $x=\frac{\pi k}{2}$.

Учитывая периодичность, построим график функции $y=\operatorname{tg} 2x$ (рис. 129).

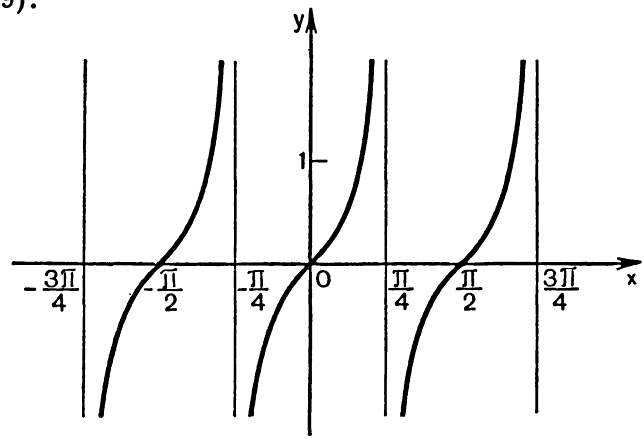


Рис. 129

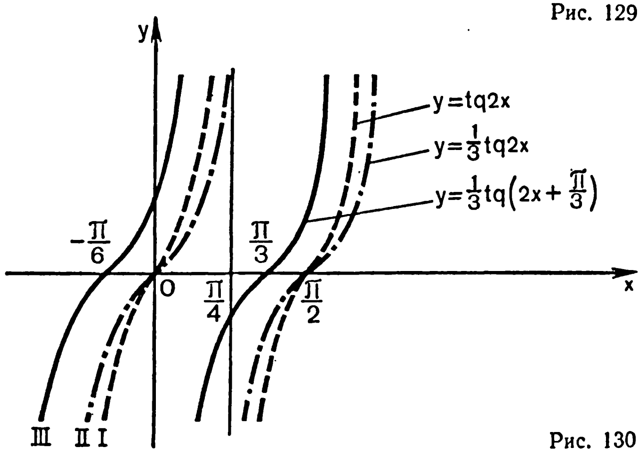


Рис. 130

2) $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}(2x+60°)$. Для построения графика функции сначала представим ее в виде $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)$. Выполнив сжатие тангенсоиды $y=\operatorname{tg} x$ по оси абсцисс вдвое, получим график функции $y=\operatorname{tg} 2x$ (рис. 130). Выполнив сжатие графика функции $y=\operatorname{tg} 2x$ по оси ординат в 3 раза, получим кривую $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg} 2x$ (рис. 130).

Осуществив параллельный перенос этой кривой влево на расстояние $\frac{\pi}{6}$, получим график данной функции (рис. 130).

З а м е ч а н и е. Функция не определена при $\cos(2x+60°)=0$, т. е. в точках $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, где $k \in \boldsymbol{Z}$.

Функция обращается в нуль при $\sin(2x+60°)=0$, т. е. график пересекает ось абсцисс в точках $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3) $y=\operatorname{tg}|x|$. Функция четная, так как $\operatorname{tg}|-x|=\operatorname{tg}|x|$. При $x>0$ график искомой функции тот же, что и график функции $y=\operatorname{tg} x$. График искомой функции $y=\operatorname{tg}|x|$ изображен на рис. 131.

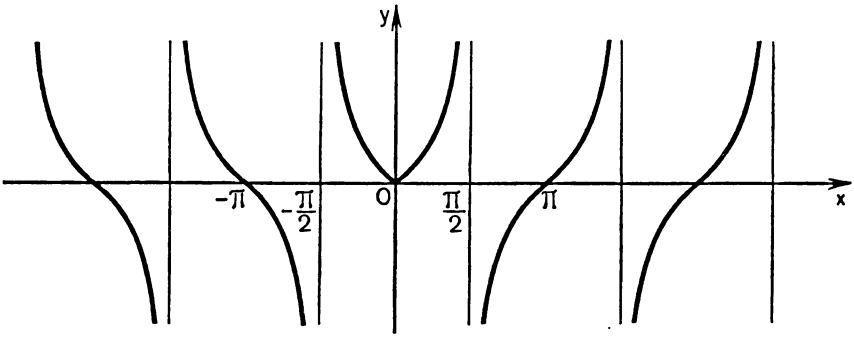


Рис. 131

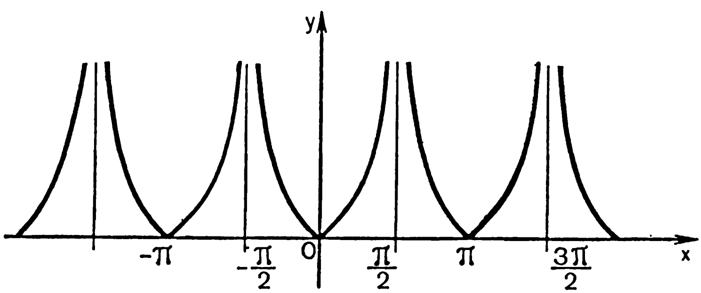


Рис. 132

4) $y=|\operatorname{tg} x|$. График этой функции получается из графика функции $y=\operatorname{tg} x$, если ту часть графика, которая расположена в верхней полуплоскости, оставить без изменения, а часть графика, расположенную в нижней полуплоскости, зеркально отобразить относительно оси Ox (рис. 132).

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Постройте график функции:

А. 1) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 2) $y=-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 3) $y=3\operatorname{tg} 3x$; 4) $y=-3\operatorname{tg} 2x$.

Б. 1) $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $y=3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$; 3) $y=|\operatorname{tg}|x||$;
4) $y=\operatorname{tg} x+1$; 5) $y=2\operatorname{tg} 3x-2$.

§ 4. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $y=\operatorname{ctg} x$ И ЕЕ ГРАФИК

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Основные свойства функции $y=\operatorname{ctg} x$:

а) область определения — множество всех действительных чисел, кроме чисел вида πk, $k\in \mathbf{Z}$;

б) множество значений — вся числовая прямая, таким образом, котангенс — функция неограниченная;

в) функция нечетная: $\operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg} x$ для всех x из области определения;

г) функция периодическая с наименьшим положительным периодом π, т. е. $\operatorname{ctg}(x+\pi)=\operatorname{ctg} x$ для всех x из области определения;

д) $\operatorname{ctg} x=0$ при $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$;

е) $\operatorname{ctg} x>0$ для всех $x\in\left(\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in \mathbf{Z}$;

ж) $\operatorname{ctg} x<0$ для всех $x\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \pi k\right)$, $k\in \mathbf{Z}$.

з) функция убывает на каждом из промежутков $(\pi k,\ \pi+\pi k)$, $k\in \mathbf{Z}$.

2. Используя свойства котангенса, сначала построим его график на промежутке $(0;\ \pi)$, т. е. на промежутке, длина которого равна периоду функции (рис. 133), а затем на всей числовой прямой (рис. 134).

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Построить график функции $y=\operatorname{ctg} x$, используя формулу приведения.

Решение. По формуле приведения $\operatorname{ctg} x=-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

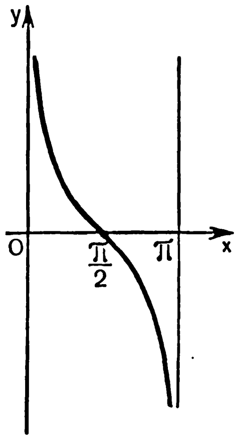


Рис. 133

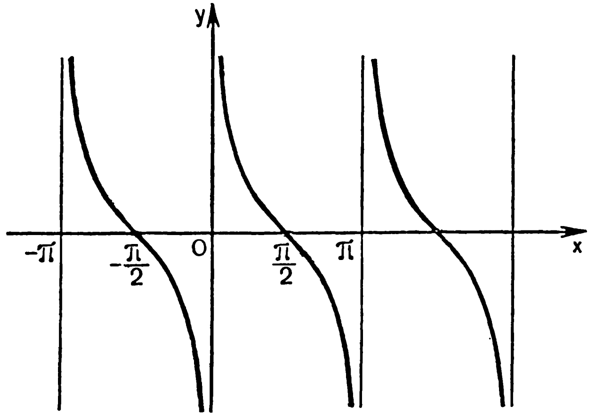


Рис. 134

Поэтому график функции $y=\operatorname{ctg} x$ можно получить из графика функции $y=\operatorname{tg} x$ с помощью параллельного переноса влево на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 135) и симметрией относительно оси абсцисс. График функции $y=\operatorname{ctg} x$ изображен на рисунке 136.

2. Построить график функции $y=\frac{1}{3}\operatorname{ctg}(2x-120°)$.

Р е ш е н и е. На рисунке 137 изображен график функции $y=\frac{1}{3}\operatorname{ctg}(2x-120°)=\frac{1}{3}\operatorname{ctg} 2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$, полученный посредством сдвига графика функции $y=\frac{1}{3}\operatorname{ctg} 2x$ вправо по оси абсцисс на расстояние $\frac{\pi}{3}$.

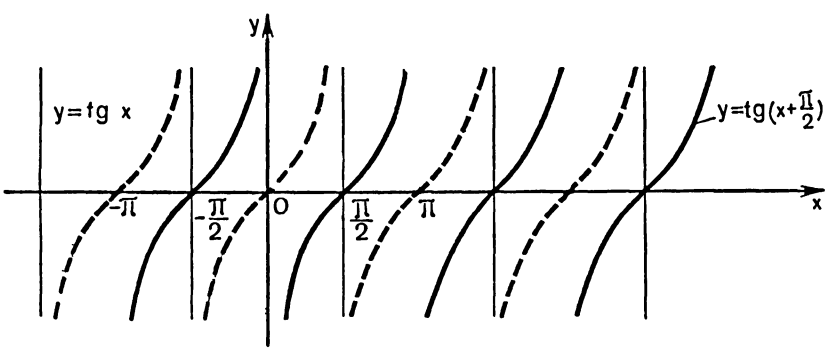


Рис. 135

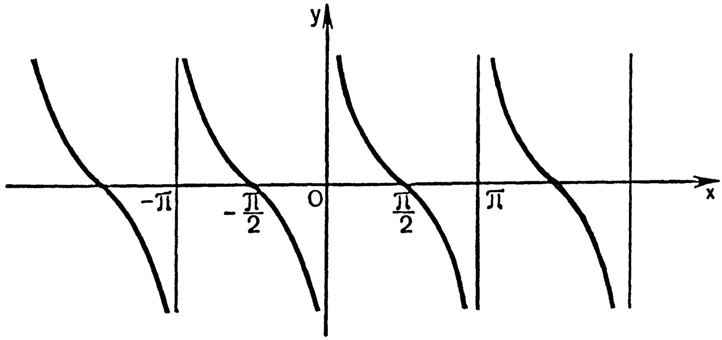


Рис. 136

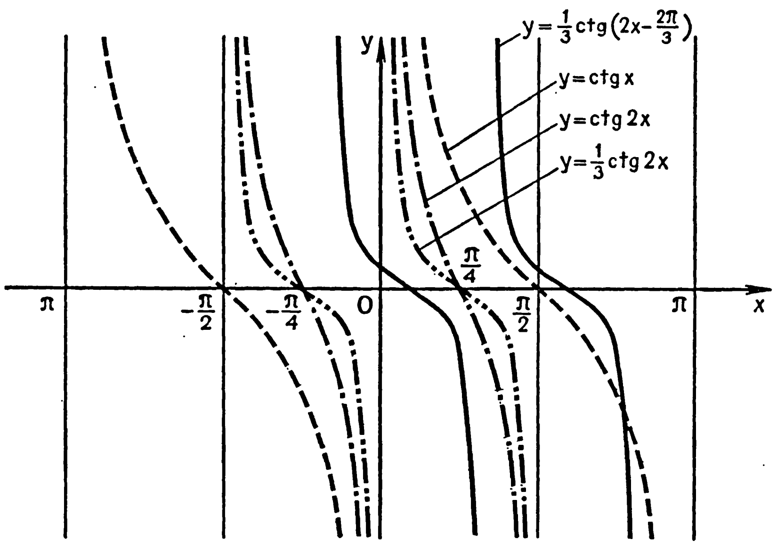


Рис. 137

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Постройте график функции:

А. 1) $y=-\operatorname{ctg} 2x$; 2) $y=\operatorname{ctg} 3x$; 3) $y=\frac{1}{3}\operatorname{ctg} 3x$.

Б. 1) $y=2\operatorname{ctg}(x-30°)$; 2) $y=2\operatorname{ctg}(30°-x)$; 3) $y=\operatorname{ctg}(-x-60°)$.

В. 1) $y=\operatorname{ctg}|x|$; 2) $y=|\operatorname{ctg}(x-45°)|$; 3) $y=3\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+30°\right)$.

§ 5. НАХОЖДЕНИЕ ПЕРИОДОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Периоды тригонометрических функций.
Период функции $y=\sin x$ равен 2π.
Период функции $y=\cos x$ равен 2π.
Период функции $y=\operatorname{tg} x$ равен π.
Период функции $y=\operatorname{ctg} x$ равен π.

2. Период функции, представляющей собой сумму непрерывных и периодических функций, равен наименьшему кратному периодов слагаемых, если он существует.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Найти период функции:
1) $y=3\sin 4x+6\sin x+\sin(x-\pi)+5\sin(x+\pi)$;
2) $y=\sin 2x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 3) $y=\cos\frac{x}{3}+\operatorname{tg}\frac{x}{5}$;
4) $y=\sin\frac{3x}{4}+5\cos\frac{2x}{3}$.

Решение. 1) Упростим данную функцию:

$$3\sin 4x+6\sin x+\sin(x-\pi)+5\sin(x+\pi)=$$
$$=3\sin 4x+6\sin x-\sin x-5\sin x=3\sin 4x.$$

Следовательно, $y=3\sin 4x$. Период этой функции равен $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$. Этот же период имеет и данная функция.

Периоды остальных слагаемых заданной функции не учитываются, так как сумма этих слагаемых тождественно равна нулю, т. е.

$$6\sin x+\sin(x-\pi)+5\sin(x+\pi)=0.$$

2) $y=\sin 2x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Так как $\sin 2x=\sin(2x+2\pi)=\sin(2(x+\pi))$, то период первого слагаемого функции равен π: $T_1=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

Так как $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\pi\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{x+2\pi}{2}\right)$, то период второго слагаемого равен 2π: $T_2=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$.

Периодом заданной функции будет наименьшее кратное периодов ее слагаемых, т. е. $T=2\pi$.

3) Так как $\cos\frac{x}{3}=\cos\left(\frac{x}{3}+2\pi\right)=\cos\left(\frac{x+6\pi}{3}\right)$, то период первого слагаемого функции 6π: $T_1=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$.

Так как $\operatorname{tg}\frac{x}{5}=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{5}+\pi\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{x+5\pi}{5}\right)$, то период этой функции равен 5π: $T_2=\frac{\pi}{\frac{1}{5}}=5\pi$.

Чтобы найти период данной функции, найдем наименьшее кратное чисел 6π и 5π, т. е. $T=30\pi$.

4) $y=\sin\frac{3x}{4}+5\cos\frac{2x}{3}$.

$\sin\frac{3x}{4}=\sin\left(\frac{3x}{4}+2\pi\right)=\sin\frac{3}{4}\left(x+\frac{8\pi}{3}\right)$; период $T_1=\frac{2\pi}{\frac{3}{4}}=\frac{8\pi}{3}$.

$\cos\frac{2x}{3}=\cos\left(\frac{2x}{3}+2\pi\right)=\cos\frac{2}{3}(x+3\pi)$; период $T_2=\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$.

Периодом данной функции будет наименьшее кратное чисел $\frac{8\pi}{3}$ и 3π, т. е. $T=24\pi$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Найдите период функции:

1) $y=\sin x+\cos x$; 2) $y=\sin x+\sin 2x$; 3) $y=\operatorname{tg} x+\sin x$;
4) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}+\cos 3x$; 5) $y=2\operatorname{ctg} 3x-4\operatorname{tg} 2x$;
6) $y=\cos^2 x$.

Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства синуса.
2. Перечислите основные свойства косинуса.
3. Перечислите основные свойства тангенса.
4. Перечислите основные свойства котангенса.

ГЛАВА XVII

§ 1. АРКСИНУС И АРККОСИНУС
§ 2. АРКТАНГЕНС И АРККОТАНГЕНС

§ 1. АРКСИНУС И АРККОСИНУС

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Теорема. Пусть функция f возрастает (или убывает) на промежутке I, а число a — любое из значений, принимаемых f на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x)=a$ имеет единственный корень на промежутке I.

2. Функция синус возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и принимает значения от -1 до 1. Таким образом (по теореме), для любого числа a, такого, что $-1 \leqslant a \leqslant 1$, на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ существует единственный корень b уравнения $\sin x=a$. Это число b называют арксинусом числа a и обозначают $\arcsin a$ (рис. 138).

3. Итак, арксинусом числа a называется такое число α из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, что его синус равен a.

Математическая запись данного предложения такова: $\arcsin a=\alpha$, если $\sin \alpha=a$, где $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, $-1 \leqslant a \leqslant 1$.

4. Значение арксинуса можно найти по таблицам или пользуясь калькулятором.

5. Функция косинус убывает на отрезке $[0; \pi]$ и принимает все значения от -1 до 1. Поэтому для любого числа a, такого, что $-1 \leqslant a \leqslant 1$, на отрезке $[0; \pi]$ существует единственный корень уравнения $\cos x=a$.

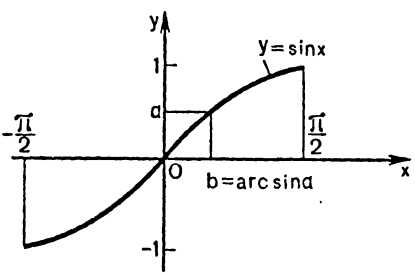


Рис. 138

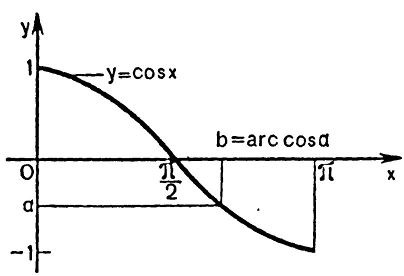


Рис. 139

Это число b называют арккосинусом числа a и обозначают $\arccos a$ (рис. 139).

6. Итак, арккосинусом числа a называется такое число α из отрезка $[0; \pi]$, что его косинус равен a.

Математическая запись данного предложения такова: $\arccos a=\alpha$, если $\cos\alpha=a$, где $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$, $-1\leqslant a\leqslant 1$.

7. Значение арккосинуса можно найти по таблицам или пользуясь калькулятором.

8. При всех допустимых значениях аргумента x справедливы тождества:

а) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$, если $|x|\leqslant 1$.

Например, $\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$.

б) $\sin(\arcsin x)=x$, если $-1\leqslant x\leqslant 1$.

Например, $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

в) $\cos(\arccos x)=x$, если $-1\leqslant x\leqslant 1$.

Например, $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$.

г) $\arcsin(\sin x)=x$, когда $|x|\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Например, $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)=\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$

д) $\arccos(\cos x)=x$, когда $0\leqslant x\leqslant\pi$.

Например, $\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)=\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

9. Функция $y=\arcsin x$ является нечетной, т. е. $\arcsin(-x)=-\arcsin x$.

10. Функция $y=\arccos x$ не является ни четной, ни нечетной.

Например, $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\right)$, а $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}\right)$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Вычислить:

1) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)+\cos\left(-3\arcsin\frac{1}{2}\right)$;

2) $\arcsin\frac{1}{2}-3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arccos\frac{1}{2}+2\arcsin 1-2\arccos(-1)$;

3) $\cos(\arcsin x+2\arccos y)$; 4) $\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{12}{13}\right)$.

Решение. 1) Пусть $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\alpha$, тогда $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ и $\alpha\in[0;\ \pi]$. Следовательно, $\alpha=\frac{2\pi}{3}$.

Пусть $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=\beta$, тогда $\sin\beta=-\frac{1}{2}$ и $\beta\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$. Следовательно, $\beta=-\frac{\pi}{6}$.

Пусть $\arcsin\frac{1}{2}=\gamma$, тогда $\sin\gamma=\frac{1}{2}$ и $\gamma\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$. Следовательно, $\gamma=\frac{\pi}{6}$.

Сделаем подстановку в данное выражение:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)+\cos\left(-3\cdot\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=$$
$$=\sin\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}.$$

2) $\frac{\pi}{6}-3\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}+2\cdot\frac{\pi}{2}-2\cdot\pi=0.$

3) Обозначая $\arcsin x=\alpha$, $\arccos y=\beta$, имеем $\sin\alpha=x$, $\cos\beta=y$, где $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\beta\leqslant\pi$.

Таким образом, наша задача сводится к отысканию $\cos(\alpha+2\beta)$ по известным значениям $\sin\alpha$ и $\cos\beta$.

Раскрывая косинус суммы, находим:

$$\cos(\alpha+2\beta)=\cos\alpha\cos2\beta-\sin\alpha\sin2\beta=$$
$$=\cos\alpha(\cos^2\beta-\sin^2\beta)-\sin\alpha\cdot2\sin\beta\cos\beta, \qquad (1)$$

где $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}$, а $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-y^2}$.

Оба радикала берутся со знаком плюс, так как $\cos\alpha>0$ и $\sin\beta>0$.

Поэтому выражение (1) примет вид:

$$\cos(\alpha+2\beta)=\sqrt{1-x^2}(y^2-1+y^2)-2xy\sqrt{1-y^2}=$$
$$=(2y^2-1)\sqrt{1-x^2}-2xy\sqrt{1-y^2}.$$

4) Обозначая $\arcsin\frac{5}{13}=\alpha$, $\arcsin\frac{12}{13}=\beta$, имеем $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, а $\sin\beta=\frac{12}{13}$, где $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$. Таким образом, наша задача сводится к отысканию $\sin(\alpha+\beta)$ по известным значениям $\sin\alpha$ и $\sin\beta$.

Раскрывая синус суммы находим:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha. \qquad (1)$$

В выражении (1) нам неизвестны $\cos\alpha$ и $\cos\beta$. Найдем значения этих функций. Нам известно, что α и β принадлежат первой четверти, поэтому

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\frac{12}{13},$$

$$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\frac{144}{169}}=\frac{5}{13}.$$

Выражение (1) примет вид:

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}\cdot\frac{5}{13}+\frac{12}{13}\cdot\frac{12}{13}=\frac{25}{169}+\frac{144}{169}=1.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Вычислите:

А. 1) $\arcsin 0$; 2) $\arccos 0$; 3) $\arcsin 1$; 4) $\arccos 1$; 5) $\arcsin(-1)$; 6) $\arccos(-1)$; 7) $\arcsin\frac{1}{2}$; 8) $\arccos\frac{1}{2}$.

Б. 1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. В. Докажите равенство:

1) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$; 2) $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$;

3) $\sin(\arcsin x)=x$; 4) $\cos(\arccos x)=x$.

3. Найдите область определения функции:

А. 1) $y=\arcsin x$; 2) $y=\arcsin(x-1)$; 3) $y=\arccos(2x-1)$.

Б. 1) $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$; 2) $y=\arcsin\frac{2}{x-1}$;

3) $y=\arccos\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

В. 1) $y=\arcsin(x^2-2x)$; 2) $y=\arccos(x-1)$.

4. Вычислите:

В. 1) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$; 2) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)+\arcsin\frac{4}{5}\right)$;

3) $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{7}\right)$; 4) $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$;

5) $\arccos\left(\cos\frac{6\pi}{5}\right)$; 6) $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)$.

Ответы. **1. А.** 1) 0; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) 0; 5) $-\frac{\pi}{2}$; 6) π. **Б.** 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{2}$. **3. А.** 1) $[-1;\ 1]$; 2) $[0;\ 2]$; 3) $[0;\ 1]$. **Б.** 1) $[-1;\ 3]$; 2) $(-\infty;\ -1]\cup[3;\ \infty)$; 3) $(-\infty;\ 0{,}5]$. **В.** 1) $[1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}]$; 2) $[0;\ 2]$. **4.** 1) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 2) $\frac{63}{65}$; 3) $\frac{8\sqrt{3}}{49}$; 4) $-\frac{\pi}{7}$; 5) $\frac{4\pi}{5}$; 6) $\frac{7\pi}{18}$.

§ 2. АРКТАНГЕНС И АРККОТАНГЕНС

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ функция тангенс возрастает и принимает все значения из $\boldsymbol{R}$.

2. Для любого числа a в интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ существует единственный корень b уравнения $\operatorname{tg} x=a$.

Это число b называют арктангенсом числа a и обозначают $\operatorname{arctg} a$ (рис. 140).

3. Итак, арктангенсом числа a называется такое число α из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, что его тангенс равен a.

4. Арккотангенсом числа a называется такое число α из интервала $(0;\ \pi)$, что его котангенс равен a.

5. При всех допустимых значениях аргумента x справедливы тождества:

а) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)=x$, если $|x|<\frac{\pi}{2}$.

Например, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$.

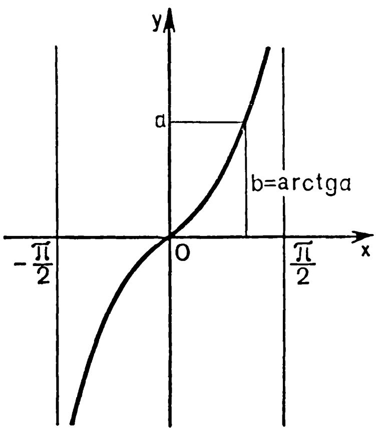


Рис. 140

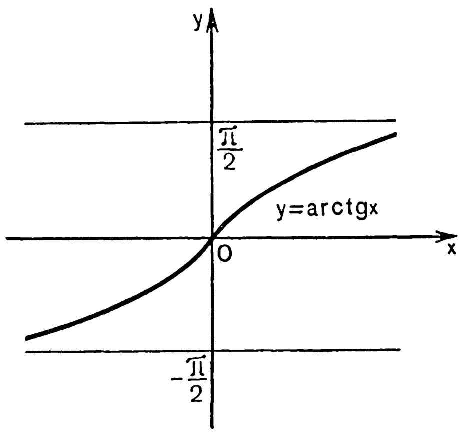


Рис. 141

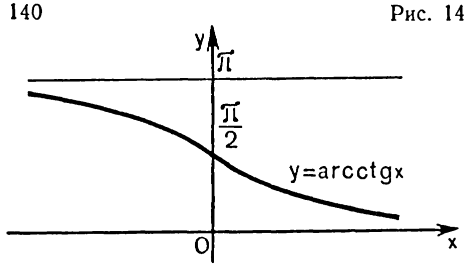


Рис. 142

б) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x$ для любого действительного x.
Например, $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 1)=1$.
в) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)=x$ для любого действительного x.
Например, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}\sqrt{3})=\sqrt{3}$.
г) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x)=x$, если $0<x<\pi$.
Например, $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$.

д) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}$.

6. Функция $y=\operatorname{arctg} x$ является нечетной, т. е. $\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg}(x)$.

7. Функция $y=\operatorname{arcctg} x$ не является ни четной, ни нечетной. Например, $\operatorname{arcctg} 1=\frac{\pi}{4}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1\right)$, а $\operatorname{arcctg}(-1)=\frac{3\pi}{4}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}=-1\right)$.

8. График функции $y=\operatorname{arctg} x$ имеет две асимптоты: $y=-\frac{\pi}{2}$ и $y=\frac{\pi}{2}$ (рис. 141).

9. График функции $y=\operatorname{arcctg} x$ имеет две асимптоты: $y=0$ и $y=\pi$ (рис. 142).

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Вычислить:

1) $\operatorname{arctg}(-1)$;
2) $\operatorname{arcctg}(-1)$;
3) $\sin(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})+\arcsin(-1)-\operatorname{arctg} 0)$;
4) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(-1)+2\operatorname{arcctg}(-1)+\operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$.

Решение. 1) Пусть $\operatorname{arctg}(-1)=\alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha=-1$ и $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Отсюда следует, что $\alpha=-\frac{\pi}{4}$. Таким образом, $\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$.

2) Пусть $\operatorname{arcctg}(-1)=\alpha$, тогда $\operatorname{ctg}\alpha=-1$ и $\alpha\in(0;\ \pi)$. Следовательно, $\alpha=\frac{3\pi}{4}$. Таким образом, $\operatorname{arcctg}(-1)=\frac{3\pi}{4}$.

3) Пусть $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=\alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3}$ и $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, $\alpha=-\frac{\pi}{3}$.

Пусть $\arcsin(-1)=\beta$, тогда $\sin\beta=-1$ и $\beta\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$. Следовательно, $\beta=-\frac{\pi}{2}$.

Пусть $\operatorname{arctg} 0=\gamma$, тогда $\operatorname{tg}\gamma=0$ и $\gamma\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, $\gamma=0$.

С учетом найденных значений данное выражение принимает вид: $\sin\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+0\right)=\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=-\sin\frac{5\pi}{6}=-0{,}5$.

4) Пусть $\operatorname{arctg}(-1)=\alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha=-1$, $\alpha=-\frac{\pi}{4}$.

Пусть $\operatorname{arcctg}(-1)=\beta$, тогда $\operatorname{ctg}\beta=-1$, $\beta=\frac{3\pi}{4}$.

Пусть $\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\gamma$, тогда $\operatorname{ctg}\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\gamma=\frac{\pi}{3}$.

С учетом найденных значений данное выражение принимает вид:

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}+2\cdot\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{ctg}15^\circ=-\operatorname{ctg}(45^\circ-30^\circ)=$$
$$=-\frac{1+\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}30^\circ}{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}30^\circ}=-2-\sqrt{3}.$$

2. Упростить:

1) $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right)$;

3) $\operatorname{tg}\left(2\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$; 4) $\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3$.

Решение. 1) Пусть $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)=\alpha$, тогда $\cos\alpha=-\frac{1}{4}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Значит, $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{15}$. Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{4}\sqrt{15}}{-\frac{1}{4}}=-\sqrt{15}$.

2) Пусть $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=\alpha$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}=\beta$, тогда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{4}$, $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$.

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right)=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=$$
$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{2}{9}.$$

3) Пусть $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)=\alpha$, тогда $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$, где $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Таким образом, наша задача сводится к отысканию

$\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ и $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$. Найдем $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=$
$=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Найдем тангенс: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

По формуле тангенса двойного угла имеем:

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}{1-\frac{5}{4}}=4\sqrt{5}.$$

4) Обозначим $\operatorname{arctg} 2+\operatorname{arctg} 3$ через α. Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2+\operatorname{arctg} 3)=$$
$$=\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2)+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3)}{1-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3)}=\frac{2+3}{1-2\cdot 3}=-1.$$

Теперь остается найти α по заданному значению тангенса этого аргумента. Для того чтобы эта задача была однозначной, нужно указать пределы изменения α. Так как $\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg} 2<\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg} 3<\frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg} 2+\operatorname{arctg} 3<\pi$, т. е. $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Следовательно, $\alpha=\frac{3\pi}{4}$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Вычислите:

А. 1) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$;

2) $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})\right)$;

3) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\operatorname{arctg} 1+\arccos 0+\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

4) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos(-0{,}5)+\operatorname{arctg} 1\right)$.

Б. $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arccos(-0{,}5)+\operatorname{arcctg} 1\right)$.

В. 1) $\sin(2\operatorname{arctg} 3)$; 2) $\sin(\operatorname{arcctg}(-2))$.

2. Вычислите:

А. 1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 1+\operatorname{arctg}(-1))$; 2) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)$;

3) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 0+\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$; 4) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} 0+\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$.

Б. 1) $\operatorname{tg}\left(2 \operatorname{arctg} 1+2 \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$;

2) $\operatorname{tg}(4 \operatorname{arctg}(-1)+3 \operatorname{arctg} \sqrt{3})$.

В. 1) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{3}{8}\right)$; 2) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 10)$;

3) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$; 4) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{7}{8}\right)\right)$;

5) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg} \frac{5}{4}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2}+\operatorname{arctg} \frac{1}{4}\right)$;

7) $\cos(\operatorname{arctg} x)$.

3. Сравните числа:

В. 1) $\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$ и $\operatorname{arctg} \frac{1}{4}$; 2) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)$ и $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{4}\right)$;

3) $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$ и $\operatorname{arctg} \frac{2}{3}$; 4) $\operatorname{arctg}(-3)$ и $\operatorname{arctg}(-2)$.

Ответы. **1. А.** 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) -1; 4) 1. **Б.** $-2-\sqrt{3}$. **В.** 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **2. А.** 1) 0; 2) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $-\sqrt{3}$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **Б.** 1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **В.** 6) $\frac{6}{7}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Контрольные вопросы

1. Что означает геометрически $\arcsin x$?
2. Постройте график функции $y=\arcsin x$. Укажите ее область определения и множество значений.
3. Что означает геометрически $\arccos x$?
4. Постройте график функции $y=\arccos x$. Укажите ее область определения и множество значений.
5. Как изменяется функция $y=\arccos x$ на отрезке $[-1; +1]$?
6. Эквивалентны ли выражения:
   а) $y=\arccos x$ и $\cos y=x$; б) $y=\arcsin x$ и $\sin x=y$?
7. Эквивалентны ли выражения:
   а) $y=\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{tg} y=x$; б) $y=\operatorname{arcctg} x$ и $\operatorname{ctg} x=y$?
8. Что называется:
   а) арктангенсом; б) арккотангенсом?
9. Какой функцией, возрастающей или убывающей, является:
   а) арктангенс; б) арккотангенс?

ГЛАВА XVIII

§ 1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВИДА $\cos x = a$

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Формула для корней уравнения $\cos x = a$, где $-1 \leqslant a \leqslant 1$, имеет вид:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \qquad (1)$$

2. Частные случаи:

а) $\cos x = 1, \; x = 2\pi k, \; k \in \mathbf{Z};$ (2)

б) $\cos x = 0, \; x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \; k \in \mathbf{Z};$ (3)

в) $\cos x = -1, \; x = \pi + 2\pi k, \; k \in \mathbf{Z}.$ (4)

3. Формула для корней уравнения $\cos^2 x = a$, где $0 \leqslant a \leqslant 1$, имеет вид:

$$x = \pm \arccos \sqrt{a} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \qquad (5)$$

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Решить уравнение

$$\left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos 3x + \frac{1}{2}\right) \cos 2x \left(\cos \frac{x}{2} - 1\right)\left(\cos \frac{3x}{2} + 1\right) \times$$
$$\times \left(\cos^2 2x - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Решение. Область определения — x — любое действительное число. Левая часть уравнения содержит шесть сомножителей. Правая часть уравнения равна нулю. Произведение равно нулю тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю. Следовательно, надо решить шесть уравнений.

1) $\cos 2x-\frac{1}{2}=0$ (1), $\cos 2x=\frac{1}{2}$. По формуле (1)

$$2x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Так как $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, то имеем:

$$2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z};\ x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Следовательно, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$, — корни уравнения (1) и исходного уравнения.

2) $\cos 3x+\frac{1}{2}=0$ (2), $\cos 3x=-\frac{1}{2}$. По формуле (1)

$$3x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Так как $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$, то

$$3x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z};\ x=\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Следовательно, $x=\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}k,\ k\in\boldsymbol{Z}$ являются корнями уравнения (2) и исходного уравнения.

3) $\cos 2x=0$ (3). По формуле (3)

$$2x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z};\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Следовательно, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\boldsymbol{Z}$ являются корнями уравнения (3) и исходного уравнения.

4) $\cos\frac{x}{2}-1=0$ (4), $\cos\frac{x}{2}=1$. По формуле (2)

$$\frac{x}{2}=2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z};\ x=4\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Следовательно, $x=4\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$, являются корнями уравнения (4) и исходного уравнения.

5) $\cos\frac{3x}{2}+1=0$ (5), $\cos\frac{3x}{2}=-1$. По формуле (4)

$$\frac{3x}{2}=\pi+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z};\ x=\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3},\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Следовательно, $x=\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3}$, $k\in \boldsymbol{Z}$, являются корнями уравнения (5) и исходного уравнения.

6) $\cos^2 2x-\frac{1}{2}=0$ (6), $\cos^2 2x=\frac{1}{2}$. По формуле (5)

$$2x=\pm\arccos\sqrt{\frac{1}{2}}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

Так как $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$, то

$$2x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z};\ x=\pm\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

Следовательно, $x=\pm\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in \boldsymbol{Z}$ являются как корнями уравнения (6), так и исходного.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Решите уравнение:

А. 1) $\cos 2x=0$; 2) $\cos 2x=1$; 3) $\cos 3x=-1$; 4) $2\cos 4x=2$.

Б. 1) $\cos 2x=\frac{1}{\sqrt{2}}$; 2) $\cos 3x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos\frac{x}{2}=1{,}5$.

В. 1) $2\cos^2 3x-\cos 3x=0$; 2) $\cos 2x-3\cos^2 2x=0$;

3) $\cos\left(-\frac{x}{2}\right)+0,(3)=0$; 4) $\cos\left(\frac{x}{2}-1\right)=\cos^2\left(1-\frac{x}{2}\right)$.

2. Решите уравнение:

В. 1) $\frac{1+\cos 2x}{\cos x}=0$; 2) $\frac{\cos 4x-1}{\cos(-x)}=0$; 3) $\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos x}=0$; 4) $\frac{\cos 3x}{\operatorname{tg} x}=0$.

3. Может ли синус (косинус) быть равным:

В. 1) $\frac{\sqrt{10}}{3}$; 2) $a+\frac{1}{a}$; 3) $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; 4) $\frac{2\sqrt{ba}}{a+b}$ $(a>0,\ b>0)$?

Ответы. 1. **А.** 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 2) πk, $k\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi k}{2}$, $k\in \boldsymbol{Z}$. **Б.** 1) $\pm\frac{\pi}{8}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3}$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\pm\frac{\pi}{12}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 4) корней нет. **В.** 1) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\pm 2\left(\pi-\arccos\frac{1}{3}\right)+4\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 4) $2+\pi+2\pi k$, $2+4\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$. 2. **В.** 2) πk, $k\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\pi+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

§ 2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВИДА $\sin x=a$

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Формула для корней уравнения $\sin x=a$, где $-1\leqslant a\leqslant 1$, имеет вид:

$$x=(-1)^k \arcsin a+\pi k,\ k\in Z. \qquad (1)$$

2. Частные случаи:

а) $\sin x=0,\ x=\pi k,\ k\in Z;$ (2)

б) $\sin x=1,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z;$ (3)

в) $\sin x=-1,\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z.$ (4)

3. Формула для корней уравнения $\sin^2 x=a$, где $0\leqslant a\leqslant 1$, имеет вид:

$$x=\pm\arcsin\sqrt{a}+\pi k,\ k\in Z. \qquad (5)$$

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Решите уравнение

$$\left(\sin 2x-\frac{1}{2}\right)\left(\sin 3x+\frac{1}{2}\right)\sin 2x\left(\sin\frac{x}{2}-1\right)(\sin 1{,}5x+1)\times$$
$$\times\left(\sin^2 2x-\frac{1}{8}\right)=0.$$

Р е ш е н и е. Область определения — x — любое действительное число. Левая часть уравнения содержит шесть сомножителей, правая часть уравнения равна нулю. Произведение равно нулю тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю. Следовательно, данное уравнение распадается на шесть уравнений. Решим их.

1) $\sin 2x-\frac{1}{2}=0$ (1), $\sin 2x=\frac{1}{2}$. По формуле (1)

$$2x=(-1)^k \arcsin\frac{1}{2}+\pi k,\ k\in Z.$$

Так как $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, то

$$2x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z;\ x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$$

Следовательно, $x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$ являются корнями уравнения (1) и исходного уравнения.

2) $\sin 3x+\frac{1}{2}=0$ (2), $\sin 3x=-\frac{1}{2}$. По формуле (1)

$$3x=(-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi k,\ k\in Z.$$

Так как $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$, то

$$3x=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi k,\ k\in Z;\ x=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{18}\right)+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z.$$

Учитывая, что $(-1)^k\left(-\frac{\pi}{18}\right)=(-1)^k\cdot(-1)\cdot\frac{\pi}{18}=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{18}$, получаем:

$$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z.$$

Следовательно, $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$, являются корнями уравнения (2) и исходного уравнения.

3) $\sin 2x=0$ (3). По формуле (2)

$$2x=\pi k,\ k\in Z;\ x=\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$$

Следовательно, $x=\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$, являются корнями уравнения (3) и исходного уравнения.

4) $\sin\frac{x}{2}-1=0$ (4), $\sin\frac{x}{2}=1$. По формуле (3)

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z;\ x=\pi+4\pi k,\ k\in Z.$$

З а м е ч а н и е. Множество корней $x=\pi+4\pi k$, $k\in Z$, является подмножеством корней $x=\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$. Поэтому эту серию корней: $x=\pi+4\pi k$ — мы не включаем в окончательный ответ.

5) $\sin 1{,}5x+1=0$ (5), $\sin\frac{3x}{2}=-1$. По формуле (4)

$$\frac{3x}{2}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z;\ x=-\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3},\ k\in Z.$$

Следовательно, $x=-\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3}$, $k\in Z$, являются корнями уравнения (5) и исходного уравнения.

6) $\sin^2 2x-\frac{1}{8}=0$ (6), $\sin^2 2x=\frac{1}{8}$. По формуле (5)

$$2x=\pm\arcsin\sqrt{\frac{1}{8}}+\pi k,\ k\in Z.$$

Так как $\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, то можно записать, что

$$2x=\pm\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}+\pi k,\ k\in Z;$$

$$x=\pm\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$$

Следовательно, $x=\pm\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$, являются корнями уравнения (6) и исходного уравнения.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Решите уравнение:

А. 1) $\sin 4x=-1$; 2) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin 2x=\frac{1}{2}$; 4) $\sin 4x=1$; 5) $2\sin x=\sqrt{2}$; 6) $2\sin 2x=-1$; 7) $\sin x(2\sin x-\sqrt{2})=0$.

Б. 1) $\sin x=\sin 10°$; 2) $\sin^2 x=\frac{3}{4}$; 3) $\sin^2(x-30°)=\frac{1}{2}$; 4) $|\sin(45°-x)|=\frac{1}{\sqrt{2}}$; 5) $(\sin x+\sin 10°)\left(\sin^2 x+\frac{3}{4}\right)\times$ $\times\left(\sin^2(x-30°)+\frac{1}{2}\right)=0$.

В. 1) $\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x=1$; 2) $\cos 3x\sin 3x=\frac{1}{2}$; 3) $\sin 2x\cos 2x-2\sin 2x=0$; 4) $\sin^2 2x=3\sin 2x$; 5) $\sin^2 3x+\sin x+\cos^2 3x=0$; 6) $\frac{\sin 3x}{\sin x}=0$; 7) $\frac{\sin x}{\sin 3x}=0$.

Ответы. **А.** 1) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 2) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$; 3) $(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 4) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 5) $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$; 6) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$; 7) πk и $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$.

Б. 1) $(-1)^k\arcsin 10°+180°k$, $k\in Z$; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in Z$; 3) $30°\pm$ $\pm45°+180°k$, $k\in Z$; 4) $\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$. **В.** 1) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}$, $k\in Z$; 2) $\frac{\pi}{12}+$ $+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$; 3) $\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 4) $\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 5) $\frac{-\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$; 6) $\pm\frac{\pi}{3}+$ $+\pi k$, $k\in Z$; 7) корней нет.

§ 3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВИДА $\operatorname{tg} x=a$

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Формула для корней уравнения $\operatorname{tg} x=a$ имеет вид:

$$x=\operatorname{arctg} a+\pi k,\ k\in Z. \qquad (1)$$

2. Частные случаи:

а) $\operatorname{tg} x=0,\ x=\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z};$ (2)

б) $\operatorname{tg} x=1,\ x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z};$ (3)

в) $\operatorname{tg} x=-1,\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$ (4)

3. Формула для корней уравнения $\operatorname{tg}^2 x=a$, где $a\in[0;\ \infty)$, имеет вид:

$$x=\pm\operatorname{arctg}\sqrt{a}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}. \qquad (5)$$

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 3x\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)(\operatorname{tg} x-1)(\operatorname{tg} 2x-\sqrt{3})\left(\operatorname{tg}^2 x-\frac{1}{3}\right)=0. \qquad (1)$$

Решение. Область определения данного уравнения:

$$\begin{cases} \cos 3x\neq 0, \\ \cos\frac{x}{2}\neq 0, \\ \cos x\neq 0, \\ \cos 2x\neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, \\ \frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, \\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, \\ 2x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, \end{cases} \quad \begin{cases} x\neq\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\ k\in \boldsymbol{Z} & \text{(рис. 143);} \\ x\neq\pi+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z} & \text{(рис. 144);} \\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z} & \text{(рис. 145);} \\ x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in \boldsymbol{Z} & \text{(рис. 146).} \end{cases}$$

Нанесем все исключенные точки на одну единичную окружность (рис. 147).

Чтобы решить данное уравнение (1), надо приравнять каждый сомножитель нулю и решить получившиеся уравнения.

1) $\operatorname{tg} 3x=0$. По формуле (2)

$$3x=\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z};\ x=\frac{\pi k}{3},\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

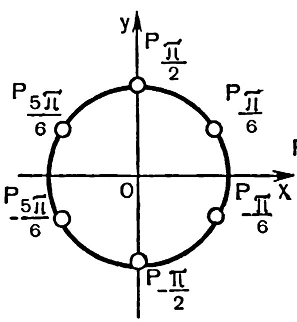


Рис. 143

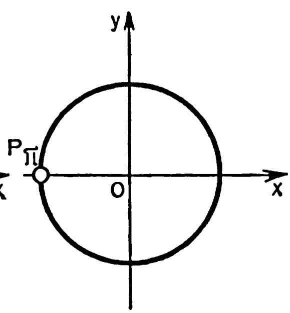


Рис. 144

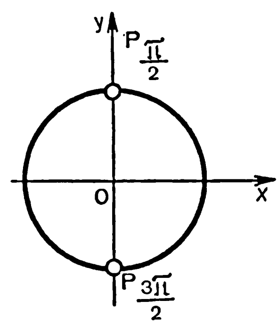


Рис. 145

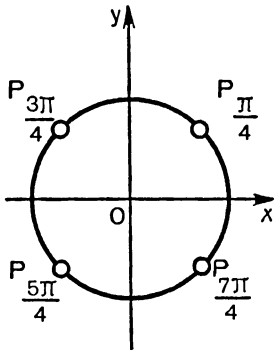


Рис. 146

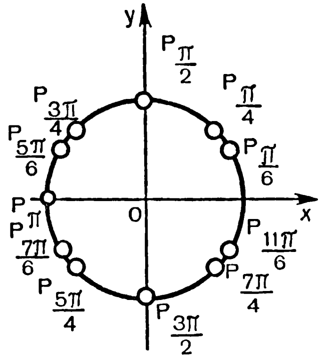


Рис. 147

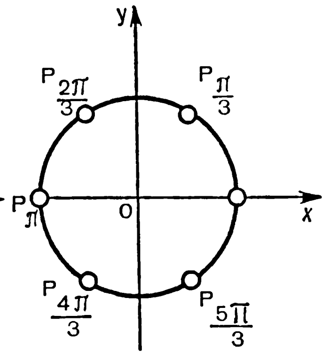


Рис. 148

Нанесем эти точки на единичную окружность (рис. 148).

2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1=0$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-1$. По формуле (4)

$$\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z};$$

$$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Нанесем найденные корни уравнения на единичную окружность (рис. 149).

3) $\operatorname{tg}x-1=0$, $\operatorname{tg}x=1$. По формуле (3)

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Нанесем найденные корни уравнения на единичную окружность (рис. 150).

4) $\operatorname{tg}2x-\sqrt{3}=0$, $\operatorname{tg}2x=\sqrt{3}$. По формуле (1)

$$2x=\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

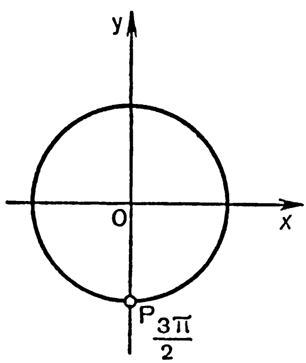


Рис. 149

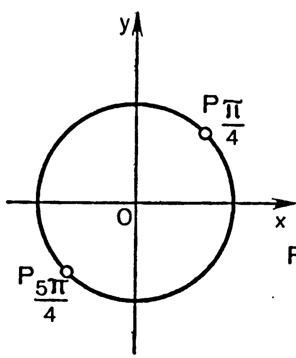


Рис. 150

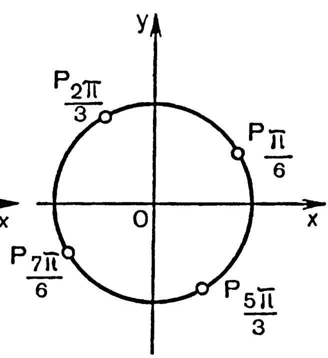


Рис. 151

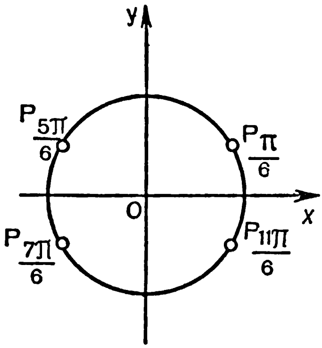


Рис. 152

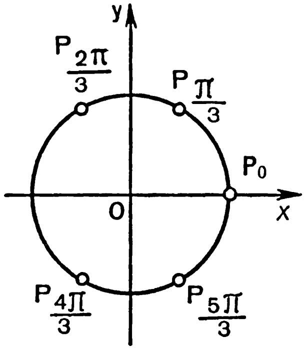


Рис. 153

Так как $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, то можно записать, что

$$2x=\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z};$$

$$x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbf{Z}.$$

Нанесем найденные корни уравнения на единичную окружность (рис. 151).

5) $\operatorname{tg}^2 x-\frac{1}{3}=0$, $\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{3}$. По формуле (5)

$$x=\pm\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Так как $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$, то можно записать, что

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Нанесем найденные корни уравнения на единичную окружность (рис. 152).

Теперь из множества полученных корней отберем корни данного уравнения. Для этого нанесем все найденные решения на единичную окружность и исключим из них точки, нанесенные на рисунке 147. Получим ответ: $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$ (рис. 153).

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Решите уравнение:

А. 1) $\operatorname{tg}2x=0$; 2) $\operatorname{tg}3x=0$; 3) $\operatorname{tg}2x=1$; 4) $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$.

Б. 1) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-30^\circ\right)=0$; 2) $\operatorname{tg}(3x+60^\circ)=\sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg}4x=3$.

В. 1) $\frac{\operatorname{tg}2x}{\sin x}=0$; 2) $\frac{\operatorname{tg}x}{\sin x}=0$; 3) $\frac{\cos x}{\operatorname{tg}2x}=0$; 4) $\frac{\operatorname{tg}2x}{\cos x}=0$.

2. Решите уравнение:

А. 1) $\operatorname{tg} x-1=0$; 2) $\operatorname{tg} 2x+1=0$; 3) $2\operatorname{tg} 3x=2$; 4) $-2\operatorname{tg} 3x=2$.

Б. 1) $\operatorname{tg} 2x\cos x=0$; 2) $\operatorname{tg} x\cos 2x=0$; 3) $\operatorname{tg}^2 x=1$.

В. 1) $3\operatorname{tg}^2 3x=1$; 2) $\operatorname{tg} x(3\operatorname{tg}^2 x+1)=0$; 3) $\operatorname{tg} x=2-\sqrt{5}$.

3. Решите уравнение:

В. 1) $\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\operatorname{tg}\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=$ $=\sqrt{3}$.

Ответы. 1. А. 1) $\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 2) $\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$; 3) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 4) $60°+180°k$, $k\in Z$. В. 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$; 2) и 3) нет решений; 4) πk, $k\in Z$. 2. А. 1) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$; 2) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 3) $\frac{\pi}{12}+$ $+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$; 4) $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$. Б. 1) $\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 2) πk, $k\in Z$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 3) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$. В. 1) $\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$; 2) πk, $k\in Z$; 3) $-\operatorname{arctg}(\sqrt{5}-2)+\pi k$, $k\in Z$. 3. В. 1) $-\frac{\pi}{2}+3\pi k$, $k\in Z$; 2) πk, $k\in Z$; 3) $\frac{7\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$.

§ 4. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ПРИВОДИМЫХ К КВАДРАТНОМУ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Заметим, что если тригонометрическое уравнение целого вида содержит только синусы или косинусы (синусы и косинусы), то область допустимых значений переменной — множество действительных чисел, так как эти функции определены для любого действительного значения. Поэтому в дальнейшем при рассмотрении таких уравнений, как

$$a\sin^2 f(x)+b\sin f(x)+c=0 \text{ или } a\cos^2 f(x)+b\sin f(x)+c=0 \text{ и т. п.,}$$

область допустимых значений переменной не устанавливается.

2. Справедливы соотношения:

а) $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ (1); б) $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$. (2)

3. Формулы корней уравнений:

а) $\sin x=a$, $x=(-1)^k\arcsin a+\pi k$, $k\in Z$; (3)

б) $\cos x=a$, $x=\pm\arccos a+2\pi k$, $k\in Z$; (4)

в) $ax^2+bx+c=0$, $x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$. (5)

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Решить уравнение:
1) $8\sin^2 x-6\sin x-5=0$; 2) $8\cos^2 x+6\sin x-3=0$;
3) $8\sin^2 x+6\cos x-3=0$.

Решение. 1) $8\sin^2 x-6\sin x-5=0$. Обозначим $\sin x$ через y, тогда данное уравнение можно записать в виде

$$8y^2-6y-5=0.$$

Мы получим квадратное уравнение относительно y. Решая его, найдем:

$$y=\frac{3\pm 7}{8};\ y_1=-\frac{1}{2},\ y_2=\frac{5}{4}.$$

Следовательно, $\sin x=-\frac{1}{2}$ или $\sin x=\frac{5}{4}$.

Решим уравнение $\sin x=-\frac{1}{2}$.

$$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

Решим уравнение $\sin x=\frac{5}{4}$. Это уравнение корней не имеет, так как $\sin x$ не может быть больше единицы.

2) $8\cos^2 x+6\sin x-3=0$. Заменяя $\cos^2 x$ через $1-\sin^2 x$, получим $8(1-\sin^2 x)+6\sin x-3=0$, $8\sin^2 x-6\sin x-5=0$. Пришли к уравнению, рассмотренному в упражнении 1).

3) $8\sin^2 x+6\cos x-3=0$. Заменяя $\sin^2 x$ через $1-\cos^2 x$, получим:

$$8(1-\cos^2 x)+6\cos x-3=0, \quad (1)$$
$$8\cos^2 x-6\cos x-5=0.$$

Введем новую переменную. Обозначим $\cos x$ через y. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$8y^2-6y-5=0. \quad (2)$$

Корни уравнения (2): $y_1=-\frac{1}{2}$, $y_2=\frac{5}{4}$. Следовательно, $\cos x=$ $=-\frac{1}{2}$ или $\cos x=\frac{5}{4}$.

Решим уравнение $\cos x=-\frac{1}{2}$:

$$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

Решим уравнение $\cos x=\frac{5}{4}$. Это уравнение корней не имеет, так как $\cos x$ не может быть больше единицы.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Решите уравнение:

А. 1) $\sin^2 x-2\sin x-3=0$; 2) $\cos^2 x-2\cos x-3=0$;
3) $2\sin^2 x+3\cos^2 x+2\sin x=0$;
4) $2\cos^2 x+3\sin^2 x+2\cos x=0$.

Б. 1) $3\cos 2x=7\sin x$; 2) $2\cos 2x=7\cos x$;
3) $\sin^2 \frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}=-2$.

В. 1) $\sin^4 \frac{x}{2}-\cos^4\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$; 2) $\cos^4 x-\sin^4 x=\frac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $\cos^2 x+4\sin^2 x=2\sin 2x$; 4) $\sin^2 x-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin 2x=\cos^2 x$;
5) $4(1+\cos x)=3\cos\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}$; 6) $4(1-\cos x)=3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

Ответы. **А.** 1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\pi+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$. **Б.** 1) $(-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{4}\right)+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$. **В.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{12}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 5) $\pi+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; $\pm 2\arccos\frac{1}{3}+4\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

§ 5. РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Справедливы соотношения:

1) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$; 2) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$; 3) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$;
4) $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$; 5) $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$.

2. Уравнение вида $a\operatorname{tg} x+b\operatorname{ctg} x+c=0$ приводится к квадратному уравнению одной тригонометрической функции путем замены $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

3. Уравнение вида $a\sin x+b\cos x=0$ $(a\neq 0,\ b\neq 0)$ называется однородным первой степени относительно $\sin x$ и $\cos x$. Оно решается делением обеих его частей на $\cos x\neq 0$. В результате получается уравнение вида $a\operatorname{tg} x+b=0$.

4. Уравнение вида

$$a\sin^2 f(x)+b\sin f(x)\cos f(x)+k\cos^2 f(x)=0 \qquad (1)$$

называется однородным уравнением второй степени относительно $\sin f(x)$ и $\cos f(x)$, если все три коэффициента a, b, k или какие-либо два из них отличны от нуля. Считая, что $a \neq 0$, разделим обе части уравнения на $\cos^2 f(x) \neq 0$, тогда получим:

$$a \operatorname{tg}^2 f(x) + b \operatorname{tg} f(x) + k = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) равносильно уравнению (1), так как корни уравнения $\cos^2 f(x) = 0$ не являются корнями уравнения (1).

Однако если $a = 0$, то уравнение (1) принимает вид $b \sin f(x) \times \times \cos f(x) + k \cos^2 f(x) = 0$, которое решается разложением левой части на множители: $\cos f(x)(b \sin f(x) + k \cos f(x)) = 0$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Решить уравнение:

1) $2 \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 1$; 2) $2 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$;
3) $22 \cos^2 x + 8 \sin x \cos x = 7$; 4) $2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$.

Решение. 1) $2 \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 1$. Область определения этого уравнения:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \sin x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x \neq \pi k; \end{cases} \quad x \neq \frac{\pi}{2} k, \ k \in Z.$$

Поскольку $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, а $\operatorname{tg} x$ обозначим через y, то получим новое уравнение $2y - \frac{1}{y} - 1 = 0$, которое приводится к квадратному уравнению

$$2y^2 - y - 1 = 0.$$

Корни этого уравнения $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{1}{2}$.

Если $y_1 = \operatorname{tg} x = 1$, то $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

Если $y_2 = \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$, то $x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

2) $2 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$.

Значения аргумента, при которых $\cos x = 0$, не являются решениями этого уравнения, так как если $\cos x = 0$, то должно выполняться равенство $2 \sin^2 x = 0$, но косинус и синус не могут быть одновременно равны нулю. Поэтому можно обе части данного уравнения разделить на $\cos^2 x$ или $\sin^2 x$ и при этом получить равносильное уравнение.

Разделим обе части на $\cos^2 x$, получим равносильное уравнение

$$2 \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 3 = 0.$$

Решим его: $\operatorname{tg} x = 1$, поэтому $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$, и $\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$, поэтому $x_2 = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

3) $22\cos^2 x+8\sin x\cos x=7$.

Так как $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, то данное уравнение можно заменить равносильным ему уравнением

$$22\cos^2 x+8\sin x\cos x=7(\sin^2 x+\cos^2 x).$$

Раскроем скобки, перенесем все члены из правой части уравнения в левую, сделаем приведение подобных членов. Получим:

$$7\sin^2 x-8\sin x\cos x-15\cos^2 x=0.$$

Это — однородное уравнение второй степени. Разделив обе части этого уравнения на $\cos^2 x$, найдем:

$$7\operatorname{tg}^2 x-8\operatorname{tg} x-15=0,$$

откуда $\operatorname{tg} x=-1$, значит, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$, или $\operatorname{tg} x=\frac{15}{7}$, значит, $x=\operatorname{arctg}\frac{15}{7}+\pi k$, $k\in Z$.

4) $2\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$. Вынесем общий множитель за скобки, получим $2\cos x\cdot(\sin x-\cos x)=0$. Решим это уравнение. $\cos x=0$, значит, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. $\sin x-\cos x=0$. Разделив обе части на $\cos x$, получим $\operatorname{tg} x=1$, значит, $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$.

З а м е ч а н и е. Если бы мы как в примерах 2 и 3, разделили обе части данного уравнения на $\cos^2 x$, то получили бы уравнение $2\operatorname{tg} x=2$. Корни этого уравнения: $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$. Как видно, мы потеряли бы серию корней — $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Решите уравнение:

А. 1) $\operatorname{tg} x+\frac{5}{\operatorname{tg} x}=6$; 2) $1+\operatorname{tg} x=2\operatorname{tg}^2 x$; 3) $7\operatorname{tg}^2 x-8\operatorname{tg} x=15$.

Б. 1) $\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg} x=2$; 2) $4\cos^2 x+\sin x=1$;
3) $2\sin^2 x+\cos^2 x=5\sin x\cos x$;
4) $2\sin^2 x-\sin x\cos x=\cos^2 x$.

В. 1) $\cos 2x=5\sin x+3$; 2) $\cos^2 x+3\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x=3$;
3) $22\cos^2 x+4\sin 2x=7$; 4) $2(\cos^4 x-\sin^4 x)=1$;
5) $2\cos^2(270°+x)+3\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=0$; 6) $\sin^3 x+\cos^3 x=0$.

О т в е т ы. **А.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$; $\operatorname{arctg} 5+\pi k$, $k\in Z$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$; $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi k$, $k\in Z$; 3) $\pi k-\frac{\pi}{4}$, $k\in Z$; $\pi k+\operatorname{arctg}\frac{15}{7}$, $k\in Z$.

Б. 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$; 4) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$; $\pi k-\operatorname{arctg} 0{,}5$, $k\in Z$.

В. 1) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$; 2) $\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$; $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$; 3) см. **А.** 3); 4) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$; 5) $\pm 120°+360°k,\ k\in Z$; 6) $-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$.

§ 6. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, РЕШАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛ СЛОЖЕНИЯ, ПОНИЖЕНИЯ СТЕПЕНИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Формулы:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta, \tag{1}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta, \tag{2}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha, \tag{3}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha, \tag{4}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \tag{5}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \tag{6}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha, \tag{7}$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha, \tag{8}$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}, \tag{9}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{10}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \tag{11}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{12}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}, \tag{13}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}, \tag{14}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \tag{15}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{16}$$

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Решить уравнение:

1) $1+\cos x+\cos 2x=0$; 2) $4\sin x-6\cos x=1$;
3) $\sin x-\sin 2x+\sin 3x-\sin 4x=0$;
4) $\cos 2x+\cos 8x-\sin x-\cos 6x=1$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;
5) $\sin^2 x+\cos^2 2x+\sin^2 3x=1{,}5$; 6) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{7}{8}$;
7) $2\sin 11x+\sqrt{3}\sin 5x+\cos 5x=0$;
8) $\sin^4 x+\cos^4 x-3\sin 2x+2{,}5\sin^2 2x=0$.

Решение. 1) $1+\cos x+\cos 2x=0$. По формуле (15) выражение $1+\cos 2x$ заменим выражением $2\cos^2 x$. Уравнение примет вид:

$$2\cos^2 x+\cos x=0.$$

Это уравнение разложим на множители:

$$\cos x(2\cos x+1)=0.$$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, т. е. $\cos x=0$ или $2\cos x+1=0$. $\cos x=0$, следовательно, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$; $\cos x=-\frac{1}{2}$, следовательно, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+$ $+2\pi k$, $k\in Z$.

2) $4\sin x-6\cos x=1$. Переходя к аргументу $\frac{x}{2}$, имеем:

$$4\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-6\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}.$$

После преобразования этого уравнения получим:

$$5\sin^2\frac{x}{2}+8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-7\cos^2\frac{x}{2}=0.$$

Это уравнение однородное. После деления на $\cos^2\frac{x}{2}$ получим $5\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+8\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}-7=0$. Корни уравнения:

$$x=2\pi k+2\,\mathrm{arctg}\frac{-4\pm\sqrt{51}}{5}.$$

3) $\sin x-\sin 2x+\sin 3x-\sin 4x=0$. Преобразуем это уравнение следующим образом:

$$(\sin x+\sin 3x)-(\sin 2x+\sin 4x)=0.$$

Преобразуем каждую из сумм по формуле (10) в произведение:

$$2\sin 2x\cos x-2\sin 3x\cos x=0.$$

Вынесем общий множитель $2\cos x$ за скобки:

$$2\cos x(\sin 2x-\sin 3x)=0.$$

Разность $\sin 2x - \sin 3x$ преобразуем в произведение, тогда уравнение примет вид:

$$2\cos x \cdot 2\sin\left(-\frac{x}{2}\right)\cos\frac{5x}{2}=0.$$

Решим это уравнение: $\cos x=0$, значит, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$; $\sin\left(-\frac{x}{2}\right)=0$, $-\sin\frac{x}{2}=0$, значит, $\frac{x}{2}=\pi k$, $x=2\pi k$, $k\in Z$; $\cos\frac{5x}{2}=0$, $\frac{5x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi k}{5}$, $k\in Z$.

Ответ. $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $2\pi k$, $\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi k}{5}$, $k\in Z$.

4) Найти корни уравнения $\cos 2x+\cos 8x-\cos 6x=1$, принадлежащие промежутку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Имеем:

$$\cos 2x+\cos 8x=1+\cos 6x.$$

Преобразуем левую часть уравнения по формуле (12), а правую по формуле (15), получим:

$$2\cos 5x\cos 3x=2\cos^2 3x,$$
$$2\cos 3x(\cos 5x-\cos 3x)=0.$$

Преобразуем разность по формуле (13) в произведение:

$$2\cos 3x(-2\sin 4x\sin x)=0.$$

Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому $\cos 3x=0$, значит, $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$ (рис. 154); $\sin x=0$, значит, $x=\pi k$, $k\in Z$ (рис. 155); $\sin 4x=0$, $x=\frac{\pi k}{4}$, $k\in Z$ (рис. 156).

Нанесем полученные корни на единичную окружность. Заме-

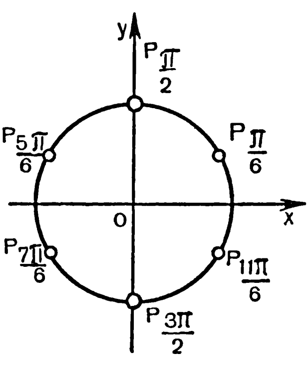


Рис. 154

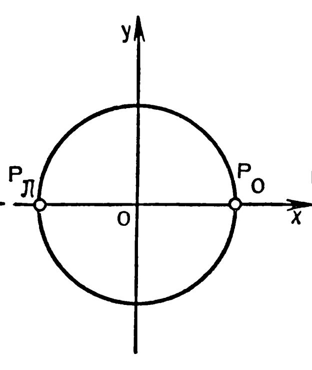


Рис. 155

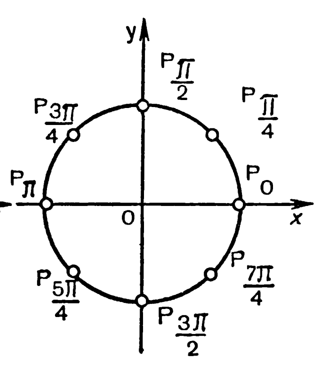


Рис. 156

тим, что множество корней $x=\pi k$ является подмножеством множества корней $x=\frac{\pi k}{4}$.

Отбирая из множеств $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$ и $x=\frac{\pi k}{4}$ значения x, принадлежащие промежутку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, получаем следующие значения корней: 0; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$.

5) $\sin^2 x+\cos^2 2x+\sin^2 3x=1{,}5$. Решим это уравнение способом понижения степени. Используя формулы (14) и (15), перепишем данное уравнение в виде

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}=\frac{3}{2},$$

$$1-\cos 2x+1+\cos 4x+1-\cos 6x=3,$$

$$\cos 2x+\cos 6x-\cos 4x=0.$$

Сумму преобразуем в произведение по формуле (12), получим:

$$2\cos 4x\cdot\cos 2x-\cos 4x=0.$$

Вынесем общий множитель за скобки:

$$\cos 4x\,(2\cos 2x-1)=0.$$

Произведение равно нулю тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю:

$$\cos 4x=0, \text{ значит, } x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4},\ k\in\boldsymbol{Z};$$

$$2\cos 2x=1,\ \cos 2x=\frac{1}{2}, \text{ значит, } x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

6) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{7}{8}$.

1-й способ решения. Воспользуемся равенством

$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x,$$

откуда

$$1-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{7}{8},\ 2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{8}.$$

Умножим обе части последнего уравнения на 2, получим:

20

$$2\sin x\cos x\cdot 2\sin x\cos x=\frac{1}{4},\ \sin^2 2x=\frac{1}{4},$$

$$\sin 2x=\pm\frac{1}{2},\ 2x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z};$$

$$x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

2-й **способ** решения. Понизим степень синуса и косинуса:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2=$$
$$=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2.$$

После преобразования получим:

$$\frac{2+2\cos^2 2x}{4}=\frac{7}{8},\ \cos^2 2x=\frac{3}{4},\ \cos 2x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

значит, $2x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\quad k\in \boldsymbol{Z}.$

7) $2\sin 11x+\sqrt{3}\sin 5x+\cos 5x=0$. Разделим левую и правую части этого уравнения на 2, получим:

$$\sin 11x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 5x+\frac{1}{2}\cos 5x=0.$$

Так как $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$, а $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$, то это уравнение примет вид:

$$\sin 11x+\cos\frac{\pi}{6}\sin 5x+\sin\frac{\pi}{6}\cos 5x=0,$$
$$\sin 11x+\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)=0.$$

Заменим сумму произведением по формуле (10):

$$2\sin\frac{11x+5x+\frac{\pi}{6}}{2}\cos\frac{11x-5x-\frac{\pi}{6}}{2}=0,$$
$$x=\frac{\pi}{96}(12k-1)\ \text{и}\ x=\frac{\pi}{36}(12k+7),\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

8) $\sin^4 x+\cos^4 x-3\sin 2x+\frac{5}{2}\sin^2 2x=0$. Имеем:

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x-3\sin 2x+\frac{5}{2}\sin^2 2x=0.$$

Так как $2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{2}\cdot 4\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{2}\sin^2 2x$, то последнее уравнение примет вид:

$$1-\frac{1}{2}\sin^2 2x-3\sin 2x+\frac{5}{2}\sin^2 2x=0,$$
$$2\sin^2 2x-3\sin 2x+1=0.$$

Полученное уравнение является квадратным относительно $\sin 2x$. Решив его, получим:

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z},\ \text{и}\ x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

Решите уравнение:

А. 1) $\sin x+\sin 3x=0$; 2) $\sin 5x-\sin x=0$; 3) $\cos 2x-\cos 6x=0$; 4) $\cos 4x+\cos 2x=0$.

Б. 1) $\sin x+\sin 3x=\sin 5x-\sin x$; 2) $\cos(3x+45°)+\cos 15°=0$; 3) $\operatorname{tg}(45°-x)=\operatorname{tg} 2x$; 4) $\sin(2x+30°)+\cos(2x+30°)=0$.

В. 1) $\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}=\operatorname{ctg} 2x$; 2) $\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=\operatorname{ctg} x$;

3) $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x=1+2\cos x$;

4) $\sin^2 x+0{,}5\sin 2x-2\cos^2 x=0$;

5) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2$;

6) $\sin x\sin 2x\sin 3x=0{,}25\sin 4x$;

7) $2\sin 17x+\sqrt{3}\cos 5x+\sin 5x=0$.

Ответы. А. 1) $\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 2) $\frac{\pi k}{2}$, $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$; 3) $\frac{\pi k}{4}$, $k\in Z$; 4) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$. Б. 1) $\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 2) $40°+120°k$, $50°+120°k$, $k\in Z$; 3) $15°+60°k$, $k\in Z$; 4) $-37°30'+90°k$, $k\in Z$. В. 1) $\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $k\in Z$; 2) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 3) $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; $\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$, $k\in Z$; 4) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\operatorname{arctg}(-2)+\pi k$, $k\in Z$; 5) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}$, $k\in Z$; 6) $\frac{\pi k}{2}$, $\frac{\pi}{8}(2k+1)$, $k\in Z$; 7) $\frac{\pi}{66}+\frac{\pi k}{11}$, $\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{6}$, $k\in Z$.

§ 7. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. При решении систем тригонометрических уравнений последние сводят либо к одному уравнению с одним неизвестным, либо к системе уравнений относительно самих аргументов или функций этих аргументов.

2. Рассмотрим лишь некоторые типы систем тригонометрических уравнений и наиболее употребительные методы их решения.

3. Решим систему вида

$$\begin{cases} \sin x\sin y=a, \\ \cos x\cos y=b. \end{cases} \qquad (1)$$

Решение. Складывая и вычитая уравнения системы (1), получаем равносильную систему

$$\begin{cases} \cos(x-y)=a+b, \\ \cos(x+y)=b-a. \end{cases} \qquad (2)$$

Система (2), а значит, и система (1) имеют решения в том и только в том случае, когда выполняются условия $-1 \leqslant a+b \leqslant 1$ и $-1 \leqslant b-a \leqslant 1$. Если эти условия выполнены, то

$$\begin{aligned} x-y &= \pm\arccos(a+b)+2\pi k, \\ x+y &= \pm\arccos(b-a)+2\pi n, \end{aligned} \tag{3}$$

где k и n — любые целые числа, а знаки выбираются произвольно.

Пусть $\arccos(a+b)=\alpha$, $\arccos(b-a)=\beta$.

Таким образом, формулы (3) определяют четыре серии решений:

1) $\begin{cases} x-y=\alpha+2\pi k, \\ x+y=\beta+2\pi n; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=-\alpha+2\pi k, \\ x+y=\beta+2\pi n; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y=\alpha+2\pi k, \\ x+y=-\beta+2\pi n; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-y=-\alpha+2\pi k, \\ x+y=-\beta+2\pi n. \end{cases}$

Решая эти системы, находим:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\pi(k+n), \\ y=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)+\pi(n-k); \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)+\pi(k+n), \\ y=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\pi(n-k); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+\pi(k+n), \\ y=-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\pi(n-k); \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\pi(k+n), \\ y=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+\pi(n-k); \end{cases}$$

4. Аналогично решается система вида

$$\begin{cases} \sin x\cos y=a, \\ \cos x\sin y=b. \end{cases}$$

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \sin x\cos y=-0{,}5, \\ \cos x\sin y=0{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=300^\circ, \\ \sin x=2\sin y; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1, \\ x+y=45^\circ; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sin x\sin y=0{,}75, \\ \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \sin^2 x+\cos^2 y=0{,}5, \\ x+y=45^\circ \end{cases}$

Решение.

$$1)\ \begin{cases} \sin x\cos y=-0{,}5, \\ \cos x\sin y=0{,}5. \end{cases} \tag{1}$$

Складывая и вычитая уравнения системы (1), получаем равносильную систему

$$\begin{cases} \sin x\cos y+\cos x\sin y=0, \\ \cos x\sin y-\sin x\cos y=1; \end{cases} \begin{cases} \sin(x+y)=0, \\ \sin(y-x)=1. \end{cases} \tag{2}$$

Решая систему (2), получаем:

$$\begin{cases} x+y=\pi n, \\ y-x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k,\ n\in Z. \end{cases} \tag{3}$$

Складывая уравнения системы (3), получаем $2y=\pi n+\frac{\pi}{2}+$ $+2\pi k$, или $y=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}+\pi k$.

Вычитая из первого уравнения системы (3) второе, получаем $2x=\pi n-\frac{\pi}{2}-2\pi k$, или $x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}-\pi k$.

Ответ. $x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}-\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; $y=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

2) $$\begin{cases} x-y=\frac{5\pi}{3}, \\ \sin x=2\sin y. \end{cases} \qquad (1)$$

Из первого уравнения системы (1) находим $y=x-\frac{5\pi}{3}$. Тогда второе уравнение системы примет вид:

$$\sin x=2\sin\left(x-\frac{5\pi}{3}\right). \qquad (2)$$

Упростим правую часть уравнения (2):

$$2\sin\left(x-\frac{5\pi}{3}\right)=2\left(\sin x\cos\frac{5\pi}{3}-\cos x\sin\frac{5\pi}{3}\right)=$$
$$=2\left(\sin x\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=\sin x+\sqrt{3}\cos x.$$

Таким образом, уравнение (2) примет вид $\sin x=\sin x+\sqrt{3}\cos x$, откуда $\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Так как $y=x-\frac{5\pi}{3}$, а $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, то $y=\frac{\pi}{2}+\pi k-\frac{5\pi}{3}=$
$$=\pi k-\frac{7\pi}{6},\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $y=\pi k-\frac{7\pi}{6}$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

3) $$\begin{cases} \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1, \\ x+y=\frac{\pi}{4}. \end{cases} \qquad (1)$$

Область определения системы (1):

$$\begin{cases} \cos x\neq 0, \\ \cos y\neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}, \\ y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

Применяя способ подстановки, получаем:

$$\begin{cases} y=\frac{\pi}{4}-x, \\ \operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1. \end{cases} \qquad (2)$$

Решая второе уравнение системы (2), имеем:

$$\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg} x}=1.$$

В результате упрощений получаем:

$$\operatorname{tg} x^2-\operatorname{tg} x=0, \quad \operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x-1)=0.$$

Теперь систему (2) заменим двумя системами:

$$\text{а)} \begin{cases} \operatorname{tg} x=0, \\ y=\frac{\pi}{4}-x \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} \operatorname{tg} x-1=0, \\ y=\frac{\pi}{4}-x. \end{cases}$$

Решение первой системы: $\begin{cases} x=\pi k, \\ y=\frac{\pi}{4}-\pi k, \ k\in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$

Решение второй системы: $\begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+\pi k, \\ y=\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right), \ k\in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$

Ответ. $x_1=\pi k,\ y_1=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$;

$x_2=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ y_2=-\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$.

4) $\begin{cases} \sin x \sin y=0{,}75, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y=3. \end{cases}$ (1)

Область определения системы: $\begin{cases} x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}, \\ y\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$

Разделив почленно первое уравнение системы (1) на второе, получим уравнение

$$\cos x \cos y=\frac{1}{4}. \qquad (2)$$

Заменив второе уравнение системы (1) уравнением (2), получим систему

$$\begin{cases} \sin x \sin y=0{,}75, \\ \cos x \cos y=\frac{1}{4}, \end{cases} \qquad (3)$$

равносильную системе (1).

Складывая и вычитая уравнения системы (3), получаем равносильную систему

$$\begin{cases} \cos x \cos y + \sin x \sin y = 1, \\ \cos x \cos y - \sin x \sin y = -\frac{1}{2}; \end{cases} \qquad (4)$$

$$\begin{cases} \cos(x-y) = 1, \\ \cos(x+y) = -\frac{1}{2}. \end{cases} \qquad (5)$$

Из первого уравнения системы (5) находим $x-y=2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Второе уравнение системы (5) равносильно двум уравнениям

$$x+y=\frac{2\pi}{3}+2\pi k, \; x+y=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k, \; k \in \mathbf{Z}.$$

Таким образом, система (5) равносильна двум системам:

$$\text{а)} \begin{cases} x-y=2\pi n, \\ x+y=\frac{2\pi}{3}+2\pi k; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} x-y=2\pi n, \\ x+y=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k. \end{cases}$$

Ответ. $x_1=\frac{\pi}{3}+\pi(k+n)$, $y_1=\frac{\pi}{3}+\pi(k-n)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$; $x_2=-\frac{\pi}{3}+\pi(k+n)$, $y_2=-\frac{\pi}{3}+\pi(k-n)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

$$5) \begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = 0{,}5, \\ x+y=\frac{\pi}{4}. \end{cases} \qquad (1)$$

Используем формулы

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \text{ и } 1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Тогда система (1) равносильна системе

$$\begin{cases} \frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 2y}{2}=\frac{1}{2}, \\ x+y=\frac{\pi}{4}; \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} \cos 2y - \cos 2x = 1, \\ x+y=\frac{\pi}{4}; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\sin\frac{2y-2x}{2}\sin\frac{2y+2x}{2}=1, \\ x+y=\frac{\pi}{4}. \end{cases} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} 2\sin(x+y)\sin(x-y) = -1, \\ x+y=\frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Так как $x+y=\frac{\pi}{4}$, то имеем:

$$\begin{cases} 2\sin\frac{\pi}{4}\sin(x-y)=-1, \\ x+y=\frac{\pi}{4}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(x-y)=-\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ x+y=\frac{\pi}{4}. \end{cases} \tag{4}$$

Решая систему уравнений (4), находим:

$$\begin{cases} x-y=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k, \ k\in Z, \\ x+y=\frac{\pi}{4}, \end{cases}$$

и поэтому

$$x=\frac{\pi}{8}(1+(-1)^{k+1})+\frac{\pi k}{2}, \ y=\frac{\pi}{8}(1+(-1)^{k})-\frac{\pi k}{2}, \ k\in Z.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Решите систему уравнений:

А. $\begin{cases} \cos(x+y)=0, \\ \cos(x-y)=\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

Б. $\begin{cases} \cos x\cos y=\frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \sin x\sin y=\frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

В. $\begin{cases} \sin^2 x+\sin^2 y=0{,}75, \\ x+y=\frac{5\pi}{12}, \end{cases}$ если значения x, y принадлежат интервалу $(0; \frac{\pi}{2})$.

2. Решите систему уравнений:

А. 1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x=0, \\ x+y=\frac{\pi}{4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \operatorname{tg} y=0, \\ x+y=\frac{\pi}{4}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \cos(x-y)=1, \\ \cos(x+y)=-\frac{1}{2}. \end{cases}$

Б. 1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=0, \\ x+y=\frac{\pi}{4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \cos x\cos y=\frac{1}{4}, \\ \sin x\sin y=\frac{3}{4}. \end{cases}$

В. 1) $\begin{cases} \sin x\sin y=\frac{3}{4}, \\ \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1, \\ x+y=\frac{\pi}{4}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=75^\circ, \\ \sin^2 x+\sin^2 y=\frac{3}{4}. \end{cases}$

Ответ. 1. А и Б. $x_1=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}(k_2+2k_1)$, $y_1=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\times$ $\times(k_2-2k_1)$, k_1, $k_2\in Z$; $x_2=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}(k_2+2k_1)$, $y_2=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}(k_2-2k_1)$, k_1, $k_2\in Z$. В. $x_1=\frac{\pi}{4}$ $y_1=\frac{\pi}{6}$; $x_2=\frac{\pi}{6}$, $y_2=\frac{\pi}{4}$. 2. А. 1) $x=\pi k$, $y=\frac{\pi}{4}-\pi k$, $k\in Z$; 2) $x=\frac{\pi}{4}-\pi k$, $y=\pi k$, $k\in Z$, 3) $x_{1,2}=\pm\frac{\pi}{3}+$ $+\pi(n+k)$, n, $k\in Z$, $y_{1,2}=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(n-k)$, n, $k\in Z$. Б. 1) См. А 1) и 2) одновременно; 2) См. А 3). В. 1) См. А 3); 2) См. А 1) и 2) одновременно; 3) $x_1=45°+180°k$, $y_1=30°-180°k$, $k\in Z$; $x_2=30°+180°k$, $y_2=45°-180°k$, $k\in Z$.

Контрольные вопросы

1. Решите уравнение $\cos x=a$. При каких значениях a данное уравнение будет иметь корни, а при каких нет?
2. Отметьте на единичной окружности и на числовой прямой точки, соответствующие числам: а) $\alpha=\pi k$; б) $\alpha=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; в) $\alpha=\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$. Сколько таких точек на числовой прямой и сколько на единичной окружности?
3. Исключите повторяющиеся углы в формулах $\alpha=90°k$ и $\alpha_1=$ $=60°k+30°$, $k\in Z$.
4. Постройте угол α, если $\cos\alpha=\frac{1}{2}$. Сколько таких углов содержится в интервале $(0°; 360°)$?
5. При каких значениях на промежутке $[0; 2\pi]$ функция $\cos x$: а) возрастает; б) убывает; в) принимает положительные значения; г) принимает отрицательные значения; д) принимает значение, равное нулю; е) принимает наибольшее и наименьшее значения?
6. Что больше: $\cos 1$ или $\cos 1°$?
7. Что больше: $\sin 1$ или $\sin 10°$?
8. При каких значениях x на промежутке $[0; 2\pi]$ функция $\sin x$: а) возрастает; б) убывает; в) принимает положительные значения; г) принимает отрицательные значения; д) принимает значение, равное нулю; е) принимает наибольшее и наименьшее значения?
9. Какие области изменения имеют функции: а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $\operatorname{tg}\alpha$; г) $\operatorname{ctg}\alpha$?
10. В каких границах может изменяться каждая из следующих функций:
    а) $1+\sin\alpha$; б) $1-\cos\alpha$; в) $\sin|\alpha|$; г) $|\cos\alpha|$?
11. Какие тригонометрические уравнения называются однородными? Как они решаются?

12. Верно ли равенство: а) $\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{tg}\alpha = 1$; б) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$?
13. В справочном материале к § 6 написаны 16 формул.
    а) Дайте словесное описание каждой формуле.
    б) Некоторые формулы называют формулами понижения. Какие из данных 16 формул являются таковыми?
14. В каких четвертях синус: а) отрицателен; б) положителен?
15. Может ли синус принимать значения, большие 1 или меньшие (-1)?
16. В каких четвертях косинус: а) отрицателен; б) положителен?
17. Может ли косинус принимать значения, большие 1 или меньшие (-2)?
18. В каких четвертях тангенс: а) положителен; б) отрицателен?
19. При каких значениях α тангенс не существует?
20. Что называется решением уравнения с двумя переменными?
21. Что называется решением системы двух линейных уравнений с двумя переменными?
22. Что значит решить систему двух уравнений?
23. Объясните решение системы линейных уравнений способом: а) подстановки; б) сложения уравнений.

ГЛАВА XIX

§ 1. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ ВИДА $\sin x>a$, $\sin x<a$

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Неравенства, содержащие переменную только под знаком тригонометрической функции, называются тригонометрическими.

2. При решении тригонометрических неравенств используют свойство монотонности тригонометрических функций, а также промежутки их знакопостоянства.

3. Для решения простейших тригонометрических неравенств вида $\sin x>a$ ($\sin x<a$) используют единичную окружность или график функции $y=\sin x$.

4. Важным моментом является знание, что:

$\sin x=0$, если $x=\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$;

$\sin x=-1$, если $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$;

$\sin x=1$, если $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$;

$\sin x>0$, если $2\pi k<x<\pi+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$;

$\sin x<0$, если $-\pi+2\pi k<x<2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Решить неравенство:

1) $\sin x>\frac{1}{2}$; 2) $\sin x<\frac{1}{2}$; 3) $\sin x\geqslant-\frac{1}{2}$;

4) $\sin 3x\cos x+\cos 3x\sin x\geqslant\frac{1}{2}$;

5) $6\sin^2 x-5\sin x+1\geqslant 0$;

6) $\frac{15}{\sin x+1}<11-2\sin x$.

Решение. 1) $\sin x>\frac{1}{2}$.

1-й способ. На единичной окружности строим дуги AC и

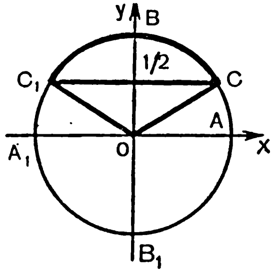


Рис. 157

AC_1, синус которых равен $\frac{1}{2}$ (рис. 157). Из рисунка видно, что данному неравенству удовлетворяют все дуги, начало которых находится в точке A, а конец — в любой внутренней точке дуги CBC_1, т. е. $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{6}$. Чтобы получить все решения данного неравенства, достаточно к концам этого промежутка прибавить $2\pi k$. (Почему?)

Окончательно имеем:

$$\frac{\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z.$$

2-й способ. Для решения данного неравенства строим графики функций $y=\sin x$ и $y=\frac{1}{2}$ (рис. 158).

Из рисунка видно, что прямая $y=\frac{1}{2}$ пересекает синусоиду в бесконечном числе точек.

На рисунке выделены несколько промежутков значений аргумента, удовлетворяющих данному неравенству, один из них $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right)$. Воспользовавшись периодичностью синуса, запишем окончательный ответ:

$$\frac{\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z.$$

2) $\sin x<\frac{1}{2}$. Используя рисунок 157, приходим к заключению, что концы искомых дуг должны лежать на дуге C_1B_1C, т. е. $-\frac{7\pi}{6}<x<\frac{\pi}{6}$.

Общее решение данного неравенства имеет вид:

$$-\frac{7\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z.$$

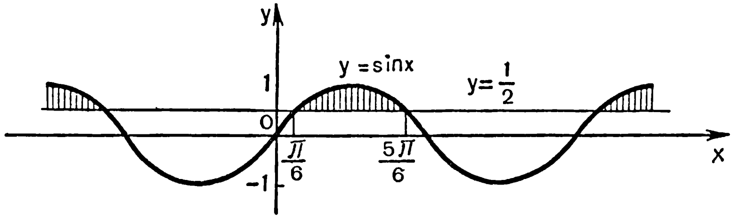


Рис. 158

3) $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$. На единичной окружности построим дуги, синус которых равен $-\frac{1}{2}$ (рис. 159). Из рисунка видно, что данному неравенству удовлетворяют все дуги, начало которых находится в точке A, а конец — в любой точке дуги CBC_1, т. е. $-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6}$.

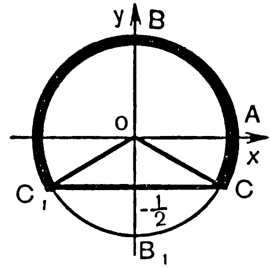


Рис. 159

Общее решение данного неравенства имеет вид:

$$-\frac{\pi}{6}+2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6}+2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Замечание. В отличие от предыдуших примеров концы этой дуги входят в искомое множество. (Почему?)

4) $\sin 3x \cos x+\cos 3x \sin x \geqslant \frac{1}{2}$. Левая часть этого неравенства представляет собой синус суммы, т. е. $\sin(3x+x)$, или $\sin 4x$. Следовательно, данное неравенство примет вид $\sin 4x \geqslant \frac{1}{2}$. Пользуясь рисунком 157, находим:

$$\frac{\pi}{6}+2\pi k \leqslant 4x \leqslant \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k \in \mathbf{Z},$$

откуда $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{24}+\frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbf{Z}$.

5) $6 \sin^2 x-5 \sin x+1 \geqslant 0$. Введем новую переменную $y=\sin x$. Тогда данное неравенство можно записать в виде $6y^2-5y+1 \geqslant 0$. Мы получили квадратное неравенство. Корнями трехчлена служат $y_1=\frac{1}{2}$ и $y_2=\frac{1}{3}$.

Разложим трехчлен $6y^2-5y+1$ на линейные множители, по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ имеем:

$$6y^2-5y+1=6\left(y-\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right) \geqslant 0.$$

Решим это неравенство методом интервалов. Его решением будет объединение промежутков $y \leqslant \frac{1}{3}$ и $y \geqslant \frac{1}{2}$ (рис. 160). Тогда получаем, что $\sin x \leqslant \frac{1}{3}$ (1) и $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$ (2).

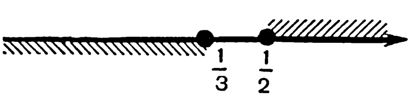


Рис. 160

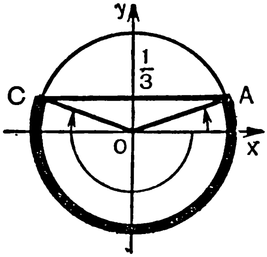


Рис. 161

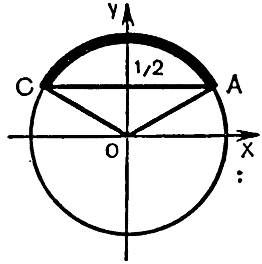


Рис. 162

Для решения неравенства (1) используем единичную окружность (рис. 161). Из рисунка видим, что неравенству (1) удовлетворяют такие значения x:

$$-\pi-\arcsin\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\arcsin\frac{1}{3}. \qquad (3)$$

Чтобы получить все решения неравенства (1), достаточно к концам указанного промежутка (3) прибавить $2\pi k$. (Почему?) Окончательно имеем:

$$-\pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k\leqslant x\leqslant\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}. \qquad (4)$$

Для решения неравенства (2) используем также единичную окружность (рис. 162). Из рисунка видим, что неравенству (2) удовлетворяют следующие значения x:

$$\frac{\pi}{6}+2\pi k\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}. \qquad (5)$$

Решением данного неравенства являются значения x, удовлетворяющие неравенствам (4) и (5).

6) $\frac{15}{\sin x+1}<11-2\sin x$. Введем новую переменную $y=\sin x$, тогда данное неравенство можно записать в виде

$$\frac{15}{y+1}<11-2y.$$

Решим неравенство:

$$\frac{15}{y+1}-11+2y<0,\ \frac{15-11(y+1)+2y(y+1)}{y+1}<0,$$
$$\frac{15-11y-11+2y^2+2y}{y+1}<0,\ \frac{2y^2-9y+4}{y+1}<0.$$

Найдем корни квадратного трехчлена в числителе:

$$2y^2-9y+4=0,\ y_1=4\ \text{и}\ y_2=\frac{1}{2}.$$

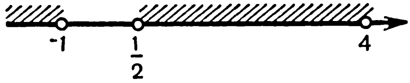


Рис. 163

Тогда

$$\frac{2y^2-9y+4}{y+1}=\frac{2(y-4)\left(y-\frac{1}{2}\right)}{y+1}<0.$$

Решим неравенство методом интервалов. Из рисунка 163 видим, что решением являются $y<-1$ и $\frac{1}{2}<y<4$. Следовательно, $\sin x<-1$ и $\frac{1}{2}<\sin x<4$. Нам известно, что функция синус ограничена, т. е. $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$, поэтому неравенство $\sin x<-1$ решений не имеет.

Осталось решить неравенство $\frac{1}{2}<\sin x<4$. Учитывая ограниченность функции синус, имеем $\frac{1}{2}<\sin x\leqslant 1$.

Решением этого неравенства, а следовательно, и данного неравенства будет $\frac{\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Решите неравенство:

А. 1) $\sin x>\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin x<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Б. 1) $\sin 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}<0$; 2) $\sin 3x\geqslant 1$; 3) $\sin 2x\geqslant -\frac{1}{4}$.

В. 1) $\sin(2x-30^\circ)<0{,}2$; 2) $\sin x\cos\frac{x}{2}+\cos x\sin\frac{x}{2}>\frac{1}{3}$;

3) $\sin x+\cos x<\sqrt{2}$; 4) $\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2<\sin x$.

2. Решите неравенство:

А. 1) $\sin x\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)<0$; 2) $\sin x\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)\geqslant 0$.

Б. 1) $\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x>0{,}5$; 2) $\sin^2 x\geqslant\frac{1}{4}$.

В. 1) $4\sin^2 x-2(\sqrt{2}-1)\sin x-\sqrt{2}<0$; 2) $\sin x-\cos^2 x>0$;
3) $\sin 2x+\cos^2 2x<9$.

Ответы. **1. А.** 1) $2\pi k+\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 2) $2\pi k+\frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 3) $2\pi k-\frac{5\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Б. 1) $\pi k-\frac{3\pi}{8}<x<-\frac{\pi}{8}+\pi k,\ k\in Z$; 2) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3},\ k\in Z$.

В. 1) $\frac{\pi}{2}(2k-1)+\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}\arcsin 0{,}2<x<\pi k+\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\arcsin 0{,}2$, $k\in Z$; 2) $\frac{4}{3}\pi k+\frac{2}{3}\arcsin\frac{1}{3}<x<-\frac{2}{3}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\pi(2k+1)$, $k\in Z$; 3) $x\in R$, кроме чисел вида $\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$; 4) $2\pi k+\frac{\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$. 2. А. 1) $2\pi k<x<\frac{\pi}{6}+2\pi k$ и $2\pi k+\frac{5\pi}{6}<x<\pi+2\pi k,\ k\in Z$; 2) $2\pi k+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2\pi k$ и $2\pi k-\pi\leqslant x\leqslant 2\pi k$, $k\in Z$. Б. 1) $\pi k+\frac{\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12}+\pi k,\ k\in Z$; 2) $2\pi k+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2\pi k$ и $2\pi k-\frac{5\pi}{6}\leqslant x\leqslant-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$. В. 2) $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi k<x<\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; 3) $x\in R$.

§ 2. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ ВИДА $\cos x>a$, $\cos x<a$

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Для решения простейших тригонометрических неравенств вида $\cos x>a$, $\cos x<a$ используют единичную окружность или график функции $y=\cos x$.

2. Важным моментом является знание, что:

$\cos x=0$, если $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$;

$\cos x=-1$, если $x=\pi+2\pi k,\ k\in Z$;

$\cos x=1$, если $x=2\pi k,\ k\in Z$;

$\cos x>0$, если $2\pi k-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$;

$\cos x<0$, если $2\pi k+\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi+2\pi k,\ k\in Z$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Решить неравенство:

1) $\cos 3x\geqslant-\frac{1}{2}$; 2) $\cos 2x<-\frac{1}{2}$; 3) $6\cos^2 x-5\cos x+1\leqslant 0$;

4) $\frac{15}{\cos x+1}<11-2\cos x$.

Решение. 1) $\cos 3x\geqslant-\frac{1}{2}$. Обозначим $3x$ через α, тогда данное неравенство примет вид $\cos\alpha\geqslant-\frac{1}{2}$. Этому неравенству удовлетворяют все точки P_α единичной окружности, абсциссы

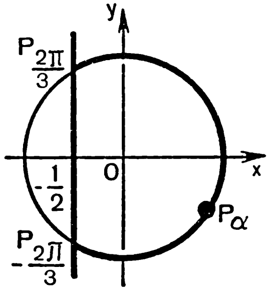


Рис. 164

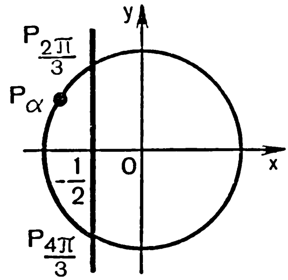


Рис. 165

которых больше или равны $-\frac{1}{2}$ (рис. 164). Из рисунка видно, что эти точки дуги лежат правее прямой $x=-\frac{1}{2}$ или на самой этой прямой. Следовательно, множество всех точек, удовлетворяющих данному неравенству есть дуга, выделенная на рисунке 164. Концы этой дуги входят в искомое множество, так как их абсциссы равны $-\frac{1}{2}$ и, значит, удовлетворяют данному неравенству.

Таким образом, $-\frac{2\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\frac{2\pi}{3}$.

Учитывая периодичность косинуса, запишем множество всех решений неравенства $\cos\alpha\geqslant-\frac{1}{2}$:

$$-\frac{2\pi}{3}+2\pi k\leqslant\alpha\leqslant\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Переходя снова к переменной x, получаем искомый ответ:

$$-\frac{2\pi}{3}+2\pi k\leqslant 3x\leqslant\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z};$$

$$-\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3},\ k\in\mathbf{Z}.$$

Для решения данного неравенства можно было использовать графики функций $y=\cos\alpha$ и $y=-\frac{1}{2}$.

2) $\cos 2x<-\frac{1}{2}$. Обозначим $2x$ через α, тогда данное неравенство примет вид $\cos\alpha<-\frac{1}{2}$. Этому неравенству удовлетворяют все точки единичной окружности, абсциссы которых меньше $-\frac{1}{2}$ (рис. 165). Из рисунка видно, что эти точки лежат левее прямой $x=-\frac{1}{2}$.

Следовательно, искомое множество точек есть дуга, выделенная на рисунке 165. Концы этой дуги не входят в искомое множество, так как мы решаем строгое неравенство.

Ограничиваясь рассмотрением углов α, лежащих в промежутке $(0; 2\pi)$, получаем $\frac{2\pi}{3}<\alpha<\frac{4\pi}{3}$.

Учитывая периодичность косинуса, запишем множество всех решений неравенства $\cos\alpha<-\frac{1}{2}$:

$$\frac{2\pi}{3}+2\pi k<\alpha<\frac{4\pi}{3}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

Теперь перейдем снова к переменной x, получаем искомый ответ:

$$\frac{\pi}{3}+\pi k<x<\frac{2\pi}{3}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

3) $6\cos^2 x-5\cos x+1\leqslant 0$. Введем новую переменную $y=\cos x$. Тогда данное неравенство можно записать так:

$$6y^2-5y+1\leqslant 0.$$

Получили квадратное неравенство, корни трехчлена $y_1=\frac{1}{2}$ и $y_2=\frac{1}{3}$.

Разложим квадратный трехчлен на линейные множители по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, получим

$$6\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)\leqslant 0.$$

Решим это неравенство методом интервалов. Из рисунка 166 следует, что $\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$.

Как видно из рисунка 167, все искомые точки лежат правее прямой $x=\frac{1}{3}$ и левее прямой $x=\frac{1}{2}$.

Получим ответ:

$$\frac{\pi}{3}+2\pi k\leqslant x\leqslant \arccos\frac{1}{3}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z};$$

$$-\arccos\frac{1}{3}+2\pi k\leqslant x\leqslant -\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

4) $\frac{15}{\cos x+1}<11-2\cos x$. Введем новую переменную $y=\cos x$, тогда данное неравенство примет вид:

$$\frac{15}{y+1}<11-2y.$$

После преобразований получаем:

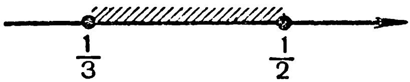


Рис. 166

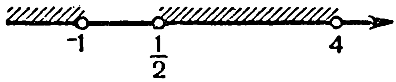


Рис. 168

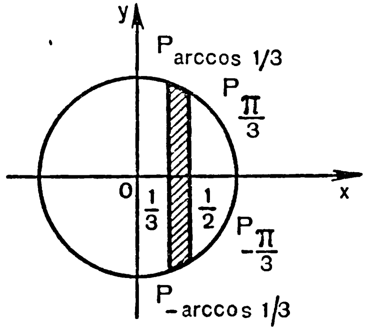


Рис. 167

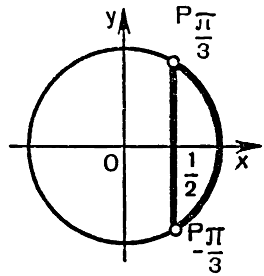


Рис. 169

$$\frac{2(y-4)\left(y-\frac{1}{2}\right)}{y+1}<0.$$

Решим это неравенство методом интервалов (рис. 168). Решение неравенства: $y<-1$ и $\frac{1}{2}<y<4$.

Неравенство $\cos x<-1$ решения не имеет.

Так как $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$, то неравенство $\frac{1}{2}<\cos x<4$ надо заменить неравенством $\frac{1}{2}<\cos x\leqslant 1$. Решением этого неравенства (рис. 169) является $2\pi k-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Решите неравенство:

А. 1) $\cos x\geqslant 1$; 2) $\cos 2x\geqslant 1$; 3) $\cos x\leqslant -1$;
4) $\cos 2x\leqslant -1$; 5) $2\cos x>1$; 6) $2\cos 2x\geqslant 1$;
7) $\cos 2x\leqslant 0$; 8) $\cos 2x\geqslant 0$.

Б. 1) $\cos 2x<\frac{1}{3}$; 2) $\cos(-2x)\geqslant\frac{1}{2}$; 3) $2\cos(-x-30°)<-1$;
4) $\cos^2 2x-2\cos 2x\geqslant 0$; 5) $|\cos x|\geqslant 0$; 6) $|\cos 3x|\leqslant 0$;
7) $\cos x(2+\cos x)(\cos x-1)\cdot\left(\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\geqslant 0$.

В. 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\cos x<-\frac{1}{2}$; 2) $2\cos^2 x+3\cos x-2\geqslant 0$;
3) $\sin x\leqslant\cos^2 x$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:
В. 1) $2\sin\alpha+3$; 2) $1-4\cos 2\alpha$; 3) $\sin^2\alpha$; 4) $\cos^2\alpha$;
5) $0{,}25+2\cos^2\alpha$; 6) $10-9\sin^2 3\alpha$; 7) $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$.

Ответы. **1. А.** 1) $2\pi k,\ k\in Z$; 2) $\pi k,\ k\in Z$; 3) $\pi+2\pi k,\ k\in Z$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$; 5) $2\pi k-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$; 7) $\pi k+\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$. **Б.** 4) $\pi k+\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; 5) $x\in R$; 6) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z$; 7) $2\pi k,\ 2\pi k+\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ 2\pi k+\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{4\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$. **В.** 1) $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k\leqslant x<-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ и $2\pi k+\frac{2\pi}{3}<x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$; 2) $2\pi k-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$; 3) $2\pi k-\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leqslant x\leqslant\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi k,\ k\in Z$. **2. В.** 1) 5 и 1; 2) 5 и -3; 3) 1 и 0; 4) 1 и 0; 5) 2,25 и 0,25; 6) 10 и 1.

§ 3. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ ВИДА $\operatorname{tg} x>a$, $\operatorname{tg} x<a$

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Для решения простейших тригонометрических неравенств вида $\operatorname{tg} x>a$, $\operatorname{tg} x<a$ используют единичную окружность или график функции $y=\operatorname{tg} x$.

2. Важно знать, что:

$\operatorname{tg} x>0$, если $\pi k<x<\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$;

$\operatorname{tg} x<0$, если $\pi k-\frac{\pi}{2}<x<\pi k,\ k\in Z$;

Тангенс не существует, если $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Решить неравенство:

1) $\operatorname{tg} 2x\geqslant 1$; 2) $\operatorname{tg}^2 x-\frac{1}{4}\operatorname{tg} x-\frac{3}{4}>0$; 3) $\operatorname{tg} x\geqslant -1$.

Решение. 1) $\operatorname{tg} 2x\geqslant 1$. Введем новую переменную, т. е. обозначим $2x$ через α, тогда данное неравенство примет вид $\operatorname{tg}\alpha\geqslant 1$.

Построим единичную окружность и проведем линию тангенсов, которая является касательной к окружности в точке (1; 0).

Так как α — решение неравенства $\operatorname{tg}\alpha\geqslant 1$, то ордината точки T_α линии тангенсов, равная $\operatorname{tg}\alpha$, должна быть больше или равна 1. Все такие точки лежат на луче AT (рис. 170).

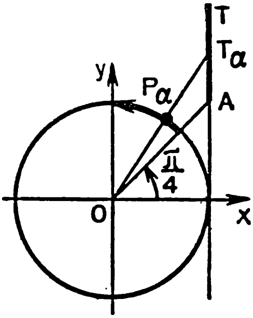


Рис. 170

Точки P_α единичной окружности, соответствующие точкам T_α, образуют дугу, выделенную на рисунке 170. Для точек P_α этой дуги и выполняется неравенство $\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Чтобы получить все решения неравенства $\operatorname{tg}\alpha \geqslant 1$, достаточно к концам указанного промежутка $\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$ прибавить период тангенса, получим:

$$\pi k + \frac{\pi}{4} \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in Z.$$

Так как $\alpha = 2x$, то

$$\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{8} \leqslant x < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \ k \in Z.$$

2) $\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{4}\operatorname{tg} x - \frac{3}{4} > 0$. Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена, если $\cos x \neq 0$, т. е. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Это обстоятельство надо учитывать при окончательной записи ответа неравенства, которое решается.

Введем новую переменную $y = \operatorname{tg} x$. Тогда данное неравенство можно записать в виде

$$y^2 - \frac{y}{4} - \frac{3}{4} > 0.$$

Мы получили квадратное неравенство. Корнями квадратного трехчлена являются $y_1 = 1$ и $y_2 = -\frac{3}{4}$. Тогда по формуле разложения квадратного трехчлена на множители имеем:

$$(y-1)\left(y + \frac{3}{4}\right) > 0.$$

Решим это неравенство методом интервалов. Решением являются $y < -\frac{3}{4}$ и $y > 1$ (рис. 171).

Рис. 171

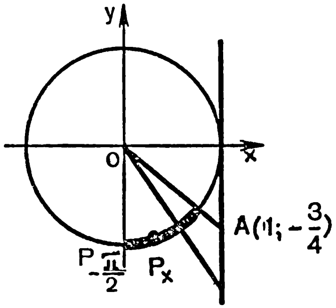


Рис. 172

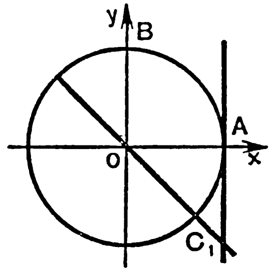


Рис. 173

Возвращаясь к функции $y=\operatorname{tg} x$, получим: 1) $\operatorname{tg} x<-\frac{3}{4}$; 2) $\operatorname{tg} x>1$.

Эти два неравенства нам и предстоит теперь решить. Неравенство $\operatorname{tg} x>1$ мы уже решили в предыдущем примере. Ответ его известен.

Чтобы решить неравенство $\operatorname{tg} x<-\frac{3}{4}$, воспользуемся единичной окружностью (рис. 172). Нашему неравенству $\operatorname{tg} x<-\frac{3}{4}$ удовлетворяют все точки линии тангенсов, ординаты которых меньше $-\frac{3}{4}$. Этому условию удовлетворяют все точки дуги единичной окружности, выделенной на рисунке 172. Для точек P_x этой дуги выполняется неравенство

$$-\frac{\pi}{2}<x<-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}.$$

В силу периодичности функции $y=\operatorname{tg} x$, чтобы получить все решения неравенства $\operatorname{tg} x<-\frac{3}{4}$, достаточно к концам этого промежутка прибавить период тангенса. Получим:

$$\pi k-\frac{\pi}{2}<x<-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi k,\ k\in \mathbf{Z}.$$

Решением данного неравенства являются:

$$\pi k-\frac{\pi}{2}<x<-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi k;$$

$$\pi k+\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in \mathbf{Z}.$$

3) $\operatorname{tg} x\geqslant -1$ (1). Построим на единичной окружности дуги, тангенс которых равен -1 (рис. 173).

Концы искомых дуг — точки дуги C_1AB, за исключением точки B, так как при $x=\frac{\pi}{2}$ функции $\operatorname{tg} x$ не существует. Следовательно, $-\frac{\pi}{4}\leqslant x<\frac{\pi}{2}$.

Учитывая периодичность функции $y=\operatorname{tg} x$ ответ неравенства (1) запишем в виде

$$\pi k-\frac{\pi}{4}\leqslant x<\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Решите неравенство:

А. 1) $\operatorname{tg} x<1$; 2) $\operatorname{tg} 2x\leqslant 1$; 3) $\operatorname{tg}^2 x-\frac{1}{4}\operatorname{tg} x-\frac{3}{4}\leqslant 0$;

4) $\operatorname{tg} x\leqslant -1$; 5) $\operatorname{tg} x\geqslant 0$.

Б. 1) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\sqrt{3}$; 2) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\geqslant\sqrt{3}$;

3) $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\geqslant -\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{tg} 3x<1$;

5) $\operatorname{tg} 3x\geqslant 1$; 6) $\operatorname{tg}^2 x-1>0$; 7) $7\operatorname{tg}^2 x-8\operatorname{tg} x+1<0$.

В. 1) $(\operatorname{tg} x-1)\left(\operatorname{tg}^2 x-\frac{1}{4}\operatorname{tg} x-\frac{3}{4}\right)\leqslant 0$;

2) $(\operatorname{tg}^2 x-1)\left(\operatorname{tg}^2 x-\frac{1}{3}\right)\geqslant 0$.

Ответы. **А.** 1) $\pi k-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi}{4}<x\leqslant\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\pi k-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\pi k-\frac{\pi}{2}<x\leqslant -\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; 5) $\pi k\leqslant x<\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$. **Б.** 1) $\pi k-\frac{5\pi}{6}<x\leqslant\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\pi k\leqslant x<\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\pi k\leqslant x<\frac{5\pi}{6}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi k}{3}-\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3},\ k\in \boldsymbol{Z}$; 5) $\frac{\pi k}{3}+\frac{\pi}{12}\leqslant x<\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\ k\in \boldsymbol{Z}$. **В.** 1) $\pi k-\frac{\pi}{2}<x\leqslant -\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi k$ и $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$.

§ 4. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

В этом параграфе будем пользоваться справочным материалом и примерами решения неравенств § 1—3 данной главы.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Решить неравенство:

1) $\sin x>\cos x$; 2) $\cos^2 x+\sin x\cos x\geqslant 1$;

3) $\sin(x+30°)\cos(x+30°)>0{,}25$; 4) $\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x\geqslant -1$.

Решение.

1) $\sin x>\cos x$, $\sin x-\cos x>0$. Так как $\sin x-\cos x=$ $=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$, то последнее неравенство примет вид:

$$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0,\ \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0.$$

Отсюда

$$2\pi k<x-\frac{\pi}{4}<\pi+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z};$$

$$2\pi k+\frac{\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

2) $\cos^2 x+\sin x\cos x\geqslant 1$. Имеем:

$$\sin x\cos x\geqslant 1-\cos^2 x,\ \sin x\cos x\geqslant \sin^2 x.$$

Умножив обе части последнего неравенства на 2, получим:

$$2\sin x\cos x\geqslant 2\sin^2 x,\ \sin 2x\geqslant 1-\cos 2x,$$

$$\cos 2x+\sin 2x\geqslant 1.$$

Теперь применим к этому неравенству тот же прием, что в предыдущем примере 1, получим:

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x\right)\geqslant 1.$$

Отсюда

$$\cos 2x\cos\frac{\pi}{4}+\sin 2x\sin\frac{\pi}{4}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Как видно из рисунка 174,

$$-\frac{\pi}{4}+2\pi k\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{4}+2\pi k,$$

откуда

$$2\pi k\leqslant 2x\leqslant\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z};\ \pi k\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

3) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)>\frac{1}{4}$. (1)

Умножив обе части неравенства (1) на 2, получим:

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)>\frac{1}{2}. \qquad (2)$$

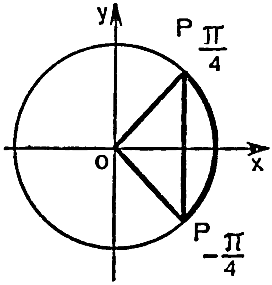


Рис. 174

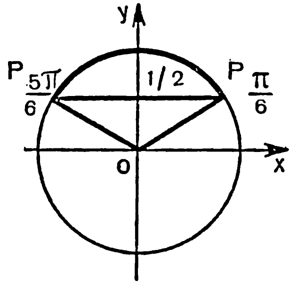


Рис. 175

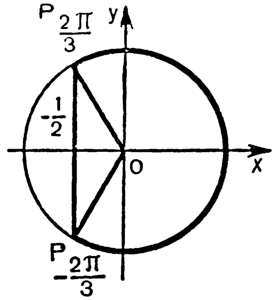


Рис. 176

Положив $2x+\frac{\pi}{3}=\alpha$, получим неравенство $\sin\alpha>\frac{1}{2}$. С помощью единичной окружности (рис. 175) находим решение неравенства $\sin\alpha>\frac{1}{2}$:

$$\frac{\pi}{6}+2\pi k<\alpha<\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}. \qquad (3)$$

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$\frac{\pi}{6}+2\pi k<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z};\quad -\frac{\pi}{12}+\pi k<x<\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Это — решение неравенства (2), а значит, и неравенства (1).

4) $\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x\geqslant -1$. (1)

Умножим обе части неравенства (1) на $\frac{1}{2}$, получим:

$$\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\geqslant -\frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Преобразуем это неравенство так:

$$\sin\frac{\pi}{6}\sin 2x+\cos\frac{\pi}{6}\cos 2x\geqslant -\frac{1}{2},$$

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\geqslant -\frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Решим неравенство (3). Положим $2x-\frac{\pi}{6}=\alpha$, тогда получим неравенство $\cos\alpha\geqslant -\frac{1}{2}$, решение которого находим с помощью единичной окружности (рис. 176):

$$-\frac{2\pi}{3}+2\pi k\leqslant\alpha\leqslant\frac{2\pi}{3}+2\pi k.$$

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$-\frac{2\pi}{3}+2\pi k\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z};$$

$$-\frac{\pi}{4}+\pi k \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{12}+\pi k,\ k \in Z.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Решите неравенство:

А. 1) $\sin x \leqslant \cos x$; 2) $\cos^2 x+\sin x \cos x \leqslant 1$;

3) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \leqslant \frac{1}{4}$; 4) $\sin 2x+\sqrt{3}\cdot\cos 3x < -1$.

Б. 1) $\sin x < 0{,}4$; 2) $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{4}$; 3) $2\cos^2 x+3\cos x-2 < 0$;

4) $\sin x \cos x > 0$.

В. 1) $|\cos x| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin x \geqslant \cos^2 x$, 3) $\sin x+\cos x < \sqrt{2}$;

4) $\sin x+\cos 2x > 1$; 5) $\frac{5}{4}\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 2x > \cos 2x$.

Ответы. А. См. приведенные в параграфе решения. Б. 1) $-\arcsin 0{,}4-\pi(1-2k) < x < \arcsin 0{,}4+2\pi k$, $k \in Z$; 2) $2\pi k-\frac{\pi}{6} < x < \arcsin\frac{1}{4}+2\pi k$, $k \in Z$; $\pi-\arcsin\frac{1}{4}+2\pi k < x < \frac{7\pi}{6}+2\pi k$, $k \in Z$; 3) $\frac{\pi}{3}+2\pi k < x < \frac{5\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$; 4) $\pi k < x < \frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$. В. 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in Z$; 2) $2\pi k+\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leqslant x \leqslant \pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi k$, $k \in Z$; 3) $x \neq \frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k \in Z$; 4) $2\pi k < x < \frac{\pi}{6}+2\pi k$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi k < x < \pi+2\pi k$, $k \in Z$; 5) $\pi k+\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}+\pi k$, $k \in Z$.

Контрольные вопросы

1. Какими способами можно решить простейшее тригонометрическое неравенство?
2. Какому условию должно удовлетворять a, чтобы имело решение неравенство: 1) $\sin x < a$; 2) $\sin x \geqslant a$; 3) $\cos x < a$; 4) $\cos x \geqslant a$?

ГЛАВА XX

§ 1. ПРИРАЩЕНИЕ АРГУМЕНТА И ПРИРАЩЕНИЕ ФУНКЦИИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Пусть $y=f(x)$ — функция, x и x_0 — два значения независимой переменной из $D(f)$; тогда разность $x-x_0$ называется приращением независимой переменной (или приращением аргумента) и обозначается Δx (читается «дельта икс»). Таким образом, $\Delta x=x-x_0$ (1).

2. Из равенства (1) следует, что $x=x_0+\Delta x$ (2), т. е. первоначальное значение переменной получило приращение Δx. Соответственно значение функции изменится на величину

$$f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0). \qquad (3)$$

3. Разность между новым значением функции $f(x_0+\Delta x)$ и первоначальным ее значением $f(x_0)$ называется приращением функции в точке x_0 и обозначается символом $\Delta f(x_0)$ (читается «дельта эф в точке x_0»), т. е.

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0). \qquad (4)$$

4. Приращение функции f в данной точке x_0 кратко обозначают через Δf или Δy (рис. 177).

5. Понятия приращения функции и приращения аргумента позволяют сформулировать признаки возрастания и убывания функций.

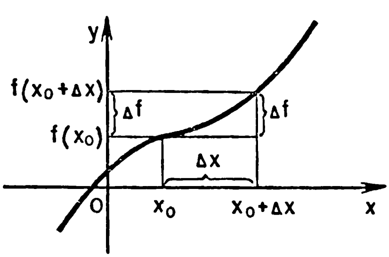


Рис. 177

Функция $f(x)$ возрастает на промежутке X тогда и только тогда, когда для любых значений x_0 и $x_0+\Delta x$ ($\Delta x \neq 0$) из промежутка X выполняется неравенство $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}>0$.

Функция $f(x)$ убывает на промежутке X тогда и только тогда, когда для любых значений x_0 и $x_0+\Delta x$ ($\Delta x \neq 0$) из промежутка X выполняется неравенство $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}<0$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Для функции $y=x^2$ найти Δy, если $x=2{,}5$, $x_0=2$.

Решение. Имеем $\Delta y=y(x_0+\Delta x)-y(x_0)=y(2{,}5)-y(2)=6{,}25-4=2{,}25$.

2. Найти приращения Δx и Δy в точке x_0, если $y=x^2$, $x_0=2$ и а) $x=1{,}9$; б) $x=2{,}1$.

Решение. а) $\Delta x=x-x_0=1{,}9-2=-0{,}1$, $\Delta y=y(1{,}9)-y(2)=1{,}9^2-2^2=-0{,}39$.

б) $\Delta x=x-x_0=2{,}1-2=0{,}1$, $\Delta y=y(2{,}1)-y(2)=2{,}1^2-2^2=0{,}41$.

3. Дана функция $y=x^2+2x-4$. Найти приращение Δy при $x=2$ и $\Delta x=0{,}5$.

Решение. Найдем приращение функции:

$$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=(x+\Delta x)^2+2(x+\Delta x)-4-x^2-2x+4=$$
$$=2x\Delta x+2\Delta x+(\Delta x)^2=2\cdot 2\cdot 0{,}5+2\cdot 0{,}5+(0{,}5)^2=3{,}25.$$

4. Дана функция $y=\frac{1}{x}$. Найти приращение Δy при $x=1$ и $\Delta x=0{,}2$.

Решение.

$$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}=$$
$$=\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}=\frac{-0{,}2}{1(1+0{,}2)}=-\frac{1}{6}.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Дана функция $y=2x+5$, найдите:
1) x и Δy, если $x_0=3$ и $\Delta x=0{,}2$; 2) x и Δy, если $x_0=4$ и $\Delta x=0{,}06$; 3) Δy, если $x_0=4$ и $\Delta x=0{,}1$; 4) Δy, если $x_0=7$ и $\Delta x=0{,}01$.

Б. 2. Дана функция $y=x^2$, найдите Δx и Δy, если: 1) $x=2{,}5$ и $x_0=2$; 2) $x=3{,}9$ и $x_0=3{,}75$; 3) $x=-1{,}2$ и $x_0=-1$; 4) $x=-2{,}7$ и $x_0=-2{,}5$.

В. 3. Даны функции: 1) $y=-\frac{3}{x}$; 2) $y=\frac{1}{2x}$; 3) $y=\frac{1}{x}-x$. Найдите приращение Δy при $x=2$ и $\Delta x=0{,}8$.

В. 4. Даны функции: 1) $y=\sqrt{2x}$; 2) $y=\sqrt[3]{x}$. Найдите приращение Δy при $x=1$, $\Delta x=0{,}2$.

Ответы. **А. 1.** 1) 3,2; 0,4; 3) 0,2. **Б. 2.** 1) 0,5; 2,25; 2) 0,15; 1,1475; 4) $-0{,}2$; 1,04. **В. 3.** 1) $\frac{3}{7}$; 2) $-\frac{1}{14}$; 3) $-\frac{33}{35}$. **В. 4.** 1) $\approx 0{,}135$; 2) 0,06.

§ 2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Число b называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$, справедливо неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$. При этом употребляют запись $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.

2. Так как неравенство $|x-a|<\delta$ равносильно двойному неравенству $a-\delta<x<a+\delta$, а неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$ — двойному неравенству $b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$, то определение предела функции в точке можно дать в такой форме: число b есть предел функции $f(x)$ при $x\to a$, если, какова бы ни была ε-окрестность точки b, найдется такая δ-окрестность точки a, что для любого значения $x\neq a$, принадлежащего δ-окрестности точки a, значение $f(x)$ принадлежит ε-окрестности точки b (рис. 178).

3. Из определения предела функции следует, что функция должна быть определена на промежутке $(a-\delta,\ a+\delta)$, кроме, возможно, самой точки a.

4. Теорема. Если функция $f(x)$ имеет предел при $x\to a$, то этот предел единственный.

5. Практически предел функции в точке находят не на основании определения предела функции, а на основании теорем о пределе функции, аналогичных теоремам о пределе числовой последовательности.

6. Теоремы о пределе суммы, произведения и частного. Если при $x\to a$ существуют пределы функций f и g, то:

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\,g(x))=$
$=\lim\limits_{x\to a} f(x)\,\lim\limits_{x\to a} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$,

где $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$.

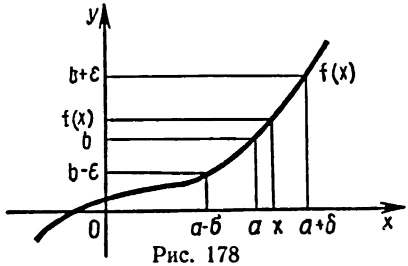


Рис. 178

Следствие. $\lim\limits_{x \to a} kf(x) = \lim\limits_{x \to a} k \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x) = k \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$, где k — постоянный множитель.

Из этих теорем вытекает, в частности, что предел многочлена $P(x)$ при $x \to x_0$ равен $P(x_0)$, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 2} (2x-1) = 3$.

Решение. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует $\delta > 0$, такое, что из неравенства $|x-2| < \delta$ вытекает неравенство $|(2x-1)-3| < \varepsilon$. Имеем $|(2x-1)-3| < \varepsilon$, $2|x-2| < \varepsilon$, $|x-2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Значит, если положить $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, то выполнение неравенства $|x-2| < \delta$ влечет за собой выполнение неравенства $|(2x-1)-3| < \varepsilon$. Таким образом, согласно определению заключаем, что $\lim\limits_{x \to 2} (2x-1) = 3$.

2. Найти: 1) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^4+2}{3x^3-1}$; 2) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x+1}$.

Решение. 1) Так как $\lim\limits_{x \to -2} (x^4+2) = (-2)^4 + 2 = 18$, а $\lim\limits_{x \to -2} (3x^3-1) = 3(-2)^3 - 1 = -25$, то по теореме о пределе частного получаем, что $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^4+2}{3x^3-1} = -\frac{18}{25}$.

2) Здесь при $x = -1$ и числитель, и знаменатель обращаются в нуль, поэтому теоремой о пределе частного пользоваться нельзя. Заметим, что $\frac{x^3+1}{x+1} = \frac{(x^2-x+1)(x+1)}{x+1}$. Так как при вычислении предела при $x \to -1$ предполагается, что $x \neq -1$, то дробь можно сократить на $x+1$. В результате получаем $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} (x^2-x+1) = (-1)^2 - (-1) + 1 = 3$.

§ 3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и если предел функции при $x \to x_0$ равен значению функции в этой точке, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Функция $f(x)$, непрерывная в каждой точке заданного промежутка, называется непрерывной на всем промежутке.

3. Любая рациональная функция непрерывна при всех значениях независимой переменной, при которых она определена. Любая иррациональная функция непрерывна в любой точке области определения, кроме крайних точек, если они существуют.

Например, функция $y=x^2$ непрерывна в любой точке числовой прямой, а функция $y=\sqrt{x}$ непрерывна в любой точке $x>0$.

4. Если функция, определенная в некоторой окрестности точки x_0, в точке x_0 не определена или ее предел в точке x_0 не равен значению функции в этой точке, то говорят, что функция имеет разрыв в точке x_0, а точку x_0 называют точкой разрыва.

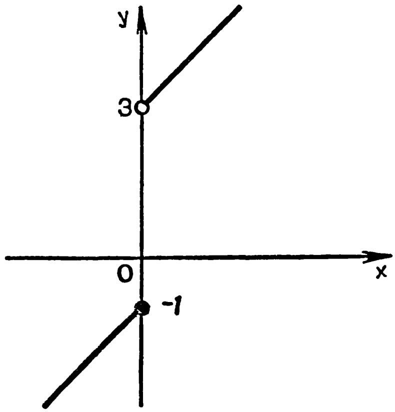


Рис. 179

Например, функция $y=\frac{a}{x}$ непрерывна в любой точке $x\neq 0$, а в точке $x=0$ терпит разрыв.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{при } x>0, \\ x-1 & \text{при } x\leqslant 0. \end{cases}$$

Найти точку разрыва и значение функции в этой точке.

Решение. Функция терпит разрыв в точке $x=0$, так как при $x\to 0$ предел этой функции не существует (рис. 179). Значение функции при $x=0$ равно $f(0)=0-1=-1$.

2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$.

Решение. Здесь при $x=-3$ и числитель, и знаменатель обращаются в нуль, значит, применить теорему о пределе частного нельзя. Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное знаменателю:

$$\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(\sqrt{x+4}+1)}{(\sqrt{x+4}-1)(\sqrt{x+4}+1)}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(\sqrt{x+4}+1)}{(x+4)-1}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(\sqrt{x+4}+1)}{x+3}=\lim_{x\to -3}(\sqrt{x+4}+1).$$

Функция $\sqrt{x+4}+1$ определена в точке $x=-3$ и, значит, непрерывна в этой точке. Поэтому ее предел при $x\to -3$ равен значению функции при $x=-3$. В результате получаем $\lim\limits_{x\to-3}(\sqrt{x+4}+1)=\sqrt{-3+4}+1=2$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Найдите предел:

1) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}(-x^3+9x^2+x-1)$; 2) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{(x-4)(x+3)}{x^2+2x-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x^2-8x+4}{8-14x+5x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to9}\frac{9-x}{3-\sqrt{x}}$; 5) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}$; 6) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$.

Ответы. 1) $17-\sqrt{2}$; 2) $\frac{7}{4}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) 6; 5) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$; 6) $\frac{1}{3}$.

§ 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения Δf функции в точке x_0 к приращению Δx аргумента, когда последнее стремится к нулю. Это можно записать так: $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=f'(x_0)$ (читается «эф штрих от x_0»).

2. Из определения производной следует, что функция может иметь производную в точке x_0 только в том случае, если она определена в некоторой окрестности точки x_0, включая эту точку.

3. Необходимым условием существования производной функции в данной точке является непрерывность функции в этой точке.

Заметим, что обратное утверждение является неверным. Например, функция $f(x)=|x-1|$ непрерывна на $(-\infty, +\infty)$, но в точке $x_0=1$ производной не имеет: можно показать, что

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\begin{cases}1 \text{ при } \Delta x>0,\\ -1 \text{ при } \Delta x<0,\end{cases}$$

т. е. данная функция не имеет предела при Δx, стремящемся к нулю.

4. Нахождение производной функции $f(x)$ называется дифференцированием этой функции.

5. Вычисление производной функции $y=f(x)$ производится в соответствии с правилом дифференцирования:

а) фиксируют значение аргумента x и находят $f(x)$;

б) дают аргументу x приращение Δx и находят $f(x+\Delta x)$;

в) находят приращение функции $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$;

г) делят приращение функции Δf на приращение аргумента Δx, т. е. составляют отношение

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x};$$

д) находят предел этого отношения при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Найденный предел и есть производная функции $y=f(x)$.

6. Производная постоянной функции равна нулю: $c'=0$, где $c=\text{const}$.

7. Производная функции $y=x$ равна 1: $x'=1$.

8. Производная функции $y=\sqrt{x}$ равна $\frac{1}{2\sqrt{x}}$:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ где } x>0.$$

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Найти среднюю скорость изменения функции $y=3x^2-6$ при изменении x от $x_1=3$ до $x_2=3{,}5$.

Решение. 1-й способ. Найдем приращение аргумента:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 3{,}5 - 3 = 0{,}5;$$

Вычислим приращение функции:

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 3x_2^2 - 6 - 3x_1^2 + 6 = 3(x_2^2 - x_1^2) = 9{,}75.$$

Найдем среднюю скорость изменения функции: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9{,}75}{0{,}5} = 19{,}5.$

2-й способ. Вычислим среднюю скорость изменения функции $y=3x^2-6$ при любом значении аргумента по общему правилу:

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = 3(x+\Delta x)^2 - 6 - 3x^2 + 6 = \\ = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2.$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x.$$

Найдем приращение аргумента: $\Delta x = x_2 - x_1 = 3{,}5 - 3 = 0{,}5$. Определим среднюю скорость при $x=3$, $\Delta x=0{,}5$:

$$v_{\text{ср}} = 6x + 3\Delta x = 6\cdot 3 + 3\cdot 0{,}5 = 19{,}5.$$

2. Прямолинейное движение точки задано уравнением $s=3t^2-2t+5$, где t дано в секундах, а s — в метрах. Найти скорость движения точки в момент $t=5$с.

Решение. Найдем среднюю скорость движения точки:

$$\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t) = 3(t+\Delta t)^2 - 2(t+\Delta t) + 5 - 3t^2 + 2t - 5 = \\ = 6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 - 2\Delta t.$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 - 2\Delta t}{\Delta t} = 6t + 3\Delta t - 2.$$

Найдем истинную скорость движения точки в момент времени t:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (6t + 3\Delta t - 2) = 6t - 2.$$

Найдем теперь скорость движения точки в момент времени $t=5$ с:

$$v = 6t - 2 = 6 \cdot 5 - 2 = 28 \text{ м/с}.$$

3. Дана функция $y=\sqrt{x}$. Найти y' в точке $x=4$.

Решение.

$$\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\ ; \ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x};$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+0} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$y'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Замечание. Решая данный пример, мы вывели формулу, что производная функции $y=\sqrt{x}$ равна $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x>0)$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Найдите среднюю скорость изменения функции $y=2x^2+5x$ при изменении x от $x_1=2$ до $x_2=3$.

2. Закон движения точки задан формулой $y=4x^2-2$. Найдите среднюю скорость движения точки за промежуток времени от $x_1=4$ до $x_2=6$.

3. Прямолинейное движение точки задано уравнением $y=2x^2-8x-10$ (x в с, y в м). Найдите скорость движения точки в момент времени $t=8$ с.

4. Для функции $y=\sqrt{x}$ найдите: 1) $y'(1)$; 2) $y'(49)$; 3) $y'(a)$.

5. Пользуясь определением, найдите производную функции: 1) $3-2x$; 2) x^2; 3) x^2+2x.

Ответы. **1.** 15. **2.** 40. **3.** 24 м/с.

§ 5. ПРОИЗВОДНАЯ СУММЫ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ, ЧАСТНОГО

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Производная суммы

1. Пусть u и v — две функции, определенные на одном и том же промежутке. Тогда производная суммы этих функций равна сумме их производных, если они существуют, т. е.

$$(u(x)+v(x))'=u'(x)+v'(x). \quad (1)$$

Эта формула справедлива для любого конечного числа слагаемых:

$$(u_1+u_2+\ldots+u_k)'=u_1'+u_2'+\ldots+u_k'.$$

Производная произведения

2. Производная произведения двух функций u и v вычисляется по формуле

$$(uv)'=u'v+uv' \quad (2)$$

в предположении, что производные u' и v' существуют.

3. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(kf(x))'=kf'(x). \quad (3)$$

Производная частного

4. Если функции u и v имеют в точке x производные и если $v(x)\neq 0$, то в этой точке существует производная их частного $\frac{u}{v}$, которая вычисляется по формуле

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}. \quad (4)$$

5. Частные случаи:

$$\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{1}{c}u', \quad (5)$$

$$\left(\frac{c}{v}\right)'=-\frac{c}{v^2}, \quad (6)$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}. \quad (7)$$

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Найти $f'(x)$, если:

1) $f(x)=x+5$; 2) $f(x)=(2x-3)(3x+1)$;

3) $f(x)=\frac{3+5x}{1-3x}$; 4) $y=\frac{3\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$.

Решение. 1) $f'(x)=(x+5)'=(x)'+(5)'=1+0=1$. Здесь мы использовали формулу (1).

2) $f'(x)=((2x-3)(3x+1))'=(2x-3)'(3x+1)+(2x-3)\times$ $\times(3x+1)'=2(3x+1)+(2x-3)\cdot 3=12x-7$. Здесь мы использовали формулу (2).

Этот же пример можно решить и иначе: $y=(2x-3)(3x+1)=$ $=6x^2-7x-3$. Теперь можно использовать формулы (1), (2) и (3).

3) $$f'(x)=\left(\frac{3+5x}{1-3x}\right)'=\frac{(3+5x)'(1-3x)-(3+5x)(1-3x)'}{(1-3x)^2}=$$

$$=\frac{(3'+(5x)')(1-3x)-(3+5x)(1'-(3x)')}{(1-3x)^2}=$$

$$=\frac{5(1-3x)-(3+5x)(-3)}{(1-3x)^2}=\frac{14}{(1-3x)^2}.$$

Здесь мы использовали формулу (4).

4) $$y'=\left(\frac{3\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)'=\frac{(3\sqrt{x})'(2+\sqrt{x})-3\sqrt{x}(2+\sqrt{x})'}{(2+\sqrt{x})^2}=$$

$$=\frac{3\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}(2+\sqrt{x})-3\sqrt{x}\left(0+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(2+\sqrt{x})^2}=\frac{\frac{3(2+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}-\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(2+\sqrt{x})^2}=$$

$$=\frac{6+3\sqrt{x}-3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^2}=\frac{3}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^2}.$$

Здесь мы использовали формулы (1)—(4) и формулу $(\sqrt{x})'=$ $=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ из предыдущего параграфа.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Найдите производную функции:

А. 1) $x-5$; 2) $2x-5$; 3) $5-7x$; 4) $(x-5)(2x-5)$; 5) $\frac{x-5}{2x-5}$.

Б. 1) $1+2\sqrt{x}$; 2) $(1+2\sqrt{x})(3-5\sqrt{x})$; 3) $(x+1)\sqrt{x}$; 4) $(2x-1)\sqrt{x}$; 5) $\frac{x-1}{\sqrt{x}}$; 6) $\frac{\sqrt{x}}{2x+1}$.

Ответы. **А.** 1) 1; 2) 2; 3) -7; 4) $4x-15$; 5) $\frac{5}{(2x-5)^2}$. **Б.** 3) $\frac{3x+1}{2\sqrt{x}}$; 5) $\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$; 6) $\frac{1-2x}{2\sqrt{x}(2x+1)^2}$.

§ 6. ПРОИЗВОДНАЯ СТЕПЕННОЙ И СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Производная степенной функции

1. Производную степенной функции x^k, где $k \in R$, $x>0$, вычисляют по формуле

$$(x^k)'=kx^{k-1}. \qquad (1)$$

2. Заметим, что если $k \in Z$, то формула (1) справедлива при всех значениях $x \in (-\infty; +\infty)$, кроме $x=0$. Если же при этом $k>1$, то формула (1) справедлива при любом x.

3. Из формулы (1) вытекают, в частности, формулы для нахождения производных функций $y=\frac{1}{x}$ и $y=\sqrt{x}$.

При $k=-1$ получаем:

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=(-1)\,x^{-2}=-\frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0). \qquad (2)$$

При $k=\frac{1}{2}$ имеем:

$$(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x>0). \qquad (3)$$

Производная сложной функции

4. Если y есть функция от u: $y=f(u)$, где u в свою очередь есть функция от аргумента x: $u=\varphi(x)$, т. е. если y зависит от x через промежуточный аргумент u, то y называется сложной функцией от x (функцией от функции): $y=f(\varphi(x))$.

5. Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной:

$$y'_x=y'_u \cdot u'_x. \qquad (4)$$

6. П р и м е р. Найти производную функции $y=(3-5x+x^2)^{100}$.

Р е ш е н и е. $y'=100\,(3-5x+x^2)^{99}\cdot(3-5x+x^2)'=$
$=100\,(3-5x+x^2)^{99}\cdot(-5+2x)$.

7. Формулы дифференцирования.

При условии $u=\varphi(x)$		При условии $u=x$	
		$c'=0$	(5)
		$x'=1$	(6)
$(u^k)'=ku^{k-1}\cdot u'$, $k \in R$	(7)	$(x^k)'=kx^{k-1}$, $k \in R$	(7а)
$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{1}{u^2}\cdot u'$	(8)	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	(8а)
$(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$	(9)	$(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	(9а)

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Найти производную функции:

1) $y=5x^{-\frac{2}{5}}$; 2) $y=5\sqrt[5]{x^3}$; 3) $y=\frac{2x^3}{\sqrt[3]{x}}$; 4) $y=3x^2\sqrt[3]{x}$.

Решение. 1) $y=5x^{-\frac{2}{5}}$. По формуле $(cu)'=cu'$ и по формуле (7а) найдем:

$$y'=5\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot x^{-\frac{2}{5}-1}=-2x^{-\frac{7}{5}}.$$

2) $y=5\sqrt[5]{x^3}=5\cdot x^{\frac{3}{5}}$. Найдем производную по тем же формулам, которые были применены при решении первого примера:

$$y'=(5x^{\frac{3}{5}})'=5\cdot\frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1}=3x^{-\frac{2}{5}}.$$

3) $y=\frac{2x^3}{\sqrt[3]{x}}=\frac{2x^3}{x^{\frac{1}{3}}}=2\cdot x^{3-\frac{1}{3}}=2x^{\frac{8}{3}}$;

$$y'=(2x^{\frac{8}{3}})'=2\cdot\frac{8}{3}x^{\frac{8}{3}-1}=\frac{16}{3}x^{\frac{5}{3}}.$$

4) $y=3x^2\sqrt[3]{x}=3x^2x^{\frac{1}{3}}=3x^{2+\frac{1}{3}}=3x^{2\frac{1}{3}}$;

$$y'=(3x^{2\frac{1}{3}})'=3\cdot2\frac{1}{3}x^{2\frac{1}{3}-1}=3\cdot\frac{7}{3}x^{1\frac{1}{3}}=7\cdot x^{\frac{4}{3}}.$$

2. Найти производную функции:

1) $y=(x^3-2x^2+5)^6$; 2) $y=\frac{1}{(x^3-1)^3}$; 3) $y=\frac{(x^3-1)^4}{(x^2+1)^3}$.

Решение. 1) $y=(x^3-2x^2+5)^6$. Пусть $x^3-2x^2+5=u$, получим $y=u^6$. По формуле (7) имеем $y'=6u^5\cdot u'=6(x^3-2x^2+5)^5\times$ $\times(x^3-2x^2+5)'=6(x^3-2x^2+5)^5\cdot(3x^2-4x)$.

2) $y=\frac{1}{(x^3-1)^3}$. Данный пример можно решить двумя способами.

1-й способ. Запишем функцию с помощью отрицательного показателя и применим формулу (7). Тогда $y=\frac{1}{(x^3-1)^3}=(x^3-1)^{-3}$,

$$y'=((x^3-1)^{-3})'=-3(x^3-1)^{-3-1}(x^3-1)'=-3(x^3-1)^{-4}3x^2=$$
$$=-\frac{9x^2}{(x^3-1)^4}.$$

2-й способ. Применим последовательно формулы (8) и (7), получим:

$$y'=\left(\frac{1}{(x^3-1)^3}\right)'=-\frac{1}{((x^3-1)^3)^2}\cdot3(x^3-1)^2(x^3-1)'=$$
$$=-\frac{3(x^3-1)^2\cdot3x^2}{(x^3-1)^6}=-\frac{9x^2}{(x^3-1)^4}.$$

Получили один и тот же результат.

3) $y=\frac{(x^3-1)^4}{(x^2+1)^3}$. Применим последовательно правило дифференцирования частного, а затем дифференцирования сложной функции, получим:

$$y'=\frac{((x^3-1)^4)'(x^2+1)^3-(x^3-1)^4((x^2+1)^3)'}{((x^2+1)^3)^2}=$$

$$=\frac{6x(x^3-1)^3(x^3+2x+1)}{(x^2+1)^4}.$$

3. Найти производную функции:

1) $y=\sqrt{x^3-2x}$; 2) $y=(2x+1)^2\sqrt{1-2x}$; 3) $y=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

Решение. 1) $y=\sqrt{x^3-2x}$. Заменим $x^3-2x=u$, получим $y=\sqrt{u}$. По формуле (9) имеем:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x^3-2x}}(x^3-2x)'=\frac{3x^2-2}{2\sqrt{x^3-2x}}.$$

2) $y=(2x+1)^2\sqrt{1-2x}$. По формуле производной произведения получим:

$$y'=((2x+1)^2)'\sqrt{1-2x}+(2x+1)^2(\sqrt{1-2x})'.$$

Найдем производные в каждом из слагаемых и выполним преобразования, получим:

$$y'=2(2x+1)(2x+1)'\sqrt{1-2x}+(2x+1)^2\cdot\frac{1(1-2x)'}{2\sqrt{1-2x}}=$$

$$=2(2x+1)\cdot 2\sqrt{1-2x}+\frac{(2x+1)^2(-2)}{2\sqrt{1-2x}}=$$

$$=4(2x+1)\sqrt{1-2x}-\frac{(2x+1)^2}{\sqrt{1-2x}}=\frac{4(2x+1)(1-2x)-(2x+1)^2}{\sqrt{1-2x}}=$$

$$=\frac{4(1-4x^2)-(2x+1)^2}{\sqrt{1-2x}}=\frac{3-4x-20x^2}{\sqrt{1-2x}}.$$

3) $y=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$. Заменим кубический корень дробным показателем и по формуле (7) найдем производную степени: $y=(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$;

$$y'=\frac{2}{3}(x^2-1)^{\frac{2}{3}-1}(x^2-1)'=\frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}2x=\frac{4x}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}=$$

$$=\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Найдите производную функции:

А. 1) $y=3x^2$; 2) $y=-6x^3$; 3) $y=-2x^{-5}$; 4) $y=4x^{\frac{1}{3}}$; 5) $y=5x^{-\frac{2}{5}}$.

Б. 1) $y=\frac{1}{2x^{\frac{2}{3}}}$; 2) $y=2\sqrt{\frac{2}{x^{-3}}}$; 3) $y=\frac{x^4}{\sqrt{x}}$; 4) $y=\frac{2\sqrt{x}}{x^3}$.

В. 1) $y=x^{-1}\sqrt{x^{-1}}\cdot\sqrt[3]{x^2}$; 2) $y=\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x^2}}$; 3) $y=\sqrt[4]{\frac{1}{x^3}}$.

2. Найдите производную функции:

А. 1) $y=4x^3-2x^2+x-5$; 2) $y=-x^3+9x^2+x-1$. Найдите $y'(-1)$.

Б. 1) $y=0{,}25x^4+0{,}(3)x^3+0{,}5x^2-1$; 2) $y=-3x^{-5}+15x^{-4}-2x^{-3}+x^{-1}+2$; 3) $y=(x^3-1)(x^2+x+1)$; 4) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

В. 1) $y=\sqrt[3]{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{5x^3}+4$;

2) $y=\sqrt[4]{x^3}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}$.

3. Найдите производную функции:

А. 1) $y=(x^2-5x+8)^6$; 2) $y=(x^3-1)^6$; 3) $y=\frac{1}{(x^2-1)^4}$.

Б. 1) $y=(ax^2+bx+c)^k$; 2) $y=\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^k$.

4. Найдите производную функции:

А. 1) $y=\sqrt{2x}$; 2) $y=3\sqrt{5x-1}$; 3) $y=-2\sqrt{1-x}$; 4) $y=\sqrt{x^2+1}$.

Б. 1) $y=\sqrt{4-x^2}$; 2) $y=(x^2+6)\sqrt{x^2-3}$; 3) $y=\sqrt{(x^4-1)^{-1}}$; 4) $y=\sqrt[3]{(x^3+1)^2}$.

В. 1) $y=\frac{1}{\sqrt{ax+c}}$; 2) $y=(\sqrt{3x})^{-1}-\sqrt{3x}$; 3) $y=\frac{1+2x}{\sqrt{1-2x}}$.

Ответы. 1. А. 1) $6x$; 3) $-10x^{-6}$; 4) $\frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 5) $-2x^{-\frac{7}{5}}$.

Б. 1) $-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x^2}}$; 2) $3\sqrt{2x}$; 3) $3{,}5x^2\sqrt{x}$; 4) $-\frac{5}{x^3\sqrt{x}}$.

В. 1) $-\frac{5}{6}x^{-\frac{11}{6}}$; 2) $\frac{1}{12}x^{-\frac{5}{6}}$; 3) $-\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$. 2. А. 1) $12x^2-4x+1$.

Б. 3) $5x^4+4x^3+3x^2-2x-1$. В. 2) $0{,}75x^{-0{,}25}+x^{-\frac{4}{3}}-4x^{-3}x^{-2}$.
3. А. 2) $18x^2(x^3-1)^5$. Б. 1) $k(ax^2+bx+c)^{k-1}(2ax+b)$;
2) $\frac{2ak(a+x)^{k-1}}{(a-x)^{k+1}}$. 4. А. 2) $\frac{15}{2\sqrt{5x-1}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$; 4) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Б. 1) $-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$; 2) $\frac{3x^3}{\sqrt{x^2-3}}$; 3) $-\frac{2x^3\sqrt{x^4-1}}{(x^4-1)^2}$; 4) $\frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}$.

В. 3) $\frac{(3-2x)\sqrt{1-2x}}{(1-2x)^2}$.

§ 7. ПРОИЗВОДНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Производные тригонометрических функций находятся по следующим формулам: $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$, $(\operatorname{tg} x)'=$ $=\frac{1}{\cos^2 x}$, $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$.

Каждая из этих формул справедлива в любой точке области определения соответствующей функции.

2. Формулы дифференцирования.

При условии $u=\varphi(x)$		При условии $u=x$	
$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$	(1)	$(\sin x)'=\cos x$	(1a)
$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$	(2)	$(\cos x)'=-\sin x$	(2a)
$(\operatorname{tg} u)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$	(3)	$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	(3a)
$(\operatorname{ctg} u)'=-\frac{1}{\sin^2 u}u'$	(4)	$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	(4a)

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Найти производную функции:

1) $y=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$, вычислить $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y=\sqrt{\sin 2x}$;

3) $y=2x+3{,}6\sin^5(\pi-x)$; 4) $y=\sin(2x^2-3)$; 5) $y=\sin^4 ax$.

Решение. 1) $y=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$. По формулам (4) и (1) из § 5, (5) из § 6 и (1a) из § 7 получим:

$$y'(x)=\frac{(1+\sin x)'(1-\sin x)-(1+\sin x)(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}=\frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}.$$

Теперь найдем $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)$:

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\cos\frac{\pi}{4}}{\left(1-\sin\frac{\pi}{4}\right)^2}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}.$$

2) $y=\sqrt{\sin 2x}$. По формулам (9) из § 6 и (1) из § 7 получим:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{\sin 2x}}\cdot(\sin 2x)',$$

$$y'=\frac{\cos 2x}{2\sqrt{\sin 2x}}(2x)'=\frac{2\cos 2x}{2\sqrt{\sin 2x}}=\operatorname{ctg} 2x\sqrt{\sin 2x}.$$

Здесь мы уничтожили иррациональность в знаменателе дроби.

3) $y=2x+3{,}6\sin^5(\pi-x)$. Используя правила дифференцирования, имеем:

$$y'=(2x)'+(3{,}6\sin^5(\pi-x))'=2+(3{,}6\sin^5 x)'=$$
$$=2+3{,}6\cdot 5\sin^4 x\,(\sin x)'=2+18\sin^4 x\cos x.$$

4) $y=\sin(2x^2-3)$. Положим $2x^2-3=u$, получим $y=\sin u$. Теперь по формуле (1) из § 6 имеем:

$$y'=\cos u\cdot u'=\cos(2x^2-3)(2x^2-3)'=4x\cos(2x^2-3).$$

5) $y=\sin^4 ax$. Сделаем замену $ax=u$, получим $y=\sin^4 u$, т. е. $y=(\sin u)^4$. Нам следует выполнить дифференцирование степени. Применяя последовательно формулы (7) из § 6 и (1) из § 7, получим:

$$y'=4\sin^3 u\cdot(\sin u)';$$
$$y'=4\sin^3 u\cdot\cos u\cdot u'=4\sin^3 ax\cdot\cos ax\,(ax)';$$
$$y'=4a\cdot\sin^3 ax\cos ax.$$

2. Найти производную функции:

1) $y=\dfrac{1-\cos x}{\cos x+1}$, вычислить $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$; 2) $y=\cos(x^3-3)$;

3) $y=(1+\sin 3x)\cos 3x$.

Решение. 1) $y=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$. По формулам (4) и (1) из § 5, (5) из § 6, (2а) из § 7 получим:

$$y'=\frac{(1-\cos x)'(1+\cos x)-(1-\cos x)(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}=\frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}.$$

Вычислим $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$: $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}}{\left(1+\cos\dfrac{\pi}{3}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$.

2) $y=\cos(x^3-3)$. Используя формулу (2) из § 7, получим:

$$y'=-\sin(x^3-3)(x^3-3)';\ y'=-\sin(x^3-3)\cdot 3x^2=$$
$$=-3x^2\sin(x^3-3).$$

3) $y=(1+\sin 3x)\cos 3x$. Используя формулу (2) из § 5, получим:

$$y'=(1+\sin 3x)'\cos 3x+(1+\sin 3x)(\cos 3x)'.$$

Далее, применив правило дифференцирования суммы и формулы (2) и (1) из § 7, получим:

$$y'=3\cos 3x\cos 3x-3\sin 3x(1+\sin 3x)=3(\cos 6x-\sin 3x).$$

3. Найти производную функции:

1) $y=\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x-1}$, вычислить $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$; 2) $y=\operatorname{tg}(3x^2-1)$;

3) $y=\operatorname{tg}\sqrt{6x}$; 4) $y=\operatorname{tg} x\cos^2 x$.

Решение. 1) $y=\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x-1}$. По формулам (4) из § 5 и (3а) из § 7 получим:

$$y'=\frac{\operatorname{tg}' x(\operatorname{tg} x-1)-\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x-1)'}{(\operatorname{tg} x-1)^2}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}(\operatorname{tg} x-1)-\frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}}{(\operatorname{tg} x-1)^2}=\frac{-1}{\cos^2 x(\operatorname{tg} x-1)^2}.$$

Вычислим $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)$: $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-1}{\frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)^2}=\frac{-4}{2(2-\sqrt{3})}=\frac{2}{\sqrt{3}-2}$.

2) $y=\operatorname{tg}(3x^2-1)$. По формуле (3) из § 7 имеем:

$$y'=\frac{1\cdot(3x^2-1)'}{\cos^2(3x^2-1)},\quad y'=\frac{6x}{\cos^2(3x^2-1)}.$$

3) $y=\operatorname{tg}\sqrt{6x}$. По формулам (3) из § 7 и (9) из § 6 получим:

$$y'=\frac{1}{\cos^2\sqrt{6x}}\cdot(\sqrt{6x})',\quad y'=\frac{1}{\cos^2\sqrt{6x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{6x}}\cdot(6x)'=\frac{3}{\sqrt{6x}\cos^2\sqrt{6x}}.$$

4) $y=\operatorname{tg} x\cos^2 x$. Заметим, что $y=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$. Значит, $y'=\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'=\cos 2x$.

4. Найти производную функции:
1) $y=\operatorname{ctg} x-x$; 2) $y=\operatorname{ctg}(ax-k)$; 3) $y=\operatorname{ctg} x^4$.

Решение.
1) $y=\operatorname{ctg} x-x$. По формулам (1) из § 5, (4а) из § 7 имеем:

$$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}-1=\frac{-1-\sin^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x}.$$

2) $y=\operatorname{ctg}(ax-k)$. По формуле (4) из § 7 получим:

$$y'=-\frac{1}{\sin^2(ax-k)}\cdot(ax-k)'=-\frac{a}{\sin^2(ax-k)}.$$

3) $y=\operatorname{ctg} x^4$. По формуле (4) из § 7 получим:

$$y'=-\frac{1}{\sin^2 x^4}(x^4)'=-\frac{4x^3}{\sin^2 x^4}.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Найдите производную функции:

А. 1) $y=\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$, вычислите $y'(45°)$; 2) $y=\sin 3x$;
3) $y=\sin(4x-1)$.

Б. 1) $y=\sin(2x^2+3)$; 2) $y=\sin x^2$; 3) $y=\frac{1}{\sin 3x}$; 4) $y=\frac{1}{\sin(x^3-1)}$;

5) $y=\frac{1}{\sin\sqrt{x}}$; 6) $y=\frac{1}{\sin^2 x}$; 7) $y=\sin^3 ax$.

В. 1) $y=\sin^3 5x^2$; 2) $y=\sin^2\frac{1}{x}$; 3) $y=\sin^3\sqrt{x}$; 4) $y=\frac{1}{\sin^2 3x}$;

5) $y=\sqrt{\sin x^2}$; 6) $y=\sqrt[3]{\sin^2 5x}$; 7) $y=\sqrt[3]{\sin\sqrt{x}}$; 8) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

2. Найдите производную функции:

А. 1) $y=\frac{1+\cos x}{\cos x-1}$, вычислите $y'(60°)$;

2) $y=\frac{1-\sin x}{1+\cos x}$, вычислите $y'(45°)$;

3) $y=2\sin x-\cos x+4$; 4) $y=3\sin x+\cos x-x$;
5) $y=\cos(x^2-3)$.

Б. 1) $y=\cos x^3$; 2) $y=\cos\frac{1}{x^2}$; 3) $y=\cos\sqrt{2x}$;

4) $y=\cos^3 x$; 5) $y=\frac{1}{\cos 2x}$; 6) $y=\frac{1}{\cos^2 x}$.

В. 1) $y=\sqrt{\cos 2x}$; 2) $y=\sqrt{\cos x^3}$; 3) $y=\sqrt{\cos\sqrt{2x}}$;
4) $\frac{1}{\sqrt{\cos x^2}}$; 5) $y=\sqrt[3]{\cos x}$; 6) $y=\cos^2\sqrt[3]{x}$.

3. Найдите производную функции:

А. 1) $y=\frac{\operatorname{tg} x-1}{\operatorname{tg} x}$, вычислите $y'(60°)$;

2) $y=\frac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$; 3) $y=\operatorname{tg} x-x$; 4) $y=\operatorname{tg} 3x$.

Б. 1) $y=\sin x+\operatorname{tg} x$, вычислите $y'(180°)$;
2) $y=\operatorname{tg}(2x^2+1)$; 3) $y=\operatorname{tg}(ax+k)$; 4) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{3}$; 5) $y=\operatorname{tg} x^2$;
6) $y=\operatorname{tg}\sqrt{2x}$.

В. 1) $y=\operatorname{tg}^2 3x$; 2) $y=\operatorname{tg}^2\sqrt{x}$; 3) $y=\operatorname{tg} x\sin^2 x$; 4) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+$
$+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}$.

4. Найдите производную функции:

А. 1) $y=\operatorname{ctg} x+x$; 2) $y=\frac{1+\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x}$; 3) $y=\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x$, вычислите $y'(45°)$.

Б. 1) $y=\operatorname{ctg}(ax+k)$; 2) $y=\operatorname{ctg} x^3$; 3) $y=\operatorname{ctg}\frac{x^2}{2}$; 4) $y=\operatorname{ctg}\frac{1}{x^2}$.

В. 1) $y=\operatorname{ctg}\sqrt{2x}$; 2) $y=\operatorname{ctg}^3 x$; 3) $y=\sqrt{\operatorname{ctg} 2x}$; 4) $y=\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 2x}$;
5) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}}$; 6) $y=-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}$.

Ответы. 1. А. 1) $8-6\sqrt{2}$; 2) $3\cos 3x$; 3) $4\cos(4x-1)$. Б. 1) $4x\cos(2x^2+3)$; 2) $2x\cos x^2$; 3) $-\frac{3\cos 3x}{\sin^2 3x}$; 4) $-\frac{3x^2\cos(x^3-1)}{\sin^2(x^3-1)}$; 5) $-\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}$; 6) $-\frac{\sin 2x}{\sin^4 x}$; 7) $3a\sin^2 ax\cos ax$.

В. 1) $30x\sin^2 5x^2\cos 5x^2$; 2) $-\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}$; 3) $\frac{3\sin\sqrt{x}\cdot\sin 2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}$; 4) $-\frac{6\cos 3x}{\sin^3 3x}$; 5) $\frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$; 6) $\frac{10\cos 5x}{3\sqrt[3]{\sin 5x}}$; 7) $\frac{\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}{6x\sqrt[3]{\sin^2\sqrt{x}}}$.

2. А. 1) $4\sqrt{3}$; 2) $4\sqrt{2}-6$; 3) $2\cos x+\sin x$; 4) $3\cos x-\sin x-1$; 5) $-2x\sin(x^2-3)$. Б. 1) $-3x^2\sin x^3$; 2) $\frac{2}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}$; 3) $-\frac{\sin\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}$; 4) $-3\sin x\cos^2 x$; 5) $\frac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}$; 6) $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$. В. 1) $-\operatorname{tg} 2x\times$ $\times\sqrt{\cos 2x}$; 2) $-1{,}5x^2\operatorname{tg} x^3\sqrt{\cos x^3}$; 3) $-\frac{\operatorname{tg}\sqrt{2x}\sqrt{2x\cos\sqrt{2x}}}{4x}$; 4) $\frac{x\operatorname{tg} x^2}{\sqrt{\cos x^2}}$; 5) $\frac{\sin(-x)}{3\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; 6) $-\frac{\sqrt[3]{x}\sin 2\sqrt[3]{x}}{3x}$. 3. А. 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{1}{1-\sin 2x}$; 3) $\operatorname{tg}^2 x$; 4) $\frac{3}{\cos^2 3x}$.

Б. 1) 0; 2) $\frac{4x}{\cos^2(2x^2+1)}$; 5) $\frac{2x}{\cos^2 x^2}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2x}\cos^2\sqrt{2x}}$. В. 1) $\frac{6\sin 3x}{\cos^3 3x}$; 2) $\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cos\sqrt[3]{x}}$; 3) $\operatorname{tg}^2 x+2\sin^2 x$; 4) $\frac{1}{2\cos^4\frac{x}{2}}$. 4. А. 1) $-\operatorname{ctg}^2 x$; 2) $\frac{1}{\cos^2 x}$; 3) -4.

Б. 1) $-\frac{a}{\sin^2(ax+k)}$; 2) $-\frac{3x^2}{\sin^2 x^3}$; 3) $-\frac{x}{\sin^2\frac{x^2}{2}}$; 4) $\frac{2}{x^3\sin^4\frac{x}{2}}$.

В. 1) $-\frac{1}{\sqrt{2x}\sin^2\sqrt{2x}}$; 2) $-\frac{3\cos^2 x}{\sin^4 x}$; 4) $\frac{4\sin 2x}{\cos^3 2x}$; 5) $\frac{2}{3\sin 2x\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}}$.

Контрольные вопросы

1. Пусть x и x_0 — два значения независимой переменной из $D(f)$. Как называется и как обозначается разность $x-x_0$?
2. Как называется разность между новым значением функции $f(x_0+\Delta x)$ и первоначальным ее значением $f(x_0)$? Каким символом обозначается эта разность?
3. Сформулируйте признаки возрастания и убывания функции, используя понятия приращения аргумента и приращения функции.

4. Что означает запись $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$?
5. Сформулируйте определение предела функции $f(x)$ при $x \to a$.
6. Дайте геометрическую интерпретацию предела функции $f(x)$, используя понятие окрестности точки.
7. Сформулируйте теоремы о пределе суммы, произведения и частного функций.
8. Чему равен предел многочлена $P(x)$ при $x \to x_0$?
9. Дайте определение непрерывности функции в точке.
10. Почему рациональная функция непрерывна в любой точке, где она определена?
11. В каком случае в данной точке функция терпит разрыв? Как называют такую точку?
12. Постройте график функции $y = \begin{cases} 0{,}5x - 1 & \text{при } x \geqslant 1, \\ 1 - 3x & \text{при } x < 1. \end{cases}$
Найдите значение функции в точке разрыва.
13. Дайте определение производной функции в данной точке.
14. Какие существуют обозначения для производной функции $y = f(x)$?
15. Сформулируйте необходимое условие существования производной в данной точке.
16. Если некоторая функция f не является непрерывной в точке x_0, то она в этой точке не имеет производной. Верно ли обратное утверждение: если функция непрерывна в точке x_0, то она имеет в этой точке производную? Если неверно, то приведите пример.
17. Что называется дифференцированием?
18. Назовите по порядку все операции, которые следует произвести при вычислении производной по общему правилу дифференцирования.
19. Найдите область определения сложной функции: а) $y = \sqrt{1 - x^2}$; б) $y = \sqrt{x(9 - x^2)}$; в) $y = \sqrt{4 - \sqrt{x}}$; 2) $y = \frac{1}{(3 - x)^2 - 1}$.
20. Как находится производная сложной функции $h(x) = \varphi(f(x))$?

ГЛАВА XXI

§ 1. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К НАХОЖДЕНИЮ ПРОМЕЖУТКОВ МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Теорема. Если производная функции f в точке x_0 положительна, то функция возрастает в некоторой окрестности этой точки. Если производная функции f в точке x_0 отрицательна, то функция убывает в некоторой окрестности этой точки.

2. На рисунках 180 и 181 графически иллюстрируется возрастание и убывание функции в зависимости от знака ее производной в окрестности данной точки x_0. Функция, график которой изображен на рисунке 180, возрастает в окрестности точки x_0, так как $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha>0$; функция, график которой изображен на рисунке 181, убывает в окрестности точки x_0, поскольку $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha<0$.

3. Теорема. Достаточное условие возрастания (убывания) функции на интервале. Если функция f имеет положительную производную в каждой точке интервала $(a;\ b)$, то функция возрастает на этом интервале. Если функция f имеет отрицательную производную в каждой точке интервала $(a;\ b)$, то функция убывает на этом интервале.

4. Отметим также, что если функция f монотонна на интерва-

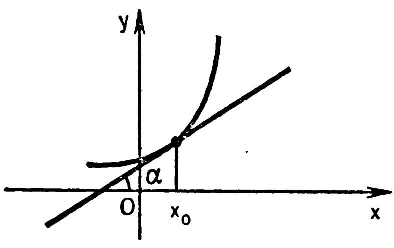


Рис. 180

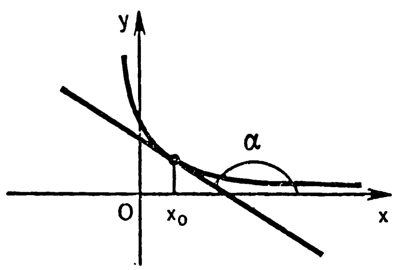


Рис. 181

ле $(a; b)$ и непрерывна в точках a и b, то она монотонна и на отрезке $[a, b]$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Найти промежутки монотонности функции:

1) $f(x)=5x^2-3x+1$; 2) $f(x)=\frac{2}{x}$; 3) $y=\sqrt{x-x^2}$.

Решение. 1) Данная функция определена на всей числовой прямой. Находим производную: $f'(x)=10x-3$. Так как $f'(x)<0$ при $x<0{,}3$ и $f'(x)>0$ при $x>0{,}3$, то в промежутке $(-\infty; 0{,}3]$ функция убывает, а в промежутке $[0{,}3; +\infty)$ возрастает (точка $x=0{,}3$ включается в промежутки монотонности, поскольку в этой точке функция определена и непрерывна; см. п. 4).

2) Область определения функции — вся числовая прямая, за исключением точки $x=0$. Находим $f'(x)=-\frac{2}{x^2}$. Очевидно, что $f'(x)<0$ при всех $x\neq 0$, т. е. данная функция убывает в промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

3) Найдем область определения данной функции: $x-x^2\geqslant 0$, $x^2-x\leqslant 0$ (1).

Квадратное уравнение $x^2-x=0$ имеет корни $x_1=0$ и $x_2=1$. Неравенство (1) справедливо при всех действительных значениях x в промежутке $[0; 1]$. Следовательно, функция $y=x-x^2$ определена в промежутке $[0; 1]$.

Найдем производную функции $y=\sqrt{x-x^2}$: $y'=\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}$. В интервале возрастания функции производная $\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}>0$. Знаменатель $2\sqrt{x-x^2}>0$, следовательно, числитель $1-2x>0$. Имеем $\begin{cases} 1-2x>0, \\ 2\sqrt{x-x^2}>0. \end{cases}$ Решив систему, найдем $x<\frac{1}{2}$. Учитывая, что область определения функции $[0; 1]$, имеем $0\leqslant x<\frac{1}{2}$.

Знаменатель $2\sqrt{x-x^2}>0$, но при $x=0$ и $x=1$ знаменатель обращается в нуль, поэтому x может принимать лишь значения $0<x<\frac{1}{2}$.

Следовательно, на промежутке $[0; 0{,}5]$ функция $y=\sqrt{x-x^2}$ возрастает.

В интервале убывания функции производная $\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}<0$. (2) Решим неравенство (2), получим:

$$\begin{cases} 2\sqrt{x-x^2}>0, \\ 1-2x<0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0<x<1, \\ x>\frac{1}{2}; \end{cases} \qquad \frac{1}{2}<x<1.$$

Следовательно, функция $y=\sqrt{x-x^2}$ убывает на промежутке $[0,5;\ 1]$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Найдите промежутки монотонности функции:

А. 1) $y=3x+1$; 2) $y=x^2$; 3) $y=x^2-2x+5$.

Б. 1) $y=x^3-27x$; 2) $y=x^2(x-3)$; 3) $y=x^3+3x^2-9x+1$.

В. 1) $y=x^4-4x+3$; 2) $y=\frac{1}{2x}$; 3) $y=\sqrt{x^2-2x}$.

Ответы. **А.** 1) Возрастает на R; 2) убывает на $(-\infty;\ 0]$, возрастает на $[0;\ \infty)$. **Б.** 1) Возрастает на $(-\infty;\ -3]$ и на $[3;\ \infty)$, убывает на $[-3;\ 3]$; 2) возрастает на $(-\infty;\ 0]$ и на $[2;\ \infty)$, убывает на $[0;\ 2]$; 3) возрастает на $(-\infty;\ -3]$ и на $[1;\ \infty)$, убывает на $[-3;\ 1]$. **В.** 1) Возрастает на $[1;\ \infty)$ и убывает на $(-\infty;\ 1]$; 2) функция убывает всюду, кроме $x=0$; 3) возрастает на $[2;\ \infty)$, убывает на $(-\infty;\ 0]$.

§ 2. КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ ФУНКЦИИ, ЕЕ МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются критическими.

2. Точка x_0 из области определения функции f называется точкой минимума этой функции, если найдется δ-окрестность $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ точки x_0, такая, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$.

3. Точка x_0 из области определения функции f называется точкой максимума этой функции, если найдется такая δ-окрестность $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$.

4. Точки минимума и максимума называются точками экстремума данной функции, а значения функции в этих точках соответственно минимумом и максимумом функции (или экстремумом самой функции).

5. Функция $y=f(x)$, график которой изображен на рисунке 182, в точках x_1 и x_3 имеет минимумы (y_{min}), а в точках x_2 и x_4 — максимумы (y_{max}). Заметим, что точки a и b не считаются точками экстремума функции f, так как у этих точек нет окрестности, целиком входящей в область определения функции.

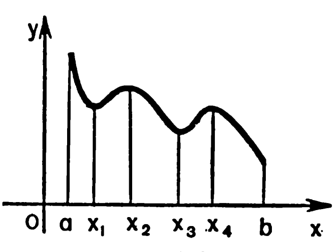


Рис. 182

6. Теорема Ферма. Необходи-

мое условие существования экстремума функции. Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$ и в этой точке существует производная, то она равна нулю, т. е. $f'(x_0)=0$.

Например, функция $f(x)=x^2-2x+1$ в точке $x=1$ имеет минимум, следовательно, по теореме Ферма производная функции в этой точке равна нулю: $f'(1)=0$.

7. Отметим, что теорема Ферма выражает лишь необходимое условие существования экстремума: из того, что производная обращается в нуль или не существует в данной точке x_0, не следует, что x_0 — точка экстремума.

Так, производная функции $f(x)=x^3$ (рис. 183) в точке $x=0$ равна нулю: $f'(x)=3x^2$, $f'(0)=0$. Однако в этой точке функция не имеет экстремума.

Производная функции $f(x)=2x+|x|$ (рис. 184) в точке $x=0$ не существует. В этой точке функция не имеет экстремума.

8. Достаточные условия существования экстремума. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет производную $f'(x)$ в некоторой окрестности $(a;\ b)$ этой точки. Тогда:

если $f'(x)<0$ на интервале $(a;\ x_0)$ и $f'(x_0)>0$ на интервале $(x_0;\ b)$ (т. е. производная меняет знак с минуса на плюс), то x_0 — точка минимума функции $f(x)$;

если $f'(x)>0$ на интервале $(a;\ x_0)$ и $f'(x_0)<0$ на интервале $(x_0;\ b)$ (т. е. производная меняет знак с плюса на минус), то x_0 — точка максимума функции $f(x)$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Дана функция: 1) $y=4x^2-6x$; 2) $y=x^3-3x^2$. Найти ее критические точки, промежутки монотонности, точки экстремума. Построить график функции $y=x^3-3x^2$..

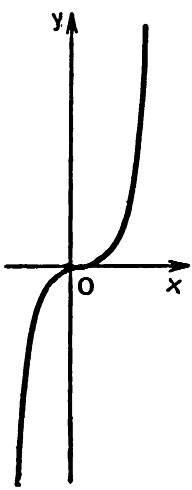


Рис. 183

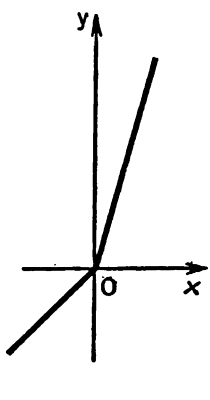


Рис. 184

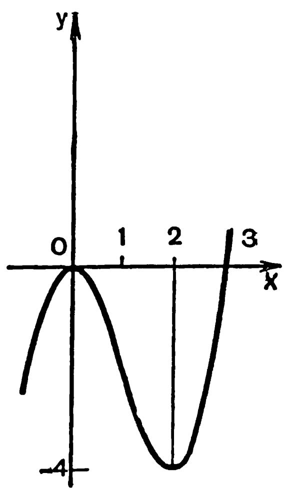


Рис. 185

Решение. 1) Имеем $y'=8x-6$, $8x-6=0$, $x=\frac{3}{4}$ — критическая точка. Так как $y'<0$ на $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$ и $y'>0$ на $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$, то в промежутке $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right]$ функция убывает, а в промежутке $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$ возрастает. В точке $x=\frac{3}{4}$ функция непрерывна, а производная в этой точке меняет знак с минуса на плюс. Таким образом, $x=\frac{3}{4}$ — точка минимума. Находим значение функции при $x=\frac{3}{4}$: $y_{\min}=4\cdot\frac{9}{16}-6\cdot\frac{3}{4}=-\frac{9}{4}$.

2) Имеем $y'=3x^2-6x=3x(x-2)$. Приравняем найденную производную нулю и решим уравнение $3x(x-2)=0$, т. е. найдем критические точки функции: $x_1=0$, $x_2=2$.

Определим промежутки знакопостоянства производной: $y'>0$ при $x<0$, $x>2$; $y'<0$ при $0<x<2$. Значит, $x=0$ — точка максимума, $x=2$ — точка минимума.

Найдем экстремумы функции. Для этого вычислим значения функции в точках максимума и минимума: $y(0)=0^3-3\cdot0^2=0$; $y(2)=2^3-3\cdot2^2=-4$. Теперь найдем точки пересечения графика с осями координат. Приравняв y нулю, получим $x^3-3x^2=0$, $x^2(x-3)=0$, откуда $x=0$ и $x=3$, т. е. имеем точки $(0; 0)$ и $(3; 0)$.

Составим таблицу:

x	0	2	3
y	0	-4	0
	Максимум функции	Минимум функции	Точка пересечения с осью Ox

Кроме того, функция $y=x^3-3x^2$ возрастает на промежутках $(-\infty; 0]$ и $[2; \infty)$ и убывает на промежутке $[0; 2]$. Построим график функции $y=x^3-3x^2$ (рис. 185).

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Исследуйте функцию на возрастание (убывание) и экстремумы:

А. 1) $y=4x^2+6x$; 2) $y=\frac{x^2}{2}-3x$; 3) $y=x^2-4x$; 4) $y=x^2-x$; 5) $y=x^2+3x$; 6) $y=-x^2+2x$.

Б. 1) $y=x^3+3x^2$; 2) $y=0{,}5x^4$; 3) $y=2x^4-x$; 4) $y=0{,}25x^4+8x$; 5) $y=2x^3-9x^2+12x-8$.

В. 1) $y=\frac{3x-1}{1-4x}$; 2) $y=\frac{x-3}{2x+4}$; 3) $y=\frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$;

4) $y=\frac{16}{x(4-x^2)}$; 5) $y=x^4(x-12)^2$; 6) $y=\frac{x^2}{x^2+3}$.

Ответы. А. 1) Убывает на промежутке $(-\infty; -0{,}75]$, возрастает на промежутке $[-0{,}75; \infty)$, минимум в точке $-0{,}75$; 3) минимум в точке 2, убывает на промежутке $(-\infty; 2]$ и возрастает на промежутке $[2; \infty)$; 6) максимум в точке 1, убывает на промежутке $[1; \infty)$ и возрастает на промежутке $(-\infty; 1]$. Б. 1) Возрастает на промежутках $(-\infty; -2]$ и $[0; \infty)$, убывает на промежутке $[-2; 0]$, максимум в точке -2, минимум в точке 0; 2) возрастает на промежутке $[0; \infty)$ и убывает на $(-\infty; 0)$, минимум в точке 0; 5) максимум в точке 1, а минимум в точке 2; возрастает на промежутках $(-\infty; 1]$ и $[2; \infty)$, а убывает на промежутке $[1; 2]$. В. 1) Убывает на промежутках $(-\infty; 0{,}25)$ и $(0{,}25; \infty)$, критических точек нет; 3) убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $[3{,}2; \infty)$, возрастает на промежутке $(0; 3{,}2]$, максимум в точке 3,2; 5) возрастает на $[0; 8]$ и на $[12; \infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$ и на $[8; 12]$; $x=0$ и $x=12$ — точки минимума, $x=8$ — точка максимума.

§ 3. ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Общее исследование функции и построение ее графика рекомендуется выполнять по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Проверить, не является ли функция четной или нечетной; проверить также, не является ли она периодической.
3. Найти, если это возможно, точки пересечения графика функции с осями координат и промежутки знакопостоянства функции. Иногда для уточнения построения графика следует найти две-три дополнительные точки.
4. Найти производную функции и ее критические точки.
5. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции.
6. Построить график функции, используя полученные результаты исследования.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Исследовать функцию и построить ее график:

1) $y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2$; 2) $y=\frac{x}{x^2-4}$; 3) $y=\sin x-0{,}5\sin 2x$.

Решение. 1) 1. Область определения — множество R.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

3. Найдем точки пересечения графика с осью Ox (т. е. нули функции): $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2=0$, $3x^4-4x^3-12x^2=0$, $x^2(3x^2-4x-12)=0$, $x_{1,2}=0$, $x_3\approx-1{,}4$, $x_4\approx2{,}8$.

Возьмем также две дополнительные точки, например: $f(1)=-\frac{13}{12}$, $f(3)=\frac{9}{4}$.

4. Находим производную:

$$f'(x)=x^3-x^2-2x=x(x^2-x-2)=(x+1)(x-2)x.$$

Приравняв производную нулю, получим критические точки: $x=-1$, $x=0$, $x=2$.

5. Найденные критические точки разбивают числовую прямую на четыре промежутка: $(-\infty;\ -1)$, $(-1;\ 0)$, $(0;\ 2)$ и $(2;\ +\infty)$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty;\ -1)$	-1	$(-1;\ 0)$	0	$(0;\ 2)$	2	$(2;\ \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$ убывает	$-\frac{5}{12}$ min	$\nearrow$ возрастает	0 max	$\searrow$ убывает	$-\frac{8}{3}$ min	$\nearrow$ возрастает

В первой строке таблицы в порядке возрастания расположены критические точки функции и ограниченные ими промежутки, во второй отмечены знаки производной в этих промежутках. В третьей строке записаны выводы об изменении функции, вычислены значения функции в точках экстремума и указано, какая из точек является точкой минимума, а какая — точкой максимума.

6. Используя результаты исследования, строим график функции (рис. 186).

2) 1. Функция определена при всех значениях x, кроме $x=-2$ и $x=2$, т. е. $D(f)=(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$. Отметим,

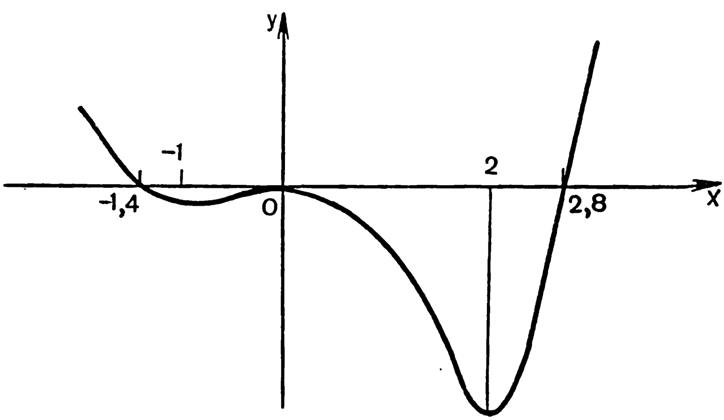


Рис. 186

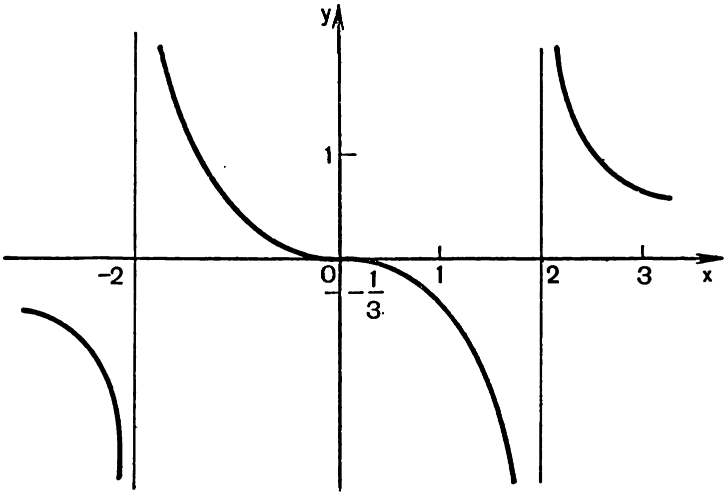


Рис. 187

что $y \to 0$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$; кроме того, $y \to \pm\infty$ при $x \to 2$ и $x \to -2$.

2. Функция является нечетной, так как $f(-x) = -f(x)$. Следовательно, ее график симметричен относительно начала координат и достаточно исследовать функцию лишь на промежутке $[0; +\infty)$.

3. Если $x=0$, то $y=0$, т. е. точка (0; 0) принадлежит графику функции. Возьмем также две дополнительные точки, например: $f(1) = -\frac{1}{3}$, $f(3)=0{,}6$.

4. Находим производную $f'(x) = \frac{x^2-4-x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = -\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$.

5. Очевидно, что $f'(x)<0$ при всех значениях $x \in D(f)$. Следовательно, функция убывает на промежутках $(-\infty; -2)$, $(-2; 2)$ и $(2; +\infty)$. Экстремумов функция не имеет.

6. На основании полученных сведений строим график функции (рис. 187).

3) Находим $D(f)=\boldsymbol{R}$. Имеем $f(-x) = \sin(-x) - 0{,}5\sin(-2x) = -\sin x + 0{,}5\sin 2x = -(\sin x - 0{,}5\sin 2x) = -f(x)$. Следовательно, функция нечетная.

Функция периодическая с основным периодом $T=2\pi$. Поскольку период функции равен 2π, достаточно провести исследование только от $-\pi$ до π, построить график функции на отрезке $[-\pi; \pi]$ и продолжить его, пользуясь периодичностью. Но так как функция является нечетной, то достаточно исследовать функцию и построить ее график на отрезке $[0; \pi]$, затем, пользуясь симметрией относительно начала координат, отразить его на отрезок $[-\pi; 0]$ и далее уже воспользоваться периодичностью данной функции. Итак, дальнейшее исследование проведем для отрезка $[0; \pi]$.

Найдем точки пересечения графика с осью Ox. Для этого решим уравнение $\sin x - 0{,}5 \sin 2x = 0$, имеем $\sin x - \sin x \cos x = 0$, $\sin x (1 - \cos x) = 0$. На отрезке $[0; \pi]$ последнее уравнение имеет два корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = \pi$. Следовательно, график функции не пересекает оси абсцисс ни в какой внутренней точке отрезка $[0; \pi]$.

В интервале $(0; \pi)$ функция принимает только положительные значения.

Функция непрерывная и периодическая, следовательно, асимптот график функции не имеет. Найдем значения функции на концах отрезка $[0; \pi]$, имеем $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$.

Найдем точки экстремума. Так как $y' = \cos x - \cos 2x$, то, приравняв производную нулю, получим $\cos x - \cos 2x = 0$. Далее последнее уравнение преобразуем так:

$$\cos x - (1 + \cos 2x) + 1 = 0,$$
$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0,$$
$$\cos x = 1, \ \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Решим полученные уравнения. Из первого уравнения находим $x_1 = 0$, из второго $x_2 = \frac{2\pi}{3}$ (напомним, что мы ограничиваемся пока отрезком $[0; \pi]$).

Таким образом, внутри отрезка $[0; \pi]$ имеется только одна точка $x = \frac{2\pi}{3}$, которую надо проверить. Ясно, что эта точка максимума, поскольку, как мы отметили уже, на концах отрезка $[0; \pi]$ функция обращается в нуль, а всюду внутри отрезка она положительна.

Найдем значение функции в точке максимума:

$$y_{\max} = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin \frac{2\pi}{3} - 0{,}5 \sin \frac{4\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Можно составить таблицу значений функции для некоторых значений аргумента:

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
y	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	1	0

Теперь, пользуясь полученными результатами, построим график функции сначала на отрезке $[0; \pi]$, а затем и на всей числовой прямой (рис. 188).

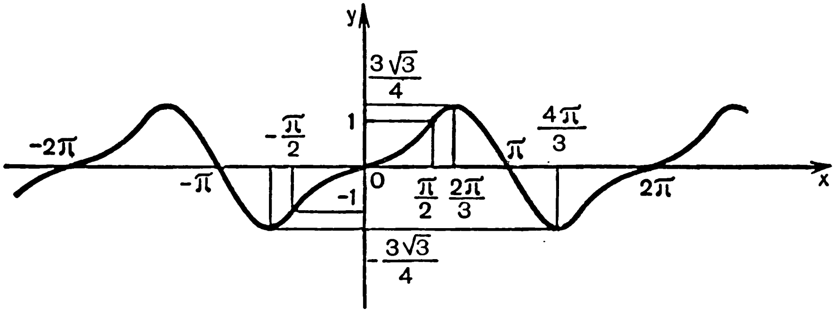


Рис. 188

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Исследуйте функцию и постройте ее график:

А. 1) $y=x^2-2x+8$; 2) $y=5x-x^2-4$; 3) $y=x^2+x+1$; 4) $y=x^2-6x+9$.

Б. 1) $y=3x-x^3-2$; 2) $y=3x^2-x^3$; 3) $y=x^3+3x+2$; 4) $y=\frac{x^3}{3}+$ $+x^2-3x$.

В. 1) $y=x^4-2x^3+3$; 2) $y=x^4-2x^2-3$; 3) $y=3x^5-5x^3$;
4) $y=9x^5+3x^3$; 5) $y=\frac{2x}{1+x^2}$; 6) $y=\frac{6(x-1)}{x^2+3}$; 7) $y=x\sqrt{2-x}$;
8) $y=x^2\sqrt{x+1}$; 9) $y=2\sin x-\cos 2x$.

Ответы. **А.** 2) Возрастает на $(-\infty; 2{,}5]$ и убывает на $[2{,}5; \infty)$; $x=2{,}5$ — точка максимума. **Б.** 1) Убывает на $(-\infty; -1]$ и на $[1; \infty)$, возрастает на $[-1; 1]$; $x=-1$ — точка минимума, $x=1$ — точка максимума; 2) рис. 189; 3) возрастает всюду. **В.** 1) Рис. 190; 4) возрастает всюду; 5) рис. 191;6) возрастает на $[-1; 3]$, убывает на $(-\infty; -1]$ и на $[3; \infty]$; $x=-1$ — точка минимума, $x=3$ — точка максимума, график изображен на рисун-

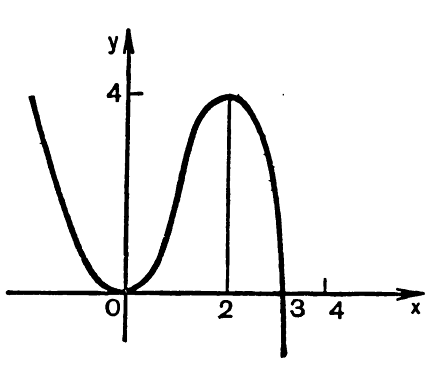


Рис. 189

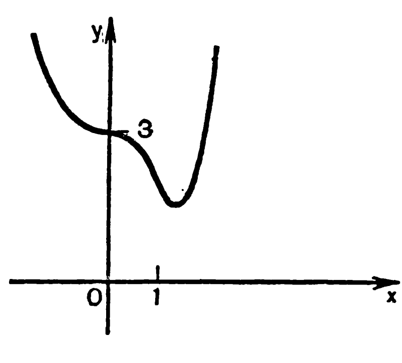


Рис. 190

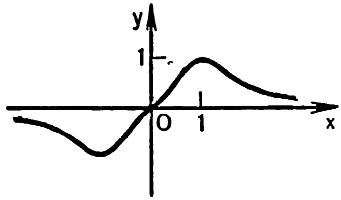


Рис. 191

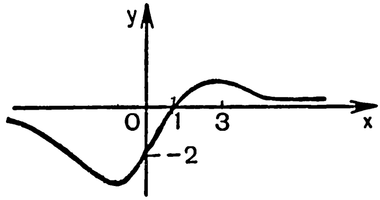


Рис. 192

ке 192; 7) возрастает на $\left(-\infty; \frac{4}{3}\right]$, убывает на $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$; $x=\frac{4}{3}$ — точка максимума; 8) возрастает на $\left[-1; -\frac{4}{5}\right]$ и на $[0; \infty)$, убывает на $\left[-\frac{4}{5}; 0\right]$; $x=-\frac{4}{5}$ — точка максимума, $x=0$ — точка минимума.

§ 4. ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ НАИМЕНЬШЕГО И НАИБОЛЬШЕГО ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. На рисунке 193 изображен график некоторой функции f, определенной на отрезке $[a; b]$. В точке x_2 функция имеет максимум, а в точках x_1 и x_3 — минимумы. Своего наименьшего значения, как это видно из рисунка, функция достигает в точке x_3 — точке минимума. Наибольшее значение функция принимает на конце отрезка в точке b, в которой функция не имеет экстремума (так как справа от точки b функция не определена).

2. Для отыскания наименьшего и наибольшего значения функции, дифференцируемой внутри отрезка и непрерывной на его концах, следует найти все критические точки функции, лежащие внутри отрезка, вычислить значения функции в этих точках и на концах отрезка, а затем из всех полученных таким образом чисел выбрать наименьшее и наибольшее.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y(x)=-2x^3-3x^2+4$ на промежутке: а) $[-2; -0{,}5]$; б) $[1; 3)$.

Решение. Находим критические точки функции. Так как $y'(x)=-6x^2-6x=-6x(x+1)$, то имеются две критические точки: $x=0$ и $x=-1$.

а) В промежутке $[-2; -0{,}5]$ лежит одна из критических точек: $x=-1$. Так как $y(-2)=8$, $y(-1)=3$, $y(-0{,}5)=3{,}5$, то наименьшее значение функции $y(x)=-2x^3-3x^2+4$ достига-

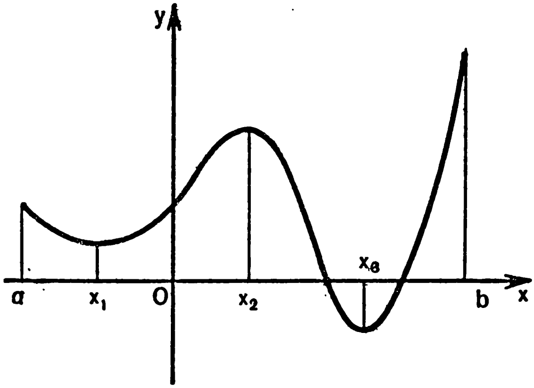


Рис. 193

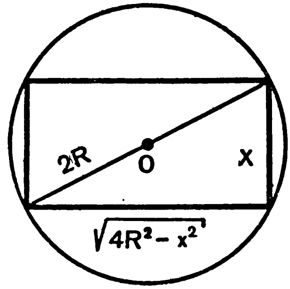


Рис. 194

ется в точке $x=-1$ и равно 3, а наибольшее — в точке $x=-2$ и равно 8. Кратко это можно записать так:

$$\min_{[-2;\,-0{,}5]} y(x)=y(-1)=3,\quad \max_{[-2;\,-0{,}5]} y(x)=y(-2)=8.$$

б) В промежутке $[1; 3)$ данная функция убывает. Поэтому $\max\limits_{[1;\,3)} y(x)=y(1)=-1$. Наименьшего значения в промежутке $[1; 3)$ функция не достигает, так как точка $x=3$ не принадлежит этому промежутку.

2. Вписать в круг радиуса R прямоугольник наибольшей площади.

Решение. Обозначим длину одной из сторон прямоугольника через x (рис. 194), тогда длина другой стороны равна $\sqrt{4R^2-x^2}$. Заметим, что $0<x<2R$, так как x — длина хорды окружности радиуса R, отличная от диаметра. Следовательно, площадь прямоугольника выразится равенством $S(x)=x\sqrt{4R^2-x^2}$.

Найдем наибольшее значение функции $S(x)$ на отрезке $[0; 2R]$. Имеем $S'(x)=0$, т. е. $\sqrt{4R^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}}=0$, $4R^2-2x^2=0$, откуда $x=R\sqrt{2}$ (значение $x=-R\sqrt{2}$, очевидно, не удовлетворяет условию). Значит, надо сравнить значения функции при $x=R\sqrt{2}$ (в точке экстремума), $x=0$ и $x=2R$ (на концах отрезка). Так как $S(0)=S(2R)=0$, а $S(R\sqrt{2})=2R^2$, то функция принимает наибольшее значение на $[0; 2R)$ при $x=R\sqrt{2}$. Поскольку наибольшее значение функции $S(x)$ на отрезке $[0; 2R]$ достигается во внутренней точке отрезка, то наибольшее ее значение $S(x)$ на интервале $(0; 2R)$ также достигается в точке $x=R\sqrt{2}$. При этом длина другой стороны прямоугольника равна $\sqrt{4R^2-x^2}=R\sqrt{2}$, т. е. искомым прямоугольником служит квадрат.

З а м е ч а н и е. 1) При отыскании наибольшего значения функции $S(x)$ удобно записать ее в виде $S(x)=\sqrt{4R^2x^2-x^4}$. Далее найти наибольшее значение функции $f(x)=4R^2x^2-x^4$ на заданном интервале $(0; 2R)$. Наибольшее значение функции $S(x)$ будет достигаться в той же точке, что и для функции $f(x)$, так как функция $y=\sqrt{t}$ возрастает на $[0; \infty)$.

2) Данную задачу можно решить и без использования производной. Пусть величина угла между диагоналями прямоугольника равна α. Тогда площадь прямоугольника равна половине произведения длин диагоналей на синус угла между ними, т. е.

$$S(\alpha)=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot 2R\cdot 2R\cdot\sin\alpha=2R^2\sin\alpha.$$

Очевидно, что наибольшее значение функции $S(\alpha)$ достигается, если $\sin\alpha=1$, т. е. $\alpha=90°$. Значит, прямоугольник является квадратом.

3. Из всех прямоугольников данного периметра найти тот, у которого диагональ наименьшая.

Р е ш е н и е. Пусть периметр прямоугольника равен $2a$ и одна из сторон прямоугольника равна x, тогда другая сторона будет $\frac{2a-2x}{2}=a-x$.

Диагональ прямоугольника — переменная величина; обозначив ее через y, получим по теореме Пифагора $y^2=x^2+(a-x)^2$, или $y^2=2x^2-2ax+a^2$, откуда $y=\sqrt{2x^2-2ax+a^2}$, где $0<x<a$.

Исследуем функцию $y=\sqrt{2x^2-2ax+a^2}$ с помощью первой производной:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{2x^2-2ax+a^2}}\cdot(2x^2-2ax+a^2)'=\frac{2x-a}{\sqrt{2x^2-2ax+a^2}};$$

$\frac{2x-a}{\sqrt{2x^2-2ax+a^2}}=0$, $2x-a=0$, $x=\frac{a}{2}$, значит, прямоугольник — квадрат.

$$y'=\frac{2x-a}{\sqrt{2x^2-2ax+a^2}}=\frac{2\left(x-\frac{a}{2}\right)}{\sqrt{2x^2-2ax+a^2}}. \quad (1)$$

Знаменатель дроби (1) положительный, поэтому достаточно исследовать только числитель: $y'<0$, если $x<\frac{a}{2}$; $y'>0$, если $x>\frac{a}{2}$.

Производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно, функция при $x=\frac{a}{2}$ имеет минимум.

Таким образом, из всех прямоугольников данного периметра наименьшую диагональ имеет квадрат.

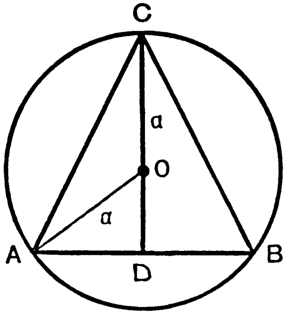


Рис. 195

4. В круг радиуса a вписан равнобедренный треугольник. При каком соотношении сторон треугольник будет иметь наибольшую площадь.

Решение. Пусть $\angle ACB=\alpha$ (рис. 195), тогда по теореме синусов имеем $AB=2a\sin\alpha$. Далее из $\triangle ADC$ $CD=$ $=AD\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=a\sin\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=$ $=a\sin\alpha\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=a(1+\cos\alpha)$.

Рассмотрим площадь треугольника как функцию переменной α $(0<\alpha<\pi)$:

$$S(\alpha)=\frac{AB\cdot CD}{2}=a^2\sin\alpha(1+\cos\alpha)=a^2\left(\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right).$$

Найдем значение $\alpha\in(0;\pi)$, при котором функция $S(\alpha)$ достигает наибольшего значения:

$$S'(\alpha)=a^2(\cos\alpha+\cos 2\alpha)=a^2(2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1)=$$
$$=a^2(\cos\alpha+1)(2\cos\alpha-1).$$

Так как $\cos\alpha+1>0$ $(\alpha\in(0;\pi))$, то $S'(\alpha)=0$ при $\cos\alpha=$ $=\frac{1}{2}$, откуда $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

Если $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$, то $S'(\alpha)>0$, т. е. $S(\alpha)$ возрастает на $\left(0;\frac{\pi}{3}\right]$. Если $\frac{\pi}{3}<\alpha<\pi$, то $S'(\alpha)<0$, т. е. $S(\alpha)$ убывает на $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right)$.

Итак, $\max\limits_{(0;\pi)} S(\alpha)=S\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Если $\alpha=\frac{\pi}{3}$, то треугольник равносторонний.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции: 1) $f(x)=x^4-8x^2-9$ на отрезке: а) $[-1;1]$; б) $[0;3]$;

2) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(x-2)$ на отрезке: а) $[-8;-1]$; б) $[-1;1]$.

2. В. Представьте число 12 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

3. В. Найдите такое число, чтобы его сумма со своим квадратом имела наименьшее значение.

4. Имеется проволока длиной a метров. Требуется оградить этой проволокой прямоугольный участок земли, одна сторона которого примыкает к стене заводского здания, так, чтобы площадь огороженного участка была наибольшей.

5. Покажите, что из всех прямоугольных треугольников с заданной гипотенузой наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

Ответы. **1.** 1) а) $\min\limits_{[-1;\,1]} f(x)=f(-1)=f(1)=-16$, $\max\limits_{[-1;\,1]} f(x)=$ $=f(0)=-9$; б) $\min\limits_{[0;\,3]} f(x)=f(2)=-25$, $\max\limits_{[0;\,3]} f(x)=f(3)=0$; 2) а) $\min\limits_{[-8;\,-1]} f(x)=-40$, $\max\limits_{[-8;\,-1]} f(x)=-3$; б) $\min\limits_{[-1;\,1]} f(x)=f(-1)=$ $=-3$, $\max\limits_{[-1;\,1]} y(x)=y(0)=0$. **2.** 6 и 6. **3.** $-0{,}5$. **4.** $\frac{a^2}{8}$ м^2.

Контрольные вопросы

1. Верно ли, что: а) если $f'(x_0)>0$, то функция f возрастает в некоторой окрестности точки x_0; б) если $f'(x_0)<0$, то функция убывает в некоторой окрестности точки x_0? Поясните это графически.
2. Сформулируйте теорему, выражающую достаточное условие возрастания (убывания) функции на интервале.
3. Какие точки называются критическими?
4. Дайте определение точки минимума и точки максимума функции.
5. В чем различие понятий «точка экстремума функции» и «экстремум функции»?
6. Можно ли утверждать, что если производная в данной точке равна нулю (или не существует), то эта точка является точкой максимума или минимума? Приведите пример.
7. Сформулируйте достаточное условие существования экстремума функции.
8. Как следует понимать наибольшее и наименьшее значения функции?
9. Можно ли утверждать, что если в какой-либо точке, взятой из области определения, функция имеет максимум, то значение функции в этой точке является наибольшим на всем промежутке, где функция определена?
10. Как найти наименьшее и наибольшее значения функции, дифференцируемой на данном промежутке?

ГЛАВА XXII

§ 1. ФОРМУЛЫ ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ
§ 2. КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ
§ 3. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ В ДАННЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ
§ 4. ГРАФИКИ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

---

§ 1. ФОРМУЛЫ ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. $\sqrt{1+\Delta x}\approx 1+\frac{1}{2}\Delta x.$ (1)

2. $\sqrt[k]{x_0+\Delta x}\approx\sqrt[k]{x_0}+\frac{\sqrt[k]{x_0}}{kx_0}\cdot\Delta x$ при $x_0\neq 0$, где $\frac{\sqrt[k]{x_0}}{kx_0}=f'(x_0)$. (2)

3. $(1+\Delta x)^k\approx 1+k\Delta x$, где k — целое число. (3)

4. $(x+\Delta x)^k\approx x^k+kx^{k-1}\Delta x.$ (4)

5. $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\,\Delta x.$ (5)

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Вычислить приближенно значение: 1) $\sqrt{1{,}03}$; 2) $\sqrt{0{,}999}$; 3) $\sqrt{37}$; 4) $\sqrt{8{,}84}$.

Решение. 1) $\sqrt{1{,}03}$. Воспользуемся формулой (1): $\sqrt{1{,}03}=\sqrt{1+0{,}03}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}03=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{100}=1+\frac{3}{200}=1\frac{3}{200}$.

2) $\sqrt{0{,}999}$. Воспользуемся формулой (1): $\sqrt{0{,}999}=\sqrt{1-0{,}009}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot(-0{,}001)=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1000}=1-\frac{1}{2000}=\frac{1999}{2000}$.

3) $\sqrt{37}$. Воспользуемся формулой (2): $\sqrt{37}=\sqrt{36+1}\approx 6+\frac{1}{2\cdot 6}\cdot 1=6+\frac{1}{12}=6\frac{1}{12}$.

4) $\sqrt{8{,}84}$. Воспользуемся формулой (2): $\sqrt{8{,}84}=\sqrt{9-0{,}16}\approx 3-\frac{1}{2\cdot 3}\cdot 0{,}16=3-\frac{1}{6}\cdot\frac{16}{100}=3-\frac{2}{75}=2\frac{73}{75}$.

2. Вычислить приближенно значение: 1) $\sqrt[3]{26{,}19}$; 2) $\sqrt[5]{33}$.

Решение. 1) $\sqrt[3]{26{,}19}$. Здесь $y=\sqrt[3]{x}$, а $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Полагая $x_0=27$, $\Delta x=-0{,}81$ и используя формулу (2), получим $\sqrt[3]{26{,}19}=\sqrt[3]{27-0{,}81}\approx\sqrt[3]{27}-\frac{0{,}81}{3\sqrt[3]{27^2}}=3-\frac{0{,}81}{3\cdot 9}=2{,}97$.

2) $\sqrt[5]{33}$. Здесь $y=\sqrt[5]{x}$, а $y'=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$, следовательно, $\sqrt[5]{33}=$

$=\sqrt[5]{32+1}=\sqrt[5]{2^5+1}\approx 2+\frac{2}{5\cdot 32}\cdot 1=2+0{,}0125\approx 2{,}013.$ Здесь мы воспользовались формулой (2).

3. Вычислить приближенное значение: 1) $1{,}003^{100}$; 2) $0{,}998^{20}$; 3) $2{,}998^{200}$; 4) $\frac{1}{0{,}999^{30}}$.

Решение. 1) $1{,}003^{100}$. Для решения применим формулу (3). Положим в этой формуле $\Delta x=0{,}003$, а $k=100$, тогда

$$1{,}003^{100}=(1+0{,}003)^{100}\approx 1+100\cdot 0{,}003=1{,}3.$$

2) $0{,}998^{20}$. Используем формулу (3):

$$0{,}998^{20}=(1-0{,}002)^{20}\approx 1+20\cdot(-0{,}002)=1-0{,}04=0{,}96.$$

3) $2{,}998^{200}$. Используем формулу (4), получим:

$$2{,}998^{200}=(3-0{,}002)^{200}\approx 3^{200}+200\cdot 3^{199}(-0{,}002)=$$
$$=3^{200}(1+200\cdot 3^{-1}\cdot(-0{,}002))=3^{200}\left(1-\frac{200}{3}\cdot\frac{2}{1000}\right)=$$
$$=3^{200}\cdot\left(1-\frac{2}{15}\right)=3^{200}\cdot\frac{13}{15}.$$

4) $\frac{1}{0{,}999^{30}}$. Ни одну из предложенных формул в явном виде применить нельзя. Данную дробь упростим так:

$$\frac{1}{0{,}999^{30}}=(0{,}999)^{-30}.$$

Теперь применим формулу (3) при $k=-30$, получим:

$$(0{,}999)^{-30}=(1-0{,}001)^{-30}\approx 1+(-30)\cdot(-0{,}001)=$$
$$=1+0{,}03=1{,}03.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Найдите приближенные значения:

А. 1) $\sqrt{1{,}004}$; 2) $\sqrt{0{,}994}$; 3) $\sqrt{26}$; 4) $\sqrt{15{,}84}$; 5) $\sqrt{1{,}06}$; 6) $\sqrt{4{,}08}$; 7) $1{,}001^{100}$; 8) $1{,}002^{100}$; 9) $0{,}998^{20}$; 10) $1{,}0003^{20}$; 11) $2{,}997^{50}$; 12) $\frac{1}{(1{,}003)^{20}}$; 13) $\frac{1}{0{,}998^{10}}$; 14) $\frac{1}{\sqrt{1{,}04}}$.

Б. 1) $\sin 31°$; 2) $\sin 29°$; 3) $\cos 61°$; 4) $\cos 59°$; 5) $\operatorname{tg} 31°$; 6) $\operatorname{tg} 29°$; 7) $\operatorname{tg} 44°$; 8) $\operatorname{tg} 46°$; 9) $\sin(45°-0{,}04)$; 10) $\cos(30°+0{,}02)$.

Ответы. А. 1) 1,002; 2) 0,997; 3) 5,5; 4) 3,92; 5) 1,03; 6) 2,04; 7) 1,1; 10) 1,006; 11) $3^{50}\cdot 0{,}95$; 12) 0,94; 13) 1,08; 14) 0,98. Б. 1) $0{,}5+\frac{\sqrt{3}\pi}{360}$; 3) $0{,}5-\frac{\sqrt{3}\pi}{360}$; 5) $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{135}$; 7) $1-\frac{\pi}{90}$; 9) $0{,}48\sqrt{2}$.

§ 2. КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Касательной к кривой в данной точке M называется предельное положение секущей NM, когда точка N приближается вдоль кривой к точке M (рис. 196).

2. Используя это определение, найдем угловой коэффициент касательной к кривой в данной точке. Пусть через точку $M(x;\ y)$ кривой, представляющей собой график функции $y=f(x)$, непрерывной в некоторой окрестности этой точки (включающей точку M), проведена секущая MN_1, образующая с положительным направлением оси Ox угол α (рис. 197). Тогда из треугольника MN_1N можно найти угловой коэффициент этой секущей: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}$. При стремлении точки N_1 по кривой к точке M секущая MN_1 поворачивается вокруг точки M, причем угол α стремится к углу φ между касательной MT и положительным направлением оси Ox. В соответствии с определением касательной получаем:

$$k=\operatorname{tg}\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x). \qquad (1)$$

Таким образом, угловой коэффициент касательной к графику функции равен значению производной этой функции в точке касания. В этом заключается геометрический смысл производной.

3. Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в заданной точке имеет вид:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0), \qquad (2)$$

где $(x_0;\ y_0)$ — координаты точки касания, $(x;\ y)$ — текущие координаты, т. е. координаты любой точки, принадлежащей касательной, а $f'(x_0)=k=\operatorname{tg}\alpha$ — угловой коэффициент касательной.

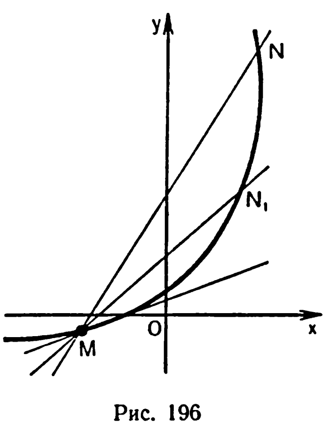


Рис. 196

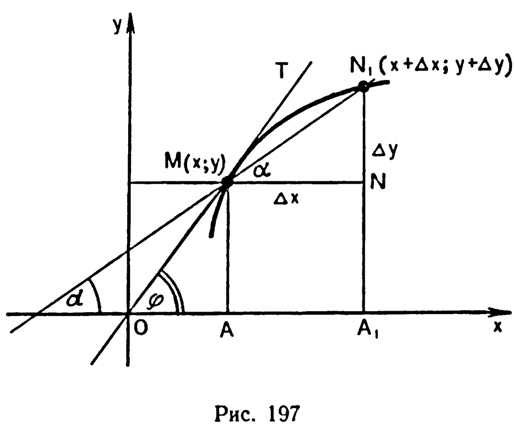


Рис. 197

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Составить уравнение касательной к графику функции $y=x^2-2x$ в точке с абсциссой $x_0=3$.

Решение. Из уравнения кривой найдем ординату точки касания: $y_0=3^2-2\cdot 3=3$. Затем найдем производную и вычислим ее значение в точке $x_0=3$, имеем $y'=2x-2$, $f'(3)=2\cdot 3-2=4$. Теперь, зная точку (3; 3) на кривой и угловой коэффициент $f'(3)=4$ касательной в этой точке, получаем искомое уравнение: $y-3=4(x-3)$, или $y-4x+9=0$.

2. Дана кривая $y=-x^2+1$. Найти точку ее графика, в которой касательная параллельна прямой $y=2x+3$.

Решение. Так как касательная параллельна прямой $y=2x+3$, то их угловые коэффициенты равны, т. е. $k=y'(x_0)=2$. Следовательно, $-2x_0=2$, т. е. $x_0=-1$, а $y_0=f(-1)=$ $=-(-1)^2+1=0$. Итак, $(-1;\ 0)$ — искомая точка.

3. На параболе $y=x^2-2x-8$ найти точку M, в которой касательная к ней параллельна прямой $4x+y+4=0$.

Решение. Определим угловой коэффициент касательной к параболе $y=x^2-2x-8$: $k=y'=(x^2-2x-8)'=2x-2$.

Найдем угловой коэффициент прямой $4x+y+4=0$: $y=-4x-4$, $k=-4$.

Касательная к параболе и данная прямая $4x+y+4=0$ по условию параллельны. Следовательно, их угловые коэффициенты равны $2x-2=-4$, откуда абсцисса точки касания $x=-1$.

Ординату точки касания M вычислим из уравнения данной параболы $y=x^2-2x-8$, т. е. $y(-1)=(-1)^2-2(-1)-8=-5$, $M(-1;\ -5)$ (рис. 198).

4. Найти координаты точки, в которой касательная к параболе $y=x^2-x-12$ образует с осью Ox угол 45°.

Решение. Найдем тангенс угла наклона касательной, проведенной в искомой точке, к оси Ox: $\operatorname{tg}\alpha=y'=(x^2-x-12)'=$ $=2x-1$. Угол α по условию равен 45°, следовательно, $\operatorname{tg} 45°=$ $=2x-1$, или $1=2x-1$, откуда $x=1$.

Определим ординату искомой точки: $y(1)=1-1-12=-12$; искомая точка $M(1;\ -12)$.

5. В какой точке кривой $y=\sqrt[3]{x}$ касательная наклонена к оси абсцисс под углом 60°?

Решение. Находим $y'(x)=(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$. Так как по условию $y'(x)=k=\operatorname{tg} 60°$, то $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\sqrt{3}$; $x^{-\frac{2}{3}}=3\sqrt{3}$; $x^{-\frac{2}{3}}=3^{\frac{3}{2}}$, т. е. $x=\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{3}{2}}=3^{-\frac{9}{4}}$. Остается найти ординату точки касания: $y=\left(3^{-\frac{9}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=3^{-\frac{3}{4}}$. Итак, искомая точка $K\left(3^{-\frac{9}{4}};\ 3^{-\frac{3}{4}}\right)$.

6. Найти угол между прямой $x=3$ и параболой $y=x^2$ (рис. 199).

Решение. Углом между прямой и кривой называется угол между этой прямой и касательной к кривой в точке их пересечения. Очевидно, что искомый угол $\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha$. Найдем $y'=(x^2)'=2x$. Так как $\operatorname{tg}\alpha=y'(3)=2\cdot3=6$, то $\alpha=\operatorname{arctg}6$. Следовательно, $\varphi=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}6=\operatorname{arcctg}6$.

7. Найти, под каким углом ось Ox пересекает параболу $y=x^2+x$.

Решение. Найдем точки пересечения параболы $y=x^2+x$ с осью Ox. Для этого нам следует решить систему уравнений $\begin{cases} y=x^2+x, \\ y=0. \end{cases}$ Корни этой системы: $x_1=-1$, $x_2=0$. Таким образом, парабола пересекает Ox в точках $A(-1;\ 0)$ и $O(0;\ 0)$ (рис. 200).

Найдем теперь угловые коэффициенты касательных к параболе $y=x^2+x$ в точках $A(-1;\ 0)$, $O(0;\ 0)$:

$$y'=(x^2+x)'=2x+1;$$

$$y'(-1)=2(-1)+1=-1;\quad y'(0)=2\cdot0+1=1;\quad k_1=-1,\quad k_2=1.$$

Теперь вычислим углы α_1 и α_2, образованные касательными в точках пересечения параболы с осью Ox: $\operatorname{tg}\alpha_1=-1$, $\alpha_1=135°$; $\operatorname{tg}\alpha_2=1$, $\alpha_2=45°$.

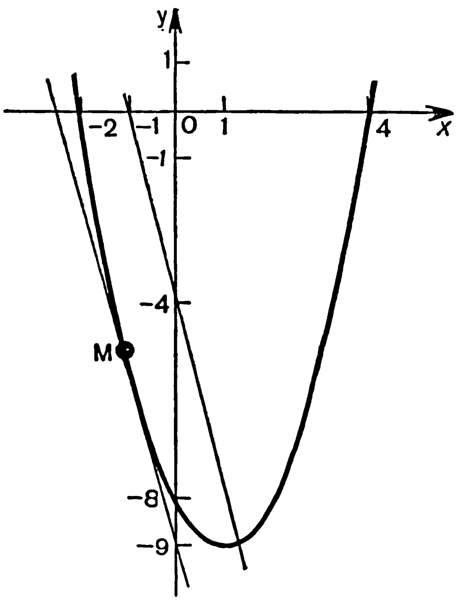


Рис. 198

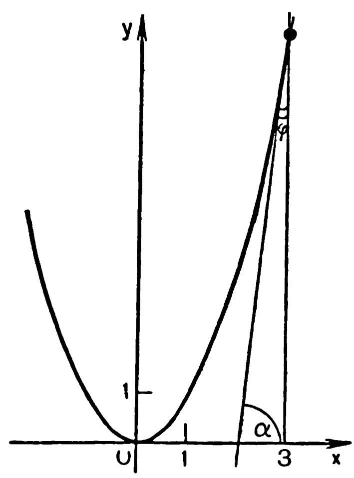


Рис. 199

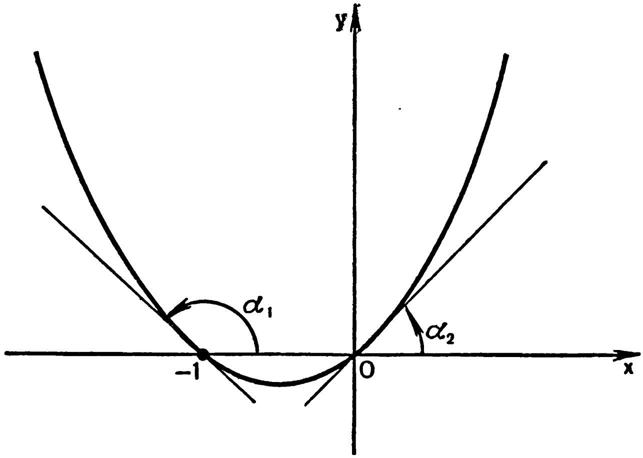


Рис. 200

8. Составить уравнение касательной к графику $y=\cos x$ в точке с абсциссой $x=-\frac{\pi}{2}$; $x=2\pi$.

Решение. Уравнение касательной к кривой $y=y(x)$ в точке $(x_0;\ y_0)$ имеет вид $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$. Подставив в это уравнение значения $y_0=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$, $x_0=-\frac{\pi}{2}$, $y'=-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1$, получим $y-0=1\cdot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, или $y=x+\frac{\pi}{2}$.

Аналогично, подставляя в уравнение касательной соответствующие значения для точки $x_0=2\pi$, получим $y-1=0\cdot(x-2\pi)$, т. е. $y=1$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе:
1) $y=2x^2$ в точке, абсцисса которой равна 1;
2) $y=-x^2+x$ в точке $x=-2$;
3) $y=x^2-3x+2$ в точке $x=3$.

2. Найдите угол наклона параболы:
1) $y=x^2-x+1$ к оси Ox в точке $x=-1$;
2) $y=x^2-2x$ к оси Ox в точке $x=2$.

3. В. Найдите координаты точки, в которой касательная к параболе $y=x^2+3x-10$ образует угол 135°.

4. В. Найдите, под какими углами парабола $y=x^2+2x-8$ пересекает ось Ox.

5. На параболе $y=-x^2+7x-10$ найдите точку, в которой касательная к ней параллельна прямой $x+y-1=0$.

6. В. В какой точке касательная к параболе $y=-x^2+4$ перпендикулярна прямой $x-2y+2=0$?

7. Б. Найдите угол наклона к оси Ox касательной, проведенной к кривой $y=\sin x$ в точке: 1) $x=\frac{\pi}{3}$; 2) $x=\frac{2\pi}{3}$.

8. Б. Найдите, под каким углом кривая $y=\sin x$ пересекает ось Ox в точке: 1) $x=\pi$; 2) $x=0$.

Ответы. **1.** 1) $k=4$; 2) $k=5$; 3) $k=3$. **2.** 1) $\alpha=\operatorname{arctg}(-3)$; 2) 63°26′. **3.** $(-2; -12)$. **4.** $\operatorname{arctg}(-6)$ и $\operatorname{arctg} 6$. **5.** (4; 2). **6.** (1; 3). **7.** 1) $\alpha=\operatorname{arctg} 0{,}5$; 2) 153°26′. **8.** 1) 135°; 2) 45°.

§ 3. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ В ДАННЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Пусть точка движется прямолинейно по закону $s=s(t)$, где s — перемещение точки за время t, отсчитываемое от начального момента времени. Этот закон называют законом движения. Выберем какой-либо момент времени t_0 и рассмотрим промежуток времени Δt от момента t_0 до момента $t=t_0+\Delta t$. За этот промежуток времени точка переместится на величину $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$. Средняя скорость точки за промежуток времени $[t_0; t_0+\Delta t]$ составляет:

$$v_{\text{ср}}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

С уменьшением Δt средняя скорость все точнее характеризует скорость точки в данный момент времени t_0. Поэтому целесообразно определить мгновенную скорость $v(t_0)$ в момент времени t_0 как предел средней скорости $v_{\text{ср}}$ при условии, что Δt стремится к нулю, т. е. $v(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=s'(t_0)$.

Итак, мгновенная скорость точки в данный момент времени равна значению производной от закона движения. В этом состоит физический смысл производной.

2. Очевидно, что мгновенная скорость $v(t)$ также является функцией времени. Поэтому можно рассмотреть скорость изменения скорости движения, т. е. ускорение прямолинейного движения точки:

$$a(t)=v'(t)=(s'(t))'.$$

Производную от производной $f'(x)$ мы будем называть производной второго порядка или второй производной и обозначать $f''(x)$.

Итак, ускорение точки в данный момент времени равно значению второй производной от закона движения $a(t)=s''(t)$. В этом состоит физический смысл второй производной.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Найти скорость и ускорение точки, движение которой происходит по закону $x(t)=kt+b$.

Решение. Находим $v(t)=x'(t)=k$, $a(t)=v'(t)=0$, т. е. скорость движения постоянна, а его ускорение равно нулю. Такое движение называется равномерным прямолинейным.

2. Найти скорость и ускорение точки, движущейся по квадратичному закону $x(t)=pt^2+qt+r$.

Решение. Имеем $v(t)=x'(t)=2pt+q$, $a(t)=v'(t)=2p$, т. е. ускорение при движении по квадратичному закону является постоянным.

Можно доказать и обратное утверждение: если при прямолинейном движении точки ускорение постоянно, то движение происходит по квадратичному закону $x(t)=pt^2+qt+r$, где коэффициент при t^2 численно равен половине ускорения, т. е. $p=\frac{a}{2}$.

Рассмотрим такой пример.

Пусть тело свободно падает под действием силы тяжести. Известно, что это движение происходит с постоянным ускорением g — ускорением свободного падения. Тогда пройденное телом расстояние является квадратичной функцией времени: $s=s(t)=\frac{gt^2}{2}+$ $+v_0t+s_0$, причем скорость и ускорение в момент t определяются соотношениями $v(t)=s'(t)=gt+v_0$ и $a(t)=v'(t)=g$. При $t=0$ из этих соотношений находим $s=s_0$, а $v=v_0$. Отсюда становится понятным смысл постоянных s_0 и v_0: это — начальное положение и начальная скорость точки.

§ 4. ГРАФИКИ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. График гармонического колебания $y=A\cos(\omega t+\varphi)$ можно построить двумя способами:

а) последовательностью простейших преобразований — сжатием или растяжением по отношению к координатным осям и параллельным переносом (эти преобразования подробно описаны в общей теории построения графиков функций; см. главу IX, § 1 и главу XVI);

б) исследованием функции с помощью производной по стандартной схеме (см. главу XXI, § 3).

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Построить график функции $y=2\cos(3x-2)$.

Решение. График функции $f(x)=2\cos 3\left(x-\frac{2}{3}\right)$ получается из графика функции $y=\cos x$ в результате следующих пре-

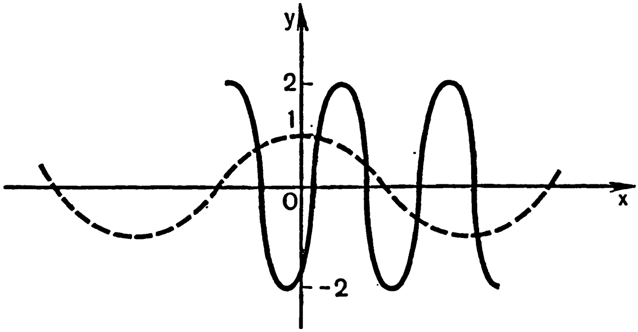


Рис. 201

образований: сжатия по оси Ox в отношении 3:1 $\left(\text{значит, } T=\frac{2\pi}{3}\right)$; параллельного переноса на вектор $\vec{r}\left(\frac{2}{3}; 0\right)$; растяжения по оси Oy в отношении 1:2 (рис. 201).

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Определите амплитуду, период и начальную фазу гармонического колебания:

1) $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y=2\cos\left(\frac{\pi}{5}-4x\right)$.

2. Представьте формулу в виде уравнения гармонического колебания:

1) $y=2\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin 2x+\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x\right)$;

2) $y=3\sin 2x$; 3) $y=4-8\cos^2 x$.

3. Постройте график функции:

1) $y=-2\cos(2x-60°)$; 2) $y=2\cos\left(\frac{x}{2}+60°\right)$.

Ответы. 1. 1) 3; π; $\frac{5\pi}{4}$. 2) 2; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{5}$. 2. 1) $y=2\cos\left(2x+\frac{7\pi}{4}\right)$; 2) $y=3\cos\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)$; 3) $y=4\cos(2x+\pi)$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение касательной к кривой в данной точке.
2. Что такое угловой коэффициент касательной?
3. В чем заключается геометрический смысл производной функции?
4. Напишите уравнение касательной к кривой в данной точке.
5. В чем заключается физический смысл: а) производной; б) второй производной?

ГЛАВА XXIII

§ 1. ПОТЕРЯННЫЕ И ПОСТОРОННИЕ КОРНИ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ (НА ПРИМЕРАХ)

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. В двух теоремах § 3 главы VII говорилось о том, какие действия над уравнениями не нарушают их равносильности.

2. Рассмотрим теперь такие операции над уравнениями, которые могут привести к новому уравнению, неравносильному исходному уравнению. Вместо общих рассуждений ограничимся рассмотрением лишь конкретных примеров.

3. Пример 1. Дано уравнение $3x(x-1)=5(x-1)$. Раскроем скобки в данном уравнении, перенесем все члены в левую часть и решим квадратное уравнение. Его корнями являются $x_1=1$, $x_2=\frac{5}{3}$.

Если сократить обе части уравнения $3x(x-1)=5(x-1)$ на общий множитель $(x-1)$, то получится уравнение $3x=5$, которое неравносильно первоначальному, так как имеет всего один корень $x=\frac{5}{3}$.

Таким образом, сокращение обеих частей уравнения на множитель, содержащий неизвестное, может привести к потере корней уравнения.

4. Пример 2. Дано уравнение $2x-3=5$. Данное уравнение имеет единственный корень $x=4$. Возведем обе части этого уравнения в квадрат, получим $(2x-3)^2=25$. Решая это уравнение, найдем два корня: $x_1=-1$, $x_2=4$.

Усматриваем, что новое уравнение $(2x-3)^2=25$ неравносильно исходному уравнению $2x-3=5$. Корень $x_1=-1$ является корнем уравнения $2x-3=-5$, которое после возведения в квадрат обеих частей приводит к уравнению $(2x-3)^2=25$.

5. Посторонние корни могут появиться также при умножении обеих частей уравнения на множитель, содержащий неизвестное, если этот множитель при действительных значениях x обращается в нуль.

Пример 3. Если обе части уравнения $2x-1=3$ умножим на $x+2$, то получим новое уравнение $(2x-1)(x+2)=3(x+2)$, которое после переноса члена $3(x+2)$ из правой части в левую и разложения на множители дает уравнение $(x+2)(2x-4)=0$, откуда $x=-2$ либо $x=2$.

Корень $x=-2$ не удовлетворяет уравнению $2x-1=3$, которое имеет единственный корень $x=2$.

Отсюда делаем вывод: при возведении обеих частей уравнения в квадрат (вообще в четную степень), а также при умножении на множитель, содержащий неизвестное и обращающийся в нуль при действительных значениях неизвестного, могут появляться посторонние корни.

Все соображения, высказанные здесь по вопросу о потере и появлении посторонних корней уравнения, в одинаковой мере относятся к любым уравнениям (алгебраическим, тригонометрическим и др.).

6. Уравнение называется алгебраическим, если в нем над неизвестным выполняются только алгебраические операции — сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня с натуральным показателем (причем число таких операций конечное).

Так, например, уравнения

$$x^3(x-2)=6-4x, \tag{1}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{x+2}+x^2=\ln 2, \tag{2}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{x-1}=\frac{\sqrt[3]{x-4}}{x+\sqrt{x}}=3+x \tag{3}$$

являются алгебраическими, а уравнения

$$x+\sin x\cos x=0, \tag{4}$$

$$3^x=6x+2, \tag{5}$$

$$x^{\sqrt{x}}+2x=0, \tag{6}$$

$$x-x^2+x^3-x^4+\ldots=0 \tag{7}$$

неалгебраическими (почему?).

§ 2. ПОСТОРОННИЕ КОРНИ ИРРАЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (НА ПРИМЕРАХ)

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Уравнение, содержащее неизвестное под знаком радикала, называется иррациональным; например, $\sqrt{x+6}=2$, $\sqrt[5]{1-3x}=3$ — иррациональные уравнения.

2. Рассмотрим на примере появление посторонних корней при решении иррационального уравнения.

Пусть дано иррациональное уравнение $\sqrt{x-1}=2x-3$. Возведем обе его части в квадрат, получим:

$$x-1=4x^2-12x+9. \qquad (1)$$

Корни этого уравнения: $x_1=\frac{5}{4}$ и $x_2=2$.

Проверим, удовлетворяют ли эти корни данному уравнению: если $x_1=\frac{5}{4}$, то $\sqrt{\frac{5}{4}-1}\neq 2\cdot\frac{5}{4}-3$. Корень $x_1=\frac{5}{4}$ уравнению не удовлетворяет, следовательно, он является посторонним.

Второй корень $x_2=2$ удовлетворяет уравнению.

Как видим, корни, полученные при решении иррационального уравнения, необходимо проверять подстановкой в данное уравнение.

§ 3. РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня, называются иррациональными.

2. Решение иррациональных уравнений сводится к переходу от иррационального к рациональному уравнению путем возведения в степень обеих частей уравнения или замены переменной.

3. При возведении обеих частей уравнения в четную степень возможно появление посторонних корней. Поэтому при использовании указанного метода следует проверить все найденные корни подстановкой в исходное уравнение.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Решить уравнение:

1) $\sqrt{x^2+5x+1}+1-2x=0$; 2) $\sqrt{2x-3}=\sqrt{x-2}$; 3) $\sqrt{x-1}=3-x$; 4) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}-\sqrt{x-1}=0$; 5) $4\sqrt{3-x}+6=5x$; 6) $\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{x+5}=1$; 7) $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$; 8) $\sqrt{x^2+ax-2a}=x+1$; 9) $\sqrt{x-2}=x-8$.

Решение. 1) Данное уравнение содержит всего один радикал; оставим его в левой части, а все остальные члены уравнения перенесем в правую часть, получим $\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1$; возведем обе части в квадрат: $x^2+5x+1=(2x-1)^2$, $x^2+5x+1=4x^2-4x+1$; после переноса всех членов в левую часть и приведения подобных членов имеем:

$$x(x-3)=0,\ x_1=0,\ x_2=3.$$

Проверка. Если $x_1=0$, то $\sqrt{0^2+5\cdot 0+1}+1-2\cdot 0\neq 0$. Следовательно, первый корень $x=0$ не удовлетворяет уравнению. Второй корень $x=3$ удовлетворяет данному уравнению.

2) Возведя обе части уравнения в квадрат, получим $2x-3=x-2$, откуда $x=1$. Проверка показывает, что этот корень посторонний (при $x=1$ обе части уравнения не имеют смысла).

Заметим, что проверку можно выполнить так: областью определения уравнения $\sqrt{2x-3}=\sqrt{x-2}$ служит луч $[2; +\infty)$, и так как $1 \notin [2; +\infty)$, то $x=1$ — посторонний корень.

3) Возведем обе части уравнения в квадрат: $x-1=(3-x)^2$, $x-1=9-6x+x^2$, $x^2-7x+10=0$, корни уравнения: $x_1=2$, $x_2=5$. Проверкой убеждаемся, что $x=5$ — посторонний корень, а $x=2$ удовлетворяет уравнению.

4) Допустимые значения неизвестного удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} 5x-1 \geqslant 0, \\ 3x-2 \geqslant 0, \\ x-1 \geqslant 0, \text{ т. е. } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Уединяя один из радикалов и возводя обе части уравнения в квадрат, получаем:

$$(\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2})^2=(\sqrt{x-1})^2,$$

$$\text{или} \quad 7x-2=2\sqrt{5x-1}\cdot\sqrt{3x-2}.$$

Снова возводим обе части в квадрат:

$$49x^2-28x+4=4(5x-1)(3x-2), \; 11x^2-24x+4=0,$$

откуда $x_1=\frac{2}{11}$, $x_2=2$.

Число $x_2=2$ принадлежит области определения заданного уравнения, проверкой убеждаемся, что $x=2$ является его корнем.

Число $x_1=\frac{2}{11}$ не принадлежит области определения данного уравнения, поэтому не может быть его корнем.

5) Область определения уравнения $3-x \geqslant 0$, т. е. $x \leqslant 3$.

Уединим радикал и возведем обе части уравнения в квадрат, получим квадратное уравнение $25x^2-44x-12=0$. Корни этого уравнения: $x_1=-\frac{6}{25}$ и $x_2=2$.

Оба корня принадлежат области определения данного уравнения, но удовлетворяет ему только $x_2=2$; корень $x_1=-\frac{6}{25}$ посторонний.

Действительно, левая часть данного уравнения при всех допустимых значениях неизвестного, в частности при $x_1=-\frac{6}{25}$, положительна, а правая часть этого уравнения при $x_1=-\frac{6}{25}$ отрицательна. Следовательно, число $x_1=-\frac{6}{25}$ не является корнем данного нам уравнения.

6) Возведя обе части уравнения в куб и используя тождество $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, получим:

$$(5-x)+(x+5)+3\sqrt[3]{(5-x)(x+5)}\cdot(\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{x+5})=1.$$

Так как по условию $\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{x+5}=1$, то приходим к уравнению

$$10+3\sqrt[3]{25-x^2}=1, \text{ или } \sqrt[3]{25-x^2}=-3.$$

Снова возводим обе части уравнения в куб, имеем $25-x^2=$ $=-27$, $x^2=52$; корни данного уравнения: $\sqrt{52}$ и $-\sqrt{52}$.

7) Введем новую переменную $y=x^2+x$. Тогда получим уравнение $\sqrt{y+4}+\sqrt{y+1}=\sqrt{2y+9}$, область определения которого задается условиями $y+4\geqslant 0$, $y+1\geqslant 0$, $2y+9\geqslant 0$, т. е. $y\geqslant -1$. Возведя обе части этого уравнения в квадрат, имеем:

$$y+4+y+1+2\sqrt{y^2+5y+4}=2y+9,$$
$$\sqrt{y^2+5y+4}=2, \ y^2+5y=0.$$

Отсюда находим $y_1=0$, $y_2=-5$. Значение $y_2=-5$ не входит в область определения уравнения. Следовательно, $x^2+x=0$, т. е. $x_1=0$, $x_2=-1$. Итак, получаем ответ: $x=-1$, $x=0$.

8) $\sqrt{x^2+ax-2a}=x+1$. (1)

По определению арифметического квадратного корня уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} (a-2)x=2a+1, \\ x+1\geqslant 0. \end{cases}$$

При $a=2$ первое уравнение системы имеет вид $0\cdot x=5$, т. е. не имеет решений. При $a\neq 2$ $x=\frac{2a+1}{a-2}$.

Выясним, при каких значениях a найденное значение x удовлетворяет неравенству $x\geqslant -1$: $\frac{2a+1}{a-2}\geqslant -1$, $\frac{3a-1}{a-2}\geqslant 0$, откуда $a\leqslant\frac{1}{3}$ или $a>2$.

Таким образом, при $a\leqslant\frac{1}{3}$, $a>2$ $x=\frac{2a+1}{a-2}$, при $\frac{1}{3}<a\leqslant 2$ уравнение решений не имеет.

9) Решение данного уравнения заслуживает особого внимания, так как при его решении часто допускают такую ошибку.

Исходя из определения арифметического корня, напишут: $x-2\geqslant 0$, т. е. $x\geqslant 2$.

Потом решают данное им уравнение $\sqrt{x-2}=x-8$, находят его корни: $x_1=6$ и $x_2=11$. Из того, что $6\geqslant 2$ и $11\geqslant 2$, делают вывод, что и $x_1=6$, и $x_2=11$ являются корнями уравнения. Однако проверка показывает, что один из корней в данном случае является посторонним. Таким образом, и в этом случае нужно делать проверку.

Рассмотрим другой способ решения данного уравнения.

По определению квадратного корня уравнение $\sqrt{x-2}=x-8$ равносильно системе

$$\begin{cases} x-2=(x-8)^2, & (1) \\ x-8\geqslant 0. & (2) \end{cases}$$

Уравнение (1) равносильно уравнению $x^2-17x+66=0$, корнями которого являются 6 и 11, но условие (2) выполняется только для $x=11$. Поэтому уравнение $\sqrt{x-2}=x-8$ имеет только один корень $x=11$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Решите уравнение:

А. 1) $\sqrt{x^2+x-1}=x$; 2) $\sqrt{x^2+x-1}=\sqrt{x}$;

3) $\sqrt{(x+6)(x+1)}=6$; 4) $\sqrt[3]{x^3-19}=x-1$;

5) $\sqrt{3-x}=\frac{5x-6}{4}$; 6) $\sqrt{x}=x-2$;

7) $\sqrt{x^2-2}=\sqrt{x}$; 8) $\sqrt{x-6}=\sqrt{4-x}$.

Б. 1) $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-5}$; 2) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}=6$;

3) $\sqrt{x^2+x-5}+\sqrt{x^2+8x-4}=5$; 4) $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}$;

5) $\sqrt{x-2}=8-x$.

В. 1) $2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3x+12$;

2) $\sqrt{x-5}-\sqrt{2x-1}=3+x^2$; 3) $\sqrt{x+5}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{4x-1}$;

4) $\frac{\sqrt[7]{12+x}}{x}+\frac{\sqrt[7]{x+12}}{12}=\frac{64}{3}\sqrt[7]{x}$; 5) $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}$;

6) $\sqrt{\frac{x-5}{x+2}}+\sqrt{\frac{x-4}{x+3}}=\frac{7}{x+2}\sqrt{\frac{x+2}{x+3}}$; 7) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}=a$.

Ответы. А. 1) 1; 2) 1; 3) -10; 3; 4) -2; 3; 5) 2; 6) 4; 7) 2; 8) уравнение не имеет корней. **Б.** 1) 3; 2) 5; 3) 2; 4) $\frac{5}{3}$; $\frac{5}{4}$; 5) 6. **В.** 1) -2; 3,5; 2) уравнение не имеет корней; 3) $\frac{2\sqrt{193}-17}{7}$; 4) $-\frac{12}{129}$; $\frac{12}{127}$; 5) $\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$; 6) 6; 7) при $a\geqslant\frac{2\sqrt{6}}{3}$ $x=0,5(2a^2+4-a\sqrt{3a^2+16})$, при $a<\frac{2\sqrt{6}}{3}$ корней нет.

§ 4. РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Неравенства, в которых переменная содержится под знаком корня, называются иррациональными. Основным методом решения таких неравенств является метод возведения в степень. При этом решение иррациональных неравенств сводится к решению рациональных неравенств или систем рациональных неравенств.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Решить неравенство: 1) $\sqrt{x} > -3$; 2) $\sqrt{x-1} < 3-x$; 3) $\sqrt{x-1} > 3-x$.

Решение. 1) $\sqrt{x} > -3$. Допустимые значения переменной должны удовлетворять условию $x \geqslant 0$. А так как правая часть данного неравенства отрицательна, то решением будет $[0; \infty)$.

2) $\sqrt{x-1} < 3-x$. Область определения неравенства задается условием $x-1 \geqslant 0$. Далее, по смыслу неравенства должно выполняться условие $3-x > 0$. При этих условиях обе части неравенства неотрицательны, и поэтому можно использовать метод возведения в квадрат. В результате данное неравенство сводится к следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ 3-x > 0, \\ (x-1) < (3-x)^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x < 3, \\ (x-2)(x-5) > 0; \end{cases} \qquad 1 \leqslant x < 2,$$

т. е. решением неравенства служит промежуток $[1; 2)$.

3) $\sqrt{x-1} > 3-x$ (1). Область определения неравенства задается условием $x-1 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant 1$. В этой области определения и будем находить решения неравенства (1).

Правая часть неравенства (1) обращается в нуль при $x=3$, в результате чего неравенство (1) равносильно совокупности двух систем:

$$\text{а)} \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ \sqrt{x-1} > 3-x; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} x > 3, \\ \sqrt{x-1} > 3-x. \end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ x-1 > (3-x)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ (x-2)(x-5) < 0. \end{cases}$$

Из рисунка 202 усматриваем решение первой системы: $2 < x \leqslant 3$.

Решим вторую систему

$$\begin{cases} x > 3, \\ \sqrt{x-1} > 3-x. \end{cases}$$

Решением этой системы являются все x из промежутка $(3; \infty)$, так как правая часть $(3-x)$ отрицательна, а левая часть $\sqrt{x-1}$ положительна.

Ответ. $(2; \infty)$.

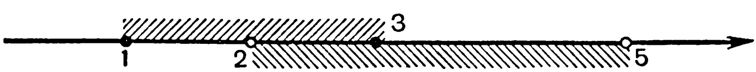


Рис. 202

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Решите неравенства:

А. 1) $\sqrt{x}\geqslant 2$; 2) $\sqrt{x}<2$; 3) $\sqrt{x^2}>2$; 4) $\sqrt{x^2+3x}>2$; 5) $\sqrt{x^2-7x}>-2$; 6) $\sqrt{3x-1}<2$.

Б. 1) $\sqrt{3x-1}<\sqrt{x}$; 2) $\sqrt{x^2-3x-10}>x-2$; 3) $\sqrt{2x+1}<\frac{2x+2}{2-x}$; 4) $\sqrt{x^2-x-12}<x$; 5) $\sqrt{x^2-3x+2}>x+3$; 6) $\sqrt{x+2}>x$; 7) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-5}\geqslant\sqrt{5-x}$.

В. 1) $\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}<1$; 2) $x^2-3x+\sqrt{x^2-3x+5}>7$.

Ответы. **А.** 1) $[4;\ \infty)$; 2) $[0;4)$; 3) $(-\infty;\ -2)\cup(2;\ \infty)$; 4) $(-\infty;\ -4)\cup(1;\ \infty)$; 5) $(-\infty;0]\cup[7;\ \infty)$; 6) $\left[\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right]$. **Б.** 1) $\left[\frac{1}{3};\ 0{,}5\right)$; 2) $(-\infty;\ -2]\cup(14;\ \infty)$; 3) $\left[-\frac{1}{2};\frac{11-\sqrt{153}}{4}\right)\cup$ $\cup[0;\ 2)$; 4) $[4;\ \infty)$; 5) $\left(-\infty;\ -\frac{7}{9}\right)$; 7) 5. **В.** 1) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}\leqslant x<$ $<0,\ 0<x<\frac{1}{3}$; 2) $x<-1$ и $x>4$.

Контрольные вопросы

1. Найдите область определения функции: а) $y=\sqrt{x-5}$; б) $y=$ $=\sqrt[3]{x-1}$; в) $y=\sqrt[4]{4-x}$; г) $y=\sqrt{-x^2}$.
2. Постройте график функции: а) $y=\sqrt{x}$; б) $y=\sqrt{x-1}$; в) $y=\sqrt{1-x}$; г) $y=-\sqrt{x-1}$; д) $y=\sqrt{x-2}+3$; е) $y=$ $=-\sqrt{x-2}+3$; ж) $y=\sqrt{2-x}-3$.
3. Какое уравнение называется иррациональным?
4. Почему при решении иррациональных уравнений необходимо делать проверку? Каким образом ее можно упростить?
5. Объясните, почему не имеет решений уравнение: а) $\sqrt{x-15}-$ $-\sqrt{12-x}=3$; б) $\sqrt{3+\sqrt{x-1}}=1$; в) $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}=-1$.
6. Решите уравнение: а) $\sqrt{7-\sqrt{x-3}}=2$; б) $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$.

ГЛАВА XXIV

§ 1. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Функция, заданная формулой вида $y=a^x$, где a — некоторое положительное число, не равное единице, называется показательной.

2. Функция $y=a^x$ при $a>1$ обладает следующими свойствами (см. рис. 203):

а) область определения — множество всех действительных чисел;

б) множество значений — множество всех положительных чисел;

в) функция возрастает;

г) при $x=0$ значение функции равно 1;

д) если $x>0$, то $a^x>1$;

е) если $x<0$, то $0<a^x<1$.

3. Функция $y=a^x$ при $0<a<1$ обладает следующими свойствами (см. рис. 204):

а) область определения $D(f)=R$;

б) множество значений $E(f)=R_+$;

в) функция убывает;

г) при $x=0$ значение функции равно 1;

д) если $x>0$, то $0<a^x<1$;

е) если $x<0$, то $a^x>1$.

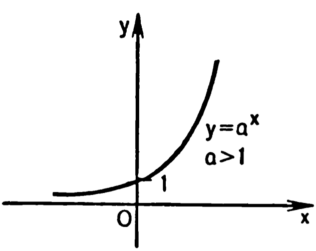


Рис. 203

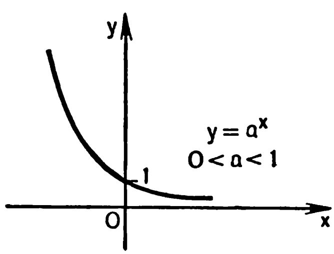


Рис. 204

Изобразить схематически график функции: 1) $y=2^x$; 2) $y=-3\cdot 2^x$; 3) $y=2^{|x|}$; 4) $y=(\operatorname{tg} 60°)^{1-x}$; 5) $y=3^{|x-1|}$.

Решение. 1) $y=2^x$. Так как $a=2>1$, то функция возрастающая. Если $x=0$, то $y=2^0=1$. График функции $y=2^x$ изображен на рисунке 205.

2) $y=-3\cdot 2^x$. Так как $a=2>1$, то функция $y=2^x$ возрастающая. График ее изображен штриховой линией на рисунке 206. График функции $y=-3\cdot 2^x$ симметричен относительно оси Ox графику функции $y=3\cdot 2^x$. Поэтому сначала строим график функции $y=3\cdot 2^x$ (см. рис. 206), а затем получаем график функции $y=-3\cdot 2^x$ (рис. 206).

3) $y=2^{|x|}$. Если $x\geqslant 0$, то $y=2^x$. График функции $y=2^x$ при $x\geqslant 0$ построен на рисунке 207.

Поскольку функция $y=2^{|x|}$ четная, то ее график симметричен относительно оси Oy. График функции $y=2^{|x|}$ изображен на рисунке 208.

4) $y=(\operatorname{tg} 60°)^{1-x}$. Здесь $a=\operatorname{tg} 60°=\sqrt{3}$. Запишем данную функцию в виде

$$y=(\sqrt{3})^{1-x}=\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3})^{-x}=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{(\sqrt{3})^x}=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x.$$

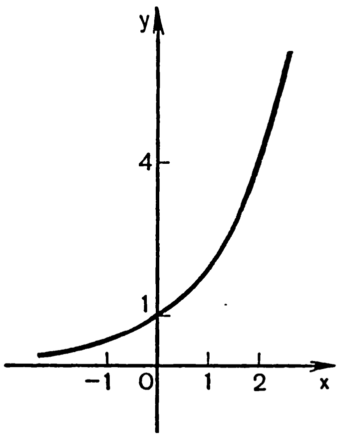


Рис. 205

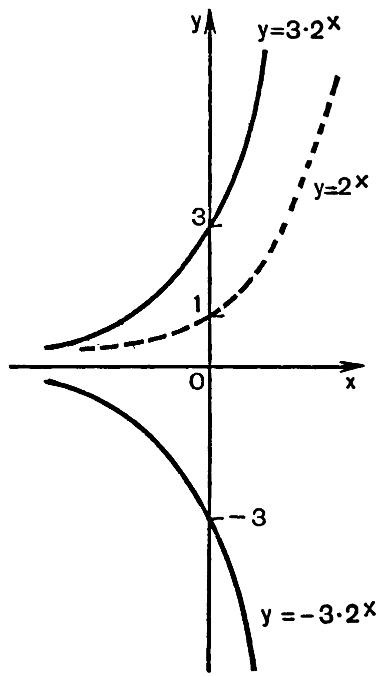


Рис. 206

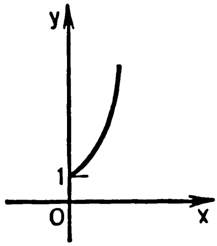


Рис. 207

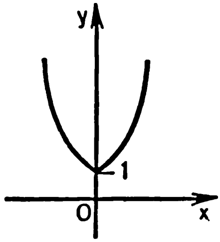


Рис. 208

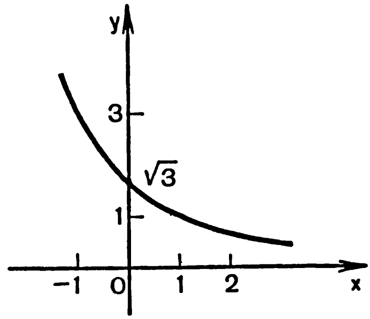


Рис. 209

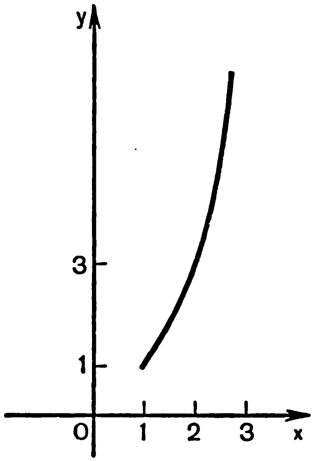


Рис. 210

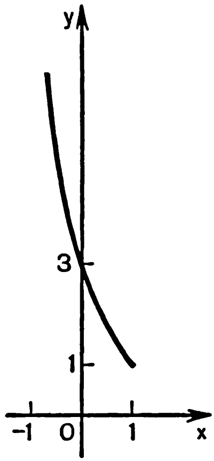


Рис. 211

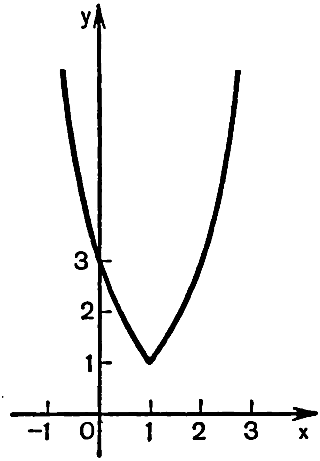


Рис. 212

Здесь $a=\frac{1}{\sqrt{3}}<1$. Следовательно, функция убывающая. График функции $y=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$ изображен на рисунке 209. Если $x=0$, то $y=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^0=\sqrt{3}$.

5) $y=3^{|x-1|}$. Пусть $x-1\geqslant 0$, тогда $y=3^{|x-1|}=3^{x-1}=3^x\cdot 3^{-1}=$ $=\frac{1}{3}\cdot 3^x$. График функции $y=\frac{1}{3}\cdot 3^x$ при $x\geqslant 1$ изображен на рисунке 210.

Пусть $x-1\leqslant 0$; тогда $y=3^{|x-1|}=3^{-(x-1)}=3^{-x+1}=3\cdot\frac{1}{3^x}=$ $=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$. Здесь $a=\frac{1}{3}<1$. График функции $y=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$ при $x\leqslant 1$ изображен на рисунке 211 (при $x=0$ $y=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0=3$).

График функции $y=3^{|x-1|}$ изображен на рисунке 212.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Изобразите схематически график функции:

А. 1) $y=2(\sqrt{2})^x$; 2) $y=-2^x$; 3) $y=(\sin 90°)^x$; 4) $y=17^{x-1}$.

Б. 1) $y=2^{|x|-1}$; 2) $y=-2^{|x|-1}$; 3) $y=(\sin^2 x+\cos^2 x)^x$.

В. 1) $y=(\operatorname{tg} 135°)^x$; 2) $y=2^{\sqrt{-\sin^2 x}}$.

2. Укажите область значений функции: 1) 2^x; 2) $0{,}4^x$; 3) 1^x; 4) $0{,}65^x$; 5) $3^{|x|}$; 6) 0^x; 7) 2^x-2; 8) $3-0{,}4^x$.

§ 2. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Уравнение, содержащее переменную в показателе степени, называется показательным. Простейшим примером показательного уравнения служит уравнение $a^x=b$ (где $a>0$, $a\neq 1$). Это уравнение можно решить графически (рис. 213).

2) Решение показательного уравнения вида $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ (где $a>0$, $a\neq 1$) основано на том, что это уравнение равносильно уравнению $f(x)=g(x)$.

3. Уравнение вида $Aa^{2x}+Ba^x+C=0$ с помощью подстановки $a^x=y$ сводится к квадратному уравнению $Ay^2+By+C=0$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Решить уравнение:

1) $3^{x^2-\frac{5}{7}x}=\sqrt[7]{9}$; 2) $3^{2x+2}+3^{2x}=30$; 3) $5^{2x}-6\cdot 5^x+5=0$;
4) $3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x$; 5) $(x+3)^{x^2-3}=(x+3)^{2x}$.

Решение. 1) Представив $\sqrt[7]{9}$ как $3^{\frac{2}{7}}$, получим $3^{x^2-\frac{5}{7}x}=3^{\frac{2}{7}}$, т. е. левая и правая части уравнения приведены к одному основанию. Следовательно, данное уравнение равносильно квадратному уравнению $x^2-\frac{5}{7}x=\frac{2}{7}$, откуда $x_1=-\frac{2}{7}$, $x_2=1$.

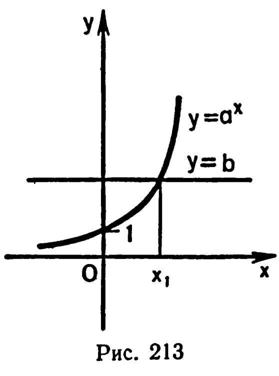


Рис. 213

2) Представим 3^{2x+2} как $3^{2x}\cdot 3^2$ и положим $3^{2x}=y$. Тогда данное уравнение примет вид:

$$9y+y=30,\ 10y=30,\ y=3;\ 3^{2x}=3,\ 2x=1,\ x=\frac{1}{2}.$$

3) Положим $5^x=y$. Тогда $5^{2x}=(5^x)^2=y^2$ и данное уравнение примет вид $y^2-6y+5=0$. Корни этого уравнения: $y_1=1$;

$y_2=5$. Следовательно, $5^x=1$, т. е. $x=0$, и $5^x=5$, т. е. $x=1$. Итак, получаем ответ: 0; 1.

4) Разделив обе части уравнения на $36^x\neq0$, получим:

$$3\left(\frac{16}{36}\right)^x+2\left(\frac{81}{36}\right)^x=5,\ 3\left(\frac{4}{9}\right)^x+2\left(\frac{9}{4}\right)^x=5.$$

Положим $\left(\frac{4}{9}\right)^x=y$, тогда имеем:

$$3y+\frac{2}{y}=5,\ 3y^2-5y+2=0,\ y_1=1,\ y_2=\frac{2}{3}.$$

Следовательно, $\left(\frac{4}{9}\right)^x=1$, $x_1=0$; $\left(\frac{4}{9}\right)^x=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{1}{2}$.

Ответ. 0; 0,5.

5) Выражение в левой части уравнения представляет собой функцию, содержащую переменную как в основании, так и в показателе степени. Для решения такого показательно-степенного уравнения нужно рассмотреть три случая: когда основание степени равно 1, 0 и когда оно отлично от указанных значений.

Если $x+3=1$, т. е. $x=-2$, то получаем $1^1=1^{-4}$ — верное равенство; значит, $x=-2$ — корень уравнения.

Если $x+3=0$, т. е. $x=-3$, то в левой части уравнения получаем 0^6, а в правой 0^{-6} — выражение, не имеющее смысла. Поэтому $x=-3$ не является корнем уравнения.

Наконец, приравняв показатели, имеем $x^2-3=2x$, откуда $x=-1$, $x=3$. При этих значениях x получим соответственно $2^{-2}=2^{-2}$ и $6^6=6^6$ — верные равенства, т. е. $x=-1$ и $x=3$ — корни уравнения.

Итак, получаем ответ: -2; -1; 3.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Решите уравнение:

А. 1) $4^x=64$; 2) $3^x=81$; 3) $25^{-x}=\frac{1}{5}$; 4) $8^x=16$; 5) $(0,5)^x=\frac{1}{64}$; 6) $27=\left(\frac{1}{3}\right)^x$; 7) $\left(\frac{1}{9}\right)^x=\frac{1}{27}$; 8) $2^x=1$; 9) $3^{6-x}=3^{3x-2}$; 10) $\pi^x=1$.

Б. 1) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x^3-9x}=1$; 2) $\sqrt{3^x}=9$; 3) $\sqrt{2^x\cdot3^x}=36$; 4) $\left(\frac{2}{5}\right)^x=\left(\frac{5}{2}\right)^4$; 5) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}$; 6) $\sqrt{8^{x-1}}=\sqrt[3]{4^{2-x}}$; 7) $2^x\cdot5^x=0,1(10^{x-1})^5$; 8) $2,56^{\sqrt{x}-1}=\left(\frac{5}{8}\right)^{4\sqrt{x}+1}$; 9) $4^{x+1,5}+2^{x+2}=4$; 10) $3^{3x+1}-$ $-4\cdot27^{x-1}+9^{1,5x-1}=80$.

В. 1) $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6$; 2) $6^{2x+4}=2^{x+8}\cdot3^{3x}$; 3) $\sqrt[x]{5^{5\sqrt{x}}}=5^{\sqrt{x}-4}$; 4) $3^{x-5}+3^{x-7}+3^{x-9}=45,5+22,75+$ $+11,375+\ldots$;

5) $3^{x+1}+3^{x-1}+3^{x-2}=5^x+5^{x-1}+5^{x-2}$; 6) $\sqrt[x]{4}-2\sqrt[x]{6}+\sqrt[x]{9}=0$;
7) $6\,\sqrt[2x]{2}-\sqrt[x]{2}=8$; 8) $\frac{4}{\sqrt[3]{x}+2}+\frac{\sqrt[3]{x}+3}{5}=2$;
9) $3^{2x+4}+45\cdot 6^x-9\cdot 2^{2x+2}=0$; 10) $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=4$;
11) $(x-3)^{x^2}=(x-3)^x$; 12) $(x^2-x-1)^{x^2-1}=1$;
13) $3\cdot 4^x-5\cdot 6^x+2\cdot 9^x=0$.

2. В. Определите x, если $\operatorname{tg}\alpha=3^x$, $\operatorname{tg}\beta=3^{-x}$ $\alpha-\beta=30°$.

Ответы. **1. А.** 1) 3; 2) 4; 3) 0,5; 4) $\frac{4}{3}$; 5) 6; 6) -3; 7) 1,5; 8) 0; 9) 2; 10) 0. **Б.** 1) -3; 0; 3; 2) 4; 3) 4; 4) -4; 8) $\frac{1}{36}$; 9) -1; 10) 1. **В.** 1) 1,5; 2) 4; 3) 25; 4) 9; 5) 2; 6) нет корней; 7) нет корней; 8) 8; 27; 9) -2; 10) ± 2; 11) 0; 2; 3; 4; 12) -1; 1; 2; 13) 0; 1. **2. В.** 0,5.

§ 3. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Неравенство, содержащее переменную в показателе степени, называется показательным.

2. Решение показательных неравенств вида $a^{f(x)}<a^{g(x)}$ (где $a>0$, $a\neq 1$) основано на следующих утверждениях:

если $a>1$, то неравенства $a^{f(x)}<a^{g(x)}$ и $f(x)<g(x)$ равносильны;

если $0<a<1$, то неравенства $a^{f(x)}<a^{g(x)}$ и $f(x)>g(x)$ равносильны (это следует из того, что при $a>1$ показательная функция возрастает, а при $0<a<1$ убывает).

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Решить неравенство: 1) $3^x<\frac{1}{9}$; 2) $(0{,}25)^{6x-x^2}>0{,}25^5$; 3) $4^x-6\cdot 2^x+8<0$; 4) $(x-3)^{2x^2-7x}>1$.

Решение. 1) Замечая, что $\frac{1}{9}=3^{-2}$, перепишем данное неравенство в виде $3^x<3^{-2}$. Так как основание степени больше 1, то $x<-2$. Итак, получаем ответ: $(-\infty; -2)$.

2) Поскольку $0<0{,}25<1$, заданное неравенство равносильно неравенству $6x-x^2<5$, т. е. $(x-1)(x-5)>0$. Решая последнее, получаем ответ: $(-\infty; 1)\cup(5; +\infty)$.

3) Положим $2^x=y$, тогда $4^x=(2^x)^2=y^2$ и данное неравенство примет вид $y^2-6y+8<0$. Решая это неравенство, находим $2<y<4$. Возвращаясь к переменной x, получаем $2<2^x<2^2$, откуда $1<x<2$. Итак, интервал $(1; 2)$ — решение данного неравенства.

4) Здесь надо рассмотреть два случая: $x-3>1$ и

$0<x-3<1$. В первом случае показатель $2x^2-7x$ должен быть положителен, а во втором отрицателен. Таким образом, задача сводится к решению совокупности двух систем:

$$\text{а) } \begin{cases} x-3>1, \\ 2x^2-7x>0; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} 0<x-3<1, \\ 2x^2-7x<0, \end{cases}$$

т. е. систем

$$\begin{cases} x>4, \\ 2x(x-3{,}5)>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3<x<4, \\ 2x(x-3{,}5)<0. \end{cases}$$

Решением первой служит открытый луч $(4; +\infty)$, а решением второй — интервал $(3; 3{,}5)$. Объединяя эти множества, получаем ответ: $(3; 3{,}5)\cup(4; +\infty)$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Решите неравенство:

А. 1) $4^x\geqslant 64$; 2) $3^x\leqslant 81$; 3) $25^{-x}>\frac{1}{5}$; 4) $8^x<16$; 5) $(0{,}5)^x<\frac{1}{64}$;

6) $27>\left(\frac{1}{3}\right)^x$; 7) $\left(\frac{1}{9}\right)^x<\frac{1}{27}$; 8) $2^x<1$; 9) $3^{6-x}>3^{3x-2}$.

Б. 1) $2^{9x-x^3}>1$; 2) $2^{9x-x^3}<1$; 3) $2{,}56^{\sqrt{x}-1}\geqslant\left(\frac{5}{8}\right)^{4\sqrt{x}+1}$;

4) $0{,}4^{x^2-x-20}>1$; 5) $16^{\frac{2x+1}{3x-7}}-64^{\frac{1}{3}}(0{,}25)^{-2}>0$.

В. 1) $\frac{4^x-2^{x+1}+8}{2^{1-x}}<8^x$; 2) $|x|^{x^2-x-2}<1$; 3) $6{,}3^{\frac{x-3}{x^2+6x+11}}<1$;

4) $2^{-2x-2{,}5}<\frac{0{,}5^{x(x+3)}}{2^{0{,}5}}$; 5) $2^{x^2}\cdot 5^{x^2}<10^{-3}(10^{3-x})^2$;

6) $\frac{0{,}2^{x-0{,}5}}{\sqrt{5}}>5\cdot 0{,}04^{x-1}$; 7) $(4x^2+2x+1)^{x^2-x}>1$;

8) $(1{,}2)^{|x+7|}<(1{,}2)^{|x^2-3x+2|}$; 9) $(x^2-8x+15)^{x-6}<1$.

Ответы. **А.** 1) $[3; \infty)$; 2) $(-\infty; 4]$; 3) $(-\infty; 0{,}5)$; 5) $x>6$. **Б.** 1) $(-\infty; -3)\cup(0; 3)$; 2) $-3\leqslant x\leqslant 0$, $x\geqslant 3$; 3) $\left[\frac{1}{36}; \infty\right)$; 4) $-4<x<5$; 5) $2\frac{1}{3}<x<4{,}6$. **В.** 1) $x>1$; 2) $(1; 2)$; 3) $x<3$; 4) $-2<x<1$; 5) $-3<x<1$; 6) $x>3$; 7) $(-\infty; -0{,}5)\cup(1; \infty)$; 8) $(-\infty; -1)\cup(5; \infty)$; 9) $(-\infty; 4-\sqrt{2})\cup(4+\sqrt{2}; 6)$.

§ 4. СИСТЕМЫ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Известные способы решения систем алгебраических уравнений применяются и к решению систем, содержащих показательные уравнения и неравенства.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Решить систему уравнений и неравенств:

1) $\begin{cases} 2^x\cdot 3^y=24, \\ 2^y\cdot 3^x=54; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-y)\,0{,}5^{y-x}=5\cdot 2^{x-y}, \\ (x-y)^{\frac{x+y}{7}}=125; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^{-x}>\frac{27}{64}, \\ 2^{x^2-6x-3,5}<8\sqrt{2}; \end{cases}$ 4) $1<3^{|x^2-x|}<9.$

Решение. 1) Запишем данную систему в виде

$$\begin{cases} 2^x\cdot 3^y=2^3\cdot 3, & (1)\\ 2^y\cdot 3^x=2\cdot 3^3. & (2)\end{cases}$$

Перемножив уравнения (1) и (2), получим:

$$2^{x+y}\cdot 3^{x+y}=2^4\cdot 3^4;\ 6^{x+y}=6^4;\ x+y=4.$$

Разделим почленно уравнение (1) на уравнение (2):

$$2^{x-y}\cdot 3^{y-x}=2^2\cdot 3^{-2};\ \frac{2^{x-y}}{3^{x-y}}=\frac{2^2}{3^2};\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y}=\left(\frac{2}{3}\right)^2;\ x-y=2.$$

Решив теперь систему $x+y=4$, $x-y=2$, получаем ответ: (3; 1).

2) Перепишем первое уравнение системы в виде $(x-y)\,2^{x-y}=5\cdot 2^{x-y}$; разделив обе части этого уравнения на $2^{x-y}\neq 0$, получим $x-y=5$.

Подставим теперь во второе уравнение системы вместо разности $x-y$ ее значение, равное 5:

$$5^{\frac{x+y}{7}}=125;\ 5^{\frac{x+y}{7}}=5^3;\ \frac{x+y}{7}=3;\ x+y=21.$$

Остается решить систему уравнений $x-y=5$, $x+y=21$; в результате получаем ответ: (13; 8).

3) Имеем:

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^{-x}>\frac{27}{64}, \\ 2^{x^2-6x-3,5}<8\sqrt{2}; \end{cases}\quad \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^x>\left(\frac{3}{4}\right)^3, \\ 2^{x^2-6x-3,5}<2^{\frac{7}{2}}. \end{cases}$$

$\begin{cases} x<3, \\ x^2-6x-3{,}5<3{,}5; \end{cases}$ $\begin{cases} x<3, \\ x^2-6x-7<0; \end{cases}$ $\begin{cases} x<3, \\ (x+1)(x-7)<0. \end{cases}$

Ответ. $(-1, 3)$.

4) Имеем: $1<3^{|x^2-x|}<9$; $0<|x^2-x|<2$;

а) $\begin{cases} x^2-x>0, \\ x^2-x<2; \end{cases}$ $\begin{cases} x(x-1)>0, \\ (x+1)(x-2)<0; \end{cases}$ $-1<x<0$ и $1<x<2$.

б) $\begin{cases} x^2-x<0, \\ -(x^2-x)<2; \end{cases}$ $\begin{cases} x(x-1)<0, \\ x^2-x+2>0; \end{cases}$ $0<x<1$.

Ответ. $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Решите систему уравнений, неравенств:

А. 1) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y=12, \\ 2^y \cdot 3^x=18; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5^{3x}=5^{4y+7}, \\ 2^x \cdot 4^y=16; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2\cdot 3^x=18, \\ 4^x \cdot 5^y=16. \end{cases}$

Б. 1) $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y=75, \\ 3^y \cdot 5^x=45; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x-2^{2y}=77, \\ 3^{0,5x}-2^y=7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=6, \\ y^{x^2-7x+12}=1. \end{cases}$

В. 1) $\begin{cases} (x+y)^{\frac{1}{x}}=2, \\ (x+y)\cdot 4^x=64; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^{2x-1}\cdot 27^{y+x}=9^{0,5}, \\ 3x+y^2=4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^{2x-1}\cdot 27^{x+y}=3, \\ (5x-y)^2=36; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 0{,}2^{\cos x}\leqslant 1, \\ \dfrac{x-1}{2-x}+0{,}5>0. \end{cases}$

Ответы. **А.** 1) $(2; 1)$; 2) $(3; 0{,}5)$; 3) $(2; 0)$. **Б.** 1) $(1; 2)$; 2) $(4; 1)$; 3) $(4; 2)$; $(5; 1)$; $(3; 3)$. **В.** 1) $(2; 2)$; 2) $(-1{,}28; 2{,}8)$; $(1; -1)$; 3) $(1; -1)$; $(-0{,}8; 2)$; 4) $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Контрольные вопросы

1. Какая функция называется показательной?
2. Что является областью определения и множеством значений показательной функции?
3. Перечислите свойства функции $y=a^x$ при $a>1$.
4. Перечислите свойства функции $y=a^x$ при $0<a<1$.
5. Почему функция $y=2^x$ является возрастающей?
6. Постройте графики функций: а) $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ и $y=1{,}5^x$; б) $y=0{,}75^x$ и $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x$. Каково их взаимное расположение?
7. Используя график функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, найдите: а) значение y, соответствующее значению x, равному -2; $1{,}5$; 0; 1;

б) показатель степени, в которую надо возвести число $\frac{1}{2}$, чтобы получить 4; 3; $\frac{1}{4}$; 0,8.

8. С помощью какого преобразования плоскости можно получить график функции $y=(0,5)^x$ из графика функции $y=2^x$?
9. Сколько точек пересечения имеют графики функций $y=2^x$ и $y=0,28^x$?
10. Какое заключение можно сделать о знаке числа x, если $3^x=0,9$?
11. Какое уравнение называется показательным?
12. Почему при решении показательных уравнений полагают, что $a>0$, $a\neq 1$?
13. Дано уравнение вида $a^{f(x)}=1$. Можно ли утверждать, что $f(x)=0$?
14. Дано уравнение вида $a^{f(x)}=a^k$. В каком случае можно утверждать, что $f(x)=k$?
15. Дано уравнение вида $Aa^{2x}+Ba^x+C=0$. С помощью какой подстановки оно сведется к квадратному уравнению?
16. Уравнение вида $Aa^x+Ba^{\frac{x}{2}}\cdot b^{\frac{x}{2}}+Cb^x=0$ преобразуйте к квадратному уравнению.
17. Решите графически уравнение: а) $2^x=6$; б) $2^x=3^x$; в) $0,2^x=$ $=0,7^x$.
18. Какое неравенство называется показательным?
19. Дано неравенство вида $a^{f(x)}<a^{g(x)}$. Можно ли утверждать, что: а) $f(x)<g(x)$; б) $f(x)>g(x)$?
20. Какие свойства показательной функции применяются при решении неравенств: а) $2^x>2^n$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^n$?
21. Используя свойства показательной функции:

а) сравните с единицей: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$; $(\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$; $(0,9)^{-\sqrt{5}}$; $\pi^{-\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$;

б) сравните значения выражений: $k^{-\sqrt{3}}$ и $\left(\frac{1}{k}\right)^{-\sqrt{3}}$; $\left(\frac{k}{4}\right)^{1+\sqrt{3}}$ и $\left(\frac{k}{4}\right)^2$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{1+\sqrt{6}}$ и $\left(\frac{2}{3}\right)^{12+\sqrt{5}}$;

в) установите, равносильны ли неравенства: $a^x>a^4$ и $x>4$; $5^{x^2}<5^x$ и $x^2<x$; $\left(\frac{1}{16}\right)^x>\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$ и $2x<x-1$.

ГЛАВА XXV

§ 1. ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Пусть функция $y=f(x)$ монотонна в своей области определения $D(f)$. Тогда каждому значению $x\in D(f)$ соответствует единственное значение $y\in E(f)$ и обратно: каждое значение $y\in E(f)$ соответствует единственному $x\in D(f)$. Значит, в этом случае можно построить новую функцию, определенную на $E(f)$ и такую, что каждому $y\in E(f)$ ставится в соответствие $x\in D(f)$, удовлетворяющее уравнению $y=f(x)$. Эта новая функция называется обратной по отношению к функции $y=f(x)$.

2. Для нахождения функции, обратной данной $y=f(x)$, надо выразить x через y: $x=g(y)$, а затем записать полученную функцию в общепринятой форме $y=g(x)$.

3. Отметим, что если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ являются взаимно обратными, то область определения функции f совпадает с множеством значений функции g и, наоборот, область определения функции g совпадает с множеством значений функции f, т. е. $D(f)=E(g)$ и $D(g)=E(f)$.

4. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y=x$ (рис. 214).

5. Рассмотрим, например, функцию $y=x^2$, заданную на промежутке $(-\infty; 0]$. На этом промежутке функция убывает и принимает все значения из множества $[0; +\infty)$. Следовательно, для данной функции существует обратная. Из уравнения $y=x^2$ находим $x=\sqrt{y}$ или $x=-\sqrt{y}$; так как переменная x может принимать только неположительные значения, то искомая обратная функция имеет вид $x=-\sqrt{y}$. Поменяв обозначения x на y и y на x, получим формулу $y=-\sqrt{x}$, где $x\geqslant 0$, с помощью которой и задается обратная функция.

Если же рассматривать функцию $y=x^2$, заданную на промежутке $[0; +\infty)$, то обратной для нее служит функция $y=\sqrt{x}$, где

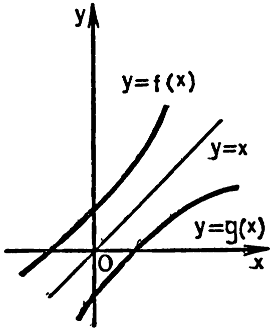


Рис. 214

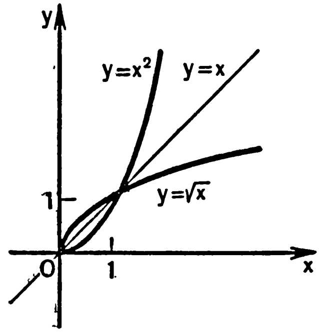


Рис. 215

$x \geqslant 0$. На рисунке 215 изображены график функции $y=x^2$ при $x \geqslant 0$ и график обратной ей функции.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Задать формулой функцию, обратную f. Построить графики данной и обратной ей функции, если функция f задана формулой $y=\frac{5x+4}{x}$, где $x<0$.

Р е ш е н и е. Выразив x через y, имеем $y=5+\frac{4}{x}$, $\frac{4}{x}=y-5$, $x=\frac{4}{y-5}$. Заменив x на y, а y на x, получим $y=\frac{4}{x-5}$. Найдем область определения обратной функции, она совпадает с множеством значений заданной функции. Этим множеством служит промежуток $(-\infty;\ 5)$ (рис. 216). Итак, $y=\frac{4}{x-5}$, $x<5$ — функция, обратная данной.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Выведите формулу, задающую функцию g, обратную данной функции f. Укажите область определения и область значений функции g:

1) $y=2x+1$; 2) $y=-\frac{1}{x}$; 3) $y=-2x+1$; 4) $y=\frac{x}{x+2}$; 5) $y=2x^2\ (x \geqslant 0)$.

О т в е т ы. 1) $g(x)=\frac{x-1}{2}$; $E(g)=D(g)=R$; 2) $g(x)=-\frac{1}{x}$; $E(g)=D(g)=(-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$; 5) $g(x)=\sqrt{\frac{x}{2}}$; $E(g)=D(g)=[0;\ \infty)$.

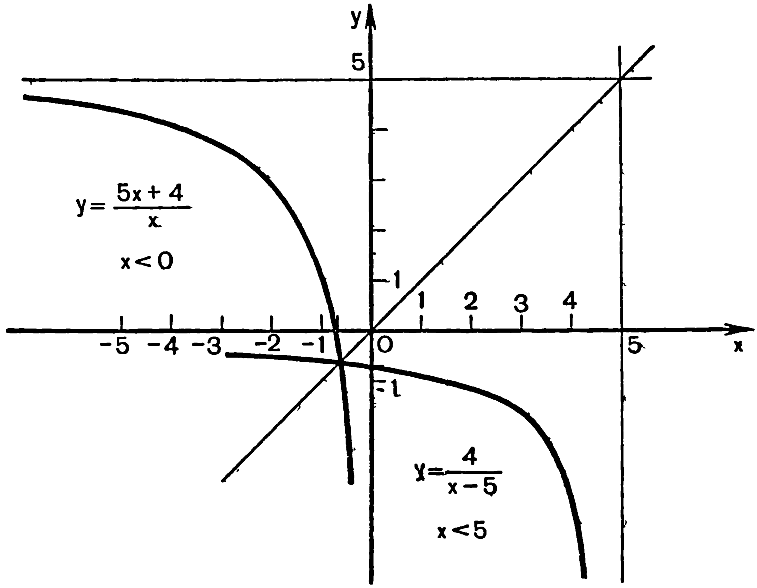


Рис. 216

§ 2. ПОНЯТИЕ ЛОГАРИФМА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Логарифмом положительного числа b по основанию a (где $a>0$, $a\neq 1$) называется показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить число b.

Логарифм числа b по основанию a обозначается символом $\log_a b$.

2. Если $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, то $\log_a b$ по определению есть показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b. Поэтому равенство $a^{\log_a b}=b$ есть тождество, которое называют основным логарифмическим тождеством.

Например, $3^{\log_3 6}=6$, $3^{\log_3 7}=7$.

3. Для обозначения десятичных логарифмов принята специальная запись: вместо $\log_{10} b$, где b — произвольное положительное число, пишут $\lg b$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Вычислить:

1) $\log_3 \frac{1}{243}$; 2) $\log_{\frac{1}{3}\sqrt{3}} \frac{1}{243}$; 3) $10^{3-2\lg 5}$;

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2+2\log_{\frac{1}{3}}6}$; 5) $49^{\log_7 2-\frac{1}{2}\log_{49}64}$.

Решение. 1) Нам известно, что логарифмом числа b по основанию a (где $a>0$, $a\neq 1$) называется показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить число b.

Таким образом, $\log_3\frac{1}{243}$ есть показатель степени. Обозначим этот показатель степени через x. Тогда $\log_3\frac{1}{243}=x$, или $3^x=\frac{1}{243}$.

Решим уравнение $3^x=\frac{1}{243}$: $3^x=3^{-5}$, т. е. $x=-5$.

Таким образом, $\log_3\frac{1}{243}=-5$.

2) Пусть $\log_{\frac{1}{3}\sqrt[5]{3}}\frac{1}{243}=x$, тогда $\left(\frac{1}{3}\sqrt[5]{3}\right)^x=\frac{1}{243}$.

Чтобы решить полученное уравнение, необходимо упростить основания степеней, т. е. привести их к одному основанию:

$$\left(\frac{1}{3}\sqrt[5]{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{5}}\right)^x=\left(3^{-1}\cdot 3^{\frac{1}{5}}\right)^x=\left(3^{-1+\frac{1}{5}}\right)^x=$$

$$=\left(3^{-\frac{4}{5}}\right)^x=3^{-\frac{4}{5}x},\quad \frac{1}{243}=3^{-5}.$$

Таким образом, наше уравнение примет вид $3^{-\frac{4}{5}x}=3^{-5}$. Так как $a>0$, $a\neq 1$, то $-\frac{4}{5}x=-5$, $x=\frac{25}{4}$.

Таким образом, $\log_{\frac{1}{3}\sqrt[5]{3}}\frac{1}{243}=\frac{25}{4}$.

Для решения остальных примеров используем основное логарифмическое тождество.

3) $10^{3-2\lg 5}=10^3\cdot 10^{-2\lg 5}=10^3\cdot(10^{\lg 5})^{-2}=10^3\cdot(5)^{-2}=40.$

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2+2\log_{\frac{1}{3}}6}=\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2\log_{\frac{1}{3}}6}=\frac{1}{9}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}6}\right)^2=\frac{1}{9}\cdot 6^2=4.$

5) $49^{\log_7 2-\frac{1}{2}\log_{49}64}=49^{\log_7 2}\cdot 49^{-\frac{1}{2}\log_{49}64}=7^{2\log_7 2}\left(49^{\log_{49}64}\right)^{-\frac{1}{2}}=$
$=\left(7^{\log_7 2}\right)^2\cdot(64)^{-\frac{1}{2}}=2^2\cdot(2^6)^{-0,5}=2^2\cdot 2^{-3}=2^{2-3}=2^{-1}=\frac{1}{2}.$

§ 3. СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Логарифмы существуют только для положительных чисел, т. е. $\log_a N$ (где $a>0$ и $a\neq 1$) существует, если $N>0$.

2. При основании $a>1$ логарифмы чисел $N>1$ положительны, а логарифмы чисел $0<N<1$ отрицательны. Например, $\log_2 5>0$, $\log_2\frac{1}{3}<0$.

3. При основании $0<a<1$ логарифмы чисел $N>1$ отрицательны, а логарифмы чисел $0<N<1$ положительны.

Например, $\log_{\frac{1}{2}} 5<0$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}>0$.

4. Равным положительным числам соответствуют и равные логарифмы, т. е. если $N_1=N_2$, то $\log_a N_1=\log_a N_2$.

5. Если $a>1$, то большему числу соответствует и больший логарифм, т. е. если $N_1>N_2$, то $\log_a N_1>\log_a N_2$.

Например, $\log_3 7>\log_3 5$.

6. Если $0<a<1$, то большему числу соответствует меньший логарифм, т. е. если $N_1>N_2$, то $\log_a N_1<\log_a N_2$.

Например, $\log_{\frac{1}{3}} 9<\log_{\frac{1}{3}} 7$.

7. Логарифм единицы по любому основанию ($a>0$, $a\neq 1$) равен нулю, т. е. $\log_a 1=0$.

8. Логарифм самого основания равен 1, т. е. $\log_a a=1$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Вычислите:

А. 1) $\log_2 4$; 2) $\log_4 4$; 3) $\log_2 8$; 4) $\log_2 32$; 5) $\log_2 64$;
6) $\log_{0,5} 4$; 7) $\log_{0,5} 8$; 8) $\log_{0,5} 32$; 9) $\log_{0,5} 0,5$;
10) $\log_{0,5} 0,25$; 11) $6^{\log_6 50}$.

Б. 1) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+2\log_{\frac{1}{7}} 3}$; 2) $\log_{0,5\sqrt[5]{2}} \frac{1}{32}$; 3) $4^{\log_4 5-\log_4 5}$;
4) $16^{0,5\log_4 10+1}$; 5) $\frac{4}{5}(1+9^{\log_3 8})^{\log_{65} 5}$.

В. 1) $27^{\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}} 0,5-\log_{27} 2}$; 2) $5^{\log_{\sqrt{5}} 4+2\log_5 3}$;
3) $3\log_2 \log_4 16+\log_{0,5} 2$; 4) $9^{3-\log_3 2-\log_{81} 4}$.

2. Сравните по величине x и y, если:
1) $\log_{0,63} x<\log_{0,63} y$; 2) $\log_{3,1} x>\log_{3,1} y$.

3. Что больше:
1) $\log_6 7$ или $\log_7 6$; 2) $\log_{0,4} 0,5$ или $\log_{\sqrt{2}} \sin\frac{\pi}{2}$?

4. Найдите x, если:
1) $\log_x \frac{1}{8}=-1,5$; 2) $\log_{\frac{1}{16}} \frac{x}{2}=-0,5$; 3) $\log_x \frac{1}{64}=-\frac{2}{3}$;
4) $\log_x 25\sqrt{5}=-\frac{5}{8}$.

Ответы. **1. А.** 1) 2; 2) 1; 3) 3; 4) 5; 5) 6; 6) -2; 10) 2; 11) 50. **Б.** 1) $\frac{9}{7}$; 2) $\frac{25}{4}$; 3) 1; 4) 160; 5) 4. **В.** 1) 0,25; 2) 144; 3) 2; 4) $\frac{729}{8}$. **2.** 1) $x>y$; 2) $x>y$. **3.** 1) $\log_7 6<\log_6 7$; 2) $\log_{0,4} 0,5$. **4.** 1) 4; 2) 8; 3) 512; 4) $\frac{1}{625}$.

§ 4. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Так как показательная функция $y=a^x$ (где $a>0$, $a\neq 1$) является монотонной (возрастающей при $a>1$ и убывающей при $0<a<1$), то она имеет обратную функцию. Чтобы найти эту обратную функцию, нужно из формулы $y=a^x$ выразить x через y: $x=\log_a y$, а затем поменять обозначения x на y и y на x; тогда получим $y=\log_a x$. Функция $y=\log_a x$ (где $a>0$, $a\neq 1$) называется логарифмической.

Итак, показательная и логарифмическая функции при одном и том же основании являются взаимно обратными функциями.

2. График логарифмической функции $y=\log_a x$ можно построить, воспользовавшись тем, что функция $y=\log_a x$ обратна показательной функции $y=a^x$. Поэтому достаточно построить график функции $y=a^x$, а затем отобразить его симметрично относительно прямой $y=x$. На рисунке 217 изображен график функции $y=\log_a x$ при $a>1$, а на рисунке 218 — график функции $y=\log_a x$ при $0<a<1$.

3. Свойства функции $y=\log_a x$ при $a>1$:

а) $D(f)=R_+$;
б) $E(f)=R$;
в) функция возрастает;
г) если $x=1$, то $\log_a x=0$;
д) если $0<x<1$, то $\log_a x<0$;
е) если $x>1$, то $\log_a x>0$.

4. Свойства функции $y=\log_a x$ при $0<a<1$:

а) $D(f)=R_+$;
б) $E(f)=R$;
в) функция убывает;
г) если $x=1$, то $\log_a x=0$;
д) если $0<x<1$, то $\log_a x>0$;
е) если $x>1$, то $\log_a x<0$.

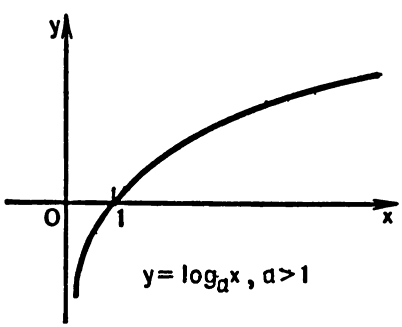


Рис. 217

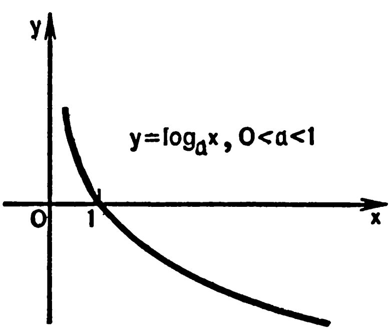


Рис. 218

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Найти область определения функции: 1) $y=\log_3(4-5x)$; 2) $y=\log_{0,1}(x^2-3x-4)$; 3) $y=\lg\frac{x^2+4x}{x^2-3x-4}$.

Решение. 1) Область определения логарифмической функции — множество положительных чисел, т. е. R_+, значит, заданная функция будет определена только для таких x, при которых $4-5x>0$, т. е. при $x<0{,}8$. Таким образом, областью определения заданной функции является интервал $(-\infty;\ 0{,}8)$.

2) Как и в первом примере, логарифмическая функция f определена для таких x, при которых $x^2-3x-4>0$. Решая это квадратное неравенство методом интервалов, получаем, что $D(f)$ — объединение интервалов $(-\infty;\ -1)$ и $(4;\ \infty)$ (рис. 219).

3) Решая методом интервалов неравенство $\frac{x^2+4x}{x^2-3x-4}>0$, $\frac{x(x+4)}{(x+1)(x-4)}>0$, находим (рис. 220), что $D(f)=(-\infty;\ -4)\cup(-1;\ 0)\cup(4;\ \infty)$.

2. Построить график функции: 1) $y=\log_2 3x$; 2) $y=\log_2(-3x)$; 3) $y=\log_3(4-5x)$; 4) $y=\log_2(x^2-3x-4)$; 5) $y=2^{\log_2(x^2-3x-4)}$; 6) $y=\log_{0,1}|x+1|$.

Решение. 1) Так как область определения данной функции — множество положительных чисел, поэтому должно выполняться неравенство $3x>0$. Таким образом, областью определения функции служит промежуток $(0;\ \infty)$.

Кривая пересекает ось Ox в точке $\left(\frac{1}{3};\ 0\right)$, так как при $y=0$ получаем $2^0=3x$, т. е. $x=\frac{1}{3}$.

График функции изображен на рисунке 221.

2) Должно выполняться неравенство $-3x>0$, т. е. $x<0$. Следовательно, областью определения функции служит промежуток $(-\infty;\ 0)$.

Кривая пересекает ось Ox в точке $\left(-\frac{1}{3};\ 0\right)$, так как при $y=0$ получаем $2^0=-3x$, т. е. $x=-\frac{1}{3}$.

Рис. 219

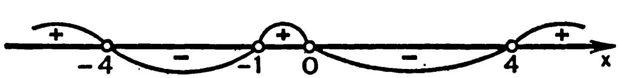


Рис. 220

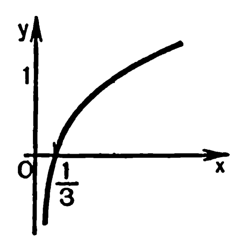


Рис. 221

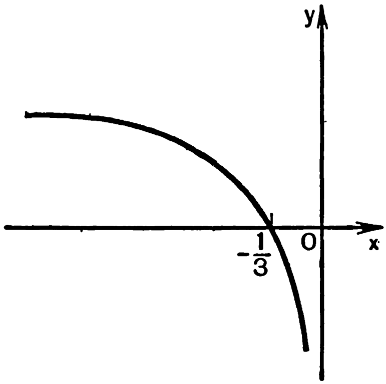


Рис. 222

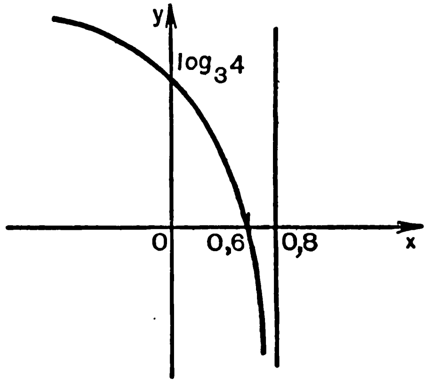


Рис. 223

График функции изображен на рисунке 222.

3) Должно выполняться неравенство $4-5x>0$, т. е. $x<\frac{4}{5}=0{,}8$. Следовательно, областью определения данной функции является промежуток $(-\infty;\ 0{,}8)$. Найдем точки пересечения графика с осями координат.

Полагая $y=0$, получим $3^0=4-5x$, откуда $x=0{,}6$. При $x=0$ имеем $y=\log_3 4$.

График функции изображен на рисунке 223.

4) Должно выполняться неравенство $x^2-3x-4>0$, т. е. $(x+1)(x-4)>0$. Следовательно, областью определения данной функции является $(-\infty;\ -1)\cup(4;\ \infty)$.

Найдем точки пересечения графика с осью Ox. Полагая $y=0$, получим $2^0=x^2-3x-4$, откуда $x_1=\frac{3-\sqrt{29}}{2}$, $x_2=\frac{3+\sqrt{29}}{2}$.

График функции изображен на рисунке 224.

5) Здесь мы используем основное логарифмическое тождество. Должно быть

$$\begin{cases} x^2-3x-4>0, \\ y=x^2-3x-4; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+1)(x-4)>0, \\ y=(x+1)(x-4). \end{cases}$$

График функции изображен на рисунке 225.

6) Искомый график (рис. 226) получается параллельным переносом графика функции $y=\log_{0,1}|x|$ на вектор $\bar{a}(-1;\ 0)$. Для построения графика функции $y=\log_{0,1}|x|$ построим график функции $\log_{0,1} x$ при $x>0$ и отобразим его относительно оси Oy.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Найдите область определения функции:

А. 1) $y=\log_a(x+1)$; 2) $y=\log_a(x-1)$; 3) $y=\log_a(-2x)$;

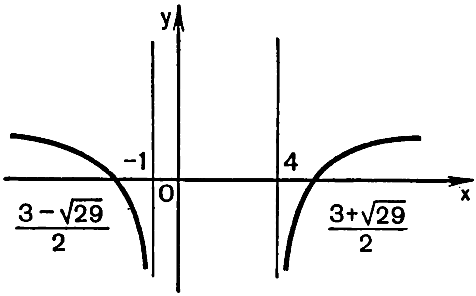


Рис. 224

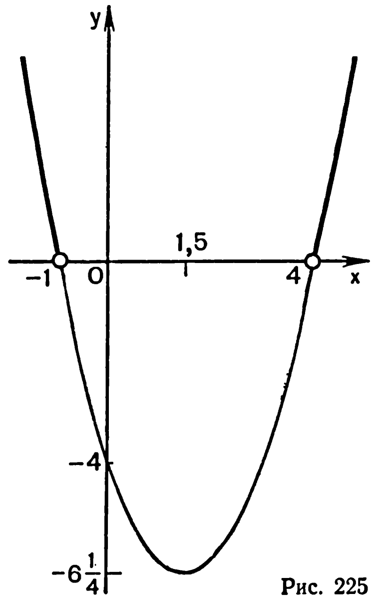


Рис. 225

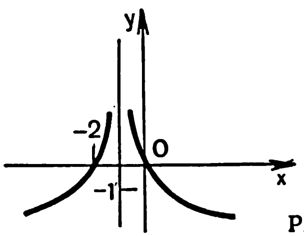


Рис. 226

4) $y=\log_a x^2$; 5) $y=\log_a(3x^2+1)$; 6) $y=\log_a(1-x)$.

Б. 1) $y=\log_a(4-x^2)$; 2) $y=\log_a|x|$; 3) $y=\log_a\sqrt{x+1}$;
4) $y=\log_{0,4}(5x-x^2-6)$; 5) $y=\log_2(x+6)+\log_3(6-x)$.

2. Постройте график функции:

А. 1) $y=\log_3(x-1)$; 2) $y=\log_2(x+1)$; 3) $y=\log_4(1-x)$.

Б. 1) $y=\log_{0,4}|x|$; 2) $y=\log_2 x(10-5x)$; 3) $y=\log_{0,3}(9-x^2)$.

В. 1) $y=\log_2|x+3|$; 2) $y=\log_{0,2}|x^2-x|$; 3) $y=|\log_3(x-1)|$.

Ответы. 1. А. 1) $x>-1$; 2) $x>1$; 3) $x<0$; 4) x — любое действительное число, кроме $x=0$; 5) $x\in R$; 6) $x<1$. Б. 1) $-2<x<2$; 2) $x\in R$, кроме $x=0$; 3) $x>-1$; 4) $2<x<3$; 5) $-6<x<6$.

§ 5. ТЕОРЕМЫ О ЛОГАРИФМЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ, ЧАСТНОГО И СТЕПЕНИ. ФОРМУЛА ПЕРЕХОДА К НОВОМУ ОСНОВАНИЮ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Логарифм произведения двух или нескольких положительных чисел равен сумме логарифмов сомножителей, т. е. $\log_a(N_1N_2\ldots N_k)=\log_a N_1+\log_a N_2+\ldots+\log_a N_k$, где $a>0$, $a\neq1$, $N_i>0$.

Например, $\log_a(3\cdot4\cdot6\cdot7)=\log_a 3+\log_a 4+\log_a 6+\log_a 7$.

2. Логарифм частного положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя, т. е. $\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2$, где $a>0$, $a\neq 1$, $N_1>0$, $N_2>0$.

Например, $\log_a \frac{3}{4} = \log_a 3 - \log_a 4$.

3. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм ее основания, т. е. $\log_a N^c = c\log_a N$, где $N>0$, $a>0$, $a\neq 1$.

Замечание. Если $N<0$, а c — четное число, то справедлива формула $\log_a N^c = c\log_a |N|$, где $a>0$, $a\neq 1$.

Например, $\log_a (-3)^4 = 4\log_a |-3|$.

4. Формула перехода от основания b к основанию a имеет вид:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b},$$

где $N>0$, $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$.

Например, $\log_2 7 = \frac{\log_4 7}{\log_4 2} = \frac{\lg 7}{\lg 2}$ и т. д.

5. Если $a=N$, то формула перехода примет вид: $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, или $1 = \log_b a \cdot \log_a b$, где $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$.

Например, $1 = \log_2 7 \cdot \log_7 2$.

6. Если основание логарифма и число, стоящее под знаком логарифма, возвести в одну и ту же степень, отличную от нуля, то значение логарифма не изменится, т. е.

$$\log_a N = \log_{a^c} N^c, \text{ где } N>0,\ a>0,\ a\neq 1;$$
$$\log_{a^k} N = \log_a N^{\frac{1}{k}} = \frac{\log_a N}{k}, \text{ где } a>0,\ a\neq 1,\ N>0,\ k\neq 0.$$

Например, $\log_2 4 = \log_{2^3} 4^3$, $\log_8 64 = \log_{2^3} 2^6 = \frac{6}{3}\log_2 2 = 2$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Найти: 1) $\log_{30}8$, если $\lg 5 = a$ и $\lg 3 = c$;
2) $\log_{54}168$, если $\log_7 12 = a$ и $\log_{12}24 = c$.

Решение. 1) Имеем $\log_{30}8 = \log_{30}2^3 = 3\log_{30}2 = \frac{3\lg 2}{\lg 30}$;
$\lg 2 = \lg\frac{10}{5} = \lg 10 - \lg 5 = 1 - a$; $\lg 30 = \lg(2\cdot 15) = \lg 2 + \lg 15 = \lg 2 + \lg(3\cdot 5) = \lg 2 + \lg 3 + \lg 5 = 1 - a + c + a = 1 + c$.

Итак, $\log_{30}8 = \frac{3(1-a)}{1+c}$.

2) Разложим числа 168, 54, 24 и 12 на множители: $168 = 2^3\cdot 3\cdot 7$, $54 = 2\cdot 3^3$, $24 = 2^3\cdot 3$, $12 = 2^2\cdot 3$. Полагая $\log_2 3 = x$ и $\log_2 7 = y$, выразим через x и y все логарифмы, содержащиеся в условии:

$$\log_7 12 = \frac{\log_2 12}{\log_2 7} = \frac{\log_2 (2^2 \cdot 3)}{y} = \frac{2+x}{y};$$

$$\log_{12} 24 = \frac{\log_2 24}{\log_2 12} = \frac{\log_2 (2^3 \cdot 3)}{\log_2 (2^2 \cdot 3)} = \frac{3+x}{2+x};$$

$$\log_{54} 168 = \frac{\log_2 168}{\log_2 54} = \frac{\log_2 (2^3 \cdot 3 \cdot 7)}{\log_2 (2 \cdot 3^3)} = \frac{3+x+y}{1+3x}.$$

Согласно условию для определения x и y получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2+x}{y} = a, \\ \dfrac{3+x}{2+x} = c, \end{cases}$$

решая которую находим $x = \frac{3-2c}{c-1}$, $y = \frac{1}{a(c-1)}$. Подставляя найденные значения x и y в равенство для определения $\log_{54} 168$, получим ответ: $\log_{54} 168 = \frac{1+ac}{a(8-5c)}$.

2. Упростить: 1) $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$; 2) $\left(81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \times$ $\times 49^{\log_7 2}$.

Решение. 1) $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}} = -\log_2 \log_2 2^{\frac{1}{8}} =$

$$= -\log_2\left(\frac{1}{8}\log_2 2\right) = -\log_2 \frac{1}{8} = -\log_2 2^{-3} = 3 \log_2 2 = 3.$$

$$2)\ \left(81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2} = \left(3^{1 - 2\log_{3^2} 4} + 5^{2\log_{5^3} 8}\right) \cdot 7^{2\log_7 2} =$$

$$= \left(\frac{3}{3^{\log_{3^2} 16}} + 5^{\log_{5^3} 64}\right) \cdot 7^{\log_7 4} =$$

$$= \left(\frac{3}{3^{\log_3 4}} + 5^{\log_5 4}\right) \cdot 4 = \left(\frac{3}{4} + 4\right) \cdot 4 = 3 + 16 = 19.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Найдите:

А. 1) $\log_3 6$, если $\log_3 2 = a$; 2) $\log_{12} 4 + \log_{12} 3$;
3) $\lg 13 - \lg 130$.

Б. 1) $\log_2 \sqrt[3]{0{,}75}$, если $\log_2 3 = a$; 2) $\log_5 12$, если $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = c$; 3) $\log_5 1{,}5$, если $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = c$; 4) $\log_5 72$, если $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = c$;
5) $\log_6 16$, если $\log_{12} 27 = a$.

В. 1) $\log_5 6$, если $\log_2 3 = a$, $\log_2 10 = c$; 2) $\log_{30} 8$, если $\log_{30} 3 = a$, $\log_{30} 5 = c$; 3) $\log_5 3{,}38$, если $\lg 13 = a$, $\lg 2 = a$;

4) $\log_{275} 60$, если $\log_{12} 5=a$, $\log_{12} 11=c$;

5) $\lg 56$, если $\lg 2=a$, $\log_2 7=c$.

2. Упростите:

1) $(\lg 72-\lg 9):(\lg 28-\lg 7)$; 2) $2^{\log_4 9+1}$; 3) $5^{\frac{3-\lg 5}{\lg 25}}$;

4) $a^{\frac{\lg\lg a}{\lg a}}$; 5) $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_9 10$.

Ответы. **1. А.** 1) $a+1$; 2) 1; 3) -1. **Б.** 1) $\frac{1}{3}(a-2)$; 2) $2a+c$; 3) $c-a$; 4) $3a+2c$; 5) $\frac{3-a}{3+a}$. **В.** 1) $\frac{1+a}{c-1}$; 2) $3(1-a-c)$; 3) $\frac{a+2c-2}{1-a}$; 4) $\frac{a+1}{2a+c}$; 5) $ac+3a$. **2.** 1) 1,5; 2) 6; 3) $10\sqrt{2}$; 4) $\lg a$; 5) $\log_2 10$.

§ 6. ДЕСЯТИЧНЫЕ ЛОГАРИФМЫ И ИХ СВОЙСТВА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Десятичный логарифм числа — это логарифм с основанием, равным 10; например, $\lg a$, $\lg 5$, $\lg 1$. Десятичные логарифмы обладают теми же свойствами, что и логарифмы чисел с любым положительным основанием.

2. Десятичные логарифмы чисел находят по специальным таблицам (рекомендуется использовать «Четырехзначные математические таблицы» В. М. Брадиса).

3. Целая часть десятичного логарифма числа называется его характеристикой, а дробная часть — мантиссой. Пусть, например, $\lg x=2,7536$. Здесь 2 — характеристика, а 0,7536 — мантисса.

4. Известно, что любое положительное число можно записать в стандартном виде: $a\cdot 10^n$, где $1\leqslant a<10$, $n\in \boldsymbol{Z}$. Показатель n называют порядком данного числа.

5. Характеристика десятичного логарифма числа $a\cdot 10^n$ равна n, а мантисса равна $\lg a$. Например, $\lg 4650=\lg(4,65\cdot 10^3)=3+\lg 4,65$; $\lg 46,5=\lg(4,65\cdot 10^1)=1+\lg 4,65$; $\lg 0,0465=\lg(4,65\cdot 10^{-2})=-2+\lg 4,65$. Таким образом, логарифмы чисел, отличающихся друг от друга только порядком, имеют одну и ту же мантиссу.

6. Из указанных выше свойств следует, что $\lg 1=0$, $\lg 10=1$, $\lg 100=2,\ldots$, $\lg 10^n=n\ (n\in \boldsymbol{Z})$; $\lg 0,1=-1$, $\lg 0,01=-2,\ldots$, $\lg 10^{-n}=-n\ (n\in \boldsymbol{Z})$.

§ 7. ЛОГАРИФМИРОВАНИЕ И ПОТЕНЦИРОВАНИЕ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Логарифмирование — это преобразование, при котором логарифм выражения с переменными приводится к сумме или разности логарифмов переменных.

2. Необходимо четко различать сумму логарифмов $\lg a+\lg b$ и логарифм суммы $\lg(a+b)$. Сумма логарифмов равна логарифму произведения, т. е. $\lg a+\lg b=\lg(a\cdot b)$, а для логарифма суммы $\lg(a+b)$ формулы нет.

3. Пример. Дано $x=\frac{3a^2\sqrt[5]{b^3}}{c^4(a+b)}$, $a>0$, $b>0$, $c>0$. Найти $\lg x$.

Решение. Логарифмируя, получим:

$$\lg x=\lg 3+\lg a^2+\lg\sqrt[5]{b^3}-\lg c^4-\lg(a+b)=\lg 3+2\lg a+$$
$$+\frac{3}{5}\lg b-4\lg c-\lg(a+b).$$

4. Потенцирование — это преобразование, обратное логарифмированию.

5. Пример. Дано $\lg x=2\lg a-5\lg b+\frac{3}{7}\lg c$, $a>0$, $b>0$, $c>0$. Найти выражение для x.

Решение. Потенцируя, получим $\lg x=\lg a^2-\lg b^5+\lg c^{\frac{3}{7}}=$

$$=\lg\left(a^2c^{\frac{3}{7}}\right)-\lg b^5=\lg\frac{a^2\cdot c^{\frac{3}{7}}}{b^5},\quad x=\frac{a^2\cdot c^{\frac{3}{7}}}{b^5}.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Прологарифмируйте выражение по основанию 10 (все переменные положительные):

А. 1) $x=3ac$; 2) $x=\frac{2ck}{a}$; 3) $x=\frac{a^2k^5}{c^3}$.

Б. 1) $x=4(a+c)$; 2) $x=\frac{a+c}{a-c}$; 3) $x=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{ack}$.

В. 1) $x=5a\sqrt[3]{a^4(a-c)^2}$; 2) $x=\left(\frac{\sqrt[3]{ac}}{\sqrt[4]{3c}}\right)^5$.

2. Выполните потенцирование выражения:

А. 1) $\lg x=3\lg a+\lg 6$; 2) $\lg x=\lg a-4\lg c$;
3) $\lg x=2\lg a-3\lg k+4\lg c$.

Б. 1) $\lg x=2\lg(a+c)-0{,}5\lg(a-c)$; 2) $\lg x=\frac{2}{3}\lg a+1{,}5\lg c$;
3) $\lg x=\frac{2}{3}(\lg a-\lg c)-\lg(a-c)$.

Ответы. 1. А. 1) $\lg x=\lg 3+\lg a+\lg c$; 2) $\lg x=\lg 2+\lg k+\lg c-\lg a$; 3) $\lg x=2\lg a+5\lg k-3\lg c$. В. 1) $\lg x=\lg 5+\frac{7}{3}\lg a+\frac{2}{3}\lg(a-c)$; 2) $\lg x=\frac{5}{3}\lg a+\frac{5}{12}\lg c-\frac{5}{4}\lg 3$.

2. А. 1) $x=6a^3$; 2) $x=\frac{a}{c^4}$; 3) $x=\frac{a^2c^4}{k^3}$. Б. 3) $\frac{1}{a-c}\sqrt[3]{\left(\frac{a}{c}\right)^2}$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение логарифма данного числа по данному основанию.

2. Запищите основное логарифмическое тождество. Из чего оно следует?
3. Имеет ли смысл выражение: $\log_3(-5)$; $\log_2 0$?
4. Почему логарифмы существуют только для положительных чисел?
5. Сформулируйте свойства логарифмов чисел при основании $a>1$; $0<a<1$.
6. Упростите выражение (пользуясь основным логарифмическим тождеством): а) $10^{\lg 0,3}$; б) $10^{2+\lg 0,4}$; в) $10^{\lg 3-\lg 2}$; г) $3^{2\log_3 9}$.
7. Запишите данное равенство с помощью логарифма: а) $2^2=4$; б) $3^3=27$; в) $2^{-2}=\frac{1}{4}$; г) $7^0=1$.
8. Сравните выражения: а) $\log_5\left(\frac{1}{2}\right)$ и $\log_5\left(\frac{1}{3}\right)$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 2$ и $\log_{\frac{1}{3}} 4$.
9. Какие из данных чисел являются положительными и какие — отрицательными: а) $\log_{\frac{1}{2}} 5$; б) $\log_2 \frac{1}{3}$; в) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; г) $\log_k 3$?
10. Какая функция называется логарифмической?
11. Сформулируйте свойства логарифмической функции при $a>1$ и при $0<a<1$. Поясните их на графике.
12. Что является областью определения и множеством значений функции $y=\log_a x$?
13. Докажите теорему о логарифме произведения.
14. Докажите теорему о логарифме частного.
15. Докажите теорему о логарифме степени.
16. Верно ли равенство $\lg x^2=2\lg x$?
17. Верно ли равенство $\log_a x^k=k\log_a x$, где $a>0$, $a\neq 1$?

ГЛАВА XXVI

---

§ 1. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называется логарифмическим. Простейшим примером логарифмического уравнения служит уравнение $\log_a x = b$ (где $a > 0$, $a \neq 1$).

2. Решение логарифмического уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ основано на том, что такое уравнение равносильно уравнению $f(x) = g(x)$ при дополнительных условиях $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.

3. Отметим, что переход от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$ иногда приводит к появлению посторонних корней. Такие корни можно выявить либо с помощью подстановки найденных корней в исходное логарифмическое уравнение, либо с помощью нахождения области определения исходного уравнения (эта область задается системой неравенств $f(x) > 0$, $g(x) > 0$).

4. При решении логарифмических уравнений часто бывает полезен метод введения новой переменной.

5. При решении уравнений, содержащих переменную и в основании, и в показателе степени, используется метод логарифмирования. Если при этом в показателе степени содержится логарифм, то обе части уравнения надо прологарифмировать по основанию этого логарифма.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Решить уравнение: 1) $\log_{\sqrt[3]{4}}(x-1) = 6$; 2) $\log_3(x^2 - 4x - 5) = \log_3(7 - 3x)$; 3) $\lg(x-6) - 0{,}5\lg 2 = \lg 3 + \lg\sqrt{x-10}$;
4) $\log_x 5\sqrt{5} - 1{,}25 = \log_x^2 \sqrt{5}$; 5) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$; 6) $x^{\log_2 x + 2} = 8$;
7) $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12$; 8) $\log_{0,2}(4x) + \log_5(x^2 + 75) = 1$;
9) $x^{\log_a x} = a^2 x$, где $a > 0$, $a \neq 1$; 10) $\log_x 9x^2 \cdot \log_3^2 x = 4$.

Решение. 1) Должно быть $x-1>0$, т. е. $x>1$. Согласно определению логарифма имеем $x-1=(\sqrt[3]{4})^6$, $x-1=4^2$, $x=17$.

2) Данное уравнение сводится к уравнению $x^2-4x-5=7-3x$, откуда получаем $x^2-x-12=0$, т. е. $x_1=4$, $x_2=-3$. Проверим выполнимость условий $x^2-4x-5>0$, $7-3x>0$. Значение $x=4$ этим условиям не удовлетворяет (и, значит, является посторонним корнем), а значение $x=-3$ удовлетворяет. Итак, $x=-3$ — единственный корень данного уравнения.

3) Умножая обе части уравнения на 2 и используя свойства логарифмов, имеем $2\lg(x-6)-\lg 2=2\lg 3+2\lg\sqrt{x-10}$, $\lg(x-6)^2=\lg 2+\lg 3^2+\lg(x-10)$, $\lg(x-6)^2=\lg 18(x-10)$.

В результате данное уравнение сводится к уравнению $(x-6)^2=$ $=18(x-10)$, или $x^2-30x+216=0$, откуда $x_1=12$, $x_2=18$. Для проверки полученных значений найдем область определения данного уравнения, она задается системой неравенств $\begin{cases} x-6>0, \\ x-10>0. \end{cases}$ Оба найденных значения этой системе удовлетворяют и, значит, служат корнями исходного уравнения.

4) Преобразуем данное уравнение:

$$\log_x 5^{\frac{3}{2}}-\frac{5}{4}=(\log_x 5^{\frac{1}{2}})^2,\ \frac{3}{2}\log_x 5-\frac{5}{4}=(\frac{1}{2}\log_x 5)^2.$$

Полагая $\log_x 5=y$, получаем $\frac{3y}{2}-\frac{5}{4}=\frac{y^2}{4}$, или $y^2-6y+5=0$, откуда $y_1=1$, $y_2=5$. Таким образом, приходим к совокупности двух уравнений: $\log_x 5=1$, $\log_x 5=5$. Из первого уравнения находим $x_1=5$, а из второго $x_2=\sqrt[5]{5}$.

5) Логарифмируем обе части уравнения по основанию 10: $\sqrt{x}\lg x=x\lg\sqrt{x}$, $\sqrt{x}\lg x=\frac{1}{2}x\lg x$, $\frac{1}{2}\sqrt{x}(2-\sqrt{x})\lg x=0$.

Так как из условия следует, что $x>0$, то последнее уравнение равносильно совокупности уравнений $2-\sqrt{x}=0$, $\lg x=0$. Первое из них имеет корень $x_1=4$, а второе — корень $x_2=1$. Проверка показывает, что оба корня удовлетворяют данному уравнению.

6) Прологарифмировав обе части уравнения по основанию 2, получим:

$$\log_2(x^{\log_2 x+2})=\log_2 8,\ (\log_2 x+2)\log_2 x=3.$$

Теперь положим $\log_2 x=y$; тогда уравнение примет вид $y^2+2y-3=0$, откуда $y_1=1$, $y_2=-3$. Из уравнения $\log_2 x=1$ находим $x_1=2$, а из уравнения $\log_2 x=-3$ находим $x_2=\frac{1}{8}$.

7) Должно быть $x>0$.

Считая, что x принадлежит этой области, выполним следующие преобразования: $(6^{\log_6 x})^{\log_6 x}+x^{\log_6 x}=12$. Так как $6^{\log_6 x}=x$, то получим $x^{\log_6 x}+x^{\log_6 x}=12$, или $2x^{\log_6 x}=12$, т. е. $x^{\log_6 x}=6$. Последнее уравнение содержит переменную и в основании степени, и в показателе степени, следовательно, для его решения надо использовать метод логарифмирования, получим $\log_6^2 x=1$, $\log_6 x=\pm 1$, откуда $x_1=\frac{1}{6}$ и $x_2=6$. Оба значения x входят в область определения. Проверка подтверждает, что значения $x_1=\frac{1}{6}$ и $x_2=6$ — корни данного уравнения.

8) Данное уравнение имеет разные основания логарифмов. Перейдем к одному основанию:

$$\frac{\log_5(4x)}{\log_5 0{,}2}+\log_5(x^2+75)=1.$$

Так как $\log_5 0{,}2=\log_5 5^{-1}=-1$, то получаем:
$-\log_5(4x)+\log_5(x^2+75)=1$, или $\log_5\frac{x^2+75}{4x}=\log_5 5$.

Так как $a>0$, $a\neq 1$, то $\frac{x^2+75}{4x}=5$, $x^2-20x+75=0$, $x_1=5$, $x_2=15$.

Проверка подтверждает, что значения $x_1=5$ и $x_2=15$ — корни данного уравнения.

9) $x^{\log_a x}=a^2x$, где $a>0$, $a\neq 1$. Логарифмируя по основанию a, получим:

$$\log_a x\cdot\log_a x=2\log_a a+\log_a x,\ \log_a^2 x-\log_a x-2=0,$$
$$\log_a x=2,\ \log_a x=-1,$$
$$x_1=a^2,\ x_2=\frac{1}{a}.$$

10) $\log_x 9x^2\cdot\log_3^2 x=4$.

Из условия следует, что $x>0$, $x\neq 1$. Имеем:

$$(\log_x 9+\log_x x^2)\cdot\frac{1}{\log_x^2 3}=4,\qquad (2\log_x 3+2)\cdot\frac{1}{\log_x^2 3}=4,$$

$$\log_x 3=y,\ 2y+2=4y^2,\ 4y^2-2y-2=0,\ y_1=1,\ y_2=-\frac{1}{2};$$

$$\log_x 3=1,\ x_1=3,\ \log_x 3=-\frac{1}{2},\ x_2=\frac{1}{9}.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Решите уравнение:

А. 1) $\log_3 x=\log_3 1{,}5+\log_3 8$; 2) $\log_7 x=\log_7 12-\log_7 3$;
3) $\log_{0,3} x=2\log_{0,3} 6-\log_{0,3} 12$; 4) $\log_2(x^2+4x+3)=3$;
5) $\log_5(x+1)+\log_5(2x+3)=1$; 6) $\log_a x=\log_a 5+\log_a 3$;
7) $\lg^2 x=1$.

Б. 1) $\log_5^2 x-\log_{\sqrt{5}} x-3=0$; 2) $\log_a x=\log_{\sqrt{a}} 2+\log_{a^{-1}} 3$;

3) $\log_5^2 x+\log_{0,2} x=2$; 4) $x^{\lg x}=10\,000$; 5) $x^{\log_2 x-2}=8$;

6) $\frac{1}{\lg x-6}+\frac{5}{\lg x+2}=1$; 7) $\lg(x+6)-0{,}5\lg(2x-3)=2-\lg 25$;

8) $\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)$; 9) $\lg\frac{x+6}{\sqrt{2x+3}}=\lg 4$;

10) $\log_2(3x-1)-\log_2(4-x)=4-\log_2(x-1)$;

11) $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162$; 12) $x^2\log_x 27\cdot\log_9 x=x+4$;

13) $\log_3 x\cdot\log_9 x\log_{27} x\cdot\log_{81} x=\frac{2}{3}$.

В. 1) $\log_2 x+\frac{4}{\log_x 2}=5$; 2) $\sqrt{\lg x}=\lg\sqrt{x}$; 3) $\lg(x^{\lg x})=1$;

4) $2\lg\lg x=\lg(7-2\lg x)-\lg 5$; 5) $\lg x=\sqrt{\frac{(a+c)^{\lg(a-c)}}{(a-c)^{\lg(a+c)}}}$;

6) $\sqrt{2\lg(-x)}=\lg\sqrt{x^2}$; 7) $\log_x 2\cdot\log_{\frac{x}{16}} 2=\log_{\frac{x}{64}} 2$;

8) $(0{,}4)^{\lg x^2+1}=(6{,}25)^{2-\lg x^3}$; 9) $\log_4(\log_2 x)+\log_2(\log_4 x)=2$;

10) $\sqrt{\log_x\sqrt{5x}}\cdot\log_5 x=-1$; 11) $5^{\lg x}=50-x^{\lg 5}$;

12) $\log_x(125x)\cdot\log_{25}^2 x=1$; 13) $\log_8(x+2)^3\cdot\log_{2x} 2=1$;

14) $4^{\lg x}-32+x^{\lg 4}=0$.

Ответы. А. 1) 12; 2) 4; 3) 3; 4) -5 и 1; 5) нет корней; 6) 15; 7) 0,1 и 10. Б. 1) 0,2 и 125; 2) $\frac{4}{3}$; 3) 0,2; 25; 4) 0,01; 100; 5) 0,5 и 8; 6) 100 и 10^8; 7) 6; 14; 8) 1; 2; 9) 6; 14; 10) 3; 11) $\frac{1}{9}$ и 9; 12) 2; 13) $\frac{1}{9}$ и 9. В. 1) 2; 2) 1; 10^4; 3) 0,1; 10; 4) 10; 5) 10; 6) -100; -1; 7) 4; 8; 8) 10; 10^5; 9) 16; 10) $\frac{1}{25}$; 11) 100; 12) 5 и 5^{-4}; 13) 2; 14) 100.

§ 2. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Неравенство, содержащее переменную только под знаком логарифма, называется логарифмическим. Например, неравенства вида $\log_a f(x)>\log_a \varphi(x)$, $\log_a f(x)<\log_a \varphi(x)$ при $a>0$, $a\neq 1$ являются логарифмическими.

2. Неравенство $\log_a f(x)>\log_a \varphi(x)$ равносильно системе $f(x)>\varphi(x)>0$ при $a\in(1;+\infty)$ и системе $0<f(x)<\varphi(x)$ при $a\in(0;1)$.

3. При решении логарифмических неравенств следует учитывать общие свойства неравенств, свойство монотонности логарифмической функции и область ее определения.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Решить неравенство:

1) $\log_{0,5}\frac{5x-3}{x+2}>1$; 2) $\log_{20}x+\log_{20}(x+1)\leqslant\log_{20}(2x+6)$;

3) $\log_2(2^x-1)\cdot\log_2(2^{x+1}-2)<2$; 4) $\log_{0,3}\log_6\frac{x^2+x}{x+4}<0$;

5) $\log_{x^2}(3-2x)>1$.

Решение. 1) $\log_{0,5}\frac{5x-3}{x+2}>1$. Выразив правую часть неравенства через логарифм, получим:

$$\log_{0,5}\frac{5x-3}{x+2}>\log_{0,5}0,5.$$

Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}\frac{5x-3}{x+2}>0,\\ \frac{5x-3}{x+2}<0,5,\end{cases}$$

первое неравенство которой характеризует область определения логарифмической функции, а второе — ее убывание при основании $0<0,5<1$. Далее имеем:

$$\begin{cases}\frac{5x-3}{x+2}>0,\\ \frac{5x-3-0,5(x+2)}{x+2}<0;\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{5x-3}{x+2}>0,\\ \frac{4,5x-4}{x+2}<0.\end{cases}$$

Решение последней системы приведено на рисунке 227. В результате получаем ответ: $\left(\frac{3}{5};\ \frac{8}{9}\right)$.

2) $\log_{20}x+\log_{20}(x+1)\leqslant\log_{20}(2x+6)$. Имеем:

$$\begin{cases}x>0,\\ x+1>0,\\ 2x+6>0,\\ \log_{20}x(x+1)\leqslant\log_{20}(2x+6);\end{cases}\quad \begin{cases}x>0,\\ x(x+1)\leqslant 2x+6;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x>0,\\ x^2-x-6\leqslant 0;\end{cases}\quad \begin{cases}x>0,\\ (x-3)(x+2)\leqslant 0.\end{cases}$$

Ответ. (0; 3].

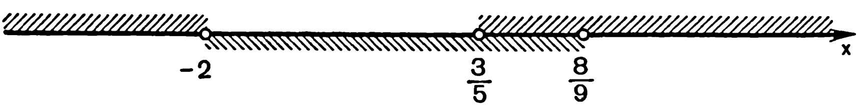


Рис. 227

3) $\log_2(2^x-1)\cdot\log_2(2^{x+1}-2)<2$. Так как $2^{x+1}-2=2(2^x-1)$, то данное неравенство можно записать в виде

$$\log_2(2^x-1)(\log_2 2+\log_2(2^x-1))<2;$$
$$\log_2(2^x-1)(1+\log_2(2^x-1))<2.$$

Полагая $\log_2(2^x-1)=y$, получим неравенство $y(1+y)<2$, или $y^2+y-2<0$, откуда $-2<y<1$. Возвращаясь к переменной x, получим $2^{-2}<2^x-1<2$, $\frac{5}{4}<2^x<3$, $\log_2\left(\frac{5}{4}\right)<x<$ $<\log_2 3$.

Итак, решением данного неравенства служит интервал $(\log_2\frac{5}{4};\ \log_2 3)$.

4) $\log_{0,3}\log_6\frac{x^2+x}{x+4}<0$. Имеем:

$$\begin{cases}\log_6\frac{x^2+x}{x+4}>0,\\ \frac{x^2+x}{x+4}>0,\\ \log_6\frac{x^2+x}{x+4}>1;\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{x^2+x}{x+4}>0,\\ \log_6\frac{x^2+x}{x+4}>1;\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{x^2+x}{x+4}>0,\\ \frac{x^2+x}{x+4}>6;\end{cases}$$

$$\frac{x^2+x}{x+4}>6,\quad \frac{x^2-5x-24}{x+4}>0,\quad \frac{(x+3)(x-8)}{x+4}>0.$$

Ответ. $(-4;\ -3)\cup(8;\ +\infty)$.

5) $\log_{x^2}(3-2x)>1$. Перепишем неравенство в виде $\log_{x^2}(3-2x)>\log_{x^2}x^2$. Здесь нужно рассмотреть два случая: $x^2>1$ и $0<x^2<1$. В первом случае, освободившись от логарифмов, получим, что $3-2x>x^2$, а во втором, что $3-2x<x^2$. Таким образом, задача сводится к решению совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases}x^2>1,\\ 3-2x>0,\\ 3-2x>x^2\end{cases}(*)\quad \text{и}\quad \begin{cases}0<x^2<1,\\ 3-2x>0,\\ 3-2x<x^2.\end{cases}(**)$$

Для системы (*) имеем:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>1,\\ x<-1,\end{array}\right.\\ x<1{,}5,\\ x^2+2x-3<0;\end{cases}\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>1,\\ x<-1,\end{array}\right.\\ x<1{,}5,\\ -3<x<1,\end{cases}$$

т. е. ее решением служит интервал $(-3;\ -1)$.

Для системы (**) имеем:

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}-1<x<0,\\0<x<1,\end{array}\right.\\x<1{,}5,\\x^2+2x-3>0;\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}-1<x<0,\\0<x<1,\end{array}\right.\\x<1{,}5,\\\left[\begin{array}{l}x<-3,\\x>1,\end{array}\right.\end{array}\right.$$

т. е. множество ее решений является пустым. Итак, $(-3;\ -1)$ — решение данного неравенства.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Решите неравенство:

А. 1) $\log_3(12-2x-x^2)>2$; 2) $\log_4(x+1)+\log_4 x<\log_4 2$;

3) $\log_5(x-3)<2$; 4) $\log_{0,5}(2x-4)>-1$; 5) $\log_4(6x-8)>2$.

Б. 1) $\log_{6,7}\frac{x}{x+3}>0$; 2) $\log_{0,4}\frac{x^2-x}{x^2+1}<0$; 3) $\log_3 2x^2<\log_3(7x-3)$;

4) $\log_{0,5}x^2>\log_{0,5}3x$; 5) $3^{\log_2\frac{3x-1}{x}}<1$; 6) $\frac{\log_3(x-1)}{2x-1}<0$;

7) $(5x-2)\log_{0,(3)}x<0$; 8) $\log_5(x^2-4x-3)<0$.

В. 1) $\log_{0,5}\log_8\frac{x^2+8x}{x-3}<0$; 2) $\log_{2x+3}x^2<1$; 3) $x^{\lg x}<100x$;

4) $\log_2\sin(2x-30°)>-1$; 5) $\log_{0,5}x>\log_{0,(3)}x$;

6) $\log_{0,(3)}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}<0$.

Ответы. А. 1) $(-3;\ 1)$; 2) $(0;\ 1)$; 3) $(3;\ 28)$; 4) $(2;\ 3)$; 5) $(4;\ \infty)$. **Б.** 1) $(-\infty;\ -3)$; 2) $(-\infty;\ -1)$; 3) $(0{,}5;\ 3)$; 4) $(0;\ 3)$; 5) $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right)$; 6) $(1;\ 2)$; 7) $(0;\ 0{,}4)\cup(1;\ \infty)$; 8) $(2+\sqrt{7};\ 2+\sqrt{8})\cup(2-\sqrt{8};\ 2-\sqrt{7})$. **В.** 1) $(3;\ \infty)$; 2) $(-1{,}5;\ 3)$, $x\neq-1$, $x\neq0$; 3) $(0{,}1;\ 100)$; 4) $\left(\pi k+\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$; 5) $(0;\ 1)$; 6) $(-0{,}5;\ 2)$.

§ 3. СИСТЕМЫ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Известные способы решения систем алгебраических уравнений и неравенств применяются и к решению систем, содержащих логарифмические уравнения и неравенства.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^{\lg y}=100, \\ \lg_y x=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{\log_x 0,5}{\log_x 0,5+\log_y 0,5}=\dfrac{1}{\log_y 0,125}, \\ x+y=1. \end{cases}$

Решение. 1) Логарифмируя первое уравнение при условиях $x>0$, $y>0$, $y\neq 1$, получим $\lg y\cdot\lg x=2$. Из второго уравнения находим $y^2=x$.

Решаем теперь полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} x=y^2, \\ \lg y\cdot\lg x=2; \end{cases} \begin{cases} x=y^2, \\ \lg y\cdot\lg y^2=2; \end{cases} \begin{cases} x=y^2, \\ 2\lg^2 y=2. \end{cases}$$

Последняя система распадается на две:

а) $\begin{cases} x=y^2, \\ \lg y=1; \end{cases} \begin{cases} x_1=100, \\ y_1=10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x=y^2, \\ \lg y=-1; \end{cases} \begin{cases} x_2=0,01, \\ y_2=0,1. \end{cases}$

Ответ. (100; 10); (0,01; 0,1).

2) Выразив из второго уравнения одно из неизвестных через другое, можно свести систему к одному уравнению. Однако проще первое уравнение заменить алгебраическим уравнением. Преобразуя каждый логарифм к основанию 0,5, имеем:

$$\frac{\dfrac{1}{\log_{0,5}x}}{\dfrac{1}{\log_{0,5}x}+\dfrac{1}{\log_{0,5}y}}=\frac{1}{3}\log_{0,5} y, \quad \text{или} \quad \frac{\log_{0,5} y}{\log_{0,5} xy}=\frac{\log_{0,5} y}{3}.$$

Так как $\log_{0,5}y\neq 0$ $(y\neq 1)$, то последнее уравнение равносильно уравнению $\log_{0,5}xy=3$, или $xy=0,125$ при условии $x>0$ и $y>0$.

Итак, данная система равносильна системе $\begin{cases} xy=0,125, \\ x+y=1. \end{cases}$

Решая ее, находим $x_1=0,5(1+\sqrt{0,5})$, $y_1=0,5(1-\sqrt{0,5})$ и $x_2=0,5(1-\sqrt{0,5})$, $y_2=0,5(1+\sqrt{0,5})$.

2. Решить неравенство $\dfrac{\lg 7-\lg(-8x-x^2)}{\lg(x+3)}>0$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \lg 7-\lg(-8x-x^2)>0, \\ \lg(x+3)>0; \end{cases} (*) \qquad \begin{cases} \lg 7-\lg(-8x-x^2)<0, \\ \lg(x+3)<0. \end{cases} (**)$$

Решаем систему (*):

$$\begin{cases} \lg 7>\lg(-8x-x^2), \\ \lg(x+3)>\lg 1, \\ -8x-x^2>0, \\ x+3>0; \end{cases} \begin{cases} 7>-8x-x^2, \\ x+3>1, \\ 8x+x^2<0, \\ x>-3; \end{cases} \begin{cases} (x+7)(x+1)>0, \\ x>-2, \\ x(x+8)<0. \end{cases}$$

Рис. 228

Рис. 229

Множеством решений системы (*) служит промежуток $(-1;\ 0)$ (рис. 228).

Решаем теперь систему (**):

$$\begin{cases} \lg 7<\lg(-8x-x^2), \\ \lg(x+3)<\lg 1, \\ -8x-x^2>0, \\ x+3>0; \end{cases} \quad \begin{cases} 7<-8x-x^2, \\ x+3<1, \\ 8x+x^2<0, \\ x+3>0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+7)(x+1)<0, \\ -3<x<-2, \\ x(x+8)<0. \end{cases}$$

Множеством решений системы (**) служит промежуток $(-3;\ -2)$; (рис. 229). Таким образом, получаем ответ: $(-3;\ -2)\cup(-1;\ 0)$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Решите систему уравнений, неравенств:

Б. 1) $\begin{cases} 2^{\log_2(3x-4)}=8, \\ \log_9(x^2-y^2)-\log_9(x+y)=0{,}5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3^{\log_3(3y-x+24)}=27, \\ \log_2(2x-2y)-\log_2(5-y^2)=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 0{,}5^{x-2}\cdot 4^{y+1}=16^{0{,}75}, \\ \log_2(2x-y)^2=2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} (x-1)\lg 2+\lg(2^{x+1}+1)<\lg(7\cdot 2^x+12), \\ \log_x(x+2)>2. \end{cases}$

Ответы. 1) $(4;\ 1)$; 2) $(3;\ 2)$; 3) $\left(-\frac{5}{3};\ -\frac{4}{3}\right)$, $(1;\ 0)$; 4) $(1;\ 2)$.

§ 4. ПРОИЗВОДНЫЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ И ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИЙ. ЧИСЛО *e*

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Приближенное значение числа e таково: $e\approx 2{,}7$.
2. Показательная функция $y=e^x$ в точке 0 имеет производную, равную 1.
3. Показательная функция e^x дифференцируема в каждой точке, причем $(e^x)'=e^x$.
4. Логарифм с основанием e называется натуральным логарифмом и обозначается ln.

5. Формулы дифференцирования.

При условии $u=y(x)$	Номер формулы	При условии $u=x$	Номер формулы
$(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'$	(1)	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	(2)
$(\log_a u)'=\frac{1}{u\ln a}\cdot u'$	(3)	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	(4)
$(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$	(5)	$(a^x)'=a^x\ln a$	(6)
$(e^u)'=e^u\cdot u'$	(7)	$(e^x)'=e^x$	(8)

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Найти производную функции:

1) $y=x+\ln x$; 2) $y=5\ln x$; 3) $y=\ln(ax^3+c)$; 4) $y=\lg(5x^2+1)$; 5) $y=\ln\sqrt{2x}$; 6) $y=\ln^2(x^2-1)$; 7) $y=2\cdot 5^x+3e^x$; 8) $y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$; 9) $y=3^{2x^2}$; 10) $y=e^{2x}$; 11) $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

Решение.

1) $y'=(x+\ln x)'=1+\frac{1}{x}$;

2) $y'=(5\ln x)'=\frac{5}{x}$;

3) $y'=(\ln(ax^2+c))'=\frac{1}{ax^2+c}(ax^2+c)'=\frac{1}{ax^2+c}\cdot 2ax=\frac{2xa}{ax^2+c}$;

4) $y'=(\lg(5x^2+1))'=\frac{1}{(5x^2+1)\ln 10}(5x^2+1)'=\frac{10x}{(5x^2+1)\ln 10}$;

5) $y'=(\ln\sqrt{2x})'=\left(\frac{1}{2}\ln(2x)\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x}\cdot(2x)'=\frac{1}{2x}$;

6) $y'=(\ln^2(x^2-1))'=2\ln(x^2-1)(\ln(x^2-1))'=2\ln(x^2-1)\times$ $\times\frac{1}{x^2-1}(x^2-1)'=2\ln(x^2-1)\frac{1}{x^2-1}\cdot 2x=\frac{4x\ln(x^2-1)}{x^2-1}$;

7) $y'=(2\cdot 5^x+3e^x)'=2\cdot 5^x\ln 5+3e^x$;

8) $y'=\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)'=\frac{(e^x+1)'(e^x-1)-(e^x-1)'(e^x+1)}{(e^x-1)^2}=-\frac{2e^x}{(e^x-1)^2}$;

9) $y'=(3^{2x^2})'=3^{2x^2}\ln 3\cdot(2x^2)'=4x\cdot 3^{2x^2}\ln 3$;

10) $y'=(e^{2x})'=e^{2x}(2x)'=2e^{2x}$;

11) $y'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)'=\frac{(e^x-e^{-x})'(e^x+e^{-x})-(e^x+e^{-x})'(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}=$ $=\frac{4e^0}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$.

2. Под каким углом кривая $y=\ln x$ пересекает ось Ox?

Решение. Найдем точку пересечения логарифмической кривой с осью Ox. В этой точке $\ln x=0$, откуда $x=1$. Вычислим угловой коэффициент касательной в точке $x=1$: $y'=(\ln x)'=$ $=\frac{1}{x}$, $y'(1)=\frac{1}{1}=1$.

Найдем угол, образованный касательной в точке пересечения кривой $y=\ln x$ с осью Ox: $\operatorname{tg}\alpha=1$, $\alpha=45°$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Найдите производные:

А. 1) $y=3\ln x-x^2$. Найдите $y'(1)$; 2) $\ln x+x^3$, найдите $y'(-1)$; 3) $y=x^2\ln x$; 4) $y=(1-\ln x)x$; 5) $y=x^3-3\ln x$, найдите $y'(3)$;

6) $y=\frac{\ln x-2}{\ln x}$; 7) $y=\frac{\ln x+1}{\ln x}$; 8) $y=\ln 3x$; 9) $y=\ln 10x$;

10) $y=\ln x\cdot e^x$; 11) $y=x^2e^x$, найдите $y'(1)$.

Б. 1) $y=\ln(2x^2-3)$; 2) $y=\ln\frac{a-x}{a+x}$; 3) $y=\lg(2x+1)$; 4) $y=\ln\sqrt{2x-1}$; 5) $y=\ln\sqrt{x^2-a^2}$; 6) $y=\lg\sqrt{x^2+4}$;

7) $\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

8) $y=\ln\sin x$; 9) $y=\ln\cos x$; 10) $y=\ln\operatorname{tg}x$; 11) $y=\ln\operatorname{ctg}x$;

12) $y=\ln\sin\frac{x}{3}$; вычислите $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)$; 13) $y=e^x-xe^x$;

14) $y=3^xe^x$; 15) $y=\frac{e^x}{2^x}$; 16) $y=5\ln x+e^x$, найдите $y'(1)$.

В. 1) $y=\ln\cos^2 x$; 2) $y=\ln\sqrt{\frac{1-4x}{1+4x}}$; 3) $y=\ln(x-\sqrt{1+x^2})$;

4) $\ln^3 3x=y$; 5) $y=\ln^2(2x+1)$; 6) $y=\ln^2\sqrt{\sin x}$;

7) $y=\frac{5-e^x}{2+e^x}$; 8) $y=\frac{1-e^x}{e^x}$; 9) $y=5^{x^3}$;

10) $y=2^{\sqrt{x}}$; 11) $y=3^{\ln x}$; 12) $y=2^{-\cos x}$; 13) $y=e^{-x^2}$;
14) $y=e^{\sqrt{x}}$; 15) $y=e^{\ln x}$; 16) $y=e^{\sin x}$, найдите $y'(\pi)$.

2. Найдите, под каким углом кривая $y=\lg x$ пересекает ось Ox.

3. Вычислите острый угол, образованный при пересечении кривой $y=\lg x$ и прямой $y=1$.

Ответы. **1. А.** 1) 1; 2) 2; 3) $x(2\ln x+1)$; 4) $-\ln x$; 5) 26; 6) $\frac{2}{x\ln^2 x}$; 7) $\frac{1}{x\ln^2 x}$; 8) $\frac{1}{x}$; 9) $\frac{1}{x}$; 10) $e^x\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)$; 11) $3e$.
Б. 1) $\frac{4x}{2x^2-3}$; 2) $\frac{2a}{x^2-a^2}$; 3) $\frac{2}{(2x+1)\ln 10}$; 4) $\frac{1}{2x-1}$; 5) $\frac{x}{x^2-a^2}$;

6) $\frac{x}{(x^2+4)\ln 10}$; 7) $\frac{1}{x^2-1}$; 8) $\operatorname{ctg}x$; 9) $-\operatorname{tg}x$; 10) $\frac{2}{\sin 2x}$;

11) $-\frac{2}{\sin 2x}$; 12) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 13) $-xe^x$; 14) $3^xe^x(\ln 3+1)$;

15) $\frac{e^x(1-\ln 2)}{2^x}$; 16) $\frac{5}{x}+e^x$. **В.** 1) $-2\operatorname{tg}x$; 2) $\frac{4}{16x^2-1}$;

3) $-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; 4) $\frac{3\ln^2 3x}{x}$; 5) $\frac{4\ln(2x+1)}{2x+1}$; 6) $\operatorname{ctg}x\ln\sqrt{\sin x}$;

7) $-\frac{7e^x}{(e^x+2)^2}$; 8) $-\frac{1}{e^x}$; 9) $3x^2 \cdot 5^{x^3} \ln 5$; 10) $\frac{2^{\sqrt{x}} \ln 2}{2\sqrt{x}}$; 11) $\frac{3^{\ln x} \ln 3}{x}$;

12) $2^{-\cos x} \cdot \sin x \ln 2$; 13) $-2xe^{-x^2}$; 14) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$; 15) 1; 16) -1.

Контрольные вопросы

1. Какие уравнения называются логарифмическими?
2. Является ли уравнение $\lg 5 + x \lg 6 = 3$ логарифмическим?
3. Существует ли хотя бы одно значение x, при котором верно равенство $\lg(x+3) = \lg x + \lg 3$?
4. Запишите область определения логарифмического уравнения $\log_a f(x) = \log_b \varphi(x)$ в виде системы неравенств.
5. Как решается уравнение, содержащее неизвестное и в основании, и в показателе степени, например $x^{\lg x} = 10$?
6. Нужна ли проверка полученных корней при решении логарифмических уравнений? Почему?
7. Какие неравенства называются логарифмическими?
8. Чем следует руководствоваться при решении логарифмических неравенств?
9. Можно ли утверждать, что неравенство $\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$ равносильно системе: а) $f(x) > \varphi(x) > 0$ при $a \in (1; \infty)$; б) $0 < f(x) < \varphi(x)$ при $a \in (0; 1)$? Почему?

ГЛАВА XXVII

§ 1. ПОНЯТИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ ФУНКЦИИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Под дифференцированием функции $f(x)$ мы понимаем нахождение ее производной $f'(x)$.

Например, если $f(x)=\cos 2x$, то $f'(x)=-\sin 2x\cdot(2x)'=$ $=-2\sin 2x$ для всех $x\in \boldsymbol{R}$.

2. Нахождение функции $f(x)$ по заданной ее производной $f'(x)$ называют операцией интегрирования.

3. Таким образом, операция интегрирования обратна операции дифференцирования. Следовательно, операция интегрирования состоит в том, что по заданной производной $f'(x)$ находят (восстанавливают) функцию $f(x)$.

Например, пусть $f'(x)=4x^3$. Следует найти $f(x)$. Опираясь на правило дифференцирования, нетрудно увидеть, что $f(x)=x^4$. Действительно, $(x^4)'=4x^3$. Легко догадаться, что $f(x)$ находится неоднозначно.

В качестве $f(x)$ могут быть использованы и такие функции, как $f(x)=x^4+3$, $f(x)=x^4-6$, $f(x)=x^4+\sqrt[3]{8}$ и др., так как производная каждой из данных функций равна $4x^3$. Все эти функции отличаются друг от друга только постоянным слагаемым. Общее решение задачи можно записать в виде $f(x)=x^4+C$, где C — произвольное действительное число. Любую из найденных функций $f(x)$ называют первообразной для функции $f'(x)=4x^3$.

4. Определение. Функция F называется первообразной для функции f на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x)=f(x)$.

Так, функция $F(x)=x^4$ есть первообразная для функции $f(x)=4x^3$ на промежутке $(-\infty;\ \infty)$, так как для всех $x\in\boldsymbol{R}$ справедливо равенство $F'(x)=(x^4)'=4x^3$.

5. Множество всех первообразных для функции $f(x)$ можно представить в виде $F(x)+C$, где $C\in\boldsymbol{R}$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Доказать, что функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если:

1) $F(x)=3x^4$, $f(x)=12x^3$, $(-\infty;\ \infty)$;

2) $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, $f(x)=\sqrt{x}$, $[0;\ \infty)$;

3) $F(x)=3\operatorname{tg} x$, $f(x)=\frac{3}{\cos^2 x}$, $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$;

4) $F(x)=0{,}3x^{-3}$, $f(x)=-0{,}9x^{-4}$, $(-\infty;\ 0)$;

5) $F(x)=|x|$, $f(x)=1$, $(0;\ \infty)$.

Решение. 1) Так как $F(x)=3x^4$, то $F'(x)=(3x^4)'=12x^3=f(x)$ для всех $x\in\boldsymbol{R}$, что и требовалось доказать.

2) Так как $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}=\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}$, то $F'(x)=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{0,5}=x^{0,5}=\sqrt{x}=f(x)$ для всех $x\in[0;\ \infty)$, что и требовалось доказать.

3) Так как $F(x)=3\operatorname{tg} x$, то $F'(x)=(3\operatorname{tg} x)'=\frac{3}{\cos^2 x}=f(x)$ для всех x на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, что и требовалось доказать.

4) Так как $F(x)=0{,}3x^{-3}$, то $F'(x)=(0{,}3x^{-3})'=-3\cdot 0{,}3x^{-4}=-0{,}9x^{-4}=f(x)$ для всех x на промежутке $(-\infty;\ 0)$, что и требовалось доказать.

5) Согласно определению модуля имеем $F(x)=|x|=x$, так как $x\in(0;\ \infty)$. Следовательно, $F'(x)=x'=1=f(x)$, что и требовалось доказать.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Докажите, что функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если:

А. 1) $F(x)=4x^5$, $f(x)=20x^4$, $(-\infty;\ \infty)$;

2) $F(x)=x^5$, $f(x)=5x^4$, $(-\infty;\ \infty)$;

3) $F(x)=0{,}5x^2$, $f(x)=x$, $(-\infty;\ \infty)$;

4) $F(x)=-0{,}4x^{-2}$, $f(x)=0{,}8x^{-3}$, $(0;\ \infty)$;

Б. 1) $F(x)=2\sqrt[3]{x}$, $f(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $(0;\ \infty)$;

2) $F(x)=\sqrt{-x}$, $f(x)=-\frac{1}{2\sqrt{-x}}$, $(-\infty;\ 0)$;

3) $F(x)=1-\sin x$, $f(x)=-\cos x$, $(-\infty;\ \infty)$;

4) $F(x)=2\operatorname{ctg} x$, $f(x)=-\frac{2}{\sin^2 x}$, $(0;\ \pi)$;

5) $F(x)=\operatorname{tg} x-\sqrt{2}$, $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$;

6) $F(x)=4x\sqrt{x}$, $f(x)=6\sqrt{x}$, $(0;\ \infty)$;

7) $F(x)=-\frac{2}{\sqrt{x}}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^3}}$, $(0;\ \infty)$.

В. 1) $F(x)=\frac{2}{\sqrt{-x}}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{|x|^3}}$, $(-\infty;\ 0)$;

2) $F(x)=\sin 3x$, $f(x)=3\cos 3x$, $(-\infty;\ \infty)$;

3) $F(x)=2\sin 2x-3$, $f(x)=4\cos 2x$, $(-\infty;\ \infty)$;

4) $F(x)=\ln(-x)$, $f(x)=\frac{1}{x}$, $(-\infty;\ 0)$;

5) $F(x)=\log_2 x$, $f(x)=\frac{1}{x\ln 2}$, $(0;\ \infty)$.

2. Является ли функция $\frac{1}{x}$ первообразной для функции $-\frac{1}{x^2}$ на промежутке: 1) $(0;\ 2)$; 2) $(-2;\ 2)$?

3. Найдите одну из первообразных для каждой из следующих функций: 1) $f(x)=4$; 2) $f(x)=-1$; 3) $f(x)=x^3$; 4) $f(x)=\cos x$; 5) $f(x)=x^2+3\cos x$.

Ответы. 2. 1) Является; 2) не является. 3. 1) $4x$; 2) $-x$; 3) $\frac{1}{4}x^4$; 4) $\sin x$; 5) $\frac{x^3}{3}+3\sin x$.

§ 2. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ПЕРВООБРАЗНОЙ ФУНКЦИИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Теорема. Если функция F есть первообразная для функции f на промежутке X, то при любой постоянной C функция $F(x)+C$ (1) также является первообразной для функции f на промежутке X. Любая первообразная функции f на промежутке X может быть записана в виде $F(x)+C$.

2. Какую бы постоянную в формуле (1) ни подставить вместо C, получится первообразная для функции f. Выражение $F(x)+C$ называют общим видом первообразных для функции f.

3. Какую бы первообразную для функции f ни взять, ее можно получить из формулы (1) при соответствующем подборе постоянной C.

4. Геометрически основное свойство первообразных можно интерпретировать так: графики всех первообразных данной функции $f(x)$ получаются из любого из них путем параллельного переноса вдоль оси Oy (рис. 230).

5. Таблица первообразных для некоторых функций:

Функция	Общий вид первообразных
k (постоянная)	$kx+C$
x^{α} ($\alpha\in R$, $\alpha\neq-1$)	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+C$
$\sin x$	$-\cos x+C$
$\cos x$	$\sin x+C$

Функция	Общий вид первообразных
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$
e^x	$e^x + C$
a^x, $a > 0$, $a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

1. Для функции $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$.

Решение. Общим видом первообразных для f является функция $F(x) = \operatorname{tg} x + C$. Решая уравнение $0 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) + C$ относительно C, находим $C = -1$. Таким образом, $\operatorname{tg} x - 1$ есть искомая первообразная.

2. Для функции $\frac{1}{\sqrt{x}}$ найти первообразную, график которой проходит через точку $A(9; -2)$.

Решение. Любая первообразная функция $\frac{1}{\sqrt{x}}$ записывается в виде $2\sqrt{x} + C$. Графики этих первообразных изображены на рисунке 231.

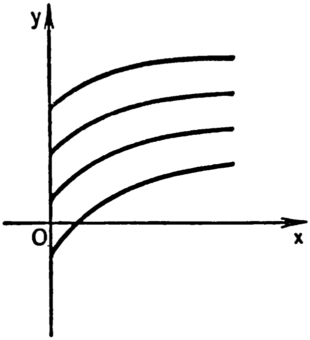


Рис. 230

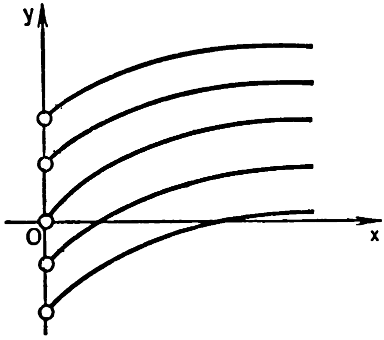


Рис. 231

Координаты точки $A(9; -2)$ графика искомой первообразной должны удовлетворять уравнению $2\sqrt{9}+C=-2$. Отсюда находим, что $C=-2\sqrt{9}-2=-8$. Следовательно, искомая первообразная такова: $F(x)=2\sqrt{x}-8$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Найдите для функции f первообразную, график которой проходит через заданную точку M:

А. 1) $y=x^3$, $M(2; 1)$; 2) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $M(4; 4)$; 3) $y=\sqrt{x}$, $M(9; 10)$.

Б. 1) $y=\cos x$, $M(90°; 0)$; 2) $y=\frac{1}{x^3}$, $M(-0{,}5; 3)$.

Ответы. **А.** 1) $\frac{x^4}{4}-3$; 2) $2\sqrt{x}$; 3) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}-8$. **Б.** 1) $\sin x-1$; 2) $-\frac{1}{2x^2}+5$.

§ 3. ТРИ ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ПЕРВООБРАЗНЫХ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Если F есть первообразная для f, а G — первообразная для g, то $F+G$ есть первообразная для $f+g$, т. е. $(F+G)'=f+g$.

2. Если F есть первообразная для f, а k — постоянная, то kF есть первообразная для kf, т. е. $(kF)'=kf$.

3. Если $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, а k и b — постоянные, $k\neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ есть первообразная для функции $f(kx+b)$, т. е. $\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)'=f(kx+b)$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Найти общий вид первообразных для функции:

1) $y=x^3+\frac{1}{x^2}$; 2) $y=\sin(3x-4)$; 3) $y=\frac{3}{\cos^2 5x}$; 4) $y=2\sin\frac{x}{5}+$ $+3\cos 6x$.

Решение. 1) Так как для функции x^3 одна из первообразных есть $\frac{x^4}{4}$, а для функции $\frac{1}{x^2}$ одной из первообразных является функция $-\frac{1}{x}$, то по правилу 1 находим, что для функции $x^3+\frac{1}{x^2}$ одной из первообразных будет $\frac{x^4}{4}-\frac{1}{x}$, а общий вид первообразных будет $\frac{x^4}{4}-\frac{1}{x}+C$.

2) Одна из первообразных $f(x)$ есть функция $F_1(x)=$

$=-\frac{1}{3}\cos(3x-4)$. А множество всех первообразных данной функции имеет вид $F(x)=-\frac{1}{3}\cos(3x-4)+C$.

3) $F(x)=3\cdot\frac{1}{5}\operatorname{tg}5x+C=\frac{3}{5}\operatorname{tg}5x+C$.

4) $F(x)=-2\cdot5\cos\frac{x}{5}+3\cdot\frac{1}{6}\sin6x+C=-10\cos\frac{x}{5}+$ $+\frac{1}{2}\sin6x+C$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Найдите множество первообразных функции:

А. 1) $y=-7x+4$; 2) $y=3x^2+4$; 3) $y=2x^2+3x-8$; 4) $y=ax+b$.

Б. 1) $y=ax^2+bx+c$; 2) $y=ax^3+bx^2+cx+k$; 3) $y=\frac{1}{x^2}-$ $-4\sin x$; 4) $y=1-\cos3x$; 5) $y=8(11-3x)^5$; 6) $y=x^2+\sqrt{x}$.

В. 1) $y=\frac{2}{\sin^2 3x}$; 2) $y=\frac{3}{\cos^2 5x}$; 3) $y=7\sin\frac{x}{3}+\frac{2}{\cos^2 4x}$;

4) $y=\frac{1}{\sqrt{3x-2}}$; 5) $y=\frac{5}{\sqrt{2x+7}}$; 6) $y=\frac{6}{(5x-7)^3}$;

7) $y=e^{2x-3}$; 8) $y=2^{0,5x+1}$; 9) $y=\frac{2}{4x-1}$.

Ответы. А. 1) $-\frac{7}{2}x^2+4x+C$; 2) x^3+4x+C; 3) $\frac{2}{3}x^3+$ $+\frac{3}{2}x^2-8x+C$; 4) $\frac{ax^2}{2}+bx+C$. Б. 1) $\frac{ax^3}{3}+\frac{b}{2}x^2+cx+k$; 2) $\frac{ax^4}{4}+\frac{bx^3}{3}+\frac{c}{2}x^2+kx+H$; 3) $-\frac{1}{x}+4\cos x+C$; 4) $x-\frac{1}{3}\sin3x+$ $+C$; 5) $-\frac{4}{9}(11-3x)^6+C$; 6) $\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.

В. 1) $-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}3x+C$; 2) $\frac{3}{5}\operatorname{tg}5x+C$; 3) $-21\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{tg}4x+C$; 4) $\frac{2}{3}\sqrt{3x-2}+C$; 5) $\sqrt{2x+7}+C$; 6) $-\frac{3}{5(5x-7)^2}+C$; 7) $0,5e^{2x-3}+$ $+C$; 8) $\frac{2^{0,5x+2}}{\ln 2}+C$; 9) $0,5\ln(4x-1)+C$.

§ 4. КРИВОЛИНЕЙНАЯ ТРАПЕЦИЯ И ЕЕ ПЛОЩАДЬ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком неотрицательной и непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции f, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$.

2. Теорема. Пусть f — непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a; b]$ функция, а S — площадь соответствующей криво-

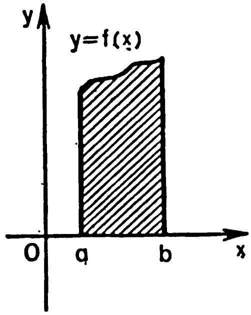


Рис. 232

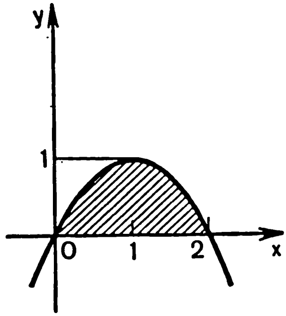


Рис. 233

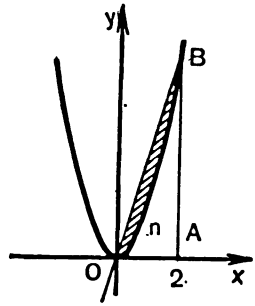


Рис. 234

линейной трапеции (рис. 232). Если F есть первообразная для f на интервале, содержащем отрезок $[a; b]$, то $S=F(b)-F(a)$ (1).

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=2x-x^2$ и $y=0$ (рис. 233); 2) $y=x^2$ и $y=2x$ (рис. 234);

3) $y=\frac{1}{\cos^2 x}$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$; 4) $y=\cos x$, $y=0$, $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$;

5) $y=\frac{1}{x}$, $x=1$, $x=2$, $y=0$.

Решение. 1) Для функции $y=2x-x^2$ первообразная есть $F(x)=x^2-\frac{1}{3}x^3$. Найдем точки пересечения кривой $2x-x^2$ с осью абсцисс: $2x-x^2=0$, $x=0$, $x=2$, т. е. (0; 0) и (2; 0). Значит, $a=0$, $b=2$.

Искомую площадь находим по формуле (1):

$$S=F(b)-F(a)=F(2)-F(0)=4-\frac{8}{3}-0+0=\frac{4}{3}.$$

2) Для функции $y=x^2$ первообразная $F(x)=\frac{x^3}{3}$, а для функции $y=2x$ первообразная $P(x)=x^2$.

Найдем координаты точек пересечения заданных линий:

$$\begin{cases} y=x^2, \\ y=2x; \end{cases} \begin{cases} x^2=2x, \\ y=2x; \end{cases} \begin{cases} x(x-2)=0, \\ y=2x; \end{cases} \begin{cases} x=0, \\ y=0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x=2, \\ y=4. \end{cases}$$

Искомая площадь равна разности площадей треугольника OAB и криволинейной трапеции $OnBA$, т. е. $S=S_{OAB}-S_{OnBA}$. Так как

$$S_{OAB}=P(2)-P(0)=4-0=4,\ S_{OnBA}=F(2)-F(0)=$$
$$=\frac{2^3}{3}-0=\frac{8}{3},\ \text{то}\ S=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}.$$

3) На промежутке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ значения $f(x)$ положительны. Одна из первообразных для функции $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ есть $F(x)=\operatorname{tg} x$, следовательно,

$$S=F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F(0)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg} 0=1.$$

4) Криволинейная трапеция изображена на рисунке 235.

Вычислим площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=-\cos x$, $y=0$, $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$.

Одна из первообразных функции $y=-\cos x$ есть $F(x)=-\sin x$.

$$S=F\left(\frac{3\pi}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\left(\sin\frac{3\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right)=2.$$

5) Криволинейная трапеция изображена на рисунке 236. Одна из первообразных для функции $y=\frac{1}{x}$ есть $F(x)=\ln x$.

$$S=F(2)-F(1),\ S=\ln 2-\ln 1=\ln 2\approx 0{,}7.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Постройте криволинейную трапецию, ограниченную линиями, и вычислите ее площадь:

А. 1) $y=x^2$, $y=0$, $x=2$; 2) $y=x^3$, $y=0$, $x=2$; 3) $y=x^2$, $y=0$, $x=3$; 4) $y=x^3$, $y=0$, $x=3$; 5) $y=x^2$, $y=0$, $x=-2$; 6) $y=-x^2$, $y=0$, $x=2$.

Б. 1) $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$; 2) $y=-\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=9$; 3) $y=\frac{2}{x}$, $x=1$, $x=3$; 4) $y=\sin x$, $y=0$, $0\leqslant x\leqslant\pi$; 5) $y=\cos x$, $y=0$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$; 6) $y=\frac{1}{x\ln 2}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$; 7) $y=2^x$,

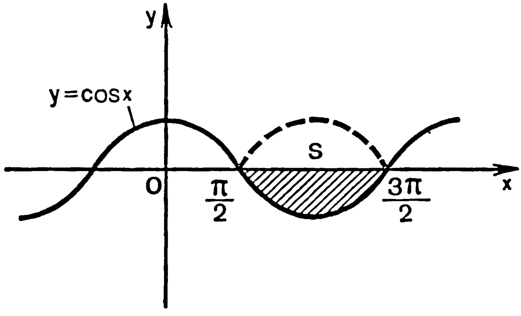


Рис. 235

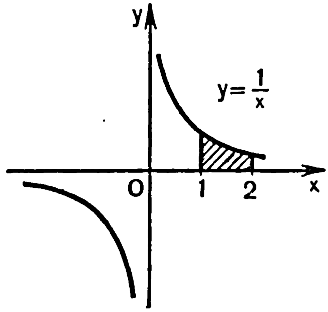


Рис. 236

$y=0$, $x=0$, $x=2$; 8) $y=3^x$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$.

Ответы. А. 1) $\frac{8}{3}$; 2) 4. Б. 1) $\frac{4}{3}$; 3) $2\ln 3$; 4) 2; 5) 3; 6) 2; 7) $\frac{3}{\ln 2}$; 8) $\frac{8}{3\ln 3}$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение первообразной.
2. Первообразная определяется неоднозначно. Как вы это понимаете?
3. Сформулируйте признак постоянства функции.
4. Докажите теорему об основном свойстве первообразных.
5. Что подразумевают под C в записи $F(x)+C$? Имеет ли C произвольное значение или конкретное?
6. Дайте геометрическое истолкование основного свойства первообразных.
7. Для функции f найдите первообразную, график которой проходит через заданную точку: а) $f(x)=x^3$, $M(2; 1)$; б) $f(x)=-2$, $M(3; 5)$; в) $f(x)=\sin x$, $M(0; 3)$; г) $f(x)=x^{-3}$, $M(-0{,}5; 3)$.
8. Какие правила нахождения первообразных вы знаете?
9. Докажите одно из правил нахождения первообразных.
10. Какая фигура называется криволинейной трапецией?
11. Сформулируйте теорему о вычислении площади криволинейной трапеции.
12. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: а) $y=x^2$, $y=0$, $x=3$; б) $y=x^{-2}$, $y=0$, $x=1$, $x=2$; в) $y=\sin x$, $y=0$, $0\leqslant x\leqslant\pi$; г) $y=(x+2)^2$, $y=0$, $x=0$.

ГЛАВА XXVIII

§ 1. ФОРМУЛА НЬЮТОНА — ЛЕЙБНИЦА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Интегралом от a до b функции f называется приращение первообразной F этой функции, т. е. $F(b)-F(a)$ (очевидно, что это приращение не зависит от выбора первообразной).

2. Интеграл от a до b функции f обозначается так: $\int\limits_a^b f(x)dx$ (читается: «Интеграл от a до b эф от икс дэ икс»). Числа a и b называются пределами интегрирования, a — нижним, b — верхним пределом. Знак $\int$ называется знаком интеграла, функция f — подынтегральной функцией, x — переменной интегрирования. Отрезок с концами a и b называется отрезком интегрирования.

3. Заметим, что верхний предел интегрирования необязательно больше нижнего предела; может быть $a>b$, $a=b$.

4. По определению интеграла: если $F'=f$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a). \tag{1}$$

Это равенство называется формулой Ньютона — Лейбница.

5. Для удобства записи приращение первообразной $F(b)-F(a)$ сокращенно обозначается так: $F(x)\Big|_a^b$, т. е. $F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$.

6. Формулу для вычисления площади криволинейной трапеции (см. предыдущую главу, § 4) с помощью интеграла можно записать таким образом:

$$S=\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a). \tag{2}$$

Формула (2) верна для любой функции f, непрерывной на отрезке $[a;\ b]$.

7. Интеграл вида $\int\limits_a^x f(t)\,dt$ называется интегралом с переменным верхним пределом. Этот интеграл есть такая первообразная функции f, которая в точке $x=a$ обращается в нуль, и, следовательно, справедлива формула $\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)'=f(x)$.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_{-1}^{2} x^3\,dx$; 2) $\int\limits_1^2 x^2\,dx$; 3) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx$; 4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx$; 5) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$;

6) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$; 7) $\int\limits_{-2}^{-1}(x^{-3}-x)\,dx$; 8) $\int\limits_1^4 \frac{x\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[10]{x^9}}\,dx$;

9) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{2-3x}$; 10) $\int\limits_{-2}^{1}(x^2-2x+3)\,dx$; 11) $\int\limits_1^3 e^{2x}\,dx$; 12) $\int\limits_{-1}^{3}\frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx$;

13) $\int\limits_1^6 \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$; 14) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx$.

Решение. 1) Для функции $f(x)=x^3$ первообразной служит функция $\frac{x^4}{4}$. Следовательно, по формуле Ньютона — Лейбница получаем:

$$\int\limits_{-1}^{2} x^3\,dx=\frac{x^4}{4}\Bigg|_{-1}^{2}=\frac{2^4}{4}-\frac{(-1)^4}{4}=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}.$$

2) $\int\limits_1^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2=\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}=2\frac{1}{3}$.

3) Пользуясь введенными обозначениями, получим:

$$\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx=-\cos x\,\Bigg|_{\pi}^{2\pi}=-\cos 2\pi-(-\cos\pi)=-1-1=-2.$$

4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x\,\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)-\sin(2\cdot 0)\right)=0{,}5.$

5) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x\,\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=-\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3-\sqrt{3}}{3}.$

6) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\right) -$

$-\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\right) = 0.$

7) $\int\limits_{-2}^{-1} (x^{-3} - x)\, dx = (-0{,}5x^{-2} - 0{,}5x^2) \Big|_{-2}^{-1} =$

$= 0{,}5\left(1 + 1 - \left(\frac{1}{4} + 4\right)\right) = \frac{9}{8}.$

8) $\int\limits_1^4 \frac{x\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[10]{x^9}}\, dx = \int\limits_1^4 x^{1+0{,}4-0{,}9} dx = \int\limits_1^4 x^{0{,}5} dx = \frac{x^{1{,}5}}{1{,}5} \Big|_1^4 = \frac{2}{3}(4^{1{,}5} - 1^{1{,}5}) =$

$= 4\frac{2}{3}.$

9) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{2-3x} = -\frac{1}{3}\ln|2-3x| \Big|_1^2 = -\frac{1}{3}(\ln 4 - \ln 1) = -\frac{2}{3}\ln 2.$

10) $\int\limits_{-2}^{1} (x^2 - 2x + 3)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right) \Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{3} - 1 + 3 -$

$-\left(-\frac{8}{3} - 4 - 6\right) = 15.$

11) $\int\limits_1^3 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_1^3 = \frac{1}{2}(e^{2\cdot 3} - e^{2\cdot 1}) = \frac{e^2}{2}(e^4 - 1).$

12) Для x^p первообразная равна $\frac{x^{p+1}}{p+1} (p \neq -1)$. При $p = -\frac{1}{2}$ получаем: первообразная для функции $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-0{,}5}$ равна $\frac{x^{-0{,}5+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2x^{\frac{1}{2}}$. По правилам нахождения первообразных для функции $\frac{1}{\sqrt{2x+3}} = (2x+3)^{-\frac{1}{2}}$ первообразной является функция

$\frac{1}{2} \cdot 2\,(2x+3)^{0{,}5} = \sqrt{2x+3}$. Следовательно, $\int\limits_{-1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{2x+3}} =$

$= \sqrt{2x+3} \Big|_{-1}^{3} = 2.$

13) $\int\limits_1^6 \frac{dx}{\sqrt{x+3}} = \int\limits_1^6 (x+3)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{(x+3)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \Big|_1^6 = \frac{(x+3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_1^6 =$

$= 2\sqrt{x+3}\Big|_1^6 = 2\,(\sqrt{6+3} - \sqrt{1+3}) = 2\,(3-2) = 2.$

14) Для функции $\cos x$ первообразная равна $\sin x$, поэтому для функции $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ первообразной является $\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$. Следовательно, $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx =$

$$=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{1}{2}\left(\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Вычислите интеграл:

А. 1) $\int\limits_{-1}^{1} x^4dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{2} x^3dx$; 3) $\int\limits_{-\pi}^{0} \sin x dx$; 4) $\int\limits_{-3}^{0} 4x^3dx$.

Б. 1) $\int\limits_{-3}^{2} (2x-3)\,dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{-1} (5-4x)\,dx$; 3) $\int\limits_{-1}^{2} (1-3x^2)\,dx$;

4) $\int\limits_{0}^{2} (3x^2-4x+5)\,dx$.

В. 1) $\int\limits_{1}^{4} (x-2\sqrt{x})\,dx$; 2) $\int\limits_{4}^{9}\left(3x-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx$; 3) $\int\limits_{-2}^{2} x(3-x)\,dx$;

4) $\int\limits_{-1}^{1} (x+1)^2\,dx$; 5) $\int\limits_{0}^{-1} \sqrt{x+1}\,dx$; 6) $\int\limits_{0}^{2} e^{3x}dx$; 7) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x dx$;

8) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x+60°)\,dx$; 9) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos(3x-45°)\,dx$.

Ответы. **А.** 1) 0,4; 2) 0; 3) -2; 4) -81. **Б.** 1) -20; 2) 11; 3) -6. **В.** 2) 89,5; 4) $\frac{8}{3}$; 7) 0; 9) $\frac{\sqrt{2}-2}{6}$.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int\limits_a^b kf(x)\,dx=k\int\limits_a^b f(x)\,dx, \text{ где } k \text{ — постоянная.} \quad (1)$$

2. Интеграл от суммы равен сумме интегралов:

$$\int\limits_a^b (f(x)+q(x))\,dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx+\int\limits_a^b q(x)\,dx. \quad (2)$$

3. Справедлива следующая формула замены переменной:

$$\int_a^b f(kx+p)\,dx=\frac{1}{k}\int_{ka+p}^{kb+p} f(t)\,dt, \qquad (3)$$

где $t=kx+p$, k и p — постоянные, причем новые пределы интегрирования получаются из формулы $t=kx+p$ заменой x на a и на b.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Вычислить интеграл:

1) $\int_1^2 (3x^4+2x^2-5)\,dx$; 2) $\int_4^9 \left(\frac{2x}{5}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$;

3) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{dx}{\cos^2(2x+60^\circ)}$; 4) $\int_{-4}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{2-0{,}5x}}$; 5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

Решение. 1) На основании формул (1) и (2) определенного интеграла и формулы Ньютона — Лейбница находим:

$$\int_1^2 (3x^4+2x^2-5)\,dx=3\int_1^2 x^4dx+2\int_1^2 x^2dx-5\int_1^2 dx=$$

$$=3\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_1^2+2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^2-5x\Big|_1^2=\frac{3}{5}\left(2^5-1\right)+\frac{2}{3}\left(2^3-1\right)-5(2-1)=$$

$$=\frac{274}{15}.$$

2) На основании формул (1) и (2) определенного интеграла и формулы Ньютона — Лейбница получаем:

$$\int_4^9\left(\frac{2x}{5}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx=\frac{2}{5}\int_4^9 x\,dx+\int_4^9\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=\frac{2}{5}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_4^9+\sqrt{x}\Big|_4^9=14.$$

3) Вычислим этот интеграл с помощью замены переменной по формуле $t=2x+\frac{\pi}{3}$. Подставив в эту формулу $x=-\frac{\pi}{6}$, находим $t=2\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}=0$; это новый нижний предел интегрирования. Аналогично получаем новый верхний предел интегрирования $t=\frac{\pi}{3}$. Следовательно,

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{1}{\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dt}{\cos^2 t}=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{tg} t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\operatorname{tg} 0=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4) Видоизменим запись в числителе. и применим формулы (1—2):

$$\int_{-4}^{2} \frac{x dx}{\sqrt{2-0,5x}} = \int_{-4}^{2} \frac{x-4+4}{\sqrt{2-0,5x}} dx =$$

$$= \int_{-4}^{2} \frac{-2(2-0,5x)}{\sqrt{2-0,5x}} dx + \int_{-4}^{2} \frac{4dx}{\sqrt{2-0,5x}} =$$

$$= -2\int_{-4}^{2} \sqrt{2-0,5x}\, dx + 4\int_{-4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2-0,5x}} =$$

$$= -2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot(2-0,5x)^{1,5}\Big|_{-4}^{2} + 4\cdot(-4)\cdot(2-0,5x)^{0,5}\Big|_{-4}^{2} = -\frac{8}{3}.$$

5) $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 1\cdot dx =$$

$$= \operatorname{tg} x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{12}.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Вычислите интеграл:

А. 1) $\int_{-1}^{1} (x^3+2x-1)\, dx$; 2) $\int_{-2}^{1} (2x^3+3x-4)\, dx$; 3) $\int_{1}^{2} (5-2x)\, dx$.

Б. 1) $\int_{1}^{4} \left(1+5x+\frac{3\sqrt{x}}{2}\right) dx$; 2) $\int_{-1}^{0} \sqrt{3-5x}\, dx$.

В. 1) $\int_{0}^{28} \frac{5-x}{\sqrt[3]{1+\frac{x}{4}}} dx$; 2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{ctg}^2 2x dx$.

Ответы. А. 1) -2; 2) -24; 3) 2. Б. 1) 47,5; 2) $\frac{2}{15}(16\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$. В. 1) $-135,6$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{\pi}{12}$.

§ 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a; b]$. Тогда, как известно, площадь соответствующей криволинейной трапеции (рис. 237) находится по формуле

$$S=\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a). \qquad (1)$$

2. В том случае, когда непрерывная функция $f(x)\leqslant 0$ на отрезке $[a; b]$, для вычисления площади соответствующей криволинейной трапеции (рис. 238) следует использовать формулу

$$S=-\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (2)$$

3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на этом отрезке как положительные, так и отрицательные значения. Тогда нужно разбить отрезок $[a; b]$ на такие части, в каждой из которых функция не изменяет свой знак, затем вычислить по приведенным выше формулам соответствующие этим частям площади и эти площади сложить. Например, площадь фигуры, изображенной на рисунке 239, равна:

$$S=-\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx. \qquad (3)$$

4. Площадь фигуры, ограниченной графиками двух непрерывных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$, где $f_1(x)\geqslant f_2(x)$, на отрезке $[a; b]$ (рис. 240), находится по формуле

$$S=\int_a^b f_1(x)\,dx-\int_a^b f_2(x)\,dx. \qquad (4)$$

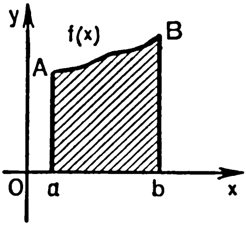


Рис. 237

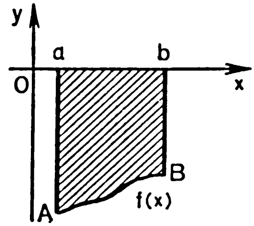


Рис. 238

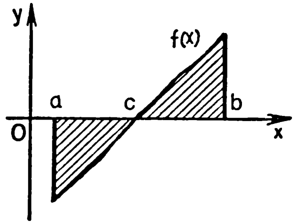


Рис. 239

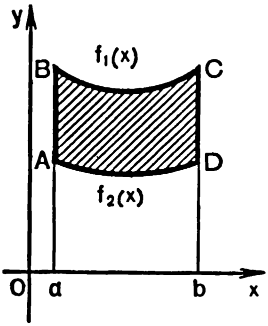


Рис. 240

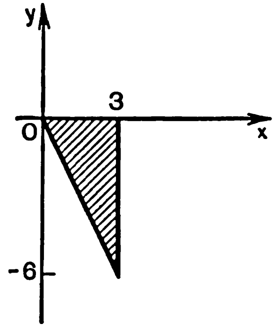


Рис. 241

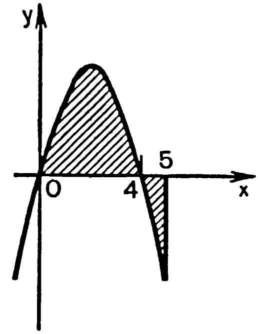


Рис. 242

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями (предварительно сделав рисунок):

1) $y=-2x$, $y=0$ и $x=3$; 2) $y=4x-x^2$, $y=0$ и $x=5$; 3) $y=1-x$ и $y=3-2x-x^2$; 4) $y=\frac{6}{x}$ и $y+x=7$; 5) $y=x^2-4x+6$, $y=2$ и $x=4$; 6) $y=x^2$, $y=\frac{1}{x^2}$, $y=0$, $x=2$, $x\geqslant 0$; 7) $y=-e^x$, $x=0$, $x=\ln 0{,}5$, $y=0$; 8) $y=\sin x$, $y=2\sin x$, $x=\frac{5\pi}{4}$, $x=0$; 9) $y=\sqrt{x}$, $y=|x-2|$; 10) $y=x^2$, при $x\geqslant 0$, $y=1$, $y=4$, $x=0$.

Решение. 1) На отрезке $[0; 3]$ функция $f(x)=-2x$ отрицательная (рис. 241). Поэтому для вычисления площади искомой фигуры следует воспользоваться формулой (2):

$$S=-\int_0^3(-2x)\,dx=2\int_0^3 x\,dx=x^2\Big|_0^3=9.$$

2) Парабола $y=4x-x^2$ пересекает ось абсцисс в точках $x=0$ и $x=4$. Фигура, площадь которой требуется найти, заштрихована на рисунке 242. Пусть S_1 и S_2 — площади частей этой фигуры, соответствующих отрезкам $[0; 4]$ и $[4; 5]$, а S — искомая площадь; тогда $S=S_1+S_2$.

Используя формулу (1), находим:

$$S_1=\int_0^4(4x-x^2)\,dx=\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4=32-\frac{64}{3}=\frac{32}{3},$$

а по формуле (2) получаем:

$$S_2=-\int_4^5(4x-x^2)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2\right)\Big|_4^5=$$

$$=\left(\frac{125}{3}-50\right)-\left(\frac{64}{3}-32\right)=\frac{7}{3}.$$

Следовательно, $S=S_1+S_2=\frac{32}{3}+\frac{7}{3}=13.$

3) Найдем абсциссы точек пересечения графиков заданных линий:

$$\begin{cases} y=1-x, \\ y=3-2x-x^2, \end{cases}$$

откуда $1-x=3-2x-x^2$, т. е. $x=-2$, $x=1$. Искомая площадь равна разности площадей криволинейной трапеции BAB_1C и треугольника BAC (рис. 243).

По формуле (2) находим:

$$S_{BAB_1C}=\int\limits_{-2}^{1}(3-2x-x^2)\,dx=\left(3x-x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1}=9.$$

Так как $S_{BAC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3=4{,}5$, то искомая площадь $S=S_{BAB_1C}-S_{BAC}=4{,}5$.

4) Найдем точки пересечения графиков заданных линий (рис. 244): $\frac{6}{x}=7-x$, $x^2-7x+6=0$, $x_1=1$, $x_2=6$.

Искомая площадь равна разности трапеции $ABCD$ и криволинейной трапеции $ABnCD$. Следовательно,

$$S=\int\limits_{1}^{6}(7-x)\,dx-6\int\limits_{1}^{6}\frac{dx}{x}=\left(7x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1}^{6}-6\ln x\Big|_{1}^{6}=$$
$$=17{,}5-6\ln 6\approx 6{,}75.$$

5) Построим заданные линии (рис. 245). Убедимся, что точка B общая у параболы и прямой $y=2$: $x^2-4x+6=2$, $x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$, $x=2$. Искомая площадь S равна раз-

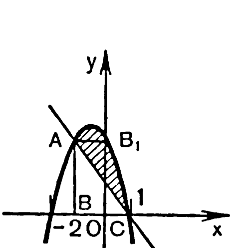


Рис. 243

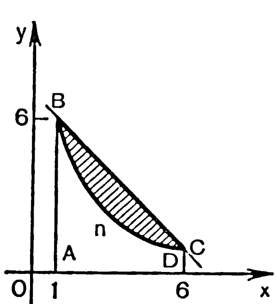


Рис. 244

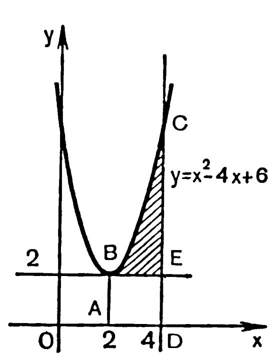


Рис. 245

ности площадей криволинейной трапеции $ABCD$ и прямоугольника $ABED$:

$$S=\int_2^4 (x^2-4x+6)\,dx-\int_2^4 2dx=\int_2^4 (x^2-4x+4)\,dx,$$

$$S=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right)\Big|_2^4=\left(\frac{64}{3}-32+16\right)-\left(\frac{8}{3}-8+8\right)=2\frac{2}{3}.$$

6) Кривые $y=x^2$ и $y=\frac{1}{x^2}$ при условии $x\geqslant 0$ пересекаются в точке с абсциссой $x=1$. Заданная фигура (рис. 246) является криволинейной трапецией, ограниченной сверху графиком функции

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1, \\ \frac{1}{x^2}, & \text{если } 1\leqslant x\leqslant 2. \end{cases}$$

По формуле (1) найдем искомую площадь:

$$S=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 \frac{dx}{x^2}=\frac{5}{6}.$$

7) Данная фигура симметрична относительно оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=e^x$, $x=0$, $x=\ln 0{,}5$, $y=0$ (рис. 247). Симметричные фигуры имеют равные площади. Следовательно,

$$S=\int_{\ln 0{,}5}^{0} e^x dx=e^x\Big|_{\ln 0{,}5}^{0}=0{,}5.$$

8) Искомая площадь S равна сумме площадей S_1 и S_2 двух фигур, первая из которых ограничена линиями $y=\sin x$,

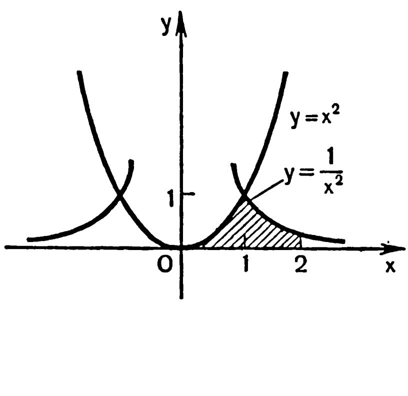


Рис. 246

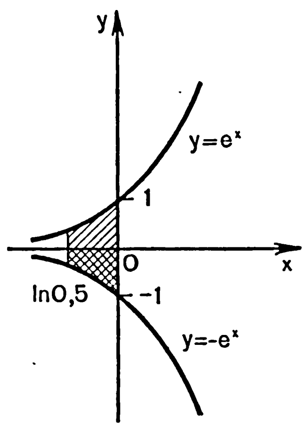


Рис. 247

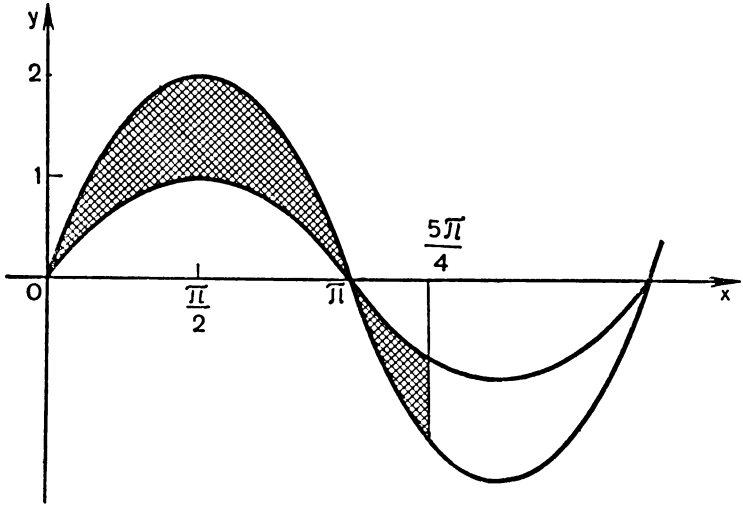


Рис. 248

$y=2\sin x$, $x=0$, $x=\pi$, вторая — линиями $y=\sin x$, $y=2\sin x$, $x=\pi$ и $x=\frac{5\pi}{4}$ (рис. 248).

Для вычисления площадей S_1 и S_2 применим формулу $\int\limits_b^a (g(x)-f(x))\,dx$:

$$S_1=\int\limits_0^\pi (2\sin x-\sin x)\,dx=\int\limits_0^\pi \sin x dx=-\cos x\Big|_0^\pi=2,$$

$$S_2=\int\limits_\pi^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x-2\sin x)\,dx=-\int\limits_\pi^{\frac{5\pi}{4}} \sin x dx=\cos x\Big|_\pi^{\frac{5\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+1.$$

Тогда $S=S_1+S_2=3-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

9) Функцию $y=|x-2|$ можно переписать так:

$$y=\begin{cases} x-2 & \text{при } x\geqslant 2, \\ 2-x & \text{при } x<2. \end{cases}$$

Ее график изображен на рисунке 249, *а*.

График функции $y=\sqrt{x}$ изображен на рисунке 249, *б*, а фигура, площадь которой требуется найти,— на рисунке 249, *в*.

$$S=S_{ABCD}-S_{ABE}-S_{CDE},$$

$$S_{ABCD}=\int\limits_1^4 \sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_1^4=\frac{2}{3}(4\cdot 2-1)=\frac{14}{3},$$

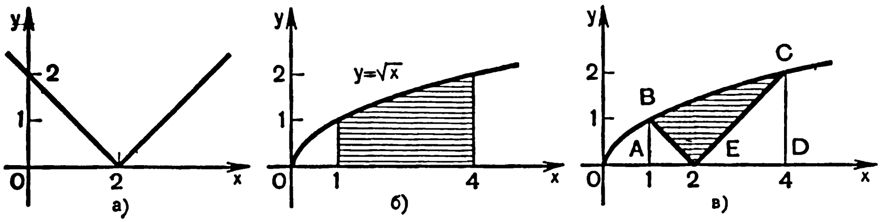


Рис. 249

$$S_{ABE}=\frac{1}{2}AB\cdot AE=\frac{1}{2},\ S_{CDE}=\frac{1}{2}ED\cdot CD=2.$$

Итак, $S=\frac{14}{3}-\frac{1}{2}-2=\frac{13}{6}$.

10) Данная фигура симметрична относительно прямой $y=x$ криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=1$, $x=4$, $y=0$ и графиком функции $y=\sqrt{x}$, обратной $y=x^2$, $x\geqslant 0$ (рис. 250). Поэтому эти фигуры имеют равные площади:

$$S=\int_1^4\sqrt{x}dx=\frac{2x^{1,5}}{3}\Big|_1^4=\frac{14}{3}.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Вычислите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

А. 1) $y=x^2-7x+10$, $y=0$; 2) $y=4-x^2$, $y=0$; 3) $y=x$, $y=2x$, $x=4$; 4) $y=x^2-3x-4$, $y=0$, $x=5$; 5) $y=-x$, $y=2-x$, $x=-2$, $x=4$; 6) $y=9-x^2$, $x=-1$, $x=2$.

Б. 1) $y=x^2+2x+2$, $y=0$, $x=0$, $x=-3$; 2) $y=-x^2+7x-10$ $(2\leqslant x\leqslant 3)$, $y=0$, $x=3$; 3) $y=x^2-2$, $x\geqslant 0$, $y=-1$, $y=7$, $x=0$;

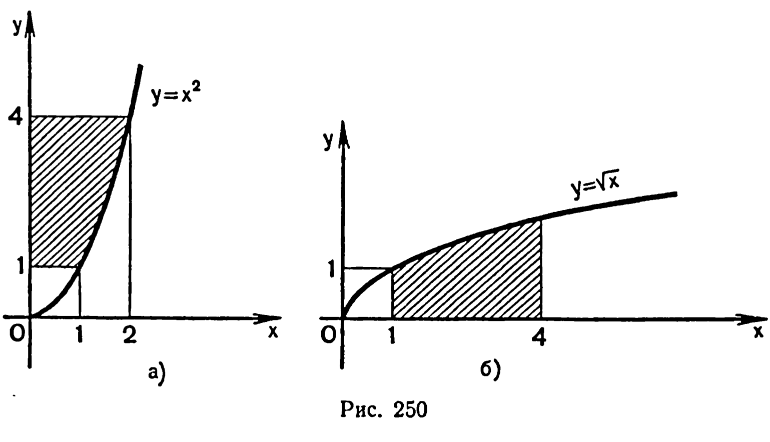


Рис. 250

4) $y=\sqrt{x-1}$, $y=1$, $y=0$, $x=0$; 5) $y=x^2+1$, $y=x+2$; 6) $y=x^2$, $y=2-x$; 7) $y=3-2x-x^2$, $y=1-x$; 8) $y=x$, $y=5-x$, $x=1$, $x=2$; 9) $y=\cos^2 x-\sin^2 x$, $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$, $y=0$, $x=0$.

В. 1) $y=x^2$, $y=2x^2-1$; 2) $y=1+\sin x$, $x=0$, $y=0$, $x=2\pi$; 3) $y=\cos x$, $y=0$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$; 4) $y=x-2$, $y=x^2-4x+2$; 5) $y=1$, $y=\frac{1}{x}$, $x=0$, $x=e$, $y=0$; 6) $y=x^3$, $y=0$, $x=5$, $y=\frac{1}{x^2}$, $x\geqslant 0$; 7) $y=2\sin 0{,}5x$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=3\pi$; 8) $y=3^x$, $y=2^x$, $x=1$; 9) $y=x^3-3x$, $y=x$.

Ответы. А. 1) 4,5; 2) $\frac{32}{3}$; 3) 8; 4) $2\frac{5}{6}$; 5) 12; 6) 24.

Б. 1) 6; 2) $1\frac{1}{6}$; 3) $\frac{52}{3}$; 4) $\frac{4}{3}$; 5) $\frac{5\sqrt{5}}{6}$; 6) 4,5; 7) 4,5; 8) 2; 9) 0,5.

В. 1) $\frac{4}{3}$; 2) 2π; 3) 4; 4) 4,5; 5) 2; 6) $1\frac{1}{20}$; 7) $8+2\sqrt{2}$; 8) $\frac{2}{\ln 3}-\frac{1}{\ln 2}$; 9) 8.

§ 4. МЕХАНИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Если $v(t)$ — скорость прямолинейно движущейся точки в момент времени t, то перемещение точки, т. е. приращение ее координаты, за промежуток времени $[a; b]$ равно:

$$x=\int_a^b v(t)\,dx. \qquad (1)$$

Если $v(t)\geqslant 0$ на промежутке $[a; b]$, то интеграл $\int_a^b v(t)\,dt$ равен пути, пройденному точкой.

2. Если материальная точка движется вдоль оси Ox под действием переменной силы, проекция $F(x)$ которой на ось Ox есть функция от координаты x, то работа силы по перемещению точки из положения $x=a$ в положение $x=b$ равна:

$$A=\int_a^b F(x)\,dx. \qquad (2)$$

3. Если в жидкость плотностью ρ вертикально погружена пластинка $ABCD$ (рис. 251), то сила давления жидкости на нее равна:

$$P=\rho g\int_a^b xf(x)\,dx, \qquad (3)$$

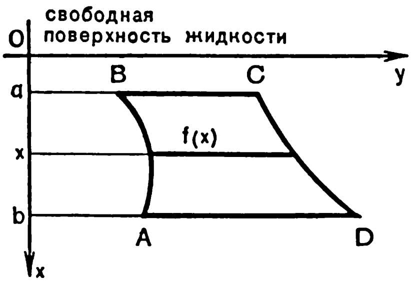


Рис. 251

где $y=f(x)$ — функция, выражающая зависимость длины поперечного сечения пластины от уровня погружения x, g — ускорение свободного падения.

УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Путь, пройденный телом

1. Скорость движения тела задана уравнением $v=(3t^2+2t-1)$ (в м/с). Найти путь, пройденный телом за 10 с от начала движения.

Решение. В условии задачи дано: $t_1=0$, $t_2=10$, $f(t)=3t^2+2t-1$. По формуле (1) получим:

$$S=\int_0^{10}(3t^2+2t-1)\,dt=(t^3+t^2-t)\Big|_0^{10}=1090 \text{ м}.$$

2. Скорость движения тела в момент времени t задается формулой $v=15-3t$, где v — скорость (в м/с), t — время (в с). Какой путь пройдет тело от начала отсчета времени до остановки?

Решение. Так как в момент остановки тела скорость его равна 0, то нам нужно определить путь, пройденный телом от момента времени $t_1=0$ до $t_2=5$. Согласно формуле (1) получим:

$$S=\int_0^5(15-3t)\,dt=\left(15t-\frac{3t^2}{2}\right)\Big|_0^5=37{,}5 \text{ м}.$$

3. Два тела начали двигаться в один и тот же момент из одной точки в одном направлении по прямой. Одно тело двигалось со скоростью $v=(6t^2+2t)$ м/с, другое — со скоростью $v=(4t+5)$ м/с. На каком расстоянии они будут друг от друга через 5 с?

Решение. По формуле (1) вычислим пути, пройденные первым и вторым телом:

$$s_1=\int_0^5(6t^2+2t)\,dt=(2t^3+t^2)\Big|_0^5=275 \text{ м},$$

$$s_2=\int_0^5 (4t+5)\,dt=(2t^2+5t)\Big|_0^5=75 \text{ м},$$

$$s_1-s_2=200 \text{ м}.$$

4. Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью $v=(39{,}2-9{,}8t)$ м/с. Найти наибольшую высоту подъема тела.

Решение. Тело достигает наибольшей высоты подъема в момент времени t, когда $v=0$, т. е. $39{,}2-9{,}8t=0$, откуда $t=4$ с. По формуле (1) находим:

$$s=\int_0^4 (39{,}2-9{,}8t)\,dt=(39{,}2t-4{,}9t^2)\Big|_0^4=78{,}4 \text{ м}.$$

Работа силы

1. Пружина растягивается на 0,02 м под действием силы в 60 Н. Какую работу она производит, растягивая ее на 0,12 м?

Решение. При $F=60$ Н $x=0{,}02$ м. По формуле $F=kx$ (закон Гука для пружины) найдем k: $60=k\cdot 0{,}02$, откуда $k=\frac{60}{0{,}02}=3000$ Н/м.

Подставив найденное значение k в формулу $F=kx$, получим $F=3000x$, т. е. $f(x)=3000x$.

По формуле (2), взяв пределы интегрирования от 0 до 0,12, вычислим работу:

$$A=\int_0^{0{,}12} 3000x\,dx=3000\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}12}=21{,}6 \text{ Дж}.$$

2. Материальная точка M движется по координатной прямой под действием силы, величина которой меняется пропорционально расстоянию точки до начала координат O. Известно, что направление силы совпадает с направлением оси и что она равнялась 1 Н, когда расстояние MO было 3 м. Вычислить работу этой силы по переносу точки на расстояние 15 м от начала координат.

Решение. Из условия задачи следует, что сила $F(x)$, действующая на точку, меняется по закону $F(x)=kx$, где коэффициент пропорциональности k находится из уравнения $1=k\cdot 3$, $k=\frac{1}{3}$.

Таким образом, $F(x)=\frac{x}{3}$ и работа силы на пройденном пути согласно (2) равна:

$$A=\int_0^{15}\frac{x}{3}\,dx=\frac{x^2}{6}\Big|_0^{15}=37{,}5 \text{ Дж}.$$

3. Для растяжения пружины на 0,04 м необходимо совершить

работу 20 Дж. На какую длину можно растянуть пружину, совершив работу в 80 Дж?

Р е ш е н и е. По длине растяжения пружины на 0,04 м и совершенной работе 20 Дж по формуле (2) найдем k:

$$20 = \int_0^{0,04} kx dx = k \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,04} = 0,0008k,$$

откуда $k = \frac{20}{0,0008} = 25\,000$ Н/м.

Теперь по k и A найдем x: $A = \int_0^{x_1} kx dx$, где x_1 — длина, на которую растянута пружина при совершенной работе в 80 Дж:

$$80 = \int_0^{x_1} 25\,000 x dx = 25\,000 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{x_1} = 12\,500 x_1^2,$$

откуда $x_1^2 = \frac{80}{12\,500} = \frac{16}{2500}$, $x_1 = \frac{4}{50} = 0,08$ м.

Сила давления жидкости

Вычислить силу давления воды на вертикально погруженную треугольную пластину ABC с основанием $AC = 9$ м и высотой $BD = 2$ м, если вершина B лежит на свободной поверхности жидкости, а AC — параллельно ей (рис. 252).

Р е ш е н и е. Пусть MG — поперечное сечение пластины на уровне $BE = x$. Найдем зависимость длины MG от x. Из подобия треугольников MBG и ABC имеем $MG : AC = BE : BD$, или $MG : 9 = x : 2$, откуда $MG = f(x) = 4,5x$. На основании формулы (3) получим:

$$P = \rho g \int_0^2 4,5 x^2 dx = 4,5 \rho g \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = 12 \rho g \approx 1,2 \cdot 10^5 \text{ Н},$$

так как плотность воды 1000 кг/м^3 и $g \approx 9,8$ м/с^2.

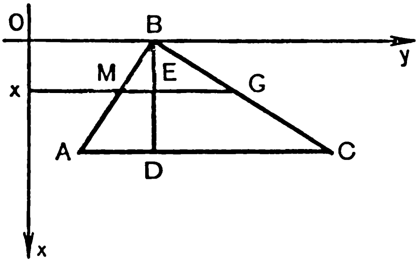


Рис. 252

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Скорость движения тела задана уравнением $v=(6t^2+4)$ м/с. Найдите путь, пройденный за 5 с от начала движения.

2. Скорость движения тела задана уравнением $v=(9t^2-8t)$ м/с. Найдите его путь за четвертую секунду.

3. Сжатие x винтовой пружины пропорционально приложенной силе F. Вычислите работу силы F при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10 Н.

4. Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,2 м. Сила в 50 Н растягивает ее на 0,01 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее от длины 0,22 м до длины 0,32 м?

Ответы. 1. 270 м. 2. 83 м. 3. 0,8 Дж. 4. 35 Дж.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение интеграла.
2. В чем заключается геометрический смысл интеграла?
3. В чем заключается разница между понятиями «перемещение точки» и «путь, пройденный точкой»?
4. Вычислите площади фигур, ограниченных линиями:
   а) $y=4-x^2$, $y=0$; б) $y=x^2-3x$, $y=0$.

Введение

В настоящее время на экзаменах предлагаются задачи, решение которых требует составления уравнения (или неравенства), а также их систем на основании условия задачи.

Умение решать ту или иную задачу зависит от многих факторов. Однако прежде всего необходимо научиться различать основные типы задач и уметь решать простейшие из них. В связи с этим считаем целесообразным рассмотреть типовые задачи и их решения, а также дать дидактический материал на указанные типы задач.

Предлагаемые задачи можно условно разбить на следующие типы задач:

1) задачи «на движение»;
2) задачи «на совместную работу»;
3) задачи «на планирование»;
4) задачи «на зависимость между компонентами арифметических действий»;
5) задачи «на проценты»;
6) задачи «на смеси»;
7) задачи «на разбавление»;
8) задачи «с буквенными коэффициентами»;
9) задачи «на оптимальное решение» (т. е. на нахождение экстремума функции);
10) другие виды задач.

1. Задачи на движение

Некоторые указания к задачам на «движение»:

1. Основными компонентами этого типа задач являются: а) пройденный путь (s); б) скорость (v); в) время (t). Зависимость между указанными величинами выражается известными формулами:

$$s=vt;\ v=\frac{s}{t};\ t=\frac{s}{v} \qquad (1)$$

(указанные величины должны быть в одной системе единиц, например: если путь в километрах, а время в часах, то скорость в километрах в час).

2. План решения обычно сводится к следующему:

а) Выбираем одну из величин, которая по условию задачи является неизвестной, и обозначаем ее через x, y или z и т. д.

б) Устанавливаем, какая из величин является по условию задачи известной.

в) Третью (из оставшихся) величину выражаем через неизвестную (x) и известную с помощью одной из формул (1).

г) Составляем уравнение на основании условия задачи, в котором указано, как именно изменилась (уменьшилась, увеличилась и т. д.) третья величина.

3. Заметим, что если два каких-либо тела начинают движение одновременно, то в случае, если они встречаются, каждое с момента выхода и до встречи затрачивает, очевидно, одинаковое время. Аналогично обстоит дело и в случае, если одно тело догоняет другое.

4. Если же тела выходят в разное время, то до момента встречи из них затрачивает времени больше то, которое выходит раньше.

5. В задачах на движение по реке необходимо помнить следующие формулы:

$$v_{\text{по теч.}} = v_{\text{соб.}} + v_{\text{теч.}};$$

$$v_{\text{против теч.}} = v_{\text{соб.}} - v_{\text{теч.}};$$

$$v_{\text{соб.}} = \frac{v_{\text{по теч.}} + v_{\text{против теч.}}}{2}.$$

Рассмотрим теперь примерное решение некоторых задач.

Движение из одного пункта в другой в одном направлении

Задача (№ 13.079*). Первый турист, проехав 1,5 ч на велосипеде со скоростью 16 км/ч, делает остановку на 1,5 ч, а затем продолжает путь с первоначальной скоростью. Четыре часа спустя после отправки в дорогу первого туриста вдогонку ему выезжает на мотоцикле второй турист со скоростью 56 км/ч. Какое расстояние они проедут, прежде чем второй турист догонит первого?

Решение.

1. Из условия задачи ясно, что первый турист вышел в путь на 4 ч раньше второго. В точке B (рис. 253) он сделал остановку на 1,5 ч. Второй турист догнал первого в точке D. Чтобы проехать

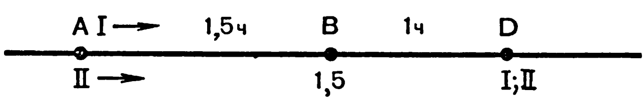


Рис. 253

* Если указан номер к задаче, то она взята из сборника конкурсных задач под редакцией М. И. Сканави.

это расстояние AD, первый турист затратил больше времени, чем второй, на 2,5 ч ($4-1,5=2,5$ ч).

2. Пусть x — расстояние (в км) от точки A до точки D. Тогда $t_1=\frac{x}{16}$ ч — время, за которое первый турист проезжает расстояние AD; $t_2=\frac{x}{56}$ ч — время, за которое второй турист проезжает расстояние AD.

$$t_1-t_2=2,5 \text{ ч}.$$

Составим и решим уравнение:

$$\frac{x}{16}-\frac{x}{56}=2,5, \ x=56 \text{ км}.$$

Ответ. 56 км.

Решите задачи:

1. Задача (№ 13.077). Старший брат на мотоцикле, а младший на велосипеде совершили двухчасовую безостановочную поездку в лес и обратно. При этом мотоциклист проезжал каждый километр на 4 мин быстрее, чем велосипедист. Сколько километров проехал каждый из братьев за 2 ч, если известно, что путь, проделанный старшим братом за это время, на 40 км больше?

2. Задача (№ 13.078). Турист ехал на автомобиле $\frac{5}{8}$ всего пути, а остальную часть — на катере. Скорость катера на 20 км/ч меньше скорости автомобиля. На автомобиле турист ехал на 15 мин дольше, чем на катере. Чему равны скорость автомобиля и скорость катера, если весь путь туриста равен 160 км?

Ответы. 1. 20 км, 60 км. 2. Скорость автомобиля 100 км/ч или 80 км/ч; скорость катера 80 км/ч или 60 км/ч.

Движение из одного пункта в другой с остановкой в пути

Задача (№ 13.083). Товарный поезд был задержан в пути на 12 мин, а затем на расстоянии 60 км наверстал потерянное время, увеличив скорость на 15 км/ч. Найти первоначальную скорость поезда.

Решение.

1. Из условия задачи следует, что если бы поезд после остановки в пункте B (рис. 254) продолжал двигаться с прежней скоростью, то затратил бы на 12 мин (12 мин$=\frac{1}{5}$ ч) больше, чем предусмотрено расписанием.

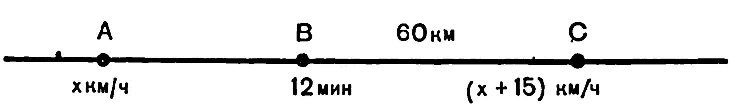


Рис. 254

2. Пусть x — первоначальная скорость поезда (в км/ч). Тогда $t_1=\frac{60}{x}$, $t_2=\frac{60}{x+15}$, $t_1-t_2=\frac{1}{5}$.

3. Составим и решим уравнение: $\frac{60}{x}-\frac{60}{x+15}=\frac{1}{5}$. $x_1=60$, $x_2=-75$ — не удовлетворяет условию задачи, так как скорость — величина неотрицательная.

Ответ. 60 км/ч.

Решите задачи:

1. Задача (№ 13.081). Мотоциклист отправился из пункта A в пункт B, отстоящий от A на 120 км. Обратно он выехал с той же скоростью, но через час после выезда должен был остановиться на 10 мин. После этой остановки он продолжал путь до A, увеличив скорость на 6 км/ч. Какова была первоначальная скорость мотоциклиста, если известно, что на обратный путь он затратил столько же времени, сколько на путь от A до B?

2. Задача (№ 13.222). Расстояние между станциями A и B равно 103 км. Из A в B вышел поезд и, пройдя некоторое расстояние, был задержан, а потому оставшийся путь до B проходил со скоростью, на 4 км/ч большей прежней. Найти первоначальную скорость поезда, если известно, что оставшийся путь до B был на 23 км длиннее пути, пройденного до задержки, и на прохождение пути после задержки было затрачено на 15 мин больше, чем на прохождение пути до задержки.

Ответы. 1. 48 км/ч. 2. 80 км/ч.

Движение из разных пунктов навстречу друг другу

Задача (№ 13.101). В один и тот же час навстречу друг другу должны были выйти A из поселка M и B из поселка K. Но A задержался и вышел позже на 6 ч. При встрече выяснилось, что A прошел на 12 км меньше, чем B. Отдохнув, они одновременно покинули место встречи и продолжили путь с прежней скоростью. В результате A пришел в K через 8 ч, а B пришел в M через 9 ч после встречи. Определить расстояние MK и скорости пешеходов.

Решение.

1. Пусть $v_A=x$ (км/ч), $S_{KD}=8x$ (км); $v_B=y$ (км/ч), $S_{MD}=9y$ (км) (рис. 255).

Тогда $t_A=\frac{9y}{x}$ ч — время, которое затратит A на путь из M в D;

Рис. 255

$t_B=\frac{8x}{y}$ ч — время, которое затратит B на путь из K в D (см. рис. 255).

2. Из условия задачи следует, что $8x-9y=12$. Так как пешеход B вышел раньше, чем A, на 6 ч, то на основании этого составим второе уравнение: $\frac{8x}{y}-\frac{9y}{x}=6$.

3. Составим систему уравнений и решим ее:

$$\begin{cases} 8x-9y=12, \\ \frac{8x}{y}-\frac{9y}{x}=6; \end{cases} \quad \begin{cases} 8x-9y=12, \\ 8a-\frac{9}{a}=6, \text{ где } \frac{x}{y}=a. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x-9y=12, \\ \left[\begin{array}{l} a_1=1{,}5, \\ a_2=-\frac{3}{4} \text{ (не удовлетворяет условию, так как } \frac{x}{y}>0). \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x-9y=12, \\ \frac{x}{y}=\frac{3}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} 8\cdot\frac{3}{2}y-9y=12, \\ x=\frac{3}{2}y; \end{cases} \quad \begin{cases} y=4, \\ x=6. \end{cases}$$

Расстояние $MK=8\cdot6+9\cdot4=84$ км.

Ответ. 84 км; 6 км/ч; 4 км/ч.

Решите задачи:

1. Задача (№ 13.098). Пешеход и велосипедист отправляются одновременно навстречу друг другу из городов A и B, расстояние между которыми 40 км, и встречаются спустя 2 ч после отправления. Затем они продолжают путь, причем велосипедист прибывает в A на 7 ч 30 мин раньше, чем пешеход в B. Найти скорости пешехода и велосипедиста, полагая, что оба все время двигались с неизменными скоростями.

2. Задача (№ 13.112). Два тела движутся навстречу друг другу из двух мест, расстояние между которыми 390 м. Первое тело прошло в первую секунду 6 м, а в каждую следующую проходило на 6 м больше, чем в предыдущую. Второе тело двигалось равномерно со скоростью 12 м/с и начало движение спустя 5 с после первого. Через сколько секунд после того, как начало двигаться первое тело, они встретятся?

Ответы. 1. 4 км/ч и 16 км/ч. 2. Через 10 с.

Основные компоненты движения заданы в общем виде (задачи с параметрами)

Задача (№ 13.111). Поезд был задержан на t ч. Увеличив скорость на a км/ч, машинист на перегоне в s км ликвидировал опоздание. Определить, какую скорость должен был иметь поезд на этом перегоне, если бы не было задержки.

Решение.

1. Полагая, что скорость поезда по расписанию x км/ч, имеем:

$$\frac{s}{x}-\frac{s}{x+a}=t,\quad \text{откуда } x=\frac{-at\pm\sqrt{a^2t^2+4sat}}{2t}.$$

2. Теперь следует выяснить, оба ли корня уравнения удовлетворяют условию задачи:

$$x_1=\frac{-at-\sqrt{a^2t^2+4ats}}{2t}<0, \text{ так как } a>0,\ t>0,\ s>0.$$

$$x_2=\frac{-at+\sqrt{a^2t^2+4ats}}{2t}>0, \text{ так как } \sqrt{a^2t^2+4ast}>at.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{a^2t^2+4ats}-ta}{2t}$ км/ч.

Решите задачи:

1. Задача (№ 13.099). Расстояние между поселками A и B равно b км. Из A отправились в B одновременно и по одной и той же дороге два автотуриста, которые должны были прибыть в B в одно и то же время. В действительности первый турист прибыл в B на k часов раньше срока, а второй на $3k$ часов опоздал, так как последний проезжал за каждый час в среднем на a км меньше первого. Определить среднюю часовую скорость каждого автотуриста.

2. Задача (№ 13.217). Дорога между поселками A и B сначала имеет подъем, а потом спуск. Велосипедист, двигаясь на спуске со скоростью на a км/ч больше, чем на подъеме, затрачивает на путь от A до B ровно k часов, а на обратный путь от B до A половину этого времени. Найти скорость велосипедиста на подъеме и на спуске, если расстояние между поселками b км.

Ответы. 1. $\frac{-ka+\sqrt{ka(ka+b)}}{2k}$ км/ч; $\frac{ka+\sqrt{ka(ka+b)}}{2k}$ км/ч.

2. $\frac{4b\pm 3ak+\sqrt{16b^2+9a^2k^2}}{6k}$ км/ч, $4b>3ak$.

Движение по водному пути

Задача (№ 13.129). В 9 ч самоходная баржа вышла из A вверх по реке и прибыла в пункт B; 2 ч спустя после прибытия в B эта баржа отправилась в обратный путь и прибыла в A в 19 ч 20 мин того же дня. Предполагая, что средняя скорость течения реки 3 км/ч и собственная скорость баржи все время постоянна, определить, в котором часу баржа прибыла в пункт B. Расстояние между A и B равно 60 км.

Решение.

1. Для решения этого типа задач следует использовать указание 5.

2. Обозначим собственную скорость баржи через x км/ч. Тогда время, затраченное на движение по течению реки, составляет $\frac{60}{x+3}$ часов, а против течения реки $\frac{60}{x-3}$ часов.

3. Всего было затрачено времени (в ч) $19\frac{1}{3}-9-2=8\frac{1}{3}$. На основании этого составим уравнение и решим его:

$$\frac{60}{x+3}+\frac{60}{x-3}=8\frac{1}{3}.$$

$x_1=15$, $x_2=-0{,}6$ (не удовлетворяет условию).

4. Время, затраченное на движение против течения реки, $\frac{60}{15-3}=\frac{60}{12}=5$ ч. Следовательно, баржа прибыла в пункт B в 14 ч.

Решите задачи:

1. Задача (№ 13.130). Два приятеля в одной лодке прокатились по реке вдоль берега и вернулись по той же речной трассе через 5 ч с момента отплытия. Весь рейс составил 10 км. По их подсчетам получилось, что на каждые 2 км против течения в среднем требовалось им столько же времени, сколько требовалось на каждые 3 км по течению. Найти скорость течения и время проезда туда и обратно.

2. Задача (№ 13.145). Сначала катер шел a км по течению реки, а затем вдвое большее расстояние по озеру, в которое река впадала. Весь рейс продолжался 1 ч. Найти собственную скорость катера, если скорость течения реки c км/ч.

Ответы. 1. $\frac{5}{12}$ км/ч; 2 ч и 3 ч. 2. $\frac{3a-c+\sqrt{9a^2+2ac+c^2}}{2}$ км/ч.

Определение скорости при встречном прямолинейном движении тел

Задача (№ 13.278). Пассажир поезда знает, что на данном участке пути скорость этого поезда 40 км/ч. Как только мимо окна начал проходить встречный поезд, пассажир пустил секундомер и заметил, что встречный поезд проходил мимо окна в течение 3 с. Определить скорость встречного поезда, если известно, что его длина 75 м.

Решение.

1. Пусть скорость встречного поезда x м/с. Скорость поезда, в котором ехал пассажир, 40 км/ч$=\frac{40\,000}{3600}=\frac{100}{9}$ м/с.

2. Встречный поезд за 3 с прошел $3x$ м, а поезд с пассажиром — $\frac{3\cdot 100}{9}=33\frac{1}{3}$ м.

3. Всего оба поезда прошли по условию 75 м, следовательно, $33\frac{1}{3}+3x=75$, $x=13\frac{8}{9}$ м/с$=\frac{125\cdot 3600}{9\cdot 1000}=50$ (км/ч).

Ответ. 50 км/ч.

Решите задачи:

1. Задача (№ 13.284). Найти скорость и длину поезда, зная, что он проходил с постоянной скоростью мимо неподвиж-

ного наблюдателя в течение 7 с и затратил 25 с на то, чтобы проехать с той же скоростью вдоль платформы длиной 378 м.

2. Задача (№ 13.370). На расстоянии 199,5 м от окна будки параллельно плоскости окна проходит горизонтальный железнодорожный путь. Обходчик, находясь в будке на расстоянии 0,5 м от окна, видит в течение 20 с, как проходит весь поезд (от локомотива до последнего вагона). Длина поезда 100 м, и идет он с постоянной скоростью. Вычислить скорость поезда.

Ответы. 1. 75,6 км/ч; 147 м. 2. 25 м/с.

Составление неравенств

Задача (№ 13.360). Велосипедист отправляется из A в B. Расстояние от A до B равно 60 км; скорость велосипедиста постоянна. Не задерживаясь в B, он едет обратно с той же скоростью, но через час после выезда из B делает остановку на 20 мин. После этого он продолжает путь, увеличив скорость на 4 км/ч. В каких границах заключена скорость v велосипедиста, если известно, что на обратный путь от B до A он потратил времени не более, чем на путь от A до B?

Решение.

1. Пусть x (в км/ч) — первоначальная скорость велосипедиста.

Из условия задачи следует, что $t_{AB}=\frac{60}{x}$ ч, а $t_{BA}=\frac{60-x}{x+4}+$ $+1\frac{1}{3}$ ч (рис. 256).

2. Особенность задачи в том, что для решения требуется составить неравенство.

Так как $t_{BA}\leqslant t_{AB}$, то $\frac{60-x}{x+4}+1\frac{1}{3}\leqslant\frac{60}{x}$. Решая это неравенство, получим

$$\frac{x^2+16x-720}{x(x+4)}\leqslant 0,\quad \frac{(x-20)(x+36)}{x(x+4)}\leqslant 0.$$

Следовательно, $0<x\leqslant 20$.

Ответ. $0<v\leqslant 20$ км/ч.

Решите задачи:

1. Задача (№ 13.367). В заезде на одну и ту же дистанцию участвовали два автомобиля и мотоцикл. Второму автомобилю

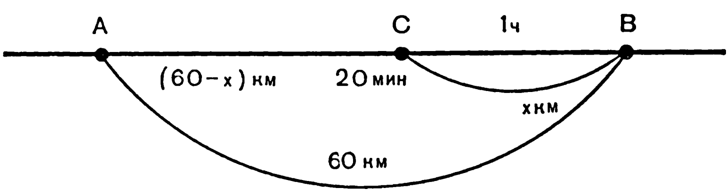


Рис. 256

на всю дистанцию потребовалось минутой больше, чем первому автомобилю. Первый автомобиль двигался в 4 раза быстрее мотоцикла. Какую часть дистанции в минуту проходил второй автомобиль, если он проходил в минуту на $\frac{1}{6}$ часть дистанции больше, чем мотоцикл, а мотоцикл прошел дистанцию быстрее чем за 10 мин?

2. Задача (№ 13.369). Расстояние между станциями A и B равно 360 км. В одно и то же время из A и из B навстречу друг другу выходят два поезда. Поезд, вышедший из A, прибывает на станцию B не ранее чем через 5 ч. Если бы его скорость была в 1,5 раза больше, чем на самом деле, то он встретил бы второй поезд раньше чем через 2 ч после своего выхода из A. Скорость какого поезда больше?

Ответы. 1. $\frac{2}{3}$. 2. Вышедшего из B.

Пройденный путь принимается за 1, а единственной данной величиной является время

Задача. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу и встретились через 3 ч 20 мин. Сколько времени понадобится каждому из них, чтобы пройти все расстояние, если первый пришел в то место, из которого вышел второй, на 5 ч позже, чем второй пришел в то место, откуда вышел первый?

Решение.

1. Особенностью этой задачи является то, что в ней нет никаких данных о пройденном расстоянии. В таких случаях удобно все расстояние принять за 1, тогда скорость $v_1=\frac{1}{x}$, а $v_2=\frac{1}{y}$ (где x часов — время в пути первого пешехода, а y часов — время второго пешехода).

2. Из условия задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}+3\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{y}=1, \\ x-y=5. \end{cases}$$

3. Решая эту систему, получим $y=5$, $x=10$.

Ответ. 10 ч; 5 ч.

Решите задачу:

Задача (№ 13.317). Один турист вышел в 6 ч, а второй навстречу ему в 7 ч. Встретились они в 8 ч и, не останавливаясь, продолжили путь. Сколько времени затратил каждый из них на весь путь, если первый пришел в то место, из которого вышел второй, на 28 мин позже, чем второй пришел в то место, откуда вышел первый? Считается, что каждый шел без остановок с постоянной скоростью.

Ответ. 3 ч 40 мин и 2 ч 12 мин.

Скорость выражена косвенно через время

Задача. Два велосипедиста выехали одновременно из двух пунктов в третий, куда они договорились прибыть одновременно. Первый прибыл на место встречи через 2 ч, а второму, чтобы прибыть вовремя, надо было проезжать каждый километр на 1 мин быстрее первого, так как его путь был длиннее на 6 км. Какова скорость каждого велосипедиста?

Решение.

1. Особенностью этой задачи является не прямое, а косвенное указание скорости велосипедистов.

2. Пусть первый велосипедист проезжал каждый километр за x мин, т. е. его скорость была $\frac{60}{x}$ км/ч. Тогда скорость второго $\frac{60}{x-1}$ км/ч.

3. Составим уравнение и решим его:

$$\frac{60}{x-1}\cdot 2-\frac{60}{x}\cdot 2=6;\ x_1=5,\ x_2=-4\ \text{(посторонний корень)}.$$

4. Следовательно, $v_1=\frac{60}{5}=12$ км/ч, $v_2=\frac{60}{4}=15$ км/ч.

Ответ. 12 км/ч, 15 км/ч.

Решите задачи:

1. Задача (№ 13.096). Велосипедист каждую минуту проезжает на 500 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь в 120 км он затрачивает времени на 2 ч больше, чем мотоциклист. Вычислить скорость каждого из них.

2. Задача (№ 13.221). Из пунктов A и C в пункт B выехали одновременно два всадника и, несмотря на то что пункт C отстоял от пункта B на 20 км дальше, чем пункт A от пункта B, прибыли в пункт B одновременно. Найти расстояние от пункта C до пункта B, если всадник, выехавший из C, проезжал каждый километр на $1\frac{1}{4}$ мин скорее, чем всадник, выехавший из пункта A, и всадник, выехавший из A, приехал в пункт B через 5 ч.

Ответы. 1. 30 км/ч и 60 км/ч. 2. 80 км.

Тела движутся по окружности

Задача (№ 13.302). По окружности длиной 60 м равномерно и в одном направлении движутся две точки. Одна из них делает полный оборот на 5 с скорее другой. При этом совпадения точек происходят каждый раз через 1 мин. Определить скорости точек.

Решение.

1. Пусть первая точка проходит полный оборот за x с, а вторая точка — за y с. Тогда $v_1=\frac{60}{x}$ м/с$=\frac{3600}{x}$ м/мин, $v_2=$ $=\frac{60}{y}$ м/с$=\frac{3600}{y}$ м/мин.

2. Будем полагать, что $x<y$, тогда из условия задачи следует уравнение $y-x=5$.

3. Так как точки встречаются каждую минуту и первая движется быстрее, то она должна за 1 мин пройти полный круг 60 м и еще столько, сколько успеет пройти за 1 мин вторая точка, т. е. $\frac{3600}{y}$ м.

4. Отсюда имеем второе уравнение: $\frac{3600}{x}=\frac{3600}{y}+60$.

5. Составим систему и решим ее:

$$\begin{cases} y-x=5, \\ \frac{3600}{x}=\frac{3600}{y}+60; \end{cases} \quad \begin{cases} y=x+5, \\ \frac{60}{x}=\frac{60}{y}+1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=15, \\ y=20. \end{cases}$$

Тогда $v_1=\frac{60}{15}=4$ м/с, $v_2=\frac{60}{20}=3$ м/с.

Ответ. 4 м/с; 3 м/с.

Решите задачи:

1. Задача (№ 13.298). Два спортсмена бегают по одной замкнутой дорожке стадиона. Скорость каждого постоянна, но на пробег всей дорожки первый тратит на 10 с меньше, чем второй. Если начнут они пробег с общего старта в одном направлении, то еще раз сойдутся через 720 с. Какую часть длины всей дорожки пробегает в секунду каждый бегун?

2. Задача (№ 13.126). По двум концентрическим окружностям равномерно вращаются две точки. Одна из них совершает полный оборот на 5 с быстрее, чем другая, и поэтому успевает сделать в 1 мин на два оборота больше. Сколько оборотов в минуту совершает каждая точка?

3. Задача (№ 13.251). Часовая и минутная стрелки совпадают в полночь, и начинается новый день. В котором часу этого нового дня впервые вновь совпадут часовая и минутная стрелки, если допустить, что стрелки часов движутся без скачков?

Ответы. 1. $\frac{1}{80}$; $\frac{1}{90}$. 2. 4 и 6. 3. 1 ч и $5\frac{5}{11}$ мин.

2. Задачи на совместную работу

Некоторые указания к задачам на совместную работу:

1. Основными компонентами этого типа задач являются: а) работа; б) время; в) производительность труда (работа, выполненная в единицу времени).

2. План решения задачи обычно сводится к следующему:

а) Принимаем всю работу, которую необходимо выполнить, за 1.

б) Находим производительность труда каждого рабочего в отдельности, т. е. $\frac{1}{t}$, где t — время, за которое указанный рабочий может выполнить всю работу, работая отдельно.

в) Находим ту часть всей работы, которую выполняет каждый рабочий отдельно, за то время, которое он работал.

г) Составляем уравнение, приравнивая объем всей работы (т. е. 1) к сумме слагаемых, каждое из которых есть часть всей работы, выполненная отдельно каждым из рабочих (если, разумеется, в условии сказано, что при совместной работе всех рабочих выполнен весь объем работы).

3. Следует заметить, что в указанных задачах не всегда сравнивается выполненная работа. Основанием для составления уравнения может служить также указанное в условии соотношение затраченного времени или производительности труда.

Рассмотрим решение некоторых задач.

Вычисление неизвестного времени работы

З а д а ч а (№ 13.107). Две бригады, работая вместе, должны отремонтировать заданный участок шоссейной дороги за 18 дней. В действительности же получилось так, что сначала работала только одна первая бригада, а заканчивала ремонт участка дороги одна вторая бригада, производительность труда которой более высокая, чем первой бригады. В результате ремонт заданного участка дороги продолжался 40 дней, причем первая бригада в свое рабочее время выполнила $\frac{2}{3}$ всей работы. За сколько дней был бы отремонтирован участок дороги каждой бригадой отдельно?

Р е ш е н и е.

1. Пусть вся работа может быть выполнена первой бригадой за x дней, а второй — за y дней.

2. Принимая всю работу за 1, имеем:

$\frac{1}{x}$ — производительность первой бригады,

$\frac{1}{y}$ — производительность второй бригады,

$\frac{1}{x}\cdot 18$ — часть работы, которую могла выполнить первая бригада за 18 дней,

$\frac{1}{y}\cdot 18$ — часть работы, которую могла выполнить вторая бригада за 18 дней.

3. Составление уравнения.

Так как обе бригады, работая совместно, могли выполнить всю работу за 18 дней, то на основании этого имеем

$$\frac{1}{x}\cdot 18+\frac{1}{y}\cdot 18=1.$$

4. Далее из условия задачи следует, что первая бригада выполнила $\frac{2}{3}$ всей работы, следовательно, она затратила на это

$\frac{2}{3}x$ дней, а вторая бригада выполнила $\frac{1}{3}$ всей работы, следовательно, она затратила на это $\frac{1}{3}y$ дней.

5. Так как всего было затрачено 40 дней, то можно составить второе уравнение: $\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=40$.

6. Составим систему уравнений и решим ее:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}\cdot 18+\frac{1}{y}\cdot 18=1, \\ \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=40. \end{cases}$$

Имеем $x_1=24$, $x_2=45$; $y_1=72$, $y_2=30$.

7. Так как производительность второй бригады была выше, чем первой, то условию задачи удовлетворяют $x=45$ и $y=30$.

П р о в е р к а.

Пусть известно, что первая бригада может выполнить всю работу за 45 дней, а вторая бригада — за 30 дней, тогда первая бригада за 1 день выполнит $\frac{1}{45}$ часть всей работы, а вторая бригада — $\frac{1}{30}$ всей работы, и, следовательно, вместе за 1 день они выполнят $\frac{1}{45}+\frac{1}{30}=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}$ всей работы. Значит, им понадобится на выполнение всей работы 18 дней, что соответствует условию задачи. Рассуждая аналогично, получим, что первая бригада выполнит $\frac{2}{3}$ всей работы за $\frac{2}{3}\cdot 45=30$ дней, а вторая бригада выполнит $\frac{1}{3}$ всей работы за $\frac{1}{3}\cdot 30=10$ дней, т. е. всего будет затрачено $30+10=40$ дней, что соответствует условию.

О т в е т. 45 дней, 30 дней.

Решите задачи:

1. З а д а ч а (№ 13.135). Бригада слесарей может выполнить некоторое задание по обработке деталей на 15 ч скорее, чем бригада учеников. Если бригада учеников отработает 18 ч, выполняя это задание, а потом бригада слесарей продолжит выполнение задания в течение 6 ч, то и тогда будет выполнено только $\frac{3}{5}$ всего задания. Сколько времени требуется бригаде учеников для самостоятельного выполнения данного задания?

2. З а д а ч а (№ 13.138). Два рабочих, из которых второй начал работать полутора днями позже первого, работая независимо один от другого, оклеили обоями несколько комнат за 7 дней, считая с момента выхода на работу первого рабочего. Если бы эта работа была поручена каждому отдельно, то первому

для ее выполнения понадобилось бы тремя днями больше, чем второму. За сколько дней каждый из них отдельно выполнил бы эту же работу?

Ответы. 1. 45 ч. 2. За 14 и 11 дней.

Путь, пройденный движущимися телами, рассматривается как совместная работа

Задача (№ 13.110). Два поезда отправляются из пунктов A и B навстречу друг другу. Они встретятся на половине пути, если поезд из A выйдет на 2 ч раньше, чем поезд из B. Если же оба поезда выйдут одновременно, то через 2 ч расстояние между ними составит $\frac{1}{4}$ расстояния между пунктами A и B. За какие промежутки времени каждый поезд проходит весь путь?

Решение.

1. На первый взгляд эта задача кажется типичной задачей на движение. Однако следует обратить внимание на то, что в ней нет никаких данных о пройденном пути. Поэтому будем рассматривать эту задачу как задачу на совместную работу, где всю работу (пройденный путь) примем за 1.

2. Полагая, что первый поезд пройдет весь путь за x часов, а второй — за y часов, и учитывая, что первый вышел на 2 ч раньше, составим уравнение $\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}\cdot y=2$.

3. Скорость каждого поезда будет соответственно $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$, следовательно, $\frac{1}{x}\cdot 2+\frac{1}{y}\cdot 2=\frac{3}{4}$.

4. Составим систему уравнений и решим ее:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y=2, \\ \frac{1}{x}\cdot 2+\frac{1}{y}\cdot 2=\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Получим $x=8$, $y=4$.

Ответ. 8 ч, 4 ч.

Решите задачу:

Задача (№ 13.330). Два грузовых автомобиля должны были перевезти некоторый груз в течение 6 ч. Второй автомобиль задержался в гараже, и, когда он прибыл на место погрузки, первый перевез уже $\frac{3}{5}$ всего груза; остальную часть груза перевез второй автомобиль, и весь груз был перевезен, таким образом, за 12 ч. Сколько времени нужно было каждому автомобилю в отдельности для перевозки груза?

Ответ. 10 ч и 15 ч или по 12 ч.

Задачи на «бассейн», который одновременно наполняется разными трубами

Задача (№ 13.290). Если две трубы открыть одновременно, то бассейн наполнится за 2 ч 24 мин. В действительности же сначала была открыта только первая труба в течение одной четверти времени, которое необходимо второй трубе, чтобы наполнить бассейн, действуя отдельно. Затем действовала вторая труба также в течение одной четверти времени, которое необходимо первой, чтобы одной наполнить бассейн, после чего оказалось, что остается наполнить $\frac{11}{24}$ полной вместимости бассейна. Сколько времени необходимо для наполнения бассейна каждой трубой в отдельности?

Решение.

1. Пусть первая труба наполняет бассейн за x часов, а вторая наполняет бассейн за y часов, тогда производительность каждой трубы будет соответственно $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ в час (примем объем воды в бассейне за 1).

2. Из условия следует, что первая труба наполнила $\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{4}y$ часть бассейна, вторая труба $\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{4}x$ часть бассейна, а вместе они наполнили $1-\frac{11}{24}=\frac{13}{24}$ части бассейна. Отсюда $\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{4}y+$ $+\frac{1}{4}x\cdot\frac{1}{y}=\frac{13}{24}$.

3. Так как обе трубы при одновременной работе наполняют весь бассейн за 2 ч 24 мин, то $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 2\frac{2}{5}=1$.

4. Составим систему и решим ее:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}x\cdot\frac{1}{y}=\frac{13}{24}, \\ \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 2\frac{2}{5}=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{y}{x}\cdot 6+\frac{x}{y}\cdot 6=13, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{12}. \end{cases}$$

5. Полагая $\frac{x}{y}=a$, имеем:

$$\begin{cases} 6a+\frac{6}{a}=13, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{12}; \end{cases} \qquad \begin{cases} 6a^2-13a+6=0, \\ 12y+12x=5xy. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a_1=\frac{3}{2}, \\ a_2=\frac{2}{3}, \end{array}\right. \\ 12y+12x=5xy; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{y}{x}=\frac{3}{2}, \\ \frac{y}{x}=\frac{2}{3}, \end{array}\right. \\ 12y+12x=5xy; \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4, \\ y=6. \end{cases} \\ \begin{cases} x=6, \\ y=4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Очевидно, результаты однозначны. Будем полагать, что первая труба работала быстрее.

Ответ. 4 ч; 6 ч.

Решите задачи:

1. Задача (№ 13.142). Чан наполняется двумя кранами A и B. Наполнение чана только через кран A длится на 22 мин дольше, чем через кран B. Если же открыть оба крана, то чан наполнится за 1 ч. За какой промежуток времени каждый кран отдельно может наполнить чан?

2. Задача (№ 13.289). Из автоцистерны сливали бензин в подземное хранилище по двум шлангам разного сечения. Первоначально a мин бензин поступал через оба шланга, затем первый шланг был отключен, и весь оставшийся бензин прошел через второй шланг за b мин. Но если бы после первоначальных a мин был отключен не первый, а второй шланг, то весь оставшийся бензин прошел бы через первый шланг за c мин. Сколько времени продолжалось бы переливание всего бензина из автоцистерны в хранилище только через один первый шланг?

3. Задача (№ 13.132). В лабораторной установке некоторая жидкость поступает в сосуд через три входных крана. Если открыть все краны одновременно, то сосуд наполнится за 6 мин. Если же наполнять сосуд только через второй кран, то на это потребуется $\frac{3}{4}$ того времени, за которое может наполнится сосуд только через один первый кран. Через один третий кран этот сосуд наполняется на 10 мин дольше, чем через один второй кран. На какое время надо открывать каждый кран в отдельности для наполнения сосуда?

Ответы. **1.** За 132 мин и 110 мин. **2.** $a+c+\frac{ac}{b}$ мин. **3.** $\frac{56}{3}$ мин, 14 мин, 24 мин.

3. Задачи на планирование

К задачам этого раздела относятся те задачи, в которых выполняемый объем работы известен или его нужно определить (в отличие от задач на совместную работу). При этом сравнивается работа, которая должна быть выполнена по плану, и работа, которая выполнена фактически. Так же как и в задачах на совместную работу, основными компонентами задач на планирование являются:

а) работа (выполненная фактически и запланированная);

б) время выполнения работы (фактическое и запланированное);

в) производительность труда (фактическая и запланированная).

Замечание. В некоторых задачах этого раздела вместо времени выполнения работы дается количество участвующих в ее выполнении рабочих.

Задачи, в которых требуется определить объем выполняемой работы

Задача (№ 13.062). Ученик токаря вытачивает шахматные пешки для определенного числа комплектов шахмат. Он хочет научиться изготовлять ежедневно на 2 пешки больше, чем теперь, тогда такое же задание он выполнит на 10 дней быстрее. Если бы ему удалось научиться изготовлять ежедневно на 4 пешки больше, чем теперь, то срок выполнения такого же задания уменьшился бы на 16 дней. Сколько комплектов шахмат обеспечивает пешками этот токарь, если для каждого комплекта нужно 16 пешек?

Решение.

1. Пусть токарь вытачивает x пешек для определенного числа комплектов шахмат. Будем также полагать, что в день он вытачивает y пешек. Тогда задание он выполнит за $\frac{x}{y}$ дней.

2. Соответственно если он будет вытачивать в день $(y+2)$ пешки или $(y+4)$ пешки, то выполнит задание за $\frac{x}{y+2}$ дня или $\frac{x}{y+4}$ дня.

3. На основании условия задачи составим систему уравнений и решим ее:

$$\begin{cases} \frac{x}{y}-\frac{x}{y+2}=10, \\ \frac{x}{y}-\frac{x}{y+4}=16; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=240, \\ y=6. \end{cases}$$

4. Так как на каждый комплект нужно 16 пешек, то число комплектов равно $240:16=15$.

Ответ. 15.

Решите задачу:

Задача. Бригада рабочих должна была в определенный срок изготовить 272 детали. Через 10 дней после начала работы бригада стала перевыполнять дневную норму на 4 детали и уже за один день до срока изготовила 280 деталей. Сколько деталей изготовит бригада к сроку?

Ответ. 300.

Задачи, в которых требуется найти производительность труда

Задача (№ 13.328). Бригада рыбаков намеревалась выловить в определенный срок 1800 ц рыбы. Треть этого срока был шторм, вследствие чего плановое задание ежедневно недовыполнялось на 20 ц. Однако в остальные дни бригаде удавалось ежедневно вылавливать на 20 ц больше дневной нормы, и плановое задание было выполнено за 1 день до срока. Сколько центнеров рыбы намеревалась вылавливать бригада рыбаков ежедневно?

Решение.

1. x дней — планируемый срок лова рыбы.
2. y ц планировалось вылавливать в день.
3. Составим уравнение: $xy=1800$. (I)
4. Так как $\frac{1}{3}$ планируемого срока был шторм, то за это время бригада выловила $(y-20)\frac{1}{3}\cdot x$ (ц).
5. В оставшееся время бригада выловила $(y+20)\left(\frac{2x}{3}-1\right)$ (ц).
6. Составим уравнение:

$$(y-20)\frac{x}{3}+(y+20)\left(\frac{2}{3}x-1\right)=1800. \qquad \text{(II)}$$

7. Решим систему уравнений·

$$\begin{cases} xy=1800, \\ (y-20)\frac{x}{3}+(y+20)\left(\frac{2}{3}x-1\right)=1800. \end{cases}$$ Получим $y=100$ ц.

Ответ. 100 ц.

Решите задачи:

1. Задача (№ 13.055). На вагоноремонтном заводе в определенный срок должно быть отремонтировано 330 вагонов. Перевыполняя план ремонта в среднем на 3 вагона в неделю, на заводе уже за две недели до срока отремонтировали 297 вагонов. Сколько вагонов в неделю ремонтировали на заводе?

2. Задача (№ 13.250). Бригада лесорубов должна была по плану заготовить за несколько дней 216 м^3 древесины. Первые 3 дня бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день заготовляла 8 м^3 сверх плана, поэтому за день до срока было заготовлено 232 м^3 древесины. Сколько кубических метров древесины в день должна была бригада заготовлять по плану?

Ответы. 1. 33. 2. 24.

Задачи, в которых требуется определить время, затраченное на выполнение предусмотренного объема работы

Задача (№ 13.177). Планом было предусмотрено, что предприятие на протяжении нескольких месяцев изготовит 6000 насосов. Увеличив производительность труда, предприятие стало изготовлять в месяц на 70 насосов больше, чем было предусмотрено, и на один месяц раньше установленного срока перевыполнило задание на 30 насосов. На протяжении скольких месяцев было предусмотрено выпустить 6000 насосов?

Решение.

1. Пусть за x месяцев было предусмотрено выполнение пла-

нового задания. Тогда за $(x-1)$ месяцев было выпущено 6030 насосов.

2. В месяц по плану предприятие планировало выпускать $\frac{6000}{x}$ насосов, а фактически выпустило в месяц $\frac{6030}{x-1}$ насосов.

Из условия задачи следует уравнение: $\frac{6030}{x-1}-\frac{6000}{x}=70$.

Решая уравнение, получим $x_1=10$, $x_2=-\frac{60}{7}$ (не удовлетворяет условию задачи).

Ответ. На протяжении 10 месяцев.

Решите задачи:

1. Задача. Бригада рабочих должна была изготовить 8000 одинаковых деталей в определенный срок. Фактически эта работа была окончена на 8 дней раньше срока, так как бригада делала ежедневно на 50 деталей больше, чем было намечено по плану. В какой срок должна была быть окончена работа?

2. Задача. Две бригады рабочих должны были изготовить к некоторому сроку по 240 деталей. Первая бригада, изготовляя в день на 8 деталей больше, чем вторая бригада, выполнила задание за 3 дня до срока, опередив вторую бригаду на 1 день. Каков был срок выполнения работы?

Ответы. **1.** 40 дней. **2.** 8 дней.

Задачи, в которых вместо времени выполнения некоторой работы дано число рабочих, участвующих в выполнении работы

Задача (№ 13.186). Бригада каменщиков взялась уложить 432 м^3 кладки, но в действительности на работу вышло на 4 человека меньше. Сколько всех каменщиков в бригаде, если известно, что каждому работавшему каменщику пришлось укладывать на 9 м^3 больше, чем первоначально предполагалось?

Решение.

1. Пусть в бригаде x каменщиков. Тогда по условию задачи на работу вышло $(x-4)$ каменщика.

2. Каждый каменщик должен был по плану уложить $\frac{432}{x}$ м^3 кладки, фактически же каждый уложил $\frac{432}{x-4}$ м^3.

3. Из условия следует уравнение $\frac{432}{x-4}-\frac{432}{x}=9$, решая которое находим $x=16$.

Ответ. 16.

Решите задачи:

1. Задача (№ 13.181). Бригада рабочих электролампового цеха должна была сделать за смену 7200 деталей, причем каждый рабочий делал одинаковое количество деталей. Однако в бригаде заболело трое рабочих, и поэтому для выполнения

всей нормы каждому из оставшихся рабочих пришлось сделать на 400 деталей больше. Сколько рабочих было в бригаде?

2. Задача (№ 13.325). Можно изготовить 9000 деталей на нескольких новых станках одинаковой конструкции и одном станке старой конструкции, работающем вдвое медленнее каждого из новых станков. А можно и этот старый станок заменить новым станком той же конструкции, что и остальные. Тогда по второму варианту на каждом станке изготовлялось бы на 200 деталей меньше, чем на одном новом станке по первому варианту. Сколько всего было станков?

Ответы. 1. 9. 2. 5.

4. Задачи на зависимость между компонентами арифметических действий

Составление уравнений в задачах данного раздела вытекает непосредственно из условия задачи.

Задачи, в которых требуется найти сумму слагаемых, каждое из которых составляет ту или иную часть искомой суммы

Задача (№ 13.040). Трое изобретателей получили за свое изобретение премию в размере 1410 р., причем второй получил $\frac{1}{3}$ того, что получил первый, и еще 60 р., а третий получил $\frac{1}{3}$ денег второго и еще 30 р. Какую премию получил каждый?

Решение.

1. Пусть первый изобретатель получил x рублей.

2. Тогда второй получил $\left(\frac{1}{3}x+60\right)$ рублей, третий получил $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x+60\right)+30=\left(\frac{x}{9}+50\right)$ рублей.

3. Из условия следует $x+\frac{1}{3}x+60+\frac{x}{9}+50=1410$, откуда $x=900$; $\frac{1}{3}\cdot 900+60=360$; $\frac{900}{9}+50=150$.

Ответ. 900 р., 360 р., 150 р.

Решите задачи:

1. Задача (№ 13.015). Турист проехал расстояние между двумя городами за 3 дня. В первый день он проехал $\frac{1}{5}$ всего пути и еще 60 км, во второй $\frac{1}{4}$ всего пути и еще 20 км и в третий день $\frac{23}{80}$ всего пути и оставшиеся 25 км. Найти расстояние между городами.

2. Задача (№ 13.018). Вкладчик взял из сберкассы сна-

чала $\frac{1}{4}$ своих денег, потом $\frac{4}{9}$ оставшихся и еще 64 р. После этого у него осталось на сберкнижке $\frac{3}{20}$ всех его денег. Как велик был вклад?

3. Задача (№ 13.092). Денежная премия была распределена между тремя изобретателями: первый получил половину всей премии без $\frac{3}{22}$ части того, что получили двое других вместе; второй получил $\frac{1}{4}$ часть всей премии и $\frac{1}{55}$ часть денег, полученных вместе с остальными двумя; третий получил 300 р. Как велика была премия и сколько денег получил каждый изобретатель?

Ответ. **1.** 400 км. **2.** 240 р. **3.** 950 р., 400 р., 250 р., 300 р.

Задачи, в которых используется формула двузначного числа

Задача (13.027). Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 13. Если от этого числа отнять 9, то получим число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти число.

Решение.

1. Пусть x — цифра десятков,
y — цифра единиц,
$10x+y$ — искомое двузначное число.

2. Из условия задачи следует:

$$\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ 10x+y-9=10y+x; \end{cases} \quad \begin{cases} x=3, \\ y=2 \end{cases}$$

($x=-2$ — не подходит, так как x — цифра).

Ответ. 32.

Решите задачи:

1. Задача (№ 13.119). Произведение цифр двузначного числа в 3 раза меньше самого числа. Если к искомому числу прибавить 18, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти это число.

2. Задача (№ 13.160). Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 4 и в остатке 3. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 3 и в остатке 5. Найти это число.

Ответы. **1.** 24. **2.** 23.

Задачи, в которых слагаемые пропорциональны некоторым числам (или дано их отношение)

Задача (№ 13.028). Числители трех дробей пропорциональны числам 1, 2, 5, а знаменатели соответственно пропорциональны числам 1, 3, 7. Среднее арифметическое этих дробей равно $\frac{200}{441}$. Найти эти дроби.

Решение.

1. Числители дробей: x, $2x$, $5x$ (по условию задачи).
2. Знаменатели дробей: y, $3y$, $7y$ (по условию задачи).
3. Дроби: $\frac{x}{y}$, $\frac{2x}{3y}$, $\frac{5x}{7y}$.
4. Из условия задачи следует:

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{2x}{3y}+\frac{5x}{7y}\right):3=\frac{200}{441};\quad \frac{50x}{63y}=\frac{200}{441}.$$

$\frac{x}{y}=\frac{4}{7}$ — первая дробь;

$\frac{2x}{3y}=\frac{8}{21}$ — вторая дробь;

$\frac{5x}{7y}=\frac{20}{49}$ — третья дробь.

Ответ. $\frac{4}{7}$, $\frac{8}{21}$, $\frac{20}{49}$.

Решите задачи:

1. Задача (№ 13.042). Площади трех участков земли находятся в отношении $\frac{11}{4}:\frac{11}{6}:\frac{11}{8}$. Известно, что с первого участка собрано зерна на 72 ц больше, чем со второго. Найти площадь всех трех участков, если средняя урожайность составляет 18 ц с 1 га.

2. Задача (№ 13.048). Длина Дуная относится к длине Днепра как $6\frac{1}{3}:5$, а длина Дона относится к длине Дуная как 6,5:9,5. Найти протяженность каждой из рек, если Днепр длиннее Дона на 300 км.

Ответы. 1. 26 га. 2. 2850 км, 2250 км, 1950 км.

Задачи, где неизвестные являются членами прогрессии (или пропорции)

Задача (№ 13.061). Для оплаты пересылки четырех бандеролей понадобились 4 различные почтовые марки на общую сумму 2 р. 80 к. Определить стоимость марок, приобретенных отправителем, если эти стоимости составляют арифметическую прогрессию, а самая дорогая марка в 2,5 раза дороже самой дешевой.

Решение.

1. Пусть x рублей — стоимость самой дешевой марки.
2. Тогда $2{,}5x$ рублей — стоимость самой дорогой марки.
3. Стоимость всех четырех марок по условию есть сумма членов арифметической прогрессии, т. е. $\frac{x+2{,}5x}{2}\cdot 4=2{,}8$, $x=0{,}4$.

4. Из формулы общего члена прогрессии имеем: $a_4=a_1+3d$, $2{,}5x=x+3d$, $1=0{,}4+3d$, $d=0{,}2$.

$$a_2=0{,}4+0{,}2=0{,}6,\ a_3=0{,}6+0{,}2=0{,}8.$$

Ответ. 0,4; 0,6; 0,8; 1.

Решите задачи:

1. Задача (№ 13.144). Сумму всех четных двузначных чисел разделили на одно из них. Остатка не было. Получившееся частное только порядком цифр отличается от делителя, а сумма его цифр равна девяти. Какое двузначное число являлось делителем?

2. Задача (№ 13.211). Цифры некоторого трехзначного числа составляют геометрическую прогрессию. Если в этом числе поменять местами цифры сотен и единиц, то новое трехзначное число будет на 594 меньше искомого. Если же в искомом числе зачеркнуть цифру сотен и в полученном двузначном числе переставить его цифры, то новое двузначное число будет на 18 меньше числа, выраженного двумя последними цифрами искомого числа. Найти это число.

3. Задача (№ 13.299). Найти четыре числа, образующих пропорцию, если известно, что сумма крайних членов равна 14, сумма средних членов равна 11, а сумма квадратов таких четырех чисел равна 221.

Ответы. 1. 54. 2. 842. 3. 12; 8; 3; 2.

Задачи, компонентами которых являются геометрические величины

Задача (№ 13.057). Две силы приложены к одной точке и направлены под прямым углом. Величина одной из них на 4 Н больше величины другой, а величина равнодействующей на 8 Н меньше суммы величин данных сил. Найти величины данных сил и их равнодействующей (рис. 257).

Решение.

1. I сила — x Н.
2. II сила — $(x+4)$ Н.
3. Равнодействующая сил:

$$x+x+4-8=(2x-4)\text{ Н}=2(x-2)\text{ Н}.$$

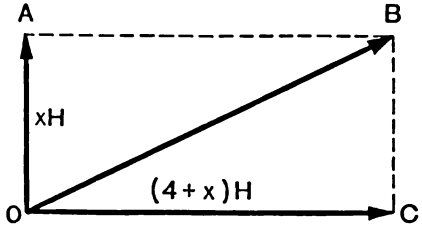


Рис. 257

4. Из прямоугольного треугольника OBC следует

$$x^2+(x+4)^2=(2(x-2))^2,\ x_1=0,\ x_2=12.$$

$x_1=0$ — не удовлетворяет условию задачи.

5. Следовательно, 12 Н — I сила,
16 Н — II сила,
20 Н — равнодействующая сила.

Ответ. 12 Н; 16 Н; 20 Н.

Решите задачи:

1. Задача (№ 13.059). По обе стороны улицы длиной 1200 м во вновь разбиваемом поселке лежат прямоугольные полосы земли, отведенные на участки: одна шириной 50 м, а другая — 60 м. На сколько участков разбит весь поселок, если более узкая полоса содержит на 5 участков больше, чем широкая, при условии, что на узкой полосе каждый участок на 1200 $м^2$ меньше, чем каждый участок на широкой полосе?

2. Задача (№ 13.147). Имеется лист жести в форме прямоугольника, у которого отношение длины к ширине равно 2:1. Из этого листа изготовлена открытая сверху коробка таким образом, что по углам листа вырезано по квадрату со стороной 3 см и получившиеся края загнуты. Определить размеры листа жести, если объем коробки оказался равным 168 $см^3$.

3. Задача (№ 13.191). К материальной точке приложены две силы, угол между которыми равен 30°. Величина одной из приложенных сил в $7\sqrt{3}$ раза больше величины другой, а величина равнодействующей силы на 24 Н больше, чем величина меньшей силы. Определить величину меньшей силы и равнодействующей силы.

4. Задача (№ 13.344). Величины двух сил, действующих на материальную точку под прямым углом, и величина их равнодействующей составляют арифметическую прогрессию. Определить, в каком отношении находятся величины сил.

Ответы. 1. На 45. 2. 10×20 $см^2$. 3. 2 Н и 26 Н. 4. 3:4:5.

5. Задачи на проценты

Задачи этого раздела входят как составная часть в решение других типовых задач. Заменяя проценты соответствующим количеством сотых долей числа, легко свести данную задачу на проценты к задаче на части.

Задачи, решаемые арифметическим способом

Задача (№ 13.007). Цену товара сперва снизили на 20%, затем новую цену снизили еще на 15% и, наконец, после перерасчета произвели снижение еще на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

Решение.

Эту задачу проще решить чисто арифметически, не составляя уравнения.

1. Пусть первоначальная цена товара x рублей, что соответствует 100%.

2. Тогда после первого снижения цена товара будет $x-0{,}2x=$ $=0{,}8x$ (р.).

3. После второго снижения

$$0{,}8x-0{,}15\cdot 0{,}8x=0{,}68x \text{ (р.)}.$$

4. После третьего снижения

$$0{,}68x-0{,}68x\cdot 0{,}1=0{,}612x \text{ (р.)}.$$

5. Всего цена товара снизилась на

$$x-0{,}612x=0{,}388x \text{ (р.)}.$$

$$x-100\%,$$

$$0{,}388x-y\%;$$

$$y\%=\frac{0{,}388x\cdot 100\%}{x}=38{,}8\%.$$

Ответ. На 38,8%.

Решите задачу:

Задача (№ 13.013). В январе завод выполнил 105% месячного плана выпуска готовой продукции, а в феврале дал продукции на 4% больше, чем в январе. На сколько процентов завод перевыполнил двухмесячный план выпуска продукции?

Ответ. На 7,1%.

Задачи, в которых известно, сколько процентов одно число составляет от другого

Задача (№ 13.049). Первое из неизвестных чисел составляет 140% второго, а отношение первого к третьему равно $\frac{14}{11}$. Найти эти числа, если разность между третьим и вторым на 40 единиц меньше числа, составляющего 12,5% суммы первого и второго чисел.

Решение.

1. Пусть второе число — x. Тогда первое число — $1{,}4x$, третье число — $\frac{11}{14}\cdot 1{,}4x=1{,}1x$.

2. Из условия задачи следует уравнение

$$1{,}1x-x=0{,}125\,(1{,}4x+x)-40.$$

3. Решая уравнение, получим $x=200$.

$$1{,}4x=280,\ 1{,}1x=220.$$

Ответ. 280, 200, 220.

Решите задачи:

1. Задача (№ 13.017). Найти сумму трех чисел, зная, что третье относится к первому как $4{,}5:\frac{15}{4}$ и составляет 40% второго, а сумма первого и второго равна 400.

2. Задача (№ 13.036). Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сухие — 12% воды. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих грибов?

Ответы. **1.** 520. **2.** 2,5 кг.

Задачи, в которых известно, на сколько процентов одно число больше (или меньше) другого

Задача (№ 13.154). За килограмм одного продукта и 10 кг другого заплачено 2 р. Если при сезонном изменении цен первый продукт подорожает на 15%, а второй подешевеет на 25%, то за такое же количество этих продуктов будет заплачено 1 р. 82 к. Сколько стоит килограмм каждого продукта?

Решение.

1. Пусть стоимость 1 кг первого продукта x рублей.
2. Стоимость 1 кг второго продукта y рублей.
3. Стоимость 1 кг первого продукта после подорожания
$$x+0{,}15x=1{,}15x.$$
4. Стоимость 1 кг второго продукта после снижения
$$y-0{,}25y=0{,}75y.$$
5. Из условия задачи следует:
$$\begin{cases} x+10y=2, \\ 1{,}15x+0{,}75\cdot 10y=1{,}82. \end{cases}$$
6. Решая систему уравнений, получим $x=0{,}8$, $y=0{,}12$.

Ответ. 80 к., 12 к.

Решите задачи:

1. Задача (№ 13.075). Двое рабочих за смену вместе изготовили 72 детали. После того как первый рабочий повысил производительность труда на 15%, а второй — на 25%, вместе за смену они стали изготовлять 86 деталей. Сколько деталей изготовляет каждый рабочий за смену после повышения производительности труда?

2. Задача (№ 13.108). На полях, выделенных агролаборатории для опытов, с двух земельных участков собрали 14,7 ц зерна. На следующий год после применения новых методов агротехники урожай на первом участке повысился на 80%, а на

втором — на 24%, благодаря чему с этих же участков было собрано 21,42 ц зерна. Сколько центнеров зерна собирают с каждого участка после применения новых методов агротехники?

Ответы. 1. 460 и 40. 2. 10,26 ц и 11,16 ц.

6. Задачи на смеси (сплавы)

Задачи этого раздела вызывают наибольшие затруднения. Очень важно разобраться в самом тексте задачи. Необходимо научиться расчленять такую задачу на ряд простейших.

Задачи, в которых отношение компонентов смеси задано в процентах

Задача (№ 13.041). Смешали 30%-ный раствор соляной кислоты с 10%-ным и получили 600 г 15%-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

Решение.

1. Пусть 30%-ного раствора взято x граммов, а 10%-ного раствора взято y граммов.

2. Тогда из условия ясно, что $x+y=600$. Так как первый раствор 30%-ный, то в x граммах этого раствора содержится $0{,}3x$ граммов кислоты.

3. Аналогично в y граммах 10%-ного раствора содержится $0{,}1y$ граммов кислоты.

4. В полученной смеси по условию задачи содержится

$$600\times 0{,}15=90 \text{ г кислоты,}$$

откуда следует

$$0{,}3x+0{,}1y=90.$$

Составим систему и решим ее:

$$\begin{cases} x+y=600, \\ 0{,}3x+0{,}1y=90; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=600, \\ 3x+y=900. \end{cases}$$

$$x=150,\ y=600-150=450.$$

Ответ. 150 г, 450 г.

Решите задачи:

1. Задача (№ 13.090). Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску сплава, чтобы получившийся новый сплав содержал 40% меди?

2. Задача (№ 13.234). Имелось два сплава меди с разным

процентным содержанием меди в каждом. Число, выражающее в процентах содержание меди в первом сплаве, на 40 меньше числа, выражающего в процентах содержание меди во втором сплаве. Затем оба эти сплава сплавили вместе, после чего содержание меди составило 36%. Определить процентное содержание меди в первом и во втором сплавах, если известно, что в первом сплаве меди было 6 кг, а во втором — 12 кг.

3. Задача (№ 13.045). Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45% меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 60% меди?

4. Задача (№ 13.310). Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько нужно взять металла каждого из этих сортов, чтобы получить 140 т стали с содержанием 30% никеля?

Ответы. **1.** 1,5 кг. **2.** 20% и 60%. **3.** 13,5 кг. **4.** 40 т и 100 т.

7. Задачи на разбавление

Задача. Из бака, наполненного спиртом, отлили часть спирта и долили до прежнего объема водой, затем из бака отлили столько же литров смеси, сколько в первый раз отлили спирта, после чего в баке осталось 49 л чистого спирта. Сколько литров спирта отлили из бака в первый и во второй раз, если в баке содержалось 64 л?

Решение.

1. Будем полагать, что x литров спирта отлили в первый раз. Тогда $(64-x)$ литров спирта осталось в баке.

2. После того как бак долили водой, в нем стало 64 л смеси. Следовательно, в 1 л смеси содержалось $\frac{64-x}{64}$ литров спирта.

3. Так как во второй раз отлили x литров смеси, то спирта отлили во второй раз $\left(\frac{64-x}{64}\right)x$ литров.

4. Из условия следует, что из бака всего отлили $64-49=15$ л спирта.

5. Составим уравнение и решим его:

$$x+\frac{(64-x)x}{64}=15.$$

Откуда

$$x_1=8,\ x_2=120 \text{ (не удовлетворяет условию).}$$

Во второй раз отлили

$$\frac{(64-8)\cdot 8}{64}=7.$$

Ответ. 8 л, 7 л.

Решите задачи:

1. З а д а ч а. Сосуд объемом 8 л наполнен воздухом, содержащим 16% кислорода. Из сосуда откачали x литров воздуха и добавили такое же количество азота. Затем откачали x литров смеси и опять добавили такое же количество азота. В итоге в сосуде оказалось лишь 9% кислорода. Определить x.

2. З а д а ч а (№ 13.023). В сосуде было 12 л соляной кислоты. Часть кислоты отлили и сосуд долили водой. Затем снова отлили столько же и опять долили водой. Сколько жидкости отливали каждый раз, если в сосуде оказался 25%-ный раствор кислоты?

3. З а д а ч а (№ 13.341). Из сосуда, наполненного кислотой, вылили несколько литров и долили водой; потом опять вылили столько же литров смеси, тогда в сосуде осталось 24 л чистой кислоты. Емкость сосуда 54 л. Сколько кислоты вылили в первый и второй раз?

О т в е т ы. 1. 2 л. 2. 6 л. 3. 18 л и 12 л.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Крамор Виталий Семенович

ПОВТОРЯЕМ И СИСТЕМАТИЗИРУЕМ
ШКОЛЬНЫЙ КУРС АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА

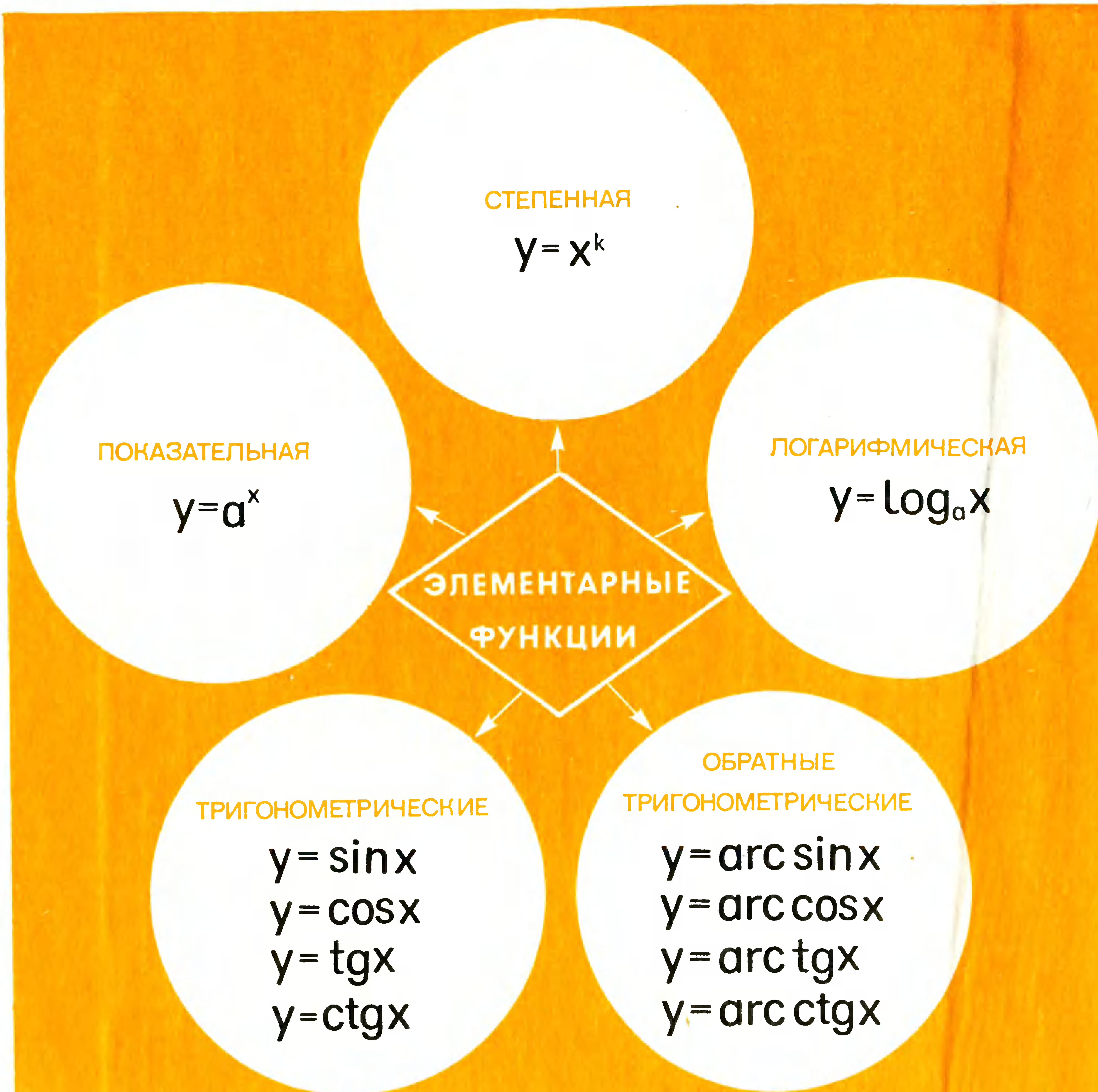
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Спец. редактор *А. М. Гольдман*
Редактор *Л. М. Котова*
Младший редактор *Л. И. Заседателева*
Художники *Б. Л. Николаев, Э. М. Фрам*
Художественный редактор *Ю. В. Пахомов*
Технический редактор *С. С. Якушкина*
Корректор *О. В. Ивашкина*

ИБ № 12108

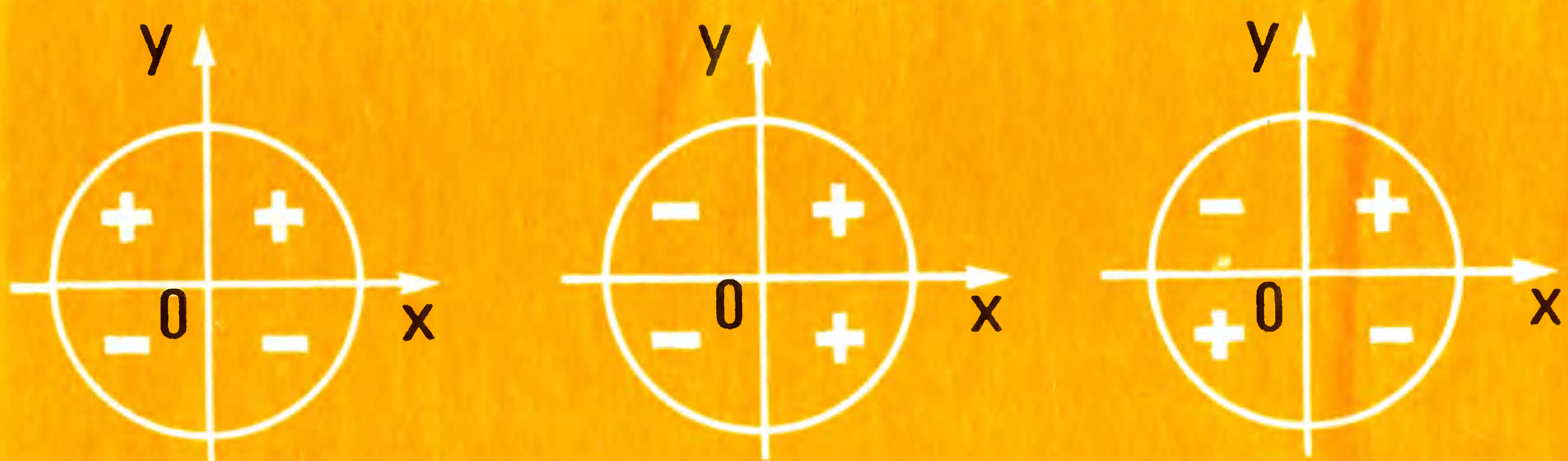
Сдано в набор 29.11.89. Подписано к печати 15.08.90. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бум. типограф. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 26,0+0,25 форз. Усл. кр.-отт. 26,68. Уч.-изд. л. 23,05+0,35 форз. Тираж 1 000 000 экз. Заказ № 689. Цена 95 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Министерства печати и массовой информации РСФСР. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Министерства печати и массовой информации РСФСР. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.



ЗНАКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ



ЗНАКИ СИНУСА

ЗНАКИ КОСИНУСА

ЗНАКИ ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

МОДУЛЬ ЧИСЛА

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{если } a\geqslant 0 \\ -a, & \text{если } a<0 \end{cases}$$

КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

Если $a\geqslant 0$, то $\sqrt{a}\geqslant 0$, $(\sqrt{a})^2=a$

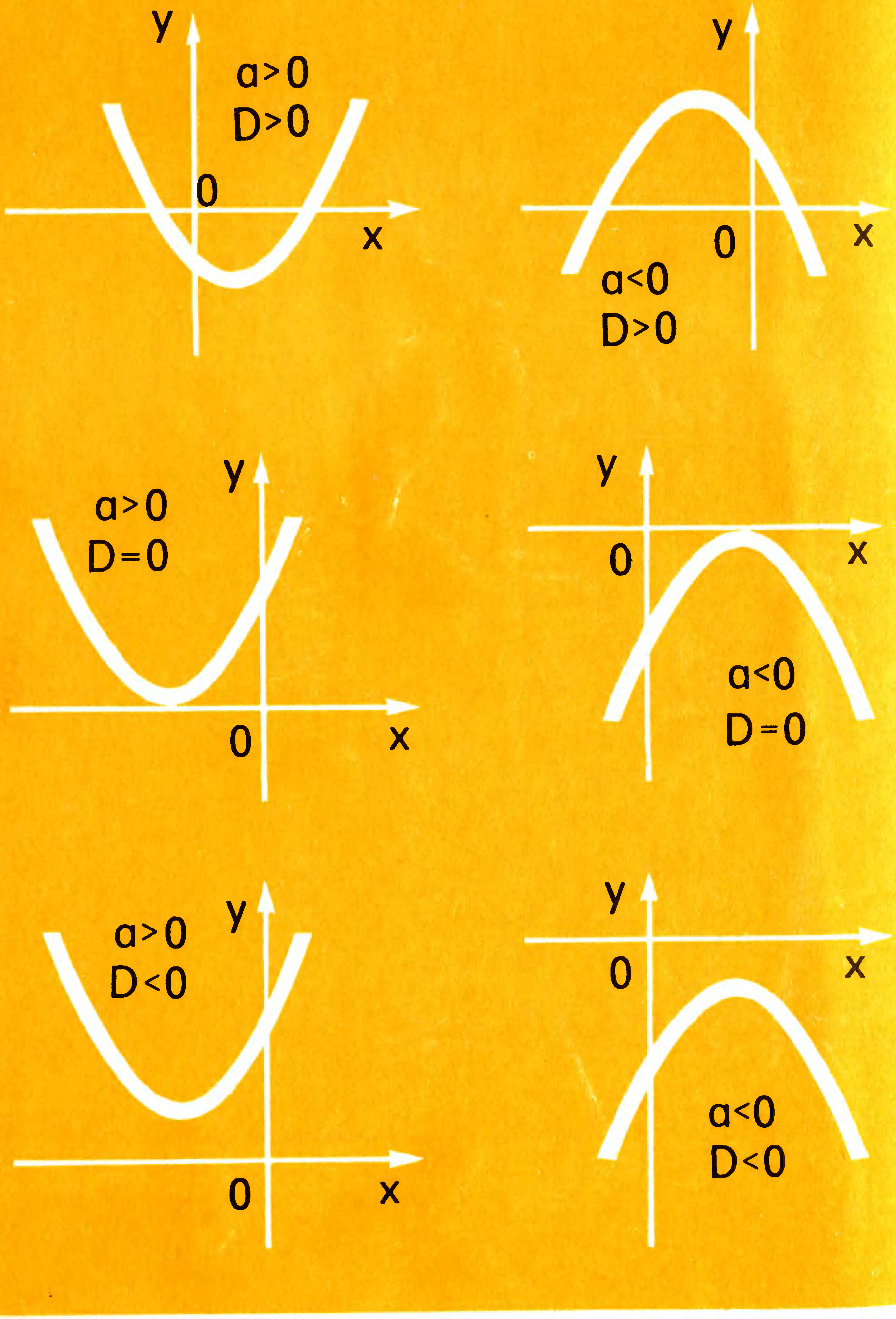
Если $a\geqslant 0, b\geqslant 0$, то $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$

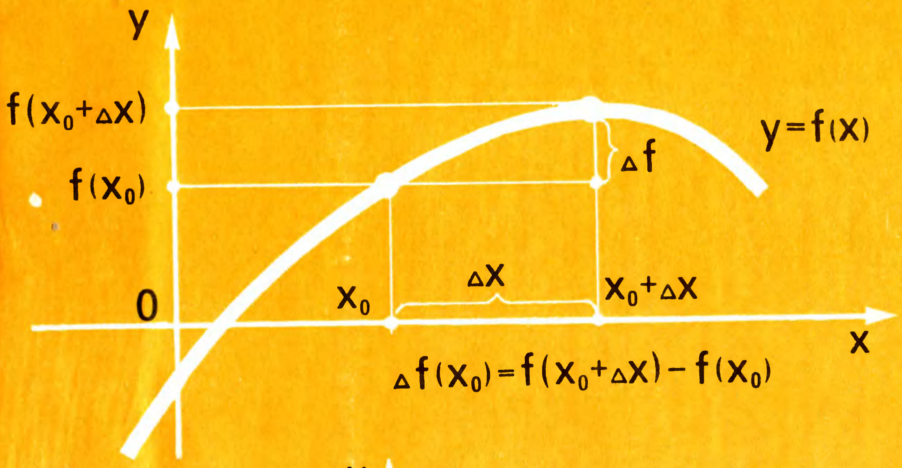
Если $a\geqslant 0, b>0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

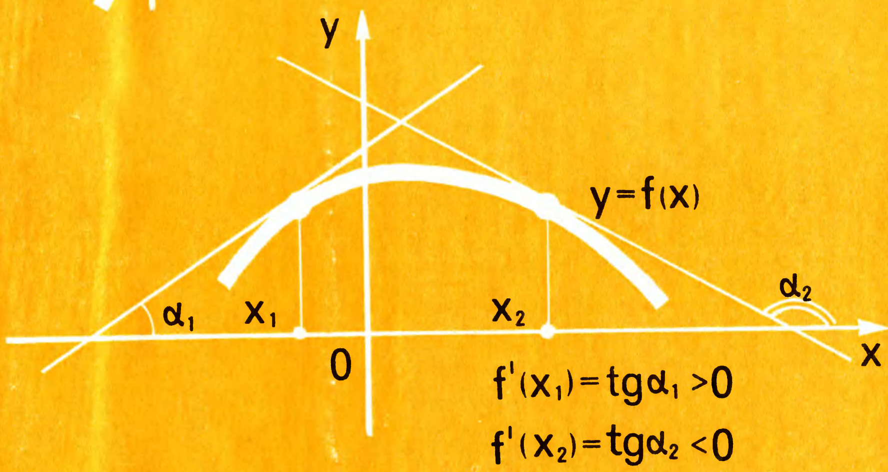
$$\sqrt{a^2}=|a|$$

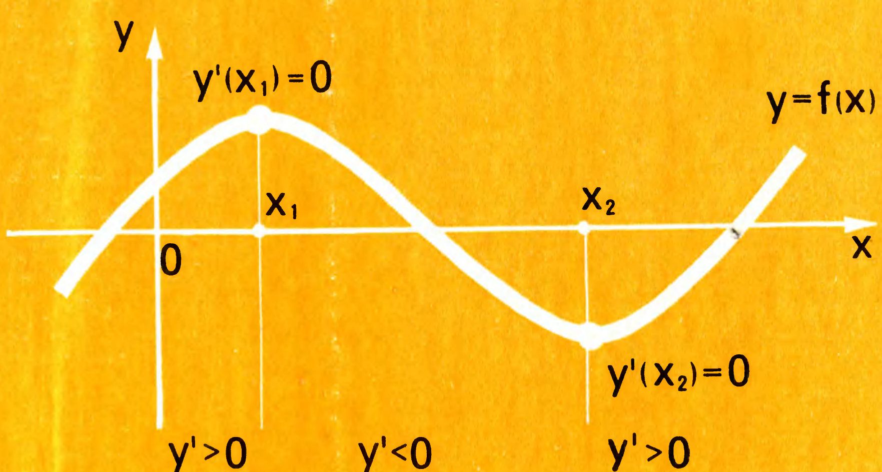
ГРАФИК КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

$y = ax^2 + bx + c \qquad (D = b^2 - 4ac)$




y
$f(x_0+\Delta x)$
$f(x_0)$
$y=f(x)$
Δf
0
x_0
Δx
$x_0+\Delta x$
x
$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$


y
$y=f(x)$
α_1
x_1
x_2
α_2
0
x
$f'(x_1)=tg\alpha_1>0$
$f'(x_2)=tg\alpha_2<0$


y
$y'(x_1)=0$
$y=f(x)$
x_1
x_2
0
x
$y'(x_2)=0$
$y'>0$
$y'<0$
$y'>0$