Н. Н. КРУЛИКОВСКИЙ

ПУТИ РАЗВИТИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н. Н. КРУЛИКОВСКИЙ

ПУТИ РАЗВИТИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

Томск – 2008

Книга о путях развития спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов для читателей, интересующихся и занимающихся вопросами функционального анализа и дифференциальных уравнений.

Редактор
доктор физико-математических наук
профессор С. П. Гулько

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение ……………………………………………………………………….3
Глава 1. Классическая задача о разложении произвольной функции в ряд по собственным функциям краевой задачи.
§ 1. Задача о колебании струн……………………………………….. …….9
§ 2. Введение новых систем функций и алгебраические корни теории собственных значений……………………………………………………… …12
§ 3. Открытие Фурье……………………………………………………......14
§ 4. Развитие исследований Фурье…………………………………………18
Глава 2. Исследования Штурма и Лиувилля и регулярная задача.
§ 1. Фундаментальные исследования Штурма…………………………….20
§ 2. Фундаментальные исследования Лиувилля…………………………..26
§ 3. Исследования Чебышева, Сонина, Грамма по теории ортогональных функций…..36
§ 4. Исследования Стеклова о полноте системы собственных функций………………...40
§ 5. Исследования регулярной задачи Штурма-Лиувилля в конце XIX века……………43
Глава 3. Теория интегральных уравнений Гильберта и возникновение понятия гильбертова пространства.
§ 1. Возникновение теории интегральных уравнений……………………………..47
§ 2. Работы Гильберта по теории линейных интегральных уравнений…………………..48
§ 3. Исследования Буницкого, Миллера и Дини……………………………………...64
§ 4. Исследования Биркгофа и Тамаркина……………………………………………..66
Глава 4. Возникновение теории сингулярных задач спектральной теории дифференциальных операторов.
§ 1. Регулярный и сингулярный случаи задачи Штурма-Лиувилля………………………73
§ 2. Работы Вейля…………………………………………………………………….. 73
§ 3. Возникновение качественной спектральной теории…………………………………82
§ 4. Исследования Виндау и некоторые другие работы……………………………….84
Глава 5. Конкретные теории линейных операторов в гильбертовом пространстве.
§ 1. Различные подходы к построению спектральной теории…………………………89
§ 2. Работы Шмидта…………………………………………………………………….90
§ 3. Теории разложения с применением интегральных уравнений………………………94
§ 4. Исследования Хеллингера……………………………………………………………...99
§ 5. Развитие теории бесконечных систем линейных уравнений о работах Коха и Ф.Рисса………………………………………………………………106
§ 6. Исследования Карлемана по теории неограниченных операторов…………………...109
Глава 6. Абстрактные теории линейных операторов в гильбертовом пространстве.
§ 1. Работы Неймана……………………………………………………………………..112
§ 2. Теория неограниченных линейных операторов Рисса…………………………………115
§ 3. Монография М.Стоуна………………………………………………………………...116
§ 4. Изложение спектральной теории линейных операторов у Плеснера…………………118
§ 5. Другие изложения спектральной теории линейных операторов…………………124
§ 6. Теорема Гельфанда-Наймарка и ее применение в спектральной теории…………125
§ 7. Качественное исследование спектра дифференциальных операторов……………….127
Глава 7. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве и квантовая механика.
§ 1. Постановка вопроса о математических основах квантовой механики……………..134
§ 2. Теория Шредингера…………………………………………………………………136
§ 3. Изложение волновой механики у Френкеля……………………………………….138
§ 4. Теория Дирака……………………………………………………………………….140
§ 5. "Начала квантовой механики" Фока………………………………………………141
§ 6. "Математические основы квантовой механики" Неймана…………………………143

Глава 8. Спектральная теория сингулярных обыкновенных дифференциальных операторов.
§ 1. Особенности спектральной теории для дифференциальных операторов…………156
§ 2. Работы Титчмарша…………………………………………………………..158
§ 3. Изложение теории разложения по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка в книге Левитана……………………..164
§ 4. О методе направляющих функционалов Крейна. Работы Кодаиры………………...167
§ 5. Монография Наймарка "Линейные дифференциальные операторы"……………….168
§ 6. Асимптотические методы……………………………………………………………174
Глава 9. Обратная задача спектральной теории дифференциальных операторов.
§ 1. Постановка обратной задачи спектральной теории…………………………………..179
§ 2. О ранних работах по обратной задаче Штурма-Лиувилля…………………………...181
§ 3. Исследования по обратной задаче Гельфанда и Левитана…………………………..183
§ 4. Исследование обратных задач у Лейбензона…………………………………………188
§ 5. Обратная задача теории рассеяния……………………………………………………190
§ 6. Обратная задача спектральной теории и уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ). Нелинейные уравнения…………………………………………………….192

Краткий историографический обзор……………………………………………………194
Хронология важнейших событий и открытий в спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов…………………………………..196
Указатель литературы……………………………………………………………………199
Именной указатель………………………………………………………………………...217

ВВЕДЕНИЕ

Спектральная теория дифференциальных операторов составляет существенный раздел общей спектральной теории операторов и занимает видное место в математических исследованиях XIX и XX столетий и приложениях математики к физическим теориям. Корни спектральной теории дифференциальных операторов уходят в теорию собственных значений и собственных функций краевых задач математической физики, начало которой было положено в XVШ веке работами Бернулли, Эйлера и Даламбера о колебаниях струны. Прежде всего, возник интерес к тригонометрическим системам функций и проблеме разложения произвольной функции в ряд по функциям таких систем. Начальный этап развития исследований в этом направлении завершается работами Фурье, связанными с понятием рядов Фурье. Дальнейшие исследования приводят к выделению теории тригонометрических рядов в самостоятельный раздел математического анализа. Одновременно шло накопление сведений о других ортогональных системах функций (функции Бесселя, многочлены Лежандра и др.). Начало общей теории краевых задач, связанных с дифференциальным уравнением второго порядка, было положено работами Штурма и Лиувилля в 1830 годах. Основные результаты этих исследований состояли в доказательстве существования последовательности собственных значений и последовательности собственных функций краевой задачи, рассматривалась возможность разложения функции, принадлежащей некоторому классу, в ряд по системе собственных функций.

Исследование систем ортогональных функций принимает самостоятельный характер во второй половине XIX века, начиная с работ Чебышева. Большое внимание в дальнейших исследованиях уделяется системам ортогональных многочленов. Здесь можно назвать имена Лагерра, Эрмита, Грама, Сонина и других. Значительное развитие теория разложения функций в ряды по системам ортогональных функций, возникающих при решении краевых задач математической физики, получает в работах Стеклова. Для дальнейшего развития теории большое значение имело, идущее от метода наименьших квадратов Гаусса и исследований Чебышева, установление связи между теорией разложения функций в ряды ортогональных функций и задачей наилучшего квадратичного приближения функций.

Другим важным фактором для создания общей аналитической теории собственных значений оказалась обнаруженная глубокая аналогия между рассматриваемыми вопросами теории краевых задач математической физики с алгебраической задачей приведения квадратичной формы к главным осям. На частном примере эта аналогия была рассмотрена в 1894 году Пуанкаре.

Новые плодотворные идеи в теории собственных значений
и собственных функций математической физики возникли в связи с развитием теории линейных интегральных уравнений в конце XIX века. Особенно значительные результаты в теории линейных интегральных уравнений были получены Фредгольмом, который руководствовался аналогией линейного интегрального уравнения с системой линейных алгебраических уравнений.

Новый этап в развитии теории собственных значений связан с именем Гильберта. Его фундаментальные исследования по общей теории линейных интегральных уравнений (1904-1910 гг.) привели к введению одного из основных математических понятий XX века - гильбертова пространства. Соединение геометрических идей и образов с абстрактными понятиями теории множеств на базе актуальных аналитических теорий оказалось чрезвычайно плодотворным, определившим лицо нового раздела математики - функционального анализа, относящегося к лучшим достижениям математики XX века.

Классическая теория собственных значений краевых задач для дифференциальных уравнений (задача Штурма-Лиувилля) допускала в качестве коэффициентов дифференциальных выражений только непрерывные функции на конечном замкнутом отрезке (регулярный случай). Теория симметрических линейных интегральных уравнений (теория Гильберта-Шмидта) открывала пути для значительного расширения теории собственных значений и собственных функций для новых классов дифференциальных уравнений и краевых задач. Под влиянием идей Гильберта было выполнено большое число исследований, относящихся к задаче о разложении по собственным функциям дифференциальных уравнений второго и высших порядков, в частности, работы Шмидта, Миллера, Буницкого, Кнезера, Иланшереля, Тамаркина, Хильба и других.

Развитая Гильбертом спектральная теория симметричных ограниченных и частных случаев неограниченных билинейных форм позволила сделать новый значительный шаг в исследовании дифференциальных операторов. В работах Вейля 1908-1910 гг. впервые рассматривается теория разложения по собственным функциям дифференциальных операторов второго порядка для сингулярных случаев. Этими работами Вейля положено начало общей спектральной теории обыкновенных сингулярных дифференциальных операторов.

В работах Гильберта и его последователей, в частности и Вейля, используется в основном классический математический аппарат. Одновременно начинает развиваться теория гильбертова пространства в абстрактной форме. Для формирования общего функционального анализа большое значение имело развитие теории конкретных гильбертовых пространств - пространства последовательностей и пространства функций с интегрируемым квадратом. В течение двух десятилетий (1910-1930 гг.) теория линейных операторов в гильбертовом пространстве принимает вполне современную форму. Центральное место в этой теории занимает спектральная теория. Аксиоматическое изложение теории линейных операторов в гильбертовом пространстве было дано почти одновременно в работах Неймана (1929г.), М.Стоуна (1929г.) и в книге (1932г.) Ф.Рисса (1930г.). Более поздние изложения теории линейных операторов в гильбертовом пространстве наряду с методическими усовершенствованиями включали результаты новых исследований. Достаточно полную картину современного состояния теории линейных операторов в гильбертовом пространстве могут дать книги Ахиезера и Глазмана "Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве" [9], Данфорда и Шварца "Линейные операторы, [73] Плеснера "Спектральная теория линейных операторов" [196], Рисса и Секефальви-Надя "Лекции по функциональному анализу" [226], Морена "Методы гильбертова пространства" [172].

К середине 1920гг. результаты, полученные в теории гильбертова пространства, особенно в спектральной теории линейных операторов, оказались настолько полными и совершенными, что новая математическая теория смогла успешно ответить на запросы бурно развивавшейся в первой четверти XX века физической квантовой теории. Математической основой "матричной механики" Гейзенберга и «волновой механики» Шредингера стала спектральная теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Применение спектральной теории линейных операторов в квантовой физике дало новые стимулы для дальнейшего развития спектральной теории. Факты, найденные в абстрактной теории, получили реальный физический смысл. На единой математической основе удалось построить первую замкнутую систему квантовой теории, успешно объяснявшую различные факты квантовой физики. В построении математического аппарата квантовой механики активное участие приняли физики Гейзенберг, Борн, Йордан, Дирак, Шредингер и другие.

В связи с задачами квантовой механики в 1920-30 гг. появилось значительное число работ по спектральной теории дифференциальных операторов. В целях математического обоснования квантовой механики потребовалась разработка новых разделов спектральной теории линейных операторов, в частности, построение спектральной теории неограниченных самосопряженных операторов, теории расширения операторов и теоремы разложения. Обстоятельное изложение математического аппарата квантовой механики было дано в 1932г. Нейманом в книге "Математические основы квантовой механики" [185]. Наряду с развитием общей спектральной теории линейных операторов и ее применением к изучению конкретных операторов в последующие годы значительное внимание уделяется исследованию сингулярных дифференциальных операторов.

Методы общей спектральной теории линейных операторов в гильбертовом пространстве часто оказывались недостаточно гибкими в некоторых вопросах теории сингулярных дифференциальных операторов. Например, для изучения свойств спектра дифференциальных операторов в зависимости от поведения коэффициентов операторов, прямое применение аналитических методов оказывалось более эффективным. В монографии Титчмарша "Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка" [267], вышедшей в 1946г., спектральная теория дифференциальных операторов излагается без формального привлечения общей теории линейных операторов в гильбертовом пространстве.

В развитии спектральной теории сингулярных дифференциальных операторов большое значение имеют работы Крейна по теории расширений симметрических операторов и методу направляющих функционалов. С помощью последнего метода М. Г. Крейном была доказана и теорема разложения по собственным функциям для обыкновенных самосопряженных дифференциальных операторов. Метод направляющих функционалов Крейна служит, в известной степени, соединительным звеном между общей теорией линейных операторов и теорией разложения по собственным функциям дифференциальных операторов. Другое доказательство теоремы разложения для обыкновенных дифференциальных операторов было дано в 1949-50 гг. в работах Кодаиры. Позднее новые доказательства теоремы разложения получили Левитан, Иосида и Левинсон.

Появление монографий Титчмарша, Левитана 1950г. [132] и Наймарка 1954 г. [177] выражает переход к новому этапу в развитии спектральной теории дифференциальных операторов, как самостоятельного раздела функционального анализа со своими задачами и методами. В указанной книге Наймарка теория дифференциальных операторов изложена для операторов произвольного порядка.

Центральной проблемой спектральной теории дифференциальных операторов, как говорилось выше, является теорема о разложении по собственным функциям. Значительное число работ связано с изучением этой проблемы. Кроме доказательства основной теоремы разложения естественно возникает вопрос о единственности разложения или единственности так называемой спектральной функции.

Другой важной проблемой спектральной теории дифференциальных операторов является проблема расширения операторов.

Большое число исследований посвящено изучению асимптотических свойств собственных значений, спектра и собственных функций. К основным задачам спектральной теории относится определение индекса дефекта дифференциального оператора в зависимости от поведения коэффициентов дифференциального выражения. Важнейшей задачей спектральной теории дифференциальных операторов является характеристика спектра оператора также в зависимости от поведения коэффициентов дифференциального выражения, порождающего оператор. Полученные в этом направлении результаты дают весьма неполное представление о природе спектра. Изучены отдельные классы операторов с дискретным спектром, получены некоторые сведения о расположении непрерывной части спектра. Успешно разрабатываются прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. Обзору полученных этими методами результатов посвящена монография Глазмана [66]. К сравнительно мало изученным может быть отнесена спектральная теория дифференциальных операторов высших порядков. Полное решение обратной задачи спектрального анализа, состоящей в определении обыкновенного дифференциального оператора по спектральной функции, дано в работах Гельфанда, Левитана, Крейна, Марченко. Большой круг задач поставлен в связи с проблемой построения спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов. Новое направление спектральная теория дифференциальных операторов получает при переходе в пространства обобщенных функций. Математический анализ физических проблем продолжает служить благотворным источником развития спектральной теории дифференциальных операторов.

Наряду с существующими книгами по аксиоматической теории линейных операторов в гильбертовом пространстве и по спектральной теории дифференциальных операторов представляется полезным и даже необходимым создание работы, в которой было бы представлено происхождение и развитие спектральной теории дифференциальных операторов.

Вдохновляющим примером для автора служат исторические замечания в книгах Бурбаки, заключение в книге Морена "Методы гильбертова пространства", добавления в монографии Данфорда и Шварца, в книгах Левитана.

Признавая несовершенства данного изложения, автор будет считать свою цель достигнутой, если поможет читателю понять возникновение идей и методов спектральной теории дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве или направит его к первоисточнику и, тем самым, будет способствовать успеху в его собственных исследованиях.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору Левитану, ознакомившемуся с первоначальной рукописью книги и сделавшему ряд полезных замечаний, редактору книги профессору Гулько, старшему преподавателю Томского госуниверситета Лазареву и студентам ММФ, участвовавших в техническом оформлении книги, декану ММФ ТГУ Берцуну за содействие изданию.

ГЛАВА 1

КЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О РАЗЛОЖЕНИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФУНКЦИИ В РЯД ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ.

§ 1. Задача о колебании струны

Первые стимулы к возникновению теории собственных значений и собственных функций были вызваны задачами механики, наиболее развитой областью математического естествознания в XVIII веке. Прежде всего, это задача о колебании струны, изучение которой положило начало теории краевых задач математической физики. Позднее и другие задачи теории колебаний оказали влияние на формирование теории собственных значений и собственных функций.

История задачи о колебании струны неоднократно освещалась в литературе по истории математики [35, 60] в связи с развитием общих понятий математического анализа, таких как функция, сходимость рядов и т.п., или теории тригонометрических рядов. Физическая сторона задачи привлекала внимание историков механики и физики.

Задачей о колебании струны еще в XVII в. занимались Галилей, Бекман, Мерсенн.

Математическая формулировка задачи о колебании струны связывается с именем Брука Тейлора, который в 1713-15 гг. установил закон движения струны, выражающий зависимость между ускорением точки струны и радиусом кривизны. Задача была сведена к двум дифференциальным уравнениям второго порядка с постоянными коэффициентами. Рассматривая колебание струны в целом, он получил только главное колебание, считая, что всякое движение колеблющейся струны переходит в указанное им главное колебание. Полученный Тейлором результат состоял в том, что в любой момент времени струна имеет форму дуги синусоиды. Тейлор упустил другие колебания, кроме главного, хотя его теоретические рассуждения приводили к возможности их существования.

Одновременно с Тейлором интерес к задаче о струне проявил Бернулли, оспаривая приоритет у Тейлора. Бернулли останавливается на этой задаче в письме к своему сыну Даниилу Бернулли в 1727г. и несколько позднее в специальной статье. Результаты Бернулли аналогичны результатам Тейлора. Другими способами те же результаты были получены Германом в 1716г. и Бернулли в 1728г.

Несколько позднее в работах 1732г. и 1739г. Бернулли, изучая колебания свободно висящей нити, подходит к мысли о возможности существования других колебаний, кроме главного. Окончательную формулировку эти мысли получают в работе Бернулли в 1753г.

К задаче о струне неоднократно обращается Леонард Эйлер. В 1734г. он выделяет также только основной тон. В работе 1744г. при изучении колебаний пластинки с закрепленным концом Эйлер обнаруживает и другие колебания, кроме главного.

В 1747г. Даламбер записывает дифференциальное уравнение колебаний струны в виде

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

и получает известное решение как сумму двух произвольных функций. Для одного частного случая он довел решение до конца.

В следующем году Эйлер показывает, что для полного решения задачи о колебаниях струны нужно задавать граничные и начальные значения. В работе 1762г. Эйлер преобразует уравнение колебаний струны к виду

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = 0 .$$

Таким образом, Эйлер развил метод Даламбера, придав ему завершенный вид, и выяснил его физический смысл. Он обнаружил, что решение Даламбера представляет собой наложение двух распространяющихся в разные стороны волн. Эти исследования Даламбера и Эйлера положили начало известной продолжительной дискуссии о природе функции и важнейших понятий математического анализа.

К работам Эйлера о колебаниях струны примыкают его исследования о распространении звука. Для одного частного случая Эйлер в статье 1748г. получил решение задачи о колебании струны в виде тригонометрического ряда. Однако он сомневался в общности такого решения и в возможности представления любой функции в виде суммы периодических функций.

Принципиально иным был подход к решению задач колебания струн у Бернулли. В статье 1753г. [12] он высказывает и развивает новые важные положения общего характера о колебательных процессах. В основе его выводов лежат физические соображения о существовании основного тона и обертонов у звучащей струны. На основании исследований Тейлора и Бернулли каждому тону соответствует колебание вида

$$A_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где n – натуральное число, t – время. Отсюда Бернулли заключил, что форма колеблющейся струны образуется наложением этих колебаний, то есть представляется в виде ряда

$$\sum_n A_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Использованный Бернулли принцип наложения колебаний, или принцип суперпозиции частных решений дифференциального уравнения колебания струны и других механических систем, поднимал ряд вопросов математического обоснования этого приема. Бернулли видел истинность употребляемых методов в физической природе колебательных процессов. Бернулли придавал большое значение общности своего метода. В частности, он считал, что тригонометрический ряд позволяет дать представление любой функции, график которой может быть формой струны. Бернулли удалось получить и общие формулы для коэффициентов такого разложения. Вопрос о сходимости получающихся рядов оправдывался также природой задачи.

Метод Бернулли развился в метод разделения переменных для решения задач математической физики, приводящих к дифференциальным уравнениям в частных производных. Бернулли впервые получил систему собственных функций краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка и поставил проблему о разложении произвольной функции в ряд по функциям этой системы.

В теории колебаний в течение XVIII века последовательно развивалась плодотворная идея перехода от континуального тела к конечной системе материальных точек. Развитие этой идеи можно проследить от Тейлора до Лагранжа. Бернулли в 1727г. использовал этот прием для решения задачи о тяжелой цепи. Позднее его систематически стал применять Бернулли при решении конкретных задач теории колебаний. Пользовался этим переходом и Эйлер.

В работе 1753г. Бернулли заменяет струну нитью, нагруженной системой n материальных точек, равномерно распределенных по длине нити. Для такой системы он получает решение задачи о колебании в виде

$$y=\sum_{k=1}^{n} a_k \sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{2k\pi t}{T},$$

а при $n\to\infty$ в виде

$$y=\sum_{1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{2k\pi t}{T}.$$

Заметим, что в исследованиях по теории колебаний в XVIII веке, начиная с Тейлора, рассматривались малые колебания, приводящие к линейным дифференциальным уравнениям. Применявшаяся механиками XVIII века идея перехода к системе материальных точек оказала в дальнейшем существенное влияние на формирование представлений о многомерных и бесконечномерных пространствах.

Задачам о малых колебаниях различных тел ряд публикаций посвятил Жозеф Луи Лагранж. В статьях, начиная с 1759г., Лагранж рассматривал различные задачи теории малых колебаний. Отметим из них первую работу "Исследования о природе распространения звука" 1759г. и последующие статьи "Новые исследования о природе распространения звука" 1760-1761гг., "Решение различных проблем интегрального исчисления" 1762-1765гг. Обобщающее изложение результатов своих исследований дано Лагранжем в его главном труде "Аналитическая механика" в 1788г. (2-е издание 1811г. [125]).

Шестой раздел книги Лагранжа содержит теорию малых колебаний любой системы тел. Рассматривая общее решение проблемы о малых колебаниях системы тел около положения равновесия, Лагранж показывает, что задача сводится к линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами. После ряда преобразований и допущений Лагранж приходит к интегрированию уравнения

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + k\xi = 0,$$

в котором для коэффициента k может быть получено определенное число различных значений, соответствующее числу дифференциальных уравнений системы. Для каждого значения k решение записывается в виде:

$$\xi = E\sin\left(t\sqrt{k} + \varepsilon\right),$$

где E, ε – произвольные постоянные, а общее решение уравнения получается в виде суммы этих частных решений

$$\xi = E'\sin\left(t\sqrt{k'} + \varepsilon'\right) + E''\sin\left(t\sqrt{k''} + \varepsilon''\right) + E'''\sin\left(t\sqrt{k'''} + \varepsilon'''\right) + \ldots,$$

значения постоянных $E, E'', E''', \ldots, \varepsilon', \varepsilon''\varepsilon''', \ldots$ определяются начальным состоянием системы. Относительно возможных значений коэффициента k Лагранж из физических соображений требовал их вещественности, положительности и неравенства между собой. Вопрос о правомерности этих допущений Лагранжа был предметом исследований ряда ученых и достаточно полно освещен в литературе. Назовем здесь только имена Вейерштрасса, Сомова, Дарбу, Рауса, Пуанкаре, трудами которых была достигнута полная ясность в указанном вопросе.

Переходя к изучению колебаний струны, Лагранж рассматривает сначала задачу о малых колебаниях нити, нагруженной системой грузов, равномерно распределенных по длине нити и закрепленной в обоих концах или только в одном из них. Эту задачу Лагранж приводит к системе дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$\frac{d^2 y_k}{dt^2} = l\left(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}\right),$$

где $k = 1,2,...,n$, а l – некоторая положительная постоянная, с начальными условиями

$$y_i\Big|_{t=0} = Y_i, \ \frac{dy_i}{dt}\Bigg|_{t=0} = V_i.$$

Решение получается в виде конечной суммы

$$y_k = \frac{2}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} Y_i \sin\frac{ij\pi}{n+1}\right)\sin\frac{ik\pi}{n+1}\cos\left(2t\sqrt{l}\sin\frac{i\pi}{2(n+1)}\right)+$$

$$+\frac{1}{2(n+1)}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} V_j \sin\frac{ij\pi}{n+1}\right)\frac{\sin\frac{ik\pi}{n+1}\sin\left(2t\sqrt{l}\sin\frac{i\pi}{2(n+1)}\right)}{\sin\frac{i\pi}{2(n+1)}}.$$

Колеблющуюся струну Лагранж рассматривает как предельный случай нагруженной нити, когда n стремится к бесконечности, а промежутки между телами становятся бесконечно малыми. После ряда преобразований решение принимает вид

$$y = 2\sum_{\rho=1}^{\infty}\sin\frac{\rho\pi x}{l}\left[A^{(\rho)}\cos(\rho\pi h' t) + \overset{\bullet}{A}{}^{(\rho)}\frac{\sin(\rho\pi h' t)}{\rho\pi h'}\right].$$

Сравнивая полученный результат с формулой Д.Бернулли, Лагранж отмечает, что у Бернулли $\overset{\bullet}{A}{}^{(\rho)}$ равны нулю, а $A^{(\rho)}$ постоянные, зависящие от начального вида струны. Лагранж дополняет рассуждения Бернулли о гармонических тонах звучащей струны и показывает сложность этого анализа в зависимости от начальных и граничных условий. Одновременно он отмечает трудности при объяснении этого явления. В "Аналитической механике" [125] Лагранж замечает, что "хотя формулы п. 46 дают точно движение струны по истечении времени t, тем не менее, бесконечные ряды, входящие в эти формулы не дают возможности составить ясное и наглядное представление об этом движении". Лагранж считает представление колебания струны и начальной фигуры струны в виде бесконечного ряда только гипотетическим и использует конечное число членов ряда для приближенного изображения колебания.

Лагранж понимал трудности, связанные с предельным переходом от конечного к бесконечному и в дальнейших работах приводил другие решения уравнения колебания струны и вносил уточнения в обоснования возможности предельного перехода и представления решения в виде тригонометрического ряда. Требования Лагранжа состояли в бесконечной дифференцируемости начальной функции. Лагранж в своих исследованиях близко подошел к получению формул для нахождения коэффициентов тригонометрического ряда. Механические образы ограничивали его в расширении понятия функции. Недооценка математиками XVIII века представления функций тригонометрическим рядом выразилась и в том, что формулы для нахождения коэффициентов разложения функций в тригонометрические ряды не были осмыслены во всей их общности, хотя были неоднократно получены при решении конкретных задач механики и астрономии Даламбером, Клеро, Эйлером.

§ 2. Введение новых систем функций и алгебраические корни теории собственных значений.

В работах математиков XVIII века наряду с тригонометрической системой при решении различных задач появляются и другие системы функций.

Бернулли при решении одной задачи о колебании висящей нити получил ряд

$$1-\frac{x}{n}+\frac{xx}{4n^2}-\frac{x^3}{4\cdot 9n^3}+\frac{x^4}{4\cdot 9\cdot 16n^4}-\frac{x^5}{4\cdot 9\cdot 16\cdot 25n^5}+etc\,,$$

представляющий собой функцию Бесселя нулевого индекса от аргумента $2\sqrt{\frac{x}{n}}$. Позднее для этой задачи было получено дифференциальное уравнение и его решение в виде ряда.

В 1764г. Эйлер при решении задач о колебаниях мембран получил уравнение

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}+\left(\frac{\alpha^2}{l^2}-\frac{\beta^2}{r^2}\right)u=0,$$

Где α,β,l - постоянные, причем l характеризует упругие свойства мембраны. Решение этого уравнения было получено в виде ряда

$$u=r^{\beta}\left(1-\frac{\alpha^2r^2}{2(n+1)l^2}+\frac{\alpha^4r^4}{2\cdot4(n+1)(n+3)l^4}-\dots\right),$$

где n = $2\beta+1$. Это функция Бесселя с индексом β, который может быть 0,1,2,..., от аргумента $\frac{\alpha r}{l}$. В названной работе Эйлер указал полную систему собственных колебаний для прямоугольной и круглой мембран.

В 1770г. Лагранж при решении задачи о движении планет получил ряды, в которых встречались функции Бесселя $J_n(n\varepsilon)$ целочисленного индекса. Подробное изучение функций, получивших его имя, было проведено Бесселем в 1824г.

В исследованиях о притяжении однородных сфероидов и о фигуре планет Лежандр применял многочлены, впоследствии названные его именем. Им были доказаны некоторые важные свойства этих многочленов, в частности, ортогональность и норма по современной терминологии. Развитие теории многочленов Лежандра и их применения были продолжены Лапласом. Лежандром и Лапласом разработана также теория сферических функций. У Лапласа при решении конкретных задач о притяжении тел встречаются и разложения в ряд по сферическим функциям.

В некоторых исследованиях того же периода встречаются системы функций вида $e^{i\lambda_n x}$, где λ_n образуют последовательность чисел, не кратных одному числу.

В конце XVIII века Парсевалем при умножении двух специальных степенных рядов была установлена формула, выражающая связь между суммой произведений коэффициентов этих рядов и интегралом от произведения функций, заданных рядами. Аналогичная зависимость в теории рядов Фурье, а затем и в теории других систем ортогональных функций, получила название равенства Парсеваля.

В связи с линейными преобразованиями систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами у Лагранжа впервые встречается понятие собственных значений линейной подстановки [183] . К этому понятию при изучении задачи о "вековых" неравенствах в движении планет приходили Лагранж и Лаплас.

Неявно понятие собственных значений линейной подстановки встречается и в некоторых других работах XVIII века. В частности, при нахождении главных осей конических сечений и главных осей инерции твердого тела Эйлером.

Непосредственные алгебраические корни спектральной теории легко усматриваются в теории собственных значений линейных преобразований, в теории матриц и квадратичных форм. Эти теории в современном виде возникли в конце XVIII века и были развиты в XIX веке.

Более глубокие корни этих теорий обнаруживаются в глубокой древности, на самых ранних этапах формирования математики.

Понятия ортогональности, введение прямого угла и квадратов расстояний связываются с теоремой Пифагора. От теории конических сечений известен шаг к аналитической геометрии Ферма и Декарта. В аналитической геометрии выявляется алгебраическая теория квадратичных форм и освобождение ее от геометрической оболочки. В XVIII веке, в связи с задачами аналитической геометрии, ставится проблема сведения квадратичной формы к сумме квадратов и нахождения ”осей”. Лагранж при изучении экстремума функций многих переменных в 1759г. решает вопрос о приведении квадратичной формы произвольного числа переменных к сумме квадратов. Эйлер занимался вопросом о приведении квадрики к осям, допустив, что собственные значения будут действительными. В 1770г. Эйлер поставил общую проблему ортогональных преобразований для любого числа n (для $n=3$ и $n=4$ он дал соответствующие формулы).

В 1826г. Коши [112] показал, что многие из рассматриваемых задач, связанных с собственными значениями линейных подстановок и квадратичных форм, имеют отношение к теории симметрических матриц. Им доказана инвариантность собственных значений этих матриц относительно преобразований подобия и вещественность их для матриц третьего порядка, а через несколько лет доказательства были расширены для любых симметрических матриц.

§ 3. Открытие Фурье.

Отчетливая формулировка и систематическое изложение метода разделения переменных для решения задач математической физики связаны с именем Фурье. В 1807г. Фурье представил в Парижскую Академию наук мемуар, оставшийся неизданным, в котором он указал новый метод решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми и начальными условиями. Как известно, этот метод, получивший название метода Фурье (или метода разделения переменных, или метода собственных функций), состоит в следующем (в формулировке для двух переменных – "пространственной" x и "временной" t):

1. Нахождение частного решения данного дифференциального уравнения в частных производных в виде произведения функции времени *t* на функцию координаты *x*. каждая из этих функций при этом удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению, содержащему произвольный параметр λ.

2. Нахождение значений параметра λ, получивших название характеристических чисел (позднее собственных значений), а затем соответствующих этим значениям функций координаты x (фундаментальных или собственных функций).

3. На основе принципа суперпозиции составляют сумму произведений найденных частных решений на произвольные постоянные, значения которых подбираются так, чтобы сумма удовлетворяла начальным условиям задачи. Сформулированный метод Фурье приводит к новым основным проблемам спектральной теории:

1) Существование собственных значений обыкновенного линейного дифференциального уравнения. Нахождение и изучение собственных значений и соответствующих собственных функций.

2) Разложение произвольной функции в ряд по собственным функциям данной краевой задачи.

Фурье решает отдельные частные задачи. Блестящее применение своего метода Фурье дает в 1822 году в знаменитом сочинении «Аналитическая теория тепла» (284), содержащем все ранее полученные результаты.

Решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при различных краевых и начальных условиях приводит к тригонометрической системе функций

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$

и к задаче о разложении произвольной функции $f(x)$ в ряд по этим функциям

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx .$$

Для тригонометрической системы доказывается ортогональность функций на отрезке $[0,2\pi]$ или $[-\pi,\pi]$,т. е. равенства

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = 0, \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = 0, m \neq n, \int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx = 0, m = 0,1,2,\ldots, n = 1,2,\ldots,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx dx = 0, n = 1,2,\ldots, .$$

Для коэффициентов ряда Фурье указывает формулы

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx, a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx, b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx, (n = 1,2,\ldots).$$

Возникающая на основе этой работы Фурье теория тригонометрических рядов, в частности теория рядов Фурье, получает самостоятельное развитие. История развития теории тригонометрических рядов освещена в ряде работ, среди которых можно указать книгу Паплаускаса [189], обзоры Буркгардта [37], Прингсгейма [200], Хильба, статьи Модина [169] и другие.

Основные результаты Фурье состоят в том, что он показал возможность представления единым аналитическим выражением в виде тригонометрического ряда широкого класса функций. Понятие функции после открытия Фурье приобретает новое содержание, включив в себя функции, задаваемые на различных участках различными аналитическими формулами в прежнем смысле. Фурье дал способ получения коэффициентов разложения функций в тригонометрические ряды, и правильно поставил проблему сходимости тригонометрических рядов. Первоначальный метод Фурье для определения коэффициентов разложения был первым примером решения системы алгебраических уравнений с бесконечным числом неизвестных.

Рассматривая общую теорему о сходимости тригонометрических рядов, Фурье получил выражение для частных сумм, отметил стремление коэффициентов тригонометрического ряда к нулю при $n \to \infty$. Наконец, Фурье для функций, заданных на всей вещественной оси, получил интегральное представление в виде двойного интеграла

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\, d\alpha \int_0^{\infty} \cos\beta(\alpha - x)\, d\beta ,$$

полученного как предельный случай от представления функций, заданных на конечном промежутке, в виде тригонометрического ряда.

Оставляя в стороне вопрос о значении открытия Фурье для развития понятия функции и основополагающее значение его для теории тригонометрических рядов, отметим его решающее влияние на развитие общей теории разложения функций в ряды или представления функций в виде интеграла. На частном случае тригонометрической системы Фурье разрабатывает отдельные стороны общей проблемы разложения функций в ряды по системам собственных функций, возникающих при решении краевых задач математической физики.

Известные интегральные формулы для коэффициентов ряда по косинусам обнаруживаются уже у Даламбера. При разложении функции в ряд

$$f(x)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx$$

Даламбер, производя почленное интегрирование, получает формулу для

$$\frac{1}{2}A_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx$$

с указанием на то, что для всех целых значений

$$\int_0^{\pi}\cos nxdx=0\,.$$

Общую формулу

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx\,,$$

впервые получил Клеро предельным переходом из интерполяционных формул.

Эйлер при вычислении коэффициентов ссылается на соотношения

$$\int_0^{\pi}\cos mx\cos nxdx=\begin{cases}0, m\neq n\\ \frac{\pi}{2}, m=n\neq 0\\ \pi, m=n=0\end{cases}.$$

Аналогично коэффициенты для разложения по синусам были получены Фруллани.

Представляя произвольную функцию $f(x)$ в интервале $(-\pi,\pi)$ как сумму четной функции

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

и нечетной

$$\psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

Фурье получает формулы для коэффициентов

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\,,\qquad B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\,.$$

Эти же формулы Фурье получает прямым почленным интегрированием ряда после предварительного умножения ряда, соответственно, на $\cos nx$ и $\sin nx$. В то же время эти формулы можно обнаружить в работах Бесселя, Гаусса и других. В показательной форме формулы

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-n\pi ix}dx$$

были получены Лапласом.

В связи с изучением произведений функций заданных рядами Парсеваль, как было выше отмечено, получил важную формулу для суммы произведений коэффициентов разложения двух функций в степенные ряды

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n z^n \quad \text{и} \quad \varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma_n z^{-n}$$

в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \Gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left\{ f\left(e^{xi}\right)\varphi\left(e^{xi}\right) + f\left(e^{-xi}\right)\varphi\left(e^{-xi}\right)\right\} dx .$$

Обобщение этих результатов находим у Фруллани и Коши. Последний записал формулу в виде: если

$$\varphi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n , \qquad \psi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n ,$$

то

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n r_1^n r_2^n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(r_1 e^{\rho i}\right)\psi\left(r_2 e^{-\rho i}\right) d\rho .$$

Для решения уравнений в частных производных Фурье применял преобразование

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx ,$$

получившее название преобразования Фурье.

Остановимся на получении Фурье упомянутой выше интегральной формулы. В "Аналитической теории тепла" [284], недоказательным с современной точки зрения методом, Фурье получил так называемый двойной интеграл Фурье. Эта формула была получена Фурье формальным предельным переходом в формуле разложения функции $f(x)$ с периодом $2\pi\lambda$ в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{nx}{\lambda} + b_n \sin\frac{nx}{\lambda}\right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)\cos\frac{nt}{\lambda} dt , \qquad b_n = \frac{1}{\pi t}\int_{-\pi t}^{\pi t} f(t)\sin\frac{nt}{\lambda} dt .$$

После подстановки этих значений коэффициентов в ряд заменой $\frac{n}{\lambda} = u$, $\frac{1}{\lambda} = \delta u$ и формального предельного перехода при $\lambda \to \infty$ получается вышеуказанная формула двойного интеграла Фурье, которой можно придать вид

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left(a(u)\cos xu + b(u)\sin xu\right) du ,$$

где

$$a(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos utdt , \qquad b(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin utdt .$$

Были получены формулы для четных и нечетных функций. Почти одновременно и независимо от Фурье эти формулы были получены Коши /112/. Он указал также экспоненциальную форму интеграла Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iut} dt$$

и двойственные соотношения между парами функций

$$F_c(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\cos utdt$$

и

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F_c(u)\cos xudu\,,$$

т.е. формулы косинус-преобразования Фурье. (Аналогично и синус-преобразования Фурье).

Используя экспоненциальную форму, формулы преобразований Фурье принимают вид

$$F(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iut}dt\,,\qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{-ixu}du\,.$$

Не останавливаясь здесь на условиях существования преобразований Фурье, как и на различных обобщениях интеграла и преобразований Фурье, отметим только более позднюю теорию преобразований Планшереля для функций из пространства $L^2(-\infty,\infty)$

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{e^{ixy}-1}{iy}dy\,,\qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\frac{e^{-ixy}-1}{-iy}dy\,.$$

В этих формулах равенства верны почти для всех x. Для преобразования Фурье имеют место обобщенные формулы Парсеваля. Если $F(x)$ и $G(x)$преобразования Фурье, соответственно, функций $f(x)$ и $g(x)$, то формально легко получается формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)G(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(-t)dt\,,$$

и после замены $g(t)$ на $\overline{g}(-t)$, а тогда $G(x)$ заменится $\overline{G}(x)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\overline{G}(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g}(t)dt\,.$$

При $f=g$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 dx=\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt\,.$$

Эта формула, по-видимому, впервые встречается у Рэлея [58]. Изложение теории интегралов Фурье и их обобщений дано в ряде монографий. Отметим здесь известные книги, получившие широкое распространение, как Титчмарша "Введение в теорию интегралов Фурье", Бохнера [25], Винера [47].

§ 4 Развитие исследований Фурье.

Исследования Фурье привлекли к проблеме разложения функций в ряды многих его современников. Важные уточнения и улучшения теории дал Пуассон. Для разложения произвольной функции в ряды Пуассон в работах 1820-23гг [202] предлагает другой метод и успешно применяет его в нескольких частных случаях. В книге "Математическая теория тепла" в 1835г. Пуассон не только объединяет свои прежние исследования, но дает новое обоснование сходимости тригонометрических рядов.

Пуассон рассматривает отдельно случаи разложения функций в ряды по синусам и по косинусам, а затем указывает общее разложение в виде

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x')dx'+\frac{1}{l}\sum\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi(x-x')}{l}f(x')dx'\,.$$

Исследования Пуассона в этом направлении были проанализированы

Паплаускасом [189].

В 1827г. Коши [112] указал возможность применения теории вычетов к задаче о разложении функции в ряды. Идея Коши состояла в возможности представления произвольной функции в виде интегрального вычета функции $\frac{\omega(\rho, x)}{F(\rho)}$, где $\omega(\rho, x)$ удовлетворяет рассматриваемому дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами при всех значениях ρ, а при значениях ρ, обращающих знаменатель $F(\rho)$ в нуль, также и краевым условиям задачи.

По методу Коши получалось разложение в ряд по собственным функциям, но сходимость полученных рядов не была доказана.

Одним из первых продолжил исследования Фурье Михаил Васильевич Остроградский. По возвращении из Парижа в 1828 году Остроградский на заседании Академии наук выступил с сообщением о своей работе по теории тепла. В опубликованных заметках [188] формулируется метод Фурье в общей постановке проблем математической физики. Остроградский устанавливает ортогональность фундаментальных функций, соответствующих двум различным характеристическим числам.

В одной краткой заметке содержится развернутая программа решения задачи теплопроводности, и ставится ряд новых общих задач анализа. Здесь Остроградский дал формулу, известную под названием формулы Грина, связывающую данный дифференциальный оператор и его сопряженный. Грин позднее получил эту же формулу в частном случае для оператора Лапласа.

Остроградский рассмотрел в общем виде краевую задачу на собственные значения и занимался изучением свойств системы собственных функций. Остроградский впервые поставил задачи на собственные значения в трехмерном пространстве в столь общем виде и развил метод Фурье. Он показал существование бесконечного множества собственных значений на конкретном случае задачи теплопроводности. Фурье в своем фундаментальном сочинении только упоминает о возможности разложения решения уравнения теплопроводности в ряд по собственным функциям, отличным от синусов и косинусов, ортогональность собственных функций в общем случае им не доказывалась.

Стеклов в своей речи в г. Полтаве в 1901г. отметил заслугу Остроградского в этом отношении: "Метод Фурье во всей общности был впервые сформулирован Остроградским, а затем уже в 1829г. Ламе и Дюгамелем, и поставил ряд общих задач анализа, которые впервые попытался разрешить Пуанкаре в 1894 г., то есть спустя 70 лет". Коши в 1841г. в своей работе вспомнил эту работу Остроградского, не касаясь общих разложений, о которых упоминает, но считает их сложными. Для разложения по тригонометрическим функциям Остроградский предвосхищает результаты Дирихле.

ГЛАВА 2
ИССЛЕДОВАНИЯ ШТУРМА И ЛИУВИЛЛЯ И РЕГУЛЯРНАЯ ЗАДАЧА.

§ 1. Фундаментальные исследования Штурма.

В 1836г. в первом томе нового математического журнала, основанного Лиувиллем, были опубликованы работы Штурма и последовавшие за ними статьи Лиувилля о линейных дифференциальных уравнениях, встречающихся в математической физике и о разложении функций в ряды по решениям этих уравнений.

Штурму принадлежат две большие статьи [314,315] и появившаяся позднее статья, совместная с Лиувиллем [316]. Сообщение о своих исследованиях было зачитано Штурмом в Академии наук 28 сентября 1833г., а публикации появились почти через три года.

В начале первой статьи Штурм отмечает, что большое число задач математической физики, относящихся к теории распространения тепла в телах и теории малых колебаний, приводит к дифференциальным уравнениям второго порядка. В то же время получить решение этих уравнений в явном виде удается только в частных случаях. Поэтому знание некоторых свойств этих функций, таких как их обращение в нуль, характер изменения, перемена знака, достижение экстремальных значений, представляет значительный интерес. Аналогия с тригонометрическими функциями, обнаруживаемая в общем случае, по мнению Штурма могла бы быть использована для получения численных значений искомых решений с достаточным приближением.

Штурм рассматривает линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$L\frac{d^2V}{dx^2} + M\frac{dV}{dx} + NV = 0$$

в интервале, $[x,X]$ приводя его к виду

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{dV}{dx}\right) + GV = 0 \qquad \text{(I)},$$

полагая

$$\frac{M}{L} = \frac{1}{K}\frac{dK}{dx} \qquad \text{и} \qquad \frac{N}{L} = \frac{G}{K},$$

или

$$K = e^{\int\frac{M}{L}dx}, \; G = \frac{N}{L}e^{\int\frac{M}{L}dx}.$$

При заданных значениях V и $\dfrac{dV}{dx}$ в некоторой точке решение данного уравнения определяется однозначно. Предполагается, что K положительна, так как в противном случае функция V может быть бесконечной. Далее Штурм показывает, что V и $\dfrac{dV}{dx}$ одновременно в нуль не обращаются, при этом G остается произвольной.

Весь первый мемуар посвящен изучению свойств вышенаписанного уравнения. Для ознакомления с методом Штурма проследим за доказательством того, что V и $\dfrac{dV}{dx}$ не обращаются одновременно в нуль.

Пусть V' – другое решение уравнения (I) определяемое другими начальными значениями при $x = a$. Умножая уравнение для V на V', а уравнение для V' на V, легко получаем

$$V'\frac{d}{dx}\left(K\frac{dV}{dx}\right)-V\frac{d}{dx}\left(K\frac{dV'}{dx}\right)=0,$$

и замечая, что левая часть этого равенства есть производная выражения $K\left(V'\frac{dV}{dx}-V\frac{dV'}{dx}\right)$, после интегрирования имеем $K\left(V'\frac{dV}{dx}-V\frac{dV'}{dx}\right)=C$,
где C – произвольная постоянная.

Если $V(a)\neq 0$, то можно так задать значения V' и $\frac{dV'}{dx}$ при $x=a$ чтобы левая часть была отлична от нуля, а тогда $C\neq 0$. Если же одновременно V и $\frac{dV}{dx}$, а не произвольная постоянная, в точке $x=a$ обращаются в нуль, то всегда $C=0$. Отсюда следует, что V меняет знак в точке, где она обращается в нуль».

Штурм детально изучает изменение функции V в зависимости от изменения (достаточно малого) коэффициентов уравнения K,G и произвольных постоянных A и B, значениями которых определяется данное частное решение уравнения. С этой целью Штурм считает K,G,A и B функциями параметра m. Обозначая δK, δV и так далее, изменения соответствующих функций при изменении параметра m, Штурм получает ряд интересных формул, например,

$$\delta Vd\left(K\frac{dV}{dx}\right)-Vd\delta\left(K\frac{dV'}{dx}\right)=V^2\delta Gdx.$$

Интегрируя эти равенства по частям в различных интервалах, получим

$$\delta VK\frac{dV}{dx}-V\delta\left(K\frac{dV}{dx}\right)=C+\int_x^x V^2\delta Gdx-\int_x^x\left(\frac{dV}{dx}\right)^2\delta Kdx,$$

$$\delta VK\frac{dV}{dx}-V\delta\left(K\frac{dV}{dx}\right)=C'-\int_x^X V^2\delta Gdx+\int_x^X\left(\frac{dV}{dx}\right)^2\delta Kdx,$$

и далее

$$\delta VK\frac{dV}{dx}-V\delta\left(K\frac{dV}{dx}\right)=\left(K\frac{dV}{dx}\right)^2\delta\left(\frac{V}{K\frac{dV}{dx}}\right)$$

и

$$\delta VK\frac{dV}{dx}-V\delta\left(K\frac{dV}{dx}\right)=-V^2\delta\left(\frac{K\frac{dV}{dx}}{V}\right).$$

Полученные равенства позволяют Штурму высказать ряд предложений о поведении функций G,K и V. Дальнейший анализ полученных соотношений приводит Штурма к формулировке условий, когда при возрастании параметра m нули функции $V(x,m)$ уменьшаются, то есть сдвигаются влево.

Изложение Штурма сопровождается геометрическими иллюстрациями с помощью семейства кривых $V(x,m)=0$. Продолжая анализ, Штурм устанавливает, что число изменений знака функции $V(x,m)$ может только увеличиваться при возрастании параметра m. Результаты исследований Штурм формулирует в теоремах для двух уравнений

$$\frac{d}{dx}\left(K'\frac{dV'}{dx}\right)+G'V''=0,\qquad \frac{d}{dx}\left(K''\frac{dV''}{dx}\right)+G''V''=0$$

на отрезке $[\mathrm{x},\mathrm{X}]$ в предположениях о коэффициентах уравнений $G''\geq G', K''\leq K'$ и некоторых условий на концах. Эти теоремы утверждают, что число нулей и изменений знака функции V'' не меньше, чем для функции V', причем значения x, при которых $V'(x)$ обращается в нуль, будут больше, чем соответствующие нули функции V''. Как следствие этих теорем Штурм доказывает, что между двумя нулями функции V' всегда содержится по крайней мере один нуль функции V''. Этот результат сразу приводит к теореме о чередовании нулей решений рассматриваемых уравнений, если число нулей функции V'' на единицу больше числа нулей функции V''. Штурм дает несколько доказательств некоторых теорем, детально обсуждая различные варианты и подвергая каждое свойство всестороннему анализу. Например, только что доказанное свойство существования нуля функции V'' между двумя последовательными нулями функции V' сразу дополняется замечанием, что между двумя последовательными нулями функции V' не может быть больше Δ нулей функции V'', где Δ - разность между числами нулей функций V'' и V' во всем интервале.

Подробному изучению подвергается отношение $\dfrac{K\frac{dV}{dx}}{V}$ и затем

$\dfrac{K\frac{dV}{dx}+HV}{V}$, где H постоянная или убывающая функция m при возрастании параметра m. Устанавливается, что второе отношение на правом конце $x=\mathrm{X}$ при возрастании m убывает от $+\infty$ до $-\infty$ между последовательными значениями m при которых V обращается в нуль.

Изучение уравнений $K\dfrac{dV}{dx}-hV=0$ и $K\dfrac{dV}{dx}-HV=0$ соответственно, на концах x и X приводит к тому, что значения m, удовлетворяющие одновременно этим двум условиям, возрастают при принятых предположениях о K,h,H.

В дальнейшем Штурм снимает сделанные допущения относительно H и рассматривает H как произвольную функцию m. Аналогичные предложения доказываются для выражения $K\dfrac{dV}{dx}+\rho V$ при некоторых предположениях на концах интервала.

Далее рассматриваются условия, при которых решение V основного уравнения принимает максимальные и минимальные значения. Теорема о чередовании нулей переносится на функции V и $K\dfrac{dV}{dx}+\rho V$.

Для применения развитой теории дифференциальное уравнение

$$L\frac{d^2U}{dx^2}+M\frac{dU}{dx}+NU=0$$

заменой $U=\theta V$ приводится к виду

$$\frac{d}{dx}\left(K\ \frac{dV}{dx}\right)+G\ V\ =0.$$

Дальнейшим преобразованием функции или независимого переменного уравнение приводятся к виду

$$\frac{d^2V}{dx^2}+GV=0\,.$$

В таком виде и изучает Штурм подобные уравнения. Предполагается, что G положительна для всех x возрастающих от a до b.

Принимая $G^{'}$ постоянной, равной или меньшей достаточно малого числа G и $G^{"}\geq G$, рассматриваются уравнения:

$$\frac{d^2V'}{dx^2}+G'V'=0\,,\qquad \frac{d^2V''}{dx^2}+G''V''=0\,.$$

Решения этих уравнений записываются в виде

$$V'=C'\sin\left(x\sqrt{G'}+c'\right),\qquad V^{"}=C^{"}\sin\left(x\sqrt{G^{"}}+c''\right).$$

Для этих решений указывается число нулей и сравнивается с числом нулей для функции V (решение уравнения с коэффициентом G). Здесь же отмечается зависимость числа нулей от длины интервала (a,b)). Штурм рассмотрел способ приближенного нахождения нулей функции V.

Штурм отмечает случай, когда интервал становится бесконечным $(b=\infty)$. В этом случае V обращается в нуль бесконечное число раз.

В качестве примера Штурм приводит уравнение

$$\frac{d^2U}{dx}+\frac{1}{x}\frac{dU}{dx}+\left(r^2-\frac{n}{x^2}\right)U=0\,,$$

то есть уравнение Бесселя, и указывает, что Пуассон дал интегральное выражение функции U.

Штурм замечает, что коэффициенты уравнения могут содержать также параметр r, причем в задачах физики обычно параметр в первой или во второй степени входит в коэффициент при U.

Штурм заканчивает свое исследование о нулях функций, определяемых уравнениями второго порядка сравнением значений функций V' и V'' при условии, что эти функции не меняют знака в рассматриваемом интервале, и указанием возможности получения приближенных значений функций, определяемых дифференциальным уравнением.

В заключение Штурм отмечает аналогию рассмотренной теории для дифференциальных уравнений

$$L\frac{d^2V}{dx^2}+M\frac{dV}{dx}+NV=0$$

с теорией, ранее развитой им для уравнения в конечных разностях второго порядка

$Lu_{i+1}+Mu_i+Nu_{i-1}=0$,

и теоремой о числе вещественных корней численного уравнения. Пришлось только от конечных разностей перейти к бесконечно малым разностям. Для дифференциальных уравнений рассуждения более тонкие и поэтому для уравнений в конечных разностях удалось получить более полные результаты.

Во втором большом мемуаре Штурм изучает уравнение теплопроводности для стержня и соответствующие краевые задачи, используя ранее полученные им результаты о свойствах решений дифференциальных уравнений второго порядка. В предисловии Штурм отмечает, что теория, развитая для уравнения теплопроводности может быть применена для изучения многих задач динамики.

Штурм рассматривает уравнение

$$g\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{d}{dx}\left(k\frac{du}{dx}\right)-lu,$$

с краевыми условиями

$$k\frac{du}{dx}-hu=0 \text{ для } x=\mathrm{x},$$

$$k\frac{du}{dx}+Hu=0 \text{ для } x=\mathrm{X},$$

и начальным условием

$$u=f(x) \text{ для } t=0.$$

Предполагая по Пуассону, что $u=Ve^{-rt}$, задача сводится к нахождению функции $V(x)$ и числа r, удовлетворяющих системе:

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dV}{dx}\right)+(gr-l)V=0,\quad k\frac{dV}{dx}-hV=0 \text{ для } x=\mathrm{x},\quad k\frac{dV}{dx}+HV=0 \text{ для } x=\mathrm{X}.$$

Уравнение и первое краевое условие используется для нахождения функции V, а второе краевое условие – для нахождения r.

Далее Штурм переходит к изучению свойств корней уравнения $F(r)=0$, служащего для определения r, то есть

$$F(r)\equiv k\frac{dV(x,r)}{dx}+HV(x,r)=0 \text{ для } x=\mathrm{X}.$$

Прежде всего, доказывается вещественность корней уравнения. Доказательство ведется методом от противного. Полагая $r=\lambda+\mu\sqrt{-1}$,а тогда $V=P+Q\sqrt{-1},$ дифференциальные уравнения и краевые условия распадаются на два. Комбинируя и интегрируя по частям, легко получить

$$\mu\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g\left(P^2+Q^2\right)dx=0.$$

В силу того, что $g>0$, отсюда следовало бы $P=Q=0$. В частности, на левом конце $F(x)=0,$ тогда и $\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=\mathrm{X}}=0,$ что противоречит доказанному ранее. Итак, $\mu=0$, то есть числа r вещественные. Здесь существенно только то, что g и k положительные. В несколько отличной форме доказательство вещественности собственных значений уравнений математической физики впервые было дано Пуассоном в 1828г.

Далее Штурм доказывает ортогональность собственных функций, используя дифференциальные уравнения с различными r и r' и первое краевое условие. Обычные выкладки приводят к равенству

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} gVV'dx=0.$$

Штурм отмечает, что по Пуассону вещественность собственных значений есть следствие ортогональности собственных функций. Действительно, для $r=\lambda+\mu\sqrt{-1}$ и $r'=\lambda-\mu\sqrt{-1}$ соответственно, $V=P+Q\sqrt{-1},$ $V'=P-Q\sqrt{-1},$ получаем

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g\left(P^2+Q^2\right)dx=0,$$

откуда $P = Q \equiv 0$, и функции P и Q тождественно равны нулю, если $\mu \neq 0$.

Интегрирование исходного уравнения от $\mathbf{x}$ до произвольного x дает

$$k\frac{dV}{dx} = C + \int_{\mathbf{x}}^{x}(-gr + l)Vdx\ .$$

Непосредственный анализ этого равенства приводит Штурма к утверждению о положительности значений r. Он приводит и другое доказательство этого факта и указывает еще на возможность применения развитой им раньше теории.

Далее Штурм дает прямое доказательство бесконечности положительных корней уравнения $F(r) = 0$, замечая, что оно следует из результатов его первого мемуара. Выбирая положительные постоянные k и n так, чтобы $k < k'$, $gr - l > k'n^2$, Штурм берет уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(k'\frac{dV'}{dx}\right) + kn^2V' = 0,$$

приводимое к виду

$$\frac{d^2V'}{dx^2} + n^2V' = 0\ ,$$

решение которого имеет вид

$$V' = C\sin(nx + c).$$

Выбирая подходящим образом c и применяя теорему сравнения, Штурм показывает, что функция V может иметь как угодно большое число нулей, то есть больше чем функция V', если $gr - l > k'n^2$, используя результаты первого мемуара о том, что число корней уравнения $F(r) = 0$ в фиксированном интервале $(0, R)$ конечно, но неограниченно возрастающее при росте R.

Расположив собственные значения краевой задачи в возрастающем порядке $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$, для соответствующей функции $V_i(x)$ на основании своих прежних исследований Штурм приходит к заключению, что $V_i(x)$ имеет $i - 1$ нулей в интервале (x, X), и распространяет на собственные функции результаты первого мемуара о взаимном расположении нулей функций V_i и V_{i+1}, а также V_i и $V_{i+\Delta}$. Аналогичные заключения делает Штурм и о расположении максимумов функций $V_i(x)$.

Далее Штурм переходит к изучению влияния коэффициентов уравнения и постоянных из краевых условий на расположение собственных значений, то есть корней уравнения $F(r) = 0$ и нулей собственных функций. При различных предположениях об изменений h и H /например, h и H возрастают и т.п./ удается получить характеристику изменения корней уравнения $F(r) = 0$ (в указанном случае корни возрастают). Если h убывает и H возрастает, то не удается сделать определенного заключения об изменении ρ_i, но нули функции V_i становятся, соответственно, меньше. При переходе к другому уравнению, при тех же h и H с условием $g'r' - l' \geq gr - l$ будет $\rho_i' \leq \rho_i$. При условии $g'\rho' - l' \geq g\rho_i - l$ и $k' \geq k$, нули функции V_i' сдвинуты влево от соответствующих нулей функции V_i. Получены и другие аналогичные результаты. Далее Штурм переходит к задаче разложения произвольной функции. Предполагая возможность разложения функции $f(x)$ в ряд

$$f(x) = C_1V_1 + C_2V_2 + \ldots + C_iV_i + \ldots,$$

получаются формулы для коэффициентов

$$C_i = \frac{\int\limits_{x}^{X} gV_i f(x)dx}{R_i},$$

где $R_i = \int\limits_{x}^{X} gV_i^2 dx$.

Штурм говорит, что можно доказать возможность представления произвольной функции $f(x)$ в виде сходящегося ряда.

Фурье и другие математики, по замечанию Штурма, не понимали важности и трудности этой проблемы. К моменту опубликования мемуара Штурма появилась еще статья Лиувилля, в которой было показано, что если ряд сходится, то его сумма равна $f(x)$. Заключительная часть мемуара Штурма посвящена изучению поведения решения уравнения теплопроводности $U(x,t)$. Следует отметить также теорему о числе нулей функции $\varphi(x) = A_m V_m + \ldots + A_n V_n$.

§ 2. Фундаментальные исследования Лиувилля.

К исследованиям по общей теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка Лиувилль пришел после опубликования нескольких работ, относящихся к теории разложения функций в тригонометрические ряды.

В работе [147] Лиувилль рассматривает разложение функций в ряды по синусам и косинусам, исходя из интегральной формулы Фурье и вводя функцию, подобную δ-функции, позволяющую ему дать разложение не только по системе синусов или косинусов кратных аргументов, но и по системам вида $\{\sin \rho_n x\}$ или $\{\cos \rho_n x\}$, где ρ_n – последовательность корней некоторого трансцендентного уравнения.

Отчетливо ставит Лиувилль задачу чисто математического характера о разложении функции в ряд по данной системе. В конце этой статьи Лиувилль указывает на свою работу, уже представленную в Академию наук, о разложении по системам функций, определяемых дифференциальным уравнением второго порядка.

В работе [148] Лиувилль указывает на возможность обобщения интегральной формулы Фурье заменой тригонометрических функций произвольной (конечно, с некоторым условием) системой функций $\varphi(x)$ и получает формулу

$$f(x) = \frac{1}{\omega(x)} \int\limits_0^\infty dz \int\limits_{-\infty}^\infty \varphi(x, z, zy - zx) f(y) dy,$$

или в более частном случае

$$f(x) = \frac{1}{A} \int\limits_0^\infty dz \int\limits_{-\infty}^\infty \varphi(z, zy - zx) f(y) dy.$$

В 1835г. Лиувилль представил в Академию наук свой первый мемуар /149/ о разложении функций в ряды по решениям дифференциального уравнения второго порядка, содержащего переменный параметр. Отправляясь от задач теории теплопроводности, Лиувилль ставит задачу нахождения функции V, не обращающейся тождественно в нуль, которая при некотором определенном значении параметра r удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\left(k\dfrac{dV}{dx}\right)}{dx}+\left(gr-l\right)V=0$$

и краевым условиям

$$\frac{dV}{dx}-hV=0 \text{ для } x=\text{x},$$

$$\frac{dV}{dx}+HV=0 \text{ для } x=\text{X},$$

где $g,k,l-$функции, причем $g>0$, $k>0$, $l\geq 0$, h,H – постоянные, могущие принимать значения от 0 до ∞.

Лиувилль подчеркивает, что он рассматривает задачу, независимо от проблем математической физики, что он ничего не предполагает априорно о происхождении функций, рядов и их природы. При решении физических задач допускается возможность разложения функций в ряды, но оказалось трудным установить эту возможность прямым способом и доказать строгим образом. Чтобы выполнялись краевые условия нужно, чтобы параметр был корнем некоторого трансцендентного уравнения

$$\omega(r)=0$$

Лиувилль ставит своей целью найти и строго доказать значение суммы ряда

$$\sum\left\{\frac{V\int\limits_{\text{x}}^{\text{X}}gVf(x)\,dx}{\int\limits_{\text{x}}^{\text{X}}gV^2dx}\right\}.$$

Без доказательства он указывает некоторые свойства корней уравнения $\omega(r)=0$, а именно:

1) Корни уравнения все вещественные и неравные, наименьший из корней ≥ 0. Располагая корни в порядке возрастания $r_1<r_2<\ldots<r_m<\ldots<r_n<\ldots$, обозначаем соответствующие функции $V_1(x), V_2(x),\ldots,V_n(x),\ldots$,

2) $\int\limits_{\text{x}}^{\text{X}}gV_m(x)V_n(x)\,dx=0$ для $m\neq n.$

3) Функции V_i не принимают бесконечных значений и могут менять знак только проходя через нулевое значение. $V_1(x)$ не имеет нулей, $V_2(x)$ имеет один нуль, $V_3(x)$ – два и т.д.

4) m - 1 корней уравнения $V_m(x)=0$ не равны между собой и заключены между m корнями уравнения $V_{m+1}(x)=0$.

5) Функция $\psi(x)=A_mV_m(x)+\ldots+A_nV_n(x)$, где A_i- постоянные, не равные все 0, имеет не менее m-1 и не более n-1 нулей в интервале (x,X). Корни могут быть кратными, тогда каждый корень считается столько раз, какова его кратность. Доказательство этого свойства, указанного Штурмом, было проведено Лиувиллем другим способом в статье [151].

Доказательство сходимости ряда Лиувилль основывает на двух леммах. Следствием первой служит утверждение, что для некоторых m-1 значений $a,b,c,\ldots$, заключенных между x и X, можно найти такие постоянные $A_1, A_2,\ldots,A_m$, что функция

$$\psi(x)=A_1V_1(x)+\ldots+A_mV_m(x)$$

обращается в нуль только в точках $a, b, c, \ldots$. Вторая лемма утверждает, что если для функции $\varphi(x)$ интегралы

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \varphi(x) V_i(x)\, dx = 0,$$

то $\varphi(x) = 0$ для $x \in [\mathrm{x}, \mathrm{X}]$.

Решение основной задачи Лиувилль проводит следующим образом. Обозначая через $F(x)$,сумму ряда

$$F(x) = \sum \frac{V_m(x) \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} V_m(x) f(x)\, dx}{\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g V_m^2 dx}$$

и умножая обе части равенства на gV_m, а затем производя интегрирование от x до X, Лиувилль получает, принимая во внимание ортогональность функций V_m,

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g V_m F(x)\, dx = \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g V_m(x) f(x)\, dx,$$

или

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g\big(F(x) - f(x)\big) V_m(x)\, dx = 0,$$

откуда, на основании леммы 2, $F(x) = f(x)$.

Для функции $f(x)$ Лиувилль допускал, что она может быть задана на отдельных участках различными формулами, но в точках, где она меняет форму, она имеет единственное значение. Полученный результат, по выражению Лиувилля, совпадает с результатами других геометров, но полученными другими методами, менее прямыми и менее строгими. Далее Лиувилль показывает, что $F(x) = f(x)$ удовлетворяет краевым условиям задачи.

В заключение Лиувилль делает несколько интересных замечаний. А именно,

1) Если равенство $\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \varphi(x) V(x)\, dx = 0$ имеет место для $k = 1, 2, \ldots, n$, то функция $\varphi(x)$ меняет знак в (x, X) не менее $(n-1)$ раз. Обозначая σ_nчастную сумму рассматриваемого ряда, Лиувилль сразу получает

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} y \sigma_n V_m(x)\, d = \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g V_m f(x)\, dx, \ (m \le n),$$

откуда

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g \rho_n V_m(x)\, dx = 0,$$

где $\rho_n = f(x) - \sigma_n$. На основании предыдущего ρ_n обращается в нуль, по крайней мере $(n-1)$ раз. Далее, нетрудно получить для линейной комбинации $Q = A_1 V_1(x) + \ldots + A_n V_n(x)$

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g \rho_n Q dx = 0.$$

В частности, если $Q = \sigma_n$, то

$$\int_{x}^{X} g\rho_n\sigma_n dx = 0,$$

и далее

$$\int_{x}^{X} g\sigma_n f dx = \int_{x}^{X} g\sigma_n\left(\sigma_n+\rho_n\right)dx = \int_{x}^{X} g\sigma_n^2 dx,$$

и, наконец, по выражению Лиувилля, получаем еще более замечательную формулу

$$\int_{x}^{X} g f^2(x)\,dx = \int_{x}^{X} g\left(\sigma_n+\rho_n\right)^2 dx = \int_{x}^{X} g\left(\sigma_n^2+\rho_n^2\right)dx,$$

так как, $\int_{x}^{X} g\sigma_n\rho_n dx = 0,$ а отсюда $\int_{x}^{X} g\sigma_n^2 dx \le \int_{x}^{X} gf^2 dx$,

и предполагается, что равенство достигается при $n=\infty$.

Таким образом, здесь у Лиувилля показано, что ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в среднем. Другой способ нахождения суммы ряда Штурм и Лиувилль указывают в совместной работе /316/, опубликованной вслед за основными мемуарами Штурма и Лиувилля.

Комбинируя уравнения и краевые условия на левом конце, получим

$$\int_{x}^{X} gVV_n dx = \frac{K}{r-r_n}\left(V\frac{dV_n}{dx} - V_n\frac{dV}{dx}\right).$$

При $x=\mathrm{X}$, полагая $\frac{dV}{dx}+HV\Big|_{x=\mathrm{X}} = \omega(r)$,

$$\int_{x}^{X} gVV_n dx = -KV_n(\mathrm{X})\frac{\omega(r)}{r-r_n}.$$

В частности, при $r\to r_n$

$$\int gV_n^2 dx = -KV_n(\mathrm{X})\,\omega'(r_n).$$

Разлагая на простые дроби, получим

$$\frac{V}{\omega(r)} = \sum\frac{V_n}{(r-r_n)\omega'(r)}.$$

Далее показывается, что

$$\int_{x}^{X} gVf(x)dx = \int_{x}^{X} gVF(x)dx$$

и приходят к заключению, что $F(x)=f(x)$.

Во втором мемуаре [219,II] Лиувилль ставит целью доказать сходимость ряда

$$\sum\frac{V_n\int_{x}^{X} gV_n(x)\,dx}{\int_{x}^{X} gV_n^2 dx},$$

дополняя тем самым первый мемуар, где была найдена сумма этого ряда в предположении его сходимости.

С этой целью Лиувилль выражает функцию V в виде ряда $V = p_0 + p_1 + \ldots + p_n \ldots$,

где $p_0 = A\left(1+hk'\right)\int_{\mathrm{x}}^{x}\frac{dx}{k}$, $\left(k' = k'\left(x\right)\right)$,..., $p_{n+1} = \int_{\mathrm{x}}^{x}\frac{dx}{k}\int_{\mathrm{x}}^{x}\left(l-gr\right)p_n dx$ **,...,**

Произвольную постоянную A можно взять равной единице или, еще лучше, $\frac{1}{1+h}$. Тогда при $x = \mathrm{x}$: $V = \frac{1}{1+h}, \frac{dV}{dx} = \frac{1}{1+h}$.

Сходимость ряда для V доказывается построением мажорирующего ряда

$$\left|p_n\right| = P_n < \left(\frac{GP}{k_0}\right)\frac{\left(x-\mathrm{x}\right)^{2n}}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2n},$$

где $\left|p_0\right| < P$, $\left|l-gr\right| < G$. Лиувилль указывает и другой способ для выражения V, а именно в виде интегрального уравнения

$$V = p_0 + \int_{\mathrm{x}}^{x}\frac{dx}{k}\int_{\mathrm{x}}^{x}\left(l-gr\right)Vdx..$$

Повторной заменой V в правой части получаются

$$V = p_0 + p_1 + \ldots + p_n + R_n$$

и оценка

$$R_n < W\left(\frac{GP}{K_0}\right)^n \frac{\left(x-\mathrm{x}\right)^{2n}}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2n}.$$

Для определения значений параметра r, второе краевое условие приводит к уравнению

$$\omega\left(r\right) = 0,$$

или

$$\frac{dp_0}{dx} + \frac{dp_1}{dx} + \ldots + H\left(p_0 + p_1 + \ldots\right) = 0 \text{ для } x = \mathrm{X}.$$

При $r > 0$, p_i и $\frac{dp_i}{dx}$ все положительны, поэтому уравнение $\omega\left(r\right) = 0$ не имеет отрицательных корней. К вопросу о характеристике множества корней Лиувилль подходит позже.

Для дальнейшего исследования Лиувилль, применяя преобразование независимой переменной и функции

$$z = \int_{\mathrm{x}}^{x}\sqrt{\frac{g}{K}}dx, \quad V = \frac{1}{\sqrt[4]{gK}}U,$$

полагая $r = \rho^2$ и вводя соответствующую функцию, $\lambda\left(z\right)$, приходит к уравнению

$$\frac{d^2U}{dz^2} + \rho^2 U = \lambda U$$

с краевыми условиями

$$\frac{dU}{dz} - h'U = 0 \text{ для } z = 0,$$

$$\frac{dU}{dz} + H'U = 0 \text{ для } z = Z.$$

После несложных выкладок Лиувилль приходит к выражению для U:

$$U = \cos\rho z + \frac{h'\sin\rho z}{\rho} + \frac{1}{\rho}\int_0^z \lambda(z')U(z')\sin\rho(z-z')dz',$$

и

$$\frac{dU}{dz} = -\rho\sin\rho z + h'\cos\rho z + \int_0^z \lambda(z')U\cos\rho(z-z')dz'.$$

Для небольших значений ρ, нетрудно найти верхний предел для U, применяя методы Штурма. Для достаточно больших значений ρ

$$\rho > 2LZ,$$

где $|\lambda(z)| < L$, Лиувилль получает неравенство

$$V\int_x^X gVf(x)dx < 4FG\theta^2(X - x)\left[1 + \left(\frac{h'}{\rho}\right)^2\right].$$

Здесь

$$|f(x)| \le F, g(x) \le G \quad \theta \ge |q|.$$

Далее, полагая

$$\int_0^Z \lambda U\sin\rho(z-z')dz' = \varepsilon,$$

следует

$$U = \cos\rho z + \frac{h'\sin\rho z}{\rho} + \frac{\eta}{\rho}, \quad \int_x^X gV^2dx = \frac{Z}{2}\left[1 + \left(\frac{h'}{\rho}\right)^2\right] + \frac{\eta}{\rho}, \qquad \int_x^X gV^2dx > \frac{Z}{4}\left[1 + \left(\frac{h'}{\rho}\right)^2\right].$$

Подставляя U и $\dfrac{dU}{dz}$ в краевое условие для $z = Z$, получим для ρ уравнение

$$tg\rho Z = \frac{p}{\rho - p'},$$

где p и p' зависят от ρ.

Из геометрических соображений видно, что это уравнение имеет бесконечно много положительных корней. Далее

$$\rho Z = (n-1)\pi + arctg\frac{p}{\rho - p'}.$$

Для больших n

$$\rho = \sqrt{r} = \frac{(n-1)\pi}{Z} + i_n,$$

где i_n – очень малое число.

Так Лиувилль получил асимптотику собственных значений и приближенные значения соответствующих функций

$$U = \cos\rho z,$$

$$V = \frac{1}{\sqrt[4]{gk}}\cos\frac{(n-1)\pi z}{Z}.$$

Полученные оценки позволяют доказать сходимость рассматриваемого ряда, предварительно преобразованного к виду

$$\sum \frac{\int\limits_{x}^{X} V_n f\left(x\right) dx}{r\int\limits_{x}^{X} gV_n^2 dx}.$$

В заключение Лиувилль доказывает вещественность корней уравнения $\omega(r) = 0$ на основе своей леммы из первого мемуара. Если r' – мнимый корень, то для соответствующей функции V' имеет место

$$\int\limits_{x}^{X} gV'V_n dx = 0$$

для всех V_n, соответствующих действительным корням r_n, и тогда $gV' \equiv 0$, но это противоречит краевому условию.

В третьем мемуаре Лиувилль снимает некоторые ограничения с коэффициентов уравнения g и K (ограниченность производных первого и второго порядков) и с f (также ограниченность производных и выполнение краевых условий). Уравнение рассматривается в прежнем виде, то есть, как и во втором мемуаре,

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \rho^2 U = \lambda U\ ,$$

$$\lambda = \frac{1}{\theta\sqrt{gK}}\left(l\sqrt{\frac{K}{g}}\theta - \frac{d\sqrt{gK}}{dz}\frac{d\theta}{dz} - \sqrt{gK\frac{d^2\theta}{dz^2}}\right),$$

и после перехода к функции

$$f(x) = f(z)\sqrt[4]{gK}\ ,$$

общий член ряда записывается в виде

$$T = \frac{U\int\limits_{0}^{Z} Ufdz}{\int\limits_{0}^{Z} U^2 dz}.$$

Постоянные h и H предполагаются конечными. Предполагается, что интеграл

$$\int\limits_{0}^{Z} \sqrt{\lambda^2}\, dz$$

имеет конечное значение.

Для оценки верхнего предела Q функции

$$U = \cos\rho z + \frac{h'\sin\rho z}{\rho} + \frac{1}{\rho}\int\limits_{0}^{Z} \lambda U \sin\rho(z - z')dz'$$

получена более общая и более точная оценка

$$Q < \frac{\sqrt{1+\left(\frac{h'}{\rho}\right)^2}}{1-\frac{1}{\rho}\int\limits_0^Z \sqrt{\lambda^2}\,dz}, \quad \left(\cos\rho z + \frac{h'\sin\rho z}{\rho} \le \sqrt{1+\frac{h'^2}{\rho^2}}\right).$$

При достаточно больших ρ можно считать, например, $U < 2$. Для нахождения значений ρ получается уравнение

$$tg\rho Z = \frac{P}{\rho - p'}.$$

Оценивая ρ и p' с учетом, что $U < 2$, получается

$$p < \sqrt{\left(h' + H'\right)^2} + 2\sqrt{2}\int\limits_0^Z \sqrt{\lambda^2}\,dz,$$

$$p' < 1 + 2\sqrt{2}\int\limits_0^Z \sqrt{\lambda^2}\,dz.$$

Лиувилль показывает, что имеется по одному корню между $\frac{1}{Z}\left[(n+1)\pi - \frac{\pi}{4}\right]$ и $\frac{1}{Z}\left[(n+1)\pi + \frac{\pi}{4}\right]$, но нет корней между $\frac{1}{Z}\left[n\pi - \frac{\pi}{4}\right]$ и $\frac{1}{Z}\left[(n-1)\pi - \frac{\pi}{4}\right]$ и т.д. Для корней Лиувилль указывает значения $\rho = \frac{n\pi}{Z} + \frac{B_n}{n}$. Далее Лиувилль останавливается на оценке интегралов вида

$$\int\limits_0^Z f(z)\sin\rho z dz \text{ и } \int\limits_0^Z f(z)\cos\rho z dz,$$

показывая, что они порядка $O\left(\frac{1}{\rho}\right)$, или в обозначении Лиувилля, $\frac{\psi}{\rho}$. Далее,

$$\int\limits_0^Z U^2 dz = \frac{Z}{2}\left(1 + \psi''\rho\right) \text{ и } T = \frac{2\psi}{\rho Z} + \frac{\psi'''}{\rho^2}.$$

Для доказательства сходимости ряда $\sum T$ достаточно установить сходимость ряда $\sum Y$, где

$$Y = \cos\frac{n\pi z}{Z}\int\limits_0^Z f(x)\cos\frac{n\pi z}{Z}dz + \frac{\psi^{IV}}{\rho^2}.$$

Ряд из первых членов сходится на основании доказанного для периодических рядов, ряд $\sum\frac{\psi^{IV}}{\rho^2}$ также сходится.

В заключение Лиувилль делает несколько замечаний о функции $f(x)$, которая может иметь конечные разрывы, но не быть бесконечной, и в случаях $h=\infty$ или $H=\infty$ (здесь появляются дополнительные условия на концах интервала).

Лиувилль указывает также на возможность применения его метода и к функциям, определенным уравнениями высшего порядка, ссылаясь на свою статью об интегрировании уравнения $\frac{du}{dt} = \frac{d^3u}{dx^3}$. В конце мемуара Лиувилль предлагает несколько задач.

В ряде небольших заметок Лиувилль решает отдельные частные вопросы, связанные с общей теорией, развитой в основных мемуарах. Отметим статью [221], в которой решается задача интегрирования уравнения

$$\frac{du}{dt}=\frac{d^2u}{dx^2}-b^2x\int_0^x x\frac{du}{dt}dx$$

с краевыми условиями

$$U=0 \text{ при } x=0,\ \frac{du}{dx}+hU=0 \text{ при } x=1$$

и начальным условием $U=f(x)$ $(t=0{,}0\le x\le 1)$.

Совершенствование методов достигнуто в совместных работах Штурма и Лиувилля. Мы не перечисляем всех заметок обоих авторов, хотя следует заметить, что после 1837г, заметки Штурма по теории разложения функций в ряды больше не появлялись.

В заметке о теории дифференциальных уравнений Лиувилль ставит вопрос об изучении решений уравнения любого порядка вида

$$\frac{dP_n dP_{n-1}\dots dP_2 dP_1 U}{dx^n}+grU=0$$

и соответствующих разложений в ряды.

В 1839г. Лиувилль опубликовал большой мемуар по теории линейных дифференциальных уравнений и о разложении функций в ряды [223], отражающий содержание нескольких лекций, прочитанных им в College de France. Рассказав о возникшем при решении задач математической физики методе Фурье решения линейных дифференциальных уравнений с краевыми и начальными условиями, Лиувилль высказывает намерение дать свое изложение теории, аналитическое, независимое от ее происхождения и каких-либо приложений. Отмечая заслуги Штурма в постановке вопроса об изучении свойств решений таких задач для дифференциальных уравнений второго порядка, Лиувилль говорит о желательности обобщения теории на уравнения любого порядка. В статье изучается дифференциальное уравнение $\mu-$го порядка вида

$$\frac{dKdL\dots d\mu dNdU}{dx^{\mu}}+rU=0,$$

где $K,L,\dots,N-$ функции x, $\mathrm{x}<x<\mathrm{X}$, $r-$параметр. Краевые условия при $x=\mathrm{x}$

$$U=A,N\frac{dU}{dx}=B,\dots,\frac{KdL\dots dNdU}{dx^{\mu-1}}=D,$$

Где $A,B,\dots,D$ не зависят от x, положительные или нули, /не все/. В таком случае решение будет содержать параметр r: $u=u(x,r)$. На примере для $\mu=2$ Лиувилль получает решение в виде ряда по степеням r

$$U(x,r)=\varphi_0-r\varphi_1+r^2\varphi_2-\dots,$$

где

$$\varphi_0=A+B\int_{\mathrm{x}}^{x}\frac{dx}{K},\dots,\varphi_n=\int_{\mathrm{x}}^{x}\frac{dx}{K}\int_{\mathrm{x}}^{x}\frac{dx}{K}\dots\int_{\mathrm{x}}^{x}\frac{dx}{K}\int_{\mathrm{x}}^{x}\varphi_0 dx$$

Отсюда следует сходимость рядов для $U, \frac{KdU}{dx}, \frac{dKdU}{dx^2}, -rU,$ также для производной U по r и непрерывность по x и r функций $U, \frac{KdU}{dx}, \frac{dKdU}{dx^2}, -rU.$ Аналогично и для произвольного $\mu.$

Для определения r налагается условие, при $x = \mathrm{X},$ из которого следует, что не должно быть отрицательным или нулем. Лиувиллю удается дать некоторые представления о проведении функции U интервале (x, X) и указать возможность доказательства бесконечности числа нулей функции при росте r (подробное изложение было дано им для уравнения третьего порядка). Лиувилль доказал, что нули функции U не обращают в нуль $\frac{dU}{dx}$, а линейное выражение

$$aU + b\frac{NdU}{dx} + \ldots + C\frac{KdL\ldots dNdU}{dx^{\mu-1}},$$

где коэффициенты положительные или нули, принимает последовательно отрицательные и положительные значения для значений $x,$ равных корням уравнения $U = 0.$

Лиувилль изучает вопрос об изменении корней уравнения $u(x,r) = 0$ при возрастании $r.$ Здесь обнаруживаются различные частные особенности. Показано что функция

$$A_m U_m + \ldots + A_n U_n$$

меняет знак в интервале (x, X) не реже чем функция U_m и не чаще чем функция $U_{n.}$

Имеет место и в общем случае теорема о том, что если

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \varphi(x) U dx = 0$$

для функции $f(x)$, не обращающейся в бесконечность в интервале (x, X) при всех значениях r, удовлетворяющих уравнению $\omega(r) = 0,$ то $\varphi(x) = 0.$ Здесь

$$\omega(r) = aU + b\frac{NdU}{dx} + \ldots + c\frac{KdL\ldots dNdU}{dx^{\mu-1}}\Big|_{x=X}.$$

Лиувилль рассматривает и некоторые другие задачи, связанные с первоначально поставленной задачей. В частности, определено сопряженное уравнение

$$\frac{dNdM\ldots dLdKdV}{dx^{\mu}} + (-1)^2 rV = 0$$

с краевыми условиями

$$V = C, \ldots, \frac{NdM\ldots dKdV}{dx^{\mu-1}} = (-1)^{\mu-1} a \text{ для } x = \mathrm{X},$$

$$DV - \ldots \pm B\frac{M\ldots dKdV}{dx^{\mu-2}} \mp A\frac{NdM\ldots dKdV}{dx^{\mu-1}} = \pi(r).$$

Оказывается, что $\omega(r)$ и $\pi(r)$ тождественны.

Далее Лиувилль показывает, что уравнение $\omega(r) = 0$ не может иметь ни мнимых корней, ни равных. Доказательство основано на использовании равенства

$$\left(r'-r\right)\int\limits_{\text{x}}^{\text{X}} UV'dx = \omega\left(r\right)-\omega\left(r'\right).$$

В заключение рассматривается теория разложения функций в ряды по функциям $\{U_i\}$ или $\{V_i\}$, имея в виду, что

$$\int\limits_{\text{x}}^{\text{X}} U_n V_i dx = \frac{\omega\left(r_n\right)-\omega\left(r_i\right)}{r_i - r_n} = 0 \quad (n \neq i),$$

но

$$\int\limits_{\text{x}}^{\text{X}} U_i V_i' dx = -\omega'\left(r\right).$$

Получено разложение функции $f(x)$

$$f(x) = A_1 U_1 + \ldots + A_i U_i + \ldots$$

или

$$f(x) = A_1 V_1 + \ldots + A_i V_i + \ldots,$$

и показано, что сумма этих рядов равна $f(x)$в предположении их сходимости /для $f(x)$ ограниченных/. В качестве примера приведено разложение функции $U = U(x,r)$в виде

$$\frac{U}{\omega(r)} = \sum \frac{U_i}{(r-r_i)\omega'(r_i)}$$

и аналогично для V

$$\frac{V}{\omega(r)} = \sum \frac{V_i}{(r-r_i)\omega'(r_i)}.$$

Отмечено свойство

$$\int\limits_{\text{x}}^{\text{X}} \sigma_n V_i dx = \int\limits_{\text{x}}^{\text{X}} f V_i dx, \quad (i > n),$$

откуда следует

$$\int \rho_n V_i dx = 0,$$

где $f = \sigma_n + \rho_n, \sigma_n -$частная сумма ряда.

Таков круг вопросов, разработанных основоположниками теории разложения функций в ряды по собственным функциям обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка Штурмом и Лиувиллем. Очередной задачей стала разработка теории систем ортогональных функций.

§ 3. Исследования Чебышева, Сонина и Грама по теории ортогональных функций.

В работах по теории приближения функций Чебышев вводит понятие наилучшего квадратичного приближения, рассматривая в качестве меры близости функций интеграл

$$\int\limits_a^b p(x)[F(x)-P(x)]^2\,dx,$$

где $p(x) \geq 0.$

Далее П.Л.Чебышев устанавливает связь между проблемой приближения в среднем квадратичном и разложением функций в ряды по степеням функций типа Фурье.

В краткой заметке "Об одной формуле анализа" /1854г/ Чебышев предлагает решение интерполяционной задачи для целой функции $n-$й степени $F(x)$ с помощью непрерывных дробей. Получено разложение по многочленам Лежандра с коэффициентами, найденными по способу наименьших квадратов. Более подробное изложение и доказательство найденного метода Чебышев дает в статье "О непрерывных дробях" [303]. Оценку погрешности в этих работах Чебышев производит по погрешностям значений функций в данных точках, которых взято конечное число.

Полученное разложение функции в ряд

$$f(x)=C_0\psi_0(x)+\ldots+C_n\psi_n(x)+\ldots,$$

где функции $\psi_i(x)$ представляют собой знаменатели подходящих дробей, получаемых при разложении некоторой функции в непрерывную дробь. Обозначая величину, пропорциональную вероятности погрешности значения $F(x_i)$через $\frac{1}{\theta(x_i)}$, П. Л. Чебышев отмечает замечательное, по его выражению, свойство функций

$$\Phi_m(x)=\frac{\psi_m(x)\theta_m(x)}{\sqrt{\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_m^2(x_i)\theta_m^2(x_i)}},$$

выражаемое равенствами

$$\sum_{m=0}^{m=n}\Phi_m(x_i)\psi_m(x_\eta)=\begin{cases}0 & при \quad i\neq n\\ 1 & при \quad i=n\end{cases}.$$

Продолжая исследование в мемуаре "О разложении функций одной переменной " /304/ в 1859г, Чебышев прежде всего отмечает аналогию полученных рядов с рядом Фурье и показывает, что при замене равно отстоящих значений x_i бесконечно близкими между собой и принимая $x_1=-1, x_n=+1,$ выражение $\sum\frac{\theta^2(x_i)}{x-x_i},$ где $\theta^2(x)=\frac{x-x_1}{\sqrt{1-x^2}},$ приводится к виду $\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{x-u}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du=\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}.$

Для соответствующей непрерывной дроби

$$\cfrac{\pi}{x-\cfrac{1}{2x-\cfrac{1}{2x-\ldots}}}$$

знаменателями подходящих дробей будут целые функции, представимые в виде $\cos\varphi, \cos 2\varphi, \cos 3\varphi, \ldots,$ где $\varphi=\arccos x$. Для функции $f(x)$ получается разложение по косинусам кратных дуг, а соответствующие целые функции – это полиномы Чебышева $T_n(x)$ (с точностью до нормирующего множителя).

Принимая $\theta^2(x)$ за постоянное, получается

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{du}{x-u}=\log\frac{x+1}{x-1}$$

и ряд по многочленам Лежандра.

При других предположениях относительно ряда значений переменных x_i и функции $\theta(x)$получаются интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{K}{\pi}} e^{-ku^2}}{x-u} du, \quad \int_{0}^{\infty} \frac{Ke^{ku}}{x-u} du$$

и системы функций

$$\psi_e(x) = e^{kx^2} \frac{d^e e^{-kx^2}}{dx^e}$$

– полиномы Чебышева-Эрмита в первом случае, и

$$\psi_e(x) = e^{kx} \frac{d^e x^e e^{-kx}}{dx^e}$$

– полиномы Чебышева-Лагерра во втором случае. В теории ортогональных многочленов. Чебышев, оценивая близость функций f и g интегралом

$$\delta(f,g) = \int \rho(x)[f(x) - g(x)]^2 dx,$$

подошел к метрике пространства $L_2^{(\rho)}$.

Заслуживают внимания работы Сонина /1849-1915/ об ортогональных многочленах 1880г. [243]. Им же был указан независимо от других метод ортогонализации системы функций.

В связи со своими исследованиями о цилиндрических функциях Сонин в упомянутой работе вводит многочлены $T_\mu^n(y)$ обладающие свойством рекуррентности

$$(\mu + n + 1)\frac{dT_\mu^{n+1}}{dy} = T_\mu^n - \frac{dT_\mu^n}{dy}, \quad \frac{T_\mu^{n-1}}{y^{n-1}} = -\frac{d}{dy}\left(\frac{T_\mu^n}{y^n}\right)$$

и удовлетворяющие дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 T_\mu^n}{dy^2} - \left(1 - \frac{\mu+1}{y}\right)\frac{dT_\mu^n}{dy} + \frac{n}{y}T_\mu^n = 0.$$

Решая задачу разложения функции $f(x)$ в ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_\mu^n(x),$$

Сонин приводит формулу

$$a_n = n!\Gamma(\mu + n + 1)\int_0^{\infty} f(x) e^{-x} x^\mu T_\mu^n(x) dx,$$

не решая вопрос о сходимости этого разложения.

Введенные здесь Сониным многочлены связаны с обобщением многочленов Чебышева-Лагерра

$$L_n^{(\mu)}(x) = (-1)^n \Gamma(n + \mu + 1) T_\mu^n,$$

где $L_n^{(\mu)}(x)$ – присоединенные многочлены Лагерра; при $\mu = 0$ получаются многочлены Чебышева-Лагерра.

Второй класс многочленов, вводимых Сониным, является обобщением многочленов Чебышева-Эрмита

$$U_m^{2n} = T^n_{m-\frac{1}{2}}\left(\cancel{x}^2\right),\ U_m^{2n+1}(x) = xT^n_{m+\frac{1}{2}}\left(x^2\right).$$

При $m = 0$ получаются многочлены Чебышева-Эрмита.

Дальнейшее изучение этих многочленов Сонин провел в работе " О приближенном вычислении определенных интегралов и входящих при вычислений целых функциях" в 1887г. В этой работе Сонин рассматривал и третий класс многочленов

$$F_n(x) = k_n(x-a)^{n+\lambda}(x-b)^{n+\mu},\ \lambda > -1,\ \mu > -1,$$

где k_n – некоторые константы, зависящие от λ, μ и n, известные теперь как многочлены Якоби.

Было замечено, что многочлены Сонина $L_n^{(\mu)}(x)$ можно найти в более ранней работе Сохоцкого [244].

В статье "О некоторых неравенствах относящихся к определенным интегралам", опубликованной в 1898г. Сонин, обобщая и доказывая одно неравенство Чебышева, приходит к ортогонализации системы функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots \quad (a < x < b)$$

с весовой интегрируемой функцией $\theta(x)$,

$$\int_a^b \theta((x))dx > 0.$$

С этой целью он подбирает постоянные $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ так, чтобы

$$\int_a^b \theta(x)(\varphi_i(x) - \xi_i)dx = 0.$$

Отсюда

$$\xi_i = \frac{\int_a^b \theta(x)\varphi_i(x)dx}{\int_a^b \theta(x)dx}.$$

Тогда для функции $\Phi_1(x) = \varphi_1(x) - \xi_1$

$$\int_a^b \theta(x)\Phi_1(x)dx = 0,$$

или, полагая

$$\Phi_0(x) = 1, \qquad \int_a^b \theta(x)\Phi_1(x)\Phi_0(x)dx = 0.$$

Далее, для

$$\Phi_2(x) = \varphi_2(x) - \xi_2 - \xi_2'\Phi_1(x)$$

требование наименьшего значения для

$$\int_a^b \theta(x)[\Phi_2(x)]^2 dx$$

приводит к

$$\int_a^b \theta(x)\Phi_2(x)\Phi_1(x)dx = 0,$$

и при этом

$$\int_a^b \theta(x)\Phi_2(x)dx = 0.$$

Повторяя этот процесс, строится последовательность ортогональных функций

$$\Phi_0(x), \Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_n(x), \ldots,$$

удовлетворяющих условиям

$$\int_a^b \theta(x)\Phi_i(x)\Phi_j(x)dx \quad (i \neq j)$$

Так как в дальнейших формулах встречаются определители Грама, то можно предполагать знакомство Сонина с методом ортогонализации Грама. Эти работы Грама и Сонина появились значительно раньше известной работы Шмидта.

В работе Грама [70] 1883г. продолжены исследования Чебышева по проблеме наилучшего квадратичного приближения и разложения функций в ряды по ортогональным функциям. Грам решает задачу наилучшего среднего квадратичного приближения функции линейными комбинациями n первых функций последовательности. Для решения этой задачи он применяет метод ортонормализации и приходит к понятию полной ортонормированной системы. Выясняя вопрос, когда наилучшее квадратичное приближение

$$\mu_n = \int_a^b \rho\left(f - \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i\right)^2 dx$$

??????????????

функции $f(x)$ линейными комбинациями указанного вида стремится к нулю при $n \to \infty$, он устанавливает, что это эквивалентно тому, что не существует функции, ортогональной всем φ_n, отличной от нуля. При исследовании понятия "сходимости в среднем квадратическом" ему удается получить некоторые очень частные результаты. В работе Грама обнаруживается переход от рассмотрения непрерывной функций к функциям, удовлетворяющим условию $\int_a^b \rho f^2 dx < \infty$.

§4. Исследования Стеклова о полноте системы собственных функций.

Теория разложения функций в ряды по системам собственных функций получает значительное развитие в трудах Стеклова. Крупный специалист в математической физике, Стеклов успешно занимался вопросами решения ее основных задач.

Исследования по математической физике Стеклов начинает критическим анализом работ Шварца и Пуанкаре.

В 1896г. в "Сообщениях Харьковского математического общества" появляется первая статья Стеклова по задаче Штурма-Лиувилля под названием "Задача об охлаждении неоднородного твердого стержня". В этой работе, применяя методы Шварца и Пуанкаре, доказывается существование характеристических чисел и фундаментальных функций рассматриваемой задачи. Здесь же впервые строго доказывается сходимость ряда, полученного при разложении данной функции в ряд по фундаментальным функциям, к данной функции при условии равномерной сходимости ряда. Указаны и достаточные условия разложимости.

В последующих работах Стеклов неоднократно возвращается к этому вопросу с целью ослабления условий разложения. Так, в работе "О разложении данной функции в ряд по гармоническим функциям" [247] мы встречаем аналогичное условие. В статье 1899г. [249] это условие выступает уже как основное в теории разложения произвольных функций в ряды по фундаментальным функциям. В статье Стеклова 1903г. собраны все системы фундаментальных функций, для которых это равенство, называемое "замечательным" было им доказано. В работе [248] 1910г. равенство получает название условия замкнутости, и системы функций, для которых оно выполняется, названы замкнутыми.

По работам Стеклова можно проследить, как формировалась идея замкнутости системы собственных функций. Поняв значение условия замкнутости для систем фундаментальных функций уравнений математической физики, Стеклов в цикле работ продолжает изучение и применение свойства замкнутости для различных систем ортогональных функций, независимо от способа их получения.

В работе 1904г. доказывается замкнутость системы ортогональных функций относительно любых интегрируемых функций, если замкнутость установлена относительно полиномов. От очевидной замкнутости всякой ортогональной системы полиномов по отношению к любому полиному возникает ряд работ Стеклова о приближенном представлении функций и о разложении функций в ряды по различным системам полиномов. Сначала в нескольких работах рассматриваются частные случаи систем полиномов Якоби, Эрмита, Лагерра, а затем вопрос о разложении произвольной функции в ряды по полиномам Чебышева общего вида рассмотрен в работе 1914г. Теория замкнутости была развита Стекловым в применении к проблеме приближенного представления функций и к задаче теории моментов в ряде работ, начиная с работы 1914г, до последней его работы "О проблеме приближения произвольных функций с помощью полиномов Чебышева", представленной в "Известия АН СССР" 12 мая 1926г, то есть за 18 дней до дня смерти.

Применение свойства замкнутости позволило Стеклову решить задачу об охлаждении однородного стержня при более широких условиях, чем прежде. Наиболее совершенное по общности результатов и простоте изложение теории замкнутости находится в статье Стеклова 1913 года.

На пути совершенствования метода следует отметить еще работу Стеклова 1910г., в которой отбрасываются предположения о существовании высших производных в задачах разложения по функциям Штурма-Лиувилля, что достигается простым преобразованием квадрата функции в виде интеграла от производной этого квадрата.

О работах Стеклова по теории разложения функций упоминает Кнезер в работе 1903 года, в которой он доказывает теорему разложения, применяя видоизмененный асимптотический метод Лиувилля, называемый теперь методом Лиувилля-Стеклова. Откликом Стеклова на исследования Кнезера была его статья 1907г., в которой он, применяя асимптотические формулы, с помощью теоремы замкнутости освобождается от некоторых условий Кнезера. На исследования Гильберта по теории разложения, основанные на применении функции Грина и теории интегральных уравнений, Стеклов откликнулся большой статьей 1904-1905 гг., показывающей, что прежние его результаты, опубликованные в 1902г., были примером более общих теорем.

В позднейших работах Стеклов, не применяя асимптотических оценок, а, продолжая совершенствовать теорию замкнутости, получает новые результаты при более общих граничных условиях и для более общего вида уравнения.

Обзор трудов Стеклова по математической физике и теории замкнутости был сделан в 1926г. Гюнтером [71] и Смирновым в 1947г. [239]. Исследования Стеклова по теории краевых задач были освещены в работах Сологуба [241], Демчишина и Маркуша. Значительную часть своих результатов по математической физике Стеклов предполагал изложить в трехтомном труде "Основные задачи математической физики", две части которого были изданы в 1922-1923гг. Третья часть, с изложением его результатов по теории замкнутости и теории разложения функций, не появилась.

Как известно, для остатка $R_n(x)$ в приближенном представлении функций $f(x)$ отрезком ее ряда Фурье по ортогональной и нормированной системе функций,

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x),$$

для средней квадратичной погрешности имеет место равенство

$$\int_a^b p(x) R_n^2 dx = \int_a^b p(x) f^2(x) dx - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 .$$

Отсюда следует сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$$

и неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \le \int_a^b p(x) f^2(x) dx .$$

Если квадратичная погрешность стремится к нулю при $n \to \infty$, то это равносильно равенству

$$\int_a^b p(x) f^2(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 .$$

Это равенство (равенство Парсеваля) влечет за собой полноту системы функций $u_k(x)$, то есть, что эту систему мы не можем пополнить функцией, не равной тождественно нулю и ортогональной ко всем функциям системы. Стеклов первый поставил проблему полноты системы ортогональных функций в общем виде. Стеклов показал, что если формула замкнутости доказана для специального класса функций, то она имеет место для всех функций $f(x)$, для которых интеграл $\int_a^b p(x) f^2(x) dx$ существует. В частности, для конечного интервала (a,b) таким классом оказывается класс полиномов.

Изучение замкнутых систем Стекловым позволило ему установить сходимость ряда Фурье непрерывной функции $f(x)$ к самой функции в промежутке равномерной сходимости ее ряда Фурье по замкнутой ортогональной системе.

Другой важный результат Стеклова связан с идеей осреднения. Для замкнутой системы функций $u_k(x)$ и для любой функции $\varphi(x)$, для которой $\int_a^b p(x) [\varphi(x)]^2 dx$ существует, справедливо равенство

$$\int_{a_1}^{b_1} \varphi(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{a_1}^{b_1} p(x) \varphi(x) u_k(x) dx,$$

где a_k - коэффициенты Фурье функции $f(x)$, а (a_1, b_1) любая часть отрезка (a,b).

При $p(x) \equiv 1$ и, полагая $\varphi(x) \equiv 1$, получим

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{a_1}^{b_1} u_k(x) dx,$$

то есть почленное интегрирование ряда Фурье дает интеграл от самой функции, хотя ряд Фурье может оказаться и не сходящимся к $f(x)$ в отдельных точках. В. А. Стеклов рассматривал случаи, когда спектральный параметр λ входил в дифференциальное уравнение или в краевые условия.

В исследованиях по теории замкнутости Стеклов использует метод сглаживания функций, состоящий в переходе от функции $f(x)$ к функции $F(x)$, определяемой равенством

$$F(x) = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(\xi)d\xi .$$

Для интегрируемой функции $f(x)$ (возможно разрывной) $F(x)$ непрерывна. Сглаживание приводит к близкой функции с лучшими свойствами. Например, для непрерывной функции $f(x)$, разность $F(x) - f(x)$ при $h \to 0$ становится как угодно малой. Как уже отмечено выше, Стеклов плодотворно занимался выяснением условий теоремы разложения. Он стремился получить их для $f(x)$ в наиболее широком виде.

От работы к работе Стеклов совершенствует условия разложимости. Здесь следует отметить, как этапные, работы 1896г. и 1913г. Если в работе 1896г. требуется, чтобы $p(x)$ и $q(x)$ были непрерывными положительными функциями, а $f(x)$ имела бы производные до четвертого порядка, $f(x)$ и $\dfrac{f_q - f'}{p}$ удовлетворяли краевым условиям задачи, то в работе 1913г, уже не требуется положительности $q(x)$ и краевые условия берутся в более общем виде, а $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица $|f(x) - f(y)| < m|x - y|$, где m – некоторая постоянная.

Наиболее общие результаты о разложении функций по полиномам Чебышева Стеклов дает в работе 1921г.

Нужно отметить результаты Стеклова для сингулярных задач на полупрямой для $p(x) = x^{\beta}e^{-x}$ $(\beta > -1)$ и в случае всей прямой при $p(x) = e^{-x^2}$. В 1907г. Стеклов, обобщая метод Бонне, получил теоремы разложения при тех же условиях на разлагаемую функцию, что и для разложения в обычный тригонометрический ряд.

Основными методами, которыми пользовался Стеклов, были теорема замкнутости и обобщение метода Шварца-Пуанкаре.

В своих исследованиях Стеклов не ограничивался доказательством возможности разложения функции в ряды, и не давал оценку остаточного члена. Стеклов в своих работах остался представителем классического анализа. Дальнейшие успехи в теории разложения функций связаны с использованием новых идей теории множеств и теории функций вещественного переменного, позволивших получить значительные обобщения всех ранее полученных результатов.

§ 5. Исследования регулярной задачи Штурма-Лиувилля в конце XIX века.

На развитие теории разложения функций по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля оказали значительное влияние работы Стильтьеса /1856-1894 гг./.

В известных исследованиях по теории непрерывных дробей [430] Стильтьес сформулировал алгебраическую проблему моментов в виде следующей задачи: найти распределение положительной массы на полупрямой $(0, \infty)$, если даны моменты порядка k $(k = 1,2,3,\ldots)$. При дискретном распределении масс моментом порядка k называется сумма

$$C_k = \sum_i m_i \xi_i^k ,$$

где m_i – массы, сосредоточенные в точках ξ_i на полупрямой $(0, \infty)$.

Как показали исследования Стильтьеса, следует различать два случая: определенный и неопределенный. В первом случае задача допускает всегда только одно решение, во втором случае оказывается бесконечное число решений.

Определенный случай характеризуется тем, что числа C_k таковы, что ряд $\sum_{1}^{\infty} a_n$ расходится, где

$$a_{2n} = \frac{A_n^2}{B_n B_{n-1}}, \quad a_{2n+1} = \frac{B_n^2}{A_n A_{n+1}},$$

$$A_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix}, \qquad B_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix},$$

$$A_0 = B_0 = 1.$$

В неопределенном случае этот ряд сходится. Стильтьес показал, что в неопределенном случае существует по крайней мере два решения поставленной задачи моментов (μ_0, λ_0), (V_ν, θ_ν) и следует, что решений бесконечно много.

Обозначим n-ю подходящую дробь непрерывной дроби

$$\cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 z + \cfrac{1}{a_3 z + \ddots}}}$$

где a_i - числа вещественные и положительные, как

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}, \quad \lim P_{2n}(z) = p(z), \quad \lim Q_{2n}(z) = q(z),$$

$$\lim P_{2n+1}(z) = p_1(z), \qquad \lim Q_{2n+1}(z) = q_1(z).$$

При этом пределы четных и нечетных подходящих дробей различны:

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\mu_1}{z+\lambda_1} + \frac{\mu_2}{z+\lambda_2} + \dots + \frac{\mu_n}{z+\lambda_n} + \dots,$$

$$\frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \frac{\nu_0}{z} + \frac{\nu_1}{z+\theta_1} + \dots + \frac{\nu_k}{z+\theta_k} + \dots, \qquad (\theta_0 = 0).$$

В случае сходимости ряда $\sum a_n$ эти пределы одинаковы. В связи с решением определенной проблемы моментов Стильтьес дает обобщенное понятие интеграла, получившего название интеграла Стильтьеса. Определение интеграла Стильтьеса дано для непрерывной функции $f(x)$ и возрастающей функции $\varphi(x)$. Стильтьес, имея в виду определенные приложения, оставляет в стороне вопрос об общности определения интеграла. Его интересовали функции вида u^k и $\frac{1}{z+u}$. Им введено обычное обозначение

$$\int_a^b f(u)\,d\varphi(u).$$

Частные случаи проблемы моментов встречались раньше у Чебышева, Маркова.

Интересно замечание Стильтьеса о том, что если имеем несколько решений проблемы моментов, то для получения нового решения следует взять линейную комбинацию этих решений с положительными коэффициентами, сумма которых равна 1. Рассматривая решения, зависящие от параметра t, можно получить решения с непрерывным распределением массы по оси, причем формула, очевидно, будет содержать интегралы.

От проблемы моментов путь шел к проблеме расширения линейных операторов.

В исследовании сходимости разложения функции в ряд по ортонормальной системе функций следует отметить работы Гарнака и Югоньо. Гарнак рассматривал сходимость в среднем разложения функций с интегрируемым квадратом. Независимо от него Югоньо [322] в 1882г. изучал сходимость в среднем разложения функции с интегрируемым квадратом по любой системе ортонормальных функций. Эти исследования не были точны, так как для полного решения вопроса необходимо было расширение понятия интеграла и соответствующего расширения класса функций с интегрируемым квадратом. Это было достигнуто после введения в математику понятия интеграла в смысле Лебега и класса функций с суммируемым квадратом модуля, то есть класса $L^2(a,b)$:

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty,$$

где (a,b) – конечный или бесконечный интервал.

Вопросы сходимости в среднем для рядов и функций получили свое завершение в известной теореме Рисса-Фишера и теореме Планшереля, о которых будет сказано дальше. Особо приходится подчеркнуть значение понятия интеграла Лебега для идей формирования функционального анализа в целом, а для спектральной теории особенно.

Всестороннее освещение регулярная задача Штурма-Лиувилля получила в статьях и книге Бохера [34]. Теория метода была изложена с почти исчерпывающей полнотой и современной строгостью.

Первая глава книги Бохера содержит доказательство существования и единственности решения для уравнения

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p\frac{du}{dx} + qu = r$$

при начальных условиях $u(c) = \gamma,\ u'(c) = \gamma'$.

Сделано указание на возможность обобщения для уравнений высшего порядка.

Во второй главе рассматривается аналогия линейных дифференциальных уравнений с линейными алгебраическими системами. Подробно изучаются линейные системы, краевые условия, тождество Лагранжа

$$vLu - uMv = \frac{d}{dx}\left(P(u,v)\right)$$

и формула Грина

$$\int_a^b (vLu - uMv)dx = P(u,v)\Big|_a^b .$$

Далее изучаются сопряженные уравнения, сопряженные системы и их свойства. Наиболее подробно изучаются уравнения второго порядка и соответствующие краевые условия. Вводится понятие характеристических (собственных) чисел.

Третья глава посвящена теории Штурма о нулях решения уравнения вида

$$\frac{d}{dx}\left(Ku'\right) - Gu = 0 \,.$$

Здесь доказана теорема осцилляции Штурма.

В четвертой главе рассматривается обобщение теории Штурма на уравнения произвольного порядка. В пятой главе излагается теория функции Грина и приложения. Показана эквивалентность краевых задач и интегральных уравнений. Бохер указывает на свой доклад на V Международном конгрессе математиков в Кембридже в 1912 году и на статью в немецком издании Математической энциклопедии.

ГЛАВА 3
ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ Д.ГИЛЬБЕРТА И ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПОНЯТИЯ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА.

§ 1. Возникновение теории интегральных уравнений.

Систематическое применение интегральных уравнений для решения краевых задач математической физики было начато Нейманом в 1877г. для отыскания гармонической функции в виде потенциала двойного слоя. Для решения интегральных уравнений применялся метод последовательных приближений, сходимость которого была Нейманом доказана для выпуклых поверхностей. Название "интегральные уравнения" впервые встречается у Дюбуа-Реймона в 1888г.

Существенный шаг в развитии интегральных уравнений был сделан Пуанкаре, который доказал применимость метода Неймана для более широкого класса поверхностей и дал более общую постановку задачи об отыскании потенциала двойного слоя, связанную с введением переменного параметра λ перед интегралом в интегральном уравнении, то есть пришел к интегральным уравнениям вида

$$u(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)u(y)dy=f(x).$$

Эти исследования Пуанкаре переплетаются с его же исследованиями уравнения колеблющейся мембраны. Рассматривая уравнение мембраны с правой частью

$$\Delta u+\lambda u=f,$$

Пуанкаре доказал, что его решение есть мероморфная функция комплексного переменного λ, простые вещественные полюсы которой являются собственными значениями рассматриваемого уравнения. Таким образом, удалось достигнуть обобщения теории Штурма-Лиувилля для функций нескольких переменных. К этому времени были уже обнаружены алгебраические аналогии для теории собственных значений и собственных функций краевых задач математической физики.

Отдельные интегральные уравнения частного вида в связи с конкретными задачами встречаются с начала XIX века в работах Лапласа, Абеля, Коши, Лиувилля.

Возникновение теории интегральных уравнений связывается с именем итальянского математика Вито Вольтерра, который, начиная с заметки 1884г. [79] до фундаментальных работ 1896-98 гг. развил теорию известного класса интегральных уравнений, получивших его имя.

Следующий шаг в развитии теории интегральных уравнений связан с именем шведского математика Ивара Фредгольма. Занимаясь решением задачи Дирихле методом потенциала двойного слоя и развивая предположение Пуанкаре, Фредгольм пришел к построению теории интегральных уравнений указанного выше вида. Сообщения об этом были им сделаны в 1899-1900гг., сначала в письме к Миттаг-Леффлеру, а затем в изданиях Шведской Академии наук. Более развернутое изложение результатов своих исследований Фредгольм дал в статье [276], опубликованной в " Acta Mathematica " в 1903 году. В последней статье содержатся дополнительно результаты, относящиеся к интегральным уравнениям с неограниченными ядрами, имеющими полярную особенность, то есть вида

$$\frac{H(x,y)}{|x-y|^{\alpha}},\qquad 0<\alpha<1.$$

В статьях Фредгольма приведены все основные факты теории линейных интегральных уравнений, впоследствии получивших наименование " теорем Фредгольма", получены степенные ряды по λ для числителя и знаменателя резольвенты, исследована их сходимость, рассмотрено решение однородных и неоднородных уравнений, в частности решение неоднородных уравнений при собственном значении λ (фундаментальном числе). Дано применение интегральных уравнений к решению плоской задачи Дирихле.

Но в статьях Фредгольма, нет указаний, как были получены все эти результаты. В более позднем выступлении на математическом съезде в Стокгольме в 1910г. Фредгольм только вскользь упомянул о своем методе. В последующих работах по теории интегральных уравнений Фредгольм обращается к интегральным уравнениям с бесконечными пределами

$$\varphi(t)+\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t,s)\varphi(s)ds=\psi(t)$$

с ядрами частного вида и выражает неудовлетворение сложностью построения степенных рядов, служащих для нахождения резольвенты.

Фредгольм, несомненно, пользуется алгебраической аналогией линейного интегрального уравнения с системой линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\delta_{ik}+\frac{1}{n}a_{ik}\right)x_k=b_i \qquad 1\le i\le n.$$

Решение интегрального уравнения было получено предельным переходом от решения системы алгебраических уравнений по формулам Крамера. Математики XIX века (Фурье и др.) встречались с задачей решения системы линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}x_k=b_i, \qquad i=1,2,\ldots.$$

В конце XIX века Пуанкаре и Кох дали математически обоснованную теорию определителей бесконечного порядка, применимую для некоторых частных видов систем алгебраических уравнений.

Для Фредгольма эта теория могла служить образцом и давала наводящие соображения. Новый этап в развитии теории интегральных уравнений связан с именем Гильберта.

§ 2. Работы Гильберта по теории линейных интегральных уравнений.

Геттингенских математиков с работами Фредгольма по интегральным уравнениям впервые познакомил шведский математик Гольмгрен в 1901г. Гильберт оценил значение интегральных уравнений для многих областей математического анализа, таких как теория разложения произвольных функций в ряды, теория линейных дифференциальных уравнений, теория аналитических функций, теория потенциала и вариационное исчисление. Гильберт понял необходимость систематического построения общей теории линейных интегральных уравнений. В том же семестре в семинаре и в лекциях Гильберт излагает основные идеи нового метода изучения линейных интегральных уравнений. Гильберт увидел, что теория линейных интегральных уравнений должна быть развитием алгебраической теории об ортогональных преобразованиях квадратичной формы в сумму квадратов. Со следующего года начинают появляться исследования, выполненные под руководством и влиянием Гильберта, в которых теория интегральных уравнений получает значительное развитие. Обзор этих работ будет дан ниже.

Фундаментальные исследования Гильберта и его учеников по общей теории линейных интегральных уравнений привели к введению одного из важных математических понятий XX века - "гильбертова пространства".

Результаты исследований Гильберта по теории интегральных уравнений были опубликованы в 1904-1910гг. в виде шести статей в "Сообщениях Геттингенского научного общества" [60], объединенные в книгу в 1912 году.

В первом сообщении 1904 года Гильберт развивает общую теорию линейных интегральных уравнений с симметрическим ядром $K(s,t)$.

Прежде всего, интегральное уравнение

$$f(s)=\varphi(s)-l\int_0^1 K(s,t)\varphi(t)dt$$

заменяется системой n линейных алгебраических уравнений

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1=\varphi_1-l(K_{11}\varphi_1+\ldots+K_{1n}\varphi_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n=\varphi_n-l(K_{n1}\varphi_1+\ldots+K_{nn}\varphi_n) \end{cases},$$

где

$$f'_p=f\left(\frac{p}{n}\right),\quad \varphi_p=\varphi\left(\frac{p}{n}\right),\quad K_{pq}=K\left(\frac{p}{n},\frac{q}{n}\right),\quad (p,q=1,2,\ldots,n)$$

Гильберт употребляет также обозначения $K_{xp}=K_{p1}x_1+K_{p2}x_2+\ldots+K_{pn}x_n$, $[x,y]=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$, $K_{xy}=K_{11}x_1y_1+\ldots+K_{nn}x_ny_n=\sum_{pq}K_{pq}x_py_q$.

Решение системы алгебраических уравнений заменяется отысканием линейной формы

$$[x,\varphi]=x_1\varphi_1+x_2\varphi_2+\ldots+x_n\varphi_n,$$

удовлетворяющей тождественно относительно x уравнению

$$[f,x]=[\varphi,x]-l[K\varphi,x]$$

Линейная форма принимает вид:

$$[x,\varphi]=-\frac{D\left(l,\begin{matrix}x\\f\end{matrix}\right)}{d(l)},$$

где

$$d(l)=\begin{vmatrix} 1-lK_{11} & -lK_{12} & \cdots & -lK_{1n} \\ -\lambda K_{12} & 1-\lambda K_{22} & \cdots & -lK_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -lK_{n1} & -lK_{n2} & \cdots & 1-lK_{nn} \end{vmatrix}$$

и

$$D\left(l,\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)=\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & 1-lK_{11} & -lK_{12} & \cdots & -lK_{1n} \\ y_2 & -lK_{21} & 1-lK_{22} & \cdots & -lK_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n & -lK_{n1} & -lK_{n2} & \cdots & 1-lK_{nn} \end{vmatrix}$$

Коэффициенты найденной линейной формы при $d(l)\neq 0$ дают искомые значения неизвестных $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$.

Для симметрического ядра $K_{pq} = K_{qp}$ корни $l^{(1)}, l^{(2)}, \ldots, l^{(n)}$ уравнения $d(l) = 0$ вещественны и, кроме того, предполагаются различными.

Далее доказываются равенства

$$\left[\varphi^{(h)}, \varphi^{(k)}\right] = 0, \qquad (h \neq k),$$

то есть ортогональность соответствующих решений.

Затем показывается, что квадратичные формы могут быть записаны в виде:

$$[x, x] = \frac{D\begin{pmatrix} l^{(1)}, \begin{matrix} x \\ x \end{matrix} \end{pmatrix}}{l^{(1)} d'\left(l^{(1)}\right)} + \ldots + \frac{D\begin{pmatrix} l^{(n)}, \begin{matrix} x \\ x \end{matrix} \end{pmatrix}}{l^{(n)} d'\left(l^{(n)}\right)} = \frac{\left[\varphi^{(1)}, x\right]^2}{\left[\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)}\right]} + \ldots + \frac{\left[\varphi^{(n)}, x\right]^2}{\left[\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)}\right]}$$

и

$$K_{xx} = \frac{D\begin{pmatrix} l^{(1)}, \begin{matrix} x \\ x \end{matrix} \end{pmatrix}}{\left(l^{(1)}\right)^2 d'\left(l^{(1)}\right)} + \ldots + \frac{D\begin{pmatrix} l^{(n)}, \begin{matrix} x \\ x \end{matrix} \end{pmatrix}}{\left(l^{(n)}\right)^2 d'\left(l^{(n)}\right)} = \frac{\left[\varphi^{(1)}, x\right]^2}{l^{(1)}\left[\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)}\right]} + \ldots + \frac{\left[\varphi^{(n)}, x\right]^2}{l^{(n)}\left[\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)}\right]}.$$

В следующей главе Д.Гильберт, не предполагая симметричности ядра, для непрерывных ядер получает строго обоснованным предельным переходом при $n \to \infty$ формулы Фредгольма для решения интегрального уравнения

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_0^1 K(s,t) f(t) dt,$$

где $K(s,t) = -\dfrac{\Delta(\lambda; s,t)}{\delta(l)}$, $\Delta(\lambda; s,t) = -K(s,t) + \Delta_1(s,t)\lambda - \Delta_2(s,t)\lambda^2 + \ldots,$

$\delta(\lambda) = 1 - \delta_1\lambda + \delta_2\lambda^2 - \ldots,$ где в свою очередь

$$\delta_h = \frac{1}{h!}\int_0^1 \ldots \int_0^1 \begin{vmatrix} K(s_1, s_1) & K(s_1, s_2) & \ldots & K(s_1, s_h) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(s_h, s_1) & K(s_h, s_2) & \ldots & K(s_h, s_h) \end{vmatrix} ds_1 ds_2 \ldots ds_h,$$

$$\Delta_h(s,t) = \frac{1}{h!}\int_0^1 \ldots \int_0^1 \begin{vmatrix} K(s,t) & K(s,s_1) & \ldots & K(s,s_h) \\ K(s_1,t) & K(s_1,s_1) & \ldots & K(s_1,s_h) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(s_h,t) & K(s_h,s_1) & \ldots & K(s_h,s_h) \end{vmatrix} ds_1 ds_2 \ldots ds_h,$$

В третьей главе Гильберт рассматривает симметрические ядра и получает основную теорему: пусть ядро $K(s,t)$ интегрального уравнения второго рода

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t) dt$$

есть симметричная непрерывная функция s, t; далее пусть $\lambda^{(h)}$ принадлежащие ядру $K(s,t)$ собственные значения и $\psi^{(h)}(s)$ соответствующие нормированные собственные функции; наконец, пусть $x(s), y(s)$ какие-либо непрерывные функции s тогда имеет место разложение

$$\int_a^b\int_a^b K(s,t)x(s)y(t)dsdt=\frac{1}{\lambda^{(1)}}\int_a^b\psi^{(1)}(s)x(s)ds\int_a^b\psi^{(1)}(s)y(s)ds+\frac{1}{\lambda^{(2)}}\int_a^b\psi^{(2)}(s)x(s)ds\int_a^b\psi^{(2)}(s)y(s)ds+\ldots,$$

причем ряд справа абсолютно и равномерно сходится для всех функций. $x(s), y(s)$ для которых интегралы

$$\int_a^b (x(s))^2\,ds\,,\quad \int_a^b (x\setminus y(s))^2\,ds$$

остаются меньше фиксированного конечного числа. Как непосредственное следствие этой теоремы Гильберт отмечал, что собственные значения и собственные функции в совокупности определяются ядром.

В четвертой главе показано существование собственных значений и теорема о разложении. Гильберт отмечает встречавшиеся ранее трудности доказательства существования собственных значений. Применение же ранее указанных им теорем позволяет дать простой и полный ответ. Вопрос сводится к тому, что $\delta(\lambda)$ есть целая рациональная функция степени, равной числу собственных значений ядра интегрального уравнения. Доказывается существование хотя бы одного собственного значения для симметрических ядер, отличных от нуля.

Первоначальная формулировка теоремы разложения дана в теореме 4 для функции $f(s)$ представимой в виде

$$f(s)=\int_a^b\int_a^b K(r,t)K(s,t)h(r)drdt,$$

где $h(r)$ непрерывная функция.

Ряд Фурье такой функции

$$C_1\psi^{(1)}(s)+C_2\psi^{(2)}(s)+\ldots$$

по собственным функциям ядра $K(s,t)$ где

$$C_m=\int_a^b f(s)\psi^{(m)}(s)ds,$$

сходится абсолютно и равномерно.

Для замкнутого ядра $K(s,t)$, для которого никогда не выполняется равенство

$$\int_a^b K(s,t)g(s)ds=0,$$

где $g(s)$ непрерывная, необращающаяся тождественно в нуль, функция, доказывается теорема о полноте системы собственных функций и теорема разложения. Если ряд Фурье какой-либо непрерывной функции $f(s)$ по собственным функциям замкнутого ядра сходится равномерно, то он представляет эту функцию.

Наиболее общий и простой вид теорема разложения принимает в теореме 7: Любая функция, представимая с помощью непрерывной функции $g(s)$ в виде

$$f(s)=\int_a^b K(x,s)g(x)dx,$$

разложима в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям:

$$f(s)=C_1\psi^{(1)}(s)+C_2\psi^{(2)}(s)+\ldots,\qquad C_m=\int_a^b f(s)\psi^{(m)}(s)ds,$$

Доказательство дано для так называемого, по Гильберту, общего ядра, то есть такого непрерывного симметричного ядра, которое позволяет с помощью соответствующего выбора непрерывной функции $h(s)$, любую непрерывную функции $g(s)$ приближенно выразить интегралом

$$\int_a^b K(s,t)h(t)dt,$$

в смысле среднего квадратичного приближения, то - есть, чтобы имело место неравенство

$$\int_a^b\left(g(s)-\int_a^b K(s,t)h(t)dt\right)^2 ds<\varepsilon,$$

для любого произвольного малого положительного ε. На основе теоремы 7 делается заключение, что ряд квадратов коэффициентов Фурье функции $x(s)$

$$\left(\int_a^b\psi^{(1)}(s)x(s)ds\right)^2+\left(\int_a^b\psi^{(2)}(s)x(s)ds\right)^2+\ldots$$

сходится и сумма его равна $\int_a^b (x(s))^2 ds$, то есть доказано равенство Парсеваля.

Второе сообщение Д.Гильберта посвящено применению теории линейных интегральных уравнений к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка.

Для самосопряженного дифференциального выражения второго порядка

$$L(u)\equiv\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)+qu\equiv p\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{dp}{dx}\frac{du}{dx}+qu$$

дано определение главного решения, как решения однородного уравнения $L(u)=0$ и функции Грина $G(x,\xi)$ при различных краевых условиях $G(x,\xi)=\dfrac{g(x,\xi)}{p(\xi)}$, а также введено понятие функции Грина в расширенном смысле. Отмечается симметричность функции Грина. С помощью функции Грина получается решение краевой задачи для неоднородного линейного дифференциального уравнения

$$L(f(x))+\varphi(x)=0$$

в виде

$$f(x)=\int_a^b G(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi,$$

которое представляет собой интегральное уравнение первого рода с симметричным ядром $G(x,\xi)$.

Далее устанавливается взаимнооднозначная связь между решением краевой задачи для дифференциального уравнения и решением интегрального уравнения. Если рассмотреть линейное дифференциальное выражение с параметром

$$\Lambda(u)\equiv L(u)+\lambda u,$$

то можно установить связь между интегральными уравнениями второго рода и краевыми задачами для дифференциальных уравнений с параметром. Эта связь указана Гильбертом в теореме 12.

Если функция Грина дифференциального выражения $L(u)$ для некоторой пары краевых условий есть ядро интегрального уравнения второго рода

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi ,$$

то резольвента $K(x,\xi)$ этого уравнения есть функция Грина дифференциального выражения $\Lambda(u) \equiv L(u) + \lambda u$.

Таким образом, показана эквивалентность проблемы решения интегрального уравнения

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi ,$$

и краевой задачи для дифференциального уравнения

$$L(u) + \lambda u = \varphi(x) .$$

Для собственных значений и собственных функций дифференциального уравнения

$$\Lambda(u) = 0$$

при некоторых краевых условиях Гильбертом доказано:

1. В случае штурмовских краевых условий собственные значения простые (однократные).
2. Существует бесконечно много собственных значений краевой задачи.
3. Полнота системы собственных функций, то есть, что любая непрерывная функция $h(x)$, ортогональна всем собственным функциям,

$$\int_a^b h(x)\psi^{(m)}(x)dx = 0 ,$$

тождественно равна нулю.
4. Ряд Фурье непрерывной функции $f(x)$ по собственным функциям краевой задачи сходятся.
5. Всякая дважды непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая соответствующим краевым условиям функция $f(x)$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям краевой задачи для дифференциального уравнения $\Lambda(u) = 0$.

Гильберт отмечает результаты Стеклова и Кнезера [100] о разложении произвольных функций в ряды Штурма-Лиувилля. Для дифференциального выражения общего вида

$$L(u) + \lambda k u ,$$

где $k(x)$ положительная функция внутри интервала, подстановка

$$u = \frac{v}{\sqrt{k}}$$

приводит задачу к ранее рассмотренной.

В качестве примеров Гильберт рассматривает дифференциальные выражения

$$L(u) \equiv \frac{d^2u}{dx^2} , \quad \Lambda(u) = \frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u$$

в интервале (0,1) дифференциальное уравнение

$$x\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dx}+\lambda xu=0$$

приводящее к функциям Бесселя, и

$$L(u)\equiv\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{du}{dx}\right\}-\frac{4\alpha^2}{1-x^2}u$$

связанное с присоединенными функциями Лежандра.

В качестве примера задачи с двукратным спектром и функцией Грина в расширенном смысле Гильберт рассматривает дифференциальный оператор

$$L(u)\equiv\frac{d^2u}{dx^2}$$

с периодическими краевыми условиями $f(-1)=f(+1)\quad f'(-1)=f'(+1)$.

Для однородного уравнения $u''=0$ существует решение $\psi_0(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, а уравнение $u''+\lambda u=0$ имеет двукратные собственные значения $\lambda^{(m)}=m^2\pi^2$ с собственными функциями $\cos m\pi x$ и $\sin m\pi x$

В заключении Гильберт отмечает связь теории собственных значений для дифференциальных уравнений с задачами вариационного исчисления.

В следующей главе Гильберт показал возможность переноса развитой теории на самосопряженные дифференциальные уравнения второго порядка эллиптического типа, доказал существование функции Грина в различных случаях и рассмотрел краевые задачи, содержащие параметр в краевых условиях.

Третье сообщение Гильберт посвятил применению интегральных уравнений к проблемам теории функций комплексного переменного.

Итак, в первых трех сообщениях об основах общей теории линейных интегральных уравнений, опубликованных в 1904-05гг., Гильберт дал новое изложение фредгольмовской теории интегральных уравнений, дополнив ее строгими доказательствами и подробным изложением теории симметричных линейных интегральных уравнений и их связям с теорией краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, некоторых уравнений в частных производных, вариационными задачами и теорией функций. Новым была и общая идея о значении ортогональных преобразований квадратичных форм к сумме квадратов. На этом пути доказана теорема существования собственных значений симметричного ядра и теорема разложения в первой редакции для так называемых общих ядер.

Начиная с четвертого сообщения (1906г.) Гильберт развивает новый метод изложения теории линейных интегральных уравнений, основанный на теории квадратичных форм с бесконечным числом переменных. Четвертое сообщение, состоящее из двух глав, целиком посвящено теории квадратичных форм с бесконечным числом переменных.

Рассмотрим основные понятия, определения и обозначения, использованные Гильбертом в этой теории.

Квадратичной формой называется выражение

$$K(x)=\sum_{(p,q=1,2,\ldots)}k_{pq}x_px_q$$

в котором коэффициенты подчинены условию $k_{pq}=k_{qp}$.Вводится билинейная форма

$$A(x,y) = \sum_{(p,q=1,2,...)} a_{pq} x_p y_q$$

с произвольными коэффициентами a_{pq} и билинейная форма, принадлежащая квадратичной форме $K(x)$,

$$K\ (x,y) = \sum_{(p,q=1,2,...)} k_{pq} x_p y_q$$

Формы, составленные из первых n переменных, называются отрезками соответствующих форм с бесконечным числом переменных

$$K_n(x) = \sum_{(p,q=1,2,...,n)} k_{pq} x_p x_q\ ,\ K_n(x,y) = \sum_{(p,q=1,2,...,n)} k_{pq} x_p y_q$$

Сумма коэффициентов с одинаковыми индексами отрезка билинейной формы называется сверткой

$$A_n(\bullet,\bullet) = \sum_{(p,q=1,2,...,n)} a_{pq}\ .$$

В частности,

$$K_n(\bullet,\bullet) = k_{11} + ... + k_{nn}$$

Вводится свертка билинейных форм

$$A_n(x,\bullet)B(\bullet,y) = \sum_{(p,q,r=1,2,...,n)} a_{pq} b_{qr} x_p y_r$$

и специальные квадратичные и билинейные формы:

$$(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + ...,$$
$$(x,x)_n = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2,$$
$$(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ...,$$
$$(x,y)_n = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n\ .$$

Для формы

$$(x,x)_n = \lambda K_n(x)$$

дискриминант

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & ... & -\lambda k_{1n} \\ -\lambda k_{21} & 1-\lambda k_{22} & ... & -\lambda k_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & ... & 1-\lambda k_{nn} \end{vmatrix}$$

есть целая рациональная функция n-й степени от λ с вещественными корнями $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, ..., \lambda_n^{(n)}$.

Эти корни называются собственными значениями формы K, а их совокупность – спектром формы K. Здесь мы впервые у Гильберта встречаемся с термином спектр. Здесь же Гильбертом вводится понятие точки уплотнения формы K, как точки λ, в любой окрестности которой находится бесконечно много собственных значений. Для неограниченно возрастающей последовательности точка $\lambda = \infty$, считается точкой уплотнения формы K.

Вводится еще обрамленный определитель

$$D_n(\lambda,x,y)=\begin{vmatrix}1-\lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & \dots & -\lambda k_{1n} & x_1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & \dots & 1-\lambda k_{nn} & x_n\\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & 0\end{vmatrix}$$

и резольвента квадратичной формы

$$K_n(\lambda,x,y)=-\frac{D_n(\lambda,x,y)}{D_n(\lambda)};\qquad K_n(\lambda,x)=K_n(\lambda,x,x)$$

Очевидно, что коэффициенты при $x_1,x_2,...,x_n$ в $K_n(\lambda,x,y)$ если λ не собственное значение, дают решение системы линейных уравнений

$$x_p-\lambda(k_{p1}x_1+...+k_{pn}x_n)=y_p\qquad (p=1,2,...,n)$$

Применяя последовательно свертывание форм, Д.Гильберт получает формулы

$$K_n(\lambda,x,y)=(x,y)_n+\lambda K_n(x,y)+\lambda^2K_nK_n(x,y)+...$$

и

$$K_n(\lambda,x,y)=\frac{L_1^{(n)}(x)L_1^{(n)}(y)}{1-\dfrac{\lambda}{\lambda_1^{(n)}}}+...+\frac{L_n^{(n)}(x)L_n^{(n)}(y)}{1-\dfrac{\lambda}{\lambda_n^{(n)}}}$$

где $\{L_m^{(n)}\}$ некоторая известная ортонормальная система линейных форм. Вводя систему функций $\chi_p^{(n)}(\lambda)$ переменного λ

$$\chi_p^{(n)}(\lambda)=0 \text{ для } \lambda\le\lambda_p^{(n)},\quad p=1,2,...,n$$
$$\chi_p^{(n)}(\lambda)=(L_p^{(n)}(x))^2(\lambda-\lambda_p^{(n)}) \text{ для } \lambda\le\lambda_p^{(n)},\quad p=1,2,...,n$$
$$\chi_p^{(n)}(\lambda)=\chi_1^{(n)}(\lambda)+...+\chi_n^{(n)}(\lambda)$$

и разностные отношения этих функций

$$\frac{\chi_p^{(n)}(\lambda)-\chi_p^{(n)}(\mu)}{\lambda-\mu}\ \text{и}\ \frac{\chi^{(n)}(\lambda)-\chi^{(n)}(\mu)}{\lambda-\mu}$$

Гильберт показывает, пользуясь диагональным процессом и свойствами равномерной сходимости, существование квадратичной функции бесконечного числа переменных

$$\chi(\lambda)=\sum_{(p,q=1,2,...)}\chi_{pq}x_px_q$$

коэффициенты которой $\chi_{pq}(\lambda)$ непрерывные функции λ. Значения λ, для которых значения верхней и нижней производной функции $\chi(\lambda)$ не совпадают, образуют по Гильберту точечный или разрывный (das Kontinuerlucke) спектр формы. Первоначально Гильберт рассмотрел случай, когда $\lambda=\infty$ не является точкой уплотнения K. Дальнейшее изучение $\chi(\lambda)$ приводит Гильберт к введению новых форм

$$e(\lambda)=\sum_{\lambda<\lambda_p}E_p\,,$$
$$\eta(\lambda)=\sum_{\lambda_p<\lambda}E_p(\lambda-\lambda_p)\,,$$

и затем

$$\rho(\lambda)=\chi(\lambda)-\eta(\lambda),$$

которая оказывается не убывающей функцией λ. Если образовать

$$\sigma(\lambda)=\sum\sigma_{pq}x_px_q=\frac{d\rho(\lambda)}{d\lambda}=k(\lambda)-e(\lambda)$$

то любой отрезок формы $\sigma(\lambda)$ есть непрерывная, неотрицательная, неубывающая функция λ.

Форму $\sigma(\lambda)$ Гильберт называет спектральной формой формы K. Все эти формы левее некоторого отрезка J тождественно равны нулю, $k(+\infty)=(x,x)$, $e(\lambda)=\sum\limits_{(p)}E_p$.

Теперь выберем такие вещественные значения λ, в любой окрестности которых существуют еще такие λ', для которых равенства $\sigma(\lambda)=\sigma(\lambda')$ выполняются не тождественно относительно всех переменных $x_1,x_2,...$. Множество всех таких точек λ совершенно и называются предельным или непрерывным спектром (Streckenspektrum) формы K.

Точечный спектр, предельные точки собственных значений и непрерывный спектр вместе Гильберт называет спектром формы K. Имеет место равенство

$$(x,x)=\sum_{(p)}E_p+\int_{(s)}d\sigma(\lambda)$$

Здесь Гильберт вводит в математику непрерывный спектр и спектральную терминологию. Записанные формулы выражают разложение единицы по точечному (p) и непрерывному (s) спектру.

Дальнейшей целью Гильберта было получить аналог разложения резольвенты квадратичной формы с конечным числом переменных для формы с бесконечным числом переменных. Гильберт называет резольвентой формы K выражение

$$K(\lambda,x)=(x,x)+2\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K(\mu)}{(\mu-\lambda)^3}d\mu$$

После ряда преобразований получается

$$K(\lambda,x)=\sum_{(p)}\frac{E_p}{1-\dfrac{\lambda}{\lambda_p}}+\int_{(s)}\frac{d\sigma(\mu)}{1-\dfrac{\lambda}{\mu}}$$

Это и есть искомый аналог представления резольвенты квадратичной формы с конечным числом переменных в виде дробей. Квадратичная форма $K(\lambda,x)$ есть предел квадратичных форм $K_{m_h}(\lambda,x)$,где m_h некоторая неограниченно возрастающая последовательность чисел.

В дальнейшем Гильберт рассматривает только такие системы чисел $x_1,x_2,...,y_1,y_2,...,$ для которых выполняются условия $(x,x)\le 1$, $(y,y)\le 1$.

Если значения всех отрезков квадратичных форм абсолютно ограничены, то квадратичная форма называется ограниченной. Для случая бесконечного числа переменных определяются и устанавливаются простейшие свойства ортогональных преобразований, аналогичные случаю конечного числа переменных. Для резольвенты K доказывается уравнение

$$K(\lambda,x,y)-\lambda K(x,\bullet)K(\lambda,\bullet,y)=(x,y)$$

и формула

$$K[\lambda, x, y] = (x, y) + \lambda K(x, y) + \lambda^2 KK(x, y) + ...$$

Из представления резольвенты видно, что она регулярная аналитическая функция для всех комплексных и для вещественных, не принадлежащих спектру, значений λ. Для ограниченной квадратичной формы доказывается, что требование, чтобы $\lambda = \infty$ не было точкой сгущения собственных значений может быть отброшено. Показывается, что $\lambda = 0$ не принадлежит спектру. Применение ортогонального преобразования к ограниченной квадратичной форме позволяет получить представление этой формы в виде

$$K = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + ... + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu, \xi)}{\mu}$$

и

$$(\xi, \xi) = \int_{(s)} d\sigma(\mu; \xi)$$

Гильберт в четвертом сообщении особо останавливается на двух специальных случаях. Функция $F(x_1, x_2, ...)$ бесконечного числа переменных для определенной системы значений называется вполне непрерывной, если значения $F(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, ...)$ сходятся к $F(x_1, x_2, ...)$ как только $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...$ сходятся к нулю.

Если функция вполне непрерывна для любой системы значений со сходящейся суммой квадратов то такую функцию Гильберт называет вполне непрерывной. Для вполне непрерывной квадратичной формы Гильберт сразу получает представление в виде суммы квадратов

$$K(x) = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + ...,$$

причем для чисел $k_1, k_2, ...$, в случае, если их бесконечно много, единственной предельной точкой оказывается нуль. Гильберт указывает два достаточных признака вполне непрерывности форм.

Противоположным случаем к вполне непрерывным формам оказывается случай, когда форма K не имеет точечного спектра, а имеет только непрерывный спектр. В качестве простейшего примера Гильберт дает квадратичную форму

$$K(x) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + ...,$$

непрерывный спектр, которой состоит из отрезков $(-\infty, 1]$ и $[1, +\infty)$. Ранее Гильберт показал, что спектр есть замкнутое множество. Второй пример формы с тем же спектром

$$K(x) = \frac{2}{\sqrt{2^2 - 1}} x_1 x_2 + \frac{4}{\sqrt{4^2 - 1}} x_2 x_3 + \frac{6}{\sqrt{6^2 - 1}} x_3 x_4 + ...$$

Метод предельного перехода от квадратичных форм конечного числа переменных Гильберт распространяется на более общие формы с бесконечным числом переменных. Рассматривается случай двух квадратичных форм, одна из которых ограничена, а другая вида

$$V(x) = v_1 x_1^2 + v_2 x_2^2 + ...,$$

где $v_1, v_2, ...$ принимает значения +1 или -1.

Рассматриваются также эрмитовы формы бесконечно, многих переменных, то есть формы

$$H(x, y) = \sum_{(p,q)} h_{1q} x_p y_q$$

где комплексные коэффициенты h_{pq} удовлетворяют равенствам $h_{pq} = \overline{h}_{qp}$, а их действительные и мнимые части $\operatorname{Re} h_{pq}$, $\operatorname{Im} h_{pq}$ - вполне непрерывные функции действительных переменных $x_1, x_2, ..., y_1, y_2, ...$. Как частный случай эрмитовых форм ($\operatorname{Re} h_{pq} = 0$) вводятся кососимметрические формы.

Здесь же теория вполне непрерывных билинейных форм позволяет сформулировать основные результаты о решении линейной системы с бесконечным числом переменных вида:

$$
\begin{aligned}
&(1 + a_{11})x_1 + a_{12}x_2 + ... = a_1, \\
&a_{21}x_1 + (1 + a_{22})x_2 + ... = a_2, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

В следующем (пятом) сообщении Гильберт дает новое обоснование общей теории линейных интегральных уравнений на основе теории линейных, билинейных и квадратичных форм с бесконечным числом переменных. Связь теории функций и уравнений с бесконечным числом переменных с теорией линейных интегральных уравнений Гильберт устанавливает с помощью системы функций $\Phi_1(s), \Phi_2(s), ...$;

1) $\int\limits_a^b \Phi_p(s)\Phi_q(s)ds = 0 \qquad (p \neq q); \qquad \int\limits_a^b (\Phi_p(s))^2 ds = 1;$

2) $\int\limits_a^b u(s)v(s)ds = \int\limits_a^b u\Phi_1(s)ds \int\limits_a^b v\Phi_1(s)ds + ...$

Решение уравнения Фредгольма второго рода с несимметричным ядром

$$f(s) = \varphi(s) + \int\limits_a^b K(x,s)\varphi(x)dx$$

приводит к системе линейных алгебраический уравнений

$$\alpha_{11}a_{p1} + \alpha_2 a_{p2} + ... = a_p - \alpha_p,$$

где

$$\alpha_p = \int\limits_a^b \varphi(s)\Phi_p(s)ds \quad a_p = \int\limits_a^b f(s)\Phi_p(s)ds$$

и

$$a_{pq} = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K(s,t)\Phi_p(s)\Phi_q(t)dsdt, \qquad \varphi(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p \Phi_p(x).$$

Существенную роль в изложении Гильбертом фредгольмовской теории линейных интегральных уравнений играет вполне непрерывность билинейной формы $A(x,y) = \sum\limits_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q$, вытекающая из ограниченности сумм квадратов чисел a_{pq} и a_p. Гильберт показывает, что решение системы алгебраических линейных уравнений служит системой коэффициентов Фурье искомого решения интегрального уравнения. В случае если однородная система алгебраических уравнений имеет ненулевые решения, то по каждому из них строится решение однородного интегрального уравнения. В этом случае на свободный член неоднородного уравнения налагаются известные условия ортогональности с решениями интегрального уравнения с транспонированным ядром. В этом сообщении Гильберт рассматривает линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода без параметра. В построении теории Гильберта важное значение приобретает соотношение полноты.

Для развития спектральной теории, большой интерес представляет новое построение Гильбертом теории линейных уравнений с симметричным ядром, названных Гильбертом ортогональными, теорию которых он развивает в следующей главе.

Гильберт рассматривает интегральное уравнение вида

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt,$$

где $K(s,t)$ непрерывная симметрическая функция переменных s и t, $f(s)$ - заданная непрерывная функция s, $\varphi(s)$ - искомая функция переменного s и параметра λ.

Из ядра с помощью полной ортогональной системы функций $\Phi_1(s), \Phi_2(s), \ldots$ образуем билинейную форму

$$K(x,y) = \sum_{(p,q)} k_{pq} x_p y_q$$

где

$$k_{pq} = \int_a^b \int_a^b K(s,t)\Phi_p(s)\Phi_q(t)dsdt$$

и квадратичную форму

$$K(x) = \sum_{(p,q)} k_{pq} x_p x_q .$$

Последняя, в силу неравенства

$$\sum_{(p,q)} k_{pq}^2 \le \int_a^b \int_a^b (K(s,t))^2 dsdt$$

есть вполне непрерывная функция бесконечно многих переменных, $x_1, x_2, \ldots$, поэтому по развитой ранее теории квадратичных форм бесконечно многих переменных ее можно преобразовать к виду

$$K(x) = k_1 x_1'^2 + k_2 x_2'^2 + \ldots,$$

где

$$x_p' = L_p x = l_{p_1} x_1 + l_{p_2} x_2 + \ldots \qquad \text{для} \quad k_p \ne 0.$$

Далее показывается, что однородное уравнение

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt = 0$$

имеет для $\lambda = \lambda_p = \dfrac{1}{\chi_p}$ (χ_p находится из соотношения $K(x,\bullet)L_p(x) = \chi_p L_p(x)$) решение, не равное тождественно нулю $\varphi(s) = \varphi_p(s)$. Затем Гильберт переходит к вопросу о разложении произвольной функции в ряд по ортогональной системе функций, $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$ т.е. по системе собственных функций интегрального уравнения.

Здесь теорема разложения доказывается для функций вида

$$f(s) = \int_a^b K(s,t)g(t)dt,$$

а не для функций, представимых с помощью итерированного ядра ($f(s)=\int_a^b KK(s,t)g(t)dt$, где K "общее"ядро), как было в первом сообщении.

Шмидт устранил это ограничение, и мы видим уже современную формулировку теоремы о разложении (теорема Гильберта-Шмидта): любая функция $f(s)$, представимая с помощью непрерывной функции $g(s)$ в виде

$$f(s)=\int_a^b K(s,t)g(t)dt,$$

разлагается по ортогональным функциям $\varphi_1(s),\varphi_2(s),...$ в ряд Фурье, сходящийся равномерно и абсолютно.

В работе Гильберта доказывается, что для $\lambda \neq \lambda_p$ рассматриваемое интегральное уравнение не имеет решений, отличных от нулевого. Собственные значения могут иметь точку сгущения только в бесконечности и каждое из них имеет конечную кратность. Введем обычное теперь обозначение

$$\lambda_p=\lambda_{p+1}=...=\lambda_{p+n-1}$$

и им сопоставим линейно независимые собственные функций $\varphi_p,\varphi_{p+1},...,\varphi_{p+n-1}$.

Для разрешимости неоднородного уравнения при $\lambda=\lambda_p$ формулируется и доказывается необходимость и достаточность условий:

$$\int_a^b \varphi_q(s)f(s)ds=0 \qquad (q=p,p+1,\ldots,p+n-1).$$

Значения $\lambda_1,\lambda_2,...$ и принадлежащие им функции $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...$ называются, соответственно, собственными значениями и собственными функциями ядра $K(s,t)$.

Гильбертом доказывается, что наибольшее значение двойного интеграла

$$J(u)=\int_a^b\int_a^b K(s,t)u(s)u(t)dsdt$$

для непрерывных функций $u(s)$ с условием $\int_a^b (u(s))^2ds=1$ равно обратной величине наименьшего положительного собственного значения ядра $K(s,t)$, этот максимум достигается, если $u(s)$ есть собственная функция, принадлежащая этому собственному значению.

Полнота системы собственных функций доказана Гильбертом для "общих" ядер по его ранее введенной терминологии и при условии замкнутости квадратичной формы $K(x)$, полученной из ядра. В дальнейших главах Гильберт показывает еще некоторые приложения развитой им теории. В частности, рассмотрена теория так называемых полярных интегральных уравнений вида

$$f(s)=\nu(s)\varphi(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt,$$

где $\nu(s)$- кусочно постоянная функция, принимающая значения +1 и -1, меняющая знак конечное число раз. Эта теория позволяет, как показал Гильберт в следующей главе, в теории Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)+(q+\lambda k)u=0$$

отказаться от дефинитности функции $k(x)$, допустив изменение знака функции $k(x)$ в рассматриваемом интервале конечное число раз. Показывается возможность применения развитой теории к системам дифференциальных уравнений, на примере системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

В шестом сообщении рассмотрены различные проблемы анализа и геометрии. Из них отметим краевую задачу для системы дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа, метод параметризации, позволяющий дать некоторое развитие теории для дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dz}{dx}\right)+\lambda qz=0$$

где $q(x)$ любая всюду положительная функция. Одна глава посвящена двухпараметрической краевой задаче:

$$\frac{d\left(p\frac{dy}{dx}\right)}{dx}+(\lambda a+\mu b)y=0,$$

$$\frac{d\left(\pi\frac{d\eta}{d\xi}\right)}{d\xi}+(\lambda\alpha+\mu\beta)\eta=0\,,$$

связанной с теоремой осцилляции Клейна.

Обзор и дальнейшее развитие теории для функций бесконечно многих переменных было сделано Гильбертом на IV Международном математическом конгрессе в Риме в 1908 году и в опубликованной в 1909г. статье "Сущность и цели анализа бесконечно многих независимых переменных" /61/.

Резюмируя исследования Гильберта по теории интегральных уравнений, прежде всего, нужно отметить, что Гильберт увидел и развил глубокую аналогию аналитических и алгебраических задач и методов. Создавая теорию линейных и квадратичных форм бесконечно многих переменных, Гильберт понял значение изучения последовательностей $(x_1, x_2, ...)$ со сходящейся суммой квадратов $\sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 < \infty$.

Из линейных преобразований Гильберт выделяет ограниченные. Важнейшим открытием Гильберта было понятие вполне непрерывности функций и форм.

Функция $F(x_1, x_2, ...)$ бесконечно многих переменных называется вполне непрерывной, если для системы чисел $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_p^{(n)}, ...$ $\quad (n=1,2,...)$
из сходимости компонент $\underset{n\to\infty}{L}\, x_p^{(n)} = x_p$ (здесь L − гильбертово обозначение предела) следует $\underset{n\to\infty}{L}\, F\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ...\right) = F(x_1, x_2, ...)$.

Из ограниченности линейной формы следует ее вполне непрерывность. Необходимым и достаточным условием вполне непрерывности квадратичной формы $V_1x_1^2 + V_2x_2^2 + ...$ оказывается условие $\underset{n\to\infty}{L}\, V_n = 0$, а для билинейной формы $\sum_{(p,q)} a_{pq}x_py_q$ достаточно сходимости $\sum_{(p,q)} a_{pq}^2$.

Для вполне непрерывных квадратичных форм Гильбертом была доказана возможность их преобразования с помощью ортогонального преобразования переменных к сумме квадратов $k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \ldots$.

Для ограниченных квадратичных форм Гильберт развил спектральную теорию предельным переходом от алгебраических систем. Квадратичная форма $K(x)$ преобразуется к виду $K(x) = \sum_p k_p x_p^2 + \int\limits_{(s)} \frac{d\sigma(\mu,\xi)}{\mu}$, где спектральная форма $\sigma(\mu,\xi)$ - положительно определенная и зависящая от параметра μ, монотонно возрастающая по μ от 0 до $\sum\limits_{(p)} \xi_p^2$ .. Совершенное точечное множество S Гильберт называет непрерывным спектром. Множество собственных значений называется точечным спектром. Объединение непрерывного, точечного спектров и их предельных точек называется спектром.

Гильбертом получено также интегральное представление резольвенты и дан пример ограниченной квадратичной формы с непрерывным спектром. Для вполне непрерывных форм непрерывная часть спектра отсутствует. Гильберт показал, что теория интегральных уравнений Фредгольма связана с понятием вполне непрерывности. Теорема разложения дана Гильбертом сначала для замкнутых и "общих" ядер, а затем для непрерывных ядер с интегрируемым квадратом.

В применении к обыкновенным дифференциальным уравнениям Гильберт пользовался функцией Грина для сведения краевых задач к интегральным уравнениям.

Для дифференциального уравнения Штурма-Лиувилля второго порядка

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu + \lambda u = 0$$

Гильбертом указаны краевые условия Штурмовского типа, и нештурмовские:

IV. $\quad f(a) = hf(b); \qquad p(a)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=h} = \frac{p(b)}{h}\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=b};$

IV*. $\quad f(a) = hp(b)\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=b}; \qquad p(u)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=u} = -\frac{1}{h}f(b),$

и обобщенные краевые условия:

V. $f(x)$ в окрестности точки $x = a$ представима в виде $(x-a)e(x)$, где $e(x)$ при $x = a$ остается конечной;

V*. $f(x)$ при приближении к $x = a$ остается конечной.

Как было отмечено выше, после ознакомления с работами Фредгольма интерес к теории интегральных уравнений захватил Гильберта на многие годы. В следующий более чем 10-летний период исследования в этом направлении были основными в его деятельности.

Лекции и семинары Гильберта в Геттингене с 1901 года привлекли большое число учеников и последователей. За сравнительно короткий период под руководством и влиянием Гильберта были выполнены и защищены многочисленные диссертации по различным вопросам теории интегральных уравнений, анализа бесконечно многих переменных и разнообразных приложений развитых методов к задачам вариационного исчисления, теории преобразований, краевым задачам математической физики и т.д.

Первой была диссертация Келлога "К теории интегральных уравнений и принципа Дирихле; затем последовали диссертации Мазона, Шмидта, Миллера, Вестфалля, Хеллингера, Вейля, Хаара, Штейнгауза, Виндау и др. Пребывание в 1906г. в Геттингене определило тематику занятий Буницкого.

Нет возможности, да и необходимости, осветить в деталях влияние работ Гильберта по интегральным уравнениям, поскольку они имели общее значение и определили значительные черты математики XX столетия.

Гильберт своими исследованиями связал теорию интегральных уравнений, теорию краевых задач, теорию линейных преобразований в единую теорию. Сам Гильберт отмечал ценность единого методического изложения алгебры и анализа.

Методы и приемы Гильберта, использованные им при построении спектральной теории квадратичных форм, остались в пределах классического анализа Коши. Предельный переход, интегралы и другие понятия анализа употребляются им в классическом смысле. Использование интеграла Стильтьеса не меняет положения, так как интеграл рассматривается на системе интервалов и предполагается узкий класс функций. Мы не встречаем даже объединения интегрирования по непрерывной части спектра и суммирования по дискретной.

§ 3. Исследования Буницкого, Миллера и Дини.

Буницкий /1874-1952гг./, получивший математическое образование в Одесском университете и работавший там до 1922г., а позднее в Карловом университете в Праге, опубликовал более 10 работ по спектральной теории краевых задач и примыкающим вопросам. Интерес к этим вопросам возник у него под влиянием работ Гильберта во время пребывания в Геттингене в 1906-07гг. Уже в 1907-08гг. им были опубликованы три заметки по теории систем интегральных уравнений. В последующих работах Буницкий развивает теорию функции Грина для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений порядка n [49]. Буницкий рассматривает краевые условия в общем виде

$$C_k\left(f\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ki}f^{(i-1)}\left(a\right)+\sum_{i=1}^{n}\beta_{ki}f^{(i-1)}\left(b\right)=0\,,\quad\left(k=1,2,...,n\right)$$

и последовательно выделяет различные классы краевых условий, позволяющие ввести функцию Грина в первоначальном или обобщенном смысле.

По идее и методам исследования Буницкого примыкают к VП главе сообщений Гильберта и диссертации Вестфалля. Исследование различных случаев доводится Буницким до формулировки теоремы разложения. Исследования Буницкого охватывают частные случаи самосопряженных и несамосопряженных задач.

Работы румынского математика Миллера /1874-1965/ выполнены под непосредственным влиянием и руководством Гильберта. Они относятся к периоду пребывания Миллера в Геттингене в 1909-12гг., то есть, выполнены одновременно с работами Гильберта по теории симметрических интегральных уравнений. В ряде статей [165] Миллер распространяет теорию Гильберта на дифференциальные уравнения четвертого порядка и некоторые типы уравнений высшего порядка.

Переход от краевых задач для дифференциальных уравнений к интегральным уравнениям производится с помощью функции Грина. Таким образом, рассматриваются и задачи разложения функций в ряды по собственным функциям некоторых конкретных типов дифференциальных уравнений. Миллер рассматривал, в основном, регулярные задачи. Значение этих работ Миллера состоит в детализации и расширении методов Гильберта. В дальнейшем, по возвращении в Румынию, Миллер отошел от этой тематики.

Итальянский математик Улисс Дини /1845-1918/ в ряде работ, начиная с 1872г. и до 1904г., занимался вопросами теории тригонометрических рядов и других аналитических представлений функций действительного переменного. В ставшем классическим трактате "Ряды Фурье и другие аналитические представления функций одного действительного переменного", изданном в 1880г. [77]. Дини наряду с рядами Фурье рассматривает обобщенные тригонометрические ряды вида

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\lambda_n x+b_n\sin\lambda_n x\right),$$

для которых получает необходимое и достаточное условие точечной сходимости ("критерий Дини"). Дини уточнил результат Ганкеля 1875г. о рядах и интегралах Фурье для цилиндрических функций, а также исследования Шлефли 1876г. о сходимости разложений по функциям Бесселя. Здесь же Дини рассматривает более общие ряды

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}b_m J_\nu\left(\lambda_m x\right),$$

где λ_m обозначают положительные корни функций $z^{-\nu}\left(zJ'_\nu(z)+HJ_\nu(z)\right)$ при условии $\nu\geq-\frac{1}{2}$, H - некоторая постоянная.

В дальнейших исследованиях, обобщенных Дини в курсе высшего анализа в Пизанском университете 1903-04гг., по применению метода интегральных уравнений показана сходимость общих разложений Штурма-Лиувилля, которая эквивалентна сходимости тригонометрических рядов Фурье.

Работы Дини послужили основой для исследований итальянских математиков Чиполло, Бортолотти, Пиконе и других по спектральной теории дифференциальных уравнений и примыкающим вопросам.

Дини рассматривал также вопросы разложения, связанные с функциями Якоби, сферическими многочленами Лежандра и Эрмита.

В цикле работ по обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям Дини изучает уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами. Для таких уравнений он получает формулы решения в общем асимптотическом виде. Рассматривая случай, когда коэффициенты содержат вещественный или комплексный параметр λ, Дини находит достаточные условия существования решения, удовлетворяющего линейным краевым условиям вида

$$k_0y_a+k_1y'_a+\ldots+k_{n-1}y_a^{(n-1)}=0\,,$$
$$h_0y_b+h_1y'_b+\ldots+h_{n-1}y_b^{(n-1)}=0$$

К вопросам разложения функций в ряды Дини обращается неоднократно. В двух мемуарах 1873г. он рассмотрел разложения в ряды по сферическим функциям, продолжил исследования Пуассона, Дирихле, Бонне. Дини доказал общий критерий сходимости и теорему об единственности разложения.

В работе 1917г. Дини продолжил исследования о разложении функций в ряд вида

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{1}^{\infty}\left(a_n\cos\lambda_n x+b_n\sin\lambda_n x\right),$$

где λ_n - корни уравнения $F(z)\cos\pi z+F_1(z)\sin\pi z=0$, в котором $F(z)$ и $F_1(z)$ полиномы.

В статье [78] Дини доказал возможность разложения функций в ряд по функциям Якоби в форме, указанной Эрмитом. Статья представляет собой отрывок из письма Дини к Эрмиту и была написана под впечатлением беседы с Миттаг-Леффлером о курсе лекций Эрмита об эллиптических функциях. Результаты были включены в книгу Дини о рядах Фурье.

Исследование Дини о единственности разложения по функциям Лежандра обобщали аналогичные исследования Гейне и Кантора для тригонометрических рядов и были этапом к доказательству единственности разложения типа Штурма-Лиувилля, данном Дини в его лекциях 1911г.

В работах Дини по теории обыкновенных дифференциальных уравнений заметно стремление рассмотреть проблемы для уравнений любого порядка, преодолеть трудности, возникающие при переходе от уравнений второго порядка. В исследованиях Дини о сходимости рядов была найдена теорема об эквивалентности разложений в ряды Фурье и в ряды по различным классам функций, в частности многочленов. Позднее аналогичное доказательство для отдельных классов функций были получены независимо рядом авторов.

Высоко был оценен метод Дини перехода от дифференциальных уравнений (линейных и нелинейных) к интегральным типа Вольтерра на основе метода последовательных приближений. Термина "интегральные уравнения" при этом Дини не употреблял.

Сведения о дальнейшей разработке проблем, которыми занимался Дини, можно найти в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений Сансоне [231].

§ 4. Исследования Биркгофа и Тамаркина.

В 1907 году Биркгоф представил Американскому математическому обществу результаты своих исследований по теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, опубликованные в следующем году в виде двух статей [13,14].

В первой статье Биркгоф изучает асимптотику решений дифференциального уравнения

$$\frac{d^n z}{dx^n}+\rho a_{n-1}(x,\rho)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+...+\rho^n a_0(x,\rho)z=0$$

для больших значений $|\rho|$. Коэффициенты уравнения предполагаются аналитическими от комплексного параметра ρ и имеющими производные любого порядка по вещественному переменному *x.* Ранее Шлезингер изучал другим способом асимптотические свойства решений на луче ($\arg\rho=\alpha$). Лиувиллем, была изучена асимптотика вещественного параметра ρ для решения уравнения

$$\frac{d^2 z}{dx^2}+\left(\rho^2+g(x)\right)z=0$$

Биркгоф развивает метод Лиувилля для уравнения порядка *n* при $x\in[a,b]$ с комплексным параметром ρ, предполагая для коэффициентов условия: $|a_i(x,\rho)|<M$ $\left(a\le x\le b, |\rho|>R\right)$ и $a_i(x,\rho)=\sum_{j=0}^{\infty}a_{ij}(x)\rho^j$ $\left(|\rho|<R\right)$, где a_{ij} могут быть комплекснозначными функциями вещественного переменного *x,* но непрерывными и с непрерывными производными любого порядка.

Обозначим через $W_1(x),W_2(x)...W_n(x)$ корни уравнения

$$W^n+a_{n-1}(x)W^{n-1}+...+a_0(x)=0$$

для каждого $x\in(a,b)$.

Асимптотику решений Биркгоф изучает в области *S,* которая определяется как часть ρ - плоскости, в которой выполняются неравенства

$$R\left(\rho W_1(x)\right)\le R\left(\rho W_2(x)\right)\le ...\le R_n\left(\rho W_n(x)\right)$$

для любого $x \in [a,b]$ и для любого $\rho \in S$. $R(\mu)$ - вещественная часть числа μ. Если $\rho = \rho_0$ точка в S, то указанное неравенство просто следует, если только $\arg\rho = \arg\rho_0$. Поэтому луч $\arg\rho = \arg\rho_0$ принадлежит области S. Для данного x указанное неравенство определяет некоторый замкнутый сектор $\theta_x \le \arg\rho \le \Psi_x$ содержащий луч $\arg\rho = \arg\rho_0$. Наибольший замкнутый сектор $\theta \le \arg\rho \le \Psi$, общий для всех таких секторов и есть S, обращается в луч, если $\theta = \Psi$.

Основная теорема Биркгофа дает асимптотические формулы для решений уравнений в области S.

Теорема. В области S существует n независимых решений $z_1(x,\rho), z_2(x,\rho),..., z_n(x,\rho)$ уравнения

$$\frac{d^n z}{dx^n} + \rho a_{n-1}(x,\rho)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + ... + \rho^n a_0(x,\rho)z = 0,$$

аналитических по ρ, таких, что для произвольного целого m и $\rho \in S$ имеют место равенства:

$$z_i(x,\rho) = u_i(x,\rho) + e^{\rho\int_a^x W_i(t)dt} E_0\rho^{-m}$$

$$\frac{d}{dx}z_i(x,\rho) = \frac{d}{dx}u_i(x,\rho) + e^{\rho\int_a^x W_i(t)dt} E_1\rho^{-m+1}$$

....

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}z_i(x,\rho) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}u_i(x,\rho) + e^{\rho\int_a^x W_i(t)dt} E_{n-1}\rho^{-m+n-1},$$

где

$$u_i(x,\rho) = e^{\rho\int_a^x W_i(t)dt} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} u_{ij}(x)\rho^{-j}$$

и u_{i0} не обращается в нуль ни в какой точке из (a,b).

Метод доказательства основан на том, что дифференциальное уравнение сводится к эквивалентному интегральному уравнению.

Во второй статье [14] дано приложение полученных асимптотических формул к теории краевых задач и разложения функций по собственным функциям.

Биркгоф рассматривает общий случай несамосопряженных задач вместо изученных ранее вещественных самосопряженных задач для уравнения второго порядка.

Лиувилль ввел понятие сопряженных условий в частном случае. Биркгоф занялся возможным обобщением. У него мы встречаемся с наиболее общей постановкой краевых задач. Биркгоф рассматривает дифференциальное выражение

$$L(z) \equiv \frac{d^n z}{dx^n} + p_2(x)\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} + ... + p_n(x)z,$$

где $p_2(x), p_3(x),..., p_n(x)$ - функции вещественного переменного x на замкнутом интервале $[a,b]$, непрерывные с производными всех порядков, и сопряженное дифференциальное выражение

$$M(z) \equiv (-1)^n \frac{d^n z}{dx^n} + (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \left[p_2(x)z + ... + p_n(x)z \right].$$

С линейным дифференциальным уравнением порядка n

$$L(u) + \lambda u = 0$$

и n линейными однородными краевыми условиями для $u(a), u^1(a), ...,$ $u^{(n-1)}(a), u(b), ..., u^{(n-1)}(b)$:

$$W_1(u) = 0, W_2(u) = 0, ..., W_n(u) = 0$$

связывается сопряженное уравнение

$$M(v) + \lambda v = 0$$

и n сопряженных условий

$$V_1(v) = 0, V_2(v) = 0, ..., V_n(v) = 0.$$

Для некоторых характеристических значений комплексного параметра λ существует решение $u(x)$, не равное тождественно нулю, или $v(x)$, соответственно. Пусть это $\lambda_1, \lambda_2, ...$ и соответствующие решения $u_1(x), u_2(x), ...;$ $v_1(x), v_2(x), ...$. У Биркгофа строится формальная теория краевых условий на основе тождества

$$\int_a^b zL(y)dx = P(y,z)\Big|_{x=a}^{x=b} + \int_a^b yM(z)dx$$

и записи билинейной формы в виде

$$P(y,z)\Big|_{x=a}^{x=b} = \sum_{i=1}^{2n-1} W_i(y) W_{2n-1}(z).$$

Доказываются свойства:

1) Если для $\lambda = \lambda^*$ существует решение $u^*(x)$, то существует также решение $v = v^*$ для $\lambda = \lambda^*$;причем, если $u^*(x)$ единственно, то и $v^*(x)$ единственно (с точностью до постоянного множителя).

2) Необходимое и достаточное условие того, чтобы $\lambda = \lambda^*$ было характеристическим числом, если $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно независимые решения для $\lambda = \lambda^*$, состоит в том, чтобы определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} W_1(y_1) ... W_1(y_n) \\ W_2(y_1) ... W_2(y_n) \\ .... \\ W_n(y_1) ... W_n(y_n) \end{vmatrix}$$

обращался в нуль; характеристическое число простое, если все первые миноры не равны нулю.

3) Если $u_i(x)$ и $v_j(x)$ принадлежат различным характеристическим числам λ_i и λ_j, то $\int_a^b u_i(x) v_j(x) dx = 0$.

В важном частном случае, когда системы совпадают, говорят о самосопряженной проблеме.

Случай, когда $M(v)$ отличается только знаком от $L(v)$, Биркгоф называет антисамосопряженной проблемой.

Теорему разложения Биркгоф получает методом теории вычетов. С этой целью строится функция Грина $G(x,s;\lambda)$, если λ не характеристическое число, для системы

$$L(\varphi)+\lambda\varphi=\omega, \qquad W_1(\varphi)=W_2(\varphi)=...=W_n(\varphi)=0$$

и функция $H(x,s;\lambda)$ для сопряженной системы

$$M(\varphi)+\lambda\varphi=\omega, \quad V_1(\varphi)=V_2(\varphi)=...=V_n(\varphi)=0,$$

причем $G(x,s;\lambda)=H(s,x;\lambda)$.

Функция $G(x,s;\lambda)$ − аналитическая по λ, кроме возможных полюсов, когда $\Delta(\lambda)=0$, то есть, когда λ - характеристическое число.

Если $\lambda=\lambda_i$ − простое характеристическое число, для которого $G(x,s;\lambda)$ имеет полюс первого порядка, то вычет этой функции в этой точке равен $\dfrac{u_i(x)v_i(x)}{\int\limits_a^b u_i(x)v_i(x)dx}$, где $\int\limits_a^b u_i v_i dx \neq 0$.

Если $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ − простые характеристические числа, то, окружая их контурами Γ, получим первые n членов разложения как вычеты функции $G(x,s;\lambda)$.

Биркгоф, рассмотрев случай функции Грина с простыми полюсами, не останавливается на получении разложения в более сложных случаях.

Для решений уравнений $L(u)+\lambda u=0$ и $M(v)+\lambda v=0$ при больших $|\lambda|$ на основе своих прежних исследований Биркгоф дает асимптотические формулы. А именно, в секторе S: $\dfrac{l\pi}{n}\le\arg\rho\le\dfrac{(l+1)\pi}{n}$ существуют n независимых решений $y_1,y_2,...y_n$ и $z_1,z_2,...,z_n$ уравнений $L(u)+\rho^n u=0$ и $M(v)+\rho^n v=0$ аналитических по ρ и таких, что в указанном секторе

$$y_i=u_i(x,\rho)+e^{\rho W_i(x-a)}\frac{E_0}{\rho^m},$$

$$\frac{dy_i}{dx}=\frac{d}{dx}u_i(x,\rho)+e^{\rho W_i(x-a)}\frac{E_1}{\rho^{m-1}},$$

....

$$\frac{d^{n-1}y_i}{dx^{n-1}}=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}u_i(x,\rho)+e^{\rho W_i(x-a)}\frac{E_{n-1}}{\rho^{m-n+1}},$$

$$z_i=v_i(x,\rho)+e^{-\rho W_i(x-a)}\frac{E_0}{\rho^m},$$

....

$$\frac{d^{n-1}z_i}{dx^{n-1}}=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}v_i(x,\rho)+e^{-\rho W_i(x-a)}\frac{E_{n-1}}{\rho^{m-n+1}},$$

где

$$u_i(x,\rho)=e^{\rho W_i(x-a)}\left[1+\frac{u_{i1}(x)}{\rho}+...+\frac{u_{im}(x)}{\rho^m}\right],$$

$$v_i(x,\rho)=e^{\rho W_i(x-a)}\left[1+\frac{v_{i1}(x)}{\rho}+...+\frac{v_{im}(x)}{\rho^m}\right],$$

$W_1,W_2,...,W_n$ − корни уравнения $W^n+1=0$, m-некоторое целое положительное число.

Биркгоф вводит понятие регулярных краевых условий. Примером регулярных краевых условий для задач уравнений второго порядка служат краевые условия Штурма – Лиувилля: $hu(a)+ku^{'}(a)=0,\ lu(b)+mu^{'}(b)=0,$ и периодические $u(a)=u(b),$ $u^{'}(a)=u^{'}(b).$

Пример нерегулярных краевых условий указанный Биркгофом: $u(a)=0,$ $u^{'}(a)=ku(b).$

Для задач с регулярными краевым условиями Биркгоф указал распределение собственных значений на комплексной плоскости и охарактеризовал системы собственных функций $u_i(x)$ и $v_i(x)$

Для доказательства сходимости разложения Биркгоф оценивает сумму первых n членов разложения, выраженную интегралом

$$J=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_\Gamma\int_a^b G(x,s;\lambda)f(x)dsd\lambda\,,$$

используя асимптотические формулы для решений $y_i(x)$ уравнения $L(u)+\lambda u=0$.

Таким образом Биргофом созданы основы систематической теории несамосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов. Через пять лет Биркгоф вновь обращается к проблеме разложения для обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\frac{d^n u}{dx^n}+p_2\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}+...+p_n u+\lambda u=0,\qquad (a\le x\le b)$$

с краевыми условиями общего вида

$$\alpha_1\frac{d^{n-1}u(a)}{dx^{n-1}}+...+\alpha_n u(a)+\beta_1\frac{d^{n-1}u(b)}{dx^{n-1}}+...+\beta_n u(b)=0$$

Биркгоф возражает против сомнений, высказанных Тамаркиным в работе [258] относительно некоторых прежних его результатов. В частности, Биркгоф более подробно излагает теорию для частных значений *n.* Замечания Биркгофа относятся к природе характеристических значений, теорем разложения и преобразования функции Грина.

В статье Вейля [42] рассмотрены интересные вопросы о связи собственных значений данных ядер K' и K'' и их суммы, аппроксимации ядра билинейной комбинацией конечного числа собственных функций, вопросы асимптотического распределения собственных значений для некоторых дифференциальных уравнений в частных производных и применение полученных результатов к физическим вопросам теории излучения.

В работе Тамаркина [258] намечается развитие теории Штурма-Лиувилля на классы несамосопряженных задач. В обширном труде [259] Тамаркин рассматривает общие задачи спектральной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе изучаются системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x) y_k, \quad (i = 1,2,...,n)$$

и дифференциальные уравнения вида

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_{n-1} y' + p_n u = f(x),$$

в которых коэффициенты $a_{ik}(x)$ и $p_k(x)$ вещественные или комплексные функции действительного переменного x и комплексного параметра ρ, причем точка $\rho = \infty$ есть полюс коэффициентов относительно переменного *x.* Коэффициенты предполагаются непрерывными в промежутке (a, b). Для интегрирования изучаемой системы дифференциальных уравнений Тамаркин обобщает метод Дини, состоящий в применении рядов весьма общего вида. Затем получаются асимптотические представления решений системы и функций Грина и изучаются трансцендентные уравнения, определяющие характеристические числа. В заключение получена основная теорема о характеристических числах (теорема 9) и теорема разложения (теорема 11), Для самосопряженной задачи Тамаркиным доказана вещественность и простота полюсов функции Грина в достаточно общем виде, содержащем все ранее известные результаты и методы (в частности и метод Стеклова).

В книге Тамаркин пользуется интегралом Лебега, отмечая ограничения условий при употреблении интегралов Римана. Асимптотические представления решений дифференциальных систем и уравнений, полученные Тамаркиным независимо от несколько ранее опубликованных работ Биркгофа, применяются для доказательства существования собственных функций.

Для получения разложения произвольной функции в ряды по собственным функциям развивается метод Пуанкаре, состоящий в построении функции Грина и доказательстве представления функции *f(x)* в виде интегрального вычета функции

$$\rho^{n-1} \int_a^b f(t) G(x,t;\rho) dt,$$

и дальнейшего его выражения в виде ряда по собственным функциям. Основной прием получения формулы разложения у Тамаркина заключается в том, что из выражения произвольной функции в виде определенного интеграла

$$f(x) = \int_a^b G(x,t;\rho) F(t) dt,$$

где

$$F(x) = \int_a^b f(t) G(x,t) dt, \qquad (G(x,t) = G(x,t,0)),$$

после разложения функции Грина на простейшие дроби выделяется часть, не зависящая от ρ. Полученная Тамаркиным общая теорема разложения

$$F(x) = \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \sum_{N=N_\nu}^{N_{\nu+1}-1} \int_a^b G^{(N)}(x,t,\rho) L(F)\Big|_{\rho,t} dt$$

позволяет получить ранее известные разложения как весьма частные случаи. Она содержит не только фундаментальные, но вообще все главные функции, что характерно для несамосопряженных операторов. На эту возможность Тамаркин указал еще в работе 1912 года [258]. Приведенный в § 4 Тамаркиным пример обобщает результаты Штурма - Лиувилля, Стеклова, Биркгофа, Фабера, Зоммерфельда, Мизеса. Заключительная глава книги Тамаркина посвящена изучению разложения произвольной функции в ряды по главным и фундаментальным функциям. В частности показано, что теорема Кантора о единственности разложения не имеет места.

Значение исследований Тамаркина заключается в том, что развитые им методы позволили начать изучение несамосопряженных дифференциальных операторов, выявив в конкретной форме многие особенности общей теории.

ГЛАВА 4

ВОЗНИКНОВНИЕ ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. Регулярный и сингулярный случаи задачи Штурма - Лиувилля

Теория симметрических линейных интегральных уравнений в форме теории Гильберта-Шмидта открывала пути для значительного расширения теории собственных значений и собственных функций для новых классов дифференциальных уравнений и краевых задач. Развитая Гильбертом спектральная теория билинейных и квадратичных форм позволяла сделать новый значительный шаг в исследовании спектральных свойств дифференциальных операторов. С помощью метода функции Грина Гильберт сводил спектральные теории дифференциальных уравнений к задачам теории интегральных уравнений. Гильбертом было показано существование непрерывного спектра.

Регулярный случай задачи Штурма–Лиувилля охватывает дифференциальные уравнения второго порядка с коэффициентами непрерывными на конечном замкнутом интервале. Интеграл Фурье соответствовал разложению функций, заданных на всей прямой или полупрямой. В одной работе Хильба, относящейся к 1909 г., рассматривается дифференциальное уравнение на полуинтервале, решение которого сводится с помощью функции Грина к интегральному уравнению, и отмечаются различные возможные случаи постановки краевых задач, которые здесь могут иметь место.

Систематическое изучение сингулярного случая задачи Штурма-Лиувилля было начато исследованиями Вейля в 1908-1910 гг. Частные случаи сингулярных задач встречались ранее в теории интеграла Фурье и в теории разложения функций в ряды по функциям Бесселя, Лежандра и некоторым другим. Работами Вейля было положено начало общей спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов.

§ 2. Работы Вейля.

Интересы Германа Вейля /1885-1955/ к спектральным задачам сложились в Геттингене под влиянием Гильберта, разрабатывавшего в те годы теорию интегральных уравнений, в период, когда складывалось понятие гильбертова пространства, как конкретной формы возникавшего функционального анализа. В первых печатных работах Г. Вейля изучаются вопросы сходимости рядов по периодическим функциям, а затем и по произвольным ортогональным функциям. В диссертации, представленной при окончании университета в 1908 г., Вейль рассматривал сингулярные интегральные уравнения в связи с интегральной теоремой Фурье.

В первой диссертации и статье [45] Вейль рассматривает сингулярные интегральные уравнения вида

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda\int_0^\infty K(s,t)\varphi(t)dt$$

с некоторыми ограничениями для ядра типа

$$\int_0^\infty\int_0^\infty K(s,t)u(s)v(t)dsdt < M ,$$

где

$$\int_0^\infty (u(s))^2 ds = \int_0^\infty (v(s))^2 ds = 1$$

При этом ядро во всякой конечной области переменных (s,t) может иметь конечное число точек и отрезков кривых, где ядро имеет разрывы или вообще не определено. При этих условиях изучение указанных интегральных уравнений возможно методом Гильберта.

Рассматриваемые функции $u(x), v(x)$ принимаются "в общем" непрерывными, т. е. могущими иметь конечное или счетное множество точек разрыва с точкой сгущения в 0, но с интегрируемым квадратом. Замена независимого переменного $x = \frac{1}{t+1}$ преобразует полную ортонормированную систему $\varphi_p(x)$ на отрезке $[0,1]$ в полную ортонормированную систему $\Phi_p(t)$ на полуоси $(0,\infty)$.

Следуя Гильберту, интегральное уравнение сводится к системе бесконечного числа линейных алгебраических уравнений. Применение и развитие теории Гильберта и Хеллингера о квадратичных формах позволяют Вейлю дать спектральную теорию рассматриваемого класса интегральных уравнений. Вторая часть работы Вейля содержит примеры сингулярных ядер, дающих системы ортогональных полиномов Эрмита, Лагерра, функций Бесселя и разложения интегрального типа (интеграл Фурье-Бесселя).

Аналогичные вопросы теории сингулярных интегральных уравнений изучала Лебедева (Миллер) в диссертации и статьях [166].

Миллер-Лебедева ставит задачу получения интегрального уравнения и соответствующего разложения для известных и изученных ортогональных систем функций, таких как многочлены Лежандра, многочлены Чебышева-Эрмита, Лагерра и т.п., не применяя использованного Гильбертом метода функции Грина. Для получения ядра интегрального уравнения, приводящего к системе многочленов Чебышева-Эрмита, Миллер-Лебедева рассматривает уравнение теплопроводности для бесконечного стержня с условием на бесконечности

$$\lim_{x\to\infty} f(x,t)e^{-k^2x^2} = 0 \ , \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x,t)e^{-k^2x^2} = 0 .$$

Для функции

$$\Psi^{(n)}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} P_{(n)}(x)$$

(у Миллер - Лебедевой $P_{(n)}(x)$ − полиномы Эрмита) получается ядро

$$K(x,\xi) = \frac{\sqrt{-t}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\tau-t}} e^{\frac{\tau+t}{2(\tau-t)}(x^2+\xi^2)+\frac{2\sqrt{t\tau}}{\tau-t}x\xi},$$

а для многочленов Лагерра $Q_n(x)$, точнее для функций $\Psi^{(n)}(x) = e^{\frac{x}{2}} Q_n(x)$, ядро имеет вид

$$K(x,\xi) = \frac{t}{t-\tau} e^{-\frac{\tau+t}{2(\tau-t)}(x+\xi)} J_0\left(2i\frac{\sqrt{t\tau x\xi}}{\tau-t}\right)$$

и оно имеет собственные значения $\lambda^{(n)} = \left(\frac{t}{\xi}\right)^{\frac{n}{2}}$.

В изложении используется представление многочленов Эрмита с помощью производящей функции

$$e^{-hx-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} P_n(x)$$

и разложения в цепную дробь интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{x-u} du$ и для многочленов Лагерра интеграла $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{e^{u}}{x-u} du$.

Возможность перенесения теоремы разложения Гильберта-Шмидта на случай бесконечного интервала доказывается. Для случая Лагерра рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

а затем дается обобщение многочленов Лагерра.

Значение работ Миллер-Лебедевой в том, что она одна из первых сделала переход к изучению сингулярных задач. В изложении Миллер-Лебедевой теорема разложения по функциям $e^{-\frac{s^2}{2}} P_n(s)$ ($P_n(s)$ полиномы Эрмита) гласит: всякая непрерывная в $-\infty < s < \infty$ функция $g(s)$, которая с помощью непрерывной и интегрируемой функции $p(s)$ с интегрируемым квадратом может быть представлена в виде

$$g(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(s,r)\, p(r) dr,$$

где *K(s,r)* − какое-нибудь ядро из двухпараметрического семейства, может быть разложена в ряд Фурье

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{s^2}{2}} P_n(s),$$

где $P_n(s)$ - полиномы Эрмита. Ряд для $-\infty < s < \infty$ сходится абсолютно и равномерно.

Теорема разложения в ряд по полиномам Лагерра дана для конечной и непрерывной функции *g(s)* на отрицательной полуоси $-\infty \le s \le 0$ при условии $\lim\limits_{s\to-\infty} s^2 g(s) = 0$ и ряд имеет вид

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\frac{s}{2}} Q_n(s).$$

На пути создания спектральной теории неограниченных операторов и сингулярных краевых задач следует отметить исследование Хильба об интегральном представлении функций [299]. В начале статьи Хильб отмечает, что в теории Гильберта при ограниченности интеграла

$$\int\limits_{a}^{b}\int\limits_{a}^{b} \left(K(s,t)\right)^2 ds dt$$

собственные значения изолированы друг от друга и могут иметь точку сгущения только в бесконечности. Если же этот интеграл бесконечен, например, если концы интервала оказываются сингулярными, то представление произвольной функции через собственные может быть очень разнообразным. Хильб употребляет уже термин непрерывный (*Kontinuerliches*) спектр, вместо гильбертовского “отрезочного” (*Streckenspectrum*) спектра. Хильб говорит и о смешанном случае и о спектре из ряда отрезков. Хильб упоминает о работе Виртингера [48] о колебании бесконечной струны, в которой встречается термин для непрерывного спектра “*Bandenspectrum*” - полосчатый спектр. Виртингер остановился перед трудностями предельного перехода. Хильб отмечает также, что квадратичная форма бесконечного числа переменных у Гильберта не только предельный случай квадратичной формы с конечным числом переменных, но предельный случай для вполне непрерывных квадратичных форм бесконечного числа переменных. Хильб в своей работе использует результаты Гильберта, относящиеся к вполне непрерывным формам и общей теории ортогональных преобразований с бесконечным числом переменных, В первой главе Хильб получает интегральную теорему Фурье. От краевой задачи для уравнения

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2}+(\lambda-1)u(x)=0,$$

$u_1(0)=u_1(l)=0$, предельным переходом $l\to\infty$ через замену независимого переменного $x=|\ln s|$ получается сингулярная краевая задача:

$$\frac{d}{ds}\left(s\frac{du}{ds}\right)+\frac{\lambda-1}{s}u(s)=0$$

с условиями $\lim\limits_{s\to 0}u(s)=0,\ \ u(1)=0$.

Для задачи на интервале $(\varepsilon,1)$, где $\varepsilon=e^{-l}$ строится функция Грина и соответствующее интегральное уравнение с симметричным ядром $K_\varepsilon(s,t)$. Применяя методы Гильберта, получается интегральное представление ядра

$$K(x,y)=2\int_0^\infty\frac{L(x,\mu)L(y,\mu)}{1+\mu^2\pi^2}d\mu,$$

где

$$L(x,\mu)=L_\mu(x)=\sum_{i=1}^\infty\int_0^1\sqrt{2}\sin\left(\mu\,\bar{y}\,|\ln s|\right)\frac{\sin i\pi s}{\sqrt{s}}ds\,,$$

а затем и интегральная формула Фурье в виде

$$f(s)=2\int_0^\infty d\mu\sin\mu\pi\,|\ln s|\int_0^1\sin(\mu\pi\,|\ln t)f(t)\frac{dt}{t},$$

где $f(t)$ имеет вторую непрерывную производную.

Во второй главе рассматривается более общий случай дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d}{ds}\left(u\frac{du}{ds}\right)+\frac{-g(s)+\lambda h(s)}{s}u=0$$

при некоторых предположениях относительно $g(s)$ и $h(s)$.

Доказывается, что при краевых условиях $u(1)=0,\ \lim\limits_{s\to\infty}u(s)=0$, спектр состоит из непрерывной части, уходящей в бесконечность $\lambda>g_0$ и конечного числа собственных значений $\lambda_p<g_0$. Затем строится функция Грина для краевой задачи в $(\varepsilon,1)$, осуществляется предельный переход $\varepsilon\to 0$ и получается теорема разложения. Далее рассмотрен случай, когда $h(s)$ при $s\to 0$ стремится к нулю, причем интеграл $\int_0^1\frac{h(s)}{s}ds$ имеет конечное значение, а спектр − только точечный.

В четвертой главе Хильб рассматривает интегральные представления функций двух переменных в связи с теорией потенциала. После распространения методов Гильберта на сингулярные интегральные уравнения Вейль обратился к изучению краевых задач для сингулярных дифференциальных уравнений и соответствующим разложениям функций.

Работы Вейля с единой точки зрения охватили как все случаи, ранее рассмотренные Виртингером, Хильбом, Миллер - Лебедевой, так и положили начало общей спектральной теории сингулярных дифференциальных операторов. Исследования Вейля, опубликованные в ряде статей [39,40,41,45] произвели большое впечатление на математиков того времени. В качестве примера можно привести отрывок из письма молодого русского математика Иванова из Томска, находившегося в 1909/10 учебном году в научной командировке в Геттингене. В письме Иванов говорит о том, что наиболее интересными и привлекающими внимание были лекции Вейля о применении теории интегральных уравнении к задачам математической физики и дифференциальным уравнениям. Письмо это хранится в личном архиве проф. Молина в Томске.

Не привлекая теории сингулярных интегральных уравнений Вейль доказал следующую теорему:

Существует непрерывная, монотонно возрастающая функция $\rho(\lambda)$ со следующим свойством: $\Xi(s,\lambda)$ тогда и только тогда является решением уравнения

$$L\left(\Xi(s,\lambda)\right)+\int_0^\lambda \mu d\mu \Xi\left(s,\mu\right)=0,$$

когда ее при помощи непрерывной функции $\xi(\lambda)$ можно представимо в виде

$$\Xi\left(s,\lambda\right)=\int_0^\lambda \varphi\left(s,\mu\right)d\xi\left(\mu\right)$$

и в этом случае для любого интервала Δ переменной λ выполнено

$$\int_0^\infty \left(\Delta\lambda\Xi\right)^2 ds=\int_{(\Delta)} \frac{\left(d\xi\right)^2}{d\rho}.$$

Этими свойствами $\rho(\lambda)$ однозначно определяется с точностью до аддитивной постоянной, которая определяется из условия $\rho(0)=0$.

Отмечая, что базисная функция $\rho(\lambda)$ постоянна в окрестности точек λ, не принадлежащих непрерывному спектру, Вейль замечает аналогию $\rho(\lambda)$ с функцией $r(\lambda)$, равной нулю для всех λ, кроме счетной последовательности значений λ_p, принадлежащих точечному спектру,

$$r(\lambda_p)=\frac{1}{\int_0^\infty (\varphi(s,\lambda_p))^2 ds}$$

Называя $R(s,\lambda)=\varphi(s,\lambda)r(\lambda)$ собственной функцией, а $dP\left(x,\lambda\right)=\varphi\left(x,\lambda\right)d\rho\left(\lambda\right)$ – собственным дифференциалом уравнения $L\left(u\right)=0$, Вейль доказал теорему разложения для случая предельной точки в следующей формулировке.

Теорема 7. В случае предельной точки любая (вещественная) непрерывная удовлетворяющая краевому условию и квадратично интегрируемая в интервале $(0,\infty)$ функция $f(s)$, для которой и $L(f)$ также непрерывная и квадратично интегрируемая, представляется абсолютно и равномерно сходящимся интегралом в виде

$$f(s)=\sum_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(s,\lambda\right)C\left(\lambda\right)+\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(s,\lambda\right)d\Gamma\left(\lambda\right),$$

причем системы коэффициентов $C(\lambda)$ и $d\Gamma$ вычисляются по собственным функциям $R(s,\lambda)$, соответственно, по собственным дифференциалам уравнения $L(u)=0$ с помощью формул

$$C(\lambda)=\int_0^\infty f(s)R(s,\lambda)ds; \quad \Delta\Gamma(\lambda)=\int_\Delta^\infty f(s)\Delta P(s,\lambda)ds.$$

Таким образом Вейль дал прямое доказательство теоремы разложения, связанной с сингулярной краевой задачей для дифференциального уравнения второго порядка в виде суммы для ряда по собственным функциям и интегрального члена, относящегося к непрерывной части спектра.

Следуя терминологии, введенной Гильбертом, Вейль называет спектром дифференциального уравнения $L(u)=0$, где $L(u)\equiv\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)+qu(x)$, замкнутое точечное множество, состоящее из точечного и непрерывного спектра. Не принадлежащие спектру вещественные значения λ характеризуется тем, что неоднородное уравнение $L(u)+\lambda u=g(s)$ имеет единственное решение, удовлетворяющее краевому условию в точке $s=0$, с интегрируемым квадратом в $(0,\infty)$ при любой непрерывной интегрируемой с квадратом функции $g(s)$.

Далее Вейль проводит изучение характера спектра в нескольких случаях.

Если $\lim\limits_{s\to\infty}q(s)=\infty$, то спектр уравнения $L(u)=0$ состоит только из изолированных собственных значений. При этом $\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots$ и нет собственных значений, не содержащихся среди λ_m. В этом случае характеризуются и осцилляционные свойства собственных функций. Вейль дает характеристику спектра для случая, когда

$$\lim_{s\to\infty}s\big(p(s)-1\big)=0, \qquad \lim_{s\to\infty}sq(s)=0$$

и интегралы

$$\int_0^\infty t\,|\,p(t)-1\,|\,dt, \qquad \int_0^\infty s\,|\,q(t)\,|\,dt$$

конечны. В этом случае спектр дифференциального уравнения $L(u)=0$ состоит из конечного числа отрицательных собственных значений и непрерывного спектра, заполняющего полуось от 0 до ∞. Если $\varphi(s,\lambda)$ имеет для $\lambda>0$ вид

$$\varphi(s,\lambda)=m_1\cos s\sqrt{\lambda}+m_2\sin s\sqrt{\lambda}+E(s,\lambda), \quad \left(\lim_{s\to\infty}E(s,\lambda)=0\right),$$

то

$$\rho(\lambda)=\begin{cases}0, & ,\lambda\le 0\\ \displaystyle\int_0^\lambda\frac{d\lambda}{\pi\sqrt{\lambda}\left(m_1^2(\lambda)+m_2^2(\lambda)\right)} & ,\lambda>0\end{cases}.$$

В заключение Вейль приводит простой пример непрерывного спектра, заполняющего всю λ - ось. А именно, уравнение

$$\frac{d^2u}{ds^2}+(s+\lambda)u=0, \qquad (s\ge 0)$$

не допускает квадратично интегрируемых решений ни для какого вещественного λ. Простые вычисления показывают, что $\rho(\lambda) \neq 0$, откуда следует, что непрерывный спектр заполняет всю λ - ось.

Вейль упоминает о возможности получения спектральной характеристики других задач, рассмотренных ранее Виртингером и Хильбом, изучения спектральных свойств для уравнения

$$L(u) + \lambda k(s) u = 0$$

где $k(s)$ непрерывная, положительная функция для $s \geq 0$.

В наиболее завершенном виде изложение результатов исследования Вейля дано в его статье в «Mathematische Annalen» [41] в 1910 г.

Основную цель своих исследований Вейль видит в приложении развитой им ранее теории сингулярных интегральных уравнений [45] к теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Сингулярность более или менее сложного характера предполагается на одном конце рассматриваемого интервала. Сингулярность относится в бесконечность, все функции рассматриваются на действительной полуоси $0 \leq s < \infty$, что всегда может быть достигнуто простым преобразованием независимого переменного.

Вейль рассматривает дифференциальные выражения вида

$$L(u) \equiv \frac{d}{ds}\left(p(s)\frac{du}{ds} \right) - q(s)u(s),$$

где $p(s)$ непрерывная положительная функция, $q(s) -$ любая непрерывная функция на $0 \leq s < \infty$.

Для дифференциального уравнения

$$L(u) = 0$$

находятся решения $u^{(1)}(s)$ и $u^{(2)}(s)$, удовлетворяющие, соответственно, краевым условиям

$$u^{(1)}(0) = 1, \qquad \left[p(s)\frac{du^{(1)}}{ds} \right]_{s=0} = 0;$$

$$u^{(2)}(0) = 0, \qquad \left[p(s)\frac{du^{(2)}}{ds} \right]_{s=0} = 1$$

в виде

$$u^{(1)}(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0 \leq \tau_1} \int_{\leq t_1 \leq \ldots} \ldots \int_{\leq \tau_n \leq t_n \leq s} \frac{q(\tau_1)\ldots q(\tau_n)}{p(t_1)\, p(t_2)\ldots p(t_n)} . d\tau_1 dt_1 d\tau_2 dt_2 \ldots d\tau_n dt_n,$$

$$u^{(2)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0 \leq t \leq \tau_1} \int_{\leq t_1 \leq \ldots} \ldots \int_{\leq \tau_n \leq t_n \leq s} \frac{q(\tau_1)\ldots q(\tau_n)}{p(t)\, p(t_1)\ldots p(t_n)} dt d\tau_1 dt_1 \ldots d\tau_n dt_n.$$

Для неоднородного уравнения

$$L(u) = g(s),$$

где $g(s) -$ любая непрерывная функция, решение, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0) = 0, \qquad \left[p(s)\frac{du}{ds} \right]_{s=0} = 0$$

имеет вид

$$u(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{0\le\tau\le t\le\tau_1}\int\limits_{\le t_1\le\dots}\dots\int\limits_{\le\tau_n\le t_n\le s}\frac{q(\tau)q(\tau_1)q(\tau_2)\dots q(\tau_n)}{p(t)p(t_1)\dots p(t_n)}d\tau dt d\tau_1 dt_1\dots d\tau_n dt_n.$$

Для уравнения $L(u)+\lambda u=0$ с, вообще говоря, комплексным параметром λ решение $u(s,\lambda),$ подчиненное краевому условию

$$\left[\cos hu(s)+\sin hp(s)\frac{du}{ds}\right]_{s=0}=0,$$

имеет вид

$$u(s,\lambda)=-\sin hu^{(1)}(s,\lambda)+\cos hu^{(2)}(s,\lambda),$$

где h − некоторая постоянная.

Из аналитической теории дифференциальных уравнений известно, что решение уравнения с комплексными параметрами суть целые трансцендентные функции переменной λ. Для $\lambda=i=\sqrt{-1}$ обозначим частные решения

$$u(s,i)=-\sin hu^{(1)}(s,i)+\cos hu^{(2)}(s,i)=\eta(s),$$
$$\cos hu^{(1)}(s,i)+\sin hu^{(2)}(s,i)=v(s)$$

В дальнейшем Вейль использует обозначения

$$C=C_1+iC_2,$$
$$p(s)\left(u(s)\frac{dv}{ds}-v(s)\frac{du}{ds}\right)=(uv)$$

Не перечисляя всех свойств (vu) ,отметим только следующие:

$$(uv)+(vu)=0,\ (uu)=0,\ (u\bar{u})=2i(u_2u_1),$$

$$\int_0^a\{uL(v)-vL(u)\}ds=(uv)_a-(uv)_0\quad\text{(формула Грина).}$$

Для $\bar{\lambda}$ и $\bar{u}$*,* очевидно, имеем

$$L(\bar{u})-\bar{\lambda}\bar{u}=0,$$
$$\int_0^a(u)^2ds=(u_2u_1)_a-(u_2u_1)_0$$

Непосредственным вычислением получим $(v\eta)_0=1$, а применение формулы Грина даст $(v\eta)=1$ для любого *s*. Введем линейную комбинацию с произвольным комплексным числом $\beta^l(s)=v(s)+l\eta(s)$. Легко показать, что

$$(\beta^l\eta)=1,\ (\beta_1^l\eta_1)-(\beta_2^l\eta_2)=1,\quad (\beta_1^l\eta_2)+(\beta_2^l\eta_1)=0,$$

Далее рассматривается краевая задача для интервала $[0,a]$. Пусть j − какое-нибудь вещественное число и l таково, что для $u=\beta^l(s)$ выполняется условие

$$\left[\cos ju(s)+\sin jp(s)\frac{du}{ds}\right]_{s=a}=0.$$

Назовем функцией Грина рассматриваемого уравнения в интервале $(0,a)$ функцию

$$G^l(s,t)=\begin{cases}\eta(s)\beta^l(t), & s\le t\\ \eta(t)\beta^l(s), & t<s\end{cases}\qquad (0\le s,t\le a)$$

Так как $G^l(s,t)=G^0(s,t)+l\eta(s)\eta(t)$, то функция $G^l(s,t)$ линейно зависит от параметра *l.*

Рассматривая возможные положения *l* на комплексной плоскости, Вейль приходит к замечательной геометрической картине.

Если $\beta^l(s)$ для $s=a$ удовлетворяет написанному выше краевому условию, то *l* лежит на окружности некоторого круга K_a, радиус r_a которого можно найти из равенства

$$2r_a\int_0^a|\eta|^2\,ds=1\,.$$

Дальнейшее геометрическое исследование приводит Вейля к выводу, что круги K_a лежат в верхней полуплоскости и при возрастании *a,* т.е. для *b>a* круг K_b находится внутри круга K_a. При неограниченном возрастании *a* могут быть два случая: либо круги K_a стягиваются к «предельному кругу» или к «предельной точке». В случае предельного круга решение $\eta(s)$ имеет конечный интеграл от квадрата модуля $\int_0^\infty|\eta|^2\,ds<\infty$. В случае предельной точки имеем $\int_0^\infty|\eta|^2\,ds=\infty$. Из геометрических соображений получается неравенство $\int_0^a\left|\beta^l\right|^2 ds\le l_2$ для любого *a,* поэтому $\int_0^\infty\left|\beta^l\right|^2 ds\le l_2$, что дает следующий замечательный результат.

Теорема 2. Уравнение $L(u)+\lambda u=0$ при невещественном λ имеет, по крайней мере, одно решение с абсолютно интегрируемым квадратом в интервале $(0,\infty)$.

В случае предельного круга η с абсолютно интегрируемым квадратом, а следовательно, всякое решение будет с абсолютно интегрируемым квадратом.

Этот результат Вейля дает основу для классификации краевых задач для сингулярных дифференциальных уравнений второго порядка, получивший дальнейшее обобщение в спектральной теории линейных операторов в гильбертовом пространстве. Альтернатива Вейля для сингулярного дифференциального уравнения второго порядка гласит, что либо одно, либо два линейно независимых решения уравнения с абсолютно интегрируемым квадратом. Для дальнейшего изучения спектральных свойств имеет важное значение обнаруженное Вейлем свойство, что вещественная и мнимая части функции Грина $G^l(s,t)$ с абсолютно интегрируемым квадратом, если *l* принадлежит предельной окружности или предельная точка.

Для случая предельного круга, как показал Вейль, уравнение $L(u)+\lambda u=0$ для любого λ имеет только абсолютно квадратично интегрируемые решения. Для случая предельной точки ни для одного λ нет двух линейно независимых решений с интегрируемым квадратом. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. В случае предельного круга всякая (вещественная) непрерывная, квадратично интегрируемая в $(0,\infty)$ и удовлетворяющая краевым условиям функция *f*(*x*), для которой *L*(*f*) также непрерывна и квадратично интегрируема, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям $\varphi_p(s)$ дифференциального уравнения $L(u)=0$.

Весьма важные результаты были получены Вейлем для случая предельной точки.

Точечный спектр определяется как множество собственных значений дифференциального уравнения $L(u)=0$, т.е. как множество всех вещественных значений λ, для которых $\varphi(x,\lambda)$ квадратично интегрируемы.

Следуя теории Хеллингера, Вейль определяет непрерывный спектр уравнения $L(u)=0$ как множество тех вещественных λ, в окрестности которых функция $\omega(\lambda)$ не постоянна. Для определения $\omega(\lambda)$ рассмотрим вещественную, непрерывную функцию двух аргументов $\Xi(s,\lambda), s\geq 0, \lambda \leq 0$, для которой $\Xi(s,0)=0$, интеграл $\int\limits_0^\infty \left(\Xi(s,\lambda)\right)^2 ds$ существует, а как непрерывная функция переменной λ, удовлетворяет уравнению

$$L\left(\Xi(s,\lambda)\right)+\int\limits_0^\lambda \mu d\mu \Xi(s,\mu)=0$$

и краевому условию

$$\left[\cos h\Xi(s,\lambda)+\sin hp(s)\frac{\partial \Xi(s,\lambda)}{\partial s}\right]_{s=0}=0,$$

где

$$\int\limits_0^\lambda \mu d\mu \Xi(s,\lambda)$$

означает разность

$$\left[\mu\Xi(s,\mu)\right]_{\mu=0}^{\mu=\lambda}-\int\limits_0^\lambda \Xi(s,\mu)d\mu.$$

Тогда

$$\int\limits_0^\infty \left(\Xi(s,\lambda)\right)^2 ds=\operatorname{sgn}\lambda\omega(\lambda)$$

§ 3. Возникновение качественной спектральной теории.

Одной из первых работ по качественной спектральной теории была работа Вейля [39], посвященная сравнению спектров двух ограниченных квадратичных форм $K(x)$ и $K^*(x)$ разность которых $k(x)=K^*(x)-K(x)$ вполне непрерывна. По теории Гильберта-Хеллингера ортогональным преобразованием

$$\bar{x}_p=\sum_{(q)} l_{pq}x_q, \quad \xi_p=\sum_{(q)} m_{pq}x_q$$

квадратичную форму $K(x)=\sum\limits_{(p,q)} k_{pq}x_p x_q$ можно привести к виду

$$K(x)=\sum_{(p)}\frac{\bar{x}_p^2}{\lambda_p}+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(\mu,\xi)}{\mu}.$$

Множество $\{\lambda_p\}$ образует точечный спектр формы, а $\sigma(\mu,\xi)$ характеризует известным образом непрерывный спектр.

В работе Вейля прежде всего доказана теорема о принадлежности значения λ предельному или непрерывному спектру. Необходимым и достаточным условием оказывается существование принадлежащей значению λ характеристической точечной последовательности, то есть такой последовательности точек $(x'),(x''),....$ единичного шара гильбертова пространства, слабо сходящейся к нулю и равномерно для всех y_p, удовлетворяющих условию $(y,y) \le 1$, что имеет место равенство

$$L\left[K(x^{(i)},y)-\frac{1}{\lambda}(x^{(i)},y)\right]=0.$$

Далее получен критерий вполне непрерывности разности двух квадратичных форм $K(x)$ и $K^*(x)$, состоящий в том, что для любой слабо сходящейся к нулю последовательности точек, для которых из выполнения равенства $\underset{i=\infty}{L}\underset{\Delta'}{E}(x^{(i)})=0$ следует

$$\underset{i=\infty}{L}\underset{\Delta}{E}^{*}(x^{(i)})=0,$$

если Δ лежит целиком внутри Δ'. Здесь $\underset{\Delta}{E}(x)$) − квадратичная форма по интервалу Δ спектрального переменного, то есть

$$\underset{\Delta}{E}(x)=\sum_{\substack{(r)\\ \lambda_r\in\Delta}}\frac{x_r^2}{\lambda_r}+\int_{\Delta}\frac{d\tau(\mu,\xi)}{\mu}.$$

Показано, что для ограниченной квадратичной формы $K(x)$ найдется такая вполне непрерывная форма $k(x)$, что $K(x)+k(x)$ не имеет непрерывного спектра. Эта теорема показывает − насколько тонко различие между точками непрерывного спектра и предельными точками точечного спектра.

Исследования Вейля указали возможность и других преобразований ограниченных квадратичных форм.

Развернутое изложение экстремальных свойств собственных значений и собственных функций для самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа от двух и трех переменных мы встречаем у Куранта [121]. Курант показывает связь теории собственных значений (спектра) и собственных функций с физическими теориями излучения и колебаний. Курант обращает внимание, что высказанные Зоммерфельдом и Лоренцем на основе физических соображений предположения об асимптотическом поведении собственных значений классической проблемы колебаний, были математически доказаны в ряде работ Вейля. Здесь же Курант замечает, что сведение проблемы собственных значений для дифференциальных уравнений к теории интегральных уравнений, как было в работах Вейля, не всегда дает возможность получить полную картину и неравноценно ведет к цели. Курант ставит задачу дальнейшего исследования спектральных свойств в зависимости от условий задачи относительно области краевых условий и коэффициентов соответствующего дифференциального уравнения. По мнению Куранта большой интерес представляют взгляды физиков на эти вопросы. Работы Куранта оказали значительное влияние на развитии теории краевых задач математической физики. Под влиянием современных идей Гильберта, и с указанием его имени, как соавтора, Курантом создана книга "Методы математической физики". Вейль подробно изучает вопрос о сходимости рядов по ортогональным функциям в работе [44] 1909 г. Там рассматривается ортонормированная система функций с суммируемыми квадратами. Сначала вводится понятие существенно-равномерной сходимости (ряд на множестве меры 1-ε сходится равномерно), дается критерий такой сходимости и его применение к теории тригонометрических рядов. Для рассматриваемых рядов изучено применение фейеровских средних к задаче суммирования. В заключение доказана существенно равномерная сходимость подпоследовательности функций из последовательности $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...$, сходящейся в среднем.

В ряде заметок 1909 г. Планшерель изучает, различные вопросы, примыкающие к рассматриваемому кругу. Так Планшерель [298] показывает для некоторого класса квадратичных форм

$$K(x,x) = \sum k_{pq} x_p x_q, \qquad \left(k_{pq} = k_{qp},\ p,q = 1,2,...,\infty\right)$$

(ряды $\sum_{p=1}^{\infty} k_{pq}^2$ для всех q сходятся и предельные точки усеченных квадратичных форм $K_n(x,x) = \sum_{p,q}^{1...n} k_{pq} x_p x_q$ не заполняют всю вещественную ось) при λ, не принадлежащих спектру, существование резольвенты и единственность решения для соответствующих систем линейных уравнений, а также существование нетривиальных решений однородной системы при значениях λ, принадлежащих точечному спектру.

В отличие от Шмидта Планшерель развил прямой метод Гильберта. В другой заметке Планшерель изучает сингулярные интегральные уравнения с ядрами, для которых существует интеграл

$$\int_0^{\pi} ds \left(\int_0^{\pi} \left| K(s,t) \sin pt \right| dt \right)^2$$

В третьей заметке [194], развивая метод Кнезера разложения в ряды по функциям Штурма -Лиувилля, продолжены исследования Хильба об интегральном представлении функций для сингулярного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{ds}\left(s \frac{du}{ds} \right) + \lambda \frac{h(s) - g(s)}{s} u = 0.$$

Некоторые усовершенствования в теорию линейных однородных интегральных уравнений, связанные с вычислением собственных значений и собственных функций симметричного ядра внес Шур [318].

§ 4. Исследования Виндау и некоторые другие работы.

Виндау [46] предпринял попытку перенести результаты Вейля и методы Хильба на дифференциальные уравнения четвертого порядка. Виндау изучает самосопряженное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$L(u) + \lambda^4 u \equiv \frac{d^2}{ds^2}\left(p \frac{d^2 u}{ds^2} \right) + \frac{d}{ds}\left(q \frac{du}{ds} \right) + ru + \lambda^4 u = 0$$

на полуоси $(0,\infty)$ с условием $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $(0 < \lambda_2 < \lambda_1)$.

Сингулярная задача рассматривается как предельный случай задач на конечных отрезках $[0,a]$ при $a \to \infty$.

Применяя геометрический метод вложенных поверхностей Вейля, Виндау заключает, что сингулярная задача характеризуется двумя предельными поверхностями или двумя предельными точками. В случае предельной точки существуют только два линейно независимых решения уравнения для невещественного λ с интегрируемым квадратом, а для второго случая все решения уравнения квадратично интегрируемы, то есть получается полная аналогия результата Вейля для уравнения второго порядка (альтернатива Вейля). Далее строится функция Грина и методом Хильба, идущим от метода вычетов Коши, получается представление функции *f(x)*, четырежды непрерывно дифференцируемой и абсолютно квадратично интегрируемой. Виндау использует асимптотические выражения для решений линейного однородного дифференциального уравнения, получающиеся из работ Биркгофа.

Для частного случая

$$\frac{d^4u}{ds^4}+\lambda^4u=0$$

Виндау записывает разложение функции $f(s)$ и показывает, что спектр лежит на отрицательной вещественной полуоси.

Позднее Шин [306,307] применил геометрический метод Вейля к уравнениям любого порядка и получил результаты, аналогичные результатам Виндау. В последствии альтернатива Вейля в общем случае была опровергнута Глазманом [62].В связи с этим возникает вопрос о возможном классе дифференциальных операторов, для которых альтернатива Вейля имеет место.

Северини в работе [235] 1913 г. излагает теорию замкнутости системы ортогональных функций $V_k(x),\ k=0,1,2,\ldots,$ определенных в конечном интервале (a,b), суммируемых вместе с квадратами, ортогональных относительно характеристической функции $p(x)$, измеримой, ограниченной, с положительным нижним пределом

$$\int_a^b p(x)V_m(x)V_n(x)dx=\begin{cases}0, & \text{если} \quad m\neq n,\\ 1, & \text{если} \quad m=n\end{cases}$$

Система называется замкнутой, если не существует функции $\theta(x)$, отличной от нуля, за исключением, может быть, множества меры нуль, для которой выполнялись бы равенства

$$\int_a^b p(x)\theta(x)V_k(x)dx=0, \qquad (k=0,1,2,....)$$

или, короче говоря, не существует эффективного решения (не тривиального, равного нулю) этих интегральных уравнений. Условие замкнутости системы заключается в том, что для функции *f(x)*, суммируемой с квадратом, выполняется равенство

$$\int_a^b p(x)[f(x)]^2dx=\sum_{k=0}^{\infty}A_k^2, \quad \left(A_k=\int_a^b p(x)f(x)V_k(x)dx\right).$$

Сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty}A_k^2$ следует из неравенства Бесселя. Как известно, Стеклов доказал теорему для функций, интегрируемых с квадратом по Риману, если теорема верна для многочленов. Более общий результат был получен проф. Лавричелли [122], который доказал, что уравнение замкнутости есть необходимое и достаточное условие для любой ортогональной системы решений краевой задачи, если оно справедливо для одной какой-либо ортогональной системы той же задачи. Северини показал эквивалентность понятия замкнутости и требования выполнения уравнения замкнутости (равенство Парсеваля по современной терминологии) в пространстве функций, суммируемых с квадратом. Северини получил другое необходимое и достаточное условие выполнения уравнения замкнутости и продолжил свои прежние исследования о разложении функций в ряд по ортогональным функциям.

Пикар в статье 1906 г, [191] резюмирует и дополняет свои результаты и методы исследования вопросов, связанных с интегральным уравнением Фредгольма. Прежде всего Пикар отмечает, что следует рассматривать интегральное (функциональное по его терминологии) уравнение Фредгольма с параметром λ

$$\varphi(x)+\lambda\int_0^1 f(x,s)\varphi(s)ds=\psi(x).$$

Резюмируя результаты теории Фредгольма, он подчеркивает, что решение уравнения, как функция λ, есть мероморфная функция на всей плоскости

$$\varphi(x)=\psi(x)-\lambda\int_0^1 \frac{D_1(x,t)}{D(\lambda)}\psi(t)dt,$$

если $D(\lambda)\neq 0$. Особые значения параметра λ − корни уравнения $D(\lambda)=0$. Каждому корню λ_0 соответствует конечное число линейно независимых решений однородного уравнения

$$\Phi(x)+\lambda_0\int_0^1 f(x,s)\Phi(s)ds=0.$$

Такое же число линейно независимых решений имеет ассоциированное с данным однородное уравнение

$$\psi(x)+\lambda_0\int_0^1 f(s.x)\psi(s)ds=0.$$

Необходимое и достаточное условие, чтобы неоднородное уравнение при особом значении λ имело решение выражается равенствами

$$\int_0^1 \psi_i(x)\psi(x)dx=0,\quad (i=1,2,...).$$

Указав случай ядра, обращающегося в бесконечность, не сводимого к уравнению Фредгольма с ограниченным ядром, Пикар дает прямое доказательство вещественности собственных значений симметричного ядра. Далее Пикар останавливается на приложениях интегральных уравнений в теории потенциала. Останавливаясь на уравнении колебаний мембраны, Пикар, отмечая заслугу Шварца в доказательстве существования первого собственного значения, говорит о своем доказательстве существования второго собственного значения. Здесь же упоминает мемуар Вебера и исследования Пуанкаре, доказавшего существование бесконечного множества собственных значений как простых полюсов мероморфной функции. Применяя интегральные уравнения, Пикар показывает, что полюсы решения уравнения колебаний мембраны − простые, обобщая при этом метод Шварца.

Появление в 1906 г. мемуара Фреше [278] было знаменательной вехой в истории функционального анализа. В различных отделах математики накапливались различные факты и методы, подготовившие возникновение функционального анализа. В конце XIX века все чаще стали появляться работы, положившие начало систематическому изучению функций от аргументов различной природы. Здесь достаточно назвать работы Вольтерра [50] и Арцела [4], начавших изучение функций от линий, Адамар [1А] ввел название функционала для функций, аргументом которых были обычные функции. Ле Ру [144] начал изучение функций от бесконечного числа независимых переменных.

Фреше дает первое систематическое изложение основных принципов функционального анализа (функционального исчисления по его терминологии), проводя обобщение многих теорем о линейных множествах и непрерывных функциях, независимо от природы элементов. Он вводит абстрактное понятие предела, непрерывной операции, сходимости и т.д. Далее показываются возможности более конкретного определения предела с помощью понятия окрестности, определяемой как неотрицательное число, соответствующее двум элементам и обозначаемое (a,b). Вводится понятие расстояния двух элементов, как неотрицательного числа $(a,b)\geq 0$ со свойствами; а) $(a,b)=0$ только тогда, если a и b тождественны, б) $(a,b)\leq(a,c)+(c,b)$.

Среди примеров непрерывных функционалов отметим функционалы Адамара

$$u(f)=\int_a^b m(x)f(x)dx$$

и функции бесконечной последовательности переменных $f(x_1,x_2,...,x_n,...)$. Было введено понятие пространства счетного числа измерений E_ω как множества числовых последовательностей $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ с расстоянием

$$(x,x')=\frac{|x_1-x_1'|}{1-|x_1-x_1'|}+\frac{1}{2!}\frac{|x_2-x_2'|}{1+|x_2-x_2'|}+...+\frac{1}{n!}\frac{|x_n-x_n'|}{1+|x_n-x_n'|}+...$$

В нашу цель не входит анализ этого основополагающего для функционального анализа труда Фреше. Наряду с некоторыми другими событиями это отразилось на характере дальнейшего развития спектральной теории дифференциальных операторов.

Общей теорией ортогональных систем функций на новом этапе занялся Хаар. В его работах [285] сформулированы основные задачи теории систем ортогональных функций, таких как теория сходимости, расходимости, суммируемости, однозначности. Ставится проблема существования ортогональной системы функций, относительно которой любая непрерывная функция разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье.

В первой главе дан общий критерий существования непрерывной функции, для которой ее ряд Фурье относительно данной ортогональной системы расходится. Затем этот критерий применен к рядам Штурма-Лиувилля и многочленам Лежандра. Во второй главе рассмотрены вопросы теории суммирования. Здесь выясняется вопрос о множестве функций, которые могут быть достаточно хорошо аппроксимированы с помощью линейных комбинаций конечного числа членов заданной ортогональной системы. Развитая теория применена к тригонометрическим рядам и рядам Штурма–Лиувилля. В третьей главе введен класс ортогональных систем функций, для которых ряды Фурье любой непрерывной функции сходятся к данной функции (ортогональные системы Хаара).

Во втором сообщении [285, II] Хаар рассматривает вопрос о свойстве функций, разложимых в сходящиеся ряды по данной системе функций, то есть представимых в виде

$$\varphi(x)=a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+...$$

Эта постановка вопроса, как известно, идет от Римана, поставившего задачу изучения общих тригонометрических рядов. Хаар дал обобщение теоремы Римана для ортогональных систем Штурма-Лиувилля, доказал теорему однозначности и указал аналоги теоремы Дюбуа-Реймона. Доказательство теорем дано Хааром для системы функций $u_1,u_2...,$ порожденной дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u+\lambda u=0$$

с аналитическими коэффициентами $p(x)$ и $q(x)$ при краевых условиях

$$\frac{du}{dx} + hu = 0 \text{ для } x = \alpha \text{ и } \frac{du}{dx} + Hu = 0 \text{ для } x = \beta$$

Указана возможность обобщения на регулярные системы Штурма–Лиувилля, то есть для самосопряженных дифференциальных уравнений с теми же краевыми условиями.

ГЛАВА 5.
КОНКРЕТНЫЕ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

§ 1. Различные подходы к построению спектральной теории

В исследовании Гильберта по теории симметрических интегральных уравнений по существу появляется пространство последовательностей действительных чисел, для которых ряд, составленный из квадратов чисел последовательности, сходится. Это пространство возникает как аналог конечномерного евклидова пространства. Геометрическая терминология "пространство Гильберта" не было явно введено. В работах Гильберта постоянно встречаются и функции с интегрируемым квадратом.

На формирование понятия гильбертова пространства оказали существенное влияние теоретико-множественные взгляды на общую топологию, выраженные в работах Фреше и Ф.Рисса 1906-08 гг. После появления работ Гильберта по основаниям геометрии аксиоматические теории приобрели большее значение. Под влиянием этих идей уже в работе 1908 г. Шмидт дает определение гильбертова пространства и изучает его свойства, пользуясь языком евклидовой геометрии. Термин "гильбертово пространство" еще не был введен. Одновременно появляются и работы Фреше о геометрии гильбертова пространства. В этих работах встречаются понятия нормы элементов гильбертова пространства, сепарабельности и полноты.

В последующие десятилетия было выполнено большое число исследований как по геометрии гильбертова пространства, так и по распространению понятий анализа в этом пространстве. В связи с решением систем линейных алгебраических уравнений с бесконечным множеством неизвестных развивается теория бесконечных матриц и соответствующих линейных преобразований (работы Ф.Рисса, Коха и др.). Понятие функции развивается как «функции бесконечного числа переменных» с применением к задачам вариационного исчисления. К этому кругу исследований относятся, в частности, работы Крылова и Вишневского 1916-1921 гг.

В работах Гильберта по интегральным уравнениям выявилось также значение функций с интегрируемым квадратом. Быстро была замечена аналогия пространства таких функций с гильбертовым пространством последовательностей, а затем Рисс и Фишер доказали изоморфность этих пространств.

Первое систематическое исследование неограниченных операторов было дано Хеллингером для гильбертова пространства последовательностей, а спектральная теория развита для неограниченных квадратичных форм. Карлеман рассмотрел интегральные операторы в функциональном пространстве $L^2(a,b)$.

Изучение бесконечных матриц в связи с проблемой моментов проводилась М.Риссом, а позднее Ахиезером и Крейном. При этом были обнаружены факты, известные для дифференциальных операторов из работ Вейля.

В ряде своих работ Пуанкаре выступает как один из предшественников современного функционального анализа. Он рассматривал пространства степенных рядов (аналитических функций).

В 1886 г., изучая функциональные уравнения, связанные с оператором

$$\frac{1}{2\pi i}\int A(x,y)\varphi(y)dy,$$

он показал, что их решение равнозначно с решением системы бесконечного числа линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных. В работе 1897 г. нахождение собственных значений линейного оператора приводит его также к решению бесконечных систем линейных уравнений. В 1925 г. Фубини показал, что метод Пуанкаре применим и для теории интегральных уравнений Гильберта-Шмидта и Гильберта–Хеллингера.

Пуанкаре установил возможность непрерывного спектра для некоторого класса линейных операторов. В ряде вопросов, в частности, при рассмотрении проектирования всего пространства на собственное подпространство, он предвосхитил результаты Хеллингера и Теплица, относящиеся к 1910 г. Использование геометрического языка для изучения функциональных пространств было у него задолго до Шмидта.

§ 2. Работы Шмидта.

Одним из первых активно включившихся в разработку идей и методов Гильберта был Шмидт. В диссертации 1905 г. и в опубликованной статье Шмидт отбрасывает условие Гильберта "общности" ядра в теореме разложения и тем самым придает этой основной теореме завершенный вид. Во втором сообщении "К теории линейных и нелинейных интегральных уравнений" Шмидт показал, что решение общего линейного интегрального уравнения сводится к двум частным случаям: вырожденного ядра вида

$$K(x,t) = \sum_{v=1}^{m} \alpha_V(s)\beta_V(t)$$

и ограниченного ядра

$$\int_a^b \int_a^b \left(K(s,t)\right)^2 dsdt < 1$$

В первом случае решение чисто алгебраическое, а во втором применяется метод итерации (или при помощи резольвенты). Доказываются основные теоремы Фредгольма. Указано также преобразование ядра, полезное и для теории нелинейных уравнений, В этом сообщении Шмидт рассматривал уравнения без параметра $(\lambda = 1)$

$$f(s) = \varphi(s) - \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt$$

и сопряженное уравнение

$$G(t) = \psi(t) - \int_a^b K(s,t)\psi(s)ds.$$

В первой части работы Шмидт рассматривает вопрос о разложении произвольной функции по данной системе. Кроме первых трех сообщений Гильберта в работе Шмидта нашли отражение исследования Стеклова, Шварца и Грама [70]. У Шмидта многие результаты Гильберта принимают совершенную форму и изящество.

В первой главе Шмидт излагает теоремы об ортогональных функциях. Здесь дано четкое определение ортогональных и нормированных функций, приведены неравенства Бесселя и Шварца. Функции $\psi_n(x)$ считаются непрерывными и вещественными в замкнутом интервале $a \le x \le b$, $f(x)$ интегрируемой с интегрируемым квадратом.

В этой же главе Шмидт дает ставший классическим метод ортогонализации системы линейно независимых функций и приводит итерационные формулы

$$\psi_n(x) = \frac{\varphi_n(x) - \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} \psi_\rho(x) \int_a^b \varphi_n(z)\psi_\rho(z)dz}{\sqrt{\int_a^b \left(\varphi_n(y) - \sum_{\rho=1}^{n-1} \psi_\rho(z)\psi_\rho(z)dz \right)^2 dy}},$$

дающие переход к системе ортонормированных функций $\psi_n(x)$. Знаменатель в этих формулах не обращается в нуль в силу линейной независимости функций $\psi_n(x)$. Шмидт отмечает преемственность этих формул от Грама.

Во второй главе дано определение собственной функции для симметрического интегрального уравнения, доказана ортогональность собственных функций, принадлежащих различным собственным значениям и вещественность собственных значений. Конечность числа собственных функций, принадлежащих определенному собственному значению следует из неравенства

$$n \le \lambda^2 \int_a^b \int_a^b \left(K(s,t)\right)^2 dsdt,$$

полученного из неравенства Бесселя для ядра $K(s,t)$.

Полной нормированной ортогональной системой ядра Шмидт называет такую ортонормированную систему собственных функций этого ядра, что любая собственная функция этого ядра представляется в виде конечной линейной суммы функций системы,

$$\psi(s) = \sum_v C_v \varphi_v(s).$$

В этом смысле полнота системы следует из замечания, что входящие в это представление собственные функции должны принадлежать тому же собственному значению, что и $\psi(s)$. Далее Шмидт вводит понятие итерированных ядер и получает их разложение по собственным функциям ядра. Представление ядра получено при условии равномерной сходимости билинейного ряда

$$\sum_v \frac{\varphi_v(s)\varphi_v(t)}{\lambda_v}.$$

Как отмечено выше, Шмидт в теореме разложения избежал "общности" ядра в смысле Гильберта и теорема разложения получила окончательную формулировку.

Пусть непрерывная функция $g(s)$ представлена в виде

$$g(s) = \int_a^b K(s,t)p(t)dt,$$

где *p(t)* непрерывная функция. Тогда

$$g(s) = \sum_v \varphi_v(s)\int_a^b g(t)\varphi_v(t)dt = \sum_v \frac{\varphi_v(s)}{\lambda_v}\int_a^b p(t)\varphi_v(t)dt = \sum_v \int_a^b K(s,t)\varphi_v(t)dt \int_a^b p(t)\varphi_v(t)dt,$$

и ряд в правой части сходится равномерно и абсолютно. Ядро предполагается удовлетворяющим условию

$$\int_a^b \left(K(s,t)\right)^2 dt \le A \quad \text{для всех } s,\ a \le s \le b,$$

откуда

$$\int_a^b \int_a^b \left(K(s,t)\right)^2 dsdt < \infty$$

Для решения неоднородного интегрального уравнения

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt$$

Шмидт получает формулу

$$\varphi(s) = f(s) + a_1\varphi_{n+1}(s) + \ldots + a_k\varphi_{n+k}(s) + \lambda\sum_{v}\frac{\varphi_v(s)}{\lambda_v - \lambda}\int_a^b f(t)\varphi_v(t)dt,$$

где λ_v есть k–кратные собственные значения ядра $K(t,s)$, суммирование исключает значения $v = n+1,\ldots,n+k.$ Если $\lambda \neq \lambda_\mu$, то $a_i = 0.$

Основной теоремой теории симметрических интегральных уравнений Шмидт называет теорему о существовании собственного значения и проводит свое доказательство этой теоремы, основанное на сходимости некоторой последовательности отношений интегралов от квадратов итерированных ядер. Сначала доказывается теорема существования для второго итерированного ядра, откуда уже следует теорема для симметричного ядра.

Шмидт доказывает возможность расширения класса рассматриваемых ядер на некоторые ядра, имеющие точки и линии разрыва, но с ограниченными интегралами от функций с интегрируемыми квадратами. Для уравнения с несимметрическим ядром Шмидт рассматривает одновременно две последовательности собственных функций: для ядер $K(s,t)$ и $K(t,s)$, соответственно, при одной и той же последовательности собственных значений и получает теорему разложения.

В третьем сообщении Шмидт останавливается на вопросе о решении нелинейных интегральных уравнений и некоторых, возникающих при этом особенностях.

Более позднюю работу [309] Шмидт посвящает развитию и совершенствованию гильбертовой теории квадратичных форм бесконечного числа переменных и теории систем линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных. Он изучает систему

$$\sum_{(q)} a_{pq}x_q = y_p$$

в предположении, что суммы квадратов $\sum\limits_{(q)} a_{pq}^2$, $\sum\limits_{p} x_p^2$, $\sum\limits_{p} y_p^2$ сходятся. Он детально изучает геометрию пространства *H*. В статье «О решении линейных уравнений с бесконечно многими неизвестными» [309] Шмидт вводит в употребление понятие пространства последовательностей со сходящейся суммой квадратов (гильбертово пространство последовательностей).

Отметив, что начатая работами Хилла, Пуанкаре и Коха теория линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных была предметом глубоких исследований Гильберта и существенно дополненых Теплицем, Шмидт указывает на выявившееся значение последовательностей со сходящейся суммой квадратов, то есть последовательностей $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, для которых $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^2$ сходится. Шмидт рассматривает последовательности как функции натурального аргумента $C(x)$, $(x = 1, 2, \ldots)$, для которых ряд $\sum\limits_{x=1}^{\infty}|C(x)|^2$ сходится.

Сразу доказывается, что $\sum\limits_{x=1}^{\infty} A(x)B(x)$ сходится. Это следует из неравенства

$$|A(x)B(x)| \leq \frac{|A(x)|^2 + |B(x)|^2}{2}.$$

Непосредственным вычислением показывается, что линейная комбинация вида

$$\alpha_1 A_1(x) + \alpha_2 A_2(x) + \ldots + \alpha_n A_n(x)$$

есть функция того же вида, то есть последовательность со сходящейся суммой квадратов модулей. Определяется символ $(A;B)$ равенством

$$\left(A;B\right)=\left(B;A\right)=\sum_{x=1}^{\infty}A(x)B(x).$$

Название ему не дано. Доказывается дистрибутивность

$$\left(\alpha A+\beta B;\gamma C+\delta D\right)=\sum_{k=1}\left[\alpha A(x)+\beta B(x)\right]\left[\gamma C(x)+\delta D(x)\right].$$

Вводится также $\|A\|$ как положительное число, равенством

$$\|A\|^2=\left(A;\overline{A}\right)=\sum_{x=1}^{\infty}|A(x)|^2$$

Отмечается, что $\|A\|$ равна нулю тогда и только тогда, когда $A(x)$ тождественно равна нулю. Если $\|A\|=1$, то $A(x)$ называется нормированной. Вводится понятие ортогональности функций $A(x)$ и $B(x)$ равенством $\left(A;B\right)=0$. Отмечено, что единственная ортогональная себе функция тождественно равна нулю. Для конечного числа попарно ортогональных функций имеет место обобщенная теорема Пифагора: если $C_1(x)+C_2(x)+...+C_n(x)=D(x)$, то $\|D\|^2=\|C_1\|^2+\|C_2\|^2+...+\|C_n\|^2$. Отсюда следует линейная независимость ортогональных друг к другу и не обращающихся в нуль функций. Для бесконечной системы ортогональных и нормированных функций отсюда следует, что ряд $\sum_{v=1}^{\infty}\left|\left(F;B_v\right)\right|^2$ сходился и имеет место неравенство Бесселя $\sum_{v=1}^{\infty}\left|\left(F;B_v\right)\right|^2\le\|F\|^2$.

Произведя нормировку произвольной функции $G(x)$ по формуле $B_1(x)=\dfrac{\overline{G}(x)}{\|G\|}$ из неравенства Бесселя для случая $n=1$ получим $\|F\|^2\ge|(F;B_1|^2=\dfrac{1}{\|G\|^2}|(F;G)|^2$ и $\|F\|\|G\|\ge|(F;G)|$.

Это есть аналог неравенства Шварца. Получено неравенство для функции $C(x)=A(x)+B(x)$, т.е. неравенство треугольника $\|C\|\le\|A\|+\|B\|$.

В примечании сказано, что определение длины $\|A\|$ и ортогональности дано по аналогии с геометрическим определением Студи.

Шмидт дает понятие сильной сходимости, как сходимости по норме, и обозначает $\lim\limits_{n=\infty}D_n(x)=D(x)$, если $\lim\limits_{n=\infty}\|D-D_n\|=0$. Показаны простейшие свойства предела, введена сходимость ряда $\sum_{v=1}^{\infty}U_v(x)$ и свойства $\lim\limits_{n=\infty}\|D_n(x)\|=\|D\|$, $\sum_{v=1}^{\infty}(E;U_v)=(E;S)$, где E − любая функция, а $S\left(x\right)=\lim\limits_{n=\infty}\sum_{v=1}^{n}U_v(x)$. Доказана теорема о сходимости. Дано необходимое и достаточное условие сильной сходимости ряда $\sum_{v=1}^{\infty}C_vB_v(x)$, где $B_1(x),B_2(x),...$ − ортонормированная система, которое состоит в сходимости ряда $\sum_{v=1}^{\infty}|C_v|^2$.

Далее показан в обобщенном виде процесс ортогонализации, данный ранее Шмидтом для системы функций.

Естественно введено понятие предельной точки пространства, замкнутого множества и замыкания. Рассмотрены замкнутые линейные многообразия функций (подпространства), их ортогональность. Введено понятие перпендикулярной функции

$$P(x) = D(x) - S(x),$$

где $S(x) = \sum_{v}(D;\overline{B_v})B_v(x)$, а $B_v(x)$ образуют базис подпространства *A*. Величина $\|P\|$ называется расстоянием функции $D(x)$ от линейного подпространства A.

Таким образом Шмидт построил геометрию гильбертова пространства. Само название появилось позднее.

Вторая часть статьи Шмидта посвящена теории решения систем линейных уравнений с бесконечно многими неизвестными. Для каждого уравнения предполагается, что сумма квадратов абсолютных значений его коэффициентов сходится: $\sum_{m=1}^{\infty}|a_{nm}|^2 < \infty$. Решения системы ищутся в гильбертовом пространстве, то есть предполагается, что ряд $\sum_{m=1}^{\infty}|x_m|^2$ сходится.

Рассмотрены различные методы решения систем, в том числе указано и применение общих методов Гильберта-Теплица.

§ 3. Теории разложения с применением интегральных уравнений.

Работы Гильберта по линейным интегральным уравнениям и теоремам разложения вызвали ряд исследований, в которых известные ранее разложения произвольных функций изучаются с новой точки зрения интегральных уравнений.

К числу таких работ можно отнести некоторые работы Хильба, Кнезера и др. В одной работе [297] Хильб рассматривает разложения в ряды, встречающиеся в теории потенциала, в частности, по полиномам Ламе. В обширной работе [99] Кнезер делает попытку рассмотреть связь разложений произвольных функций в математической физике с теорией интегральных уравнений Гильберта-Шмидта.

Кнезер отмечает, что рассматриваемые им проблемы математической физики были исследованы Штурмом и Лиувиллем и связаны с уравнением

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{dV}{dx}\right) + \left(g\lambda - l\right)V = 0,$$

где $a \le x \le b$, a, b − конечные числа, K, g, l − непрерывные функции вместе со своими первыми и вторыми производными, кроме того, функции K и l − положительные, а интеграл $u = \int_a^x g dx$ остается конечным и непрерывным.

Краевые условия вида

$$K\frac{dV}{dx} - hV\Big|_{x=a} = 0, \quad K\frac{dV}{dx} - HV\Big|_{x=b} = 0,$$

в частности, могут быть $V\big|_{x=a} = 0$ и $V\big|_{x=b} = 0$. Отмечается возможность сингулярных задач, когда вместо краевого условия налагается требование ограниченности. Для соответствующих решений, наряду с употреблявшимися ранее другими авторами названия нормальных функций, допускается из теории интегральных уравнений название собственных функций, а соответствующие значения λ называются собственными значениями. Легким преобразование исключается возможность $\lambda = 0$ в качестве собственного значения.

В качестве примеров рассмотрены ряды Штурма-Лиувилля и разложение по функциям Бесселя и многочленам Лежандра. Значение этой работы Кнезера было в том, что она показала возможности углубления теории разложения функций в ряды по собственным функциям методами интегральных уравнений. Свои исследования по теории представления функций математической физики Кнезер начал до появления работ Гильберта. В первых публикациях по этому вопросу Кнезер имел в виду показать возможность представления функции в виде ряда Фурье по системе собственных функций задачи Штурма–Лиувилля.

Значения λ, при которых задача имеет решение, находятся как корни некоторого трансцендентного уравнения и обозначаются $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, а соответствующие решения $V_1, V_2, \ldots$ называются нормальными функциями, так как удовлетворяют условию

$$\int_0^{\overline{X}} g V_\mu V_\nu dx = 0, \quad \mu \neq \nu.$$

Разложение произвольной функции имеет вид

$$f(x) = A_1 V_1 + A_2 V_2 + \ldots,$$

где

$$A_\nu = \frac{\int_0^X g f(x) V_\nu(x) dx}{\int_0^X g V_\nu^2 dx}.$$

Теория тригонометрического ряда Фурье рассматривается, исходя из уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \rho^2 y + f(x) = 0,$$

решение которого при начальных условиях

$$p(0) = p'(0) = 0,$$

$$y(x) = \frac{1}{\rho} \int_0^x f(\alpha) \sin \rho (\alpha - x) d\alpha$$

Значения ρ находятся из граничного условия на правом конце $x = \pi$. Показывается обращение всюду в нуль функции, коэффициенты Фурье которой равны нулю. Для функций $f(x)$, непрерывных в $[0, \pi]$ вместе с первой и второй производными, доказывается равномерная сходимость ряда Фурье. Доказана сходимость ряда Фурье и при выполнении условия Дирихле. Переходя к общему случаю разложения функций по нормальным функциям Штурма-Лиувилля, Кнезер излагает кратко историю проблемы, идущей от задачи охлаждения однородного прямолинейного бруса. В кратном обзоре он отмечает после Штурма и Лиувилля исследования Кирхгофа о диффузии газов и Стеклова, доказавшего возможность представления функции $f(x)$ с непрерывными первой и второй производными.

Далее доказывается замкнутость системы собственных функций, то есть доказывается, что если $f(x)$ − непрерывная в $[0, X]$ функция, для которой выполняются равенства

$$\int_0^{X^2} f(x)V_\nu(x)=0 \quad (\nu=1,2,...),$$

где $V_\nu(x)$ − нормальные функции, то $f(x)$ обращается в нуль на всем интервале $[0,X]$. При доказательстве используется вспомогательная функция Коши, которая оказывается целой в рассматриваемом случае.

Даны также доказательства равномерной сходимости разложений в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля. Для функций с разрывами доказывается сходимость ряда при условии Дирихле.

Во второй статье Кнезер делает некоторые дополнения к своим исследованиям, касающиеся аналога интеграла Дирихле и теоремы Дюбуа-Реймона, а также рассматривает вопрос о приближенном представлении непрерывной функции в виде конечной суммы собственных функций.

В последующих работах Кнезера основным методом становится метод интегральных уравнений. Кнезер внес некоторые методические усовершенствования в изложение теории Фредгольма и Гильберта. Он рассматривает переменные не как числовые, а как точки пространства (одного, двух или трех измерений), показывает существование собственного значения для любого симметричного ядра и указывает способ его вычисления, Кнезер в нескольких статьях исследовал асимптотические представления решений для линейных дифференциальных уравнений второго порядка на полуоси вида

$$y''+y\left(\pm a^2+\frac{a_1}{x^2}+\frac{a_2}{x^3}+...\right)=0,$$

имеющих в первом случае осциллирующие, а во втором случае не осциллирующие решения. Исследование осциллирующего случая опирается на работу Штурма. Полученные результаты применены Кнезером к теории бесселевых функций

$$J_n(x) \text{ и } K_n(x)=\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot ...\cdot(2n-1)}\int_0^\infty e^{ix\cos i\varphi}\sin^{2n}\varphi d\varphi .$$

В работе, опубликованной в 1897 г., развивая метод Римана интегрирования гиперболического уравнения вида

$$g(t)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-h(x)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=0,$$

Виртингер сравнивает это решение с решением, получающимся методом разделения переменных в виде ряда Штурма-Лиувилля. Переходя к рассмотрению колебаний бесконечной струны, Виртингер отмечает возникающие трудности проведения предельного перехода. Для примера Виртингер рассматривает бесконечную струну с периодической плотностью периода *2l*.

В этом случае для нормальных функций имеем уравнение

$$y''+\lambda^2 h(x)y=0.$$

Проведенный Виртингером анализ привел к заключению, что значения λ, при которых требуемые решения существуют, образуют множество замкнутых отрезков на оси λ. Это множество Виртингер назвал по аналогии с оптикой полосатым спектром (Bandesspectrum). Эти полосы могут соединяться (например, для $h(x)=const$) и тогда полосатый спектр перейдет в непрерывный (Continuirlichen Spectrum).

По-видимому это первое появление термина «спектр», − позднее получившее всеобщее употребление после работ Гильберта.

Кнезер рассмотрел вопросы представления функций двух переменных в виде ряда по собственным функциям, на основе теории интегральных уравнений для уравнения

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$$

с краевым условием

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} - h\varphi = 0$$

на единичном круге, что связано е разложением по бесселевым функциям $J_m\left(k\sqrt{x}\right)$. Эта статья примыкала к работе Стеклова, доказавшего теорему разложения для непрерывной, с непрерывными первой и второй производными, функции $f\left(x\right)$.

В интересной работе Шура [318], близкой по идеям к статье Шмидта доказывается абсолютная сходимость ряда $\sum \frac{1}{\lambda^2}$, в котором каждое собственное значение λ повторено столько раз, каков его порядок. Шур допускает комплекснозначные корни и функции, использует «для краткости» обозначение $K(f) = \int_a^b K(s,t) f(t) dt$ и называет его операцией *K*, по-видимому, заимствованное у Пинкерле и Амальди [193].

Если для системы *n* линейно независимых непрерывных функций имеет место

$$K(p_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\varphi_\beta\,, \qquad \left(\alpha = 1, 2, ..., n\right),$$

где $a_{\alpha\beta}$ − коэффициенты подстановки $A = \left(a_{\alpha\beta}\right)$, то говорят, что $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ образуют инвариантную систему ядра $K(s,t)$, принадлежащую подстановке *A*. Функции инвариантной системы Шур называет главными функциями ядра. Характеристический детерминант $\left|A - \lambda E\right|$ подстановки A называется характеристической функцией инвариантной системы.

Имеет место теорема: Если *n* функций $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ образуют инвариантную систему ядра $K(s,t)$ и $\left(\omega_1 - x\right)\left(\omega_2 - x\right)...\left(\omega_n - x\right)$ есть характеристическая функция этой системы, то

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left|\omega_\nu\right|^2 \le \int_a^b \int_a^b \left|K(s,t)\right|^2 dsdt = k\,.$$

Отсюда легко получается неравенство

$$\frac{n_1}{\left|\lambda_1\right|^2} + ... + \frac{n_p}{\left|\lambda_p\right|^2} \le K\,.$$

Принимая во внимание, что собственные значения λ_n ядра не имеют предельной точки, получаем сходимость ряда

$$\sum_p \frac{1}{\left|\lambda_p\right|^2} \le K.$$

Первый шаг на пути отказа от непрерывности ядра линейного интегрального уравнения был сделан в 1902 г. в докторской диссертации Келлога под руководством Гильберта.

В диссертации и в опубликованной статье [98] Келлог подходит к необходимости изучения не только непрерывных ядер, отправляясь от задач теории логарифмического потенциала.

Келлогом рассмотрены интегральные уравнения с ядрами вида $a\operatorname{ctg}\pi(s-t)+S(s,t)$ и $K(r,t)=-1-\frac{1}{a}\int_0^1 S(s,t)\operatorname{ctg}\pi(r-s)ds$, где $S(s,t)$ конечная, непрерывная, дифференцируемая функция и интегрируемая по s от 0 до 1, а также

$$K(r,t)=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{arctg}\frac{y(t)-y(s)}{x(t)-x(s)}.$$

Решение интегральных уравнений во всех случаях получается слегка измененными методами Гильберта.

Работа Келлога, как и первые исследования Кнезера о представлении функций были опубликованы до появления в печати сообщений Гильберта по теории линейных интегральных уравнений. Успех Гильберта в доказательстве принципа Дирихле позволил его последователям и ученикам получить интересные результаты в ряде приложений, в частности, в доказательстве существования решения задачи Штурма-Лиувилля и свойства минимальности решения. На основе принципа Дирихле Мозон дал доказательство существования непрерывного и непрерывно дифференцируемого решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda A(x)y=0$$

при различных краевых условиях. Доказана следующая теорема: существует бесконечный ряд возрастающих значений параметра λ_i и решений дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda A(x)y=0$$

при условиях $y(a)=y(b)=0$. Функция y_i представляет собой решение вариационной проблемы

$$J(y)=\int_a^b\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx$$

при условиях

$$y(a)=y(b)=0,\quad K(y)=\int_a^b Ay^2dx=1,$$

$$K'(y_j;y)=\int_a^b Ay_jydx=0,\qquad (j=1,2,...,i-1),$$

придающая интегралу J значение λ_i.

Рассмотрены также случаи периодического решения, а также системы дифференциальных уравнений.

Под влиянием Гильберта были проведены разнообразные исследования, связывающие проблемы теории дифференциальных и интегральных уравнений и вариационного исчисления.

В работе Ричардсона [227] изучена связь критерия Якоби с осцилляционными свойствами решения дифференциального уравнения Штурма-Лиувилля. Планшерель, изучая системы ограниченных ортогональных функций, показал однозначность определения функции по ее коэффициентам Фурье для некоторого класса функций. Им доказана теорема: две функции $f_1(x), f_2(x)$, для которых интегралы

$$\int_0^1|f_1(x)|\rho(x)dx,\qquad \int_0^1|f_2(x)|\rho(x)dx$$

существуют и для которых коэффициенты Фурье относительно ортогональной системы $[\psi_n(x)]$ тождественны, тождественны «в общем» (по терминологии Гильберта-Вейля). Здесь $\rho(x)$ предполагается ограниченной функцией, нули которой образуют множество меры нуль, ψ_p – ортогональная система относительно $\rho(x)$.

В заключение параграфа упомянем о работах Уинтнера [268] 1929 г., в которых он развивает спектральную теорию ограниченных билинейных форм (уделяя особое внимание унитарным матрицам). В дополнении к статье Уинтнер замечает, что на основе спектральной теории эрмитовых и унитарных матриц может быть основана теория всех нормальных матриц.

В построении теории вместо интегралов Стилтьеса приходится употреблять двойной интеграл Радона, что соответствует двумерному спектру. Существование интегрального представления всех нормальных матриц было предметом разговора Уинтнера с Нейманом в январе 1929 г.

§ 4. Исследования Хеллингера.

Фундаментальное сочинение Хеллингера по спектральной теории квадратичных форм с бесконечным числом переменных [294] появилось в 1909 г. Хеллингер еще в диссертации 1904 года поставил вопрос о получении необходимого и достаточного условия взаимного ортогонального преобразования двух квадратичных форм с бесконечным числом переменных. Хеллингер развивает теорию независимо от каких-либо других исследоваеий, приводящих к квадратичным формам с бесконечным числом переменных.

В первой главе Хеллингер подвергает изучению случай точечного спектра. Напомнив основные понятия и основные свойства линейных, билинейных и квадратичных форм, Хеллингер приступает к изучению вещественных квадратичных форм

$$K(x) = \sum_{(pq)} k_{pq} x_p x_q \qquad \left(k_{pq} = k_{qp}\right).$$

Он рассматривает пучок форм $A(x) = K(x) - \lambda E(x)$. Здесь могут представиться два случая: или существует ограниченная обратная форма $K(\lambda, x)$ к A, то есть такая форма, что ее свертка с A равна единичной форме

$$AK(\lambda, x) = \sum_{(p,q,a)} a_{pa} \mathrm{K}_{aq} x_p x_q = E(x),$$

или существует нулевое решение, то есть такая линейная форма $M(x)$, что тождественно $AM(x) \equiv 0$. В первом случае неоднородная система линейных уравнений $\sum_{(q)} a_{pq} x_q = y_p$ или $\sum_{(q)} k_{pq} x_q - \lambda x_p = y_p$ имеет единственное решение со сходящейся суммой квадратов, во втором случае однородная система уравнений $\sum_{(q)} a_{pq} x_q = 0$ или $\sum_{(q)} k_{pq} x_q - \lambda x_p = 0$ имеет отличное от тривиального $(x_p = 0)$ решение $x_p = m_p$ со сходящейся суммой квадратов абсолютных значений.

Соответствующее значение λ называется собственным значением формы *К*. Доказывается, что собственные значения вещественной квадратичной формы вещественны. Умножая каждое уравнение системы на сопряженное $\overline{x_p} = \zeta_p - i\eta_p$, получаем

$$\sum_{(p,q)} \left(k_{pq} \xi_r \xi_q + k_{pq} \eta_p \eta_q\right) = \lambda \sum_{(p)} \left(\xi_p^2 + \eta_p^2\right).$$

Отсюда следует, что λ вещественно, как отношение двух вещественных чисел. Линейная форма

$$M(x)=\sum_{(p)} m_p x_p$$

называется собственной формой формы $K(x)$, принадлежащей собственному значению λ. Можно записать $KM=\lambda M$ вместо $\sum_{(q)} k_{pq} m_q=\lambda m_p$. Линейную форму $M(x)$ можно нормировать, то есть перейти к $L(x)=\frac{M(x)}{\sqrt{(M,M)}}$, которая характеризуется условием $(L,L)=1$. Если квадратичная форма $K(x)$ обладает собственной формой $L_1(x)$ при собственном значении λ, то есть $KL_1=\lambda L_1$, $(L_1,L_1)=1$, то образуем новую квадратичную форму $K_1(x)=K(x)-\lambda\left(L_1(x)\right)^2$. Для нее L_1 не может быть уже собственной, так как

$$KL_1(x)=KL_1(x)-\lambda L_1(x)(L_1,L_1)=0,$$

но может быть собственной другая форма $L_2(x)$. Повторяя этот процесс, приходим к тому, что квадратичная форма $K(x)$ для собственного значения λ может иметь конечное или счетное число принадлежащих ему линейно независимых попарно ортогональных собственных форм. Всякая собственная форма $M(x)$, принадлежащая собственному значению λ может быть представлена в виде

$$M(x)=\left(M,L_1\right)L_1(x)+\left(M,L_2\right)L_2(x)+\ldots$$

и, наоборот, любая такая линейная комбинация есть собственная форма, принадлежащая собственному значению λ. Естественно определяется кратность собственного значения λ (конечное число или счетное). Система всех собственных форм, принадлежащих одному собственному значению, называется полной. Число нуль исключается как возможное собственное значение переходом к форме $K+E$ посредством равенства

$$\left(K+E\right)L(x)=L(x).$$

Если $KL(x)=0$, то $L(x)$ служит собственной формой для формы $K+E$ при собственном значении $\lambda=1$.

Множество всех различных собственных значений формы $K(x)$ называется точечным спектром квадратичной формы.

Показывается, что собственные формы, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны. Все собственные значения ограничены максимумом формы $K(x)_\xi$ для всех систем чисел, удовлетворяющих неравенству $\sum_{(p)} x_p^2\le 1.$

Можно непосредственно показать, что

$$K_0(x)=K(x)-\lambda_1\left(L_1(x)\right)^2-\lambda_2\left(L_2(x)\right)^2-\ldots$$

не имеет собственных значений.

Итак, возможно представление формы $K(x)$ в виде

$$K(x)=\sum\lambda_p\left(L_p(x)\right)^2+K_0(x)$$

Здесь λ_p могут повторяться, а $K_0(x)$ ограниченная квадратичная форма, не имеющая собственных значений отличных от нуля.

Если $K_0(x)$ тождественно обращается в нуль, то $L_1(x), L_2(x),...$ образуют полную ортогональную систему в силу того, что $\sum\limits_{(p)} L_p(x)^2 = \sum\limits_{(p)} x_p^2$. Тогда квадратичная форма имеет только ограниченное конечное или счетное множество вещественных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2,...$ и

$$K(x) = \lambda_1 L_1(x)^2 + \lambda_2 L_2(x)^2 + ... = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + ...$$

Во второй главе Хеллингер переходит к изучению непрерывного спектра. Главное внимание здесь уделено изучению квадратичных форм без точечного спектра. Простейший пример был дан Гильбертом: $K(x) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + ...$ Соответствующая система уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} x_2 - \lambda x_1 = 0, \\ &...................... \qquad\qquad (p = 2, 3, ...) \\ &\frac{1}{2}(x_{p-1} + x_{p+1}) - \lambda x_p = 0 \end{aligned}$$

может быть последовательно решена: $x_2 = 2\lambda x_1$, $x_3 = 2\left(\lambda x_2 - \frac{1}{2} x_1\right) = 2\left(4\lambda^2 - \frac{1}{2}\right) x_1$, и т. д. Можно показать, что $x_1, x_2,...$ образуют при $|\lambda| \geq 1$ возрастающую последовательность, а потому $\sum x_p^2$ расходится. Но, если $|\lambda| < 1$, то, полагая, например, $\lambda = \cos t$ и $x_1 = c \sin t$, получим $x_2 = c \sin 2t, x_3 = c \sin 3t, ..., x_p = c \sin pt$ и $\sum x_p^2$ расходится.

Но можно указать другое условие сходимости последовательности, например, ряд

$$\sum_{(p)} \left(\int_0^t \sin ptdt \right)^2$$

сходится.

Далее Хеллингер ставит задачу отыскания таких решений $\varphi_1(x), \varphi_2(x),...$ системы однородных уравнений

$$\sum k_{pq} \varphi_q(\lambda) = \lambda \varphi_q(\lambda)$$

как функций непрерывно изменяющегося параметра, чтобы сумма квадратов интегралов

$$\sum_{(p)} \left(\int_0^\lambda \varphi_p(\lambda) d\lambda \right)^2$$

сходилась.

Оставляя в стороне возникающие трудности в связи с возможными ортогональными преобразованиями функций $\varphi_p(\lambda)$ и некоторыми интегральными преобразованиями указанного вида, остающиеся даже если понимать интеграл в смысле Лебега, отметим, что устранение этих трудностей можно достигнуть обобщением понятия интеграла, предложенного Хеллингером.

Проинтегрировав систему уравнений, получим

$$\sum k_{pq} \int_0^\lambda \varphi_q(\lambda) d\lambda = \int_0^\lambda \lambda \varphi_p(\lambda) d\lambda$$

и введем

$$\rho_p(\lambda) = \int_0^\lambda \varphi_p(\lambda) d\lambda.$$

От функции $\rho_p(\lambda)$ можно перейти к ее производной в смысле сходимости в среднем $\varphi_p(\lambda)$, и $\rho_p(\lambda)$ непрерывна, как функция верхнего предела.

Интеграл Хеллингера есть обобщение интеграла Стильтьеса. Обозначим

$$\delta_i f(\lambda) = f(\lambda_i) - f(\lambda_{i-1})$$

и

$$\lim_{\delta_i \to 0} \sum \frac{\delta_i f(\lambda) \delta_i f_1(\lambda)}{\delta_i g(\lambda)} = \int_a^b \frac{df(\lambda) df_1(\lambda)}{dg(\lambda)},$$

существование которых показывается. Хеллингер приходит к интегралу от функции $u(\lambda)$

$$\lim_{\delta_i \to 0} \sum u_i \frac{\delta_i f(\lambda) \delta_i f_1(\lambda)}{\delta_i g(\lambda)} = \int_a^b u(\lambda) \frac{df(\lambda) df_1(\lambda)}{dg(\lambda)} = \int_a^b u(\lambda) d \int_0^\lambda \frac{df(\lambda) df_1(\lambda)}{dg(\lambda)}$$

Далее, пусть $\rho_1(\lambda), \rho_2(\lambda), \ldots$ − непрерывные функции такие, что ряд $\sum_{(p)} \left| \rho_p(\lambda) \right|^2$ сходится к непрерывной, конечной функции $\rho(\lambda)$. Тогда ограниченная линейная форма $P(\lambda; x) = \sum_{(p)} \rho_p(\lambda) x_p$ для каждой системы x_p со сходящейся суммой квадратов сходится и представляет непрерывную функцию.

Далее, пусть $u(\lambda)$ − функция ограниченной вариации, $\rho_0(\lambda)$ − заданная монотонная функция, $f(\lambda)$ − некоторая функция такая, что интеграл $\int \frac{df^2}{d\rho_0}$ существует. Тогда, опуская детали, запишем

$$\int_a^b u(\lambda) \frac{dP(\lambda; x) dP(\lambda; y)}{d\rho_0(\lambda)}$$

и

$$\int_a^b u(\lambda) \frac{dP(\lambda; x)^2}{d\rho_0(\lambda)} = \sum_{(p,q)} x_p x_q \int_a^b u(\lambda) \frac{d\rho_p(\lambda) d\rho_q(\lambda)}{d\rho_0(\lambda)}.$$

Вопрос теперь сводится к нахождению последовательности непрерывных функций $\rho_1(\lambda), \rho_2(\lambda), \ldots$, приращения которых $\Delta\rho_p = \rho_p(\lambda_2) - \rho_p(\lambda_1)$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{(q)} k_{pq} \Delta\rho_q(\lambda) - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda d\rho_p(\lambda) = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

при условии

$$\sum_{(p)} \left(\rho_p(\lambda) \right)^2 = \rho_0(\lambda).$$

Нормируем решения так, чтобы $\rho_p(0) = 0$. Употребляя термин линейной дифференциальной формы для $dP(\lambda; x) = \sum_{(p)} d\rho_p(\lambda) x_p = \sum_p \Delta\rho_p \left(\rho_p(\lambda) \right) x_p$, Хеллингер определяет непрерывный спектр, как множество точек, для которых $K(x)$ обладает не обращающейся тождественно в нуль ограниченной собственной дифференциальной формой, инвариантной относительно всех ортогональных преобразований. Вместо ортогональности собственных дифференциальных форм имеем:

$$\sum_{(p)} \Delta_1 \rho_p \Delta_2 \rho_p = \left(\Delta_1 P, \Delta_2 P\right) = \Delta_{(1,2)} P$$

или

$$\left(dP(\lambda), dP(\mu)\right) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \lambda \neq \mu \\ d\rho_0(\lambda), & \text{если} \quad \lambda = \mu \end{cases}.$$

Показано, что непрерывный спектр ограничен и лежит между максимумом и минимумом формы $K(x)$. Затем Хеллингер рассматривает ортогональную систему линейных дифференциальных форм.

Из вышеприведенного соотношения следует, полагая $\Delta_1 = \Delta_2$, что базисная функция $\rho_0(\lambda)$ монотонная и во всех интервалах постоянства базисной функции все $\rho_p(\lambda)$ постоянны. Обнаруживается, что непрерывный спектр получается из вещественной оси удалением интервалов постоянства, функции $\rho_0(\lambda)$, то есть образует совершенное множество и, следовательно, имеет мощность континуума.

Формуле ортогональности можно придать вид

$$\sum_{(p)} \int_a^b \frac{df(\lambda) d\rho_p(\lambda)}{d\rho_0(\lambda)} \int_a^b \frac{df_1(\lambda) d\rho_p(\lambda)}{d\rho_0(\lambda)} = \int_a^b \frac{df(\lambda) df_1(\lambda)}{d\rho_0(\lambda)}.$$

Можно получить формулу

$$\int_a^b \frac{dP(\lambda, x)^2}{d\rho_0(\lambda)} = \sum_{(p,q)} x_p x_q \int_a^b \frac{d\rho_p(\lambda) d\rho_q(\lambda)}{d\rho_0(\lambda)} \leq \sum_{(p)} x_p^2.$$

Для заданной функции $\rho_0(\lambda)$, монотонной и непрерывной, можно образовать систему ортогональных дифференциальных форм.

Система называется полной, если

$$\int_a^b \frac{dP(\lambda, x)^2}{d\rho_0(\lambda)} = \sum_{(p)} x_p^2 \qquad \text{или} \qquad \int_a^b \frac{d\rho_p(\lambda) d\rho_q(\lambda)}{d\rho_0(\lambda)} = \delta_{pq}.$$

Вообще говоря, могут существовать различные системы ортогональных дифференциальных форм в зависимости от базисной функции $\rho_0^{(\alpha)}(\lambda)$.

Для непрерывного спектра Хеллингер получает интегральное представление квадратичной формы. Здесь Хеллингер применяет процесс, аналогичный получению спектрального представления квадратичной формы точечным спектром.

Пусть $dP^{(1)}(\lambda; x)$ какая-нибудь собственная дифференциальная форма для $K(x)$ с базисной функцией $\rho_0^{(1)}(\lambda)$

$$K\Delta P^{(1)}(\lambda; x) = \int_\Delta dP^{(1)}(\lambda; x), \qquad \left(\Delta_1 P^{(1)}, \Delta_2 P^{(1)}\right) = \Delta_{(1,2)} \rho_0^{(1)}.$$

Образуем форму

$$K_1(x) = K(x) - \int_a^b \lambda \frac{\left[dP^{(1)}(\lambda; x)\right]}{d\rho_0^{(1)}(\lambda)}.$$

Пусть для нее существует собственная дифференциальная форма $dP^{(2)}(\lambda; x)$ с базисной функцией $\rho_0^{(2)}(\lambda)$. Образуем

$$K_2(x) = K(x) - \int_a^b \frac{\left(dP^{(2)}(\lambda;x)\right)^2}{d\rho_0^{(2)}(\lambda)}$$

и т.д., пока не получится форма $K_0(x)$, не имеющая собственных дифференциальных форм. Итак,

$$K_0(x) = K(x) - \sum_{\alpha=1,2,\dots} \int_a^b \frac{\left(dP^{(\alpha)}(\lambda;x)\right)^2}{d\rho_0^{(\alpha)}(\lambda)},$$

причем

$$K\Delta P^{(\alpha)}(\lambda;x) = \int_\Delta \lambda dP^{(\alpha)}(\lambda;x),$$

$$K_0\Delta P^{(\alpha)}(\lambda;x) = 0$$

$$\left(\Delta_1 P^{(\alpha)}, \Delta_2 P^{(\beta)}\right) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad \alpha \neq \beta, \\ \Delta_{1,2}\rho_0^{(\alpha)}(\lambda) & \text{для} \quad \alpha = \beta. \end{cases}$$

Форма $K_0(x)$ ограничена, она может иметь точечный спектр. Применяя предыдущую теорию, получим

$$K(x) = \sum_{(\alpha)} \int_a^b \lambda \frac{\left(dP^{(\alpha)}(\lambda;x)\right)^2}{d\rho_0^{(\alpha)}(\lambda)} + \sum_{(\beta)} \lambda_\beta \left(L_\beta(x)\right)^2 + R(x),$$

где $R(x)$ − ограниченная квадратичная форма, кроме собственного значения $\lambda = 0$ не имеющая ни точечного, ни непрерывного спектра.

Далее доказывается, что $R(x)$ тождественно обращается в нуль. В третьей главе рассматривается вопрос о существовании спектра. На основе работ Теплица, Хилъба и Шмидта, Хеллингер исследует обратную форму $K(v;x)$ с комплексным параметром v форме $K - vE$ и получает ее разложение в ряд по степеням v в окрестности бесконечно удаленной точки

$$K(v;x) = -\frac{E(x)}{v} - \frac{K(x)}{v^2} - \frac{K^2(x)}{v^3} - \dots$$

На основании того, что $K(v;x)$ аналитическая функция в окрестности бесконечности, не обращается в нуль тождественно, Хеллингер показывает, что квадратичная форма имеет, по крайней мере, собственные значения или собственная дифференциальная форма в некотором интервале не обращается в нуль и тогда этот интервал составляет часть непрерывного спектра. Ограниченная квадратичная форма, не имеющая, кроме $\lambda = 0$, ни точечного, ни непрерывного спектра, тождественно равна нулю.

Таким образом, Хеллингер дал достаточно ясную картину возможных спектральных характеристик ограниченных квадратичных форм.

Развитием идей Гильберта о последовательностях чисел со сходящимся рядом квадратов и о линейных преобразованиях таких последовательностей или, говоря современным языком, теорией гильбертова пространства последовательностей и линейных преобразований в нем, занялись Хеллингер и Теплиц. В их совместной статье изложены основы теории бесконечных матриц.

Как известно, по Гильберту, решение интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$f(s)=\varphi(s)+\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt$$

или линейного интегрального уравнения с симметричным ядром

$$f(s)=\varphi(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt \qquad \text{где}\quad \mathrm{K}(\mathrm{s,t})=K(t,s)$$

с помощью ортогональной (в частности, нормированной) системы функций $\varphi_1(s),\varphi_2(s),...$ сводится к решению системы линейных уравнений с бесконечно многими неизвестными

$$\begin{gathered} y_1=(1+a_{11})x_1+a_{12}x_2+..., \\ y_2=a_{21}x_1+(1+a_{22})x_2+..., \\ \text{...} \end{gathered}$$

и

$$\begin{gathered} y_1=x_1-\lambda(a_{11}x_1+a_{12}x_2+...), \\ y_2=x_2-\lambda(a_{21}x_1+a_{22}x_2+...), \\ \text{..} \end{gathered}$$

где $a_{pq}=a_{qp}$, $y_p=\int_a^b f(t)\varphi_p(t)\,dt,\quad x_p=\int_a^b \varphi(s)\varphi_p(s)\,ds,\quad a_{pq}=\int_a^b\int_a^b K(s,t)\varphi_p(s)\varphi_q(t)\,dsdt$.

Решение ищется среди последовательностей чисел со сходящейся суммой квадратов, то есть $\sum_{p=1}^{\infty}x_p^2<\infty$.

Хеллингер и Теплиц излагают теорию бесконечных матриц независимо от ее приложения к какой-либо другой математической теории, в частности, независимо от теории интегральных уравнений. В работе прежде всего получено неравенство, названное неравенством Шварца (по аналогии с интегральным неравенством Шварца-Буняковского)

$$\left|\sum_{(p)}u_p v_p\right|\le\sqrt{\sum_{(p)}u_p^2}\sqrt{\sum_{(p)}v_p^2}\,,$$

введено понятие ограниченной линейной формы $a_1x_1+a_2x_2+...$ неравенством

$$|a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n|\le M\sqrt{x_1^2+x_2^2+...x_n^2}\,,$$

где M не зависит от $\{x_p\}$ и n.

Необходимым и достаточным условием ограниченности линейной формы оказывается сходимость ряда $a_1^2+a_2^2+...$. Далее определена ограниченная билинейная форма $A=A(x,y)=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}a_{pq}x_py_q$ неравенством $\left|\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}a_{pq}x_py_q\right|\le M\sqrt{\sum_{p=1}^{n}x_p^2\sum_{q=1}^{n}y_q^2}$, где M независима от n, x_p,y_q.

Для ограниченной билинейной формы сумма квадратов чисел какой-либо строки или столбца сходится. Введены виды сходимости ограниченных билинейных форм - построчная, постолбцовая и усеченно-образная, по аналогии со сходимостью двойных рядов. Доказано, что свертка двух ограниченных билинейных форм существует и ограничена $C=AB$, имеет место ассоциативность $A(BC)=(AB)C$.

Ограниченность квадратичной формы вытекает из следующего неравенства, верного для любого n:

$$\left|\sum_{p,q}^{n} a_{pq} x_p x_q\right| \le M \sum x_p^2$$

Рассмотрены билинейные формы с комплексными коэффициентами. Ограниченность их понимается в смысле ограниченности вещественной и мнимой частей.

Введены эрмитовы формы

$$\sum h_{pq} x_p \overline{x_q}$$

с комплексными коэффициентами, где $h_{pq} = \overline{h_{qp}}$. Отмечено, что приведенное условие ограниченности не является критерием. Рассмотрены операции с ограниченными матрицами: сложение, умножение, деление (существование правой и левой обратных матриц $AX = E$ и $YA = E$). Доказано, что ограниченная симметричная матрица или не имеет обратной, или имеет единственную.

Единственность левой обратной матрицы влечет совпадение с правой обратной тогда и обратная симметрична.

Рассмотрены эквивалентность билинейных форм

$$U'AV = B, \qquad |U| \ne 0, \qquad |V| \ne 0,$$

конгруэнтность квадратичных форм

$$W'AW = B \qquad \left(U^{-1}AU = B\right),$$

подобие билинейных форм и ортогональная эквивалентность квадратичных форм. Спектром пучка форм $A_2 - \lambda A_1$ называется множество тех значений λ, для которых форма $A_2 - \lambda A_1$ не имеет единственной обратной, спектром формы A называется спектр пучка $A - \lambda E$.

Совпадение спектров есть необходимое условие эквивалентности, конгруэнтности, подобия и ортогональной эквивалентности. Гильберт в сообщении IV изучал, главным образом, ортогональную эквивалентность квадратичных форм. Гильберт дал полное решение проблемы ортогональной эквивалентности для вполне непрерывных ограниченных квадратичных форм и рассмотрел некоторые частные случаи для эрмитовых и кососимметричных вполне непрерывных форм. Хеллингер и Теплиц отмечают, что Гильберт в связи с теорией фредгольмовских интегральных уравнений излагал вопрос об эквивалентности вполне непрерывных билинейных форм.

Шмидт [309] дал полное решение вопроса эквивалентности для линейных систем, требуя только сходимости сумм квадратов отдельных строк, а не ограниченности квадратичной формы.

§ 5. Развитие теории бесконечных систем линейных уравнений в работах Коха и Ф.Рисса.

Кох дал первое систематическое изложение теории определителей бесконечного порядка. Данные им формулы решения при переходе к проблемам интегральных уравнений приводят к формулам Фредгольма. В более поздней работе Кох распространил метод на случай сходящейся суммы квадратов и частично для теории вполне непрерывных форм. Теплиц дал необходимое и достаточное условие существования однозначной, ограниченной обратной формы. Хильб этот критерий упростил [298]. Во второй главе статьи [295] Хеллингер и Теплиц излагают теорию ограниченных линейных, билинейных и квадратичных форм. Ограниченность линейной формы

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots$$

для любой последовательности со сходящейся суммой квадратов $\left(\sum x_p^2 < \infty\right)$ вытекает из сходимости ряда $\sum\limits_{(p)} a_p^2$. Аналогично для билинейных и квадратичных форм из равномерной ограниченности в единичном шаре $\left(\sum\limits_{(p)} x_p^2 \le 1, \quad \sum\limits_{(p)} y_p^2 \le 1,\right)$ следует, что $\left|A(x,y)\right| \le M$.

Показывается, что сумма и произведение двух ограниченных матриц − также ограниченные матрицы. Интересна теорема о том, что если матрицы A полной системы преобразовать с помощью матрицы U, имеющей обратную, но не обязательно ограниченную, например, $U = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & .. \end{pmatrix}$ и $U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \frac{1}{2} & \\ 0 & & .. \end{pmatrix}$, то полученная система матриц изоморфна исходной системе. Эта система содержит вместе с матрицей и ее транспонированную.

Кох дополнил исследования Гильберта, показал эффективным способом существование ортогональной подстановки $x_i' = l_{i1}x_1 + l_{i2}x_2 + \ldots,$ преобразующей квадратичную форму $f(x) = \sum\limits_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}x_ix_k$ в сумму квадратов $f(x) = k_1x_1'^2 + k_2x_2'^2 + \ldots,$ если $\sum\limits_{i,k} a_{ik}^2$ сходится.

В работе 1910 г. [223] Ф.Рисс делает переход к классу L_p функций с интегрируемой по Лебегу p-ой степенью.

Хильб ставит вопрос об изучении спектральных вопросов для дифференциального уравнения второго порядка с комплекснозначными коэффициентами и параметром. Он рассматривает уравнение

$$L(v) = \frac{d^2v}{dx^2} + \left(\lambda^2 + l\right)v = 0$$

для конечного интервала $0 \le x \le 1$.

Хильб получает асимптотические формулы для собственных значений, собственных функций и функции Грина, что позволяет ему указать представление функции Грина в виде билинейного ряда по собственным функциям, а затем получить теорему разложения.

Быстрое развитие теории систем линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных, последовавшее за опубликованием работ Гильберта, обилие полученных новых результатов и применяемых методов требовало резюмирования и систематизации полученных результатов. Это было осуществлено Ф.Риссом в 1913 г. в виде монографии [221]. Книга Ф.Рисса содержит обширный и разнообразный материал, дающий довольно полное представление о состоянии теории к моменту выхода книги.

Ф.Рисс кратко показывает возникновение теории от метода неопределенных коэффициентов, возникшего в XVШ веке при интегрировании дифференциальных уравнений и представлении функций при помощи рядов. Фурье решил задачу в частном случае, применяя принцип приводимости, который позднее можно найти у Вейерштрасса. Ф.Рисс уделяет внимание работам Фюрстенау и Кеттеритцша, обнаруживая у них корни современных методов. Затем появление работ Хилла в 1877 г. и Аппеля в 1883 г., обратившее внимание Пуанкаре. В 1886 г. Пуанкаре положил начало теории определителей бесконечного порядка. Его исследования были продолжены Кохом, который получил почти все существенные результаты теории.

Вторая глава книги Ф.Рисса содержит изложение теории бесконечных определителей и их применение к системам уравнений. В следующей главе излагаются теории Шмидта, Хеллингера и Теплица и примыкающие к этим результаты Ландау. В четвертой главе изложена теория линейных подстановок для бесконечного числа переменных, то есть теория линейных операторов (преобразований) в гильбертовом пространстве. Здесь Ф.Рисс уже употребляет этот термин для множества систем чисел $\left(x_k\right)$ для который $\sum\left|x_k\right|^2$ сходится. Рассмотрены билинейные формы, транспонирования и обратные подстановки. Особое внимание уделено вполне непрерывным подстановкам, определяемым следующим образом: линейная подстановка A называется вполне непрерывной, если она последовательностям $\left\{x_k^n\right\}$ $\left(\text{n=1,2,...}\right)$, каким-либо способом стремящимся к определенному пределу $\left(x_k\right)$, ставит в соответствие последовательности $\left\{x_k'^n\right\}$, сильно сходящиеся к $\left\{x_k'\right\}$. Это определение несколько отлично от гильбертовского. Рассмотрены последовательности и ряды подстановок и изучается обратная подстановка $\left(E-\lambda A\right)^{-1}$ как функция λ. В пятой главе изложена теория квадратичных форм с бесконечным числом переменных. Ф.Рисс развивает теорию на основе соответствия функций одного переменного и функций оператора (символических функций по его терминологии). Для символической функции Ф.Рисс получает интегральное представление

$$f\left(A\right)=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\xi\right)dA_\xi,$$

где $A_\xi = f_\xi(A)$, а $f_\xi\left(\mu\right)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad \mu<\xi \\ 0, & \text{если} \quad \mu\geq\xi\end{cases}$.

В частности

$$\left(\lambda E-A\right)^{-1}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dA_\xi}{\lambda-\xi}.$$

Спектром формы A, согласно Гильберту, называется множество значений λ таких, что A_ξ не постоянна ни в каком интервале $\left(\lambda-h,\lambda+h\right)$. Для точек, не принадлежащих спектру, существует $\left(\lambda E-A\right)^{-1}$. Для вполне непрерывных форм получается представление в виде суммы квадратов

$$A\left(x,x\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j\left(\sum_{k=1}^{\infty}l_{jk}x_k\right)^2$$

Для форм с непрерывным спектром теория изложена по Хеллингеру. В последней главе указаны приложения теории к линейным дифференциальным уравнениям, интегральным уравнениям и тригонометрическим рядам.

Говоря о дифференциальных уравнениях Ф.Рисс отмечает, что возникновение метода бесконечных определителей связано было у Хилла с дифференциальными уравнениями второго порядка

$$\frac{d^2w}{dt^2}+\left(\theta_0+2\theta_1\cos t+2\theta_2\cos 2t+...\right)w=0$$

В книге Ф.Рисса рассматривается, следуя Коху, однородное уравнение порядка n

$$\frac{d^n u}{dz^n}+P_1(z)\frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}}+P_2(z)\frac{d^{n-2}u}{dz^{n-2}}+\ldots+P_n(z)u=0,$$

где коэффициенты допускают разложение в ряд Лорана

$$P_m(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_{mk}z^k\ ,$$

сходящийся в кольце $r<|z|<R$.

Решение ищется в виде

$$u(z)=z^{\rho}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k z^k .$$

Можно сказать, что у Ф.Рисса дано изложение спектральной теории линейных операторов в гильбертовом пространстве последовательностей. Теория изложена в конкретной форме на языке подстановок, бесконечных определителей и квадратичных форм.

Работа Ф.Рисса «О линейных функциональных уравнениях», опубликованная в 1918 г., имела значительное влияние на развитие функционального анализа. Здесь было использовано понятие компактности для изучения вполне непрерывных операторов. Вполне непрерывное преобразование было определено как переводящее ограниченную последовательность в компактную. Ф.Рисс изучал вполне непрерывные преобразования в пространстве непрерывных функций, отмечая, что для пространства функций с суммируемым квадратом и в гильбертовом счетно-мерном пространстве примененный им метод упрощается. Применение метода Ф.Рисса к интегральным уравнениям Фредгольма сводилось к доказательству вполне непрерывности интегрального оператора, входящего в уравнение

$$f(x)-\int_a^b K(x,y)f(y)dy=g(x)$$

для непрерывных ядер $K(x,y)$.

Данное Ф.Риссом изложение теории вполне непрерывных преобразований значительно упростило и обобщило построения Гильберта для функций от бесконечного числа переменных. Заметим, что термин гильбертова пространства Ф.Рисс не применял к пространству функций с суммируемым квадратом, а только к пространству последовательностей.

§ 6. Исследования Карлемана по теории неограниченных операторов.

Первоначально в работах Фредгольма были рассмотрены интегральные уравнения

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy=f(x)$$

с непрерывными и ограниченными ядрами. Но Фредгольм показал, что в некоторых случаях можно распространить развитую им теорию на неограниченные ядра, если их некоторая итерация $K^{(n)}(x,y)$ оказывается ограниченным ядром. Гильберт указал также некоторый класс неограниченных ядер вида $\frac{H(x,y)}{|x-y|^{\alpha}}$, где $0<\alpha\le\frac{1}{2}$, а $H(x,y)$ - ограниченное ядро.

Карлеман в работе [93] рассматривает измеримые ядра $K(x,y)$, для которых интеграл в смысле Лебега $\int\int K(x,y)^2\,dxdy$ сходится. При этом условии Карлеман показывает сходимость рядов для определителей Фредгольма. Теория Фредгольма сохраняется для указанного класса интегральных уравнений с неограниченным ядром.

Систематическое изложение теории сингулярных интегральных уравнений с вещественным симметричным ядром Карлеман дал в книге [92] в 1923 г. Отмечено, что большое число отдельных интегральных уравнений, к которым не приложима теория Фредгольма, было изучено детально, в частности, Пикаром, Гурса, Фредгольмом. Гильбертова теория позволила охватить сингулярные интегральные уравнения с вещественными симметричными и ограниченными ядрами в том смысле, чтобы выполнялись условия

$$\text{/A/} \quad \int_a^b K(x,y)\,dy \quad \text{существует и}$$

$$\text{/B/} \quad \int_a^b\int_a^b K(x,y)u(x)u(y)dxdy \le k^2\int_a^b u(x)^2\,dx.$$

Карлеман не использует условия /B/ и несколько изменяет условие /A/. Карлеман пользуется новыми для того времени результатами теории интегрирования и предельных свойств для последовательностей функций, такими, как интеграл Стильтьеса и Хеллингера, сходимость в среднем. Карлеман рассматривал вещественные симметричные ядра в конечном интервале, подчиненные некоторым условиям.

В дальнейших исследованиях Карлемана важную роль играет спектральная функция $\theta(x,y|\lambda)$, вводимая как предел функций $\theta_{\delta_r}(x,y|\lambda)$, определенных для ядер $K_{\delta_r}(x,y)$

$$\theta_\delta(x,y|\lambda)=\begin{cases} -\sum\limits_{\substack{\delta \\ \lambda\le\lambda_0<0}} \varphi_v^{(\delta)}(x)\varphi_v^{(\delta)}(y) & \text{для} \quad \lambda<0, \\ 0 & \text{для} \quad \lambda=0, \\ \sum\limits_{\substack{\delta \\ 0<\lambda_0<\lambda}} \varphi_v^{(\delta)}(x)\varphi_v^{(\delta)}(y) & \text{для} \quad \lambda>0, \end{cases},$$

где $\lambda_v^{(\delta)}$ и $\varphi_v^{(\delta)}(x)$ − собственные значения и собственные функции ядра $K_\delta(x,y)$. Спектральная функция имеет ограниченную вариацию относительно λ в каждом конечном интервале. С помощью спектральной функции получаются фундаментальные теоремы. Для функций $h(x)$ и $g(x)$ с интегрируемым квадратом и при условии, что $\int_a^b |g(x)K(x)|dx$ сходится, имеет место равенство

$$\int_a^b\int_a^b K(x,y)g(x)h(y)dxdy=\int_a^b \frac{d_\lambda\int_a^b\int_a^b \theta(x,y|\lambda)g(x)h(y)dxdy}{\lambda}$$

и обобщение теоремы разложения Гильберта - Шмидта в виде

$$\int_a^b K(x,y)h(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d_\lambda\int_a^b \theta(x,y|\lambda)h(y)dy}{\lambda}$$

В обоих случаях интегралы в правой части абсолютно сходятся. Для непрерывного ядра положительного типа, то есть $\int_a^b\int_a^b K(x,y)h(x)h(y)dxdy\ge 0$ для любой функции $h(x)$ с интегрируемым квадратом и обращающейся в нуль в окрестностях точек η, получается представление $K(x,y)=\int\limits_0^\infty \frac{d_\lambda \theta(x,y|\lambda)}{\lambda}$. Рассматривая неоднородное уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy=f(x)$$

с комплексным параметром, Карлеман доказал, что существует по крайней мере одно решение для любого невещественного λ, если функция $|f(x)|$ интегрируема с квадратом. Для однородного уравнения доказывается, что число ρ линейно независимых решений одно и то же для всех невещественных λ. Специально изучается случай ядра, когда $\rho=0$ (ядра класса I). В этом случае существует только одна спектральная функция, удовлетворяющая тем же условиям ортогональности, что и для ограниченных ядер в теории Гильберта.

Карлеман расширяет полученные результаты также на ядра, для которых

$$\int\limits_a^b\int\limits_a^b K_\delta(x,y)\,dxdy$$

существует для любого положительного значения δ.

Среди приложений развитой теории Карлеман указывает спектральную теорию обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2u}{dx^2}+g(x)u+\lambda u=0$$

на полуоси. В частности, если ядро $K(x,y)$ класса I, то имеет место случай предельной точки, а случай предельного круга соответствует принадлежности ядра классу II $(\lambda>0)$. Карлеман сводит сингулярную задачу для дифференциального уравнения к нтегральному уравнению. Аналогичным образом, по замечанию Карлемана, может быть рассмотрен и случай бесконечного интеграла.

Другие приложения относятся к теории уравнений в частных производных, теории квадратичных форм с бесконечным числом переменных и проблеме моментов.

ГЛАВА 6.
АБСТРАКТНЫЕ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Работы Неймана

Развитие теории абстрактных, то есть общих топологических пространств, возникновение общего функционального анализа, проникновение во все разделы математики аксиоматического метода, общее определение векторных или линейных и нормированных пространств - все это естественно вело к созданию абстрактной теории гильбертова пространства.

Первые аксиоматические изложения теории гильбертова пространства и теории линейных операторов в них были даны в конце 20-х годов XX столетия Нейманом и Стоуном. Работы этих авторов содержат основные сведения о гильбертовом пространстве, теории линейных операторов, ограниченных и неограниченных, спектральной теории в современной форме.

Позднее были даны многие другие доказательства основной спектральной теоремы теории линейных операторов в гильбертовом пространстве для самосопряженных и других классов операторов. В настоящее время существует ряд монографий по теории линейных операторов в гильбертовом пространстве, в частности, по спектральной теории. Отметим, монографии Ахиезера и Глазмана, Данфорда и Шварца, Морена и др.

Статья Неймана «Общая теория собственных значений эрмитовых функциональных операторов» [183], появившаяся в 1929 г. на страницах журнала «Mathematisqhe Annalen» впервые давала изложение аксиоматической теории гильбертова пространства и теории линейных операторов в нем.

В этой работе введены многие определения и термины, ставшие впоследствии повседневными. Однако автор отмечает, что содержание глав о структуре гильбертова пространства, линейных многообразиях, проекционных операторах, дополнения о функциональном гильбертовом пространстве не новые. Автор замечает, что работа представляет собой логически замкнутое целое изложение, не предполагающее предварительных знаний литературы по теории бесконечного числа переменны.

Введение дает общее представление о целях и содержании работы. Примеры функциональных пространств, евклидовых конечномерных, гильбертова пространства последовательностей («обычное гильбертово пространство», «собственно гильбертово пространство») и линейные операции или преобразования в них подводят к введению абстрактного гильбертова пространства. В подстрочных примечаниях Нейман называет предшественников, развивавших теорию в конкретных пространствах. Названы имена Гильберта, Куранта, Хеллингера, Ф. Рисса, Шмидта, Теплица, Карлемана, Вейля. Автор особо отмечает беседы со Шмидтом, отразившиеся на его изложении. Отмечено также влияние работы Шредингера.

Ядром метода Нейман называет преобразование Кэли, благодаря которому достигается большая четкость изложения, чем при прежних методах.

Абстрактное комплексное гильбертово пространство *H* определяется свойствами:

A) ***H*** – линейное пространство,

B) в ***H*** существует внутреннее произведение элементов (f,g) (*f*, *g* принадлежат *H*, (f,g) – комплексное число),

C) в метрике, определяемой этим внутренним произведением, т.е. $\rho(f,g)=\sqrt{|(f,g)|}$ H сепарабельно,

D) *H* содержит любое (конечное) число линейно независимых элементов,

E) *H* полное.

Формулировки аксиом сопровождаются пояснениями и дополнительными определениями нормы, ортогональности, метрики, полноты, предельной точки, доказательством основных неравенств. При введении линейного оператора не предполагается, что он определяется во всем пространстве. Сразу вводится понятие замкнутого оператора: для каждой последовательности $\{f_n\}$ из области определения оператора R из сходимости $f_n \to f$ и $Rf_n \to f^*$ следует, что Rf имеет смысл и $Rf = f^*$. Эрмитов оператор задается на всюду плотном линейном многообразии и
$(f, Rg) = (Rf, g)$.

Оператор U называется изометрическим, когда он линейный, замкнутый и $|f| = |uf|$, $(f, g) = (uf, ug)$. Изометрический оператор, определенный во всем пространстве в смысле обычной терминологии, называется унитарным.

Вводится определение максимального оператора, гипермаксимального, положительного, отрицательного, 0-оператора.

Вместо непрерывности линейные операторы характеризуются свойствами:

$\alpha)$ $|Rf| \le c|f|$ и $\beta)$ $|(f, Rg)| \le C|f||g|$,

а для эрмитова еще третье свойство

$\gamma)$ $|(f, Rf)| \le C|f|^2$.

Указывается связь этих определений с непрерывностью.

Далее изучаются линейные многообразия и проективные операторы. Здесь доказывается теорема о разложении элемента гильбертова пространства в ортогональную сумму $f = g + h$, где $g \in \mathsf{M}$ элемент замкнутого линейного многообразия, а h принадлежит его ортогональному дополнению $\mathsf{N} = \mathrm{H} - \mathsf{M}$.

По аналогии с понятием приводимости конечномерных матриц Нейман дает определение приводимости для замкнутых линейных операторов. Отмечено, что приводимость оператора означает перестановочность операторов R и P_{M}, т. е. $RP_{\mathsf{M}} f = P_{\mathsf{M}} Rf$. Операторы, приводимые только относительно пустого множества и всего пространства H называются неприводимыми.
После этих предварительных сведений о гильбертовом пространстве и линейных операторов в нем Нейман переходит к основным вопросам. Как было отмечено, основой изложения Нейман делает преобразование Кэли замкнутого линейного оператора R с плотной в H областью определения N (но не замкнутой, так как было бы $\mathsf{N} = \mathrm{H}$). Рассматриваются операторы $R \pm iI$ с множествами значений $G = (R + iI)\mathsf{N}$ и $F = (R - iI)\mathsf{N}$. Доказывается, что эти отображения взаимнооднозначные и существует изометрическое отображение U пространства G на пространство F, причем $U = \dfrac{R + iI}{R - iI}$.

Операторы R и U называются преобразованиями Кэли друг в друга. В следующих теоремах устанавливаются необходимые и достаточные условия того, чтобы изометрический оператор U был преобразованием Кэли замкнутого линейного оператора R и, наоборот, чтобы изометрический оператор U определял замкнутый линейный оператор R, а также связь между их расширениями. Для построения теории расширения Нейман изучает множества всех элементов расширения замкнутого линейного оператора R, введенного ранее. Здесь он доказывает, что множество всех элементов расширения оператора R есть прямая сумма множеств

$$\mathrm{N} + (H - G) + (H - F).$$

Каждый элемент расширения оператора представляется в виде суммы $f_0 + f^+ + f^-$.

Ранее Нейман установил, что H есть множество всех элементов $\varphi - U\varphi$, где $\varphi \in G$ и для всех $\varphi \in G$ выполнено равенство $R\left(\varphi - U_{\varphi}\right) = i\left(\varphi + U_{\rho}\right)$.

Размерности многообразий $H-G$ и $H-F$, m и n соответственно, Нейман называет индексами дефекта оператора R. С помощью индексов дефекта удобно характеризовать максимальные операторы, если один из индексов дефекта равен нулю, и гипермаксимальные операторы, если оба индекса дефекта равны нулю.

Индексы дефекта могут быть конечными или бесконечными. Возможность расширения операторов характеризуется с помощью индексов дефекта в виде теоремы о том, что замкнутый линейный эрмитов оператор с индексами дефекта (m,n) может быть расширен до оператора с индексами дефекта (m',n') тогда и только тогда, если существует число $p = 0,1,2,\ldots,\infty$ такое, что $m' + p = m$ и $n' + p = n$.

Доказывается, что замкнутый линейный эрмитов оператор может быть расширен до максимального. Если $m \neq n$, то среди его расширений нет гипермаксимального, а в случае $m = n$ и конечных, всякое максимальное расширение будет гипермаксимальным. Если же $m = n = \infty$, то возможны как максимальные, так и гипермаксимальные расширения.

Особое внимание уделяется изучению гипермаксимальных операторов. В этом случае их преобразование Кэли U будет унитарным. Для унитарного оператора, как ограниченного, может быть дано спектральное представление.

В приложении II Нейман приводит доказательство видоизмененным методом Ф. Рисса спектральной теоремы для унитарного оператора

$$(Uf,g) = \int_0^1 e^{2\pi i\rho} d\left(E(\rho)f,g\right).$$

От разложения единицы $E(\rho)$ для унитарного оператора, заданного на (0,1) к разложению единицы $F(\lambda)$, заданного на вещественной оси $(-\infty,\infty)$, переход производится заменой

$$E(\rho) \to F(\lambda) = E\left(-\frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}\lambda\right);\ F(\lambda) \to E(\rho) = F(-\operatorname{ctg}\pi\rho).$$

Доказана теорема: Пусть $F(\lambda)$ − разложение единицы на интервале $(-\infty,\infty)$. Если интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\left|E(\lambda)f\right|^2$$

конечен, то существует один и только один элемент g такой, что для всех f^* имеет место равенство

$$\left(f^*,g\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\left(E(\lambda)f,g\right),$$

причем интеграл сходится абсолютно.

Определим оператор R для элементов f: $Rf = f^*$. Этот оператор R есть гипермаксимальный. Всякий гипермаксимальный оператор может быть построен с помощью разложения единицы. Последние разделы статьи Неймана содержат замечания о максимальном, полуограниченном и неограниченном операторах. В дополнениях к основному содержанию работы даны сведения о функциональном гильбертовом пространстве, изоморфном «обыкновенному гильбертову пространству». В другом дополнении, как уже отмечено, доказана спектральная теорема для унитарных операторов. В отдельном приложении изложены результаты в обычной терминологии матриц.

§ 2. Теория неограниченных линейных операторов Ф. Рисса.

Для построения теории неограниченных операторов в гильбертовом пространстве Ф. Рисс в 1930 г. [222] развивает идеи, ранее успешно примененные Хеллингером и Ф. Риссом в теории квадратичных форм и систем линейных уравнений с бесконечным числом переменных, то есть фактически для ограниченных линейных операторов.

В рассматриваемой статье развивается теория неограниченных самосопряженных линейных операторов в абстрактном комплексном гильбертовом пространстве (сепарабельном). Сначала рассмотрены ограниченные линейные операторы. Для самосопряженного ограниченного оператора доказана теорема разложения на положительно и отрицательно дефинитные слагаемые. Ф. Рисс считает эту теорему ядром теории Гильберта о спектральном разложении.

Ф.Рисс устанавливает соответствие между полиномами $P(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_n t^n$ и операторами $P(A) = c_0 E + c_1 A + \ldots + c_n A^n$, где A – самосопряженный и ограниченный оператор, E – единичный оператор. Доказывается, что если $P(t) > 0$ на сегменте $[m, M]$, то оператор $P(A)$ положительно дефинитный.

Доказывается, что при сходимости монотонно возрастающей и ограниченной на сегменте $[m, M]$ последовательности полиномов $P_1(t)$, $P_2(t)$,… к ограниченной функции $F(t)$, последовательность $P_n(A)$ также сходится к $F(A)$ в смысле $\|P_n(A) - F(A)\| \to 0$.

Основная теорема Ф.Рисса гласит: Для каждого самосопряженного ограниченного оператора A существует разложение единичного оператора на два проективных $E = E_+ + E_-$ такое, что

1) эти операторы перестановочны с A и с любым перестановочным с A оператором;

2) операторы AE_- и AE_+ соответственно, дефинитны, а их сумма равна A;

3) для всех f, для которых $Af = 0$ имеем $E_- f = 0$, $E_+ f = 0$.

Изучение общих самосопряженных операторов, то есть неограниченных и определенных на всюду плотном в H линейном многообразии l, основывается на свойстве, что для каждого самосопряженного линейного оператора A оператор $A - iE$ обладает ограниченным обратным B. Для дальнейшего устанавливается необходимое и достаточное условие перестановочности ограниченного линейного оператора C с оператором A с помощью оператора B виде $CB = BC$. Перестановочность сохраняется и при предельном переходе $C_n \to C$. Для ограниченного перестановочного с A оператора C доказывается самосопряженность AC при условии его ограниченности. На основании отмеченных теорем оператор $D = B + B^* = 2B^*AB$ является ограниченным, самосопряженным и перестановочным с A, B и B^*. Спектральное разложение D определяет и для A аналогичное разложение. Таким образом, теорема о разложении остается справедливой и для общих самосопряженных операторов.

Спектральное семейство E_λ для любого, ограниченного или неограниченного, самосопряженного оператора A вводится через оператор $A - \lambda E$, также самосопряженный. Соответствующий ему отрицательно дефинитный оператор E_- принимается за E_λ, а соответствующий положительно дефинитный $E_+ = E - E_\lambda$. Это семейство проективных операторов обладает свойствами:

1) перестановочность;

2) $E_{\lambda_1} E_{\lambda_2} = E_{\lambda_1}$ при $\lambda_1 < \lambda_2$;

3) $E_\lambda \to 0, E \to I$ при $\lambda \to -\infty, +\infty$;

4) $E_\lambda \to E_\mu$ при $\lambda < \mu, \lambda \to \mu$.

Ф. Рисс называет его спектральным семейством, Нейман − разложением единичного оператора, Стоун – каноническим разложением тождества. Далее доказывается, что для того чтобы Af имело смысл необходимо и достаточно, чтобы существовал

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 \, d\left(E_\lambda f, f\right),$$

а тогда

$$Af = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda f \qquad (*)$$

и

$$\left(Af, g\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E_\lambda f, g).$$

Отмечается и обратная теорема, что каждому спектральному семейству соответствует некоторый самосопряженный оператор, определяемый равенством (*). Аналогичным образом определяется операторная функция

$$F(A)f = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) dE_\lambda f,$$

в частности, если $F(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda - l}$, то $F(A)f = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda E_\lambda f}{\lambda - l}$, и доказывается, что этот оператор является обратным для $A - lE$, где l − несобственное число. Это свойство сохраняется и для тех действительных значений λ, в окрестности которых E_λ постоянны.

В 1934 г. Ф. Рисс в работе «О функциях от эрмитовых операторов в гильбертовом пространстве» [224], развивая свой метод, дает новое доказательство установленного Нейманом необходимого и достаточного условия для совокупности всех операторов, являющихся функциями от эрмитова оператора A. Здесь рассматриваются функции $F(t)$, ограниченные и интегрируемые в смысле Стилтьеса-Лебега по отношению ко всем функциям $(E_t f, f)$.

§ 3. Монография М. Стоуна.

Книга американского математика М.Стоуна, изданная в 1932 году, была первой монографией по теории линейных операторов в гильбертовом пространстве и в течение многих лет оставалась единственной. Изложения теории гильбертова пространства Неймана, Ф. Рисса, Плеснера были опубликованы в виде журнальных статей. Изложение спектральной теории было в книге Неймана «Математические основы квантовой механики». Позднее появились и другие изложения. М.Стоун в 1926 г. изучал оператор

$$-\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + g(t)$$

с суммируемой функцией $g(t)$. В работах того же периода он рассматривал вопросы сходимости разложения. Книга М.Стоуна состоит из девяти глав. В первой главе излагается теория абстрактного гильбертова пространства и ее реализации в виде пространств l_2, L_2, $L_{2,m}$ – пространства вектор-функций.

Аксиомы гильбертова пространства включают, кроме аксиом линейного пространства, скалярного произведения и полноты, аксиомы бесконечномерности и сепарабельности.

Далее излагается геометрия гильбертова пространства. В следующих двух главах изложена теория линейных операторов, понятие симметрического оператора, ограниченных линейных операторов и проекторов. В качестве примеров рассмотрены матричное представление операторов, интегральные операторы и дифференциальные операторы − обыкновенные и в частных производных. Глава IV отведена теории резольвент, спектра, приводимости. Точечным спектром $A(T)$ называется множество точек l комплексной плоскости, для которых оператор $T_l = (T - lI)^{-1}$ не существует. Точки l для которых T_l существует, но неограничен, образует непрерывный спектр $B(T)$. Остаточный спектр $C(T)$ образуют точки, для которых T_l существует, но определен не на всюду плотном множестве. Объединение трех видов спектров образует спектр $S(T)$оператора T:
$S(T) = A(T) + B(T) + C(T)$.

Резольвента самосопряженного оператора H определяется как семейство ограниченных линейных операторов X_l (определенных в H для любых невещественных l) и удовлетворяющих необходимым и достаточным условиям:

1) $(l - m)X_l X_m = X_l - X_m$
2) $X_l f = 0$ влечет $f = 0$ по крайней мере для одного невещественного λ,
3) $X_l^* = X_{\bar{l}}$.

Если H существует, то он единственен.

В главе V изучаются самосопряженные операторы методом, идущим от Стилтьеса, Карлемана и от уинтнеровской теории бесконечных матриц. Здесь вводится семейство проекционных операторов $E(\lambda)$, называемое разложением единицы (или разложением тождества).

Аналитическое представление самосопряженного оператора дано в виде

$$(Hf, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\left(E_\lambda f, g\right) \text{ и } \|Hf\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\|E_\lambda f\|^2 .$$

Для резольвенты получается

$$\left(R_l E(\lambda) E(\Delta) f, g\right) = \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\mu - l} d\left(E(\mu) E(\Delta) f, g\right).$$

Рассмотрены связи между спектром и разложением тождества, то есть дана характеристика спектра с помощью спектральной функции. Построение операторного исчисления, то есть теории функций от операторов, сделано на основе определения оператора $T(F)$ с помощью уравнения

$$\left(T(F) f, g\right) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) d\left(E(\lambda) f, g\right).$$

Главы VII и VIII содержат абстрактную теорию самосопряженных операторов, включая понятия унитарной эквивалентности операторов и простоты спектра и приводимости. В главе IX изложена теория расширения симметричных операторов по Нейману. Глава X посвящена приложениям теории линейных операторов к изучению интегральных операторов, обыкновенных дифференциальных операторов первого и второго порядков и матриц Якоби. Дифференциальные операторы первого порядка изучаются вида

$$p \frac{1}{i} \frac{d}{dx} + \left(-\frac{p'}{2i} + q\right),$$

где $p(x)$ положительная абсолютно непрерывная функция на открытом интервале $a < x < b$, $q(x)$ – функция, интегрируемая по Лебегу на любом замкнутом интервале, внутреннем для

(a, b). Рассматриваются симметричные дифференциальные операторы второго порядка

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right)+r(x), \quad a<x<b,$$

где $p(x)$, $r(x)$ − вещественные измеримые по Лебегу функции такие, что функции $\frac{1}{p(x)}$ и $r(x)$ интегрируемы по Лебегу на всяком замкнутом интервале, входящем в (a, b).

1)Для дифференциального оператора второго порядка проведено подробное исследование дифференциального выражения, условий самосопряженности, области определения оператора и т.п., результаты сформулированы в виде теоремы: Пусть $p(x)$ и $r(x)$ вещественные измеримые по Лебегу функции, определенные на конечном или бесконечном интервале (a, b), где $\frac{1}{p(x)}$ и $r(x)$ интегрируемые по Лебегу на всяком конечном замкнутом интервале (a', b'), внутреннем к (a, b). Предположим, что $p(x)$ абсолютно непрерывна на открытом интервале (a, b) и пусть D^* – множество всех функций, которые абсолютно непрерывны, принадлежат $L_2(a,b)$ и для которых $-(pf')'+rf$ также принадлежат $L_2(a,b)$. Пусть T − линейное преобразование с областью определения D^*, переводящее f в $-(pf')'+rf$. Тогда $B_a(f,g)$, $B_b(f,g)$ и $B(f,g) = (Tf,g) - (f,Tg)$ − комплекснозначные билинейные функции от f и g, определенные для всех f и g из D^*. Пусть D есть множество всех функций f из D^* таких, что $B(f, g) = 0$ для любой функции g из D^* и пусть H – линейное преобразование с областью D, переводящее f в $-(pf')'+rf$. Тогда H – замкнутое линейное симметрическое преобразование с сопряженным $H^* = T$ и его индексы дефекта (m, m), где $m = 0,1,2$. Оба преобразования H и T вещественны относительно соотношения J_2, переводящего $f(x)$ в $\overline{f}(x)$.

В следующих теоремах даны необходимые и достаточные условия того, чтобы дифференциальный оператор имел определенный индекс дефекта. Затем рассмотрена теория расширения операторов изучаемого вида до самосопряженных. Приводится построение таких расширений с достаточно подробным анализом краевых условий. Для случая оператора с индексом дефекта (2,2) доказано, что резольвента самосопряженного расширения есть интегральный оператор типа Гильберта-Шмидта, спектр которого состоит из счетного множества изолированных характеристических значений кратности не выше 2, непрерывный спектр пуст. Для самосопряженных расширений оператора H строится разложение тождества $E(\lambda)$.

В своих построениях М.Стоун ссылается на работы Вейля. Для ознакомления с другими частными результатами М.Стоун отсылает к работам Хильба, Планшереля, Вейля, Грея, Милна, Стоуна. Приведенные в книге М.Стоуна сведения о дифференциальных операторах второго порядка носят весьма общий характер, построения сравнительно сложные.

§ 4. Изложение спектральной теории линейных операторов Плеснера

Для изложения спектральной теории линейных операторов Плеснер [197] избирает путь наиболее близкий к методам Пуанкаре и Хеллингера, которые использовали методы теории функций комплексного переменного. Пуанкаре развил частный случай спектральной теории для задачи о колебании мембраны, а Хеллингер при построении теории квадратичных форм с бесконечным числом переменных.

Плеснер приводит изложение теории интеграла Стилтьеса для функций интервалов и вводит понятие нормальной функции как положительной аддитивной функции, если её скачок в каждой точке равен её значению в этой точке.

Плеснер развивает спектральную теорию в абстрактном унитарном или комплексном гильбертовом пространстве без предположения о сепарабельности.

Плеснер приводит краткую историческую справку. Отмечая разнообразие терминологии, он приводит сравнительную таблицу

Плеснер	Нейман	Рисс	Стоун
Эрмитов оператор	Гипермаксимальный	Самосопряженный	Самосопряженный
Самосопряженный	Эрмитов	Эрмитов	Симметрический

Эту таблицу следует иметь в виду при чтении настоящей работы, в которой сохраняется терминология авторов.

В первых разделах статьи дано аксиоматическое определение унитарного пространства, приведены примеры, отмечена возможность пополнения пространства, рассмотрена геометрия унитарного пространства: понятия линейного многообразия, ортогональности, разложение элемента f по подпространству H' и его ортогональному дополнению H': $f = f' + f''$, ортогональной суммы подпространств. Затем рассмотрены линейные функционалы, их представление в виде скалярного произведения $l(f) = (f, g)$, понятие слабой сходимости и слабой компактности. Для ограниченных линейных операторов дано понятие пространства операторов и его полнота, связь операторов с билинейным функционалом. После введения сопряженного оператора A^* понятие самосопряженности или эрмитовости характеризуется вещественностью квадратичной формы (Af, f). Рассмотрены обратный оператор, различные виды сходимости операторов (равномерная, сильная и слабая) и матричное представление операторов.

При изложении теории унитарных операторов отмечено, что они образуют группу и приведено определение унитарной эквивалентности операторов A и A' при помощи равенства

$$A = U^{-1}A'U,$$

где U - унитарный оператор.

Для вполне непрерывного оператора приведены три эквивалентных определения Гильберта и Ф. Рисса. Семейство проекционных операторов изучается в связи с понятием инвариантных подпространств. Собственно спектральная теория начинается с введения понятий регулярной точки, резольвенты, собственного значения и спектра. Регулярные точки λ такие, для которых существует обратный оператор $(A - \lambda E)^{-1} = R_\lambda$ – резольвента оператора A. Спектр определяется как множество точек комплексной плоскости, не являющихся регулярными. Показано, что все невещественные значения λ для эрмитова оператора A регулярны, а вещественное $\lambda = \sigma$ регулярно в том и только в том случае, если для него при некотором $k > 0$ имеет место неравенство $\|Af - \sigma\| \ge k\|f\|$.

Спектральной функцией (или разложением единицы) называется всякая операторная функция $E(\Delta)$ интервала, обладающая свойствами:

a) $E(\Delta)$ есть эрмитов оператор,

b) $E(\Delta)$ есть нормальная функция интервала (то есть для любого $f \in H$ числовая функция $(E_\Delta f, f)$ нормальна),

c) $E(\Delta_1)E(\Delta_2) = E(\Delta_1\Delta_2)$ – ортогональность,

d) если $\Delta_\infty = (-\infty, \infty)$, то для всякого $f \in H$ $\lim\limits_{\Delta \to \Delta_\infty}(E_\Delta f, f) = (E_{\Delta_\infty} f, f) = (f, f)$ (полнота).

Обобщенный оператор определяется на всюду плотном множестве $\bar{\Omega} \subset H$, на которое оператор R_λ отображает H. Далее проводится подробное аналитическое изучение резольвенты, доказывается ее аналитичность, то есть, что в окрестности любого невещественного значения λ_0 она разлагается в равномерно сходящийся ряд Тейлора

$$R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} R_\lambda^{n+1} \left(\lambda - \lambda_0\right)^n,$$

изучается ее поведение на границе полуплоскости и получается интегральное представление резольвенты

$$\left(Rf, g\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E\left(\Delta_\xi h, g\right)}{\xi - \lambda},$$

где $E(\Delta)$ положительный эрмитов оператор.

Дальнейшее изучение этого оператора показывает, что это спектральная функция резольвенты R_λ или оператора A. Цепочка определений и доказательств, приводящая к $E(\Delta)$ идет следующим образом.

Сначала вводится оператор

$$P(\delta, \tau) = \frac{\operatorname{sign} \tau}{\pi} \frac{R_\lambda - R_{\bar{\lambda}}}{2i} \quad (\tau \neq 0, \lambda = \sigma + i\tau),$$

для которого при любых h, $g \in H$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(P(\sigma, \tau) h, g\right) d\sigma = (h, g).$$

Оператор $E(\Delta, \tau)$, определенный формулой

$$\left(E(\Delta, \tau) h, g\right) = \int_{\Delta} \left(P(\delta, \tau) h, g\right) d\delta,$$

положителен и по норме не превосходит 1. При $\tau \to 0$ функции $\left(E(\Delta, \tau) h, g\right)$ сходятся к функции $\rho(\Delta; h, g) = \left(E(\Delta) h, g\right)$.

Далее проводится спектральный анализ ограниченного эрмитова оператора. Получено интегральное представление оператора

$$(Ah, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi \left(E\left(\Delta_\xi\right) h, g\right)$$

и его степеней

$$(A^n h, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^n \left(E\left(\Delta_\xi\right) h, g\right).$$

Принадлежность точки σ спектру определяется неравенством $E(\Delta) \neq 0$ для любого интервала Δ, содержащего точку σ внутри. Установлено соответствие между функциями $F(\xi)$ и операторами $F(A)$. Изучен спектр ограниченного оператора и дана спектральная характеристика вполне непрерывных операторов.

Для неограниченных операторов сначала рассмотрены общие определения и термины: линейность, область определения, расширения, сопряженный и максимальный сопряженный операторы, замыкание самосопряженного оператора, инвариантные подпространства, эрмитов оператор ($A = A^*$), резольвенты эрмитова оператора.

Спектральный анализ неограниченного эрмитова оператора содержит интегральное представление оператора

$$(Af,g)=\int_{-\infty}^{\infty}\xi\left(E\left(\Delta_{\xi}\right)f,g\right),$$

задание области определения Ω_A в виде условия

$$\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2\left(E\left(\Delta_{\xi}\right)f,f\right)<\infty$$

и определение оператора A спектральной функцией $E(\Delta)$.Спектр эрмитова оператора определяется аналогично определению для ограниченного эрмитова оператора как дополнение к множеству регулярных точек, то есть точек, для которых существует ограниченный обратный оператор $R_{\lambda}=(A-\lambda E)^{-1}$. Спектр эрмитова оператора есть замкнутое множество, лежащее на вещественной оси. В случае ограниченности спектра эрмитов оператор ограничен и обратно. Собственное значение σ характеризуется как $E_{\sigma}\neq 0$. Различаются точки: 1) точечного спектра, если $E_{\sigma}\neq 0$, то есть σ – собственное значение, 2) точки предельного спектра, как предельные для точечного спектра, 3) точки непрерывного спектра, если для любого интервала Δ, содержащего σ, непрерывная часть спектральной функции $E''(\Delta)\neq 0$. Теория расширения самосопряженных операторов представлена структурой области определения сопряженного оператора A^* в виде прямой суммы

$$\Omega_{A^*}=\Omega_A+T_{\lambda}+T_{\bar{\lambda}},$$

где T_{λ}. собственное подпространство оператора A^* при невещественном λ. Условие принадлежности элемента g области определения какого-либо самосопряженного расширения оператора A записано в виде

$$Jm\left(A^*g,g\right)=0\,.$$

Другим образом элементы Ω_{A^*} характеризуются равенством

$$\|g_{\lambda}\|=\|g_{\bar{\lambda}}\| \quad \left(g=g_A+g_{\lambda}+g_{\bar{\lambda}}\right)$$

и самосопряженные расширения B оператора A могут быть заданы формулой

$$Bg=Af+\lambda_{g\lambda}+\bar{\lambda}Ug_{\lambda}\,.$$

Выделен класс операторов в существенном эрмитовых и рассмотрены максимальные операторы. Раздел о спектральном анализе неограниченных операторов завершается введением индексов дефекта оператора A, как размерностей пространств T_{λ} и $T_{\bar{\lambda}}$, и теоремой, что оператор $A^*-\lambda E$ отображает Ω_{A^*} на все пространство H.

В качестве примеров неограниченных операторов рассмотрены оператор умножения на независимое переменное и оператор дифференцирования. В первом случае показано, что оператор $Af(t)=t\,f(t)$ в пространстве $L^2\left(\Delta_{\infty}\right)$определен на линейном многообразии функций $f(t)$, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty}t^2\left|f(t)\right|^2dt<\infty$$

и эрмитов с чисто непрерывным спектром, заполняющим всю вещественную ось. Для оператора дифференцирования $D=i\dfrac{d}{dt}$ рассмотрены три случая:

1) $\Delta=(0,1)$;
2) $\Delta=(0,+\infty)$;

3) $\Delta = (-\infty,+\infty)$.

Показано, что во всех случаях оператор самосопряжен в своей области определения: в первом случае его индексы дефекта (1,1) все собственные расширения эрмитовы и определяются формулой

$$D_{\vartheta}g = Df + \alpha i e^{i\vartheta} e^{t} - \alpha i e^{1-t}$$

(взято $\lambda = i$); во втором случае оператор максимальный и его индексы дефекта (0,1); в третьем случае оператор D имеет индексы дефекта (1,1), и является эрмитовым. Его спектральное представление приводит к преобразованию Фурье

$$Uh(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) e^{it\xi} d\xi$$

$$U^{*}g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-it\xi} d\xi$$

и теореме Планшереля о том, что операторы U и U^{*} являются унитарными и взаимно обратными в пространстве $L^{2}\left(\Delta_{\infty}\right)$. Кратким замечанием о нецелесообразности изучения неограниченных операторов в гильбертовом пространстве последовательностей с помощью матриц и приложением, содержащим сведения об интеграле Стилтьеса, нормальных функциях интервала, теоремах Хелли и формуле обращения Стилтьеса, заканчивается первая часть работы Плеснера.

Работы Плеснера во многом способствовали развитию исследований по спектральной теории линейных операторов. Во второй части статьи Плеснера и Рохлина [196, II] проводится построение теории функций эрмитова оператора, в связи с чем предварительно развивается теория операторной спектральной меры и интеграла относительно спектральной меры. На основе функционального соответствия изложена теория функций эрмитова оператора для достаточно широкого класса вещественных функций $F(\xi)$. Специально изучены операторы, перестановочные с эрмитовым и функции перестановочных эрмитовых операторов. Выразив унитарный оператор через эрмитов формулой

$$U = e^{iA},$$

получим интегральное представление. Теория общих замкнутых операторов дана по Нейману. Затем излагается спектральный анализ нормальных операторов, теория спектральных типов по Хеллингеру, циклических операторов и операторов с простым спектром, а также элементы теории унитарной инвариантности эрмитовых операторов. В заключительных разделах рассмотрены обобщенные функции эрмитова оператора. Особенностью изложения Плеснера является широкое использование аналитического аппарата и стремление к исчерпывающей полноте содержания. Основные задачи спектральной теории сформулированы в виде следующих задач для любого унитарного пространства H.

1. Найти для каждого эрмитова оператора A такую спектральную функцию $E(\Delta)$, чтобы

$$(Af, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\left(E(\Delta)f, f\right).$$

2. Установить для достаточно широкого класса функций $F(\xi)$ соответствие $F\left(\xi\right) \sim F\left(A\right)$, обладающее рядом свойств.

3. Дать представление резольвенты R_{λ}. оператора A в виде

$$\left(R_\lambda f, f\right)=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(E\left(\Delta_\xi\right) f, f\right)}{\xi-\lambda}.$$

4. Изучить поведение оператора A на его инвариантных подпространствах.

После этих предварительных замечаний начинается изучение свойств резольвенты. Для резольвенты R_λ эрмитова оператора A доказываются свойства:

1) $R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda$ – функциональное уравнение Гильберта;

2) $R_\lambda^* = R_{\bar{\lambda}}$.

3) Если для некоторого λ $R_\lambda f = 0$, то $f = 0$.

Семейство операторов R_λ, определенное перечисленными свойствами, называется обобщенной резольвентой. Если R_λ порождено оператором A, то его легко восстановить

$$R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1}, \quad A = \lambda E + R_\lambda^{-1}.$$

Если же оператор заранее не был задан, то по указанной формуле он может быть введен и назван обобщенным самосопряженным оператором.

Изданная в 1965 г. книга Плеснера «Спектральная теория линейных операторов» [197] дает одно из наиболее полных изложений спектральной теории и существенно отличается от ранее опубликованных его статей. Книга не была закончена автором, включенные в книгу две последние главы написаны по его наброскам и высказываниям. Задуманную XI главу предполагалось посвятить приложениям спектральной теории, в частности, к дифференциальным операторам в квантовой механике.

По сравнению со статьями книга написана в более абстрактной форме. Унитарные пространства представлены в ней как частный случай более общих образований.
Первая глава книги содержит теорию векторных систем и упорядоченных множеств, включая понятия алгебры с инволюцией, упорядоченных векторных систем и сходимости в полных векторных порядках. Во второй главе развивается теория меры и интеграла со значениями в полном векторном пространстве. На этой общей основе строится теория различных пространств (нормированных, банаховых, унитарных) и их ортогональных сумм. В этих же пространствах рассматриваются непрерывные преобразования, линейные и билинейные функционалы. Достаточно подробно излагается теория ограниченных операторов, определенных во всем пространстве. Приведены некоторые необходимые для дальнейшего свойства нормированных алгебр операторов, рассмотрена теория эрмитовых операторов, теория вполне непрерывных и дано матричное представление линейных операторов

Раздел о неограниченных операторах включает теорию замкнутых, обратных, сопряженных, самосопряженных и нормальных операторов. В качестве примеров рассмотрены оператор умножения на функцию и оператор дифференцирования. В этом же разделе продолжено изучение перестановочности операторов и введено понятие инвариантных подпространств.

Спектральная теория операторов излагается в VII-IX главах. Спектральные характеристики линейных операторов содержат понятия точечного и дефектного спектров, регулярной точки и резольвенты. Для резольвенты $R(\lambda)=(A-\lambda E)^{-1}$ получено функциональное уравнение и разложение в ряд $R(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} A^{-n}$.

Рассмотрено дробно-линейное преобразование операторов. Затем проводится изучение различных классов операторов: самосопряженных, нормальных, эрмитовых, изометрических, унитарных и вполне непрерывных. Подробно изучается спектральное соответствие функций $F(\xi)$ и операторов $\Phi(F)=\sum F(\tau) P_\tau$, где P_τ – проектор подпространства H_τ. Для спектрального соответствия строится понятие спектральной меры $E\left(M_z\right)$.Через понятие разложимых операторов $A=\int_T E\left(M_z\right)$, причем A нормален, формулируются спектральные теоремы для самосопряженного и унитарного операторов.

В качестве примера рассмотрен оператор дифференцирования на отрезке и на всей числовой прямой. Далее рассмотрено спектральное разложение нормального оператора. Заключительные главы содержат теорию унитарных инвариантов нормальных операторов. Появление книги Плеснера в 1965 г., когда получили распространение книги Ахиезера и Глазмана, Морена, и другие, несколько снизили ее влияние на последующие исследования по спектральной теории линейных операторов.

§ 5. Другие изложения спектральной теории линейных операторов.

Для популяризации и распространения идей и методов спектральной теории линейных операторов в гильбертовом пространстве положительное значение имела книга Ахиезера и Глазмана “Теория линейных операторов и гильбертовом пространстве” вышедшая в 1950 г. (второе издание, 1966 г. [7]). В книге дано систематическое изложение теории с учетом состояния исследований к моменту выхода книги. Второе издание было дополнено некоторыми новыми результатами исследований, появившихся после первого издания книги. Значение появления этой книги станет понятно, если вспомнить, что кроме книги М.Стоуна, изданной в США в 1932 г., все другие материалы по спектральной теории были опубликованы либо в специальных журналах, либо в общих курсах функционального анализа или даже в изданиях еще более широкого профиля (например, «Курс высшей математики», том V, Смирнова 240/). При определении гильбертова пространства требование сепарабельности опущено. Основная спектральная теорема о разложении самосопряженного оператора доказана двумя способами: от интегрального представления резольвенты и с помощью преобразования Кэли через спектральное разложение унитарного оператора.

Теория расширения симметрических операторов изложена в значительно более широком объеме, чем у Неймана, М. Стоуна и Плеснера, с включением результатов более поздних исследований, включая теорию обобщенных расширений с выходом из данного пространства, разработанную М.Г.Крейном и Наймарком. В качестве дополнения в книге был включен раздел о дифференциальных операторах (во второе издание включено добавление и об интегральных операторах). Материалы этого раздела впервые были включены в руководство по теории операторов. Как уже было отмечено, сведения о дифференциальных операторах второго порядка были в монографии М.Стоуна. В других случаях в качестве примеров встречались только оператор умножения и дифференцирования первого порядка. Раздел содержит краткое изложение теории регулярных дифференциальных операторов любого порядка, включая теорию самосопряженных расширений.

Изложение теории сингулярных дифференциальных операторов было дано по работам Глазмана [62, 63], опубликованных почти одновременно с первым изданием книги. Результаты этих работ Глазмана освещены в главе о сингулярных дифференциальных операторах. Далее изложен метод направляющих функционалов М.Г.Крейна для операторов второго порядка и указано его обобщение на операторы любого порядка. В этом же разделе указан метод расщепления для исследования характера спектра дифференциальных операторов и показано его применение. В частности, включена теорема о длине лакун в непрерывной части спектра. В заключение приведены примеры дифференциальных операторов второго порядка с характеристикой их спектральных свойств. Только через несколько лет появилось более полное изложение теории линейных дифференциальных операторов в книге Наймарка. В 1963 г. вышла книга американских математиков Данфорда и Шварца по спектральной теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, представляющая второй том трехтомного сочинения этих авторов «Линейные операторы» [73]. Русский перевод этих книг появился в 1962, 1966, 1974 гг.

Книга Данфорда и Шварца дает достаточно полное представление о состоянии указанных теорий к моменту издания книги. Материалы, разбросанные по различным книгам и опубликованные в различных специальных журналах, были собраны в одном издании и изложены в систематическом виде. Обширная библиография, исторические примечания и различные дополнения во всех главах увеличивали информационно-справочную ценность обширного труда. Во втором томе наибольшая глава (гл. XIII) посвящена обыкновенным дифференциальным операторам. Второй том содержит краткое изложение теории банаховых алгебр с основными результатами Гельфанда, Наймарка, Риккарта и др. Глава об ограниченных нормальных операторах содержит спектральную теорему для этого класса операторов, доказанную на основе теории спектральной меры, некоторые теоремы о спектре, рассмотрены унитарные, самосопряженные и положительные операторы как частные случаи нормальных, дано спектральное представление нормальных операторов и замечания по теории возмущений для них.

В качестве применений спектральной теории рассмотрены некоторые вопросы теории бикомпактных групп, теории почти периодических функций Бора и алгебры со сверткой, теоремы замкнутости и тауберовы теоремы, операторы Гильберта-Шмидта, сингулярные интегральные операторы, классы вполне непрерывных операторов. В отдельной главе изложена теория неограниченных операторов в гильбертовом пространстве, включающая спектральную теорему и теорию расширения. Последняя глава второго тома дает введение в теорию линейных дифференциальных операторов с частными производными. Здесь даны сведения о теории распределений (обобщенных функций), теореме Соболева, об эллиптических краевых задачах, о задаче Коши для линейных гиперболических уравнений. Глава об обыкновенных дифференциальных операторах представляет для нас главный интерес. Авторы отмечают, что дифференциальные операторы образуют наиболее важный для приложений класс операторов. Свойства формальных дифференциальных операторов и понятия регулярного и иррегулярного операторов рассмотрены для произвольного порядка n. С введением сопряженного оператора и краевых значений доказываются теоремы об индексах дефекта, о вейлевских понятиях предельной точки и предельного круга для операторов второго порядка. Теория граничных условий изложена по Кэлкину /89, 90/. Вопрос об индексах дефекта освещен с указанием на работы Глазмана. Изложение собственно спектральной теорий начинается с теории резольвенты и построения функции Грина. Резольвента для оператора определяется формулой

$$\left(R\left(\lambda;T\right),f\right)(t)=\int_I f(s)K(t,s;\lambda)ds \quad f\in L_2(t),$$

Ядро $K(t,s;\lambda)$ представлено через некоторую систему функций. Затем следует спектральная теорема для вполне непрерывных резольвент, когда оператор имеет дискретный спектр с единственной предельной точкой в бесконечности. Для общего случая, когда оператор может иметь и непрерывный спектр, теория излагается в духе работ Кодаиры на основе теории спектральной меры, опирающейся на общую спектральную теорию линейных операторов в гильбертовом пространстве. Многие теоремы здесь именуются, как теоремы Вейля-Кодаиры, Титчмарша–Кодаиры. В качестве примера подробно рассмотрен оператор дифференцирования.

§ 6. Теорема Гельфанда-Наймарка и ее применение в спектральной теории.

Одним из абстрактных подходов к спектральной теории является путь через теорию банаховых алгебр или нормированных колец. Гельфанд и Наймарк ввели понятие C^*-алгебры или банаховой алгебры с инволюцией [59]. Алгебра ограниченных операторов в гильбертовом пространстве представляет собой банахову алгебру с операцией сопряжения, то есть с операцией сопряжения $A \to A^*$, обладающей свойствами:

$$\left(A^*\right)^* = A;\ \left(\lambda A\right)^* = \overline{\lambda} A^*;\ \left(AB\right)^* = B^* A^*;\ \left(A+B\right)^* = B^* + A^*;\ \left\|AA^*\right\| = \left\|A\right\|^2 \qquad (*).$$

Теорема Гельфанда-Наймарка устанавливает изоморфизм C^*-алгебры и алгебры $C(\mathsf{M})$ комплексных непрерывных функций.

Теорема Гельфанда-Наймарка. Условия (*) дают аксиоматическое описание алгебры $C(\mathsf{M})$; точнее, коммутативная C^*- алгебра A изометрически изоморфна алгебре $C(\mathsf{M})$ комплексных непрерывных функций, заданных на компактном множестве максимальных идеалов алгебры A, причем указанный изоморфизм осуществляется канонически.

Краткое изложение теории Гельфанда и применение ее к доказательству спектральных теорем можно найти в книге Морена «Методы гильбертова пространства» [172], вышедшей в 1959 г. Еще в работе 1943 г., Гельфанд и Наймарк [59] показали, что алгебра операторов в гильбертовом пространстве является самой общей C^*-алгеброй, всякая C^*-алгебра изометрически изоморфна кольцу непрерывных операторов в гильбертовом пространстве. В книге Морена дано несколько доказательств спектральной теорем на основе теории Гельфанда-Наймарка. Прежде всего доказана спектральная теорема для функции $f(N)$ от нормального оператора N.

Теорема 1. Каждому нормальному оператору N можно поставить в соответствие спектральную функцию $E(\lambda)$, определенную на спектре оператора N, причем для каждой функции $f \in C\left(Sp(N)\right)$ имеем

$$f(N) = \int\limits_{Sp(N)} f(\lambda)\, dE(\lambda)$$

($C\left(Sp(N)\right)$ − алгебра комплекснозначных непрерывных функций на спектре оператора N), где интеграл существует в смысле равномерной сходимости операторов. В частности,

$$N = \int\limits_{Sp(N)} \lambda\, dE(\lambda).$$

Затем даны доказательства спектральной теоремы Неймана (отмечено, что теорема в неявном виде содержалась в более ранних работах Хеллингера). Эта теорема в книге Морена получает следующую формулировку: Для каждого самосопряженного оператора A в сепарабельном пространстве H существует унитарное отображение F пространства H на прямой интеграл

$$\int\limits_{\Delta} \oplus \hat{H}(\lambda)\, d\mu(\lambda), \quad \dim \hat{H}(\lambda) = n(\lambda),$$

такое, что $F\varphi(A)F^{-1}u = \int\limits_{\Delta} \varphi(\lambda) n(\lambda)\, d\mu(\lambda)$, где Δ – спектр оператора A.

Полная спектральная теорема обобщается для C^* - алгебр без единицы и с единицей.

Гординг в работах 1953-54 гг. показал, что теорема Неймана конкретизируется в теореме разложения по собственным функциям некоторых классов интегральных и дифференциальных операторов.

В книге Морена содержится доказательство Гординга спектральной теоремы Вейля-Титчмарша для сингулярного дифференциального оператора, основанное на применении функции Грина и преобразования Планшереля.

Вопросы спектральной теории дифференциальных операторов рассматривались в монографиях по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь нужно отметить книги Коддингтона и Левинсона "Теория обыкновенных дифференциальных уравнений" [108] и Сансоне "Обыкновенные дифференциальные уравнения" [231]. В книге Сансоне нашли отражение исследования итальянских математиков по теории задачи Штурма-Лиувилля и спектральной теории дифференциальных операторов.

Книга Коддингтона и Левинсона отразила новую ступень в развитии теории дифференциальных операторов, подобно книгам Титчмарша и Наймарка. Спектральные вопросы вошли значительной составной частью в теорию линейных дифференциальных уравнений. В книге содержится теория самосопряженных задач на собственные значения в случае конечного интервала, включая теоремы разложения и полноты и теорему Рисса-Фишера. При изложении этих вопросов использован метод функции Грина. Рассмотрены теоремы осцилляции, элементы теории Штурма и задача с периодическими краевыми условиями. Теория сингулярных самосопряженных краевых задач для уравнений второго порядка изложена в духе теории Вейля аналитическим способом без формального использования теории линейных операторов. В книгу включены элементы теории сингулярных самосопряженных краевых задач для уравнений произвольного порядка n. Метод Функции Грина развивается и здесь. После доказательства теоремы разложения и равенства Парсеваля доказана единственность спектральной матрицы и дано представление спектральной матрицы с помощью функции Грина. Изложение спектральной теории в книге дано авторами на основании собственных исследований по этим вопросам [105-108].

В книгу включены главы об алгебраических свойствах линейных краевых задач на конечном интервале в духе работ Бохера. Для изучения несамосопряженных краевых задач отмечается и указывается интегральный метод Коши. В книге рассмотрены несколько примеров для уравнений второго порядка и порядка n, когда построение функции Грина оказывается возможным. Значительное место спектральным вопросам теории линейных дифференциальных уравнений, как было уже отмечено, отведено и в двухтомном курсе обыкновенных дифференциальных уравнений Сансоне [231].

§ 7. Качественное исследование спектра дифференциальных операторов

В развитии спектральной теории дифференциальных операторов, особенно, когда стали изучать сингулярные задачи, выявилось значение качественного исследования спектра в зависимости от поведения коэффициентов дифференциального оператора.

Первые результаты качественного характера о спектре были указаны Вейлем. Позднее рядом исследователей были получены частные результаты, в частности, Фридрихсом [279], Глазманом, М.А. Наймарком, Титчмаршем. Все полученные результаты содержали достаточные условия того или другого характера спектра, в частности, его дискретности.

Первый общий критерий дискретности спектра положительно определенного оператора был получен Реллихом в 1942г. [219].

А.М. Молчанов в работе 1953г. "Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных операторов второго порядка" [171] несколько видоизменил общий критерий дискретности положительно определенного оператора A и сформулировал его в следующем виде: дискретность спектра положительно определенного оператора $(A\psi,\psi)\geq(\psi,\psi)$ эквивалентна компактности множества векторов ψ, для которых $(A\psi,\psi)\leq 1$.

В применении к рассматриваемому обыкновенному дифференциальному оператору второго порядка

$$L\psi = -\frac{d^2\psi}{dx^2} + p(x)\psi ,$$

заданному на всей прямой, общий критерий означает, что если $p(x) \geq 1$, то дискретность спектра оператора L эквивалентна компактности семейства α кусочно-гладких функций ψ для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + p\psi^2\right]dx \leq 1$$

Для этого семейства функций доказана теорема: Для того, чтобы семейство α с $p \geq 1$ было некомпактно, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\{D_n\}$ непересекающихся отрезков одинаковой длины D, для которых

$$\int_{D_n} p(x)dx < C .$$

Принимая во внимание, что последнее условие и дискретность спектра не зависят от уменьшения или увеличения $p(x)$ на любую постоянную, критерий дискретности спектра для оператора L формулируется следующим образом:

Теорема. Если $p(x) \geq p_0$, то необходимым и достаточным условием дискретности спектра оператора является условие, чтобы для отрезка D любой длины $\int_D p(x)dx \to \infty$, когда отрезок D, сохраняя длину уходит в $+\infty$ или $-\infty$.

Молчанов дает этому критерию дискретности спектра физическое истолкование, что квантовая частица будет совершать финитное движение тогда и только тогда, когда средняя потенциальная энергия неограниченно возрастает с увеличением $|x|$.

Молчанов рассматривает также вопрос о дискретности спектра для уравнения в частных производных и разностного аналога дифференциальных уравнений.

Полуограниченность функции $p(x)$ обеспечивали самосопряженность изучаемого оператора. При изучении критерия дискретности М.А. Наймарк книге [177] в 1954 г. поставил вопрос о возможности ослабления требования полуограниченности $p(x)$ для самосопряженности оператора.

Некоторое ослабление этого требования было достигнуто Бринк в работе [26], в которой требование полуограниченности было заменено условием $\alpha\int_t^x q(s)ds > -\gamma$ в области $0 < x - t < \delta$ при некоторых положительных γ и δ. Измененное условие позволило допускать в качестве $p(x)$ быстро осциллирующие функции.

Обобщение результата Бринк и новую форму критерия дискретности спектра получил в 1961г. Исмагилов [88], внеся уточнения в результат Молчанова.

Отметим, что Лидский обобщил критерий дискретности спектра на несамосопряженные дифференциальные операторы, в частности, на операторы с комплекснозначным потенциалом.

Одну из основ прямых качественных методов исследования спектра дифференциальных операторов представляет метод расщепления. Этот метод был разработан Глазманом в работах 1950-51 гг. и систематически изложен также в его монографии [66].

Рассмотрим метод расщепления в применении к простейшему самосопряженному сингулярному оператору $Ly = -y'' + q(x)y$ в $L_2(0,\infty)$ с одной особой точкой в бесконечности и некоторыми граничными условиями. Подчиним функции $y(x)$ из области определения D_L оператора L при данном $\gamma > 0$ дополнительным условиям $y(\gamma) = y'(\gamma) = 0$. Тогда оператор L_0 индуцированный оператором L естественным образом на $D_{L_0} \subset D_L$, распадается в ортогональную сумму $L_0 = L_1 \oplus L_\gamma$ некоторых симметрических операторов в $L_2(0,\gamma)$ и $L_2(\gamma,\infty)$. Расширение этих операторов до самосопряженных дает оператор $M = \tilde{L}_1 \oplus \tilde{L}_\gamma$.

Операторы L и M оказываются различными самосопряженными расширениями оператора L_0. В силу конечномерности расширений и регулярности $\tilde{L}_1$, некоторые свойства спектра, вызванные сингулярностью задачи, сохраняются при переходе от L к $\tilde{L}_\gamma$. В частности, сохраняется непрерывная часть спектра: $C(L) = C(L_\gamma)$.

При исследовании характера спектра весьма эффективным оказывается использование пробных многообразий финитных функций. Развитие теоретико-операторного метода исследования природы спектра опирается на работы Куранта [121], Фридрихса, Реллиха, Вейля. С помощью метода расщепления удалось получить значительные результаты о природе спектра. Определив спектр $S(T)$ как дополнение резольвентного множества, различают три составных части спектра: дискретную $D(T)$, состоящую из собственных значений λ оператора T, непрерывную $C(T)$ состоящую из λ, для которых существует некомпактная последовательность $\{f_n\} \subset D_T$, удовлетворяющая условию $\lim\limits_{n\to\infty}(T - \lambda \mathrm{I}) f_n = 0$ и остаточную часть $O(T)$ тех значений λ, для которых замыкание многообразия $(T - \lambda T)D_T$ не совпадает с H, и не принадлежит D_T.

Иногда $C(T)$ называют предельным спектром, а название непрерывного спектра сохраняется для части $C(T)$, остающейся после удаления из него собственных значений.

Таким образом
$$C(T) = D(T) \cup C(T) \cup O(T).$$

Дискретный и непрерывный спектры могут пересекаться. Собственные значения бесконечной кратности всегда принадлежат непрерывной части спектра. Глазман в работах 1951-52 гг. получил обобщение теоремы Вейля о сохранении непрерывной части спектра самосопряженного оператора A при изменении оператора прибавлением вполне непрерывного самосопряженного оператора K, то есть $C(A+K) = C(A)$, и получил необходимые и достаточные условия для характеристики отдельных точек непрерывного спектра, не являющихся собственными значениями, для существования конечного числа или бесконечного множества точек спектра в некотором интервале и т.п.

В исследованиях М.Г. Крейна наряду с построением самосопряженных расширений симметрических дифференциальных и квазидифференциальных операторов содержатся теоремы о природе спектра самосопряженных расширений. Иногда точка регулярного типа симметрического оператора может быть собственным значением его самосопряженного расширения. Но точка регулярного типа не может стать собственным значением всех самосопряженных расширений симметрического оператора. Это доказал Кэлкин [90] в 1940г. и в обобщенном виде Вишик [49] в 1949г.

Обобщение теоремы Вейля для замкнутых операторов встречается также в работе М.Г. Крейна и Гохберга и для полуограниченных операторов с соответствующим понятием относительно вполне непрерывных операторов у Бирмана [16, 17].

В этих обобщениях повторялись ранние результаты Фридрихса [279] о расположении дискретной части спектра для полуограниченных операторов. В применении к обыкновенным сингулярным самосопряженным дифференциальным операторам метод расщепления позволил установить независимость ряда спектральных свойств, например, тип точки спектра, непрерывная часть спектра, ограниченность или неограниченность спектра, от поведения коэффициентов на конечном расстоянии и исследовать поведение спектра при малых и относительно малых возмущениях коэффициентов.

С помощью введенных пробных систем финитных функций Глазману удалось оценить число точек спектра в некотором интервале и дать необходимое и достаточное условие принадлежности точки непрерывному спектру.

В качественном спектральном анализе плодотворным оказалось применение принципов локализации, когда о спектральных свойствах сингулярного дифференциального оператора удается получить информацию по свойствам регулярного оператора, порожденного тем же дифференциальным выражением, на любом интервале фиксированной длины.

Применение принципов локализации можно увидеть в работе Молчанова [171]. Условия полуограниченности и дискретности спектра, полученные Исмагиловым [88], основаны также на принципах локализации.

Изучение связи осцилляционных свойств решений дифференциальных уравнений, идущее от Штурма, позволило получить сведения об отрицательной части спектра в работах Глазмана [67] и М.Г.Крейна.

Наряду с методом расщепления в качественном спектральном анализе дифференциальных операторов плодотворным оказался метод сравнения квадратичных форм, разработанный Бирманом [16,17] в ряде статей, начиная с 1958 г. Этот метод опирается на теорию Фридрихса полуограниченных операторов в гильбертовом пространстве и теорему Вейля об инвариантности непрерывной части спектра при вполне непрерывных возмущениях. Основные и наиболее существенные результаты этим методом получены при изучении спектра многомерных дифференциальных операторов. Для обыкновенных дифференциальных операторов некоторые результаты получены в работах Бирмана [17].

После выхода книги Титчмарша, где собраны результаты исследований прежних лет, вопросы качественного изучения спектра обыкновенных дифференциальных операторов, преимущественно второго порядка, привлекли внимание многих исследователей. Различные многочисленные результаты частного характера были полечены в работах американских математиков Уинтнера, Хартмана, Уоллаха, Патнама, Хилле и других.

Интересная альтернатива возникла при исследовании непрерывной части спектра $C(\widetilde{L})$ в работе Уинтнера [269] 1948г. Для оператора $-y''+q(x)y$ при условии $q(x)\geq 0$ она была доказана Патнамом в виде теоремы: если оператор L h - устойчиво положителен, то непрерывная часть спектра либо отсутствует, либо не ограничена сверху.

В той же работе доказано, что для h - устойчиво положительного оператора L_1 либо точка $\lambda=0$ не принадлежит непрерывной части спектра, либо непрерывная часть спектра покрывает всю полуось $\lambda\geq 0$.

Исмагилов [88] обобщил первую альтернативу для двучленного оператора любого четного порядка.

Патнам установил признак того, что положительная часть спектра оператора $\widetilde{L}$ покрывает всю полуось $\lambda\geq 0$ в виде $q(x)\in L_2(0,\infty)$.

Уоллах доказал тот же факт при $\sqrt{x}q(x)\in L_2(0,\infty)$.

Титчмарш и Сиерс доказали, что спектр $S(L)$ покрывает всю ось, если $q(x)\to-\infty$ достаточно медленно и дискретен в противном случае.

Осцилляторные свойства дифференциального оператора связаны с характеристикой отрицательной части спектра. Осцилляторность уравнения характеризует бесконечность множества точек отрицательной части спектра, неосцилляторность - конечность множества точек спектра на отрицательной полуоси.

Уинтнер [269] в 1948г. дал признак осцилляторности уравнения при $q(x)\le 0$ в виде $\int_0^\infty q(x)dx=-\infty$. Ряд признаков осциляторности уравнения был получен Хилле в 1948г., Нехари [186] в 1957 г. ввел понятие h-устойчивой (сильной) неосцилляторности и осциляторности уравнения, хотя частный случай сильной осциляторности встречался в работе Хилле, Уинтнер и Патнам изучали поведение решений в точках дискретной части спектра.

Качественное изучение спектра обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков было начато работами Рапопорта [212] и Глазмана [64, 65] и замечаниями в книге Титчмарша. Обобщение этих результатов было дано в изложении Наймарка в его монографии по теории линейных дифференциальных операторов [177].

Вместо двучленных операторов Наймарк привел обобщенные результаты для дифференциальных операторов общего вида

$$l(y)=(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left(p_0\frac{d^n y}{dx^n}\right)+(-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(p_n\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)+\ldots+p_n y$$

Отметим теорему, существенно отличающуюся от прежних результатов.

Теорема. Пусть выполнены условия:

1) $p_n(x)\to+\infty$ при $x\to\infty$;

2) p_n', p_n'' не меняет знака в интервале $[x_0,\infty)$ при достаточно большом x_0;

3) при $x\to+\infty$

$$p_n'=O\left(|p_n|^\alpha\right),\qquad 0<\alpha<1+\frac{1}{2n};$$

4) $\dfrac{p_0'}{p_0}, p_1|p_n|^{-\frac{1}{2n}},\ldots,|p_n|^{-\frac{2n-3}{2n}}$ суммируемы в интервале $[0,\infty)$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}p_0(x)=1$.

Тогда спектр самосопряженного расширения L_u оператора L дискретен.

Наиболее простым и наиболее изученным из дифференциальных операторов высших порядков является оператор, порожденный двучленной операцией, т.е.

$$l(y)=(-1)^n y^{(2n)}+q(x)y,$$

где $q(x)$ предполагается вещественной и абсолютно интегрируемой в любом конечном интервале функцией и обычно называется потенциалом, по аналогии с оператором второго порядка Шредингера.

В работах Глазмана установлены признаки ограниченности и дискретности отрицательной части спектра, обобщающие результаты Вейля для оператора второго порядка.

В работе Бирмана [17] характеристики отрицательной части спектра получены другим методом и дополнены условием h-устойчивости, состоящими в том, что отрицательная часть спектра сохраняется при замене потенциала $q(x)$ на $\frac{1}{h}q(x)$ каково бы ни было положительное число h.

Известные результаты Молчанова о дискретности спектра также перенесены на двучленные операторы любого порядка. Глазмоном для двучленных операторов высших порядков были изучены также свойства осцилляторности и неосциляторности, включая h-устойчивость [65].

В названных работах Глазмана получен ряд характеристик положительной части непрерывного спектра, обобщающих результаты Фридрихса, Патнама, Уоллаха, Вейля.

Большинство результатов о характере спектра двучленных дифференциальных операторов легко переносятся на аналогичные операторы над вектор-функциями.

Признаки полуограниченности спектра, указанные выше, теоремы о лакунах в непрерывной части спектра, о непрерывности положительной части спектра были обобщены на одномерные дифференциальные операторы общего вида в указанной работе Глазмана.

Отметим еще один результат Бирмана, высказанный в теореме: если при некотором $\omega > 0$ коэффициенты дифференциальной операции общего вида удовлетворяют условиям: $0 < \alpha \le p_0(x) \le \beta < +\infty$,

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^{x+\omega} |p_0(t) - 1| dt = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^{x+\omega} |p_k(t) - 1| dt = 0, \qquad (k = 1,2,\ldots,n)$$

то соответствующий оператор $\widetilde{L}$ ограничен снизу и непрерывная часть его спектра совпадает с полуосью $\lambda > 0$.

Рофе-Бекетов в заметке "Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций" установил общий вид самосопряженных краевых задач на конечном интервале $[0, b]$ для дифференциального уравнения $l(y) = \lambda y$ произвольного порядка m с непрерывными операторными коэффициентами. Здесь продолжены исследования М.Г. Крейна для скалярных дифференциальных уравнений четвертого порядка с вещественными коэффициентами. Алгебраическое изучение краевых задач, проведенное Бохером и другими, можно найти в книге Коддингтона и Левинсона.

Ряд интересных исследований связан с дифференциальными операторами второго порядка

$$-y'' + q(x)y$$

с периодическим коэффициентом /потенциалом/

$$q(x+1) = q(x)$$

в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$.

Оператор $Ly = -y'' + q(x)y$ называют иногда оператором Хилла. Уоллах в 1948г, показал, что дискретного спектра у этого оператора нет, а непрерывный спектр состоит из последовательности сегментов положительной оси, уходящих в бесконечность.

Другой способ исследования был указан Гельфандом [53] в 1950 г. Вопрос о числе и длине лакун непрерывного спектра изучался В.В. Лидским [146] и Н.И. Ахиезером.

В работе Хартмана и Патнама доказано, что длины лакун непрерывного спектра рассматриваемого оператора в $L_2(0, \infty)$ с ограниченным потенциалом $|q(x)| < M$ стремятся к нулю при $x \to \infty$.

Заслуживает внимания замечание Зоммерфельда и Бете о причинах убывания длины лакун в непрерывном спектре энергии в электронной теории металлов.

Рофе-Бекетов [228] рассмотрел задачу о конечности числа дискретных уровней, вносимых в лакуны непрерывного спектра возмущением периодического потенциала

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0, \; -\infty < x < \infty,$$

$$q(x) = q(x+1)$$

Известно, что возмущенная задача

$$y'' + (\lambda - q(x) - p(x))y = 0$$

в случае вещественного непериодического возмущения $p(x)$, которое в том или ином смысле мало при $x \to \pm\infty$, имеет тот же непрерывный спектр, что и невозмущенная задача, а в лакунах может появиться конечное или бесконечное количество дискретных собственных значений, которые могут сгущаться только к концам лакуны.

На IV Всесоюзном математическом съезде в докладе Бирмана и Глазмана [18] был поставлен вопрос об условиях конечности числа дискретных уровней, вносимых в лакуны возмущением. Для других классов операторов появление точек дискретного спектра в лакунах непрерывного спектра отметили Бирман и Найман. Собственные значения не могут налагаться на непрерывный спектр, но концы лакун не могут оказаться собственными значениями.

Доказано, что при условии

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x| p(x)) dx < \infty$$

в каждой из лакун непрерывного спектра самосопряженной задачи с периодическим потенциалом появляется не более конечного числа собственных значений, причем достаточно далекие лакуны содержат, во всяком случае, не более двух собственных значений каждая.

ГЛАВА 7.
ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

§ 1. Постановка вопроса о математических основах квантовой механики

Отыскание связей математических теорий с физическими применениями проявлялось, как мы видели, во все периоды развития спектральной теории. Проблемы колебания струны, мембраны и других тел, вопросы теплопроводности и теории излучения постоянно были в поле зрения математиков. Значительный интерес проявлял Гильберт и его ученики к проблеме аксиоматического построения физической теории. Это способствовало тому, что и к новым физическим теориям пытались применить математические методы и искали их математическое обоснование. Возможно, эта тенденция сильнее проявлялась при становлении новых физических теорий, когда требовался новый математический аппарат. Уровень развития математики в XX веке оказался относительно выше теорий физики. Так было в отношении теории относительности, так случилось и по отношению к квантовой теории.

Успехи квантовой физики в первой четверти XX века характеризуются установлением основных фактов и первыми попытками сформулировать основные положения теории. От первых работ Планка в физику прочно вошло представление о квантах энергии, о дискретном характере изменения физических величин. Работы Эйнштейна по фотоэффекту указали путь к возрождению корпускулярной теории света. Н. Бор в 1913 г. создал теорию строения атома. В 1923 г. Л. де Бройль высказал мысли о единстве корпускулярной и волновой структур атомов и электронов.

Наряду с громадными успехами квантовая физика встретилась и с рядом трудностей, особенно в случаях взаимодействия нескольких электронов. Методами обычной механики с дополнительными условиями квантования многие вопросы не могли быть решены. Стало ясно, что необходимо создание новых теорий квантовых явлений, основанных на иных принципах. Ответом на эти стремления явилась работа Гейзенберга в 1925 г. и последовавшая за ней независимо развитая теория Шредингера в 1926 г. Идеи Гейзенберга были подхвачены и развиты с соответствующим математическим обоснованием в работах Борна, Иордана, Дирака. Математическим аппаратом теории Гейзенберга оказалась теория матриц бесконечного порядка. Рассматривая равенство для частот излучения при переходе с одного уровня на другой

$$\nu_{nm} = \frac{E_n}{h} - \frac{E_m}{h},$$

можно заметить, что эта величина зависит от двух натуральных чисел, а двухпараметрическое множество значений образует матрицу $\|\nu_{nm}\|$.

На основе комбинационного принципа Ритца оказалось, что сложению колебаний соответствует умножение матриц.

Каждой физической величине соответствовала матрица. Действия над физическими величинами соответствовали действиям над матрицами.

Умножение матриц, вообще говоря, некоммутативно. При действиях с матрицами квантовых величин обнаружилось, что возникающие при этом перестановочные соотношения, например, для матриц координат q_k и импульсов p_k

$$p_k q_k - q_k p_k = \frac{h}{2\pi i},$$

заменяют квантовые условия Бора. Появление работ Гейзенберга и Шредингера было сразу высоко оценено в научном мире. Примером этого может служить издание в 1927 г. сборника «Основание новой квантовой механики» под редакцией акад. Иоффе. В предисловии редактора отмечено, что «пока новая механика не проверена на всей области известных нам явлений физики, нельзя считать ее твердо установленной», но «впервые за 25 лет со времени появления квантов Планка показалась надежда понять их, ввести в систему прежней механики и оптики» и далее: «теория Шредингера подвергнется еще, вероятно, значительным изменениям…, но она будет исходной точкой того, что придет дальше».

Привлекает статья Фока из этого сборника. Описывая математический аппарат теории Шредингера, Фок ограничивает его теорией краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и кратким замечанием об уравнениях в частных производных. Тем не менее, это, по-видимому, первое изложение математических основ новой теории. Термин «оператор» применяется у Фока только в смысле дифференциального выражения. Нет речи о соответствии физическим величинам операторов, нет и упоминания о теории операторов.

После работы Бройля квантовая теория развивается в виде волновой механики, к идеям которой он пришел от аналогии между геометрической оптикой и аналитической механикой, установленной в XIX веке Гамильтоном, привлекая некоторые идеи теории относительности.

В 1923 году в результате размышлений над аналогией между математическим аппаратом аналитической механики и волновой теории Бройль получил некоторые фундаментальные принципы волновой механики [27, 28]. В работах 1924 г. Бройлю удалось истолковать «правило частот» Бора как переход от начального стационарного состояния к конечному. Результаты Бройля составили содержание его докторской диссертации [29] и ряда обзорных статей. Значительное внимание Бройль уделяет истории формирования идей квантовой механики. Проследив развитие волновой и корпускулярной теорий света, он приходит к выводу, что «настал момент попытаться объединить корпускулярные и волновые представления и несколько углубить понимание истинной сущности кванта». Освещение истории вопроса у Бройля имеет не только информационный характер, но служит и обоснованием его физических идей и математических формулировок. Отметив роль оптико-механической аналогии и принципа наименьшего действия, имеющего у Гамильтона «исключительно изящную и лаконичную математическую форму», Бройль считает, что механика дошла до «вершин красоты и рациональной гармонии».

В начале 1926 г. Шредингер познакомил Бройля с еще не опубликованными своими работами по квантовой механике. Под влиянием работ Шредингера Бройль получил ряд новых результатов, опубликованных вскоре в статье «Принципы новой волновой механики» в 1926 г. В книге «Введение в новую механику» (русский перевод [30]) Бройль систематически излагает результаты как своих исследований, так и других физиков, в том числе теорию Гейзенберга-Бора и первые работы Шредингера. Изложив экспериментальные и теоретические предпосылки волновой механики, Бройль проводит исследование ряда вопросов физики методами волновой механики. Подробно обосновав волновую теорию, он показывает, что с движением частиц всегда следует связывать распространение волны типа $\psi = ae^{\frac{2\pi i}{h}\varphi}$ и для интерпретации экспериментальных результатов необходим принцип интерференции. Существенным развитием явилась теория Гейзенберга и Бора, в которой дополнительно принят еще принцип спектрального разложения. Если признание монохроматической волны, которая соответствует прямолинейному однородному движению частицы, было отправным пунктом волновой механики, то следующим шагом было рассмотрение ограниченного потока волн как суперпозиции плоских монохроматических волн, то есть $\psi = \sum_k a_k \varphi_k$.

В начале развития волновой механики Бор предложил считать a_k^2 вероятностью движения частицы в виде ψ_k. В работах Борна был вскрыт вероятностный характер волновой теории квантов. Поэтому разложение ψ по ψ_k через коэффициенты дает вероятность того или иного состояния движения. Бройль этот постулат Борна называет «принципом спектрального разложения». Здесь мы не будем входить в обсуждение теории Гейзенберга и Бора, связанной с принципом неопределенности. Из этого обзора видно насколько волновая теория подошла к необходимости использования математического аппарата теории собственных значений, что было сделано вскоре Шредингером. В последних главах книги Бройль излагается теория Шредингера, рассматривающая теорию квантования как задачу о собственных значениях.

Бройль отмечает, что интерпретация старых квантовых условий указала путь решения». Пересмотр вопроса квантования с волновой точки зрения привел к успехам теории Шредингера.

§ 2. Теория Шредингера.

Другой подход к изложению квантовой теории дал Шредингер в цикле статей «Квантование как задача на собственные значения». Л. де Бройль в статье [31] отмечает важное значение работы Шредингера для развития волновой механики. Формирование взглядов Шредингера можно проследить по другим его статьям и выступлениям. В докладе 1928 г. «Новые пути в физике» [313] он рассказывает, как на основании рассуждений Бройля были сделаны попытки отстранить точечные электроны и оставить лишь сопровождающий волновой процесс. Тогда дискретные значения энергии в теории Бора могли определяться как собственные частоты дебройлевского колебательного процесса, аналогично собственным частотам звучащего колокола или мембран. Высоко оценивая методы математического анализа, Шредингер заметил, что «применение этих методов сегодня целиком и полностью определяет лицо физики» [313], а в другом месте, что математическая структура теории выполняет физические требования автоматически. Восторженную и высокую оценку дали при первом же ознакомлении с работой Шредингера Планк, Эйнштейн, Лоренц, как это видно из опубликованной переписки. Вот несколько высказываний из писем к Шредингеру. «Большое спасибо за отдельный оттиск. Читаю Вашу статью с тем же напряжением, с каким любопытный ребенок выслушивает развязку загадки, над которой он долго мучился, и радуюсь красотами, раскрывающимися перед моими глазами: (Планк, 2 апреля 1926 г.).

«Господин Планк, с оправданным восторгом, показал мне Вашу теорию, которую я также стал изучать с огромным интересом"» (Эйнштейн, 16 апреля 1926 г.).

«Я убежден, что Вашей формулировкой условий квантования Вы добились решающего успеха» (Эйнштейн, 26 апреля 1926 г.).

«Вы можете себе представить, с каким интересом и воодушевлением я погрузился в изучение эпохального труда» (Планк, 24 мая 1926 г.).

«Наконец, я взялся ответить на Ваше письмо и поблагодарить Вас за любезную присылку гранок Ваших трех сообщений, которые я все получил. Их чтение доставило мне истинное удовольствие, следует восхищаться принципиальностью Ваших соображений и надеяться, что Ваши условия существенно помогут глубже проникнуть в эти загадочные явления…. Ваши соображения имеют то преимущество, что они приближают нас к правильному решению уравнений» (Г.Лоренц, 27 мая 1926 г.).

Работа Шредингера была опубликована в виде четырех сообщений в 1926 г.

В первом сообщении, поступившем в редакцию «Annalen der Physik» 27 января 1926 г., Шредингер на простейшем примере нерелятивистского свободного атома водорода показывает, что обычные, то есть применявшиеся физиками того времени, правила квантования могут быть заменены другими положениями, в которых целочисленность появляется естественным образом. Здесь же замечено, что «это новое положение может быть обобщено, и я думаю, что оно тесно связано с истинной природой квантования». Преобразуя квантовые условия Бора, Зоммерфельда, Эйнштейна классическим методом Якоби к виду

$$H\left(q, \frac{k}{\psi}, \frac{d\psi}{dq}\right) = E,$$

сводящееся к квадратичной форме от функции ψ и ее первых производных. Из равенства нулю этой формы Э. Шредингер получает квантовое условие для одного электрона в виде

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 - \frac{2m}{k^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi^2 = 0.$$

Учитывая вариационную проблему, Э. Шредингер приходит к уравнению

$$\Delta\psi + \frac{2m}{k^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0$$

с некоторыми условиями для поведения функции в бесконечности. В сферических координатах, с учетом зависимости от углов в шаровых функциях, Шредингер записывает уравнение

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r} + \left(\frac{2mE}{k^2} + \frac{2me^2}{k^2 r} - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)\chi = 0.$$

Замечая, что это уравнение имеет две особенности в точках $r = 0$ и $r = \infty$, а нужны только его конечные решения, Шредингер выражает благодарность Вейлю за помощь в решении уравнения. В такой форме впервые было записано уравнение, ставшее основным в квантовой механике и получившее название «уравнения Шредингера».

Знаменательно признание заслуг Вейля – создателя теории сингулярной задачи Штурма-Лиувилля. Далее Шредингер отмечает, что требование ограниченности решения в граничных точках для функции χ равносильно наложению граничного условия. Подобное решение существует лишь при некоторых специальных значениях входящих в уравнение постоянных, которые следует определить. Исследование поведения решения в особых точках приводит Шредингера к выводу, что решение должно быть, прежде всего, целой трансцендентной функцией и нужно получить ее асимптотическое представление. Дальнейший анализ приводит Шредингера к заключению, что для $E > 0$ изучаемое дифференциальное уравнение имеет решение, однозначное, ограниченное, непрерывное и стремящееся к нулю в бесконечности как $\frac{1}{r}$, но оно будет решением задачи только при некоторых дополнительных условиях. Для отрицательных $E < 0$ получается дискретный спектр. Не упоминая о полноте полученной системы собственных функций, Э. Шредингер замечает, что на основании других исследований можно предположить, что пропущенных собственных значений нет.

Сравнив полученные результаты с фактическими физическими данными, Шредингер переходит к рассмотрению математического способа, «так как он дает возможность лучше выяснить все существенные стороны вопроса». Шредингер отмечает влияние работ Бройля на свои исследования. Отличие от трактовки де Бройля Шредингер видит в использовании стоячих собственных колебаний, а не прямолинейно распространяющихся волн. Правила квантования определяются необходимостью ограниченности и однозначности некоторой определенной функции.

В проводимых далее рассуждениях Шредингер показывает преимущество математического способа, отмечая в то же время, что представление, получившее математическую формулировку еще грубо отражает фактически существующий процесс. Во втором сообщении, датированном 23 февраля 1926 г. Шредингер развивает аналогию между механикой и оптикой, восходящую к Гамильтону, с целью выяснения общей связи дифференциального уравнения механической проблемы с введенным им волновым уравнением квантовой механики. Шредингер отмечает преимущество нового подхода к квантовым процессам и еще раз отмечает, что квантовые уровни определяются теперь «сразу как собственные значения уравнения для волновой функции, при которых выполняются введенные естественные граничные условия».

Значительная часть второго сообщения отведена примерам. Здесь рассмотрены задачи об одномерном осцилляторе, ротаторе с закрепленной и свободной осью, двухатомной молекуле. При анализе полученных результатов обращается внимание на математические стороны проблемы, связанные с аналитическими причинами выделения точных собственных значений, возможностями линейных преобразований одной системы собственных функций в другую. Задача о двухатомной молекуле приводит автора к необходимости применения теории возмущения собственных значений и собственных функций. По выражению Шредингера «теория возмущений значительно расширяет границы, в которых возможно аналитическое использование новой теории». Теории возмущений отведено главное место в третьем сообщении Шредингера. Наконец, в четвертом сообщении вводится и рассматривается волновое уравнение, зависящее от времени. Как уже отмечено выше, работы Шредингера сразу были признаны и оценены. Работы Шредингера дали в руки исследователей проблем квантовой механики уже разработанные методы дифференциальных уравнений математической физики, в частности, теории собственных значений и собственных функций. Оживленную дискуссию вызвали вопросы интерпретации теории Шредингера. Вскоре была показана эквивалентность различных форм квантовой механики: матричной механики Гейзенберга, волновой механики, теорий Шредингера и Дирака.

§ 3. Изложение волновой механики у Френкеля.

К числу первых книг по волновой механике относится книга Френкеля «Введение в волновую механику», изданную на немецком языке в 1928 г. В русском издании через несколько лет книга была дополнена и расширена. Она вышла в 1934 году под названием «Волновая механика» [277]. Издание предполагалось в трех томах, но изданы были только два. Первый том (часть) дает общее представление о физической стороне новой теории в сравнительно элементарном изложении, то есть без привлечения основного математического аппарата. Уравнение Шредингера в частных случаях получается при рассмотрении явления отражения и прохождения через потенциальный барьер потока частиц методом, аналогичным изучению оптических явлений. Полученные уравнения Шредингера решаются для случая гармонического осциллятора и водородоподобного атома. Для более сложных задач указывается возможность приближенного решения, в частности, методом потенциальных скачков.

Кроме подробного физического анализа указанных задач в первой части показано применение метода к простым конкретным задачам. Уделено внимание принципу суперпозиции и статистическому истолкованию теории. Вторая часть «Волновой механики» Френкеля содержит изложение математической теории волновой механики. Автор показывает, что математическая трактовка вопросов квантовой механики позволяет установить соответствие новой физической теории с классической механикой, «что коренной пересмотр наших физических представлений может быть связан с простым усовершенствованием соответствующей математической схемы». В первой главе сравниваются решения уравнений волновой механики и классической механики. Автор показывает, что классическую механику можно рассматривать как предельный случай волновой. В следующих главах рассматриваются математические теории квантовой механики в операторной и матричной формах.

Здесь нет изложения теории операторов в гильбертовом пространстве или спектральной теории матриц. Переход к операторной форме рассматривается как формальный способ, приводящий к более глубокому пониманию теории и важным обобщениям. Сколько-нибудь общая теория операторов не излагается. Переход к операторам производится весьма формально. Например, уравнение Шредингера, ранее данное в классической записи

$$\nabla^2\psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t} + U\right)\psi = 0$$

переписывается в виде

$$D\psi = 0,$$

где D означает оператор

$$D = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t} + U$$

или в виде

$$D = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + p_t + U .$$

При дальнейшей замене

$$p_x = g_x,\ p_y = g_y,\ p_z = g_z,\ p_t = W$$

получается классическое соотношение между количеством движения g, полной энергией W и потенциальной энергией U:

$$\frac{1}{2m}g^2 + U - W = 0 .$$

Переход от классической механики к волновой формально трактуется как обратный переход к оператору Шредингера D и умножением его на волновую функцию ψ. «Умножение» означает применение оператора к функции ψ. Введение понятий собственной функции и собственных значений (характеристических по терминологии книги) происходит на конкретных операторах с разъяснениями их физического смысла. Здесь же обращается внимание на коммутативные операторы и совпадение систем характеристических функций для них.

Ортогональность и нормальность характеристических функций рассматриваются также на конкретном физическом материале. Так делается заключение о сходимости интегралов типа $\int \psi^0 \psi^{0^*} dv$ и возможности нормировки собственных функций для дискретного спектра. Спектр определяется как дискретный или непрерывный ряд значений физической величины на примере энергии. Ортогональность характеристических функций получается непосредственными преобразованиями и интегрированием. В случае непрерывного спектра отмечается необходимость рассматривать состояния, представленные суперпозицией точно определенных состояний, соответствующих очень малому интервалу Δc параметра c, то есть волновых функций вида $\int\limits_{\Delta c} \psi_c dc = \varphi \Delta c$.

Далее показывается возможность представления физических величин с помощью матриц в случае дискретного спектра. В отдельном параграфе прослеживается, как физики постепенно перешли от рассмотрения классических механических величин к квантовым. Классические физические величины, относящиеся к стационарным движениям, разлагались с помощью рядов Фурье в сумму гармонических колебаний. Идеи Бора о соответствии квантовых и классических описаний явлений позволили Гейзенбергу сформулировать матричную теорию.

В последующих разделах книги дается применение матричного метода к различным вопросам квантовой механики (теории возмущений, механика электрона, начала теории системы частиц, вторичное квантование и ряд вопросов теории преобразований).

§ 4. Теория Дирака.

В ряде статей 1925-26 гг., а затем в книге «Принципы квантовой механики» [79] в 1930 г., Дирак выбрал другую математическую форму для изложения квантовой механики. Признавая беспредельное могущество математики как орудия для овладения абстрактными понятиями, Дирак считает, что «нужно уметь владеть физическими идеями безотносительно к их математической форме». В книге он выдвигает физику на передний план, а относительно математической формы выбирает «символический метод, непосредственно оперирующий в абстрактной форме фундаментальными величинами теории». В предисловии Дирак указывает, что символический метод, по-видимому, глубоко проникает в природу вещей и выражает надежду, что «по мере того, как его будут больше понимать и будет развиваться математический аппарат». Так же он отмечает, что математический аппарат матричной и волновой механики более привычен и отражает историческое развитие квантовой механики. Дирак не ставил своей целью дать математическое обоснование своих методов. Смелое введение им новых понятий, таких как δ-функция, оправдывается получением правильных физических результатов. Дирак в своей книге высказывает мысль, что новые физические теории вызывают появление новых форм математического аппарата, новых систем аксиом и правил действия.

Развитие математики в последующие десятилетия привело к уточнению и развитию методов Дирака. Создание последовательной теории обобщенных функций, включающей и теорию δ-функции Дирака, служит наиболее ярким примером.

Квантовая механика стимулировала развитие и другого направления в функциональном анализе, что способствовало развитию общей теории разложений по собственным функциям.

Для нахождения спектра уравнения Шредингера для одномерного гармонического осциллятора

$$-y'' + x^2 y = \lambda y, \qquad (-\infty < x < \infty)$$

Дирак применил алгебраический метод, используя перестановочные условия для оператора дифференцирования $P = i\dfrac{d}{dx}$ и оператора Q умножения на x

$$PQ - QP = iI\,.$$

Оператор полной энергии H имеет в этом случае вид $H = P^2 + Q^2$.

Алгебраическое исследование спектра этого оператора было указано Ахиезером и изложено в книге Глазмана [66]. Доказано, что спектр самосопряженного оператора H состоит из собственных значений $\lambda_k = 2k+1$, $(k = 0,1...)$ и является простым. В предположении простоты спектра получено матричное представление операторов H, P, Q.

Ранее эта задача была решена Реллихом [217] без предположения о простоте спектра.

Использование перестановочных соотношений для нахождения собственных функций дифференциальных операторов на основе этого приема Дирака было развито Рашевским в ряде статей [215,216]. Дирак в своих работах широко использовал введенную им δ-функцию. Подобные ситуации возникали и раньше при рассмотрении других вопросов математического анализа и математической физики. Как известно, это привело к созданию теории обобщенных функций по Соболеву или теории распределений по Шварцу.

Введение обобщенных функций в спектральный анализ и получение аналога теоремы разложения было сделано в работе Гельфанда и Костюченко в 1955 г. [55].

Основной их результат состоит в том, что всякий самосопряженный оператор, A, действующий в сепарабельном гильбертовом функциональном пространстве *H*, имеет полную систему обобщенных собственных функций, являющихся функционалами над некоторым линейным топологическим пространством основных функций Φ.

В работе Березанского [9] было достигнуто уточнение результата в гильбертовом пространстве вместо линейного топологического. В этом направлении основная спектральная теорема была сформулирована и доказана Мореном в книге "Методы гильбертова пространства" следующим образом: Пусть H_n – линейное подмножество гильбертова пространства *H*, наделенного такой предгильбертовой структурой, то есть H_n – унитарное пространство с таким новым скалярным произведением, что вложение

$$I_n : H_n \to H$$

является оператором Гильберта-Шмидта. Предположим, кроме того, что индуктивный предел $\Phi = \lim_n ind H_n$ является множеством, плотным в пространстве *H*. Тогда преобразование Фурье задается формулой

$$\Phi \supset \varphi_i(x) \to \varphi_k(\lambda) = < \varphi_1, e_k(\lambda) >, \qquad k = 1, \ldots, \dim \widehat{H}(\lambda),$$

где $e_k(\lambda)$ – так называемые обобщенные собственные элементы, принадлежащие пространству Φ^*. Формула обобщенного преобразования Фурье принимает теперь вид (в предположении, что $A\Phi \subset \Phi$)

$$< A\varphi_1, \varphi_k(\lambda) > = < \varphi_1, \widehat{A}(\lambda)\varphi_k(\lambda) >$$

Преобразование $F_k(\lambda)$, заданное формулой

$$F_k(\lambda) : H_n > \varphi \to \widehat{\varphi}(\lambda) = (F\varphi)(\lambda) \in \widehat{H}(\lambda)$$

является отображением Гильберта-Шмидта для μ-почти всех $\lambda \in \Delta$. Из этой основной теоремы удается получить теоремы о разложении по собственным функциям для операторов классического анализа, в том числе и дифференциальных.

Теория разложения по обобщенным функциям изложена в названой уже книге Морена, в серии книг Гельфанда, Шилова "Обобщенные функции" и в ряде других руководств по функциональному анализу.

§ 5. «Начала квантовой механики» Фока

В отличие от других авторов книг по квантовой механике, появившихся в первые годы, а впрочем и позже, Фок значительное внимание уделяет математической стороне квантовой механики, считая, что подробное рассмотрение математической части облегчает понимание предмета. Точная формулировка новых понятий требует более развитого математического аппарата. Первое издание книги появилось в 1937 г. [275].

Появление в 1976 г. второго издания говорит, что за 42 года книга не потеряла своего значения. Изложение математического аппарата квантовой механики в книге Фока можно считать конспективным, не претендующим на математическую полноту и строгость. Отметив, что в квантовой механике задача об определении стационарных состояний системы представляет аналогию с задачами математической физики, в которых выделяются определенные состояния из ряда остальных, то есть задачами на собственные значения линейных операторов, Фок указывает на основополагающие работы Шредингера. Квантовая механика сопоставляет каждой физической величине определенный линейный оператор, а математический аппарат квантовой механики есть учение о линейных операторах. Понятие об операторе дается как переход от одной функции к другой $\psi(x) = L[\varphi(x)]$.

Допускаются функции с комплексными значениями как от непрерывных, так и от прерывных вещественных переменных. Линейный оператор определяется свойствами аддитивности и однородности, а в качестве примеров указаны операторы умножения на x, дифференцирование по x, оператор Лапласа и интегральный оператор

$$Lf(x) = \int_a^b K(x,\xi) f(\xi) d\xi .$$

Сопряженный оператор L^* определяется функциональным уравнением

$$\int_a^b \left(\overline{g} \cdot Lf - \overline{L^* g} \cdot f \right) d\tau = 0 .$$

К функциям f и g предъявляются общие условия, обеспечивающие выполнение применяемых операций и предельных условий, о которых точно не говорится. Отметим, что в случае дискретной переменной оператор может быть задан матрицей K_{nm}, сопряженный оператор характеризуется матрицей $K'_{mn} = \overline{K_{nm}}$.

Приведены условия самосопряженности оператора и отмечено, что оператор дифференцирования самосопряженный с множителем $-i$

$$L_1 f = -i \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Далее даны понятия произведения операторов, правил коммутирования, коммутирующих операторов, унитарного оператора. Основной задачей в теории операторов указано исследование уравнения $Lf = \lambda f$.

Для «нормальных» операторов, определяемых условием $LL^* = L^* L$, формулируется однородная задача и ставится проблема собственных значений. Здесь же вводится понятие собственных функций. Совокупность собственных значений оператора называется его спектром, ряд отдельных собственных значений называется точечным спектром, а собственные значения, заполняющие сплошной промежуток – сплошным спектром. Доказывается вещественность собственных значений самосопряженного оператора. Введение интеграла Стилтьеса позволяет рассмотреть оператор умножения на независимую переменную, для которого нет собственных значений в обычном смысле, но существует функция $F(x,\lambda)$, соответствующая интегралу от $f(x,\lambda)$, взятому по параметру λ

$$F(x,\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} f(x,\lambda) d\lambda ,$$

то есть случай непрерывного спектра.

Далее рассмотрена ортогональность и нормировка собственных функций, как для дискретного спектра, так и для сплошного. Разложение по собственным функциям и понятие о замкнутости системы указано также для дискретного и сплошного спектра:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n f_n(x) \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2=\int|f(x)|^2\,dx,$$

$$f(x)=\int c(\lambda)d_\lambda F(x,\lambda), \quad c(\lambda)=\int F(x,\lambda)f(x)dx \quad \text{и} \quad \int|f(x)|^2\,dx=\int|c(\lambda)|^2\,d\lambda\,.$$

Отметим некоторые вопросы физического значения операторов в изложении Фока. Собственные значения оператора, сопоставляемого данной механической величине, суть те значения, которые может принять эта величина в условиях, создаваемых ее измерением. Вещественная физическая величина описывается самосопряженным оператором. Рассмотрены операторы для координаты, моментов и энергии. Для коммутативных операторов отмечено, что они имеют общие собственные функции. Рассмотрен способ представления операторов с помощью матриц, что позволяет автору сказать об эквивалентности матричной механики Гейзенберга и волновой механики де Бройля и Шредингера. Изложено вероятностное истолкование квантовой механики и показано, что математическое ожидание величины в состоянии ψ_n, задаваемого собственной функцией, равно собственному значению М.о. $L=\lambda_n$ с вероятностью, равной $|c_n|_e^2$. Указано распространение этих понятий и на сплошную часть спектра. В книге рассмотрено уравнение Шредингера для гармонического вибратора. В связи с решением уравнения Шредингера в частных случаях получены полиномы Чебышева-Эрмита, шаровые функции, полиномы Лежандра и Лагерра.

§ 6. «Математические основы квантовой механики» Неймана.

Наиболее полное и последовательное изложение математического аппарата квантовой механики было дано Нейманом в 1932 г, в книге «Математические основы квантовой механики» [185]. В отличие от ранее появившихся руководств по квантовой механике Зоммерфельда, Френкеля [277], Борна, Йордана, Фока [275] и других в книге Неймана физическим приложениям отведено второстепенное место, необходимое для понимания общих закономерностей. В ней довольно подробно исследованы вопросы статистической интерпретации квантовой теории, по признанию Неймана сложные и не проясненные до конца.

Появлению книги Неймана предшествовали его статьи по основам квантовой механики и по теории операторов в гильбертовом пространстве [183]. В книге, по выражению автора, дано «математически безукоризненное изложение новой квантовой механики, которая за последние годы достигла, в ее существенных частях, вероятно, уже окончательной формы».

Основным математическим аппаратом исследований Неймана по квантовой механике служит спектральная теория линейных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Теория гильбертова пространства и спектральная теория линейных операторов получила значительное развитие в трудах Неймана в связи с разработкой математических основ квантовой механики. В начале книги автор говорит о преимуществе его изложения перед матричным. Здесь же отмечается и существенное отличие излагаемого метода, опирающегося на гильбертову спектральную теорию, от метода Дирака, не удовлетворяющего в те годы требованиям математической строгости. Нейман высоко оценивает изложение Дирака, который «дал столь краткое и элегантное изложение квантовой механики, также имеющее инвариантный характер, что оно вряд ли может быть превзойдено в этом смысле».

Вся книга состоит из 6 глав: 1. Вводные замечания. 2.Общие свойства абстрактного гильбертова пространства. 3.Квантовомеханическая статистика. 4. Дедуктивное построение теории. 5. Общее рассмотрение. 6. Процесс измерения.

После очень кратного обзора развития квантовой теории до 1925 г., то есть до появления работ Гейзенберга и Шредингера, позволивших построить первые замкнутые системы квантовой теории, Нейман рассматривает первоначальные формулировки квантовой механики и эквивалентность двух теорий, построенных на основе теории преобразований и теории гильбертова пространства. Нейман, считая, что теория Дирака, вводящая несобственные конструкции, лежащие за пределами обычно употребляемых математических методов, предпочитает и дает изложение квантовой механики на основе теории гильбертова пространства.

Наиболее обширная глава книги содержит теорию абстрактного гильбертова пространства, в значительной степени развитую Нейманом в связи с потребностями квантовой механики. Рассмотрим подробнее эту главу книги Неймана. Автор прежде всего ставит задачу определения гильбертова пространства, дающего математическое обоснование квантовой механики. Определение гильбертова пространства H происходит постулированием основных свойств:

А. H есть линейное пространство, то есть в H определено сложение $f+g$ и умножение на «скаляр» af, где f,g – элементы H, a – комплексное число; $f+g$ и af принадлежат H; H имеет нулевой элемент, причем выполняются известные свойства: коммутативность и ассоциативность сложения, дистрибутивность умножения двух видов $(a+b)f = af + bf$ и $a(f+g) = af + ag$, ассоциативность умножения и правила умножения на нуль и единицу. Далее следуют правила вычитания, определение линейной независимости элементов, линейного многообразия.

В. В H определено эрмитово внутреннее произведение, то есть для элементов f и g определено (f,g) – комплексное число со свойствами: $(f'+f'',g) = (f',g) + (f'',g)$ – дистрибутивность относительно первого множителя; $(af,g) = a(f,g)$ – ассоциативность относительно первого множителя; $(f,g) = \overline{(g,f)}$ – эрмитова симметрия, $(f,f) \geq 0$ и =0 при $f = 0$ – дефинитность.

Здесь же дается определение «длины» элемента f – $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$ и расстояния элементов f, g – $\|f-g\|$. В качестве теорем доказываются неравенства

$$|(f,g)| \leq \|f\|\|g\|, \qquad \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

и равенство

$$\|af\| = |a|\|f\|$$

Нейман постулирует размерность пространства в виде свойства С в двух случаях. $C^{(n)}$ – существует точно n линейно независимых векторов, причем n – наибольшее число их.

$C^{(\infty)}$ - существует произвольно много линейно независимых векторов. Далее добавляются еще два свойства.

D. Пространство H полно.

E. Пространство H сепарабельно, то есть имеется последовательность элементов $f_1, f_2, \ldots$, всюду плотная в H. Для конечномерных пространств сделана оговорка, что свойства D и E для них следуют из A, B, $C^{(n)}$.

На основе этого определения абстрактного гильбертова пространства Нейман развивает геометрию гильбертова пространства. Прежде всего, даются определение ортогональности двух элементов и двух линейных многообразий, ортонормированной системы и полноты системы. Система называется полной, если она не может быть подмножеством другой ортонормированной системы, содержащей дополнительные элементы. Другими словами, полнота ортогональной системы означает, что не существует элемента, отличного от нулевого, ортогонального ко всей системе, или, что элемент, ортогональный к системе, есть нулевой. После введения понятия замкнутого линейного многообразия доказываются теоремы о полноте ортонормированных систем в $C^{(n)}$ и $C^{(\infty)}$. Отмечается, что в случае пространства $C^{(\infty)}$ всякая ортонормированная система конечная или счетная. В случае полноты она бесконечна, но бесконечность системы только необходимое, но не достаточное условие полноты. Далее доказывается абсолютная сходимость рядов $\sum_{v}(f,\varphi_0)(\overline{g,\varphi_v})$, где $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n,...$ ортонормированная система, откуда следует неравенство Бесселя $\sum_{v}\left|(f,\varphi_v)\right|^2 \le \|f\|^2$.

Следующая теорема устанавливает необходимое и достаточное условие сходимости ряда $\sum_{v=1}^{\infty} x_v\varphi_v$ в виде сходимости ряда квадратов модулей коэффициентов, то есть $\sum_{v=1}^{\infty}(x_v)^2$. Как следствие получается, что в случае, если $f=\sum_{v} x_v\varphi_v$ то $x_v=(f,\varphi_v)$, то есть что это ряд Фурье элемента f. Обратная теорема имеет место только в виде, что для произвольного f ряд Фурье для этого элемента $\sum_{v} x_v\varphi_v$, где $x_v=(f,\varphi_v)$, сходится к f', а $f-f'$ ортогональна к $\varphi_1,\varphi_2,...$. Эти теоремы подводят к формулировке критерия полноты ортонормированной системы $\varphi_1,\varphi_2,...$ в трех видах:

α) Порожденное $\varphi_1,\varphi_2,...$ замкнутое линейное многообразие $[\varphi_1,\varphi_2,...]$ равно H.

β) Всегда $f=\sum_{v} x_v\varphi_v$, где $x_v=(f,\varphi_v)$.

γ) $(f,g)=\sum_{v}(f,\varphi_v)(\overline{g,\varphi_v})$

Устанавливается логическая схема
полнота $\to \beta) \to \alpha) \to$ полнота.

Достаточность γ) следует из предположения ортогональности f ко всем φ_v и при $f=g$ получим $f=0$. Необходимость γ) следует из β). Процессом ортогонализации Шмидта отмечен переход от произвольной последовательности элементов к ортонормированной, на которую натягивается то же самое линейное многообразие, что и на исходную последовательность. Существование ортонормированной системы для всякого замкнутого линейного многообразия M, очевидное для конечномерного пространства $C^{(n)}$, требует сепарабельности в бесконечномерном случае. В заключение показывается, что любое гильбертово пространство допускает одно однозначное отображение на множество всех $(x_1,x_2,...,x_n)$ или всех $(x_1,x_2,...)$ с конечной суммой $\sum_{v=1}^{\infty}|x_v|^2$, причем

1. Из $f \leftrightarrow \{x_1,x_2,...\} \Rightarrow af=\{ax_1,ax_2,...\}$.

2. Из $\left.\begin{matrix} f \leftrightarrow \{x_1,x_2,...\} \\ g \leftrightarrow \{y_1,y_2,...\} \end{matrix}\right\} \Rightarrow f+g=\{x_1+y_1,x_2+y_2,...\}$

3. Для $f, g \in \square$ имеет место $(f, g) = \sum_{v=1}^{\infty} x_v \overline{y_v}$.

Были введены пространства F_z и F_Ω. Первое как множество последовательностей с конечной суммой квадратов модулей $\sum |x_v|^2 < \infty$ или функций на множестве натуральных чисел $z = \{1, 2, ..., n, ...\}$.

Такие последовательности были введены в матричной теории квантовой механики. Отмечено, что это условие в духе гильбертовой теории задач о собственных значениях для интегральных уравнений.

В волновой теории Шредингера для волновых функций φ, рассматриваемых в конфигурационном пространстве $\Omega(q_1, q_2, ..., q_n)$, возможность физической интерпретации волновой функции требует конечности интеграла от квадрата модуля функции, то есть

$$\int_\Omega |\varphi(g_1, g_2, ..., g_n)|^2 \, dg_1 dg_2 ... dg_n < \infty .$$

Очевидно, что F_z есть гильбертово пространство идентичное $\square^{\infty}$. Показывается, что F_Ω есть гильбертово пространство проверкой постулатов А – Е.

Изоморфизм пространств F_z и F_Ω (теорема Фишера-Рисса) и эквивалентность матричной и волновой теорий квантовой механики доказывается. Для дальнейшего построения теории операторов потребовалось более детальное изучение замкнутых линейных многообразий в гильбертовом пространстве. Понятие линейного многообразия, натянутого на множество, расширено до линейного многообразия, натянутого на множество, получающегося объединением множеств $\alpha, \beta, ...$ и элементов $f, g, ...$ $\{\alpha, \beta, ..., f, g, ...\}$ и до его замыкания $[\alpha, \beta, ..., f, g, ...]$.

В частности, если $\mathsf{M}, \mathsf{N}, ...$ замкнутые линейные многообразия, то линейное многообразие состоит из всех сумм $f + g + ...(f + \mathsf{M}, g + \mathsf{N}, ...)$, а замкнутое многообразие $[\mathsf{M}, \mathsf{N}, ...]$ получается из незамкнутого присоединением всех его предельных точек. Для конечного числа многообразий $\mathsf{M}, \mathsf{N}, ...$ эти образования совпадают.

Если M есть подмножество H, то H – множество всех элементов, ортогональных ко всем элементам M, есть линейное замкнутое многообразие и называется замкнутым линейным многообразием, дополнительным к M и обозначается

$H - \mathsf{M}$.

Простейшими замкнутыми линейными многообразиями будут: $H, \{0\} = [0]$ – множество, состоящее из нулевого элемента, и множество всех af, где f – заданный элемент H, a – переменное, $\{f\} = [f]$. Для дальнейшего важна теорема об ортогональном дополнении или о разложении элемента f.

Теорема 10. Пусть M есть замкнутое линейное многообразие. Тогда каждый элемент f может быть разделен одним и только одним способом на две компоненты $f = g + h$, где g из M и h из $H - \mathsf{M}$. Элемент g называется проекцией f на M, h – нормальной к M составляющей f. До общего определения оператора в гильбертовом пространстве Нейман вводит оператор проектирования f на замкнутое линейное многообразие $g = P_{\mathsf{M}} f$.

Для оператора P_{M} доказываются свойства:

$$P_{\mathsf{M}} (a_1 f_1 + ... + a_n f_n) = a_1 P_{\mathsf{M}} f_1 + ... + a_n P_{\mathsf{M}} f_n ,$$

$$\left(P_{\mathsf{M}} f, g\right)=\left(f, P_{\mathsf{M}} g\right),$$
$$P_{\mathsf{M}}\left(P_{\mathsf{M}} f\right)=P_{\mathsf{M}} f .$$

Первое свойство определяет линейный оператор, второе – его эрмитовость, третье свойство оператора проектирования может быть записано в виде $P_{\mathsf{M}}^2=P_{\mathsf{M}}$ Более общее определение проекционного оператора не зависит от M и характеризуется теоремой:

Оператор E определенный повсюду, есть проекционный оператор, то есть $E=P_{\mathsf{M}}$ для некоторого замкнутого линейного многообразия M если и только если он обладает следующими свойствами:

$$(Ef,g)=(f,Eg), \quad E^2=E .$$

В этом случае M однозначно определяется по E. Легко видеть, что и оператор $1-E$ также проекционный. Далее, для проекционных операторов доказывается, что $\|Ef\|^2=(Ef,f)$, $\|Ef\|\leq\|f\|$, $\|Ef\|=0$, если $f\in H-\mathsf{M}$ и $\|Ef\|=\|f\|$, если $f\in\mathsf{M}$. Отсюда следует, что проекционные операторы непрерывны. Относительно действий над проекционными операторами устанавливается, что EF будет также проекционным тогда и только тогда, когда E и F коммутируют, то есть $EF=FE$ (E проекционный оператор для замкнутого линейного многообразия M, F – для N, то EF – для $\mathsf{P}=\mathsf{M}\cap\mathsf{N}$). Оператор $E+F$ будет проекционным тогда и только тогда, когда $EF=0$ (или FE=0), $E-F$ проекционный тогда и только тогда, когда $EF=F$ (или $EF=F$). Отметим также теорему о том, что утверждение $E\leq F$ эквивалентно тому, что всегда справедливо $\|Ef\|\leq\|Ff\|$.

Для каждой системы проекционных операторов $E_1,E_2,...,E_k$ отмечается необходимое и достаточное условие того, чтобы сумма $E_1+E_2+...+E_n$ были проекционным оператором, и состоит в том, чтобы E_m,E_l были попарно ортогональны. При этом сумма $E_1+E_2+...+E_n$ – оператор проектирования в $\mathsf{M}_1+\mathsf{M}_2+...+\mathsf{M}_n$.

Наконец, для возрастающей или убывающей последовательности проекционных операторов вводится понятие сходимости к проекционному оператору E в том смысле, что для всех f выполнено $E_n f\to Ef$ и при этом все $E_n\leq E$ или $E_n\geq E$.

После изучения геометрии гильбертова пространства Нейман переходит к теории линейных операторов в нем. Оператор H определен как функция, заданная на подмножестве H со значениями из H, то есть соответствие $f\to Hf$ $\left(f,Hf\in\mathrm{H}\right)$. Оператор A, определенный на линейном многообразии и обладающий свойством

$$A\left(a_1 f_1+...+a_n f_n\right)=a_1 Af_1+...+a_n Af_n$$

называется линейным.

Далее рассматриваются только линейные операторы, определенные на всюду плотном множестве. Отказ от требования определенности оператора во всем пространстве обосновывается квантовомеханическими соображениями, связанными с операциями умножения на независимое переменное q и оператором дифференцирования $\frac{h}{2\pi i}\frac{d}{dq}$, так как при конечном $\int\limits_{-\infty}^{\hbar}\left(\varphi(q)\right)^2 dq$ $q\varphi(q)$ может не принадлежать гильбертову пространству, а для второго оператора функции $\varphi(q)$ могут быть не дифференцируемыми или такими, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{h}{2\pi i}\frac{d}{dq}\varphi(q)\right|^2 dq=\frac{h^2}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d}{dq}\varphi(q)\right|^2 dq$$

не конечен (например, $|q|^{\frac{1}{2}}e^{-q^2}$ или $e^{-q^2}\sin e^{q^2}$). Но можно указать всюду плотное множество функций, на котором эти операторы определены. Например, для $\varphi(q)$, отличной от нуля в конечном интервале $c\le q\le C$ и всюду непрерывно дифференцируемой. Сопряженными операторами A и A^* в книге Неймана названы операторы, имеющие одну и ту же область определения, и в этой области $(Af,g)=(f,A^*g)$ и $(A^*f,g)=(f,Ag)$, причем одно равенство следует из другого в силу симметрии.

Отмечены единственность сопряженного оператора, самосопряженность некоторых операторов и формулы: $(aA)^*=\overline{a}A^*$, $(A\pm B)=A^*\pm B^*$ (если $A\pm B$ может быть определена, то есть их области определения всюду плотны) и $(AB)^*=B^*A^*$, $\left(A^{-1}\right)^*=\left(A^*\right)^{-1}$ при некотором ограничении на область определения. Как примеры рассматриваются самосопряженные операторы q_l и $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_l}$, интегральный оператор

$$A\varphi(q_1,q_2,...,q_k)=\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}K\left(q_1,q_2,...,q_k,q_1',q_2',...,q_k'\right)dq_1'dq_2'...dq_k',$$

для которого A^* также интегральный оператор с ядром $K\left(q_1,q_2,...,q_k,q_1',q_2',...,q_k'\right)$. Для гильбертова пространства последовательностей с некоторыми уточнениями, касающимися оперирования с бесконечными суммами, устанавливается, что линейный оператор A характеризуется заданием матрицы $a_{\mu\nu}$, а сопряженный оператор A^* – матрицей $\overline{a_{\nu\mu}}$:

$$a_{\mu\nu}^*=\overline{a_{\nu\mu}},\ \ A\{x_1,x_2,...\}=\{y_1,y_2,...\},\ \ y_\mu=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_{\mu\nu}x_\nu.$$

Далее вводятся три важных для квантовой механики понятия: эрмитова оператора, если $A^*=A$, дефинитного /для эрмитова/, если $(Af,f)\ge 0$ где вещественность очевидна: $(A^*f,f)=(f,Af)=\overline{(Af,f)}$ и унитарного оператора U, если $UU^*=U^*U=f$. Для унитарного оператора имеем $U^*=U^{-1}$, $(Uf,Ug)=(f,g)$ и $\|Uf\|=\|f\|$. Обратно, если U определен всюду и принимает все значения, $U^*=U^{-1}$, $(Uf,Ug)=(f,g)$ то U унитарный. Унитарный оператор всегда непрерывный: $\|Uf-Ug\|=\|U(f-g)\|=\|f-g\|$, тогда как эрмитовы операторы, в частности операторы квантовой механики, не непрерывны. Например, для $\varphi_q=a^{-bq^2}$ интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(q)|^2\,dq,\qquad \int q^2|\varphi(q)|^2\,dq,\qquad \int\left|\frac{d}{dq}\varphi(q)\right|^2 dq$$

пропорциональны, соответственно $a^2b^{-\frac{1}{2}}$, $a^2b^{-\frac{3}{2}}$, $a^2b^{\frac{1}{2}}$, так что двум из них могут быть предписаны произвольные значения. Для унитарных операторов U и V следует унитарность U^{-1}, UV, степеней U^n. Для эрмитовых же операторов A и B отмечается, что $A\pm B$ эрмитовы, aA эрмитов только для вещественных a, исключая $A\equiv 0$, AB

эрмитов, если A и B коммутируют, степени оператора A^n эрмитовы, как и A^{-1}, если он существует, а также и полиномы с вещественными коэффициентами эрмитовы. Эрмитовыми оказываются все проекционные операторы и операторы квантовой механики q_l и $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_l}$.

При эрмитовом A и произвольном X эрмитовым оператором будет XAX^*. Следовательно и X^*X, XX^* при $A=1$, а при унитарном U оператор UAU^{-1} также эрмитов. Непрерывность линейных операторов характеризуется теоремой 18: Линейный оператор R непрерывен всюду, если он непрерывен в точке $f=0$. Необходимым и достаточным условием для этого является существование постоянной C такой, что всегда $\|Rf\| \le C\|f\|$. В свою очередь это условие эквивалентно тому, что всегда справедливо неравенство

$$\left|(Rf,g)\right| \le C\|f\|\|g\| \qquad (*)$$

Для эрмитовых R этого достаточно потребовать только для $f=g: \left|(Rf,f)\right| \le C\|f\|^2$ или в силу вещественности (Rf,f)

$$-C\|f\|^2 \le (Rf,f) \le C\|f\|^2.$$

Понятие непрерывности операторов Гильберт характеризовал как «ограниченность», то есть критерием $(*)$. Приведенные оценки для эрмитовых операторов приводят к определению полуограниченных (сверху или снизу) операторов. В частности, дефинитный оператор полуограничен снизу. Для эрмитова и дефинитного оператора R имеет место неравенство $\left|(Rf,g)\right| \le \sqrt{(Rf,f)(Rg,g)}$, из $(Rf,f)=0$ следует, что $Rf=0$.

Если операторы R и S коммутируют, то коммутируют и R и S^n $(n=0,1,...)$. Если существует S^{-1}, то R коммутирует с S^{-n}. Если R коммутирует с S и T, то R коммутирует с $S \pm T$, ST. Отсюда получается, что если R и S коммутируют, то коммутируют любые полиномы из R с любыми полиномами из S. В частности, коммутируют все полиномы по R между собой. Центральной проблемой квантовой механики, как это убедительно показал Нейман, оказалась проблема собственных значений, которая в матричной теории привела к решению системы уравнений

$$\sum_{\nu} h_{\mu\nu} x_\nu = \lambda x_\mu \qquad (\mu = 1,2,...),$$

а в волновой теории к решению уравнения

$$H\varphi(q_1,q_2,...,q_k) = \lambda\varphi(q_1,q_2,...,q_k).$$

В обоих случаях нужно было найти нетривиальные решения. Тривиальным решением будут при произвольном λ нулевая последовательность (0,0,...) в первом случае и $\varphi(q_1,q_2,...,q_k)=0$ во втором. Эти проблемы могут быть объединены в одну: найти все решения $\varphi \ne 0$ и соответствующие значения λ уравнения $H\varphi = \lambda\varphi$, где H – эрмитов оператор, отвечающий функции Гамильтона, φ – элемент гильбертова пространства, λ – вещественное число. О числе нужных решений теорема требует, чтобы в матричном случае из этих решений могла быть образована матрица S, имеющая обратную S^{-1}, а в волновой теории, чтобы любую функцию $\varphi(q_1,q_2,...,q_k)$ можно было разложить в ряд

$$\varphi(q_1,q_2,...,q_k)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\varphi_n(q_1,q_2,...,q_k),$$

где $\varphi_1,\varphi_2,...$ могут принадлежать различным значениям λ. Отметив связь этих требований, Нейман показывает, что требование вещественности λ отпадает, так как оно следует из равенства $(H\varphi,\varphi)=(\lambda\varphi,\varphi)=\lambda(\varphi,\varphi)=\lambda$.

Достаточно рассмотреть только решения с $\|\varphi\|=1$, так как $a\varphi$ также решение. Здесь же мимоходом доказывается ортогональность решений φ_1 и φ_2, принадлежащих различным λ_1 и λ_2. Нейман последовательно развивает постановку проблемы собственных значений. Показав, что решения, взятые по одному для каждого λ, уже образуют ортонормированную систему /конечную или бесконечную последовательность/, Нейман дополняет эту систему в случае кратного собственного значения λ_ρ полным набором всех $\varphi_{\rho,\nu}$. Здесь же отмечено, что кратность собственного значения может быть и бесконечной, например, $\lambda=1$ для $H=1$. Решение проблемы собственных значений в смысле квантовой механики казалось бы должна была состоять только в том, чтобы найти столько решений $\varphi=\varphi_1,\varphi_2,...$ и $\lambda=\lambda_1,\lambda_2,...$, чтобы из них можно было бы образовать полную ортонормированную систему. Но в волновой теории оказывается, что часть решений не обладает конечным интегралом от квадрата, а ортонормированная система решений не оказывается полной.

Так Нейман подходит к необходимости объяснить новую постановку проблемы собственных значений с учетом непрерывного и дискретного спектра, как это было установлено Гильбертом для операторов. Детально анализируя постановку проблем в конечномерном пространстве H_n Нейман приходит к постановке задачи в виде: для данной эрмитовой матрицы $H=\{h_{\mu\nu}\}$ надо найти семейство эрмитовых матриц $E(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ со следующим свойствами:

S_1: При достаточно $\begin{Bmatrix}\text{малых}\\ \text{больших}\end{Bmatrix}\lambda,\quad E(\lambda)=\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}$,

$E(\lambda)$ как функция от λ постоянна всюду, за исключением конечного числа точек, где она изменяется скачками. Скачок происходит слева от данной точки.

S_2: Всегда $E(\lambda')E(\lambda'')=E(\min(\lambda',\lambda''))$.

S_3: Выполняется $H=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)$, где интеграл понимается в смысле Стилтьеса.

После этого делается обобщение на бесконечномерное пространство H_∞, где H и $E(\lambda)$ понимаются как эрмитовы операторы. Свойство S_2 при $\lambda'=\lambda''=\lambda$ приобретает вид

$E(\lambda)^2=E(\lambda)$,

а это свойство операторов проектирования. Проблема собственных значений формулируется в следующем виде: для данного эрмитова оператора H ищем семейство проекционных операторов $E(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<+\infty)$ со свойствами:

$\overline{S_1}$: При $\lambda\to-\infty$ или $\lambda\to+\infty$ $E(\lambda)f\to0$ или $E(\lambda)f\to f$, соответственно.

$\overline{S_2}$: Из неравенства $\lambda'\le\lambda''$ следует, что $E(\lambda')\le E(\lambda'')$.

$\overline{S_3}$: Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda^2d\left(\|E(\lambda)f\|\right)^2$ по природе своей сходящийся, /равный нулю или положительному конечному числу/ или расходящийся, характеризует область определения оператора $H : Hf$ определено тогда и только тогда, когда этот интеграл конечен (или нуль). В этом случае для всех g выполнено $(Hf, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\left(E(\lambda) f, g\right)$.

Последний интеграл абсолютно сходится, если первый конечен. Семейство проекционных операторов $E(\lambda)$ называется разложением единицы. Итак, проблема сведена к вопросу о существовании для данного эрмитова оператора разложения единицы. Нужно, чтобы оно существовало и было единственным. Дальнейшее обсуждение проблемы касается того, в какой степени новая формулировка совпадает со старой, то есть когда и как операторы $E(\lambda)$ определяют прежние собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, ...$ и собственные функции $\varphi_1, \varphi_2, ...$

На этом пути прежде всего показывается, что, если разложение единицы $E(\lambda)$ принадлежит эрмитову оператору A, то уравнение $Af = \lambda f$ имеет решение $f \neq 0$ только в точках разрыва $E(\lambda)$ и эти решения образуют замкнутое линейное многообразие M_{λ_0}. Если все $\mathsf{M}_{\lambda_0} \left(-\infty < \lambda_0 < \infty\right)$ вместе натягивают H_∞, то полная ортонормированная система существует и наоборот. Точки разрыва непрерывности $E(\lambda)$ образуют по определению дискретный спектр оператора A. Множество таких значений λ или конечно или образует последовательность. Доказывается взаимная ортогональность многообразий M_{λ_0}. Приводится общее определение спектра как множества всех точек, в окрестности которых $E(\lambda)$ не постоянна. Подробное исследование спектра не проводится. Автор ограничивается только ссылкой на работы Гильберта. Внимание автора переключается на построение $E(\lambda)$ в случае чисто дискретного спектра, то есть когда есть полная ортонормированная система решений уравнения $A\varphi = \lambda\varphi$.

Изменяя формулировку определения, разложение единицы для конечномерного пространства записывается формулой: $E(\lambda) = \sum_{\lambda_\rho \leq \lambda} P_{[\varphi_\rho]}$ и доказывается выполнение условий $\overline{S_1}, \overline{S_2}, \overline{S_3}$. На основе нестрогих эвристических рассуждений Дж. фон Нейман рассматривает два случая чисто непрерывного спектра для эрмитовых операторов $A = q_i$ пространстве всех функций $f(q_1, q_2, ..., q_l)$ с конечным

$$\int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(q_1, q_2, ..., q_l) \right|^2 dq_1 dq_2 ... dq_l .$$

$E(\lambda_0)$ определяется как $P_{\mathsf{N}_{\lambda_0}}$, где N_{λ_0} состоит из тех f которые не равны нулю только при $q_i = 0$ и получается формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\left(\mathrm{E}(\lambda) f, g\right) = (Af, g).$$

За точной формулировкой идеи построения $E(\lambda)$ автор отсылает к работам Хеллингера и Вейля.

В качестве второго примера рассмотрен оператор $Af(g) = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q} f(q)$. Решения уравнения $A\varphi = \lambda\varphi$, т.е. функции $\varphi(q) = Ce^{\frac{2\pi i}{h}\lambda q}$ не принадлежат гильбертову пространству, кроме случая $C = 0;\ \varphi = 0$. Решение уравнения $A\varphi = \lambda\varphi$ ищется в виде функции

$$f(q) = \int_{-\infty}^{\lambda_0} C(\lambda) e^{\frac{2\pi i}{h}\lambda q} d\lambda$$

при подходящем подборе $C(\lambda)$. Действительно такие функции находятся, например, $C(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad \lambda \ge \lambda_1 \\ 0 & \text{для} \quad \lambda < \lambda_1 \end{cases}$, $\lambda_1 < \lambda_0$. Есть и другие примеры, указываемые теорией интегралов Фурье и преобразования Лапласа. В случае конечного интервала $a \le q \le b$ для эрмитовости оператора необходимо добавить граничные условия, например, $f(a) = f(b) = \theta \quad (|\theta| = 1)$. Теперь решение $f(q) = Ce^{\frac{2\pi i}{h}\lambda q}$ будет с интегрируемым квадратом абсолютного значения и спектр в силу выполнения граничного условия оказывается дискретным. Рассмотренный в заключение случай полуограниченного интервала $a \le q \le \infty$, где для эрмитовости оказывается необходимым граничное условие $f(0) = 0$, иллюстрирует отказ метода, то есть отсутствие разложения единицы. В дальнейшем это разъясняется максимальностью, но не гипермаксимальностью оператора. В заключение этого раздела рассмотрены формальные правила вычислений с операторами, представленными в символической форме

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda)$$

с помощью разложения единицы.

Показана коммутативность оператора A и проекционного оператора F, формулы для степеней оператора

$$A^n = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n dE(\lambda)$$

и для полиномов

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda) dE(\lambda)$$

Для операторов

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda) dE(\lambda), C = \int_{-\infty}^{\infty} s(\lambda) dE(\lambda)$$

следует, что

$$BC = \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda) s(\lambda) dE(\lambda) = CB,$$

а также

$$B^* = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{r(\lambda)} dE(\lambda), \quad aB = \int_{-\infty}^{\infty} ar(\lambda) dE(\lambda),$$

$$B \pm C = \int_{-\infty}^{\infty} \left(r(\lambda) \pm s(\lambda)\right) dE(\lambda).$$

Для обоснования теории операторных функций Нейман отсылает к своей работе 1931 г. и исследованиям Ф.Рисса. Систематическое спектральное изучение операторов связано с теорией неограниченных эрмитовых операторов, развитой Нейманом в работе 1929 г. и независимо от него М.Стоуном в то же время. Полная теория неограниченных операторов выходит за пределы книги по математическим основам квантовой механики.

Поэтому автор ограничивается формулировкой некоторых положений и частичными доказательствами. Как известно, непрерывность линейных операторов выражается тем, что $\|Af\| \le C\|f\|$ или в эквивалентной форме $\left|(Af, q)\right| \le C\|f\|\|g\|$ и $\left|(Af, f)\right| \le C\|f\|^2$, причем последнее только для эрмитовых операторов.

По Гильберту это условие непрерывности выражает понятие ограниченности. Именно для ограниченных (то есть непрерывных) эрмитовых операторов Гильберт поставил и решил проблему собственных значений. Полезным оказывается несколько более слабое понятие замкнутого оператора *A*.

Пусть $f_1, f_2, \ldots$ – последовательность, все Af_n имеют смысл и $f_n \to f$, $Af_n \to f^*$. Тогда Af также имеет смысл и $Af = f^*$. Для непрерывности заранее предполагается, что Af имеет смысл и следует, что $Af_n \to Af$.

Замкнутость может быть достигнута для всех эрмитовых операторов дополнительным определением оператора A в точках, где он не был определен. В частности, полагая для расширенного оператора $\tilde{A}$: $\tilde{A}f = f^*$, причем такое расширение оказывается однозначным. Нетрудно доказывается, что такое продолжение $\tilde{A}$ есть наименьшее замкнутое продолжение *A*. Условно можно записать, что если *B* также продолжение оператора *A*, то $\tilde{A} < B$ и $\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A}$. Поэтому в дальнейшем считается, что все эрмитовы операторы замкнуты. Если эрмитов оператор *A* непрерывен, то его замыкание $\tilde{A}$ определено на замкнутой области, к тому же всюду плотной, то есть во всем H_∞. По известной теореме Теплица замкнутый оператор, определенный всюду, непрерывен. Для непрерывных эрмитовых операторов по Гильберту существует одно и только одно разложение единицы. Интересно отметить, что в этом случае $E(\lambda)$ изменяется в интервале $-c < \lambda < c$, где $\|Af\|^2 \le c^2\|f\|^2$, и, наоборот, из ограниченности интервала изменения $E(\lambda)$ $\quad -c < \lambda < c$ следует непрерывность оператора *A*.

Дальнейшему изучению подвергаются не непрерывные эрмитовые операторы. Такие операторы определены не всюду в H_∞, но область их определения всюду плотна. По сделанному ранее замечанию можно ограничиться изучением замкнутых операторов. Рассмотрен в качестве примера оператор $A' = \dfrac{h}{2\pi i}\dfrac{\partial}{\partial q}$ в интервале $0 \le q \le 1$. Для эрмитовости необходимо наложение граничного условия $f(0) : f(1) = e^{-i\alpha}$ $/ 0 \le \alpha < 2\pi$ /. В этом случае говорят об операторе $A_\alpha{}'$, определенном на N_α. Вводится еще оператор $f_v{}'$, определенный на множестве N_0 с граничным условием $f(0) = f(1) = 1$. Все $\tilde{A}_\alpha'$ (замыкания оператора $A_\alpha{}'$) будут продолжениями $\tilde{A}_0{}'$. Выясняется, что $\tilde{A}_0{}'$ определен в весьма «узкой» области и возможны его замкнутые продолжения $\tilde{A}_\alpha{}'$, каждое из которых порождает свое решение проблемы собственных значений. Здесь вводится понятие максимального оператора, как эрмитова, не имеющего ни одного истинного продолжения. Ссылаясь на другие работы, отмечается теорема о возможности продолжения эрмитова оператора до максимального эрмитова и притом многими способами. Единственно однозначное расширение – это замыкание оператора $A \to \tilde{A}$. Ставится и обсуждается вопрос о разложении единицы для максимального оператора и возможность нескольких разложений для одного и того же максимального оператора. В общих чертах в книге излагается теория преобразования Кэли $U = \dfrac{A - i1}{A + i1}$, $\qquad A = -i\dfrac{U+1}{U-1}$.

Для унитарного оператора, каким может оказаться оператор U, существует единственное семейство проекционных операторов $E(\sigma)$.

Поэтому разрешимость проблемы собственных значений оператора A эквивалентна унитарности оператора U. Для замкнутого эрмитова оператора A устанавливается, что область определения G его кэли-образа U состоит из множества всех $Af+if$, тогда $Uf=(U-iA)f=Af-if$. Так как из $Af+if=0$ вытекает, что $f=0$, то способ определения оператора U оправдан. Область изменения оператора U состоит из $Af-if$ и обозначается F. Показывается замкнутость областей G и F и изометричность оператора U. Но унитарность будет тогда и только тогда, когда $G=F=H_\infty$. Отмечено, что если проблема собственных значений для A разрешима, то A максимален. Для максимального оператора A рассматриваются замкнутые линейные многообразия $H-G$ и $H-F$. Если ортонормированные системы, натягивающие эти многообразия, соответственно, $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_p$ и $\psi_1,\psi_2,...,\psi_p$ ($p=1,2,...,\infty,\ q=1,2,...,\infty$), $r=\mathrm{Min}(p,q)$, то определим оператор V в $[G,\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_r]$ для $f=\varphi+\sum_{\nu=1}^{r}a_\nu\varphi_\nu$, $Vf=U\varphi+\sum_{\nu=1}^{r}a_\nu\psi_\nu$. Здесь $V-$линейный изометрический оператор, для которого область определения /при $r=p$/ или область изменения /при $r=q$/ будет Н. Соответствующий ему по преобразованию Кэли оператор *B* оказывается истинным максимальным продолжением оператора *A*. Для квантовой механики невозможно отказаться от разрешимости проблемы собственных значений. Эрмитовы операторы, для которых проблема собственных значений разрешима, получают название гипермаксимальных. Отмечаются два класса замкнутых эрмитовых операторов, оказывающихся гипермаксимальными. Это непрерывные операторы и операторы, вещественные в какой-либо реализации H_∞, если они максимальны. Это справедливо и для всех дефинитных операторов.

В спектральной теории важным оказывается изучение коммутирующих операторов. Прежде всего это относится к непрерывным эрмитовым операторам R и S с принадлежащим им разложениям единицы $E(\lambda)$ и $F(\mu)$. Отмечается, что из коммутативности R и S следует коммутативность полиномов $P(R)$ и $P(S)$, а затем доказывается коммутативность всех $E(\lambda)$, и обратно, из коммутативности операторов $E(\lambda)$ следует коммутативность операторов R и S. Коммутативность для не непрерывных операторов, ограничиваясь гипермаксимальными, определяют в новом смысле − это условие коммутативности всех $E(\lambda)$ со всеми $F(\mu)$ в старом смысле. Если эрмитовы операторы A и B коммутируют, то они оказываются функциями некоторого эрмитова оператора $R: A=r(R),\ B=s(R)$. Пусть оператор R обладает чисто дискретным спектром $\kappa_1,\kappa_2,...$ с собственными функциями $\psi_1,\psi_2,...,$ тогда оператор $F(R)$ имеет также дискретный спектр $F(\kappa_1),F(\kappa_2),...$ с теми же собственными функциями, или символически

$$R=\int\lambda dE(\lambda),\quad F(R)=\int F(\lambda)dE(\lambda).$$

В заключение математической части книги Нейман определяет важные для квантовой механики инварианты операторов: шпур $\mathrm{Spur}(A)$ и $\sum A$. Если A − линейный оператор и полная ортонормированная система $\varphi_1,\varphi_2,...,$ для которой все $A\varphi_k$ имеют смысл, то $\mathrm{Spur}(A)=\sum(A\psi_\mu,\psi_\mu)$ и для него доказываются свойства:

$$\operatorname{Spur}(A) = \overline{\operatorname{Spur}(A^*)},\ \operatorname{Spur}(aA) = a\operatorname{Spur}(A),$$

$$\operatorname{Spur}(A \pm B) = \operatorname{Spur}(A) \pm \operatorname{Spur}(B),\ \ \operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA),$$

$$\operatorname{Spur}(E) = \sum_{\mu=1}^{k} \left(E\psi_\mu, \psi_\mu\right) = k\ .$$

ГЛАВА 8.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. Особенности спектральной теории для дифференциальных операторов

Несмотря на успехи в развитии общей абстрактной теории линейных операторов в гильбертовом пространстве сравнительно долгое время ее влияние на спектральную теорию дифференциальных операторов было незначительным. Общая спектральная теория позволяла понять некоторые индивидуальные спектральные свойства дифференциальных операторов в связи с другими конкретными теориями. В известной мере систематизировать накопившиеся факты и дать им объяснения с общей точки зрения. В книге М.Стоуна 1932 г. дано применение общей спектральной теории к дифференциальным операторам первого и второго порядка. В работе Плеснера в качестве примера рассматривался только оператор дифференцирования.

В статьях и книгах по квантовой механике встречались эти же примеры дифференциальных операторов и более детальное исследование частных видов дифференциальных уравнений и возникающих для них задач на собственные значения и разложений по собственным функциям. Наряду с развитием общей спектральной теории линейных операторов и применением ее к изучению конкретных операторов, значительное место в исследованиях уделяется теории сингулярных дифференциальных операторов. Методы общей спектральной теории линейных операторов в гильбертовом пространстве часто оказывались не достаточно гибкими в конкретных вопросах теории сингулярных дифференциальных операторов. Например, для изучения свойств спектра дифференциальных операторов в зависимости от поведения коэффициентов операторов прямое применение аналитических методов оказывалось более эффективным.

Привлечение аппарата аналитических функций к спектральной теории квадратичных форм с бесконечным числом переменных встречается в работах Хеллингера. Теория вычетов была применена Хильбом к функции Грина для получения формул обращения Вейля. На основе теории вычетов развивает спектральную теорию дифференциальных операторов второго порядка Титчмарш в ряде статей, а затем в книге «Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка» (1945 г.). Другое аналитическое изложение спектральной теории дано Левитаном в 1950 г.

Аналитическая спектральная теория использует асимптотические методы. Почти каждый новый результат в асимптотической оценке собственных функций приводит к новым результатам в спектральной теории дифференциальных операторов. Здесь можно указать на исследования Рапопорта и Федорюка, относящиеся к асимптотическим методам в теории дифференциальных уравнений. На основе асимптотических оценок Рапопорта Наймарк получил интересные результаты, относящиеся *к* спектральной теории дифференциальных операторов высших порядков. Аналитическая теория спектральных свойств дифференциальных уравнений второго и высших порядков содержится в книге Коддингтона и Левинсона «Теория обыкновенных дифференциальных уравнений» [108].

Применение методов функционального анализа к спектральной теории дифференциальных операторов стало более эффективным приблизительно с 1946 г. Почти одновременно с появлением статей и книги Титчмарша, в которых изложение спектральной теории дифференциальных операторов дано без привлечения общей теории линейных операторов, развиваются методы, устанавливающие связь спектральной теории линейных операторов в гильбертовом пространстве с аналитическими теориями разложения по собственным функциям дифференциальных операторов. Здесь следует назвать метод направляющих функционалов М.Г.Крейна, исследования Кодаиры. Позднее были найдены и другие доказательства спектральных теорем для дифференциальных операторов на основе методов функционального анализа и различные варианты аналитических методов.

Наиболее плодотворными методы теории операторов оказались для исследования характера спектра в зависимости от поведения коэффициентов сингулярных дифференциальных операторов. Исследования такого рода составляют содержание качественного спектрального анализа.

Многочисленные результаты по качественной спектральной теории для операторов второго порядка были получены в 1946-1952 гг. американскими математиками Уинтнером, Хартманом, Патнамом, а также Глазманом, Молчановым, Бирманом и другими.

Изучение спектральных свойств дифференциальных операторов с операторными коэффициентами началось позднее. Подобные операторы позволяют рассматривать с единой точки зрения дифференциальные операторы, как обычные, так и в частных производных. В последнем случае операторные коэффициенты должны быть неограниченными.

Постановку проблемы можно выразить так. Пусть H – абстрактное сепарабельное гильбертово пространство. Рассмотрим множество векторнозначных функций $f(x)\left(-\infty \le a \le x \le b \le \infty\right)$ со значениями в H, измеримых по Бохнеру и таких, что

$$\int_a^b \|f(x)\|^2 dx < \infty .$$

Это множество образует новое гильбертово пространство H_1 со скалярным произведением

$$\left(f(x), g(x)\right)_1 = \int_a^b \left(f(x), g(x)\right) dx$$

Спектральная теория развивается в пространстве H_1. Ограничимся рассмотрением некоторых результатов, полученных для операторного аналога классического оператора Штурма-Лиувилля: $l(y) = -y'' + Q(x)y$.

Предполагается, что существует общее для всех x всюду плотное множество $D\{Q(x)\} \subset H$ на котором все $Q(x)$ определены, симметричны и ограничены снизу числом, не зависящим от x. Тогда его расширение по Фридрихсу обозначают L. Для оператора L в работе Левитана и Суворченковой получено достаточное условие дискретности спектра в виде:

1) в случае конечного интервала (a,b) оператор $Q(x)$ для каждого x вполне непрерывен;

2) в случае бесконечного интервала дополнительно требуется, чтобы для любого $\omega > 0$

$$\int_x^{x+\omega} \alpha_1(x) dx = \infty, |x| \to \infty ,$$

где $\alpha_1(x)$ наименьшее собственное значение оператора $Q(x)$.

В работе Левитана проведено исследование функции Грина $G(x,\eta,\mu)$, получаемой с помощью интегрального уравнения и при некоторых дополнительных условиях, и показано, что оператор

$$Af = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\eta,\mu) f(\eta) d\eta$$

есть оператор Гильберта-Шмидта.

В работе Костюченко и Левитана [110] проведено изучение асимптотического поведения собственных значений, в частности, функции $N(\lambda)$ – числа собственных значений, меньших данного числа λ на основе асимптотического поведения функции Грина.

Для симметрических дифференциальных операторов с ограниченными операторными коэффициентами в конечном интервале Рофе-Бекетов [228] описал все самосопряженные расширения.

В последующие годы исследования в этом направлении были значительно расширены. Получили развитие и задачи о сходимости спектральных разложений Штурма-Лиувилля.

Большой круг задач связан с теорией возмущения дифференциальных операторов. Внимание исследователей привлекали вопросы комбинаций дискретного и непрерывного спектра, переход непрерывного спектра в дискретный и т.д.

Для характеристики спектра приобретает значение развитие метода регуляризованных следов для дифференциальных операторов. Математический анализ физических проблем продолжает служить благотворным источником развития спектральной теории дифференциальных операторов. На характеристике некоторых из перечисленных направлений остановимся несколько подробнее. Естественно, что работы отечественных математиков более полно попали в круг обозрения автора, тогда как некоторые работы зарубежных исследователей оказались ему неизвестными.

§ 2. Работы Титчмарша.

Статьи Титчмарша, относящиеся к теории разложения по собственным функциями связанным с дифференциальными уравнениями второго порядка были опубликованы в 1939-1945 гг. [261] и объединены в книге [267], вышедшей в 1946 году.

Титчмарш для доказательства теорем разложения развивает метод Коши, основанный на контурном интегрировании и теории вычетов. В предыдущих главах было показано применение подобного метода Хеллингером в спектральной теории квадратичных форм с бесконечным числом переменных и Плеснером в абстрактной спектральной теории линейных операторов в унитарном пространстве. По существу метод Титчмарша представляет собой приспособление общей теории к конкретным дифференциальным операторам второго порядка. Основное внимание в работах Титчмарша уделено сингулярной задаче Штурма-Лиувилля. Изложение теории Титчмарш начинает с разложения Штурма-Лиувилля, относящегося к уравнению

$$Ly \equiv \frac{d^2y}{dx^2} = (\lambda - q(x))\, y = 0$$

с некоторыми условиями в точках $x = a, \ \ x = b$.

Для обоснования разложения Титчмарш рассматривает уравнение $Lf = i\dfrac{\partial f}{\partial t}$, где $f = f(x,t)$. Начальное условие $f(x,0) = f(x)$, где $f(x)$заданная произвольная функция. Рассматривая интегральные представления вида

$$F_+(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\infty} f(x,t) e^{i\lambda t} dt, \qquad Jm\lambda > 0,$$

$$F_-(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} f(x,t) e^{i\lambda t} dt, \qquad Jm\lambda < 0,$$

для которых формула обращения

$$f(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{ic-\infty}^{ic+\infty}F_+(x,\lambda)e^{-i\lambda t}d\lambda+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{ic'-\infty}^{ic'+\infty}F_-(x,\lambda)e^{-i\lambda t}d\lambda,$$

где $c>0$, $c'<0$, заметим, что $F_-(x,\lambda)$ с точностью до знака совпадает в простейших случаях с аналитическим продолжением $F_+(x,\lambda)$ в нижнюю полуплоскость. При $t=0$ получаем

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi i}}\left(\int\limits_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}+\int\limits_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}\Phi(x,\lambda)d\lambda\right),$$

где

$$\Phi(x,\lambda)=-i\sqrt{2\pi}F_+(x,\lambda) \text{ и } (L-\lambda)\Phi(x,\lambda)=-f(x).$$

Теперь для нахождения разложения нужно применить теорию вычетов, членами ряда оказываются вычеты в полюсах функции $\Phi(x,\lambda)$. Обозначая $\varphi(x,\lambda)$ и $\chi(x,\lambda)$ решения уравнения $Ly=0$, удовлетворяющие начальным условиям:

$$\varphi(a,\lambda)\cos\alpha+\varphi'(a,\lambda)\sin\alpha=0,$$
$$\chi(b,\lambda)\cos\beta+\chi'(b,\lambda)\sin\beta=0,$$

вронскиан которых не зависит от x, а только от параметра λ, $W(\varphi,\chi)=\omega(\lambda)$, для функции $\Phi(x,\lambda)$ получим

$$\Phi(x,\lambda)=\frac{\chi(x,\lambda)}{\omega(\lambda)}\int\limits_a^x\varphi(y,\lambda)f(y)dy+\frac{\varphi(x,\lambda)}{\omega(\lambda)}\int\limits_x^b\chi(y,\lambda)f(y)dy$$

причем $\Phi(x,\lambda)$ удовлетворяет граничным условиям:

$$\Phi(a,\lambda)\cos\alpha+\Phi'(a,\lambda)\sin\alpha=0,$$
$$\Phi(b,\lambda)\cos\beta+\Phi'(b,\lambda)\sin\beta=0.$$

При некоторых предположениях доказывается, что $\omega(\lambda)$ имеет только простые нули $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,...$, расположенные на вещественной оси. Поэтому решения $\varphi(x,\lambda_n)$ и $\chi(x,\lambda_n)$ отличаются друг от друга лишь постоянным множителем $\chi(x,\lambda_n)=k_n\varphi(x,\lambda_n)$.

Функция $\Phi(x,\lambda_n)$ имеет при $\lambda=\lambda_n$ вычет

$$\frac{k_n\varphi(x,\lambda_n)}{\omega'(\lambda_n)}\int\limits_a^b\varphi(y,\lambda_n)f(y)dy$$

и получается разложение функции в ряд

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k_n\varphi(x,\lambda_n)}{\omega'(\lambda_n)}\int\limits_a^b\varphi(y,\lambda_n)f(y)dy.$$

Для доказательства используются асимптотические методы оценки решения уравнения, восходящие к Лиувиллю. Доказывается ортогональность разложения, вещественность собственных значений, неравенство $\omega(\lambda)\neq 0$ для достаточно больших по модулю отрицательных λ. Приведены примеры разложений, содержащие тригонометрические и бесеелевы функции. Доказано, что разложения по собственным функциям уравнения Штурма-Лиувилля ведут себя как обычные тригонометрические ряды Фурье. Например, разложение сходится к $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ для функций ограниченной вариации в окрестности точки x. Изучение сингулярного случая задачи Штурма-Лиувилля для полуоси начинается с доказательства результатов Г. Вейля о существовании решения уравнения $y''+(\lambda-q(x))y=0$ при любом невещественном λ, принадлежащего $L^2(0,\infty)$.Решение записано в виде $\psi(x,\lambda)=\theta(x,\lambda)+m(\lambda)\varphi(x,\lambda)$, где $\theta(x,\lambda)$ и $\varphi(x,\lambda)$ - решения уравнения, образующие фундаментальную систему. Эти функции удовлетворяют начальным условиям:

$$\varphi(0,\lambda)=\sin\alpha,\quad \varphi'(0,\lambda)=-\cos\alpha,\quad \theta(0,\lambda)=\cos\alpha,\quad \theta'(0,\lambda)=\sin\alpha,$$

а $m(\lambda)$ – точка предельной окружности или предельная точка. Доказывается, что $m(\lambda)$ будет аналитической функцией в одной из полуплоскостей и ее полюсы, если они есть, лежат на вещественной оси и все простые. Рассматривая случай, когда особенности $m(\lambda)$ являются полюсами $\lambda_0,\lambda_1,\ldots$, методами теории аналитических функций устанавливаются теоремы:

I. Пусть функции $f(x)$ и $L\{f(x)\}=q(x)f(x)-f''(x)$ принадлежат $L^2(0,\infty)$, $f(0)\cos\alpha+f'(0)\sin\alpha=0$ и для всех вещественных λ $\lim_{x\to\infty}W\{\psi(x,\lambda),f(x)\}=0$.

Тогда $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\psi_n(x)$, причем ряд сходится абсолютно и равномерно в каждом конечном интервале.

II. Пусть функция $f(x)$ принадлежит $L^2(0,\infty)$. Тогда $\int_0^\infty\{f(x)\}^2\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^2$.

Показывается взаимосвязь разложения I и теоремы полноты /равенство Парсеваля/ II. В заключение отмечается переход к случаю всей оси $(-\infty,\infty)$.

Общий сингулярный случай задачи Штурма-Лиувилля без предположения о мероморфности функции $m(\lambda)$ требует несколько более сложных аналитических доказательств.

Пусть $m(\lambda)$ – аналитическая функция, регулярная в верхней полуплоскости, и $Jm\; m(\lambda)<0$. При прежнем определении $\Phi(x,\lambda)$ показано, что при $\delta>0$

$$f(x)=\lim_{R\to\infty}\left\{-\frac{1}{i\pi}\int_{-R+i\delta}^{R+i\delta}\Phi(x,\lambda)\,d\lambda\right\}$$

и изучается поведение этого интеграла при $\delta\to0$.

$$\Phi(x,\lambda)=\{\theta(x,\lambda)+m(\lambda)\varphi(x,\lambda)\}\int_0^x\varphi(y)f(y)\,dy+\varphi(x,\lambda)\int_x^\infty\{\theta(y,\lambda)+m(\lambda)\varphi(y,\lambda)\}f(y)\,dy$$

Обоснование формул разложения дано цепочкой лемм и теорем.

Лемма1: При фиксированных u_1 и u_2 интеграл $\int_{u_1}^{u}\{m(u+iv)\}\,du$ остается ограниченным, когда $v\to0$.

Лемма доказывается предельным переходом от интервала $(0,b)$ при $b\to\infty$.

Лемма 2. Функция $K(\lambda)=\lim_{\delta\to 0}\int_{\kappa}^{\lambda}-Jm\{m(u+i\delta)\}du$ определена для всех κ и λ, быть может, за исключением счетного множества значений; $K(\lambda)$ неубывающая функция и

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\kappa}^{\lambda}-Jm\{\psi(x,u+i\delta)\}du=\int_{\kappa}^{\lambda}\varphi(x,u)\,dK(u).$$

Далее показывается, что функция $\chi(x,\lambda)=\int_{\kappa}^{\lambda}\varphi(x,u)\,dK(u)$ принадлежит $L^2(0,\infty)$.

Для $f(x)\in L^2(0,\infty)$ интеграл $g_1(\lambda)=\int_0^{\infty}\chi(y,\lambda)f(y)\,dy$ существует и представляет собой ограниченную в каждом конечном интервале функцию λ. Ряд выкладок дает

$$Jm\left[-\frac{1}{\pi}\int_{-R+i\delta}^{R+i\delta}\Phi(x,\lambda)\,d\lambda\right]=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x,u)\,du\int_0^{\infty}Jm\Big(\psi(y,u+i\delta)f(y)\,dy+0\big(\sqrt{\delta}\big)\Big)\to\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\varphi(x,u)\,dg_1(u)$$

где последнее выражение есть интеграл Стилтьеса.

<u>Теорема.</u> Пусть $\varphi(\lambda)$ аналитическая функция переменного $\lambda=u+iv$, регулярная для $v>0$. Пусть эта функция ограничена на каждой прямой $v=const$, и пусть максимум модуля ее значений на такой прямой стремится к нулю, когда $v\to\infty$. Пусть далее, $\varphi(\lambda)=p(u,v)+ig(u,v)$ и $\int_{-\infty}^{\infty}\left|p(u,v)\right|du<M \quad (v>0)$. Тогда существует функция $\rho(t)$, обладающая ограниченной вариацией на интервале $(-\infty,\infty)$ и такая, что

$$\varphi(\lambda)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho(t)}{t-\lambda}\quad (v>0).$$

При этом $\lim_{v\to 0}\int_{u_1}^{u_2}p(u,v)\,du=\rho(u_2)-\rho(u_1)$ при любых u_1 и u_2.

Последняя формула получается применением теории сингулярных интегралов типа Коши.

Теорема разложения получается в следующей формулировке:

<u>Теорема</u>. Если $f(x)\in L^2(0,\infty)$ и $Lf(x)\in L^2(0,\infty)$, $f(0)\cos\alpha+f'(0)\sin\alpha=0$ и при $x\to\infty$ невещественном λ

$$W\{f(x),\psi(x,\lambda)\}\to 0$$

и

$$\chi(x,\lambda)=\int_{\mathrm{H}}^{\lambda}\varphi(x,u)\,dK(u),\qquad g_1(\lambda)=\int_0^{\infty}\chi(y,\lambda)f(y)\,dy,$$

то

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,u)\,dg_1(u).$$

На основании ряда оценок, связанных с предельным переходом $(0,b)\to(0,\infty)$, и предыдущей теоремы получается

$$\Phi(x,\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho(t)}{\lambda-t}, \text{ где } \rho(t)=\rho(t,x).$$

Соединение ранее доказанных оценок и теорем дает доказательство теоремы разложения. Для доказательства равенства Парсеваля используется теорема о сходимости в среднем для случая интегралов Стилтьеса.

Теорема. (Формула Парсеваля). Пусть функция $f(x)$ принадлежит $L^2(0,\infty)$. Тогда последовательность функций $g_n(\lambda)=\int\limits_0^n \varphi(y,\lambda)f(y)dy$ сходится в среднем по мере $k(\lambda)$ на интервале $(-\infty,\infty)$ к функции $g(\lambda)$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{g(\lambda)-g_n(\lambda)\}^2 dk(\lambda)=0$ и при этом имеет место равенство $\int\limits_0^{\infty}\{f(x)\}^2 dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{g(\lambda)\}^2 dk(\lambda)$.

Для интервала $(-\infty,\infty)$ разложение имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{\theta(x,u)dg_1(u)+\varphi(x,u)dg_2(u)+\theta(x,u)dg_3(u)+\varphi(x,u)dg_4(u)\},$$

где

$$g_v(\lambda)=\int\limits_0^{\infty}\chi_v(y,\lambda)f(y)dy \quad (v=1,2,3,4),$$

$$\chi_1(x,\lambda)=\int\limits_{K}^{\lambda}\theta(x,u)d\xi(u), \quad \chi_2(x,\lambda)=\int\limits_{K}^{\lambda}\theta(x,u)d\eta(u),$$

$$\chi_3(x,\lambda)=\int\limits_{K}^{\lambda}\varphi(x,u)d\eta(u), \quad \chi_4(x,\lambda)=\int\limits_{K}^{\lambda}\varphi(x,u)d\zeta(u),$$

$$\xi(u)=\lim_{\delta\to 0}\int\limits_0^u -J_m\frac{1}{m_1(u+i\delta)-m_2(u+i\delta)}du,$$

$$\eta(u)=\lim_{\delta\to 0}\int\limits_0^u -J_m\frac{m_1(u+i\delta)}{m_1(u+i\delta)-m_2(u+i\delta)}du,$$

$$\zeta(u)=\lim_{\delta\to 0}\int\limits_0^u -J_m\frac{m_1(u+i\delta)m_2(u+i\delta)}{m_1(u+i\delta)-m_2(u+i\delta)}du,$$

$$\Psi_1(x,\lambda)=\theta(x,\lambda)+m_1(\lambda)\varphi(x,\lambda), \quad \Psi_1\in L^2(0,\infty),$$

$$\Psi_2(x,\lambda)=\theta(x,\lambda)+m_2(\lambda)\varphi(x,\lambda), \quad \Psi_2\in L^2(0,\infty).$$

Для доказательства формулы Парсеваля Титчмарш использовал переход к пространству функций с интегрируемым квадратом по Лебегу. Возможно непосредственное доказательство с применением интегралов Лебега – Стилтьеса. Так это сделано, например, в книге Коддингтона и Левинсона [108], о которой будет сказано дальше.

Определение спектра в случае интервала $(0,\infty)$ дается как дополнения к множеству точек, в окрестности которых функция $k(\lambda)$ постоянна. В случае мероморфной функции $m(\lambda)$ спектр совпадает с множеством ее полюсов и называется точечным спектром. Для интервала $(-\infty,\infty)$ спектр определяется как дополнение к множеству точек, в окрестности которых все три функции $\xi(u),\eta(u),\zeta(u)$ постоянны.

В качестве примеров в книге Титчмарша указаны случай Фурье на полуоси и всей оси $q(x) \equiv 0$, приводящий к интегралу Фурье, разложение по многочленам Эрмита для уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \left(x^2 - \lambda\right) y = 0 \qquad \left(-\infty < x < \infty\right),$$

разложение по многочленам Лежандра и присоединенным функциям Лежандра для уравнения

$$\left(1 - x^2\right)\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left\{n\left(n+1\right) - \frac{m^2}{1+x^2}\right\} y = 0.$$

Рассмотрены ряды Фурье-Бесселя, связанные с уравнением

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(s^2 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) y = 0$$

на интервале $(0,b)$ и формула Вебера для интервала (a,∞), $(a > 0)$, а также формула Ханкеля в случае $(0,\infty)$, т.е. для задачи с двумя сингулярными концами.

Приведены и другие разложения, связанные с бесселевыми функциями для уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\lambda \pm x\right) y = 0,$$

с многочленами Сонина-Лагерра для уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\lambda - x^2 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) y = 0$$

и уравнение «атома водорода»

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left\{\lambda - \frac{c}{x} - \frac{r\left(r+1\right)}{x^2}\right\} y = 0.$$

В главе о природе спектра исследуется зависимость характера спектра от функции $q(x)$ интервала $(0,\infty)$ с особенностью на бесконечности. Первые результаты в этом вопросе принадлежат Вейлю. Титчмарша приведены результаты исследования в случаях:

1) $q(x) \to 0$. Предположим, что $q(x) \in L(0,\infty)$, тогда положительная полуось заполнена точками непрерывного спектра, а на отрицательной полуоси возможен дискретный спектр, который может вообще отсутствовать. Доказательство непрерывности спектра на положительной полуоси видно непосредственно из формулы

$$k(\lambda) = \int_0^{\lambda} \frac{du}{\sqrt{u}\left\{\mu^2(u) + \nu^2(u)\right\}},$$

а дискретность и конечность отрицательной части спектра следует из свойств аналитической функции $\mu(\lambda)$, регулярной в верхней полуплоскости.

2) Случай $q(x) \to +\infty$, отмеченный еще Вейлем, рассмотрен при условии, что $q(x)$ стремится к бесконечности монотонно, так что $q'(x) \geq 0$;

$$q'(x) = 0\left\{\left|q(x)\right|^C\right\},$$

где C – некоторое фиксированное число, удовлетворяющее условию $0 < C < \frac{3}{2}$ и $q''(x)$ сохраняет знак для больших x. При этих условиях спектр дискретен.

Избыточные условия, налагаемые на $q(x)$, вызваны способом доказательства. Другое доказательство дискретности спектра без этих ограничений дано Титчмаршем с использованием теории нулей собственных функций. Впервые были указаны Титчмаршем теоремы о природе спектра в случае $q(x) \to -\infty$.

Пусть $q(x) \leq 0,\ q'(x) < 0,\ q(x) \to -\infty,\ q'(x) = 0\left(\left|q(x)\right|^C\right)$, где C фиксированное число $0 < C < \frac{3}{2}$ и пусть $q''(x)$ сохраняет знак для больших x. Если интеграл $\int^{\infty} \left|q(x)\right|^{\frac{1}{2}} dx$ расходится, то спектр непрерывен и заполняет вою ось $(-\infty, \infty)$.

Если же этот интеграл сходится, то спектр чисто точечный. В применении к интервалу $(-\infty, +\infty)$ сформулированы легко доказываемые результаты. Если $q(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, то спектр дискретен. При $q(x) \to +\infty$ для $x \to +\infty$ и $q(x) \to -\infty$ при $x \to -\infty$ и расходимости интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \left|q(x)\right|^{-\frac{1}{2}} dx$ непрерывный спектр заполняет всю ось. В последних главах книги Титчмарша указаны некоторые спектральные теоремы о сходимости и суммируемости разложений по собственным функциям и о распределении собственных значений в зависимости от функции $q(x)$. Рассмотрен кратко вопрос о приближенных решениях уравнения Шредингера методом ВКБ. Результаты этих глав были значительно дополнены в исследованиях следующих лет. В русском издании книги Титчмарша в 1960 г. редактором перевода Левитаном добавлены статьи, освещающие состояние этих вопросов с учетом позднейших исследований.

Во второй части книги Титчмарша, наряду с проблемами разложения по собственным функциям для уравнений в частных производных, уделено внимание спектральной теории для обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности изложены вопросы исследования индексов дефекта дифференциальных операторов и изучения спектра для уравнения с периодическим коэффициентом, теории возмущения спектра и некоторых других проблем.

§ 3. Изложение теории разложения по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка в книге Левитана.

В 1950 г. вышла книга Левитана «Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка» [132]. По содержанию и структуре книга близка к первой части монографии Титчмарша. Основное отличие было в методе доказательства теоремы разложения и равенства Парсеваля в сингулярном случае. Основная идея доказательства состояла в проведении предельного перехода для спектральных формул от регулярного случая к сингулярному. Доказательство теоремы разложения в случае конечного интервала проведено с помощью метода интегральных уравнений. Отметим основные моменты доказательства Левитана равенства Парсеваля и теоремы разложения на полупрямой. Для регулярной задачи Штурма-Лиувилля в интервале $(0,b)$, определяемой уравнением

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0$$

и краевыми условиями

$$y(0,\lambda)\cos\alpha + y'(0,\lambda)\sin\alpha = 0,$$
$$y(b,\lambda)\cos\beta + y'(b,\lambda)\sin\beta = 0,$$

равенство Парсеваля записывается в виде

$$\int_0^b f^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_{n,b}^2}\left(\int_0^b f^2(x)\,y_{n,b}(x)\,dx\right)^2,$$

где $\alpha_{n,b}^2 = \int_0^b y^2{}_{n,b}(x)\,dx$, а $y_{n,b}(x)$ – собственные функции. Первое краевое условие заменяется даже более сильным: $y(0,\lambda) = \sin\alpha,\ y'(0,\lambda) = -\cos\alpha$. Введением монотонно возрастающей функции скачков

$$\rho_b(\lambda) = \begin{cases} -\sum\limits_{\lambda<\lambda_{n,b}\le 0}\dfrac{1}{\alpha_{n,b}^2} & (\lambda \le 0) \\ \sum\limits_{0<\lambda_{n,b}\le\lambda}\dfrac{1}{\alpha_{n,b}^2} & \end{cases}$$

равенству Парсеваля придается вид

$$\int_0^b f^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda)\,d\rho_b(\lambda),$$

где $F(\lambda) = \int_0^b f(x)\,y(x,\lambda)\,dx$.

Показав применимость теорем Хелли к функциям $\rho_b(\lambda)$ правомерность предельного перехода под знаком интеграла для произвольной функции $f(x) \in L^2(0,\infty)$ получается формула Парсеваля в виде

$$\int_0^{\infty} f^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda)\,d\rho(\lambda),$$

где $F(\lambda)$ есть предел в среднем функций

$$F_n(\lambda) = \int_0^n f(x)\,y(x,\lambda)\,dx,$$

а $\rho(\lambda)$ – монотонно возрастающая функция.

Из равенства Парсеваля в его обобщенном варианте для произведения двух функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\int_0^{\infty} f(x)\,g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\,G(\lambda)\,d\rho(\lambda)$$

легко доказывается теорема разложения. Пусть $f(x)$ непрерывная функция для $0 \le x \le \infty$ и интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) y(x,\lambda) d\rho(\lambda)$$

сходится абсолютно и равномерно по x в каждом конечном интервале. Тогда

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) y(x,\lambda) d\rho(\lambda)$$

Дальнейшее изложение спектральной теории для сингулярных дифференциальных операторов второго порядка связано с получением интегрального представления резольвенты также предельным переходом от регулярного случая. Обозначая $\varphi(x,\lambda)$ и $\theta(x,\lambda)$ решения уравнения

$$y'' + (\lambda - q(x)) y = 0,$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$\begin{cases} \varphi(0,\lambda) = \sin\alpha, & \varphi'(0,\lambda) = -\cos\alpha; \\ \theta(0,\lambda) = \cos\alpha, & \theta'(0,\lambda) = \sin\alpha, \end{cases}$$

образующие фундаментальную систему, и

$$\psi(x,\lambda) = \theta(x,\lambda) + m(\lambda)\varphi(x,\lambda)$$

решение с интегрируемым квадратом на интервале того же уравнения. Для невещественного значения z резольвента принимает вид

$$R_z f = \int_0^{\infty} G(x,y;z) f(y) dy,$$

где

$$G(x,y;z) = \begin{cases} \psi(x,z)\varphi(y,z) & y \le x, \\ \varphi(x,z)\psi(y,z) & y > x. \end{cases}$$

Имеет место теорема об интегральном представлении резольвенты.

Теорема. Для каждой функции $f(x) \in L^2(0,\infty)$ и каждого недействительного z справедливо равенство

$$R_z f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x,\lambda) F(\lambda)}{z - \lambda} d\rho(\lambda),$$

где $F(\lambda) = l \cdot i \cdot m \int_0^n f(x)\varphi(x,\lambda) dx$ т.е. предел в среднем. Для спектральной функции $\rho(\lambda)$, применяя теоремы обращения Стилтьеса, удается получить формулу

$$\rho(\Delta) = \rho(\lambda + \Delta) - \rho(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\delta \to 0} \int_{\Delta} \{-Jm[m(u + i\delta)]\} du.$$

Заметим, что полученная предельным переходом функция $\rho(\lambda)$ может определяться неоднозначно. Поэтому возникает вопрос об условиях единственности функции $\rho(\lambda)$. В некоторых случаях доказательство единственности функции $\rho(\lambda)$ удается получить непосредственным вычислением. Более широкое освещение спектральная теория самосопряженных обыкновенны дифференциальных операторов получила в книге Левитана и Саргсяна, вышедшей в 1970 г.

В книге учтены многие результаты исследований как авторов, так и других ученых. Доказательство теоремы разложения, как в конечном, так и в бесконечном интервале, дано различными способами. Изложен метод конечных разностей, дано развитие метода Римана, позволяющее получить теорему разложения через решение задачи Коши для волнового уравнения. Теорема разложения доказана в периодическом случае (нештурмовские краевые условия) и для одномерной системы Дирака.

Значительное место уделено разработанному авторами асимптотическому исследованию спектральной функции, спектрального ядра и числа собственных значений, вопросам сходимости и дифференцирования разложений по собственным функциям.

В книге кратко изложены элементы спектральной теории линейных операторов в гильбертовом пространстве и показана связь с теорией дифференциальных операторов. Здесь основное внимание уделено исследованию самосопряженности сингулярного оператора Штурма-Лиувилля и систем первого порядка. Значительно шире изложены результаты исследования спектра в зависимости от поведения коэффициентов дифференциального оператора. Следует отметить включение вопросов спектральной теории для пространства вектор-функций и операторов высшего порядка, а также элементов теории регуляризованных следов.

§ 4. О методе направляющих функционалов Крейна. Работы Кодаиры.

Вывод теоремы разложения методом направляющих функционалов М.Г. Крейна состоит в следующем. Рассматривается самосопряженный оператор A в гильбертовом пространстве *H*. Если для оператора A существуют линейные функционалы $\Phi_j(f;\lambda)$, называемые направляющими функционалами $(j=1,2,...p)$, аналитически зависящие от вещественного параметра λ $(-\infty<\lambda<\infty)$ при любом фиксированном $f\in H$, а также, если $\Phi_j(f_0;\lambda_0)=0$ для всех j, то уравнение $Ag-\lambda_0 g=f_0$ имеет решение $g\in\theta(A)$. Справедливо и обратное утверждение.

При этих условиях существует монотонная матрица-функция $\tau(\lambda)=\{\tau_{jk}(\lambda)\}_{j,k=1}^{p}$ такая, что для любых $f,g\in H$

$$(g,f)=\sum_{j,k=1}^{p}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_j(g;\lambda)\overline{\Phi_k(f;\lambda)}d\tau_{jk}(\lambda).$$

Для обыкновенных дифференциальных операторов порядка p направляющими функционалами служат $\Phi_j(f;\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi_j(x,\lambda)$, где $\varphi_j(x,\lambda)$ – фундаментальная система решений дифференциального уравнения и

$$(g,f)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\overline{f}(x)dx=\sum_{j,k=1}^{p}\int_{-\infty}^{\infty}G_j(\lambda)\overline{F_k}(\lambda)d\tau_{jk}(\lambda),$$

где

$$G_j(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\overline{\varphi_j}(x;\lambda)dx,\quad F_k(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{\varphi_k}(x;\lambda)dx.$$

Метод направляющих функционалов Крейна, разработанный в ряде его статей [114] позволил соединить абстрактные теории линейных операторов в гильбертовом пространстве с аналитическими подходами в спектральной теории дифференциальных операторов. В 1949-50 гг. японский математик Кодаира опубликовал результаты своих исследований по теории разложения по собственным функциям обыкновенных дифференциальных уравнений, сначала [103,104] для уравнений второго порядка, а в следующей статье [102] для уравнений любого четного порядка. Кодаира развивает методы Вейля. Прежде всего Кодаира показывает условия формальной сопряженности дифференциальных операторов четвертого порядка с вещественными коэффициентами и получает формулу Грина. В следующем разделе работы Кодаира, обобщая понятия предельного круга и предельной точки Вейля, дает классификацию дифференциальных операторов порядка n. Кодаира получает $\left(\frac{1}{2}n+1\right)^2$ различных типов дифференциальных операторов в зависимости от их сингулярности. После введения функции Грина Кодаира рассматривает замыкание дифференциальных операторов и построение сопряженного оператора. Здесь в конкретной форме для дифференциальных операторов получаются результаты, известные в абстрактной спектральной теории линейных операторов в гильбертовом пространстве. Достаточно подробному анализу подвергаются краевые условия, порождающие самосопряженные дифференциальные операторы. Спектральная теория Кодаиры обобщает результаты Вейля, Стоуна и Титчмарша на дифференциальные операторы любого четного порядка. Из спектральной теории непосредственно следует теорема разложения для произвольной функции с интегрируемым квадратом. В заключение указывается возможность распространения полученных результатов на случай системы дифференциальных уравнений и доказываются спектральная теорема и теорема разложения.

§ 5. Монография Наймарка «Линейные дифференциальные операторы».

Монография Наймарка «Линейные дифференциальные операторы», опубликованная в 1954 г. [177, 2-е издание, 1969г.] отражает новый этап в развитии теории линейных дифференциальных операторов. В книгах по спектральной теории линейных операторов в гильбертовом пространстве дифференциальные операторы рассматривались как примеры. С другой стороны в книгах Титчмарша и Левитана даже в заглавиях отсутствовал термин «операторы», а спектральная теория излагалась как теория разложения по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка.

Книга Наймарка содержит изложение теории линейных обыкновенных дифференциальных операторов любого конечного порядка, включая элементы теории несамосопряженных дифференциальных операторов. Автор разбивает книгу на две части. В первой части, названной элементарной теорией линейных дифференциальных операторов, излагается теория дифференциальных операторов в конечной интервале (регулярный случай) с минимальным применением методов функционального анализа. Вторая часть, называемая «Линейные дифференциальные операторы в гильбертовом пространстве», содержит изложение вопросов теории дифференциальных операторов, в основном, методами функционального анализа. Автор не считает целесообразным игнорирование методов функционального анализа, справедливо полагая, что только с помощью идей и методов функционального анализа возможно глубокое понимание теории и получение наиболее общих результатов.

К моменту выхода монографии Наймарка этот взгляд на соотношение чисто аналитических методов и методов функционального анализа стал общим. Работами Крейна и Кодаиры было достигнуто соединение этих методов. Тем самым произошло выделение и обособление спектральной теории дифференциальных операторов в самостоятельный раздел функционального анализа со своими задачами и методами, возникшими на основе синтеза отдельных теорий дифференциальных уравнений и общей спектральной теории линейных операторов. В книге Наймарка собран и обобщен большой фактический материал, ранее разбросанный, в основном, по статьям в различных научных журналах и изданиях. В первой части книги весьма подробно рассмотрены линейные дифференциальные выражения n-го порядка, краевые условия, порождающие дифференциальные операторы, формула Лагранжа, сопряженные условия и сопряженные операторы, задача о собственных значениях и собственных функциях. Рассмотрены и обобщенны исследования по теории краевых задач, идущие от работ Тамаркина, Смогоржевского, Камке и теория присоединенных функций Келдыша. Значительное внимание уделено функции Грина линейного дифференциального оператора и обращению дифференциального оператора при помощи функции Грина. Изложение теории асимптотики собственных значений и собственных функций следует работам Биркгофа [13] и М. Стоуна с указанием на различные обобщения асимптотических формул в работах Лангера, Тамаркина, Келдыша. Теория разложения заданной функции по собственным функциям дифференциального оператора для самосопряженных краевых задач приведена на основании теории Гильберта-Шмидта интегральных уравнений. Для несамосопряженных дифференциальных операторов резюмированы исследования Биркгофа, Тамаркина, Стоуна, Келдыша. В заключительной главе первой части изложена теория дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций по исследованиям Буницкого, Бохера, Биркгофа, Лангера, Блисса. Отмечена работа Биркгофа и Лангера [15], в которой исследовались задачи о собственных значениях для уравнений с операторными коэффициентами. Вторая часть книги начинается сводкой сведений из общей теории линейных операторов в гильбертовом пространстве, включая спектральный анализ самосопряженных операторов, теорию вполне непрерывных операторов, теорию расширения симметрического оператора с характеристикой спектра самосопряженных расширений симметрического и полуограниченного оператора по Крейну и Красносельскому.

Дифференциальные операторы рассматриваются в пространстве $L^2(a,b)$, где (a,b) конечный или бесконечный интервал.

В главе о симметрических дифференциальных операторах после описания самосопряженных дифференциальных выражений с некоторыми их обобщениями и порожденных ими дифференциальных операторов, приведены результаты исследований Глазмана об индексах дефекта сингулярного симметрического оператора. Затем приведено описание самосопряженных расширений симметрического дифференциального оператора и их резольвент, в основном, по исследованиям Глазмана и Крейна.

Следующая глава посвящена спектральному анализу дифференциальных операторов. Здесь приведено определение простого и кратного спектров самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве и даны канонические формы, т.е. представления самосопряженных операторов с простым и кратным спектром.

Теория разложения по собственным функциям самосопряженных операторов для нерегулярного случая излагается по методу направляющих функционалов Крейна.

Как известно, этот метод был указан Крейном в работах [114] 1946-48 гг. и позволил соединить теории разложения функции по собственным функциям краевых задач и методы общей спектральной теории линейных операторов.

Пусть $l(y)$ некоторое самосопряженное дифференциальное выражение, L_0 замкнутый симметрический оператор, порожденный этим дифференциальным выражением, а L_a некоторое самосопряженное расширение оператора L_0. Пусть $y_j = y_j(x,\lambda)$ $j=1,2,...2n$, фундаментальная система решений уравнений

$$l(y)=\lambda y$$

с начальными условиями

$$y_j^{[k-1]}(x_0,\lambda)=\begin{cases}1, & \text{при } j=k,\\ 0, & \text{при } j\neq k,\end{cases}$$

где x_0 фиксированная точка интервала (a,b).

Очевидно, что y_j целые аналитические функции параметра λ при каждом фиксированном значении x. Аддитивные и однородные функционалы на множестве $\mathrm{H}' \subset L^2(a,b)$ финитных функций

$$\Phi_j(f,\lambda) = \int_a^b f(x) y_j(x,\lambda) dx$$

называются направляющими функционалами дифференциального выражения $l(y)$. Направляющие функционалы обладают свойствами:

1) $\Phi_j(f,\lambda)$ при фиксированной функции $f \in H'$ есть аналитическая функция параметра λ.

2) Если для некоторой функции $f \in H'$ и некоторого вещественного значения λ имеют место равенства $\Phi_j(f,\lambda) = 0$, $\quad j = 1,2,...2n,$ то уравнение $(L - \lambda I)\varphi = f$ имеет решение φ из H'.

3) Если $f \in D_L \cap \mathrm{H}$, то при любом вещественном λ выполнено $\Phi_j(Lf,\lambda) = \lambda\Phi_j(f,\lambda)$.

Кроме того, для любого конечного интервала $[\alpha,\beta]$ существует в H' система функций $\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{2n}$ таких, что определитель

$$D(\lambda) = \det\left\|\Phi_j(\psi_k,\lambda)\right\|, \quad j,k = 1,2,...,2n .$$

не обращается в нуль в интервале $\alpha \le \lambda \le \beta$.

Основные теоремы здесь следующие:

<u>Теорема 1.</u> Пусть $[\alpha,\beta]$ конечный интервал, а $\psi_1,\psi_2,...,\psi_{2n}$ система функций в H такая, что определитель $\det\left\|\Phi_j(\psi_k,\lambda)\right\|$ отличен от нуля в интервале $[\alpha,\beta]$. Пусть P_λ – спектральная функция оператора L_a, а $g_1,g_2,...,g_{2n}$ – функции, определенные равенствами

$$g_v = \int_\alpha^\beta \sum_{k=1}^{2n} \Omega_{kv}(\lambda) dP_\lambda \psi_k ,$$

где $\Omega = \left\|\Omega_{vk}(\lambda)\right\|$ – матрица, обратная матрице $\Phi = \left\|\Phi_j(\psi_k,\lambda)\right\|$, $\quad j,k = 1,2,...,2n.$

Тогда для любой функции $f \in H'$ и любого интервала $\Delta' \subset [\alpha,\beta]$ имеет место формула

$$P_{\Delta'} f = \int_{\Delta'} \sum_{v=1}^{2n} \Phi_v(f,\lambda) dP_\lambda g_v .$$

<u>Теорема 2.</u> Пусть L_0 минимальный симметрический оператор, порожденный дифференциальным выражением $l(y)$ в интервале (a,b), L_u – его самосопряженное расширение, а $u_1(x,\lambda), u_2(x,\lambda),...,u_{2n}(x,\lambda)$ – решения уравнения $l(y) = \lambda y$, удовлетворяющие начальным условиям

$$u_j^{[n-1]}\Big|_{x=x_0} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad j = v \\ 0 & \quad j \ne v \end{cases} \quad a < x_0 < b ,$$

Тогда существует матричная функция распределения

$$\sigma(\lambda) = \left\|\sigma_{jk}(\lambda)\right\|, \quad j,k = 1,2,\ldots,2n$$

такая, что формулы

$$\varphi_j(\lambda)=\int_a^b f(x)u_j(x,\lambda)dx, \qquad (*)$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j,k=1}^{2n}\varphi_j(\lambda)u_k(x,\lambda)d\sigma_{jk}(\lambda) \qquad (**)$$

осуществляют взаимно обратное изометрическое отображение $L^2(a,b)$ на L^2_σ и L^2_σ на $L^2(a,b)$, соответственно.

При этом интегралы в формулах $(*)$ и $(**)$ сходятся в смысле метрик L^2_σ и $L^2(a,b)$, соответственно

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx=\int_{=\infty}^{\infty}\sum_{j,k=1}^{2n}\varphi_j(\lambda)\overline{\varphi_k(\lambda)}d\sigma_{jk}(\lambda).$$

Спектральная функция P_λ оператора L_u определена по формуле

$$P_\lambda f(x)=\int_{=\infty}^{\lambda}\sum_{j,k=1}^{2n}\varphi_j(\lambda)u_k(x,\lambda)d\sigma_{jk}(\lambda)$$

и для любого конечного интервала Δ оператор P_Δ есть интегральный оператор с ядром

$$P(x,\xi,\Delta)=\int_\Delta\sum_{j,k=1}^{2n}u_k(x,\lambda)u_j(\xi,\lambda)d\sigma_{jk}(\lambda).$$

Для резольвенты $(L_u-\mu\mathrm{I})^{-1}$ оператора и ее ядра указаны интегральные представления:

$$(L_u-\mu\mathrm{I})^{-1}f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j,k=1}^{2n}\frac{\varphi_j(\lambda)}{\lambda-\mu}u_k(x,\lambda)d\sigma_{jk}(\lambda),$$

$$G(x,\xi;\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j,k=1}^{2n}\frac{u_k(x,\lambda)u_j(\xi,\lambda)}{\lambda-\mu}d\sigma_{jk}(\lambda).$$

Для спектральной функции распределения указаны формулы, обобщающие формулы Титчмарша для оператора второго порядка. Основой для исследования индекса дефекта и спектра дифференциального оператора в зависимости от поведения коэффициентов служат асимптотические формулы решений дифференциального уравнения $L(y)=\lambda y$. В книге Наймарка изложены различные теоремы об асимптотике решений Рапопорта [210-214] и Перрона [190].

Не приводя здесь формулировок этих теорем, отметим, что они позволили Наймарку доказать ряд теорем об индексах дефекта оператора L_0, порожденного в интервале $[0,\infty)$ дифференциальным выражением

$$l(y)=(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left(p_0\frac{d^n y}{dx^n}\right)+(-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)+\ldots+p_n y,$$

где $\dfrac{1}{p_0},p_1,p_2,\ldots,p_n$ – веществе иные функции, суммируемые в каждом конечном интервале $[0,\alpha],\alpha>0$. По теореме Глазмана индекс дефекта таких операторов (m,m), где $n\le m\le 2n$, а m – число независимых решений уравнения $l(y)=\lambda y$ при невещественном λ.

<u>Теорема 1</u>. Если $q(x)$ измеримая вещественная функция, существенно ограниченная в $(0,\infty)$, то при прибавлении к $p_n(x)$ функции $q(x)$ индекс дефекта оператора не изменяется.

Теорема 2. Если существуют постоянные $a_0 \neq 0, a_1, a_2, ..., a_n$ такие, что функции $\frac{1}{p_0} - \frac{1}{a_0}, p_1 - a_1, ..., p_n - a_n$ суммируемы в интервале $(0, \infty)$, то индекс дефекта оператора L_0 есть (n, n).

Теорема 3. Если функции $\left(\frac{1}{p_0}\right)', p_1, p_2, ..., p_n$ суммируемы в интервале $[0, \infty)$ и если $\lim\limits_{x \to +\infty} p_0(x) > 0$, то оператор L_0 имеет индекс дефекта (n, n).

Теорема 4. Пусть выполнены условия:

1) $|p_n(x)| \to \infty$ при $x \to +\infty$;

2) p_n', p_n'' не меняют знака в интервале $[x_0, \infty)$ при достаточно большом x_0;

3) при $x \to +\infty$

$$p_n' = O\left(|p_n|^\alpha\right), \quad 0 < \alpha < 1 + \frac{1}{2n};$$

4) $\frac{p_0'}{p_0}, p_1 |p_n|^{-\frac{1}{2n}}, p_2 |p_n|^{-\frac{3}{2n}}, ..., p_{n-1} |p_n|^{-\frac{2n-3}{2n}}$ суммируемые в интервале $[x_0, \infty)$;

5) $\lim\limits_{x \to \infty} p_0(x) > 0$.

Если $p_n(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то индекс дефекта оператора L_0 (n, n). Если же $p_n(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$, то индекс дефекта оператора L_0 есть $(n+1, n+1)$или (n, n) в зависимости от того, будет ли интеграл $\int^{\infty} |p_n(x)|^{-1+\frac{1}{2n}} dx$ сходиться или расходиться.

Значение последнего утверждения в том, что здесь впервые даны условия, чтобы индекс дефекта дифференциального оператора был$(n+1, n+1)$. Для операторов второго порядка приведены теоремы об индексах дефекта $(1,1)$, полученные Левинсоном. Теорема Левинсона обобщала результаты Вейля и более поздние Хартмана и Уинтнера [268, 269].

Значительное внимание в книге уделено одной из важнейших проблем теории дифференциальных операторов – исследованию зависимости спектра от поведения коэффициентов соответствующего дифференциального выражения. Если для регулярных задач Штурма-Лиувилля в основном вопрос можно считать решенным, то для сингулярных дифференциальных операторов только для операторов второго порядка, начиная с работ Вейля, были найдены некоторые условия характеристики спектра. Часть основных результатов была приведена в книге Титчмарша.

В следующие годы эта проблема привлекла внимание многих исследователей. Появились и первые работы по исследованию спектра дифференциальных операторов высших порядков Глазмана [63, 65] и Рапопорта. Некоторые из полученных до 1954 года результатов приведены в книге Наймарка.

Для изучения дифференциальных операторов с двумя сингулярными концами применяется метод расщепления операторов, то есть вместо оператора L_0' в пространстве $L^2(a,b)$ рассматриваются два оператора L_1' и L_2' в пространствах $L^2(a,c)$ и $L^2(c,b)$, соответственно.

На основании общей теории метода расщепления получены теоремы.

Теорема 1. Непрерывная часть спектра всякого самосопряженного расширения оператораL_0 есть теоретико-множественная сумма непрерывных частей спектров операторов $L_{1,u}$ и $L_{2,u}$, полученных при расщеплении оператораL_0.

Доказывается несколько теорем для операторов произвольного порядка $2n$.

Теорема 2. Если конец a регулярен и если $\lim_{x\to\infty} p_n(x) = +\infty$, $p_0(x) > 0$, $p_1(x) \geq 0, \ldots, p_{b-1}(x) \geq 0$, то спектр всякого самосопряженного расширения L_u оператора L_0 в интервале (a, b), порожденного дифференциальным выражением

$$l(y) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}\right) + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(p_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) + \ldots + p_n y$$ дискретен.

Теорема 3. Пусть конец a регулярен и пусть $\lim_{x\to b} p_n(x) = A$. Пусть далее $p_0(x) > 0$ и пусть для значений x, достаточно близких к b $p_1(x) \geq 0, \ldots, p_{n(x)} \geq 0$.

Тогда в интервале $(-\infty, A)$ может находиться только дискретная часть спектра всякого самосопряженного расширения L_u оператора L_0 и предельной точкой части спектра, заключенной в интервале $(-\infty, A)$ может быть только точка $\lambda = A$.

Теорема 4. Пусть конец a регулярен и пусть $b = +\infty$. Если $\lim_{x\to\infty} |q(x)| = M$, то всякий интервал положительной полуоси, длина которого больше $2M$, содержит точки непрерывной части спектра любого самосопряженного расширения L_u оператора L_0.

Теорема 5. Пусть функции $\left(\frac{1}{p_0}\right)'$, $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ суммируемы в интервале $[0, \infty)$ и пусть $\lim_{x\to\infty} p_n(x) = 0$. Тогда непрерывная часть спектра всякого самосопряженного расширения L_u оператора L_0 заполняет всю положительную полуось $\lambda \geq 0$, а на отрицательной полуоси $\lambda < 0$ может находиться только дискретная часть спектра оператора L_u. При этом на полуоси $\lambda > 0$ также могут находиться точки дискретного спектра оператора L_u.

В качестве примеров указаны операторы второго порядка на полуоси с краевыми условиями $y'(0) - \theta y(0) = 0$. Здесь непрерывная часть спектра заполняет положительную полуось. Спектр может быть дискретным на отрицательной полуоси, а положительная полуось не содержит точек дискретного спектра. Для оператора четвертого порядка L_u, порожденного дифференциальным выражением $l(y) = \frac{d^4 y}{dx^4}$ и краевыми условиями $y'(0) + y''(0) = 0$, $y'''(0) + y(0) = 0$, на положительной полуоси оказывается собственное значение $\lambda = 1$, и для собственная функция $y = e^{-x}$. На случай операторов высшего порядка $\frac{d^{2n} y}{dx^{2n}} + p(x)y$ удалось обобщить результаты, ранее известные для операторов второго порядка при $p(x) \to \pm\infty$. В частности, получена теорема, когда при расходимости интеграла $\int^{\infty} |p_n|^{-1+\frac{1}{2n}} dx$ непрерывная часть спектра всякого самосопряженного расширения L_u оператора L_0 заполняет всю действительную ось. При этом оператор может иметь и точки дискретного спектра. Тогда как для оператора второго порядка дискретного спектра нет. В случае сходимости указанного интеграла спектр всякого самосопряженного расширения L_u оператора L_0 оказывается дискретным, а резольвента R_λ оператора L_u во всех точках регулярности λ есть ядро оператора Гильберта-Шмидта.

В книге Наймарка указаны примеры из квантовой механики, а последняя глава посвящена решению обратной задачи Штурма-Лиувилля. Со второй половины 50-х годов исследования по изучению характера спектра дифференциальных операторов проводились еще более интенсивно и были получены многочисленные новые результаты. Значительная часть этих исследований получила освещение в книге Глазмана. "Прямые методы качественного анализа сингулярных дифференциальных операторов", опубликованной в 1963 г. /66/.

§ 6. Асимптотические методы

Изучение асимптотики решений сингулярных дифференциальных уравнений позволило Федорюку в работе 1966г. [273] провести исследование индексов дефекта и спектра самосопряженных дифференциальных операторов высших порядков. Федорюк рассматривает дифференциальные уравнения вида

$$ly=\sum_{k=0}^{n}[-1]^k\varepsilon^{2k}\left(p_{n-k}(x)y^{(k)}\right)^{(k)}=0\,,\quad \begin{aligned} &y(0)\cos\alpha_1+y'(0)\sin\alpha_1=0 \quad (\alpha_1),\\ &y(0)\cos\beta_1+y'(0)\sin\beta_1=0 \quad (\beta_1).\ (*)\end{aligned}$$

на полупрямой $I=[0,\infty]$, где $p_0(x)\neq 0$ при $x\geq 0,\varepsilon>0, p_k(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемые комплекснозначные функции. Изучается асимптотика решений при $\varepsilon\to 0$ и $x\to+\infty$. Относительно функций $p_k(x)$ предполагаются условия:

1) пределы $\lim p_k(x)p_0^{-1}(x)\tau^{-2k}(x)=C_k$ существуют и конечны, где

$$\tau(x)=\left(p_n(x)p_0^{-1}(x)\right)^{\frac{1}{2n}};$$

2) уравнение $g(\xi)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k\xi^{2n-2k}=0$ не имеет кратных корней;

3) при $i\neq j$ и при достаточно больших x

$$f_{ij}(x)=\operatorname{Re}\left((\xi_i-\xi_j)\tau(x)\right)\neq 0\,,$$

где ξ_i – корни уравнения 2) и $\int^{\infty} f_{ij}(x)dx=\infty$;

4) функции $p_k' p_0^{-2}\tau^{-4k-1}, p_k'' p_0^{-1}\tau^{-2k-1}$ суммируемые в интервале $[x_0,\infty]$ при некотором $x_0\geq 0$;

5) $p_k' p_0^{-1}\tau^{-2k-1}=0(1)$ при $x\to\infty$.

Корни уравнения

$$f(\lambda,x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k p_k(x)\lambda^{2n-2k}=0$$

обозначаются через $\lambda_j(x)$ и вводятся функции

$$y_{j0}(x)=\left[\frac{\partial f(\lambda_j(x),x)}{\partial x}\right]^{-\frac{1}{2}}\exp(\varepsilon^{-1})\int_{x_0}^{x}\lambda_j(t)dt\,.$$

Далее вводятся функции

$$y^{[x,\varepsilon]}(x)=\varepsilon^k y^{(k)}(x),\quad 0\leq k\leq n-1,$$
$$y^{[n,\varepsilon]}(x)=p_0(x)\varepsilon^n y^{(n)}(x),$$

$$y^{[n+k,\varepsilon]}(x)=\varepsilon^{-2k}p_k y^{[n-k,\varepsilon]}-\left[y^{[n+k-1,\varepsilon]}(x)\right]^1,\ 1\le k\le n-1.$$

Основой исследования Федорюка по асимптотике решений изучаемых уравнений служит:

Теорема 3.1. Пусть $\varepsilon>0$ и $p_k(x)$ удовлетворяют условиям 1)-5). Тогда для всякого $\varepsilon_0>0$ существует $x(\varepsilon_0)$ такое, что на интервале $[x(\varepsilon_0),\infty)$ уравнение $(*)$ имеет $2n$ линейно независимых решений $y_j(x)$, для которых имеют место асимптотические формулы

$$y_j^{(k)}(x)=\varepsilon^{-k}\lambda_j^k(x)y_{j0}(x)[1+\varepsilon\psi_{jk}(x,\varepsilon)]$$

при $0\le k\le n-1$ и

$$y_j^{[k,\varepsilon]}(x)=\left((-1)^{n-k}\lambda_j(x)p_0(x)y_{j0}(x)\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m C_m\xi_j^{-2m}+0(1)\right)(1+\varepsilon\psi_{jk}(x,\varepsilon))$$

при $n\le k\le 2n-1$.

Здесь ξ_j – корни уравнения 2), C_m определяются из условия 1), $0(1)\to 0$ при $x\to\infty$ и при $x\ge x(\varepsilon_0)$, $\qquad 0<\varepsilon\le\varepsilon_0$

$$|\psi_{jk}(x,\varepsilon)|\le\varphi(x),\qquad \lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0$$

при всех j,k.

Исследования Федорюка продолжены в работах Рапопорта, Наймарка, Левинсона по асимптотике решений дифференциальных уравнений. Указанная теорема была усилена Федорюком с изменением части условий.

Полученные асимптотические формулы, примененные к изучению индекса дефекта дифференциального оператора L_0 на полуоси и на всей оси, порожденного дифференциальным выражением l при $\varepsilon=1$, указали новый класс операторов, имеющих любой возможный индекс дефекта.

Теорема 5.1. Пусть $\lim\limits_{x\to\infty}p_0(x)=1,\qquad \lim\limits_{x\to-\infty}p_n(x)=\infty$ и условия 1), 2), 4), 5) теоремы 3.1. выполнены. Пусть из $\operatorname{Re}\xi_i=\operatorname{Re}\xi_j\ne 0$ следует, что либо $i=j$, либо $\xi_i=\overline{\xi_j}$ и $Jmg'(\xi_i)\ne 0$ в последнем случае.

Тогда

1°. Если $\operatorname{Re}\xi_j\ne 0$, при всех j, то индекс дефекта оператора L_0 равен (n,n).

2°. Пусть $\operatorname{Re}\xi_j=0$, $g'(\xi_i)\ne g'(\xi_j)$ при $i\ne j$ и $1\le i,j\le 2k$ и $\operatorname{Re}\xi_j\ne 0$ при остальных j. Тогда индекс дефекта оператора L_0 равен (n,n) или $(n+k,n+k)$, в зависимости от того, расходится или сходится интеграл $\int^{\infty} p_n^{-1+\frac{1}{2n}}dx$.

Если $p_0(x)\to-\infty$ при $x\to\infty$, то эти утверждения остаются в силе, следует только заменить ξ_i на $\xi_j'=e^{\frac{i\pi}{2n}}\xi_j$. В работе приведен пример сингулярного дифференциального оператора с иррегулярной особой точкой при $x\to\infty$.

Ранее в работах Орлова [187] были указаны примеры дифференциальных операторов с регулярной особой точкой, имеющих любой возможный индекс дефекта.

При исследовании спектра примененные асимптотические методы позволили указать новые достаточные условия, когда спектр всякого самосопряженного расширения L_u оператора L_0 будет дискретным или непрерывная часть заполняет всю действительную ось. Получено также условие, когда спектр операторов L_u дискретный, а резольвента является интегральным оператором с ядром Гильберта-Шмидта.

Все эти результаты являются естественным обобщением результатов М.А. Наймарка с учетом новых асимптотических формул.

В заключение Федорюк касается вопроса об исследовании спектра несамосопряженных операторов порядка $2n$ на полуоси.

Исследование Вейля о предельной окружности и предельной точке, которые устанавливали возможные индексы дефекта для сингулярных дифференциальных операторов второго порядка в виде альтернативы, что индекс дефекта для оператора на полупрямой равны либо 1, либо 2, послужило основой для попыток обобщения этого результата на операторы четвертого порядка Виндау и на операторы произвольного порядка Шином [307, 308].

Однако в исходной части рассуждений Виндау и Шина оказались ошибки, Глазман в заметке [62] 1949 г. кратко, а в 1950 году [63] подробно изложил доказательство теоремы об индексах дефекта сингулярных дифференциальных операторов.

В работе Шина рассматриваются квазидифференциальные выражения

$$D^{[k]} = D^k, k = 0,1,...,n-1;$$
$$D^{[n]} - p_0 D^n,$$
$$D^{[n+k]} = p_k D^{n-k} - DD^{[n+k-1]}, \quad k = 1,2,...,n.$$

Коэффициенты $p_0(t), p_k(t)$ $(a < t < b, k = 1,2,...,n)$ предполагаются измеримыми и в каждой замкнутой части $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ удовлетворяющими условиям

$$\int_\alpha^\beta \frac{dt}{|p_0(t)|} < \infty, \quad \int_\alpha^\beta |p_k(t)| dt < \infty, \qquad k = 1,2,...,n.$$

Минимальная область определения квазидифференциального оператора подчинена условиям

$$\varphi(0) = \varphi^{[1]}(0) = \ldots = \varphi^{[2n-1]}(0) = 0, \quad a = 0, b = \infty.$$

Оператор $L' = l[\varphi] = D^{[2n]}$.

<u>Основная теорема</u>. Дефектное число сингулярного квазидифференциального оператора L порядка $2n$ с минимальной областью определения удовлетворяет неравенству $n \le \det L \le 2n$.

Ошибка в рассуждениях Виндау и Шина была замечена в 1944г. Любарским. Крейн привлек внимание Глазмана к этому вопросу. Рассматривая дифференциальный оператор L с минимальной областью определения, порожденный операцией $l = l_1^{m-n} l_2^{2n-m} l_1^{m-n}$, где $l_1 = -ipDp, \quad p = 1+t$, Глазман показал, что индекс дефекта этого оператора равен (m,m).

В частности $l = (1+t)\dfrac{d}{dt}(1+t)\left(\dfrac{d^2}{dt^2} - 1\right)p\dfrac{d}{dt}p$ для $n = 2$.

Здесь нуль является точкой регулярного типа, а число линейно независимых решений уравнения $l = 0$ в пространстве $L^2(0,D)$ равно 3.

Аналогично в общем случае. Для определения индекса дефекта в случае всей оси применяется метод расщепления и формула $\det L = \det L^- + \det L^+ - 2n$.

В 1950 г. Левитан [130], Левинсон [128] и Иосида [86] доказали теорему разложения, используя предельный переход от регулярных задач к сингулярной $[0,b] \to [0,\infty)$.

В работе [131] Левитан распространил этот метод на дифференциальные операторы произвольного порядка. Левинсон [129] получил критерий единственности спектральной матрицы в виде отсутствия решений с интегрируемым квадратом модуля уравнений $L(x) \pm ix = 0$.

Другой метод для исследования единственности спектральной матрицы связан с изучением функции Грина.

Титчмарш в 1949 г. для оператора второго порядка доказал единственность функции Грина при условии $q(x) \geq -Ax^2 - B,$ где $A \geq 0, B \geq 0$.

Сирс [237] доказал более общую теорему единственности функции Грина при условиях: $Q(x) > 0$ и монотонна:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{Q(x)}} = \infty \text{ и } q(x) \geq -Q(x).$$

На системы обыкновенных дифференциальных уравнений этот результат был обобщен Лидским [146].

В заметке Левитана [133] дано новое доказательство теоремы Вейля о единственности спектральной функции $\rho(\lambda)$ сингулярной краевой задачи для уравнения

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0 \quad (0 \leq x < \infty),$$

где $q(x)$ непрерывная в каждом конечном интервале действительная функция.

Пусть $\varphi(x, \lambda)$ решение данного уравнения, удовлетворяющее граничному условию при фиксированном h

$$y'(0) - hy(0) = 0.$$

Тогда существует монотонно возрастающая функция $\rho(\lambda)$, ограниченная в каждом конечном интервале, такая, что для функции $f(x)$ удовлетворяющей граничному условию, имеющей вторую непрерывную производную и обращающуюся в нуль вне конечного интервала

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \lambda) E(\lambda) d\rho(\lambda),$$

где интеграл сходится при всех $x \geq 0$ и $E(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x)\varphi(x, \lambda)dx$.

Доказательство Левитана основано на доказанной в той же заметке теореме, что представление непрерывной функции $f(x)$ в виде

$$f(x) = \int_c^{\infty} \cos\sqrt{\lambda} x d\sigma(\lambda) \qquad (c > -\infty)$$

единственно.

Развитая Крейном теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов [117] во второй части работы применяется к одномерной краевой задаче с регулярным квазидифференциальным оператором. Результаты этих исследований опубликованы в 1947 г. Оператор T определяется с помощью квазидифференциального выражения

$$f^{[2n]} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left(p_{n-k} \frac{d^k f}{dx^k} \right)$$

при некоторых условиях на функции p_m. Оператор T, определенный для некоторого множества функций с краевыми условиями $f^{[k]}(a) = f^{[k]}(b) = 0$, $\qquad k = 0,1,...,2n-1,$

формулой $Tf = f^{[2n]}$ есть эрмитов оператор с индексом дефекта $(2n,2n)$. Автором указан общий вид самосопряженных расширений оператора T, доказана полуограниченность оператора при $p_0(x) \geq 0$, дана характеристика спектра самосопряженных расширений. Выделены также некоторые специальные классы самосопряженных расширений. В построении теории широко используется функция Грина.

В 1946-1947 гг. в опубликованной статье Граффа [69] проведено исследование дифференциальных систем, определяемых с помощью линейных дифференциальных операторов любого порядка

$$L_n y = p_n \frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + p_0 y$$

или системы линейных дифференциальных операторов первого порядка.

По идеям автор продолжает исследования Бохера, Тамаркина, Буницкого. Проведено изучение сопряженных задач при различных определениях, доказана эквивалентность двух изученных определений и дана классификация краевых условий некоторых видов.

ГЛАВА 9
ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ.

§1. Постановка обратной задачи спектральной теории

Вполне естественно возникает вопрос об обратной задаче спектральной теории, то есть об определении дифференциального оператора по известному его спектру. Однако в ранних работах по задаче Штурма-Лиувилля такая задача не ставилась. Но задачи квантовой механики приводили к задаче определения оператора по его спектру. Например, задача определения внутриатомных сил по заданным уровням энергии.

Впервые постановку обратной задачи встречаем в статье Амбарцумяна 1929 года [2].

Амбарцумян показал, что для краевой задачи

$$\begin{cases} y'' + \left(\lambda - q(x)\right) y = 0, \quad (0 \le x \le \pi) \\ y'(0) = y'(\pi) = 0, \end{cases}$$

где $q(x)$- действительная непрерывная функция, и если $\lambda_n = n^2$, $(n = 0,1,...)$, то $q(x) \equiv 0$. Другими словами, было показано, что если спектр уравнения $y'' + \lambda y = 0$ при тех же краевых условиях сохранился, то никакого возмущения быть не могло. В 1949 Левинсон [127] показал, что одного спектра дифференциального оператора второго порядка недостаточно для определения этого оператора. Продолжительное время обратная задача не привлекала внимание исследователей. В 1946 г. появилась статья Борга [21] " Обратные задачи Штурма-Лиувилля о собственных значениях. Определение дифференциального уравнения по собственным значениям". В этой работе Борга рассмотрены способы построения уравнения по двум спектрам. Эти результаты носят условный характер, так как предполагается существование дифференциального уравнения, для которого данные две последовательности являются спектрами. Борг показал, что один спектр, вообще говоря, не определяет уравнения, случай Амбарцумяна оказывается исключением.

В 1962 г. Кузнецов [119] предложил обобщение результатов Амбарцумяна на двухмерный и трехмерный случаи. Им доказана теорема: Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n)$$

сходится и первое собственное значение задачи

$$\Delta\varphi + (\lambda - v(x))\varphi = 0, \ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0,$$

где Γ достаточно гладкая граница конечной области G, совпадает с первым собственным значением невозмущенного уравнения, то есть уравнения

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0, \ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0.$$

Тогда $v(x)$ тождественно равно нулю.

Для операторов второго порядка с успехом был использован аналитический аппарат теории операторов обобщенного сдвига, разработанный Дельсартом во Франции [74,75], Левитаном [207] и Повзнером [197,198] с применением к теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка. На интересующем нас примере для дифференциальных операторов второго порядка

$$A = \frac{d^2}{dx^2} - q(x), \qquad B = \frac{d^2}{dx} - r(x),$$

заданных в линейных подпространствах E_1 и E_2 пространства $C_2(0,\infty)$, соответственно, с граничным условием $f'(0) = h_1 f(0)$.

Топология в E_1 и E_2 задается равномерной сходимостью функции и двух первых ее производных в каждом конечном интервале. Линейный непрерывный оператор T, действующий из E_1 в E_2 называется оператором преобразования, если он удовлетворяет условиям:

1) $TA = BT$;

2) существует непрерывный обратный оператор T^{-1}.

Для указанного примера T существует и имеет вид интегрального оператора Вольтерра

$$Tf = f(x) + \int_0^x K(x,s) f(s) ds .$$

С помощью этого оператора преобразования Марченко получил наиболее общую теорему единственности: спектральная функция Вейля-Титчмарша оператора Штурма-Лиувилля однозначно определяет оператор.

Полная формулировка основной теоремы Марченко следующая.

Теорема. Пусть заданные на полуинтервале $[0,a]$, $a \le \infty$, операторы

$$L_1 u = \frac{d^2 u}{dx^2} - q_1 u, \qquad L_2 u = \frac{d^2 u}{dx^2} - q_2 u,$$

имеют дискретные спектры.

Рассмотрим краевые задачи: α_1 и β_1 для оператора L_1 с граничными условиями в нуле:

$$y(0)\cos\alpha_1 + y'(0)\sin\alpha_1 = 0 \quad (\alpha_1),$$
$$y(0)\cos\beta_1 + y'(0)\sin\beta_1 = 0 \quad (\beta_1).$$

Аналогично, для оператора L_2, сграничными условиями в нуле

$$y(0)\cos\alpha_2 + y'(0)\sin\alpha_2 = 0 \quad (\alpha_2),$$
$$y(0)\cos\beta_2 + y'(0)\sin\beta_2 = 0 \quad (\beta_2).$$

и одним и тем же условием в точке a, если его вообще нужно задавать. Если $ctg(\beta_1 - \alpha_1) \ne \infty$, $ctg(\beta_2 - \alpha_2) \ne \infty$ и спектр задачи α_1 совпадает со спектром задачи α_2, спектр задачи β_1 со спектром задачи β_2, то $q_1 \equiv q_2$ почти всюду в $[0,a)$. Эта теорема означает, что оператор L с дискретным спектром однозначно определяется двумя спектрами краевых задач с различным граничным условием в нулевой точке и одним и тем же условием надругом конце, если его вообще нужно задавать.

Ранее полученный Левиным подобный результат был менее общим. Оператор преобразования вида $Tf = f(x) + \int_x^\infty A(x,s) f(s) ds$ впервые исследовал Левин. Впоследствии эти операторы были успешно применены Марченко при изучении обратной задачи теории рассеяния.

Обратную задачу теории рассения подробно изучали Агранович, Иост и другие.

Для систем первого порядка типа системы Дирака теория обратных задач была рассмотрена Толлом и Притсом в 1959 г., Левитаном и Гасымовым.

Восстановление дифференциального оператора Штурма-Лиувилля по двум спектрам исследовали Левитан и Гасымов [140].

Работы Левитана и Марченко по обратной задаче спектрального анализа были отмечены государственной премией.

§2. О ранних работах по обратной задаче Штурма-Лиувилля

В 1953г. появилась статья Мотвурфа, в которой рассмотрен вопрос о нахождении функции $\rho(t)$ для краевой задачи. При наличии только гармонических обертонов струны получена

$$\rho(t) = \frac{d}{(e + ft)^4},$$

где d, e, f - постоянные.

Еще раньше Айнс и Маркевич в связи с задачей о неустойчивости решений уравнения

$$y'' + (\mu + \varphi(x))y = 0$$

при условиях $\varphi(x+\pi) = \varphi(x)$, $\int_0^\pi \varphi(x)dx = 0$ и при дополнительных условиях на $\varphi(x)$: $\varphi(-x) = \varphi(x)$ и $\varphi(x) = \varphi\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ получили, что тогда $\varphi(x) \equiv 0$.

Борг показал, что в уравнении

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (\lambda + \varphi(x))y = 0$$

при некоторых краевых условиях, функция $\varphi(x)$, вообще говоря, не может быть определена по одному спектру. При некоторых специальных краевых условиях, например $y(0) = y(\pi) = 0$ или $\varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0$ и требовании $\varphi(x) = \varphi(\pi - x)$ функция $\varphi(x)$ может быть определена однозначно по одному спектру.

Борг доказал, что два спектра классического оператора Штурма-Лиувилля

$$l(y) = -y'' + q(x)y \qquad (0 \le x \le \pi)$$

с граничными условиями, соответственно,

$$1). \quad \begin{cases} y'(0) - hy(0) = 0, \\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \end{cases} \qquad 2). \quad \begin{cases} y'(0) - h_1 y(0) = 0, \\ y'(\pi) + H_1 y(\pi) = 0, \end{cases} \quad (h \ne h_1)$$

однозначно определяют функцию, $q(x)$, т.е. оператор $l(y)$.

Левинсон [127] изучал оператор Штурма-Лиувилля на полупрямой при условии $\int_0^\infty x|q(x)|dx < \infty$. Тогда решение $\varphi(x,s)$ уравнения $l(y) = s^2 y$, $y(0) = 0$ имеет при $x \to \infty$ асимптотический вид $\varphi(x,s) = \mu(s)\sin(sx + \delta(x) + 0(1))$. Функция $\delta(s)$ называется фазой рассеивания. Основной результат Левинсона в том, что при отсутствии отрицательных собственных значений фаза рассеивания однозначно определяет потенциальную функцию $q(x)$.

Чудов в статье [305], отмечает значение обратных задач для некоторых областей современной физики и техники, таких, как теория излучения, кристаллооптика, теория упругости. Впервые значение таких задач было отмечено Амбарцумяном в 1929г.

Борг доказал единственность решения обратной задачи для уравнения

$$y'' + \varphi(x)y = \lambda y, \qquad 0 \le x \le \pi$$

при краевых условиях

$$1).\quad \begin{cases} \alpha y(0) + \beta y'(0), \\ \gamma y(\pi) + \delta y'(\pi) = 0 \end{cases} \qquad 2).\quad \begin{cases} \alpha y(0) + \beta y'(0), \\ \gamma' y(\pi) + \delta' y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

и дополнительных условиях $\delta\delta' = 0,\ |\delta| + |\delta'| > 0$.

В работе Чудова предполагается только независимость краевых условии в точке $x = \pi$, то есть $\begin{vmatrix} \gamma & \delta \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix} \ne 0$.

При доказательстве использована асимптотика решений рассматриваемого уравнения $y(x,\lambda)$ при начальных условиях, соответствующих первому краевому условию, и единственность так называемой характеристической функции.

$$\Phi(\lambda) = \gamma y(\lambda,\pi) + \delta y'(\lambda,\pi).$$

Другой метод изучения обратных задач был разработан Крейном [116]. Крейн решает задачу определения симметрического дифференциального оператора по спектрам двух его различных самосопряженных расширений. Он получил необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи в такой постановке: заданы две перемежающиеся $l-$ последовательности, то есть такие, для которых выполнены условия $l^2 = \pi^2 \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{\lambda_n}$ с данным $l > 0$, чисел $s = \{\lambda_n\}$ и $s' = \{\lambda'_n\}$, $\lambda_1 < \lambda'_1 < \lambda_2 < \lambda'_2 < \dots$. Требуется узнать, существуют ли функции $q(x)$, $0 \le x \le b$ и числа α, α' и β такие, что

$$S_q(\alpha,\beta) = S,\ S_q(\alpha',\beta) = S'$$

и если существуют, то найти их. $S_q(\alpha,\beta)$ обозначен спектр краевой задачи:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \qquad (0 \le x \le l \le \infty)$$

$$\cos\alpha y(0) + \sin\alpha y'(0) = 0, \qquad \cos\beta y(l) + \sin\beta y'(l) = 0$$

Идея решения задачи у Крейна состоит в обобщении степенной проблемы моментов, решаемой на основе разработанной автором проблемы продолжения эрмитово положительных функций.

Правило восстановления оператора L_q по двум его спектрам состоит в следующем: пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ решения уравнения $-y'' + q(x)y = 0$, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi(0) = \psi'(0) = \sin\alpha, \quad \varphi'(0) = -\psi(0) - \cos\alpha.$$

Вспомогательная функция $M(x)$ может быть получена, а по ней находится

$$\varphi(x) = const\left(-\frac{dM(2x)}{dx}\right)^{-\frac{1}{2}},\ \ 0 \le x \le l \ \text{ и } \ q(x) = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}.$$

Для разрешимости задач необходимо выполнение условий:

1) функция $M(x)$ абсолютно непрерывна вместе со своей первой производной.

2) производная $\frac{dM}{dx} \neq 0$.

Развитие идеи приводит Крейна к постановке и решению задачи определения плотности неоднородной симметричной струны по спектру ее частот. Эта задача связана с уравнением

$$\varphi''(x) + \lambda\rho(x)\varphi(x) = 0, \qquad (-1 \le x \le 1)$$
$$\varphi(\pm 1) = 0.$$

При некоторых дополнительных условиях доказана единственность решения поставленной задачи.

После успехов в решении обратной задачи спектрального анализа обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка были предприняты попытки применить разработанные методы исследования для операторов высших порядков. Проведенные в 1958-62гг. исследования Сахновича и Мацаева показали, что обобщение методов, развитых для операторов второго порядка, оказалось возможным только в частных случаях. Так, Сахнович [232] для операторов четвертого порядка и в общем случае $n > 2$ доказал, что обобщение операторов преобразования, использованных в случае операторов второго порядка, удается только в случае целых аналитических коэффициентов дифференциального оператора. Аналогичные результаты получил и Мацаев [160] в 1960г.

§3. Исследования по обратной задаче Гельфанда и Левитана

Первый результат исследований Гельфанда и Левитана был высказан в виде основной теоремы: если неубывающая функция $\sigma(\lambda)$ удовлетворяет условиям:

А) при любом вещественном x существует интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\sqrt{|\lambda|}x} d\sigma(\lambda)$.

Б) если положить $\tau(\lambda) = \begin{cases} \sigma(\lambda) - \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda} & \text{при} \quad \lambda > 0 \\ \sigma(\lambda) & \phantom{\text{при}} \quad \lambda < 0 \end{cases}$,

то функция $a(x) = \int\limits_{1}^{\infty} \frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{\lambda} d\tau(\lambda)$ имеет непрерывные производные до четвертого порядка включительно. Если множество точек разрыва функции $\sigma(\lambda)$ имеет хотя бы одну конечную предельную точку, то существует дифференциальный оператор второго порядка, определенный дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + q(x)y, \quad 0 < x < \infty$$

с непрерывным коэффициентом $q(x)$ и краевым условием вида $y'(0) - \theta y(0) = 0$,
для которого $\sigma(\lambda)$ есть спектральная функция распределения. При этом функция $q(x)$ и число θ определяются по формулам

$$q(x) = \frac{1}{2}\frac{dK(x,x)}{dx}, \qquad \theta = K(0,0),$$

где $K(x,y)$ есть решение интегрального уравнения

$$f(x,y) + \int\limits_{0}^{x} f(y,s)K(x,s)\,ds + K(x,y) = 0$$

и $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}x\sin\sqrt{\lambda}y}{\lambda}d\tau(\lambda)$. С помощью этого преобразования в работе Гельфанда и Левитана в 1951г [57] был разработан эффективный метод построения дифференциального оператора по его спектральной функции и указаны достаочные условия, чтобы данная монотонная функция $\rho(\lambda)$ могла быть спектральной функцией оператора Штурма-Лиувилля.

После проведенных исследований об асимптотическом поведении спектральной функции Гасымов и Левитан в 1964г. в статье [133] изложили прежние и некоторые новые результаты в измененном виде.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-y''+q(x)y=\lambda y, \quad (0\le x<\infty)$$

с граничным условием в нуле $y'(0)-hy(0)=0$, где h действительное число, $q(x)$ - действительная локально суммируемая функция.

Известно, что для каждого h и каждой функции $q(x)$ существует спектральная функция $\rho(\lambda)$ краевой задачи, неубывающая в $-\infty<\lambda<\infty$ и имеет место равенство Парсеваля

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}E^2(\lambda)d\rho(\lambda)=\int\limits_{0}^{\infty}f^2(x)dx,$$

где $E(\lambda)=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^n f(x)\varphi(x,\lambda)dx$,а $\varphi(x,\lambda)$ - решение исходного уравнения с начальными условиями $y(0)=1, y(0)=h$. Сначала доказывается необходимое условие, чтобы монотонно растущая функция $\rho(\lambda)$ была спектральной функцией граничной задачи с функцией $q(x)$, имеющей m локально суммируемых производных.

Для функции $\varphi(x,\lambda)$ имеет место формула

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}x+\int\limits_0^x K(x,t)\cos\sqrt{\lambda}t dt,$$

где $K(x,x)=h+\dfrac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)dt,\ \ \dfrac{\partial K(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$.

Для ядра $K(x,t)$ выводится интегральное уравнение, разрешимость которого доказывается. Интегральное уравнение для ядра $K(x,t)$ имеет вид

$$F(x,t)+K(x,t)+\int\limits_0^x K(x,s)F(s,t)ds=0 \qquad (0\le t<x)$$

где $F(x,t)=\lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{N}\cos\sqrt{\lambda}x\cos\sqrt{\lambda}t d\sigma(\lambda),\quad \sigma(\lambda)=\begin{cases}\rho(\lambda) & \lambda<0\\ \rho(\lambda)-\dfrac{2}{\pi}\sqrt{\lambda} & \lambda\ge 0\end{cases}$.

Нахождение $q(x)$ теперь не представляет труда: $q(x)=2\dfrac{dK(x,x)}{dx}$.

После доказательства равенства Парсеваля, подтверждающего, что функция $\rho(\lambda)$ является действительно спектральной функцией рассматриваемой граничной задачи, результаты исследования формулируются теоремой.

Для того, чтобы монотонно растущая функция $\rho(\lambda)$ была спектральной функцией некоторой граничной задачи с функцией $q(x)$, где $q(x)$ имеет m суммируемых производных и числом h, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

а) Если $E(\lambda)$ есть косинус-преобразование произвольной финитной функции $f(x)$ из $L_2(0,\infty)$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} E^2(\lambda) d_\rho(\lambda) = 0,$ то $f(x) \equiv 0$ почти всюду.

б) Предел $\Phi(x) = \lim\limits_{N\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{N} \cos\sqrt{\lambda} x d\sigma(\lambda),$ где $\sigma(\lambda) = \begin{cases} \rho(\lambda) & \lambda < 0 \\ \rho(\lambda) - \dfrac{2}{\pi}\sqrt{\lambda} & \lambda \ge 0 \end{cases}$ существует в любой конечной области изменения x и функция $\Phi(x)$ имеет $(m+1)$ локально суммируемых производных, причем $\Phi(0) = h$.

В качестве примера рассмотрена задача с чисто дискретным спектром $\{\lambda_n\}$ и единственной предельной точкой в бесконечности. Тогда

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_n}$$

где $\alpha_n = \int\limits_0^{\infty} \varphi^2(x,\lambda_n) dx$, $\varphi(x,\lambda_n)$ - собственные функции и $\varphi(0,\lambda_n) = 0$.

Для классической задачи Штурма-Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y,$$
$$y'(0) - hy(0) = 0, \qquad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$$

как обычно, обозначим $\varphi(x,\lambda)$ решение данного уравнения с начальными условиями $y(0) = 1, \qquad y'(0) = h$ и пусть $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ собственные значения граничной задачи и $\alpha_n = \int\limits_0^{\pi} \varphi^2(x,\lambda_n) dx$.

Система чисел $\{\lambda_n\}$ и $\{\alpha_n\}$ называются спектральными характеристиками граничной задачи, результаты исследования сформулированы в виде теоремы: Для того, чтобы числа $\{\lambda_n\}$ и $\{\alpha_n\}$ были спектральными характеристиками граничной задачи указанного вида с функцией $q(x)$, где $q^m \in L_1(0,\pi)$ необходимо и достаточно, чтобы имели место асимптотические формулы

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$\alpha_n = \frac{n}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

причем $\lambda_n \ne \lambda_m$ при $n \ne m$, все $\alpha_n > 0$ и чтобы функция

$$F(x,t) = \frac{1}{\alpha_0}\cos\sqrt{\lambda_0}x\cos\sqrt{\lambda_0}t - \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos\sqrt{\lambda_n}x\cos\sqrt{\lambda_n}t}{\alpha_n} - \frac{2}{\pi}\cos x\cos nt\right]$$

имела $(m+1)$-е суммируемые производные в области $0 \le x,t \le \pi$.

Во второй главе статьи Левитана и Гасымова [140] решается обратная задача Штурма-Лиувилля для регулярного случая по двум спектрам. Результат дается теоремой: Пусть заданы две последовательности, $\{\lambda_n\}$ и (μ_n) для которых выполняются следующие условия:

1) числа λ_n и μ_n перемежаются,

2) для λ_n и μ_n выполняются асимптотические формулы

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right),$$
$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{a_0'}{n} + \frac{a_1'}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

причем $a_0 \neq a_0'$. Тогда существует абсолютно непрерывная функция $q(x)$ и числа h_1, h_2, H_1, H_2 такие, что $\{\lambda_n\}$ - спектр задачи $-y'' + q(x)y = \lambda y,\ y'(0) - h_1 y(0) = 0$, $y'(\pi) + H_1 y(\pi) = 0$, а $\{\mu_n\}$-спектр задачи при граничных условиях $y'(0) - h_2 y(0) = 0,$ $y'(\pi) + H_2 y(\pi) = 0$.

При этом $h_2 - h_1 = \pi(a_0' - a_0)$. В этом решении есть некоторый разрыв между требованием к $q(x)$. Для существования использованных асимптотических формул необходимо, чтобы $q'(x)$ имела, по крайней мере, ограниченную вариацию на $[0, \pi]$, а доказана только абсолютная непрерывность $q(x)$. Но этот разрыв может быть устранен другими методами с некоторыми изменениями условий в деталях.

Обратная задача по двум спектрам для сингулярного случая, решается эффективно для частного класса $\Omega_{-\frac{1}{4}}$ потенциалов $q(x)$ таких, что существует такое постоянное число h_0, что спектральные характеристики при $h = h_0$ обладают свойствами:

1) существуют такое постоянное число $\alpha > 0$, что $\lambda_n(h_0) - \lambda_{n-1}(h_0) \geq \alpha$.

2) для спектральной функции $\rho_{h_0}(\lambda)$ этой граничной задачи имеет место асимптотическая формула $\rho_{h_0}(\lambda) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda} - h_0 + O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{4}} + \delta}\right)$ при больших $\lambda > 0$, где $\delta > 0$;

3) справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\rho_{h_0}\left[\lambda_{n+1}(h_0)\right] - \rho_{h_0}\left[\lambda_n(h_0)\right]}{\sqrt{\lambda_{n+1}(h_0)} - \sqrt{\lambda_n(h_0)}} = \frac{2}{\pi}$.

Для простоты изложения предполагается ограниченность спектра снизу. Доказывается, что свойства 1)-3) выполняются при любом другом значении h, если они выполняются при одном каком-либо значении h_0.

Результаты решения обратной задачи для сингулярного случая в основном принадлежат Гасымову [204].

Рассматривается сингулярная задача Штурма-Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = sy,$$
$$y'(0) - hy(0) = 0, \qquad 0 \leq x < \infty,$$

$q(x)$- действительная локально суммируемая функция, обеспечивающая дискретность спектра. Функцию $q(x)$ называют потенциалом.

Решение обратной задачи формулируется в виде теоремы: для того, чтобы две последовательности перемежающихся чисел $\{\lambda_n(h_1)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\lambda_n(h_2)\}_{n=0}^{\infty}$ были собственными значениями одного и того же уравнения с локально суммируемым потенциалом $q(x) < \Omega_{-\frac{1}{4}}$, но с различными граничными условиями в нуле, необходимо и достаточно, чтобы функции

$$\sigma_i(\lambda)=\frac{1}{h_2-h_1}\sum_{\lambda_n(h_i)<\lambda}\{\lambda_n(h_2)-\lambda_n(h_1)\}, \qquad (i=1,2),$$

были спектральными функциями некоторых сингулярных уравнений того же вида с локально суммируемым потенциалом из класса $\Omega_{\frac{1}{4}}$. В случае обратной задачи классического уравнения Штурма-Лиувилля после устранения отмеченного выше разрыва, результат высказан теоремой: для того, чтобы две последовательности перемежающихся чисел $\{\lambda_n\}$и $\{\mu_n\}$ были собственными значениями одного и того же уравнения Штурма-Лиувилля типа $-y''+q(x)y=sy,\ 0\le x\le\pi$, где $q(x)\in L_1(0,\pi)$ с различными граничными условиями в точке π, необходимо и достаточно, чтобы при больших $n:\lambda_n=n^2+a_0+0(1),\ \mu_n=n^2+a_0'+0(1)$, причем $a_0\ne a_0'$ и функция

$$\Phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\mu_n-\lambda_n}{h_2-h_1}\cos\sqrt{\lambda_n}\,x-\frac{2}{\pi}\cos x\right\}, \quad 0\le nx\le 2\pi$$

где $h_2-h_1=\dfrac{\pi}{2}(a_0'-a_0)$, имела суммируемую производную.

В раооте Левитана рассмотрена обратная задача для уравнения $y''+(\lambda-q(x))y=0$, $q(x)\in C(0,\pi)$, $y'(0)-hy(0)=0$ и 1) $y'+Hy(\pi)=0$, 2) $y'(\pi)+H_1y(\pi)$, $H_1\ne H$ с асимптотикой для собственных значений

$$\sqrt{\lambda_n}=n+\frac{a_0}{n}+\frac{a_1}{n^2}+\ldots, \qquad \alpha_n=\int\psi_n^2dx=\frac{\pi}{2}+\frac{b_0}{n^2}+\ldots$$

Для существования асимптотики необходимо и достаточно, чтобы $q(x)$ была бесконечно дифференцируемой. Указан эффективный метод построения уравнения, конкретизирующий метод, опубликованный ранее. В заметке Гасымова и Левитана применен метод оператора преобразования решения обратной задачи для системы Дирака. Результат этого исследования высказан в виде теоремы: для того, чтобы функция $\rho(x)$ была спектральной функцией уравнения

$$\left\{B\frac{d}{dx}+Q(x)\right\}y=\lambda y, \qquad 0\le x<\infty$$

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ Q(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix},$$

причем матрица $Q(x)$ имеет n локально суммируемых производных, p,q - действительные функции интегрируемые на любом конечном отрезке из $[0,\infty]$, с начальными условиями: $y_1(0)=0,\quad y_2(0)=-1$ – необходимо и достаточно, чтобы функция $p(\lambda)$ обладала свойствами спектральной функции, т.е.

1) $\rho(\lambda)$ монотонно растет на всей оси;

2) пусть $G(\lambda)=\int_0^{\infty}\{g_1\sin\lambda x-g_2\cos\lambda x\}dx$, где g_1 и g_2 суть финитные функции из $L_2(0,\infty)$. Тогда, если $\int_{-\infty}^{\infty}G^2(\lambda)d\rho(\lambda)=0$, то $G(\lambda)\equiv 0$ и, следовательно, $g_1(x)\equiv g_2(x)$.

3) Предел $\lim\limits_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\begin{pmatrix}\sin\lambda x\\ -\cos\lambda x\end{pmatrix}(\sin\lambda y_1-\cos\lambda y)d\left[\rho(\lambda)-\frac{1}{\pi}\lambda\right]=F(x,y)$

ограниченно существует в любой конечной области изменения x, y. При этом $F(x,y)$ по обеим переменным имеет столько же производных, сколько их имеет $Q(x)$.

В заметке [141] Левитан и Саргсян решали обратную задачу для системы Дирака по фазе рассеяния. Аналогичная задача для уравнения Штурма-Лиувилля была ранее решена Марченко.

Блох [19] обобщил результаты Гельфанда и Левитана на случай интервала $(-\infty,\infty)$. Спектральная функция распределения получается в виде матричной функции второго порядка

$$\sigma(\lambda)=\begin{Vmatrix}\sigma_{11}(\lambda) & \sigma_{12}(\lambda)\\ \sigma_{21}(\lambda) & \sigma_{22}(\lambda)\end{Vmatrix}.$$

Для разрешимости обратной задачи достаточно условие сходимости при произвольных значениях x и y интеграла

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^x p(s,\lambda)ds\right\}\left\{\int_0^y p(s,\lambda)ds\right\}d\tau(\lambda)$$

и непрерывной дифференцируемости по x и y до четвертого порядка включительно.

В этой формуле $p(s,\lambda)=\left\{\cos\sqrt{\lambda}s, \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}}\right.$, $p(s,\lambda)$- вектор-функция,

$$\tau(\lambda)=\begin{cases}\sigma(\lambda)-\dfrac{\sqrt{\lambda}}{\pi} & \text{при} \quad \lambda\ge 0\\ \sigma(\lambda) & \quad \lambda<0\end{cases}.$$

Этот результат был рассмотрен и для оператора в пространстве вектор-функций.

§ 4. Исследование обратных задач у Лейбензона.

Новый метод исследования обратных задач был предложен Лейбензоном в 1962г. Более подробное изложение его результатов появилось в статье 1966г. [143].

Автор рассматривает обыкновенные дифференциальные операторы L порядка $n\ge 2$ вида $L_\varphi=\varphi^{(n)}+\sum_{m=0}^{n-2}p_m(x)\varphi^{(m)}$, где $0\le x\le 1$, коэффициенты $p_m(x)$ могут быть произвольными комплексными функциями с суммируемыми m-ми производными. $p_m^{(m)}(x)$.

Для оператора L рассматривается совместно $n-1$ спектральных задач $(s_1),...,(s_{n-1})$, которые вместе с сопряженными задачами $(\tilde{s}_1),...,(\tilde{s}_{n-1})$ для формально сопряженного оператора $\widetilde{L}$, образуют $\{L,C_\nu^a\}$- систему, по терминологии автора.

Здесь самосопряженной может быть только задача $\left(S_{\frac{n}{2}}\right)$ при четном n и формально сопряженном операторе L.

Пусть L_1- дифференциальный оператор, определяемый тем же дифференциальным выражением, но с добавлением краевых условий.

В предлагаемом методе строится линейное отображение T_λ, зависящее от комплексного параметра λ, n-мерного пространства Z_λ всех решений уравнения $L\varphi=\lambda\varphi$, в пространство $Z_\lambda^{'}$ всех решений уравнения $L\psi=\lambda\psi$.

Для постановки краевых условий вместе с оператором рассматриваются линейные формы / по n для каждого конца интервала $a=0$ или $a=1$

$$C_\nu^a z = z_{\nu-1} + \sum_{0\le\mu<\nu-1} C_{\nu,\mu}^a z_\mu$$

при $1\le\nu\le n$, где $C_{\nu_1\mu}^a$ произвольные комплексные постоянные.

Вводится вектор, определяемый для любой n раз дифференцируемой функции $F(x)$: $\overrightarrow{F(x)} = \left\{F(x), F'(x), ..., F^{(n-1)}(x)\right\}$.

Рассматриваются линейные комбинации

$$C_1^0\varphi(0),...,C_n^0\varphi(0) \quad (*)$$

и, аналогично,

$$C_1^1\varphi(1),...,C_n^1\varphi(1) \qquad (**).$$

Спектральная задача $(S_k)(k=1,2,...,n-1)$ определяется дифференциальным уравнением $L_\varphi - \lambda\varphi = 0$ и приравниванием нулю последних $n-k$ выражений из $(*)$ и первых k из $(**)$, то есть

$$C_{k+1}^0\varphi(0)=0,...,C_n^0\varphi(0)=0\,;\;\; C_1^1\varphi(1)=0,...,C_k^1\varphi(1)=0$$

Аналогично определяются сопряженные задачи $(\tilde{S}_k)$.

В предположении, что собственные значения задачи(S_k) однократны ,т.е. присоединенные функции отсутствуют/, причем каждое из них не является собственным числом ни задачи(S_{k-1}) при $k>1$ ни задачи (S_{k+1}) при $k<n-1$/. Тогда каждому собственному числу λ_{kl} $/l=1,2,...$/соответствует только одна собственная функция $\varphi_{(kl)}(x)$ задачи(S_k) и одна собственная функция $f_{(kl)}(x)$ сопряженной задачи$(\tilde{S}_k)$ с нормированной $C_k^0\varphi(0)=\tilde{C}_{n-k}\overrightarrow{f_{(k,l)}}(0)=1$ и $\alpha_{k,l}=\int_0^1\varphi_{(k,l)}(x)\overrightarrow{f_{(k,l)}}(x)\,dx\ne 0$.

Числа $\alpha_{k,l}$ называются весовыми функциями $\{L, C_\nu^a\}$- системы.

Спектральная мера $d\sigma_k(\lambda)$ задачи(S_k) определяется равенством

$$\int F(\lambda)d\sigma_k(\lambda) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{F(\lambda_{k,l})}{\alpha_{k,l}},$$

где $F(\lambda)$ - любая функция, для которой первая часть этого равенства имеет смысл.

Если существуют все спектральные меры $d\sigma_k(\lambda)$, то обратная задача понимается как задача восстановления оператора L и форм C_ν^a по заданным спектральным мерам.

Для обратной задачи доказана теорема единственности решения: Если существуют все спектральные меры $d\sigma_1(\lambda),...,d\sigma_{n-1}(\lambda)$ указанного вида, то эти меры однозначно определяют оператор L и связанные с краевыми условиями формы $C_\nu^a/1\le\nu\le n; a=0;1/$.

В обобщенном виде, без условия существования мер, доказана
теорема: Оператор L и формы C_ν^a однозначно определяются по совокупности собственных чисел λ_0 $(L.C_\nu^a)$ - системы и соответствующих им структурных матриц-функций $W_{\lambda_0}(\varsigma)$.

Собственными числами λ_0 $\left(L, C_\nu^a\right)$ − системы называются собственные числа одной или нескольких задач $(S_1),...,(S_{n-1})$. Структурная матрица $W_{\lambda_0}(\varsigma)$ $\left(L, C_\nu^a\right)$- системы при $\lambda = \lambda_0$ характеризует спектральную структуру совокупности задач $(S_1),...,(S_{n-1})$ в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$

.Для доказательства теорем единственности решения обратной задачи применяются методы теории функций комплексного переменного и аналитических матриц-функций от λ.

Другие вопросы обратной задачи, например, восстановление оператора, также могут быть решены на основе связи между операторами L и L_1 и их спектральными свойствами.

В пояснениях отмечается соответствие развитого метода с результатами прежних исследований по обратной задаче Штурма-Лиувилля.

§ 5. Обратная задача теории рассеяния

Частным случаем обратной задачи спектрального анализа дифференциальных операторов является обратная задача квантовой теории рассеяния, возникшая в квантовой механике.

Физический смысл обратной задачи рассеяния состоит в возможности восстановления потенциала поля по асимптотике волновых функций на бесконечности.

Математическое содержание задачи рассеяния связано с изучением граничных задач для системы дифференциальных уравнений

$$y_j'' + \lambda^2 y_j = \sum_{k=1}^{n} V_{jk}(x) y_k, \qquad 0 < x < \infty, \qquad (j = 1,2,...,n)$$

с эрмитовой матрицей коэффициентом

$$V(x) = \left\| V_{jk}(x) \right\|^n$$

называемой потенциальной матрицей, и граничными условиями

$$y_j(0) = 0, \qquad (j = 1,2,...,n).$$

Задача состоит в том, чтобы, зная асимптотическое поведение на бесконечности нормированных собственных вектор-функций указанной граничной задачи, восстановить потенциальную матрицу $V(x)$.

В такой постановке обратной задачей занимались Агранович и Марченко, результаты исследований которых были опубликованы в ряде статей и книгах.

В первой части книги Аграновича и Марченко рассмотрены задачи, когда выполнены условия

$$\int_0^\infty x \left| V_{jk}(x) \right| dx < \infty, \qquad (j,k = 1,2,...,n). \qquad (*)$$

Тогда граничная задача может иметь конечное число отрицательных собственных значений λ_k^2, $(Jm\lambda_k < 0)$, ее непрерывный спектр заполняет всю положительную полуось.

Нормированные собственные вектор-функции этой задачи являются столбцами матрицы $U(x,\lambda)$, $(\lambda > 0, \lambda = \lambda_k, k = 1,2,...,p)$, имеющих при $x \to \infty$ следующую асимптотику

$$U(x,\lambda) = e^{i\lambda x} \mathrm{I} - e^{-i\lambda x} S(-\lambda) + 0(1), \quad (\lambda > 0),$$

$$U(x,\lambda_k)=e^{-|\lambda_k|x}\left[M_k+0(1)\right], \qquad (k=1,2,...,p)$$

где I - единичная матрица, $S(\lambda)$, $(-\infty<\lambda<\infty)$ унитарная матрица со свойствами $S(-\lambda)=S^*(\lambda)$, M_k - эрмитова неотрицательная матрица, ранг которой равен кратности собственного значения $\mp\lambda_k^2, S(\lambda)$ называется матрицей рассеяния, M_k - нормированными матрицами, а совокупность величин $S(\lambda),\lambda_k^2,M_k$ $(k=1,2,...,p)$ данными рассеяния граничной задачи.

Обратная задача теории рассеяния в рассматриваемом случае состоит в следующем:

1) Нахождении потенциальной матрицы $V(x)$ граничной задачи по данным рассеяния;

2) Нахождении необходимых и достаточных условий, чтобы заданная унитарная матрица $S(\lambda)$, числа $\lambda_k^2<0$ и эрмитовы матрицы M_k $(k=1,2,...,p)$ были данными рассеяния некоторой граничной задачи указанного выше вида с эрмитовым потенциалом $V(x)$, удовлетворяющим условию $(*)$.

Если выполнено условие $(*)$, то существует решение $E(x,\lambda)$ матричного дифференциального уравнения

$$Y''+\lambda^2 Y=V(x)Y \qquad 0<x<\infty,$$

представимое в виде

$$E(x,\lambda)=e^{-i\lambda x}\mathrm{I}+\int_x^\infty K(x,t)e^{-i\lambda t}dt \qquad (Jm\lambda\le 0),$$

причем матрица $K(x,t)$ и потенциал связаны равенством

$$V(x)=-2\frac{d}{dx}K(x,x), \ (x>0).$$

Развиваемый авторами метод основан на изучении интегрального уравнения для матрицы $K(x,y)$:

$$F(x+y)+K(x,y)+\int_x^\infty K(x,t)F(t+y)dt=0 \ \ (0<x\le y),$$

где $F(t)$ определяется по данным рассеяния:

$$F(t)=\sum_{k=1}^{p}M_k^2e^{-|\lambda_k|t}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[I-S(\lambda)\right]e^{i\lambda t}d\lambda$$

Во второй части изучается граничная задача с особенностями для частного случая системы уравнений, встречающейся в теории уравнения Шредингера для дейтрона с учетом тензорных сил взаимодействия.

Для этой задачи матричное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$Y''-\left[V(x)+6x^{-2}P\right]Y+\lambda^2Y=0 \ \ (0<x<\infty)$$

и граничное условие $Y(0,\lambda)=0$, где $V(x)$ эрмитова матрица второго порядка, а P-проектирующая матрица, ранг которой равен единице. Без ограничения общности примем $P=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. Потенциальная матрица $V(x)$ при некотором ε $(0<\varepsilon<1)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty x^{1+\theta}|V(x)|dx < \infty \quad (|\theta| < \varepsilon)$$

В книге приведен подробный анализ этой граничной задачи, а затем и решения обратной задачи. Рассмотренная во второй части обратная задача теории рассеяния не всегда имеет единственное решение. Может существовать однопараметрическое семейство эрмитовых матриц с указанным свойством и такое, что отвечающие им граничные задачи имеют одинаковые данные рассеяния.

Ранние работы физиков носили характер математической обработки вычислительными или аналитическими методами предполагаемых экспериментальных данных рассеяния.

Развитие и дальнейшее применение математических методов значительно расширило круг исследований и получаемых результатов. Левитан исследовал возможность существования обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка с периодическими, квазипериодическими и почти периодическими потенциалами по их спектральным характеристикам. Гасымов рассмотрел обратную задачу на полупрямой для оператора Дирака по спектральной функции. Для краевой задачи

$$B\frac{dy}{dx} + Q(x)y = \lambda y,\ 0 < x < \infty,\ y(0) = 0,$$

где $B = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$, показано получение спектральной функции $\rho(\lambda)$.

Об эффективности метода обратной задачи спектральной теории можно судить по обилию исследований и полученных результатов. Обратную задачу теории рассеяния подробно изучали Агранович, Иост, Лаффель, Марченко, Сабатье, Сигур, Шадан и другие.

Для систем первого порядка типа систем Дирака теория обратных задач была рассмотрена Толом и Пратсом в 1954 году, а позднее Левитаном и Гасымовым. Основные результаты многочисленных исследований математиков и физиков изложены в ряде книг. Назовём некоторые из них: Марченко "Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения" [159]; Шадан, Сабатье Обратные задачи в квантовой теории рассеяния" [305A]; Захаров, Манаков, Новиков, Питаевский "Теория солитонов. Метод обратной задачи" [84]; Абловиц, Сигур "Солитоны и метод обратной задачи"[1]; Левитан "Обратные задачи Штурма-Лиувилля"[138]; Левитан, Саргсян "Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака" [141].

§6. Обратная задача спектральной теории и уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ). Нелинейные уравнения.

При изучении волнового движения воды на небольшой глубине был обнаружнен неизвестный ранее вид уединённой волны. Впоследствии, когда квантовая теория установила аналогию волн с частицами, вошёл в употребление термин "солитон". Многие исследования проводились как создание теории солитонов. В 1895 г. Кортевег и де Фриз опубликовали статью, в которой дали математическое обоснование и получили уравнение, которое может быть записано в виде

$$v_t - 6vv_x + v_{xxx} = 0,$$

где функция v характеризует развитие явления. Это нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка, получившее название уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ).

Крускал, Гарднер, Забуски, Миури, Грин установили связь спектральных свойств задач квантовой теории рассеяния с уравнением Кортевега-де Фриза. Исследованиями обратных задач квантовой теории рассеяния занимались Захаров, Манаков, Новиков, Левитан, Фаддеев и другие. Частично изложение полученных результатов содержится в указанных выше книгах.

С.П.Новиков изучил решения уравнения Кортевега-де Фриза, связанные с периодическими по времени свойствами. Левитан рассмотрел уравнение КдФ в классе конечнозонных и бесконечнозонных непериодических потенциалов.

Методом обратной задачи в связи с уравнением КдФ рассматривались вопросы нахождения решений на полупрямой, периодических и почти периодических решений и ряд других частных задач.

В ходе исследований использовался метод Лэкса, известный под названием "пары Лэкса".

Отдельные исследования методом обратных задач были проведены для нелинейного уравнения Шрёдингера и уравнения *sin*-Гордон.

КРАТКИЙ ИСТОРИОГРАФИЧЕСКИЙ ОБЗОР

Исторические и библиографические замечания о развитии задач, идей и методов спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов можно найти в ряде книг, руководств и статей по спектральной теории и теории дифференциальных уравнений»

В "Введении" были указаны книги Морена, Бурбаки, Данфорда и Шварца. Морен в заключении к своей книге отметил, что понимания теории нельзя достичь без знания их генезиса, их происхождения и развития. С целью вызвать желание читателя книги обратиться к изучению работ созидателей науки были даны исторические и библиографические замечания.

Историческое освещение рассматриваемых вопросов органически включено в изложения Бурбаки математических теорий. Собранные вместе эти исторические обзоры составили отдельную книгу Бурбаки "История математики" [35].

Обширная библиография и исторические примечания содержатся в трехтомной монографии Данфорда и Шварца. Частично эти примечания решают задачу привлечения внимания читателя к другим методам изложения или решения задачи, к постановке новых проблем. Они являются своеобразным дополнением к основному изложению.

Историко-библиографические приложения мы находим и в книге Рудина "Функциональный анализ" [229] в виде "Приложения 6". Несмотря на краткость и признаваемую неполноту общих и частных исторических примечаний по главам книги, этот обзор ярко обнаруживает необходимость элементов исторического подхода.

Краткие исторические замечания, именуемые как "Указания к литературе" даны в каждой главе книги Левитана и Саргсяна "Введение в спектральную теорию" дифференцальных операторов.

Имеются статьи, освещающие отдельные вопросы истории функционального анализа и теории дифференциальных уравнений, частично касающиеся и вопросов истории спектральной теории. Среди таких статей можно указать статью Стина "Взгляд в историю спектральной теории" [255] 1973г., статьи Бернкопфа "Развитие функциональных пространств в связи с теорией интегральных уравнений", "История бесконечных матриц", "Абстракции в теории функциональных пространств".

Нельзя не назвать некоторые обзорные статьи в немецком издании "Математической энциклопедии". Это большая статья Хеллингера и Теплица о развитии теории интегральных уравнений и уравнений с бесконечно многими неизвестными, относящаяся к 1927 г, [296]» , статья Хильба и Саса по общей теории разложения в ряды [301], статья Пинкерле о функциональных операторах и уравнениях [192]. Другой обзор Хеллингера о работах Гильберта по теории интегральных уравнений и бесконечных системах уравнений дан в собрании сочинений Гильберта. Обзорная статья 1909г. о сущности и целях анализа бесконечно многих переменных принадлежит Гильберту [61]. Деятельности Гильберта и его работам посвящено много статей, Отметим книгу Рид "Гильберт" [220], появившуюся в 1970г. и статью Вейля. Некоторые вопросы развития теории интегральных уравнений до Гильберта и создания классической теории интегральных уравнений с симметрическим ядром, а также о работах Гильберта рассмотрены в статьях Сретенского [245] и Дорофеевой [80, 81].

Особенности развития спектральной теории дифференциальных операторов охарактеризованы одним из ее создателей Вейлем в статье "Полвека математики" в 1951г. [43].

Статья Жюлиа о гильбертовом пространстве написана в историческом плане»
Сюда примыкает статья Дьедонне о спектральной теории [82] и его доклад на XIII конгрессе истории науки и техники об истории гармонического анализа [83].

Научной деятельности Неймана был посвящен специальный выпуск бюллетеня Американского математического общества со статьями Данфорда, а в 1973г. опубликована статья Халмоша “Легенда о Дж. фон Неймане [287]”.

Математическая деятельность Титчмарша освещена в статье Левитана [135].
Работы Чебышева и Сонина, относящиеся к вопросам разложения функций в ряды и ортогональным системам были рассмотрены в ряде статей Ахиезера [5,6,7].

Анализу работ Стеклова о разложениях по ортогональным функциям посвятил несколько статей Смирнова, среди которых выделяется статья [239].

Отдельные моменты теории краевых задач для обыкновенных дифференцальных уравнений рассмотрены в статье Симонова [236]. Возникновение теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, включая работы Штурма, Лиувилля, Стеклова было предметом исследований и ряда публикаций Маркуша и Демчишина.

Сологуб [241] провел обширные исследования по истории краевых задач для уравнений в частных производных. Рассмотренный им материал связан с теорией краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

С теорией и историей разложения функций в ряды по собственным функциям тесно связана и теория тригонометрических рядов. Из многочисленных работ по этому вопросу укажем на книгу Паплаускаса " Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега" [189] и статью Модина [169]. Обзор развития теории рядов Фурье и интеграла Фурье в XIX веке можно найти в статье Буркхардта [37] в немецком издании математической энциклопедии»

В исследованиях Медведева по истории развития понятия интеграла, теории функций и функционального анализа [161-163] содержится интересный материал, имеющий отношение к истории спектральной теории дифференциальных операторов. Особо следует выделить проведенный им анализ ранних работ по функциональному анализу, принадлежащих итальянским математикам. Медведев показал как многие важные идеи функционального анализа были предвосхищены и обнаружены итальянскими математиками в конце XIX века и в начале XX века. В этих работах корни и позднейших исследований итальянских математиков по теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, об успехах которых можно судить, например, по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений Сансоне [231] и включенными в него результатам, полученных многими итальянскими математиками.
Обзор научной деятельности Шмидта дан в статье Неванлины в 1956г. [180].

Естественно, что в этом обзоре не указываются общие сочинения по истории математики и отдельным ее разделам, многочисленные статьи, в которых вопросы истории теории краевых задач, теории разложения по собственным функциям и другим спектральным проблемам не являются основными, а только эпизодическими или частью более общих проблем и задач. Не отмечены также статьи и работы по истории квантовой механики, в которых основное внимание уделяется физической стороне теории. Прилагаемая библиография, особенно по работам последних десятилетий, не претендует на полноту. Часто не включены повторные или предварительные публикации и заметки, дополняющие и детализирующие основные работы того или иного автора.

ХРОНОЛОГИЯ РАЗВИТИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ.

1713-1715 гг. Работы Тейлора о колебании струны.
1727-1739 гг. Исследования Бернулли о колебании упругих тел.
1734-1759 гг. Работы Эйлера о колебании струны.
1747-1753 гг. Новые работы Бернулли о колебании упругих тел. Исследования Даламбера о распространении волн в упругих телах. Дискуссия о колебании струны.
1770-1824 гг. Работы Бесселя о колебании мембраны. Создание теории некоторых специальных функций. Функции Бесселя и Лежандра.
1798 г. Равенство Парсеваля
1779-1788 гг. Теория малых колебаний упругих тел Лагранжа,
1807-1822 гг. Работы Фурье по теории теплопроводности. Метод Фурье в математической физике. Тригонометрические ряды и интеграл Фурье.
1820-1835 гг. Развитие исследований Фурье в трудах Пуассона, Коши, Остроградского.
1836-1837 гг. Фундаментальные работы Штурма и Лиувилля. Создание теории аппарата линейных преобразований. Труды Кэли, Сильвестра, Грасмана.
1854-1898 гг. Исследования Чебышева, Сонина, Грама по теории систем ортогональных функций.
1885 Исследования Шварца по математической физике.
1884-1898 гг. Работы Вольтерра по интегральным уравнениям.
1894-1899 гг. Труды Пуанкаре о колебании мембраны, по бесконечным системам линейных уравнений и математической физике. Изучение системы линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных. Работы Коха.
1905-1923 гг. Работы Стеклова по теории замкнутости системы собственных функций.
1894 г. Работа Стильтьеса по проблеме моментов. Интеграл Стильтьеса.
1897 г. Введение спектральной терминологии в работе Виртингера
1899-1903 гг. Создание Фредгольмом теории линейных интегральных уравнений
1902-1910 гг. Работы Гильберта по теории линейных интегральных уравнений и теории квадратичных форм.
1905-1908 гг. Исследования Шмидта по теории разложения в ряды по собственным функциям. Введение гильбертова пространства.
1909 г. Исследование Хеллингера по спектральной теории квадратичных форм с бесконечным числом переменных.
1907-1908 гг. Работы Биркгофа по теории несамосопряженных краевых задач.
1908-1910 гг. Работы Вейля. Создание теории сингулярных задач.
1913 г. Появление монографии Рисса о линейных системах уравнений с бесконечным числом неизвестных.

1921-1923 гг. Работы Карлемана по теории неограниченных операторов.
1925 г. Работы Гейзенберга. Создание матричной механики.
1925 г. Статья Амбарцумяна о восстановлении дифференциального уравнения по системе его собственных значений.
1926 г. Опубликование цикла статей Шредингера "Квантование как проблема собственных значений".
1926-1930 гг. Разработка математических основ квантовой механики.
1927-1932 гг. Работы Неймана по математическим основам квантовой механики.
1929-1930 гг. Статьи Неймана "Общая теория собственных значений эрмитовых функциональных операторов".
1932 г Выход книги М.Стоуна "Линейные преобразования в гильбертовом пространстве".
1930-1940 гг. Работы Куранта по теории краевых задач математической физики. Издание книги Куранта и Гильберта "Методы математической физики".
1941-1965 гг. Статьи и книга Плеснера по спектральной теории линейных операторов.
1943 г. Спектральная теорема Гельфанда-Наймарка.
1946 г. Выход книги Титчмарша "Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка".
1946-1948 гг. Работы Крейна о методе направляющих функционалов.
1950 г. Статья Келдыша "О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений".
1950 г. Статья Кодаиры "Об обыкновенных дифференциальных уравнениях четвертого порядка и соответствующих разложениях по собственным функциям.
1950 г. Выход книги Левитана "Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка".
1954 г. Книга Наймарка "Линейные дифференциальные операторы".
1949-195 гг. Исследования по теории расширения дифференциальных операторов.
1948- 1957 гг. Развитие качественной спектральной теории дифференциальных операторов.
1959 г. Появление книги Морена "Методы гильбертова пространства".
1946 г. Работа Борга об обратной задаче спектральной теории.
1946-1965 гг. Исследования Чудова, Крейна, Тихонова, Левина, Левинсона и др. О восстановлении дифференциального оператора по спектру.
1950-1985 гг. Работы Марченко, Левитана, Гельфанда по обратной задаче спектральной теории.
1950-1960 гг. Изучение асимптотических свойств спектральной теории.
1963-1971 гг. Издание книг Данфорда и Шварца "Линейные операторы" в трех томах.
1965 г. Выход книги Фридрихса "Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве".
1968-1980 гг. Изучение нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза в связи с

обратной задачей спектральной теории.

1968-1976 гг. Методы Лэкса в спектральной теории дифференциальных операторов. Периодические и квазипериодические задачи спектральной теории.

1979 г. Издание книги Костюченко и Саргсяна "Распределение собственных значений само сопряженных обыкновенных дифференциальных операторов".

1984 г. Выход книги Левитана "Обратные задачи Штурма- Лиувилля".

1988 г. Издание книги Левитана, Саргсяна "Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака".

Указатель литературы

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М. Мир. 1987. 478с.

1А. Адамар Ж. [Hadamard J.]. Sur les operations fonctionelles.C.R.deAcad.des Sc.V. 136, ser.1.1903;pp.351-354.

2. Амбарцумян В.А. Uber eine Frage der Eigenwerttheorie. Zeit.Phys. V.53.1929.pp.690-695.

3. Аппель П.[Appel P.]Sur l'equation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

4. Арцела Ч.[Arzela C.] Funzioni di linee.Rend.de Accad.dei Lincei.T.IV, sem.1,1889, pp.342-348.

5. Ахиезер Н.И. Краткий обзор математических трудов П.Л.Чебышева. Избр.труды П.Л.Чебышева. М.1946.С.171-181.

6. Ахиезер Н.И. Общая теория полиномов П.Л.Чебышева. Научное наследие П.Л.Чебышева.Т.1.М.-Л. 1945.С5-42.

7. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.1950, 2-е изд.1966.

8. Банах С.[Banach S.], Theorie des operations lineaires. Warsaw, 1932.

9. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев.1965.

10. Березанский Ю.М. Спектральная теория самосопряженных, разностных и других операторов. "История отеч.математики", Т.4, кн.1.Киев.1970. С.678-699.

11. Бернкопф М.[Bernkopf M.] Введение абстрактных представлений в теорию функциональных пространств. ИМИ. Вып.18, М.1973.С.

12. Бернулли Д.(Bernulli D.) Sur le melange de plusieurs especes de vibrations simples isochrones,qui peuvent coexister dans une systeme corps. Mem.Acad.Berlin; V.55.1753. P.187.

13. Биркгоф Г.(Birkhof G.) On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential operations contain a parameter.Trans.Amer.math.soc. V.9.1908.pp.219-231.

14. Биркгоф Г.(Birkhof G.) Boundary value and expansion problems of ordinary linear differencitial equations. Trans. Amer. soc. 1908. pp.373-395.

15. Биркгоф Г.,Лангер Р.(Birkhof G.,Langer R.).The boundary problems and developpmens associated with system of ordinary linear differential equations of the first order. Proc.Amer.Acad. 1923. V.58,pp.51-128.

16. Бирман М.Ш. Возмущение квадратичных форм и спектр сингулярных граничных задач. ДАН. Т.125. 1959. С.471-474.

17. Бирман М.Ш. О дискретной части спектра операторов Шредингера и Дирака. Вестник ЛГУ. Сер.матем. Т.7, вып.2. 1960. С.162-168.

18. Бирман М.Ш., Глазман И.М. Спектры сингулярных дифференциальных операторов. Труды 4-го всесоюзн. матем. сьезда Т.2. 1964. С.253-261.

19. Блох А.Ш. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной матрице-функции. ДАН. 1953. Т.92.с.209-221.
20. Бонне О.(Bonne O.) Memoire sur la theorie generale des series .Mem. Cccour. Brux.1848-1850. V.23, pp.1-116.
21. Борг Г. (Borg G.) Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Acta Math.1946. Bd.78, s.1-96;
22. Борг Г. (Borg G.) On the point spektra of $y''+(\lambda-)y$=0. Amer.J.Math. V.73. 1951. pp.122-126.
23. Бохер М. (Bocher M.). Lecons sur les methodes de Sturm dans la theorie des equations differentielles lineares et leurs developpements moderaes. Paris.1917.
24. Бохер М. (Bocher M.) Boundary problems and Green's functions for linear differential and difference equations. Ann. of Math. 1911. V.(2), 13. C.71-88.
25. Бохнер С. (Bochner S.) Vorlesungen uber Fouriersche integral. Liepzig, 1932.
26. Бринк И. (Brink I.) Self-adjointness and spectra of Sturm-Liouville operators. Math. scand. 1959. V.7, N.1, pp.219-239.
27. Бройль Л. де (Broglie L. de) Ondes et quanta. C.R., Paris, 1923. V.177, p.517.
28. Бройль Л. де (Broglie L.de) Quanta de lumiere, diffraction et interferences. C.R. Paris, 1923. V.177, p.548.
29. Бройль Л. де (Broglie L. de) Recherche sur la theoriequanta. Ann. de Physique., 1925. Ser.10, N3, pp.22-128.
30. Бройль Л. де. Введение в волновую механику. Перевод с французского..Харьков-Киев.1934. 240 с.
31. Бройль Л де (Broglie L. de). Les principes sur la nouvelle mecanique ondulatoire. Jour. de phys 1926. Ser.VI-VII. pp.331-337.
32. Буницкий Е.Л. К теории функции Green'а. Одесса.1913 .112с.
33. Буницкий Е.Л. К вопросу о решении обыкновенных дифференциальных уравнений при данных предельных условиях. Зап. матем. отд. Новоросс. общества естествоисп. Одесса. 1916. Т.23.
34. Буняковский В.Я. Sur quelques inegulites concernant les integrales ordinaires et les integrales aux differences finies. Mem. Acad. St. Peterburg 1859.V.(7),1,:9.
35. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М. Физматгиз.1963. 292 с.
36. Буркгардт Г. (Burkgardt H.) Sur les fonctions de Green relatives a une equation d'une dimension. Bull.Soc.math. France.1894. T.22,pp.71-75.
37. Буркгардт Г. (Burkgardt H.) Trigonometrische Reihen und integrale. Enz, der math. Wiss. T.II:1, pp.819-1354.
38. Владимиров В.С., Маркуш И.И. Владимир Андреевич Стеклов − ученый и организатор науки. М.: 1981.95 с.
39. Вейль Г. (Weyl H.) Uber beschrankte quadratische Formen,deren Differenz vollstetig ist.Rend.circ.mat.Palermo,1909.T.27, pp.373-392.

40. Вейль Г. (Weyl H.) Uber gewohnliche lineare Differentialgleichungen mit singularen Stellen und ihre Eigenfunktionen.Gottingen Nachrichten.1909, pp.37-64.
41. Вейль Г. (Weyl H.) Uber gewohnliche Differentialgleichungen mit Singularitaten und zugehorigen Entwicklungen illkurlicher Funktionen. Math. Ann.1910. V.68, pp. 220-269.
42. Вейль Г. (Weyl H.) Das asymptoticheVersteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleqchungen .Math. Ann., 1912. V.71, pp.441-478.
43. Вейль Г. Полвека математики (Русск. перевод). М. Знание 1969. 47 с.
44. Вейль Г. (Weyl H.) Uber Konvergenz von Reihen,die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten. Math. Ann.1909, V.67, pp.225-245.
45. Вейль Г. (Weyl H.) Singulare Integralgleichungen. Math. Ann. 1908. V.66, pp.273-324.
45A. Вейль Г. (Weyl H.) Избранные труды. М. Наука, 1984. 542с.
46. Виндау В. (Windau W.) Uber lineare Differentialgleichungen vierter Ordnung mit Singularitaten und die dazugehorigen Darstellungen willkurlicher Funktionen. Math. Ann.1921. V.83, pp.256-279.
47. Винер Н. (Wiener N.) The Fourier integral. Cambridge. 1932. Русск. перевод. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М. Физматгиз.1963.
48. Виртингер В. (Wurtinger W). Beitrage zu Riemann's Integrationsmethode fur hyperbjlische Differentialgleichungen und deren Anwendungen auf Schwingungsprobleme. Math. Ann. 1897. V.48, pp.365-389.
49. Вишик М.И. Линейные расширения операторов и краевые условия. ДАН.1949. Т.65. С.433-436.
50. Вольтерра В. (Volterra V.). Sur une generalisation de theorie des fonctions d'une variable imaginaire. Acta Math.1889. T.XII, pp.233-286.
51. Гальперин И. (Halperin I.). Closures and adjoints of linear differential operators. Ann.of Math.1937. t.(2). 38, pp.880-919.
52. Гейзенберг В. (Heisenberg W.) Uber quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. Zeit. f. Phys. 1925. V.33, p.879.
53. Гельфанд И.М. Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами. ДАН. 1950. Т.73. С.117-120.
54. Гельфанд И.М. О тождествах для собственных значений дифференциального оператора второго порядка. УМН. 1956. Т.11:1(67). С.191-198.
55. Гельфанд И.М., Костюченко А.Г. Разложение по собственным функциям дифференциальных и других операторов. ДАН. 1955. Т.103. С.345-352.
56. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. Изв. АН СССР, сер.матем.1951. Т.15. С.309-360.

57. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора. второго порядка. ДАН.1953. Т.88. С.593-596.
58. Релей Д. (Rayleigh D.I.) On the character of the complete radiation at a given temperature, Phil. Mag. (5) 27. 1889. 466-469.
59. Гельфанд И.М., Наймарк М.А. On the imbelding of normed rings into ring operators hilbert space. Матем.сб. 1943. Т.12(54). С.197-219.
60. Гильберт Д. (Hilbert D.). Grundzuge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Nachr.Acad. Wiss.Gottingen, Math.-Phys.Kl. I, 1904, 49-91; II, 1905, 213-259; III, 1905, 307-338; IV, 1906, 157-227; V, 1906, 4439-480; VI, 1910, 355-417.
61. Гильберт Д.(Hilbert D.). Wesen und Ziele einer Analysis der unendlichvielen unabhangigen Variablen. Rend.del circolo mat. di Palermo. 1909. V.27, pp.59-74.
62. Глазман И.М. Об индексе дефекта дифференциальных операторов. ДАН.1949. Т.64. С.151-154.
63. Глазман И.М. К теории сингулярных дифференциальных операторов. УМН. 1950. Т.5, С.102-135.
64. Глазман И.М. О спектре дифференциальных операторов. ДАН. 1951. Т80. С.153-156.
65. Глазман И.М. О характере спектра одномерных сингулярных краевых задач. ДАН. 1952. Т.87. С.5-8.
66. Глазман И.М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. -М.: Наука. 1963. 339с.
67. Глазман И.М. Исследование отрицательной части спектра одномерных дифференциальных операторов. ап. Харьк. матем. общ. 1960. Сер. 4Е. 26. С.233-246.
68. Глазман И.М. О характере спектра линейных дифференципльных уравнений. Тр. Харьк. политех. инст., сер. инж.-физ. 1955. Вып.1. С.67-92.
69. Графф А.А. К теории линейных дифференциальнцх систем в области одного переменного. Матем.сб. 1946. Т.28 (60). С.305-328, ч.2, Матем.сб. 1947. Т.21(63). С.143-159.
70. Грам И.П. (Gram J.P). Uber die Entwicklung reelen Funktionen in Reihen mittelst Methode der kleinsten Quadrate. Journ.f reine und angew. Math.1883. Т.4. pp.41-73.
71. Гюнтер Н.М. Труды В.А.Стеклова по математической физике. 1825. Сб. памяти В.А.Стеклова.
72. Гюнтер Н.М. Sur les integrals Stilltjes et leurs applictions aux problemes de la physique mathematique. Тр. физико-математического института имени В. А. Стеклова. Т. II. -Л. ; Изд-во АН СССР. 1932, 492с.
73. Данфорд Н.,Шварц Дж.(Dunford N., Schwarz J.) Linears operators. Русск.перевод. -М.: Мир; 1966. Т.2. Спектральная теория. 1063с.
74. Дельсарт Ж. (Delsarte J.) Sur une extension de la formule de Taylor. Jour. math. pures et appl. 1938. Т.17. pp.213-230.

75. Дельсарт Ж. (Delsarte J.) Une extension nouvelle de la theorie de fonction presque periodiques de Bohr. Acta Math.1939, v.69, p.259.
76. Дикий Л.А. Формула следов для дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля. УМН.1958. Т.13. С.111-143.
77. Дини У. (Dini U.) Serie di Fourier altri rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabilereale. Pisa.1880.
78. Дини У. (Dini U.). Intorno agli sviluppi delle funzioni di una variable reale per serie di funzionijacobiane. Ann. di mat. pura ed appl. 1880. T.(2) 10, pp.145-153.
79. Дирак П. (Dirac P.). The principles of quantum mechanics. Oxford. 1930. Русск.пер. М. 1937., -М.: Гостехиздат.1960.
80. Дорофеева А.В. Создание классической теории интегральных уравнений с симметрическим ядром. Сб. История и методология естественных наук. -М.: 1974. Т.16. С.63-77.
81. Дорофеева А.В. Развитие теории интегральных уравнений до работ Гильберта.Сб. История и методология естественных наук. -М.: 1973. Т.14. С92-105.
82. Дьедонне Ж. (Dieudonne J.). Sur la theorie spectrale. Jour. math. pure et app 1956. V.(9)35, pp.175—187.
83. Дьедонне Ж. История гармонического анализа. -М.: ИМИ. 1973. Т.18. С.31-54.
84. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. -М.: Наука.1980.320с.
85. Инфельд Л. (Infeld L.). On a new treament of some eigenvalue problems. Phys. Rev.194 T.(2), 59, pp.737-747.
86. Иосида К. (Yosida K.) On Titchmarsh-Kodaira'sformula concerning Weyl-Stone's eigenfunctionexpansion. Nagoy Math. J.1950. t.1, 49-58. And 1953. t.6, 187-188.
87. Иосида К. (Yosida K.). On the theory of spektra. Tokyo. Proc. Imp. Acad. 1940. T.15, pp.378-383.
88. Исмагилов Р.С. Об условиях полуограниченности и дискретности спектра для одномерных дифференциальных операторов. ДАН. 1961. Т.140. С.33-36.
89. Кэлкин И. (Calkin Y.).Abstract symmetric boundary conditions. Trans.Amer.Math.Soc. 1939. V.45, 369-442.
90. Кэлкин И. (Calkin J.). Symmetric transformations in hilbert space. Duke math.J. 1940.V.7, 504 – 508.
91. Камке Э. (Kamke E.). Neue Herleitung der Oszillationssatze fur die linearen selbstadjugierten Randwertaufgaben zweite Ordnung. Math. Zeits.1938.Bd.44. S.635-658.
92. Карлеман Т. (Carleman.T.). Sur les equations integrales singulieres a noyau reel et symetrique, almquist and wiksells .Uppsala.1923.
93. Карлеман Т. (Carleman T.). Zur Theorie der linearen Integralgleichungen . Math. Zeits.1921. Bd9. S.196-217.

94. Карлеман Т. (Carlemfn T.). Uber die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partielllen Differentialgleichungen .Leipzig. Ber. Verh. Sachs. Acad. Wiss. Math. Nat. Kl. 1936. T.88, pp.119-132.
95. Качмарж С., Штейнгауз Г. (Kaszmarz S.,Steinhaus H.) Теория ортогональных рядов. -М.: Физматгиз.1958.
96. Келдыш М.В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений. ДАН. 1951. Т.77. С11-14.
97. Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов. УМН.1971. Т.XI, вып.4.
98. Келлог О. (Kellog O.). Unstetigkeiten in den linearen Integralgleichungen. Math.Ann. 1904. V.58. S.441-456.
99. Кнезер А. (Kneser A.). Untersuchungen uber die Darstellung willkurlicher Funktionen in der mathematischen Physik. Math. Ann. 1904. Bd.58. S.81-147.
100. Кнезер А. (Kneser A.) Beitrage zur Theorie der Sturm-Liouvilleschen Darstellung willkurlicher Funktionen. Math.Ann. 1905. Bd.69. S.402-423.
101. Кнезер А. (Kneser A.). Die Theorie der Integralgleichungen und die Darstellung willkurlicher Funktionen in der mathematischen Physik. Math;Ann; 1907. Bd.63, S.477-524.
102. Кодаира К. (Kodaira K.). On ordinary differential equations of any even and the coreresponding eigenfunction expansion. Amer.J.Math.1950. V.72, pp.502-544.
103. Кодаира К. (Kodaira K.). The eigenvalue problem for ordinary differetial equations of the second order and Heisenberg's theory of S-matrices. Amer.J.Math., 1949. V.71, pp.921-945.
104. Кодаира К. (Kodaira K.). On singular solutions of second order differential operators. Sugaku, T.7, pp.177-191; T.2,pp.113-139.
105. Коддингтон Э. (Coddington E.). On the spectral representations of ordinary selfadjoint differential operators. Proc.Nat.Acad.sci. 1952. T.38, pp.732-737.
106. Коддингтон Э. (Coddington E.) The spectral representation of ordinary self-adjoint differential operators. Ann.of Math. 1954. V.(2)60, pp.192-211.
107. Коддингтон Э., Левинсон Н. (Coddington E., Levinson N.). On the nature of the spectrum of singular second order linear differential operators. Canadien J.Math. 1951. V.3, pp.335-338.
108. Коддингтон Э., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1958. ИЛ. 414с.
109. Костюченко А.Г. Асимптотика спектральной функции для сингулярного дифференциального оператора 2m-порядка. ДАН. 196. Т.168. С.276-279.
109А. Костюченко В. А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев. Наукова думка. 1977. 332с.
110. Костюченко А.Г., Левитан Б.М. Об асимптотическом поведении собственных значений операторной задачи Штурма-Лиувилля. Функц.анализ и его приложения. 1967. Т.1. С.86-96.

111. Костюченко А.Г., Саргсян И.С. Распределение собственных значений. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторры. – М.: Наука.1979. 400с.
112. Коши О. (Cauchy O.). Memoire sur l'application du calcul des residus a la sjkution des problems de physique mathematique. Paris 1827.
113. Крейн М.Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. Матем. сб. 1947. I. Т.20(62). С.431-498. II. Т.21(63). С.365-404.
114. Крейн М.Г. Про ермитові операторі з напрямними функціоналами. -К.: Наукова думка. Сб.тр.Ин-та матем. 1948. Т10. С.83-106.
115. Крейн М.Г. Об одномерной сингулярной краевой задаче четного порядка в интервале (0,~). ДАН.1950. Т.74. С.9-12.
116. Крейн М.Г. Решение обратной задачи Штурма-Лиувилля. ДАН.1951. Т.76. С.21-24.
117. Крейн М.Г., Красносельский М.А Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов. УМН.1947. Т.2, вып.3. С.60-107.
118. Круликовский Н.Н. История развития спектральной теории диффференциальных операторов. Тр.XIII Межд.конгр. по истории естеств. и техники. Секция 5..-М.: Наука.1974. С.128-131.
119. Кузнецов Н.В. Обобщение одной теоремы В.А.Амбарцумяна. ДАН. 1962. Т.146. С.1259-1262.
120. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. -М.: Гостехиздат. 1951. Т.1 и 2.
121. Курант Р. (Courant R.). Uber die Eigenwerte bei Differentialgleichungen der mathematischen Physik.-Math.Zeit. 1920. V.7. S.1-57.
122. Лавричелли Г. (Lauricelli G.) Sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali e dei niclei delle equazioni integrali.Roma.Rend.della R. Accad. dei Lincei. 1912. V.XXI, ser.V, pp.675-685.
123. Лавричелли Г. (Laurictlli G.). Sorpa gli sviluppi in serie di funzioni ortogonali.Palermo. Rend.circ.matem. 1910. V.29. pp.155-163.
124. Лагерр Э. (Laguerre E.). Sur le calcul des systemes lineaires. Oeuvres. 1898. V.1. pp.221-267.
125. Лагранж Ж. (Lagrange J.) Аналитическая механика. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. Т.I, 624с., Т.II, 364с.
126. Левинсон Н. (Levinson N.). Criteria for the limit-point case for second order linear differential operators. Cassopis Pest Math. Fis. 1949. V.74, pp.17-20.
127. Левинсон Н. (Levinson N.). The inverse Sturm-Liouville problem Math. Tidsskr. 1949. T.8, pp.25-30.
128. Левинсон Н. (Levinson N.). Simplified proof of the expansion theorem for singular second order linear differential equations. Duke Math. J. 1951. V.18, pp.57-81.
129. Левинсон Н. (Levinson N.). Expansion theorem for singular self-adjoint linear differential operators .Ann. of math. 1954. V.(2), 59:2, pp.300-315.

130. Левитан Б.М. К теореме разложения по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка. ДАН. 1950. Т.71. С.605-608.
131. Левитан Б.М. Доказательство теоремы разложения по собственным функциям самосопряженных дифференциальных уравнений. ДАН.1950. Т.73. С.651-654.
132. Левитан Б.М. Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка. -М.: Гостехиздат. 1950. 159с.
133. Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения Штурма-Лиувилля по двум спектрам. ИАН. 1964. Сер.матем. Т.28:1. С.63-78.
134. Левитан Б.М. Спектральная теория самосопряженных дифференциальных операторов. УМН.1956. Т.XI: 6(72). С.117-144.
135. Левитан Б.М. О математических работах Э.Ч.Титчмарша. УМН.19
136. Левитан Б.М. Достаточные условия разрешимости обратной задачи теории рассеяния на всей прямой. Мат.сб. 1979. Т.108. С.350-357.
137. Левитан Б.М. Почти-периодичность бесконечнозонных потенциалов. Изв.АН СССР. сер.матем. 1981. Т.85. С.291-320.
138. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. -М.: Наука. 1984. 240с.
139. Левитан Б.М., Марченко В.А., Наймарк М.А. Спектральная теория дифференциальных операторов. Тр. Третьего всес. Съезда матем. -М.: 1958. Т.3. С.101-116.
140. Левитан Б.М., Гасымов М.Г. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам. УМН. 1964. Т.19:2. С.3-63.
141. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Обратная задача для системы Дирака. ДАН. 1966. Т.167:6. С.219-222.
142. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. -М.: Наука. 1988. 432с.
143. Лейбензон З.Л. Обратная задача спектрального анализа обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков. Тр. Моск. матем. общ.1966. Т.15. С.70-144.
144. Ле Ру. (Le Roux). Les fonction d`une infinite de variables independantes. Nouv.Ann.Math. 1903. T.(4)IV, pp.448-458.
145. Лившиц М.С. О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов. Матем.сб. 1954. Т.34(76). С.144-199.
146. Лидский В.Б. Условия полноты корневых подпространств у несамосопряженных операторов с дискретным спектром. Труды Моск. матем. общ. 1958. Т.7. С.83-120.
147. Лиувилль Ж. (Liouville J.) Sur le develjppment desfonctions ou parties de fonctions en series de sinus et cosinus. Jour.d.math..pure et app., 1836. T.1, pp.14-36.
148. Лиувилль Ж. (Liouville J.) Sur une maniere de generalisir la formule de Fourier . Jour.d.math.p.e. app. 1836. T.1, pp.102-105.

149. Лиувилль Ж. (Liouville J.) Sur le developpement des fonctions en series dont les divers termes sont assujeties a satisfaire a unememeequationdifferentielle du second ordre contenant un parametrevariable., I-III. Jour.math.p.e.appl.: I.1936.T.1, pp.253-265; II.1837. T.1, pp.16-37; III. 1837. T., pp.418-436.
150. Лиувилль Ж. (Liouville J.) D`un theoreme du a m.Stirm et relatif a une classe de functions trascendentes. Jour.math.p.e. 1836. T.1, pp.269-277.
151. Лиувилль Ж. (Liouville J.). Memoire sur la theorie des equations differentielles lineares et sur le developpement de fonctionsen series. Jour.math..p.e.appl, 1838. T.3, pp.561-614.
152. Мазон М (Mason M.) Zur Theorie.der Randwertaufgaben. Math.Ann. 1904. V.58. S.528-544.
153. Марченко В.А. Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка. ДАН.1950. Т.72. С.457-460.
154. Марченко В.А. О формулах обращения, порождаемых линейным дифференциальным уравнением второго порядка. ДАН.1950. Т.74. С.657-660.
155. Марченко В.А. Теоремы тауберова типа в спектральном анализе дифференциальных операторов. Изв. АН СССР. 1955. Т.19. С.381-422.
156. Марченко В.А. Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн. ДАН.1955. Т.104. С.695-699.
157. Марченко В.А. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка.I. Тр. Моск. матем. об-ва.1952. Т1. С.327-420. II.Т.2.С.3-83.
158. Марченко В.А. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля. Киев. Наукова думка. 1972. 219с.
159. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения.Киев. Наукова думка. 1977. 332 с.
160. Мацаев В.И. О существовании оператора преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков ДАН. 1960. Т.130:3. С.499-502.
161. Медведев Ф.А. Развитие понятия интеграла Стильтьеса. ИМИ. 1972. Вып.XV. С.171-224.
162. Медведев Ф.А. Основоположники функционального анализа о его ранней истории. ИМИ. 1973. Вып.XVIII. С.55-70.
163. Медведев Ф.А. Первая монография по функциональному анализу. ИМИ. 1973. Вып.XVIII. С.71-93.
164. Мерсер И. (Mercer I.) Sturm-Liouville series of normal functions in the theory of integral equations Ljndjn Phil.Trans. 1912. V.211A, pp.111-198.
165. Миллер А. (Myller A.). Sur la theorie des equations integrales. Bull.de soc.d.sci.du Bucarest. 1905. Scrieri math. ,pp.1-11.
166. Миллер-Лебедева В.Е. (Myller-Lebedeff, W.) Theorie der Integralgleichungen in Anwendung auf einige Reihenentwicklungen. Math.Ann. 1907. Bd.64. S.388-416.

167. Миллер К. (Miller K.) A Sturm-Liouvilleproblem associated with iterative methods Ann.of math 1951. V.53, pp.520-530.
168. Мильман Д.П. Об одной классификации точек спектралинейного оператора. ДАН.1941. Т.33. С279-281.
169. Модин А.А. История тригонометрических рядов до второй половины XIX столетия и их влияние на развитие математического анализа. Ярославль. Учен. зап. пед. ин-та. 1964. Т.65. С.3-53.
170. Мозер Дж. (Moser J.). Storungstheorie des kontitinuierlichen Spektrums for gewohnliche Differentiflgleichungen zweiter Ordnung. Math.Ann. 1953. T.125. S.366-393.
171. Молчанов А.М. Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка. Тр.Моск.матем.общ. Т.2. С.169-199.
172. Морен К. Методы гильбертова пространства. Русск. перевод. -М.: Мир.1965. 572с.
173. Наймарк М.А. Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов. ДАН. 1952. Т.82. С.517-520.
174. Наймарк М.А. О спектре сингулярных несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка. ДАН. 1952. Т.85. С.41-44.
175. Наймарк М.А. Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка на полуоси. Тр. Моск. матем. об-ва. 1954. Т.3. С.181-270.
176. Наймарк М.А. Спектральный анализ несамосопряженных операторов. УМН.1956. Т.XI:6. С.183-202.
177. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. -М.: Гостехиздат. 1954. 2-е изд.М.Наука.1969.
178. Накано Г. (Nakano H.). Zur Eigenwerttheorie normalerOperatoren. Proc.phys.-math,sox. Japan. 1939. V.(3)21, pp.315-339.
179. Накано Г. (Nakano H.). Spectral theory in the Hilbert space.Tokyo. Japan soc. for promotion of sci. 1953.
180. Неванлинна Р. (Nevanlinna R.) Erhard Schmidt. Math.Nachr. 1956. T. .S.3-6.
181. Нейман Дж.фон. (Neumann J.von). Zur Algebra der Funktionaloperftionen und Theorie der normalen Operatoren. Math.Ann. 1929. Bd.102. S.370-427.
182. Нейман Дж.фон (Neumann J.von). Eine Spectraltheorie fur allgeineine Operatoren eines unitaren Raumes. Math.Nachr. 1951. Bd4. S.258-281.
183. Нейман Дж.фон (Neumann J.von). Allgemeine Eigenwerttheorie hermitescher Funktionaloperatoren. Math.Ann.1929. Bd.102. S.49-131.
184. Нейман Дж фон (Neumann J.von). Uber Funktionen von Funktionaloperatoren. Ann.of Math. 1931. Bd.(2),32, pp.191-226.
185. Нейман Дж.фон (Neumann J.von). Русск.перевод. Математические основы квантовой механики. -М.: Наука. 1964. 368с.
186. Нехари З. (Nehari Z.). Oscillation critera for second order linear differenyial equations. Trans.Amer.math.soc. 1957. V.85, pp.428-445.

187. Орлов С.А. Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов. ДАН.1953. Т.92. С.483-486.
188. Остроградский М.В. Заметки по теории тепла. Киев. Полн.собр.соч. Изд.АН Укр. Т.1. С.62-69;70-72.
189. Паплаускас А.Б. Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега. -М.: Наука. 1966. 276с.
190. Перрон О. (Perron O.). Uber lineare Differentialgleichungen bei denen die unabhangige Variable reel ist. J.fur reine und angew. Math. 1931. Bd.142. S105-109.
191. Пикар Э. (Picard E.) Sur quelques applications de l`equation fonctionnelle de V. Fredholm. Rend. circ. matem. Palermo. 1906. V.22, pp.241-259.
192. Пинкерле С. (Pincherle S.). Funktionaloperationen und Gleichungen Enc.der math.Wiss. 1905. T.II A, S.761-817.
193. Пинкерле С., Амальди У. (Pimcherle S., Amaldi U.). Le operazione distributive.Bjlogne.1901.
194.順 Планшерель М. (Plancherel M.). Integraldarstellungen willkurlicherFunktionen. Math.Ann. 1909. Bd.67. S.519-534.
195. Планшерель М. (Plancherel M.). Satze uber Systeme beschrankter Ortogonalfunktionen. Math.Ann. 1910. Bd.68. S.270-278.
196. Плеснер А.И., Рохлин В.А. Спектральная теория линейных операторов. УМН. 1941. Вып.IX, С.3-125; II.1946.Т.1:1. С.1-191.
197. Плеснер А.И. Спектральная теория линейных операторов.-М.: 1965. 624 с.
198. Повзнер А.Я. Об уравнениях типа Штурма-Лиувилля и позитивных функциях. ДАН.1944. Т.43. С.387-391.
199. Повзнер А.Я. О дифференциальгых уравнениях типа Штурма-Лиувилля на полуоси. Матем.сб. 1948. Т.23(65). С.3-52.
200. ПрингсхеймА. (Prungsheim A.) Uber das FourierscheIntegraltheorem Jahresber.deutsch.math. Ver.1907. Bd.16.
201. Пуанкаре А. (Poincare H.). Sur les equation des vibration d`une membrane. C.R.Acad.sci. 1894. T.18, pp.447-451.
202. Пуассон С. (Poisson S.). Sur la maniere eprimer des fonctions par les series dequantites periodiques et surl`usage de cette transformations dans les resolutuons de differentsproblems. Jour.ecols polytechn. 1820. T.11; 1823, T.18.
203. Путнам К. (Putnam C.). The spectra of certain boundary value problems. Amer.J.Math. 1949. V.71, pp109-111.
204. Путнам К. (Putnfm C.) On isolated rigenfunctions associated with bounded potwntials. Amer.J.Math. 1950. T.72, pp.135-137.
205. Путнам К. (Putnam C.) The spectra of quantum-mechanical operdtors. Amer.J.Math. 1952.T.74, pp.377-388.
206. Путнам К. (Putnam C.). On the boundnes of the essentialspectrum. Amer.J.Math. 1952. T.74. pp.578-585.
207. Путнам К. (Putnam C.) A sufficient condition for an infinite discrete spectrum. Quart.appl.math. 1953. T.11, pp.484-486.

208. Путнам К. (Putnam C.). Note on a limit-point criterion. Jour.London math.soc. 1954. T.29, pp.125-128.
209. Путнам К. (Putnam C.) Necessary and sufficient conditions for the existence of negative spectea. Quart.applmath. 1955. T.13, pp.335-337.
210. Рапопорт И.М. О сингулярной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений. ДАН. 1951. Т.79. С.21-24.
211. Математики XIX века. Сб. статей. М. Наука, 1987. 307с.
212. Рапопорт И.М. Об оценке собственных значений эрмитовых операторов. ДАН. 1955. Т.103. С.199-202.
213. Рапопорт И.М. Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений. ДАН. 1951. Т.78. С.1097-1100.
214. Рапопорт И.М. О некоторых асимтотических методах теории дифференциальных уравнений. Киев. Изд.АН УССР. 1954. 218с.
215. Рашевский П.К. Les problemes les plus simples "l`algebra quasi-commutatives en connexion avec la theorie des valeurs caracteristiques des operateurs differentiels. Матем.сб. 1941 Части1-2. Т.9(51). С.511-544; 1942. Части 3-4. Т.10(52), С.95-142.
216. Рашевский П.К. О решении краевых задач методами некоммутативной алгебры. М.Вестник ун-та.1950. Т.9. С.3-12.
217. Реллих Ф. (Rellich F.). Storungstheorie der Spektralzerlegung, I-V. Math.Ann.1936-1943.: I.Bd.113.S.600-619. II.Bd.113.S.677-685; III. Bd.116. S.555-570; IV.Bd.117.S.356-382; V.Bd118. S.462-484.
218. Реллих Ф. (Rellich F.). Die zulassigen Randbegingungen bei den singularen Eigenwertproblemen der mathematischen Physik. Math.Zeit. 1944. Bd.49. S.702-723.
219. Реллих Ф. (Rellich F.). Storungstheorie der Spectralzerlegung. Math.Ann. 1942. Bd.118. S.462-484.
220. Рид К.(Reid C.). Русск.пер.Гильберт. -М.: Мир 1976. 280с.
221. Рисс Ф. (Riesz F.). Les systemes d`equations lineares a une infinite d`inconnues.Paris. 1913.
222. Рисс Ф. (Riesz F.) Uber die linearen Transformationen des komplexen hilbertschen Raumes. Szeged. Acta sci. math.1930. Bd.5. S.23-54. (Русск.пер.УМН.1941. Вып.IX. С.156-181.).
223. Рисс Ф. (Riesz F.) Uber quadratische Formen vonunendlichvielen Veranderlichen. Gottingen Nachr. Acad. Wiss., math.-phys. Kl.1910. S.190-195.
224. Рисс Ф. (Riesz F.). Sur le fonctions des Transformations hermitiennes dans l`espace de Hilbert. Szeged. Acta sci.math. 1935. T.7, pp147-159.
225. Рисс Ф., Лорх Е. (Riesz F., Lorch E.). The integral Represantation of unbounded self-adjoint transformations in Hilbert space. Trans. Amer. math. soc. 1936. V.39, pp.331-340.
226. Рисс Ф., Секефальви-Надь Д. (Русск.пер.). Лекции по функциональному анализу. -М.: ИЛ. 1954.

227. Ричардсон Р. (Richardson R.). Das jacobische Kriterium der Variationrechnung und die Oszillationseigenschaften linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung. Math.Ann.1910. Bd.68. S.219-304.
228. Рофе-Бекетов Ф.С. Признак конечности числа дискретных уровней, вносимых в лакуны непрерывного спектра возмущениями периодического потенциала. ДАН. 1964. Т.156. С.515-518.
229. Рудин У. (Rudin W.). Русск. пер. Функциональный анализ. –М. ; Мир. 1975. 493с.
230. Садовничий В.А. Аналитические методы в спектральной теории дифференциальных операторов. МГУ. 1973. Ротапринт. 135с.
231. Сансоне Дж. (Sansone G.). Equazioni differenziali nel campo reale.Bologna. 1948. Русск.пер.
232. Сахнович Л.А. Обратные задачи для дифференциальных операторов порядка >2 с аналитическими коэффициентами. Матем.сб. 1958. Т.46 (88):1. С.61-76.
233. Сахнович Л.А. Об обратной задаче для уравнений четвертого порядка. Матем.сб. 1962. Т.56(98):2. С.137-146.
234. Свешников А.Г. Об одной работе М.В.Остроградского. УМН. 1953. Т.VIII:1. С.101-102.
235. Северини К. (Severini C.). Sulla teoria di chiusuradei sistemi di funzioni ortogonali. Rend.del.circ.matem. Palermo. 1913. V.36, pp.177-202.
236. Симонов Н.И. Развитие теории линейных дифференциальных уравнений от Эйлера до Пеано. ИМИ. 1972. Вып.XVII. С.333-338.
237. Сирс Д. (Sears D.). On the spektrum of a certaindifferential equation. J.London math.soc. 1951. Т.26, pp.205-210.
238. Сирс Д. (Sears D.). Integral transforms and eigenfunction theory. Oxford.1954. Quart.J.math. Т.20:5, pp.47-58.
239. Смирнов В.И. Работы В.А.Стеклова о разложениях по ортогональным функциям. М.-Л. 1942. С.186-213.
240. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.5. М.-Л., Гостехиздат, 1947, 584с.
241. Сологуб В. С. Развитие теории эллиптических уравнений в XVIII и XIX столетиях. Киев. Наукова думка. 1975. 220с.
241А. Сологуб В.С. История развития теории краевых задач для уравнений в частных производных.
242. Соломяк М.З. О собственных числах и собственных векторах возмущенного оператора. ДАН. 1953. Т.90. С.29-32.
243. Сонин Н.Я. Recherches sur lts fonctions cylindriques et le developpement des fjnctions continues en series. Math.Ann. 1880. Bd.16. S.1-80.
244. Сохоцкий Ю.И. Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложении в ряды. СПБ. 1873.
245. Сретенский Л.Н. Ивар Фредгольм.(Биография и научные исследования. История и методология ест.наук. 1966. Т.V. С.150-156.
246. Стеклов В.А. Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions definites par des equations differentielles lineares du deuxieme ordre et

leursapplications au probleme du developpement d`unefonction arbitraire en series procedent suivant les dites fonctions. Харьков. Сообщения матем.об-ва 1907. Т.10(2-5), С.97-199.

247. Стеклов В.А. О разложении данной функции в ряд по гармоническим функциям.Харьков.Сообщения матем. об-ва. 1896. T.VI:2. С.57-124.

248. Стеклов В.А. Sur la condition de fermeture des fonctions orthogonales .Paris.1910. C.R.Acad.sci.

249. Стеклов В.А. Sur le developpement d`une fonction donnee suivant les fonctions harmoniques.Paris.1899. C.R.Acad.sci. Т.128, pp.279-282.

250. Стеклов В.А. Solution generale du probleme de developpement d`une fonction arbitraire des series suivant les fonctions fondamentales de Sturm-Liouville. Roma.1910. Rend.d.acc.dei lincei.T.19, pp.490-496.

251. Стеклов В.А. Sur le developpementd`une fonction donnee en series procedant suivant les polinomes de Tchebycheff et en particulier suivant les polynomes de Jacobi.Jour.f.reine u.angew.Math., 1902. Bd.125. S.207-236.

252. Стеклов В.А. Une methode de la solution du probleme de developpement des fonctions en series de polynomes de Tchebycheff independantede la theorie de fermeture. Изв.Росс.АН.1921.. Т.15. С.281-326.

253. Стеклов В.А. Основные задачи математической физики. Петроград. 1922. Ч.1.285с.;1923. Ч.2..285с.

254. Стилтьес Т. (Русск.перевод). Исследования о непрерывных дробях. Киев.1936. ОНТИ Укр. 165с.

255. Стин Л. (Steen L.) Highlights in history of spectral theory .Amer.math. monthly 1973. V.80. 359-381.

256. Стоун М. (Stone M.H.). Linear transformations in Hilbert space andtheir applications to analysis. New York. 1932.

257. Стоун М. (Ston M.H.). A general theory of spectra Proc.math. Acad.sci. USA. 1940. V.26, pp.280-283;V.27, pp.83-87.

258. Тамаркин Я.Д. Sur quelques points de la theoriedes equations differentielleslineare ordinaires et sur la generalisation de la serie de Fourier. Palermo. 1912. Rend.circ.math.T.34, pp.345-482.

259. Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград.1917.

260. Тамаркин Я.Д. Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansions ofarbitraryfunction in the series fundamental functions. Math.Zeit. 1927. T.27, pp.1-54.

261. Титчмарш Э.Ч. (Titchmarsh E.C.). On expansion in eigenvalues, I-VIII. Proc.Lond.math.soc.: I.1939, T.14, pp.274-278. Oxford. Quart.J.math. II, 1940 T.11, pp.129-140. III, 1940. T.11,pp.141-145. IV.1941. T.12, pp.33-50. V, 1941. T.12, pp.89-107. VI. 1941. T.12, pp.154-166. VII. 1945. T.16, pp.103-114. VIII.1945.T.16, pp.115-128.

262. Титчмарш Э.Ч. (Titchmarsh E.C.). An eigenfunction problem occuring in quantum mechanics.Oxford.Quart.J.math. 1942.T.13, pp.1-10.

263. Титчмакш Э.Ч. (Titchmarsh E.C.) On the eigenvalues of differential equations. J.London math.soc. 1944. T.19, pp. 66-68.
264. Титчмарш Э.Ч. (Titchmarsh E.C.). On the discreteness of the spektrum associated with certain differential equations. Ann.math.pura appl.1949. T.28, pp.141-147.
265. Титчмарш Э.Ч. (Titchmarsh E.C.). On the uniqueness of Green`s function associated with a second order differential operator.Canadian J.math.1949. T.1, pp.191-198.
266. Титчмарш Э.Ч. (Titchmarsh E.C.). Eigenfunction problems with periodic potentials. London. Proc.Roy.soc., ser.A. 1950. T.203, pp.16-18.
267. Титчмарш Э.Ч. (Titchmarsh E.C.). Eigenfunction expansions associated with second-order differential equation. Oxford. 1946. Русск.перев. Разложения по собственным функциям,связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. -М.: ИЛ.1960.Часть 1, 278с. Часть 2. -М.: ИЛ.1966. 555с.
268. Уинтнер А. (Wintner A.). Zur Theorie der beschrankten bilinear Formen. 1929. Bd.30. S.228-289.
269. Уинтнер А. (Wintner A.) On Dirac`s theory continuous spectra. Phys.rev.1948. T.73, pp.781-785.
270. Уоллах С. (Wallach S.). The spectra of periodic potentials. Amer.J.math. 1948. V.70, pp.842-848.
271. Фаддеев Л.Д. Единственность решения обратной задачи рассеяния. Известия ЛГУ.1956. Т.7(2). С.123-130.
272. Фаддеев Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния. УМН.1950. Т.14:4. С.57-119.
273. Федорюк М.В. Асимптотические методы в теории одномерных сингулярных дифференциальных операторов. Тр. Моск. матем.об-ва. 1966. Т.15. С.296-345.
273А. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М. Наука. 1983. 852с.
274. Фок В.А. Математический аппарат теории Шредингера М.-Л.: Сб. Основы новой квантовой теории.1927. С.111-125.
275. Фок В.А. Начала квантовой механики. Л.Кубуч.1934.
276. Фредгольм Э.И. (Fredholm E.I.). Sur une classe d`equations fonctionnelles, Acta math. 1903. V.27, pp.365-390.
277. Френкель Я.И. Волновая механика. М.-Л. ОНТИ. 1934.
278. Фреше М. (Frechet M.). Sur quelques points calcul fonctionntl.…Palermo.Rend.circ.math.1906. T.12, pp.1-74.
279. Фридрихс К. (Friedrichs K.). Uber Spektralzerlegung eines Imtegrfloperators. Math.Ann. 1938. Bd.115. S.249-272.
280. Фридрихс К. (Friedrichs K). On differetialoperators in Hilbert space. Amer.J.math. 1939. T.61, pp.523-544.
281. Фридрихс К. (Friedrichs K.). Spektraltheorie linearer Differentialoperatoren. Berdeutsch. math. Verein.1935. Bd.45. S.181-193.

282. Фридрихс К. (Friedrichs K.) On of Spectra in Hilbert Space. 1966. Русск.перев. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. -М.: Мир.1969. 232с.
283. Фробениус Г. (Frobenius G.). Uber lineare Substitutionen und bilineareFormen. Jour.reinwangew Math., 1878. Bd.94. S.1-63.
284. Фурье Ж. (Fourier J.B.) Theorie analytique de chaleur.Paris. 1822.
285. Хаар А. (Haar A.). Zur Theorie der oryogonalen Funktionsysteme.I-II.: I.Math.Ann., 1910. Bd.69, S.331-371. II. Math.Ann. 1912. Bd.71, S.38-53.
286. Халмош П. (Halmos P.) Introduction to Hilbert space and the theury of spectral multiplicity. New York.1951.
287. Халмош П. (Halmos P.). The legend of John von Neumann. Amer.math. Month. 1973. V.80:4, pp.382-384.
288. Хартман Ф. (Hartman P.). On the essential spectra of symmetric operators in Hilbert space. Amer.J.Math.1953. V.75, pp.229-240.
289. Хартман Ф. (Hartman P.). On differential equations with non-oscillatory eigenfunctions. Duke Math.J., 1947. V.15, pp.697-709.
290. Хартман Ф. (Hartman P.). On the essential spectrf of ordinary differential equations. Amer.J.Math.1954. V.76, pp.831-838.
290А. Хартман Ф. (Hartman P.). Обыкновенные дифференциальные уравнения. (Русск.перевод). -М.: Мир.1970.720с.
291. Хартман Ф., Уинтнер А. (Hartman P., Wintner A.). Oscillatory and non-oscillatory linear differential equations. Amer.J.Math,, 1949. V.71, pp.627-648.
292. Хартман Ф., Уинтнер Ф. (HartmanP., Wintner A.). On the essential spectra of singular eigenvalue problems. Amer.J.Math., 1950. V.72, pp.545-552.
293. Хелли Э. (Helly E.). Uber Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Monatsch.f.math.u.phys. 1921. Bd.31. S.60-91.
294. Хеллингер Э. (Hellinger E.) Neue Begrundung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veranderlichen. Jour.reine.angew.Math., 1909, Bd.136, S.210-271.
295. Хеллингер Э. (Hellinger E.). Grundlagen fur eine Theorie der unendlichen Matrizen. Math.Ann., 1910, Bd.69, S.289-330.
296. Хеллингер Э. (Hellinger E.). Die Integraigleichungen und Gleichungen mit unendlichen vielen Unbekannten . Enz.der math. Wiss, 1928. Bd.II-III, S.1335-1616.
297. Хильб Э. (Hilb E.) Die Reiheentwicklungen der Potentialtheorie. Math.Ann., 1907. Bd.63, S.38-53.
298. Хильб Э. (Hilb E.). Uber die Auflosung von Gleichungen von mit unendlich vielen Unbekannten. Erlangen., S.-Berlin, Phis med. Soz, 1908. .84-89.
299. Хильб Э. (Hilb E.). Uber Integraldarstellung willkurlicherFunktionen. Math.Ann. 1909. Bd.66, S.1-66.
300. Хильб Э. (Hilb E.). Uber gewohnliche Differentialgleichungen mit Singularitaten und die dazu gehorigen Entwicklungen willkurlicher Funktionen. Math.Ann., 1915. Bd.76, S.333-338.

301. Хильб Э, Сасс О. (Hilb E., Szasz O.). Allgemeine Reihenentwicklungen. Enz, math. Wiss.1923-1927. Bd.II-III. S.1313.
302. Хилле Э. (Hille E.). On oscilationtheorems. Trans. Amer. math, soc. 1948. V.64, pp.234-252.
303. Чебышев П.Л. О непрерывных дробях. М.-Л. Изд.АН СССР. 1947. Собр.соч..Т.2. С.103-126.
304. Чебышев П.Л. О разложении функций одной переменной. М.-Л.: Изд.АН СССР. 1947. Собр.соч.Т.2. С.336-341.
305. Чудов Л.А. Обратная задача Штурма-Лиувилля. Матем.сб. 1949. Т.25(67). С.451-456.
305А Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния". М. Мир, 1986. 408с.
306. Шин Д.Ю. О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве. LFY. 1938. N18. С.523-526.
307. Шин Д.Ю. О решениях линейного дифференциального уравнения - порядка. Матем.сб. 1940. Т.7(49). С.479-532.
308. Шин Д.Ю. О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве. Матем.сб.1943. Т.13(55). С.39-70.
309. Шмидт Э. (Schmidt E.). Uber die Auflosung linearer Gleichungen mit unendlich vielenUnbekannten. Palermo. Rend. delcirc. mat. 1908. V.25, pp.53-77.
310. Шмидт Э. (Schmidt E.). Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen. Math.Ann. 1906. Bd.63.
311. Шноль Э.Э. Поведение собственных функций и спектр операторов Штурма-Лиувилля. УМН. 1954. Т.9:4. С.113-132.
312. Шредингер Э. (Schredinger E.). Quantisitrung als Tigenwertproblem. Ann.der Physik. Русск.перевод. Сб. Вариационные принципы механики. -М.: Физматгиз.1959. С.668-704.
313. Шредингер Э. Новые пути в физике. Статьи и речи. -М.: 1971.
314. Штурм Ж. (Sturm J.) Sur les equations differentielles du second ordre. Jour.de math.pures et app. 1836.(10:pp.106-186.2), pp.280.
315. Штурм Ж. (Sturm J,). Sur une classe d`equationsdifferences partielles. Jour.pur.et appl.1836.T.(1), pp.373-444.
316. Штурм Ж., Лиувилль Ж. (Sturm J.) Extrait d`un memoire sur le developpement des fonctions en series dont les differents termes sont assujetis a satisfaire a une meme equayion differentielle lineare, contenant un parametre variable. Jour.d.math.pure et appl. 1837. V.2, pp.220-223.
317. Шур А .(Schur A.). Zur Entwickelung willkurlicherFunktionen nach Losungen von SystemenlinearerDifferentialgleichungen. Math. Ann.1921. Bd.82. S.213-239.
318. Шур И. (Schur I.). Uber die charakteristischen.Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen. Math.Ann. 1909. Bd.66. S.488-510.
319. Эйлер Л. (Euler L.). Sur vibrayion des cordes. Berlin.Mem.Acad.1748.

320. Эйлер Л. (Euler L.). Eclaircissement sur le mouvrment des cordes vibrantes.Miscellanea taurinensia.1766.T.III.
321. Эллиот Д. (Elliott J.). Eigenfunctionexpansions associated wich aingular differetial operators. Trans.Amer.Math.Soc. 1955. V.78, pp.406-425.
322. Югоньо П. (Hugoniot P.). Sur le developpment des fonctu\ions en series d`autres fonctions. C.R.1882. T.95, pp.907-909.
323. Янчевский С.А., Фок В.А. Предельные задачи в математике и в физике. Тр.перв.с.матем.М.-Л. ОНТИ. 1936.С.328-346.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абель Н. 47
Абловиц М. 192
Агранович З. С. 180, 190, 192
Адамар Ж. 86, 87
Айнс 181
Амальди У. 97
Амбарцумян В.А. 179, 182
Аппель П. 107
Арцела Ч. 86
Ахиезер Н.И. 89, 112, 124, 132, 140
Бекман Я. 9
Березанский Ю.М. 141
Бернулли Д. 9, 10, 12
Бернулли И. 9
Бессель Ф. 13, 16
Бете Г. 132
Биркгоф Дж. 66-71, 85, 169
Бирман М.Ш. 129-133, 157
Блисс Г. 169
Блох А.Ш. 188
Бонне О. 43, 65
Бор Г. 125
Бор Н. 134-137, 140
Борг Г. 179, 181, 182
Борн М. 134, 136, 143
Бортолотти Э. 65
Бохер М. 45, 46, 127, 132, 169, 178
Бохнер С. 18, 157
Бринк И. 128
Бройль Л. де 134-137, 143
Буницкий Е.Л. 64, 169, 178
Буркгардт Г. 15
Вебер Г. 86
Вейерштрасс К. 11, 107
Вейль Г. 64, 70, 73, 74, 76-85, 89, 90, 112, 118, 125-127, 129-132, 137, 151, 156, 160, 163, 164, 168, 172, 176, 177, 180
Вестфалль 63, 64
Виндау В. 64, 84, 85, 176
Винер Н. 18
Виртингер В.
Вишик М.И. 129
Вишневский Л.А. 89
Вольтерра В. 47, 86
Галилей Г. 9

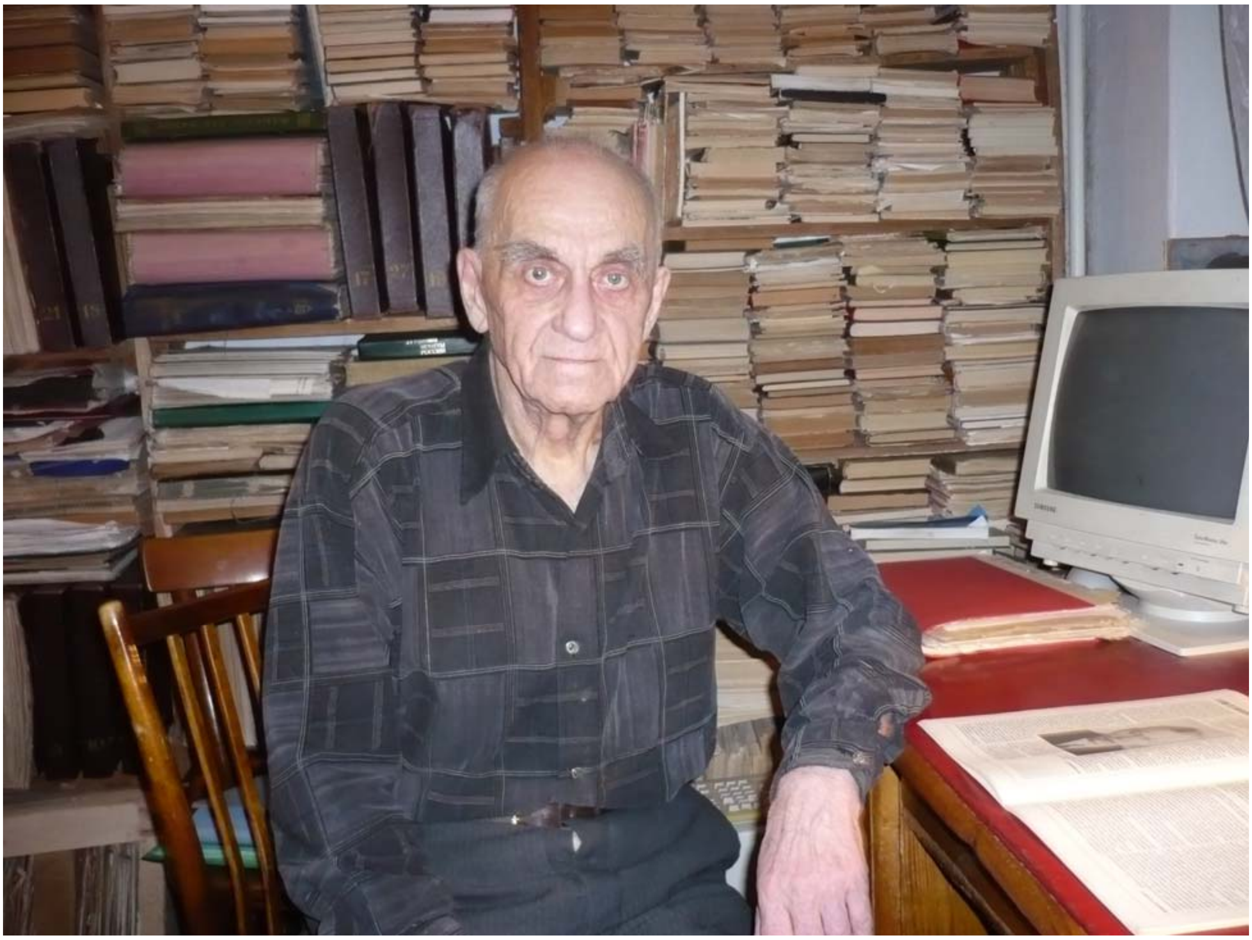
Гамильтон У. 135, 138, 149
Ганкель Г. 65
Гарнак А. 45
Гарднер К. 192
Гасымов М.Г. 181, 184-187, 192
Гаусс К.Ф. 16
Гейне Г. 65
Гейзенберг В. 134-136, 138, 140, 143, 144
Гельфанд И.М. 125, 126, 132, 141, 183, 184, 188
Герман Я. 9
Гильберт Д. 41, 47-64, 73-76, 78, 82-84, 89-92, 94-99, 101, 104, 106-112, 115, 119, 123, 125, 134, 149-151, 153
Глазман И.М. 85, 112, 124, 125, 127-133, 140, 157, 169, 171, 172, 174, 176
Гольмгрен Е. 48
ГордингЛ. 126
Гохберг И. Ц. 129
Грам И. 36, 40, 90, 91
Грей 118
Графф А.А. 178
Грин Дж. 19, 192
Гурса Э. 110
Гюнтер Н.М. 41
Даламбер Ж. 9, 10, 14-16
Данфорд Н. 112, 124, 125
Дарбу Г. 11
Декарт Р. 13
Демчишин А.И. 41
Дини У. 64-66, 71
Дирак П. 134, 138, 140, 141, 192
Дирихле П. 19, 65
Дюбуа-Реймон П. 47
Дюгамель Ж. 19
Захаров В.Е. 192, 193
Зоммерфельд А. 71, 83, 132, 143
Иванов М.Н. 77
Иосида К. 176
Иост Р. 180, 192
Иоффе А.Ф. 135
Исмагилов Р.С. 128, 130
Йордан П.134, 143
Камке Э. 169
Карлеман Т. 89, 109-112, 117
Келлог О. 63, 97, 98
Келдыш М.В. 169
Кеттеритцш Т. 107

Кирхгоф Р. 95
Клейн Ф. 62
Клеро А. 12, 16
Кнезер А. 41, 53, 84, 94-98
Кодаира К. 125, 156, 167, 168
Коддингтон Е.А. 127, 132, 156, 162
Кортевег Д. 192, 193
Кох Г. 48, 89, 92, 106-108
Коши О. 14, 17, 19, 47
Красносельский М.А. 169
Крейн М.Г. 89, 124, 129, 130, 132, 156, 167-169, 176, 177, 182, 183
Крускал М. 192
Крылов Н.М. 89
Курант Р. 83, 112, 129
Кузнецов Н.В. 179
Кэлкин И. 125, 129
Лавричелли 85
Лагерр Е. 41
Лагранж Ж. 10-14
Ламе Г. 19
Лангер Е. 169
Ландау Э. 108
Лаплас П. 13, 16, 47
Левин Б. Я. 180
Левинсон Н. 127, 132, 156, 162, 172, 175-177, 179, 181
Левитан Б.М. 156-158, 164, 166, 168, 176, 177, 179, 181, 183-185, 187, 188, 192, 193
Лежандр А. 13, 37
Лейбензон З.Л. 188
Ле Ру 86
Лидекий В.Б. 128, 132, 177
Лиувилль Ж. 20, 26-36, 47, 66, 67, 159
Лоренц Г.А. 83, 136,
Лэкс П. 193
Любарский Г .Я. 176
Мазон М. 63
Манаков С.В. 192, 193
Маркуш И. И. 41, 195
Мацаев В.И. 183
Медведев Ф.А. 195
Мерсенн М. 9
Миллер А. 6, 63, 64
Миллер-Лебедева В. 74, 75, 77
Милн Э. 118
Миттаг-Леффлер М. 47, 65
Модин А.А. 15, 195
Мозон М. 98

Молин Ф.Э. 77
Морен К. 6, 8, 112, 126, 141, 194
Наймарк М.А. 7, 124, 125, 127, 128, 131, 156, 168, 171, 172, 174-176
Найман П.Б. 133
Неванлинна Р. 195
Нейман К. 47
Нейман Дж. фон 6, 7, 99, 112-114, 119, 122, 124, 126, 143-152, 154, 195
Нехари З. 131
Новиков С.П. 192, 193
Орлов С.А. 175
Остроградский М.В. 19
Паплаускас А.Б. 195
Парсеваль М. 16
Пикар Э. 86, 110
Пиконе М. 65
Пинкерле С 97, 194
Питаевский Л.И. 192
Планк М. 134 – 136
Планшерель М. 84, 98
Плеснер А.И. 6, 118, 119, 122-124, 156, 158
Повзнер А.Я. 179
Пуассон С. 18, 23, 24, 65
Рапопорт И.М. 131, 156, 171, 175
Раус Э. 11
Реллих Ф. 127, 129, 141
Риккарт 125
Риман Г. 71, 85, 87, 96, 167
Рисс М. 89
Рисс Ф. 6, 45, 89, 106-109, 112, 115, 116, 119, 127, 146, 152
Ричардсон Р. 98
Рофе-Бекетов Ф.С. 132, 158
Рохлин В.А. 122
Рудин У. 194
Сабатье П. 192
Сансоне Д. 66, 127, 195
Саргсян И.С. 166, 188, 192, 194
Сасс О. 194
Сахнович Л.А. 183
Северини К. 85
Секельфальви-Надь Б. 6
Сигур Х. 192
СирсД. 177
Смирнов В.И. 41, 124, 195
Смогоржевский А.С.
Соболев С.Л. 125, 141

Сологуб В.С. 41
Сомов И.И. 11
Сонин Н.Я. 5, 36, 38-40, 163, 195
Сретенский Л.Н. 194
Стеклов В.А. 5, 40-43, 53, 71, 85, 90, 95, 98, 195
Стилтьес Т. 99, 117, 118, 122, 142, 150, 161, 162, 166
Стин Л.А. 194
Стоун М. 6, 112, 116, 118, 119, 124, 152, 168, 169
Тамаркин Я.Д. 6, 70-72, 169
Тейлор Б. 9 – 11, 120
Теплиц О. 90, 92, 94, 104-106, 108, 112, 153, 194
Титчмарш Э.Ч. 7, 18, 125-127, 130, 131, 156, 158, 162-164, 168, 171, 172, 177, 180, 195
Толл 181, 192
Уинтнер А. 99, 117, 130, 131, 157, 172
Уоллах С. 130, 132
Федорюк М.В. 156, 174-176
Ферма П. 13
Фишер Э. 45, 89, 127, 146
Фок В.А. 135, 141-143
Фредгольм И. 5, 47, 48, 50, 59, 63, 96, 106, 109, 110
Фреше М. 86, 87, 89
Фридрихс К. 127, 129, 130, 132, 157
Фриз Г. де 192, 193
Фруллани Г. 16, 17
Фурье Ж. 5, 13-19, 26, 34, 36, 42, 48, 51-53, 59, 61, 64-66, 73, 75, 87, 95, 96, 98, 107, 122, 195
Хаар А. 64, 87
Хартман 130, 132, 172
Хелли 122, 165
Хеллингер Э. 74, 82, 89, 90, 99, 101-106, 108, 110, 112, 115, 118, 122, 126, 151, 156, 158, 194
Хильб Е. 6, 15, 73, 75-77, 79, 84, 85, 94, 106, 107, 118, 156, 194
Чебышев П.Л. 6, 36-41, 43, 45, 74, 143, 195
Чудов Л.А. 182
Шадан К. 192
Шварц Г.А. 90, 93, 105, 141
Шварц Дж.Т. 6, 8, 40, 43, 86, 112, 124, 194
Шилов Г.Е. 141
Шин Д. Ю. 85, 177
Шлезингер Л. 66
Шмидт Э. 6, 40, 61, 63, 74, 84, 89, 90-94, 97, 104, 106, 108, 110, 112, 118, 145, 195
Шредингер Э. 6, 112, 131, 134-140, 143, 144, 164, 187
Штейнгауз Г. 64
Штурм Ж. 5, 20-27, 29, 31,34. 36, 40, 41, 43, 45-47, 53, 71, 94-96, 127, 130, 195
Шур И. 84, 97

Эйлер Л. 5, 9, 10, 12-14, 16
Эйнштейн А. 134, 136, 137
Эрмит Ш.5, 38, 41, 65, 74, 75
Югоньо П. 45



Николай Николаевич Круликовский (род. в 1918 году) − кандидат физико-математических наук, доцент, ныне на пенсии. Он является известным специалистом по истории развития математики, особенно это относится к математике в Томском университете. На его глазах и при его участии проходили основные этапы становления математического образования и математических исследований в Томске. Н.Н. Круликовский подробно исследовал математическую биографию Ф.Э. Молина, он – автор раздела «Дерптский период в деятельности Ф.Э. Молина» в пятитомном издании «История отечественной математики», а также раздела о дореволюционном этапе развития математики в Томске (там же). Он автор известной монографии «История развития математики в Томске».

Настоящая книга была написана в 80-е годы и была сдана в издательство «Наука». Но бурные девяностые остановили процесс подготовки рукописи. Вашему вниманию предлагается исправленный и переработанный текст этой книги.