Л. Д. КУДРЯВЦЕВ А. Д. КУТАСОВ
В. И. ЧЕХЛОВ М. И. ШАБУНИН

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

ИНТЕГРАЛЫ

РЯДЫ

Л. Д. КУДРЯВЦЕВ, А. Д. КУТАСОВ
В. И. ЧЕХЛОВ, М. И. ШАБУНИН

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

ИНТЕГРАЛЫ

РЯДЫ

Под редакцией Л. Д. КУДРЯВЦЕВА

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
инженерно-технических специальностей
высших учебных заведений*

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1986

ББК 22.16
К 88
УДК 517(075.8)

Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. **Сборник задач по математическому анализу: Интегралы. Ряды:** Учеб. пособие для вузов/Под ред. Л. Д. Кудрявцева. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1986. — 528 с.

Является продолжением книги тех же авторов «Сборник задач по математическому анализу: Предел. Непрерывность. Дифференцируемость» (М.: Наука, 1984).

Содержит задачи, относящиеся к следующим разделам математического анализа: неопределенные интегралы, определенные интегралы, несобственные интегралы, числовые ряды, функциональные последовательности и ряды.

В каждом параграфе имеется большое число задач различного уровня трудности, приводятся решения типовых примеров.

Для студентов технических вузов и университетов.

Ил. 41. Библиогр. 16 назв.

Рецензенты:

кафедра высшей математики Московского энергетического института (заведующий кафедрой член-корреспондент АН СССР *С. И. Похожаев*),
доктор физико-математических наук профессор *В. А. Ильин*.

Лев Дмитриевич Кудрявцев, Александр Дмитриевич Кутасов
Валерий Иванович Чехлов, Михаил Иванович Шабунин

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
Интегралы. Ряды

Редактор *А. Ф. Лапко*
Художественный редактор *Г. М. Коровина*
Технический редактор *С. Я. Шкляр*
Корректор *Т. С. Вайсберг*

ИБ № 12564

Сдано в набор 28.04.85. Подписано к печати 02.01.86. Формат 60×90 1/16. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 33. Усл. кр.-отт. 33,25. Уч.-изд. л. 35,32. Тираж 44000 экз. Заказ 564. Цена 1 р. 40 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

$К\ \dfrac{1702050000-025}{053(02)-86}$ КБ-16-63-86

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник задач содержит материал, относящийся к двум важным разделам курса математического анализа — «Интегралы» и «Ряды». Сборник состоит из пяти глав: «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл и его приложения», «Несобственные интегралы», «Числовые ряды», «Функциональные последовательности и ряды». Начальные разделы курса математического анализа представлены в книге тех же авторов «Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость» под редакцией Л. Д. Кудрявцева (М.: Наука, 1984).

При работе над сборником задач авторы опирались на многолетний опыт преподавания математики в Московском физико-техническом институте. В сборнике содержится много оригинальных задач, составленных авторами. Особое внимание уделяется разъяснению фундаментальных понятий математического анализа.

Каждый параграф в сборнике содержит краткие теоретические сведения, примеры решения типовых задач и задачи для самостоятельного решения.

Сборник предназначен для студентов, обучающихся во втузах с расширенной программой по математике и в университетах, а также для преподавателей. Большой набор задач разной степени трудности дает возможность преподавателю использовать сборник при работе со студентами в аудитории, при составлении контрольных работ и заданий. Он может оказаться полезным и для лиц, самостоятельно изучающих математику.

ГЛАВА I
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Общие приемы и методы интегрирования

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на некотором промежутке, если $F(x)$ непрерывна на этом промежутке и дифференцируема в каждой его внутренней точке, причем $F'(x)=f(x)$.

В курсах математического анализа доказывается, что для каждой непрерывной функции первообразная существует.

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные функции $f(x)$, то $F_2(x)=F_1(x)+C$, где C — некоторая постоянная.

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то множество

$$\{F(x)+C, \quad C\in\mathbb{R}\},$$

т. е. совокупность всех первообразных функции $f(x)$, называется *неопределенным интегралом* функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)\,dx.$$

Таким образом, по определению

$$\int f(x)\,dx=\{F(x)+C\}, \tag{1}$$

где $F(x)$ — какая-либо первообразная функции $f(x)$, а C — произвольная постоянная.

Формулу (1) принято записывать без фигурных скобок, т. е. опуская обозначение множества:

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

Символ $\int$ называется *знаком интеграла*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, x — *переменной интегрирования*.

Пример 1. Найти какую-либо первообразную $F(x)$ функции $f(x)=1/\sqrt{x}$, $x\in(0;+\infty)$, и ее неопределенный интеграл.

$\triangle$ Так как $(2\sqrt{x})'=1/\sqrt{x}$, $x>0$, то

$$F(x)=2\sqrt{x}, \qquad x>0,$$

и

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=2\sqrt{x}+C, \qquad x\in(0;+\infty). \ \blacktriangle$$

Пример 2. Для функции $f(x)=1/x$, $x\in(-\infty;\ 0)$, найти первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $(-2; 2)$.

△ Так как $(\ln|x|)'=1/x$, то $\ln|x|$ — одна из первообразных функции $f(x)=1/x$ и, следовательно, искомая первообразная $F(x)$ имеет вид $F(x)=\ln|x|+C$, где C — некоторая постоянная. Постоянную C находим из условия $F(-2)=2$, т. е. $\ln 2+C=2$, откуда $C=2-\ln 2$. Таким образом,

$$F(x)=\ln|x|+2-\ln 2=\ln|x/2|+2. \ \blacktriangle$$

2. Свойства неопределенного интеграла.

1. Если функция $f(x)$ имеет первообразную, то

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x), \qquad d\left(\int f(x)\,dx\right)=f(x)\,dx.$$

2. Если $f(x)$ дифференцируемая функция, то

$$\int f'(x)\,dx=f(x)+C, \qquad \int df(x)=f(x)+C.$$

3. Если функция $f(x)$ имеет первообразную и $a\in\mathbb{R}$, то функция $af(x)$ также имеет первообразную, причем при $a\neq 0$ верно равенство

$$\int af(x)\,dx=a\int f(x)\,dx.$$

4. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные на некотором промежутке, то функция $f_1(x)+f_2(x)$ также имеет первообразную на этом промежутке, причем

$$\int (f_1(x)+f_2(x))\,dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx.$$

3. **Формулы для основных неопределенных интегралов.** Каждая из нижеследующих формул верна на каждом промежутке, принадлежащем области определения подынтегральной функции:

1. $\displaystyle\int x^\alpha\,dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \qquad \alpha\neq -1.$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+a}=\ln|x+a|+C.$

3. $\displaystyle\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C, \qquad a>0,\ a\neq 1;$

$\displaystyle\int e^x\,dx=e^x+C.$

4. $\displaystyle\int \sin x\,dx=-\cos x+C.$

5. $\displaystyle\int \cos x\,dx=\sin x+C.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C.$

9. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C.$

10. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

11. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

12. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C =$

$$= -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C_1, \quad a \neq 0.$$

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + C =$

$$= -\arccos \frac{x}{|a|} + C_1, \quad a \neq 0.$$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C, \quad a \neq 0.$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C, \quad a \neq 0.$

Пример 3. Найти $\int (x - 2e^x)\, dx$.

△ Используя свойства 4 и 3 неопределенного интеграла и табличные интегралы 1 (при $\alpha = 1$) и 3, получаем

$$\int (x - 2e^x)\, dx = \int x\, dx - 2\int e^x\, dx = \frac{x^2}{2} - 2e^x + C, \quad x \in \mathbb{R}. \ ▲$$

Пример 4. Найти $\int \frac{(\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x})^2}{x}\, dx$.

$$△ \int \frac{(\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x})^2}{x}\, dx = \int dx - 4\int x^{-1/6}\, dx + 4\int x^{-1/3}\, dx =$$

$$= x - \frac{24}{5} x^{5/6} + 6x^{2/3} + C, \quad x > 0. \ ▲$$

Пример 5. Найти $\int \frac{dx}{x^4+4x^2}$.

$$\triangle \int \frac{dx}{x^2(x^2+4)} = \frac{1}{4}\int \frac{x^2+4-x^2}{x^2(x^2+4)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+4} =$$
$$= -\frac{1}{4x} - \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C, \quad x \neq 0. \blacktriangle$$

Пример 6. Найти $\int \frac{\sqrt{x^2-3}-3\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}}\,dx$.

$$\triangle \int \frac{\sqrt{x^2-3}-3\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} - 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}} =$$
$$= \ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right) - 3\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right| + C, \ |x| > \sqrt{3}. \blacktriangle$$

Пример 7. Найти $\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx$.

$$\triangle \int \cos^2\frac{x}{2}\,dx = \int \frac{1+\cos x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int dx +$$
$$+ \frac{1}{2}\int \cos x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + C, \quad x \in \mathbb{R}. \blacktriangle$$

Пример 8. Найти $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

$\triangle$ На каждом интервале, где определена подынтегральная функция, получаем

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \operatorname{tg} x - x + C. \blacktriangle$$

Пример 9. Найти $\int 3^x \cdot 5^{2x}\,dx$.

$$\triangle \int 3^x \cdot 5^{2x}\,dx = \int 75^x\,dx = \frac{75^x}{\ln 75} + C, \quad x \in \mathbb{R}. \blacktriangle$$

1.1. Для функции $f(x)$ найти первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $(x_0; y_0)$:

1) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sin(x+1), \quad x \in (0; +\infty), \quad (1; 1).$

2) $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}, \quad x \in (-\infty; 0), \quad (-1; 1).$

3) $f(x) = |x|, \ x \in \mathbb{R}, \ (-2; 4).$

1.2. Найти интегралы:

1) $\int x(x+1)(x-2)\,dx.$ 2) $\int (x^2-1)^2\,dx.$

3) $\int \left(\frac{8}{x^3} + \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x}\right)dx.$ 4) $\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}}\,dx.$

5) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$.
6) $\int \frac{dx}{7+x^2}$.

7) $\int \frac{dx}{3x^2-5}$.
8) $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-8}}$.

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+13}}$.
10) $\int (\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{x^2})^3\,dx$.

11) $\int \frac{\sqrt{4+x^2}+2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}\,dx$.
12) $\int 2^{2x}e^x\,dx$.

13) $\int \frac{2^x+5^x}{10^x}\,dx$.
14) $\int \frac{dx}{3x^2-x^4}$.

15) $\int \sin^2\frac{x}{2}\,dx$.
16) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$.

17) $\int \operatorname{th}^2 x\,dx$.
18) $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx$.

1.3. Пусть функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на всей числовой оси. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

1) Если $f(x)$ — периодическая функция, то и $F(x)$ — периодическая.

2) Если $f(x)$ — нечетная функция, то $F(x)$ — четная функция.

3) Если $f(x)$ — четная функция, то $F(x)$ — нечетная функция.

1.4. Доказать, что функция $f(x)=\operatorname{sign} x$ не имеет на всей числовой оси ни одной первообразной.

1.5. Привести пример разрывной функции, для которой на всей числовой оси первообразная существует.

1.6. Найти все первообразные функций:

1) $x|x|$, $x\in\mathbb{R}$. 2) $|1+x|-|1-x|$, $x\in\mathbb{R}$.

3) $(2x-3)|x-2|$, $x\in\mathbb{R}$. 4) $e^{|x|}$ $x\in\mathbb{R}$.

5) $|\operatorname{sh} x|$, $x\in\mathbb{R}$.

6) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & \text{если } |x|\leqslant 1,\\ 1-|x|, & \text{если } |x|>1.\end{cases}$

7) $\max(1;x^2)$, $x\in\mathbb{R}$. 8) $[x]\cdot|\sin\pi x|$, $x\in[0;+\infty)$.

---

4. Интегрирование подстановкой (заменой переменной). Пусть на некотором промежутке определена сложная функция $f(\varphi(x))$ и функция $t=\varphi(x)$ непрерывна на этом промежутке и дифференцируема во всех его внутренних точках; тогда если интеграл $\int f(t)\,dt$ существует, то интеграл $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$ также существует, причем

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx=\int f(t)\,dt\,\Big|_{t=\varphi(x)}. \qquad (2)$$

Эту формулу называют *формулой интегрирования подстановкой*.

Если для функции $t = \varphi(x)$ на рассматриваемом промежутке существует обратная $x = \varphi^{-1}(t)$, то формулу (2) можно переписать в виде

$$\int f(t)\,dt = \int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx\,\Big|_{x=\varphi^{-1}(t)},$$

или, если исходную переменную интегрирования обозначать как обычно через x,

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\,\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \qquad (3)$$

Формулу (3) обычно называют *формулой интегрирования заменой переменной.*

Пример 10. Найти интегралы:

1) $\int (3x-5)^{10}\,dx.$ 2) $\int x^2\sqrt[5]{5x^3+1}\,dx.$

3) $\int \operatorname{tg} x\,dx.$ 4) $\int \frac{dx}{2+\cos^2 x}$, $|x| < \frac{\pi}{2}.$

5) $\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{1-x^{16}}}.$ 6) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^6-7x^4+x^2}}\,dx.$

△ 1) Найдем интеграл с помощью формулы (2), предварительно преобразовав его следующим образом:

$$\int (3x-5)^{10}\,dx = \frac{1}{3}\int (3x-5)^{10}(3x-5)'\,dx.$$

Положив в формуле (2) $t = \varphi(x) = 3x-5$ и $f(t) = t^{10}$, получим

$$\frac{1}{3}\int (3x-5)^{10}(3x-5)'\,dx = \frac{1}{3}\int t^{10}\,dt\,\Big|_{t=3x-5}.$$

Таким образом,

$$\int (3x-5)^{10}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{11}}{11} + C\,\Big|_{t=3x-5} = \frac{1}{33}(3x-5)^{11} + C.$$

Замечание. Обычно, пользуясь формулой (2), в записи решения для краткости опускают знак подстановки: $|_{t=\varphi(x)}$. Например, вычисление данного интеграла проводят так:

$$\int (3x-5)^{10}\,dx = \frac{1}{3}\int (3x-5)^{10}\,d(3x-5) =$$
$$= \frac{1}{3}\int t^{10}\,dt = \frac{t^{11}}{33} + C = \frac{(3x-5)^{11}}{33} + C.$$

2) По формуле (2), положив в ней $t=\varphi(x)=5x^3+1$, $f(t)=\sqrt[5]{t}$, получаем

$$\int x^2\sqrt[5]{5x^3+1}\,dx=\frac{1}{15}\int\sqrt[5]{5x^3+1}\,(5x^3+1)'\,dx=$$

$$=\frac{1}{15}\int\sqrt[5]{5x^3+1}\,d(5x^3+1)=\frac{1}{15}\int\sqrt[5]{t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{18}\sqrt[5]{t^6}+C=\frac{1}{18}(5x^3+1)\sqrt[5]{5x^3+1}+C.$$

3) $\int \operatorname{tg} x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx=-\int\frac{d\cos x}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C.$

4) $$\int\frac{dx}{2+\cos^2 x}=\int\frac{dx}{3\cos^2 x+2\sin^2 x}=\int\frac{1}{3+2\operatorname{tg}^2 x}\,\frac{dx}{\cos^2 x}=$$

$$=\int\frac{d\operatorname{tg} x}{3+2\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

5) $$\int\frac{x^7\,dx}{\sqrt{1-x^{16}}}=\frac{1}{8}\int\frac{dx^8}{\sqrt{1-x^{16}}}=\frac{1}{8}\arcsin x^8+C.$$

6) $$\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x^6-7x^4+x^2}}\,dx=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2-7+\frac{1}{x^2}}}\,dx=$$

$$=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-5}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-5}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2-5}\right|+C=$$

$$=\ln\left|x-\frac{1}{x}+\sqrt{x^2-7+\frac{1}{x^2}}\right|+C. \ ▲$$

Пример 11. Найти интегралы:

1) $\int\frac{dx}{2+\sqrt{x}}$. 2) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$, $x>0$. 3) $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

△ 1) Воспользуемся формулой (3) интегрирования заменой переменной. Подынтегральная функция определена на промежутке $x\geqslant 0$. Сделаем замену переменной $x=t^2$, $t\geqslant 0$. Согласно формуле (3), положив в ней

$$x=\varphi(t)=t^2,\qquad f(x)=1/(2+\sqrt{x}),$$

получим

$$\int\frac{dx}{2+\sqrt{x}}=\int\frac{1}{2+\sqrt{t^2}}(t^2)'\,dt\,\Big|_{t=\sqrt{x}}=\int\frac{2t\,dt}{2+t}\Big|_{t=\sqrt{x}}=$$

$$=2\int\frac{2+t-2}{2+t}\,dt\,\Big|_{t=\sqrt{x}}=2t-4\ln|2+t|+C\,\Big|_{t=\sqrt{x}}=$$

$$=2\sqrt{x}-4\ln|2+\sqrt{x}|+C.$$

З а м е ч а н и е. При использовании формулы (3) в записи решения знак подстановки $\Big|_{x=\varphi^{-1}(t)}$ обычно опускают.

2) Сделаем замену переменной, положив $x = 1/t$, тогда

$$dx = -\frac{1}{t^2}\,dt.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\int \frac{t^2\,dt}{t^2\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = -\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= -\int d\left(\sqrt{t^2+1}\right) = -\sqrt{t^2+1} + C = -\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} + C.$$

3) Положим $e^x + 1 = t^2$, $t > 0$, тогда

$$e^x\,dx = 2t\,dt \quad \text{и} \quad dx = \frac{2t\,dt}{t^2-1}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} + C. \ \blacktriangle$$

П р и м е р 12. Найти интегралы:

$$1) \int \frac{3x-1}{x^2-x+1}\,dx. \qquad 2) \int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx.$$

$\triangle$ 1) Представим подынтегральную функцию в виде линейной комбинации двух рациональных дробей так, чтобы числителем первой дроби была производная знаменателя $x^2 - x + 1$, а числителем второй дроби — единица:

$$\frac{3x-1}{x^2-x+1} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2-x+1}.$$

Интеграл от каждого слагаемого легко вычисляется:

$$\frac{3}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} = \frac{3}{2}\ln(x^2-x+1) + C_1;$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C_2.$$

Таким образом,

$$\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{3}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

2) Представим подынтегральную функцию в виде линейной комбинации двух дробей так, чтобы числителем первой дроби была производная квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе, а числителем второй дроби — единица:

$$\frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{-2x+6}{\sqrt{-x^2+6x-8}} + 13\cdot\frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}.$$

Теперь интеграл легко вычисляется:

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx = -\frac{3}{2}\int (-x^2+6x-8)^{-1/2}\,d(-x^2+6x-8) +$$
$$+13\int \frac{d(x-3)}{\sqrt{1-(x-3)^2}} = -3\sqrt{-x^2+6x-8}+13\arcsin(x-3)+C. \ \blacktriangle$$

Пример 13. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$.

△ Первый способ:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{d\cos x}{\cos^2 x - 1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C.$$

Второй способ:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\,\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\,\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C. \ \blacktriangle$$

1.7. Найти интегралы ($a \neq 0$):

1) $\int e^{ax}\,dx$.
2) $\int \sin(ax+b)\,dx$.
3) $\int (ax+b)^{\alpha}\,dx$.
4) $\int \sin^2(ax+b)\,dx$.
5) $\int \cos(ax+b)\cos(ax-b)\,dx$.
6) $\int \sin ax \sin(ax+b)\,dx$.

1.8. Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{7x^2+5}$.
2) $\int \frac{dx}{5-12x-9x^2}$.
3) $\int \frac{dx}{2x^2-5x+7}$.
4) $\int \frac{dx}{15x^2-34x+15}$.
5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$.
6) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.
7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.
8) $\int \frac{dx}{\sqrt{17-4x-x^2}}$.

1.9. Доказать равенство

$$\int (\varphi(x))^{\alpha}\cdot\varphi'(x)\,dx = \begin{cases} \dfrac{(\varphi(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, & \text{если } \alpha \neq -1, \\ \ln|\varphi(x)|+C, & \text{если } \alpha = -1. \end{cases}$$

Найти интегралы (**1.10—1.16**):

1.10. 1) $\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+1}\,dx.$ 2) $\int \frac{3x-2}{2-3x+5x^2}\,dx.$

3) $\int \frac{x-1}{x^2-x-1}\,dx.$ 4) $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2}\,dx.$

5) $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx.$ 6) $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}\,dx.$

7) $\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx.$ 8) $\int \frac{x^3+x}{\sqrt{1+x^2-x^4}}\,dx.$

9) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3+7x^2}}.$ 10) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}},\quad x>2.$

11) $\int \sqrt{x-x^2}\,dx.$ 12) $\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx.$

1.11. 1) $\int \frac{x\,dx}{(1-x^2)^2}.$ 2) $\int \left(\frac{x}{x^5+2}\right)^4 dx.$

3) $\int \frac{x\,dx}{(1-x)^{12}}.$ 4) $\int \frac{x^5\,dx}{x+1}.$

5) $\int \frac{3x^2-1}{x^3-x+1}\,dx.$ 6) $\int \frac{x\,dx}{x^4+6x^2+5}.$

7) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx.$ 8) $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx.$

1.12. 1) $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx.$ 2) $\int x\sqrt{1+x}\,dx.$

3) $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx.$ 4) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-1}}.$

5) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$ 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}.$

7) $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}.$ 8) $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}\,dx.$

9) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$ 10) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}.$

1.13. 1) $\int xe^{-x^2}\,dx.$ 2) $\int e^{2x^2+2x-1}(2x+1)\,dx.$

3) $\int \frac{dx}{1+e^{3x}}.$ 4) $\int \frac{dx}{e^x+\sqrt{e^x}}.$

5) $\int e^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}.$ 6) $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}.$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}.$ 8) $\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{e^{4x}+1}}.$

9) $\int \frac{2^x\,dx}{\sqrt{1-4^x}}$. 10) $\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt[4]{1+e^x}}$.

11) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$. 12) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$.

13) $\int \frac{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch}^3 x}{1+\operatorname{ch}^2 x}\,dx$. 14) $\int \frac{\operatorname{sh}^2 x\,dx}{\operatorname{ch}^6 x}$.

1.14. 1) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$. 2) $\int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x}$.

3) $\int \frac{\ln 2x}{x \ln 4x}\,dx$. 4) $\int \ln \frac{1+x}{1-x} \frac{dx}{x^2-1}$.

5) $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$. 6) $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}$.

1.15. 1) $\int \sin^6 x \cos x\,dx$. 2) $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\cos x}$.

3) $\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}\,dx$. 4) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$.

5) $\int \frac{dx}{\cos x}$. 6) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}$, $|x|<\frac{\pi}{2}$.

7) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$. 8) $\int \sqrt{\sin x} \cos^5 x\,dx$.

9) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$. 10) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$.

11) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos 2x}}$. 12) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\cos 2x}}$.

13) $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{25\sin^2 x+9\cos^2 x}}$. 14) $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{\sin^2 x-\cos^2 x}}$.

15) $\int \frac{\sqrt[4]{\operatorname{tg} x}\,dx}{\sin^2 x}$. 16) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+4\cos x+\cos^2 x}}$.

17) $\int \frac{\cos \ln x}{x}\,dx$. 18) $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin 2x}\,dx$.

19) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}+\operatorname{ctg} x}{\cos^2 x}\,dx$. 20) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{e^{\sin x}-1}}$.

1.16. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}$. 2) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx$.

3) $\int \frac{\arccos^2 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$. 4) $\int \frac{\ln \arccos x\,dx}{\sqrt{1-x^2} \arccos x}$.

5) $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,dx$. 6) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arcctg} x}}{1+x^2}\,dx$.

7) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx}{(1+x)\sqrt{x}}$. 8) $\int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{\operatorname{ch} x}\,dx$.

5. Интегрирование по частям. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на некотором промежутке и дифференцируемы во всех его внутренних точках, тогда если на этом промежутке существует интеграл $\int vu'\,dx$, то существует и интеграл $\int uv'\,dx$, причем

$$\int uv'\,dv = uv - \int vu'\,dx \quad \text{или} \quad \int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (4)$$

Формула (4) называется *формулой интегрирования по частям*. Применение формулы (4) целесообразно в тех случаях, когда подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ удается представить в виде произведения двух множителей u и dv таким образом, чтобы интегрирование выражений dv и $v\,du$ являлось задачей более простой, чем интегрирование исходного выражения.

По известному дифференциалу dv функция v определяется неоднозначно, но в формуле (4) в качестве v может быть выбрана *любая* функция с данным дифференциалом dv.

Иногда для вычисления интеграла формулу интегрирования по частям приходится применять несколько раз (пример 15).

Пример 14. Найти интегралы:

1) $\int \ln x\,dx$. 2) $\int x\sin x\,dx$.

△ 1) Положим

$$u = \ln x, \quad dv = dx,$$

тогда

$$du = \frac{dx}{x}, \qquad v = x.$$

По формуле интегрирования по частям получаем

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C.$$

2) Положим

$$u = x, \qquad dv = \sin x\,dx,$$

тогда

$$du = dx, \qquad v = -\cos x$$

и, согласно формуле (4),

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C. \ ▲$$

Пример 15. Найти интегралы:

1) $\int x^2 e^x\,dx$. 2) $\int \arccos^2 x\,dx$.

△ 1) Положим

$$u = x^2, \qquad dv = e^x\,dx,$$

тогда

$$du = 2x\,dx, \qquad v = e^x.$$

По формуле (1) имеем

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - \int 2xe^x\,dx.$$

К полученному интегралу снова применим формулу интегрирования по частям. Положив

$$u = 2x, \qquad dv = e^x\,dx,$$

найдем

$$du = 2\,dx, \qquad v = e^x.$$

Следовательно,

$$\int 2xe^x\,dx = 2xe^x - \int 2e^x\,dx = 2xe^x - 2e^x + C.$$

Поэтому

$$\int x^2 e^x\,dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

Замечание. Решение этого примера можно записать короче:

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - \int 2xe^x\,dx = x^2 e^x - 2\left(xe^x - \int e^x\,dx\right) =$$
$$= (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

2) Пусть

$$u = \arccos^2 x, \qquad dv = dx,$$

тогда

$$du = -\frac{2\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \qquad v = x.$$

Согласно формуле (4),

$$\int \arccos^2 x\,dx = x\arccos^2 x + 2\int \frac{x\arccos x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Для вычисления полученного интеграла еще раз воспользуемся формулой (4), положив

$$u = \arccos x, \qquad dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Тогда

$$du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

и, вычислив интеграл

$$v = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int d\sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-x^2} + C_1,$$

возьмем $v = -\sqrt{1-x^2}$. В результате получим

$$\int \frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2}\arccos x - \int dx =$$
$$= -\sqrt{1-x^2}\arccos x - x + C_2.$$

Итак,

$$\int \arccos^2 x\,dx = x\arccos^2 x - 2\sqrt{1-x^2}\arccos x - 2x + C. \ \blacktriangle$$

Пример 16. Найти интеграл

$$J = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx, \qquad a \neq 0.$$

△ Положим

$$u = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad dv = dx,$$

тогда

$$du = -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \qquad v = x.$$

По формуле (4) получаем

$$J = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Запишем подынтегральную функцию последнего интеграла в виде

$$\frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \sqrt{a^2 - x^2},$$

тогда будем иметь

$$J = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - J.$$

Таким образом, с помощью формулы интегрирования по частям получено уравнение, из которого J легко определяется:

$$J = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|} + C. \ \blacktriangle$$

Пример 17. Получить для интеграла

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad a \neq 0,$$

рекуррентную формулу

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n - 1)J_n\right).$$

△ Используем формулу интегрирования по частям для интеграла J_n. Положим

$$u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}, \qquad dv = dx.$$

Тогда

$$du = \frac{-2nx\,dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}, \qquad v = x,$$

и, следовательно,

$$J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2\,dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}.$$

Прибавим и вычтем a^2 в числителе подынтегральной функции полученного интеграла:

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\, dx.$$

Записав последний интеграл в виде разности интегралов, получаем

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1},$$

откуда

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)J_n\right).$$

Так как

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C,$$

то, положив в полученной формуле $n=1$, можно найти J_2. Зная J_2, можно найти J_3 и т. д. ▲

1.17. Найти интегралы:

1) $\int xe^{-x}\, dx$. 2) $\int x2^x\, dx$.

3) $\int x\,\mathrm{sh}\, x\, dx$. 4) $\int x \ln x\, dx$.

5) $\int \ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right) dx$. 6) $\int x \ln\left|1+\frac{1}{x}\right| dx$.

7) $\int x^\alpha \ln x\, dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}$. 8) $\int (x^2-2x+3)\ln(x+1)\, dx$.

1.18. С помощью формулы интегрирования по частям найти интегралы:

1) $\int \frac{x^2\, dx}{(1+x^2)^2}$. 2) $\int \frac{dx}{(4+x^2)^2}$.

Найти интегралы (**1.19**—**1.21**):

1.19. 1) $\int x\cos(5x-7)\, dx$. 2) $\int x\sin^2 x\, dx$.

3) $\int \frac{x\, dx}{\cos^2 x}$. 4) $\int x\,\mathrm{tg}^2 2x\, dx$.

5) $\int \frac{x-\sin x}{1-\cos x}\, dx$. 6) $\int \sin x \cdot \ln \mathrm{tg}\, x\, dx$.

1.20. 1) $\int \mathrm{arctg}\, x\, dx$. 2) $\int \arccos(5x-2)\, dx$.

3) $\int x\,\mathrm{arcctg}\, x\, dx$. 4) $\int x^2 \arcsin 2x\, dx$.

5) $\int x^3 \operatorname{arctg} x\,dx.$ 6) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx.$

7) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx.$ 8) $\int \frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

9) $\int x\sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx.$ 10) $\int \frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}}\,dx.$

1.21. 1) $\int (x^2-6x+2)e^{3x}\,dx.$ 2) $\int x^2 2^x\,dx.$

3) $\int x^2\sin 2x\,dx.$ 4) $\int (x^2-x+1)\operatorname{ch} x\,dx.$

5) $\int (x^2+1)^2\cos x\,dx.$ 6) $\int x^5\sin 5x\,dx.$

1.22. Доказать формулы ($P_n(x)$ — многочлен степени n, $a\neq 0$):

1) $$\int P_n(x)e^{ax}\,dx=\left(P_n(x)-\frac{P_n'(x)}{a}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^n}\right)\frac{e^{ax}}{a}+C.$$

2) $$\int P_n(x)\sin ax\,dx=-\left(P_n(x)-\frac{P_n''(x)}{a^2}+\frac{P_n^{(4)}(x)}{a^4}-\ldots\right)\frac{\cos ax}{a}+$$
$$+\left(\frac{P_n'(x)}{a}-\frac{P_n'''(x)}{a^3}+\frac{P_n^{(5)}(x)}{a^5}-\ldots\right)\frac{\sin ax}{a}+C.$$

3) $$\int P_n(x)\cos ax\,dx=\left(P_n(x)-\frac{P_n''(x)}{a^2}+\frac{P_n^{(4)}(x)}{a^4}-\ldots\right)\frac{\sin ax}{a}+$$
$$+\left(\frac{P_n'(x)}{a}-\frac{P_n'''(x)}{a^3}+\frac{P_n^{(5)}(x)}{a^5}-\ldots\right)\frac{\cos ax}{a}+C.$$

Найти интегралы (**1.23** — **1.24**):

1.23. 1) $\int \ln^2 x\,dx.$ 2) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2\sqrt{x}}\,dx.$

3) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx.$ 4) $\int \ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx.$

5) $\int \arcsin^2 x\,dx.$ 6) $\int x\operatorname{arctg}^2 x\,dx.$

1.24. 1) $\int \sqrt{x^2+a}\,dx.$ 2) $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx.$

3) $\int e^{ax}\sin bx\,dx,\ a^2+b^2\neq 0.$

4) $\int e^{ax}\cos bx\,dx,\ a^2+b^2\neq 0.$

5) $\int 3^x \cos x\,dx.$ 6) $\int e^{3x} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) dx.$

7) $\int \sin x \operatorname{ch} x\,dx.$ 8) $\int \left(\frac{\cos x}{e^x}\right)^2 dx.$

9) $\int e^{ax} \sin^2 bx\,dx.$ 10) $\int xe^x \sin x\,dx.$

11) $\int x^2 e^x \cos x\,dx.$ 12) $\int xe^x \sin^2 x\,dx.$

13) $\int \sin \ln x\,dx.$ 14) $\int \cos \ln x\,dx.$

15) $\int x^2 \sin \ln x\,dx.$ 16) $\int e^{\arccos x}\,dx.$

1.25. Получить для интеграла J_n $(n \in \mathbb{N})$ рекуррентную формулу:

1) $J_n = \int x^n e^{ax}\,dx,\ a \neq 0.$ 2) $J_n = \int \ln^n x\,dx.$

3) $J_n = \int x^\alpha \ln^n x\,dx,\ \alpha \neq -1.$ 4) $J_n = \int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{x^2+a}},\ n > 2.$

5) $J_n = \int \sin^n x\,dx,\ n > 2.$ 6) $J_n = \int \cos^n x\,dx,\ n > 2.$

7) $J_n = \int \operatorname{sh}^n x\,dx,\ n > 2.$ 8) $J_n = \int \operatorname{ch}^n x\,dx,\ n > 2.$

9) $J_n = \int \frac{dx}{\sin^n x},\ n > 2.$ 10) $J_n = \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^n x},\ n > 2.$

Найти интегралы (**1.26—1.28**):

1.26. 1) $\int x^8 e^{-x}\,dx.$ 2) $\int \ln^4 x\,dx.$

3) $\int x^3 \ln^3 x\,dx.$ 4) $\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{x^2+9}}.$

5) $\int \cos^5 x\,dx.$ 6) $\int \sin^6 x\,dx.$

7) $\int \frac{dx}{\sin^5 x}.$ 8) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^7 x}.$

1.27. 1) $\int x^3 e^{-x^2}\,dx.$ 2) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$

3) $\int x^2 e^{\sqrt{x}}\,dx.$ 4) $\int \frac{\ln \ln x}{x}\,dx.$

5) $\int \frac{x \ln x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}.$ 6) $\int \frac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{x+1}}\,dx.$

7) $\int \sqrt{x} \sin \sqrt{x}\,dx.$ 8) $\int \cos^2 \sqrt{x}\,dx.$

9) $\int \cos^2 \ln x \, dx.$ 10) $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx.$

11) $\int \cos x \cdot \ln(1+\sin^2 x) dx.$ 12) $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx.$

1.28. 1) $\int x \operatorname{arctg} x^2 \, dx.$ 2) $\int e^{-x} \operatorname{arcctg} e^x \, dx$

3) $\int x \arccos \frac{1}{x} dx.$ 4) $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx.$

5) $\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx.$ 6) $\int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx.$

1.29. Найти функции $f(x)$, $x \in (0; +\infty)$, удовлетворяющие условию $f'(x^2) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

1.30. Найти функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию

$$f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in (0; 1], \\ x, & \text{если } x \in (1; +\infty). \end{cases}$$

1.31. Найти функции $f(x)$, $x \in (0; +\infty)$, и $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям:

$$xf'(x^2) + g'(x) = \cos x - 3x^3, \quad f(x^2) + g(x) = \sin x - x^4.$$

1.32. Найти функции $f(x)$, $x \in (0; +\infty)$, и $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие при $x > 0$ условиям:

1) $f(x) + g(x) = x + 1,$
$f'(x) - g'(x) = 0,$
$f'(2x) + g'(-2x) = 1 - 12x^2.$

2) $f(x) + g(x) = \frac{x^4}{6},$
$f'(x) - g'(x) = \sin x,$
$f'(2x) + g'(-2x) = 0.$

---

§ 2. Интегрирование рациональных функций

Каждая рациональная функция на каждом промежутке, принадлежащем ее области определения, представима в виде суммы многочлена и элементарных рациональных дробей (см. [1], § 6):

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \qquad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, \qquad p^2 - 4q < 0.$$

Поэтому интегрирование рациональных функций сводится к разложению рациональной функции на элементарные дроби

([1], § 6, в частности, примеры 7, 10, 11) и к интегрированию элементарных дробей и многочленов.

Интегрирование элементарных дробей производится следующим образом:

1) $$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

2) $$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C, \qquad n \neq 1.$$

3) $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{N - \frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

4) $$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} =$$

$$= \frac{M}{2}\,\frac{(x^2+px+q)^{1-n}}{1-n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^n}, \quad n > 1.$$

Последний интеграл линейной подстановкой $t = x + \frac{p}{2}$ приводится к интегралу J_n, для которого в примере 17 § 1 получена рекуррентная формула.

Из формул 1)—4) следует, что интеграл от элементарной дроби выражается через рациональные функции, логарифмы и арктангенсы. Поэтому неопределенный интеграл от любой рациональной функции на всяком промежутке, принадлежащем ее области определения, является элементарной функцией, представимой в виде алгебраической суммы композиций рациональных функций, логарифмов и арктангенсов.

Пример 1. Найти $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x-3)}$.

△ Знаменатель рациональной дроби имеет простые корни $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$. Поэтому разложение на элементарные дроби имеет вид

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{x-3}.$$

Из этого равенства рациональных дробей следует равенство многочленов:

$$x = A_1(x+2)(x-3) + A_2(x+1)(x-3) + A_3(x+1)(x+2).$$

Полагая последовательно $x=-1$, $x=-2$, $x=3$, находим

$$-1 = -4A_1, \quad -2 = 5A_2, \quad 3 = 20A_3,$$

т. е.

$$A_1 = 1/4, \quad A_2 = -2/5, \quad A_3 = 3/20.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{2}{5}\ln|x+2| + \frac{3}{20}\ln|x-3| + C. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Найти $\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}\,dx.$

$\triangle$ Подынтегральная функция — неправильная рациональная дробь. Разделив многочлен $P(x) = 2x^4+5x^2-2$ на многочлен $Q(x) = 2x^3-x-1$, получим частное $T(x) = x$ и остаток $R(x) = 6x^2+x-2$. Следовательно, данная рациональная дробь представляется в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби следующим образом:

$$\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1} = x + \frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1}.$$

Многочлен $Q(x) = 2x^3-x-1$ имеет действительный корень $x=1$. Разделив $Q(x)$ на $x-1$, получим

$$Q(x) = 2x^3-x-1 = (x-1)(2x^2+2x+1).$$

Трехчлен $2x^2+2x+1$ не имеет действительных корней, поэтому разложение полученной правильной рациональной дроби на элементарные имеет вид

$$\frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{2x^2+2x+1}.$$

Из равенства дробей следует равенство многочленов:

$$6x^2+x-2 = A(2x^2+2x+1) + (Mx+N)(x-1).$$

Положив здесь $x=1$, получим $5=5A$, т. е. $A=1$. Приравняв коэффициенты при x^2 и свободные члены многочленов, получим

$$6 = 2A+M, \qquad -2 = A-N,$$

откуда $M=4$, $N=3$. Таким образом, подынтегральная функция представима в виде

$$\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1} = x + \frac{1}{x-1} + \frac{4x+3}{2x^2+2x+1},$$

и, следовательно,

$$\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \int \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}\,dx + \\ + \int \frac{1}{2x^2+2x+1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \ln(2x^2+2x+1) + \\ + \operatorname{arctg}(2x+1) + C. \ \blacktriangle$$

Пример 3. Найти $\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}\,dx$.

$\triangle$ Разложение подынтегральной функции на элементарные дроби имеет вид

$$\frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}.$$

По определению равенства рациональных дробей имеем

$$2x^3+x^2+5x+1 = (Ax+B)(x^2-x+1) + (Cx+D)(x^2+3).$$

Из равенства многочленов следует, что их коэффициенты при одинаковых степенях x равны, поэтому

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 2 = A + C, \\ x^2 & 1 = -A + B + D, \\ x^1 & 5 = A - B + 3C, \\ x^0 & 1 = B + 3D. \end{array}$$

Эта система имеет решение: $A=0$, $B=1$, $C=2$, $D=0$. Следовательно,

$$\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + \\ + \ln(x^2-x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \ \blacktriangle$$

Пример 4. Найти $\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^5+x^4-x^3-x^2}$.

$\triangle$ Разложим знаменатель рациональнной дроби на множители:

$$x^5+x^4-x^3-x^2 = x^2(x^3+x^2-x-1) = x^2(x+1)(x^2-1) = \\ = x^2(x+1)^2(x-1).$$

Из полученного разложения следует, что подынтегральная функция разлагается на элементарные дроби следующим образом:

$$\frac{x^4+1}{x^2(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2}.$$

Из равенства дробей следует равенство многочленов:

$$x^4+1 = Ax(x-1)(x+1)^2 + B(x-1)(x+1)^2 + \\ + Cx^2(x+1)^2 + Dx^2(x^2-1) + Ex^2(x-1). \qquad (1)$$

Положив в равенстве (1) поочередно $x=0$, $x=1$, $x=-1$, получим $B=-1$, $C=1/2$, $E=-1$. Чтобы найти коэффициент A, продифференцируем обе части равенства (1) и затем положим в нем $x=0$. При дифференцировании правой части будем выписывать только те слагаемые, которые не обращаются в нуль при $x=0$:

$$4x^3 = A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + 2B(x^2-1) + \ldots$$

Отсюда при $x=0$ имеем $0=-A-B$, т. е. $A=1$. Для определения коэффициента D поступаем аналогично: дифференцируем обе части равенства (1), причем выписываем только те слагаемые правой части, которые не обращаются в нуль при $x=-1$; получаем равенство

$$4x^3 = Dx^2(x-1) + 2Ex(x-1) + Ex^2 + \ldots,$$

из которого при $x=-1$ имеем

$$-4 = -2D + 4E + E,$$

откуда находим $D=-1/2$. Следовательно,

$$\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^5+x^4-x^3-x^2} = \ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \\ - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C.$$

Использованный здесь прием отыскания коэффициентов A и D удобен в тех случаях, когда знаменатель рациональной дроби имеет кратные корни. ▲

Пример 5. Найти $\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx$.

△ Разложение подынтегральной функции на элементарные дроби имеет вид

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}.$$

Следовательно,

$$4x^2-8x = A(x-1)(x^2+1)^2 + B(x^2+1)^2 + \\ + (Cx+D)(x-1)^2(x^2+1) + (Ex+F)(x-1)^2. \qquad (2)$$

Приравняв соответствующие коэффициенты этих многочленов, можно получить систему шести линейных уравнений с шестью неизвестными A, B, C, D, E, F и решить ее. Но проще поступить иначе. Положив в равенстве (2) $x=1$, найдем $B=-1$. Затем положим $x=i$, тогда будем иметь

$$-4-8i = (Ei+F)(i-1)^2 = 2E - 2iF.$$

Приравняв действительные и мнимые части, получим $-4=2E$, $-8=-2F$, т. е. $E=-2$, $F=4$. Продифференцируем обе части равенства (2), причем будем выписывать только те слагаемые, которые не обращаются в нуль при $x=1$. Тогда получим

$$8x-8=A(x^2+1)^2+2B(x^2+1)2x+\ \dots$$

Отсюда при $x=1$ имеем $0=4A+8B$, т. е. $A=2$. Продифференцируем обе части равенства (2), выписывая только те слагаемые, которые не обращаются в нуль при $x=i$:

$$8x-8=(Cx+D)(x-1)^2 2x+E(x-1)^2+ \\ +(Ex+F)2(x-1)+\ \dots$$

Подставив в это равенство $x=i$, найдем последние 2 коэффициента: $C=-2$, $D=-1$. Таким образом,

$$\int\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}dx=2\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}-\int\frac{(2x+1)\,dx}{x^2+1}- \\ -\int\frac{2x-4}{(x^2+1)^2}dx=2\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}-\ln(x^2+1)-\operatorname{arctg}x+ \\ +\frac{1}{x^2+1}+4\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Последний интеграл находим по рекуррентной формуле (см. пример 17, § 1):

$$J_2=\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x\right)+C.$$

Итак,

$$\int\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}dx=\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x+\frac{1}{x-1}+\frac{1+2x}{x^2+1}+C. \blacktriangle$$

Метод Остроградского. Если знаменатель правильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ имеет кратные корни, особенно комплексные, то интегрирование такой дроби обычно связано с громоздкими выкладками. В этом случае целесообразно пользоваться следующей *формулой Остроградского*:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx.$$

В этой формуле $Q_2(x)$ — многочлен, имеющий те же корни, что и многочлен $Q(x)$, но все корни многочлена $Q_2(x)$ — простые (однократные). Многочлен $Q_1(x)$ есть частное от деления многочлена $Q(x)$ на многочлен $Q_2(x)$, т. е. $Q_1(x)=Q(x)/Q_2(x)$, а $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — это некоторые многочлены, степени которых соответственно меньше степеней многочленов $Q_1(x)$) и $Q_2(x)$. Если корни $Q(x)$ известны, то тем самым известны многочлены $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Для отыскания многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ их записывают с неопределенными коэффициентами, которые находят после дифференцирования обеих частей формулы Остроградского. Если $P_2\not\equiv 0$, то, так как корни $Q_2(x)$ простые, интеграл $\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx$ есть функция трансцендентная (она равна сумме слагаемых вида

$$a \operatorname{arctg}(\alpha x + \beta) + b \ln(\gamma x + \delta) + C, \quad a^2 + b^2 \neq 0).$$

В связи с этим второе слагаемое в формуле Остроградского называют *трансцендентной частью* интеграла $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$, а первое слагаемое — его *рациональной частью*. Метод Остроградского позволяет найти алгебраическую часть интеграла от правильной рациональной дроби чисто алгебраическим путем, т. е. не прибегая к интегрированию каких-либо функций.

Пример 6. Найти методом Остроградского интеграл примера 5.

△ В этом случае многочлен $Q(x) = (x-1)^2(x^2+1)^2$, поэтому

$$Q_2(x) = (x-1)(x^2+1), \quad Q_1(x) = \frac{Q(x)}{Q_2(x)} = (x-1)(x^2+1).$$

Следовательно, существуют многочлены второй степени:

$$P_1(x) = Ax^2 + Bx + C \quad \text{и} \quad P_2(x) = ax^2 + bx + c,$$

для которых верно равенство

$$\int \frac{4x^2 - 8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\, dx = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x-1)(x^2+1)} + \int \frac{ax^2 + bx + c}{(x-1)(x^2+1)}\, dx.$$

Рациональную дробь $\frac{ax^2 + bx + c}{(x-1)(x^2+1)}$ удобно сразу представить в виде суммы элементарных дробей и переписать формулу Остроградского следующим образом:

$$\int \frac{4x^2 - 8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\, dx = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x-1)(x^2+1)} + \int \left(\frac{D}{x-1} + \frac{Ex + F}{x^2+1} \right) dx.$$

Дифференцируя обе части этого равенства, получаем

$$\frac{4x^2 - 8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{(x-1)(x^2+1)(2Ax+B) - (Ax^2+Bx+C)(3x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x^2+1)^2} + \frac{D}{x-1} + \frac{Ex+F}{x^2+1},$$

откуда вытекает равенство многочленов:

$$4x^2 - 8x = -Ax^4 - 2Bx^3 + (A + B - 3C)x^2 + 2(C - A)x -$$

$$- B - C + D(x-1)(x^2+1)^2 + (Ex + F)(x-1)^2(x^2+1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему

$$\begin{array}{c|l} x^5 & 0 = D + E, \\ x^4 & 0 = -A - D + F - 2E, \\ x^3 & 0 = -2B + 2D + 2E - 2F, \\ x^2 & 4 = A + B - 3C - 2D - 2E + 2F, \\ x^1 & -8 = -2A + 2C + D + E - 2F, \\ x^0 & 0 = -B - C - D + F. \end{array}$$

Решая эту систему, находим $A = 3$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 2$, $E = -2$, $F = 1$. Итак,

$$\int \frac{4x^2 - 8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx =$$
$$= \frac{3x^2 - x}{(x-1)(x^2+1)} + 2\ln|x-1| - \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C. \quad \blacktriangle$$

Замечание. Рассмотренный в этом параграфе метод интегрирования рациональных дробей является общим: с его помощью можно вычислить неопределенный интеграл от любой рациональной дроби при условии, что известны или могут быть найдены все корни ее знаменателя. Следует иметь в виду, что во многих частных случаях для интегрирования рациональной дроби нет необходимости прибегать к общему методу, так как другие приемы (преобразование подынтегрального выражения, подстановка, интегрирование по частям) быстрее ведут к цели.

Найти интегралы (2.1—2.9):

2.1. 1) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$. 2) $\int \frac{x\,dx}{2x^2 - 3x - 2}$.

3) $\int \frac{2x+11}{x^2+6x+13}\,dx$. 4) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx$.

5) $\int \frac{3x^3-5x+8}{x^2-4}\,dx$. 6) $\int \frac{x^2\,dx}{x^2-6x+10}$.

2.2. 1) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$. 2) $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$.

3) $\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}\,dx$. 4) $\int \frac{(5x-3)\,dx}{(x-2)(3x^2+2x-1)}$.

5) $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$. 6) $\int \frac{(5x-14)\,dx}{x^3-x^2-4x+4}$.

7) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$. 8) $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2-1)(x^2-4)}$.

9) $\int \frac{dx}{x^4-13x^2+36}$. 10) $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}\,dx$.

2.3. 1) $\int \frac{x^5 - 2x^2 + 3}{x^2 - 4x + 4}\,dx$. 2) $\int \frac{(x^2+2)\,dx}{(x-1)(x+1)^2}$.

3) $\int \frac{dx}{x^3 - x^2 - x + 1}$. 4) $\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^3}\,dx$.

5) $\int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx$. 6) $\int \frac{x^5\,dx}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}$.

7) $\int \frac{(x-1)\,dx}{(x-2)(x^2+x)^2}$. 8) $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}$.

9) $\int \frac{x^2\,dx}{(1-x^2)^3}$. 10) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

11) $\int \frac{x^5 - x + 1}{x^6 - x^5}\,dx$. 12) $\int \frac{dx}{x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1}$.

2.4. 1) $\int \frac{dx}{(x+2)(4x^2+8x+7)}$. 2) $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

3) $\int \frac{x^2 - 2x - 5}{x^3 - x^2 + 2x - 2}\,dx$. 4) $\int \frac{x^5\,dx}{x^3+2}$.

5) $\int \frac{x^3 + x^2 + x + 3}{(x+3)(x^2+x+1)}\,dx$. 6) $\int \frac{x(x^2+1)\,dx}{(x+1)(x^2+2x+2)}$.

7) $\int \frac{2x^4 - 2x^3 - x^2 + 2}{2x^3 - 4x^2 + 3x - 1}\,dx$. 8) $\int \frac{x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 10x - 10}{x^3 - 3x^2 + x + 5}\,dx$.

2.5. 1) $\int \frac{x^3 + x + 1}{x^4 - 1}\,dx$. 2) $\int \frac{x^4\,dx}{1 - x^4}$.

3) $\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)(x^2-4x+3)}$.

4) $\int \frac{(21x^2 - 13x + 18)\,dx}{(3x^2 - 4x + 6)(x^2 - 2x - 3)}$.

5) $\int \frac{dx}{1 - x + x^3 - x^4}$. 6) $\int \frac{(7x^2-1)\,dx}{x^4 + 4x^2 - 5}$.

2.6. 1) $\int \frac{2x^3 + x^2 + 5x + 1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}\,dx$. 2) $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

3) $\int \frac{x^3 - 6}{x^4 + 6x^2 + 8}\,dx$. 4) $\int \frac{(3x^2-2)\,dx}{9x^4 - 13x^2 + 4}$.

5) $\int \frac{dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}$. 6) $\int \frac{dx}{x^6+1}$.

7) $\int \frac{dx}{x^{2n}+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

2.7. 1) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$. 2) $\int \frac{(3x^2-2)\,x\,dx}{(x+2)^2(3x^2-2x+4)}$.

3) $\int \frac{x^2\,dx}{(x+1)(x^3+1)}$. 4) $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{x^4 + x^3 + 2x^2}\,dx$.

5) $\int \frac{dx}{x^4 - x^3 - x + 1}$. 6) $\int \frac{3x^2 + x + 3}{(x-1)^3(x^2+1)}\,dx$.

7) $\int \frac{(x^4+1)\,dx}{(x-1)(x^4-1)}$. 8) $\int \frac{(3x^2+2x+10)\,dx}{(x^3+x^2)(2x^2-4x+5)}$.

9) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)}$. 10) $\int \frac{dx}{x^8+x^6}$.

2.8. 1) $\int \frac{x^3+x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$. 2) $\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}\,dx$.

3) $\int \frac{(x^7+2)\,dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$.

4) $\int \frac{(2x^2+2x+13)\,dx}{(x^2+1)(x^3-2x^2+x-2)}$.

5) $\int \frac{x^4+2x^2+4}{(x^2+1)^3}\,dx$. 6) $\int \frac{x^4-2x^3+12x^2-20x+10}{(x-1)(x^2-2x+2)^3}\,dx$.

2.9. 1) $\int \frac{x(x-2)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$. 2) $\int \frac{dx}{x^6+2x^4+x^2}$.

3) $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$. 4) $\int \frac{(3x^4+4)\,dx}{x^2(x^2+1)^3}$.

5) $\int \frac{x^9\,dx}{(x^4-1)^2}$. 6) $\int \frac{x(2x^2+2x-1)\,dx}{(x-1)^2(x^2+x+1)^3}$.

7) $\int \frac{x^6-x^5+x^4+2x^3+3x^2+3x+3}{(x+1)^2(x^2+x+1)^3}\,dx$.

8) $\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$. 9) $\int \frac{(1-4x^5)\,dx}{(1+x+x^5)^2}$.

10) $\int \frac{dx}{x^{11}+2x^6+x}$.

2.10. Найти рациональную часть интеграла:

1) $\int \frac{(x^6+1)\,dx}{(x^2+x+1)^2}$. 2) $\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}$.

3) $\int \frac{dx}{(x^2+2x+10)^3}$. 4) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$.

5) $\int \frac{dx}{x^2(2x^2-3)^3}$. 6) $\int \frac{dx}{(x^3+x+1)^3}$.

2.11. Найти условие, при котором первообразная данной рациональной функции является функцией рациональной:

1) $\frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}$, $P_n(x)$ — многочлен степени n.

2) $\frac{ax^2+bx+c}{x^5-2x^4+x^3}$. 3) $\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{(ax^2+bx+c)^2}$, $a \neq 0$, $b^2 \neq 4ac$.

§ 3. Интегрирование иррациональных функций

Некоторые часто встречающиеся интегралы от иррациональных функций можно вычислить методом рационализации подынтегральной функции. Этот метод заключается в отыскании такой подстановки, которая преобразует интеграл от иррациональной функции в интеграл от функции рациональной. В этом параграфе указываются подстановки, с помощью которых такое сведение удается осуществить для некоторых важнейших классов иррациональных функций. Через $R(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ будем обозначать функцию, рациональную относительно каждой из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Например,

$$\frac{x^2+\sqrt{x}}{1+\sqrt{1+x^3}} = R\left(x;\ \sqrt{x};\ \sqrt{1+x^3}\right),$$

так как иррациональная функция $\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{1+\sqrt{1+x^3}}$ является рациональной относительно переменных $x_1 = x$, $x_2 = \sqrt{x}$, $x_3 = \sqrt{1+x^3}$.

1. Интегралы вида

$$\int R\left(x;\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1};\ \ldots;\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n}\right) dx, \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{Q}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$, подстановкой

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m,$$

m — общий знаменатель рациональных чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$, приводятся к интегралу от рациональной функции.

Пример 1. Найти

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}\, dx.$$

△ Подынтегральная функция является рациональной относительно переменных $x_1 = x$, $x_2 = x^{1/3}$, $x_3 = x^{1/6}$. Данный интеграл имеет вид (1), причем $n = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1/3$, $p_3 = 1/6$, $a = d = 1$, $b = c = 0$. Для рациональных чисел $p_1 = 1$, $p_2 = 1/3$, $p_3 = 1/6$ общий знаменатель $m = 6$. Следовательно, нужно применить подстановку $x = t^6$. Применяя эту подстановку, получаем

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}\, dx = 6\int \frac{t^6+t^4+t}{t^6(1+t^2)}\, t^5\, dt = 6\int \frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}\, dt =$$

$$= 6\int t^3\, dt + 6\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C. \quad ▲$$

Пример 2. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}$.

△ С помощью элементарных преобразований интеграл приводится к виду (1):

$$\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,\frac{dx}{(2-x)^2}.$$

Подынтегральная функция является рациональной относительно переменных

$$x_1 = x, \quad x_2 = \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{1/3}.$$

Следовательно, в данном случае $n = 1$, $p_1 = 1/3$, $a = -1$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 2$. Поэтому полагаем

$$\frac{2-x}{2+x} = t^3,$$

откуда находим

$$x = 2\,\frac{1-t^3}{1+t^3}, \quad dx = -12\,\frac{t^2\,dt}{(1+t^3)^2}, \quad \frac{1}{2-x} = \frac{1+t^3}{4t^3}.$$

Таким образом,

$$\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,\frac{dx}{(2-x)^2} = -12\int \frac{(t^3+1)^2 t^3\,dt}{16t^6\,(t^3+1)^2} = -\frac{3}{4}\int \frac{dt}{t^3} =$$

$$= \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C. \ ▲$$

2. Интегралы вида

$$\int R\left(x;\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx, \quad a \neq 0, \quad b^2-4ac \neq 0, \qquad (2)$$

могут быть сведены к интегралам от рациональных функций *подстановками Эйлера*:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x \pm t, \quad \text{если } a > 0;$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}, \quad \text{если } c > 0;$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm(x-x_1)\,t,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm(x-x_2)\,t,$$

где x_1 и x_2 — различные действительные корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c. (Знаки в правых частях равенств можно брать в любых комбинациях.)

Пример 3. Найти $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$.

△ Воспользуемся одной из подстановок Эйлера. Положим

$$\sqrt{1+x+x^2} = tx+1,$$

тогда $1+x+x^2 = t^2x^2+2tx+1$, откуда

$$x = \frac{2t-1}{1-t^2}, \quad dx = 2\,\frac{1-t+t^2}{(1-t^2)^2}\,dt.$$

Далее, находим

$$\sqrt{1+x+x^2}=\frac{1-t+t^2}{1-t^2}, \quad t=\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx=\int \frac{-2t\,dt}{1-t^2}=\ln|1-t^2|+C=$$
$$=\ln\left|1-\left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right)^2\right|+C. \quad \blacktriangle$$

Подстановки Эйлера часто приводят к громоздким выкладкам. Укажем поэтому другой способ вычисления интегралов (2). Подынтегральную функцию $R\left(x;\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ алгебраическими преобразованиями всегда можно представить в виде суммы

$$\frac{R_1(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+R_2(x),$$

где $R_1(x)$ и $R_2(x)$ — рациональные дроби. Тем самым интеграл (2) можно свести к интегралу от рациональной дроби $R_2(x)$ и к интегралу вида

$$\int R_1(x)\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Представив рациональную дробь $R_1(x)$ в виде суммы многочлена $P_n(x)$ и элементарных дробей приходим к интегралам следующих трех видов:

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}; \tag{3}$$

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}; \tag{4}$$

$$\int \frac{(Mx+N)\,dx}{\left(x^2+px+q\right)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad p^2-4q<0. \tag{5}$$

Для вычисления интеграла (3) удобно пользоваться формулой

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{6}$$

где $Q(x)$ — многочлен степени не выше чем $n-1$, а λ — некоторое число. Дифференцируя обе части формулы (6) и затем умножая на $\sqrt{ax^2+bx+c}$, получаем равенство многочленов, из которого находим λ и коэффициенты многочлена $Q(x)$. Интеграл в правой части формулы (6) линейной подстановкой сводится к основным интегралам 14—16, § 1 и, следовательно, является трансцендентной функцией.

Формула (6) позволяет чисто алгебраическим путем найти алгебраическую часть $Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}$ интеграла (3).

Пример 4. Найти $\int \frac{12x^3+16x^2+9x+2}{\sqrt{4x^2+4x+2}}\,dx$.

△ Воспользуемся формулой (6), которая в данном случае будет иметь вид

$$\int \frac{12x^3+16x^2+9x+2}{\sqrt{4x^2+4x+2}}\,dx=(Ax^2+Bx+C)\sqrt{4x^2+4x+2}+\\+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+2}}.$$

Для нахождения коэффициентов A, B, C и числа λ продифференцируем обе части этого равенства. Тогда получим

$$\frac{12x^3+16x^2+9x+2}{\sqrt{4x^2+4x+2}}=(2Ax+B)\sqrt{4x^2+4x+2}+\\+(Ax^2+Bx+C)\frac{4x+2}{\sqrt{4x^2+4x+2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{4x^2+4x+2}}.$$

После умножения на $\sqrt{4x^2+4x+2}$ получим равенство многочленов:

$$12x^3+16x^2+9x+2=\\=(2Ax+B)(4x^2+4x+2)+(Ax^2+Bx+C)(4x+2)+\lambda.$$

Из равенства многочленов следует равенство коэффициентов при одинаковых степенях x:

$$12A=12,\quad 10A+8B=16,\quad 4A+6B+4C=9,\\ 2B+2C+\lambda=2.$$

Решив эту треугольную систему уравнений, найдем

$$A=1,\quad B=3/4,\quad C=1/8,\quad \lambda=1/4.$$

Следовательно,

$$\int\frac{12x^3+16x^2+9x+2}{\sqrt{4x^2+4x+2}}\,dx=\\=\left(x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}\right)\sqrt{4x^2+4x+2}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+2}}.$$

Последний интеграл линейной подстановкой $t=2x+1$ сводится к основному интегралу 15 § 1. Окончательно получим

$$\int\frac{12x^3+16x^2+9x+2}{\sqrt{4x^2+4x+2}}\,dx=\left(x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}\right)\sqrt{4x^2+4x+2}+\\+\frac{1}{8}\ln\left(2x+1+\sqrt{4x^2+4x+2}\right)+C.\ \blacktriangle$$

Интеграл (4) подстановкой $t=\frac{1}{x-\alpha}$ приводится к интегралу (3).

Интеграл (5) в случае, когда квадратные трехчлены

$$ax^2 + bx + c, \quad x^2 + px + q$$

совпадают или отличаются только множителем, следует представить в виде линейной комбинации двух интегралов

$$\int \frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^{(2m+1)/2}} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{(2m+1)/2}}.$$

Первый интеграл берется подстановкой $u = x^2 + px + q$, второй *подстановкой Абеля*

$$t = \left(\sqrt{x^2+px+q}\right)' = \frac{2x+p}{2\sqrt{x^2+px+q}}$$

сводится к интегралу от многочлена.

В общем случае, если $p \neq b/a$, применяется подстановка

$$x = \frac{\alpha t + \beta}{t+1},$$

где α и β подбираются так, чтобы в квадратных трехчленах $x^2 + px + q$ и $ax^2 + bx + c$ исчезли члены, содержащие t в первой степени. При таком выборе чисел α и β интеграл (5) сведется к интегралу вида

$$\int \frac{P(t)\,dt}{(t^2+\lambda)^m \sqrt{st^2+r}},$$

где $P(t)$ — многочлен степени $2m-1$ и число $\lambda > 0$. (Если $p = b/a$, то уничтожение членов первой степени достигается проще: линейной заменой $x = t - \frac{p}{2}$.)

Разложив правильную рациональную дробь

$$\frac{P(t)}{(t^2+\lambda)^m}$$

на элементарные дроби, придем к интегралам

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+\lambda)^k \sqrt{st^2+r}}, \qquad \int \frac{dt}{(t^2+\lambda)^k \sqrt{st^2+r}}.$$

Первый интеграл вычисляется подстановкой $u^2 = st^2 + r$, второй — подстановкой Абеля

$$v = \left(\sqrt{st^2+r}\right)' = \frac{st}{\sqrt{st^2+r}}.$$

Пример 5. Найти $\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$.

△ Положим

$$x = \frac{\alpha t + \beta}{t+1},$$

тогда

$$x^2+2=\frac{(\alpha t+\beta)^2+2(t+1)^2}{(t+1)^2}=\frac{(\alpha^2+2)t^2+\beta^2+2}{(t+1)^2},$$

$$2x^2-2x+5=\frac{2(\alpha t+\beta)^2-2(\alpha t+\beta)(t+1)+5(t+1)^2}{(t+1)^2}=$$

$$=\frac{(2\alpha^2-2\alpha+5)t^2+2\beta^2-2\beta+5}{(t+1)^2},$$

где

$$\begin{cases} 2\alpha\beta+4=0, \\ 4\alpha\beta-2\alpha-2\beta+10=0. \end{cases}$$

Получившаяся система имеет два решения: (2; —1) и (—1; 2). Возьмем, например, $\alpha=-1$, $\beta=2$, тогда

$$x=\frac{2-t}{1+t},\qquad t=\frac{2-x}{1+x},\qquad dx=\frac{-3\,dt}{(1+t)^2},$$

$$x^2+2=\frac{3t^2+6}{(t+1)^2},\qquad 2x^2-2x+5=\frac{9t^2+9}{(t+1)^2}.$$

Заменив в интеграле переменную x на переменную t, будем иметь

$$\int\frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}=-\frac{1}{3}\int\frac{|t+1|\,dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}.$$

При $t+1>0$, т. е. при $x>-1$, получим

$$-\frac{1}{3}\int\frac{t\,dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}.$$

Первый интеграл подстановкой $u^2=t^2+1$ приводится к интегралу

$$-\frac{1}{3}\int\frac{du}{u^2+1}.$$

Для вычисления второго применим подстановку Абеля

$$v=\left(\sqrt{t^2+1}\right)'=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}},$$

откуда

$$v^2(t^2+1)=t^2,\qquad t^2+2=\frac{2-v^2}{1-v^2}.$$

Дифференцируя равенство $v\sqrt{t^2+1}=t$, находим

$$dv\sqrt{t^2+1}+v^2\,dt=dt,\qquad \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{dv}{1-v^2},$$

и, следовательно, второй интеграл приводится к виду

$$-\frac{1}{3}\int\frac{dv}{2-v^2}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}} = -\frac{1}{3}\operatorname{arctg} u - \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+v}{\sqrt{2}-v} + C.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}} =$$

$$= -\frac{1}{3}\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1} - \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+2-x}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-2+x} + C.$$

При $x < -1$ аналогично можно получить тот же результат. ▲

Для вычисления интегралов вида (2) часто удобно использовать тригонометрические или гиперболические подстановки. Для этого, предварительно выделив полный квадрат в трехчлене $ax^2 + bx + c$ и сделав соответствующую линейную замену, приводят интеграл (2) к одному из следующих видов:

$$\int R\left(t;\ \sqrt{p^2-t^2}\right) dt, \qquad \int R\left(t;\ \sqrt{t^2-p^2}\right) dt, \qquad \int R\left(t;\ \sqrt{t^2+p^2}\right) dt.$$

К первому интегралу применяют подстановки

$$t = p\sin u, \quad t = p\cos u, \quad t = p\operatorname{th} u,$$

ко второму — подстановки

$$t = \frac{p}{\cos u}, \qquad t = p\operatorname{ch} u,$$

и к третьему — подстановки

$$t = p\operatorname{tg} u, \quad t = p\operatorname{sh} u.$$

Пример 6. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{(2x+1)^2\sqrt{4x^2+4x+5}}.$$

△ Положив $t = 2x+1$, а затем $t = 2\operatorname{sh} u$, получим

$$\int \frac{dx}{(2x+1)^2\sqrt{4x^2+4x+5}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+4}} = \frac{1}{8}\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} =$$

$$= -\frac{1}{8}\operatorname{cth} u + C = -\frac{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}}{8\operatorname{sh} u} + C = -\frac{\sqrt{t^2+4}}{8t} + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{4x^2+4x+5}}{8(2x+1)} + C. \ ▲$$

3. Интегралы вида

$$\int x^m (ax^n + b)^p \, dx, \tag{7}$$

где a, b — действительные, m, n, p — рациональные числа, причем $a \neq 0$, $b \neq 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$, называют *интегралами от дифференциального бинома*. Эти интегралы сводятся к интегралам от рациональных функций в следующих трех случаях:

$$\left.\begin{array}{ll} 1)\ p & \text{— целое число,} \\ 2)\ \dfrac{m+1}{n} & \text{— целое число,} \\ 3)\ \dfrac{m+1}{n}+p & \text{— целое число.} \end{array}\right\} \qquad (8)$$

В первом случае применяется подстановка

$$x = t^N,$$

где N — общий знаменатель дробей m и n; во втором и в третьем случаях — соответственно подстановки

$$ax^n + b = t^s \quad \text{и} \quad a + bx^{-n} = t^s,$$

где s — знаменатель дроби p.

Если ни одно из условий (8) не выполняется, то интеграл (7) не может быть выражен через элементарные функции (*теорема Чебышёва*).

Пример 7. Найти

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

△ Этот интеграл имеет вид (7), причем $a = b = 1$, $m = 0$, $n = 4$, $p = -1/4$. Так как

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0,$$

то, применяя подстановку $1 + x^{-4} = t^4$, находим

$$t = (1 + x^{-4})^{1/4}, \qquad x = (t^4 - 1)^{-1/4},$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} = t^{-1}(t^4 - 1)^{1/4}, \qquad dx = -t^3(t^4 - 1)^{-5/4}\,dt.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int \frac{t^2\,dt}{t^4 - 1} = -\frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{t^2-1} + \int \frac{dt}{t^2+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C. \ ▲$$

4. Интегралы вида

$$\int R\left(x;\ \sqrt{P_n(x)}\right) dx, \qquad (9)$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени $n > 2$, как правило, не выражаются через элементарные функции и в этом случае при $n = 3$ и $n = 4$ называются *эллиптическими*, а при $n > 4$ *гиперэллипти-*

ческими. В том случае, когда интеграл (9) при $n=3$ и $n=4$ является элементарной функцией, он называется *псевдоэллиптическим* (см. задачи **3.22**). Эллиптические интегралы играют большую роль в математике; в частности, длина дуги эллипса вычисляется с помощью эллиптического интеграла (пример 9 § 7).

Каждый эллиптический интеграл может быть выражен через элементарные функции и через стандартные эллиптические интегралы:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{10}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{11}$$

$$\int \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad k\in(0;\ 1). \tag{12}$$

Подстановкой $x=\sin\varphi$ эти интегралы сводятся к линейным комбинациям интегралов:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{13}$$

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \tag{14}$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad k\in(0;\ 1), \tag{15}$$

которые называются соответственно *эллиптическими интегралами первого, второго, третьего рода в форме Лежандра*.

Через $F(\varphi,\ k)$ и $E(\varphi,\ k)$ обозначают соответственно ту из первообразных (13) и (14), которая при $\varphi=0$ обращается в нуль (см. задачи **3.27**).

Найти интегралы (**3.1—3.2**):

3.1. 1) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}$. 2) $\int \frac{1-2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}\,dx$.

3) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$. 4) $\int \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\,dx$.

5) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$. 6) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(4-x)}}$.

3.2. 1) $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$. 2) $\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$.

3) $\int \sqrt[4]{x-2}\,x\,dx$. 4) $\int \frac{\sqrt[3]{x+2}}{x+\sqrt[3]{x+2}}\,x\,dx$.

5) $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx.$ 6) $\int \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}\,\frac{dx}{x^3}.$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}}.$ 8) $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}},\ a\neq b.$

3.3. Доказать, что интеграл

$$\int R\left(x;\ \sqrt[n]{(x-a)^p(x-b)^q}\right)dx,$$

где R — рациональная функция переменных x и $y = \sqrt[n]{(x-a)^p(x-b)^q}$, $p,\ q\in\mathbb{Z}$, $a,\ b\in\mathbb{R}$, при условии $(p+q)/n\in\mathbb{Z}$ является элементарной функцией.

Найти интегралы (**3.4**—**3.5**):

3.4. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}.$ 2) $\int \frac{\sqrt[6]{x}\,dx}{1+\sqrt[3]{x}}.$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4x^2+4x+1}-\sqrt{2x+1}}.$ 4) $\int \frac{dx}{(\sqrt[6]{x}+\sqrt[12]{x^5})^3}.$

5) $\int \frac{dx}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}.$ 6) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}.$

3.5. 1) $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx.$ 2) $\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx.$

3) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$ 4) $\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx.$

5) $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx.$ 6) $\int \sqrt{3-4x+4x^2}\,dx.$

7) $\int x\sqrt{x^2+2x+2}\,dx.$ 8) $\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx.$

3.6. При каком условии интеграл

$$\int \frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,\quad a\neq 0,$$

является алгебраической функцией?

3.7. Для интеграла

$$J_n=\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\qquad n\in\mathbb{N},\quad n>1,$$

доказать рекуррентную формулу

$$J_n=\frac{1}{na}\left(x^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c}-\frac{b}{2}(2n-1)J_{n-1}-c(n-1)J_{n-2}\right).$$

Найти интегралы (**3.8—3.14**):

3.8. 1) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$. 2) $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

3) $\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$. 4) $\int \frac{x^8\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

3.9. 1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$, $x>0$.

2) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$, $x>-1$.

3) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+2x+2x^2}}$, $x>0$.

4) $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}}$, $x>1+\sqrt{2}$.

3.10. 1) $\int \frac{dx}{(x+4x+7)^{3/2}}$. 2) $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^{5/2}}$.

3) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{7/2}}$. 4) $\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+x+1)^{3/2}}$.

3.11. 1) $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{3x^2+1}}$. 2) $\int \frac{x\,dx}{(2x^2+1)\sqrt{3x^2+5}}$.

3.12. 1) $\int \frac{(2x+3)\,dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$. 2) $\int \frac{(x+3)\,dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

3) $\int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

4) $\int \frac{x\,dx}{(3x^2+2x+3)\sqrt{2x^2-x+2}}$.

3.13. 1) $\int \frac{(3x+2)\,dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}$, $x>-1$.

2) $\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}\,dx$, $x>0$.

3) $\int \frac{dx}{(x^2+x-2)\sqrt{x^2+2x+3}}$, $x>1$.

4) $\int \frac{dx}{(x^3-x)\sqrt{x^2+x+4}}$, $x>1$.

5) $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}\,dx$, $x>-1$.

6) $\int \frac{x^3\,dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$. 7) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}\,dx$.

8) $\int \frac{x^2\,dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$. 9) $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$.

3.14. 1) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$. 2) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

3) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$. 4) $\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x^2+x})^2}$.

5) $\int \left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right)^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$.

6) $\int \frac{\sqrt{x^2+3x+2}-x}{\sqrt{x^2+3x+2}+x}\,dx$.

3.15. Доказать, что вычисление интеграла

$$\int R\left(x;\ \sqrt{ax+b};\ \sqrt{cx+d}\right)dx,$$

где $R(x;\ u;\ v)$ — рациональная функция переменных x, u, v, сводится к вычислению интеграла

$$\int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция.

Найти интегралы (**3.16—3.19**):

3.16. 1) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$. 2) $\int \frac{dx}{(\sqrt{2x-3}+2x-3)\sqrt{4-2x}}$.

3.17. 1) $\int x^{-1/3}(1-x^{1/6})^{-1}\,dx$. 2) $\int x^{1/2}(1+x^{1/3})^{-2}\,dx$.

3) $\int x^{-2/3}(1+x^{1/3})^{-3}\,dx$. 4) $\int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{-10}\,dx$.

3.18. 1) $\int x^2\sqrt[3]{(x+1)^2}\,dx$. 2) $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$.

3) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$. 4) $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}$.

5) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$. 6 $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{x^6+1}}$.

3.19. 1) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(2+x^3)^5}}$. 2) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$.

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$. 4) $\int \sqrt[3]{x-x^3}\,dx$.

3.20. При каких рациональных значениях параметра q интеграл $\int\sqrt{1+x^q}\,dx$ является элементарной функцией?

3.21. Для интеграла

$$J_{m,\,p}=\int x^m(ax^n+b)^p\,dx$$

доказать формулу

$$a(m+1+np)J_{m,\,p}=x^{m+1-n}(ax^n+b)^{p+1}-b(m+1-n)J_{m-n,\,p}$$

и с ее помощью найти интеграл

$$\int\frac{x^9\,dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

3.22. Найти псевдоэллиптические интегралы:

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^7\sqrt{x^4+1}}$. 2) $\displaystyle\int\frac{(x^2-1)\,dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}$.

3) $\displaystyle\int\frac{(x-1)\,dx}{(x+1)\sqrt{x^3+x^2+x}}$. 4) $\displaystyle\int\frac{(x^2+1)\,dx}{x\sqrt{x^4+3x^3-2x^2-3x+1}}$, $x>1$.

3.23. Найти замену переменной, с помощью которой интеграл $\int R\left(x;\ \sqrt{P_3(x)}\right)dx$ можно преобразовать в интеграл

$$\int R_1\left(t;\ \sqrt{P_4(t)}\right)dt;$$

$R(x;\ y)$, $R_1(t;\ u)$ — рациональные функции, $P_3(x)$, $P_4(x)$ — многочлены третьей и четвертой степени.

3.24. Доказать, что с помощью подстановки вида $x=\dfrac{\alpha t+\beta}{t+1}$ интеграл $\int R\left(x;\ \sqrt{P_4(x)}\right)dx$ может быть преобразован в интеграл

$$\int R_1\left(t;\ \sqrt{A(1+\lambda_1t^2)(1+\lambda_2t^2)}\right)dt.$$

3.25. Доказать, что любой интеграл вида $\int R\left(x;\ \sqrt{P_4(x)}\right)dx$ может быть выражен через элементарные функции и интеграл

$$\int\frac{R_1(t^2)\,dt}{\sqrt{A(1+\lambda_1t^2)(1+\lambda_2t^2)}},$$

где $R_1(u)$ — рациональная функция.

3.26. Доказать, что интеграл

$$\int\frac{R(x^2)\,dx}{\sqrt{A(1+\lambda_1x^2)(1+\lambda_2x^2)}},\qquad A=\pm1,\qquad |\lambda_1|>|\lambda_2|>0,$$

с помощью одной из следующих подстановок:

$$\sqrt{|\lambda_1|}\,x=t,\qquad \sqrt{|\lambda_1|}\,x=\sqrt{1-t^2},\qquad \sqrt{|\lambda_1|}\,x=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$\sqrt{|\lambda_1|}\,x=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}},\qquad \sqrt{|\lambda_2|}\,x=\sqrt{1+\frac{|\lambda_2|-|\lambda_1|}{|\lambda_1|}t^2},$$

приводится к виду

$$\int \frac{R_1(t^2)\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \qquad k \in (0;\ 1).$$

3.27. Выразить через элементарные функции и функции $F(\varphi;\ k)$ и $E(\varphi;\ k)$ эллиптические интегралы (см. (13), (14)):

1) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{36x^4-13x^2+1}}$. 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2-8x^4}}$.

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+29x^2+100x^4}}$. 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{144x^4+7x^2-1}}$.

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-9x^4+10x^2-1}}$. 6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

§ 4. Интегрирование трансцендентных функций

1. Интегралы вида

$$\int R(\sin x;\ \cos x)\,dx, \tag{1}$$

где $R(u;\ v)$ — рациональная функция переменных u и v, всегда можно свести к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки

$$t = \operatorname{tg}(x/2), \qquad x \in (-\pi;\ \pi). \tag{2}$$

Эта подстановка преобразует интеграл (1) к виду

$$2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2};\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}. \tag{3}$$

Подстановка (2) часто приводит к громоздким вычислениям, поэтому прибегать к ней следует только тогда, когда не видно других путей к вычислению интеграла.

Если подынтегральная функция обладает одним из свойств:

1) $R(-\sin x;\ \cos x) = -R(\sin x;\ \cos x)$,

2) $R(\sin x;\ -\cos x) = -R(\sin x;\ \cos x)$,

3) $R(-\sin x;\ -\cos x) = R(\sin x;\ \cos x)$,

то для вычисления интеграла удобнее использовать, соответственно, подстановки

1) $t = \cos x, \qquad x \in (-\pi/2;\ \pi/2)$,

2) $t = \sin x, \qquad x \in (0;\ \pi)$,

3) $t = \operatorname{tg} x, \qquad x \in (-\pi/2;\ \pi/2)$.

В некоторых частных случаях вычисление интеграла (1) достигается другими приемами.

2. Интегралы вида

$$\int R(\operatorname{sh} x;\ \operatorname{ch} x)\,dx, \tag{4}$$

где $R(u;\ v)$ — рациональная функция переменных u и v, всегда можно свести к интегралам от рациональных функций

$$2\int R\left(\frac{2t}{1-t^2};\ \frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{dt}{1-t^2}$$

с помощью гиперболической подстановки $t=\operatorname{th}(x/2)$. Иногда удобнее использовать подстановки $t=\operatorname{sh}x$, $t=\operatorname{ch}x$, $t=\operatorname{th}x$ или другие методы (см. примеры 3, 6, 7).

3. Интегралы

$$\int \sin^p x\cos^q x\,dx,\qquad \int \operatorname{sh}^p x\operatorname{ch}^q x\,dx,\qquad p,\ q\in\mathbb{Q} \tag{5}$$

подстановками $t=\sin x$ или $t=\cos x$ и, соответственно, $t=\operatorname{sh}x$ или $t=\operatorname{ch}x$ всегда можно свести к интегралам от дифференциального бинома (§ 3, п. 3).

4. Интегралы вида

$$\int P_n(x)f(x)\,dx, \tag{6}$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n, а $f(x)$ — одна из следующих функций: $e^{\alpha x}$, $\sin\alpha x$, $\cos\alpha x$, $\ln x$, $\arcsin\alpha x$, $\arccos\alpha x$, $\operatorname{arctg}\alpha x$, $\operatorname{arcctg}\alpha x$, $\alpha\in\mathbb{R}$, вычисляются с помощью, вообще говоря, многократного интегрирования по частям. Методами интегрирования по частям и замены переменной интегрируются и некоторые другие трансцендентные функции.

5. Интегралы от трансцендентных функций часто не выражаются через элементарные функции. К таким интегралам относятся, например, следующие часто встречающиеся интегралы:

$$\int\frac{\sin x}{x}\,dx,\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-x^2/2}\,dx,\qquad x\in\mathbb{R}, \tag{7}$$

$$\int\frac{dx}{\ln x},\qquad x\in(0;\ 1). \tag{8}$$

Первообразные (7), обращающиеся при $x=0$ в нуль, обозначаются соответственно $\operatorname{Si}(x)$ (*интегральный синус*) и $\Phi_0(x)$ (*интеграл вероятностей*). Первообразная (8), стремящаяся к нулю при $x\to+0$, обозначается $\operatorname{li}(x)$ и называется *интегральным логарифмом*.

Пример 1. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x+5}$.

△ Положим $t=\operatorname{tg}(x/2)$, $-\pi<x<\pi$, тогда

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5} = 2\int \frac{dt}{6t + 4(1-t^2) + 5(1+t^2)} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2 + 6t + 9} = 2\int (t+3)^{-2}\,dt = -\frac{2}{t+3} + C =$$

$$= -\frac{2}{3 + \operatorname{tg}(x/2)} + C. \blacktriangle$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{2\sin x + 3\cos x}{\sin^2 x\cos x + 9\cos^3 x}\,dx$.

△ Подынтегральная функция обладает свойством

$$R(-\sin x;\ -\cos x) = R(\sin x;\ \cos x).$$

Поэтому применяем подстановку $t = \operatorname{tg} x$, $(-\pi/2 < x < \pi/2)$. Разделив числитель и знаменатель подынтегральной функции на $\cos^3 x$, получим

$$\int \frac{2\sin x + 3\cos x}{\sin^2 x\cos x + 9\cos^3 x}\,dx = \int \frac{2\operatorname{tg} x + 3}{\operatorname{tg}^2 x + 9}\,d\operatorname{tg} x = \int \frac{2t+3}{t^2+9}\,dt =$$

$$= \ln(t^2 + 9) + \operatorname{arctg}(t/3) + C = \ln(\operatorname{tg}^2 x + 9) + \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{3} + C. \blacktriangle$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \operatorname{ch}^3 x\,\operatorname{sh}^8 x\,dx$.

△ Подынтегральная функция обладает свойством

$$R(\operatorname{sh} x;\ -\operatorname{ch} x) = -R(\operatorname{sh} x;\ \operatorname{ch} x).$$

Поэтому, применяя подстановку $t = \operatorname{sh} x$, получаем

$$\int \operatorname{ch}^3 x\,\operatorname{sh}^8 x\,dx = \int (1 + \operatorname{sh}^2 x)\operatorname{sh}^8 x\,d\operatorname{sh} x = \int (1+t^2)t^8\,dt =$$

$$= \frac{t^9}{9} + \frac{t^{11}}{11} + C = \frac{1}{9}\operatorname{sh}^9 x + \frac{1}{11}\operatorname{sh}^{11} x + C. \quad \blacktriangle$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin x\cos^2 x}$.

△ Используя тождество $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, получаем

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx + \int \frac{dx}{\sin x} =$$

$$= -\int \frac{d\cos x}{\cos^2 x} - \int \frac{d\cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C. \blacktriangle$$

Пример 5. Найти интеграл $\int \cos^4 x\,dx$.

△ Используя дважды формулу

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

получаем

$$\int \cos^4 x\,dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx =$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C. \quad \blacktriangle$$

Пример 6 Найти интеграл $\int \frac{2\,\mathrm{sh}\,x + 3\,\mathrm{ch}\,x}{4\,\mathrm{sh}\,x + 5\,\mathrm{ch}\,x}\,dx$.

△ Представим числитель подынтегральной функции в виде линейной комбинации знаменателя и производной знаменателя:

$$2\mathrm{sh}\,x + 3\mathrm{ch}\,x = \alpha(4\mathrm{sh}\,x + 5\mathrm{ch}\,x) + \beta(4\mathrm{ch}\,x + 5\mathrm{sh}\,x).$$

Для α и β получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 4\alpha + 5\beta = 2, \\ 5\alpha + 4\beta = 3, \end{cases}$$

из которой находим $\alpha = 7/9$, $\beta = -2/9$. Следовательно,

$$\int \frac{2\,\mathrm{sh}\,x + 3\,\mathrm{ch}\,x}{4\,\mathrm{sh}\,x + 5\,\mathrm{ch}\,x}\,dx = \frac{7}{9}\int dx - \frac{2}{9}\int \frac{4\,\mathrm{ch}\,x + 5\,\mathrm{sh}\,x}{4\,\mathrm{sh}\,x + 5\,\mathrm{ch}\,x}\,dx =$$

$$= \frac{7}{9}x - \frac{2}{9}\int \frac{d\,(4\,\mathrm{sh}\,x + 5\,\mathrm{ch}\,x)}{4\,\mathrm{sh}\,x + 5\,\mathrm{ch}\,x} = \frac{7}{9}x - \frac{2}{9}\ln(4\,\mathrm{sh}\,x + 5\,\mathrm{ch}\,x) + C. \quad \blacktriangle$$

Пример 7. Найти интеграл $\int \frac{\mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{sh}^3 x}\,dx$.

△ Воспользуемся формулой интегрирования по частям, положив

$$u = \mathrm{ch}\,x, \qquad dv = \frac{\mathrm{ch}\,x\,dx}{\mathrm{sh}^3 x}.$$

Тогда

$$du = \mathrm{sh}\,x\,dx, \qquad v = \int \frac{d\,\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{sh}^3 x} = -\frac{1}{2\,\mathrm{sh}^2 x},$$

$$\int \frac{\mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{sh}^3 x}\,dx = -\frac{\mathrm{ch}\,x}{2\,\mathrm{sh}^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\mathrm{sh}\,x},$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}\,x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\mathrm{sh}\,(x/2)\,\mathrm{ch}\,(x/2)} = \int \frac{d\,\mathrm{th}\,(x/2)}{\mathrm{th}\,(x/2)} = \ln\left|\mathrm{th}\,\frac{x}{2}\right| + 2C.$$

Следовательно,

$$\int \frac{\mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{sh}^3 x}\,dx = -\frac{\mathrm{ch}\,x}{2\,\mathrm{sh}^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{th}\,\frac{x}{2}\right| + C. \quad \blacktriangle$$

Пример 8. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x \cos x}}$.

△ С помощью подстановки $t = \sin x$ интеграл сводится к интегралу от дифференциального бинома:

$$\int t^{-5/3}(1-t^2)^{-2/3}\,dt.$$

Заметим, что число (см. § 3, п. 3)

$$\frac{m+1}{n}+p=\frac{-\frac{5}{3}+1}{2}-\frac{2}{3}=-1$$

является целым, и поэтому подстановкой $-1+t^{-2}=u^3$ интеграл приводится к интегралу от рациональной функции, причем в данном случае к интегралу от постоянной. Однако для вычисления интеграла удобнее применить подстановку $t=\operatorname{tg} x$:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x\cos x}}=\int\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\sin^5 x}{\cos^5 x}}}\,\frac{dx}{\cos^2 x}=\int(\operatorname{tg} x)^{-5/3}\,d\operatorname{tg} x=$$

$$=-\frac{3}{2}(\operatorname{tg} x)^{-2/3}+C. \ \blacktriangle$$

Пример 9. Выразить через интегральный логарифм $\operatorname{li}(x)$ и элементарные функции интеграл $\int\frac{dx}{\ln^2 x}$, $x<1$.

$\triangle$ Воспользуемся формулой интегрирования по частям, положив

$$u=x,\qquad dv=\frac{dx}{x\ln^2 x},$$

тогда получим

$$du=dx,\qquad v=\int\frac{dx}{x\ln^2 x}=\int\frac{d\ln x}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{\ln^2 x}=-\frac{x}{\ln x}+\int\frac{dx}{\ln x}=-\frac{x}{\ln x}+\operatorname{li}(x)+C. \ \blacktriangle$$

Пример 10. Выразить через интегральный синус $\operatorname{Si}(x)$ и элементарные функции интеграл $\int\operatorname{Si}(x)\,dx$.

$\triangle$ Применим формулу интегрирования по частям, положив

$$u=\operatorname{Si}(x),\quad dv=dx,$$

тогда

$$du=\frac{\sin x}{x}\,dx,\qquad v=x.$$

Следовательно,

$$\int\operatorname{Si}(x)\,dx=x\operatorname{Si}(x)-\int\sin x\,dx=x\operatorname{Si}(x)+\cos x+C. \ \blacktriangle$$

Найти интегралы (**4.1—4.6**):

4.1. 1) $\int\sin x\sin 3x\,dx$. 2) $\int\sin 2x\cos 4x\,dx$.

3) $\int\cos x\cos 4x\,dx$.

4) $\int \sin(3x+2)\cos(x-1)\,dx$.

5) $\int \sin x \sin 2x \sin 3x\,dx$. 6) $\int \cos x \cos 3x \cos 5x\,dx$.

7) $\int \sin^2 x \cos(3x+1)\,dx$. 8) $\int \cos^2 2x \cos^2 3x\,dx$.

4.2. 1) $\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 7x\,dx$. 2) $\int \operatorname{sh}^3 x\,dx$.

3) $\int \operatorname{ch} x \operatorname{ch} 2x \operatorname{ch} 3x\,dx$. 4) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x}$.

4.3. 1) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}\,dx$. 2) $\int \frac{\sin 3x}{\cos x}\,dx$.

3) $\int \frac{\cos 3x}{\sin^5 x}\,dx$. 4) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin 4x}\,dx$.

4.4. 1) $\int \cos^3 x\,dx$. 2) $\int \sin^3 x \cos^4 x\,dx$.

3) $\int \cos^3 x \sin^8 x\,dx$. 4) $\int \cos^5 2x \sin^7 2x\,dx$.

5) $\int \cos^3 x \cos 2x\,dx$. 6) $\int \cos^2 3x \sin x\,dx$.

4.5. 1) $\int \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh} x\,dx$. 2) $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x\,dx$.

3) $\int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}\frac{x}{2}\,dx$. 4) $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} 2x\,dx$.

4.6. 1) $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$. 2) $\int \sin^4 4x\,dx$.

3) $\int \cos^6 3x\,dx$. 4) $\int \sin^4 x \cos^6 x\,dx$.

4.7. Для интегралов $J_{n,m} = \int \sin^n x \cos^m x\,dx$, $n, m \in \mathbb{N}$, доказать рекуррентные формулы

$$J_{n,m} = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} J_{n-2,m},$$

$$J_{n,m} = \frac{\sin^{n+1} x \cos^{m-1} x}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} J_{n,m-2}$$

и с их помощью вычислить интеграл

$$\int \sin^6 x \cos^4 x\,dx.$$

Найти интегралы (**4.8**—**4.19**):

4.8. 1) $\int \operatorname{sh}^2 2x \operatorname{ch}^2 2x\,dx$. 2) $\int \operatorname{ch}^4 x\,dx$.

3) $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^4 x\,dx$. 4) $\int \operatorname{sh}^4 (x/2) \operatorname{ch}^2 (x/2)\,dx$.

4.9. 1) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$. 2) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}\, dx$.

3) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x}$. 4) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\, dx$.

4.10. 1) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2 x}$. 2) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}^2 x}$.

3) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^5 x}$. 4) $\int \frac{\operatorname{sh}^4 x}{\operatorname{ch}^3 x}\, dx$.

4.11. 1) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}\, dx$. 2) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\, dx$.

3) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$. 4) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$.

5) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$. 6) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^{10} x}\, dx$.

7) $\int \operatorname{tg}^5 x\, dx$. 8) $\int \operatorname{tg}^6 x\, dx$.

4.12. 1) $\int \frac{\operatorname{sh}^4 x}{\operatorname{ch}^6 x}\, dx$. 2) $\int \frac{\operatorname{ch}^5 x}{\operatorname{sh} x}\, dx$.

3) $\int \frac{dx}{(1+\operatorname{ch} x)^2}$. 4) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}^2 x}$.

5) $\int \operatorname{th}^3 x\, dx$. 6) $\int \operatorname{th}^4 x\, dx$.

4.13. 1) $\int \frac{\sin x\, dx}{(3\cos x - 1)^3}$. 2) $\int \frac{dx}{\sin x\,(1+\cos x)}$.

3) $\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x}\, dx$. 4) $\int \frac{2\sin^3 x + \cos^2 x \sin 2x}{\sin^4 x + 3\cos^2 x}\, dx$.

5) $\int \frac{\operatorname{sh} 2x + 4\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x - 3\operatorname{ch} x}\, dx$. 6) $\int \frac{\operatorname{sh} 2x + 3\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x + 2\operatorname{ch}^2 (x/2)}\, dx$.

4.14. 1) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}$. 2) $\int \frac{\sin 2x\, dx}{3 + 4\sin^2 x}$.

3) $\int \frac{\cos^5 x + \cos^3 x}{\sin^4 x + \sin^2 x}\, dx$. 4) $\int \frac{\cos x - \cos 3x}{1 - \sin^4 x}\, dx$.

5) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^3 x + 3\operatorname{ch} x}$. 6) $\int \frac{\operatorname{sh} 2x\, dx}{(\operatorname{sh} x + 1)(\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh} x)}$.

4.15. 1) $\int \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{\operatorname{tg} x - 3}$. 2) $\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\, dx$. 3) $\int \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}}\, dx$.

4) $\int \frac{a_1 \cos x + b_1 \sin x}{a\cos x + b\sin x}\, dx, \quad a^2 + b^2 \neq 0.$

5) $\int \frac{4\operatorname{ch} x - 3\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}\, dx$.

6) $\int \frac{dx}{1-\operatorname{th} x}$. 7) $\int \frac{a_1 \operatorname{ch} x + b_1 \operatorname{sh} x}{a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x}\, dx$, $a^2+b^2 \neq 0$.

4.16. 1) $\int \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x}$. 2) $\int \frac{dx}{\cos 2x - \sin 2x}$.

3) $\int \frac{dx}{4\cos^2 x - 2\sin 2x + \sin^2 x}$. 4) $\int \frac{dx}{5+\cos^2 x}$, $|x| < \frac{\pi}{2}$.

5) $\int \frac{dx}{2+3\sin 2x - 4\cos^2 x}$.

6) $\int \frac{dx}{a\cos^2 x + b\sin 2x + c\sin^2 x}$, $c > 0$.

7) $\int \frac{dx}{3\operatorname{sh}^2 x - 7\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + 2\operatorname{ch}^2 x}$. 8) $\int \frac{dx}{10\operatorname{ch}^2 x - 2\operatorname{sh} 2x - 1}$.

9) $\int \frac{dx}{4+3\operatorname{sh}^2 x}$. 10) $\int \frac{dx}{1-6\operatorname{sh} 2x - 37\operatorname{ch}^2 x}$.

4.17. 1) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x}$. 2) $\int \frac{\operatorname{th} x\, dx}{(\operatorname{th} x + 2)^2}$.

4.18. 1) $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\, dx$. 2) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$.

3) $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$. 4) $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

5) $\int \frac{\cos^2 x\, dx}{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^2}$, $a^2+b^2 \neq 0$.

6) $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$.

7) $\int \frac{\operatorname{sh}^2 x\, dx}{1-\operatorname{sh}^2 x}$. 8) $\int \frac{\operatorname{ch} 2x\, dx}{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}$.

9) $\int \frac{\operatorname{sh} 2x\, dx}{1+\operatorname{sh}^4 x}$. 10) $\int \frac{dx}{(\operatorname{ch} 2x + \operatorname{ch}^2 x)^2}$.

4.19. 1) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$. 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{3}\cos x + \sin x}$.

3) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x}$. 4) $\int \frac{dx}{2\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x}$.

5) $\int \frac{dx}{a\operatorname{ch} x + b\operatorname{sh} x}$, $a > 0$.

6) $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x}$, $a^2+b^2 \neq 0$.

4.20. Для интеграла

$$J_n = \int \frac{dx}{(a\sin x + b\sin x)^n}, \quad a^2+b^2 \neq 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

доказать рекуррентную формулу

$$J_n=\frac{1}{(n-1)(a^2+b^2)}\left(\frac{a\sin x-b\cos x}{(a\cos x+b\sin x)^{n-1}}+(n-2)J_{n-2}\right),\qquad n>1,$$

и с ее помощью найти интеграл

$$\int\frac{dx}{(2\cos x+\sin x)^3}.$$

4.21. Найти: 1) $\int\frac{dx}{1+4\cos x}$. 2) $\int\frac{dx}{4+\cos x}$.

3) $\int\frac{dx}{4-\sin x}$. 4) $\int\frac{dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$.

5) $\int\frac{dx}{1+10\operatorname{ch}x}$. 6) $\int\frac{dx}{2\operatorname{sh}^2 x+5\operatorname{sh}x+2}$.

7) $\int\frac{dx}{b\operatorname{sh}x+c}$, $c>0$. 8) $\int\frac{dx}{a\cos x+c}$, $a>0$.

4.22. Для интеграла

$$J_n=\int\frac{dx}{(a\cos x+c)^n},\qquad |a|\neq|c|,\qquad n\in\mathbb{N},$$

доказать рекуррентную формулу

$$J_n=\frac{1}{(n-1)(a^2-c^2)}\left(\frac{a\sin x}{(a\cos x+c)^{n-1}}-(2n-3)cJ_{n-1}+(n-2)J_{n-2}\right),$$
$$n>1,$$

и с ее помощью вычислить интегралы:

1) $\int\frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2}$, $0<\varepsilon<1$. 2) $\int\frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^3}$, $\varepsilon>1$.

4.23. Найти интегралы:

1) $\int\frac{dx}{\cos x+\sin x+1}$. 2) $\int\frac{dx}{4\cos x-3\sin x-5}$.

3) $\int\frac{dx}{3\cos x+\sin x+5}$. 4) $\int\frac{dx}{7\cos x-4\sin x+8}$.

5) $\int\frac{dx}{\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x+2}$. 6) $\int\frac{dx}{3\operatorname{ch}x+5\operatorname{sh}x+3}$.

7) $\int\frac{dx}{a\operatorname{ch}x+b\operatorname{sh}x+c}$, $c^2>a^2-b^2$.

8) $\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x+c}$, $c>\sqrt{a^2+b^2}>0$.

4.24. Найти значения A, B, C, при которых верно равенство

$$\int\frac{a_1\cos x+b_1\sin x+c_1}{a\cos x+b\sin x+c}\,dx=Ax+B\ln|a\cos x+b\sin x+c|+$$
$$+C\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x+c},\qquad a^2+b^2\neq 0.$$

Найти интегралы (**4.25—4.27**):

4.25. 1) $\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}\,dx$. 2) $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x+\sin x+\sqrt{2}}$.

3) $\int \frac{\cos x+2\sin x}{4\cos x+3\sin x-2}\,dx$. 4) $\int \frac{2\cos x+\sin x-3}{2\cos x-\sin x-3}\,dx$.

5) $\int \frac{1-\cos(x-a)}{1-\cos(x+a)}\,dx$. 6) $\int \frac{\operatorname{sh} x+2\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh} x-\operatorname{ch} x-1}\,dx$.

7) $\int \frac{\operatorname{ch} x+2\operatorname{sh} x+3}{4\operatorname{ch} x+5\operatorname{sh} x+6}\,dx$.

4.26. 1) $\int \frac{\sin^2 x}{2\cos x+\sin x}\,dx$. 2) $\int \frac{1-2\sin 2x+2\cos^2 x}{\sin x+\cos x}\,dx$.

3) $\int \frac{2\cos^2 x-\sin x\cos x+\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}\,dx$.

4) $\int \frac{a_1\cos^2 x+b_1\cos x\sin x+c_1\sin^2 x}{a\cos x+b\sin x}\,dx$, $a^2+b^2\neq 0$;

5) $\int \frac{\operatorname{sh} 2x\,dx}{5\operatorname{sh} x+3\operatorname{ch} x}$. 6) $\int \frac{\operatorname{ch} 2x\,dx}{3\operatorname{sh} x+5\operatorname{ch} x}$.

4.27. 1) $\int \frac{\cos x-2\sin x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}\,dx$. 2) $\int \frac{2\sin x-\cos x}{(3\sin x+4\cos x)^2}\,dx$.

3) $\int \frac{a_1\cos x+b_1\sin x}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}\,dx$, $b>a>0$.

4) $\int \frac{a_1\cos x+b_1\sin x}{(a\cos x+b\sin x)^2}\,dx$, $a^2+b^2\neq 0$.

5) $\int \frac{2\operatorname{sh} x-\operatorname{ch} x}{3\operatorname{sh}^2 x+4\operatorname{ch}^2 x}\,dx$. 6) $\int \frac{2\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x}{(3\operatorname{sh} x+4\operatorname{ch} x)^2}\,dx$.

4.28. Найти значения A и B, при которых верно равенство

$$\int \frac{(a_1\cos x+b_1\sin x)\,dx}{a\cos^2 x+2b\sin x\cos x+c\sin^2 x}=A\int \frac{dt_1}{k_1t_1^2+\lambda_1}+B\int \frac{dt_2}{k_2t_2^2+\lambda_2};$$

здесь $b\neq 0$, $a\neq c$, λ_1, λ_2 — корни уравнения

$$(\lambda-a)(\lambda-c)=b^2,$$

$$t_i=(c-\lambda_i)\sin x+b\cos x,\qquad k_i=\frac{1}{c-\lambda_i},\qquad i=1,\ 2.$$

Найти интегралы (**4.29—4.33**):

4.29. 1) $\int \frac{(\cos x+\sin x)\,dx}{5\cos^2 x-2\sin 2x+2\sin^2 x}$. 2) $\int \frac{\sin x-2\cos x}{1+2\sin 2x}\,dx$.

4.30. 1) $\int \frac{(1+\sin x)\,dx}{\sin 2x+2\sin x}$.

2) $\int \frac{dx}{\sin 2x+4\sin x-4\sin^2 x}$.

3) $\int \frac{\sin x\,dx}{(1-\cos x+\sin x)^2}$. 4) $\int \frac{2\sin x-\sin 2x}{\sin^3 x+(1-\cos x)^3}\,dx$.

5) $\int \frac{\operatorname{ch} x+2\operatorname{sh} x-1}{\operatorname{sh} x(\operatorname{ch} x-3\operatorname{sh} x-1)}\,dx$. 6) $\int \frac{\operatorname{sh} 2x-2\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh}^6(x/2)-\operatorname{sh}^3 x}\,dx$.

4.31. 1) $\int \sin^5 x\sqrt[3]{\cos x}\,dx$. 2) $\int \frac{\cos^5 x}{\sqrt[5]{\sin x}}\,dx$.

3) $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}}$. 4) $\int \frac{dx}{\cos x\sqrt[5]{\sin^2 x}}$.

5) $\int \operatorname{ch}^3 x\sqrt[3]{\operatorname{sh}^2 x}\,dx$. 6) $\int \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\sqrt[3]{\operatorname{ch}^2 x}}\,dx$.

4.32. 1) $\int \frac{dx}{\cos^3 x\sqrt{\sin 2x}}$. 2) $\int \frac{dx}{\cos x\sqrt{\sin^3 2x}}$.

3) $\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx$. 4) $\int \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}\,dx$.

5) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}}{\operatorname{ch}^4 x}\,dx$. 6) $\int \sqrt{\operatorname{th} x}\,dx$.

4.33. 1) $\int \frac{\left(\cos\frac{x+\varphi}{2}\right)^{n-1}}{\left(\sin\frac{x-\varphi}{2}\right)^{n+1}}\,dx,\quad n\in\mathbb{N},\quad \varphi\neq\frac{2k+1}{2}\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$.

2) $\int \frac{\left(\operatorname{ch}\frac{x-\varphi}{2}\right)^{n-1}}{\left(\operatorname{sh}\frac{x+\varphi}{2}\right)^{n+1}}\,dx,\quad n\in\mathbb{N}$.

4.34. Для интеграла

$$J_n=\int\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^n dx,\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

доказать рекуррентную формулу

$$J_n=\frac{2\sin a}{n-1}\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^{n-1}+2\cos a\,J_{n-1}-J_{n-2},\quad n>1,$$

и с ее помощью вычислить интеграл J_3.

Найти интегралы (**4.35**—**4.41**):

4.35. 1) $\int \frac{e^x+e^{3x}}{1-e^{2x}+e^{4x}}\,dx$. 2) $\int \frac{dx}{2-e^x-e^{2x}}$.

3) $\int \frac{dx}{1+e^x+e^{2x}+e^{3x}}$. 4) $\int \frac{dx}{(e^x-1)^4}$.

5) $\int \frac{dx}{(e^{x-1}+1)^2-(e^{x+1}+1)^2}$. 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$.

7) $\int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,dx$. 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$.

4.36. 1) $\int (x^3+x)e^{-x^2}\,dx$. 2) $\int \frac{x+\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x}\,dx$.

3) $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$. 4) $\int \frac{x\,dx}{1+\sin x}$.

5) $\int x\sin x\cos 2x\,dx$. 6) $\int (\sin x - x)^3\,dx$.

7) $\int x^2e^x\sin x\,dx$. 8) $\int e^{ax}\sin^3 bx\,dx,\quad a^2+b^2\neq 0$.

4.37. 1) $\int \frac{\ln(1-x+x^2)}{x^2}\,dx$. 2) $\int e^x\ln(1+e^{-x})\,dx$.

3) $\int \ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)dx$. 4) $\int \frac{(x\ln x)^2}{\sqrt{x}}\,dx$.

4.38. 1) $\int \operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}\,dx$. 2) $\int x\operatorname{arctg}(x+1)\,dx$.

3) $\int x\arccos(5x-2)\,dx$. 4) $\int x^7\operatorname{arctg} x\,dx$.

4.39. 1) $\int \arcsin\sqrt{x}\,dx$. 2) $\int \sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$.

3) $\int x\sqrt{1-x^2}\arccos x\,dx$. 4) $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

4.40. 1) $\int e^{-x}\arcsin e^x\,dx$. 2) $\int e^{\arcsin x}\,dx$.

3) $\int (2x+1)e^{\operatorname{arctg} x}\,dx$. 4) $\int x(1+x^2)^{-3/2}e^{\operatorname{arctg} x}\,dx$.

4.41. 1) $\int \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\,dx$. 2) $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin^2 x}e^x\,dx$.

3) $\int \frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\,dx$. 4) $\int \frac{\ln x\,dx}{(\ln x+1)^2}$.

5) $\int \left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x\,dx$. 6) $\int \left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)^2 e^x\,dx$.

7) $\int \frac{x^3+2x^2+3x+3}{x^4}e^{-x}\,dx$. 8) $\int \frac{x^3+2x^2-2x-2}{x^2(1+x)^2}e^x\,dx$.

4.42. При каком условии интеграл

$$J_n=\int\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{x^k}\right)e^x\,dx,$$

где a_k — постоянные, является элементарной функцией?

4.43. Выразить через интегральный логарифм $\operatorname{li}(x)$ и элементарные функции интегралы:

1) $\int \frac{e^x}{x}\,dx, \quad x<0.$ 2) $\int \frac{1-x}{x}e^{-x}\,dx, \quad x>0.$

3) $\int \frac{e^{2x}\,dx}{x^2-3x+2}, \quad x<1.$ 4) $\int \frac{e^{3x}}{x^3}\,dx, \quad x<0.$

5) $\int e^x \ln|x|\,dx, \quad x<0.$ 6) $\int \frac{dx}{\ln^3 x}, \quad x<1.$

7) $\int \frac{x^{10}\,dx}{\ln x}, \quad x<1.$ 8) $\int \frac{x\ln^4 x\,dx}{(\ln x-2)^2}, \quad x<e^2.$

4.44. Выразить через интегральный синус $\operatorname{Si}(x)$ и элементарные функции интегралы:

1) $\int \frac{x\sin x-\cos x}{x^2}\,dx.$ 2) $\int \frac{\sin 3x}{x^3}\,dx.$

3) $\int \frac{\sin x^2}{x}\,dx.$ 4) $\int \frac{\sin^3 x}{x}\,dx.$

4.45. Выразить через интеграл вероятностей $\Phi_0(x)$ и элементарные функции интегралы:

1) $\int e^{-(2x^2+2x+1)}\,dx.$ 2) $\int e^{-(ax^2+2bx+c)}\,dx, \quad a>0.$

3) $\int x^2e^{-x^2}\,dx.$ 4) $\int \frac{e^{-x^2}}{x^2}\,dx.$

5) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\,dx.$ 6) $\int e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\,dx.$

4.46. Выразить через $F(x;k)$ и $E(x;k)$, т. е. через эллиптические интегралы первого и второго рода в форме Лежандра (§ 3), и через элементарные функции следующие интегралы:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{7+\cos 2x}}.$ 2) $\int \frac{1+\cos 2x}{\sqrt{17+8\cos 2x}}\,dx.$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos 2x}}.$ 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2\cos x}}.$

4.47. Выразить через функции $\operatorname{Si}(x)$, $\operatorname{li}(x)$, $\Phi_0(x)$ и элементарные функции интегралы:

1) $\int \sin x\operatorname{Si}(x)\,dx.$ 2) $\int \operatorname{li}(x)\,dx.$

3) $\int \Phi_0(x)\,dx$ 4) $\int x\operatorname{Si}(x)\,dx.$

5) $\int \operatorname{Si}(ax)\operatorname{Si}(bx)\,dx, \quad ab\neq 0.$ 6) $\int x\Phi_0(x)\,dx.$

7) $\int \frac{e^{-x^2/2}\,dx}{\Phi_0(x)}$.

8) $\int e^{-x^2/2}\Phi_0(x)\,dx$.

9) $\int xe^{x^2/2}\Phi_0(x)\,dx$.

10) $\int xe^{-x^2/2}\Phi_0(x)\,dx$.

11) $\int \Phi_0^2(x)\,dx$.

12) $\int \frac{e^{-x^2/2}\Phi_0(x)\,dx}{x^2}$.

13) $\int \ln|x|\,\Phi_0(x)\,dx$.

---

§ 5. Интегрирование разных функций

Найти интегралы (**5.1—5.196**).

5.1. $\int \frac{x^3-x^2}{x+3}\,dx$.

5.2. $\int \frac{x\,dx}{2x^2-x+1}$.

5.3. $\int \frac{x^2\,dx}{x^2+12x+35}$.

5.4. $\int \frac{x^4+3x^3-1}{x^2+2x+1}\,dx$.

5.5. $\int \frac{x^4\,dx}{x^2+4}$.

5.6. $\int \frac{x\,dx}{x^3+8}$.

5.7. $\int \frac{dx}{(x+1)(9x^2+6x+4)}$.

5.8. $\int \frac{(5-x)\,dx}{(x-3)(x^2-5x+7)}$.

5.9. $\int \frac{x^2-2x-5}{x^3-x^2+2x-2}\,dx$.

5.10. $\int \frac{x^3\,dx}{x^3-3x+2}$.

5.11. $\int \frac{(x^3+x^2)\,dx}{(x-2)(2x^2-x+2)}$.

5.12. $\int \frac{2x^4-2x^3-x^2+2}{2x^3-4x^2+3x-1}\,dx$.

5.13. $\int \frac{dx}{x^4-x^3}$.

5.14. $\int \frac{(2x^2-5)\,dx}{x^4-5x^2+6}$.

5.15. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+12x+35)^2}$.

5.16. $\int \frac{dx}{x^4+8x}$.

5.17. $\int \frac{(2-x)\,dx}{x^4-x^3-x+1}$.

5.18. $\int \frac{10-5x+3x^3}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}\,dx$.

5.19. $\int \left(\frac{x^2}{x^2+4}\right)^2 dx$.

5.20. $\int \frac{19x^3+9x^2+6x+1}{9x^4+37x^2+4}\,dx$.

5.21. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

5.22. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x^4+3x^3+5x^2+3x+1}$.

5.23. $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\,dx$.

5.24. $\int \frac{1+2x+x^2+4x^3}{1+x^2+x^4}\,dx$.

5.25. $\int \frac{5x^7-5x^2-18x}{x^5+3x^2-1}\,dx$.

5.26. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$.

5.27. $\int \frac{x^5\,dx}{x^6+9x^3+8}$.

5.28. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}$.

5.29. $\int \frac{dx}{x^8+7x}$.

5.30. $\int \frac{dx}{x^8+8x^6+16x^4}$.

5.31. $\int \frac{dx}{x^8 + x^4 + 1}$.

5.32. $\int \frac{dx}{(x^4 - 1)^3}$.

5.33. $\int \frac{dx}{x(3 + x^6)^2}$.

5.34. $\int \frac{x^3\, dx}{(x^8 + 1)^2}$.

5.35. $\int \frac{x^9\, dx}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2}$.

5.36. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

5.37. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x} + x\sqrt[4]{x}}$.

5.38. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5} + 4\sqrt{x}}$.

5.39. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3} + \sqrt{x^5}}$.

5.40. $\int \frac{x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{x + \sqrt[3]{x^4}}\, dx$.

5.41. $\int \frac{2 + \sqrt{x+1}}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}}\, dx$.

5.42. $\int \frac{1 - \sqrt[6]{1+x}}{1 + x + \sqrt[3]{(1+x)^4}}\, dx$.

5.43. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$.

5.44. $\int \sqrt{\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}}\, dx$.

5.45. $\int \frac{dx}{\sqrt{2} + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$.

5.46. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - x^2}}$.

5.47. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 1}}$.

5.48. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1 - x^2}}$.

5.49. $\int x^3\sqrt{x^2 - 1}\, dx$.

5.50. $\int x^4\sqrt{4 - x^2}\, dx$.

5.51. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{3 + 2x - x^2}}$.

5.52. $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$.

5.53. $\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2 + 2x}}$.

5.54. $\int \frac{x\, dx}{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$, $\quad x > 3$.

5.55. $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1 + x^2}}$.

5.56. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1 + x^2}}$.

5.57. $\int \frac{dx}{(1 - x^4)\sqrt{1 + x^2}}$.

5.58. $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}\, dx$.

5.59. $\int \sqrt{4x^2 - 4x + 3}\, dx$.

5.60. $\int \sqrt{1 - 4x - x^2}\, dx$.

5.61. $\int \frac{x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}\, dx$.

5.62. $\int \frac{dx}{\sqrt{(7x - x^2 - 10)^3}}$.

5.63. $\int \frac{x\, dx}{(x^2 + x + 2)\sqrt{4x^2 + 4x + 3}}$.

5.64. $\int \frac{dx}{(1 - \sqrt{1 - x^2})^2}$.

5.65. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

5.66. $\int \frac{x^2\,dx}{1+2(x+\sqrt{x^2+x+1})}$.

5.67. $\int \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{12}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

5.68. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

5.69. $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$.

5.70. $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}\,dx$.

5.71. $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$.

5.72. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x\sqrt{1+3x^2+x^4}}$.

5.73. $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}\,dx$.

5.74. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$.

5.75. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}}$.

5.76. $\int \frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}}$.

5.77. $\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^4-1}\,dx$.

5.78. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x\sqrt{62x^2-x^4-1}}$.

5.79. $\int \frac{dx}{(3+5x^3)\sqrt[3]{3+4x^3}}$.

5.80. $\int \frac{dx}{(1+x^4)\sqrt[4]{1+2x^4}}$.

5.81. $\int \sin 2x \sin 5x\,dx$.

5.82. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x\,dx$.

5.83. $\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x \operatorname{sh} 3x\,dx$.

5.84. $\int \frac{dx}{1-\sin x}$.

5.85. $\int \frac{1-\sin x}{\cos x}\,dx$.

5.86. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$.

5.87. $\int \sin^2 x \cos^2 3x\,dx$.

5.88. $\int \sin^2 6x \sin^2 3x\,dx$.

5.89. $\int \cos^3 x \sin^5 x\,dx$.

5.90. $\int \sin^4 x \cos^5 x\,dx$.

5.91. $\int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}^4 x\,dx$.

5.92. $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}^4 x\,dx$.

5.93. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$.

5.94. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x}\,dx$.

5.95. $\int \frac{\operatorname{ch}^4 x}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx$.

5.96. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x}$.

5.97. $\int (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x)\,dx$.

5.98. $\int \operatorname{ctg}^6 x\,dx$.

5.99. $\int \operatorname{tg}^7 x\,dx$.

5.100. $\int \operatorname{cth}^4 x\,dx$.

5.101. $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin x \cos 3x}$.

5.102. $\int \frac{\cos 3x}{\cos^4 x}\,dx$.

5.103. $\int \frac{\operatorname{sh} 3x}{\operatorname{ch}^6 x}\,dx$.

5.104. $\int \frac{\operatorname{ch} 3x}{\operatorname{sh}^3 x}\,dx$.

5.105. $\int \frac{3\cos x + 7\sin x}{5\cos x + 2\sin x}\,dx$.

5.106. $\int \frac{\operatorname{ch} x\,dx}{4\operatorname{ch} x - 3\operatorname{sh} x}$.

5.107. $\int \frac{dx}{2+\sin 2x+\cos 2x}$. **5.108.** $\int \frac{2+\cos 4x}{5+4\cos 4x}\,dx$.

5.109. $\int \frac{3\sin x+2\cos x+1}{\sin x+3\sin^2 x}\,dx$.

5.110. $\int \frac{3\sin x+2\cos x+1}{\sin x+\sin 2x}\,dx$.

5.111. $\int \frac{(1+\cos x)^2}{1+\sin x}\,dx$.

5.112. $\int \frac{(\sin x-\cos x)\sin 2x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\,dx$.

5.113. $\int \frac{3\,\mathrm{sh}\,x+2\,\mathrm{ch}\,x+1}{\mathrm{sh}\,2x+\mathrm{ch}\,x}\,dx$. **5.114.** $\int \frac{\mathrm{sh}\,2x\,dx}{2+\mathrm{sh}^2 x}$.

5.115. $\int \frac{\sin x\sin 2x}{\sin x+\cos x}\,dx$. **5.116.** $\int \frac{dx}{4+\mathrm{tg}\,x+4\,\mathrm{ctg}\,x}$.

5.117. $\int \frac{\mathrm{ctg}^3 x+\mathrm{ctg}\,x}{4+\mathrm{tg}^2 x}\,dx$. **5.118.** $\int \frac{dx}{(1+\cos^2 x)^2}$.

5.119. $\int \left(\frac{\sin 2x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\right)^2 dx$. **5.120.** $\int \frac{dx}{\sin x+2\cos x+3}$.

5.121. $\int \frac{dx}{3-4\sin 2x+2\cos^2 x}$. **5.122.** $\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$, $x\in(0;\ \pi)$.

5.123. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+\cos x}}$, $x\in(0;\ \pi)$. **5.124.** $\int \frac{\mathrm{th}\,x\,dx}{\sqrt{1-\mathrm{th}\,x}}$.

5.125. $\int \frac{\mathrm{sh}\,x\,dx}{\sqrt{\mathrm{ch}\,2x}}$. **5.126.** $\int \frac{\sqrt{\sin^3 2x}}{\sin^5 x}\,dx$.

5.127. $\int \frac{\mathrm{tg}\,x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$. **5.128.** $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2+\sin 2x}}$.

5.129. $\int x^3\sin x^2\,dx$. **5.130.** $\int x\,\mathrm{ctg}^2 x\,dx$.

5.131. $\int \frac{x\,dx}{1+\cos x}$. **5.132.** $\int \frac{x\sin x\,dx}{(1+\cos x)^2}$.

5.133. $\int \frac{x\,dx}{\sin^4 x}$. **5.134.** $\int \frac{x\sin x\,dx}{\sqrt{(4-\sin^2 x)^3}}$.

5.135. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{1+e^x}$. **5.136.** $\int \frac{1+e^{2x}}{(1+e^x)^2}\,dx$.

5.137. $\int \frac{x+1}{2^x}\,dx$. **5.138.** $\int \frac{xe^x\,dx}{(1+e^x)^2}$.

5.139. $\int \frac{xe^x\,dx}{(x+1)^2}$. **5.140.** $\int xe^{\sqrt{x}}\,dx$.

5.141. $\int e^{2x}\sqrt{e^x+e^{2x}}\,dx$. **5.142.** $\int e^{x+e^x}\,dx$.

5.143. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,e^x\,dx$. **5.144.** $\int \left(\frac{\sin x}{e^x}\right)^2 dx$.

5.145. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. **5.146.** $\int (x \ln x)^2\, dx$.

5.147. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$. **5.148.** $\int x^3 \ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right| dx$.

5.149. $\int \frac{1}{x^2} \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| dx$. **5.150.** $\int \frac{\ln|x|}{(x+2)^2}\, dx$.

5.151. $\int \frac{x \ln|x|}{(1+x^2)^2}\, dx$. **5.152.** $\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\, dx$.

5.153. $\int \frac{x \ln(1-x+x^2)}{(1+x^2)^2}\, dx$. **5.154.** $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x-1}}\, dx$.

5.155. $\int \frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{1-x}}\, dx$. **5.156.** $\int \frac{x \ln|x|\, dx}{(1-x^2)\sqrt{x^2-1}}$.

5.157. $\int \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|}{x^2}\, dx$.

5.158. $\int \frac{x \ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$.

5.159. $\int \frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\, dx$.

5.160. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}}\, dx$.

5.161. $\int x^x (1+\ln x)\, dx$. **5.162.** $\int \frac{\ln x \cdot \cos \ln x}{x}\, dx$.

5.163. $\int \sin x \ln\left(\cos x + \sqrt{2-\sin^2 x}\right) dx$.

5.164. $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arctg} x}\, dx}{1+x^2}$.

5.165. $\int (x^3+x) \operatorname{arcctg} x\, dx$. **5.166.** $\int \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x^2}\, dx$.

5.167. $\int \frac{2x^2+1}{x^2+1} \operatorname{arctg} x\, dx$. **5.168.** $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{x^2+1}\, dx$.

5.169. $\int \frac{x \operatorname{arcctg} x}{(x^2+1)^2}\, dx$. **5.170.** $\int x \arcsin(x-1)\, dx$.

5.171. $\int x^2 \arccos 2x\, dx$. **5.172.** $\int \frac{\arccos x}{x^2}\, dx$.

5.173. $\int \arcsin^3 (x/3)\, dx$. **5.174.** $\int x^3 \arccos (1/x)\, dx$.

5.175. $\int \frac{3x^2-1}{x\sqrt{x}} \operatorname{arctg} x\, dx$. **5.176.** $\int \operatorname{arctg}(1-\sqrt{x})\, dx$.

5.177. $\int \operatorname{arcctg} \sqrt{1-x}\, dx$. **5.178.** $\int \frac{\sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x}}{x+1}\, dx$.

5.179. $\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x\, dx$. **5.180.** $\int \frac{\arcsin x\, dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

5.181. $\int \frac{x \arcsin x\, dx}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}$.

5.182. $\int \frac{(1+x^2)\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

5.183. $\int \sqrt{x} \arcsin \sqrt{1-x}\, dx$.

5.184. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\, dx$.

5.185. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{(x-1)^2}\, dx$.

5.186. $\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

5.187. $\int \arccos \sqrt{\frac{x}{x+1}}\, dx$.

5.188. $\int \frac{x^2 \arccos (x\sqrt{x})}{(1-x^3)^2}\, dx$.

5.189. $\int \cos x \operatorname{arctg} \sin x\, dx$.

5.190. $\int \frac{\arcsin \operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\, dx$.

5.191. $\int e^x \arcsin e^x\, dx$.

5.192. $\int \operatorname{sh} x \arcsin e^x\, dx$.

5.193. $\int \operatorname{sh} x \operatorname{arctg} \operatorname{sh} x\, dx$.

5.194. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\, dx$.

5.195. $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{e^x}}{(1+e^x)\sqrt{e^x}}\, dx$.

5.196. $\int x \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2)\, dx$.

Найти интегралы, зависящие от параметров (**5.197—5.234**).

5.197. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $a \neq 0$.

5.198. $\int \frac{dx}{x^3+bx^2+ax+ab}$, $ab \neq 0$.

5.199. $\int \frac{dx}{(x^2+(a+b)x+ab)^2}$, $a \neq b$.

5.200. $\int \frac{dx}{x^4+(a^2+b^2)x^2+a^2b^2}$, $ab \neq 0$.

5.201. $\int \left(\frac{x+a}{x+b}\right)^n dx$, $n \in \mathbb{N}$.

5.202. $\int \frac{dx}{x^{2n}-a^{2n}}$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$.

5.203. $\int \frac{\sqrt{ax+b}+c}{\sqrt{ax+b}+d}\, dx$, $a \neq 0$.

5.204. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+b}}$, $a \neq 0$.

5.205. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+(a+b)x-ab}}$, $a \neq b$.

5.206. $\int \sqrt{x^2+(a+b)x+ab}\, dx$, $a < b$, $x > b$.

5.207. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a}}$.

5.208. $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{b^2-x^2}}$, $ab \neq 0$.

5.209. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+b^2}}, \quad ab \neq 0.$

5.210. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n+a}}, \quad a \neq 0, \ n \in \mathbb{N}.$

5.211. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}, \quad n \in \mathbb{N}.$

5.212. $\displaystyle\int (\cos ax \cos bx)^2\, dx, \quad ab \neq 0.$

5.213. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}.$ **5.214.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x - \sin a}.$

5.215. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+2a\cos x + a^2}.$ **5.216.** $\displaystyle\int \frac{(a+\cos x)\,dx}{1+2a\cos x+a^2}.$

5.217. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a)\, dx.$ **5.218.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^2 x + a}.$

5.219. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}, \quad ab \neq 0.$

5.220. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a\cos x + b\sin x)^2}, \quad a^2+b^2 \neq 0.$

5.221. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(a\cos x+\sin x)^2}.$ **5.222.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(a+(ax+b)\operatorname{tg} x)^2}, \ a \neq 0.$

5.223. $\displaystyle\int \left(\frac{x}{(ax-b)\sin x + (a+bx)\cos x}\right)^2 dx, \quad a^2+b^2 \neq 0.$

5.224. $\displaystyle\int \frac{dx}{ae^x + be^{-x}}, \quad ab \neq 0.$

5.225. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a+be^x}}, \quad ab \neq 0.$

5.226. $\displaystyle\int \operatorname{sh} ax \operatorname{ch} bx\, dx, \quad a^2+b^2 \neq 0.$

5.227. $\displaystyle\int \frac{dx}{a+b\operatorname{ch} x + c \operatorname{sh} x}, \quad a^2+b^2+c^2 \neq 0.$

5.228. $\displaystyle\int \operatorname{sh} ax \cos bx\, dx, \quad a^2+b^2 \neq 0.$

5.229. $\displaystyle\int \ln|x^2+a|\, dx.$ **5.230.** $\displaystyle\int \frac{\ln|x+\sqrt{x^2+a}|}{x^2}\, dx.$

5.231. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x+a}}\, dx.$

5.232. $\displaystyle\int x^{a-1}\ln^{b-1} x\,(a\ln x + b)\, dx.$

5.233. $\displaystyle\int \frac{x \arcsin x}{(1+ax^2)^2}\, dx.$

5.234. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x\, dx}{(ax^2+b)\sqrt{ax^2+b}}, \quad ab \neq 0.$

ГЛАВА II

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 6. Определенный интеграл

1. Интеграл Римана. Пусть задан отрезок $[a; b]$. Через

$$\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$$

будем обозначать *разбиение отрезка* $[a; b]$ такими точками x_k, $k = 0, 1, \ldots, k_\tau$, что

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < \ldots < x_{k_\tau} = b.$$

Отрезки $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k_\tau$, называются *отрезками разбиения* τ, а наибольшая из их длин — *мелкостью* $|\tau|$ разбиения τ:

$$|\tau| = \max_{i=1, 2, \ldots, k_\tau} |x_i - x_{i-1}|.$$

Разбиение τ' называют *разбиением, вписанным в разбиение* τ (а также *разбиением, следующим за разбиением* τ), и пишут $\tau' > \tau$ или $\tau < \tau'$, если каждый отрезок разбиения τ' содержится в некотором отрезке разбиения τ.

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана функция f, $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ — некоторое разбиение этого отрезка, $|\tau|$ — его мелкость и $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Зафиксируем произвольным образом точки $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ и составим сумму

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(f; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k_\tau}) = \sum_{i=1}^{k_\tau} f(\xi_i)\,\Delta x_i. \tag{1}$$

Суммы этого вида называются *интегральными суммами* (*Римана*) функции f.

Функция f называется *интегрируемой* (*по Риману*) на отрезке $[a; b]$, если существует конечный предел $\lim\limits_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau$. Этот предел называется *определенным интегралом* (или, подробнее, *определенным интегралом Римана*) функции f на отрезке $[a; b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Число a называется *нижним*, а b — *верхним пределом интегрирования.*

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau. \tag{2}$$

Определение предела (2) можно сформулировать в терминах пределов последовательностей или на «ε — δ-языке». Сделаем и то, и другое.

Определение 1. Число J называется *пределом интегральных сумм* (1) *при* $|\tau|\to 0$, если для любой последовательности $\tau_n = \{x_k^{(n)}\}_{k=0}^{k=k_{\tau_n}}$ разбиений отрезка $[a;\,b]$, у которой

$$\lim_{n\to\infty} |\tau_n| = 0,$$

и для любого выбора точек

$$\xi_i^{(n)} \in \left[x_{i-1}^{(n)};\; x_i^{(n)}\right], \quad i=1,\,2,\,\ldots,\,k_{\tau_n}; \quad n=1,\,2,\,\ldots,$$

существует предел последовательности интегральных сумм σ_{τ_n}, $n=1,2,\,\ldots,$ и он равен J:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\tau_n} = J. \tag{3}$$

Определение 2. Число J называется *пределом интегральных сумм* (1) *при* $|\tau|\to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что, каково бы ни было разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ (отрезка $[a;\,b]$) мелкости, меньшей δ: $|\tau| < \delta$, и каковы бы ни были точки $\xi_i \in [x_{i-1};\, x_i]$, выполняется неравенство

$$|\sigma_\tau - J| < \varepsilon. \tag{4}$$

Определения 1 и 2 предела интегральных сумм (1) равносильны. По определению полагается

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \quad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \quad a<b.$$

Теорема 1. Если функция интегрируема на некотором отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

Для каждого разбиения $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отрезка $[a;\,b]$, на котором определена ограниченная функция f, положим

$$M_i = \sup_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x), \quad i=1,\,2,\,\ldots,\,k_\tau.$$

$$S_\tau = S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k_\tau} M_i \Delta x_i, \quad s_\tau = s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k_\tau} m_i \Delta x_i.$$

Сумма S_τ называется *верхней*, а сумма s_τ — *нижней суммой Дарбу* функции f.

Верхняя грань J_* нижних сумм Дарбу s_τ называется *нижним интегралом* функции f, а нижняя грань J^* верхних сумм Дарбу — ее *верхним интегралом*:

$$J_* = \sup_\tau s_\tau, \quad J^* = \inf_\tau S_\tau.$$

Предел нижних и верхних сумм Дарбу при $|\tau| \to 0$ определяется аналогично пределу интегральных сумм Римана. Сформулируем его, например, на «$\varepsilon - \delta$-языке» для нижних сумм Дарбу.

Определение 3. Число J называют *пределом сумм Дарбу s_τ при $|\tau| \to 0$* и пишут

$$\lim_{|\tau| \to 0} s_\tau = J,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех разбиений τ мелкости $|\tau| < \delta$ выполняется неравенство

$$|s_\tau - J| < \varepsilon.$$

Теорема 2. Для того чтобы ограниченная функция f была интегрируема на отрезке $[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{|\tau| \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0.$$

Следствие. Для того чтобы ограниченная функция f была интегрируема на отрезке $[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sum_{i=1}^{k_\tau} \omega_i(f) \Delta x_i = 0,$$

где $\omega_i(f)$ — *колебание функции* f на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$:

$$\omega_i(f) = \sup_{\substack{x' \in [x_{i-1}; x_i] \\ x'' \in [x_{i-1}; x_i]}} |f(x'') - f(x')|, \quad i = 1, 2, \ldots, k_\tau.$$

Теорема 3. Для того чтобы ограниченная функция f была интегрируема на отрезке $[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$J_* = J^*.$$

Следствие. Для того чтобы ограниченная функция f была интегрируема на отрезке $[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение τ отрезка $[a; b]$, что

$$S_\tau - s_\tau < \varepsilon.$$

Пример 1. Доказать, что всякая непрерывная на отрезке функция интегрируема на нем.

$\triangle$ Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она и равномерно непрерывна на нем, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых двух точек $x' \in [a; b]$ и $x'' \in [a; b]$, удовлетворяющих условию $|x'' - x'| < \delta$, выполняется условие $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$, и, следовательно, если разбиение $\tau=\{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отрезка $[a;\ b]$ имеет мелкость $|\tau|<\delta$, то

$$\omega_i(f)=\sup_{\substack{x'\in[x_{i-1};\ x_i]\\ x''\in[x_{i-1};\ x_i]}}|f(x'')-f(x')|\leqslant\varepsilon,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ k_\tau,$$

а поэтому

$$\sum_{i=1}^{k_\tau}\omega_i(f)\,\Delta x_i\leqslant\varepsilon\sum_{i=1}^{k_\tau}\Delta x_i=\varepsilon\,(b-a).$$

Отсюда

$$\lim_{|\tau|\to 0}\sum_{i=1}^{k_\tau}\omega_i(f)\,\Delta x_i=0,$$

и, согласно следствию из теоремы 2, функция f интегрируема на отрезке $[a;\ b]$. ▲

Пример 2. Найти интеграл $\int\limits_1^2 x^2\,dx$ с помощью интегральных сумм.

△ Функция $f(x)=x^2$ непрерывна на отрезке $[1;\ 2]$ и, следовательно, интегрируема на нем (см. пример 1). Поэтому для вычисления предела интегральных сумм σ_τ при $|\tau|\to 0$ можно взять любую последовательность разбиений τ_n отрезка $[1;\ 2]$ с мелкостью, стремящейся к нулю. Будем делить последовательно отрезок $[1;\ 2]$ на n равных частей, т. е. возьмем разбиения

$$\tau_n=\left\{x_k^{(n)}\right\}_{k=0}^{k=n},$$

состоящие из точек $x_k^{(n)}=1+\frac{k}{n}$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n$, а в качестве точек ξ_i выберем концевые точки отрезков разбиения $\xi_i=x_i$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ k_n$, тогда

$$\sigma_{\tau_n}=\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(n+i)^2=$$

$$=\frac{1}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n}n^2+2\sum_{i=1}^{n}ni+\sum_{i=1}^{n}i^2\right)=\frac{1}{n^3}\left(n^3+2n\frac{n(n+1)}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)=2+\frac{1}{n}+\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{\tau_n}=7/3.\quad ▲$$

Заметим, что на практике интегралы от основных элементарных функций нецелесообразно находить с помощью предела интегральных сумм — для этого есть более простой способ (см. ниже формулу Ньютона — Лейбница). Наоборот, можно находить некоторые пределы сумм, если их удастся преобразовать к интегральным суммам функций, интеграл от которой известен (см. ниже пример 13).

Интеграл, рассматриваемый как предел интегральных сумм, иногда удобно использовать для его приближенного вычисления (см. § 10).

Пример 3. Доказать, что, для того чтобы функция была интегрируема на отрезке $[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие (называемое *условием Коши для интегральных сумм*): для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых двух разбиений τ_1 и τ_2 (отрезка $[a; b]$) мелкостей $|\tau_1| < \delta$ и $|\tau_2| < \delta$ имеет место неравенство

$$|\sigma_{\tau_1} - \sigma_{\tau_2}| < \varepsilon.$$

△ 1) Если функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$ и

$$J = \int_a^b f(x)\,dx,$$

то, согласно определению 2, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех разбиений τ, удовлетворяющих условию $|\tau| < \delta$, выполняется неравенство

$$|\sigma_\tau - J| < \varepsilon/2.$$

Поэтому если $|\tau_1| < \delta$ и $|\tau_2| < \delta$, то

$$|\sigma_{\tau_2} - \sigma_{\tau_1}| \leqslant |\sigma_{\tau_2} - J| + |J - \sigma_{\tau_1}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2) Если для интегральных сумм σ_τ функции f выполняется условие Коши, то любая их последовательность $\{\sigma_{\tau_n}\}$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} |\tau_n| = 0$, удовлетворяет критерию Коши сходимости числовых последовательностей и поэтому сходится. Из того, что все последовательности $\{\sigma_{\tau_n}\}$ при условии $\lim\limits_{n\to\infty} |\tau_n| = 0$ сходятся, следует, что все они имеют один и тот же предел. Это, согласно определению 1, означает, что функция f интегрируема на рассматриваемом отрезке. ▲

6.1. Написать интегральную сумму σ_n для функции $f(x) = 1 + x$ на отрезке $[-1; 2]$, разбив его на n равных отрезков и выбрав значения аргумента ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, в середине этих отрезков.

6.2. Для данных функций $f(x)$ найти нижние s_τ и верхние S_τ суммы Дарбу на указанных отрезках, деля их на n равных частей.

1) $f(x) = x^3$, $x \in [-2; 3]$. 2) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0; 1]$.
3) $f(x) = 2^x$, $x \in [0; 10]$.

6.3. Найти $\int\limits_0^T (gt + v_0)\,dt$ исходя из определения интеграла.

6.4. Вычислить определенные интегралы как пределы интегральных сумм:

1) $\int\limits_0^1 e^x\,dx$. 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$.

3) $\int\limits_0^x \cos t\,dt$. 4) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2}$.

6.5. Вычислить интеграл $\int\limits_1^2 x^3\,dx$ как предел интегральных сумм, разбивая отрезок $[1;\ 2]$ на части точками, которые составляют геометрическую прогрессию.

6.6. Найти интеграл $\int\limits_a^b x^n\,dx$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$, как предел интегральных сумм, разбивая отрезок на части точками, образующими геометрическую прогрессию (*Ферма*).

6.7. Найти интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{x}$, $0 < a < b$, как предел интегральных сумм.

6.8. Найти *интеграл Пуассона*

$$\int\limits_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx$$

1) при $|\alpha| < 1$, 2) при $|\alpha| > 1$.

6.9. Доказать, что определения 1 и 2 предела интегральных сумм σ_τ равносильны.

6.10. Пусть функция f ограничена на отрезке $[a;\ b]$, s_τ и S_τ — ее нижняя и верхняя суммы Дарбу, $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ — разбиение отрезка $[a;\ b]$. Доказать:

1) Для любых двух разбиений τ_1 и τ_2 отрезка $[a; b]$ выполняется неравенство $s_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}$.

2) Если $\sigma_\tau = \sigma_\tau(f;\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)$ — интегральная сумма Римана (1), то

$$s_\tau = \inf_{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{k_\tau}} \sigma_\tau, \quad S_\tau = \sup_{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{k_\tau}} \sigma_\tau.$$

3) $S_\tau - s_\tau = \sum\limits_{i=1}^{k_\tau} \omega_i(f)\,\Delta x_i$, где $\omega_i(f)$ — колебание функции f на отрезке $[x_{i-1};\ x_i]$.

6.11. Доказать, что всякая монотонная на отрезке функция интегрируема на нем.

6.12. Доказать, что если функция f непрерывна и положительна на отрезке $[0; 1]$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) f\left(\frac{2}{n}\right) \ldots f\left(\frac{n}{n}\right)} = \exp\left(\int_0^1 \ln f(x)\,dx\right).$$

6.13. Доказать, что если функции f и g непрерывны на отрезке $[a; b]$, $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ — разбиение этого отрезка, $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $\eta_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k_\tau$, то

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sum_{i=1}^{k_\tau} f(\xi_i)\, g(\eta_i)\, \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

6.14. Доказать исходя из определения интеграла, что если функция интегрируема на отрезке, то она ограничена на нем.

6.15. Доказать, что если функция f монотонна на отрезке $[0; 1]$, то

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

6.16. Доказать, что если функция f ограничена и выпукла вверх на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на нем и

$$(b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2} \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Указание. Воспользоваться результатом задачи **10.86**, [1].

6.17. Пусть функция f непрерывно дифференцируема на отрезке $[a; b]$ и

$$\Delta_n = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} n\Delta_n$.

6.18. Сформулировать определение предела $\lim\limits_{|\tau|\to 0} s_\tau$ в терминах пределов последовательностей и доказать его эквивалентность определению 3.

6.19. Доказать: если функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a; b]$, то

$$\lim_{|\tau|\to 0} s_\tau = \lim_{|\tau|\to 0} S_\tau = \int_a^b f(x)\,dx.$$

6.20. Доказать: если J_* и J^* соответственно нижний и верхний интегралы Дарбу функции f, а s_τ и S_τ — ее нижние и верхние суммы Дарбу, то

$$J_* = \lim_{|\tau|\to 0} s_\tau, \quad J^* = \lim_{|\tau|\to 0} S_\tau.$$

6.21. Доказать, что, для того чтобы ограниченная на отрезке $[a;\ b]$ функция f была интегрируема на нем, необходимо и достаточно, чтобы ее верхний J^* и нижний J_* интегралы были равны, причем в этом случае

$$\int_a^b f(x)\,dx = J_* = J^*.$$

6.22. Доказать, что разрывная функция $f(x) = \operatorname{sign}\sin(\pi/x)$ интегрируема на отрезке $[0;\ 1]$.

6.23. Доказать, что функция

$$f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right],$$

если $x \neq 0$, и $f(0) = 0$, интегрируема на отрезке $[0;\ 1]$ ($[y]$ — целая часть числа $y \in \mathbb{R}$).

6.24. Доказать, что *функция Дирихле*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рациональное,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное,} \end{cases}$$

на любом отрезке не интегрируема по Риману.

6.25. Построить неинтегрируемую на отрезке функцию, квадрат которой интегрируем на этом отрезке.

6.26. Построить функцию, непрерывную в точке и не интегрируемую ни на каком отрезке, содержащем эту точку.

6.27. *Функцией Римана* называется функция, равная $1/q$ в каждой рациональной точке, которая записана в виде несократимой дроби $p/q \neq 0$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, и равная нулю во всех остальных точках. Доказать, что функция Римана на любом отрезке интегрируема.

6.28. Пусть функция f непрерывна на полуинтервале $(a;\ b]$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Доказать, что при любом доопределении функции f в точке $x = a$ полученная функция будет интегрируема на отрезке $[a;\ b]$ и значение интеграла от нее не зависит от значения функции в точке $x = a$.

6.29. Пусть функция f ограничена на полуинтервале $(a;\ b]$, при любом $\varepsilon > 0$ $(0 < \varepsilon < b - a)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a + \varepsilon;\ b]$ и существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Доказать, что при любом доопределении функции f в точке $x=a$ она будет интегрируема по Риману на отрезке $[a; b]$ и

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

(и, следовательно, интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ не зависит от значения $f(a)$).

6.30. Доказать, что функция, ограниченная и имеющая конечное число точек разрыва на данном отрезке, интегрируема на нем по Риману, причем значение интеграла не зависит от значений функции в точках разрыва.

6.31. Доказать, что если функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$, $c\leqslant f(x)\leqslant d$ для всех $x\in[a; b]$ и функция g непрерывна на отрезке $[c; d]$, то композиция $g\circ f$ также интегрируема на отрезке $[a; b]$.

6.32. Привести пример таких функций f и g, интегрируемых соответственно на отрезках $[a; b]$ и $[c; d]$, что $c\leqslant f(x)\leqslant d$ для всех $x\in[a; b]$, а композиция $g\circ f$ не интегрируема на отрезке $[a; b]$.

6.33. Доказать, что если функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$, то существует такая последовательность непрерывных на этом отрезке функций f_n, $n=1, 2, \ldots$, что для любой точки $c\in[a; b]$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^c f_n(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx.$$

6.34. Доказать, что если функция разрывна в каждой точке отрезка, то она не интегрируема на этом отрезке.

6.35. Доказать, что, для того чтобы ограниченная на некотором отрезке функция была интегрируемой на нем, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon>0$ существовала конечная или счетная система интервалов, которые содержали бы все точки разрыва заданной функции и сумма длин которых была бы меньше заданного ε.

---

2. Свойства интеграла.

1. $\int_a^b dx=b-a$.

2. Если функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[a^*; b^*]$, содержащемся в $[a; b]$.

3. *Аддитивность интеграла.* Если функция f интегрируема на отрезках $[a; c]$ и $[c; b]$, то она интегрируема и на отрезке

$[a;\ b]$, причем

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx,\quad a\leqslant c\leqslant b.$$

4. *Линейность интеграла.* Если функции f_k, интегрируемы на отрезке $[a;\ b]$, то для любых чисел λ_k, $k=1, 2, \ldots, n$, функция $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k f_k$ также интегрируема на отрезке $[a;\ b]$ и

$$\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_k(x)\right)dx=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\int_a^b f_k(x)\,dx.$$

5. Произведение интегрируемых на отрезке функций интегрируемо на нем.

6. Если функция f интегрируема на отрезке $[a;\ b]$ и

$$\inf_{[a;\ b]}|f(x)|>0,$$

то функция $1/f(x)$ также интегрируема на этом отрезке.

7. *Интегрирование неравенств.* Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a;\ b]$ и для всех $x\in[a;\ b]$ выполняется неравенство $f(x)\geqslant g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx\geqslant\int_a^b g(x)\,dx.$$

В частности, если на отрезке $[a;\ b]$ функция $f(x)\geqslant 0$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx\geqslant 0.$$

8. Если неотрицательная функция интегрируема на отрезке $[a;\ b]$ и существует такая точка $x_0\in[a;\ b]$, что функция в ней непрерывна и принимает положительное значение, то

$$\int_a^b f(x)\,dx>0.$$

Из свойств 4, 7 и 8 следует, что если на отрезке $[a;\ b]$ для интегрируемых функций f и g выполняется неравенство $f(x)\leqslant g(x)$ и если существует точка $x_0\in[a;\ b]$, в которой $f(x_0)<g(x_0)$, причем обе функции f и g непрерывны в этой точке, то имеет место строгое неравенство:

$$\int_a^b f(x)\,dx<\int_a^b g(x)\,dx.$$

9. Если функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$, то и ее абсолютная величина $|f|$ также интегрируема на этом отрезке и

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx, \quad a \leqslant b.$$

10. *Непрерывность интеграла.* Если функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$, то функции

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{и} \quad G(x) = \int_x^b f(t)\,dt$$

непрерывны на этом отрезке.

Пример 4. Выяснить, какой из интегралов

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^{\pi/2} \sin^7 x\,dx$$

больше.

△ Поскольку на отрезке $[0; \pi/2]$ функции $\sin^7 x$ и $\sin^3 x$ непрерывны (и потому интегрируемы), а на интервале $(0; \pi/2)$ выполняется строгое неравенство $\sin^7 x < \sin^3 x$, то

$$\int_0^{\pi/2} \sin^7 x\,dx < \int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx. \quad \blacktriangle$$

Пример 5. Доказать, что если функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx, \quad 0 < \varepsilon < b-a.$$

△ Выберем произвольно точку $c \in (a; b)$, тогда в силу свойств интеграла 2 и 3 для достаточно малых $\varepsilon > 0$ (а именно меньших, чем $c-a$ и $b-c$) будем иметь

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Отсюда, согласно свойствам 10 и 3, получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{b-\varepsilon} f(x)\,dx\right] = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0} \int_c^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \quad \blacktriangle$$

6.36. Выяснить, какой интеграл больше:

1) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$ или $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

2) $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ или $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

3) $\int\limits_0^1 e^{-x} \sin x\,dx$ или $\int\limits_0^1 e^{-x^2} \sin x\,dx$.

4) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ или $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$.

6.37. Доказать неравенства:

1) $0 < \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}}\,dx < \frac{\pi}{\sqrt[5]{2}}$.

2) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}} < \frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\pi + \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^2+8}}\,dx < \frac{3}{2}$.

3) $\frac{\sqrt{2}}{3} < \int\limits_{-1}^{1} \frac{\cos x}{2+x^2}\,dx < 1$.

6.38. Функция f непрерывна на отрезке $[0;\ 1]$, причем $\int\limits_0^1 f(x)\,dx > 0$. Доказать, что существует отрезок $[a;\ b] \subset [0;\ 1]$, на котором $f(x) > 0$.

6.39. Доказать, что из свойств 4, 7 и 8 интеграла следует, что если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a;\ b]$, если для всех точек $x \in [a;\ b]$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и существует такая точка $x_0 \in [a;\ b]$, для которой $f(x_0) < g(x_0)$, причем функции f и g непрерывны в этой точке, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx < \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

6.40. Будет ли интегрируема на отрезке всякая функция, у которой интегрируема на этом отрезке ее абсолютная величина?

6.41. Если функция $f(x)$ интегрируема на некотором отрезке и не обращается в нем в нуль, то будет ли на этом отрезке всегда интегрируема функция $1/f(x)$?

6.42. Доказать, что если функция f убывает на отрезке $[0; 1]$, то для любого $\theta \in (0; 1)$ выполняется неравенство

$$\theta \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \int_0^\theta f(x)\,dx.$$

6.43. Доказать, что если функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых $\alpha \in [a; b]$ и $\beta \in [a; b]$, $0 < \beta - \alpha < \delta$, имеет место неравенство

$$\int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

6.44. Доказать, что если функция f непрерывна при $x \geqslant 0$ и

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R},$$

то

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\,dt = a.$$

6.45. Построить такую непрерывную при $x \geqslant 0$ функцию, для которой существует конечный предел

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\,dt,$$

а предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ не существует.

6.46. Доказать, что если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a; b]$, то выполняется *неравенство Коши — Буняковского*

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}.$$

6.47. Доказать, что если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a; b]$, $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то справедливо неравенство

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \left[\int_a^b |g(x)|^q dx\right]^{1/q}.$$

Указание. Воспользоваться неравенством $\alpha\beta \leqslant \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$.

6.48. Доказать, что если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a; b]$, $1 < p < +\infty$, то справедливо *неравенство*

Минковского:

$$\left[\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right]^{1/p}.$$

6.49. Доказать, что если функция интегрируема на отрезке $[a;\ b]$, то она обладает свойством интегральной непрерывности

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,dx = 0,$$

где $f(x)=0$ при $x\notin[a;\ b]$.

6.50. Доказать, что если функция f дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0;\ 1]$, то

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right] = \frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

6.51. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a;\ b]$. Доказать, что равенство

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$$

имеет место тогда и только тогда, когда $f(x)=0$ во всех точках непрерывности функции f.

6.52. Доказать свойства 1—10 интеграла, исходя из его определения.

---

3. Формула Ньютона — Лейбница.

Теорема 4. Если функция f интегрируема на отрезке $[a;\ b]$ и непрерывна в точке $x_0\in[a;\ b]$, то функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{5}$$

дифференцируема в точке x_0 и $F'(x_0)=f(x_0)$.

Следствие. При выполнении условий теоремы функция

$$G(x) = \int_x^b f(t)\,dt$$

дифференцируема в точке x_0 и $G'(x_0)=-f(x_0)$.

Теорема 5. Если функция f непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то она имеет на этом отрезке первообразную, причем одной из ее первообразных является интеграл с переменным верхним пределом (5), т. е.

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C.$$

Теорема 6. Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то для *любой* ее первообразной F имеет место формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{6}$$

Эта формула называется *формулой Ньютона — Лейбница*. Ее записывают также в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Если функция F непрерывна на отрезке $[a; b]$ и во всех его внутренних точках выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ (а в концевых точках равенства $F'_+(a) = f(a)$ и $F'_-(b) = f(b)$, где F'_+ и F'_- — соответственно правая и левая производные, могут не выполняться), то формула (6) остается верной. Заметим, что если функция f также непрерывна в точке a, соответственно в точке b, то из непрерывности функции F в точке a, соответственно в точке b, и условия $F'(x) = f(x)$, $a < x < b$, следует существование односторонней производной $F'_+(a) = f(a)$, соответственно $F'_-(b) = f(b)$.

Пример 6. Найти с помощью формулы Ньютона — Лейбница интеграл

$$\int_a^b x^\alpha\,dx, \quad \alpha \neq -1, \quad 0 < a < b.$$

△ Имеем

$$\int_a^b x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_a^b = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \quad ▲$$

Пример 7. Найти интеграл $\displaystyle\int_{\operatorname{sh} 1}^{\operatorname{sh} 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$△ \int_{\operatorname{sh} 1}^{\operatorname{sh} 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\Big|_{\operatorname{sh} 1}^{\operatorname{sh} 2} =$$

$$= \ln \frac{\operatorname{sh} 2 + \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 2}}{\operatorname{sh} 1 + \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 1}} = \ln \frac{\operatorname{sh} 2 + \operatorname{ch} 2}{\operatorname{sh} 1 + \operatorname{ch} 1} = \ln e = 1. \quad ▲$$

В рассмотренных примерах сразу было ясно, какая функция является первообразной подынтегральной функции. Рассмотрим более сложный пример.

Пример 8. Найти интеграл

$$\int_0^1 e^x \arcsin e^{-x}\,dx.$$

△ Найдем первообразную подынтегральной функции. Сделав замену переменного $t=e^{-x}$, применив затем метод интегрирования по частям, получим

$$\int e^x \arcsin e^{-x}\,dx = -\int \frac{\arcsin t}{t^2}\,dt = \frac{1}{t}\arcsin t - \int \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}},$$

где

$$-\int \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{dt}{t^2\sqrt{(1/t)^2-1}} = \int \frac{d\,(1/t)}{\sqrt{(1/t)^2-1}} =$$

$$= \ln\left(\frac{1}{t}+\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}\right)+C.$$

Поэтому окончательно

$$\int e^x \arcsin e^{-x}\,dx = \frac{\arcsin t}{t} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{t}+\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}\right)+C=$$

$$= e^x \arcsin e^{-x} - \frac{1}{2}\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right)+C.$$

Здесь первообразная имеет конечный предел в точке $x=0$ (так же, как и подынтегральная функция), поэтому можно применить формулу (6). В результате получим

$$\int_0^1 e^x \arcsin e^{-x}\,dx = e\arcsin e^{-1} - \frac{\pi}{2} + \ln\left(e+\sqrt{e^2-1}\right). \quad ▲$$

Пример 9. Доказать, что для всех $m\in\mathbb{Z}$ и $n\in\mathbb{Z}$ имеют место равенства:

1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = 0, \quad m\neq n.$

2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx = 0, \quad m\neq n.$

3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx = 0.$

△ 1) Имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad m \neq n.$$

Аналогично доказываются и два других равенства. ▲

Пример 10. Доказать неравенства

$$\frac{1}{20\sqrt{2}} < \int\limits_0^1 \frac{x^{19}\, dx}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{20}. \tag{7}$$

△ Проинтегрируем по отрезку $[0; 1]$ очевидное неравенство

$$\frac{x^{19}}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{x^{19}}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^{19}.$$

Поскольку все функции непрерывны и при всех $x \in (0; 1)$ имеют место неравенства

$$\frac{x^{19}}{\sqrt{2}} < \frac{x^{19}}{\sqrt{1+x^2}} < x^{19},$$

то для интегралов выполняются неравенства (см. свойство 8 интегралов):

$$\frac{1}{20\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^1 x^{19}\, dx < \int\limits_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt{1+x^2}}\, dx < \int\limits_0^1 x^{19}\, dx = \frac{1}{20}. \ ▲ \tag{8}$$

Пример 11. Доказать неравенства

$$\frac{4}{9}(e-1) < \int\limits_0^1 \frac{e^x\, dx}{(x+1)(2-x)} < \frac{1}{2}(e-1).$$

△ Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(2-x)}$ на отрезке $[0; 1]$. Ее производная $f'(x) = \dfrac{2x-1}{(x+1)^2(2-x)^2}$ обращается в нуль при $x = 1/2$ и меняет знак в этой точке с минуса на плюс. Поэтому сама функция $f(x)$ имеет в этой точке минимум, причем $f(1/2) = 4/9$. Максимума функция f достигает на концах отрезка $[0; 1]$ и $f(0) = f(1) = 1/2$. Таким образом, для всех $x \in [0; 1]$ выполняются неравенства

$$\frac{4}{9} \leqslant \frac{1}{(x+1)(2-x)} \leqslant \frac{1}{2},$$

а при $x \neq 0$, $x \neq 1/2$ и $x \neq 1$ — строгие неравенства $\frac{4}{9}e^x < \frac{e^x}{(x+1)(2-x)} < \frac{e^x}{2}$. Поэтому

$$\frac{4}{9}\int_0^1 e^x\,dx < \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)(2-x)}\,dx < \frac{1}{2}\int_0^1 e^x\,dx;$$

$$\frac{4}{9}(e-1) < \int_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)(2-x)} < \frac{1}{2}(e-1). \quad \blacktriangle$$

Пример 12. Вычислить интеграл Дирихле:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\,dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

$\triangle$ Использовав формулу

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \cos 2kx = \frac{\sin(2n-1)x}{2\sin x}$$

и заметив, что $\int\limits_0^{\pi/2} \cos 2kx\,dx = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, получим

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \quad \blacktriangle$$

Значение известных интегралов иногда удается использовать для вычисления пределов некоторых числовых последовательностей, если оказывается, что эти последовательности образуют последовательность интегральных сумм соответствующей функции.

Пример 13. Найти предел последовательности

$$s_n = \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}, \quad \alpha > 0.$$

$\triangle$ Поскольку сумма

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k-1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha$$

является интегральной суммой функции $f(x) = x^\alpha$ на отрезке $[0; 1]$, то

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \int_0^1 x^\alpha\,dx = \left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}. \quad \blacktriangle$$

6.53. Доказать, что если функции φ и ψ дифференцируемы на отрезке $[a; b]$, $A \leqslant \varphi(x) \leqslant B$, $A \leqslant \psi(x) \leqslant B$ при $a \leqslant x \leqslant b$, а функция f непрерывна на отрезке $[A; B]$, то функция

$$F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

дифференцируема на отрезке $[a; b]$ и

$$\frac{d}{dx} \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = f(\psi(x))\,\psi'(x) - f(\varphi(x))\,\varphi'(x).$$

6.54. Найти производные:

1) $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int\limits_a^b \sin x^2\,dx.$ 2) $\dfrac{d}{da} \displaystyle\int\limits_a^b \sin x^2\,dx.$

3) $\dfrac{d}{db} \displaystyle\int\limits_a^b \sin x^2\,dx.$ 4) $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int\limits_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt.$

5) $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int\limits_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$ 6) $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int\limits_{\sin x}^{\cos x} \cos \pi t^3\,dt.$

Найти интегралы (**6.55**—**6.106**).

6.55. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{2} x^3\,dx.$ **6.56.** $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \sqrt[3]{x}\,dx.$

6.57. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{2} \sqrt[3]{x}\,dx.$ **6.58.** $\displaystyle\int\limits_{1}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$

6.59. $\displaystyle\int\limits_{1}^{2} (x^2 - 2x + 3)\,dx.$ **6.60.** $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 + x - 1)\,dx.$

6.61. $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})\,dx.$ **6.62.** $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} \sin x\,dx.$

6.63. $\displaystyle\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}.$ **6.64.** $\displaystyle\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

6.65. $\displaystyle\int\limits_{-\pi/4}^{0} \frac{dx}{\cos^2 x}.$ **6.66.** $\displaystyle\int\limits_{2}^{9} \sqrt[3]{x-1}\,dx.$

6.67. $\displaystyle\int\limits_{1}^{2} e^x\,dx.$ **6.68.** $\displaystyle\int\limits_{0}^{2} 2^x\,dx.$

6.69. $\int\limits_2^4 \frac{dx}{x}$.

6.70. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{2x-1}$.

6.71. $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x^6}$.

6.72. $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

6.73. $\int\limits_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x\ln x}$.

6.74. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx$.

6.75. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx$.

6.76. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg}^4 x\,dx$.

6.77. $\int\limits_0^2 \operatorname{sh}^3 x\,dx$.

6.78. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

6.79. $\int\limits_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}\,dx$.

6.80. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^2(x-1)}\,dx$.

6.81. $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^2-2x-8}$.

6.82. $\int\limits_0^2 \frac{2x-1}{2x+1}\,dx$.

6.83. $\int\limits_0^1 \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$.

6.84. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

6.85. $\int\limits_{3/4}^2 \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.

6.86. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

6.87. $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-1}$.

6.88. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

6.89. $\int\limits_1^2 \frac{e^{1/x^2}}{x^3}\,dx$.

6.90. $\int\limits_1^e \frac{\cos(\ln x)\,dx}{x}$.

6.91. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$.

6.92. $\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

6.93. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

6.94. $\int\limits_0^{\pi/4} \cos^3 x\,dx$.

6.95. $\int\limits_0^{1/3} \operatorname{ch}^2 3x\,dx$.

6.96. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

6.97. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$. **6.98.** $\int\limits_0^1 xe^{-x}\,dx$.

6.99. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$. **6.100.** $\int\limits_1^3 \ln x\,dx$.

6.101. $\int\limits_1^2 x\ln x\,dx$. **6.102.** $\int\limits_0^{1/2} \arcsin x\,dx$.

6.103. $\int\limits_0^{\pi} x^3\sin x\,dx$. **6.104.** $\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx$.

6.105. $\int\limits_0^{e} \sin\ln x\,dx$. **6.106.** $\int\limits_0^2 |1-x|\,dx$.

6.107. Доказать, что

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ 2\pi, & \text{если } m = n, \end{cases}$$

$$m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(Если функция f имеет вид $f(x) = u(x) + iv(x)$, где функции $u(x)$ и $v(x)$ принимают действительные значения и интегрируемы на отрезке $[a; b]$, то по определению

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b u(x)\,dx + i\int\limits_a^b v(x)\,dx.)$$

6.108. Доказать неравенства:

1) $\frac{1}{10\sqrt{2}} < \int\limits_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx < \frac{1}{10}$.

2) $\frac{1}{20\sqrt[3]{2}} < \int\limits_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}}\,dx < \frac{1}{20}$.

3) $0 < \int\limits_0^{200} \frac{e^{-5x}\,dx}{x+20} < 0{,}01$.

4) $1 < \int\limits_0^1 \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}\,dx < 1 + \frac{1}{42}$.

5) $1 - \frac{1}{n} < \int\limits_0^1 e^{-x^n}\,dx < 1, \qquad n > 1$.

6) $0 < \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\sin x}{x}\,dx < \ln 3.$

7) $\sin 1 < \int\limits_{-1}^{1} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx < 2\sin 1.$

8) $\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi+2}{2} < \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x(x+1)}\,dx < \ln\frac{\pi+2}{2}.$

9) $\frac{1}{8} < \frac{\pi}{6}\int\limits_{0}^{2} \frac{\sin\frac{\pi}{6}(x+1)}{(x+1)(3-x)}\,dx < \frac{1}{6}.$

10) $0{,}03 < \int\limits_{0}^{1} \frac{x^7}{(e^x+e^{-x})\sqrt{1+x^2}}\,dx < 0{,}05.$

6.109. Найти интегралы:

1) $\int\limits_{0}^{2} f(x)\,dx,$ если $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2-x & \text{при } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

2) $\int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx,$ если $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t\,\frac{1-x}{1-t} & \text{при } t < x \leqslant 1. \end{cases}$

6.110. Построить график функции $F(t) = \int\limits_{0}^{1} x\,|x-t|\,dx.$

6.111. Доказать, что если функция f имеет на отрезке $[a;\ b]$ первообразную F, то функция f интегрируема на этом отрезке и имеет место формула Ньютона — Лейбница:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

6.112. Объяснить, почему неверны равенства:

1) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)dx = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}.$

2) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-1}^{1} = 0.$

3) $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\sec^2 x\,dx}{2+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2}}\Big|_{-1}^{1} = 0.$

6.113. Исходя из свойств интеграла доказать теоремы 4, 5 и 6.

6.114. Для функции f, определенной на отрезке $[a;\ b]$, назовем ее *первообразной в широком смысле* всякую непрерывную на этом отрезке функцию F такую, что во всех точках отрезка $[a;\ b]$, кроме конечного их множества, выполняется условие $F'(x) = f(x)$.

Доказать исходя из свойств интеграла 1—10, что если у функции f на отрезке $[a;\ b]$ существует первообразная F в широком смысле, то функция f интегрируема на этом отрезке и имеет место формула Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

6.115. Найти интеграл

$$\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{1/x}}\right) dx.$$

6.116. Доказать, что

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx = \frac{n\pi}{2}, \qquad n \in \mathbb{N} \quad (\textit{Фейер}).$$

Указание. Воспользоваться значением интеграла Дирихле (см. пример 12).

6.117. Доказать равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2,$$

использовав интеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

6.118. Доказать равенство

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{\pi}{4},$$

использовав интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

6.119. С помощью определенных интегралов найти пределы следующих числовых последовательностей:

1) $s_n = \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$.

2) $s_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$.

3) $s_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;

4) $s_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{2n-1}{n^2}$.

5) $s_n = \frac{1^3}{n^4} + \frac{2^3}{n^4} + \frac{3^3}{n^4} + \ldots + \frac{(4n-1)^3}{n^4}$.

6) $s_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}$.

6.120. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right],$$

если функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$.

6.121. Найти пределы следующих числовых последовательностей:

1) $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}$.

2) $s_n = \sin\frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$.

3) $s_n = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}, \qquad x>0.$

4) $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^{k/n}}{n+\frac{1}{k}}$.

6.122. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2\,dt}{x}$.
2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2\,dt}{\sqrt{x^2+1}}$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,dt}$.
4) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg} t}\,dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin t}\,dt}$.

6.123. Доказать, что

$$\int_0^x e^{t^2}\,dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x} \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

6.124. Доказать, что если $f(x)$ — непрерывная положительная при $x \geqslant 0$ функция, то функция

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x t f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}$$

возрастает на промежутке $[0, +\infty)$.

---

4. Формула замены переменного. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a;\ b)$, функция $\varphi(t)$ — определена и непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на интервале $(\alpha;\ \beta)$, причем для всех $t \in (\alpha;\ \beta)$ выполняется неравенство $a < \varphi(t) < b$ и, следовательно, имеет смысл композиция $f \circ \varphi$ функций φ и f.

Если

$$\alpha_0 \in (\alpha;\ \beta),\quad \beta_0 \in (\alpha;\ \beta),\quad a_0 = \varphi(\alpha_0),\quad b_0 = \varphi(\beta_0),$$

то имеет место формула

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)\,dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{9}$$

Эта формула называется *формулой замены переменного в определенном интеграле.*

Отметим специальный случай этой формулы: если функция f непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, а функция φ непрерывно дифференцируема и возрастает на отрезке $[\alpha;\ \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{10}$$

Формулы (9) и (10) остаются справедливыми и в случае, если вместо непрерывности функций f и φ' потребовать лишь их интегрируемость.

Пример 14. Найти интеграл

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx.$$

△ Применим формулу замены переменного, положив $1+x=t^2$, $t>0$. Тогда $dx=2t\,dt$, новые пределы интегрирования равны $\alpha=1$, $\beta=\sqrt{2}$. По формуле (10) получаем

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx=2\int_1^{\sqrt{2}}(t^2-1)\,t^2\,dt.$$

Задача свелась к вычислению определенного интеграла от многочлена:

$$\int_1^{\sqrt{2}}(t^2-1)\,t^2dt=\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}-1}{5}-\frac{2\sqrt{2}-1}{3}=\frac{2}{15}(\sqrt{2}+1).$$

Таким образом

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx=\frac{4}{15}(\sqrt{2}+1).\quad ▲$$

Пример 15. Найти интеграл $\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ с помощью замены переменного $x=a\sin t$.

△ Имеем

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

Интеграл можно, конечно, вычислить и применив замену переменного в неопределенном интеграле (это потребует несколько больших вычислений)

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\int\cos^2 t\,dt\,|_{t=\arcsin(x/a)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right).$$

По формуле Ньютона — Лейбница получаем

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)\Bigg|_0^a=\frac{\pi a^2}{4}.\quad ▲$$

Пример 16. Доказать формулу (9).

△ В силу непрерывности функции $f(x)$ на интервале $(a;\,b)$ она имеет на этом интервале первообразную $F(x)$, для которой определена композиция $F(\varphi(t))$. Эта композиция является первообразной на интервале $(\alpha; \beta)$ для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, ибо

$$\frac{d}{dt} F(\varphi(t)) = \frac{dF(x)}{dx}\Big|_{x=\varphi(t)} \frac{d\varphi}{dt} = f(x)\,|_{x=\varphi(t)} \frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

Поэтому, согласно формуле Ньютона — Лейбница,

$$\int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta_0)) - F(\varphi(\alpha_0)) =$$

$$= F(b_0) - F(a_0) = \int\limits_{a_0}^{b_0} f(x)\,dx. \ \blacktriangle$$

Пример 17. Доказать равенство

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{t}{\sin t}\,dt.$$

$\triangle$ Сделав замену переменного $x = \operatorname{tg}(t/2)$, получим

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(t/2))}{\operatorname{tg}(t/2)} \frac{dt}{2\cos^2(t/2)} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{t}{\sin t}\,dt. \ \blacktriangle$$

Пример 18. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{-1}^{2} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx. \tag{11}$$

$\triangle$ Сделав при $x \neq 0$ замену переменного $t = x - \frac{1}{x}$ в соответствующем неопределенном интеграле, получим

$$\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + C$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)' = \frac{1+x^2}{1+x^4}, \qquad x \neq 0. \tag{12}$$

Поскольку

$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

$$\lim_{x \to -0} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

то функция

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & \text{если} \quad x > 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & \text{если} \quad x < 0, \end{cases} \tag{13}$$

будет непрерывной на всей числовой оси, а так как, согласно (12),

$$F'(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4},\qquad x\neq 0, \tag{14}$$

то в силу непрерывности функции $(1+x^2)/(1+x^4)$ равенство (14) верно и при $x=0$. Таким образом, функция (13) является первообразной для подынтегральной функции интеграла (11). Поэтому

$$\int_{-1}^{2}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=F(2)-F(-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{2}}{4}+\pi\right). \ ▲$$

5. Интегрирование по частям. Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a;\ b]$, то

$$\int_a^b u\,dv=uv\,\Big|_a^b-\int_a^b v\,du. \tag{15}$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям*. Она остается справедливой и в случае, если вместо непрерывности производных u' и v' потребовать лишь их интегрируемость.

Пример 19. Найти интеграл

$$\int_1^2 \ln x\,dx,$$

применив формулу интегрирования по частям для определенного интеграла.

△ Имеем

$$\int_1^2 \ln x\,dx=x\ln x\,\Big|_1^2-\int_1^2 dx=2\ln 2-1. \ ▲$$

Пример 20. Найти интеграл

$$J=\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ch}x\cos nx\,dx,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

△ Дважды проинтегрировав по частям, получим

$$J=\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ch}x\cos nx\,dx=\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ch}x\,d\sin nx=$$

$$=\frac{\operatorname{ch}x\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sh}x\sin nx\,dx=\frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sh}x\,d\cos nx=$$

$$=\frac{\operatorname{sh}x\cos nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ch}x\cos nx\,dx=(-1)^n\frac{2\operatorname{sh}\pi}{n^2}-\frac{1}{n^2}J.$$

Найдя из получившегося уравнения значение J, будем иметь

$$J=(-1)^n \frac{2\,\mathrm{sh}\,\pi}{n^2+1}. \quad \blacktriangle$$

Пример 21. Найти интеграл

$$J_{\alpha,\,n}=\int_0^1 x^\alpha \ln^n x\,dx, \qquad \alpha>0, \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{16}$$

$\triangle$ Подынтегральная функция $f(x)=x^\alpha \ln^n x$ определена и непрерывна на полуинтервале $(0;\ 1]$, и у нее существует предел

$$\lim_{x\to+0} f(x)=0.$$

Доопределим функцию f нулем при $x=0$, тогда получим непрерывную, а следовательно, и интегрируемую на отрезке $[0;\ 1]$ функцию. Данный интеграл (16) и понимается как интеграл от этой функции. Интегрируя по частям, будем иметь

$$J_{\alpha,\,n}=\int_0^1 (\ln x)^n\,d\,\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}=\frac{1}{\alpha+1}\,x^{\alpha+1}(\ln x)^n\Big|_{+0}^1-$$

$$-\frac{n}{\alpha+1}\int_0^1 x^\alpha \ln^{n-1} x\,dx=-\frac{n}{\alpha+1}J_{\alpha,\,n-1}.$$

Из получившейся рекуррентной формулы следует, что

$$J_{\alpha n}=$$

$$=(-1)^n\frac{n!}{(\alpha+1)^n}J_{\alpha,\,0}=(-1)^n\frac{n!}{(\alpha+1)^n}\int_0^1 x^\alpha\,dx=(-1)^n\frac{n!}{(\alpha+1)^{n+1}}. \quad \blacktriangle$$

Пример 22. Многочлены, задаваемые формулами

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n}, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{17}$$

называются *многочленами Лежандра*. Доказать, что, каков бы ни был многочлен Q_m степени $m<n$, имеет место равенство

$$\int_{-1}^1 Q_m(x)P_n(x)\,dx=0. \tag{18}$$

$\triangle$ Заметив, что функция $\dfrac{d^k(x^2-1)^n}{dx^k}$ при $k=0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$ обращается в нуль в точках $x=-1$ и $x=1$, имеем, интегрируя последовательно по частям,

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x)\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,dx = Q_m(x)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\Bigg|_{-1}^{1} -$$

$$-\int_{-1}^{1} Q'_m(x)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\,dx = \ldots$$

$$\ldots = (-1)^m Q_m^{(m)}(x)\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-m}(x^2-1)^n}{dx^{n-m}}\,dx =$$

$$= (-1)^m Q_m^{(m)}(x)\frac{d^{n-m-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-m-1}}\Bigg|_{-1}^{1} = 0.$$

Поскольку многочлен $\dfrac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ только постоянным множителем отличается от многочлена Лежандра (17), то равенство (18) доказано. ▲

6.125. Можно ли в интеграле $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ при замене переменной $x=\sin t$ в качестве новых пределов интегрирования взять числа π и $\pi/2$?

6.126. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-l;\ l]$. Доказать, что:

1) Если f — четная функция, то

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int_0^l f(x)\,dx. \qquad (19)$$

2) Если f — нечетная функция, то

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0. \qquad (20)$$

Найти интегралы (**6.127—6.168**):

6.127. $\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt[3]{\sin x}\,dx.$

6.128. $\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2}\sin x\,dx.$

6.129. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 x + x^2\sin x)\,dx.$

6.130. $\int_{-1}^{1} \cos x \operatorname{th} x\,dx.$

6.131. $\int_{-1}^{1} (e^x + e^{-x})\operatorname{tg} x\,dx.$

6.132. $\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \left(x^2 \sin 5x + \cos\frac{x}{3} + \operatorname{tg}^3 x\right) dx.$

6.133. $\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{2x^7 - x^5 + 2x^3 - x + 1}{\cos^2 x}\, dx.$

6.134. $\int\limits_{0}^{2} e^{x^2} x\, dx.$

6.135. $\int\limits_{0}^{1} x^2 \sqrt{1 - x^2}\, dx.$

6.136. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx.$

6.137. $\int\limits_{0}^{\ln 2} x e^{-x}\, dx.$

6.138. $\int\limits_{0}^{\pi} x \sin x\, dx.$

6.139. $\int\limits_{0}^{\pi/4} x \sin 2x\, dx.$

6.140. $\int\limits_{0}^{2\pi} x^2 \cos x\, dx.$

6.141. $\int\limits_{0}^{1} \arccos x\, dx.$

6.142. $\int\limits_{1}^{3} \operatorname{arctg} \sqrt{x}\, dx.$

6.143. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}.$

6.144. $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^{2x} + 2e^x}{e^{2x} + 1}\, dx.$

6.145. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{2 - \sin x}.$

6.146 $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{3 + \cos x}.$

6.147. $\int\limits_{0}^{3/4} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$

6.148. $\int\limits_{1}^{9} x \sqrt[3]{1 - x}\, dx.$

6.149. $\int\limits_{-3}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$

6.150. $\int\limits_{0}^{1} x^{15} \sqrt{1 + 3x^8}\, dx.$

6.151. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin x \sin 2x \sin 3x\, dx.$

6.152. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \operatorname{sh}^4 x\, dx.$

6.153. $\int\limits_{1}^{2} x^2 \ln x\, dx.$

6.154. $\int\limits_{1}^{n} x^n \ln x\, dx.$

6.155. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\, dx.$

6.156. $\int\limits_{0}^{1} x(2 - x^2)^{12}\, dx.$

6.157. $\int\limits_{0}^{1} \arcsin \sqrt{x}\, dx.$

6.158. $\int\limits_{0}^{\pi} e^x \cos^2 x\, dx.$

6.159. $\int\limits_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx.$

6.160. $\int\limits_{0}^{e} (x\ln x)^2\,dx.$

6.161. $\int\limits_{0}^{3} \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx.$

6.162. $\int\limits_{a}^{2a} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\,dx,\ a\neq 0.$

6.163. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{x^2+x+1}.$

6.164. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx.$

6.165. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{dx}{a+b\cos x},\qquad |b|<a.$

6.166. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1},\qquad \alpha\neq\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

6.167. $\int\limits_{1/2}^{2} \left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,dx.$

6.168. $\int\limits_{e^{-2\pi n}}^{1} \left|\left(\cos\ln\frac{1}{x}\right)'\right|dx,\qquad n\in\mathbb{N}.$

6.169. Доказать, что если непрерывная на отрезке $[a;\ b]$ функция f в точках, симметричных относительно точки $x=(a+b)/2$, принимает равные значения, то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = 2\int\limits_{a}^{(a+b)/2} f(x)\,dx.$$

6.170. Доказать, что для любой непрерывной на отрезке $[a;\ b]$ функции f имеет место равенство

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(a+b-x)\,dx.$$

6.171. Доказать, что если функция f непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = (b-a)\int\limits_{0}^{1} f(a+(b-a)x)\,dx.$$

6.172. Для непрерывной при $x\geqslant 0$ функции f доказать равенство

$$\int\limits_{0}^{a} x^3 f(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{a^2} xf(x)\,dx,\qquad a>0.$$

6.173. Для непрерывной при $x \geqslant 0$ функции f, доказать, что

$$\int_0^a x^{r+1} f(x^r)\,dx = \frac{1}{r}\int_0^{a^r} x^{2/r} f(x)\,dx, \qquad a > 0, \quad r \geqslant 1.$$

6.174. Доказать, что для любой непрерывной на отрезке $[0; 1]$ функции f имеют место равенства:

1) $$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx.$$

2) $$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$$

6.175. Доказать формулу интегрирования по частям для определенного интеграла с помощью формулы Ньютона — Лейбница.

6.176. Доказать, что для $n+1$ раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a; b]$ функций $u(x)$ и $v(x)$ имеет место формула

$$\int_a^b uv^{(n+1)}\,dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^{(k)} v^{(n-k)}\Big|_a^b + (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)} v\,dx.$$

6.177. Доказать, что для полинома Лежандра (см. (17)) имеет место формула

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}.$$

6.178. Доказать, что если функция $n+1$ раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a; b]$, то для любых точек $x_0 \in [a; b]$ и $x \in [a; b]$ имеет место формула (называемая *формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме*)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

6.179. Доказать, что если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и для всех $t \in [0; b-a]$ выполняется равенство $f(a+t) = f(b-t)$, то

$$\int_a^b x f(x)\,dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx.$$

6.180. Доказать, что одна из первообразных четной функции является нечетной функцией, а любая первообразная нечетной функции — четной функцией.

6.181. Для непрерывной на отрезке $[a;\ b]$ функции f найти $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x+y)\,dy$, где $0 < a - \alpha < x < b - \beta$.

6.182. Найти интеграл $\displaystyle\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 + x^2}\,dx$.

6.183. Пусть

$$F(x) = -\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{3x(x^2-1)}{x^4 - 4x^2 + 1}.$$

Показать, что

$$F'(x) = \frac{1+x^4}{1+x^6}$$

и объяснить, почему

$$\int_0^1 \frac{1+x^4}{1+x^6}\,dx$$

не равен $F(x)\Big|_0^1$.

6.184. Найти $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{1 + 2\alpha\cos x + \alpha^2}\,dx$ и построить график функции $F(\alpha)$.

6.185. Найти интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2}}$.

6.186. Доказать равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1 - 2r\cos x + r^2}\,dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{если } 0 \leqslant r < 1, \\ 0, & \text{если } r = 1, \\ -2\pi, & \text{если } r > 1. \end{cases}$$

Найти интегралы (6.187—6.196):

6.187. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \varepsilon\cos x}, \qquad 0 \leqslant \varepsilon < 1.$

6.188. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1 - 2ax + a^2)(1 - 2bx + b^2)}}, \quad |a| < 1,\ |b| < 1,\ ab > 0.$

6.189. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}.$ **6.190.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$

6.191. $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx,$ если $f(x)=\dfrac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$.

6.192. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$ **6.193.** $\displaystyle\int_{0}^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx.$

6.194. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x},\quad a>0,\ b>0.$

6.195. Доказать, что

$$\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2}=\frac{\pi}{4}\,\frac{a^2+b^2}{a^3b^3},\quad a>0,\ b>0.$$

6.196. Найти интеграл

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{a\cos^2 x+2b\cos x\sin x+c\sin^2 x},\quad ac-b^2>0.$$

6.197. Доказать, что если f — непрерывная на всей числовой оси периодическая с периодом T функция, то для любого числа a выполняется равенство

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx=\int_{0}^{T} f(x)\,dx.$$

6.198. Доказать, что при n нечетном функции

$$f(x)=\int_{0}^{x}\sin^n t\,dt \quad\text{и}\quad g(x)=\int_{0}^{x}\cos^n t\,dt$$

периодические с периодом 2π, а при n четном каждая из этих функций является суммой линейной функции и периодической.

6.199. Доказать, что если f — непрерывная на всей числовой оси периодическая с периодом T функция, то функция $F(x)=\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ является суммой линейной функции и периодической с периодом T.

6.200. *Средней функцией Стеклова с шагом* $h>0$ периодической и интегрируемой на периоде функции f называется функция

$$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt.$$

Доказать, что если функция f непрерывна, то при любом $h>0$ ее функция Стеклова f_h является непрерывно дифференцируемой функцией, и если период функции f равен T, то

$$\lim_{h\to 0}\sup_{[0;\,T]}|f_h(x)-f(x)|=0.$$

6.201. Доказать, что если периодическая функция f удовлетворяет *условию Гёльдера степени* α

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant M|h|^{\alpha},\quad 0<\alpha\leqslant 1,$$

где M — некоторая постоянная, $h>0$, $x\in\mathbb{R}$, и ее период равен T, то $\sup\limits_{[0;\,T]}|f(x)-f_h(x)|\leqslant Mh^{\alpha}$, где функция $f_h(x)$ определена в задаче 6.200.

6.202. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx.$$

6.203. Доказать равенство

$$\int_0^1 (1-x)^m x^n\,dx=\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!},\qquad m\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}.$$

6.204. Найти интегралы:

1) $\displaystyle\int_0^{\pi}(x\sin x)^2\,dx.$ 2) $\displaystyle\int_0^{\pi}(x\cos x)^2\,dx.$

6.205. Найти интегралы:

1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx.$ 2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx.$

6.206. Доказать для интеграла

$$J_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx,\qquad n\geqslant 2,$$

рекуррентную формулу

$$J_n=\frac{n-1}{n}J_{n-2}.$$

6.207. Найти интегралы:

1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^5 x\,dx.$ 2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^4 x\,dx.$ 3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^6 x\,dx.$

6.208. Доказать, что

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\,\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } n \text{ — четное,}\\[2mm] \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{если } n \text{ — нечетное,}\end{cases}\qquad n\in\mathbb{N}.$$

6.209. Доказать для интеграла $J_n = \int\limits_{-\ln n}^{\ln n} \operatorname{ch}^n x\,dx$ рекуррентную формулу

$$J_n = \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\left(n + \frac{1}{n}\right)^{n-1} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) J_{n-2},\ n > 2.$$

6.210. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 = \frac{\pi}{2}$. Указание. Использовать результат задачи **6.208**.

6.211. Доказать, что

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!\,(n-1)!!}{(m+n)!!}\,\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } m \text{ и } n \text{ четные,} \\ \dfrac{(m-1)!!\,(n-1)!!}{(m+n)!!} & \text{во всех остальных случаях,} \end{cases}$$

$m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.

6.212. Доказать, что при $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства:

1) $\int\limits_0^a (a^2 - x^2)^n\,dx = a^{2n+1}\dfrac{2n!!}{(2n+1)!!}$.

2) $\int\limits_0^a (a^2 - x^2)^{(2n-1)/2}\,dx = a^{2n}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{\pi}{2}$.

6.213. Доказать формулы:

1) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x \sin nx\,dx = \dfrac{1}{2^{n+1}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^k}{k}$, $\quad n \in \mathbb{N}$.

2) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx\,dx = \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$, $\quad n \in \mathbb{N}$.

6.214. Доказать формулы ($m \in \mathbb{N}$):

1) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^m x \cos(m+2)x\,dx = 0$.

2) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^m x \sin(m+2)x\,dx = \dfrac{1}{m+1}$.

3) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x \cos(m+2)x\,dx = -\dfrac{\sin(m\pi/2)}{m+1}$.

4) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x \sin(m+2)x\,dx = \dfrac{1}{m+1}\cos\dfrac{m\pi}{2}$.

6.215. Найти интеграл $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n} x\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$

6.216. Найти интеграл $\int\limits_0^{\pi/4} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n+1} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$

6.217. Доказать, что

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{-ax} \cos^{2n} x\,dx = \frac{1-e^{-2a\pi}}{2^{2n}a}\left(C_{2n}^n + 2\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \frac{a^2}{a^2+4(n-k)^2}\right),$$

$$a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

6.218. Доказать, что

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ax} \cos^{2n+1} x\,dx = 2\operatorname{ch}\frac{a\pi}{2} \frac{(n+1)!}{(a^2+1^2)(a^2+3^2)\ldots(a^2+(2n+1)^2)},$$

$$n \in \mathbb{N}.$$

6.219. Доказать равенство $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2} - 2\cos\frac{\pi n}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^n dx}{1+x^2}$,
$n = 0, 1, 2, \ldots$

6.220. Доказать, что для всякой непрерывной на отрезке $[0; 1]$ функции f выполняется равенство

$$\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin 2x)\cos x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos^2 x)\cos x\,dx.$$

6.221. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f(nx)\,dx$, если функция f непрерывна на промежутке $[0; +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

6.222. Исходя из свойств интеграла, доказать, что для интегрируемой на отрезке $[a; b]$ функции f функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ непрерывна на этом отрезке и дифференцируема во всякой точке x непрерывности функции f, причем $F'(x) = f(x)$. Существует ли производная функции F в точках разрыва функции f?

6.223. *Симметричной производной* функции F в точке x_0 называется по определению $DF(x_0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$. Доказать, что если функция f — интегрируема на отрезке $[a; b]$ и $x_0 \in (a; b)$ является ее точкой разрыва первого рода, то функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

не дифференцируема в точке x_0, но у нее в этой точке существует симметричная производная, причем

$$DF(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)].$$

6.224. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$, функция F имеет на отрезке $[a; b]$ конечное число точек разрыва $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем все они первого рода. Если во всех точках отрезка $[a; b]$, кроме, быть может, конечного множества его внутренних точек, функция F дифференцируема и $F'(x) = f(x)$, то имеет место формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a+0) - \sum_{k=1}^{n} [F(x_k+0) - F_k(x_k-0)].$$

Функция F называется *обобщенной первообразной функции* f.

6.225. Найти непрерывные обобщенные первообразные следующих разрывных функций:

1) $\operatorname{sign} x$. 2) $\operatorname{sign}(\sin x)$. 3) $[x]$. 4) $x[x]$. 5) $(-1)^{[x]}$.

6.226. Найти интеграл $\int_0^x f(t)\,dt$, где

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } |t| < l, \\ 0, & \text{если } |t| > l, \end{cases} \quad l \geqslant 0.$$

6.227. Найти интегралы:

1) $\int_0^3 \operatorname{sign}(x - x^3)\,dx$. 2) $\int_0^2 [e^x]\,dx$.

3) $\int_0^6 [x] \sin\frac{\pi x}{6}\,dx$. 4) $\int_0^\pi x \operatorname{sign}(\cos x)\,dx$.

5) $\int_1^{n+1} \ln[x]\,dx$, $n \in \mathbb{N}$. 6) $\int_0^1 \operatorname{sign}(\sin \ln x)\,dx$.

6.228. Доказать *формулу Гаусса*:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{a_1^2\cos^2\psi + b_1^2\sin^2\psi}},$$

$$0 < b < a, \quad a_1 = (a+b)/2, \quad b_1 = \sqrt{ab}.$$

Указание. Сделать замену переменного:

$$\sin\varphi=\frac{2a\sin\psi}{(a+b)+(a-b)\sin^2\psi}.$$

6.229. Пусть $a>b>0$, $a_1=(a+b)/2$, $b_1=\sqrt{ab}$,

$$a_n=(a_{n-1}+b_{n-1})/2,\quad b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}},\quad n=2,\ 3,\ \ldots$$

Тогда существует конечный предел (см. задачу **8.244**, 1) в [1])

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=c(a,\ b).$$

Доказать, что

$$\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}=\frac{\pi}{2c(a,\ b)}.$$

6.230. Интеграл

$$\mathrm{K}(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\qquad |k|<1,$$

называется *полным эллиптическим интегралом первого рода в форме Лежандра*. Пусть

$$k_1=\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}},$$

доказать, что

$$\mathrm{K}(k)=(1+k_1)\,\mathrm{K}(k_1).$$

6.231. Доказать, что если $\mathrm{K}(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода (см. предыдущую задачу), $|k|<1$, $k_0=k$,

$$k_n=\frac{1-\sqrt{1-k_{n-1}^2}}{1+\sqrt{1-k_{n-1}^2}},\qquad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

то:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{K}(k_n)=\pi/2.$

2) $\mathrm{K}(k)=\dfrac{\pi}{2}\lim\limits_{n\to\infty}(1+k_1)(1+k_2)\ldots(1+k_n).$

6.232. Найти положительную дифференцируемую на промежутке $[0;+\infty)$ функцию f, если известно, что при замене независимой переменной $\xi=\int\limits_0^x f(t)\,dt$ функция f переходит в функцию $e^{-\xi}$.

---

§ 7. Вычисление площадей плоских фигур и длин кривых

1. Вычисление площадей. Пусть функция $y=y(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a;\ b]$. *Площадь фигуры* Φ (рис. 1), ограниченной графиком функции $y=y(x)$, отрезком

$[a;\ b]$ оси Ox и соответствующими отрезками прямых $x=a$ и $x=b$, равна

$$S=\int_a^b y(x)\,dx. \tag{1}$$

Фигуру Ф называют иногда *криволинейной трапецией*.

Если функция $y=y(x)$ задана параметрически уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[\alpha;\ \beta]$, где функция $x(t)$ имеет непрерывную неотрицательную производную на $[\alpha;\ \beta]$, $x(\alpha)=a$,

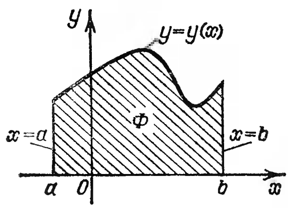

Рис. 1

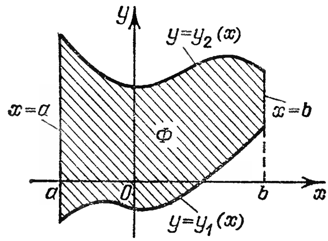

Рис. 2

$x(\beta)=b$, а функция $y(t)$ непрерывна и неотрицательна на $[\alpha;\ \beta]$, то площадь фигуры Ф равна

$$S=\int_\alpha^\beta y(t)\,x'(t)\,dt. \tag{2}$$

Пусть функции $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$ непрерывны на $[a;\ b]$ и $y_2(x)\geqslant y_1(x)$, $x\in[a;\ b]$. *Площадь фигуры* Ф (рис. 2), ограниченной графиками функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ и соответствующими отрезками прямых $x=a$ и $x=b$, равна

$$S=\int_a^b (y_2(x)-y_1(x))\,dx. \tag{3}$$

При аналогичных предположениях относительно данных функций для площади фигуры Ф (рис. 3) имеют место формулы

$$S=\int_c^d x(y)\,dy, \tag{1$'$}$$

$$S=\int_\alpha^\beta x(t)\,y'(t)\,dt, \tag{2$'$}$$

а для площади фигуры Ф (рис. 4)

$$S=\int_c^d (x_2(y)-x_1(y))\,dy. \tag{3$'$}$$

Пусть функция $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, где $0 < \beta - \alpha \leqslant 2\pi$, непрерывна и неотрицательна на $[\alpha; \beta]$. *Площадь сектора* Φ (рис. 5), ограниченного графиком функции $r(\varphi)$ в полярных

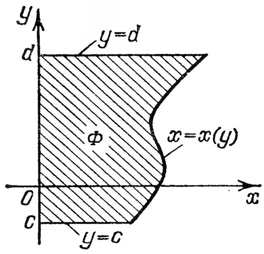

Рис. 3

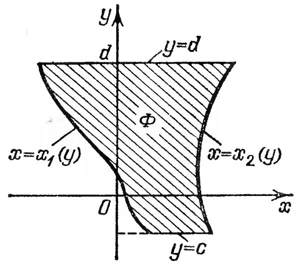

Рис. 4

координатах и соответствующими отрезками лучей $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, равна

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi. \tag{4}$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры Φ, ограниченной параболой $y = 6x - x^2 - 7$ и прямой $y = x - 3$ (рис. 6).

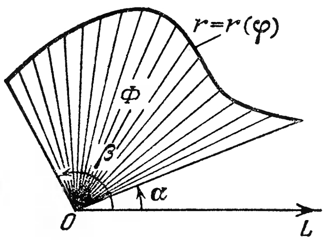

Рис. 5

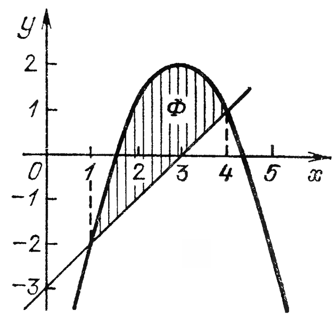

Рис. 6

△ Находим абсциссы точек пересечения данных кривых: из уравнения $6x - x^2 - 7 = x - 3$ имеем $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. По формуле (3) находим площадь фигуры:

$$S = \int_1^4 ((6x - x^2 - 7) - (x - 3))\, dx =$$

$$= \int_1^4 (5x - x^2 - 4)\, dx = \left(\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 4x\right)\Big|_1^4 = \frac{9}{2}. \qquad \blacktriangle$$

Пример 2. К эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

проведена касательная в точке $C\left(a/2;\ b\sqrt{3}/2\right)$. Найти площадь криволинейного треугольника ABC (рис. 7).

△ Дуга AC эллипса и отрезок BC касательной являются графиками функций

$$x=x_1(y)=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} \text{ и } x=x_2(y)=a\left(2-\frac{y\sqrt{3}}{b}\right),$$

$$0\leqslant y\leqslant b\sqrt{3}/2.$$

По формуле (3) имеем

$$S=\int\limits_0^{b\sqrt{3}/2}(x_2(y)-x_1(y))\,dy.$$

Интеграл от функции $x_2(y)$ вычисляем непосредственно:

$$J_2=\int\limits_0^{b\sqrt{3}/2}x_2(y)\,dy=\int\limits_0^{b\sqrt{3}/2}a\left(2-\frac{y\sqrt{3}}{b}\right)dy=\frac{5\sqrt{3}}{8}ab.$$

Интеграл от функции $x_1(y)$ находим с помощью подстановки $y=b\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant \pi/3$:

$$J_1=\int\limits_0^{b\sqrt{3}/2}x_1(y)\,dy=ab\int\limits_0^{\pi/3}\cos^2 t\,dt=\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)ab.$$

В результате получаем $S=J_2-J_1=ab\left(3\sqrt{3}-\pi\right)/6$. ▲

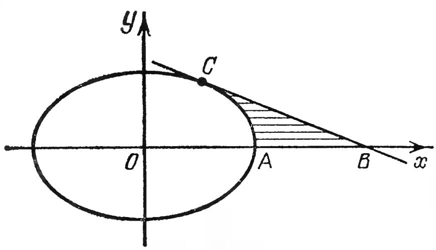

Рис. 7

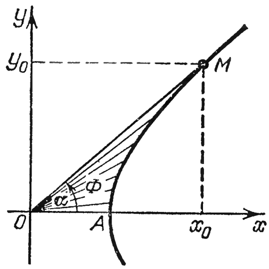

Рис. 8

Пример 3. На гиперболе $x^2-y^2=a^2$ дана точка $M(x_0;\ y_0)$. Найти площадь криволинейного треугольника OAM (рис. 8).

△ Перейдем к полярным координатам по формулам $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$, тогда уравнение гиперболы примет вид

$$r^2=\frac{a^2}{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}=\frac{a^2}{\cos 2\varphi}.$$

Площадь треугольника OAM находим по формуле (4):

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha} r^2\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{\alpha}\frac{d\varphi}{\cos 2\varphi}=\frac{a^2}{4}\ln\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha},$$

где $\operatorname{tg}\alpha=y_0/x_0$. Отсюда, учитывая, что $x_0^2-y_0^2=a^2$, получаем

$$S=\frac{a^2}{4}\ln\frac{(x_0+y_0)^2}{a^2}=\frac{a^2}{2}\ln\frac{x_0+y_0}{a}. \quad \blacktriangle$$

Пример 4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1.$$

$\triangle$ Кривая (рис. 9) симметрична относительно осей Ox и Oy. Найдем площадь четверти данной фигуры, лежащей в первом квадранте, т. е. криволинейного треугольника OAB. Зададим кривую параметрически: $x=a\sin^3 t$, $y=b\cos^3 t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, так, что $x(0)=0$, $x(\pi/2)=a$. Отрезку $[0;\ \pi/2]$ соответствует дуга AB кривой. Площадь треугольника OAB по формуле (2) равна

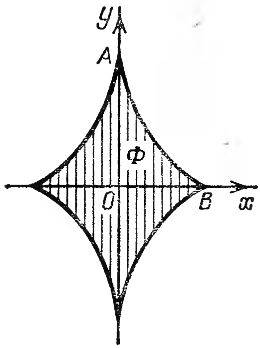

Рис. 9

$$S=\int_0^{\pi/2} y(t)\,x'(t)\,dt. \tag{5}$$

Вычисление этой площади можно упростить следующим образом. Применяя к (5) формулу интегрирования по частям и учитывая, что $y(t)\,x(t)\big|_0^{\pi/2}=0$, получим

$$S=-\int_0^{\pi/2} x(t)\,y'(t)\,dt. \tag{6}$$

Сложив равенства (5) и (6), найдем

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(y(t)\,x'(t)-x(t)\,y'(t))\,dt. \tag{7}$$

Отсюда

$$S=\frac{3ab}{2}\int_0^{\pi/2}(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t)\,dt=\frac{3ab}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=$$

$$=\frac{3ab}{8}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt=\frac{3ab}{16}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{3\pi ab}{32}.$$

Следовательно, площадь данной фигуры равна $3\pi ab/8$. $\blacktriangle$

Пример 5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $x=a\sin t\cos^2 t$, $y=a\cos t\sin^2 t$, $0\leqslant t\leqslant\pi/2$ (рис. 10).

△ Пусть при $t = t_1 \in (0; \pi/2)$ функция

$$x(t) = a \sin t \cos^2 t$$

имеет наибольшее значение x_1. Нижняя дуга OA кривой является графиком функции $y = y_1(x)$, $x \in [0; x_1]$, заданной параметрически формулами

$$x = x(t) = a \sin t \cos^2 t, \quad y = y(t) = a \cos t \sin^2 t$$

при $t \in [0; t_1]$. Верхняя дуга OA является графиком функции $y = y_2(x)$, $x \in [0; x_1]$, заданной параметрически теми же формулами $x = x(t)$, $y = y(t)$, но уже при $t \in [t_1; \pi/2]$. Площадь фигуры $OBAA_1$ и криволинейного треугольника OAA_1 находим по формуле (2). Площадь данной фигуры равна разности этих площадей:

$$S = \int_{\pi/2}^{t_1} y(t)\, x'(t)\, dt - \int_{0}^{t_1} y(t)\, x'(t)\, dt,$$

т. е.

$$S = -\int_{0}^{\pi/2} y(t)\, x'(t)\, dt \qquad (8)$$

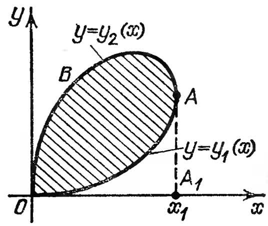

Рис. 10

Формула (8) аналогична формуле (5) из примера 4, но в данном случае рассматриваемая фигура ограничена замкнутой кривой. Часто вычисления по формулам типа формулы (8) можно упростить таким же способом, как и в примере 4. Применяя к (8) формулу интегрирования по частям и замечая, что

$$y(t)\, x(t) \Big|_0^{\pi/2} = 0,$$

приходим к формуле

$$S = \int_{0}^{\pi/2} x(t)\, y'(t)\, dt. \qquad (9)$$

Складывая (8) и (9), получаем формулу, аналогичную (7),

$$S = \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi/2} (x(t)\, y'(t) - y(t)\, x'(t))\, dt. \qquad (10)$$

В данном случае вычисления по формуле (10) значительно проще, чем по формулам (8) или (9):

$$S = \frac{a^2}{2} \int_{0}^{\pi/2} (\sin t \cos^2 t\, (2 \sin t \cos^2 t - \sin^3 t) -$$

$$- \cos t \sin^2 t\, (\cos^3 t - 2 \sin^2 t \cos t))\, dt = \frac{a^2}{2} \int_{0}^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t\, dt = \frac{\pi a^2}{32}. \ ▲$$

Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми (7.1—7.6):

7.1. 1) $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

2) $y = 1/x$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, $a > b > 0$.

3) $y = e^{-x}$, $x = 0$, $y = 0$, $x = a$.

4) $y = a \operatorname{ch}(x/a)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = x_0$.

5) $y = \frac{x^2}{2}$, $y = 2 - \frac{3}{2}x$.

6) $y = 2x - x^2$, $y = x$.

7) $y = x - \frac{\pi}{2}$, $y = \cos x$, $x = 0$.

8) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$.

9) $y = x$, $y = \frac{\pi}{2}\sin x$, $x \geqslant 0$.

7.2. 1) $y = a^x$, $y = a$, $x = 0$, $a > 1$.

2) $y = |\log_a x|$, $y = 0$, $x = 1/a$, $x = a$, $a > 1$.

3) $y = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $y = 2a$, $a > 0$.

4) $y = \sin^2 x$, $y = x\sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

5) $y = \operatorname{tg} x$, $y = \frac{2}{3}\cos x$, $x = 0$.

6) $y = -x^2$, $y = x^2 - 2x - 4$.

7) $y = \ln(1 + x)$, $y = -xe^{-x}$, $x = 1$.

8) $y = 6x^2 - 5x + 1$, $y = \cos \pi x$, $0 \leqslant x \leqslant 1/2$.

9) $y = 6/(x + 5)$, $y = |x|$, $x \geqslant -2$.

10) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$, $y = 0$, $-\pi/4 \leqslant x \leqslant 3\pi/4$.

7.3. 1) $y = 2x^2$, $y = x^3/3$. 2) $y = x(x - a)^2$, $y = 0$.

3) $y = x - x^2$, $y = x\sqrt{1 - x}$.

4) $y = \sin 2x$, $y = \sin x$, $\pi/3 \leqslant x \leqslant \pi$.

5) $y = x^2/2$, $y = 1/(1 + x^2)$.

6) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$, $y + x^2 = 0$, $x = 1$.

7) $y = a^3/(a^2 + x^2)$, $2ay = x^2$.

8) $y = 10/(x^2 + 4)$, $y = (x^2 + 5x + 4)/(x^2 + 4)$.

9) $y = (x^2 - 2x)e^x$, $y = 0$, $x \geqslant 0$.

10) $y = |x|^3 e^{-x^2}$, $|x| = a$, $a > 0$.

7.4. 1) $y = 2x^2e^x$, $y = -x^3e^x$. 2) $x^2 + y^2 = 8$, $2y = x^2$, $y \geqslant 0$.

3) $y = \sqrt{x}/(1 + x^3)$, $y = 0$, $x = 1$.

4) $y = e^{-x}|\sin x|$, $y = 0$, $\pi n \leqslant x \leqslant \pi(n + 1)$; где n — заданное целое число.

5) $2y = x^2$, $x^2 + y^2 = 4y$, $2y \geqslant x^2$.

6) $y = 2 - 4x^2 + 4x^3 - x^4$, $y = 0$, $x = x_1$, $x = x_2$, где x_1 и x_2 — точки максимума данной функции.

7) $y = x^\alpha$, $y = x^{-\alpha}$, $x = a$, $\alpha > 0$, $0 < a < 1$.

8) $y = x^\alpha$, $y = x^{1/\alpha}$, $x \geqslant 0$, $\alpha > 1$.

9) $y = \frac{(ab)^{3/2}}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$.

7.5. 1) $x = y^2(y - 1)$, $x = 0$.

2) $y^2 + x = 4$, $y^2 - 3x = 12$.

3) $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$, $x = 0$.

4) $x^2+y^2=2$, $y^2=2x-1$, $x \geqslant 1/2$.

5) $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=0$.

6) $y=x+1$, $x=\sin \pi y$, $y=0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

7) $y=2^{x-3}+1$, $y=2^{3-x}+1$, $y=1{,}5$.

8) $y=3^x$, $y=\frac{9}{4}(3^{-x}+1)+8/3$, $y=9$.

7.6. 1) $y=1/(3x)$, $y=0$, $y=1$, $x=0$, $x=1$.

2) $y=x$, $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{10}{3}-x$, $x \geqslant 1$.

3) $y=x^2$, $y=x^2+x-1$, $y=5x/2$, $y \leqslant x^2$.

4) $y=\sqrt{3}\,x^2$, $y=\sqrt{4-x^2}$.

5) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, $y=\frac{9}{32}x^2$, $y \leqslant \frac{9}{32}x^2$.

6) $y=4^{-x}$, $y=-\log_4 x$, $y=0$, $x=0$.

7) $y=x^\alpha$, $y=x^{-\alpha}$, $y=0$, $x=a$, $\alpha>0$, $\alpha \neq 1$, $a>1$.

8) $y=\ln(x+6)$, $y=3\ln x$, $x=0$, $y=0$.

7.7. Найти площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, кривой $y=(x-1)^5+1$ и касательной к ней, параллельной прямой $10x-2y-5=0$.

7.8. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-2x+3$, касательной к ней в точке $(3;\ 6)$ и осями координат.

7.9. Найти площадь фигуры, ограниченной данной параболой и касательными к ней, проведенными в точках с абсциссами x_1 и x_2, если:

1) $y=x^2+4x+9$, $x_1=-3$, $x_2=0$.

2) $y=4x-x^2+1$, $x_1=0$, $x_2=3$.

7.10. При каком значении k площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+px+q$ и прямой $y=kx+b$, будет наименьшей (p, q, $b=\mathrm{const}$, $b \geqslant q$)?

7.11. Доказать, что площадь фигуры, ограниченной прямыми $x=x_1$, $x=x_2$, $y=0$ и дугой цепной линии $y=a\operatorname{ch}(x/a)$, пропорциональна длине этой дуги.

7.12. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$x=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2},\quad x=0,\quad y=y_0,\quad 0<y_0<a.$$

7.13. Пусть $y(x)=ax^2+bx+c>0$ при $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Доказать, что площадь фигуры, заданной неравенствами $0 \leqslant y \leqslant y(x)$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, равна

$$S=\frac{1}{6}(x_2-x_1)(y(x_1)+y(x_2)+4y(x_0)),$$

где $x_0=(x_1+x_2)/2$ (*формула Симпсона*).

7.14. Пусть B — вершина параболы, AC — хорда этой параболы, перпендикулярная ее оси и пересекающая ось в точке D. Доказать, что площадь параболического сегмента ABC равна $2ah/3$, где $h=BD$ — высота, $a=AC$ — основание сегмента.

7.15. К параболе в ее вершине A проведена касательная. Из точки B параболы опущен перпендикуляр BC на эту касательную. Доказать, что площадь параболического прямоугольного треугольника ABC равна $ab/3$, где $a = AC$ $b = BC$.

7.16. Прямая касается параболы в точке A, вторая прямая, параллельная оси параболы, пересекает первую прямую в точке B, а параболу — в точке C. Доказать, что площадь треугольника ABC, ограниченного дугой AC параболы и отрезками AB и BC, равна $\frac{1}{3} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC$.

7.17. Две прямые, пересекающиеся в точке B, касаются параболы в точках A и C. Доказать, что площадь треугольника ABC, ограниченного дугой AC параболы и отрезками AB и BC, равны $\frac{1}{6} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC$.

7.18. Прямая касается параболы в точке A, хорда BC параболы параллельна этой прямой. Доказать, что площадь параболического сегмента, ограниченного хордой BC и дугой BAC параболы, равна 4/3 площади треугольника ABC (*Архимед*).

7.19. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и нормалью к ней, проведенной через точку параболы с абсциссой $x = 1$.

7.20. Найти наименьшую площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 2px$ и нормалью к ней.

Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми **(7.21—7.22)**:

7.21. 1) $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$.

2) $y = x^2/2$, $y = (x^2 - 4x + 16)/6$.

3) $x^2 + y^2 = a^2$, $y = x^2/(2p)$, $y \geqslant 0$.

4) $y^2 = 2px$, $y^2 = 2q(h - x)$, где $p, q, h > 0$.

5) $y^2 = 2px$, $(y - y_0)^2 = 2q(x_0 - x)$,

где $p, q, y_0 > 0$, $y_0^2 < 2(p + q)x_0$.

6) $2py = x^2$, $2q(y - y_0) = (x - x_0)^2$,

где $q > p > 0$, $2(q - p)y_0 + x_0^2 > 0$.

7.22. 1) $(y - x)^2 = x^\alpha$, $x = a^2$, $a > 0$, $\alpha > 0$.

2) $(y - x + 2)^2 = 9y$, $x = 0$, $y = 0$.

3) $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$. 4) $a^4y^2 = (a^2 - x^2)^3$.

5) $x^4 - ax^3 + a^2y^2 = 0$. 6) $x^4y^2 = a^5(x - a)$, $x = 2a$.

7) $y^2 = \sin^2 x \cos x$, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$.

7.23. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$(y - \arcsin x)^2 = x - x^2.$$

7.24. Функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, $g(a) = g(b) = 0$, $g(x) > 0$ на интервале $(a; b)$. Доказать, что площади фигур, ограниченных, соответственно, кривыми $y^2 = g(x)$ и $(y - f(x))^2 = g(x)$, равны.

7.25. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой:

1) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ (*эллипс*).

2) $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t$, $c^2 = a^2 - b^2$ (*эволюта эллипса*).

3) $x = a\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$, $y = \frac{2at}{(1+t^2)^2}$ (*улитка*).

4) $x = r(n\cos t - \cos nt)$, $y = r(n\sin t - \sin nt)$, $n - 1 \in \mathbb{N}$ (*эпициклоида*).

5) $x = r(n\cos t + \cos nt)$, $y = r(n\sin t - \sin nt)$, $n - 1 \in \mathbb{N}$ (*гипоциклоида*).

6) $x = a(1-\cos t)\cos t$, $y = a(1-\cos t)\sin t$ (*кардиоида*).

7.26. Найти площадь фигуры, ограниченной аркой *циклоиды*

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1-\cos t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

и отрезком $[0;\ 2\pi a]$ оси абсцисс.

7.27. Найти площадь фигуры, ограниченной дугой *эвольвенты окружности*

$$x = a(\cos t + t\sin t),\ y = a(\sin t - t\cos t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

и отрезком с концами $(a;\ 0)$, $(a;\ -2\pi a)$.

7.28. Найти площадь фигуры, ограниченной одной волной *трохоиды* (*укороченной циклоиды*)

$$x = a(t - k\sin t),\quad y = a(1 - k\cos t),\quad 0 < k < 1,$$

и касательной к этой кривой в ее точках с наименьшей ординатой.

7.29. Найти площадь фигуры, ограниченной петлей заданной кривой:

1) $x = at - t^2$, $y = at^2 - t^3$, $a > 0$.

2) $x = t^2 - a^2$, $y = t^3 - a^2 t$, $a > 0$.

3) $x = 1 + t - t^3$, $y = 1 - 15t^2$.

4) $x = \frac{t(1-t^2)}{1+3t^2}$, $y = \frac{4t^2}{1+3t^2}$.

5) $x = \frac{1}{1+t^2}$, $y = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}$.

6) $x = a\sin 2t$, $y = a\sin t$, $a > 0$.

7) $x = a\left(\frac{2}{\pi}t - \sin t\right)$, $y = a(1-\cos t)$, $a > 0$.

8) $x = a(1 + 2\cos t)$, $y = a(\operatorname{tg} t + 2\sin t)$, $a > 0$ (*конхоида Никомеда*).

7.30. Найти площадь сектора $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, $\varphi_2 - \varphi_1 \leqslant 2\pi$, ограниченного кривой:

1) $r = \frac{a}{2\pi}\varphi$ (*архимедова спираль*).

2) $r\varphi=a$ (*гиперболическая спираль*).

3) $r=Re^{k\varphi}$, $k>0$ (*логарифмическая спираль*).

7.31. Найти площадь фигуры, ограниченной n-м витком архимедовой спирали

$$r=\frac{a}{2\pi}\varphi,\qquad 2\pi(n-1)\leqslant\varphi\leqslant 2\pi n,\qquad n\in\mathbb{N},$$

и отрезком полярного луча.

7.32. Найти площадь фигуры, ограниченной отрезком полярного луча и двумя витками спирали, соответствующими значениям полярного угла

$$\varphi\in[2\pi n;\ 2\pi(n+1)]\ \text{ и }\ \varphi\in[2\pi(n+1);\ 2\pi(n+2)]:$$

1) $r=\dfrac{a}{2\pi}\varphi$. 2) $r\varphi=a$. 3) $r=Re^{k\varphi}$, $k>0$.

Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярных координатах (**7.33—7.35**):

7.33. 1) $r=\dfrac{a}{\cos\left(\varphi-\dfrac{\pi}{3}\right)}$, $\varphi=0$, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

2) $r=a\cos\varphi$. 3) $r=a(1+\cos\varphi)$ (*кардиоида*).

4) $r=b+a\cos\varphi$, $a\geqslant b>0$ (*улитка*).

5) $r=a\sin 2\varphi$ (найти площадь одного лепестка).

6) $r=a\cos 3\varphi$. 7) $r=a\sin 5\varphi$. 8) $r=a\sin n\varphi$, $n\in\mathbb{N}$.

9) $r=\dfrac{p}{1+e\cos\varphi}$, $\varphi=0$, $\varphi=\varphi_0$, $0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0$, $0<e<1$ (*эллипс*).

10) $r=\dfrac{p}{1+e\cos\varphi}$, $\varphi=0, \varphi=\varphi_0$, $0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0$, $e>1$, $e\cos\varphi_0>-1$ (*гипербола*).

7.34. 1) $r=2a\cos\varphi$, $r=a\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$, $\varphi=0$.

2) $r=2-\cos\varphi$, $r=\cos\varphi$.

3) $r=\sqrt{3}\,a\sin\varphi$, $r=2a\sin^2(\varphi/2)$, $r\geqslant 2a\sin^2(\varphi/2)$.

4) $r=a|\operatorname{tg}\varphi|$, $r=b/\cos\varphi$, $0<b<a$.

5) $r=2a\dfrac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}$, $r=2b/\sin\varphi$, $0<b<a$.

7.35. 1) $r^2=2a^2\cos 2\varphi$ (*лемниската*).

2) $r^2=2\sin 2\varphi$, $r=1$, $r\geqslant 1$. 3) $r^2=a^2\cos 4\varphi$.

4) $r^2=a^2\dfrac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}$, $0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{3}$.

5) $r^2=a^2(1-2\cos 2\varphi)$, $r=a$, $r\leqslant a$.

7.36. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах параметрически:

1) $r=a\sqrt{1+t^2}$, $\varphi=t-\operatorname{arctg}t$, $0\leqslant t\leqslant t_0$, $\varphi(t_0)\leqslant 2\pi$

2) $r=\dfrac{a}{\sqrt{1+t^2}}$, $\varphi=t-\operatorname{arctg}t$, $0\leqslant t\leqslant t_0$, $\varphi(t_0)\leqslant 2\pi$.

7.37. Найти площадь фигуры, ограниченной: 1) внешней петлей улитки $|r - 2\cos\varphi| = 1$; 2) ее внутренней петлей.

7.38. Выразить через эллиптические интегралы площадь *«овала» Кассини*

$$r^4 - 2c^2r^2\cos 2\varphi + c^4 = a^4,$$

если:

1) $a > c > 0$; 2) $c > a > 0$.

7.39. Найти площадь фигуры, ограниченной осями координат и кривой

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1 \qquad (a > 0,\, b > 0).$$

7.40. На эллипсе

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

дана точка $(x_0;\, y_0)$, $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной дугой эллипса с концами $(0;\, b)$ и $(x_0;\, y_0)$, осями координат и прямой $x = x_0$.

7.41. Найти площадь меньшего из сегментов, отсеченного от эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

прямой $x = \lambda a$, $0 < \lambda < 1$.

7.42. Найти площадь сектора, ограниченного дугой эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

имеющей концы $A(0;\, b)$ и $M(x_0;\, y_0)$, $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, и отрезками OA и OM.

7.43. На гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

дана точка $(x_0;\, y_0)$, $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. Найти площадь фигуры, ограниченной дугой гиперболы с концами в точках $(a;\, 0)$ и $(x_0;\, y_0)$, осью абсцисс и прямой $x = x_0$.

7.44. Найти площадь фигуры, ограниченной дугами гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и прямыми $y = b$, $y = -b$.

7.45. Найти площадь сектора, ограниченного дугой гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

с концами в точках $A(a;\, 0)$, $M(x_0;\, y_0)$, $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, и отрезками OA и OM.

7.46. Через фокус линии L второго порядка проведена хорда, параллельная оси ординат. Найти площадь отсеченного сегмента

$(x \geqslant 0)$, если: 1) L — парабола $y^2 = 2px$; 2) L — эллипс $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$; 3) L — гипербола $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

7.47. Найти площадь эллипса:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1, \quad A > 0, \quad 4AC > B^2.$$

7.48. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:

1) $(y - 3a)^2 = 4ax, \quad xy = a^2.$

2) $x^2 + 4y^2 = 5a^2, \quad xy = a^2, \quad x \geqslant 0.$

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x^2 + y^2 = ab, \quad x^2 + y^2 \geqslant ab, \quad a > b.$

4) $xy = \frac{x}{a} + ay, \quad x + y = 2\left(a + \frac{1}{a}\right), \quad a > 0.$

5) $\frac{(x + a/2)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(x - a/2)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = b.$

6) $x^2 - y^2 = a^2, \quad (x^2 - a^2)^3 y^2 = a^8, \quad y = 0, \quad x = 3a,$
$x \geqslant 0, \ (x^2 - a^2)^3 y^2 \leqslant a^8.$

7.49. Круг

$$x^2 + y^2 \leqslant 75$$

разделен гиперболой

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{100} = 1$$

на три части. Найти площадь средней части.

7.50. Найти отношение площадей фигур, на которые круг $x^2 + y^2 \leqslant 2ax$ разделен:

1) Параболой $y^2 = 2ax - a^2$.

2) Гиперболой $4x^2 - 3y^2 = a^2$.

7.51. Найти площадь криволинейного четырехугольника, ограниченного дугами эллипсов

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (a > b).$$

7.52. Найти наименьшую площадь фигуры, ограниченной гиперболой $xy = 3$ и прямой, проходящей через точку $(1; 4)$.

Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми (**7.53—7.54**):

7.53. 1) $x^2 + y^2 = 2x, \ x^2 + y^2 = 6x, \quad \sqrt{3}\, y + x = 0, \quad y - \sqrt{3}\, x = 0.$

2) $x^2 + y^2 = 16, \ x^2 + y^2 = 4y, \quad \sqrt{3}\, y - x = 4\sqrt{3}, \quad y + \sqrt{3}\, x = 4.$

3) $x^2 + y^2 = 9, \ x^2 + y^2 = 2\sqrt{3}\, x, \quad \sqrt{3}\, y + x = 0, \quad \sqrt{3}\, y - x = 0, \quad x > 0, \ x^2 + y^2 \leqslant 9.$

4) $x^2 + y^2 = 6, \ x^2 + y^2 = 2x + 2y \ (x^2 + y^2 \geqslant 6).$

7.54. 1) $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$. 2) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

3) $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$. 4) $x^4 + y^4 = ax^2y$.

5) $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$, $x^2+y^2=a^2$ $(x^2+y^2\geqslant a^2)$.

7.55. Найти площадь фигуры, ограниченной петлей:

1) *Листа Декарта* $x^3+y^3=3axy$.

2) *Конхоиды* $(x-a)^2(x^2+y^2)=4a^2x^2$.

7.56. Задать параметрически дугу гиперболы $x^2-y^2=1$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$, приняв за параметр площадь криволинейного треугольника OAM, где AM — дуга гиперболы, $A(1;\ 0)$, $M(x;\ y)$, OA и OM — отрезки, O — начало координат.

7.57. Внутри окружности радиуса R находится точка A на расстоянии a от центра. Кривая образована основаниями перпендикуляров, опущенных из точки A на касательные к окружности. Найти площадь фигуры, ограниченной этой кривой.

7.58. Найти кривую $r=r(\varphi)$, для которой площадь S сектора, ограниченного этой кривой и полярными лучами $\varphi=0$ и $\varphi=\alpha$, вычисляется для любого $\alpha\in(0;\ \pi)$ по формуле

1) $S=ar^n(\alpha)$, $n>2$.

2) $S=kr^2(\alpha)-S_0$ $(k>0,\ S_0>0)$.

7.59. Функция $y=f(x)$ определена, непрерывна и положительна при $x>0$. Пусть $S(c)$ — площадь фигуры, ограниченной осями координат, прямой $x=c$ и графиком функции $y=f(x)$. Найти f, если $S(c)=\alpha c f(c)$ для любого $c>0$ $(0<\alpha\leqslant 1)$.

7.60. Пусть $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Доказать, используя свойства площадей, что для любых $a>0$, $b>0$ верно неравенство

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},$$

причем равенство имеет место только при $b=a^{p-1}$.

---

2. Вычисление длин кривых. *Длина пространственной кривой*, заданной параметрически уравнениями

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ t\in[a;\ b],$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — непрерывно дифференцируемые на $[a;\ b]$ функции, равна

$$s=\int_a^b\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt. \tag{11}$$

Длина плоской кривой, заданной параметрически, равна

$$s=\int_a^b\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt, \tag{12}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывно дифференцируемые на $[a;\ b]$ функции.

Если плоская кривая задана явно уравнением $y=y(x)$, $x\in\in[a;\ b]$, где $y(x)$ — непрерывно дифференцируемая на $[a;\ b]$

функция, то ее длина равна

$$s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{13}$$

Длина плоской кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r=r(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha;\ \beta]$, где $r(\varphi)$— непрерывно дифференцируемая на $[\alpha;\ \beta]$ функция, равна

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi. \tag{14}$$

Длину дуги кривой иногда называют ее *натуральным параметром*. Задание плоской кривой уравнениями $x=x(s)$, $y=$ $=y(s)$, где s — длина дуги этой кривой от некоторой ее точки M_0 до точки $M(x;\ y)$, называют *натуральной параметризацией* кривой. При этом, задав на кривой направление, считают длины дуг до точек в этом направлении положительными, а до точек в противоположном направлении — отрицательными. Уравнение $F(R, s)=0$, связывающее *радиус R кривизны* кривой в точке и длину s ее дуги до этой точки, называют *натуральным* (внутренним) *уравнением* кривой.

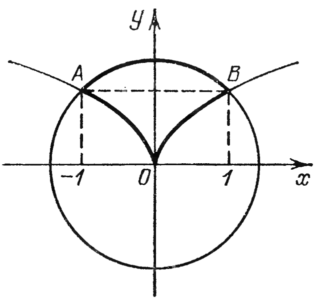

Рис. 11

Пример 6. Найти периметр криволинейного треугольника, ограниченного дугой окружности $x^2+y^2=2$ и графиком функции $y=\sqrt{|x|}$.

$\triangle$ Находим координаты вершин A и B (рис. 11) как точек пересечения окружности и графика функции $y=\sqrt{|x|}$: $A(-1;\ 1)$, $B(1;\ 1)$. Дугу AB окружности зададим явно в виде $y=\sqrt{2-x^2}$, $|x|\leqslant 1$, и длину s_1 дуги AB найдем по формуле (13):

$$s_1=\int_{-1}^1 \sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{2}{2-x^2}}\,dx=\sqrt{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_{-1}^1=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

(этот результат сразу получается и по известной формуле $s_1=R\alpha$, где в данном случае $R=\sqrt{2}$, $\alpha=\pi/2$).

Длины s_2 и s_3 дуг графика OB и OA равны в силу симметрии этих дуг относительно оси Oy. Найдем длину дуги OB. По условию она задана формулой $y=\sqrt{x}$, $0\leqslant x\leqslant 1$, но производная функции $y=\sqrt{x}$ неограничена в окрестности $x=0$. Приняв за независимое переменное y, зададим дугу OB уравнением $x=y^2$, $0\leqslant y\leqslant 1$. Тогда $x'=2y$ и по формуле, аналогичной (13), получим

$$s_2=\int_0^1 \sqrt{1+x'^2}\,dy=\int_0^1 \sqrt{1+4y^2}\,dy.$$

Полагая $y=\frac{1}{2}\operatorname{sh} t$, находим

$$s_2=\frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arsh} 2} \operatorname{ch}^2 t\,dt=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t+t\right)\Big|_0^{\operatorname{arsh} 2}=\frac{1}{4}\left(2\sqrt{5}+\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right).$$

Периметр треугольника равен

$$s_1+2s_2=\frac{\pi}{\sqrt{2}}+\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right). \ \blacktriangle$$

Пример 7. Найти радиус окружности с центром в начале координат, которая делит дугу *астроиды* $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, на три дуги равной длины.

△ Параметризуем дугу астроиды, полагая $x=a\sin^3 t$, $y=a\cos^3 t$, $0\leqslant t\leqslant \pi/2$, и вычислим по формуле (12) длину дуги от точки A, соответствующей $t=0$, до точки, соответствующей $t=t_0\in[0;\ \pi/2]$ (рис. 12):

$$s(t_0)=\int_0^{t_0} \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=$$

$$=3a\int_0^{t_0} \sin t\cos t\,dt=\frac{3a}{2}\sin^2 t_0.$$

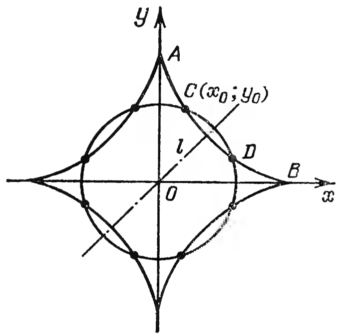

Рис. 12

Длина s всей дуги AB $(t_0=\pi/2)$ равна $s=3a/2$. Из условия, что длина дуги AC равна $s/3$, получаем $\sin^2 t_0=1/3$, откуда $\sin t_0=1/\sqrt{3}$, $\cos t_0=\sqrt{2/3}$,

$$x_0=\frac{a}{3\sqrt{3}},\quad y_0=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\,a,\quad |OC|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}=\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

В силу симметрии астроиды относительно прямой $y=x$ окружность с центром O и радиусом $R=a/\sqrt{3}$ разделит дугу AB на три равные по длине дуги. ▲

Пример 8. Найти длину дуги пространственной кривой

$$x^2=2az-z^2,\qquad y=a\ln\left(1-\frac{z}{2a}\right),\qquad 0\leqslant z\leqslant z_0<2a.$$

△ Возьмем за параметр

$$t=\sqrt{z/2a},\qquad 0\leqslant t\leqslant t_0=\sqrt{z_0/2a}<1.$$

Тогда

$$z = 2at^2, \quad x = 2at\sqrt{1-t^2}, \quad y = a\ln(1-t^2),$$

$$x' = 2a\frac{1-2t^2}{\sqrt{1-t^2}}, \quad y' = -\frac{2at}{1-t^2}, \quad z' = 4at,$$

и по формуле (11) находим

$$s = \int_0^{t_0} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = \int_0^{t_0} \frac{2a}{1-t^2}\,dt = a\ln\frac{1+t_0}{1-t_0} =$$

$$= a\ln\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{z_0}}{\sqrt{2a}-\sqrt{z_0}}. \ ▲$$

Пример 9. Выразить длину эллипса

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

через эллиптическую функцию.

△ Параметризуем дугу эллипса, лежащую в первом квадранте, полагая

$$x = 5\sin t, \quad y = 3\cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/2.$$

Длина s_1 этой дуги равна

$$s_1 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{25\cos^2 t + 9\sin^2 t}\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{25 - 16\sin^2 t}\,dt = 5\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{16}{25}\sin^2 t}\,dt = 5\mathbf{E}\left(\frac{4}{5}\right).$$

Длина всего эллипса равна $4s_1 = 20\mathbf{E}(4/5)$. ▲

7.61. Найти длину дуги кривой:

1) $y = 2x^{3/2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 11.$

2) $x = \frac{2}{3}\sqrt{(y-1)^3}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\sqrt{3}.$

3) $y = \sqrt{2x - x^2} - 1, \quad 1/4 \leqslant x \leqslant 1.$

4) $y = -x^{2/3} - 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 5\sqrt{5}.$

5) $x^2 = 5y^3, \quad x^2 + y^2 \leqslant 6.$

6) $y^2 = \frac{16}{27}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3, \quad y^2 \leqslant x.$

7) $y = \frac{4}{5}x^{5/4}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 9.$

8) $y = \frac{x}{6}\sqrt{x+12}, \quad -11 \leqslant x \leqslant -3.$

9) $y = \sqrt{x/3}\,(1-x), \quad 0 < x_0 \leqslant x \leqslant 1.$

10) $y = \dfrac{1}{2\sqrt{\alpha(\alpha-2)}}(x^{\alpha} + x^{2-\alpha}), \qquad 1 \leqslant x \leqslant x_0.$

11) $y = \dfrac{3}{2}\left(x^{1/3} - \dfrac{1}{5}x^{5/3}\right), \qquad 1 \leqslant x \leqslant 8.$

7.62. При каких рациональных числах α, $\alpha \neq 0$, длина дуги кривой $y = ax^{\alpha}$, $0 < x_0 \leqslant x \leqslant t$, является элементарной функцией t? Указание. Воспользоваться теоремой Чебышёва об интегрируемости дифференциального бинома.

7.63. Найти длину дуги кривой:

1) $y = \operatorname{ch} x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant a.$

2) $y = \operatorname{sh}^2 x, \qquad |x| \leqslant a.$

3) $y = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right), \qquad 1 < a \leqslant x \leqslant b.$

4) $y = \ln \operatorname{th}(x/2), \qquad 0 < a \leqslant x \leqslant b.$

7.64. Пусть $M(x; y)$, $x \neq 0$,— точка цепной линии $y = a \operatorname{ch}(x/a)$, l — касательная к этой линии в точке M, M_1 — проекция M на ось абсцисс, N — проекция M_1 на l. Доказать, что длина дуги AM цепной линии, где $A(0; a)$ — ее вершина, равна $|MN|$.

7.65. Найти длину дуги кривой:

1) $y = x^2/4, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2.$

2) $y = 4 - x^2/2, \quad y \geqslant 0.$

3) $y^2 = 8x, \quad -4 \leqslant y \leqslant 4.$

4) $y = 4\sqrt{x-2}, \qquad 2 \leqslant x \leqslant 3.$

7.66. Найти длину дуги параболы $y^2 = 2px$ между ее точками $(0; 0)$ и $(x_0; y_0)$.

7.67. Доказать, что при качении (без скольжения) параболы $x^2 = 4ay$ по оси Ox ее фокус движется по цепной линии $y = a \operatorname{ch}(x/a)$.

7.68. Доказать, что если цепная линия катится без скольжения по прямой, то центр кривизны точки касания движется по параболе.

Найти длину дуги кривой (**7.69—7.70**):

7.69. 1) $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\ln x}{4}, \qquad 1 \leqslant x \leqslant 3.$

2) $y = \ln x, \qquad 2\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2\sqrt{6}.$

3) $y = e^x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ln 7.$

4) $y = \ln(x^2 - 1), \quad 2 \leqslant x \leqslant 5.$

5) $y = 2\sqrt{1 + e^{x/2}}, \qquad \ln 9 \leqslant x \leqslant \ln 64.$

6) $y = \ln \sin x, \qquad \pi/3 \leqslant x \leqslant 2\pi/3.$

7) $x = \ln \cos y, \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi/3.$

8) $y = \arcsin e^x, \quad -\ln 7 \leqslant x \leqslant -\ln 2.$

7.70. 1) $y=\frac{x}{4}\sqrt{2-x^2}, \quad 0\leqslant x\leqslant 1.$

2) $y=x\sqrt{x/(1-x)}, \quad 0\leqslant x\leqslant 5/6.$

3) $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x, \quad 0\leqslant x\leqslant 9/16.$

4) $x=2\operatorname{arctg}\sqrt{(1-y)/(1+y)}-\sqrt{1-y^2}, \quad |y|\leqslant a<1.$

5) $y=\sqrt{x-x^2}-\arccos\sqrt{1-x}, \quad 11/36\leqslant x\leqslant 15/16.$

6) $y=2\left(\sqrt{e^x-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}\right), \quad 0\leqslant x\leqslant x_0.$

7) $y=2a\ln\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}-4\sqrt{ax}, \quad 0\leqslant x\leqslant x_0<a.$

8) $y=a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\sqrt{a^2-x^2}, \quad 0\leqslant x_0\leqslant x\leqslant a.$

9) $y=\sqrt{x^2-32}+8\ln\left(x+\sqrt{x^2-32}\right), \quad 6\leqslant x\leqslant 9.$

7.71. Длина дуги графика непрерывно дифференцируемой функции $y=f(x)$ от точки $A(0;\ a)$ до точки $M(x;\ f(x))$ пропорциональна с коэффициентом k угловому коэффициенту касательной к графику в точке M. Найти функцию f.

7.72. Найти длину дуги кривой:

1) $x=a\cos^3 t, \quad y=a\sin^3 t, \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$

2) $x=\dfrac{c^2}{a}\cos^3 t, \ y=\dfrac{c^2}{b}\sin^3 t, \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi, \ c^2=a^2-b^2$ (*эволюта эллипса*).

3) $x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t), \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$ (*циклоида*).

4) $x=a(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi), \quad y=a(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi), \quad 0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0$ (*эвольвента круга*).

5) $x=\operatorname{ch}^3 t, \quad y=\operatorname{sh}^3 t, \quad 0\leqslant t\leqslant t_0.$

6) $x=ae^{\alpha\varphi}\cos\varphi, \quad y=ae^{\alpha\varphi}\sin\varphi, \quad 0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0.$

7) $x=\dfrac{t}{\sqrt{a^2+1}}\cos(a\ln t), \quad y=\dfrac{t}{\sqrt{a^2+1}}\sin(a\ln t), \quad t_1\leqslant t\leqslant t_2.$

8) $x=t-\frac{1}{2}\operatorname{sh}2t, \quad y=2\operatorname{ch}t, \quad 0\leqslant t\leqslant t_0.$

9) $x=a(\cos t+\ln\operatorname{tg}(t/2)), \quad y=a\sin t, \quad 0<t_0\leqslant t\leqslant\pi/2$ (*трактриса*).

7.73. Пусть функция $f(t)$ трижды непрерывно дифференцируема на $(a;\ b)$. Найти длину дуги кривой

$$x=f''(t)\cos t+f'(t)\sin t, \quad y=f'(t)\cos t-f''(t)\sin t,$$
$$a<t_1\leqslant t\leqslant t_2<b.$$

7.74. Найти длину дуги кривой:

1) $x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \quad y=(t^2-2)\cos t-2t\sin t, \quad 0\leqslant t\leqslant\pi.$

2) $x=r\,((\alpha+1)\cos t-\cos(\alpha+1)\,t)$, $y=r\,((\alpha+1)\sin t-$
$-\sin(\alpha+1)\,t)$, $0\leqslant t\leqslant t_0\leqslant 2\pi/\alpha$, $r>0$ (*эпициклоида*).

3) $x=r\,((\alpha-1)\cos t+\cos(\alpha-1)\,t)$, $y=r\,((\alpha-1)\sin t-$
$-\sin(\alpha-1)\,t)$, $0\leqslant t\leqslant t_0\leqslant 2\pi/\alpha$, $\alpha>1$, $r>0$ (*гипоциклоида*).

4) $x=a\,(2\cos 2t\cos t+\sin 2t\sin t)$, $y=a\,(\sin 2t\cos t-$
$-2\cos 2t\sin t)$, $0\leqslant t\leqslant\pi$.

5) $x=r\,(a\cos bt-b\cos at)$, $y=r\,(a\sin bt+b\sin at)$,
$0\leqslant t\leqslant 2\pi/(a+b)$, $a>0$, $b>0$, $r>0$.

7.75. Пусть функции $f(t)$ и $g(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы на $(a;\ b)$. Доказать, что длины дуг кривых

$$x=f(t)-g'(t),\quad y=f'(t)+g(t)$$

и

$$x=f'(t)\sin t-g'(t)\cos t,\quad y=f'(t)\cos t+g'(t)\sin t,$$

соответствующие отрезку $[t_1;\ t_2]\subset(a;\ b)$, равны.

Найти длину дуги кривой (**7.76—7.77**):

7.76. 1) $x=8at^3$, $y=3a\,(2t^2-t^4)$, $y\geqslant 0$.
2) $x=6-3t^2$, $y=4t^3$, $x\geqslant 0$.

7.77. 1) $x=\sin^4 t$, $y=\cos^2 t$, $0\leqslant t\leqslant \pi/2$.
2) $x=\cos^4 t$, $y=\sin^4 t$, $0\leqslant t\leqslant\pi/2$.
3) $x=a\cos^5 t$, $y=a\sin^5 t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.
4) $x=a\cos^3 t$, $y=b\sin^3 t$, $0\leqslant t\leqslant t_0\leqslant\pi/2$, $a\neq b$.
5) $x=a\,(\operatorname{sh} t-t)$, $y=a\,(\operatorname{ch} t-1)$, $0\leqslant y\leqslant 7a$, $x\geqslant 0$.

7.78. Найти длину петли кривой:

1) $x=t^2$, $y=t\left(\dfrac{1}{3}-t^2\right)$.

2) $x=2t^3(1-t^2)$, $y=\sqrt{15}\,t^4$.

3) $x=a\,(t^2-1)$, $y=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\left(t^3-\dfrac{t}{4}\right)$.

7.79. Найти длину кривой:

1) $x=\displaystyle\int_0^t\cos\varphi^2\,d\varphi$, $y=\displaystyle\int_0^t\sin\varphi^2\,d\varphi$, $0\leqslant t\leqslant t_0$ (*клотоида*).

2) $x=\displaystyle\int_1^t\frac{\sin\varphi}{\varphi}\,d\varphi$, $y=\displaystyle\int_1^t\frac{\cos\varphi}{\varphi}\,d\varphi$, $1\leqslant t\leqslant t_0$.

7.80. Найти прямую $y=\mathrm{const}$, которая делит арку циклоиды

$$x=a\,(t-\sin t),\quad y=a\,(1-\cos t),\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$$

на три дуги равной длины.

7.81. Материальная точка под действием силы тяжести движется по циклоиде

$$x = a(\varphi + \sin\varphi),$$
$$y = a(1 - \cos\varphi),$$
$$|\varphi| \leqslant \pi$$

(начальная скорость равна нулю, трение отсутствует). Доказать, что период колебаний точки не зависит от ее начального положения. Найти этот период.

7.82. Найти длину дуги кривой:

1) $r = a\sin\varphi$.
2) $r = ae^{k\varphi}$, $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$ (*логарифмическая спираль*).
3) $r = a(1 - \cos\varphi)$ (*кардиоида*).
4) $r = 2(1 + \cos\varphi)$, $r \leqslant 1$.
5) $r = a(1 - \sin\varphi)$, $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant -\pi/6$.
6) $r = a\,\mathrm{th}(\varphi/2)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$.

7.83. Доказать, что длины дуг последовательных витков логарифмической спирали

$$r = ae^{k\varphi}, \quad 2\pi n \leqslant \varphi \leqslant 2\pi(n+1),$$

образуют геометрическую прогрессию, и найти ее знаменатель.

7.84. Пусть $s(\alpha)$ — длина дуги логарифмической спирали

$$r = ae^{k\varphi}, \quad k > 0, \quad \alpha \leqslant \varphi \leqslant 0.$$

Найти

$$\lim_{\alpha \to -\infty} s(\alpha).$$

7.85. Найти длину кривой:

1) $r = a\cos^3(\varphi/3)$. 2) $r = a\sin^4(\varphi/4)$.
3) $r = a\cos^5(\varphi/5)$.

7.86. Найти длину кривой $r = a\sin^n \dfrac{\varphi}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, если: 1) n — четное число; 2) n — нечетное число.

7.87. Найти длину кривой $r = p/\sin^2(\varphi/2)$, $\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/2$.

7.88. Найти длину петли кривой:

1) $r = \dfrac{a}{\sin^3(\varphi/3)}$. 2) $r = \dfrac{a}{\cos^4(\varphi/4)}$.

7.89. Найти длину дуги кривой:

1) $r = a\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$.
2) $r = a\varphi^2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 4$.
3) $r = a\varphi^4$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 3$.
4) $r = a\varphi^3$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 4$.

7.90. Пусть $r(t)$ и $\varphi(t)$, $a < t < b$, — непрерывно дифференцируемые функции. Доказать, что длина дуги кривой $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $a < t_0 \leqslant t \leqslant t_1 < b$ ($(r; \varphi)$ — полярные координаты точки), вычисляется по формуле

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{r^2\varphi'^2 + r'^2}\,dt.$$

7.91. Найти длину дуги кривой:

1) $r = 1 + \cos t, \quad \varphi = t - \operatorname{tg}(t/2), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0 < \pi.$

2) $\varphi = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), \quad 1 \leqslant r \leqslant r_0.$

3) $\varphi = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} - \arccos\frac{a}{r}, \quad a < r_1 \leqslant r \leqslant r_2.$

4) $\varphi = \arccos\frac{r^2 + ab}{(a+b)r}, \quad a \leqslant r \leqslant b.$

7.92. Найти кривую, у которой длина дуги от точки M_0 до произвольной точки M на кривой пропорциональна разности $|OM| - |OM_0|$, O — данная точка плоскости.

7.93. Доказать, что при качении без скольжения кардиоиды

$$r = a(1 - \sin\varphi)$$

по циклоиде

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

острие кардиоиды движется по прямой.

7.94. Найти длину кривой:

1) $(y - \arcsin x)^2 = 1 - x^2.$

2) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}.$

3) $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1.$

7.95. Найти длину одной петли кривой

$$16a^2y^2 = x^2(2a^2 - x^2).$$

7.96. Найти длину дуги кривой $x^{2/3} - y^{2/3} = a^{2/3}$, лежащей внутри параболы $27ax = 10\sqrt{10}\,y^2$.

7.97. Найти длину дуги кривой $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} - \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$ от точки $(a; 0)$ до ее точки $(x_0; y_0)$.

7.98. Выразить через эллиптические интегралы длину дуги кривой:

1) $y = a\sin\omega x, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0 \leqslant \pi/2\omega.$

2) $x = at - b\sin t, \quad y = a - b\cos t, \quad a > 0, \quad b > 0, \ 0 \leqslant t_0 \leqslant \leqslant t \leqslant \pi.$

3) $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0 < \frac{\pi}{4}$ (*лемниската*).

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0 \leqslant a, \ y \geqslant 0, \ a > b.$

5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant y_0, \ x > 0.$

7.99. Найти длину кривой:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

2) $r^2=2a^2\cos 2\varphi$.

3) $r=a\cos\varphi+b$ (*улитка*).

4) $r=a\sin n\varphi$, $n\in\mathbb{N}$, $n>1$.

7.100. Доказать, что длина эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$, равна длине синусоиды $y=\sqrt{a^2-b^2}\sin(x/b)$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi b$.

7.101. Доказать, что длина арки кривой

$x=at-b\sin t$, $y=a-b\cos t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, $a>0$, $b>0$, равна длине эллипса с полуосями $a+b$ и $|a-b|$.

7.102. Доказать, что длина s эллипса с полуосями a и b удовлетворяет неравенствам

$$\pi(a+b)<s<\pi\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

7.103. Найти натуральную параметризацию кривой:

1) $x^2+y^2=a^2$. 2) $y=a\operatorname{ch}(x/a)$.

3) $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$.

4) $r=r_0e^{\varphi}$.

5) $x=r(\varphi-\sin\varphi)$, $y=r(1-\cos\varphi)$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$.

6) $y^2=\frac{8}{27}x^3$, $y\geqslant 0$.

7.104. Составить натуральное уравнение кривой:

1) $y=a\operatorname{ch}(x/a)$. 2) $r=r_0e^{k\varphi}$.

3) $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$.

4) $x=a\cos\varphi+a\ln\operatorname{tg}(\varphi/2)$, $y=a\sin\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$.

5) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

6) $x=r(3\cos\varphi-\cos 3\varphi)$, $y=r(3\sin\varphi-\sin 3\varphi)$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$.

7) $x=r(3\cos\varphi+\cos 3\varphi)$, $y=r(3\sin\varphi-\sin 3\varphi)$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$.

8) $r=a(1-\cos\varphi)$.

9) $x=\int\limits_0^t\cos\varphi^2\,d\varphi$, $y=\int\limits_0^t\sin\varphi^2\,d\varphi$.

7.105. Дуга логарифмической спирали катится без скольжения по прямой. Доказать, что центр кривизны точки касания движется по прямой.

7.106. Циклоида катится без скольжения по прямой. Доказать, что центр кривизны точки касания движется по окружности.

7.107. По данному натуральному уравнению задать кривую в декартовых или полярных координатах:

1) $R=a$. 2) $R=s$.

3) $R=s^2+1$. 4) $s=R^2$.

5) $R^2+(s-1)^2=1$. 6) $R^2+(s-1)^2=4$.

7) $9R^2+s^2=1$. 8) $R=\sqrt{e^{2s}-1}$.

9) $R=e^{-s}$.

Найти длину дуги пространственной кривой (7.108—7.110):

7.108. 1) $x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=bt,\quad 0\leqslant t\leqslant t_0$.

2) $x=ae^{k\varphi}\cos\varphi,\quad y=ae^{k\varphi}\sin\varphi,\quad z=be^{k\varphi},\ z_1\leqslant z\leqslant z_2$.

3) $x=at,\quad y=a\sqrt{t}\sin t,\quad z=a\sqrt{t}\cos t,\ 0<t_1\leqslant t\leqslant t_2$.

4) $x=a(1+\cos t),\quad y=a(t-\sin t),\quad z=4a\sin(t/2),$

$0\leqslant t\leqslant t_0$.

5) $x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad z=4a\cos(t/2),$

$0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

6) $x=a\operatorname{ch}t,\quad y=b\operatorname{sh}t,\quad z=at,\quad 0\leqslant t\leqslant t_0$.

7) $x=e^t,\quad y=e^{-t},\quad z=\sqrt{2}\,t,\quad 0\leqslant t\leqslant t_0$.

8) $x=\cos^3 t,\quad y=\sin^3 t,\quad z=\cos 2t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

9) $x=a\sin^2\varphi,\ y=a\sin\varphi\cos\varphi,\ z=a\ln\cos\varphi,\ |\varphi|\leqslant\varphi_0<\pi/2$.

7.109. 1) $x=2t,\quad y=\ln t,\quad z=t^2,\quad 0<t_1\leqslant t\leqslant t_2$.

2) $x=3t-t^3,\quad y=3t^2,\quad z=3t+t^3,\quad 0\leqslant t\leqslant t_0$.

3) $x=at,\quad y=abt^2,\quad z=\frac{2}{3}ab^2t^3,\quad 0\leqslant t\leqslant t_0$.

7.110. 1) $x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\ z=be^t,\quad 0\leqslant t\leqslant\ln(a/b)$, $a>b$.

2) $x=at\cos t,\quad y=at\sin t,\quad z=at^2/2,\quad 0\leqslant t\leqslant t_0$.

3) $x=at\cos t,\quad y=at\sin t,\quad z=bt,\quad 0\leqslant t\leqslant t_0$.

7.111. Найти длину *кривой Вивиани*

$$x=R\sin^2 t,\ y=R\sin t\cos t,\ z=R\cos t.$$

7.112. Найти длину дуги пространственной кривой:

1) $x^3=3a^2y,\ 2xz=a^2,\ a/3\leqslant y\leqslant 9a$.

2) $x^2=3y,\ \ 2xy=9z,\ \ 0\leqslant y\leqslant 27$.

3) $x^2=9y,\ \ 16xy=9z^2,\ \ |z|\leqslant 12$.

4) $x^2+y^2=az,\ \ x\sin(z/a)-y\cos(z/a)=0,\ 0\leqslant z\leqslant z_0$.

5) $x^2+y^2=z^2,\quad x\cos(\sqrt{2}z)+y\sin(\sqrt{2}z)=0,\quad |z|\leqslant 1$.

6) $4ax=(y+z)^2,\ \ 4x^2+3y^2=3z^2,\ \ 0\leqslant x\leqslant x_0,\ \ z\geqslant 0$.

7) $(y-z)^2=3a(y+z),\ \ 9x^2+8y^2=8z^2,\ 0\leqslant x\leqslant x_0$.

8) $x=a\sin\frac{y}{a},\qquad z=\frac{a}{4}\ln\frac{a+x}{a-x},\qquad 0\leqslant y\leqslant y_0<\frac{\pi a}{2}$.

9) $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x\sin\operatorname{arch}\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2}}-y\cos\operatorname{arch}\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$, $0\leqslant z\leqslant z_0$, где $\operatorname{arch}u$, $u\geqslant 1$, — функция, обратная к функции $\operatorname{ch}t$, $t\geqslant 0$.

7.113. Найти натуральную параметризацию *винтовой линии*

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt.$$

7.114. Найти зависимости кривизны k и кручения $\varkappa$ от длины дуги (*натуральные уравнения*) для кривой:

1) $x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt.$
2) $x = a\,\mathrm{ch}\,t, \quad y = a\,\mathrm{sh}\,t, \quad z = at.$
3) $x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = \sqrt{2}\,t.$
4) $x = at, \quad y = \sqrt{2}\,a\ln t, \quad z = a/t.$

§ 8. Вычисление объемов тел и площадей поверхностей

1. Вычисление объемов тел. Пусть функция $y = y(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a;\ b]$. Объем V тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры Φ (рис. 13), ограниченной графиком функции $y(x)$, отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ и отрезком оси Ox, равен

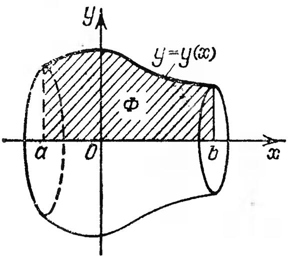

Рис. 13

$$V = \pi\int_a^b y^2(x)\,dx. \tag{1}$$

Если функция $y = y(x)$ задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha;\ \beta]$, где функция $x(t)$ имеет непрерывную неотрицательную производную на $[\alpha; \beta]$ и $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, а функция $y(t)$ непрерывна и неотрицательна на $[\alpha;\ \beta]$, то объем V тела, образованного вращением фигуры Φ (рис. 13) вокруг оси Ox, равен

$$V = \pi\int_\alpha^\beta y^2(t)\,x'(t)\,dt. \tag{2}$$

Если функция $x(t)$ убывает и $x(\alpha) = b$, $x(\beta) = a$, то при тех же прочих условиях

$$V = -\pi\int_\alpha^\beta y^2(t)\,x'(t)\,dt. \tag{2'}$$

Пусть функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и $y_2(x) \geqslant y_1(x) \geqslant 0$, $x \in [a; b]$. Объем V тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры Φ (рис. 14), ограниченной графиками функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ и отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, равен

$$V = \pi\int_a^b \left(y_2^2(x) - y_1^2(x)\right)dx. \tag{3}$$

Для тел, образованных вращением фигуры Ф (рис. 15, 16) вокруг оси Oy, при аналогичных предположениях относительно данных функций, верны, соответственно, следующие формулы для объемов:

$$V = \pi \int_c^d x^2(y)\,dy, \tag{4}$$

$$V = \pi \int_\alpha^\beta x^2(t)\,y'(t)\,dt, \tag{5}$$

$$V = \pi \int_c^d \left(x_2^2(y) - x_1^2(y)\right) dy. \tag{6}$$

Пусть тело расположено в пространстве $Oxyz$ между плоскостями $z = z_0$ и $z = z_0 + H$. Пусть каждое сечение тела плоскостью, перпендикулярной оси Oz, имеет площадь $S(z)$, где

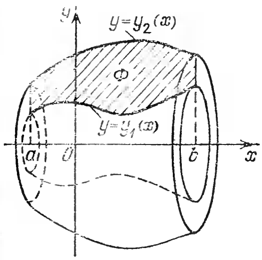

Рис. 14

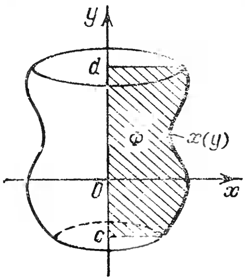

Рис. 15

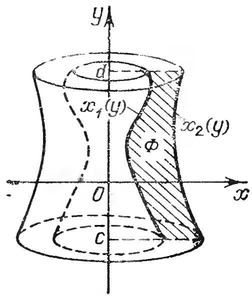

Рис. 16

$S(z)$ — интегрируемая на $[z_0;\ z_0 + H]$ функция. Если это тело имеет объем, то он равен

$$V = \int_{z_0}^{z_0+H} S(z)\,dz. \tag{7}$$

Аналогичные формулы имеют место, если вместо оси Oz взять ось Ox или Oy.

Пример 1. Фигура ограничена дугой параболы $y = 4 - x^2$, отрезком $[-2;\ 0]$ оси Ox и отрезком прямой $y = 3x$. Найти объем тела, образованного вращением этой фигуры вокруг оси Ox.

△ Найдем абсциссу x_C точки C пересечения параболы $y = 4 - x^2$ и прямой $y = 3x$ (рис. 17): $4 - x^2 = 3x$, $x_1 = 1$, $x_2 = -4$, отсюда $x_C = 1$. Искомый объем равен разности объемов V_1 и V_2 тел, образованных при вращении криволинейной трапеции $ABCD$ и треугольника OCD. По формуле (1) находим

$$V_1=\pi\int_{-2}^{1}(4-x^2)^2\,dx=\frac{153}{5}\pi,$$

$$V_2=\pi\int_{0}^{1}(3x)^2\,dx=3\pi.$$

Следовательно, объем заданного тела вращения равен $V_1-V_2=\frac{138}{5}\pi$. ▲

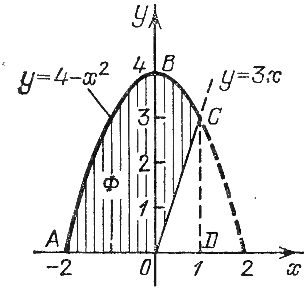

Рис. 17

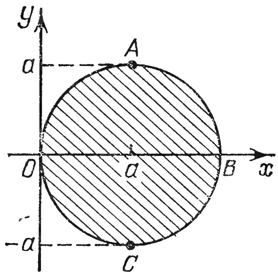

Рис. 18

Пример 2. Найти объем тела, образованного при вращении круга $(x-a)^2+y^2\leqslant a^2$ вокруг оси Oy (рис. 18).

△ Дуги AOC и ABC являются графиками функций

$$x_1(y)=a-\sqrt{a^2-y^2}\quad\text{и}\quad x_2(y)=a+\sqrt{a^2-y^2},\quad -a\leqslant y\leqslant a.$$

Объем тела вращения найдем по формуле (6):

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\left(x_2^2(y)-x_1^2(y)\right)dy=4\pi a\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\,dy=$$

$$=4\pi a^3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=2\pi^2a^3.\ ▲$$

Пример 3. Найти объем тела, образованного при вращении астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, вокруг оси Ox.

△ Астроида симметрична относительно осей Ox и Oy, поэтому искомый объем равен $2V$, где V — объем тела, образованного при вращении криволинейного треугольника OAB (рис. 19) вокруг оси Ox. По формуле (2′) находим

$$V = -\pi \int_0^{\pi/2} a^2 \sin^6 t \cdot 3a \cos^2 t (-\sin t)\, dt =$$

$$= -3\pi a^3 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t)^3 \cos^2 t \, d \cos t = \frac{16}{105} \pi a^3.$$

Следовательно, объем всего тела равен $\frac{32}{105}\pi a^3$. ▲

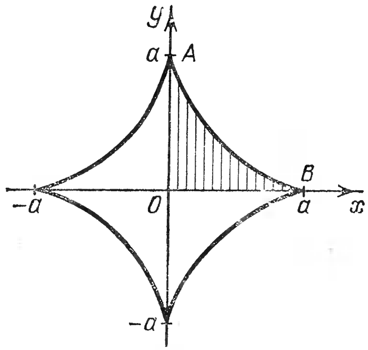

Рис. 19

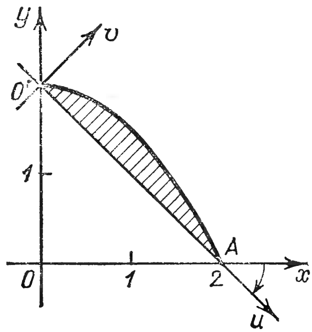

Рис. 20

Пример 4. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной параболой $2y = 4 - x^2$ и прямой $x + y - 2 = 0$, вокруг прямой $x + y - 2 = 0$.

△ Совершив поворот и сдвиг (перенос), перейдем в систему координат $O'uv$, ось $O'u$ которой расположена на оси вращения — прямой $x + y - 2 = 0$ (рис. 20). Угол поворота, как следует из уравнения прямой, равен $-\pi/4$. Формулы перехода имеют вид

$$u = (x - y + 2)/\sqrt{2}, \qquad v = (x + y - 2)/\sqrt{2}.$$

В этой системе координат парабола $2y = 4 - x^2$ будет задана параметрически уравнениями

$$u = u(x) = (x - y(x) + 2)/\sqrt{2}, \qquad v = v(x) = (x + y(x) - 2)/\sqrt{2},$$

где $y(x) = (4 - x^2)/2$. Дуга $O'A$ параболы соответствует отрезку $0 \leqslant x \leqslant 2$. Объем тела вращения находим по формуле (2′):

$$V = \pi \int_0^2 v^2(x) u'(x)\, dx = \pi \int_0^2 \frac{1}{8}(2x - x^2)^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{x^2}{2} \right)' dx =$$

$$= \frac{\pi}{8\sqrt{2}} \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)(1 + x)\, dx = \frac{2\sqrt{2}}{15} \pi. \ ▲$$

Пример 5. Найти объем тела, ограниченного цилиндром $x^2+y^2=R^2$ и плоскостями $y=0$, $z=0$, $\frac{x}{R}+\frac{z}{H}-1=0$, $\frac{x}{R}-\frac{z}{H}+1=0$.

△ В силу симметрии тела относительно плоскости $x=0$ (рис. 21), его объем равен удвоенному объему части тела, находящейся в первом октанте. Каждое сечение тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, является прямоугольником ($ABCD$ на рис. 21). Пусть $OA=x$, тогда

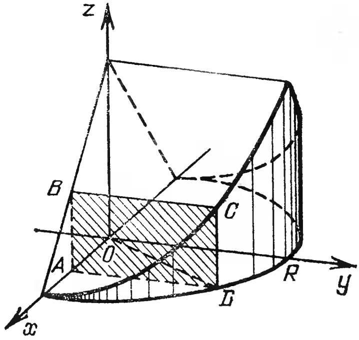

Рис. 21

$$AB=\frac{H}{R}(R-x),$$

$$AD=\sqrt{R^2-x^2}$$

и

$$S(x)=\frac{H}{R}(R-x)\sqrt{R^2-x^2}.$$

Следовательно,

$$V=2\int_0^R S(x)\,dx=2\frac{H}{R}\int_0^R(R-x)\sqrt{R^2-x^2}\,dx=$$

$$=2HR^2\int_0^{\pi/2}(1-\sin\alpha)\cos^2\alpha\,d\alpha=$$

$$=2HR^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\alpha+\frac{1}{3}\cos^3\alpha\right)\Big|_0^{\pi/2}=HR^2(3\pi-4)/6. \blacktriangle$$

Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной данными кривыми (8.1—8.4)*):

8.1. 1) $y^2=2px$, $\quad y=0$, $\quad x=a$.

2) $xy=a^2$, $\quad y=0$, $\quad x=a$, $\quad x=2a$.

3) $y=1/\sqrt[4]{x}$, $\quad y=0$, $\quad x=1/4$, $\quad x=1$.

4) $y/b=(x/a)^{2/3}$, $\quad y=0$, $\quad x=a$ $\quad (x\geqslant 0)$.

5) $y=\sin 2x$, $\quad 0\leqslant x\leqslant\pi/2$, $\quad y=0$.

6) $y=a\,\mathrm{ch}\,(x/a)$, $\quad y=0$, $\quad x=0$, $\quad x=b$.

7) $y=\sqrt{x}\,e^{-x}$, $\quad y=0$, $\quad x=a$.

8) $y=(\ln x)/x$ $(1\leqslant x\leqslant e)$, $\quad y=0$, $\quad x=e$.

---

*) В этом параграфе все заданные параметры следует считать положительными.

9) $y=\sin\sqrt{x}$ $(0\leqslant x\leqslant \pi^2)$, $\quad y=0$.

8.2. 1) $y=a+b\sin\omega x$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi/\omega)$, $\quad y=0, \quad x=0,$

$x=2\pi/\omega, \quad a>b>0$.

2) $y=e^{\alpha x}\sin\pi x, \quad n-1\leqslant x\leqslant n, \quad y=0, \quad n\in\mathbb{N}$.

3) $y=1/\sqrt{\cos x}, \quad y=0, \quad x=0, \quad x=\pi/6$.

4) $y=(a^2+x^2)^{-1}, \quad y=0, \quad x=0, \quad x=a$.

5) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x-3}}, \quad -1\leqslant x\leqslant 1, \quad y=0$.

6) $y=\sqrt{\dfrac{9+x}{9-3x}}$ $(0\leqslant x\leqslant 3/2)$, $\quad y=0, \quad x=3/2, \; x=0$.

8.3. 1) $y=x, \quad y=1/x, \quad y=0, \quad x=2$.

2) $y=\sin x, \quad y=\cos x, \quad y=0, \quad 0\leqslant x\leqslant \pi/2$.

3) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1, \quad x^2-\dfrac{y^2}{15}=1, \quad x\geqslant 0$.

4) $2py=x^2, \quad 2qy=(x-a)^2, \quad y=0$.

5) $y=2^x, \quad y=2-\log_2 x, \quad x=0, \quad y=0$.

8.4. 1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1, \quad x=a+h$.

3) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1, \quad |x|=h$.

4) $(x-R)^2+(y-R)^2=R^2, \quad x=0, \quad y=0 \quad (x\leqslant R,\ y\leqslant R)$.

5) $y^2(2a-x)=x^3$ $(0\leqslant x\leqslant a)$, $\quad x=a$.

6) $y^2(x-a)+x^2(x+a)=0$ $(0\leqslant x\leqslant a/2)$, $\quad x=a/2$.

7) $y^2(x-a)^2=x^3(2a-x)$ $(0\leqslant x\leqslant a/2)$, $\quad x=a/2$.

8.5. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox петли кривой:

1) $(x-4)y^2=x(x-3)$.
2) $y^2(x-a)+x^2(x+a)=0$.
3) $y^2(a-3x)=x^2(a+x)$.
4) $x^2y^2=(x+a)^2(4a^2-x^2)$.

Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной данными кривыми (**8.6**—**8.7**):

8.6. 1) $y^2=2x, \quad y=2, \quad x=0$.

2) $y=x, \quad y=1/x, \quad x=3$.

3) $y=\sin x, \quad y=2x/\pi, \quad 0\leqslant x\leqslant \pi/2$.

4) $y=\sin^2 x, \quad y=x\sin x, \quad 0\leqslant x\leqslant \pi$.

5) $2py=x^2, \quad 2qx=y^2, \quad p>0, \quad q>0$.

6) $2px = y^2, \quad 2q(a-x) = y^2, \quad p > 0, \quad q > 0.$

7) $2px = y^2, \quad 2q(x-a) = y^2, \quad q > p > 0, \quad a > 0.$

8) $y = x\sqrt{\dfrac{x}{2a-x}}, \quad y = \sqrt{x(2a-x)}.$

8.7. 1) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = h.$

2) $2py = x^2, \quad 2py = x(2x-a), \quad y = 0.$

3) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{25} = 1, \quad \dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{9} = -1.$

4) $x^2 + (y-a)^2 = r^2, \quad a > r > 0.$

5) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1.$

6) $x^2 - xy + y^2 = a^2.$

8.8. Пусть $y = y(x)$ — непрерывная и неотрицательная на $[a;\ b]$ функция, $0 \leqslant a \leqslant b$. Доказать, что объем тела, образованного при вращении вокруг оси Oy фигуры

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant y(x),$$

равен

$$V = 2\pi \int_a^b xy(x)\,dx.$$

8.9. Пусть $y = y(x)$ — непрерывно дифференцируемая на $[a;\ b]$ функция, $0 \leqslant a \leqslant b$, и пусть $y(b)$ является либо наибольшим, либо наименьшим на $[a;\ b]$ значением этой функции. Пусть фигура ограничена графиком функции $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, отрезком прямой $y = y(a)$. $0 \leqslant x \leqslant a$, отрезком прямой $y = y(b)$, $0 \leqslant x \leqslant b$, и соответствующим отрезком оси Oy. Доказать, что объем тела, образованного при вращении этой фигуры вокруг оси Oy, равен

$$V = \left| \pi \int_a^b x^2 y'(x)\,dx \right|.$$

Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Oy фигуры, ограниченной данными кривыми (**8.10—8.11**):

8.10. 1) $xy = k^2, \quad y = 0, \quad x = a, \quad x = b, \quad b > a > 0.$

2) $y = e^{x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1.$

3) $y = \operatorname{tg} x^2, \quad y = 0, \quad x = \sqrt{\pi/3}.$

4) $y = 2x - x^2, \quad y = 0.$

5) $y = \sin x, \quad y = 0, \quad 2\pi n \leqslant x \leqslant 2\pi n + \pi$, где n — заданное натуральное число.

6) $2py = a^2 - (x-b)^2, \quad y = 0, \quad b > a > 0.$

7) $y = |x-b| - a, \quad y = 0, \quad b > a > 0.$

8.11. 1) $y=\cos x^2$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$, $y=1$, $x=1$.

2) $y=\sin x$ $(0\leqslant x\leqslant \pi/2$, $y=1$, $x=0$.

3) $y=\cos x$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, $y=1$.

4) $y=\begin{cases} 0, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant \pi, \\ \sin x, & \text{если } \pi\leqslant x\leqslant 5\pi/2, \end{cases}$ $x=0$, $y=1$.

5) $y^2(2a-x)=x^3$, $|y|=a$, $x=0$.

6) $y^2=4x$, $y=x$.

8.12. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной данными кривыми, вокруг а) оси Ox, б) оси Oy:

1) $y=(x-a)(x-b)$, $y=0$, $b>a\geqslant 0$.

2) $y=\sin x$, $y=0$, $0\leqslant x\leqslant \pi$.

3) $y=\arcsin x$, $y=0$, $x=1$.

4) $y=a^3/(a^2+x^2)$, $y=0$, $x=0$, $x=a$.

5) $y=a^3/(a^2+x^2)$, $y=a/2$.

6) $y=x\sqrt{\dfrac{3+3x}{3-x}}$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$, $y=6$, $x=0$.

7) $2py=(x-a)^2$, $2py=a^2$.

8) $2py=x^2$, $y=|x|$.

9) $y=e^x+6$, $y=e^{2x}$, $x=0$.

10) $y=x$, $y=x+\sin^2 x$, $0\leqslant x\leqslant \pi$.

8.13. Найти объем эллипсоида, образованного при вращении эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

1) вокруг оси Ox; 2) вокруг оси Oy.

8.14. Найти объем тела, образованного при вращении кривой

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1$$

1) вокруг оси Ox; 2) вокруг оси Oy.

8.15. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг прямой $y=1$ фигуры, ограниченной данными кривыми:

1) $y=\sqrt[3]{x}$, $y=1/x$, $y=0$, $x=2$.

2) $y=\sqrt[3]{x}$, $y=x^2$.

3) $y=2x^2-1$, $y=1/\sqrt[3]{x}$, $y=-1$, $x=8$.

Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной данными кривыми (**8.16**—**8.18**):

8.16. $y=\arcsin x$, $x=1$, $y=-\pi/2$,

1) вокруг прямой $y=\pi/2$; 2) вокруг прямой $x=1$.

8.17. $y=x$, $y=x+\sin^2 x$, $0\leqslant x\leqslant \pi$, вокруг прямой $y=x$.

8.18. $2py=x^2$, $y-x=3p/2$ 1) вокруг прямой $y=0$; 2) вокруг прямой $x=0$; 3) вокруг прямой $y-x=3p/2$.

8.19. Найти объем тела, образованного при вращении петли *конхоиды* $(x-a)^2(x^2+y^2)=4a^2x^2$ вокруг прямой $x=a$.

8.20. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг прямой $x=a$ фигуры, ограниченной кривыми:

1) $y^2(x-a)+x^2(x+a)=0, |y|=\sqrt{3}a/2, \quad x=a \quad (x\geqslant 0)$.

2) $(x-a)^2y^2=x^3(2a-x), \ x=a/2 \ (0\leqslant x\leqslant a)$.

8.21. Объем тела вращения фигуры: $0\leqslant y\leqslant x^{\alpha}$, $0\leqslant x\leqslant a$ $(\alpha>0)$, вокруг оси Ox равен $Sa/4$, где S — площадь основания при $x=a$. Найти α.

8.22. Найти кривую $y=f(x)$, $x\geqslant 0$ $(f(x)>0$ при $x>0)$, если известно, что для любого $a>0$ объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры: $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant f(x)$, равен $\lambda\pi af^2(a)$, $0<\lambda<1$.

8.23. Плоскость, перпендикулярная оси параболоида вращения, отсекает от него сегмент с радиусом основания r и высотой h. Найти объем сегмента.

8.24. Выпуклая линза ограничена двумя соосными параболоидами вращения. Диаметр линзы по линии пересечения параболоидов равен D, толщина по оси — h. Найти объем линзы.

8.25. Выпукло-вогнутая линза ограничена двумя соосными параболоидами вращения. Диаметр линзы по линии пересечения параболоидов равен D, толщина по оси — h. Найти объем линзы.

8.26. Вогнутая линза ограничена соосными параболоидами вращения и цилиндром с радиусом основания r. Толщина линзы по оси равна h, на краю — H. Найти объем линзы.

8.27. Дуга окружности радиуса r, имеющая угловую величину 2α, вращается вокруг своей хорды. Найти объем полученного тела.

8.28. Найти объем части шара $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$, лежащей 1) между плоскостями $z=z_0$ и $z=z_0+h$, где $-R\leqslant z_0<z_0+$ $+h\leqslant R$; 2) внутри конуса $x=\sqrt{y^2+z^2}$; 3) внутри параболоида $\dfrac{2Rz}{\sqrt{3}}=x^2+y^2$.

8.29. Через фокус линии L второго порядка проведена хорда, перпендикулярная оси линии. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг этой хорды отсеченного ею сегмента, если L: 1) парабола $2py=x^2$; 2) гипербола $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$; 3) эллипс $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

8.30. Параболический сегмент ограничен дугой параболы и ее хордой длины $2a$, перпендикулярной оси параболы и отстоящей от вершины параболы на расстоянии h. Найти объем тела, образованного при вращении этого сегмента вокруг хорды.

8.31. Определить объем бочки, высота которой равна h, диаметр каждого из оснований — d, диаметр среднего сечения — D. Осевые сечения боковой поверхности являются параболами с вершинами на окружности среднего сечения.

8.32. Эксцентриситет эллипса равен e. Хорда эллипса, длиной $2a$, перпендикулярная большей оси, разделяет эллипс на два сегмента, меньший из которых имеет высоту h. Найти объем тела, образованного при вращении меньшего сегмента 1) вокруг большей оси эллипса; 2) вокруг меньшей оси эллипса.

8.33. Эксцентриситет гиперболы равен e. Хорда, длиной $2a$, перпендикулярная действительной оси гиперболы, отсекает от гиперболы сегмент, высотой h. Найти объем тела, образованного при вращении этого сегмента 1) вокруг действительной оси гиперболы; 2) вокруг мнимой оси гиперболы.

8.34. Найти объем тела, образованного при вращении астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ вокруг прямой $y=x$.

8.35. Сегмент ограничен дугой параболы $y^2=4ax$ и ее хордой, лежащей на прямой $y=2x$. Найти объем тела, образованного при вращении этого сегмента вокруг хорды.

8.36. Дуга параболы $\sqrt{x/a}+\sqrt{y/b}=1$ вращается вокруг прямой $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Доказать, что объем полученного тела вращения равен

$$V=\frac{8}{15}\pi r^2 H,$$

где r — наибольший радиус поперечного кругового сечения, H — длина этого тела вдоль оси.

8.37. 1) Найти объем тела, образованного при вращении вокруг прямой $y=kx$ $(k>0)$ сегмента параболы $2py=x^2$, отсеченного этой прямой.

2) Доказать, что объем, указанного в п. 1) тела вращения, равен $\frac{8}{15}\pi r^2 H$, где r — наибольший радиус поперечного кругового сечения, H — длина этого тела вдоль оси вращения.

8.38. Угол между двумя скрещивающимися прямыми l и m равен α, длина их общего перпендикуляра AB равна h. Из точек M и N прямой m (B — середина отрезка MN) опущены перпендикуляры MM_1 и NN_1 на прямую l. Найти объем тела, образованного при вращении пространственного четырехугольника M_1MNN_1 вокруг прямой l, если $|MN|=2a$.

8.39. Объем куба равен V. Найти объем тела, получающегося при вращении куба: 1) вокруг его диагонали; 2) вокруг диагонали его грани.

8.40. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной параболой $y=ax^2$ и ее эволютой $x=4a^2t^3$, $y=3at^2+1/2a$: 1) вокруг оси Ox; 2) вокруг оси Oy.

Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной данными кривыми (**8.41—8.47**):

8.41. $x=t^3$, $y=t^2$; $y=0$, $|x|=1$: 1) вокруг оси Ox; 2) вокруг оси Oy.

8.42. $x=a\sin t$, $y=a\sin 2t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$: 1) вокруг оси Ox; 2) вокруг оси Oy.

8.43. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $y = 0$: 1) вокруг оси Ox; 2) вокруг оси Oy: 3) вокруг прямой $x = \pi a$; 4) вокруг прямой $y = 2a$.

8.44. $x = a \sin^3 t$, $y = b \cos^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$: 1) вокруг оси Oy; 2) вокруг прямой $x = a$.

8.45. 1) $x = a \operatorname{ch}^3 t$, $y = a \operatorname{sh}^3 t$, $x = 2\sqrt{2}\,a$ вокруг оси Ox;

2) $x = \frac{1}{2} \operatorname{ch}^3 t$, $y = \frac{1}{2} \operatorname{sh}^3 t$, $x = 0$, $|y| = 1/2$ вокруг оси Oy.

8.46. $x = \frac{2at^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2at^3}{1+t^2}$, $x = a$: 1) вокруг оси Ox; 2) вокруг прямой $x = a$.

8.47. $x = a(1 + \cos t)$, $y = a(\operatorname{tg} t + \sin t)$, $x = 3a/2$: 1) вокруг оси Ox; 2) вокруг прямой $x = a$.

8.48. Прямая $y = 3a/2$ разделяет фигуру, ограниченную циклоидой $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, и осью Ox, на две фигуры. Найти отношение объемов тел, образованных при вращении каждой из получившихся фигур вокруг прямой $y = 3a/2$.

8.49. Найти объем тела, образованного при вращении петли кривой $x = 2t - t^2$, $y = 4t - t^3$: 1) вокруг оси Ox; 2) вокруг оси Oy.

8.50. Найти объем тела, образованного при вращении петли кривой

$$x = \frac{2a}{t^2+1}, \qquad y = a\frac{t^3 - t}{t^2+1}:$$

1) вокруг оси Ox; 2) вокруг оси Oy.

8.51. Пусть функция $r = r(\varphi)$ непрерывна на $[\alpha; \beta]$, $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi$. Доказать, что объем тела, образованного при вращении сектора

$$\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta, \quad 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi),$$

вокруг полярного луча, равен

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta r^3(\varphi) \sin\varphi\, d\varphi.$$

8.52. Пусть функция $r = r(\varphi)$ непрерывна на $[\alpha; \beta]$, $-\pi/2 \leqslant \alpha < \beta \leqslant \pi/2$. Доказать, что объем тела, образованного при вращении сектора:

$$\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta, \quad 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi),$$

вокруг луча $\varphi = \pi/2$ равен

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta r^3(\varphi) \cos\varphi\, d\varphi.$$

Найти объем тела, образованного при вращении вокруг полярного луча фигуры, заданной в полярных координатах неравенствами (8.53—8.54):

8.53. 1) $0 \leqslant r \leqslant a\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. 2) $\pi r^3 \leqslant \varphi \leqslant \pi$

3) $0 \leqslant r \leqslant a\cos^2\varphi$. 4) $0 \leqslant r \leqslant 2a\sin\varphi$.

5) $0 \leqslant r \leqslant a\cos^3\varphi$. 6) $0 \leqslant r \leqslant a\sin^2\varphi$.

7) $0 \leqslant r \leqslant ae^{k\varphi}$, $2\pi n \leqslant \varphi \leqslant 2\pi n + \pi$, где n — заданное целое число.

8) $0 \leqslant r \leqslant a\sqrt[3]{\cos 3\varphi}$, $|\varphi| \leqslant \pi/6$.

9) $0 \leqslant r \leqslant a\sqrt[3]{\cos 3\varphi}$, $7\pi/6 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/2$.

8.54. 1) $0 \leqslant r \leqslant a(1+\cos\varphi)$.

2) $0 \leqslant r \leqslant 2a\dfrac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/3$.

3) $0 \leqslant r \leqslant \dfrac{p}{1+e\cos\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$.

4) $0 \leqslant r \leqslant a\sqrt{\cos 2\varphi}$. 5) $0 \leqslant r \leqslant a\sqrt{\sin 2\varphi}$.

6) $0 \leqslant r \leqslant -\dfrac{3a\cos 2\varphi}{(2+\cos 2\varphi)\sin\varphi}$, $\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/4$.

7) $0 \leqslant r \leqslant \dfrac{a}{\cos\varphi\cos 2\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/6$.

8) $a \leqslant r \leqslant a\sqrt{2\sin 2\varphi}$.

8.55. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг полярного луча *улитки Паскаля*:

1) $r = a\cos\varphi + l$, $l < a$ (внешняя петля).

2) $r = a\cos\varphi - l$, $l < a$ (внутренняя петля).

3) $r = a\cos\varphi + l$, $l \geqslant a$.

8.56. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг луча $\varphi = \pi/2$ фигуры, заданной в полярных координатах неравенствами:

1) $0 \leqslant r \leqslant a\sqrt{\sin\varphi}$.

2) $0 \leqslant r \leqslant a\cos 2\varphi$.

3) $0 \leqslant r \leqslant a\sqrt[3]{\cos 3\varphi}$, $|\varphi| \leqslant \pi/6$.

4) $0 \leqslant r \leqslant a\sqrt[3]{\cos 3\varphi}$, $\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 5\pi/6$.

5) $0 \leqslant r \leqslant a(1+\cos\varphi)$, $|\varphi| \leqslant \pi/2$.

6) $0 \leqslant r \leqslant a\dfrac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}$, $|\varphi| \leqslant \pi/4$

7) $0 \leqslant r \leqslant \dfrac{p}{1+\cos\varphi}$, $|\varphi| \leqslant \pi/2$.

8) $0 \leqslant r \leqslant a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

8.57. Найти объем тела, образованного при вращении петли конхоиды:

1) $r = 4a + \frac{a}{\cos\varphi}$ вокруг полярного луча.

2) $r = 2a + \frac{a}{\cos\varphi}$ вокруг луча $\varphi = \pi/2$.

8.58. Найти объем тела, образованного при вращении кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$ вокруг прямой $r\cos\varphi = -a/4$.

8.59. Найти объем тела, образованного при вращении одной петли лемнискаты $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$: 1) вокруг луча $\varphi = \pi/4$; 2) вокруг луча $\varphi = -\pi/4$.

8.60. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой:

1) $x^4 + y^4 = a^2x^2$.
2) $x^4 + y^4 = 2axy^2$.
3) $(x^2 + y^2)^3 = a^2x^4$.
4) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.
5) $x(x^2 - y^2) = a(x^2 + y^2)$, $\quad x = 3a$.

8.61. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой:

1) $x^4 + y^4 = ay^3$.
2) $x^4 + y^4 = 2axy^2$.
3) $(x^2 + y^2)^3 = a^4y^2$.
4) $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^2 - y^2)^2$.
5) $(x^2 + y^2)^3 = a^2x^2y^2$.

8.62. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг прямой $y = x$ фигуры, ограниченной кривой

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

Найти объем тела, ограниченного поверхностями (**8.63**—**8.65**):

8.63. 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\quad |z| = H$.

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(z - H)^2}{H^2}$, $\quad z = 0$.

3) $2\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $\quad z = H$.

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\quad |z| = H$.

6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, $\quad z = c + H$.

8.64. 1) $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x + z}{a} = 1$, $\quad x = 0$, $\quad y = 0$, $\quad z = 0$.

2) $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = a^2$.

3) $y^2 + z^2 = a^2 \operatorname{ch}^2(x/a)$, $\quad |x| = b$.

4) $a^2(z^2 - y^2) = x^2z^2$, $\quad z = a$.

5) $\dfrac{x^2}{(z+a)^2}+\dfrac{y^2}{(z-a)^2}=1.$

6) $\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\dfrac{z}{c}\right)^2=\dfrac{y^2}{b^2}, \quad z=0.$

7) $4a^2x^2\left(1-\dfrac{y^2}{b^2}\right)=(x^2+z^2)^2.$

8.65. 1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \quad \dfrac{z}{H}=\dfrac{x}{c}, \quad z=0.$

2) $z^2=a(a-y), \quad x=k_1y, \quad x=k_2y, \quad k_2>k_1.$

3) $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y^2}{b^2}, \quad \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1, \quad \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=1.$

4) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \quad \dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=0, \quad \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0 \quad (z\geqslant 0).$

5) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{(z-H)^2}{H^2}, \quad \dfrac{z}{H}=\dfrac{y}{b}, \quad z=0 \quad (y\geqslant 0).$

6) $x^2+y^2=ax, \quad |x|=|z|.$

8.66. Основание конуса — плоская фигура площадью S, вершина конуса удалена от плоскости основания на расстояние H. Найти объем конуса.

8.67. Радиус прямого кругового цилиндра равен r. Плоскость, составляющая с осью цилиндра угол α, пересекает его боковую поверхность и нижнее основание, отсекая от этого основания сегмент с центральным углом 2φ. Найти объем части цилиндра, ограниченной этим сегментом, плоскостью сечения и боковой поверхностью цилиндра.

8.68. Угол раствора прямого кругового конуса равен 2α $(2\alpha<\pi/2)$. Плоскость, перпендикулярная образующей конуса, пересекает ее в точке, удаленной на расстояние a от вершины. Найти объем отсеченной части конуса.

8.69. Через центр основания прямого кругового конуса с радиусом r и высотой h проведена плоскость, параллельная образующей конуса. Найти отношение объемов частей, на которые рассечен конус.

8.70. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \quad \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

2) $x^2=b(a-y), \quad y^2+z^2=ay.$

3) $\dfrac{z}{c}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}, \quad \dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}.$

4) $by=x(a-z), \quad by=x(z-a), \quad z=0, \quad x=b.$

5) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \quad \dfrac{5z}{6c}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}.$

6) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1, \quad \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{8}=1.$

7) $x^2-\dfrac{4y^2}{3}-\dfrac{z^2}{27}=-1, \quad x^2-\dfrac{4y^2}{5}-\dfrac{z^2}{45}=1.$

8.71. Оси эллипса имеют длины $2a$ и $2b$. На каждой хорде эллипса, параллельной оси $2a$, построен как на диагонали квадрат в плоскости, перпендикулярной другой оси эллипса. Найти объем получившегося тела.

8.72. Две грани шестигранника — прямоугольники, стороны одного из них с длинами a_1 и b_1 параллельны сторонам другого с длинами a_2 и b_2 соответственно. Расстояние между плоскостями этих прямоугольников равно h. Найти объем шестигранника.

8.73. Объем треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен V. Рассматриваются все треугольники, лежащие в плоскостях, параллельных основаниям, и имеющие вершины на диагоналях AB_1, BC_1 и CA_1 боковых граней призмы. Найти объем тела, образованного этими треугольниками.

8.74. Тело, имеющее объем, расположено между плоскостями $z=0$ и $z=h$. Известно, что площадь сечения тела плоскостью $z=\text{const}$ есть функция вида $S(z)=az^2+bz+c$, $0\leqslant z\leqslant h$. Доказать, что объем тела равен

$$V=\frac{h}{6}(S(0)+4S(h/2)+S(h)).$$

8.75. Оси двух круговых цилиндров, каждый из которых имеет радиус r, пересекаются под углом α. Найти объем тела, ограниченного этими цилиндрами.

8.76. На круге $x^2+y^2\leqslant r^2$ как на общем основании построены два наклонных цилиндра. Их оси лежат в плоскости Oyz и каждая составляет с осью Oz угол α. Найти объем тела, ограниченного данным кругом и этими цилиндрами.

8.77. Оси трех цилиндров (каждый радиуса r) взаимно перпендикулярны и пересекаются в одной точке. Найти объем тела, ограниченного этими тремя цилиндрами.

8.78. На боковой поверхности цилиндра $x^2+y^2\leqslant R^2$, $0\leqslant z\leqslant H$, расположена винтовая линия $x=R\cos 2\pi\alpha$, $y=R\sin 2\pi\alpha$, $z=H\alpha$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. Винтовая поверхность образована перпендикулярами, опущенными из точек винтовой линии на ось Oz. Найти объем нижней части цилиндра, ограниченной этой поверхностью и прямоугольником: $0\leqslant x\leqslant R$, $0\leqslant z\leqslant H$ в плоскости Oxz.

8.79. На боковой поверхности конуса

$$x^2+y^2\leqslant R^2,$$

$$0\leqslant z\leqslant\frac{H}{R}\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

расположена коническая винтовая линия

$$x=R(1-\alpha)\cos 2\pi\alpha,\quad y=R(1-\alpha)\sin 2\pi\alpha,\quad z=H\alpha,\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1.$$

Коническая винтовая поверхность образована перпендикулярами, опущенными из точек винтовой линии на ось Oz. К ней добавлен треугольник с вершинами $(0;0;0)$, $(0;0;H)$, $(R;0;0)$.

Найти отношение объемов частей, на которые получившаяся поверхность разделяет конус.

---

2. **Вычисление площадей поверхностей.** Пусть $y=y(x)$ — непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a;\ b]$ функция. Площадь S поверхности, образованной при вращении графика этой функции вокруг оси Ox, равна

$$S=2\pi\int_a^b|y(x)|\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx. \tag{8}$$

Пусть в полуплоскости $y\geqslant 0$ параметрически задана кривая уравнениями

$$x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[\alpha;\ \beta],$$

где $x(t)$ и $y(t)$— непрерывно дифференцируемые на $[\alpha;\ \beta]$ функции. Площадь S поверхности, образованной при вращении данной кривой вокруг оси Ox, равна

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt. \tag{9}$$

Если кривая расположена в полуплоскости $y\leqslant 0$, то

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta |y(t)|\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt. \tag{10}$$

При аналогичных условиях площадь S поверхности, образованной при вращении кривой вокруг оси Oy, соответственно равна

$$S=2\pi\int_c^d|x(y)|\sqrt{1+x'^2(y)}\,dy, \tag{8$'$}$$

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt\qquad(x(t)\geqslant 0), \tag{9$'$}$$

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta |x(t)|\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt\qquad(x(t)\leqslant 0). \tag{10$'$}$$

Пусть спрямляемая кривая, длина которой s_0, расположена по одну сторону от прямой l, $r(s)$— расстояние от конца дуги кривой длины s до прямой l, и пусть $r(s)$— непрерывная функция $s\in[0;\ s_0]$. Площадь S поверхности, образованной при вращении кривой вокруг прямой l, равна

$$S=2\pi\int_0^{s_0} r(s)\,ds. \tag{11}$$

Площадь поверхности, образованной при вращении вокруг полярного луча кривой $r=r(\varphi)$, $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2 \leqslant \pi$, равна

$$S = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi) \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} \sin\varphi \, d\varphi,$$

где $r(\varphi)$ — непрерывно дифференцируемая на $[\varphi_1; \varphi_2]$ функция. При этом же условии площадь поверхности, образованной при вращении вокруг луча $\varphi = \frac{\pi}{2}$ кривой $r = r(\varphi)$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$, равна

$$S = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi) \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} \cos\varphi \, d\varphi.$$

Пусть образующие цилиндрической поверхности параллельны оси Oz, а ее направляющей в плоскости Oxy служит кривая L_0 без особых точек, заданная параметрически уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{12}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывно дифференцируемые на $[\alpha; \beta]$ функции. Пусть на этой поверхности параметрически задана кривая L уравнениями (12) и уравнением

$$z = z(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

где $z(t)$ — неотрицательная и непрерывная на $[\alpha; \beta]$ функция. Площадь S части цилиндрической поверхности, заключенной между кривыми L_0 и L и образующими, соответствующими $t=\alpha$ и $t=\beta$, равна

$$S = \int_\alpha^\beta z(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \, dt. \tag{13}$$

Если за параметр взята длина s дуги кривой L_0, $0 \leqslant s \leqslant s_0$, то

$$S = \int_0^{s_0} z(s) \, ds, \tag{14}$$

а если параметром является x, $a \leqslant x \leqslant b$, то

$$S = \int_a^b z(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} \, dx. \tag{15}$$

Пусть на цилиндрической поверхности заданы параметрически две кривые L_1 и L_2 уравнениями (12) и, соответственно, уравнениями

$$z = z_1(t) \quad \text{и} \quad z = z_2(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

где $z_1(t)$ и $z_2(t)$ непрерывны на $[\alpha; \beta]$ и $z_1(t) \leqslant z_2(t)$. Площадь части цилиндрической поверхности, заключенной между кривыми L_1 и L_2 и образующими, соответствующими $t = \alpha$ и $t = \beta$, равна

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} (z_2(t) - z_1(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt. \quad (16)$$

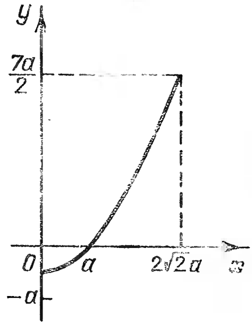

Рис. 22

Пример 6. Найти площадь поверхности, образованной при вращении дуги параболы

$$2ay = x^2 - a^2, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\sqrt{2}\, a \quad (\text{рис. } 22),$$

1) вокруг оси Ox; 2) вокруг оси Oy.

$\triangle$ 1) По формуле (8) имеем

$$S = 2\pi \int_{0}^{2\sqrt{2}\, a} |y(x)| \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx = 2\pi \int_{0}^{2\sqrt{2}\, a} \left| \frac{x^2 - a^2}{2a} \right| \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\, dx.$$

Сделаем замену $x = at$ и учтем, что если $0 \leqslant x \leqslant a$, то $|x^2 - a^2| = -(x^2 - a^2)$, а если $x \geqslant a$, то $|x^2 - a^2| = x^2 - a^2$, тогда будем иметь

$$S = \pi a^2 \left(-\int_{0}^{1} f(t)\, dt + \int_{1}^{2\sqrt{2}} f(t)\, dt \right), \quad (17)$$

где

$$f(t) = (t^2 - 1)\sqrt{1 + t^2}.$$

Первообразную $F(t)$ функции $f(t)$ найдем, например, с помощью замены $t = \operatorname{sh} \varphi$, в результате получим

$$F(t) = \frac{1}{8} t \sqrt{1 + t^2}(2t^2 - 3) - \frac{5}{8} \ln\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right).$$

Из (17) имеем

$$S = \pi a^2 \left(-F(1) + F(0) + F\left(2\sqrt{2}\right) - F(1)\right) =$$
$$= \pi a^2 \left(F(0) + F\left(2\sqrt{2}\right) - 2F(1)\right).$$

Вычислим значения первообразной:

$$F(0) = 0, \qquad F\left(2\sqrt{2}\right) = \frac{39\sqrt{2}}{4} - \frac{5}{8} \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right),$$
$$F(1) = -\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{5}{8} \ln\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

Отсюда найдем

$$S = \pi a^2\left(\frac{39\sqrt{2}}{4} - \frac{5}{8}\ln(3+2\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{5}{4}\ln(1+\sqrt{2})\right) = $$
$$= 10\pi a^2\sqrt{2}.$$

2) Считая кривую заданной параметрически уравнениями $x = x$, $2ay = a^2 - x^2$, по формуле (9′) находим

$$S = 2\pi\int\limits_0^{2\sqrt{2}\,a} x\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx = 2\pi\int\limits_0^{2\sqrt{2}\,a} x\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\,dx =$$
$$= \pi a^2\,\frac{2}{3}\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2}\Bigg|_0^{2\sqrt{2}\,a} = \frac{52}{3}\pi a^2. \blacktriangle$$

Пример 7. Прямая $y = a$ пересекает дугу циклоиды

$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a(1-\cos t),$$
$$0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

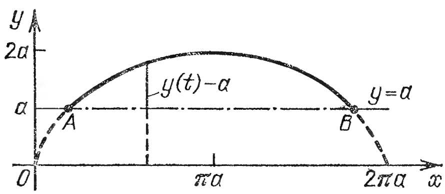

Рис. 23

в точках A и B. Найти площадь поверхности, образованной при вращении дуги AB циклоиды вокруг прямой $y = a$ (рис. 23).

△ Точки A и B соответствуют значениям параметра $t = \pi/2$ и $t = 3\pi/2$, дуга AB — значениям $t \in [\pi/2;\ 3\pi/2]$. Площадь поверхности вращения найдем по формуле

$$S = 2\pi\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} (y(t)-a)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt, \tag{18}$$

аналогичной (9). Здесь вместо стоящего в (9) расстояния $y(t)$ от точки кривой до оси Ox (оси вращения) стоит расстояние $y(t) - a$ от точки кривой до прямой $y = a$, являющейся в данном случае осью вращения (рис. 23). Вычисляем: $y(t) - a = -a\cos t$,

$$\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t} = 2a\sin(t/2),$$
$$t \in [\pi/2;\ 3\pi/2].$$

По формуле (18) получаем

$$S = -4\pi a^2\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos t\sin\frac{t}{2}\,dt.$$

После замены $\cos(t/2) = z$ находим

$$S = -8\pi a^2 \int\limits_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (2z^2 - 1)\,dz = -8\pi a^2 \left(\frac{2}{3} z^3 - z\right)\Big|_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} =$$

$$= 16\sqrt{2}\,\pi a^2/3. \;\blacktriangle$$

Пример 8. Найти площадь поверхности, образованной при вращении эллипса $x^2 + 4y^2 = 36$: 1) вокруг оси Ox; 2) вокруг оси Oy.

△ 1) Дугу ABC эллипса (рис. 24) можно рассматривать как график функции

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{36 - x^2}, \quad -6 \leqslant x \leqslant 6.$$

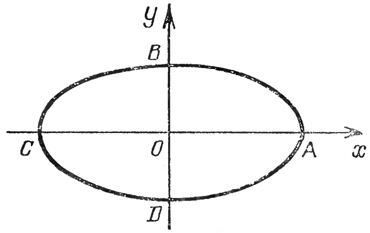

Рис. 24

Но эта функция не имеет производной при $x = \pm 6$, а на интервале (—6; 6) ее производная неограничена, поэтому формула (8) непосредственно неприменима в данном случае. Для устранения этой трудности воспользуемся приемом, который часто бывает полезным при нахождении площадей, как, впрочем, и длин кривых и объемов фигур, а именно параметризуем эллипс. Функции

$$x = 6\cos t, \quad y = 3\sin t$$

представляют непрерывно дифференцируемую параметризацию данного эллипса, при этом дуга ABC соответствует значениям $t \in [0; \pi]$.

Площадь поверхности, образованной при вращении дуги ABC эллипса вокруг оси Ox, находим по формуле (9):

$$S = 2\pi \int\limits_0^{\pi} 3\sin t\sqrt{36\sin^2 t + 9\cos^2 t}\,dt.$$

В результате замены $\cos t = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi$ получим

$$S = 24\sqrt{3}\,\pi \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^2\varphi\,d\varphi = 2\sqrt{3}\,\pi\,(4\pi + 3\sqrt{3}).$$

2) Дуга DAB (рис. 24) эллипса, заданного параметрически в виде $x = 6\cos t$, $y = 3\sin t$, соответствует значениям $t \in [-\pi/2; \pi/2]$. Площадь поверхности, образованной при вращении дуги DAB вокруг оси Oy, находим по формуле (9′):

$$S = 2\pi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 6\cos t\sqrt{36\sin^2 t + 9\cos^2 t}\,dt.$$

После замены $\sin t = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sh} \varphi$ получим

$$S = 12\sqrt{3}\pi \int\limits_{-\operatorname{arsh}\sqrt{3}}^{\operatorname{arsh}\sqrt{3}} \operatorname{ch}^2 \varphi\, d\varphi = 24\sqrt{3}\pi\left(2\sqrt{3} + \ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right). \blacktriangle$$

Пример 9. Найти площадь поверхности, образованной при вращении петли кривой $9x^2 = y(3-y)^2$: 1) вокруг оси Ox; 2) вокруг оси Oy.

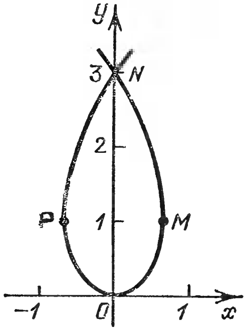

Рис. 25

△ Петля кривой соответствует значениям $y \in [0; 3]$ (рис. 25). Введем параметр t, полагая

$$y = t^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

и зададим кривую параметрически уравнениями

$$x = t(3-t^2)/3, \quad y = t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Дуга $NPOMN$ (петля) кривой соответствует значениям $t \in \left[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right]$.

1) Площадь поверхности, образованной при вращении петли вокруг оси Ox, находим по формуле (9):

$$S = 2\pi \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} t^2 \sqrt{(1-t^2)^2 + 4t^2}\, dt = 2\pi \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} t^2(1+t^2)\, dt = \frac{56\sqrt{3}}{5}\pi.$$

2) Петля данной кривой симметрична относительно оси Oy, поэтому при вращении вокруг этой оси как самой петли, так и ее половины — дуги OMN — образуется одна и та же поверхность. Дуга OMN соответствует значениям $t \in \left[0; \sqrt{3}\right]$. Площадь поверхности вращения найдем по формуле (9′):

$$S = 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{3} t(3-t^2) \sqrt{(1-t^2)^2 + 4t^2}\, dt =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int\limits_0^{\sqrt{3}} t(3-t^2)(1+t^2)\, dt = 3\pi. \blacktriangle$$

Пример 10. Найти площадь поверхности, образованной при вращении кривой

$$y = x^3/3, \quad 0 \leqslant x \leqslant \sqrt[4]{2},$$

вокруг прямой $3y - \sqrt{2}\, x = 0$.

△ Расстояние $r(x)$ (рис. 26) от точки $(x;\ x^3/3)$ до данной прямой равно

$$r(x)=\frac{1}{\sqrt{11}}\left|x^3-\sqrt{2}\,x\right|=\frac{1}{\sqrt{11}}\left(\sqrt{2}\,x-x^3\right),\quad 0\leqslant x\leqslant\sqrt[4]{2}.$$

Площадь поверхности вращения определим по формуле (11). Находим

$$ds=\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx=\sqrt{1+x^4}\,dx,$$

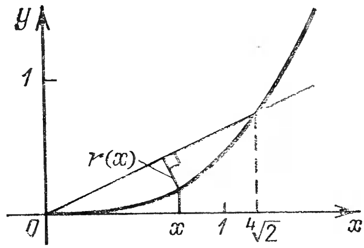

Рис. 26

отсюда

$$S=2\pi\int\limits_0^{\sqrt[4]{2}} r(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx=\frac{2\pi}{\sqrt{11}}\left(\sqrt{2}\int\limits_0^{\sqrt[4]{2}} x\sqrt{1+x^4}\,dx-\int\limits_0^{\sqrt[4]{2}} x^3\sqrt{1+x^4}\,dx\right).$$

Легко найти интеграл

$$\int\limits_0^{\sqrt[4]{2}} x^3\sqrt{1+x^4}\,dx=\frac{1}{4}\,\frac{2}{3}(1+x^4)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt[4]{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{6}.$$

Используя замену $x^2=\operatorname{sh}\varphi$, получаем

$$\sqrt{2}\int\limits_0^{\sqrt[4]{2}} x\sqrt{1+x^4}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\operatorname{arsh}\sqrt{2}}\operatorname{ch}^2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом,

$$S=\frac{2\pi}{\sqrt{11}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\frac{1}{6}\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{22}}\left(3\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{2}\right).\ ▲$$

Пример 11. Найти площадь части цилиндрической поверхности

$$x^2/4+y^2=4,$$

отсеченной конической поверхностью

$$x^2/16+y^2=z^2.$$

△ Направляющую цилиндрической поверхности в плоскости Oxy — эллипс $\frac{x^2}{4}+y^2=4$ (рис. 27) — зададим параметрически в виде

$$x=4\cos t, \quad y=2\sin t, \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi. \tag{19}$$

Линии L_1 и L_2 пересечения цилиндрической и конической поверхностей задаются дополнительно к (19) уравнениями:

$$z_1=-\sqrt{\frac{x^2}{16}+y^2}=-\sqrt{\cos^2 t+4\sin^2 t},$$

$$z_2=\sqrt{\frac{x^2}{16}+y^2}=\sqrt{\cos^2 t+4\sin^2 t},$$

$$0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

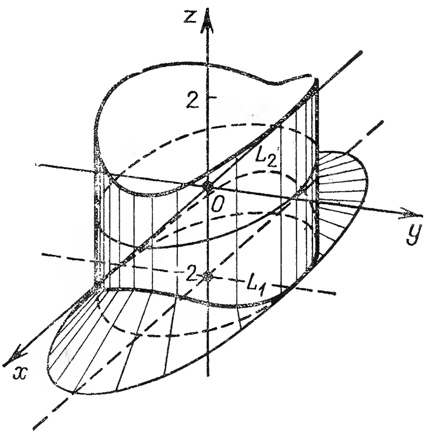

Рис. 27

Площадь данной части цилиндрической поверхности находим по формуле (16):

$$S=\int_0^{2\pi}\big(z_2(t)-z_1(t)\big)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt=$$

$$=2\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos^2 t+4\sin^2 t}\sqrt{16\sin^2 t+4\cos^2 t}\,dt=$$

$$=4\int_0^{2\pi}(\cos^2 t+4\sin^2 t)\,dt=20\pi. \ \blacktriangle$$

8.80. Радиус сферы равен R. Найти площадь сферического пояса высоты h.

8.81. Найти площадь поверхности, образованной при вращении вокруг оси Ox данной кривой:

1) $y=\sqrt{x}$, $\quad 5/4\leqslant x\leqslant 21/4$.
2) $y=x^3$, $\quad 0\leqslant x\leqslant 1$.
3) $y=e^{-x}$, $\quad 0\leqslant x\leqslant a$.
4) $y=a\operatorname{ch}(x/a)$, $\quad |x|\leqslant b$.
5) $y=\sin x$, $\quad 0\leqslant x\leqslant \pi$.
6) $2ay=a^2+x^2$, $\quad 0\leqslant x\leqslant a$.

7) $y=2x^{3/2}/3$, $\quad 0\leqslant x\leqslant 1$.

8) $y=1/x$, $\quad 1\leqslant x\leqslant a$.

9) $y=\operatorname{tg} x$, $\quad 0\leqslant x\leqslant \pi/4$.

8.82. Найти площадь поверхности, образованной при вращении вокруг оси Oy данной кривой:

1) $x=\ln\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)$, $\quad 5/4\leqslant y\leqslant 5/3$.

2) $4x+2\ln y=y^2$, $\quad e^{-1}\leqslant y\leqslant e$.

3) $x=\operatorname{ch} y$, $\quad \ln 2\leqslant y\leqslant \ln 3$.

4) $3x=4\cos y$, $\quad -\pi/2\leqslant y\leqslant 0$.

5) $y^2=2(x-1)$, $\quad 0\leqslant y\leqslant 1$.

6) $x=a\arcsin\sqrt{y/a}+\sqrt{y(a-y)}$, $\quad a/4\leqslant y\leqslant 3a/4$.

8.83. Фигура, ограниченная графиком функции

$$y=a\operatorname{ch}(x/a),\quad 0\leqslant x\leqslant a,$$

отрезками прямых $x=0$, $x=a$ и осью Ox, вращается вокруг оси Ox. Доказать, что объем V тела вращения этой фигуры и площадь S поверхности вращения графика данной функции связаны равенством $V=aS/2$.

8.84. Найти площадь поверхности, образованной при вращении вокруг прямой $y=5a/3$ дуги цепной линии $y=a\operatorname{ch}(x/a)$, отсеченной этой прямой.

8.85. Найти площадь поверхности, образованной при вращении вокруг прямой $y=p$ дуги параболы $y^2=2px$, отсеченной прямой $x=p/2$.

8.86. Пусть функция $x=x(y)$ определена и непрерывно дифференцируема на отрезке $[c;\ d]$, $c\geqslant 0$. Доказать, что площадь поверхности, образованной при вращении графика этой функции вокруг оси Ox, равна

$$S=2\pi\int\limits_c^d y\sqrt{1+x'^2(y)}\,dy.$$

8.87. Найти площадь поверхности, образованной при вращении вокруг оси Ox данной кривой:

1) $y^2=4x$, $\quad 0\leqslant x\leqslant 3$.

2) $y^2=4+x$, $\quad -4\leqslant x\leqslant 2$.

3) $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$, $\quad 1\leqslant y\leqslant e$.

4) $x=a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$, $\quad 0<b\leqslant y\leqslant a$.

8.88. Найти площадь поверхности, образованной при вращении вокруг оси Oy данной кривой:

1) $y=x^2/(2p)$, $\quad 0\leqslant x\leqslant b$.

2) $y=a\operatorname{ch}(x/a)$, $\quad 0\leqslant x\leqslant b$.

3) $y=\left(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}\right)/2$, $\quad 0\leqslant x\leqslant 1$.

8.89. Поверхность вогнутого зеркала является сегментом параболоида вращения. Высота сегмента равна h, радиус основания — R. Найти площадь поверхности зеркала.

8.90. Тело образовано вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $ay = a^2 - x^2$ и осью Ox. Найти отношение площади поверхности тела к площади поверхности равновеликого ему по объему шара.

8.91. Найти площадь поверхности, образованной при вращении вокруг оси Ox кривой, заданной параметрически:

1) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $2n\pi \leqslant t \leqslant (2n+1)\pi$, где n — заданное натуральное число.

2) $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $\quad y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

3) $x = a\cos t + a\ln \operatorname{tg}(t/2)$, $\quad y = a\sin t$, $\quad 0 < y_0 \leqslant y \leqslant a$.

4) $x = t^3/3$, $\quad y = 4 - t^2/2$, $\quad |t| \leqslant 2\sqrt{2}$.

5) $x = 2\sqrt{3}\cos t$, $\quad y = \sin 2t$.

Найти площадь поверхности, образованной при вращении кривой L, заданной параметрически, вокруг прямой l (8.92—8.99):

8.92. L: $x = a(3\cos t - \cos 3t)$,

$y = a(3\sin t - \sin 3t)$, $\quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/2$;

1) l: $y = 0$. 2) l: $x = 0$.

8.93. L: $x = \sqrt{2}\sin t$, $\quad y = \dfrac{1}{4}\sin 2t$, $\quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$;

1) l: $y = 0$. 2) l: $x = 0$.

8.94. L: $x = a(t + \sin t\cos t)$, $\quad y = a\sin^2 t$, $\quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/2$;

1) l: $y = 0$. 2) l: $x = 0$.

8.95. L: $x = a(t\sin t + \cos t)$,

$y = a(\sin t - t\cos t)$, $\quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$;

1) l: $y = 0$. 2) l: $x = -a$.

8.96. L: $x = t^2$, $\quad y = \dfrac{t}{3}(t^2 - 3)$, $\quad |t| \leqslant \sqrt{6}$;

1) l: $y = 0$. 2) l: $x = 0$. 3) l: $x = 3$.

8.97. L: $x = a(t^2 + 1)$, $\quad y = \dfrac{at}{3}(3 - t^2)$, $\quad |t| \leqslant \sqrt{3}$;

1) l: $y = 0$. 2) l: $x = 0$.

8.98. L: $x = a(t - \sin t)$,

$y = a(1 - \cos t)$, $\quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

1) l: $y = 0$. 2) l: $x = 0$. 3) l: $y = 2a$.

4) l: $x = \pi a$. 5) l: $y = a$.

8.99. L: $x = a\cos^3 t$, $\quad y = a\sin^3 t$, $\quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

1) l: $y = 0$. 2) l: $x = a$.

Найти площадь поверхности, образованной при вращении кривой L вокруг прямой l, подобрав непрерывно дифференцируемую параметризацию кривой L (**8.100—8.105**):

8.100. L: $x^2+(y-b)^2=a^2$, $b \geqslant a > 0$; l: $y=0$.

8.101. L: $4x^2+y^2=4$;

1) l: $y=0$. 2) l: $x=0$.

8.102. L: $y=\frac{1}{6}\sqrt{x}(x-12)$, $0 \leqslant x \leqslant 12$; l: $y=0$.

8.103. L: $16y^2=2x^2-x^4$;

1) l: $y=0$. 2) l: $x=0$.

8.104. L: $3x^2+y^4=y^2$; l: $x=0$.

8.105. L: $y=\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}$;

1) l: $y=0$. 2) l: $x=0$.

8.106. Найти площадь поверхности, образованной при вращении петли кривой $9ay^2=x(3a-x)^2$: 1) вокруг оси Ox; 2) вокруг оси Oy.

8.107. Радиус окружности равен R. Дуга окружности, имеющая угловую величину 2α, вращается вокруг своей хорды. Найти площадь поверхности вращения.

8.108. Найти площадь эллипсоида вращения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,$$

если:

1) $a > b$ (*вытянутый эллипсоид*).

2) $a < b$ (*сжатый эллипсоид*).

8.109. Найти площадь части гиперболоида вращения

$$x^2+y^2-z^2=1,$$

заключенной между плоскостями $z=-2$ и $z=2$.

8.110. Найти площадь поверхности, образованной при вращении дуги гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a \leqslant x \leqslant \lambda a, \quad \lambda > 1:$$

1) вокруг оси Ox; 2) вокруг оси Oy.

8.111. Кривая $y=\cos x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, вращается вокруг прямой $y=a$. При каком a площадь поверхности вращения будет наименьшей? Найти эту наименьшую площадь.

8.112. Циклоида

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

вращается вокруг прямой $y=ka$, $0 \leqslant k \leqslant 2$.

1) Найти площадь поверхности вращения.

2) При каком k площадь образованной поверхности будет наименьшей? Найти эту наименьшую площадь.

8.113. На окружности, радиус которой R, взята дуга AB угловой величины 2α. Прямая, параллельная хорде AB, отсекает от дуги AB меньшую дугу CD угловой величины 2β $(\beta < \alpha)$. Поверхность образована вращением дуги AB вокруг прямой CD.

1) Найти площадь этой поверхности.

2) При каком β площадь образованной поверхности будет наименьшей? Найти эту наименьшую площадь.

8.114. Дуга параболы $y^2 = 2px$, отсеченная прямой $y = 2x$, вращается вокруг этой прямой. Найти площадь поверхности вращения.

8.115. Найти площадь поверхности, образованной при вращении астроиды

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}:$$

1) вокруг прямой $y = x$; 2) вокруг прямой $x + y = a$.

8.116. Угол между прямыми l и m равен α, длина их общего перпендикуляра AB равна a. Отрезок BC прямой m, имеющий длину b, вращается вокруг прямой l. Найти площадь образованной поверхности.

8.117. Тело образовано вращением куба с ребром a вокруг его диагонали. Найти площадь поверхности тела.

8.118. Найти площадь поверхности, образованной при вращении вокруг полярного луча кривой, заданной в полярных координатах:

1) $r = 2a\sin\varphi$. 2) $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$.

3) $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$. 4) $r = a\sec^2(\varphi/2)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi/3$.

8.119. Найти площадь поверхности, образованной при вращении кардиоиды

$$r = a(1 + \cos\varphi):$$

1) вокруг полярного луча; 2) вокруг прямой $r\cos\varphi = 2a$; 3) вокруг прямой $4r\cos\varphi = -a$.

8.120. Найти площадь поверхности, образованной при вращении улитки $r = a + b\cos\varphi$ вокруг полярного луча, если: 1) $a > b$; 2) $a < b$.

8.121. Найти площадь поверхности, образованной при вращении лемнискаты

$$r^2 = 2a^2\cos 2\varphi:$$

1) вокруг полярного луча; 2) вокруг луча $\varphi = \pi/2$; 3) вокруг луча $\varphi = \pi/4$.

8.122. Найти площадь данной части цилиндрической поверхности:

1) $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leqslant z \leqslant \frac{h}{a}x$, $x \geqslant 0$.

2) $y = b - \frac{bx^2}{a^2}$, $0 \leqslant z \leqslant \frac{h}{a}x$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $0 \leqslant z \leqslant \frac{h}{a}x$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $a > b$.

4) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \quad 0\leqslant z\leqslant \dfrac{h}{a}x, \quad x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0, \quad a<b.$

5) $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1, \quad \sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2, \quad 0\leqslant z\leqslant \sqrt{3}\,x.$

8.123. Образующие цилиндрической поверхности параллельны оси Oz, а направляющей является кривая L в плоскости Oxy. Найти площадь части этой поверхности, заключенной между плоскостью $z=0$ и поверхностью S, если:

1) L: $x=e^t\cos t, \quad y=e^t\sin t, \quad -\pi\leqslant t\leqslant\pi;$
S: $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

2) L: $x=t^3/3, \quad y=5-t^2, \quad -\sqrt{5}\leqslant t\leqslant\sqrt{5};$
S: $y=4z$.

3) L: $x=a\cos^3 t, \quad y=a\sin^3 t, \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi;$
S: $10x+10y-3z+10a=0$.

8.124. Найти площадь части цилиндра $x^2+y^2=Rx$, расположенной внутри сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

8.125. Радиус каждого из двух круговых цилиндров равен r, оси этих цилиндров пересекаются и перпендикулярны. Найти площадь части одного цилиндра, расположенной внутри другого.

8.126. Радиус каждого из трех круговых цилиндров равен r, оси всех трех цилиндров пересекаются в одной точке и попарно перпендикулярны. Найти площадь поверхности тела, ограниченного этими тремя цилиндрами.

8.127. Радиус каждого из двух круговых цилиндров равен r, оси этих цилиндров пересекаются под углом α. Найти площадь поверхности тела, ограниченного двумя данными цилиндрами.

8.128. Два круговых цилиндра (радиус первого r и радиус второго R $(R>r)$) расположены так, что их оси пересекаются и перпендикулярны.

1) Выразить через эллиптический интеграл площадь части первого цилиндра, расположенной внутри второго.

2) Выразить через эллиптические интегралы площадь одной из частей второго цилиндра, расположенной внутри первого.

---

§ 9. Применение интеграла к решению геометрических и физических задач

1. Применения к геометрии.

Пример 1. Найти в первом квадранте $x>0$, $y>0$ гладкую кривую, выходящую из точки $(a;\ 0)$, у которой длина отрезка любой касательной от точки касания до точки пересечения с осью ординат равна a.

△ Для кривой, заданной параметрически $x=x(t)$, $y=y(t)$, уравнение касательной в точке $(x(t);\ y(t))$ имеет вид

$$(y-y(t))x'(t)=(x-x(t))y'(t). \tag{1}$$

Если $(0;\ y_1)$ — точка пересечения касательной с осью ординат, то по условию

$$x^2(t)+(y_1-y(t))^2=a^2. \tag{2}$$

Полагая в (1) $x=0$, получаем

$$(y_1-y(t))x'(t)=-x(t)y'(t).$$

Если допустить, что $x'(t)=0$, то получим, что и $y'(t)=0$ (так как $x(t)>0$), что невозможно в силу гладкости кривой ($x'^2(t)+ + y'^2(t)\neq 0$). Учитывая это, находим $y_1-y(t)=-x(t)y'(t)/x'(t)$, а из (2)

$$x^2(t)+\left(\frac{x(t)\,y'(t)}{x'(t)}\right)^2=a^2.$$

Отсюда следует, что

$$y'(t)=\pm\frac{\sqrt{a^2-x^2(t)}}{x(t)}\,x'(t) \tag{3}$$

и, значит,

$$\int\limits_{t_0}^{t} y'(\tau)\,d\tau=\pm\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\sqrt{a^2-x^2(\tau)}}{x(\tau)}\,x'(\tau)\,d\tau, \tag{4}$$

где t_0 соответствует начальной точке $(a;\ 0)$, т. е. $y(t_0)=0$, $x(t_0)=a$. Поскольку

$$\int\limits_{t_0}^{t} y'(\tau)\,d\tau=y(t)-y(t_0)=y(t),$$

$$\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\sqrt{a^2-x^2(\tau)}}{x(\tau)}\,x'(\tau)\,d\tau=F(x(\tau))\Big|_{t_0}^{t},$$

где $F(x)$ — первообразная функции $\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$, т. е.

$$F(x)=\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx=\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a}{2}\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}+C,$$

то из (4) следует, что

$$y(t)=\pm F(x(\tau))\Big|_{t_0}^{t}.$$

Так как $x(t_0)=a$, $F(a)=C$, то

$$y(t)=\pm\left(\sqrt{a^2-x^2(t)}+\frac{a}{2}\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2(t)}}{a+\sqrt{a^2-x^2(t)}}\right). \tag{5}$$

В качестве параметра можно взять x, т. е. положить $x=t$, тогда

$$y(x)=\pm\left(\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a}{2}\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right). \tag{6}$$

Выясним, какой знак следует взять в (6). Так как $x'(t)=1$, то из (3) следует, что $y'=\pm\sqrt{a^2-x^2}/x$. Если взять знак «плюс», то $y'(x) \geqslant 0$ при $0 < x \leqslant a$, функция $y(x)$ возрастает и, поскольку $y(x) > 0$, равенство $y(a) = 0$ невозможно. Следовательно, нужно взять знак «минус». Итак,

$$y(x) = -\left(\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a}{2} \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{a + \sqrt{a^2 - x^2}}\right). \tag{7}$$

Можно было бы получить и иное параметрическое представление кривой, причем иногда это удобно делать не на последнем этапе (в (5)), а ранее, при интегрировании равенства (3). Например, полагая в (3) $x = a \sin t$, $0 < t \leqslant \pi/2$, получим

$$y'(t) = -a \frac{\cos^2 t}{\sin t} \tag{8}$$

(знак выбран по тем же соображениям, что и выше). Точка $(a;\ 0)$ кривой соответствует параметру $t = \pi/2$. Учитывая это, из (8) находим

$$\int\limits_t^{\pi/2} y'(\tau)\, d\tau = -a \int\limits_t^{\pi/2} \frac{\cos^2 \tau}{\sin \tau}\, d\tau,$$

$$-y(t) = -a(\cos t + \ln \operatorname{tg}(\tau/2))\Big|_t^{\pi/2} = a(\cos t + \ln \operatorname{tg}(t/2)),$$

т. е. кривая задана уравнениями

$$x = a \sin t, \quad y = -a(\cos t + \ln \operatorname{tg}(t/2)), \tag{9}$$

$0 < t \leqslant \pi/2$. И уравнение (7) и система (9) задают половину известной кривой — *трактрисы*. ▲

9.1. Найти все функции $y = y(x)$, у графика которых поднормаль во всех точках одинакова и равна $p > 0$. Указать ту из этих функций, график которой проходит через точку $(p/2;\ p)$. (Поднормаль — это проекция на ось Ox отрезка нормали от точки на кривой до точки пересечения с осью Ox.)

9.2. Найти все кривые, у которых каждая нормаль проходит через точку $(x_0;\ y_0)$.

9.3. Найти кривую, проходящую через точку $(a;\ -1)$, $a > 0$, у которой проекция на ось Ox отрезка любой касательной от точки касания до точки пересечения с осью Ox равна a.

9.4. Найти в первом квадранте кривую, проходящую через точку $(1;\ 1)$, у которой отрезок любой ее нормали, заключенный между осями координат, делится точкой кривой в отношении $m:n$, $m \neq n$, считая от оси Ox.

9.5. Найти в первом квадранте проходящую через точку $(1;\ 1)$ кривую, у которой отрезок любой касательной, заключенный между осями координат, делится точкой касания в отношении $m:n$, считая от оси Ox.

9.6. Найти все кривые, у которых отрезок любой нормали от точки кривой до точки пересечения с осью Ox имеет длину a.

9.7. Найти все кривые, у которых отрезок любой касательной от точки на кривой до точки пересечения с осью абсцисс имеет длину a.

9.8. Найти кривые, проходящие через точку $(0;\ 2)$ и обладающие свойством: угол между лучом, проведенным из начала координат в произвольную точку кривой, и осью Ox равен углу между этим лучом и касательной к кривой в этой точке.

2. Приложение к кинематике.

9.9. Точка начинает двигаться с ускорением $a = a_0/(1-\nu t)$ из состояния покоя при $t=0$. Найти путь, пройденный точкой к тому моменту, когда ее скорость достигнет значения v_0.

9.10. Точка M движется по прямой из начального $(t=0)$ положения O с начальной скоростью v_0. Ускорение точки меняется по закону $a = -2v_0\omega \sin \omega t$, $t \geqslant 0$. Найти расстояние от точки M до точки O в момент $t = 2\pi/\omega$ и путь, пройденный точкой к этому моменту.

9.11. Материальная точка двигалась равномерно и прямолинейно, имея кинетическую энергию W. В момент времени t_0 на нее начала действовать постоянная по величине и направлению сила F, перпендикулярная в момент t_0 направлению скорости точки. Какой путь пройдет точка за то время, когда ее кинетическая энергия удвоится?

9.12. Нерастяжимую нить сматывают с неподвижного барабана (радиус которого R), держа ее в натянутом состоянии. Угловая скорость точки схода нити по окружности барабана известна как функция времени $\omega(t)$, $t \geqslant 0$. Найти путь, пройденный концом нити за время T. Какой путь пройдет конец нити, когда точка схода нити с барабана совершит полный оборот?

9.13. Окружность радиуса r катится без скольжения по прямой в одном направлении. В начальный момент на окружности отмечена точка M, диаметрально противоположная точке касания окружности с прямой. Найти путь, пройденный точкой M к тому моменту, когда она снова окажется в наивысшем положении.

9.14. Внутри окружности Ω, радиус которой $3r$, находится, касаясь ее, окружность ω с радиусом r. На ω отмечена точка касания M. Окружность ω начинает катиться по Ω без скольжения в одном направлении. Найти путь, пройденный точкой M окружности ω: 1) к тому моменту, когда она снова попадет на окружность Ω; 2) за один оборот центра ω вокруг центра Ω.

---

3. Вычисление моментов и координат центра масс. Пусть на спрямляемой плоской кривой L длиной l распределена масса с плотностью $\rho(s)$, являющейся функцией длины дуги s. По следующим формулам вычисляют

массу кривой:

$$m = \int_0^l \rho(s)\,ds, \tag{10}$$

статистические моменты кривой относительно осей Ox и Oy:

$$M_x=\int_0^l y(s)\rho(s)\,ds,\quad M_y=\int_0^l x(s)\rho(s)\,ds, \tag{11}$$

координаты центра масс:

$$x_C=\frac{M_y}{m},\quad y_C=\frac{M_x}{m}, \tag{12}$$

моменты инерции относительно осей Ox и Oy:

$$I_x=\int_0^l y^2(s)\rho(s)\,ds,\quad I_y=\int_0^l x^2(s)\rho(s)\,ds. \tag{13}$$

Пусть плоская фигура Ф задана неравенствами

$$y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\ a\leqslant x\leqslant b,$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ — непрерывные на $[a;\ b]$ функции. Пусть на Ф распределена масса с плотностью $\rho(x)$. Массу m фигуры, статические моменты M_x и M_y, а также моменты инерции I_x и I_y относительно осей Ox и Oy вычисляют соответственно по формулам:

$$m=\int_a^b (y_2(x)-y_1(x))\,\rho(x)\,dx, \tag{14}$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b \left(y_2^2(x)-y_1^2(x)\right)\rho(x)\,dx, \tag{15}$$

$$M_y=\int_a^b x\,(y_2(x)-y_1(x))\,\rho(x)\,dx, \tag{16}$$

$$I_x=\frac{1}{3}\int_a^b \left(y_2^3(x)-y_1^3(x)\right)\rho(x)\,dx, \tag{17}$$

$$I_y=\int_a^b x^2\,(y_2(x)-y_1(x))\,\rho(x)\,dx. \tag{18}$$

Пусть сектор задан в полярных координатах неравенствами

$$\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2,\quad 0\leqslant r\leqslant r(\varphi),$$

где $0<\varphi_2-\varphi_1\leqslant 2\pi$, $r(\varphi)$ — непрерывная функция на $[\varphi_1;\ \varphi_2]$, и пусть на секторе распределена масса с плотностью $\rho(\varphi)$, тогда:

$$m = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\, \rho(\varphi)\, d\varphi, \tag{19}$$

$$M_x = \frac{1}{3} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3(\varphi) \sin\varphi\, \rho(\varphi)\, d\varphi, \tag{20}$$

$$M_y = \frac{1}{3} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3(\varphi) \cos\varphi\, \rho(\varphi)\, d\varphi, \tag{21}$$

$$I_x = \frac{1}{4} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^4(\varphi) \sin^2\varphi\, \rho(\varphi)\, d\varphi, \tag{22}$$

$$I_y = \frac{1}{4} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^4(\varphi) \cos^2\varphi\, \rho(\varphi)\, d\varphi. \tag{23}$$

Координаты центра масс вычисляют по формулам (12).

Пусть для тела Ω в пространстве $Oxyz$ площади его поперечных сечений плоскостями $x = \mathrm{const}$ известны как значения непрерывной функции $S(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, и пусть по Ω распределена масса с плотностью $\rho(x)$. Массу m тела, его статический момент M_{Oyz} и момент инерции I_{Oyz} относительно плоскости Oyz вычисляют по формулам:

$$m = \int_a^b S(x)\, \rho(x)\, dx, \tag{24}$$

$$M_{Oyz} = \int_a^b xS(x)\, \rho(x)\, dx, \tag{25}$$

$$I_{Oyz} = \int_a^b x^2 S(x)\, \rho(x)\, dx, \tag{26}$$

а абсциссу центра масс — по формуле

$$x_C = \frac{M_{Oyz}}{m}. \tag{27}$$

Если тело Ω получено при вращении вокруг оси Ox фигуры, заданной неравенствами

$$0 \leqslant y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ — непрерывные функции, то в (24)—(26) следует взять

$$S(x) = \pi\left(y_2^2(x) - y_1^2(x)\right).$$

Момент инерции I_{xx} такого тела вращения относительно оси вращения Ox находят по формуле

$$I_{xx} = \frac{\pi}{2} \int_a^b \left(y_2^4(x) - y_1^4(x)\right) \rho(x)\, dx, \tag{28}$$

а момент инерции I_{yy} относительно оси Oy (*экваториальный момент инерции*) — по формуле

$$I_{yy} = \frac{1}{2} I_{xx} + \pi \int_a^b x^2 \left(y_2^2(x) - y_1^2(x)\right) dx. \tag{29}$$

Пусть поверхность S образована вращением вокруг оси Ox графика непрерывно дифференцируемой функции

$$y = y(x), \quad y(x) \geqslant 0$$

на $[a; b]$, и пусть на этой поверхности распределена масса с плотностью $\rho(x)$. Массу m поверхности, ее статический момент M_{Oyz}, момент инерции I_{Oyz} относительно плоскости Oyz и момент инерции I_{xx} относительно оси Ox вычисляют соответственно по формулам:

$$m = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)}\, \rho(x)\, dx, \tag{30}$$

$$M_{Oyz} = 2\pi \int_a^b x y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)}\, \rho(x)\, dx, \tag{31}$$

$$I_{Oyz} = 2\pi \int_a^b x^2 y^2(x) \sqrt{1 + y'^2(x)}\, \rho(x)\, dx, \tag{32}$$

$$I_{xx} = 2\pi \int_a^b y^3(x) \sqrt{1 + y'^2(x)}\, \rho(x)\, dx, \tag{33}$$

абсциссу центра масс находят по формуле (27).

Пусть цилиндрическая поверхность с направляющей $x = x(s)$, $y = y(s)$ в плоскости Oxy ограничена образующими и кривой

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s), \quad z(s) \geqslant 0,$$

и имеет плотность $\rho = \rho(s)$, $0 \leqslant s \leqslant l$. Масса m, статические моменты M_{Oyz}, M_{Ozx}, M_{Oxy} находят по формулам:

$$m = \int_0^l \rho(s) z(s)\, ds, \tag{34}$$

$$\left.\begin{aligned} M_{Oyz} = \int_0^l \rho(s) x(s) z(s)\, ds, \quad M_{Ozx} = \int_0^l \rho(s) y(s) z(s)\, ds, \\ M_{Oxy} = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(s) z^2(s)\, ds, \end{aligned}\right| \tag{35}$$

а координаты центра масс — по формулам:

$$x_C = \frac{M_{Oyz}}{m}, \quad y_C = \frac{M_{Ozx}}{m}, \quad z_C = \frac{M_{Oxy}}{m}. \tag{36}$$

Если кривая, плоская фигура, тело или поверхность с распределенной массой вращается вокруг оси с постоянной угловой скоростью ω, то *кинетическая энергия вращения* равна

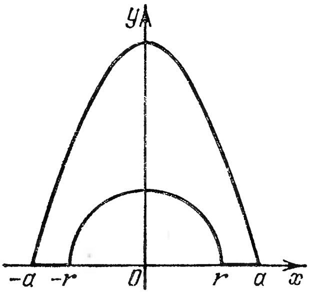

Рис. 28

$$W = \frac{1}{2} I\omega^2, \tag{37}$$

где I — момент инерции относительно оси вращения.

Пример 2. Фигура ограничена параболой $y = h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, полуокружностью $x^2 + y^2 = r^2$ и осью Ox (рис. 28). Считая фигуру однородной и $\rho = 1$, найти координаты центра масс фигуры и ее момент инерции относительно оси Oy.

△ Указанные величины найдем по формулам (12), (14)—(16), (18), полагая $y_2 = h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, $y_1(x) = 0$ при $r < |x| \leqslant a$, $y_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ при $|x| \leqslant r$. Из формулы (14) для массы фигуры имеем

$$m = \int_{-a}^{a} (y_2(x) - y_1(x))\, dx = 2\int_{0}^{a} (y_2(x) - y_1(x))\, dx,$$

так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — четные функции, и учитывая, что $y_1(x) = 0$ при $r \leqslant x \leqslant a$, получаем

$$m = 2\int_0^a h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx - 2\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx.$$

Вычислив интегралы (второй, например, с помощью подстановки $x = r\sin t$), найдем

$$m = \frac{1}{6}(8ah - 3\pi r^2).$$

Из формулы (16) имеем

$$M_y = \int_{-a}^{a} x(y_2(x) - y_1(x))\, dx = 0,$$

так как $x(y_2(x) - y_1(x))$ — нечетная функция. Отсюда

$$x_C = \frac{M_y}{m} = 0. \tag{38'}$$

Как и следовало ожидать, центр масс находится на оси Oy — оси симметрии фигуры. По формуле (15) находим

$$M_x = \frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{a} \left(y_2^2(x) - y_1^2(x)\right) dx =$$

$$= \int\limits_0^a h^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 dx - \int\limits_0^r (r^2 - x^2)\, dx = \frac{2}{15}(4ah^2 - 5r^3).$$

Отсюда

$$y_C = \frac{M_x}{m} = \frac{4\,(4ah^2 - 5r^3)}{5\,(8ah - 3\pi r^2)}. \tag{38''}$$

Момент инерции I_y находим по формуле (18):

$$I_y = \int\limits_{-a}^{a} x^2 (y_2(x) - y_1(x))\, dx =$$

$$= 2\int\limits_0^a x^2 h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx - 2\int\limits_0^r x^2\sqrt{r^2 - x^2}\, dx.$$

Вычислив интегралы (второй — с помощью подстановки $x = r\sin t$), получим

$$I_y = \frac{4}{15}a^3 h - \frac{\pi}{8}r^4. \tag{39}$$

Ответ дается формулами (38′)—(39). ▲

Пример 3. Тело образовано при вращении фигуры, заданной неравенствами

$$a\,\mathrm{ch}(x/a) \leqslant y \leqslant a\,\mathrm{ch}\,1, \quad 0 \leqslant x \leqslant a,$$

вокруг оси Oy. Найти координаты центра масс тела, считая плотность $\rho = 1$.

△ Мы можем считать фигуру заданной неравенствами $a \leqslant y \leqslant a\,\mathrm{ch}\,1$, $0 \leqslant x \leqslant a\,\mathrm{arch}(y/a)$, где $\mathrm{arch}\,u$ — функция, обратная функции $\mathrm{ch}\,t$, $t \geqslant 0$. Тогда, считая y независимой переменной, применим для нахождения массы тела формулу (24) с заменой x на y (рис. 29):

$$m = \int\limits_a^{a\,\mathrm{ch}\,1} S(y)\, dy = \pi a^2 \int\limits_a^{a\,\mathrm{ch}\,1} \left(\mathrm{arch}\,\frac{y}{a}\right)^2 dy.$$

После замены $y = a\,\mathrm{ch}\,t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, получим

$$m = \pi a^3 \int\limits_0^1 t^2\,\mathrm{sh}\,t\, dt = (3\,\mathrm{ch}\,1 - 2\,\mathrm{sh}\,1 - 2)\,\pi a^3$$

(вычисления сделаны с помощью формулы интегрирования по частям). Пусть $S(x)$, $-a \leqslant x \leqslant a$, — площади сечений тела плоскостями $x = \mathrm{const}$. Тело симметрично относительно плоскости Oyz, поэтому $S(x)$ — четная функция (рис. 30). Тогда $xS(x)$ — нечетная функция и, согласно формуле (25),

$$M_{Oyz} = \int_{-a}^{a} xS(x)\,dx = 0.$$

Значит, и $x_C = M_{Oyz}/m = 0$. Аналогично устанавливаем, что и $z_C = 0$, т. е. центр масс находится на оси симметрии тела —

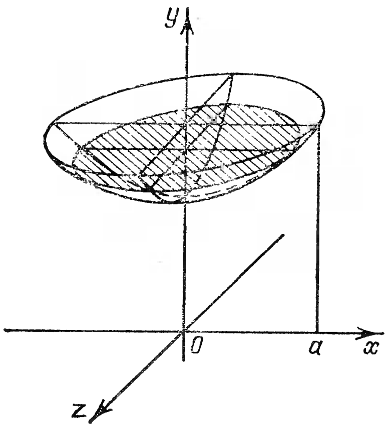

Рис. 29

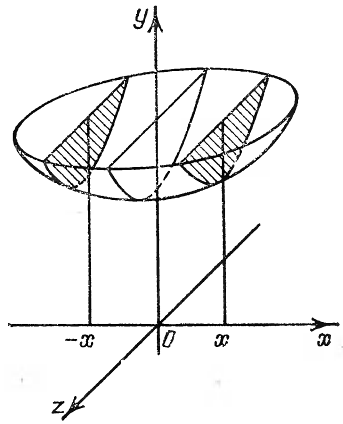

Рис. 30

оси Oy. Для нахождения статического момента M_{Ozx} применим формулу, аналогичную (25), с заменой x на y:

$$M_{Ozx} = \int_{a}^{a\,\mathrm{ch}\,1} yS(y)\,dy = \pi a^2 \int_{a}^{a\,\mathrm{ch}\,1} y\left(\mathrm{arch}\,\frac{y}{a}\right)^2 dy.$$

После замены $y = a\,\mathrm{ch}\,t$ получим

$$M_{Ozx} = \pi a^4 \int_0^1 t^2\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{sh}\,t\,dt = \frac{1}{2}\pi a^4 \int_0^1 t^2\,\mathrm{sh}\,2t\,dt.$$

Дважды интегрируя по частям, найдем, что

$$M_{Ozx} = \frac{\pi a^4}{8}(3\,\mathrm{ch}\,2 - 2\,\mathrm{sh}\,2 - 1).$$

Отсюда

$$y_C = \frac{3\,\mathrm{ch}\,2 - 2\,\mathrm{sh}\,2 - 1}{8(3\,\mathrm{ch}\,1 - 2\,\mathrm{sh}\,1 - 2)}\,a. \quad \blacktriangle$$

Пример 4. Однородный цилиндр массы m с радиусом и высотой, равными a, жестко прикреплен стержнем длиною $2a$ к прямой l. Стержень расположен по оси цилиндра, прямая l

перпендикулярна этой оси (рис. 31). Найти кинетическую энергию цилиндра при вращении его вокруг l с угловой скоростью ω.

△ Для того чтобы по формуле (37) найти кинетическую энергию, определим момент инерции цилиндра относительно прямой l. Введем систему координат, как показано на рис. 31 (ось Oy совпадает с осью вращения l, ось Ox — с осью цилиндра). Момент инерции I_{yy} определим по формуле (29), а I_{xx} — по формуле (28). Цилиндр образован вращением прямоугольника $0 \leqslant y \leqslant a$, $2a \leqslant x \leqslant 3a$, следовательно, $y_1(x) = 0$, $y_2(x) = a$, и по (28) получаем

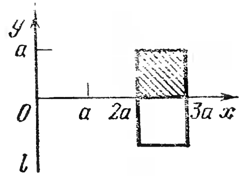

Рис. 31

$$I_{xx} = \frac{\pi}{2}\int_{2a}^{3a} a^4\rho\,dx = \frac{\pi}{2}\rho a^5,$$

где ρ — плотность цилиндра. Теперь по формуле (29) находим

$$I_{yy} = \frac{1}{2}I_{xx} + \pi\int_{2a}^{3a} x^2a^2\rho\,dx = \frac{\pi}{4}\rho a^5 + \frac{19\pi}{3}\rho a^5 = \frac{79\pi}{12}\rho a^5.$$

Учитывая, что $\rho = m/V = m/\pi a^3$, получаем $I_{yy} = \frac{79}{12}ma^2$. Отсюда $W = \frac{79}{24}ma^2\omega^2$. ▲

Найти статические моменты M_x и M_y кривой (**9.15—9.17**)*):

9.15. 1) $x/a + y/b = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

2) $x^2 + y^2 = a^2$, $y \geqslant 0$.

3) $y^2 = 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

4) $y^2 - p^2 = 2px$, $x \leqslant 0$.

5) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $y \geqslant 0$, $a > b$.

6) $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$, $0 \leqslant x \leqslant a$.

9.16. 1) $x = a\sin t$, $y = b\cos t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$, $a > b$.

2) $x = a\sin^3 t$, $y = a\cos^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

3) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

9.17. 1) $r = 2a\cos\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$.

2) $r = a(1 + \cos\varphi)$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

3) $r = ae^{\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

9.18. Доказать, что статический момент дуги AB параболы относительно оси параболы равен $R_0(R_A - R_B)/3$, где R_0, R_A и R_B — радиусы кривизны параболы в ее вершине и точках A и B соответственно.

---

*) Считать в задачах этого пункта $\rho = 1$, если не оговорено иное.

9.19. Найти координаты x_C и y_C центра масс кривой:

1) $x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad |\varphi| \leqslant \alpha \leqslant \pi.$

2) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.$

3) $y = a \operatorname{ch}(x/a), \quad |x| \leqslant b.$

4) $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2.$

5) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$

6) $r = a(1 + \cos\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$

7) $r = ae^{\varphi}, \quad \pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$

9.20. Доказать, что если однородная кривая имеет ось симметрии, то центр масс кривой лежит на этой оси.

9.21. Доказать, что статический момент кривой относительно оси, проходящей через центр масс, равен нулю.

9.22. Найти момент инерции отрезка, длина которого l, относительно оси, лежащей с ним в одной плоскости и не пересекающей этот отрезок, если расстояние до оси от одного конца отрезка равно a, от другого — b.

9.23. Найти момент инерции I_x кривой:

1) $y = e^x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2.$

2) $x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha \leqslant 2\pi.$

3) $x^2 + (y - a)^2 = R^2, \quad a > R.$

9.24. Найти моменты инерции I_x и I_y одной арки циклоиды:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

9.25. Пусть ось l_0 проходит через центр масс кривой и момент инерции кривой относительно оси l_0 равен I_{l_0}. Пусть ось l параллельна l_0 и расстояние между этими осями равно d. Доказать, что

$$I_l = I_{l_0} + sd^2,$$

где I_l — момент инерции кривой относительно оси l, s — длина кривой.

9.26. Найти статический момент однородного треугольника с основанием a и высотой h относительно оси, содержащей его основание.

9.27. Найти статический момент однородного круга с радиусом R относительно: 1) одной из его касательных; 2) оси, отстоящей от центра круга на расстояние a.

9.28. Найти статические моменты M_x и M_y фигуры, ограниченной кривыми:

1) $x/a + y/b = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad a > 0, \quad b > 0.$

2) $y = \cos x, \quad |x| \leqslant \pi/2, \quad y = 0.$

3) $y = \sin x \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi), \quad y = 1/2.$

4) $y = x^2, \quad y = \sqrt{x}.$

5) $y = 2/(1 + x^2), \quad y = x^2, \quad x = 0, \quad x \geqslant 0.$

6) $y^2 = 2px, \quad y = 0, \quad x = a, \quad a > 0, \quad y \geqslant 0.$

7) $x = a\sin t, \quad y = b\cos t, \quad |t| \leqslant \pi/2, \quad y = 0.$

8) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \quad y = 0.$

9) $r = a\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$

10) $r = a(1 + \cos\varphi), \quad |\varphi| \leqslant \pi.$

9.29. Найти расстояние от центра масс до основания однородного треугольника, если высота треугольника равна h.

9.30. Однородная пластина составлена из прямоугольника со сторонами $2b$ и h и полукруга с диаметром $2b$, приваренного к стороне прямоугольника длиной $2b$. Найти центр масс пластины.

9.31. Найти центр масс полукольца, ограниченного концентрическими полуокружностями радиусов r и R, $R > r$, и отрезками диаметра.

9.32. На каком расстоянии от большего основания однородной трапеции расположен ее центр масс, если основания трапеции равны a и b, $a > b$, высота — h?

9.33. Плотность треугольной пластины меняется в зависимости от расстояния x до основания по закону $\rho = \rho_0\left(1 + \alpha\frac{x^2}{h^2}\right)$, где h — высота пластины. При каком α центр масс пластины будет удален от основания на расстояние $h/2$?

Найти координаты x_C и y_C центра масс фигуры, ограниченной кривыми (**9.34—9.35**):

9.34. 1) $x^2 + y^2 = R^2, \quad y \geqslant 0, \quad y = 0.$

2) $y = ax^n\ (0 \leqslant x \leqslant b), \quad y = 0, \quad x = b, \quad n > 0.$

3) $y = h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad y = 0, \quad h > 0, \quad a > 0.$

4) $y^2 = x^3/a, \quad x = a, \quad y = 0, \quad a > 0, \quad y \geqslant 0.$

5) $y = \sin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad y = 0.$

6) $y = a\,\mathrm{ch}(x/a), \quad y = 0, \quad |x| = b, \quad a > 0.$

7) $y = \cos x\ (|x| \leqslant \pi/2), \quad y = 1/2.$

8) $y = \frac{2}{\pi}x, \quad y = \sin x, \quad y = 0.$

9) $y^2 = 2px, \quad x^2 = 2py.$

9.35. 1) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \quad x = 0, \quad y = 0.$

2) $y^2 = 2x, \quad x + y = 4.$

3) $y = x^3, \quad x + y = 2, \quad x = 0.$

4) $y^2 = ax^3 - x^4.$

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad x = 0, \quad y = 0.$

6) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad x = 0, \quad y = 0.$

7) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \quad y = 0.$

8) $x^2 + y^2 = a^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = 0, \quad y \geqslant 0, \quad x \geqslant 0.$

9.36. Найти координаты центра масс фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 4x$, $y = 2$, $x = 0$, если плотность фигуры $\rho = x$.

9.37. Найти центр масс сектора однородного круга с центральным углом 2α; радиус круга равен r.

9.38. Найти координаты x_C и y_C центра масс фигуры, ограниченной в полярных координатах:

1) Полувитком архимедовой спирали $r = a\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, и лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$.

2) Кардиоидой $r = a(1 + \cos\varphi)$.

3) Правой петлей *лемнискаты Бернулли* $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

4) Кривой $r = a \sin 2\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$.

5) Кривыми $r = \sqrt{2}$, $r = 2\sin\varphi$, $\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/4$.

9.39. Из однородного круга, радиус которого R, вырезана часть, ограниченная окружностью радиуса R, проходящей через центр данного круга. Найти центр масс оставшейся части круга.

9.40. Доказать, что если однородная фигура имеет ось симметрии, то центр масс лежит на этой оси.

9.41. Доказать, что точка плоскости, определяемая для кривой или фигуры формулами

$$x_C = \frac{M_y}{m}, \quad y_C = \frac{M_x}{m}$$

(т. е. центр масс), не зависит от выбора системы координат.

9.42. Найти в первом квадранте такую кривую $y = y(x)$, что абсцисса центра масс однородной фигуры, заданной неравенствами $0 \leqslant x \leqslant \xi$, $0 \leqslant y \leqslant y(\xi)$, равна $\frac{n-1}{n}\xi$, $\xi > 0$, $n > 2$.

9.43. Найти моменты инерции однородного прямоугольника со сторонами a и b относительно его осей симметрии.

9.44. Найти момент инерции однородного прямоугольника со сторонами a и b относительно оси, параллельной сторонам, длины которых b, и удаленной от ближайшей из них на расстояние c.

9.45. Найти момент инерции однородного круга радиуса R относительно его диаметра.

9.46. Найти момент инерции однородного круга радиуса R относительно оси, лежащей в плоскости круга и отстоящей от его центра на расстояние a.

9.47. Найти момент инерции однородного треугольника с основанием a и высотой h относительно: 1) оси, содержащей его основание; 2) оси, проходящей через вершину параллельно основанию; 3) оси, проходящей через центр масс треугольника параллельно основанию.

9.48. Найти момент инерции однородного полукруга, радиус которого R, относительно ограничивающего его диаметра.

9.49. Найти моменты инерции однородного эллипса с полуосями a и b относительно его осей симметрии.

9.50. Найти моменты инерции I_x, I_y фигуры, ограниченной кривыми:

1) $y/h = x^2/a^2$, $y = h$.

2) $ay = 2ax - x^2$, $y = 0$.

9.51. От однородного круга (с радиусом R) отсечены два сегмента параллельными хордами, каждая из которых удалена от центра на расстояние h. Найти момент инерции оставшейся части круга относительно оси, проходящей через центр параллельно хордам.

9.52. Найти момент инерции однородного квадрата со стороной a относительно его диагонали.

9.53. Найти момент инерции однородного правильного шестиугольника со стороной a относительно его большей диагонали.

9.54. Из однородного круга, радиус которого R, вырезан сектор с центральным углом $\alpha \leqslant \pi$. Найти момент инерции этого сектора относительно: 1) его оси симметрии; 2) прямой, перпендикулярной его оси симметрии и проходящей через центр круга; 3) оси, содержащей радиус, ограничивающий сектор.

9.55. Прямой круговой однородный конус имеет высоту h. На каком расстоянии от основания конуса находится его центр масс?

9.56. Найти расстояние от центра масс однородного полушара радиуса R до его основания.

9.57. Найти центр масс однородного усеченного конуса с радиусами оснований R и r, $R > r$, и высотой h.

9.58. Найти расстояние от центра масс прямого кругового конуса с высотой h до его основания, если плотность конуса в точке пропорциональна: 1) расстоянию от точки до основания; 2) квадратному корню из расстояния до основания.

9.59. Найти координаты центра масс тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, заданной неравенствами $0 \leqslant x \leqslant a$, $y^2 \leqslant 2px$.

9.60. Найти координаты центра масс части однородного шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, лежащей в первом октанте.

9.61. Найти центр масс тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 2p(z - h), \quad x^2 + y^2 = 2ph, \quad z = 0, \quad p > 0, \quad h > 0.$$

9.62. Найти центр масс однородного тела, образованного при вращении сектора круга с радиусом R и с центральным углом α вокруг его граничного радиуса.

9.63. От однородной сферы с радиусом R отсечена плоскостью, проходящей через ее центр, полусфера. Найти расстояние от центра масс этой полусферы до секущей плоскости.

9.64. Прямой круговой конус имеет высоту h, радиус основания R. Найти расстояние до основания конуса от центра масс: 1) его боковой поверхности; 2) его полной поверхности, считая их однородными.

9.65. От однородного параболоида вращения отсечен плоскостью, перпендикулярной оси вращения, сегмент высотой h

Найти расстояние от центра масс сегмента до секущей плоскости.

9.66. Найти момент инерции однородного:

1) Прямого кругового конуса с высотой h и радиусом основания R относительно плоскости основания.

2) Полушара с радиусом R относительно плоскости основания.

9.67. Найти момент инерции однородного шара радиуса R относительно диаметра.

9.68. Найти момент инерции относительно оси вращения однородного:

1) Прямого кругового цилиндра с радиусом R и высотой h.

2) Полого цилиндра с высотой h, внутренним радиусом r и внешним радиусом R.

3) Прямого кругового конуса с высотой h и радиусом основания R.

4) Усеченного конуса с высотой h и радиусами оснований R и r, $R > r$.

5) Тела, ограниченного параболоидом вращения и плоскостью, проведенной на расстоянии h от вершины перпендикулярно оси; радиус окружности сечения равен R.

6) Тела, ограниченного гиперболоидом вращения

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z^2 = 1$$

и плоскостями $z = 0$, $z = 1$.

7) Тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 2p(z - h), \quad x^2 + y^2 = 2ph, \quad z = 0, \quad p > 0, \quad h > 0.$$

9.69. Фигура, заданная неравенствами $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant e^x$, вращается: 1) вокруг оси Ox; 2) вокруг оси Oy. Считая получающееся тело вращения однородным, найти его момент инерции относительно оси вращения.

9.70. Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вращается: 1) вокруг оси Ox; 2) вокруг оси Oy. Считая получающийся эллипсоид однородным, найти его момент инерции относительно оси вращения.

9.71. Тор образован вращением круга радиуса r вокруг оси l, лежащей в плоскости круга и отстоящей от центра круга на расстояние d. Найти момент инерции тора относительно оси l $(d > r)$.

9.72. Найти момент инерции относительно диаметра основания однородного:

1) Цилиндра радиуса R и высоты h.

2) Конуса с радиусом основания R и высотой h.

9.73. Радиусы оснований прямого усеченного конуса равны r и $2r$, угол между образующей и основанием равен $\pi/3$. Найти центр масс его: 1) боковой поверхности; 2) полной поверхности.

9.74. Найти центр масс оболочки, являющейся:

1) Сферическим поясом с высотой h.

2) Сегментом с радиусом основания R и высотой $R\sqrt{3}/2$, отсеченным от параболоида вращения плоскостью, перпендикулярной его оси.

9.75. Найти центр масс части поверхности цилиндра, заключенной между плоскостями $z=0$ и $z=hy/R$, $y \geqslant 0$, если цилиндр задан уравнением:

1) $x^2+y^2=R^2$.

2) $x^{2/3}+y^{2/3}=R^{2/3}$.

9.76. Найти момент инерции:

1) Боковой поверхности цилиндра с радиусом R и высотой h относительно его оси.

2) Боковой поверхности конуса с высотой h и радиусом основания R относительно его оси.

3) Сферы радиуса R относительно ее диаметра.

9.77. Гладкая кривая и не пересекающая ее ось лежат в одной плоскости. Доказать, что площадь поверхности, полученной при вращении кривой вокруг оси, равна произведению длины кривой на длину окружности, описанной центром масс этой кривой (*первая теорема Гульдина*).

9.78. Доказать, что объем тела, полученного при вращении плоской фигуры вокруг не пересекающей ее оси, лежащей в плоскости фигуры, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром масс этой фигуры (*вторая теорема Гульдина*).

9.79. Пусть оси n и n_1 параллельны, расстояние между ними равно d, пусть гладкая кривая L и ось n_1 лежат по разные стороны от n. Пусть S и S_1 — площади поверхностей, образованных при вращении кривой L вокруг осей n и n_1 соответственно. Доказать, что $S_1=S+2\pi dl$, где l — длина кривой L.

9.80. Пусть оси n и n_1 параллельны, расстояние между ними равно d, пусть фигура Ф и ось n_1 лежат по разные стороны от n. Пусть V и V_1 — объемы тел, образованных при вращении фигуры Ф вокруг осей n и n_1 соответственно. Доказать, что $V_1=$ $=V+2\pi\, dS$, где S — площадь фигуры Ф.

9.81. Тор образован вращением круга радиуса r вокруг оси, лежащей в одной плоскости с кругом и удаленной от его центра на расстояние d, $d>r$. Используя теоремы Гульдина, найти: 1) площадь поверхности тора; 2) объем тора.

9.82. Эллипс с полуосями a и b, $a>b$, вращается вокруг прямой, параллельной большой оси эллипса и отстоящей от нее на расстояние $d>b$. Используя теорему Гульдина, найти объем получающегося тела вращения.

9.83. Дуга окружности радиуса r имеет угловой размер α. Используя теорему Гульдина и формулу для площади сферического слоя, найти центр масс дуги.

9.84. Найти центр масс полукруга радиуса r, используя теорему Гульдина.

9.85. Найти площадь поверхности и объем тела, полученного вращением правильного треугольника со стороной a вокруг оси, отстоящей от его центра на расстояние $d > a/\sqrt{3}$.

9.86. Правильный n-угольник со стороной a вращается вокруг одной из сторон. Найти площадь поверхности и объем получающегося тела вращения.

9.87. Квадрат со стороной a вращается вокруг прямой, проходящей через его вершину и составляющей угол φ с диагональю квадрата, $\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. Найти площадь поверхности и объем получающегося тела вращения.

9.88. Правильный треугольник со стороной a вращается вокруг прямой, проходящей через его вершину и не имеющей с треугольником других общих точек. Каков наибольший возможный объем получающегося тела вращения?

9.89. Фигура, ограниченная двумя арками циклоид

$$x = a(t - \sin t), \quad y = \pm a(1 - \cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

вращается вокруг оси Oy. Найти площадь поверхности и объем получающегося тела вращения.

9.90. Используя формулы для длины астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ и для площади ограниченной ею фигуры (задача 7.72, 1) и пример 4 § 7 при $b = a$), найти площадь поверхности и объем тела, образованного при вращении астроиды вокруг прямой $x + y = a$.

9.91. Одна поверхность образована при вращении арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

вокруг оси Ox, другая — при вращении той же арки вокруг прямой $y = 2a$. Найти отношение площадей этих поверхностей.

9.92. Тонкий однородный стержень имеет массу m и длину l. Какую работу необходимо совершить, чтобы раскрутить стержень до угловой скорости ω вокруг оси, проходящей через его конец перпендикулярно стержню?

9.93. Тонкая однородная проволока массы m, согнутая в полуокружность радиуса r, вращается вокруг оси, проходящей через ее концы, с угловой скоростью ω. Найти кинетическую энергию проволоки.

9.94. Найти кинетическую энергию прямоугольника с плотностью ρ и сторонами a и b, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своей оси симметрии, параллельной стороне длины a.

9.95. Однородная прямоугольная пластина со сторонами a и b и массой m вращается вокруг стороны a с угловой скоростью ω. Найти кинетическую энергию пластины.

9.96. Найти кинетическую энергию однородного круга плотности ρ и радиуса R, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг оси, лежащей в плоскости круга и удаленной от его центра на расстояние $d > R$.

9.97. Найти кинетическую энергию однородного треугольника плотности ρ с основанием a и высотой h, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своего основания.

9.98. Однородный цилиндр с радиусом R, высотой h и массой m вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Найти кинетическую энергию цилиндра.

9.99. Какую работу необходимо совершить, чтобы остановить однородный шар радиуса R, вращающийся вокруг своего диаметра с угловой скоростью ω? Масса шара m.

9.100. Однородный цилиндр массы m, радиуса R и длины l вращается с угловой скоростью ω вокруг прямой, проходящей через центр цилиндра перпендикулярно его оси. Найти кинетическую энергию цилиндра.

9.101. Однородный шар массы m и радиуса R, прикрепленный к нити длины l, вращается с угловой скоростью ω (центр шара движется по окружности). Найти кинетическую энергию шара.

9.102. Однородный конус массы m с радиусом основания R и высотой h вращается с угловой скоростью ω вокруг прямой, проходящей через его вершину перпендикулярно оси конуса. Найти кинетическую энергию конуса.

---

4. Приложения к физическим задачам.

Пример 5. Скорость растворения соли в воде пропорциональна количеству нерастворенной соли и разности между концентрацией насыщенного раствора и концентрацией раствора в данный момент. Массу m_0 кг соли растворяют в N л. воды. Концентрация насыщенного раствора равна c_0 кг/л. За время τ растворилась половина соли. За какое время растворится $\frac{3}{4}m_0$ кг соли $\left(\text{считать, что } m_0=\frac{2}{3}Nc_0\right)$?

$\triangle$ Пусть $m(t)$ количество соли, растворившейся за время t, тогда скорость растворения равна $\frac{dm}{dt}$, концентрация раствора $c=m/N$. По условию

$$\frac{dm}{dt}=\lambda(m_0-m)\left(c_0-\frac{m}{N}\right). \tag{40}$$

Отсюда

$$\frac{m'(t)}{(m_0-m(t))(Nc_0-m(t))}=\frac{\lambda}{N}.$$

$$\int_0^t\frac{m'(\tau)\,d\tau}{(m_0-m(\tau))(Nc_0-m(\tau))}=\frac{\lambda}{N}\int_0^t d\tau.$$

Правая часть здесь равна $\frac{\lambda}{N}t$, а левая — $F(m(\tau))\big|_0^t$, где $F(m)$ — первообразная функции

$$\frac{1}{(m_0-m)(Nc_0-m)},$$

т.е

$$F(m)=\int\frac{dm}{(m_0-m)(Nc_0-m)}=\frac{1}{Nc_0-m_0}\ln\frac{Nc_0-m}{m_0-m}+C.$$

Учитывая это, а также то, что $m(0)=m_0$, $Nc_0=\frac{3}{2}m_0$, получаем

$$\frac{2}{m_0}\ln\frac{3m_0-2m}{2(m_0-m)}=\frac{\lambda}{N}t.$$

По условию $m(\tau)=m_0/2$, поэтому

$$\frac{2}{m_0}\ln 2=\frac{\lambda}{N}\tau,\quad \frac{\lambda}{N}=\frac{2}{\tau m_0}\ln 2,$$

и, следовательно,

$$\frac{2}{m_0}\ln\frac{3m_0-2m}{2(m_0-m)}=\frac{2t}{\tau m_0}\ln 2,$$

откуда

$$t=\tau\left(\ln\frac{3m_0-2m}{2(m_0-m)}\right)\Big/\ln 2.$$

Подставляя сюда $m=\frac{3}{4}m_0$, находим время t_1, за которое растворится такая масса соли,

$$t_1=\tau(\ln 3)/\ln 2. \ \blacktriangle$$

Пример 6. Электрическая цепь содержит сопротивление R и имеет коэффициент самоиндукции L. В начальный момент ток в цепи отсутствует. В цепь подается внешнее напряжение $V(t)=V_0\frac{t}{T}$, где $T=L/R$. Найти зависимость $I(t)$ тока в цепи от времени.

$\triangle$ Ток $I(t)$ и скорость его изменения $\frac{dI}{dt}$ связаны уравнением

$$RI(t)=V(t)-L\frac{dI}{dt}, \tag{41}$$

из которого следует, что

$$\frac{dI}{dt}+\frac{1}{T}I=\frac{V_0}{LT}t.$$

Умножив обе части этого уравнения на $e^{t/T}$, получим, что левая часть $e^{t/T}\frac{dI}{dt}+\frac{1}{T}e^{t/T}I$ есть производная произведения $e^{t/T}I(t)$, поэтому

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t/T}I(t)\right)=\frac{V_0}{LT}te^{t/T}.$$

Отсюда

$$\int_0^t\frac{d}{d\tau}\left(e^{\tau/T}I(\tau)\right)d\tau=\frac{V_0}{LT}\int_0^t\tau e^{\tau/T}\,d\tau.$$

Здесь левая часть равна $e^{t/T}I(t)$, так как $I(0)=0$. Правый интеграл вычислим, применив формулу интегрирования по частям, в результате получим, что

$$I(t) = \frac{V_0}{R}\left(\frac{t}{T} - 1 + e^{-t/T}\right). \quad \blacktriangle$$

Пример 7. Ракета с начальной массой m_0 из состояния покоя проходит участок длиной l с постоянным ускорением a, испытывая постоянную силу сопротивления F. Скорость истечения горючих газов постоянна и равна u. Найти расход топлива на участке l.

$\triangle$ Движение материальной точки с переменной массой $m(t)$ описывается *уравнением И. В. Мещерского*:

$$m(t)\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{р}}, \tag{42}$$

где $\mathbf{F}$ — равнодействующая сил, приложенных к точке, $\mathbf{F}_{\text{р}}$ — реактивная сила, определяемая формулой

$$\mathbf{F}_{\text{р}} = \mathbf{u}\frac{dm}{dt}, \tag{43}$$

где $\mathbf{u}$ — скорость присоединяющихся или отделяющихся частиц массы относительно данной точки. В данном случае $v = at$, внешняя сила равна $-F$, и, учитывая, что векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ противоположно направлены, из (42)—(43) получаем

$$ma = -F - u\frac{dm}{dt}.$$

Отсюда

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{ma+F}{u}, \qquad \frac{1}{ma+F}\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{u},$$

$$\int_0^t \frac{m'}{ma+F}\,dt = -\frac{t}{u}, \qquad \frac{1}{a}\ln(ma+F)\Big|_0^t = -\frac{t}{u},$$

$$\ln\frac{ma+F}{m_0a+F} = -\frac{a}{u}t.$$

Учитывая, что $at^2/2 = l$, $t = \sqrt{2l/a}$, находим

$$m = -\frac{F}{a} + \left(m_0 + \frac{F}{a}\right)e^{-\sqrt{2al}/u},$$

и, следовательно, расход топлива равен

$$m_0 - m = \left(m_0 + \frac{F}{a}\right)\left(1 - e^{-\sqrt{2al}/u}\right). \quad \blacktriangle$$

Пример 8. Определить расход воды через прямоугольный водослив с высотой h и длиной a.

$\triangle$ Скорость, с которой жидкость вытекает из достаточно малого отверстия в сосуде, находящегося на глубине h, равна

$$v = \mu\sqrt{2gh}. \tag{44}$$

Для воды принимают $\mu = 0{,}6$. Пусть $\{x_j\}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, — разбиение высоты водослива (т. е. отрезка $[0; h]$). В точках прямоугольника высоты $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и длины a (рис. 32) скорость истечения воды $v_j = \mu\sqrt{2g\xi_j}$, где $x_{j-1} \leqslant \xi_j \leqslant x_j$. Объем воды, вытекающей в единицу времени из такого прямоугольника, равен

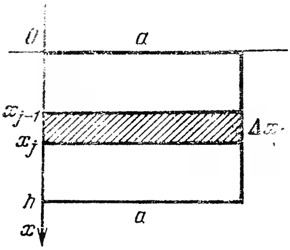

Рис. 32

$$\Delta Q_j = v_j \Delta x_j a = \mu\sqrt{2g}\, a\sqrt{\xi_j}\, \Delta x_j.$$

Полный объем воды, проходящей в единицу времени через водослив, т. е. расход воды, равен

$$Q = \sum_{j=1}^{n} \Delta Q_j = \mu\sqrt{2g}\, a \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\xi_j}\, \Delta x_j.$$

В правой части этого равенства стоит интегральная сумма для интеграла $\int\limits_0^h \sqrt{x}\, dx$. В пределе, когда мелкость разбиения стремится к нулю, получим

$$Q = \mu\sqrt{2g}\, a \int\limits_0^h \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\mu\sqrt{2g}\, ah^{3/2}.$$

Принимая $\mu = 0{,}6$, будем иметь $Q = 0{,}4\sqrt{2g}\, ah^{3/2}$. ▲

Пример 9. Однородный стержень с длиной l и постоянным по длине поперечным сечением площади S закреплен одним концом ($x = 0$). К другому концу ($x = l$) приложена вдоль оси стержня растягивающая сила P. Эта сила уравновешена продольной нагрузкой, распределенной равномерно по длине со значениями $q(0) = q_0$, $q(l) = 0$. Модуль продольной упругости материала стержня равен E. Найти абсолютное изменение длины стержня и потенциальную энергию упругих деформаций, накопленную стержнем.

△ Пусть осесимметричный стержень, ось которого примем за ось x, растянут или сжат. Согласно теории упругости, плоские сечения стержня при деформации остаются плоскими, по поперечному сечению площади $S(x)$ равномерно распределены нормальные напряжения $\sigma(x)$, их равнодействующей является нормальная сила $N(x) = \sigma(x)S(x)$. Если стержень (или его участок), имевший в свободном состоянии длину x, получил удлинение $\Delta l(x)$, то

$$\frac{d\,\Delta l(x)}{dx} = \varepsilon(x)$$

есть относительное удлинение стержня. Для материалов, подчиняющихся закону Гука,

$$\sigma(x) = E\varepsilon(x), \tag{45}$$

где коэффициент E — модуль продольной упругости материала. Потенциальную энергию упругих деформаций стержня определяют по формуле

$$U=\int_0^l \frac{N^2(x)\,dx}{2ES(x)}. \tag{46}$$

Рассмотрим равновесие части данного стержня, заключенной между сечениями с координатами x и l (рис. 33). Сумма проекций сил на ось x равна нулю, поэтому

$$P-N(x)-\int_x^l q(z)\,dz=0.$$

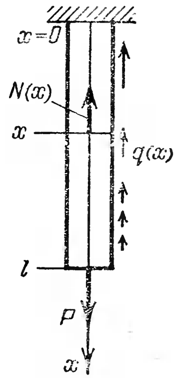

Рис. 33

Из условия следует, что $q(x)=q_0(l-x)/l$, где q_0 — значение распределенной продольной нагрузки на конце $x=0$, поэтому

$$P-N(x)-\int_x^l q_0\frac{l-z}{l}\,dz=0,$$

$$P-N(x)-\frac{q_0}{2l}(l-x)^2=0,$$

откуда

$$N(x)=P-q_0(l-x)^2/2l.$$

Из условия уравновешенности распределенной продольной нагрузки и силы P следует, что реакция в месте закрепления $x=0$ равна нулю, т. е. $N(0)=0$, откуда $q_0=2P/l$. Следовательно,

$$N(x)=P\left(1-\frac{(l-x)^2}{l^2}\right).$$

Теперь находим нормальные напряжения:

$$\sigma(x)=\frac{N(x)}{S}=\frac{P}{S}\left(1-\frac{(l-x)^2}{l^2}\right),$$

относительные удлинения по формуле (45):

$$\varepsilon(x)=\frac{\sigma(x)}{E}=\frac{P}{ES}\left(1-\frac{(l-x)^2}{l^2}\right),$$

и абсолютное изменение длины всего стержня:

$$\Delta l=\int_0^l \varepsilon(x)\,dx=\frac{P}{ES}\int_0^l\left(1-\frac{(l-x)^2}{l^2}\right)dx=\frac{2Pl}{3ES}. \tag{47}$$

Потенциальную энергию упругой деформации стержня определяем по формуле (46):

$$U=\int\limits_0^l \frac{N^2(x)\,dx}{2ES}=\frac{P^2}{2ES}\int\limits_0^l\left(1-\frac{2(l-x)^2}{l^2}+\frac{(l-x)^4}{l^4}\right)dx=\frac{4P^2l}{15ES}. \tag{48}$$

Ответ дается формулами (47)—(48). ▲

9.103. Бак — прямоугольный параллелепипед, заполнен жидкостью плотности ρ. Высота боковой стенки равна h, длина a. Найти: 1) силу давления на стенку; 2) глубину точки приложения равнодействующей давления.

9.104. В жидкость плотности ρ опущена вертикально прямоугольная пластина со сторонами a и b так, что сторона a, ближайшая к поверхности, находится на глубине h. Найти силу давления на пластину.

9.105. Пластина в форме прямоугольного треугольника с катетами a и b опущена вертикально в жидкость плотности ρ так, что катет a находится на поверхности жидкости. Найти силу давления жидкости на пластину.

9.106. Пластина, имеющая форму равнобедренного треугольника с основанием a и высотой b, вертикально погружена в жидкость плотности ρ. Вершина треугольника находится на поверхности жидкости, основание параллельно этой поверхности. Найти: 1) силу давления жидкости на пластину; 2) глубину точки приложения равнодействующей давления.

9.107. В жидкость плотности ρ вертикально погружена пластина, имеющая форму трапеции с основаниями a и b, $a>b$, и с высотой h. Большее основание трапеции находится на поверхности жидкости. Найти: 1) силу давления на пластину; 2) глубину точки приложения равнодействующей давления.

9.108. Круглая пластина радиуса r вертикально опущена целиком в жидкость плотности ρ. Центр пластины находится на глубине h. Найти: 1) силу давления на пластину; 2) глубину точки приложения равнодействующей давления.

9.109. Пластина, имеющая форму эллипса с полуосями a и b $(b<a)$, погружена в жидкость плотности ρ так, что малая ось эллипса находится на поверхности жидкости. Найти силу давления на погруженную часть пластины.

9.110. Прямоугольная пластина со сторонами a и b, $a>b$, погружена в жидкость плотности ρ так, что ее большие стороны параллельны поверхности жидкости и нижняя из них находится от поверхности на глубине h. Плоскость пластины составляет с плоскостью поверхности жидкости угол α. Найти силу давления на пластину.

9.111. Электрическая цепь имеет в начальный момент сопротивление R ом, которое в дальнейшем равномерно возрастает со скоростью a ом/с. В цепь подано постоянное напряжение V в. Найти заряд, протекший через цепь за T с.

9.112. Сопротивление проводника в зависимости от его температуры меняется по закону $R = R_0(1 + \alpha\theta)$, где R_0 — сопротивление при $\theta = 0°$, $\alpha = \mathrm{const} > 0$. Проводник, к которому приложено напряжение V, равномерно нагревают в течение времени T от температуры θ_1 до температуры θ_2. Какой заряд пройдет за это время через проводник?

9.113. Вычислить массу земной атмосферы, приняв, что ее плотность меняется с высотой по закону $\rho = \rho_0 e^{-ah}$, где h — расстояние от поверхности Земли (Землю считать шаром радиуса R).

9.114. При охлаждении температура тела, окруженного средой с постоянной температурой $\theta_{\text{ср}}$, меняется со временем по закону $\dfrac{d\theta}{dt} = -k(\theta - \theta_{\text{ср}})$, $\quad k > 0 \quad$ (*Ньютон*).

Найти зависимость от времени температуры тела, имевшего начальную температуру θ_0.

9.115. Тело окружено средой с постоянной температурой $\theta_{\text{ср}} = 20\,°\mathrm{C}$. За 20 мин температура тела в результате охлаждения понизилась со $100\,°\mathrm{C}$ до $60\,°\mathrm{C}$. За какое время от начала охлаждения температура тела снизится до $30\,°\mathrm{C}$?

9.116. Открытый бассейн, объем которого V м^3, заполнен смесью двух жидкостей A и B с m % жидкости B (по объему). В бассейн начинают подавать со скоростью p м^3/мин смесь тех же жидкостей, содержащую n % жидкости B. Считая, что перемешивание в бассейне происходит мгновенно, найти зависимость от времени процентного содержания жидкости B в объеме бассейна.

9.117. Скорость радиоактивного распада пропорциональна имеющемуся количеству вещества с коэффициентом λ — постоянной радиоактивности. За год распалось n % первоначального количества вещества. Найти его период полураспада (время, за которое распадается половина вещества).

9.118. Пусть в химической реакции из моля вещества A и моля вещества B получается моль вещества C. Пусть a и b — начальные количества молей веществ A и B, $a > b$. Считая, что скорость реакции в каждый момент времени пропорциональна с коэффициентом k произведению имеющихся в данный момент реагирующих масс веществ, найти количество молей вещества C к моменту $t > 0$.

9.119. Скорость химической реакции, переводящей вещество A в вещество B, пропорциональна произведению концентраций этих веществ. Первоначальная концентрация вещества B равна μ_0 (отношение количества B к общему количеству веществ A и B). Найти зависимость от времени концентрации вещества B.

9.120. В условиях предыдущей задачи найти концентрацию вещества B через $t = 1$ час, если $\mu_0 = 0{,}2$, а концентрация через $t = 1/4$ часа равна 0,8.

9.121. Ток I в цепи с сопротивлением R и коэффициентом самоиндукции L удовлетворяет уравнению

$$RI = V - L\frac{dI}{dt},$$

где V — внешнее напряжение, поданное в цепь. Найти зависимость $I(t)$ тока в цепи от времени, если: 1) цепь разомкнули в момент $t=0$ и ток в цепи в этот момент был равен I_0; 2) в момент $t=0$ тока в ней не было и в цепь подали постоянное напряжение V.

9.122. Однородный стержень длиной $2a$ имеет массу M. Материальная точка массы m расположена на срединном перпендикуляре к стержню на расстоянии b от его середины. С какой силой стержень притягивает точку?

9.123. Однородный бесконечный стержень имеет линейную плотность ρ. Материальная точка массы m расположена на расстоянии l от стержня. С какой силой стержень притягивает точку?

9.124. Катет AB прямоугольного треугольника ABC ($\angle A = 90°$) является материальным однородным стержнем длиной $4a$ и массы M. В вершину C помещена материальная точка массы m, $AC = 3a$.

1) Найти силу, с которой стержень AB притягивает точку C.

2) В каком месте стержня AB следует расположить материальную точку и какой массы, чтобы она притягивала точку C с той же силой, что и стержень AB?

9.125. Однородный бесконечный стержень с линейной плотностью ρ согнут в форме угла. На прямой, содержащей биссектрису этого угла, расположена материальная точка массы m на расстоянии h от вершины угла. С какой силой стержень притягивает точку?

9.126. В декартовой системе координат Oxy материальная прямая задана уравнением $y=0$, ее линейная плотность меняется по закону $\rho(x) = \alpha|x|$, $\alpha > 0$. С какой силой эта прямая притягивает точку массы m, расположенную на оси ординат?

9.127. С какой силой однородное материальное полукольцо массы M и радиуса r притягивает материальную точку массы m, находящуюся в его центре?

9.128. Материальная окружность имеет линейную плотность ρ и радиус r. На перпендикуляре к плоскости окружности, проходящем через центр окружности, находится материальная точка массы m на расстоянии a от центра. С какой силой окружность притягивает точку?

9.129. Материальный круг радиуса r имеет поверхностную плотность ρ. На перпендикуляре к плоскости круга, проходящем через его центр, находится материальная точка массы m на расстоянии a от центра. С какой силой круг притягивает точку?

9.130. Материальная плоскость имеет поверхностную плотность ρ. С какой силой плоскость притягивает материальную точку массы m, находящуюся на расстоянии a от плоскости?

9.131. На единичной окружности

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

распределен заряд с линейной плотностью

$$\rho(\varphi) = \frac{|\sin\varphi|}{a - \cos\varphi}, \qquad a > 1.$$

В точке $(a; 0)$ находится заряд q. Найти силу, действующую на этот заряд.

9.132. Пуля, пробив доску толщиной h, изменила свою скорость от значения v_1 до значения v_2. Считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости, найти время движения пули в доске.

9.133. Материальной точке, находящейся на поверхности Земли (радиус Земли равен R), сообщена начальная вертикальная скорость $v_0 = \sqrt{2gR}$ (*вторая космическая скорость*). За какое время точка удалится от поверхности Земли на расстояние, равное $3R$ (сопротивлением воздуха пренебречь)?

9.134. Маховик, находящийся в жидкости, приводится во вращение из состояния покоя вращающим моментом M. Момент сопротивления жидкости меняется по закону $M_c = k\omega^2$, где $k = \text{const}$, ω — угловая скорость маховика. За какое время угловая скорость маховика возрастет до значения ω_0?

9.135. Однородному стержню длиной $2l$, лежащему на горизонтальной плоскости, сообщена угловая скорость ω_0 вокруг вертикальной оси, проходящей через центр стержня. Определить время вращения стержня до остановки, считая его давление на плоскость постоянным по длине стержня, а коэффициент трения о плоскость равным k.

9.136. Точка, имевшая начальные массу m_0 и скорость v_0, движется прямолинейно. Скорость относительно точки отделяющихся от нее частиц постоянна и равна u, внешние силы отсутствуют. Найти массу точки в тот момент, когда ее скорость равна v_1.

9.137. Масса ракеты с топливом равна M, без топлива — m, скорость истечения продуктов горения относительно ракеты постоянна и равна u, начальная скорость ракеты равна нулю. Найти скорость ракеты после сгорания топлива.

9.138. Ракета, имеющая начальные скорость v_0 и массу m_0, тормозится своим двигателем до нулевой скорости. Расход топлива в единицу времени постоянен и равен μ, скорость истечения продуктов сгорания постоянна и равна u. Найти длину пути торможения.

9.139. Ракета движется вертикально вверх с поверхности Земли, имея начальную скорость v_0. Скорость истечения горючих газов относительно ракеты постоянна и равна u. Требуется за время T достичь скорости v_1, имея конечную массу m_1. Какова должна быть масса топлива (изменением силы тяжести, сопротивлением воздуха и вращением Земли пренебречь).

9.140. Ракета стартует с поверхности Земли с начальной массой m_0 и движется вертикально вверх с постоянной скоростью v_0. Скорость истечения продуктов сгорания относительно ракеты постоянна и равна u. Найти зависимость массы ракеты от времени. Радиус Земли равен R, сопротивлением воздуха и вращением Земли пренебречь.

9.141. Капля воды падает в неподвижном воздухе под действием постоянной силы тяжести (сопротивлением воздуха пренебречь). Начальные масса, радиус и скорость капли равны соответственно m_0, r_0 и v_0. Вследствие конденсации паров масса капли увеличивается. Найти скорость капли в тот момент, когда ее радиус увеличился в α раз, если скорость увеличения массы капли меняется в зависимости от радиуса r по закону:

1) $\dfrac{dm}{dt}=kr$. 2) $\dfrac{dm}{dt}=kr^2$.

9.142. Точка движется прямолинейно по закону $s=k_1t^\alpha$, где $k_1=\mathrm{const}>0$, s — путь, пройденный точкой за время t. На точку действует сила сопротивления $F=k_2v^\beta$, $k_2>0$, где v — скорость тела. Найти работу силы сопротивления на пути от $s=0$ до $s=a$, если:

1) $\alpha=3$, $\beta=1$.
2) $\alpha=3$, $\beta=2$.
3) $\alpha=4$, $\beta=2$.

9.143. В цилиндре радиуса R под поршнем находится идеальный газ под давлением p. Поршень передвигают с расстояния H от дна до расстояния $H/2$. Найти необходимую для этого работу, если сжатие происходит: 1) изотермически; 2) адиабатически с показателем $\varkappa>1$.

9.144. Идеальный газ, находящийся в замкнутом цилиндре под действием p_1, сжимают поршнем, на который действует постоянное внешнее давление. Начальная скорость поршня равна нулю, трением и утечкой пренебречь. Какое минимальное внешнее давление необходимо, чтобы сжать газ до давления p_2: 1) изотермически; 2) адиабатически с показателем адиабаты $\varkappa>1$?

9.145. Электростатическое поле в вакууме создано зарядом q. Найти работу, нужную для перемещения заряда q_1 из точки A в точку B, удаленные от заряда q соответственно на расстояния R_1 и R_2, $R_1>R_2$.

9.146. Какая энергия необходима, чтобы удалить тело массы m с поверхности Земли в бесконечность (радиус Земли равен R)?

9.147. Однородный цилиндр веса G и высоты H плавает, частично погруженный в воду основанием вниз. Высота надводной части цилиндра равна h. Какую работу нужно совершить, чтобы:

1) Погрузить цилиндр целиком в воду.

2) Извлечь цилиндр из воды?

9.148. Цилиндрический бак заполнен жидкостью. Однородный цилиндр плавает, наполовину погрузившись в жидкость основанием вниз. Площадь основания цилиндра в 3 раза меньше площади поперечного сечения бака, высота цилиндра равна H, вес — G. Какую работу нужно совершить, чтобы погрузить цилиндр целиком в жидкость?

9.149. Однородный конус высоты H погружают в однородную жидкость основанием вниз на глубину h_1, а затем отпускают. Плотность жидкости в 1,2 раза больше плотности конуса. Ось конуса все время вертикальна. Пренебрегая рассеянием энергии в жидкость, определить, на какую глубину следует затопить вершину конуса, чтобы:

1) Конус полностью выскочил из жидкости.

2) Конус, выскочив из жидкости, поднялся над ее поверхностью на высоту h.

9.150. Цилиндрический бак с радиусом R и высотой H заполнен до высоты h жидкостью плотности ρ. Ось бака вертикальна. Какая работа необходима для того, чтобы выкачать жидкость из бака?

9.151. Цилиндрическая цистерна радиуса R наполовину заполнена жидкостью, вес которой равен G. Ось цистерны горизонтальна. Какую работу нужно произвести, чтобы выкачать жидкость через люк в верхней части цистерны?

9.152. Какое количество работы необходимо для того, чтобы насыпать коническую кучу песка высотой H и радиусом основания R. Плотность песка равна ρ.

9.153. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать воду из бака, целиком заполненного жидкостью плотности ρ, если бак имеет форму:

1) Полусферы радиуса R.

2) Сегмента параболоида вращения, расположенного вершиной вниз и имеющего глубину H и радиус отверстия R.

9.154. В стенке прямоугольного бака, заполненного жидкостью, проделано прямоугольное отверстие высоты h и ширины b. Верхняя сторона отверстия параллельна уровню жидкости и отстоит от него на глубину H. Найти расход жидкости через это отверстие*). Уровень жидкости в баке поддерживается постоянным.

9.155. Цилиндр высоты H и радиуса R заполнен жидкостью. Ось цилиндра вертикальна. В дне цилиндра открыто малое отверстие площади S. За какое время жидкость вытечет из цилиндра?

9.156. Цилиндрический бак, расположенный вертикально, имеет малое отверстие в дне. Половина воды из полного бака вытекла за t мин. За какое время вытечет вся вода?

---

*) В задачах 9.154 — 9.158 в формуле $v = \mu\sqrt{2gh}$ считать, что $\mu = 1$.

9.157. Конический сосуд с вертикальной осью, радиусом основания R и высотой H заполнен жидкостью. В вершине, расположенной внизу, открыто малое отверстие с площадью S. За какое время жидкость вытечет из сосуда?

9.158. Какую форму должен иметь сосуд, являющийся телом вращения, чтобы понижение уровня жидкости при истечении ее из малого отверстия в нижней части было равномерным?

9.159. Величины напряжения и тока в цепи переменного тока заданы формулами:

$$U = U_0 \sin \omega t, \quad I = I_0 \sin(\omega t - \varphi).$$

Найти работу тока за период $T = 2\pi/\omega$. При какой разности фаз φ эта работа будет максимальной?

9.160. На постоянное сопротивление R подано переменное напряжение $U = U_0 \sin \omega t$. Какой величины постоянное напряжение следует подать на сопротивление R, чтобы выделяющееся на нем за время $T = 2\pi/\omega$ тепло было равно теплу, выделяющемуся за тот же период от переменного напряжения?

9.161. Сопротивление электрической цепи равно R, коэффициент самоиндукции — L. Найти количество тепла, выделившегося на сопротивлении R при:

1) затухании тока в разомкнутой цепи, если вначале ток равен I_0 (см. зад. **9.121**, 1));

2) возрастании тока от нуля до значения $V/2R$ в цепи, на которую подали напряжение V (см. зад. **9.121**, 2)).

9.162. Масса m жидкости с удельной теплоемкостью c контактирует со средой, температура которой постоянна и равна $\theta_0 > 0$. За счет рассеивания в окружающую среду тепла жидкость может охлаждаться. Известно, что процесс охлаждения подчиняется закону Ньютона (зад. **9.114**) и на охлаждение данной массы жидкости от температуры $3\theta_0$ до температуры $2\theta_0$ нужно время τ. Жидкость начинают нагревать теплом, выделяющимся на постоянном сопротивлении R, к которому подключено постоянное напряжение V. За какое время жидкость нагреется от температуры θ_0 до температуры $4\theta_0$?

9.163. Проволока имеет площадь поперечного сечения S, длину L, модуль продольной упругости материала равен E. Какую работу нужно совершить, чтобы удлинить проволоку на l?

9.164. Проволока имеет длину L, площади ее любых поперечных сечений одинаковы. Материал проволоки имеет плотность ρ, модуль продольной упругости E. На сколько удлинится проволока, если ее подвесить вертикально?

9.165. Проволока весом G постоянного поперечного сечения подвешена вертикально. Под действием собственного веса она удлинилась на l_0. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть проволоку еще на l?

9.166. Однородный конический стержень длиной l с радиусами оснований r и R, $r < R$, закреплен широким концом. К узкому концу стержня приложена растягивающая продольная сила P. Модуль продольной упругости материала равен E. Найти абсолютное удлинение стержня и потенциальную энергию упругих деформаций, накопленную в стержне.

9.167. Коническая колонна изготовлена из однородного материала с плотностью ρ и модулем продольной упругости E. Высота колонны равна H, радиусы оснований R и r, $R > r$. Насколько сожмется колонна, если ее поставить вертикально на широкое основание?

9.168. Осесимметричный стержень длиной l закреплен одним концом, а ко второму приложена вдоль оси сила P. Удельный вес материала стержня равен γ, модуль продольной упругости E. Найти зависимость площади поперечного сечения $S(x)$ стержня от расстояния x до его закрепленного конца из условия постоянства нормального напряжения во всех поперечных сечениях, равного σ_0 (стержень равного сопротивления). Решить задачу при условии, что:

1) сила P растягивает стержень;

2) сила P сжимает стержень и превосходит его вес.

9.169. Полый цилиндр с внутренним радиусом r и наружным радиусом R прижат силой P своим основанием к плоскости. Цилиндр вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Трение цилиндра о плоскость можно считать «сухим», т. е. напряжения трения пропорциональными нормальным напряжениям в контакте с коэффициентом трения μ. Найти мощность, расходуемую на трение, если:

1) Нормальные напряжения равномерно распределены по площади контакта цилиндра с плоскостью.

2) В каждой точке области контакта цилиндра с плоскостью нормальное напряжение обратно пропорционально расстоянию от точки до оси вращения.

9.170. Канат охватывает неподвижный цилиндрический барабан по дуге с угловым размером φ_0. Допустим, что справедлива модель «сухого трения», т. е. в каждой точке контакта каната с барабаном максимальное значение касательного напряжения пропорционально нормальному напряжению с коэффициентом трения $\mu = \text{const}$. Пусть сила натяжения каната с одной стороны равна T_1. Найти наибольшую силу натяжения каната с другой стороны, при которой канат еще не начнет скольжение (*Эйлер*).

9.171. Математический маятник представляет собой невесомый стержень длиной l, один конец которого закреплен, а на другом находится материальная точка. Стержень отклонили на угол α, $0 < \alpha < \pi/2$, и отпустили без начальной скорости. Не встречая сопротивления, стержень совершает периодические колебания. Выразить период этих колебаний через эллиптический интеграл. Получить как следствие приближенную упрощенную формулу периода малых колебаний маятника.

9.172. Освещенность в точке кривой от точечного источника равна $kI\dfrac{\sin\varphi}{r^2}$, где I — сила света источника, r — расстояние от источника до точки, φ — угол между лучом из источника в точку и касательной к кривой в этой точке. Найти кривую, у которой освещенность в каждой точке от источника с силой I была бы одинакова и равна E.

---

§ 10. Приближенное вычисление интегралов. Оценки интегралов

1. Пусть на отрезке $[a;\ b]$ задана система точек

$$\{x_i\},\quad 0 \leqslant i \leqslant N,\quad a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_N \leqslant b,$$

и пусть задана система чисел $\{p_i\}$, $0 \leqslant i \leqslant N$.

Для интегрируемой на $[a;\ b]$ функции $y = f(x)$ приближенное равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{N} p_i f(x_i) \tag{1}$$

называют *квадратурной формулой*, точки x_i называют *узлами*, а числа p_i — *весами* этой формулы. Разность

$$\Delta = \int\limits_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{N} p_i f(x_i) \tag{2}$$

называют *погрешностью* квадратурной формулы.

Одним из источников получения квадратурных формул (1) служат интерполяционные многочлены, построенные по значениям функции $f(x_i)$, $0 \leqslant i \leqslant N$.

Заменив в левой части (1) функцию f таким многочленом, получим правую часть.

Приведем три простейших примера квадратурных формул с равноотстоящими узлами.

Пусть отрезок $[a;\ b]$ разделен на n равных частей, $n \in \mathbb{N}$, $h = (b-a)/n$ — *шаг* разбиения.

Пусть

$$x_i = a + \left(i + \frac{1}{2}\right)h,\qquad 0 \leqslant i \leqslant n-1.$$

Квадратурную формулу

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \tag{3}$$

называют *формулой прямоугольников* (рис. 34). Если функция f имеет на $[a;\ b]$ кусочно-непрерывную первую или вторую производную, то для погрешности Δ формулы прямоугольников верны соответственно оценки

$$|\Delta| \leqslant \frac{b-a}{4} h \sup_{[a;\, b]} |f'(x)|, \tag{4}$$

$$|\Delta| \leqslant \frac{b-a}{24} h^2 \sup_{[a;\, b]} |f''(x)|. \tag{5}$$

Если к тому же $f''(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$, то для некоторого $\xi \in (a;\ b)$

$$\Delta = \frac{b-a}{24} h^2 f''(\xi). \tag{6}$$

Пусть

$$x_i = a + ih, \quad 0 \leqslant i \leqslant n,$$

тогда квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(0{,}5\,(f(x_0) + f(x_n)) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) \tag{7}$$

называют *формулой трапеций* (рис. 35).

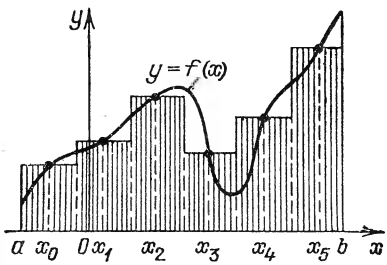

Рис. 34

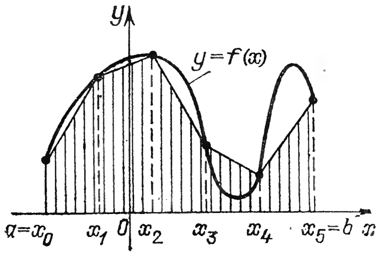

Рис. 35

Если функция $y = f(x)$ имеет на $[a;\ b]$ кусочно-непрерывную первую или вторую производную, то для погрешности Δ формулы трапеций верны неравенства

$$|\Delta| \leqslant \frac{b-a}{4} h \sup_{[a;\, b]} |f'(x)|, \tag{8}$$

$$|\Delta| \leqslant \frac{b-a}{12} h^2 \sup_{[a;\, b]} |f''(x)|, \tag{9}$$

если к тому же $f''(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$, то при некотором $\xi \in (a;\ b)$

$$\Delta = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi). \tag{10}$$

Пусть $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{m} f(x_{2j-1})\right) \tag{11}$$

называют *формулой Симпсона* (*формулой парабол*). Правая часть этого равенства получается при замене графика функции $y = f(x)$ на отрезках $[x_{2j}; x_{2j+2}]$ параболами, проходящими через точки

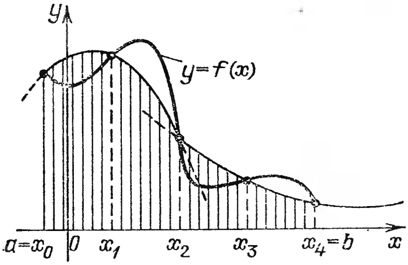

Рис. 36

$$(x_p; f(x_p)),$$
$$p = 2j, \quad 2j+1, \quad 2j+2$$
(рис. 36).

Если функция $y = f(x)$ имеет на $[a; b]$ кусочно-непрерывную производную порядка k, $1 \leqslant k \leqslant 4$, то для погрешности Δ формулы Симпсона верны соответственно оценки

$$|\Delta| \leqslant c_k (b-a) h^k \sup_{[a;\, b]} |f^{(k)}(x)|, \tag{12}$$

где

$$c_1 = 5/18, \; c_2 = 4/81, \; c_3 = 1/72, \; c_4 = 1/180.$$

Если к тому же $f^{(4)}(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то для некоторого $\xi \in (a; b)$

$$\Delta = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi). \tag{13}$$

Пример 1. Разделив отрезок $[0; 1]$ на четыре равные части, вычислить приближенно интеграл

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

и оценить погрешность результата: 1) по формуле прямоугольников; 2) по формуле трапеций; 3) по формуле Симпсона.

△ 1) Пусть $h = 1/4$, $x_i = 1/8 + ih$, $i = 0, 1, 2, 3$. По формуле прямоугольников (3) имеем

$$J \approx \frac{1}{4}\left(f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right)\right),$$

где $f(x) = 1/(1+x^2)$. Отсюда

$$J \approx \frac{1}{4}\left(\frac{64}{65} + \frac{64}{73} + \frac{64}{89} + \frac{64}{113}\right) \approx 0{,}787$$

с погрешностью вычисления не более чем $5 \cdot 10^{-4}$. Погрешность формулы прямоугольников оценим согласно (5):

$$|\Delta| \leqslant \frac{1}{24 \cdot 4^2} \sup_{[0;\, 1]} |f''(x)|.$$

Так как $f''(x) = 2(3x^2 - 1)/(1 + x^2)^3$ и $|f''(x)| \leqslant f''(0) = 2$, то

$$|\Delta| \leqslant \frac{1}{12 \cdot 16} < 0{,}0053.$$

Полная погрешность не превосходит 0,006, таким образом,

$$0{,}781 < J < 0{,}793. \tag{14}$$

2) Пусть $x_i = ih$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. По формуле трапеций (7) находим

$$J \approx \frac{1}{4}\left(0{,}5(f(0) + f(1)) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{16}{25}\right) \approx 0{,}783$$

с погрешностью вычислений не более $5 \cdot 10^{-4}$. Погрешность для формулы трапеций оценим согласно (9):

$$|\Delta| \leqslant \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{16} \sup_{[0;\,1]} |f''(x)| < 0{,}0105.$$

Полная погрешность результата не превосходит 0,011, таким образом,

$$0{,}772 < J < 0{,}794. \tag{15}$$

3) По формуле Симпсона (11) при $x_i = \frac{i}{4}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, находим

$$J \approx \frac{1}{12}\left(f(0) + f(1) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{12}\left(1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{4}{5} + 4\left(\frac{16}{17} + \frac{16}{25}\right)\right) \approx 0{,}78540$$

с погрешностью вычислений меньше $1 \cdot 10^{-5}$. Погрешность формулы оценим согласно (12) при $k = 4$. Находим

$$f^{(4)}(x) = 24\frac{1 - 10x^2 + 5x^4}{(1 + x^2)^5}$$

и устанавливаем, что $|f^{(4)}(x)| \leqslant |f^{(4)}(0)| = 24$. Отсюда

$$|\Delta| \leqslant \frac{1}{180 \cdot 4^4} 24 < 5{,}3 \cdot 10^{-4},$$

а полная погрешность меньше $5{,}4 \cdot 10^{-4}$. Следовательно,

$$0{,}7848 < J < 0{,}7860. \tag{16}$$

Из сравнения (14)—(16) видно, что при одинаковом шаге h формула Симпсона дает значительно более точный результат, чем формулы прямоугольников или трапеций. А именно: примем за приближенные значения для формул прямоугольников, трапеций и формулы Симпсона соответственно

$$J_1^* = \frac{1}{2}(0{,}781 + 0{,}793) = 0{,}787,$$

$$J_2^* = \frac{1}{2}(0{,}772 + 0{,}794) = 0{,}783,$$

$$J_3^* = \frac{1}{2}(0{,}7848 + 0{,}7860) = 0{,}7854$$

с относительными погрешностями, примерно равными соответственно 0,8 %, 1,4 % и 0,08 %. Видно, что погрешность формулы Симпсона в данном случае на порядок меньше погрешностей формул прямоугольников и трапеций.

Заметим, что

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = 0{,}785398 \ \ldots$$

Приближенное значение $J_3^* = 0{,}7854$, полученное по формуле Симпсона, дает три верных знака после запятой, а отклонение его от истинного значения не превышает $2 \cdot 10^{-6}$. ▲

При нахождении приближенного значения интеграла с погрешностью, не превышающей заданного значения ε, следует вначале для выбранной приближенной формулы найти из неравенства $|\Delta| \leqslant \varepsilon$ достаточное число узлов (иначе говоря, шаг h), используя, например, неравенства (5), (9), (12).

Пример 2. Вычислить $\ln 2$ с погрешностью не более чем 10^{-4}, исходя из равенства

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

△ Для формулы прямоугольников, учитывая, что

$$h = 1/n, \quad |f''(x)| = 2/x^3 \leqslant 2$$

на $[1; 2]$, из (5) получаем

$$\frac{1}{24n^2} \cdot 2 \leqslant 10^{-4}, \qquad n^2 \geqslant \frac{10^4}{36} \cdot 3,$$

откуда $n \geqslant 29$. Значит, достаточно взять $n = 29$.

Для применения формулы Симпсона следует отрезок разделить на четное число $n = 2m$ отрезков. Учитывая, что

$$h = 1/(2m), \quad |f^{(4)}(x)| = 24/x^5 \leqslant 24,$$

из (12) при $k = 4$ получаем

$$\frac{24}{180\,(2m)^4} \leqslant 10^{-4},$$

откуда $2m \geqslant \frac{2}{3}\sqrt[4]{6750}$. Поскольку $9 < \sqrt[4]{6750} < 10$, достаточно взять $2m \geqslant 20/3$, т. е. $2m = 8$. Видно, что в этом случае число узлов значительно меньше, поэтому вычисление следует провести по формуле Симпсона с $n = 8$. Для погрешности этой формулы имеем оценку

$$|\Delta| \leqslant \frac{24}{180 \cdot 8^4} = \frac{1}{30\,720} < \frac{1}{3} 10^{-4}.$$

Погрешность вычислений по формуле Симпсона

$$\ln 2 \approx \frac{1}{24} (f(x_0) + f(x_8) + 2(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6)) + \\ + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7)))$$

не должна превышать $\frac{2}{3} \cdot 10^{-4}$. Если каждое слагаемое вычислять с погрешностью не более чем, например, $0{,}5 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-5}$, то и для результата предел погрешности, как видно, будет таким же. Следовательно, вычисления будем проводить с пятью знаками. Учитывая, что $x_i = 1 + \frac{i}{8}$, $i = 0, 1, \ldots, 8$, находим

$$\ln 2 \approx \frac{1}{24}\left(1 + \frac{1}{2} + 2\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7}\right) + \right. \\ \left. + 4\left(\frac{8}{9} + \frac{8}{11} + \frac{8}{13} + \frac{8}{15}\right)\right) \approx 0{,}69315,$$

где погрешность вычислений в действительности меньше $1{,}5 \cdot 10^{-5}$. Полная погрешность меньше $\frac{1}{3} 10^{-4} + 0{,}15 \cdot 10^{-4} < 0{,}5 \cdot 10^{-4}$. Значит,

$$0{,}69310 < \ln 2 < 0{,}69320,$$

и поэтому можно принять $\ln 2 \approx 0{,}6931$ с погрешностью меньше, чем 10^{-4}. Все четыре знака после запятой верны, т. е. $\ln 2 = 0{,}6931 \ldots$ ▲

Если подынтегральная функция недифференцируема в некоторых точках отрезка интегрирования, то оценка погрешности по формулам (5), (9), (12) невозможна. В этом случае иногда удается с помощью замены переменной преобразовать интеграл к виду, в котором подынтегральная функция дифференцируема достаточное число раз.

Пример 3. Вычислить интеграл

$$J = \int_0^1 \sqrt{x}\, e^x\, dx$$

с погрешностью не более 10^{-3}.

△ Подынтегральная функция имеет неограниченную на $(0; 1)$ производную. Сделав замену $\sqrt{x} = t$, получим

$$J = 2 \int_0^1 t^2 e^{t^2}\, dt.$$

Выполнив интегрирование по частям:

$$J = te^{t^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{t^2}\,dt = e - \int_0^1 e^{t^2}\,dt,$$

сведем задачу к более простой — вычислению интеграла

$$J_1 = \int_0^1 e^{t^2}\,dt.$$

Возьмем $e = 2{,}7183$ с погрешностью меньше $\Delta_1 = 2\cdot 10^{-5}$. Для функции $y = e^{t^2}$ легко получить, что на $[0;\ 1]$

$$12 \leqslant y^{(4)}(t) \leqslant 76e.$$

Если вычислить J_1 по формуле Симпсона с шагом $h = 1/6$, то погрешность формулы будет меньше, чем

$$\Delta_2 = \frac{76e}{180\cdot 6^4} < 0{,}89\cdot 10^{-3}.$$

Вычисления проведем так, чтобы их погрешность не превысила $\Delta_3 = 0{,}5\cdot 10^{-4}$. Тогда погрешность окончательного результата будет меньше

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 < 10^{-3}.$$

Вычисляя J_1 с пятью знаками, получаем

$$J_1 \approx \frac{1}{18}(1 + 2{,}71828 + 4(1{,}02817 + 1{,}28403 + 2{,}00260) + 2(1{,}11752 + 1{,}55962)) = 1{,}46288.$$

Учитывая, что погрешность формулы Симпсона в данном случае заведомо положительна, принимаем $J_1 \approx 1{,}4628$. Отсюда $J \approx 2{,}7183 - 1{,}4628 = 1{,}2555$. ▲

Для оценки погрешности, кроме (5), (9), (12), используют еще *правило Рунге*, которое в простейшем виде состоит в следующем. Пусть J_k, J_{2k} и J_{4k} — приближенные значения интеграла J, полученные при делении отрезка интегрирования на k, $2k$ и $4k$ частей. Погрешность результата близка к заданной границе ε, если

$$\left|\frac{J_{4k} - J_{2k}}{J_{2k} - J_k}\right| \leqslant \frac{1}{2^p} \quad \text{и} \quad |J_{4k} - J_{2k}| < (2^p - 1)\,\varepsilon,$$

где $p = 2$ для формул прямоугольников и трапеций, $p = 4$ для формулы Симпсона.

Пример 4. Вычислить интеграл

$$J = \int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\,dx$$

с погрешностью менее 10^{-4}.

△ Разделим отрезок $[0; 1]$ на 8 равных частей и вычислим значения подынтегральной функции в концах получившихся отрезков (табл. 1).

Таблица 1

x	0	1/8	1/4	3/8	1/2
$f(x)$	1	1,000122	1,001951	1,009839	1,030776

x	5/8	3/4	7/8	1
$f(x)$	1,073586	1,147347	1,259437	1,414213

Затем найдем по формуле Симпсона приближенные значения интеграла: J_2 с шагом $h = 1/2$, J_4 с шагом $h = 1/4$ и J_8 с шагом $h = 1/8$. Получим

$$J_2 = 1{,}089553, \quad J_4 = 1{,}089413, \quad J_8 = 1{,}089429.$$

Имеем

$$\frac{J_8 - J_4}{15} \approx 1{,}07 \cdot 10^{-6} < 10^{-4}, \qquad \frac{|J_4 - J_2|}{15} \approx 9{,}33 \cdot 10^{-6} < 10^{-4},$$

и

$$\frac{J_8 - J_4}{|J_4 - J_2|} = \frac{4}{35}$$

имеет тот же порядок, что и $1/2^4 = 1/16$. Поэтому $J \approx 1{,}0894$ с погрешностью меньше 10^{-4}

Отметим, что более или менее точная оценка четвертой производной данной подынтегральной функции — довольно трудоемкая задача. Если ее выполнить, то из (12) следовало бы, что J_8 дает значение интеграла с погрешностью менее $4 \cdot 10^{-5}$. ▲

2. Под *оценкой интеграла* J подразумевается нахождение границ J_1 и J_2 промежутка, которому принадлежит этот интеграл. Будем называть оценкой интеграла и систему неравенств $J_1 \leqslant J \leqslant J_2$ (или $J_1 < J < J_2$).

Для оценки интегралов используют неравенства между интегралами, вытекающие из неравенств между подынтегральными функциями, различные интегральные неравенства (см. § 6), интегрирование по частям, особенно если оно ведет к уменьшению подынтегральной функции, и т. д. Для оценки значений подынтегральной функции нередко используют выпуклость ее графика, разложение по формуле Тейлора и т. д. Иногда бывает полезно промежуток интегрирования разделить на части и подобрать для каждой из них свой метод оценки. Приемы приближенного интегрирования, рассмотренные в предыдущем пункте, также позволяют получать оценки интегралов и могут быть использованы в сочетании с другими методами.

Пример 5. Доказать неравенства

$$1<\int_0^{\pi/2} x\sqrt{1+\sin^3 x}\,\sin x\,dx<\sqrt{2}.$$

△ Воспользуемся тем, что при $z>0$

$$1<\sqrt{1+z}<1+\frac{1}{2}z.$$

Для подынтегральной функции $f(x)$ в силу этих оценок будем иметь при $0<x<\pi/2$

$$x\sin x<f(x)<x\left(1+\frac{1}{2}\sin^3 x\right)\sin x.$$

Отсюда следует, что для данного интеграла J верны неравенства

$$J_1<J<J_2,$$

где

$$J_1=\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx=1,$$

$$J_2=\int_0^{\pi/2}\left(x\sin x+\frac{1}{2}x\sin^4 x\right)dx.$$

Интеграл J_2 вычислим, понижая степени и интегрируя по частям, в результате получим

$$J_2=1+\frac{1}{8}\left(\frac{3\pi^2}{16}+1\right)<1+\frac{1}{8}\left(\frac{3\cdot 10}{16}+1\right)=1+\frac{23}{64}<1{,}36.$$

Следовательно, $J_2<\sqrt{2}$, что и завершает доказательство требуемых неравенств. ▲

Пример 6. Пусть

$$\alpha_n(t)=(1-t)^{-(2n+1)/2},\quad 0\leqslant t<1,\ n\in\mathbb{Z},\ n\geqslant 0,$$

$$J=\int_0^z \alpha_n(t)(z-t)^k\,dt,\qquad k\in\mathbb{N},\ 0<z<1.$$

Доказать, что

$$\frac{z^{k+1}}{k+1}\left(1+\frac{a_1 z}{k+2}\right)<J<\frac{z^{k+1}}{k+1}\left(1+\frac{a_2}{k+2}\right),\tag{17}$$

где $a_2=\alpha_n(z)-1,\qquad a_1=\alpha_n'(0).$

△ Функция $\alpha_n(t)$ выпукла вниз на $[0;\,z]$, поэтому ее график расположен между хордой, проведенной через концы $(0;\,\alpha_n(0))$ и $(z;\,\alpha_n(z))$ графика, и касательной, проведенной через точку $(0;\,\alpha_n(0))$, т. е.

$$1+a_1 t<\alpha_n(t)<1+\frac{a_2}{z}t,\qquad 0<t<z.$$

Умножив эти неравенства на $(z-t)^k$ и проинтегрировав, получим

$$J_1 < J < J_2,$$

где

$$J_1 = \int_0^z (1 + a_1 t)(z-t)^k \, dt = \frac{z^{k+1}}{k+1}\left(1 + \frac{a_1 z}{k+2}\right),$$

$$J_2 = \int_0^z \left(1 + \frac{a_2}{z} t\right)(z-t)^k \, dt = \frac{z^{k+1}}{k+1}\left(1 + \frac{a_2}{k+2}\right).$$

Отсюда следует (17). ▲

Пример 7. Вычислить интеграл

$$J = \int_0^1 \sin\sqrt{x}\, dx$$

с погрешностью менее $5 \cdot 10^{-5}$.

△ Из формулы Тейлора для $\sin z$ следует, что при $z > 0$

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} < \sin z < z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!}.$$

Подставляя $z = \sqrt{x}$ и интегрируя, получаем оценку для J

$$J_1 - \Delta < J < J_1,$$

где

$$J_1 = \int_0^1 \left(x^{1/2} - \frac{1}{3!} x^{3/2} + \frac{1}{5!} x^{5/2}\right) dx = \frac{253}{420},$$

$$\Delta = \frac{1}{7!} \int_0^1 x^{7/2} \, dx = \frac{1}{22680} < 4{,}41 \cdot 10^{-5}.$$

За приближенное значение J возьмем

$$J^* = J_1 - \frac{\Delta}{2} = \frac{27323}{45360} = 0{,}6023589 \ldots \approx 0{,}60236$$

с погрешностью менее $\frac{\Delta}{2} + 10^{-5} < 3{,}21 \cdot 10^{-5} < 5 \cdot 10^{-5}$. ▲

Пример 8. Вычислить интеграл

$$J = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - 0{,}25 \sin^2 x} \, dx$$

с погрешностью меньше $5 \cdot 10^{-4}$.

△ Воспользуемся формулой Тейлора для функции

$$\varphi(z) = (1-z)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} z - \frac{1}{8} z^2 + R_2, \tag{18}$$

где

$$R_2 = \frac{\varphi^{(3)}(\xi)}{3!} z^3, \qquad 0 < \xi < z,$$

— остаточный член в форме Лагранжа. Вычисляя $\varphi^{(3)}(\xi) = -\frac{3}{8}(1-\xi)^{-5/2}$, и учитывая, что $z = 0{,}25 \sin^2 x \leqslant 1/4$, получаем

$$-\frac{4}{3\sqrt{3}} < \varphi^{(3)}(\xi) < -\frac{3}{8},$$

откуда

$$-\frac{2}{9\sqrt{3}} z^3 < R_2 < -\frac{1}{16} z^3 \tag{19}$$

Подставляя в (18) $z = 0{,}25 \sin^2 x$, а получающееся разложение в исходный интеграл, будем иметь

$$J = J_1 + \Delta,$$

где

$$J_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{1}{8}\sin^2 x - \frac{1}{128}\sin^4 x\right) dx,$$

$$\Delta = \int\limits_0^{\pi/2} R_2\, dx.$$

Вычислив J_1, получим

$$J_1 = \frac{957\pi}{2048} = 1{,}4680196\ldots,$$

а для Δ, согласно (19), справедливы оценки

$$-\frac{1}{288\sqrt{3}} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 x\, dx < \Delta < -\frac{1}{1024} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 x\, dx.$$

Отсюда следует, что

$$-\frac{5\pi}{9\sqrt{3}\, 2^{10}} < \Delta < -\frac{5\pi}{2^{15}},$$

или

$$-9{,}84 \cdot 10^{-4} < \Delta < -4{,}79 \cdot 10^{-4}. \tag{20}$$

Таким образом,

$$J_1 - 9{,}84 \cdot 10^{-4} < J < J_1 - 4{,}79 \cdot 10^{-4}.$$

Возьмем приближенное значение, равное полусумме полученных границ:

$$J^* = J_1 - \frac{1}{2}(9{,}84 + 4{,}79) \cdot 10^{-4} = 1{,}467287.$$

Его погрешность будет не более, чем

$$\frac{1}{2}(9{,}84 - 4{,}79) \cdot 10^{-4} < 2{,}53 \cdot 10^{-4} < 5 \cdot 10^{-4}.$$

Заметим, что погрешность получаемого данным методом результата можно оценить значительно точнее, если воспользоваться интегральной формой остаточного члена формулы Тейлора (см. § 21, зад. **6.178**):

$$R_2 = \frac{1}{2!} \int_0^z \varphi^{(3)}(t)(z-t)^2\,dt.$$

Учитывая, что $\varphi^{(3)}(t) = -\frac{3}{8}(1-t)^{-5/2}$, и используя результат примера 6 при $n = 2$, $k = 2$, получаем

$$\frac{z^3}{3}\left(1 + \frac{a_1 z}{4}\right) < \int_0^z (1-t)^{-5/2}(z-t)^2\,dt < \frac{z^3}{3}\left(1 + \frac{a_2}{4}\right),$$

где $a_1 = 5/2$, $a_2 = (1-z)^{-5/2} - 1$. Поскольку здесь $0 < z < 1/4$, имеем

$$a_1 z < 5/8, \qquad a_2 < \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{-5/2} - 1 = \frac{32}{9\sqrt{3}} - 1.$$

Отсюда следует, что

$$-\frac{3}{2^6}\left(1 + \frac{32}{27\sqrt{3}}\right)z^3 < R_2 < -\frac{37}{2^9}z^3,$$

и при $z = \frac{1}{4}\sin^2 x$

$$-\frac{15\pi}{2^{17}}\left(1 + \frac{32}{27\sqrt{3}}\right) < \int_0^{\pi/2} R_2\,dx < -\frac{185\pi}{2^{20}}.$$

Следовательно,

$$-6{,}06\cdot 10^{-4} < \Delta < -5{,}54\cdot 10^{-4},$$

что значительно лучше, чем (20). Поступая, как и ранее, принимаем

$$J^* = J_1 - \frac{1}{2}(6{,}06 + 5{,}54)\cdot 10^{-4} = 1{,}467439$$

с погрешностью не более $\frac{1}{2}(6{,}06 - 5{,}54)\cdot 10^{-4} < 0{,}3\cdot 10^{-4}$. Это на порядок лучше, чем ранее. ▲

Пример 9. Доказать, что

$$0 < \frac{1}{8\pi} - \int_{4\pi}^{8\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx < 1{,}21\cdot 10^{-3}.$$

△ Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{4\pi}^{8\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_{4\pi}^{8\pi} - \int_{4\pi}^{8\pi} \frac{\cos x}{x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{8\pi} - \frac{\sin x}{x^2}\Big|_{4\pi}^{8\pi} - 2\int_{4\pi}^{8\pi} \frac{\sin x}{x^3}\,dx = \frac{1}{8\pi} - 2\int_{4\pi}^{8\pi} \frac{\sin x}{x^3}\,dx.$$

Значит,

$$\frac{1}{8\pi} - \int_{4\pi}^{8\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\int_{4\pi}^{8\pi} \frac{\sin x}{x^3}\,dx.$$

Рассмотрим интегралы

$$J_1 = \int_{4\pi}^{6\pi} \frac{\sin x}{x^3}\,dx, \qquad J_2 = \int_{6\pi}^{8\pi} \frac{\sin x}{x^3}\,dx.$$

Запишем J_1 в виде

$$J_1 = \int_{4\pi}^{5\pi} \frac{\sin x}{x^3}\,dx + \int_{5\pi}^{6\pi} \frac{\sin x}{x^3}\,dx$$

и во втором слагаемом сделаем замену $x - \pi = t$. Тогда оно будет равно

$$-\int_{4\pi}^{5\pi} \frac{\sin t}{(t+\pi)^3}\,dt,$$

и, значит,

$$J_1 = \int_{4\pi}^{5\pi} \sin x\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+\pi)^3}\right)dx.$$

Подынтегральная функция положительна на $(4\pi;\ 5\pi)$, поэтому $J_1 > 0$. Функция

$$\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+\pi)^3}$$

убывает на $[4\pi;\ 5\pi]$, поэтому

$$J_1 < \left(\frac{1}{(4\pi)^3} - \frac{1}{(5\pi)^3}\right)\int_{4\pi}^{5\pi} \sin x\,dx = \frac{2}{(4\pi)^3}\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3\right) < 4{,}92 \cdot 10^{-4}.$$

Точно так же для J_2 получаются оценки

$$0 < J_2 < 1{,}11 \cdot 10^{-4}.$$

Из этих оценок для J_1 и J_2 следует, что

$$0 < \int_{4\pi}^{8\pi} \frac{\sin x}{x^3}\,dx < 6{,}03 \cdot 10^{-4},$$

а отсюда вытекают и требуемые неравенства. ▲

10.1. Вычислить приближенно интеграл J: а) по формуле прямоугольников ($n = 1$), б) по формуле трапеций ($n = 1$), в) по формуле Симпсона ($n = 2$), и найти разность между точным и приближенным значениями, если:

$$1)\ J=\int_1^2 \frac{dx}{x^2}. \qquad 2)\ J=\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx.$$

Найти $\delta=|J-J^*|$, где J — точное значение интеграла, а J^* — его приближенное значение, вычисленное с шагом $h=2$ по формуле: а) прямоугольников; б) трапеций; в) Симпсона. В каждом случае найти разность между правой частью Δ_0 в оценках соответственно (5), (9), (12) ($k=4$), и δ (**10.2—10.3**):

$$\textbf{10.2.}\ J=\int_1^5 x^4\, dx. \qquad \textbf{10.3.}\ J=\int_{-2}^2 e^x\, dx.$$

10.4. Вычислить приближенно при $n=12$ (вычислять с четырьмя знаками после запятой) интеграл

$$\int_0^{2\pi} x \sin x\, dx:$$

1) по формуле прямоугольников; 2) по формуле трапеций; 3) по формуле Симпсона.

10.5. Найти приближенно при $n=6$ (вычислять с четырьмя знаками после запятой) интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx:$$

1) по формуле прямоугольников; 2) по формуле трапеций; 3) по формуле Симпсона.

10.6. Вычислить приближенно при $n=10$ интеграл

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx:$$

1) по формуле прямоугольников (с тремя знаками после запятой) и оценить погрешность результата; 2) по формуле трапеций (с тремя знаками после запятой) и оценить погрешность результата; 3) по формуле Симпсона (с шестью знаками после запятой) и оценить погрешность результата.

10.7. Вычислить приближенно по формуле прямоугольников с шагом h интегралы:

$$1)\ \int_0^2 x^4\, dx, \quad h=0{,}2. \qquad 2)\ \int_0^{\pi} \sin x\, dx, \quad h=\pi/6.$$

$$3)\ \int_1^5 \frac{dx}{x}, \quad h=0{,}4. \qquad 4)\ \int_1^5 \frac{dx}{1+x^4}, \quad h=0{,}5.$$

5) $\int\limits_0^2 e^{x^2}\,dx, \qquad h=0{,}2.$ 6) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx, \qquad h=0{,}2.$

10.8. Вычислить приближенно по формуле трапеций с шагом h интегралы:

1) $\int\limits_2^9 \frac{dx}{x-1}, \qquad h=1.$ 2) $\int\limits_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}, \qquad h=1.$

3) $\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx, \qquad h=0{,}1.$ 4) $\int\limits_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx, \qquad h=1/8.$

5) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^3}, \qquad h=0{,}1.$ 6) $\int\limits_2^5 \ln^2 x\,dx, \qquad h=0{,}5.$

7) $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-0{,}25\sin^2 x}\,dx, \qquad h=\pi/12.$

10.9. Вычислить приближенно по формуле Симпсона с шагом h интегралы:

1) $\int\limits_1^3 \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx, \qquad h=0{,}5.$ 2) $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx, \qquad h=0{,}1.$

3) $\int\limits_0^2 e^{-x^2}\,dx, \qquad h=0{,}5.$ 4) $\int\limits_0^2 e^{x^2}\,dx, \qquad h=0{,}2.$

5) $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x-1}\,dx, \qquad h=0{,}25.$ 6) $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{3+\cos x}\,dx, \qquad h=\pi/6.$

7) $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\ln(1+x)}, \qquad h=1/6.$

10.10. Вычислить приближенно, используя формулу Симпсона при $n=10$:

1) Интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx.$

2) *Постоянную Каталана* $G=\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx.$

10.11. Вычислить приближенно по формуле Симпсона при $n = 4$ и $n = 8$ интегралы:

1) $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$. 2) $\int_0^3 e^{-x^2}\,dx$.

10.12. Вычислить приближенно по формуле Симпсона при $n = 4$ и $n = 8$ интегралы:

1) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\,dx$, если: а) $k^2 = 0{,}5$; б) $k^2 = 0{,}25$.

2) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}$, если: а) $k = 0{,}5$; б) $k = 0{,}8$; в) $k = 0{,}9$.

10.13. Для данного интеграла оценить погрешность формулы прямоугольников с шагом h:

1) $\int_0^2 x^4\,dx$, $h = 0{,}2$. 2) $\int_1^5 \frac{dx}{x}$, $h = 0{,}4$.

3) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$, $h = \pi/6$. 4) $\int_1^5 \frac{dx}{1 + x^4}$, $h = 0{,}5$.

5) $\int_0^2 e^{x^2}\,dx$, $h = 0{,}1$. 6) $\int_1^5 \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx$, $h = 0{,}25$.

10.14. Для данного интеграла оценить погрешность формулы трапеций с шагом h:

1) $\int_2^9 \frac{dx}{x - 1}$, $h = 1$. 2) $\int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x + 2}}$, $h = 1$.

3) $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^3}$, $h = 1/3$. 4) $\int_2^5 \ln^2 x\,dx$, $h = 0{,}5$.

5) $\int_0^2 \sqrt{1 + x^4}$, $h = 1/8$.

10.15. Для данного интеграла оценить погрешность формулы Симпсона с шагом h:

1) $\int_0^{\pi/2} \cos \frac{x}{2}\,dx$, $h = \pi/8$. 2) $\int_1^3 \ln 2x\,dx$, $h = 1/3$.

3) $\int\limits_0^6 x\ln(1+x)\,dx,\quad h=1/4.$ 4) $\int\limits_2^5 \frac{dx}{\ln x},\quad h=0{,}5.$

5) $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx,\quad h=0{,}1.$ 6) $\int\limits_0^{\pi/3} \sqrt{\cos x}\,dx,\quad h=0{,}1.$

10.16. Найти шаг h, при котором погрешность приближенного значения данного интеграла по формуле прямоугольников не более ε:

1) $\int\limits_0^2 x^4\,dx,\quad \varepsilon=10^{-2}.$ 2) $\int\limits_0^{\pi/3} \cos 2x\,dx,\quad \varepsilon=10^{-3}.$

3) $\int\limits_0^3 \ln(1+x^2)\,dx,\quad \varepsilon=10^{-4}.$ 4) $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx,\quad \varepsilon=10^{-3}.$

10.17. Найти шаг h, при котором погрешность приближенного значения интеграла по формуле трапеций не более ε:

1) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{x+2},\quad \varepsilon=10^{-1}.$ 2) $\int\limits_0^{1,2} e^x dx,\quad \varepsilon=10^{-3}.$

3) $\int\limits_1^3 \sin x\,dx,\quad \varepsilon=10^{-3}.$ 4) $\int\limits_0^{0,5} \arcsin x\,dx,\quad \varepsilon=10^{-4}.$

10.18. Найти шаг h, при котором погрешность приближенного значения интеграла по формуле Симпсона не более ε:

1) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos\frac{x}{2}\,dx,\quad \varepsilon=10^{-3}.$ 2) $\int\limits_1^3 \ln 2x\,dx,\quad \varepsilon=10^{-4}.$

3) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2},\quad \varepsilon=10^{-4}.$ 4) $\int\limits_0^2 \operatorname{arctg} x\,dx,\quad \varepsilon=10^{-4}.$

10.19. Вычислить по формуле прямоугольников интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-0{,}64\sin^2 x}\,dx$$

при $n=4$ и найти погрешность результата.

10.20. Вычислить приближенно интеграл по формуле прямоугольников с погрешностью не более 10^{-2}:

1) $\int\limits_1^2 x^3\,dx.$ 2) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2}.$

3) $\int\limits_1^5 \frac{dx}{1+\ln x}$. 4) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+x}\,dx$.

5) $\int\limits_0^1 \frac{e^{-x}}{1+x}\,dx$. 6) $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^{2/3}}\,dx$.

10.21. Вычислить приближенно интеграл по формуле трапеций с погрешностью не более 10^{-2}:

1) $\int\limits_2^5 \frac{dx}{x}$. 2) $\int\limits_0^{1,2} e^x\,dx$.

3) $\int\limits_0^{1,2} \sin x\,dx$. 4) $\int\limits_1^3 \ln 2x\,dx$.

5) $\int\limits_0^2 e^{-x^2}\,dx$. 6) $\int\limits_1^4 \frac{dx}{1+4x^3}$.

10.22. Вычислить приближенно интеграл по формуле Симпсона с погрешностью не более ε:

1) $\int\limits_1^5 \frac{dx}{x}$, $\varepsilon = 10^{-2}$. 2) $\int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

3) $\int\limits_1^3 \sqrt{x}\,dx$, $\varepsilon = 10^{-3}$. 4) $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

5) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

6) $\int\limits_2^5 \ln x\,dx$, $\varepsilon = 10^{-4}$. 7) $\int\limits_4^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

10.23. Вычислить приближенно с погрешностью не более ε интеграл:

1) $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{1+x^8}$, $\varepsilon = 10^{-4}$. 2) $\int\limits_0^2 \sqrt{1+4x^2}\,dx$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

3) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, $\varepsilon = 10^{-3}$. 4) $\int\limits_1^9 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

5) $\int\limits_1^3 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$, $\varepsilon = 10^{-3}$. 6) $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$, $\varepsilon = 5\cdot 10^{-3}$.

7) $\int\limits_1^2 \frac{e^{-x}}{x}\,dx, \quad \varepsilon = 10^{-4}$. 8) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x}\,dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}$.

9) $\int\limits_0^{\sqrt{\pi/2}} \cos x^2\,dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}$. 10) $\int\limits_0^{\pi} \sin(\sin x)\,dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}$.

10.24. Найти площадь поверхности полусферы радиуса R, используя формулу Симпсона при $n = 2$.

10.25. Доказать, что формула Симпсона при $n = 2$ дает точный результат при вычислении объема: 1) шара; 2) конуса; 3) цилиндра; 4) шарового сегмента.

10.26. Вычислить, используя формулу Симпсона, с погрешностью не более $5 \cdot 10^{-2}$ объем тела, образованного вращением кривой $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, вокруг оси Ox.

10.27. Найти приближенно, используя формулу Симпсона, длину дуги данной кривой с погрешностью не более 10^{-3}:

1) $y = x^2, \quad -2 \leqslant x \leqslant 2$.
2) $y^2 = 4x, \quad 1 \leqslant x \leqslant 5$.
3) $y = \ln x, \quad 1 \leqslant x \leqslant 5$.

10.28. Вычислить длину эллипса с эксцентриситетом $\varepsilon = 0{,}5$ и полуосью $a = 1$, воспользовавшись формулой Симпсона с $n = 6$. Оценить погрешность результата.

10.29. Найти приближенно с погрешностью не более $5 \cdot 10^{-2}$ длину эллипса с полуосями $a = 10$ и $b = 6$.

10.30. Найти приближенно с погрешностью не более 0,03 площадь поверхности эллипсоида, образованного при вращении эллипса $x^2 + 4y^2 = 4$ вокруг оси Ox (воспользоваться формулой Симпсона).

10.31. Найти приближенно с погрешностью не более 0,01 объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры $0 \leqslant y \leqslant 1/(1 + x^2)$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

10.32. Доказать неравенство (5) для формулы прямоугольников. (Указание: можно использовать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.)

10.33. Доказать, что неравенство (5) точно, т. е. существует функция, имеющая вторую кусочно-непрерывную производную и такая, что

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\,dx - h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right| = \frac{b-a}{24} h^2 \sup_{[a;\, b]} |f''(x)|.$$

10.34. Доказать неравенство (9) для погрешности формулы трапеций. (Указание: рассмотреть по отдельности интегралы по отрезкам $[x_i; x_{i+1}]$.)

10.35. Доказать, что формула Симпсона является точным равенством (точна) для любого многочлена до третьей степени включительно.

10.36. Доказать, что если формула приближенного интегрирования

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx p_0 f(x_0) + p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2),$$

где $x_j = x_0 + jh$, $j = 1, 2$, является точным равенством для любого многочлена до второй степени включительно, то это формула Симпсона, т. е. $p_0 = p_2 = h/3$, $p_1 = 4h/3$.

10.37. Используя приближение функции квадратным многочленом Лежандра по трем точкам $x_j = x_0 + jh$, $j = 0, 1, 2$, вывести формулу Симпсона приближенного интегрирования

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)).$$

10.38. Используя приближение функции кубическим многочленом Лежандра по четырем точкам $x_j = x_0 + jh$, $j = 0, 1, 2, 3$, вывести формулу приближенного интегрирования

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \approx \frac{3h}{8}(f(x_0) + 3(f(x_1) + f(x_2)) + f(x_3)).$$

10.39. Пусть на отрезке $[a;\ b]$ выбрана система точек x_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, $a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_m \leqslant b$. Пусть

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^{m} Q_m^{(i)}(x) f(x_i)$$

— интерполяционный многочлен Лежандра степени m для функции $f(x)$, определенной на $[a;\ b]$ (см. [3], т. II, с. 553—556), и пусть

$$p_i = \int_a^b Q_m^{(i)}(x)\,dx.$$

1) Доказать, что формула приближенного интегрирования

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{m} p_i f(x_i) \tag{21}$$

точна для любого многочлена до степени m включительно.

2) Доказать, что для фиксированной системы точек x_i, $i = 0, 1, \ldots, m$ формула (21) — единственная точная формула для всех многочленов до степени m включительно.

10.40. Проверить, что формула Чебышёва приближенного интегрирования на отрезке $[-1;\ 1]$

$$\int_{1}^{1} f(x)\,dx \approx f(-1/\sqrt{3}) + f(1/\sqrt{3}) \tag{22}$$

точна для всех многочленов до третьей степени включительно.

10.41. Пусть отрезок $[a; b]$ разделен на четыре равные части длины $h=(b-a)/4$. Вывести формулу приближенного интегрирования по четырем точкам, применив к каждому из отрезков $[a; a+2h]$ и $[a+2h; b]$ формулу Чебышёва (22).

10.42. Для функции f, имеющей четыре непрерывных производных на $[a; b]$, оценить погрешность полученной в **10.41** формулы, считая известным, что для погрешности формулы Чебышёва (22) верна оценка

$$|\Delta| \leqslant \frac{1}{135} \sup_{[-1;\ 1]} |f^{(4)}(x)|.$$

10.43. Доказать, что

1) $\displaystyle\int\limits_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx < \frac{1}{50\pi}$. 2) $\left|\displaystyle\int\limits_a^b \sin x^2\, dx\right| < 1/a, \qquad 0<a<b.$

10.44. Доказать, что для любого $a>0$

$$\lim_{b \to +\infty} \int\limits_b^{a+b} \frac{\sin x}{x}\, dx = 0.$$

10.45. Доказать, что при $R>0$

$$\int\limits_0^{\pi/2} e^{-R\sin\varphi}\, d\varphi < \frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}).$$

10.46. Доказать, что если $f''(x)<0$ на $[a; b]$, то

$$\int\limits_a^b e^{-\lambda f(x)}\, dx < \frac{b-a}{\lambda(f(b)-f(a))}\left(e^{-\lambda f(b)} - e^{-\lambda f(a)}\right).$$

Доказать неравенства (**10.47—10.53**):

10.47. 1) $\displaystyle\int\limits_{10}^{20} \frac{x^2 dx}{x^4-x+20} < \frac{1}{20}$. 2) $\displaystyle\int\limits_1^2 2^{1/x}\, dx < 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) $\displaystyle\int\limits_1^2 2^{-x^4}\, dx < 9/32.$

4) $\displaystyle\int\limits_0^1 (\sin x+\cos x)\arcsin x\, dx > \frac{\pi}{2}(\sin 1-\cos 1).$

10.48. 1) $\displaystyle\frac{e^2-1}{100} < \int\limits_0^2 \frac{e^x\, dx}{100-2x+x^2} < \frac{e^2-1}{99}$.

2) $\displaystyle\frac{1}{5} < \int\limits_0^1 \frac{xe^x\, dx}{\sqrt{25-x+x^2}} < \frac{2}{3\sqrt{11}}$.

3) $\dfrac{\pi^3}{2427} < \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x^2\,dx}{100 + 2\sqrt{3}\,\sin^3 x \cos x} < \frac{\pi^3}{2400}$.

10.49. 1) $\dfrac{\sin 1 + \cos 1 - 1}{2} < \displaystyle\int_0^1 \frac{x\cos x}{1 + x^{10}}\,dx < \sin 1 + \cos 1 - 1$.

2) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{e} < \displaystyle\int_0^1 \frac{xe^{-x}}{1 + x^2}\,dx < 1 - \frac{2}{e}$.

3) $\dfrac{99 - 2\ln 10}{800} < \displaystyle\int_{1/10}^1 \frac{x\ln(1/x)}{1 + x^2}\,dx < \frac{99 - 2\ln 10}{400}$.

4) $\dfrac{4}{\pi}\ln\left(1 + \dfrac{\pi}{4}\right) < \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\ln(1 + x)}{x\cos^2 x}\,dx < 1$.

5) $\dfrac{3}{5\sqrt[3]{32}} < \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^{2/3}\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} < \frac{\pi}{12}$.

6) $\dfrac{2}{3} < \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,e^x\,dx < e - 1$.

10.50. 1) $1 < \displaystyle\int_0^1 \frac{\arccos x}{\cos^2 x}\,dx < \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$.

2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \displaystyle\int_0^{\pi/4} 3^x \cos x\,dx < 2$.

3) $\dfrac{1}{3} < \displaystyle\int_0^1 3^{-x} \arccos x\,dx < 1$.

4) $\ln 2 < \displaystyle\int_0^{3/4} \frac{2^x\,dx}{\sqrt{1 + x^2}} < \frac{1}{\ln 2}$.

5) $\dfrac{2}{3} < \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,e^x}{1 + x}\,dx < \frac{1}{2}(e - 1)$.

6) $\dfrac{1}{2}\ln^2 2 < \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2}\,dx < \frac{1}{2}\ln 2$.

7) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x\,dx}{x(1 + \sin^2 x)} < 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8) $1 < \int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{x \cos^3 x}\, dx < \sqrt{2}.$

9) $\frac{8}{\pi^2} < \int\limits_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2}\, dx < 1.$

10.51. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2} < \int\limits_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{3 + \sin x}} < 1.$

2) $\sqrt{\frac{3}{11}} < \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{10 + \cos x}\, \sin^2 x} < \sqrt{\frac{3}{10}}.$

3) $\frac{\pi}{33} < \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(10 + \sin x)(x^2 + 1)} < \frac{\pi}{30}.$

4) $\frac{\operatorname{ch} 2 - 1}{22} < \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{sh} 2x\, dx}{10 + x} < \frac{\operatorname{ch} 2 - 1}{20}.$

5) $\frac{2 \operatorname{sh} \pi}{11} < \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x\, dx}{10 + \cos 2x} < \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{9}.$

6) $\frac{6}{\ln 3} < \int\limits_2^3 \frac{3^x\, dx}{2 + \sqrt{\sin x}} < \frac{9}{\ln 3}.$

10.52. 1) $e < \int\limits_2^4 \frac{x\, dx}{\ln x^2} < \frac{2}{\ln 2}.$ 2) $\frac{2}{3} < \int\limits_1^2 \frac{x\, dx}{\sqrt{1 + x^3}} < \sqrt[6]{\frac{4}{27}}.$

3) $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} < \int\limits_0^2 e^{x^2 - x}\, dx < 2e^2.$

4) $\frac{e^2 - 1}{e^{e^2} - 1} < \int\limits_{1/e}^{e} x^2 e^{-x^2}\, dx < \frac{e^2 - 1}{e^2}.$

5) $\frac{2}{11} \cdot 10^{-7} < \int\limits_{10}^{11} \frac{2^x}{x^{10} + 1}\, dx < 2 \cdot 10^{-7}.$

6) $0{,}7 < \int\limits_0^{\pi/2} \sin x^2\, dx < 1{,}3.$

10.53. 1) $\int\limits_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2\, dx > 0.$ 2) $\int\limits_0^{\pi} e^{\sin x}\, dx > 1{,}7\pi.$

10.54. Выяснить, какое из чисел больше:

$$a=\int\limits_{3/4}^{13}\frac{\sin x}{x}\,dx \quad \text{или} \quad b=\int\limits_{1}^{15}\frac{\sin x}{x}\,dx?$$

10.55. Получить для данного интеграла J оценки $J_1 < J < J_2$ с разностью $J_2 - J_1$, не превосходящей ε:

1) $\int\limits_0^1 e^{-x^3}\,dx, \quad \varepsilon = 0{,}02.$ 2) $\int\limits_0^1 \frac{xe^{x^3}}{x^2+100}\,dx, \quad \varepsilon = 2\cdot 10^{-4}.$

3) $\int\limits_{10}^{11} e^{-1/x}\,dx, \quad \varepsilon = 0{,}01.$ 4) $\int\limits_{10}^{11} xe^{-1/x^2}\,dx, \quad \varepsilon = 0{,}01.$

5) $\int\limits_{4\pi}^{6\pi} 10^{-x}\sin x\,dx, \quad \varepsilon = 10^{-12}.$ 6) $\int\limits_{4\pi}^{6\pi} e^{-1/x^2}\sin x\,dx, \; \varepsilon = 4\cdot 10^{-3}.$

7) $\int\limits_{4\pi}^{4\pi+0{,}1} \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

10.56. Вычислить интегралы с погрешностью не более ε:

1) $\int\limits_{100}^{200} \frac{\sin \pi x}{x}\,dx, \quad \varepsilon = 10^{-5}.$ 2) $\int\limits_{100}^{400} \sqrt{x}\cos \pi x\,dx, \quad \varepsilon = 10^{-5}.$

3) $\int\limits_4^5 \frac{100}{x^2}\sin\frac{x}{100-x}\,dx, \quad \varepsilon = 5\cdot 10^{-5}.$

4) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{x\sin x}{10+\sin x}\,dx, \quad \varepsilon = 0{,}01.$

10.57. Доказать, что для данного интеграла при любом числе a, большем нижнего предела интегрирования, верны неравенства:

1) $0 < \int\limits_3^a e^{-x^2}\,dx < \frac{1}{6e^9}.$ 2) $\frac{1}{4} < \int\limits_1^a \frac{1+x^6}{1+x^{11}}\,dx < \frac{1}{4}+\frac{1}{10}.$

3) $0 < \int\limits_{100\pi}^{a} \frac{\sin x}{x}\,dx < \frac{\pi}{50}.$

10.58. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 \sin\frac{x^2}{2}\,dx$$

с погрешностью менее $5\cdot 10^{-5}$.

10.59. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \cos x^2\, dx$$

с пятью верными знаками после запятой.

10.60. Доказать, что:

1) $0{,}941 < \int\limits_0^{\pi/3} \sqrt{\cos x}\, dx < 0{,}957.$

2) $0{,}983 < \int\limits_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{x}\, dx < 0{,}986.$

10.61. Доказать, что

$$0 < \int_0^1 e^{-x^2}\, dx - \frac{26}{35} < 0{,}005.$$

10.62. Доказать, что существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 x^{-4/3} e^{-x}\, dx$$

и вычислить его с погрешностью менее 0,1.

10.63. Доказать, что

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, dx \approx 0{,}610$$

с погрешностью не более $1{,}5 \cdot 10^{-3}$.

10.64. Доказать, что при $0 < z < 1$ для интеграла

$$J = \int_0^z \frac{\sqrt[3]{x}\, dx}{1 + x^4}$$

верны оценки

$$\frac{3}{4} z^{4/3} - \frac{3}{16} z^{16/3} < J < \frac{3}{4} z^{4/3} - \frac{3}{16} z^{16/3} + \frac{3}{28} z^{28/3}.$$

10.65. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$$

с погрешностью менее 10^{-5}, используя формулу Тейлора.

10.66. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{1/4} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$$

с погрешностью менее 10^{-4}, используя формулу Тейлора.

10.67. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{8+x^3}\,dx$$

с погрешностью менее 10^{-4}, используя формулу Тейлора.

10.68. Вычислить длину четверти эллипса $x^2+2y^2=2$, используя формулу Тейлора с тремя членами.

10.69. 1) Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-0{,}5\sin^2 x}},$$

используя формулу Тейлора с тремя членами.

2) Доказать, что погрешность полученного в 1) результата не превышает 0,03.

10.70. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{1} \sqrt[4]{1-x^2}\,dx$$

с погрешностью не более 10^{-3}. (Указание: положить $\sqrt[4]{1-x}=t$ и воспользоваться формулой Тейлора.)

10.71. Пусть

$$J_n(\varepsilon)=\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+\varepsilon x^n},\quad n\in\mathbb{N},\quad \varepsilon>0.$$

Доказать, что:

1) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} J_n(\varepsilon)=1$. 2) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{J_n(\varepsilon)-1}{\varepsilon}=-\dfrac{1}{n+1}$.

10.72. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;\,b]$,

$$J(\varepsilon)=\int\limits_a^b \frac{f(x)\,dx}{1+\varepsilon x^n},\quad \varepsilon>0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Доказать, что:

1) $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} J(\varepsilon)=\int\limits_a^b f(x)\,dx=J_0$.

2) $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\dfrac{J(\varepsilon)-J_0}{\varepsilon}=-\int\limits_a^b f(x)\,x^n\,dx$.

10.73. Пусть $a > 0$. Доказать, что для любого $b > a$:

1) $\int\limits_a^b e^{-x^2}\,dx < \frac{1}{2a} e^{-a^2}$. 2) $\int\limits_a^b e^{-x^2}\,dx < \frac{e^{-a^2}}{2a}(1 - e^{-2a(b-a)})$.

3) $\int\limits_a^b e^{-x^2}\,dx < \varepsilon \frac{1-2\varepsilon^2}{1-12\varepsilon^4} e^{-a^2}$, где $\varepsilon = 1/(2a)$, $a \geqslant 1$.

10.74. Доказать, что при $a \geqslant 3{,}5$ и любом $b > a$

$$\int\limits_a^b e^{-x^2}\,dx < 10^{-5}.$$

10.75. Доказать, что при $\alpha > 0$, $a > 0$ и $b > a$

$$\left|\int\limits_a^b \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx\right| < \frac{3}{a^\alpha}.$$

10.76. Доказать, что если $a > 1/\sqrt{2}$, то

$$\frac{e^{-a^4}}{2a}\left(1 - \frac{1}{2a^2}\right) < \int\limits_a^{2a^3} e^{-x^2}\,dx < \frac{e^{-a^2}}{2a}.$$

10.77. Доказать, что при $a > 0$ для любого $b > a$ и $b \geqslant 2$

$$\frac{e^{-a}}{a^2}\left(1 - \frac{2}{a}\right) < \int\limits_a^b \frac{e^{-x}}{x^2}\,dx < \frac{e^{-a}}{a^2}.$$

10.78. Вычислить интеграл

$$\int\limits_2^4 x^2 e^{-x^2}\,dx$$

с погрешностью менее 10^{-3}.

10.79. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx$$

с погрешностью менее 10^{-3}.

10.80. Доказать, что

$$\frac{1}{200\pi} < \int\limits_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx < \frac{1}{200\pi} + \frac{3}{100^4\pi^3}.$$

10.81. Пусть функция f положительна и убывает на $[0; 1]$ и пусть

$$J_n = \int_0^1 f(x) \sin 2\pi n x \, dx.$$

Доказать, что:

1) $J_n > 0$. 2) $J_n < \int_0^{1/2n} f(x)\, dx$.

3) $\frac{1}{8n^2} \sum_{k=0}^{n-1} m_k < J_n < \frac{\pi}{16n^2} \sum_{k=0}^{n-1} M_k$,

где $M_k = \sup|f'(x)|$, $m_k = \inf|f'(x)|$ на $[k/n;\ (k+1)/n]$, при условии, что f непрерывно дифференцируема на $[0; 1]$.

10.82. Доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2n+1} < \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{\cos^2 x}{x}\, dx < \frac{2n+1}{4n(n+1)}.$$

10.83. Доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, и любого $a > 0$

$$1 - \frac{1}{n+1} < \int_0^a e^{-x^n}\, dx < 1 + \frac{1}{ne}.$$

10.84. Доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$,

$$a_n - \frac{n-1}{2n^2(2n+1)} < \int_0^1 \sqrt[n]{1+x^n}\, dx < a_n,$$

где $a_n = 1 + \frac{1}{n(n+1)}$.

10.85. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \sqrt[10]{1+x^{10}}\, dx$$

с погрешностью не более 10^{-3}.

10.86. Доказать, что

$$n\left(a_k - \frac{3(k-1)}{32k^2}\right) < \int_0^n \sqrt[k]{1+\sin^2 \pi x}\, dx < n a_k,$$

где $a_k = 1 + \frac{1}{4k}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$.

10.87. Доказать, что

$$1{,}0473 < \int_0^1 \sqrt[3]{1+\sin^4 \pi x}\, dx < 1{,}0625.$$

10.88. Вычислить интеграл

$$\int_0^8 \sqrt{1+\sin^6 \pi x}\, dx$$

с погрешностью менее 10^{-3}.

10.89. Вычислить интеграл

$$\int_1^{10} \frac{e^{-2x}}{1+x}\, dx$$

с погрешностью менее 10^{-4}. (Указание: разделить промежуток интегрирования и использовать формулу Симпсона и интегрирование по частям.)

ГЛАВА III

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 11. Несобственные интегралы от неограниченных функций

1. Определение несобственного интеграла от неограниченной функции. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a;\ b)$ и интегрируема на любом отрезке $[a;\ \xi]$, $\xi < b$. Если существует

$$\lim_{\xi \to b-0} \int_a^\xi f(x)\,dx, \tag{1}$$

то этот предел называется *несобственным интегралом* функции $f(x)$ на промежутке $[a;\ b)$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

В этом случае говорят также, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *сходится*, а функция $f(x)$ *интегрируема в несобственном смысле* на промежутке $[a;\ b)$. В противном случае, т. е. если предел (1) не существует, говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *расходится*, а функция $f(x)$ *неинтегрируема в несобственном смысле* на промежутке $[a;\ b)$.

Для непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$, $x \in [a;\ b)$, сходящийся несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ равен площади неограниченной криволинейной трапеции Φ (рис. 37):

$$\Phi = \{(x;\ y):\ a < x < b,\quad 0 < y < f(x)\}.$$

Если функция $f(x)$ ограничена на $[a;\ b)$, то предел (1) существует и несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ равен обычному интегралу Римана на отрезке $[a;\ b]$.

Аналогично определяется несобственный интеграл функции $f(x)$ на промежутке $(a; b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi \to a+0} \int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Если функция $f(x)$ интегрируема в несобственном смысле на промежутках $[a; c)$ и $(c; b]$, то $f(x)$ называется *интегрируемой в несобственном смысле на отрезке* $[a; b]$. В этом случае несобственный интеграл определяется равенством

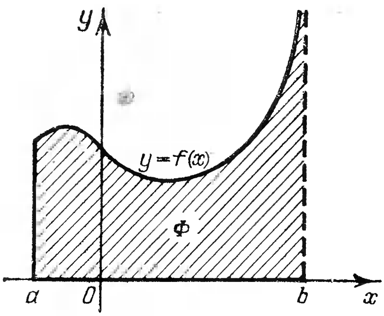

Рис. 37

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Если функция $f(x)$ интегрируема хотя бы в несобственном смысле на интервалах

$$(a; c_1),\ (c_1; c_2),\ \ldots,\ (c_{n-1}; b),$$

то по определению полагают

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_{n-1}}^b f(x)\,dx.$$

Пример 1. Вычислить интегралы или установить их расходимость:

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 2) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$.

3) $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx$, где $f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{если } x < 0, \\ 1/\sqrt{x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

4) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

△ 1) Подынтегральная функция неограничена в левой окрестности точки $x = 1$ и интегрируема на любом отрезке $[0; \xi]$, $\xi < 1$. По определению несобственного интеграла получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\xi \to 1-0} \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\xi \to 1-0} \arcsin \xi = \frac{\pi}{2}.$$

2) Подынтегральная функция неограничена в правой окрестности точки $x=0$, поэтому

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\xi\to+0}\int_\xi^1 \ln x\,dx = \lim_{\xi\to+0}(x\ln x - x)\Big|_\xi^1 =$$

$$= \lim_{\xi\to+0}(-1-\xi\ln\xi+\xi) = -1.$$

3) Подынтегральная функция неограничена в окрестности точки $x=0$. Данный интеграл сходится, если сходится каждый из интегралов:

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x} \quad \text{и} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Но первый из этих интегралов не сходится. В самом деле,

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x} = \lim_{\xi\to-0}\int_{-1}^\xi \frac{dx}{x} = \lim_{\xi\to-0}\ln|x|\Big|_{-1}^\xi = \lim_{\xi\to-0}\ln|\xi| = -\infty.$$

Следовательно, и исходный интеграл является расходящимся.

4) Подынтегральная функция неограничена только в правой окрестности точки $x=-1$. В левой окрестности точки $x=1$ функция ограничена, так как $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}=1$. Следовательно,

$$\int_{-1}^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\xi\to-1+0}\int_\xi^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= -\lim_{\xi\to-1+0}\int_\xi^1 \arccos x\,d\arccos x = -\frac{1}{2}\lim_{\xi\to-1+0}\arccos^2 x\Big|_\xi^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\xi\to-1+0}\arccos^2\xi = \frac{\pi^2}{2}. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Исследовать $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, на сходимость.

$\triangle$ Пусть $\alpha\ne1$, тогда

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\xi\to+0}\int_\xi^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\xi\to+0}\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Big|_\xi^1 =$$

$$= \lim_{\xi\to+0}\frac{1-\xi^{-\alpha+1}}{1-\alpha} = \frac{1-\lim\limits_{\xi\to+0}\xi^{-\alpha+1}}{1-\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, & \text{если} \quad \alpha<1, \\ +\infty, & \text{если} \quad \alpha>1. \end{cases}$$

Пусть $\alpha = 1$, тогда

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\xi \to +0} \int_\xi^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\xi \to +0} \ln|x| \Big|_\xi^1 = -\lim_{\xi \to +0} \ln \xi = +\infty.$$

Следовательно, интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$. ▲

Вычислить интегралы или установить их расходимость (**11.1—11.16**):

11.1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

11.2. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x+1}}$.

11.3. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$.

11.4. $\int_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{x}-2x+\sqrt{x}}$.

11.5. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x^2-1|}}$.

11.6. $\int_0^3 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

11.7. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

11.8. $\int_0^1 \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

11.9. $\int_0^\pi \operatorname{tg} x\,dx$.

11.10. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,dx$.

11.11. $\int_0^\pi \frac{|\cos x|}{\sqrt{\sin x}}\,dx$.

11.12. $\int_0^e \frac{dx}{e^x-1}$.

11.13. $\int_{-1}^0 e^{1/x}\frac{dx}{x^3}$.

11.14. $\int_{-1}^1 e^{1/x}\frac{dx}{x^3}$.

11.15. $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

11.16. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}$.

---

2. Основные формулы для несобственных интегралов от неограниченных функций.

1. *Линейность интеграла.* Если несобственные интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся, то для любых чисел α и β схо-

дится интеграл $\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx$, причем

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{2}$$

2. *Формула Ньютона — Лейбница.* Если функция $f(x)$, $x \in [a;\ b)$ непрерывна и $F(x)$, $x \in [a;\ b)$, — какая-либо ее первообразная, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{b-0} = F(b-0) - F(a), \tag{3}$$

где

$$F(b-0) = \lim_{x \to b-0} F(x).$$

3. *Формула замены переменной.* Пусть $f(x)$, $x \in [a;\ b)$, непрерывная, а $\varphi(t)$, $t \in [\alpha;\ \beta)$, непрерывно дифференцируемая функции, причем

$$a = \varphi(\alpha) \leqslant \varphi(t) < \lim_{t \to \beta-0} \varphi(t) = b,$$

тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{4}$$

Формула (4) справедлива в случае сходимости по крайней мере одного из входящих в нее интегралов. В случае расходимости одного из интегралов расходится и другой.

4. *Формула интегрирования по частям.* Если $u(x)$, $x \in [a;\ b)$, и $v(x)$, $x \in [a;\ b)$,— непрерывно дифференцируемые функции и $\lim\limits_{x \to b-0} (uv)$ существует, то

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du, \tag{5}$$

где

$$uv\Big|_a^b = \lim_{x \to b-0} (uv) - u(a)\,v(a).$$

Формула (5) справедлива в случае сходимости по крайней мере одного из входящих в нее интегралов. Если один из интегралов расходится, то расходится и другой.

5. *Интегрирование неравенств.* Если функции $f(x)$, $x \in [a;\ b)$, и $g(x)$, $x \in [a;\ b)$, удовлетворяют неравенству $f(x) \leqslant g(x)$, то для интегралов

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx, \quad \int\limits_a^b g(x)\,dx$$

при условии их сходимости, верно неравенство

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx. \tag{6}$$

Пример 3. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{(\sqrt[6]{x}+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx.$$

△ Используя свойство (2) линейности несобственного интеграла, имеем

$$\int_0^1 \frac{(\sqrt[6]{x}+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[6]{x}} + 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Для функций $\frac{1}{\sqrt[6]{x}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ на промежутке $(0; 1]$ первообразными являются, соответственно, функции $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}$, $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$, $2\sqrt{x}$. По формуле Ньютона — Лейбница получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[6]{x}} = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}\Bigg|_{+0}^1 = \frac{6}{5}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Bigg|_{+0}^1 = \frac{3}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Bigg|_{+0}^1 = 2.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 \frac{(\sqrt[6]{x}+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{6}{5} + 3 + 2 = \frac{31}{5}. \ ▲$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

△ Воспользуемся формулой замены переменной в несобственном интеграле. Положим $1-x=t^2$, $t>0$; тогда $x = 1-t^2$, $dx=-2t\,dt$, новые пределы интегрирования $\alpha=1$, $\beta=0$. Следовательно,

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = -2\int_1^0 \frac{t\,dt}{t(t^2+1)} = 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = 2\,\mathrm{arctg}\,t\Bigg|_0^1 = \pi/2.$$

Здесь несобственный интеграл заменой переменной преобразован в собственный интеграл. ▲

Пример 5. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$.

△ Применим формулу интегрирования по частям для несобственного интеграла. Положим

$$u=\ln x, \quad dv=\frac{dx}{\sqrt{x}},$$

тогда

$$du=\frac{dx}{x}, \quad v=2\sqrt{x}$$

и, следовательно,

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_{+0}^{1} - 2\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = -2\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\ln x - {}$$

$$-4\sqrt{x}\Big|_{+0}^{1} = -4 \quad ▲$$

Пример 6. Найти площадь фигуры Ф, ограниченной отрезком $[0;\ \pi/2]$ оси абсцисс, графиком функции $y=\frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}$, $x\in[0;\ \pi/2)$, и его асимптотой.

△ Искомая площадь выражается через несобственный интеграл следующим образом:

$$S=\int\limits_0^{\pi/2} y\,dx=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}\,dx.$$

Для вычисления интеграла положим $\cos x = t$, тогда $dx = -\frac{dt}{\sin x}$. Новые пределы интегрирования $\alpha=1$, $\beta=0$. Следовательно,

$$S=-\int\limits_1^0 \frac{(1-t^2)\,dt}{\sqrt[5]{t^3}}=\int\limits_0^1 (t^{-3/5}-t^{7/5})\,dt=\left(\frac{5}{2}t^{2/5}-\frac{5}{12}t^{12/5}\right)\Big|_0^1=\frac{25}{12}. \quad ▲$$

Пример 7. Вычислить интеграл

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad a,b\in\mathbb{R}, \quad b>a.$$

△ Подынтегральная функция неограничена в правой окрестности точки $x=a$ и в левой окрестности точки $x=b$. Заменой переменной

$$x=a\cos^2 t+b\sin^2 t, \quad t\in(0;\ \pi/2)$$

данный интеграл сводится к собственному интегралу. Действительно, находим новые пределы интегрирования $\alpha=0$, $\beta=\pi/2$;

затем вычисляем $x-a=(b-a)\sin^2 t$, $b-x=(b-a)\cos^2 t$, $dx=2(b-a)\sin t\cos t\,dt$. В результате получаем

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=2\int_0^{\pi/2} dt=\pi. \blacktriangle$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$.

$\triangle$ Подынтегральная функция неограничена в правой окрестности точки $x=0$. Установим сначала существование интеграла. Для этого воспользуемся формулой интегрирования по частям, положив

$$u=\ln\sin x,\quad dv=dx.$$

Тогда

$$du=\frac{\cos x}{\sin x}dx,\qquad v=x,$$

$$\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx=x\ln\sin x\Big|_{+0}^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2} x\operatorname{ctg} x\,dx=-\lim_{x\to+0}(x\ln\sin x)-$$
$$-\int_0^{\pi/2} x\operatorname{ctg} x\,dx=-\int_0^{\pi/2} x\operatorname{ctg} x\,dx.$$

Последний интеграл существует, так как функция $x\operatorname{ctg} x$ ограничена на промежутке $(0;\ \pi/2]$. Следовательно, существует и исходный интеграл. Обозначим его через J и сделаем замену переменной $x=2t$. Тогда получим

$$J=\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx=2\int_0^{\pi/4} \ln\sin 2t\,dt=$$
$$=2\int_0^{\pi/4} (\ln 2+\ln\sin t+\ln\cos t)\,dt=$$
$$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\pi/4} \ln\sin t\,dt+2\int_0^{\pi/4} \ln\cos t\,dt.$$

Замена переменного $t=\frac{\pi}{2}-u$ в последнем интеграле приводит его к виду

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\sin u\,du,$$

и, следовательно, для J получаем уравнение

$$J=\frac{\pi}{2}\ln 2+2J,$$

из которого находим $J=-\frac{\pi}{2}\ln 2$. $\blacktriangle$

Вычислить интегралы (**11.17—11.36**):

11.17. $\int\limits_0^1 \frac{2-\sqrt[3]{x}-x^3}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx.$

11.18. $\int\limits_{-0,5}^{-0,25} \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}.$

11.19. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}.$

11.20. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}.$

11.21. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(4-x)\sqrt{1-x^2}}.$

11.22. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(16-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

11.23. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^4\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

11.24. $\int\limits_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2-2bx}}, \qquad a>0,\ b\geqslant 0.$

11.25. $\int\limits_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad n\in\mathbb{N}.$

11.26. $\int\limits_a^b x\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,dx, \qquad b>a.$

11.27. $\int\limits_0^{\pi/4} \sqrt{\operatorname{ctg} x}\,dx.$

11.28. $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx.$

11.29. $\int\limits_0^2 \left(x\sin\frac{\pi}{x^2}-\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2}\right)dx.$

11.30. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arccos x}}.$

11.31. $\int\limits_0^1 \frac{x^3\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

11.32. $\int\limits_{-1}^{1} x^3\ln\frac{1+x}{1-x}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

11.33. $\int\limits_0^1 x^\alpha \ln^n x\,dx, \qquad \alpha>-1,\ n\in\mathbb{N}.$

11.34. $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\cos x\,dx.$

11.35. $\int\limits_0^{\pi} x\ln\sin x\,dx.$

11.36. $\int\limits_0^{\pi/2} (\ln\cos x)\cos 2nx\,dx, \qquad n\in\mathbb{N}.$

Вычислить площади криволинейных трапеций, образованных графиками функций (**11.37—11.44**):

11.37. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-5x}}, \quad x\in[0;\ 0{,}4).$

11.38. $y=\dfrac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}, \quad x\in[-1;\ 1], \quad x\neq 0.$

11.39. $y=\dfrac{x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad x\in(a;\ b).$

11.40. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}, \quad x\in(3;\ 5).$

11.41. $y=\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}, \quad x\in(1;\ e].$

11.42. $y=x\ln\dfrac{1+x}{1-x}, \quad x\in[0;\ 1).$

11.43. $y=\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}, \quad x\in[0;\ 1).$

11.44. $y=\dfrac{|\ln x|}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x\in(0;\ 1).$

Найти площадь фигуры, ограниченной заданной кривой и ее асимптотой (**11.45—11.49**):

11.45. $xy^2=8-4x.$ **11.46.** $(x+1)y^2=x^2,\ x<0.$

11.47. $(4-x)y^2=x^3.$ **11.48.** $(1-x^2)y^2=x^2, \quad x>0.$

11.49. $x=\cos 2t,\ y=\cos 2t\,\mathrm{tg}\,t,\ t\in[\pi/4;\ 3\pi/4].$

11.50. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярных координатах:

1) $r=\mathrm{tg}\,\varphi,\ r=1/\cos\varphi,\ \varphi\in[0;\pi/2).$

2) $r=1/\varphi,\ r=1/\sin\varphi,\ \varphi\in(0;\pi/2].$

11.51. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, получающейся при вращении кривой $y=e^{-x^2}$ и прямой $y=0$ вокруг оси ординат.

11.52. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, получающейся при вращении кривой $(4-x)y^2-x^3=0$ вокруг ее асимптоты.

Доказать неравенства (**11.53—11.56**):

11.53. $$\frac{\pi}{10}<\int\limits_0^2\frac{dx}{(4+\sqrt{\sin x})\sqrt{4-x^2}}<\frac{\pi}{8}.$$

11.54. $$\frac{\ln(2+\sqrt{3})}{11}<\int\limits_1^2\frac{dx}{(10+\sin x)\sqrt{x^2-1}}<\frac{\ln(2+\sqrt{3})}{10}.$$

11.55. $$\int\limits_{1,9}^2\frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}<0{,}03.$$ **11.56.** $$\int\limits_0^1\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx>0.$$

3. Признаки сходимости и расходимости интегралов для неотрицательных функций (признаки сравнения). Пусть функции f и g неотрицательны на промежутке $[a;\, b)$ и интегрируемы на каждом отрезке $[a;\, \xi]$, $\xi < b$. Тогда:

I. Если функции f и g удовлетворяют на промежутке $[a;\, b)$ неравенству $f \leqslant g$, то

а) Из сходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)\, dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\, dx$.

б) Из расходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^b g(x)\, dx$.

II. а) Если $g > 0$ на промежутке $[a;\, b)$ и существует

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k,$$

где $k \neq 0$, то интегралы

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^b g(x)\, dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

б) В частности, если $f \sim g$ при $x \to b-0$, то функции f и g одновременно либо интегрируемы, либо неинтегрируемы на промежутке $[a;\, b)$.

Пример 9. Исследовать $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2(1/x)}{\sqrt{x}}\, dx$ на сходимость.

△ На промежутке $(0;\, 1)$ справедливо неравенство

$$0 \leqslant \frac{\cos^2(1/x)}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}},$$

и так как $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится (пример 2, $\alpha = 1/2$), то по признаку сравнения I а) сходится и данный интеграл. ▲

Пример 10. Исследовать $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$ на сходимость.

△ Подынтегральная функция $f(x) = 1/(1-x^3)$ неограничена в левой окрестности точки $x = 1$. Возьмем в качестве функции сравнения функцию $g(x)=1/(1-x)$. Так как

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1}{3},$$

то из расходимости интеграла

$$\int_0^1\frac{dx}{1-x}=\int_0^1\frac{dt}{t}$$

(пример 2, $\alpha=1$), согласно признаку сравнения II а), следует расходимость данного интеграла. ▲

Пример 11. Исследовать

$$\int_0^1\frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}\,dx$$

на сходимость.

△ Подынтегральная функция неограничена в правой окрестности точки $x=0$. При $x\to+0$ имеем

$$\frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}\sim\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}},$$

и так как интеграл $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ сходится, то по признаку сравнения II б) сходится и данный интеграл. ▲

Пример 12. Исследовать $\displaystyle\int_0^1\frac{|\ln x|}{x^\alpha}\,dx$, $\alpha\in\mathbb{R}$, на сходимость.

△ Рассмотрим сначала случай $\alpha<1$. Положим $\varepsilon=1-\alpha$, тогда $\varepsilon>0$. Представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{|\ln x|}{x^\alpha}=\frac{|\ln x|}{x^{1-\varepsilon}}=\frac{x^{\varepsilon/2}|\ln x|}{x^{1-\varepsilon/2}}. \tag{7}$$

При $x\to+0$ имеем $x^{\varepsilon/2}|\ln x|\to 0$, поэтому существует такое x_0, что для всех $x\in(0;\ x_0)$ верно неравенство

$$x^{\varepsilon/2}|\ln x|<1.$$

Следовательно, из равенства (7) получается оценка

$$\frac{|\ln x|}{x^\alpha}<\frac{1}{x^{1-\varepsilon/2}},\qquad x\in(0;\ x_0).$$

Поскольку $\displaystyle\int_0^{x_0}\frac{dx}{x^{1-\varepsilon/2}}$ сходится, то по признаку сравнения I а) сходится и $\displaystyle\int_0^{x_0}\frac{|\ln x|\,dx}{x^\alpha}$. Поэтому сходится и данный интеграл, так как он представим в виде

$$\int_0^1 \frac{|\ln x|}{x^\alpha} dx = \int_0^{x_0} \frac{|\ln x|}{x^\alpha} dx + \int_{x_0}^1 \frac{|\ln x|}{x^\alpha} dx,$$

т. е. в виде суммы двух интегралов, один из которых сходится, а другой является собственным интегралом. Таким образом, при $\alpha < 1$ исходный интеграл сходится.

Пусть теперь $\alpha \geqslant 1$. В этом случае для всех $x \in (0;\ 1/e)$ верно неравенство $|\ln x| > 1$ и, следовательно, неравенство

$$\frac{|\ln x|}{x^\alpha} > \frac{1}{x^\alpha}.$$

Применяя признак сравнения I б), получаем, что $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{|\ln x|}{x^\alpha} dx$ расходится, а поэтому расходится и интеграл $\int_0^1 \frac{|\ln x|}{x^\alpha} dx$.

Итак, исходный интеграл сходится при всех $\alpha < 1$ и расходится при всех $\alpha \geqslant 1$. ▲

Исследовать на сходимость интегралы (**11.57—11.77**):

11.57. $\int_0^8 \frac{dx}{x^2 + \sqrt[3]{x}}$.

11.58. $\int_0^2 \sqrt{\frac{16 + x^4}{16 - x^4}}\, dx$.

11.59. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1 - x^{10}}}$.

11.60. $\int_1^2 \frac{(x-2)\,dx}{x^3 - 3x^2 + 4}$.

11.61. $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^2} dx$.

11.62. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$.

11.63. $\int_0^\pi \sin\left(\frac{1}{\cos x}\right) \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

11.64. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}}\, dx$.

11.65. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg}(x^3 - 7x^2 + 15x - 9)}}$.

11.66. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\ln(1+x)}$.

11.67. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}}$.

11.68. $\int_0^2 \frac{\sqrt{x}\, dx}{e^{\sin x} - 1}$.

11.69. $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sh} x\, dx}{e^{x^2} - \cos x}$.

11.70. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + \operatorname{arctg} x}$.

11.71. $\int_0^1 \frac{\ln x\, dx}{\sqrt{x(1-x)^3}}$.

11.72. $\int_0^{\pi} \frac{\ln x}{\sqrt{\sin x}}\, dx$.

11.73. $\int_0^{\pi} \frac{\ln \sin x}{\sqrt[3]{x}}\, dx$.

11.74. $\int_0^{\pi} \frac{\ln \sin x}{x\sqrt{\sin x}}\, dx$.

11.75. $\int_0^1 \ln|1 - 4\sin^2 x|\, dx$.

11.76. $\int_0^1 \frac{\arcsin(x^2 + x^3)}{x \ln^2(1+x)}\, dx$.

11.77. $\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x}$.

Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл (**11.78—11.96**):

11.78. $\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos x}{x^{\alpha}}\, dx$.

11.79. $\int_0^1 \frac{6e^{2x^2} + 24\cos x - 13x^4 - 30}{\sin^{\alpha} x}\, dx$.

11.80. $\int_0^1 e^{\alpha/x} (\cos x)^{1/x^3}\, dx$.

11.81. $\int_0^1 \frac{e^{\alpha x} - \sqrt{1+x}}{\operatorname{ch} x - \cos x}\, dx$.

11.82. $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^2 + x^2} - e^{\cos x}}{x^{\alpha}}\, dx$.

11.83. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 2x - e^{-4x^2}}{x^{\alpha} \operatorname{tg} x}\, dx$.

11.84. $\int_0^{\pi/2} \frac{e^{\alpha \cos x} - \sqrt{1 + 2\cos x}}{\sqrt{\cos^5 x}}\, dx$.

11.85. $\int_0^1 \frac{\operatorname{ch}(\alpha x) - \ln(1 + x^2) - 1}{\sqrt[3]{8 - x^3} - 2}\, dx$.

11.86. $\int_0^1 \frac{\ln(e^{x^{\alpha}} + x) - x}{\operatorname{tg} x}\, dx$.

11.87. $\int_0^{0,5} \frac{\ln \operatorname{tg} x\, dx}{(4x\cos x - \pi \sin x)^{\alpha}}$.

11.88. $\int_0^1 \frac{\ln^{\alpha} \operatorname{ch}(1/x)}{\ln^3(1+x)}\, dx$.

11.89. $\int_0^1 \frac{\ln\sqrt{1+2x} - xe^{-x}}{1 - \cos^{\alpha} x}\, dx$.

11.90. $\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha}\ln(2+x)\,dx.$ **11.91.** $\int\limits_{1}^{2}\frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{(x-\sqrt{x})^{\alpha}}\,dx.$

11.92. $\int\limits_{0}^{1}\frac{\sin(\arcsin x+x^3)-x}{\sin^{\alpha}x}\,dx.$ **11.93.** $\int\limits_{0}^{1}\frac{(1-x)^{-5/3}\,dx}{\operatorname{arctg}^{\alpha}(x-x^2)}.$

11.94. $\int\limits_{0}^{1}\frac{\operatorname{arctg}(x^2+x^{2\alpha})}{x\ln^{\alpha}(1+x)}\,dx.$ **11.95.** $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\ln|x-\alpha|}.$

11.96. $\int\limits_{0}^{1}e^{x^2/(x-\alpha)}\,dx.$

Определить, при каких значениях параметров α и β сходятся интегралы (11.97—11.102):

11.97. $\int\limits_{0}^{1}x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\,dx.$ **11.98.** $\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin^{\alpha}x\cos^{\beta}x\,dx.$

11.99. $\int\limits_{0}^{1}x^{\alpha}\ln^{\beta}\frac{1}{x}\,dx.$ **11.100.** $\int\limits_{0}^{1}x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\ln x\,dx.$

11.101. $\int\limits_{0}^{0,5}\frac{\ln^{\alpha}(1/x)}{\operatorname{tg}^{\beta}x}\,dx.$ **11.102.** $\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin^{\alpha-1}x\,dx}{(1+\beta\cos x)^{\alpha}},\quad \beta\geqslant 0.$

---

4. Критерий Коши. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a;b)$, интегрируема в собственном смысле на любом отрезке $[a;\xi]$, $\xi<b$, и неограничена в левой окрестности точки $x=b$. Тогда для сходимости интеграла

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)\,dx$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon>0$ существовало такое число $\eta\in[a;b)$, что при любых $\eta_1,\eta_2\in(\eta;b)$

$$\left|\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2}f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Критерий Коши часто используется для доказательства расходимости интегралов: $\int\limits_{a}^{b}f(x)\,dx$ расходится, если существует число $\varepsilon>0$, такое, что для любого числа $\eta\in[a;b)$ существуют числа $\eta_1 \in [\eta;\ b)$ и $\eta_2 \in [\eta;\ b)$, для которых

$$\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)\,dx \right| \geqslant \varepsilon.$$

Пример 13. Доказать расходимость интеграла

$$\int_0^1 \sin^2\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{dx}{1-x}.$$

$\triangle$ Для доказательства применим критерий Коши. Возьмем произвольное число $\eta \in [0;\ 1)$ и натуральное число n, такое, чтобы выполнялось неравенство

$$n > 1/(\pi(1-\eta)).$$

Оценим снизу модуль интеграла по отрезку $[1-1/\pi n;\ 1-1/2\pi n]$, сделав предварительно замену переменной $t = 1/(1-x)$:

$$\left| \int_{1-1/\pi n}^{1-1/2\pi n} \sin^2\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{dx}{1-x} \right| = \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{\sin^2 t}{t}\,dt > \frac{1}{2\pi n}\int_{\pi n}^{2\pi n} \sin^2 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2\pi n}\cdot\frac{\pi n}{2} = \frac{1}{4}.$$

Из полученной оценки следует, что существует число $\varepsilon = 1/4$, такое, что для любого числа $\eta \in [0;\ 1)$ существуют числа $\eta_1 = 1 - 1/\pi n$ и $\eta_2 = 1 - 1/2\pi n$ такие, что

$$\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} \sin^2\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{dx}{1-x} \right| \geqslant \varepsilon.$$

Согласно критерию Коши это означает, что данный интеграл расходится. $\blacktriangle$

5. Абсолютная и условная сходимость интегралов. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$, и *условно сходящимся*, если интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, а интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$ расходится.

Достаточные признаки сходимости. Пусть функция $y = f(x)g(x)$ определена на промежутке $[a; b)$ и неограничена в левой окрестности точки $x = b$. Тогда справедливы следующие достаточные признаки сходимости.

Признак Дирихле. Интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ сходится, если:

а) функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a;\ b)$;

б) функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a;\ b)$, причем $\lim\limits_{x\to b-0} g(x)=0$.

Признак Абеля. Интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ сходится, если:

а) функция $f(x)$ непрерывна на $[a;\ b)$ и интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится;

б) функция $g(x)$ ограничена, непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a;\ b)$.

Пример 14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл

$$\int\limits_0^1 \sin\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{dx}{1-x}.$$

△ Воспользуемся признаком Дирихле. Положим

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\sin\left(\frac{1}{1-x}\right) \quad \text{и} \quad g(x)=1-x.$$

Функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[0;\ 1)$ и ее первообразная $\left(-\cos\frac{1}{1-x}\right)$ ограничена. Функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[0;\ 1)$, причем $\lim\limits_{x\to 1-0} g(x)=0$. Оба условия признака Дирихле выполнены. Следовательно, интеграл сходится. Абсолютно интеграл не сходится, что следует из неравенства

$$\left|\frac{1}{1-x}\sin\frac{1}{1-x}\right|\geqslant\frac{1}{1-x}\sin^2\frac{1}{1-x}$$

и из расходимости интеграла

$$\int\limits_0^1 \sin^2\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{dx}{1-x},$$

установленной в примере 13. Следовательно, исходный интеграл сходится условно. ▲

Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы (**11.103**—**11.106**):

11.103. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(1/x)\,dx}{x^2+\sqrt{x^3}+x^2\cos(1/x)}$. **11.104.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}\cos\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\,dx$.

11.105. $\displaystyle\int_0^1 \left(1-e^{\sqrt[3]{x^2}\cos(1/x)}\right)\frac{dx}{x^2}$. **11.106.** $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{\cos^3\ln x}{x\ln x}\,dx$.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость при всех значениях параметра α интегралы (**11.107**—**11.119**):

11.107. $\displaystyle\int_0^1 (1-x)^\alpha \sin\frac{\pi}{1-x}\,dx$. **11.108.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha}{x^2+1}\sin\frac{1}{x}\,dx$.

11.109. $\displaystyle\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)\frac{dx}{x^\alpha}$. **11.110.** $\displaystyle\int_0^{0,5} \left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha \cos\frac{1}{x^2}\,dx$.

11.111. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(1/x)\,dx}{x^2\left(\frac{1}{x}+\sin(1/x)\right)^\alpha}$. **11.112.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right)\frac{dx}{\sin^\alpha x}$.

11.113. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^\alpha x\cdot\cos\operatorname{ctg} x\,dx$. **11.114.** $\displaystyle\int_{-1}^1 \sin\frac{1+x}{1-x}\,\frac{dx}{(1-x^2)^\alpha}$.

11.115. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha}{e^x-1}\sin\frac{1}{x}\,dx$. **11.116.** $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \operatorname{arctg} x\cos\frac{1}{x}\,dx$.

11.117. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x^\alpha}{x^2}\,dx$. **11.118.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{(\sqrt{x}-x)^\alpha}\,dx$.

11.119. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx$.

11.120. Исследовать на абсолютную и условную сходимость при всех значениях параметров α и β интеграл

$$\int_0^1 \frac{\cos(1/x)}{x^\alpha(1-x^2)^\beta}\,dx.$$

11.121. Доказать, что если функция $f(x)$ монотонна и ограничена на промежутке $(0;\,1]$ и существует несобственный интеграл

$$\int_0^1 x^\alpha f(x)\,dx, \quad \text{то} \quad \lim_{x\to+0} x^{\alpha+1}f(x)=0.$$

11.122. Можно ли сходящийся несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ рассматривать как предел соответствующей интегральной суммы

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k), \qquad \xi_k \in [x_k;\ x_{k+1}]?$$

11.123. Пусть функция $f(x)$ монотонна на промежутке $(a; b]$ и не ограничена в правой окрестности точки $x=a$. Доказать, что если $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существует, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

11.124. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на некотором промежутке $[0; \varepsilon)$, $\varepsilon>0$, и $f(0)\neq 0$, то при $\alpha<1$ верно асимптотическое равенство

$$\int_0^x \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx \sim \frac{f(0)}{1-\alpha}x^{1-\alpha}, \qquad x\to+0.$$

---

6. Интеграл в смысле главного значения (в смысле Коши). Пусть функция $f(x)$ интегрируема (в собственном или несобственном смысле) на промежутках $(a; c-\varepsilon]$ и $[c+\varepsilon; b)$, $\varepsilon>0$, и неограничена в окрестности точки $c\in(a; b)$.

Интегралом в смысле главного значения (в смысле Коши) называется

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right).$$

Этот предел обозначается V. P. $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (V. P. — первые буквы французских слов valeur principal — главное значение).

Таким образом, по определению

$$\text{V. P.}\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right).$$

Если существует несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, то существует и интеграл в смысле главного значения и эти интегралы равны. Из существования интеграла в смысле главного значения не следует существование соответствующего несобственного интеграла. Действительно,

$$\text{V. P.} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\ln|x| \,\big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x| \,\big|_{\varepsilon}^{1} \right) = 0,$$

а $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ не существует.

Найти интегралы в смысле главного значения (**11.125—11.131**):

11.125. $\text{V. P.} \int\limits_{1}^{10} \frac{dx}{7-x}$. **11.126.** $\text{V. P.} \int\limits_{-1}^{7} \frac{dx}{(x-1)^3}$.

11.127. $\text{V. P.} \int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{(x-c)^n}$, $c \in (a;\ b)$, $n \in \mathbb{N}$.

11.128. $\text{V. P.} \int\limits_{0,5}^{4} \frac{dx}{x \ln x}$.

11.129. $\text{V. P.} \int\limits_{0}^{\pi} x \operatorname{tg} x \, dx$. **11.130.** $\text{V. P.} \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{3 - 5 \sin x}$.

11.131. $\text{V. P.} \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{\alpha - \sin x}$, $\alpha \in (0;\ 1)$.

11.132. При каких значениях α существует

$$\text{V. P.} \int_{0}^{2} \frac{x^{\alpha}}{1-x} \, dx?$$

11.133. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и обращается в нуль только в одной точке $x = c \in (a;\ b)$, производная $f'(x)$ существует в некоторой окрестности точки $x = c$, причем $f'(c) \neq 0$, $f''(c)$ существует, то $\int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{f(x)}$ расходится, а $\text{V. P.} \int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{f(x)}$ существует.

11.134. Доказать, что при $x > 1$ существует

$$\text{V. P.} \int_{0}^{x} \frac{dt}{\ln t}.$$

---

§ 12. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

1. Определение интеграла с бесконечными пределами интегрирования. Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x \geqslant a$ и интегрируема в любом отрезке $[a; b]$. Если существует

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx, \qquad (1)$$

то этот предел называется *несобственным интегралом функции* $f(x)$ *на промежутке* $[a; +\infty)$ и обозначается $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. В этом случае говорят также, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится*, а функция $f(x)$ *интегрируема в несобственном смысле* на промежутке $[a; +\infty)$. В противном случае, т. е. если предел (1) не существует, говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится*, а функция $f(x)$ *неинтегрируема в несобственном смысле* на промежутке $[a; +\infty)$.

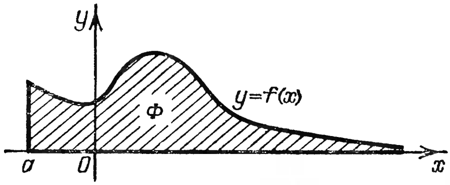

Рис. 38

Для непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$, $x \in [a; +\infty)$, сходящийся несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ равен площади неограниченной криволинейной трапеции Φ (рис. 38): $\Phi = \{(x; y)\colon a < x < +\infty,\ 0 < y < f(x)\}$.

Аналогично определяется несобственный интеграл функции $f(x)$, $x \in (-\infty; b]$, с нижним бесконечным пределом интегрирования:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Несобственный интеграл с бесконечными верхним и нижним пределом интегрирования функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, определяется следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

где c — некоторое число.

Если для функции $f(x)$, $x \in [a; +\infty)$, при некотором $c > a$ существуют интегралы

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_c^{+\infty} f(x)\,dx,$$

то

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Если хотя бы один из интегралов в правой части этого равенства не существует, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ является расходящимся.

Пример 1. Вычислить интегралы или установить их расходимость:

1) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$. 2) $\int_0^{+\infty} \cos 2x\,dx$. 3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$.

△ 1) $$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{a\to+\infty} \int_2^a \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{a\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}\right)\Big|_2^a =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to+\infty}\left(\ln\frac{a-1}{a+1} - \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{\ln 3}{2}.$$

2) $$\int_0^{+\infty} \cos 2x\,dx = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a \cos 2x\,dx = \lim_{a\to+\infty}\frac{\sin 2a}{2},$$

и, так как предел не существует, интеграл расходится.

3) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+4x+9} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{dx}{x^2+4x+9} + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{dx}{x^2+4x+9} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt5}\Big|_a^0\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt5}\Big|_0^b\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt5} - \frac{1}{\sqrt5}\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{a+2}{\sqrt5} + \frac{1}{\sqrt5}\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{b+2}{\sqrt5} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt5}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt5}. \ ▲$$

Пример 2. Исследовать $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, на сходимость.

△ Пусть $\alpha \neq 1$, тогда

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{a\to+\infty} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \right|_1^a = \lim_{a\to+\infty} \frac{a^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{a\to+\infty} a^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{при} \quad \alpha > 1, \\ +\infty & \text{при} \quad \alpha < 1. \end{cases}$$

Пусть $\alpha = 1$, тогда

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{dx}{x} = \lim_{a\to+\infty} \ln x \big|_1^a = \lim_{a\to+\infty} \ln a = +\infty.$$

Следовательно, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. ▲

Пример 3. Исследовать $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, на сходимость.

△ Представим интеграл в виде суммы двух несобственных интегралов:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Первый интеграл сходится только при $\alpha < 1$ (§ 11, пример 2), второй только при $\alpha > 1$ (пример 2). Следовательно, данный интеграл при каждом значении α является расходящимся. ▲

Вычислить интегралы или установить их расходимость (12.1—12.14):

12.1. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

12.2. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$.

12.3. $\int\limits_0^{+\infty} \sin 3x\, dx$.

12.4. $\int\limits_1^{+\infty} e^{-3x}\, dx$.

12.5. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x+1}$.

12.6. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x+1}{x^2+1}\, dx$.

12.7. $\int\limits_3^{+\infty} \frac{2x+5}{x^2+3x-10}\, dx$.

12.8. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-5x+7}$.

12.9. $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$.

12.10. $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

12.11. $\int\limits_{0}^{+\infty} x2^{-x}\, dx$.

12.12. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln(x^2+x)}{x}\, dx$.

12.13. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

12.14. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

---

2. Основные формулы для несобственных интегралов.

1. *Линейность интеграла.* Если несобственные интегралы

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\, dx, \qquad \int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\, dx$$

сходятся, то для любых чисел α и β сходится интеграл

$$\int\limits_{a}^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx,$$

причем

$$\int\limits_{a}^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\, dx + \beta \int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\, dx. \qquad (2)$$

2. *Формула Ньютона — Лейбница.* Если функция $f(x)$, $x \in [a;\ +\infty)$, непрерывна и $F(x)$, $x \in [a;\ +\infty)$, — какая-либо ее первообразная, то

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\, dx = F(x)\Big|_{a}^{+\infty} = F(+\infty) - F(a), \qquad (3)$$

где

$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x).$$

3. *Формула замены переменной.* Пусть $f(x)$, $x \in [a;\ +\infty)$, — непрерывная, $\varphi(t)$, $t \in [\alpha;\ \beta)$, — непрерывно дифференцируемая функции, причем

$$a = \varphi(\alpha) \leqslant \varphi(t) < \lim_{t \to \beta - 0} \varphi(t) = +\infty,$$

тогда

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\, dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt. \qquad (4)$$

Формула (4) справедлива в случае сходимости по крайней мере одного из двух входящих в нее интегралов. В случае расходимости одного из интегралов расходится и другой.

4. *Формула интегрирования по частям.* Если $u'(x)$, $x \in [a; +\infty)$, и $v(x)$, $x \in [a; +\infty)$, — непрерывно дифференцируемые функции и $\lim\limits_{x \to +\infty} (uv)$ существует, то

$$\int_a^{+\infty} u\,dv = uv\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v\,du, \tag{5}$$

где

$$uv\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} (uv) - u(a)\,v(a).$$

Формула (5) справедлива в случае сходимости по крайней мере одного из двух входящих в нее интегралов. В случае расходимости одного из интегралов расходится и другой.

5. *Интегрирование неравенств.* Если функции $f(x)$, $x \in [a; +\infty)$, и $g(x)$, $x \in [a; +\infty)$, удовлетворяют неравенству $f(x) \leqslant g(x)$, то для интегралов

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx, \qquad \int_a^{+\infty} g(x)\,dx,$$

при условии их сходимости, верно неравенство

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2-1} + \frac{2}{(x+1)^2}\right) dx.$

△ Для функций

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1} \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

первообразными являются, соответственно, функции

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} \quad \text{и} \quad G(x) = -\frac{1}{x+1}.$$

По формуле Ньютона — Лейбница получаем

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}\Big|_2^{+\infty} = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\ln 3,$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1}\Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, в силу линейности, данный интеграл равен $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\ln 3$. ▲

Пример 5. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}.$

△ Воспользуемся формулой замены переменной в несобственном интеграле. Положим $x=\sqrt{t}$, тогда

$$dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}},$$

новые пределы интегрирования $\alpha=2$, $\beta=+\infty$, и, следовательно,

$$\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}=\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dt}{(t+1)^3}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(t+1)^2}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{36}. \quad ▲$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

△ Применим формулу замены переменной. Положим $x=1/t$, тогда

$$dx=-\frac{dt}{t^2},$$

новые пределы интегрирования $\alpha=1$, $\beta=0$. В этом случае несобственный интеграл с помощью замены переменной преобразуется в собственный интеграл, который легко вычисляется:

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}=-\int\limits_{1}^{0}\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}=\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}=$$

$$=\ln\left(t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right)\Big|_0^1=\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)-\ln\frac{3}{2}=$$

$$=\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right). \quad ▲$$

Пример 7. Вычислить площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции

$$y=1/\sqrt{1+e^x}$$

и положительными лучами осей координат.

△ Искомая площадь выражается через несобственный интеграл следующим образом:

$$S=\int\limits_{0}^{+\infty}y\,dx=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$$

Для вычисления интеграла положим $1+e^x=t^2$, $t>0$, тогда

$$dx=\frac{2t\,dt}{t^2-1},\qquad \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}=\frac{2\,dt}{t^2-1},$$

и, кроме того, когда $x \in [0, +\infty)$, то $t \in [\sqrt{2}, +\infty)$. Поэтому

$$S = \int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2\,dt}{t^2-1} = \ln\frac{t-1}{t+1}\Big|_{\sqrt{2}}^{+\infty} = \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 2\ln(1+\sqrt{2}). \ \blacktriangle$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$.

$\triangle$ Применим формулу интегрирования по частям для несобственного интеграла. Положим

$$u = \operatorname{arctg} x, \qquad dv = \frac{dx}{x^2},$$

тогда

$$du = \frac{dx}{x^2+1}, \qquad v = -\frac{1}{x},$$

и, следовательно,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\Big|_1^{+\infty} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2+1)} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \frac{\pi}{4} + \left(\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)\Big|_1^{+\infty} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}. \ \blacktriangle$$

Пример 9. Доказать неравенства:

$$0 < \int\limits_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3-x^2+3}}{x^5+x^2+1}\,dx < \frac{1}{10\sqrt{2}}.$$

$\triangle$ При $x \in [2; +\infty)$ справедливы неравенства

$$0 < \frac{\sqrt{x^3-x^2+3}}{x^5+x^2+1} < \frac{\sqrt{x^3}}{x^5} = x^{-7/2},$$

поэтому

$$0 < \int\limits_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3-x^2+3}}{x^5+x^2+1}\,dx < \int\limits_2^{+\infty} x^{-7/2}\,dx.$$

Но

$$\int\limits_2^{+\infty} x^{-7/2}\,dx = -\frac{2}{5}x^{-5/2}\Big|_2^{+\infty} = \frac{2}{5}2^{-5/2} = \frac{1}{10\sqrt{2}}. \ \blacktriangle$$

Вычислить интегралы (**12.15—12.42**):

12.15. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$. **12.16.** $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^4\,dx}{(x^5+1)^4}$.

12.17. $\int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

12.18. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2x}\, dx$.

12.19. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+\sqrt{e^x}}$.

12.20. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{x\, dx}{x^3-1}$.

12.21. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$.

12.22. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$.

12.23. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\, dx$.

12.24. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\, dx$.

12.25. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$.

12.26. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(\sqrt{x^2+1}+x)^2}$.

12.27. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(4x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

12.28. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2+12}{(x^2+1)^2}\, dx$.

12.29. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\, dx$, $a>0$.

12.30. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\, dx$, $a>0$.

12.31. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax}\sin^2 bx\, dx$, $a>0$.

12.32. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx$, $n\in\mathbb{N}$.

12.33. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}$.

12.34. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n}$, $a>0$, $ac-b^2>0$, $n\in\mathbb{N}$.

12.35. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

12.36. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x^2-1}}$.

12.37. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(4x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$.

12.38. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(1-x)}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}\, dx$.

12.39. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx$.

12.40. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\, dx$.

12.41. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{2-x^2}{x^3\sqrt{x^2-1}}\, dx$.

12.42. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^\alpha+1)(x^2+1)}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Вычислить площади криволинейных трапеций, образованных графиками функций (**12.43—12.49**):

12.43. $y = xe^{-x^2/2}$, $\quad x \in [0; +\infty)$.

12.44. $y = \sqrt{x}/(x+1)^2$, $\quad x \in [1; +\infty)$.

12.45. $y = e^{-x}\,\text{th}\,x$, $\quad x \in [0; +\infty)$.

12.46. $y = x^4 e^{-x}$, $\quad x \in [0; +\infty)$.

12.47. 1) $y = \dfrac{x\sqrt{x}}{x^5+1}$, $\quad x \in [0; +\infty)$.

2) $y = \dfrac{x^{\alpha/2}}{x^{\alpha+2}+1}$, $\quad \alpha > -2$, $\quad x \in (0; +\infty)$.

12.48. $y = \dfrac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}$, $\quad x \in [-1; +\infty)$.

12.49. $y = |\sin x| e^{-x}$, $x \in [0; +\infty)$.

12.50. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, полученной при вращении кривой $y = 1/(1+x^2)$ вокруг ее асимптоты.

12.51. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, полученной при вращении кривой $y = f(x)$ вокруг оси абсцисс:

1) $y = e^{-x}\sin \pi x$, $\quad x \geqslant 0$. $\quad$ 2) $y = e^{-x}\sqrt{\sin x}$, $\quad x \geqslant 0$.

12.52. Найти площадь поверхности, полученной при вращении кривой $y = e^{-x}$, $x \geqslant 0$, вокруг ее асимптоты.

12.53. Найти площадь поверхности (*псевдосферы*), полученной при вращении кривой (*трактрисы*)

$$\begin{cases} x = \cos t + \ln \text{tg}\,(t/2), \\ y = \sin t \end{cases}$$

вокруг оси абсцисс.

Доказать неравенства (**12.54—12.63**):

12.54. $0 < \displaystyle\int_{10}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+x+1} < 0{,}1$. $\quad$ **12.55.** $\left|\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^2+4}\,dx\right| < \dfrac{\pi}{4}$.

12.56. $0{,}25 < \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x^6+1}{x^{11}+1}\,dx < 0{,}35$.

12.57. $\dfrac{1}{29} < \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x^{30}+1}{x^{60}+1}\,dx < \frac{1}{29} + \frac{1}{59}$.

12.58. $0 < \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^{20}+1}{x^{40}+1}\,dx - \frac{20}{19} < 0{,}05$.

12.59. $0 < \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{x+100} < 0{,}01.$

12.60. $0 < \int\limits_2^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < \frac{1}{4e^4}.$

12.61. $0 < \int\limits_{10}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < \frac{1}{5\cdot 2^{102}}.$

12.62. $\left|\int\limits_2^{+\infty} e^{-x^4}\cos x^4\,dx\right| < 0{,}5^{21}.$

12.63. $0 < \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx - \int\limits_0^3 e^{-x^2}\,dx < 0{,}5^{11}.$

---

3. Признаки сходимости и расходимости интегралов для неотрицательных функций (признаки сравнения). Пусть функции f и g неотрицательны и интегрируемы на любом отрезке $[a;\ b]$, $b < +\infty$. Тогда:

I. Если f и g удовлетворяют на промежутке $[a;\ +\infty)$ неравенству $f \leqslant g$, то

а) Из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

б) Из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

II. а) Если $g > 0$ на промежутке $[a;\ +\infty)$ и существует

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k,$$

где $k \neq 0$, то интегралы

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

б) В частности, если $f \sim g$ при $x \to +\infty$, то f и g одновременно либо интегрируемы, либо неинтегрируемы на промежутке $[a;\ +\infty)$.

Пример 10. Исследовать $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{x^4+1}}\,dx$ на сходимость.

$\triangle$ На промежутке $[1; +\infty)$ справедливо неравенство

$$0 \leqslant \frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{x^4+1}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}},$$

и так как $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$ сходится (пример 2, $\alpha = 4/3$), то по признаку сравнения I а) сходится и данный интеграл. $\blacktriangle$

Пример 11. Исследовать $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x+\ln x}}$ на сходимость.

$\triangle$ Пусть $f(x) = 1/\sqrt{4x+\ln x}$, за функцию сравнения возьмем $g(x) = 1/\sqrt{x}$. Так как

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x+\ln x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{4+\frac{\ln x}{x}}} = \frac{1}{2},$$

то из расходимости $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (пример 2, $\alpha = 1/2$) по признаку сравнения II а) следует расходимость данного интеграла. $\blacktriangle$

Пример 12. Исследовать $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^3+\sin x}$ на сходимость.

$\triangle$ Так как $x/(x^3+\sin x) \sim 1/x^2$ при $x \to +\infty$ и $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится (пример 2, $\alpha = 2$), то, согласно признаку сравнения II б), сходится и данный интеграл. $\blacktriangle$

Пример 13. Исследовать $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, на сходимость.

$\triangle$ Рассмотрим сначала случай $\alpha > 1$. Положим $\varepsilon = \alpha - 1$, тогда $\varepsilon > 0$. Представим подынтегральную функцию следующим образом:

$$\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = \frac{1}{x^{1+\varepsilon} \ln^\beta x} = \frac{1}{x^{\varepsilon/2} \ln^\beta x} \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon/2}}. \tag{6}$$

Так как для каждого β при $x \to +\infty$

$$\frac{1}{x^{\varepsilon/2} \ln^\beta x} \to 0,$$

то существует такое $x_0 \geqslant 2$, что для всех $x > x_0$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{x^{\varepsilon/2} \ln^{\beta} x} < 1.$$

Следовательно, для всех $x > x_0$ из равенства (6) следует неравенство

$$\frac{1}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x} < \frac{1}{x^{1+\varepsilon/2}}.$$

Поскольку $\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\varepsilon/2}}$ сходится, то по признаку I а) сходится и $\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x}$. Поэтому сходится и данный интеграл, так как он представим в виде

$$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x} = \int\limits_{2}^{x_0} \frac{dx}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x} + \int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x},$$

т. е. в виде суммы двух интегралов, один из которых является собственным интегралом, а другой сходящимся. Итак, при $\alpha > 1$ и любом β интеграл сходится.

Пусть теперь $\alpha = 1$. Сделаем замену переменной, положив $\ln x = t$. Тогда получим

$$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{\beta} x} = \int\limits_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\beta}}.$$

Из этого равенства видно, что данный интеграл при $\alpha = 1$ сходится, если $\beta > 1$, и расходится, если $\beta \leqslant 1$.

Рассмотрим, наконец, случай $\alpha < 1$. Положим $\varepsilon = 1 - \alpha$, тогда $\varepsilon > 0$. Представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{1}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x} = \frac{1}{x^{1-\varepsilon} \ln^{\beta} x} = \frac{x^{\varepsilon/2}}{\ln^{\beta} x} \cdot \frac{1}{x^{1-\varepsilon/2}}. \qquad (7)$$

Так как для каждого β при $x \to +\infty$

$$\frac{x^{\varepsilon/2}}{\ln^{\beta} x} \to +\infty,$$

то существует такое $x_0 \geqslant 2$, что для всех $x > x_0$ справедливо неравенство

$$\frac{x^{\varepsilon/2}}{\ln^{\beta} x} > 1$$

и, следовательно, для всех $x > x_0$ из равенства (7) следует неравенство

$$\frac{1}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x} > \frac{1}{x^{1-\varepsilon/2}}.$$

Поскольку $\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1-\varepsilon/2}}$ расходится, то по признаку I б) расходится и $\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x}$. Из расходимости последнего интеграла следует расходимость исходного интеграла. Поэтому при $\alpha < 1$ и любом β интеграл расходится.

Итак, интеграл сходится, если $\alpha > 1$, β — произвольно и если $\alpha = 1$, $\beta > 1$; при всех остальных значениях α и β интеграл расходится. ▲

Исследовать на сходимость интегралы (**12.64**—**12.81**):

12.64. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^3+7}{x^5-x^2+2}\,dx.$

12.65. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^5+2}}.$

12.66. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x^7}}.$

12.67. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{1+2\sqrt{x}+x^2}\,dx.$

12.68. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx.$

12.69. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx.$

12.70. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{x^4+2}}\,dx.$

12.71. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1+\arcsin(1/x)}{1+x\sqrt{x}}\,dx.$

12.72. $\int\limits_{2}^{+\infty} \left(\cos\frac{2}{x}-1\right)dx.$

12.73. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

12.74. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{(x-\cos(\pi/x))^2}\,dx.$

12.75. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln(1+x^5)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,dx.$

12.76. $\int\limits_{-3/2}^{+\infty} \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}\,dx.$

12.77. $\int\limits_{0}^{+\infty} \left(\frac{1}{x\operatorname{sh} x}-\frac{1}{x}\right)dx.$

12.78. $\int\limits_{0}^{+\infty} (e^{-1/x^2}-e^{-4/x^2})\,dx.$

12.79. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^{-2}\left(\operatorname{arctg}\frac{x^3}{1+x^2}\right)^3 dx.$

12.80. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{arctg}\frac{x}{2+x}\,dx.$

12.81. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2\sin^2 x}.$

Найти все значения параметра α, при которых сходятся интегралы (**12.82—12.97**):

12.82. $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\alpha x}\,dx.$

12.83. $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln x}.$

12.84. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{x^\alpha}.$

12.85. $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x}.$

12.86. $\int\limits_{1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{e^{1/x}-1}{\alpha}\right)dx, \quad \alpha \neq 0.$

12.87. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}\,dx}{(x-1)^\alpha \ln x}.$

12.88. $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{e^{-x}-\ln x}{(1+x^\alpha)^{\alpha-2}}\,dx.$

12.89. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x^\alpha}\,dx.$

12.90. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^{\alpha-101} \operatorname{arctg}^\alpha \frac{x}{1+x}\,dx.$

12.91. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^{4\alpha/3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{1+x^\alpha}\,dx.$

12.92. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln^\alpha \operatorname{ch} x}{x^2 \ln^3\left(1+\frac{1}{x}\right)}\,dx.$

12.93. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^{\alpha-x}\,dx.$

12.94. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln(1+x^{-2\alpha})}{\sqrt{x^\alpha+x^{-\alpha}}}\,dx, \quad \alpha>0.$

12.95. $\int\limits_{0}^{+\infty} \left(x+\frac{1}{x}\right)^\alpha \ln(1+x^{-3\alpha})\,dx, \quad \alpha>0.$

12.96. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha \sin^2 x}.$

12.97. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{(x+\alpha)^2}\,dx.$

Найти все неотрицательные значения параметра α, при которых сходятся интегралы (**12.98—12.101**):

12.98. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^3+x^\alpha}-1}{x^3}\,dx.$

12.99. $\int\limits_{0}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\frac{dx}{x}.$

12.100. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x+x^\alpha)}{\sqrt{x^3}}\,dx.$

12.101. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(x^\alpha+e^x)}{\sqrt{x^3+x^5}}\,dx.$

Определить при каких значениях параметров α и β сходятся интегралы (12.102—12.112):

12.102. $\displaystyle\int\limits_e^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x\,dx}{(e^{1/x^2}-1)^\beta}.$

12.103. $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x\,dx}{\sqrt[3]{x^2}\,\operatorname{arctg}^\beta(1/x)}.$

12.104. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}.$

12.105. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha\,dx}{x^\beta+1}, \qquad \beta \geqslant 0.$

12.106. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha+x^\beta}.$

12.107. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x-1|^\alpha |x+1|^\beta dx.$

12.108. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}\,dx}{(\sqrt[3]{x+1}-1)^\beta \sin^\beta \dfrac{x}{x+1}}.$

12.109. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^\alpha x\,dx}{(x^2+2)(e^x-1)^\beta}.$

12.110. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^\alpha(e^x-x)\,dx}{(x+\sqrt{x})^\beta \arcsin \dfrac{x}{x+1}}.$

12.111. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)-2\ln x}{(\sqrt[4]{x+1}-1)^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x}\,dx.$

12.112. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha|\sin x|^\beta}.$

---

4. Критерий Коши. Интеграл $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $b = b(\varepsilon) \geqslant a$ такое, что при любых $b_1 > b$ и $b_2 > b$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Критерий Коши часто используется для доказательства расходимости интегралов: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $b \geqslant a$ существуют числа $b_1 > b$ и $b_2 > b$ такие, что

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| \geqslant \varepsilon$$

Пример 14. Доказать расходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,dx$ при $\alpha \leqslant 1$.

△ Пусть $b \in (1;\ +\infty)$; выберем натуральное число n так, чтобы выполнялось неравенство $\pi n > b$ и положим $b_1 = \pi n$ и $b_2 = 2\pi n$. Тогда

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,dx\right| = \int\limits_{\pi n}^{2\pi n} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,dx \geqslant \int\limits_{\pi n}^{2\pi n} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi n}\int\limits_{\pi n}^{2\pi n} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2\pi n}\int\limits_{\pi n}^{2\pi n} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2\pi n}\cdot\frac{\pi n}{2} = \frac{1}{4}.$$

Итак, существует число $\varepsilon = 1/4$, такое, что для любого $b > 1$ существуют числа $b_1 = \pi n > b$ и $b_2 = 2\pi n > b$, для которых

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,dx\right| \geqslant \varepsilon$$

Следовательно, при $\alpha \leqslant 1$ данный интеграл расходится. ▲

5. Абсолютная и условная сходимость интегралов. Интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, и *условно сходящимся*, если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ расходится. Абсолютно сходящийся интеграл сходится.

Пример 15. Доказать, что $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится условно.

△ Для доказательства сходимости интеграла воспользуемся формулой интегрирования по частям. Положим $u = 1/x$ и $dv = \sin x\, dx$, тогда $du = -\frac{dx}{x^2}$ и $v = -\cos x$, и, следовательно,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

Исследование данного интеграла на сходимость свелось к исследованию $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$. Последний интеграл сходится абсолютно, что следует по признаку сравнения из неравенства

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$$

и, значит, является сходящимся интегралом. Итак, исходный интеграл сходится. Покажем теперь, что $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ расходится. Действительно, из очевидного неравенства

$$\frac{|\sin x|}{x} \geqslant \frac{\sin^2 x}{x}$$

следует (см. п. 3), что если $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ расходится, то расходится и $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$. Но расходимость $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ доказана в примере 14 ($\alpha = 1$). Таким образом, данный интеграл сходится, но не абсолютно. Условная сходимость доказана.

6. Достаточные признаки сходимости интегралов. *Признак Дирихле.* Интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx$$

сходится, если:

а) функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a; +\infty)$;

б) функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a; +\infty)$, причем

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0.$$

Признак Абеля. Интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx$$

сходится, если выполнены следующие условия:

а) функция $f(x)$ непрерывна на $[a; +\infty)$ и $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится;

б) функция $g(x)$ ограничена, непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a; +\infty)$.

Пример 16. Исследовать $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$ на абсолютную и условную сходимость при всех значениях параметра α.

△ 1) Пусть $\alpha > 1$, тогда справедливо неравенство

$$\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \leqslant \frac{1}{x^\alpha},$$

из которого следует абсолютная сходимость исследуемого интеграла.

2) Пусть $0 < \alpha \leqslant 1$. Воспользуемся признаком Дирихле, положив $f(x) = \sin x$ и $g(x) = 1/x^\alpha$. Условие а) признака Дирихле выполнено, так как $\sin x$ — непрерывная функция и ее первообразная $(-\cos x)$, очевидно, ограничена. Условие б) также выполняется, так как

$$g'(x) = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} < 0,$$

поэтому $g(x)$ убывает и

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0.$$

Следовательно, интеграл сходится.

Абсолютно интеграл не сходится, что вытекает из неравенства

$$\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \geqslant \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}$$

и из расходимости $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\, dx$, установленной в примере 14.

3) Пусть $\alpha \leqslant 0$. Докажем с помощью критерия Коши, что в этом случае интеграл расходится. Для любого числа $b > 1$ выберем натуральное число n так, чтобы выполнялось неравенство $2\pi n > b$, и положим

$$b_1 = 2\pi n + \pi/6 \quad \text{и} \quad b_2 = 2\pi n + 5\pi/6.$$

Тогда

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx\right| = \int_{2\pi n+\pi/6}^{2\pi n+5\pi/6} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \geqslant \int_{2\pi n+\pi/6}^{2\pi n+5\pi/6} \sin x\,dx \geqslant \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} dx = \frac{\pi}{3}.$$

Следовательно, существует число $\varepsilon=\pi/3$, такое, что для любого числа $b>1$ существуют числа $b_1=2\pi n+\pi/6>b$ и $b_2=2\pi n+5\pi/6>b$, для которых

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx\right| \geqslant \varepsilon.$$

Поэтому при $\alpha\leqslant 0$ интеграл расходится.

Итак, данный интеграл при $\alpha>1$ сходится абсолютно, при $0<\alpha\leqslant 1$ сходится условно, при $\alpha\leqslant 0$ расходится. ▲

Пример 17. Доказать, что при $\alpha>0$ интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\operatorname{arctg} x\,dx$$

сходится.

△ Воспользуемся признаком Абеля. Положим $f(x)=(\sin x)/x^\alpha$ и $g(x)=\operatorname{arctg} x$. Условие а) признака Абеля выполнено, так как $(\sin x)/x^\alpha$ — непрерывная функция на $[1;+\infty)$ и при $\alpha>0$, как показано в предыдущем примере, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ сходится. Условие б) также выполнено, так как $g'(x)=1/(1+x^2)>0$ (поэтому $g(x)$ монотонна) и $|g(x)|=|\operatorname{arctg} x|<\pi/2$. ▲

7. Метод выделения главной части. Этот метод основан на следующем утверждении: если подынтегральная функция $f(x)$ представима в виде $f(x)=g(x)+R(x)$, где $R(x)$ — функция абсолютно интегрируемая, то функции $f(x)$ и $g(x)$ одновременно либо абсолютно интегрируемы, либо условно интегрируемы, либо неинтегрируемы.

Обычно представление функции $f(x)$ в указанном виде удается получить, выделяя ее главную часть при $x\to+\infty$.

Пример 18. Исследовать интеграл $\int_1^{+\infty}\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)dx$ на абсолютную и условную сходимость.

△ Подынтегральная функция представима в виде

$$\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+R(x),$$

причем при $x>1$ справедливо неравенство $|R(x)|\leqslant 1/(3!\,x\sqrt{x})$. Следовательно, $\int_1^{+\infty}R(x)\,dx$ сходится абсолютно. В примере 16

($\alpha=1/2$) была установлена условная сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$. Поэтому и данный интеграл сходится условно. ▲

Пример 19. Исследовать интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x}-\sin x}$$

на абсолютную и условную сходимость.

△ Представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x}=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\frac{1}{1-\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+R_1(x)\right)=$$

$$=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+\frac{\sin^2 x}{x}+R(x).$$

Так как $|R(x)|\leqslant 1/(x\sqrt{x})$, то $R(x)$ — абсолютно интегрируемая функция. Характер сходимости данного интеграла определяется характером сходимости интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+\frac{\sin^2 x}{x}\right)dx.$$

Последний интеграл, очевидно, расходится, так как $(\sin x)/\sqrt{x}$ — интегрируемая функция (пример 16, $\alpha=1/2$), а $(\sin^2 x)/x$ — неинтегрируемая (пример 14, $\alpha=1$). Итак, данный интеграл расходится. ▲

Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы (**12.113—12.128**):

12.113. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\cos 7x\,dx}{x^2+2x+2}$.

12.114. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-1)\sin 2x}{x^2-4x+5}\,dx$.

12.115. $\int\limits_0^{+\infty}\sin x^2\,dx$.

12.116. $\int\limits_0^{+\infty}x\cos x^4\,dx$.

12.117. $\int\limits_0^{+\infty}\sin^3(x^2+2x)\,dx$.

12.118. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$.

12.119. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{sign}\sin\ln x}{x}\,dx$.

12.120. $\int\limits_1^{+\infty}\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

12.121. $\int\limits_0^{+\infty}x^2\sin\left(\frac{\cos x^3}{x+1}\right)dx$.

12.122. $\int\limits_1^{+\infty}(1-e^{(\sin x)/x})\sqrt{x}\,dx$.

12.123. $\int\limits_0^{+\infty} \left(1 - e^{(\sin x^4)/(x^2+1)}\right) x^2\, dx.$

12.124. $\int\limits_1^{+\infty} \left(1 - e^{x^{-2/3}\sin x}\right) dx.$

12.125. $\int\limits_1^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx.$

12.126. $\int\limits_2^{+\infty} \sqrt{x}\, \ln\left(1 - \frac{\sin x^2}{x-1}\right) dx.$

12.127. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{\cos x} \sin \sin x}{x}\, dx.$ **12.128.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \sin \sin x}{x}\, dx.$

Исследовать на абсолютную и условную сходимость при всех значениях параметра α следующие интегралы (12.129—12.148):

12.129. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^\alpha \sin x}{x^3+1}\, dx.$ **12.130.** $\int\limits_2^{+\infty} \frac{(x+1)^\alpha \sin x}{\ln x}\, dx.$

12.131. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{x^\alpha + \ln x}.$ **12.132.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{(\ln(x+1) - \ln x)^\alpha}\, dx.$

12.133. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin x}{\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}\right)^\alpha}\, dx.$

12.134. $\int\limits_2^{+\infty} (x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x))^\alpha \sin x\, dx.$

12.135. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{(2x - \cos \ln x)^\alpha}.$ **12.136.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos(1+2x)}{(\sqrt{x} - \ln x)^\alpha}\, dx.$

12.137. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+x}{x^\alpha} \sin x^3\, dx.$ **12.138.** $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{x}}{x^\alpha \ln x}\, dx.$

12.139. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2 \cos x^3}{(3x - \operatorname{arctg} x)^\alpha}\, dx.$ **12.140.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^\alpha}\, dx.$

12.141. $\int\limits_1^{+\infty} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x^\alpha}.$ **12.142.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin \ln x}{x^\alpha} \sin x\, dx.$

12.143. $\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha \sin\frac{1}{x}\cos x\,dx.$ **12.144.** $\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha \sin\sin x\,dx.$

12.145. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\sin(1/x)}{x^\alpha}\,dx.$ **12.146.** $\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha \operatorname{tg}\sin\frac{1}{x}\,dx.$

12.147. $\int\limits_\pi^{+\infty} \frac{\alpha-|\cos x|}{\pi+x}\,dx.$ **12.148.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x-[x]-\alpha}{x}\,dx.$

Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы (**12.149—12.150**):

12.149. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \sin x}{1+x^\beta}\,dx, \quad \beta\geqslant 0.$

12.150. $\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha \sin x^\beta\,dx.$

Доказать равенства (**12.151—12.154**), предполагая, что интегралы в левой части равенств сходятся:

12.151. $\int\limits_0^{+\infty} f\left(\alpha x+\frac{\beta}{x}\right)dx=\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{+\infty} f\left(\sqrt{x^2+4\alpha\beta}\right)dx,$

$\alpha>0,\ \beta>0.$

12.152. $\int\limits_0^{+\infty} f(x^2)\,dx=\alpha\int\limits_0^{+\infty} f\left(\alpha^2x^2-2\alpha\beta+\frac{\beta^2}{x^2}\right)dx,$

$\alpha>0,\ \beta>0.$

12.153. $\int\limits_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{\alpha}{x}\right)\frac{\ln x}{x}\,dx=\ln\alpha\int\limits_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{\alpha}{x}\right)\frac{dx}{x}, \quad \alpha>0.$

12.154. $\int\limits_0^{+\infty} f\left(x^\alpha+\frac{1}{x^\alpha}\right)\frac{\ln x}{x}\,dx=0, \quad \alpha\neq 0.$

12.155. Доказать равенство

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})\,dx=\frac{\alpha^n n!}{(\alpha+1)^{n+1}}, \quad \alpha>0,\ n\in\mathbb{N}.$$

12.156. Доказать рекуррентную формулу

$$J_n=\frac{n(n-1)}{n^2+\alpha^2}J_{n-2}, \quad n>1,$$

для интеграла

$$J_n = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin^n x \, dx, \qquad \alpha > 0.$$

12.157. Доказать *формулу Фруллани*:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} \, dx = (f(0) - f(+\infty)) \ln \frac{\beta}{\alpha},$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $f(x)$, $x \in [0, +\infty)$, — непрерывная функция, такая, что $f(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ существует.

Вычислить интегралы (**12.158—12.161**):

12.158. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \, dx, \qquad \alpha > 0, \ \beta > 0.$

12.159. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x - \operatorname{arctg} \beta x}{x} \, dx, \qquad \alpha > 0, \ \beta > 0.$

12.160. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln \frac{\alpha + \beta e^{-x}}{\alpha + \beta e^{-2x}} \frac{dx}{x}, \qquad \alpha > 0, \ \beta > 0.$

12.161. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} \right) \frac{dx}{x^2}.$

12.162. Доказать *формулу Фруллани*:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} \, dx = f(0) \ln \frac{\beta}{\alpha},$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $f(x)$, $x \in [0, +\infty)$, — непрерывная функция такая, что $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x} \, dx$ существует при любом $a > 0$.

Вычислить интегралы (**12.163—12.166**):

12.163. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x - \sin \beta x}{x} \, dx, \qquad \alpha > 0, \ \beta > 0$

12.164. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x} \, dx, \qquad \alpha > 0, \ \beta > 0.$

12.165. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\beta \sin \alpha x - \alpha \sin \beta x}{x^2}\, dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

12.166. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x} \cos \beta x\, dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha \neq \beta.$

12.167. Доказать, что если монотонная функция $f(x)$, $x \in [0; +\infty)$, интегрируема на $[0; +\infty)$, то

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{h \to +0} h \sum_{k=1}^{\infty} f(kh).$$

12.168. Пусть $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится. Следует ли из этого, что $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$?

12.169. Пусть $f(x)$, $x \in [0; +\infty)$, — дифференцируемая функция и $|f'(x)| < 2$. Доказать, что если $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится, то $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

12.170. Доказать, что если функция $f(x)$, $x \in [1; +\infty)$, монотонна и $\int\limits_1^{+\infty} x^{\alpha} f(x)\, dx$ сходится, то $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha+1} f(x) = 0$.

12.171. Пусть $f(x)$, $x \in [0; +\infty)$, — непрерывная неотрицательная функция и пусть $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится. Следует ли отсюда, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$?

12.172. Привести пример непрерывной положительной функции $f(x)$, $x \in [0; +\infty)$, для которой $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \neq 0$.

12.173. Привести пример непрерывной и неограниченной на любом промежутке $[a; +\infty)$, $a > 0$, функции $f(x)$, для которой $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится.

12.174. Привести пример непрерывной неотрицательной и неограниченной на любом промежутке $[a; +\infty)$, $a > 0$, функции $f(x)$, для которой $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится.

12.175. Следует ли из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и из ограниченности функции $\varphi(x)$, $x \in [a; +\infty)$, сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$?

12.176. Сходится ли интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x} - \sin x}$? Можно ли исследовать этот интеграл с помощью признака Дирихле, положив $f(x) = \sin x$ и $g(x) = 1/(\sqrt{x} - \sin x)$?

12.177. Пусть $f(x)$, $x \in [a; +\infty)$, — непрерывная, а $g(x)$, $x \in [a; +\infty)$, — непрерывно дифференцируемая функция. Пусть $F(x)$, $x \in [a; +\infty)$, — первообразная для $f(x)$ и $\int\limits_a^{+\infty} |g'(x)|\,dx$ сходится. Доказать, что для сходимости интеграла

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$$

необходимо и достаточно существование $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)\,g(x)$.

12.178. Пусть $f(x)$, $x \in [a; +\infty)$, — непрерывная периодическая с периодом T функция, а $g(x)$, $x \in [a; +\infty)$, — непрерывно дифференцируемая монотонная функция и $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$. Доказать, что если $\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = 0$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$ сходится.

12.179. Пусть $f(x)$, $x \in [1; +\infty)$, — непрерывная периодическая с периодом T функция. При каких значениях α сходится интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} (f(x^2) + \alpha)\,dx?$$

12.180. Пусть интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится и равен J. Доказать, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx = J.$$

12.181. Доказать, что при $\alpha > 1$ верно неравенство

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + \alpha^2}} < 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

12.182. Пусть $f(x)$, $x \in [0; +\infty)$, — непрерывная положительная функция и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$ сходится. Доказать, что

$$\lim_{a \to +\infty} \frac{1}{a^2} \int\limits_0^a f(x)\,dx = +\infty.$$

Доказать, что при $x \to +\infty$ верны асимптотические равенства (12.183—12.191):

12.183. $\int\limits_x^{+\infty} \frac{dt}{te^t} \sim \frac{1}{xe^x}$. **12.184.** $\int\limits_x^{+\infty} \cos t^2\,dt \sim -\frac{\sin x^2}{2x}$.

12.185. $\int\limits_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \sqrt[3]{\alpha + \ln t}} \sim \frac{1}{x \sqrt[3]{\alpha + \ln x}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

12.186. $\int\limits_x^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t} \sim \frac{1}{(\alpha - 1)\, x^{\alpha - 1} \ln^\beta x}$, $\alpha > 1$, $\beta \in \mathbb{R}$.

12.187. $\int\limits_x^{+\infty} \frac{t^\alpha\,dt}{e^{t^2 + 2\beta t}} \sim \frac{x^{\alpha - 1}}{2e^{x^2 + 2\beta x}}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

12.188. $\int\limits_x^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt = -\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$.

12.189. $\int\limits_x^{+\infty} \sin t^2\,dt = \frac{\cos x^2}{2x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

12.190. $\int\limits_x^{+\infty} \cos t^\alpha\,dt = -\frac{\sin x^\alpha}{\alpha x^{\alpha - 1}} + O\left(\frac{1}{x^{2\alpha - 1}}\right)$, $\alpha > 1$.

12.191. $\int\limits_x^{+\infty} \frac{dt}{te^t} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} + O\left(\frac{1}{e^x x^{n+1}}\right)$.

---

8. Интеграл в смысле главного значения (в смысле Коши). *Интегралом в смысле главного значения функции* $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, называется

$$\lim_{a \to +\infty} \int\limits_{-a}^{+a} f(x)\,dx.$$

Этот предел обозначается V. P. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Таким образом, по определению

$$\text{V. P.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int\limits_{-a}^{+a} f(x)\,dx.$$

Если существует несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, то существует и интеграл в смысле главного значения и оба интеграла равны. Из существования интеграла в смысле главного значения не следует существование соответствующего несобственного интеграла. В самом деле,

$$\text{V. P.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int\limits_{-a}^{+a} x\,dx = \lim_{a\to+\infty} \frac{x^2}{2}\Big|_{-a}^{+a} = 0,$$

а $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$, очевидно, не существует.

Найти интегралы в смысле главного значения (**12.192—12.199**):

12.192. V. P. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx$. **12.193.** V. P. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos x\,dx$.

12.194. V. P. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x\,dx$.

12.195. V. P. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\operatorname{arcctg} x + \frac{1}{1+x^2} - \frac{\pi}{2}\right) dx$.

12.196. V. P. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{13+x}{17+x^2}\,dx$. **12.197.** V. P. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

12.198. V. P. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2}$. **12.199.** V. P. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

12.200. Доказать равенство

$$\text{V. P.} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{x^2-a^2}\,dx = \cos \alpha a \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx, \qquad \alpha,\ a \in \mathbb{R}.$$

ГЛАВА IV
ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 13. Свойства сходящихся рядов

1. Сходящийся ряд и его сумма. Пусть дана числовая последовательность $\{a_n\}$. Выражение

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

или, что то же самое

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

называют *числовым рядом*, а числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — *членами ряда*. Сумму n первых членов ряда называют *n-й частичной суммой ряда* и обозначают S_n, т. е.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называют *сходящимся*, а число S — его *суммой*, и пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Если последовательность $\{S_n\}$ не имеет конечного предела, то говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится*.

Ряд $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$, полученный из ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ отбрасыванием первых его m членов, называют *m-м остатком ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 1. Пусть $|q| < 1$. Доказать, что ряды

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}, \quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} nq^n$$

сходятся, и найти их суммы

△ 1) Используя формулу для суммы n первых членов геометрической прогрессии, получаем

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q},$$

откуда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q},$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$. Итак,

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}, \qquad |q| < 1.$$

2) Так как $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} kq^k$, то

$$S_n - S_n q = (q + 2q^2 + \ldots + nq^n) - \\ -(q^2 + 2q^3 + \ldots + (n-1)q^n + nq^{n+1}) = \\ = q + q^2 + \ldots + q^n - nq^{n+1},$$

откуда

$$S_n(1-q) = \frac{q-q^{n+1}}{1-q} - nq^{n+1},$$

$$S_n = \frac{q}{(1-q)^2} - \frac{q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q}.$$

Если $|q| < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} nq^{n+1} = 0$$

и поэтому существует

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{(1-q)^2},$$

т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}, \qquad |q| < 1. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Доказать, что если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ представимы в виде

$$a_n = b_{n+1} - b_n$$

и если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b,$$

то ряд сходится и его сумма равна $b - b_1$, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n) = b - b_1. \tag{1}$$

△ Здесь

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) =$$

$$= (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \ldots + (b_n - b_{n-1}) + (b_{n+1} - b_n),$$

т. е.

$$S_n = b_{n+1} - b_1.$$

Так как $\lim\limits_{n \to \infty} b_{n+1} = b$, то отсюда получаем

$$\lim_{n \to \infty} S_n = b - b_1,$$

т. е. справедлива формула (1). ▲

Пример 3. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, и найти его сумму, если:

1) $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. 2) $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

3) $a_n = \dfrac{1}{n(n+m)}$, $m \in \mathbb{N}$.

△ 1) Воспользуемся равенством

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Обозначим $b_n = -1/n$, тогда $a_n = b_{n+1} - b_n$, $n \in \mathbb{N}$, причем $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b = 0$. По формуле (1) находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

2) Так как

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} =$$

$$= \frac{(n+3) - n}{3n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3n(n+1)(n+2)} -$$

$$- \frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)},$$

то, полагая

$$b_n = -\frac{1}{3n(n+1)(n+2)},$$

получаем $a_n = b_{n+1} - b_n$, причем $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$. По формуле (1) находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = -b_1 = \frac{1}{18}.$$

3) Используя равенство $\frac{1}{k(k+m)}=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+m}\right)$, получаем

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+m)}=\frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+m}\right)=$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}-\frac{1}{m}\sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{1}{k},$$

откуда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k},$$

т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}\right). \ ▲$$

2. **Необходимый признак сходимости ряда.** Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

Отсюда следует, что если $\lim_{n\to\infty}a_n$ не существует или существует, но отличен от нуля, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится.

Пример 4. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится, если:

1) $a_n=(-1)^n\frac{n+1}{n+3}$. 2) $a_n=\left(\frac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

3) $a_n=\sin n\alpha$, где $\alpha\neq\pi m\ (m\in\mathbb{Z})$.

△ 1) Последовательность $\{a_n\}$ не имеет предела, так как $\lim_{k\to\infty}a_{2k}=1$, а $\lim_{k\to\infty}a_{2k+1}=-1$. Поэтому ряд расходится.

2) $a_n=\frac{(1-3/2n^2)^{n^2}}{(1+1/2n^2)^{n^2}}$, откуда $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{e^{-3/2}}{e^{1/2}}=e^{-2}\neq0$

и поэтому ряд расходится.

3) Предположим, что ряд сходится. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\sin n\alpha=0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\sin(n+1)\alpha=0,$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty}(\sin n\alpha\cos\alpha+\cos n\alpha\sin\alpha)=0,$$

откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n\alpha = 0$, так как $\sin\alpha \neq 0$ (по условию $\alpha \neq \pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$). Итак,

$$\lim_{n\to\infty} \sin n\alpha = \lim_{n\to\infty} \cos n\alpha = 0,$$

что невозможно:

$$\sin^2 n\alpha + \cos^2 n\alpha = 1.$$

Полученное противоречие показывает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha$, где $\alpha \neq \pi m$ $(m \in \mathbb{Z})$, расходится. Заметим, что если $\alpha = \pi m$ $(m \in \mathbb{Z})$, то ряд сходится и его сумма равна нулю. ▲

Пример 5. Доказать, что для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}$$

выполняется необходимое условие сходимости, но этот ряд расходится.

△ Здесь

$$a_n = \frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Пользуясь тем, что при $k = 1, 2, \ldots, n$ справедливы неравенства

$$a_k = \frac{k+2}{(k+1)\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}},$$

получаем

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ и поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. ▲

3. Ряды с комплексными членами. Пусть задана последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$. Эта последовательность называется *сходящейся*, если существует такое комплексное число z, что

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0. \tag{2}$$

В этом случае пишут

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \text{или} \quad z_n \to z \ \text{при} \ n \to \infty.$$

Если $z_n = x_n + iy_n$, $z = x + iy$, где $x_n \in \mathbb{R}$, $y_n \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, то условие (2) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ — ряд с комплексными членами, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$ — его n-я частичная сумма. Тогда этот ряд называется *сходящимся*, если существует конечный

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Комплексное число S называют *суммой ряда* и пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S.$$

Если $z_n = x_n + iy_n$, $S = A + iB$, то равенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = S$ выполняется в том и только в том случае, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = A \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = B.$$

Пусть q — комплексное число и $|q| < 1$. Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q},$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{1-q},$$

т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}. \tag{3}$$

Пример 6. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, и найти его сумму, если:

1) $z_n = \dfrac{1}{(1+i)^n}$. 2) $z_n = a^n e^{in\varphi}$, где $0 < a < 1$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

△ 1) Так как числа

$$z_n = \frac{1}{(1+i)^n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

образуют геометрическую прогрессию со знаменателем

$$q = \frac{1}{1+i},$$

где $|q| = 1/\sqrt{2}$, то по формуле (3) находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{q}{1-q} = \frac{1}{i} = -i.$$

2) $z_n = a^n e^{in\varphi} = (ae^{i\varphi})^n$, где $|ae^{i\varphi}| = |a| = a < 1$. Применяя формулу (3) при $q = ae^{i\varphi}$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{in\varphi} = \frac{ae^{i\varphi}}{1 - ae^{i\varphi}} = \frac{a(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{1 - a\cos\varphi - ia\sin\varphi} =$$

$$= a\frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)(1 - a\cos\varphi + ia\sin\varphi)}{(1 - a\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi} =$$

$$= \frac{a}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}(\cos\varphi - a + i\sin\varphi). \ \blacktriangle$$

4. Критерий Коши сходимости ряда. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится тогда и только тогда, когда для него выполняется *условие Коши*: для каждого $\varepsilon > 0$ существует номер N_ε такой, что для любого $n \geqslant N_\varepsilon$ и для любого $p \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+p}| < \varepsilon.$$

С помощью символов $\forall$, $\exists$ условие Коши записывается в виде

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon\ \forall n \geqslant N_\varepsilon\ \forall p \in \mathbb{N}: |z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+p}| < \varepsilon. \quad (4)$$

Если условие (4) не выполняется, т. е.

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant k\ \exists p \in \mathbb{N}: |z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+p}| \geqslant \varepsilon, \quad (5)$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *расходится.*

Пример 7. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, используя критерий Коши.

△ Докажем, что для этого ряда выполняется условие Коши (4). Используя неравенства

$$z_k = \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$$

при $k > 1$ и замечая, что

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

получаем

$$0 < \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} +$$
$$+ \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Итак, для любых $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|z_{n+1} + \ldots + z_{n+p}| < 1/n.$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда из того, что $\lim\limits_{n\to\infty}(1/n) = 0$, следует существование номера N_ε такого, что для всех $n \geqslant N_\varepsilon$ и для любого $p \in \mathbb{N}$ будет выполняться неравенство (4). Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится. ▲

Пример 8. Доказать с помощью критерия Коши, что гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

△ Для любого $k \in \mathbb{N}$ возьмем $n = k$, $p = k$. Тогда

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+p}| =$$

$$= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{k+k} > \frac{1}{2k} \cdot k = \frac{1}{2},$$

т. е. условие (5) выполняется при $\varepsilon = 1/2$. Следовательно, гармонический ряд расходится. ▲

Найти n-ю частичную сумму S_n ряда и сумму S этого ряда (**13.1—13.6**):

13.1. 1) $\frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \ldots + \frac{2}{5^n} + \ldots$

2) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} + \ldots$

3) $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n}\right) + \ldots$

4) $\left(3 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{18}\right) + \ldots$

$$\ldots + \left(\frac{3}{2^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{2 \cdot 3^{n-1}}\right) + \ldots$$

5) $\left(\frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3}\right) + \left(\frac{1}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{5}{10^4}\right) + \ldots$

$$\ldots + \left(\frac{1}{10^n} + \frac{2}{10^{n+1}} + \frac{5}{10^{n+2}}\right) + \ldots$$

13.2. 1) $\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots$

2) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \ldots$

3) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \ldots$

4) $\frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} + \ldots$

5) $\frac{1}{a(a+1)(a+2)(a+3)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)} +$

$$+ \ldots + \frac{1}{(a+n)(a+n+1)(a+n+2)(a+n+3)} + \ldots$$

13.3. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2-8n-3}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25n^2+5n-6}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2-24n-5}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{49n^2+7n-12}$.

13.4. 1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+4n-3}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2-8n-15}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2+12n-35}$.

13.5. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+9}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$. 6) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

13.6. 1) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$. 2) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$.

3) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\frac{n^3-1}{n^3+1}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{2^n}\cos\frac{3}{2^n}$. 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\alpha}{2^{n+1}}\sin\frac{3\alpha}{2^{n+1}}$.

7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n+2)}$. 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$.

13.7. Доказать, что если

$$a_k = \frac{1}{u_k u_{k+1} \ldots u_{k+m}},$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — последовательные члены арифметической прогрессии с разностью d, причем $d \neq 0$, $u_k \neq 0$ $(k \in \mathbb{N})$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n u_{n+1} \ldots u_{n+m}} = \frac{1}{m d u_1 u_2 \ldots u_m}.$$

Найти сумму ряда (13.8—13.10):

13.8. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+3)}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n(n+1)(n+3)}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+5)}$.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+4)}$.

13.9. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{3^n} + \frac{i}{5^n}\right)$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{4^n}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2+in}{n(n+1)(n+2)}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1-i)^n}$.

13.10. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin n\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$.

Доказать расходимость ряда, используя необходимое условие сходимости (13.11—13.12):

13.11. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+3n+4}{2n^2+1}$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3n+4}{5n+1}}$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt[3]{n^3+2n+4}}$.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,02}$. 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$. 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^3-2}{3n^3+4}\right)^{n^3}$.

13.12. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\ln^2(n+1)}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2+2) \ln \frac{n^2+1}{n^2}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \operatorname{arctg} \frac{1}{n+2}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n+3} \arcsin \frac{1}{n^2+2}$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}$. 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1/n}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

13.13. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

1) $a_n = \frac{\cos nx}{2^n}$. 2) $a_n = \frac{\sin n\alpha}{n(n+1)}$.

3) $a_n = \frac{\cos \alpha^n}{n^2}$. 4) $a_n = \frac{\cos nx - \cos (n+1)x}{n}$.

13.14. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

1) $a_n = \frac{1}{2n+1}$. 2) $a_n = \frac{n+1}{n^2+4}$.

3) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. 4) $a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

13.15. Доказать, что если ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} w_n$$

сходятся и их суммы соответственно равны s и σ, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n$, где $\zeta_n = \lambda z_n + \mu w_n$, сходится при любых комплексных λ, μ и его сумма равна $\lambda s + \mu\sigma$.

13.16. Доказать, что:

1) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, то при любом m сходится его m-й остаток.

2) Если какой-либо остаток ряда сходится, то сходится и сам ряд.

При этом справедливо равенство $S = S_m + r_m$, где S и S_m — соответственно сумма и m-я частичная сумма исходного ряда, r_m — сумма его m-го остатка.

13.17. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится и его сумма равна S, то сходится и ряд $\sum_{j=1}^{\infty} w_j$, где

$$w_1 = z_1 + z_2 + \ldots + z_{k_1},\ w_2 = z_{k_1+1} + z_{k_1+2} + \ldots + z_{k_2}, \ldots$$
$$\ldots, w_j = z_{k_{j-1}+1} + z_{k_{j-1}+2} + \ldots + z_{k_j}$$

($\{k_j\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел) и при этом $\sum_{j=1}^{\infty} w_j = S$.

13.18. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, где $a_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$.

13.19. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, где $c_n = a_n + b_n$ $(n \in \mathbb{N})$, если известно, что:

1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

2) Оба эти ряда расходятся.

13.20. Доказать, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$, где $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, сходятся, то сходятся и ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$.

§ 14. Ряды с неотрицательными членами

1. Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами $(a_n \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N})$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху, т. е. существует число $M > 0$ такое, что для каждого $n \in N$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant M.$$

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n(n+1)}$.

△ Так как

$$\frac{\cos^2 k}{k(k+1)} \leqslant \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

то

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos^2 k}{k(k+1)} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1,$$

поэтому ряд сходится. ▲

2. Признак сравнения. Если существует номер n_0 такой, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняются неравенства

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n,$$

то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

1) $a_n = \dfrac{5+3(-1)^n}{2^{n+3}}$. 2) $a_n = \dfrac{n+1}{n^2}$.

△ 1) Так как при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства $2 \leqslant 5+3(-1)^n \leqslant 8$, то $0 < a_n \leqslant 1/2^n$ и из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5+3(-1)^n}{2^{n+3}}$.

2) Так как $a_n > 1/n$, то из расходимости гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n^2}$. ▲

Если $a_n \geqslant 0$, $b_n > 0$ для всех $n \geqslant n_0$ и существует конечный и отличный от нуля

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n},$$

то ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

сходятся или расходятся одновременно.

В частности, если

$$a_n \sim b_n \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

1) $a_n = \dfrac{e^n + n^4}{3^n + \ln^2(n+1)}$. 2) $a_n = \dfrac{2n^2+5n+1}{\sqrt{n^6+3n^2+2}}$.

△ 1) Из асимптотических формул

$$e^n + n^4 \sim e^n,\ 3^n + \ln^2(n+1) \sim 3^n \text{ при } n \to \infty$$

следует, что $a_n \sim (e/3)^n$, где $e/3 < 1$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) Так как

$$2n^2 + 5n + 1 \sim 2n^2, \qquad \sqrt{n^6 + 3n^2 + 2} \sim n^3;$$

то $a_n \sim 2/n$ и поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. ▲

3. Интегральный признак сходимости ряда. Если функция $f(x)$ неотрицательна и убывает на промежутке $[a; +\infty)$, где $a \geqslant 1$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

и интеграл

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

1) $a_n = 1/n^\alpha$. 2) $a_n = n^2 e^{-n^3}$. 3) $a_n = \dfrac{1}{n \ln^\beta n}$, $n \geqslant 2$.

△ 1) При $\alpha > 0$ функция $f(x) = 1/x^\alpha$ неотрицательна и убывает на промежутке $[1, +\infty)$. Интеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \leqslant 1$. Поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \leqslant 1$ (*интегральный признак*).

Если $\alpha \leqslant 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ расходится, так как в этом случае

$$a_n = 1/n^\alpha \not\to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Итак, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

2) Функция $f(x)=x^2e^{-x^3}$ неотрицательна и убывает при $x \geqslant 1$. Несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} x^2e^{-x^3}\,dx$$

сходится, так как существует конечный $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, где $F(x)=-\frac{1}{3}e^{-x^3}$ — первообразная функции $x^2e^{-x^3}$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2e^{-n^3}$ сходится.

3) Рассмотрим при $x \geqslant 2$ функцию

$$f(x)=\frac{1}{x\ln^\beta x}.$$

Эта функция принимает положительные значения на промежутке $[2;+\infty)$, а ее производная равна

$$f'(x)=-\frac{\ln x+\beta}{x^2\ln^{\beta+1}x}.$$

Если $\ln x+\beta>0$, т. е. $x>e^{-\beta}$, то $f'(x)<0$. Следовательно, функция f положительна и убывает на промежутке $[a;+\infty)$, где $a=\max(2;\,e^{-\beta})$. Так как интеграл

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^\beta x}$$

сходится при $\beta>1$ и расходится при $\beta\leqslant 1$ (§ 12, пример 13), то ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^\beta n}$$

сходится при $\beta>1$ и расходится при $\beta\leqslant 1$. ▲

4. Метод выделения главной части. При исследовании сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами иногда удается получить с помощью формулы Тейлора асимптотическую формулу вида

$$a_n\sim\frac{c}{n^\alpha}\qquad(n\to\infty,\ c>0).$$

В этом случае ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leqslant 1$.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

1) $a_n = 1 - \cos\frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}}$. 2) $a_n = \left(1 - \sqrt[3]{\frac{n-1}{n+1}}\right)^{\alpha}$.

3) $a_n = \ln\frac{1+\operatorname{tg}(1/\sqrt{n})}{1+\operatorname{arctg}(1/\sqrt{n})}$.

△ 1) Так как

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \text{при} \quad t \to 0,$$

то

$$a_n = 1 - \cos\frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right),$$

откуда $a_n \sim \pi^2/(2n^{4/3})$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \cos\frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$ сходится.

2) Заметив, что

$$\frac{n-1}{n+1} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}},$$

и применив асимптотическую формулу

$$(1+t)^{\beta} = 1 + \beta t + o(t), \ t \to 0,$$

при $\beta = 1/3$ и $\beta = -1/3$, получим

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1/3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1/3} = \left(1 - \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{2}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

откуда

$$a_n \sim \left(\frac{2}{3n}\right)^{\alpha}, \quad n \to \infty.$$

Следовательно, ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

3) Используя разложения

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3),$$

$$\operatorname{tg} t = t + \frac{t^3}{3} + o(t^3),$$

$$\operatorname{arctg} t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3), \quad t \to 0,$$

находим

$$\ln(1+\operatorname{tg} t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{2}{3}t^3 + o(t^3),$$

$$\ln(1+\operatorname{arctg} t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^3), \quad t \to 0.$$

Следовательно,

$$a_n = \frac{2}{3n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

т. е. $a_n \sim \frac{2}{3n^{3/2}}$, и поэтому ряд сходится. ▲

5. Признаки Даламбера и Коши.

Признак Даламбера. Если для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

существует такое число q, $0 < q < 1$, и такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q,$$

то этот ряд сходится; если же для всех $n \geqslant n_0$ имеет место неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1,$$

то ряд расходится.

На практике удобно пользоваться признаком Даламбера в предельной форме: если существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda,$$

то при $\lambda < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $\lambda > 1$ расходится.

При $\lambda = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться. Например, для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ число λ равно 1, однако первый из этих рядов расходится, а второй сходится.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощью признака Даламбера, если:

1) $a_n = \frac{a^n}{n!}$, $\quad a > 0$. $\quad$ 2) $a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$.

△ 1) Так как $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1}$, то для любого $a > 0$ существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$$

и поэтому ряд сходится.

Замечание. Используя необходимое условие сходимости ряда, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

2) Так как $a_{n+1}=\frac{n!\,3^{n+1}}{(n+1)^n}$, то

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},$$

откуда получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{e}>1,$$

и поэтому ряд расходится. ▲

Признак Коши. Если для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\qquad a_n\geqslant 0\qquad (n\in\mathbb{N})$$

существует такое число q, $0\leqslant q<1$, и такой номер n_0, что для всех $n\geqslant n_0$ выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{a_n}\leqslant q,$$

то этот ряд сходится; если же для всех $n\geqslant n_0$ имеет место неравенство

$$\sqrt[n]{a_n}\geqslant 1,$$

то ряд расходится.

На практике обычно применяют признак Коши в предельной форме: если существует

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lambda,$$

то при $\lambda<1$ ряд сходится, а при $\lambda>1$ расходится.

При $\lambda=1$ ряд может как сходиться, так и расходиться.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ с помощью признака Коши, если:

1) $a_n=n^5\left(\frac{3n+2}{4n+3}\right)^n$. 2) $a_n=\left(\frac{3n}{n+5}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$.

3) $a_n=\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$.

△ 1) Так как

$$\sqrt[n]{a_n}=n^{5/n}\frac{3n+2}{4n+3}\quad\text{и}\quad\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{3}{4}$$

и поэтому ряд сходится.

2) В этом случае

$$\sqrt[n]{a_n}=\frac{3n}{n+5}\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}\right)^n, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{3}{e}>1$$

и поэтому ряд расходится.

3) Используя *асимптотическую формулу Стирлинга*

$$n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n} \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$

получаем

$$\sqrt[n]{a_n}\sim e^{-1}(2\pi)^{\frac{1}{2n}}\,n^{\frac{1}{2n}-\frac{1}{\sqrt{n}}}\,n\sim\frac{n}{e}, \qquad n\to\infty,$$

откуда следует, что ряд расходится. ▲

6. Признаки Раабе и Гаусса.

Признак Раабе. Если $a_n>0$ $(n\in\mathbb{N})$ и существует

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=q,$$

то при $q>1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, а при $q<1$ расходится.

Пример 8. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ с помощью признака Раабе, если

$$a_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

△ Так как

$$a_{n+1}=\frac{(2n+1)!!}{(2(n+1))!!}=\frac{(2n-1)!!\,(2n+1)}{(2n)!!\,(2n+2)}=a_n\cdot\frac{2n+1}{2n+2},$$

то

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2n+2}{2n+1}-1\right)=\frac{1}{2}$$

и поэтому ряд расходится. ▲

Признак Гаусса. Если $a_n>0$ $(n\in\mathbb{N})$ и

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\alpha+\frac{\beta}{n}+\frac{\gamma_n}{n^{1+\delta}},$$

где $|\gamma_n|<c$, $\delta>0$, то:

а) при $\alpha>1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, а при $\alpha<1$ расходится;

б) при $\alpha=1$ этот ряд сходится в случае, когда $\beta>1$, и расходится в случае, когда $\beta\leqslant1$.

Пример 9. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощью признака Гаусса, если

$$a_n = (2 - \sqrt{a})(2 - \sqrt[3]{a}) \ldots (2 - \sqrt[n]{a}), \quad a > 0.$$

△ Заметим, что $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{2 - \sqrt[n+1]{a}}$, где

$$\sqrt[n+1]{a} = e^{(\ln a)/(n+1)} = 1 + \frac{\ln a}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{\ln^2 a}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= 1 + \frac{\ln a}{n} + \frac{\gamma_n}{n^2}, \quad \text{где} \quad |\gamma_n| < c.$$

Следовательно,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{1 - \dfrac{\ln a}{n} - \dfrac{\gamma_n}{n^2}} = 1 + \frac{\ln a}{n} + \frac{\tilde{\gamma}_n}{n^2},$$

где $|\tilde{\gamma}_n| < M$. Если $\ln a > 1$, т. е. $a > e$, то ряд сходится. Если же $a \leqslant e$, то ряд расходится. ▲

14.1. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, установив ограниченность сверху последовательности его частичных сумм:

1) $a_n = \dfrac{\sin^4 2n}{(n+1)(n+2)}$. 2) $a_n = \dfrac{\pi - \operatorname{arctg} n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

3) $a_n = \left(1 + \dfrac{\ln n}{n}\right) q^n$, $0 < q < 1$. 4) $a_n = \dfrac{n2^n + 5}{n3^n + 4}$.

Используя признак сравнения, исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (**14.2 — 14.3**):

14.2. 1) $a_n = \dfrac{5 + 3(-1)^{n+1}}{2^n}$. 2) $a_n = \dfrac{\operatorname{arctg} n}{n^2 + 1}$.

3) $a_n = \dfrac{\sin^2 3n}{n\sqrt{n}}$. 4) $a_n = \dfrac{\cos(\pi/4n)}{\sqrt[5]{2n^5 - 1}}$.

5) $a_n = \sin \dfrac{3 + (-1)^n}{n^2}$. 6) $a_n = \dfrac{\ln n + \sin n}{n^2 + 2\ln n}$.

7) $a_n = \dfrac{n+2}{n^2(4 + 3\sin(\pi n/3))}$.

8) $a_n = \dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{3 + (-1)^n \operatorname{arctg} 2n}{n}\right)}{\ln^2 n}$, $n \geqslant 2$.

14.3. 1) $a_n = \dfrac{\arcsin \dfrac{n-1}{n+1}}{n\sqrt{\ln(n+1)}}$. 2) $a_n = \dfrac{\operatorname{arctg}(n^2 + 2n)}{3^n + n^2}$.

3) $a_n = \dfrac{\cos^4\left(\dfrac{2n}{n+1}\right)}{\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+1}}$. 4) $a_n = \dfrac{n^5(\sqrt{2}+\sin\sqrt{n})}{2^n+n}$.

5) $a_n = \dfrac{\ln(1+\ln n)}{\sqrt[4]{n^4+3n^2+1}\,\ln^3(n+2)}$. 6) $a_n = n^2 e^{-n}$.

7) $a_n = (3n+n^3)\,e^{-\sqrt{n}}\ln n$.

8) $a_n = \dfrac{\left(3-2\cos^2\dfrac{\pi n}{3}\right)e^n}{n^2 2^n}$.

Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, получив асимптотическую формулу вида $a_n \sim \dfrac{c}{n^\alpha}$ при $n\to\infty$ (**14.4—14.6**):

14.4. 1) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}$. 2) $a_n = 1-\cos\dfrac{2\pi}{n}$.

3) $a_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right)$. 4) $a_n = \dfrac{3n+1}{(2n+1)^2}$.

5) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. 6) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\arcsin\dfrac{1}{\sqrt[5]{n^4}}$.

7) $a_n = (e^{1/n}-1)\sin\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. 8) $a_n = \dfrac{n^3+3n^2+5}{n\sqrt[5]{n^{16}+n^4+1}}$.

14.5. 1) $a_n = \sin\dfrac{2n+1}{n^3+5n+3}$. 2) $a_n = n\operatorname{tg}\dfrac{n+2}{n^2+3}$.

3) $a_n = e^{(\sqrt[3]{n}+2)/(n^2+3)}-1$. 4) $a_n = \dfrac{\ln(1+\sin(1/n))}{n+\ln^2 n}$.

5) $a_n = \ln\dfrac{n+3}{n^2+4}$. 6) $a_n = \ln\dfrac{n^2+4}{n^2+3}$.

7) $a_n = \sqrt{n}\,(\operatorname{ch}(\pi/n)-1)$. 8) $a_n = \arcsin\dfrac{(\sqrt{n}+1)^3}{n^3+3n+2}$.

14.6. 1) $a_n = \ln\dfrac{1}{\cos\dfrac{2\pi}{n}}$.

2) $a_n = \sqrt{\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}\ln\dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$, $n\geqslant 2$.

3) $a_n = \sqrt{\dfrac{n-1}{n^2+1}}\operatorname{arctg}\dfrac{n+1}{\sqrt[3]{n^4+4}}$.

4) $a_n = n\ln\dfrac{2n+1}{2n-1}-1$. 5) $a_n = \left(1-\dfrac{\ln n}{n}\right)^{2n}$.

6) $a_n = \log_{2^n}\left(1+\dfrac{\sqrt[n]{3}}{n}\right)$. 7) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}}$.

8) $a_n = \sqrt{n+1}\,\ln\operatorname{ch}(1/n)$.

Найти все значения α, при которых сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **(14.7 — 14.13)**:

14.7. 1) $a_n=(1-n\sin(1/n))^\alpha$. 2) $a_n=(\operatorname{sh}(1/n)-\sin(1/n))^\alpha$.

3) $a_n=(n\operatorname{sh}(1/n)-\operatorname{ch}(1/n))^\alpha$. 4) $a_n=(-\cos(1/n)+\operatorname{ch}(1/n))^\alpha$.

5) $a_n=\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha$.

6) $a_n=(e^{\operatorname{tg}(1/n)}-1)^\alpha$. 7) $a_n=\left(e^{\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n}\right)^\alpha$.

8) $a_n=\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{n^2-n}}{n}\right)^\alpha$.

14.8. 1) $a_n=n\sin^\alpha\left(\frac{1}{n}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)$.

2) $a_n=\left(e^{-1/2n^2}-\cos\frac{1}{n}\right)^\alpha$.

3) $a_n=\left(\ln\operatorname{sh}\frac{1}{n}-\ln\frac{1}{n}\right)^\alpha$.

4) $a_n=\left|\ln n+\ln\sin\frac{1}{n}\right|^\alpha$.

5) $a_n=(e^{1-\cos(1/n)}-1)^\alpha\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$.

6) $a_n=\left|\ln\frac{n+1}{n-1}-\frac{2}{n-1}\right|^\alpha$, $n\geqslant 2$.

7) $a_n=\dfrac{\ln^\alpha(1+\sqrt{\operatorname{arctg}(1/n)})}{\sin(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$.

8) $a_n=(n+1)\left(e^{\operatorname{tg}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}-1\right)^\alpha$.

9) $a_n=\left(n\sin\frac{1}{n}-\cos\frac{1}{n\sqrt{3}}\right)^\alpha$.

10) $a_n=n^\alpha(\ln(n^2+1)-2\ln n)$.

11) $a_n=\dfrac{\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-1}}{n^\alpha}$.

12) $a_n=\left(\cos\cos\frac{1}{n}-\cos\operatorname{ch}\frac{1}{n}\right)^\alpha$.

14.9. 1) $a_n=\left(e^{1/2n}-\left(1+\operatorname{sh}\frac{1}{n}\right)^{1/2}\right)^\alpha$.

2) $a_n=\left(\frac{1}{n\sin(1/n)}-\cos\frac{1}{n}\right)^\alpha$.

3) $a_n=\left|\ln\operatorname{arctg}\frac{1}{n}-\ln\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right|^\alpha$.

4) $a_n=\left(1-\sin\frac{\pi n^2}{2n^2+1}\right)^\alpha$.

5) $a_n = \left(\dfrac{e^2 - \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}{n}\right)^\alpha$. 6) $a_n = \left(\left(\dfrac{\operatorname{sh}(1/n)}{\sin(1/n)}\right)^{3n} - 1\right)^\alpha$.

7) $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha \ln \dfrac{2n+1}{2n-1}$.

8) $a_n = \left(1 - \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{1/n}\right)^\alpha$.

14.10. 1) $a_n = (n^2+1)\ln^\alpha \dfrac{\operatorname{sh}(1/n)}{\sin(1/n)}$.

2) $a_n = \dfrac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^\alpha}{(1 - \cos(1/n))^2}$.

3) $a_n = \left(\sqrt[4]{n^2+n+1} - \sqrt{n+\frac{1}{2}}\right)^\alpha$.

4) $a_n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\dfrac{n+1}{n}}\right)^\alpha$.

5) $a_n = \ln^\alpha \dfrac{\operatorname{ch}(1/n)}{\cos(1/n)}$. 6) $a_n = \left(\dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}} - \sqrt{n}}{n}\right)^\alpha$.

7) $a_n = \left|\ln\cos\left(\sin\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}\right)\right|^\alpha$.

8) $a_n = \left(\dfrac{\pi}{2n+2} - \cos\dfrac{\pi n}{2n+2}\right)^\alpha$.

14.11. 1) $a_n = \alpha^{-\ln n}$, $\alpha > 0$. 2) $a_n = \left(1 + \dfrac{\ln n}{n}\right)^{\alpha n}$.

3) $a_n = n^\alpha - (e^{n\arcsin(1/n^2)} - 1)$. 4) $a_n = e^{n\operatorname{arctg}(1/n^2)} - 1 - n^\alpha$.

5) $a_n = e^{n\sin(1/n^3)} - n^\alpha$.

6) $a_n = \dfrac{1}{n} - \ln^\alpha\left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)$.

7) $a_n = \left(n\arcsin\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} - 1$. 8) $a_n = 1 - \left(n\ln\cos\frac{1}{n} + 1\right)^{n^\alpha}$.

14.12. 1) $a_n = \dfrac{n^{2n}}{(n+\alpha)^{n+2}(n+2)^{n+\alpha}}$, $\alpha > -1$.

2) $a_n = n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^\alpha}\right) + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2n^\alpha} - 1$.

3) $a_n = e^{1/(2n^\alpha)} - \left(1 + \sin^2\left(\dfrac{1}{n^{\alpha/2}}\right)\right)^{1/2}$.

4) $a_n = \left(e^{1/n} - \sin\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} - 1$.

5) $a_n = \ln\left(1 + \operatorname{tg}\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\right) - \ln\cos\dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$.

6) $a_n = \left(\dfrac{\operatorname{ch}(1/n)}{\cos(1/n)}\right)^{n^\alpha} - 1$.

7) $a_n = \ln\left(1 + \ln \operatorname{ch} \frac{1}{n^\alpha}\right) - \frac{1}{2n^{2\alpha}}, \quad \alpha > 0.$

8) $a_n = \sqrt{n + \operatorname{arctg} n^\alpha} - \sqrt{n}.$

14.13. 1) $a_n = 1 - \left(\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + e^{1/n}\right)^{n^\alpha}.$

2) $a_n = \frac{n^2}{n+1} \ln\left(\cos\frac{1}{n} + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{n}\right).$

3) $a_n = \left|\ln\left(\frac{2}{\pi}\left(\arccos\frac{1}{n} + \sin\frac{1}{n}\right)\right)\right|^\alpha.$

4) $a_n = \frac{1}{n}\left(e^{1/(n^\alpha+1)} - 1\right).$

5) $a_n = \left(\ln\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} - \frac{4}{\sqrt{n^2 + \frac{n}{2}} + \sqrt{n^2 - \frac{n}{2}}}\right)^\alpha.$

6) $a_n = \alpha^{1/n} + \alpha^{-1/n} - 2, \quad \alpha > 0.$

7) $a_n = \alpha^{1/n} - \alpha^{1/(n+1)}, \quad \alpha > 0.$

14.14. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, получив асимптотическую формулу вида $a_n \sim \frac{c}{n^\alpha \ln^\beta n}$ при $n \to \infty$:

1) $a_n = \frac{n \ln(n^2+1)}{\sqrt{n^5 + 3n + 2}}.$ 2) $a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{(2n+1)^2 \ln^2(n+1)}.$

3) $a_n = \sqrt[n]{n} - 1.$ 4) $a_n = \frac{\cos(1/n)}{n \ln^2 \operatorname{tg}(1/n)}.$

5) $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^3+2}}.$ 6) $a_n = \frac{\ln(e^n + n^2)}{n^2 \ln^2(n+1)}.$

7) $a_n = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}.$

8) $a_n = 1 + \frac{\ln\left(\frac{2}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right)}{\ln(n^2+n)}.$

14.15. Найти все значения α, при которых сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$:

1) $a_n = \frac{\ln^\alpha \operatorname{ch}(1/n)}{\ln^2(n+1)}.$ 2) $a_n = \frac{1}{n \ln^2(1+n^\alpha)}.$

3) $a_n = \frac{1}{n}\left|\ln\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)\right|^\alpha.$ 4) $a_n = \frac{(\arcsin \operatorname{tg}(1/n))^\alpha}{\ln(1+n+n^2)}.$

5) $a_n = \frac{\operatorname{arctg}\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)}{\ln^\alpha(1+n^2)}.$ 6) $a_n = \frac{\ln(n^2-n+1)}{\left(\arcsin\left(e^{1/\sqrt{n}} - 1\right)\right)^\alpha}.$

7) $a_n = \dfrac{\ln(n^2+n+2)}{(\sqrt{n^2+1}-n)^\alpha}$. 8) $a_n = \dfrac{\arcsin\dfrac{n+1}{2n} - \dfrac{\pi}{6}}{\ln^\alpha(n+1)}$.

9) $a_n = (n^{1/(n^2+1)} - 1)^\alpha$. 10) $a_n = n^{n^\alpha} - 1$.

14.16. Доказав сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n} - \ln\dfrac{n+1}{n}\right)$, получить асимптотическую формулу $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} = \ln n + \boldsymbol{C} + \alpha_n$, где $\boldsymbol{C}$ — *эйлерова постоянная* ($\boldsymbol{C} = 0{,}577215\ \ldots$), $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$.

14.17. Какому условию должны удовлетворять положительные числа a, b, c, чтобы сходился ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где

$$a_n = 2a^{1/n} - b^{1/n} - c^{1/n}?$$

Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощью признака Даламбера (**14.18—14.20**):

14.18. 1) $a_n = \dfrac{n^{10}}{(n+1)!}$. 2) $a_n = \dfrac{n^3}{3^n}$.

3) $a_n = \dfrac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}{1\cdot 6\cdot 11\ldots(5n-4)}$. 4) $a_n = \dfrac{n!a^n}{n^n}$, $a \ne e$, $a > 0$.

5) $a_n = \dfrac{1\cdot 5\ldots(4n-3)}{2\cdot 6\ldots(4n-2)}$. 6) $a_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{3^n n!}$.

7) $a_n = \dfrac{4\cdot 7\cdot 10\ldots(3n+4)}{2\cdot 6\cdot 10\ldots(4n+2)}$. 8) $a_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

14.19. 1) $a_n = \dfrac{n^n}{n!\,(2{,}7)^{n+1}}$. 2) $a_n = \dfrac{(2n+1)!}{(3n+4)\,3^n}$.

3) $a_n = \dfrac{(2n+1)!!}{1\cdot 4\ldots(3n+1)}$.

4) $a_n = \dfrac{a(a+1)\ldots(a+(n-1))}{(2n-1)!!}$, $a > 0$.

5) $a_n = \dfrac{2\cdot 5\ldots(3n+2)}{2^n(n+1)!}$. 6) $a_n = \dfrac{(2n+1)!!}{3^n n!}$.

7) $a_n = \dfrac{3\cdot 6\ldots(3n)}{(n+1)!}\arcsin\dfrac{1}{2^n}$. 8) $a_n = \dfrac{(2n)!!}{n!}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3^n}$.

14.20. 1) $a_n = \dfrac{(3n)!}{(n!)^3 4^{3n}}$. 2) $a_n = \dfrac{n!\,(2n+1)!}{(3n)!}$.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощью признака Коши (**14.21—14.22**):

14.21. 1) $a_n = \frac{1}{(\ln n)^n}$, $n \geqslant 2$. 2) $a_n = \left(\frac{3}{n}\right)^n$.

3) $a_n = \left(\frac{an}{n+2}\right)^n$, $a > 0$. 4) $a_n = 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

5) $a_n = \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n^{3/2}}$. 6) $a_n = 3^{n+1}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$.

7) $a_n = \left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}$. 8) $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2+4n+5}$.

14.22. 1) $a_n = 3^{-n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. 2) $a_n = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n(n-1)}$.

3) $a_n = \frac{n^{n+1}}{(3n^2+2n+1)^{(n+3)/2}}$. 4) $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\sqrt{n^3+3n+1}}$.

5) $a_n = \frac{n^\alpha}{(\ln(n+1))^{n/2}}$, $\alpha > 0$. 6) $a_n = \left(\frac{6n+1}{5n-3}\right)^{n/2}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n/3}$.

14.23. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощью признака Раабе или признака Гаусса:

1) $a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$. 2) $a_n = \left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{n^\beta}$.

3) $a_n = \left(\frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{(b+1)(b+2)\ldots(b+n)}\right)^\alpha$. 4) $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\alpha}}$.

5) $a_n = \frac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{2})(a+\sqrt{3})\ldots(a+\sqrt{n+1})}$, $a > 0$.

6) $a_n = \frac{(n+1)!}{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)\,n^\alpha}$, $\beta > 0$.

7) $a_n = \frac{1\cdot 4\ldots(3n-2)\cdot 2\cdot 5\ldots(3n+2)}{n!\,(n+1)!\,9^n}$.

8) $a_n = \frac{\ln 2 \ln 3 \ldots \ln(n+1)}{\ln(2+a)\ln(3+a)\ldots\ln(n+1+a)}$, $a > 0$.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (**14.24 — 14.28**):

14.24. 1) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\frac{\pi}{n}$. 2) $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

3) $a_n = \frac{n \sin^2 2n}{\sqrt{n^5+3}}$. 4) $a_n = \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{n+2}}{n \ln^2(n+1)}$.

5) $a_n = \frac{\operatorname{arctg}(3+(-1)^n 2)}{\sqrt{n}} \operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

6) $a_n = \dfrac{n^2+3}{n^3(3-2\sin(\pi n/3))}$.

7) $a_n = \dfrac{\arcsin((n+1)/2n)}{\sqrt[4]{3n^4+2}}$. 8) $a_n = e^{\sqrt{n}/(n^2+1)} - 1$.

14.25. 1) $a_n = \operatorname{tg}\dfrac{1}{n} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{n}$. 2) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+2}}{n+3}\ln\dfrac{3n-1}{3n+1}$.

3) $a_n = \left(\dfrac{3n+1}{2n+3}\right)^n$. 4) $a_n = \dfrac{1}{n^3}\left(\dfrac{3n^2+4}{2n^2+3}\right)^n$

5) $a_n = n^5 e^{-\sqrt{n}}$. 6) $a_n = n^\alpha q^n$, $0 < q < 1$.

7) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$. 8) $a_n = \dfrac{(n+1)!}{7^n(n^2+4)^3}$.

9) $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$, $n \geqslant 2$.

14.26. 1) $a_n = \dfrac{(2{,}6)^n n!}{n^n}$. 2) $a_n = n^{-n/3}\sqrt[3]{n!+1}$.

3) $a_n = 3^n \cos\dfrac{1}{n!}$. 4) $a_n = \dfrac{n^n}{(n!)^2}$.

5) $a_n = \dfrac{(2n+2)!}{\pi^n (n!)^2}$. 6) $a_n = \dfrac{9^{2n} n!}{(2n)!}$.

7) $a_n = \dfrac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{n!n^\beta}$.

8) $a_n = \dfrac{a(a+c)(a+2c)\ldots(a+nc)}{b(b+c)(b+2c)\ldots(b+nc)}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

14.27. 1) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}$.

2) $a_n = (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2})\ldots(\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2})$.

3) $a_n = \dfrac{(n!)^3}{3^{n^{4/3}}}$. 4) $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$, $n \geqslant 2$.

5) $a_n = \dfrac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$, $n \geqslant 3$.

6) $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$, $n \geqslant 3$.

7) $a_n = \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$, $n \geqslant 2$. 8) $a_n = \dfrac{((n+1)!)^n}{2!4!\ldots(2n)!}$.

14.28. 1) $a_n = \dfrac{1}{\ln(n!)}$, $n \geqslant 2$. 2) $a_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln^2 k}{n^\alpha}$.

3) $a_n = \dfrac{\ln(n!)}{n^\alpha}$. 4) $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha(\ln\ln n)^\beta}$, $n > 2$.

14.29. Установив сходимость соответствующего ряда, показать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0.$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}=0.$ 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^n}=0,\quad a>1.$

14.30. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}$, где $\mu(n)$ — число цифр числа n.

14.31. Пусть $a_1=1$, $a_2=1$, $a_{n+1}=a_{n+1}+a_n$ $(n\geqslant 1)$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ сходится.

14.32. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} x=x$, расположенные в порядке возрастания. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2}$ сходится.

14.33. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$:

1) $a_n=\int\limits_0^{1/n}\frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4}\,dx.$ 2) $a_n=\int\limits_n^{n+2}e^{-\sqrt[4]{x}}\,dx.$

3) $a_n=\int\limits_{\pi n}^{\pi+\pi n}\frac{\cos^2 x}{x}\,dx.$ 4) $a_n=\int\limits_0^{\pi/n}\frac{x\sin^5 x}{1+x^2}\,dx.$

14.34. Пусть $a_1=\sqrt{2}$, $a_2=\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $a_3=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ..., $a_n=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится.

14.35. Доказать, что если $a_n\geqslant 0$, $b_n>0$ для всех $n\geqslant n_0$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ также сходится.

14.36. Доказать, что если $a_n\geqslant 0$, $b_n>0$ для всех $n\geqslant n_0$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ расходится, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ также расходится.

14.37. Доказать, что если существует $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=a$, где $a\neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится.

14.38. Доказать, что если $a_n>0$, $a_{n+1}\leqslant a_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

14.39. Доказать, что если $a_n \geqslant 0$ $(n \in \mathbb{N})$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ также сходится. Справедливо ли обратное утверждение?

14.40. Доказать, что ряд с неотрицательными членами сходится, если ограничена сверху хотя бы одна подпоследовательность последовательности его частичных сумм.

14.41. Доказать, что если последовательность $\{na_n\}$, где $a_n \geqslant 0$ $(n \in \mathbb{N})$, ограничена, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится.

14.42. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$, где $a_n \geqslant 0$ $(n \in \mathbb{N})$, сходится и $a_{n+1} \leqslant a_n$ $(n \in \mathbb{N})$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ также является сходящимся.

14.43. Доказать, что если сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^3,$$

где $a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$, $c_n \geqslant 0$ $(n \in \mathbb{N})$, то сходится также и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n$.

14.44. Пусть $a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$ $(n \in \mathbb{N})$ и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся. Следует ли отсюда, что расходится ряд:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$?

14.45. Доказать, что если $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ и существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

то $a_n = o(q_1^n)$, где $q_1 > q$.

14.46. Доказать, что если $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ и для всех $n \geqslant m$ справедливо неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \lambda < 1,$$

то

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leqslant a_m \frac{\lambda^{n-m+1}}{1-\lambda}$$

для всех $n \geqslant m$.

14.47. Доказать, что если $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ и существует

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (*обобщенный признак Даламбера*).

14.48. Доказать, что если $a_n \geqslant 0$ $(n \in \mathbb{N})$ и существует

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится в случае, когда $q < 1$, и расходится в случае, когда $q > 1$ (*обобщенный признак Коши*).

14.49. Доказать, что если $a_n > 0$, $a_{n+1} \leqslant a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ и существует $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = q$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится в случае, когда $q < 1/2$, и расходится в случае, когда $q > 1/2$.

14.50. Доказать, что если $a_n \geqslant 0$ $(n \in \mathbb{N})$ и существует номер m такой, что для всех $n > m$ выполняется неравенство

$$\frac{n}{\ln n}\left(1 - \sqrt[n]{a_n}\right) \geqslant \lambda > 1,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; если же $\frac{n}{\ln n}\left(1 - \sqrt[n]{a_n}\right) \leqslant 1$ для всех $n > m$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится (*признак Жамэ*).

14.51. Доказать, что если $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ и существуют номер m и число $\alpha > 0$ такие, что для всех $n \geqslant m$ выполняется неравенство

$$\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \geqslant 1 + \alpha,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; если же

$$\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \leqslant 1$$

для всех $n \geqslant m$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится (*логарифмический признак*).

14.52. Доказать, что если $a_n > 0$, $a_{n+1} \leqslant a_n$ $(n \in \mathbb{N})$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится или расходится одновременно с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

14.53. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, где $f(x)$ — положительная и убывающая на промежутке $[1; +\infty)$ функция такая, что существует

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda,$$

сходится в случае $\lambda < 1$ и расходится в случае $\lambda > 1$ (*признак Ермакова*).

14.54. Доказать, что если $a_n > 0$, $a_{n+1} \leqslant a_n$ $(n \in \mathbb{N})$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится или расходится одновременно с рядом $\sum\limits_{m=1}^{\infty} q_m 2^{-m}$, где q_m — наибольший номер членов ряда $\sum a_n$, удовлетворяющих условию

$$a_n \geqslant 2^{-m} \quad (n = 1, 2, \ldots, q_m)$$

(*признак Лобачевского*).

14.55. Доказать, что если $f(x)$ — положительная, убывающая на промежутке $[1; +\infty)$ функция и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, то для его n-го остатка

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$$

справедливы неравенства

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx < r_n < f(n+1) + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx.$$

§ 15. Абсолютно и не абсолютно сходящиеся ряды

1. Абсолютно сходящиеся ряды. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{2}$$

При исследовании рядов на абсолютную сходимость применяются признаки сходимости рядов с неотрицательными членами (§ 14).

С в о й с т в а   а б с о л ю т н о   с х о д я щ и х с я   р я д о в.

1. Абсолютно сходящийся ряд сходится, т. е. из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), причем $|S| \leqslant \sigma$, где S и σ — суммы рядов (1) и (2) соответственно.

2. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся, то при любых α и β ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$$

также абсолютно сходится.

3. Если ряд (1) абсолютно сходится, то ряд, составленный из тех же членов, но взятых в другом порядке, также абсолютно сходится и его сумма равна сумме ряда (1).

4. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся, то ряд, составленный из всевозможных попарных произведений $a_i b_j$ членов этих рядов, расположенных в любом порядке, также абсолютно сходится, а его сумма равна $S\sigma$, где S и σ — суммы рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Пример 1. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, если:

1) $a_n = \dfrac{(n+1)\cos 2n}{\sqrt[3]{n^7+3n+4}}$. 2) $a_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[5]{n}}\right)\operatorname{arctg}\dfrac{\sin n}{n}$.

3) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln^2(n+1)}\left(1-\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

△ 1) Используя неравенства $n+1 \leqslant 2n$, $|\cos 2n| \leqslant 1$, $n^7+3n+4 > n^7$, получаем $|a_n| \leqslant 2/n^{4/3}$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^{4/3}}$ по признаку сравнения следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, т. е. абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Заметим, что при $t \geqslant 0$ справедливы неравенства $0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$, а при любом $t \in \mathbb{R}$ — неравенство $|\operatorname{arctg} t| \leqslant |t|$. Поэтому

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{\sqrt[5]{n}}\left|\frac{\sin n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n^{6/5}},$$

откуда следует абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

3) Используя формулу $1-\cos t = 2\sin^2(t/2)$ и неравенство $|\sin t| \leqslant |t|$, $t \in \mathbb{R}$, получаем

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2n\ln^2(n+1)}.$$

Так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n \ln^2 (n+1)}$$

сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно. ▲

2. Знакочередующиеся ряды. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots,$$

где $a_n \geqslant 0$ или $a_n \leqslant 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, называют *знакочередующимся*.

Признак Лейбница. Если

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \tag{3}$$

и для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$a_n \geqslant a_{n+1} > 0, \tag{4}$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \tag{5}$$

сходится. При этом

$$|S - S_n| \leqslant a_{n+1}, \tag{6}$$

где S и S_n — соответственно сумма и n-я частичная сумма ряда (5).

Пример 2. Доказать сходимость знакочередующегося ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln^2 n}{n}$.

△ 1) Последовательность $\{a_n\}$, где $a_n = 1/\sqrt{n}$, монотонно стремится к нулю (удовлетворяет условиям (3)—(4)). По признаку Лейбница ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ сходится.

2) Обозначим $\varphi(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$, тогда

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$$

(правило Лопиталя) и

$$\varphi'(x) = \frac{\ln x}{x^2}(2 - \ln x),$$

откуда следует, что $\varphi'(x) < 0$ при $x > e^2$. Поэтому последовательность $\{a_n\}$, где $a_n = (\ln^2 n)/n$, удовлетворяет условию (3), а при $n > e^2$ — условию (4). По признаку Лейбница ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln^2 n}{n}$ сходится. ▲

8. Признаки Дирихле и Абеля сходимости рядов.

Признак Дирихле. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{7}$$

сходится, если частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничены, т. е.

$$\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N}: \left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leqslant M,$$

а последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю, т. е. $a_{n+1} \leqslant a_n$ или $a_{n+1} \geqslant a_n$ для всех $n \geqslant n_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Признак Абеля. Ряд (7) сходится, если последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

Пример 3. Доказать, что если последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha$$

сходится при любом $\alpha \in \mathbb{R}$, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha$$

сходится при $\alpha \neq 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

△ Обозначим

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha, \quad C_n = \sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha.$$

Тогда

$$B_n = \frac{\sin((n+1)\alpha/2)\sin(n\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}, \quad C_n = \frac{\cos((n+1)\alpha/2)\sin(n\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}, \tag{8}$$

$$\alpha \neq 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Для доказательства формул (8) можно воспользоваться равенствами

$$2\sin k\alpha \sin\frac{\alpha}{2} = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\alpha - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\alpha,$$

$$2\cos k\alpha \sin\frac{\alpha}{2} = \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\alpha.$$

Если $\alpha \neq 2\pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$, то

$$|B_n| \leqslant \frac{1}{|\sin(\alpha/2)|}, \quad |C_n| \leqslant \frac{1}{|\sin(\alpha/2)|},$$

и по признаку Дирихле ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha$ сходятся. Если $\alpha = 2\pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$, то $\cos n\alpha = 1$, а $\sin n\alpha = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому при $\alpha = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha$ сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

может как сходиться, так и расходиться. ▲

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\ln \ln (n+2)} \cos \frac{1}{n}.$$

△ Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\ln \ln (n+2)}$ сходится (пример 3), а последовательность $\{\cos(1/n)\}$ монотонна и ограничена, то по признаку Абеля ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\ln \ln (n+2)} \cos \frac{1}{n}$$

сходится при любом $\alpha \in \mathbb{R}$. ▲

4. Условно сходящиеся ряды. Ряд (1) называется *условно* (*не абсолютно*) *сходящимся*, если этот ряд сходится, а ряд (2) расходится.

Если ряд (1) сходится условно, то, каким бы ни было число A, можно так переставить члены ряда (1), что сумма полученного ряда будет равна A (*теорема Римана*).

При исследовании на сходимость рядов иногда оказывается полезным следующее утверждение: если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ одновременно либо абсолютно сходятся, либо условно сходятся, либо расходятся.

Пример 5. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

1) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n-1}}$. 2) $a_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}}\right)$.

3) $a_n = \dfrac{\cos n}{n}$.

△ 1) Запишем a_n в следующем виде

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)^{-1}$$

и воспользуемся асимптотической формулой

$$(1+t)^{-1} = 1 - t + O(t^2), \quad t \to 0.$$

Тогда получим

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \alpha_n, \text{ где } |\alpha_n| \leqslant \frac{C}{n^{3/2}}, \quad C > 0.$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ абсолютно сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится или расходится одновременно с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, где $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$. Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (пример 2) и расходимости гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, хотя $a_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ сходится.

2) Используя асимптотическую формулу

$$\ln(1+t) = t + O(t^2) \quad \text{при} \quad t \to 0,$$

получаем

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}} + b_n, \text{ где } |b_n| \leqslant \frac{C}{n^{4/3}}, \quad C > 0.$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится абсолютно, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}}$ сходится условно (ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{2/3}}$ расходится), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно.

3) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ сходится (пример 3). Докажем, что этот ряд не является абсолютно сходящимся, т. е. докажем расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n}$. Используя неравенство $|\cos n| \geqslant \cos^2 n$ и

формулу $\cos^2 n = (1+\cos 2n)/2$, получаем

$$\frac{|\cos n|}{n} \geqslant \frac{1+\cos 2n}{2n}. \tag{9}$$

Заметим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos 2n}{2n}$ расходится, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2n}$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ расходится. По признаку сравнения (§ 14) из (9) следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n}$ расходится. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ сходится условно. ▲

Доказать, что ряды абсолютно сходятся (**15.1—15.2**):

15.1. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(2n+\frac{\pi}{4}\right)}{n\sqrt[3]{n+2}}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(-n)^n}{\sqrt[4]{2n^6+3n+1}}$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/4)}{(n+2)\sqrt{\ln^3(n+3)}}$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln^2 n}{2^n}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}} \arcsin\frac{\pi}{4n}$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos^3 n \cdot \operatorname{arctg}\frac{n+1}{n^3+2}$.

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2+3}{n^3+4n}} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 \sin n \cdot e^{-\sqrt{n}}$.

15.2. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(2n)!}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!!}{(n+1)^n}$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2(n+1)}{n\sqrt{n+1}}$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n+1)/2} \frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin 3n}{n\ln(n+1)\cdot\ln^2(n+2)}$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}} - \sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)\right)$.

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\sin\frac{1}{n}} - \cos\frac{1}{n}\right)\cos\pi n$.

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right).$

Исследовать на сходимость ряды (15.3—15.4):

15.3. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}.$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\ln n}{\sqrt{n}}.$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\ln\ln(n+2)}{\ln(n+1)}.$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{(n+2)\sqrt[4]{n+1}}.$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi n\right)\sin\dfrac{1}{n}.$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\right).$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}}.$ 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+2}{\sqrt{n^2+4}}\operatorname{arctg}\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}.$

15.4. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n-1)/2}\dfrac{1}{\sqrt{n}}.$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{\sqrt[5]{n}}.$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(n+\pi/4)}{\ln^2(n+1)}.$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}}.$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{\sin^2(n/2)}{\sqrt[5]{n+1}}.$ 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}(1/k)}{\ln(n+2)}\cos 3n.$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}(1/k!)}{\sqrt[5]{n}}\sin 2n.$

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n-1)/2}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n.$

Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды (15.5—15.7):

15.5. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n}+2}.$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2 2^n}{3^n+1}.$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln (n+1)}$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \sin 2n}{n^2 - \ln n}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)\sqrt{n+2}} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln (n+1) \ln \ln (n+2)}$.

15.6. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+4)}{\sqrt[3]{n^2+1}\,(2+\sqrt{n^2+3})}$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{6}\right) \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n} + (-1)^{n-1}}$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 \ln (n+2)}{\ln (n+1)} \sin \frac{\pi n}{4}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n \ln (n+1)}$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \cdot \cos \frac{1}{n}}{\sqrt[4]{n}}$.

15.7. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^6 n}{\sqrt{n}} \cos \frac{\pi n}{6}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt{n^2-2n+3}}{n}$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^4 n}{n}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4 n - 3/8}{\sqrt{n+1}}$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{3/2} + \ln^3 n}{n^{3/2} \ln (n+1)}$.

15.8. Исследовать на сходимость ряды (**15.8—15.9**):

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3 n}{\sqrt{n}}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^5 2n}{\ln (n+1)}$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n} + \sin n}$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{(\cos n)/\sqrt{n}} - \cos \frac{1}{n}\right)$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}}$.

15.9. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \cos \frac{\pi (n^2+1)}{n}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin (\pi \sqrt{n^2+1})$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln\ln(n+1)}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$. 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}$.

15.10. Пусть $f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_p(x)}$, где

$$P_m(x)=x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m,$$
$$Q_p(x)=x^p+b_1x^{p-1}+\ldots+b_{p-1}x+b_p$$

— многочлены, причем $Q_p(x)\neq 0$ при $x\geqslant 1$. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(n)$.

15.11. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{a_n}{n\ln(n+1)}$, где

$$a_n=\begin{cases} 1, & \text{если} \quad n=5k+1 \quad \text{и} \quad n=5k+2,\\ -1, & \text{если} \quad n=5k,\ n=5k-1,\ n=5k-2, \quad k\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Найти все значения α, при которых ряд а) абсолютно сходится; б) условно сходится (**15.12—15.14**):

15.12. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\alpha}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha+n^{-1}}}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^{\alpha}}\right)$.

5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+(-1)^n)^{\alpha}}$. 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(\sqrt{n+1}+(-1)^n)^{\alpha}}$.

15.13. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[n]}}{n^{\alpha}}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^{\alpha}}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\ln^2 n}{n^{\alpha}}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\right)^{\alpha}$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}$.

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\ln^{\alpha}(n+1)}$, $\quad 0<x<\pi$.

15.14. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^{2n} \alpha}{n}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \cos^{2n}\alpha}{\sqrt{n}}$.

3) $1+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}+\ldots$

4) $1+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}-\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{9^\alpha}+\frac{1}{11^\alpha}-\frac{1}{5^\alpha}+\ldots$

15.15. Найти все значения α и β, при которых ряд а) абсолютно сходится; б) условно сходится:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)\ldots(n+\alpha)}{n^\beta n!}$.

2) $\frac{1}{1^\alpha}-\frac{1}{2^\beta}+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{4^\beta}+\frac{1}{5^\alpha}-\frac{1}{6^\beta}+\ldots$

3) $1-\frac{2}{2^\beta}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}-\frac{2}{5^\beta}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}-\frac{2}{8^\beta}+\frac{1}{9^\alpha}+\ldots$

15.16. Доказать, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x\sqrt{n})}{n^\alpha}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x\sqrt{n})}{n^\alpha}$, где $x \neq 0$, сходятся при $\alpha > 1/2$ и расходятся при $\alpha < 1/2$.

15.17. Показать, что ряд

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\ldots,$$

полученный из сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ перестановкой его членов, расходится.

15.18. В гармоническом ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ выброшены все члены, номера которых содержат цифру 9. Доказать, что полученный ряд будет сходящимся, а его сумма меньше 20.

15.19. Пользуясь одним из равенств

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n},$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ (см. **14.16**), доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

15.20. Пользуясь тем, что сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ равна $\ln 2$, найти суммы следующих рядов, полученных из данного перестановкой его членов:

1) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots$

2) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\ldots$

3) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\frac{1}{5}-\ldots$

15.21. Доказать, что если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ переставить так, что каждую группу p последовательных его положительных членов сменяет группа m последовательных отрицательных членов, то сумма полученного ряда будет равна

$$\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{m}.$$

15.22. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ получен из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ перестановкой его членов так, что члены одного знака расположены в новом ряду в порядке убывания их модулей, а отношение числа положительных слагаемых суммы $\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$ к числу отрицательных слагаемых этой суммы имеет при $n\to\infty$ предел, равный λ. Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\ln\sqrt{4\lambda}.$$

15.23. Доказать, что гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ останется расходящимся, если, не переставляя его членов, изменить знаки этих членов так, чтобы за каждой группой из p положительных членов следовала группа m отрицательных членов, где $p\neq m$. Показать, что при $p=m$ полученный ряд будет сходящимся.

15.24. Пусть $\alpha>0$ и S — сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$. Доказать, что $1/2<S<1$.

15.25. Пусть $a_n>0$ $(n\in\mathbb{N})$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. Следует ли отсюда, что знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится?

15.26. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1.$$

Следует ли отсюда, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также сходится?

15.27. Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и при всех $n \geqslant n_0$ выполняются неравенства

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n.$$

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится.

15.28. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, где $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, сходится, если существует число $\alpha > 0$ такое, что

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \to \infty.$$

15.29. Показать, что сумма не абсолютно сходящегося ряда не изменится, если члены этого ряда переставить так, что ни один из них не удаляется от своего прежнего положения более чем на m мест, где m — заданное число.

15.30. Показать, что члены не абсолютно сходящегося ряда можно без перестановки сгруппировать так, что полученный ряд будет абсолютно сходящимся.

15.31. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится, если выполняются следующие условия:

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится;

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ абсолютно сходится.

15.32. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится, если выполняются следующие условия:

1) частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничены, т. е. существует число $M > 0$ такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leqslant M$;

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ абсолютно сходится;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

15.33. Пусть заданы числовая последовательность $\{a_n\}$ и строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{p_k\}$ такая, что

$$p_k - p_{k-1} < c,$$

c — заданное число, $k \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$A_1 = \sum_{j=1}^{p_1} a_j,\ A_2 = \sum_{j=p_1+1}^{p_2} a_j,\ \ldots,\ A_k = \sum_{j=p_{k-1}+1}^{p_k} a_j \quad (k \geqslant 2).$$

Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

15.34. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. Обозначим

$$\alpha_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \qquad \beta_n = \frac{|a_n| - a_n}{2},$$

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k, \qquad B_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k.$$

Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0;$

2) ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n$ расходятся;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_n}{B_n} = 1.$

15.35. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. Доказать, что можно так переставить члены этого ряда, что для полученного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ будет выполняться условие

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k = +\infty.$$

15.36. Пусть

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k},$$

A_n и B_n — суммы соответственно всех положительных и отрицательных слагаемых, содержащихся в S_n. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{A_n} = -1.$$

§ 16. Разные задачи на сходимость рядов

1. Сумма и произведение рядов. *Суммой двух рядов*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{2}$$

называют ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n),$$

а их *разностью* — ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n).$$

Если ряды (1) и (2) сходятся, а их суммы соответственно равны S и σ, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S + \sigma, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = S - \sigma.$$

Произведением рядов (1) и (2) называют ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1). \tag{3}$$

В частности, если $a_n = b_n$ $(n \in \mathbb{N})$, то ряд (3) называют *квадратом* ряда (1).

Если ряды (1) и (2) сходятся, причем хотя бы один из них сходится абсолютно, то их произведение — сходящийся ряд, а сумма этого ряда равна $S\sigma$, где S и σ — суммы рядов (1) и (2).

2. Оценка n-го остатка ряда.

1. Если функция f неотрицательна и убывает на промежутке $[a; +\infty)$, где $a \geqslant 1$, то при $n \geqslant n_0 \geqslant a$ для n-го остатка r_n ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ справедливы следующие оценки:

$$r_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(x)\,dx,$$

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant r_n \leqslant f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{4}$$

Если, кроме того, известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, а его сумма равна S, то

$$r_n = S - S_n,$$

где S_n — n-я частичная сумма ряда, и с помощью неравенств (4) можно оценить ошибку, получаемую при замене суммы ряда его n-й частичной суммой.

2. Если $a_n \leqslant a_{n+1}$ или $a_n \geqslant a_{n+1}$ для всех $n \geqslant n_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ сходится (*признак Лейбница*), а для его n-го остатка

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$$

при $n \geqslant n_0$ справедлива оценка

$$|r_n| \leqslant |a_{n+1}|. \tag{5}$$

16.1. Сложить ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и вычислить сумму получившегося ряда, если:

1) $a_n = \dfrac{1}{5^{n-1}} + \dfrac{(-1)^n}{n^2}$, $\quad b_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

2) $a_n = \dfrac{(-1)^n n + \sin^2(\pi/n)}{3^n}$, $\quad b_n = \dfrac{\cos^2(\pi/n) + (-1)^{n+1}(n+1)}{3^n}$.

3) $a_n = \dfrac{\cos(\pi n/3)}{2^n}$, $\quad b_n = \dfrac{\sin^2(\pi n/6)}{2^{n-1}}$.

4) $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$, $\quad b_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

16.2. Найти разность расходящихся рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и вычислить сумму получившегося ряда, если он сходится:

1) $a_n = \dfrac{1}{n}$, $\quad b_n = \dfrac{1}{n+1}$.

2) $a_n = \dfrac{n+3}{n(n+1)}$, $\quad b_n = \dfrac{n+3}{(n+1)(n+2)}$.

16.3. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ — ряд, полученный при перемножении рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Найти c_n, если:

1) $a_n = a^{n-1}$, $\quad b_n = b^{n-1}$, $\quad |a| < 1$, $\quad |b| < 1$.

2) $a_n = q^{n-1}$, $\quad b_n = \dfrac{q^n}{n(n+1)}$, $\quad |q| < 1$.

3) $a_n = \dfrac{2^{n-1}}{(n-1)!}$, $\quad b_n = \dfrac{3^{n-1}}{(n-1)!}$.

4) $a_n = \dfrac{3^{n-1}}{(n-1)!}$, $\quad b_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$.

5) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)!}$, $\quad b_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}$.

16.4. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ есть разность рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Можно ли утверждать, что этот ряд расходится, если:

1) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится?

2) Оба эти ряда расходятся?

16.5. Показать, что квадрат сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ есть ряд расходящийся.

16.6. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Показать, что произведение двух сходящихся рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\beta}}$$

есть ряд сходящийся, если $\alpha + \beta > 1$, и расходящийся, если $\alpha + \beta < 1$.

16.7. Показать, что:

1) $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^n}{n!}\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-a)^n}{n!}\right) = 1.$

2) $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^n}{n!}\right)^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2a)^n}{n!}$.

16.8. Показать, что ряд, полученный при перемножении двух расходящихся рядов

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{и} \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + 2^{-(n+1)}\right),$$

абсолютно сходится.

16.9. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, где $b_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, расходится. Показать, что произведение этих рядов есть ряд расходящийся.

16.10. Доказать, что если ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}\right)$$

сходятся и их суммы равны соответственно A, B и C, то справедливо равенство $C = AB$.

16.11. Используя оценку (5), найти наименьший номер n_0 такой, чтобы для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, где $a_n > 0$ при всех $n \geqslant n_0$ выполнялось неравенство $r_n < 10^{-3}$, если:

1) $a_n = 1/n$. 2) $a_n = 1/n^2$.

3) $a_n = 1/n^3$. 4) $a_n = 1/n!$.

16.12. Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ нужно взять, чтобы ошибка при замене суммы S этого ряда его n-й частичной суммой S_n не превышала α, т. е. чтобы $|S - S_n| = |r_n| \leqslant \alpha$, если:

1) $a_n = 1/n^2$, $\alpha = 10^{-5}$. 2) $a_n = 1/n!$, $\alpha = 10^{-3}$.

3) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n2^n}$, $\alpha = 10^{-3}$. 4) $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)!}$, $\alpha = 10^{-5}$.

16.13. Оценить порядок убывания при $n \to \infty$ остатка r_n ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, получив асимптотическую формулу вида $r_n \sim Mn^p$ при $n \to \infty$, где $M > 0$ и M не зависит от n, если:

1) $a_n = 1/n^3$. 2) $a_n = 1/n^5$. 3) $a_n = 1/n^\alpha$, $\alpha > 1$.

16.14. Привести пример такого сходящегося ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ln\ln(n+2)$$

расходится.

16.15. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

1) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{(-1)^n}{2}\right) a_n$, $n \geqslant 1$.

2) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \cos a_n$, $n \geqslant 1$.

3) $a_1 = \sin\alpha$, $a_{n+1} = (-1)^n \sin a_n$, $n \geqslant 1$.

16.16. Доказать, что гипергеометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_1 = 1$,

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+n-1)},$$

$\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $n \geqslant 2$, сходится, если $\gamma > \alpha + \beta$.

16.17. Найти все значения α, при которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha}$, если:

1) $a_1 = \sin x, \quad a_{n+1} = \sin a_n, \quad n \geqslant 1, \quad \sin x \neq 0.$

2) $a_1 = \operatorname{arctg} x, \quad a_{n+1} = \operatorname{arctg} a_n, \quad n \geqslant 1, \quad x \neq 0.$

16.18. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx_0}$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ сходится абсолютно при любом $x > x_0$.

16.19. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\alpha}$, где $\alpha > 0$, сходится, то

$$\lim_{n \to \infty} n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{n} a_k = 0.$$

16.20. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами сходится. Следует ли отсюда, что $a_n = o(1/n)$ при $n \to \infty$?

16.21. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ также сходится.

16.22. Известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n \geqslant 0$ $(n \in \mathbb{N})$, расходится. Следует ли отсюда, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, если:

1) $b_n = \dfrac{a_n}{1 + na_n}$. 2) $b_n = \dfrac{a_n}{1 + n^2 a_n}$. 3) $b_n = \dfrac{a_n}{1 + a_n^2}$?

16.23. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами расходится, то:

1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1 + a_n}$ расходится.

2) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$, где $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$,

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

16.24. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами сходится, то:

1) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n}$, где $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$, расходится.

2) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ сходится.

16.25. Доказать, что если a_n монотонно стремится к нулю и, кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = +\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ расходится, причем

$$\sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

16.26. Обозначим

$$\Delta a_n = a_n - a_{n+1}, \quad \Delta^2 a_n = \Delta a_n - \Delta a_{n+1}.$$

Доказать, что если последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет при всех $n \in \mathbb{N}$ условию $\Delta^2 a_n \geqslant 0$ (такую последовательность называют *выпуклой*) и ограничена, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)\Delta^2 a_n$ сходится.

16.27. Доказать, что если $a_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, a_n монотонно стремится к нулю и $\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k = O(a_n)$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = O\left(\frac{1}{a_n}\right).$$

16.28. Доказать, что если существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \lambda \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \mu,$$

причем $|\lambda\mu| < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится.

16.29. Привести пример такого сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ расходится.

16.30. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность положительных чисел, a_n монотонно стремится к нулю, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Доказать, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$, где $\{n_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая при всех $k \in \mathbb{N}$ условию $n_{k+1} - n_k < c$ (c не зависит от k), также расходится.

16.31. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами сходится, то существует последовательность $\{b_n\}$, монотонно стремящаяся к $+\infty$ и такая, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ также сходится.

16.32. Пусть $f(x)$ — положительная, строго возрастающая при $x > 0$ функция, $g(x)$ — функция, обратная к f. Доказать, что если ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(a_n) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n g(b_n),$$

где $a_n > 0$, $b_n \geqslant 0$ $(n \in \mathbb{N})$, сходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ также сходится, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(a_n) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n g(b_n).$$

16.33. Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и пусть $\{\lambda_n\}$ — последовательность положительных чисел такая, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1}$ расходится. Обозначим

$$B_n = \lambda_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - \lambda_{n+1}.$$

Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$:

1) сходится, если существует номер n_0 и число $\delta > 0$ такие, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $B_n \geqslant \delta$;

2) расходится, если для всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $B_n \leqslant 0$ (*признак Куммера*).

16.34. Доказать, что если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами существует

$$\lim_{n \to \infty} \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \ln n = A,$$

то при $A > 1$ этот ряд сходится, а при $A < 1$ расходится (*признак Бертрана*).

16.35. Пусть $\{a_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность положительных чисел. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$

сходится, если последовательность $\{a_n\}$ ограничена, и расходится, если эта последовательность не ограничена.

16.36. Пусть заданы последовательность $\{a_n\}$ положительных чисел и число $p \in \mathbb{N}$ $(p > 1)$ такие, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ сходится. Обозначим

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^p$ сходится и справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^p \leqslant \frac{p}{p-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p.$$

16.37. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами сходится. Обозначим

$$c_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится и справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \leqslant e \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

16.38. Пусть заданы две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ положительных чисел, а также числа p и q такие, что $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Доказать, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q$ сходятся, то:

1) Сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\right)^{1/q}.$$

2) Сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^p$, причем

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^p\right)^{1/p}.$$

16.39. Пусть S_n и σ_n — n-е частичные суммы соответственно рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, причем $b_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится и существует

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda.$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sigma_n} = \lambda.$$

16.40. Пусть S_n — n-я частичная сумма расходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и пусть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{S_n} = 0.$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k S_k^{-1}}{\ln S_n} = 1.$$

16.41. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$ сходится, то при любом $m \in \mathbb{N}$ сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{m+n} = \sigma_m,$$

причем

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m = 0.$$

16.42. Пусть $\{a_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность положительных чисел такая, что $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Обозначим через λ число, обладающее тем свойством, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-\alpha}$ при всех $\alpha > \lambda$ сходится, а при всех $\alpha < \lambda$ расходится (такое число называют *показателем сходимости последовательности* $\{a_n\}$). Доказать, что

$$\lambda = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln a_n}.$$

16.43. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится и каждая его часть вида $a_m + a_{2m} + a_{3m} + \ldots$ $(m \in \mathbb{N})$ имеет сумму 0, то $a_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

16.44. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно и пусть $-\infty \leqslant \alpha \leqslant \leqslant \beta \leqslant +\infty$. Доказать, что перестановкой членов этого ряда можно образовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ такой, что

$$\varliminf_{n\to\infty} S'_n = \alpha, \quad \varlimsup_{n\to\infty} S'_n = \beta,$$

где

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} a'_k.$$

16.45. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называют *безусловно сходящимся*, если он сходится к одной и той же сумме при любой перестановке его членов. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится безусловно тогда и только тогда, когда он сходится абсолютно.

16.46. Доказать, что если ряды, получаемые при всевозможных перестановках членов данного ряда, сходятся, то они имеют одну и ту же сумму.

16.47. Пусть задана числовая последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, обозначим

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad \sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_n}{n+1}.$$

Если существует конечный $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n = \sigma$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *суммируется методом средних арифметических*, а число σ называют *обобщенной* (*в смысле Чезаро*) *суммой* этого ряда. Доказать, что метод средних арифметических (*Чезаро*) является:

1) *линейным*, т. е. если ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ имеют обобщенные суммы A и B соответственно, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, имеет обобщенную сумму $\alpha A + \beta B$;

2) *регулярным*, т. е. если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится в обычном смысле к сумме A, то он имеет обобщенную сумму, также равную A.

16.48. Показать, что ряд суммируется методом Чезаро (см. **16.47**), найдя σ_n и σ:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. 2) $\frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos n\theta, \quad 0 < |\theta| < \pi.$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n\theta, \quad 0 < |\theta| < \pi.$

ГЛАВА V
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

§ 17. Сходимость и равномерная сходимость функциональных последовательностей

1. Сходимость последовательности функций. Пусть функции $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, определены на множестве E и пусть $x_0 \in E$. Если числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится, то говорят, что последовательность функций $\{f_n(x)\}$ *сходится в точке* x_0.

Последовательность $\{f_n(x)\}$, сходящуюся в каждой точке $x \in E$, называют *сходящейся на множестве* E. В этом случае на множестве E определена функция f, значение которой в точке $x_0 \in E$ равно пределу последовательности $\{f_n(x_0)\}$. Эту функцию называют *предельной функцией последовательности* $\{f_n(x)\}$ и пишут

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad x \in E, \tag{1}$$

или

$$f_n(x) \to f(x), \qquad x \in E,$$

или, короче,

$$f_n \underset{E}{\longrightarrow} f.$$

По определению предела запись (1) означает, что для

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N_\varepsilon(x) \forall n \geqslant N\colon \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Пример 1. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E, если:

1) $f_n(x) = x^n$, $\quad E = [0;\ 1]$.

2) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $\quad E = \mathbb{R}$.

3) $f_n(x) = \dfrac{n^2}{n^2+x^2}$, $\quad E = \mathbb{R}$.

4) $f_n(x) = n \sin \dfrac{1}{nx}$, $\quad E = (0;\ +\infty)$.

5) $f_n(x) = \ln\left(3 + \dfrac{n^2e^x}{n^4+e^{2x}}\right)$, $\quad E = [0;\ +\infty)$.

$\triangle$ 1) Если $x \in [0;\ 1)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, а если $x = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 1$. Следовательно,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & \text{если} \quad x = 1. \end{cases}$$

2) Если $x \neq 0$, то

$$|f_n(x)| < \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

а если $x = 0$, то $f_n(x) = 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

3) Так как $f_n(x) = 1 - \frac{x^2}{n^2 + x^2}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$, т. е. $f(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

4) Пользуясь тем, что $\sin t \sim t$ при $t \to 0$, получаем

$$n \sin \frac{1}{nx} \sim n \frac{1}{nx} \qquad (n \to \infty,\ x \neq 0).$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \in (0; +\infty).$$

5) Так как

$$f_n(x) = \ln 3 + \ln\left(1 + \frac{n^2 e^x}{3(n^4 + e^{2x})}\right)$$

и $\ln(1 + t) \sim t$ при $t \to 0$, то

$$f_n(x) \sim \ln 3 + \frac{n^2 e^x}{3(e^{2x} + n^4)} \sim \ln 3 + \frac{e^x}{3n^2} \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

откуда находим

$$f(x) = \ln 3, \qquad x \in [0; +\infty). \ \blacktriangle$$

2. Равномерная сходимость функциональной последовательности. Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называют *равномерно сходящейся к функции* $f(x)$ *на множестве* E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N_ε такой, что для всех $n \geqslant N_\varepsilon$ и для всех $x \in E$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

В этом определении существенно, что номер N_ε не зависит от x.

С помощью символов $\forall$, $\exists$ определение равномерно сходящейся к $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ можно записать так:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N_\varepsilon \forall n \geqslant N \forall x \in E\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Последовательность $\{f_n(x)\}$ называют *равномерно сходящейся на множестве* E, если существует функция $f(x)$, к которой эта последовательность сходится равномерно на множестве E.

Для обозначения равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ на множестве E используют символическую запись

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), \qquad x \in E,$$

или

$$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f.$$

3. **Достаточное условие равномерной сходимости последовательности.** Если существует числовая последовательность $\{a_0\}$ и номер n_0 такие, что для всех $n \geqslant n_0$ и для всех $x \in E$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n,$$

причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), \qquad x \in E.$$

Пример 2. Доказать, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве E, если:

1) $f_n(x) = \dfrac{n^2}{n^2 + x^2}$, $\quad E = [-1;\ 1]$.

2) $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n+x}}$, $\quad E = [0;\ +\infty)$.

3) $f_n(x) = \sqrt{x + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}$, $\quad E = [0;\ +\infty)$.

4) $f_n(x) = n \sin(1/(nx))$, $\quad E = [1;\ +\infty)$.

$\triangle$ 1) В этом случае $f(x) = 1$ (пример 1, 3)) и поэтому

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^2}{n^2 + x^2} \leqslant \frac{x^2}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2},$$

так как $|x| \leqslant 1$. Следовательно,

$$\frac{n^2}{n^2 + x^2} \rightrightarrows 1, \qquad x \in [-1;\ 1].$$

2) Заметив, что для всех $x \in E$ и для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$0 \leqslant \operatorname{arctg} nx < \pi/2, \qquad \sqrt{n+x} \geqslant \sqrt{n},$$

получаем

$$0 \leqslant \frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n+x}} < \frac{\pi}{2\sqrt{n}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n+x}} \rightrightarrows 0, \qquad x \in [0;\ +\infty).$$

3) Так как при $x \geqslant 0$ и для $\forall n \in N$ справедливо неравенство

$$x + \frac{1}{n} \leqslant \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2,$$

то

$$0 \leqslant \sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

откуда получаем

$$\sqrt{x + \frac{1}{n}} \rightrightarrows \sqrt{x}, \qquad x \in [0;\ +\infty).$$

4) В этом случае предельная функция $f(x)=1/x$ (пример 1, 4)). Для оценки разности $f_n(x)-f(x)$ воспользуемся неравенством

$$|\sin t-t|\leqslant\frac{1}{2}t^2,\quad t\in\mathbb{R},$$

которое следует из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $\sin t$, т. е. из формулы

$$\sin t=t+\frac{t^2}{2}(\sin t)''_{t=\xi},\ \xi\in\mathbb{R}.$$

Применяя это неравенство, получаем

$$|f_n(x)-f(x)|=n\left|\sin\frac{1}{nx}-\frac{1}{nx}\right|\leqslant\frac{n}{2}\frac{1}{(nx)^2}\leqslant\frac{1}{2n},$$

так как $x\geqslant 1$. Следовательно,

$$n\sin\frac{1}{nx}\rightrightarrows\frac{1}{x},\qquad x\in[1;+\infty).\ \blacktriangle$$

4. Неравномерная сходимость последовательности функций. Если условие (2) не выполняется, т. е.

$$\exists\varepsilon_0>0\forall k\in\mathbb{N}\exists n\geqslant k\exists\tilde{x}\in E\colon |f_n(\tilde{x})-f(\tilde{x})|\geqslant\varepsilon_0,$$

то последовательность $\{f_n(x)\}$ *не сходится равномерно к* $f(x)$ *на множестве* E. В этом случае пишут

$$f_n(x)\not\rightrightarrows f(x),\qquad x\in E,\quad\text{или}\quad f_n\underset{E}{\not\rightrightarrows}f.$$

Если $f_n\xrightarrow[E]{}f$, но $f_n\underset{E}{\not\rightrightarrows}f$, то говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ *сходится к* $f(x)$ *на множестве* E *неравномерно*.

В частности, если $f_n\xrightarrow[E]{}f$ и

$$\exists\varepsilon_0>0\exists n_0\in\mathbb{N}\forall n\geqslant n_0\exists x_n\in E\colon |f_n(x_n)-f(x_n)|\geqslant\varepsilon_0,\tag{3}$$

то последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ на множестве E неравномерно.

Пример 3. Доказать неравномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множестве E, если:

1) $f_n(x)=x^n,\qquad E=[0;1)$.

2) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2},\qquad E=[0;2]$.

3) $f_n(x)=\ln\left(3+\dfrac{n^2e^x}{n^4+e^{2x}}\right),\qquad E=[0;+\infty)$.

$\triangle$ 1) В этом случае $f_n(x)\to 0$, $x\in E$ (пример 1, 1)). Покажем, что выполняется условие (3). Возьмем $x_n=1/\sqrt[n]{2}$, тогда $x_n\in[0;1)$ при $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|=x_n^n=1/2=\varepsilon_0$$

и поэтому последовательность $\{x^n\}$ сходится к $f(x)=0$ на множестве $[0;\ 1)$ неравномерно.

2) Полагая $x_n = 1/n$ и учитывая, что $f(x)=0$ (пример 1, 2)), получаем

$$|f_n(x_n)-f(x_n)| = \frac{n\cdot\frac{1}{n}}{1+n^2\cdot\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Условие (3) выполняется при $\varepsilon_0 = 1/2$, и поэтому последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)=0$ на множестве $E=[0;\ 2]$ неравномерно.

3) Так как предельная функция $f(x)=\ln 3$ (пример 1, 5)), то, взяв $x_n = 2\ln n$, получаем

$$f_n(x_n)-f(x_n) = \ln\left(3+\frac{n^2e^{2\ln n}}{e^{4\ln n}+n^4}\right)-\ln 3 =$$
$$= \ln\left(3+\frac{n^4}{2n^4}\right)-\ln 3 = \ln\frac{7}{2}-\ln 3 = \ln\frac{7}{6}.$$

Таким образом, для $\forall n\in\mathbb{N}$ условие (3) выполняется при $\varepsilon_0 = \ln(7/6)$, и поэтому последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)=\ln 3$ на множестве $[0;\ +\infty)$ неравномерно. ▲

Заметим, что на множестве $E_1=[0;\ a]$ последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно. В самом деле, используя неравенство $\ln(1+t)\leqslant t$, $t\geqslant 0$, получаем

$$0 < f_n(x)-f(x) =$$
$$= \ln\left(1+\frac{n^2e^x}{3(e^{2x}+n^4)}\right) \leqslant \frac{n^2e^x}{3(e^{2x}+n^4)} < \frac{n^2e^x}{3n^4} \leqslant \frac{e^a}{3n^2},$$

откуда следует, что

$$f_n(x) \rightrightarrows \ln 3, \qquad x\in[0;\ a].$$

5. Критерии равномерной сходимости последовательности функций.

1. Для того чтобы последовательность функций $\{f_n(x)\}$, определенных на множестве E, равномерно сходилась на этом множестве к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)| = 0. \tag{4}$$

2. Для того чтобы последовательность функций $\{f_n(x)\}$, определенных на множестве E, равномерно сходилась на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши: для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N_ε, что для всех $n\geqslant N_\varepsilon$, для всех $p\in\mathbb{N}$ и для всех точек $x\in E$ выполняется неравенство

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)| < \varepsilon.$$

Если условие Коши не выполняется, т. е.

$$\exists\varepsilon_0>0\forall k\in\mathbb{N}\exists n\geqslant k\exists p\in\mathbb{N}\exists\tilde{x}\in E\colon\ |f_{n+p}(\tilde{x})-f_n(\tilde{x})|\geqslant\varepsilon_0, \tag{5}$$

то последовательность

$$\{f_n(x)\}$$

не является равномерно сходящейся на множестве E.

В частности, если

$$\exists\varepsilon_0>0\exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geqslant n_0\exists p\in\mathbb{N}\exists x_n\in E\colon\ |f_{n+p}(x_n)-f_n(x_n)|\geqslant\varepsilon_0,$$

то последовательность не является равномерно сходящейся на множестве E.

Пример 4. Исследовать на равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на указанных множествах:

1) $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$, $E=[0;\ 1]$.

2) $f_n(x)=x\sqrt{n}\,e^{-nx^2}$, $E_1=[0;\ +\infty)$, $E_2=[\delta;\ +\infty)$, $\delta>0$.

3) $f_n(x)=n\operatorname{arcctg}(n/x^2)$, $E=[1;\ +\infty)$.

$\triangle$ 1) В этом случае предельная функция $f(x)=0$ (пример 1, 1)). Покажем, что выполняется условие (4). С этой целью найдем точки экстремума функции $f_n(x)$ на множестве E. Уравнение $f_n'(x)=nx^{n-1}-(n+1)x^n=0$ имеет внутри отрезка $[0;\ 1]$ единственный корень $x=x_n=n/(n+1)$, причем

$$f_n(x_n)=x_n^n(1-x_n)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{n+1},\qquad\forall n\in N.$$

Заметим, что если $x\in(0;\ x_n)$, то $f_n'(x)>0$, а если $x\in(x_n;\ 1)$, то $f_n'(x)<0$. Поэтому $\sup\limits_{x\in E}f_n(x)=f_n(x_n)$. Следовательно,

$$\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in E}f_n(x)<\frac{1}{n+1}.$$

Условие (4) выполняется, и поэтому $f_n(x)\rightrightarrows 0$, $x\in[0;\ 1]$.

2) В этом случае предельная функция $f(x)=0$, так как

$$\lim_{t\to+\infty}t^\alpha e^{-\beta t}=0\quad\text{при}\quad\forall\alpha\in\mathbb{R},\qquad\beta>0.$$

Кроме того, $f_n(x)\geqslant 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in E_1$, и поэтому $|f_n(x)-f(x)|=f_n(x)$. Вычислим $\sup\limits_{x\in E_1}f_n(x)$. С этой целью найдем экстремумы функции $f_n(x)$. Уравнение

$$f_n'(x)=\sqrt{n}\,e^{-nx^2}(1-2nx^2)=0$$

имеет на множестве E_1 единственный корень $x=x_n=\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$, причем

$$f_n(x_n)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}.$$

Так как $f_n'(x)>0$ при $x\in[0;\ x_n)$ и $f_n'(x)<0$ при $x>x_n$, то функция $f_n(x)$ возрастает на промежутке $[0;\ x_n$ и убывает на промежутке $(x_n;\ +\infty)$. Следовательно,

$$\sup_{x\in E_1}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in E_1}f_n(x)=f_n(x_n)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}.$$

Условие (4) не выполняется, и поэтому последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)=0$ на множестве E_1 неравномерно.

Покажем, что на множестве E_2 последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)=0$ равномерно. Выберем номер n_0 таким, чтобы выполнялось неравенство $x_{n_0}=1/\sqrt{2n_0}<\delta$. Тогда для каждого $n\geqslant n_0$ функция $f_n(x)$ будет убывающей на множестве E_2, и поэтому для $\forall x\in E_2$ и для $\forall n\geqslant n_0$ будут выполняться неравенства

$$0\leqslant f_n(x)\leqslant f_n(\delta),$$

где $f_n(\delta)=\sqrt{n}\,\delta e^{-n\delta^2}\to 0$ при $n\to\infty$. Следовательно, $f_n(x)\rightrightarrows 0$, $x\in E_2$.

3) Покажем, что выполняется условие (5). Возьмем $n=k$, $p=2k=2n$, $\tilde{x}=\sqrt{k}=\sqrt{n}$, тогда

$$|f_{n+p}(\tilde{x})-f_n(\tilde{x})|=n|2\operatorname{arcctg}2-\operatorname{arcctg}1|\geqslant\left|2\operatorname{arcctg}2-\frac{\pi}{4}\right|=$$
$$=\varepsilon_0>0.$$

Поэтому последовательность $\{f_n(x)\}$ не является равномерно сходящейся на множестве E. Заметим, что $f_n(x)\to x^2$, $x\in E$. ▲

Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E (**17.1—17.2**):

17.1. 1) $f_n(x)=x^n-3x^{n+2}+2x^{n+3}$, $\quad E=[0;\ 1]$.

2) $f_n(x)=x^4\cos\dfrac{1}{nx}$, $\quad E=(0;\ +\infty)$.

3) $f_n(x)=\dfrac{nx^2}{x+3n+2}$, $\quad E=[0;\ +\infty)$.

4) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$, $\quad E=\mathbb{R}$.

5) $f_n(x)=(x-1)\operatorname{arctg}x^n$, $\quad E=(0;\ +\infty)$.

6) $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$, $\quad E=[0;\ 2]$.

17.2. 1) $f_n(x)=n^3x^2e^{-nx}$, $\quad E=[0;\ +\infty)$.

2) $f_n(x)=n\left(\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}-x\right)$, $\quad E=(0;\ +\infty)$.

3) $f_n(x)=n(x^{1/n}-1)$, $\quad E=[1;\ 3]$.

4) $f_n(x)=n\operatorname{arcctg}nx^2$, $\quad E=(0;\ +\infty)$.

5) $f_n(x)=n(x^{1/n}-x^{1/2n})$, $\quad E=(0;\ +\infty)$.

6) $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}$, $\quad E=[0;\ +\infty)$.

Доказать, что последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве E (17.3—17.4):

17.3. 1) $f_n(x)=e^{-nx^2}$, $\quad E=[1;\ +\infty)$.

2) $f_n(x)=x^{2n}$, $\quad E=[0;\ \delta]$, $\quad 0<\delta<1$.

3) $f_n(x)=\sqrt{n}\sin\dfrac{x}{n\sqrt{n}}$, $\quad E=\mathbb{R}$.

4) $f_n(x)=\dfrac{\sin n\sqrt{x}}{\ln(n+1)}$, $\quad E=[0;\ +\infty)$.

5) $f_n(x)=\dfrac{n}{x^2+n^2}\operatorname{arctg}\sqrt{nx}$, $\quad E=[0;\ +\infty)$.

6) $f_n(x)=\ln\left(1+\dfrac{\cos nx}{\sqrt{n+x}}\right)$, $\quad E=[0;\ +\infty)$.

17.4. 1) $f_n(x)=\dfrac{nx^2}{n+x}$, $\quad E=[1;\ +\infty)$.

2) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}$, $\quad E=\mathbb{R}$.

3) $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$, $\quad E=[-1;\ 1]$.

4) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^3x^2}$, $\quad E=[1;\ +\infty)$.

5) $f_n(x)=n^{3/4}xe^{-\sqrt{nx}}$, $\quad E=[0;\ +\infty)$.

6) $f_n(x)=\dfrac{n^2x^2}{1+n^2x^4}\sin\dfrac{x^2}{\sqrt{n}}$, $\quad E=[1;+\infty)$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множестве E (17.5—17.7):

17.5. 1) $f_n(x)=\dfrac{\cos\sqrt{nx}}{\sqrt{n+2x}}$, $\quad E=[0;\ +\infty)$.

2) $f_n(x)=\sin(ne^{-nx})$, $\quad E=[1;\ +\infty)$.

3) $f_n(x)=\dfrac{\ln nx}{nx^2}$, $\quad E=[1;\ +\infty)$.

4) $f_n(x)=\dfrac{4n\sqrt{nx}}{3+4n^2x}$, $\quad E=[\delta;\ +\infty)$, $\quad \delta>0$.

5) $f_n(x)=xe^{-nx}\ln^2 n$, $\quad E=[0;\ +\infty)$.

6) $f_n(x)=n^{3/2}\left(1-\cos\dfrac{\sqrt[4]{x}}{n}\right)$, $\quad E=[0;\ +\infty)$.

17.6. 1) $f_n(x)=\dfrac{x+xn^3+x^3n^6}{1+x^2n^6}$, $\quad E=[1;\ +\infty)$.

2) $f_n(x)=n\displaystyle\int_0^x \sin\frac{\pi t^n}{2}\,dt$, $\quad E=[0;\ \alpha]$, $\quad 0<\alpha<1$.

3) $f_n(x)=\operatorname{tg}\left(\dfrac{n-1}{n}x\right)$, $\quad E=(0;\ \pi/4)$.

4) $f_n(x)=x^n-x^{n+2}, \quad E=[0;\ 1].$

5) $f_n(x)=\sqrt[4]{x^4+\frac{1}{n^\alpha}}, \quad \alpha>0, \quad E=\mathbb{R}.$

6) $f_n(x)=\sin\frac{1+nx}{2n}, \quad E=\mathbb{R}.$

17.7. 1) $f_n(x)=\sin\frac{x}{n^\alpha}, \quad \alpha>0, \quad E=\mathbb{R}.$

2) $f_n(x)=x^n+x^{2n}-2x^{3n}, \quad E=[0;\ 1].$

3) $f_n(x)=\sin^n x, \quad E=(0;\ \pi/2).$

4) $f_n(x)=\frac{n}{x}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right), \quad E=(0;\ 10).$

5) $f_n(x)=nx(1-x)^n, \quad E=[0;\ 1].$

6) $f_n(x)=n(x^{1/n}-1), \quad E=[1;\ a], \quad 1<a<+\infty.$

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 (**17.8—17.16**):

17.8. 1) $f_n(x)=\frac{x}{x+n}, \quad E_1=[0;\ a], \quad 0<a<+\infty,$

$E_2=[0;\ +\infty).$

2) $f_n(x)=\frac{nx^2}{1+2n+x}, \quad E_1=[0;\ 1], \quad E_2=[1;\ +\infty).$

3) $f_n(x)=\frac{nx^2}{1+n^2x^4}, \quad E_1=[0;\ 1], \quad E_2=[1;\ +\infty).$

4) $f_n(x)=\operatorname{arctg}\frac{n}{x}, \quad E_1=(0;\ a], \quad 0<a<+\infty, \quad E_2=(0;\ +\infty).$

5) $f_n(x)=n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}-\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{n}}\right), \quad E=[0;\ 1), \quad E_2=(1;\ +\infty).$

6) $f_n(x)=\frac{(n+x)^2}{x^2+n^2-nx}, \quad E_1=[0;\ 2), \quad E_2=(2;\ +\infty).$

17.9. 1) $f_n(x)=\sqrt[n]{x^2+nx+1}, \quad E_1=(0;\ 1), \quad E_2=(1;\ +\infty).$

2) $f_n(x)=e^{-x^2-nx}, \quad E_1=(0;\ 1), \quad E_2=(1;\ +\infty).$

3) $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}, \quad E_1=[-2;\ 2], \quad E_2=\mathbb{R}.$

4) $f_n(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}, \quad E_1=(0;\ 2), \quad E_2=(0;\ +\infty).$

5) $f_n(x)=\frac{nx^2}{n^3+x^3}, \quad E_1=[0;\ 1], \quad E_2=[0;\ +\infty).$

6) $f_n(x)=\frac{1}{x^3}\cos\frac{x}{n}, \quad E_1=(0;\ 1), \quad E_2=(1;\ +\infty).$

17.10. 1) $f_n(x)=n\operatorname{arctg}\frac{1}{nx}, \quad E_1=(0;\ 2), \quad E_2=(2;\ +\infty).$

2) $f_n(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n} - n^2\right)$, $E_1 = (0;\ 1)$, $E_2 = (1;\ +\infty)$.

3) $f_n(x) = \frac{1}{x^2}\sqrt{1 + \frac{x}{n}}$, $E_1 = (0;\ 1)$, $E_2 = (1;\ +\infty)$.

4) $f_n(x) = \operatorname{ch} e^{-nx}$, $E_1 = (0;\ 1)$, $E_2 = (1;\ +\infty)$.

5) $f_n(x) = \frac{\ln n^2 x}{n^2 x}$, $E_1 = (0;\ 1)$, $E_2 = (1;\ +\infty)$.

6) $f_n(x) = nx^2 e^{-(n+1)x^2}$, $E_1 = [0;\ 1]$, $E_2 = [\delta;\ 1]$, $0 < \delta < 1$.

17.11. 1) $f_n(x) = \frac{\sqrt{n} + \operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n}\, x}$, $E_1 = (0;\ 1)$, $E_2 = (1;\ +\infty)$.

2) $f_n(x) = \cos(1/(1 + |\ln nx|))$, $E_1 = (0;\ 2)$, $E_2 = (2;\ +\infty)$.

3) $f_n(x) = \sqrt{n}\sin(x/\sqrt{n})$, $E_1 = [0;\ \pi]$, $E_2 = [\pi;\ +\infty)$.

4) $f_n(x) = \cos(1/nx)$, $E_1 = (0;\ \pi)$, $E_2 = (\pi;\ +\infty)$.

5) $f_n(x) = n^2 x^2 e^{-nx}$, $E_1 = [0;\ +\infty)$, $E_2 = [\delta;\ +\infty)$, $\delta > 0$.

6) $f_n(x) = n \operatorname{arctg} x^n$, $E_1 = [0;\ 1)$, $E_2 = (0;\ \delta)$, $0 < \delta < 1$.

17.12. 1) $f_n(x) = \operatorname{arctg}\frac{nx}{1 + n^2 x^2}$, $E_1 = (0;\ +\infty)$, $E_2 = (\delta;\ +\infty)$, $\delta > 0$.

2) $f_n(x) = e^{n\left(\frac{1}{x} - 1\right)}$, $E_1 = (1;\ +\infty)$, $E_2 = (\delta;\ +\infty)$, $\delta > 1$.

3) $f_n(x) = \frac{1 + \ln nx}{nx}$, $E_1 = (0;\ 1)$, $E_2 = (1;\ +\infty)$.

4) $f_n(x) = n \operatorname{arcctg} nx^2$, $E_1 = (0;\ 1)$, $E_2 = (1;\ +\infty)$.

5) $f_n(x) = \ln\left(x^2 + \frac{1}{n}\right)$, $E_1 = (0;\ +\infty)$, $E_2 = (a;\ +\infty)$, $a > 0$.

6) $f_n(x) = \sin(e^{-nx} + 1/\sqrt{n})$, $E_1 = [\alpha;\ +\infty)$, $\alpha > 0$, $E_2 = (0;\ +\infty)$.

17.13. 1) $f_n(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} e^{x/n}\right)$, $E_1 = (0;\ \alpha)$, $\alpha > 0$, $E_2 = (0;\ +\infty)$.

2) $f_n(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} x^n\right)$, $E_1 = (0;\ \alpha)$, $0 < \alpha < 1$, $E_2 = (0;\ 1)$.

3) $f_n(x) = \operatorname{arctg}\frac{1 - x^n}{1 + x^n}$, $E_1 = (0;\ 1/2)$, $E_2 = (1/2;\ 1)$.

4) $f_n(x) = \frac{x^6 + x^3 n^2 + x^2 n^4}{x^4 + n^4}$, $E_1 = [0;\ a]$, $0 < a < +\infty$, $E_2 = (0;\ +\infty)$.

5) $f_n(x) = \frac{1 + x^2 n^6 + \sqrt{x^3 n^6}}{x + x^3 n^6}$, $E_1 = (a;\ +\infty)$, $a > 0$, $E_2 = (0;\ +\infty)$.

6) $f_n(x) = \operatorname{arctg} 2nx - \operatorname{arctg} nx$, $E_1 = (0;\ 1)$, $E_2 = (1;\ +\infty)$.

17.14. 1) $f_n(x)=\dfrac{n^2x^2+nx+1}{n^2x^2+2}$, $E_1=(0;\ 1)$, $E_2=(1;\ +\infty)$.

2) $f_n(x)=\ln\dfrac{n^2x+n\sqrt{x}+1}{n^2x-n\sqrt{x}+1}$, $E_1=(0;\ 1)$, $E_2=(1;\ +\infty)$.

3) $f_n(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{nx-1}{nx+1}$, $E_1=(0;\ 1)$, $E_2=(1;\ +\infty)$.

4) $f_n(x)=\ln\left(1+\sin\dfrac{x\sqrt{n}}{x^2+n}\right)$, $E_1=(0;\ 1)$, $E_2=(1;\ +\infty)$.

5) $f_n(x)=n^2(e^{x^n}-\cos x^n)$, $E_1=[0;\ 1)$, $E_2=[0;\ \delta]$, $0<\delta<1$.

6) $f_n(x)=n\ln\left(1+\dfrac{1}{nx}\right)$, $E_1=(0;\ 2)$, $E_2=(2;\ +\infty)$.

17.15. 1) $f_n(x)=\sin\left(\sqrt{1+(nx)^2}-nx\right)$, $E_1=(0;\ 1)$, $E_2=(1;\ +\infty)$.

2) $f_n(x)=\sqrt{(nx)^3+nx^2+1}-\sqrt{(nx)^3+1}$, $E_1=(0;\ 1)$, $E_2=(1;\ +\infty)$.

3) $f_n(x)=\sin\dfrac{x}{e^{-n}+e^nx^2}$, $E_1=(0;\ 1)$, $E_2=(1;\ +\infty)$.

4) $f_n(x)=2\ln(e^x+n)-\ln(e^{2x}+n^2)$, $E_1=[0;\ +\infty)$, $E_2=[0;\ a]$, $a>0$.

5) $f_n(x)=n^8\left(\operatorname{ch}x^n-\dfrac{1}{1+x^n}\right)$, $E_1=[0;\ 1)$, $E_2=[0;\ a]$, $0<a<1$.

6) $f_n(x)=\ln\left(\dfrac{6e^{2x}+3n^2+ne^x}{n^2+2e^{2x}}\right)$, $E_1=[0;\ a]$, $a>0$, $E_2=[0;\ +\infty)$.

17.16. 1) $f_n(x)=\arcsin\dfrac{x^n}{1+x^n}$. $E_1=[0;\ a]$, $0<a<1$, $E_2=[0;\ 1)$.

2) $f_n(x)=\ln\dfrac{\sqrt{e^x+n^2}}{1+ne^{-x/2}}$, $E_1=[0;\ a]$, $a>0$, $E_2=[0;\ +\infty)$.

3) $f_n(x)=\sqrt{n}\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^x-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^x\right)$, $E_1=(0;\ 1)$, $E_2=(1;\ +\infty)$.

4) $f_n(x)=\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n$, $E_1=[-a;\ a]$, $a>0$, $E_2=\mathbb{R}$.

5) $f_n(x)=n(x^{1/n}-x^{1/(2n)})$, $E_1=(1/2;\ 1)$, $E_2=(1;\ +\infty)$.

6) $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$, $E_1=[0;\ 2]$, $E_2=[2;\ +\infty)$.

17.17. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$ на множествах E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, где $E_1=[0;\ \delta]$, $0<\delta<1$, $E_2=[0;\ 1)$, $E_3=[1-\alpha;\ 1+\alpha]$, $0<\alpha<1$, $E_4=[1+\alpha;\ +\infty)$, $\alpha>0$, $E_5=(1;\ +\infty)$.

17.18. Найти все значения α, при которых последовательность $\{f_n(x)\}$: а) сходится на множестве E; б) сходится равномерно на множестве E. Указать предельную функцию этой последовательности.

1) $f_n(x)=\dfrac{\ln nx}{n^\alpha x}$, $\quad E=(0;\ 1)$.

2) $f_n(x)=\dfrac{n^\alpha x}{x^2+n^2}$, $\quad E=(0;\ +\infty)$.

3) $f_n(x)=\dfrac{n^\alpha x}{x^2+n}$, $\quad E=\mathbb{R}$.

4) $f_n(x)=n^\alpha xe^{-nx^2}$, $\quad E=[0;\ +\infty)$.

5) $f_n(x)=\dfrac{x^2e^{-(n+2)x^2}}{n^\alpha}$, $\quad E=[0;\ +\infty)$.

6) $f_n(x)=n^\alpha \operatorname{arctg}(1/x^n)$, $\quad E=(0;\ 1)$.

7) $f_n(x)=n^\alpha \ln\left(1+\dfrac{1}{nx}\right)$, $\quad E=(0;\ +\infty)$.

8) $f_n(x)=x \operatorname{arctg} n^\alpha x$, $\quad \alpha>0$, $\quad E=[0;\ +\infty)$.

9) $f_n(x)=n^\alpha\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$, $\quad E=(0;\ +\infty)$.

17.19. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множестве $E=[0;\ 1]$ последовательность $\{f_n(x)\}$, где

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1/n,\\ n^2\left(\dfrac{2}{n}-x\right), & \text{если } 1/n<x<2/n,\\ 0, & \text{если } x\geqslant 2/n.\end{cases}$$

17.20. Доказать, что если последовательности $\{f_n(x)\}$ и $\{g_n(x)\}$ равномерно сходятся на множестве E соответственно к $f(x)$ и $g(x)$, то при любых α и β ($\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$) последовательность $\{\alpha f_n(x)+\beta g_n(x)\}$ равномерно сходится к $\alpha f(x)+\beta g(x)$.

17.21. Доказать, что если последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве E к функции $f(x)$, а функция $g(x)$ ограничена на этом множестве, то последовательность $\{g(x)f_n(x)\}$ равномерно сходится к $g(x)f(x)$.

17.22. Доказать, что если $f(x)$ — произвольная функция, определенная на отрезке $[a;\ b]$, то последовательность $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x)=\dfrac{[nf(x)]}{n}$ ($[a]$ — целая часть a), сходится равномерно к $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$.

17.23. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на интервале $(a; b)$, то последовательность $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x)=n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right)$, сходится равномерно к $f'(x)$ на отрезке $[a_1; b_1]$, $a<a_1<b_1<b$.

17.24. Доказать, что если последовательность многочленов степени не выше n равномерно сходится на интервале $(a; b)$, то предельная функция этой последовательности — многочлен степени не выше n.

17.25. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, то последовательность $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{k}{n}\right)$, сходится равномерно на любом конечном отрезке $[a; b]$.

§ 18. Сходимость и равномерная сходимость функциональных рядов

1. Сходимость, абсолютная сходимость и область сходимости функционального ряда. Пусть функции $u_n(x)$, $n\in\mathbb{N}$, определены на множестве E и $x_0\in E$. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{1}$$

называется *сходящимся в точке* x_0, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, и *абсолютно сходящимся в точке* x_0, если при $x=x_0$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|. \tag{2}$$

Если ряд (1) сходится в каждой точке $x\in E$, то этот ряд называют *сходящимся на множестве* E, а если в каждой точке $x\in E$ сходится ряд (2), то ряд (1) называют *абсолютно сходящимся на множестве* E.

Сумму

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x) \tag{3}$$

называют *n-й частичной суммой ряда* (1), а предел последовательности частичных сумм сходящегося на множестве E ряда (1) называют его *суммой*:

$$S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x). \tag{4}$$

Множества всех значений x, при которых сходятся ряды (1) и (2), называют соответственно *областью сходимости* и *областью абсолютной сходимости ряда* (1).

Пример 1. Найти область сходимости и абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, если:

1) $u_n(x)=\dfrac{\ln^n x}{n}$. 2) $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$.

3) $u_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$.

△ 1) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{q^n}{n}$ абсолютно сходится, если $|q|<1$, и расходится, если $|q|>1$. При $q=-1$ этот ряд сходится неабсолютно, а при $q=1$ — расходится. Поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n x}{n}$$

абсолютно сходится, если $|\ln x|<1$, т. е. если $e^{-1}<x<e$, и сходится неабсолютно, если $\ln x=-1$, т. е. при $x=e^{-1}$. При других значениях x этот ряд расходится. Итак, полуинтервал $[e^{-1}; e)$ — область сходимости, а интервал $(e^{-1}; e)$ — область абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n x}{n}.$$

2) По признаку Даламбера ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}q^n$$

абсолютно сходится, если $|q|<1$, и расходится, если $|q|>1$. При $q=1$ этот ряд сходится неабсолютно (признак Лейбница), а при $q=-1$ — расходится. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ абсолютно сходится при тех значениях x, для которых выполняется неравенство $|(1-x)/(1+x)|<1$. Решая это неравенство, получаем $x>0$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ абсолютно сходится при $x>0$. Если $|(1-x)/(1+x)|=1$, то $x=0$,

$$u_n(0)=\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(0)$ сходится неабсолютно. Итак, область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ — промежуток $[0; +\infty)$, а область абсолютной сходимости — интервал $(0; +\infty)$.

3) Пусть $|x|<1$, тогда $\left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right|<|x|^n$, и поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ абсолютно сходится, если $|x|<1$. Пусть $|x|>1$. Так как $u_n(1/x)=u_n(x)$, то, полагая $1/x=t$, получаем $|u_n(x)|=$ $=|u_n(t)|<|t|^n$, где $|t|<1$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ абсолютно сходится, если $|x|>1$. Если $|x|=1$, то $|u_n(x)|=1/2$ и поэтому ряд расходится при $x=1$ и $x=-1$. Итак, область сходимости и область абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ — множество, полученное из $\mathbb{R}$ удалением точек $x=1$ и $x=-1$. ▲

2. **Равномерная сходимость функционального ряда.** Ряд (1), члены которого определены на множестве E, называется *равномерно сходящимся на множестве* E, если последовательность его частичных сумм (3) равномерно сходится на этом множестве, т. е.

$$S_n(x) \rightrightarrows S(x), \qquad x \in E,$$

или

$$r_n(x) \rightrightarrows 0, \qquad x \in E,$$

где $S(x)$ — сумма ряда (1),

$$r_n(x)=S(x)-S_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$$

— n-й остаток ряда.

Для равномерной сходимости на множестве E ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{x \in E} |r_n(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{5}$$

Пример 2. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на множестве E, если:

1) $u_n(x)=x^{n-1}, \qquad E=[-1/2;\ 1/2]$.

2) $u_n(x)=\dfrac{x}{(1+(n-1)x)(1+nx)}, \qquad E=(\delta;\ +\infty), \qquad \delta>0$.

3) $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}, \qquad E=[0;\ +\infty)$.

▲ 1) Если $u_n(x)=x^{n-1}$, то

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)=\frac{1-x^n}{1-x}, \qquad S(x)=\frac{1}{1-x},$$

$$r_n(x)=S(x)-S_n(x)=\frac{x^n}{1-x}.$$

Так как $-1/2 \leqslant x \leqslant 1/2$, то $1-x \geqslant 1/2$ и поэтому

$$|r_n(x)| < 1/2^{n-1},$$

откуда следует, что

$$r_n(x) \rightrightarrows 0, \quad x \in [-1/2;\ 1/2],$$

т. е. ряд равномерно сходится на множестве E.

2) Заметив, что

$$u_n(x) = \frac{1}{1+(n-1)x} - \frac{1}{1+nx},$$

получаем

$$S_n(x) = 1 - \frac{1}{1+nx},$$

откуда

$$S(x) = 1, \quad r_n(x) = 1/(1+nx).$$

Так как $x > \delta > 0$, то $nx > n\delta$, $0 < r_n(x) < 1/(1+n\delta)$, откуда следует, что ряд равномерно сходится на множестве E.

3) При каждом $x \geqslant 0$ последовательность $\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}\right\}$ имеет предел, равный нулю и монотонно убывает, так как функция

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t+\sqrt{x}}}$$

убывает при $t \geqslant 1$ для каждого $x \in E$ $\left(\varphi'(t) = -\frac{1}{3}(t+\sqrt{x})^{-4/3} < 0 \text{ при } t \geqslant 1\right)$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на множестве E (признак Лейбница) и при этом

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{n+1+\sqrt{x}}}.$$

Так как $x \geqslant 0$, то

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$$

и поэтому ряд равномерно сходится на множестве E. ▲

3. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Если для функционального ряда (1) можно указать такой сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, что для всех $n \geqslant n_0$ и для всех $x \in E$ выполняются неравенства

$$|u_n(x)| \leqslant a_n, \tag{6}$$

то ряд (1) *сходится абсолютно и равномерно на множестве* E.

В случае, когда выполняется условие (6), говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *мажорируется* рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 3. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать абсолютную и равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве E, если:

1) $u_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(n^2x)\cdot\cos\pi nx}{n\sqrt{n}}, \qquad E = \mathbb{R}.$

2) $u_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{n\ln^2(n+1)}\right), \qquad E = [0;\ 2].$

3) $u_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{n+x^3}}\sin\dfrac{1}{\sqrt{nx}}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{n}}, \qquad E = (0;\ +\infty).$

4) $u_n(x) = e^{-n(x^2+\sin x)}, \qquad E = [1;\ +\infty).$

5) $u_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^{\alpha}x^2}, \qquad \alpha > 4, \qquad E = \mathbb{R}.$

6) $u_n(x) = x^2e^{-nx}, \qquad E = [0;\ +\infty).$

△ 1) Так как для всех $x \in \mathbb{R}$ и для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства $|\operatorname{arctg} n^2x| < \pi/2$, $|\cos\pi nx| \leqslant 1$ то $|u^n(x)| < \pi/(2n^{3/2})$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ следует абсолютная и равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на $\mathbb{R}$.

2) Пользуясь тем, что при $t \geqslant 0$ выполняются неравенства $0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$ и учитывая, что $0 \leqslant x \leqslant 2$, получаем

$$0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{x}{n\ln^2(n+1)} \leqslant \frac{2}{n\ln^2(n+1)}.$$

Из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\ln^2(n+1)}$$

следует абсолютная и равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

3) Так как $\sqrt[4]{n+x^3} \geqslant \sqrt[4]{n}$ при $x > 0$, а $|\sin t| < t$, $0 < \operatorname{arctg} t < t$ при $t > 0$, то

$$|u_n(x)| < \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{nx}}\cdot\sqrt{\frac{x}{n}} = \frac{1}{n^{5/4}}$$

для $\forall n \in \mathbb{N}$ и для $\forall x \in E$, откуда следует абсолютная и равномерная сходимость ряда.

4) Пусть $\varphi(x) = x^2 + \sin x$, тогда

$$\varphi'(x) = 2x + \cos x > 0 \quad \text{при} \quad x > 1/2$$

и поэтому $\varphi(x)$ — возрастающая функция при $x \geqslant 1$. Так как $\varphi(1) = 1 + \sin 1 > 0$, то $0 < u_n(x) \leqslant e^{-n\varphi(1)}$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n}$, где $\alpha > 0$, следует абсолютная и равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве $[1; +\infty)$.

5) Воспользуемся неравенством $a^2 + b^2 \geqslant 2|ab|$, которое выполняется для любых действительных чисел a, b. Получим

$$1 + n^{\alpha}x^2 \geqslant 2n^{\alpha/2}|x|,$$

откуда при $x \neq 0$ следует, что

$$|u_n(x)| \leqslant \frac{n|x|}{n^{\alpha/2}|x|} = \frac{1}{n^{\alpha/2-1}}.$$

Учитывая, что $u_n(0) = 0$, находим

$$|u_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^{\alpha/2-1}}$$

для $\forall x \in \mathbb{R}$, для $\forall n \in \mathbb{N}$. Так как $\alpha/2 - 1 = \beta > 1$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta}}$, где $\beta > 1$, следует абсолютная и равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве $\mathbb{R}$.

6) Заметим, что $u_n(x) > 0$ при $x > 0$ и $u_n(0) = 0$. При $x > 0$ уравнение

$$u_n'(x) = e^{-nx}(2x - nx^2) = 0$$

имеет единственный корень $x = x_n = 2/n$, причем $u_n'(x) > 0$ при $x \in (0; x_n)$ и $u_n'(x) < 0$ при $x \in (x_n; +\infty)$. Поэтому x_n — точка максимума функции $u_n(x)$, причем $\sup\limits_{x \in E} u_n(x) = u_n(x_n)$. Следовательно,

$$0 \leqslant u_n(x) \leqslant u_n(x_n) = \frac{4}{n^2} e^{-2}$$

при $\forall n \in \mathbb{N}$ и при $\forall x \in E$, откуда следует абсолютная и равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве E. ▲

4. Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Неравномерная сходимость. Для того чтобы ряд (1) равномерно сходился на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы для этого ряда выполнялось условие Коши: для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N_ε такой, что для всех $n \geqslant N_\varepsilon$, для всех $p \in \mathbb{N}$ и для всех $x \in E$ имеет место неравенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon. \tag{7}$$

Если условие Коши не выполняется, т. е.

$$\exists\varepsilon_0 > 0\forall m \in \mathbb{N}\exists n \geqslant m\exists p \in \mathbb{N}\exists\tilde{x} \in E\colon \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(\tilde{x})\right| \geqslant \varepsilon_0, \tag{8}$$

то ряд (1) не является равномерно сходящимся на множестве E. В частности, если

$$\exists\varepsilon_0 > 0\exists n_0 \in \mathbb{N}\forall n \geqslant n_0\exists x_n \in E\colon |u_n(x_n)| \geqslant \varepsilon_0, \tag{9}$$

то ряд (1) не является равномерно сходящимся на множестве E.

Пример 4. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множестве E ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, если:

1) $u_n(x) = \dfrac{1}{(1+nx)^2}$, $\quad E = (0;\ +\infty)$.

2) $u_n(x) = e^{-n^2x^2}\sin nx$, $\quad E = \mathbb{R}$.

3) $u_n(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x^3}{n\sqrt{n}}$, $\quad E = [1;\ +\infty)$.

4) $u_n(x) = x^n$, $\quad E = (0;\ 1)$.

5) $u_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$, $\quad E = [0;\ 1]$.

6) $u_n(x) = nx^2e^{-nx}$, $\quad E = (0;\ +\infty)$.

△ 1) Если $x > 0$, то $0 < u_n(x) < 1/(n^2x^2)$, откуда следует сходимость ряда на множестве E. Пусть $x = x_n = 1/n$, тогда $x_n \in E$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(x_n) = 1/4$. Таким образом, выполняется условие (9), и поэтому ряд сходится неравномерно на множестве E.

2) Заметим, что $u_n(0) = 0$, а при $x \neq 0$ выполняются неравенства

$$|u_n(x)| \leqslant e^{-n^2x^2} < 1/(n^2x^2),$$

так как $e^t > t$ при $t > 0$. Поэтому ряд сходится на $\mathbb{R}$. Пусть $x = x_n = 1/n$, тогда $x_n \in \mathbb{R}$ при $\forall n \in \mathbb{N}$ и

$$u_n(x_n) = e^{-1}\sin 1.$$

Условие (9) выполняется и, следовательно, ряд неравномерно сходится на множестве $\mathbb{R}$.

3) Ряд сходится на множестве E, так как $0 < u_n(x) < x^3/n^{3/2}$. Взяв $x_n = \sqrt{n}$, получаем

$$u_n(x_n) = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4,$$

откуда следует, что ряд сходится неравномерно.

4) Ряд сходится неравномерно на множестве E. Действительно, если $x_n = 1/\sqrt[n]{2}$, то $x_n \in (0;\ 1)$ при $\forall n \in \mathbb{N}$ и $u_n(x_n) = 1/2$.

Заметим, что на любом отрезке $\Delta \subset (0;\ 1)$ ряд сходится равномерно (см. пример 2, 1)).

5) Заметим, что $u_n(0)=0$, а если $x \neq 0$, то

$$0 < u_n(x) \leqslant x/(n^2x^2) < 1/(n^2x),$$

откуда следует, что ряд сходится на множестве E. Для любого $m \in \mathbb{N}$ возьмем $n=m$, $p=n$, $\tilde{x}=1/n$. Заметим, что если $n+1 \leqslant k \leqslant 2n$, то $1+\frac{k^2}{n^2} \geqslant 1+\frac{(2n)^2}{n^2}=5$ и поэтому

$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{1+(k^2/n^2)} \geqslant \frac{1}{n}\cdot 5n=\frac{1}{5},$$

т. е. выполняется условие (8) при $\varepsilon_0=1/5$. Следовательно, ряд сходится неравномерно на множестве E.

6) Если $x>0$, то $0<u_n(x)<nx^2\frac{3!}{(nx)^3}=\frac{6}{n^2x}$, так как $e^t > t^3/3!$ при $t>0$. Поэтому ряд сходится на множестве E. Покажем, что для этого ряда на множестве E выполняется условие (8). В самом деле, для любого $m \in \mathbb{N}$ возьмем $n=m$, $p=n$, $\tilde{x}=1/n$. Тогда $\tilde{x} \in E$ и

$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k(\tilde{x})=\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} e^{-k/n} \geqslant \frac{1}{n}e^{-2}\cdot n=e^{-2}.$$

Следовательно, ряд сходится неравномерно на множестве E. ▲

5. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.

Признак Дирихле. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x) \tag{10}$$

сходится равномерно на множестве E, если выполняются следующие условия:

1) Последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ ограничена на множестве E, т. е.

$$\exists M>0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in E:\ \left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \leqslant M. \tag{11}$$

2) Последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна при каждом $x \in E$ и равномерно стремится к нулю, т. е.

$$a_{n+1}(x) \leqslant a_n(x) \quad \text{или} \quad a_{n+1}(x) \geqslant a_n(x), \qquad n \in \mathbb{N}, \quad x \in E, \tag{12}$$

$$a_n(x) \rightrightarrows 0, \qquad x \in E. \tag{13}$$

Признак Абеля. Ряд (10) равномерно сходится на множестве E, если выполняются следующие условия:

1) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ равномерно сходится на множестве E.

2) Последовательность $\{a_n(x)\}$ ограничена на множестве E и монотонна при каждом $x \in E$.

Пример 5. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве E, если:

1) $u_n(x) = \dfrac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x^2}}$, $\quad E = \mathbb{R}$.

2) $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, $\quad E = [0;\ 1]$.

△ 1) Обозначим

$$b_n(x) = \sin x \sin nx, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n+x^2}}$$

и воспользуемся формулой

$$\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x \quad (\text{§ 15, пример 3}).$$

Тогда

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\sin x \sin kx = 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x,$$

откуда следует, что $|B_n(x)| \leqslant 2$ для $\forall x \in \mathbb{R}$ и для $\forall n \in \mathbb{N}$, т. е. последовательность $\{B_n(x)\}$ ограничена на множестве E. Последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна для каждого $x \in \mathbb{R}$, так как функция $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t+x^2}}$ монотонно убывает при $t \geqslant 1$

$$\left(\varphi'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{(t+x^2)^3}} < 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant 1\right).$$

Кроме того, $0 < a_n(x) \leqslant 1/\sqrt{n}$ для $\forall x \in \mathbb{R}$, откуда следует, что $a_n(x) \rightrightarrows 0$, $x \in \mathbb{R}$. По признаку Дирихле ряд равномерно сходится на $\mathbb{R}$.

2) Обозначим

$$b_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}, \quad a_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

и заметим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ равномерно сходится на множестве $[0;\ 1]$, так как он равномерно сходится на множестве $[0;\ +\infty)$ (пример 2, 3)). Последовательность $\{a_n(x)\}$ ограничена на множестве $[0;\ 1]$, так как

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e,$$

и монотонна при каждом $x \in [0;\ 1]$, так как $\varphi(t) = \left(1+\dfrac{x}{t}\right)^t$ — возрастающая функция при $t \geqslant 1$ для каждого $x \in [0;\ 1]$. По признаку Абеля ряд сходится равномерно на множестве $[0;\ 1]$. ▲

Найти область сходимости и область абсолютной сходимости функциональных рядов (18.1—18.6):

18.1. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi x}{n}$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n x}{n \ln^2 (n+1)}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n (x+2)^n}$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n^2}$.

18.2. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (5 - x^2)^n$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\ln x^2}$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nx^2}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln^n (x+2)}$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^n x}{n^2+4}$.

18.3. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \ln^n (x^2+2)$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4} \left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^n$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+2}{n}} \left(\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}\right)^n$.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^n$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{2x-3}{4}\right)^n$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n(n+1)}$.

18.4. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt[3]{n}}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+\sqrt{n}}$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin nx$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e^{-n \sin x}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)^n$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^n (e^{x/n}-1)^n$.

18.5. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \pi n x$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n n^{-x}$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}+1}$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{n}+x\right)^n$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{\pi x}{n}\right)^{n^3}$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$.

18.6. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+x^2}\right)$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n+\sqrt{x}}$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sin \sin \ldots \sin}_{n \text{ раз}} x$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x(x-1)\ldots(x-(n-1))}{n!}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x^2+1)(x^2+2)\ldots(x^2+n)}$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^n)}$.

18.7. Исходя из определения равномерной сходимости, доказать равномерную сходимость функционального ряда в указанном промежутке:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n, \quad -q \leqslant x \leqslant q, \quad 0<q<1.$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{n-1}}{n}-\frac{x^n}{n+1}\right), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}, \quad 0 \leqslant x < +\infty.$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}-\frac{\sin(n+1)x}{\sqrt{n+1}}\right), \quad -\infty < x < +\infty.$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n\sqrt{n}}, \quad -\infty < x < +\infty.$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{3^n\sqrt{1+nx^2}}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2.$

Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость функционального ряда в указанном промежутке (18.8—18.12):

18.8. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}, \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^{3/2}x^2}, \qquad -\infty < x < +\infty.$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2nx}{\sqrt[3]{n^4+x^2}}, \qquad -\infty < x < +\infty.$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx}{x^4+n\sqrt[3]{n}}, \qquad -\infty < x < +\infty.$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos \pi nx, \qquad -\infty < x < +\infty.$

18.9. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{nx}}, \qquad 1 \leqslant x < +\infty.$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n\sqrt{n+x}}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1/3.$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(3n+1)\,3^n}, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 3.$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n \cos^2 nx}{\sqrt{n^3+x^4}}, \qquad -3 \leqslant x \leqslant -1.$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^3 (2x)^{2n}}{x^2+3n+4}, \qquad -1/4 \leqslant x \leqslant 1/4.$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \operatorname{arctg} 2n^2x}{\sqrt[3]{n^7+n+x}}, \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

18.10. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \sin \frac{1}{nx}}{4+\ln^2 nx}, \qquad 2 \leqslant x < +\infty.$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n^2x}, \qquad \delta < x < +\infty, \quad \delta > 0.$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{R^n x^n}{1+x^{2n}}, \qquad R > 0, \quad -\alpha < x < \alpha, \quad \alpha < \min(1;\ 1/R).$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-x}\ln^2 n, \qquad \delta < x < +\infty, \qquad \delta > 1.$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{4+n^3x^2}, \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$

18.11. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2+n^3}, \qquad -\infty < x < +\infty.$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\ln(1+nx)}{x^n}, \qquad 1+\alpha \leqslant x < +\infty, \qquad \alpha > 0.$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^4} \operatorname{arctg} \frac{x}{n}, \qquad -\infty < x < +\infty.$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{x+n}\right)^3, \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} \frac{x^2 \sin x}{1+n^5x^4}, \qquad -\infty < x < +\infty.$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{1+n^2x}, \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

18.12. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{nx} \ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right), \qquad 0 < x < +\infty.$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nxe^{-x^2n^6}, \qquad -\infty < x < +\infty.$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \sin \frac{x}{n}}{x^2+\ln^3(n+1)}, \qquad -\infty < x < +\infty.$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^6x^2} \sin nx, \qquad -\infty < x < +\infty.$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^3}, \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{1+n^8x^3}, \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость функциональный ряд в указанном промежутке (18.13—18.23):

18.13. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 \sin(n\sqrt{x})}{1+n^3x^4}, \qquad 0 \leqslant x < +\infty$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{(n^2+1)(1+n^4x^2)\operatorname{arctg}(1+x)}, \qquad 0 < x < +\infty.$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}\cos nx}{n(2nx^2+1)}, \qquad 0 < x < +\infty.$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2+n^2}\right)^2, \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n}\left(1+\frac{1}{n}-x\right)^n, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x\sin(x+n)}{n^2x^2+n+1}, \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

18.14. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{xe^{-x^2 n}}{\sqrt{n}\ln^3(n+1)}, \qquad -\infty < x < +\infty.$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x^2/n)}{x^2\sqrt{n}+1}, \qquad -\infty < x < +\infty.$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x/n)\sin 2nx}{x^2+4n}, \qquad -\infty < x < +\infty.$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((n^2+1)x/n) - \cos((n^2-1)x/n)}{x^2+n}, \qquad -\infty < x < +\infty.$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^2\left(1+\frac{x}{1+n^2x^2}\right), \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{1+nx^3}\right)^3, \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

18.15. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{n(1+2nx^2)}, \qquad -\infty < x < +\infty.$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{1+n^2x^5}\right)^2, \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1+nx)^4}, \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(x/\ln(n+2))}{(n\ln(n+1)+x)^2}, \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n/x)\sin(x/n)}{1+nx^2}, \qquad 0 < x < +\infty.$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx \sin(x^2/n)}{1+\sqrt{n}\,x^4}, \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

18.16. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{x\sin x}{1+nx^3}\right)^2, \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 x}{x+n^3x^2}, \qquad 0 < x < +\infty.$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{1}{nx}\sin^2\dfrac{nx}{n^3+x}, \qquad 0 < x < +\infty.$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{x^2+n^2}, \qquad -\infty < x < +\infty.$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{x\sin(x/\sqrt{n})}{x^3+n}\right)^2, \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(x/n)\operatorname{arctg}(x/\sqrt{n})}{nx+x^2}, \qquad 0 < x < +\infty.$

18.17. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^2e^{-nx}\sin(1/n), \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-x/n}\cos nx}{x^2+n^2x}, \qquad \alpha \leqslant x < +\infty, \quad \alpha > 0.$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(x\sqrt{n})\ln\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)}{\sqrt{1+nx^4}}, \qquad -\infty < x < +\infty.$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^3\sin^2 nx}{2+n^3x^6}, \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{nx^2}{2+n^3x^2}\right), \qquad -\infty < x < +\infty.$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{n}\,\frac{\sin nx}{2nx^2+1}, \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

18.18. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}, \qquad 0 < x < +\infty.$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+nx)^2}, \qquad 0 < x < +\infty.$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{n}\right)^2, \qquad -\infty < x < +\infty.$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^2\frac{1}{1+nx}, \qquad 0 < x < +\infty.$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n\operatorname{tg}x}, \qquad 0 < x < \pi/2.$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{n\sin x}{x}\right)^{-2}, \qquad 0 < x < \pi.$

18.19. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{(1+nx)\sqrt{nx}}, \qquad 0 < x < \pi.$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x^2}\sin nx, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{nx}}{1+x^3n^2}, \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{x^3}{n\ln^2(n+1)}, \qquad 1 \leqslant x < +\infty.$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad 0 < x < +\infty.$

18.20. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n\sin\frac{x}{3^n}, \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{(1+(n-1)x)(1+nx)}$, $\quad 0 < x < +\infty$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{ctg}(\pi x/n)}{2^n}$, $\quad 0 < x < 1$.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n)$, $\quad 1/2 < x < 1$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x-1}{x^n}$, $\quad 1 \leqslant x < +\infty$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{x^2} e^{-n^2/x}$, $\quad 0 < x < +\infty$.

18.21. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+\sqrt{n}}$, $\quad 0 \leqslant x < +\infty$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(x+2n-1)(x+2n+1)}$, $\quad 0 \leqslant x < +\infty$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+\sin x}$, $\quad -\infty < x < +\infty$.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-x}$, $\quad \delta \leqslant x < +\infty$, $\quad \delta > 0$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n}$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant 1$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} e^{-nx}}{n}$, $\quad 0 \leqslant x < +\infty$.

18.22. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx \sin x}{\sqrt[3]{n+x}}$, $\quad 0 \leqslant x < +\infty$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \dfrac{x^n}{x^n+1}$, $\quad 1 \leqslant x < +\infty$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} x^n$, $\quad 1 \leqslant x < +\infty$.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n|x|^{3/2}}{(1+n^3x^2)^3}$, $\quad -\infty < x < +\infty$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^3x^3}, \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \sin(1/2^n), \qquad -2 < x < 2.$

18.23. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{x}/n)}{\sqrt{x^2+n^2}}, \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{4+n^4x^3}, \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{x}}{1+n^3x^3}, \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n} \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right), \qquad -4 \leqslant x \leqslant 4.$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \operatorname{arctg} \frac{x}{2^n}, \qquad -2 \leqslant x \leqslant 2.$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{2x}{x^2+n^2} \sin \frac{\sqrt{n+1}}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}, \qquad -\infty < x < +\infty.$

18.24. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$$

сходится равномерно на любом конечном отрезке, но не сходится абсолютно ни при одном значении x.

18.25. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n}$$

сходится равномерно на всей действительной оси, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n},$$

составленный из модулей членов исходного ряда, сходится неравномерно.

18.26. Доказать, что если $\{a_n\}$ — числовая последовательность такая, что $a_{k+1} \leqslant a_k$ $(k \in \mathbb{N})$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

сходятся равномерно на любом отрезке, не содержащем точек $x_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

18.27. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^4}{(1+x^4)^n}$ сходится равномерно на любом отрезке, не содержащем точку $x = 0$.

18.28. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость ряд в указанном промежутке:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^3}{(1+x^3)^n}$, $\quad 0 < x < +\infty$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n(n-1)/2}}{\sqrt[3]{n+x^2}}$, $\quad -a \leqslant x \leqslant a$, $\quad a > 0$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(\pi n/3)}{\sqrt{n^2+x^4}}$, $\quad -\infty < x < +\infty$.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n^2+nx^2}}$, $\quad -\infty < x < +\infty$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{2n+n^2x^2}$, $\quad 0 < x < 1$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n+x^2}}$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant 2$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость ряд на множествах E_1 и E_2 (18.29—18.37):

18.29. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\dfrac{\pi}{2}x^n\right)$, $\quad E_1 = (0;\ \alpha)$, $\quad 0 < \alpha < 1$,

$E_2 = (0;\ 1)$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n \operatorname{arctg} x}$, $\quad E_1 = (\delta;\ +\infty)$, $\quad \delta > 0$, $\quad E_2 = (0;\ +\infty)$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}(x/n^2)$, $\quad E_1 = [0;\ a]$, $\quad a > 0$, $\quad E_2 = [0;\ +\infty)$.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)$, $E_1=[0;\ a]$, $a>0$, $E_2=[1;\ +\infty)$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n(x^2+2\sin x)}$, $E_1=(0;\ 1]$, $E_2=[1;\ +\infty)$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}$, $E_1=(0;\ 1]$, $E_2=[1;\ +\infty)$.

18.30. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{x}}{n\ln^3(n+2)}\right)$, $E_1=(0;\ 1)$, $E_2=(1;\ +\infty)$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n\arcsin x}$, $E_1=(0;\ 1/2)$, $E_2=(1/2;\ 1)$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}(1/(n^2x))$, $E_1=(0;\ 1]$, $E_2=(1;\ +\infty)$.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^3x}}$, $E_1=(0;\ 1]$, $E_2=(1;\ +\infty)$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n\sin^2 x}$, $E_1=(0;\ \pi/4]$, $E_2=(\pi/4;\ \pi/2]$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2x}\right)$, $E_1=(0;\ 1)$, $E_2=[1;\ 2]$.

18.31. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\sqrt[3]{\frac{x}{n^2}}\right)$, $E_1=(0;\ 1)$, $E_2=(1;\ +\infty)$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-nx}\operatorname{arctg}(n^2x)$, $E_1=(0;\ \delta)$, $E_2=(\delta;\ +\infty)$, $\delta>0$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(1/nx)\cos nx}{4+\ln^2 2nx}$, $E_1=(0;\ 1)$, $E_2=(1;\ +\infty)$.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2+\cos(n/(x+1))}$, $E_1=(0;\ \delta)$, $E_2=(\delta;\ +\infty)$, $\delta>0$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{tg}\frac{1}{3^nx+1}$, $E_1=(0;\ \delta)$, $E_2=(\delta;\ +\infty)$, $\delta>0$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{\frac{\ln x}{n}}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$, $E_1=(1;\ e)$, $E_2=(e;\ +\infty)$.

18.32. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2+x\sqrt{n^3}} \sin \sqrt[5]{\frac{x}{n}}$, $\quad E_1 = (1/2;\ +\infty)$,

$E_2 = (0;\ 1/2)$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{x\sqrt{n}}$, $\quad E_1 = (0;\ 1)$, $\quad E_2 = (1;\ +\infty)$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{e^{n^2 x}}$, $\quad E_1 = (\delta;\ +\infty)$, $\quad \delta > 0$, $\quad E_2 = (0;\ +\infty)$.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{e^{n^2 x} - 1}$, $\quad E_1 = (\delta;\ +\infty)$, $\quad \delta > 0$, $\quad E_2 = (0;\ +\infty)$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{n^2} \sin \frac{x}{n^2}$, $\quad E_1 = (0;\ \delta)$, $\quad \delta > 0$, $\quad E_2 = (0;\ +\infty)$.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{x}} \sin \frac{x}{4n^2}$, $\quad E_1 = (0;\ \delta)$, $\quad \delta > 0$, $\quad E_2 = (\delta;\ +\infty)$.

18.33. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, $\quad E_1 = [0;\ 2\pi]$, $\quad E_2 = [\delta;\ 2\pi - \delta]$,

$0 < \delta < 2\pi - \delta$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx^2}$, $\quad E_1 = (\delta;\ +\infty)$, $\quad \delta > 0$, $\quad E_2 = (0;\ +\infty)$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{n}} e^{-x^2 n}$, $\quad E_1 = (\delta;\ +\infty)$, $\quad \delta > 0$, $\quad E_2 = (0;\ +\infty)$.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\ldots(1+nx)}$, $\quad E_1 = [0;\ \delta]$, $\quad E_2 = [\delta;\ +\infty)$,

$\delta > 0$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x+n^2} \sin \frac{n^2}{x}$, $\quad E_1 = (0;\ 1)$, $\quad E_2 = (1;\ +\infty)$.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x/n)}{1+\ln^2(n/x)}$, $\quad E_1 = (0;\ 1)$, $\quad E_2 = (1;\ +\infty)$.

18.34. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(x/n)}{\sqrt{n+x^2}}$, $\quad E_1 = (0;\ +\infty)$, $\quad E_2 = (0;\ \delta)$, $\quad \delta > 0$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{x} e^{-n^2/x}$, $\quad E_1 = (0;\ +\infty)$, $\quad E_2 = (0;\ \delta)$, $\quad \delta > 0$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{x^2+n^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{n}$, $\quad E_1=(0;\ 1)$, $\quad E_2=(1;\ +\infty)$.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-x^2n^6} \sin(n^3x)$, $\quad E_1=(0;\ +\infty)$, $\quad E_2=(\delta;\ +\infty)$, $\quad \delta>0$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2x^2}{x+n^3} \ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)$, $\quad E_1=(0;\ 1)$, $\quad E_2=(1;\ +\infty)$.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{n}$, $\quad E_1=(0;\ 1)$, $\quad E_2=(1;\ +\infty)$.

18.35. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2+n}{n^2} \sin \frac{x}{n}$, $\quad E_1=(0;\ 1)$, $\quad E_2=(1;\ +\infty)$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x^2} \operatorname{arctg}(nx)$, $\quad E_1=(0;\ +\infty)$, $\quad E_2=(\delta;\ +\infty)$, $\quad \delta>0$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin(x/3^n)$, $\quad E_1=(0;\ 1)$, $\quad E_2=(0;\ +\infty)$.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin\sqrt{x/n}}{n+x}$, $\quad E_1=(0;\ \delta)$; $\quad E_2=(\delta;\ +\infty)$, $\quad \delta>0$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n \operatorname{tg}(x/3^n)$, $\quad E_1=[-2;\ 2]$, $\quad E_2=(-3;\ 3)$.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+3^n} \sin \frac{x}{2^n}$, $\quad E_1=[-5;\ 5]$, $\quad E_2=(-6;\ 6)$.

18.36. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+x}{n}$, $\quad E_1=(0;\ 1)$, $\quad E_2=(1;\ +\infty)$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2n^2}{x^4+n^4} \sin \frac{n}{x}$, $\quad E_1=(0;\ 1)$, $\quad E_2=(1;\ +\infty)$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2x^2} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{x}{n}}$, $\quad E_1=[0;\ 1/2]$, $\quad E_2=[1/2;\ 1]$.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1/(nx))}{1+(\ln nx)^2}$, $\quad E_1=(0;\ 1)$, $\quad E_2=(1;\ +\infty)$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2-nx+n^2}$, $\quad E_1=(0;\ 1)$, $\quad E_2=(1;\ +\infty)$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+nx} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right), \quad E_1=(0;\ 1), \quad E_2=(1;\ +\infty).$

18.37. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(nx)}{1+n^3 \ln^2 x}, \quad E_1=(0;\ 1/2), \quad E_2=(1/2;\ 1).$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2x} \sin\frac{n}{x}, \quad E_1=(0;\ 1), \quad E_2=(1;\ +\infty).$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{1+n^2x^2}, \quad E_1=(0;\ 1), \quad E_2=(1;\ +\infty).$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \ln(n/(n+x))}, \quad E_1=(0;\ 1), \quad E_2=(1;\ +\infty).$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\frac{3+x\sqrt{n^5}}{2+x\sqrt{n^5}}, \quad E_1=[1;\ +\infty), \quad E_2=(0;\ +\infty).$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{x+n} \sin\frac{x}{\sqrt{n}} \sin\frac{\sqrt{n}}{x}, \quad E_1=(0;\ 1], \quad E_2=[1;\ +\infty).$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x/n)}{2^{n-x}+2^{n/x}}, \quad E_1=[10;\ +\infty), \quad E_2=(-\infty;\ -10].$

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin\sqrt{n}}{1+n^3x^3}, \quad E_1=(\alpha;\ +\infty), \quad \alpha>0, \quad E_2=(0;\ +\infty).$

18.38. Найти все значения α, при которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{\alpha} e^{-nx^2}$ сходится равномерно на интервале $(0;\ +\infty)$.

18.39. Исследовать на равномерную сходимость на множестве $[0;\ +\infty)$ ряд:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-x}.$ 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$

18.40. Пусть $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}=1$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x)$ равномерно сходится на множестве E, если:

1) $u_n(x)=x^n, \quad E=[-\alpha;\ \alpha], \quad 0<\alpha<1.$

2) $u_n(x)=e^{-nx}, \quad E=[\delta;\ +\infty), \quad \delta>0.$

3) $u_n(x)=\frac{\cos nx}{2^n}, \quad E=(-\infty;\ +\infty).$

4) $u_n(x)=e^{-n^2x}, \quad E=[\delta;\ +\infty), \quad \delta>0.$

18.41. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на множестве E, а функция $\varphi(x)$ ограничена на этом множестве, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(x) u_n(x)$ также равномерно сходится на множестве E.

18.42. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |v_n(x)|$ равномерно сходится на множестве E, а функции $u_n(x)$ определены на E и удовлетворяют условию

$$|u_n(x)| \leqslant |v_n(x)|, \quad x \in E,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на множестве E абсолютно и равномерно.

18.43. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится равномерно на множестве E, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ также сходится равномерно на E.

18.44. Следует ли из абсолютной и равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве E равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ на E? Рассмотреть пример

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x), \quad E = [0;\ 1].$$

18.45. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится абсолютно в точках a и b, а функции $u_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, монотонны на отрезке $[a;\ b]$, то этот ряд сходится абсолютно и равномерно на $[a;\ b]$.

18.46. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|}$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x-a_n}$ сходится абсолютно и равномерно на любом замкнутом ограниченном множестве, не содержащем точек $x = a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

18.47. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ сходится равномерно на множестве $[0;\ +\infty)$.

18.48. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ сходится равномерно на множестве $[0; +\infty)$.

18.49. Пусть функции $u_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, непрерывны на отрезке $[0; 1]$, $u_n(x) \rightrightarrows 0$, $x \in [0; 1]$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится для каждого $x \in [0; 1]$. Следует ли отсюда, что этот ряд сходится равномерно на отрезке $[0; 1]$?

18.50. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где

$$u_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 2^{-(n+1)}, \\ \dfrac{1}{n} \sin^2(2^{n+1}\pi x), & \text{если } 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}, \\ 0, & \text{если } 2^{-n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[0; 1]$, но его нельзя *мажорировать* сходящимся числовым рядом с неотрицательными членами, т. е. не может существовать сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geqslant 0$ $(n \in \mathbb{N})$, такой, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$u_n(x) \leqslant a_n, \quad x \in [0; 1].$$

§ 19. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов

1. Последовательности и ряды непрерывных функций.

1. Если последовательность $\{f_n(x)\}$ непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций равномерно сходится на $[a; b]$, то ее предельная функция $f(x)$ также непрерывна на отрезке $[a; b]$.

2. Если все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ — непрерывные на отрезке $[a; b]$ функции, а ряд сходится равномерно на $[a; b]$, то его сумма $S(x)$ также непрерывна на отрезке $[a; b]$.

Пример 1. Доказать, что сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$$

непрерывна на отрезке $[0; 1]$ и найти эту сумму.

△ Члены ряда непрерывны на отрезке $[0; 1]$, а ряд сходится равномерно (§ 18, пример 3, 6)). Поэтому сумма $S(x)$ этого ряда непрерывна на отрезке $[0; 1]$.

Используя формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем e^{-x}, находим

$$S(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{x^2}{e^x - 1}, \qquad x > 0.$$

При $x = 0$ члены ряда равны нулю, и поэтому $S(0) = 0$. ▲

2. Интегрирование функциональных последовательностей и рядов.

1. Если последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на отрезке $[a; b]$ к функции $f(x)$, а каждая из функций $f_n(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то для любого $x_0 \in [a; b]$

$$\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt, \qquad x \in [a; b].$$

2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на отрезке $[a; b]$, а каждая из функций $u_n(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)\,dt, \text{ где } x_0 \in [a; b],$$

сходится равномерно на отрезке $[a; b]$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно почленно интегрировать, т. е.

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)\,dt.$$

Пример 2. Найти сумму $S(x)$ ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$

а затем вычислить сумму σ ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n (2n+1)}.$$

△ Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$. Этот ряд сходится на интервале $(-1; 1)$, а его сумма $1/(1+x^2)$. На отрезке $[-q; q]$, где $0 < q < 1$, ряд сходится равномерно, а его члены — непрерывные функции. Интегрируя этот ряд почленно на отрезке $[0; x]$, где $x \in (-1; 1)$, получаем

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,dt,$$

или

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}. \qquad (1)$$

Таким образом, $S(x) = \operatorname{arctg} x$. Полагая в (1) $x = 1/\sqrt{3}$, получаем

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n (2n+1)}, \quad \text{откуда} \quad \sigma = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}. \ \blacktriangle$$

3. Дифференцирование функциональных последовательностей и рядов.

1. Если последовательность $\{f_n(x)\}$ дифференцируемых на отрезке $[a; b]$ функций сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a; b]$, а последовательность $\{f'_n(x)\}$ сходится равномерно на $[a; b]$, то последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на отрезке $[a; b]$ к некоторой функции $f(x)$ и

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x), \qquad x \in [a; b].$$

2. Если функции $u_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сходится равномерно на $[a; b]$, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \qquad (2)$$

сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a; b]$, то: а) ряд (2) сходится равномерно на $[a; b]$; б) его сумма имеет непрерывную производную на $[a; b]$; в) ряд (2) можно почленно дифференцировать, т. е.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

Пример 3. Найти суммы рядов:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{и} \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

$\triangle$ 1) Члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ — непрерывные функции, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$, составленный из производных членов исходного ряда, сходится равномерно на отрезке $[-q; q]$, где $0 < q < 1$, а его сумма равна $1/(1-x)$, $x \in (-1; 1)$. Дифференцируя почленно ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = f(x),$$

получаем

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}=\frac{1}{1-x},$$

откуда

$$\int_0^x f'(t)\,dt=f(x)-f(0)=\int_0^x \frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x).$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}=-\ln(1-x), \qquad -1<x<1. \tag{3}$$

2) Дифференцируя почленно ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=g(x),$$

получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}=g'(x),$$

откуда, в силу (3), находим $g'(x)=-\ln(1-x)$. Следовательно,

$$\int_0^x g'(t)\,dt=g(x)-g(0)=-\int_0^x \ln(1-t)\,dt,$$

или

$$g(x)-g(0)=\int_0^x \ln(1-t)\,d(1-t)=(1-t)\ln(1-t)\Big|_0^x+\int_0^x dt,$$

откуда находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=x+(1-x)\ln(1-x). \tag{4}$$

Заметим, что равенство (4) справедливо при $x\in[-1;\ 1]$, а равенство (3) — при $x\in[-1;\ 1)$. ▲

19.1. Доказать непрерывность суммы функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве E:

1) $u_n(x)=\dfrac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt[3]{n^4+x}}, \qquad E=\mathbb{R}.$

2) $u_n(x)=\arcsin(1/(n^2+x^4)), \qquad E=\mathbb{R}.$

3) $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{x^2+\sqrt{n}}, \qquad E=[2;\ 5].$

4) $u_n(x)=xe^{-n^2x}$, $\quad E=[0;\ +\infty)$.

5) $u_n(x)=2^n\ln(1+\sin(1/(3^n+x)))$, $\quad E=(0;\ +\infty)$.

6) $u_n(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\cos nx$, $\quad E=[\pi/3;\ 2\pi/3]$.

19.2. Доказать, что функция $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ непрерывна при $x>0$ и вычислить $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 5} f(x)\,dx$.

19.3. Доказать, что функция $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2(n+1)^2+x^2}$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и вычислить $\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$.

19.4. Доказать, что функция $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2 nx}{n(n+1)}$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и вычислить $\int\limits_{0}^{2\pi} f(x)\,dx$.

19.5. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}((n+1)xe^{-(n+1)x}-nxe^{-nx})$ сходится неравномерно на отрезке $[0;\ 1]$, однако его сумма — функция, непрерывная на этом отрезке.

19.6. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^{2(n+1)}-x^{2n})$ сходится неравномерно на отрезке $[-1;\ 1]$, но его можно почленно интегрировать на этом отрезке.

19.7. Известно, что сумма $S(x)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\sin nx$, где $\{a_n\}$ — заданная числовая последовательность, является нечетной периодической с периодом 2π функцией такой, что

$$S(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in(0;\ \pi),\\ 0, & \text{если } x=0 \text{ и } x=\pi.\end{cases}$$

Верно ли, что этот ряд сходится неравномерно на $\mathbb{R}$?

19.8. Найти множество E всех значений x, при которых определена функция $f(x)$, и исследовать ее на непрерывность на E, если:

1) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^n x}{n^2}$. $\qquad$ 2) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x^2}\cos nx$.

3) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n$. $\qquad$ 4) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{(1+x^2)^n}$.

19.9. Найти множество E всех значений x, при которых определена функция $f(x)$, и исследовать ее на дифференцируемость на множестве E, если:

1) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2}$. 2) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^3e^{-nx}$.

3) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{5/2}}$. 4) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n^2+x^2}$.

19.10. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2\ln^2(n+1)}$ можно дифференцировать почленно на $\mathbb{R}$.

19.11. Доказать, что функция $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$ непрерывна на $\mathbb{R}$, за исключением точек $x=n$, $n\in\mathbb{N}$.

19.12. Доказать, что функция $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$ имеет непрерывную производную на $\mathbb{R}$.

19.13. Доказать, что ряд $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-(x-n)^2}$ можно почленно дифференцировать на отрезке $[-1;\ 1]$ любое число раз.

19.14. Доказать, что дзета-функция Римана

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

непрерывна на множестве $(1;\ +\infty)$ и имеет на этом множестве производные любого порядка.

19.15. Доказать, что функция $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n^2x}$ бесконечно дифференцируема при $x>0$.

19.16. Доказать, что сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ непрерывна при $x\geqslant 0$ и дифференцируема при $x>0$.

19.17. Показать, что последовательность $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x)=nxe^{-nx^2}$, сходится на отрезке $[0;\ 1]$, но

$$\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)dx\neq\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

19.18. Показать, что последовательность $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x)=\frac{1}{n}\operatorname{arctg}x^n$, сходится равномерно на $\mathbb{R}$, но

$$\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)'_{x=1}\neq\lim_{n\to\infty}f_n'(1).$$

19.19. Показать, что последовательность $\{f_n(x)\}$, где

$$f_n(x) = x/(1+nx^2),$$

сходится равномерно на $\mathbb{R}$ к функции f и что равенство

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

выполняется при всех x, кроме $x=0$.

19.20. Показать, что последовательность $\{f_n(x)\}$, где

$$f_n(x) = x^3 + \frac{1}{n}\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

сходится равномерно на $\mathbb{R}$, но $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)' \neq \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$.

19.21. Показать, что последовательность $\{f_n(x)\}$, где

$$f_n(x) = (\sin nx)/\sqrt{n},$$

сходится равномерно на $\mathbb{R}$ к дифференцируемой функции $f(x)$, но

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(0) \neq f'(0).$$

19.22. Показать, что последовательность $\{f_n(x)\}$, где

$$f_n(x) = nx(1-x^2)^n,$$

сходится на отрезке $[0;\ 1]$ к непрерывной функции $f(x)$, но

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\,dx.$$

19.23. Показать, что последовательность $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = nx(1-x)^n$ сходится неравномерно на отрезке $[0;\ 1]$, однако

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

19.24. Выяснить, справедливо ли равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}\,dx = \int_0^1\left(\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^4}\right)dx.$$

19.25. Можно ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}(x/n^2)$ почленно дифференцировать на $\mathbb{R}$?

19.26. Можно ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^{1/(2n-1)} - x^{1/(2n+1)})$ почленно интегрировать на отрезке $[0;\ 1]$?

19.27. Найти все значения α, при которых для последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x)=n^\alpha xe^{-nx}$, выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)dx.$$

19.28. Может ли последовательность $\{f_n(x)\}$ разрывных функций сходиться равномерно к непрерывной функции?

19.29. Пусть на множестве $\mathbb{R}$ определены и ограничены в совокупности функции $f_n(x)$, $n\in\mathbb{N}$, и, кроме того, $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Следует ли отсюда, что

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}f_n(x)=\sup_{x\in\mathbb{R}}f(x)?$$

19.30. Пусть функция f определена на $\mathbb{R}$, бесконечно дифференцируема и

$$\left|f^{(n)}(x)-f^{(n-1)}(x)\right|<1/n^2 \text{ для любого } x\in\mathbb{R}.$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}f^{(n)}(x)=Ce^x$, где $C=\mathrm{const}$.

19.31. Пусть функция f бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, а последовательность $\{f^{(n)}(x)\}$ сходится равномерно к $\varphi(x)$ на каждом конечном интервале $(a;\ b)$. Доказать, что $\varphi(x)=Ce^x$, где $C=\mathrm{const}$.

19.32. Показать, что последовательность $\{f_n(x)\}$, где

$$f_n(x)=\begin{cases}\sin^2(\pi/x), & \text{если } x\in[1/(n+1);\ 1/n],\\ 0, & \text{если } x\notin[1/(n+1);\ 1/n],\end{cases}$$

сходится на $\mathbb{R}$ к непрерывной функции, но неравномерно.

19.33. Доказать, что если функции $f_n(x)$, $n\in\mathbb{N}$, непрерывны на множестве E и $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in E$, то

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x)$$

для каждой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n\in E$, $x_n\to x$ при $n\to\infty$, где $x\in E$.

19.34. Пусть $\{f_n(x)\}$ — последовательность монотонных на отрезке $[a;\ b]$ функций, сходящихся к функции $f(x)$, непрерывной на $[a;\ b]$. Доказать, что

$$f_n(x)\rightrightarrows f(x),\quad x\in[a;\ b].$$

19.35. Пусть функции $f_n(x)$, $n\in\mathbb{N}$, интегрируемы на отрезке $[a;\ b]$ и пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно ограничена на $[a;\ b]$, т. е.

$$\exists M>0\ \forall x\in[a;\ b]\ \forall n\in\mathbb{N}:\quad |f_n(x)|\leqslant M.$$

Показать, что из последовательности $\{F_n(x)\}$, где

$$F_n(x)=\int_a^x f_n(t)\,dt,\quad x\in[a;\ b],$$

можно выделить подпоследовательность $\{F_{n_k}(x)\}$, равномерно сходящуюся на отрезке $[a; b]$.

19.36. Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n(n+1)x^2-1)}{(1+n^2x^2)(1+(n+1)^2x^2)}$$

сходится неравномерно на отрезке $[-1; 1]$, но его сумма непрерывна на этом отрезке.

19.37. Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n \pi x}{2^n}$$

сходится равномерно на $\mathbb{R}$, но его нельзя почленно дифференцировать ни в каком промежутке.

19.38. Доказать, что: 1) при $a>1$ сумма $S(x)$ ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{n^2} x}{a^{n^2}}$$

непрерывна на $\mathbb{R}$; 2) при $a>2$ этот ряд можно почленно дифференцировать; 3) при $a \in (1; 2)$ функция $S(x)$ не дифференцируема.

19.39. Пусть r_n, $n \in \mathbb{N}$, — рациональные числа отрезка $[0; 1]$. Показать, что функция

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x-r_n|}{3^n}, \qquad x \in [0; 1],$$

непрерывна на отрезке $[0; 1]$, дифференцируема в иррациональных точках и недифференцируема в рациональных точках этого отрезка.

19.40. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \sum\limits_{n=1} \frac{x^2}{1+n^2x^2}$. 2) $\lim\limits_{x \to 1-0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{x^n}{x^n+1}$.

3) $\lim\limits_{x \to 1-0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^{n+1}-x^n)$. 4) $\lim\limits_{x \to +0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$.

19.41. Пусть функции $u_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, непрерывны на отрезке $[a; b]$ и $u_n(x)>0$, $x \in [a; b]$, $n \in \mathbb{N}$. Показать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на $[a; b]$ к функции $f(x)$, непрерывной на этом отрезке, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows f(x), \qquad x \in [a, b].$$

19.42. Пусть $\varphi(x)$ — периодическая с периодом 1 функция такая, что $\varphi(x) = |x|$ при $x \in [-1/2;\ 1/2]$. Показать, что сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(4^n x)}{4^n}$$

непрерывна на $\mathbb{R}$, но недифференцируема ни в одной точке $x \in \mathbb{R}$.

19.43. Последовательность $\{f_n(x)\}$ называется *равностепенно непрерывной* на отрезке $[a;\ b]$, если для

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x', x'' \in [a;\ b]\ |x' - x''| < \delta\ \forall n \in \mathbb{N}:$$
$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon.$$

Доказать, что если последовательность $\{f_n(x)\}$ непрерывных функций равномерно сходится на отрезке $[a;\ b]$, то она равномерно ограничена (см. задачу **19.35**) и равностепенно непрерывна на отрезке $[a;\ b]$.

19.44. Доказать, что если последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна (см. задачу **19.43**) на отрезке $[a;\ b]$, то из нее можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на этом отрезке (*теорема Арцела*).

§ 20. Степенные ряды

1. Радиус сходимости и круг сходимости степенного ряда. Функциональные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (\zeta - a)^n, \tag{1}$$

где c_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) и a — заданные комплексные числа, ζ — комплексное переменное, называются *степенными рядами*. Числа c_n называются *коэффициентами* степенного ряда (1).

Полагая в (1) $\zeta - a = z$, получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \tag{2}$$

исследование сходимости которого эквивалентно исследованию сходимости ряда (1).

Теорема 1 (Абеля). Если степенной ряд (2) сходится при $z = z_0 \neq 0$, то он сходится и притом абсолютно при любом z таком, что $|z| < |z_0|$, а если этот ряд расходится при $z = z_1 \neq 0$, то он расходится при всяком z, для которого $|z| > |z_1|$.

Теорема 2. Для всякого степенного ряда (2) существует R ($R \geqslant 0$ — число или $+\infty$) такое, что ряд (2) абсолютно сходится в круге $K = \{z\colon |z| < R\}$, если $R \neq 0, +\infty$. Этот круг называется *кругом сходимости* степенного ряда, а R — *радиусом сходимости* этого ряда.

Если $R=0$, то ряд (2) сходится в одной точке $z=0$, а если $R=+\infty$, то этот ряд сходится во всей комплексной плоскости. В точках границы круга K ряд (2) может как сходиться, так и расходиться. В любом меньшем круге $K_1=\{z\colon |z|\leqslant \rho<R\}$ ряд (2) сходится абсолютно и равномерно.

Для степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{3}$$

круг сходимости K имеет вид $K=\{z\colon |z-a|<R\}$.

Теорема 3 (Абеля). Если R — радиус сходимости степенного ряда (2), причем $0<R<+\infty$, и если этот ряд сходится при $z=R$, то он сходится равномерно на отрезке $[0; R]$, а его сумма непрерывна на этом отрезке.

Для радиуса сходимости R степенного ряда (3) справедлива *формула Коши — Адамара*:

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}. \tag{4}$$

Если существует (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, то

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|, \tag{5}$$

а если существует (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$, то

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}. \tag{6}$$

Пример 1. Найти радиус сходимости R степенного ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$. 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$. 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n2^n}z^n$. 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}5^n z^{3n}$.

△ 1) Так как существует

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1,$$

то по формуле (5) находим $R=1$.

2) В этом случае

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=+\infty$$

и поэтому $R=+\infty$ (формула (5)).

3) Так как $|1+i|=\sqrt{2}$ и существует

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(\sqrt{2})^n}{n2^n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

то по формуле (6) получаем $R=\sqrt{2}$.

4) Обозначим $5z^3=t$, тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty}5^n z^{3n}=\sum_{n=0}^{\infty}(5z^3)^n=\sum_{n=0}^{\infty}t^n.$$

Заметим, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}t^n$ сходится, если $|t|<1$, и расходится, если $|t|>1$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}5^n z^{3n}$ сходится, если $5|z|^3<1$, т. е. при $|z|<1/\sqrt[3]{5}$, и расходится при $|z|>1/\sqrt[3]{5}$. Итак, радиус сходимости ряда $R=1/\sqrt[3]{5}$. Заметим, что R можно найти и по формуле (4). В самом деле, так как

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3n]{5^n}=\sqrt[3]{5},$$

то по формуле (4) получаем $R=1/\sqrt[3]{5}$. ▲

Для степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n, \qquad (7)$$

где a_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$, x_0 — заданные действительные числа, x — действительное переменное, существует R ($R\geqslant 0$ — число или $+\infty$) такое, что при $R\neq 0$, $+\infty$ ряд (7) абсолютно сходится, если $|x-x_0|<R$, и расходится, если $|x-x_0|>R$. Интервал $(x_0-R;\ x_0+R)$ называют *интервалом сходимости*, а R — ***радиусом сходимости*** ряда (7).

Радиус сходимости ряда (7) совпадает с радиусом сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-x_0)^n$, где z — комплексное переменное.

При $R=0$ ряд (7) сходится лишь в точке $x=x_0$, а при $R=\infty$ — при всех $x\in\mathbb{R}$.

Исследовать степенной ряд (7) на сходимость — значит найти его интервал сходимости и выяснить, сходится или расходится этот ряд в концах его интервала сходимости. *Область сходимости* степенного ряда (7) состоит из его интервала сходимости и, быть может, некоторых граничных точек этого интервала.

Пример 2. Найти область сходимости степенного ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n^2+2}(x-1)^n$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x+1)^n}{n\ln^2(n+1)}$. 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{n^2}x^{n^2}$.

△ 1) По формуле (5) находим радиус сходимости ряда $R=1$. Ряд сходится в интервале $(0;\ 2)$. При $x=2$ ряд расходится, так как для его n-го члена a_n справедлива асимптотическая формула $a_n \sim 2/3n$. При $x=0$ получаем сходящийся по признаку Лейбница ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2}(-1)^n.$$

Следовательно, область сходимости ряда — полуинтервал $0 \leqslant x < 2$.

2) Радиус сходимости ряда равен $1/2$ (формула (5)). При $x=-3/2$ и $x=-1/2$ ряд абсолютно сходится, так как по интегральному признаку сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 (n+1)}.$$

Поэтому область сходимости ряда — отрезок $[-3/2;\ -1/2]$.

3) По формуле (4) находим, что радиус сходимости ряда $R=1/3$. При $x=\pm 1/3$ ряд расходится (не выполняется необходимое условие сходимости). Следовательно, область сходимости ряда — интервал $(-1/3;\ 1/3)$. ▲

2. Регулярные функции. Функция комплексного переменного $f(z)$ называется *регулярной* (*однозначной аналитической*, *голоморфной*) в точке a, если она определена в некоторой окрестности точки a и представима в круге $|z-a|<\rho$, где $\rho>0$, сходящимся к $f(z)$ степенным рядом:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{8}$$

Отметим, что любой многочлен

$$P(z)=\sum_{k=0}^{m} a_k z^k$$

— функция, регулярная в каждой точке комплексной плоскости. Рациональная функция

$$f(z)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)},$$

где P_n и Q_m — многочлены степени n и m соответственно, регулярна в каждой точке a, где $Q_m(a) \neq 0$.

В теории функции комплексного переменного доказывается (см., например, [14]), что на границе круга сходимости степенного ряда (8) лежит хотя бы одна особая точка его суммы $f(z)$. Отсюда следует, что радиус степенного ряда (8) равен расстоянию от точки a до ближайшей к a особой точки функции $f(z)$.

В частности, если

$$f(z)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)},$$

где многочлены P_n и Q_m не имеют общих корней, то для этой функции радиус сходимости R степенного ряда (8) равен расстоянию от точки a до ближайшего к этой точке корня многочлена $Q_m(z)$, т. е.

$$R=\min_{1\leqslant k\leqslant m}|z_k-a|, \tag{9}$$

где z_k ($k=1, 2, \ldots, m$) — корни многочлена $Q_m(z)$.

Пример 3. Пользуясь формулой (9), найти радиус сходимости R степенного ряда (8), для функции $f(z)$:

1) $f(z)=\dfrac{z}{z^2-4}, \qquad a=3.$

2) $f(z)=\dfrac{z^2-z+1}{(z^2+1)(z+2)}, \qquad a=1.$

3) $f(z)=\dfrac{1}{3z^4+7z^2+2}, \qquad a=0.$

△ 1) Многочлен z^2-4 имеет корни $z_1=2$, $z_2=-2$, а наименьшее из чисел $|z_k-a|=|z_k-3|$, $k=1, 2$, равно $|2-3|=1$. Поэтому $R=1$.

2) Многочлен $(z+2)(z^2+1)$ имеет корни $z_1=-2$, $z_2=i$, $z_3=-i$, причем $|z_1-1|=3$, $|z_2-1|=|z_3-1|=\sqrt{2}$. Поэтому $R=\sqrt{2}$.

3) Из равенства $3z^4+7z^2+2=(3z^2+1)(z^2+2)$ следует, что многочлен $3z^4+7z^2+2$ имеет корни $z_1=i/\sqrt{3}$, $z_2=-i/\sqrt{3}$, $z_3=i\sqrt{2}$, $z_4=-i\sqrt{2}$. Так как

$$\min_{1\leqslant k\leqslant 4}|z_k-a|=\min_{1\leqslant k\leqslant 4}|z_k|=1/\sqrt{3},$$

то $R=1/\sqrt{3}$. ▲

3. Дифференцирование и интегрирование степенного ряда. Вычисление суммы ряда. Если степенной ряд

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n, \tag{10}$$

где a_n, x_0 — заданные действительные числа, x — действительное переменное, имеет радиус сходимости $R>0$, то:

1) В интервале сходимости $(x_0-R;\ x_0+R)$ функция f имеет производные любого порядка, получаемые почленным дифференцированием ряда (10).

2) Внутри интервала сходимости этот ряд можно почленно интегрировать, т. е.

$$\int_{x_0}^{x}f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}, \qquad x\in(x_0-R,\ x_0+R).$$

3) Степенные ряды, получаемые из ряда (10) при почленном дифференцировании и интегрировании, имеют тот же радиус сходимости, что и ряд (10).

Пример 4. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$.

△ Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$. Этот ряд сходится, если $|x|<1$ (его радиус сходимости $R=1$), а сумма ряда равна $x/(1-x)$. Дифференцируя почленно ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x},$$

получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \qquad |x|<1. \ \blacktriangle$$

Степенные ряды можно использовать при вычислении сумм числовых рядов. Если известно, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится, то его сумму можно найти по формуле

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{11}$$

Пример 5. Доказать, что:

1) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}. \tag{12}$$

2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2. \tag{13}$$

△ 1) Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Его сумма равна $\operatorname{arctg} x$ (§ 10, пример 2). Радиус сходимости этого ряда равен 1, в точке $x=1$ ряд сходится (признак Лейбница). Применив формулу (11), получаем равенство (12).

2) Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x),$$

полученный в § 19 (пример 3). Отсюда следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \ln(1+x). \tag{14}$$

Так как этот ряд сходится при $-1 < x \leqslant 1$, то из (14) по формуле (11) следует равенство (13). ▲

Найти радиус сходимости R степенного ряда (**20.1—20.5**):

20.1. 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$. 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n (z+1)^n$.

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n z^n$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(z-2)^n}{4^{n+2}}$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^n$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{n^2} z^n$.

20.2. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{\ln^2 n} (z-3)^n$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^n$. 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{z}{n}\right)^n$.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^n}}{n!} z^n$. 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n z^{4n}}{n^2}$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{3^n} z^{5n}$.

20.3. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^{\alpha}}$, $\alpha > 0$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! e^{-n^{\alpha}} z^n$, $\alpha > 1$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(kn)!}{n!(n+1)!\ldots(n+k-1)!}$, $k \in \mathbb{N}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! z^{n!}$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2-\sqrt{e})(2-\sqrt[3]{e})\ldots(2-\sqrt[n]{e})\, z^n$.

20.4. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{2n^4} z^n$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos(3\pi n/4)}{n} z^n$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \operatorname{arctg} e^{-n}\right)(z+1)^n$.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2+5}\right)^{n^3} (z-1)^n.$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\operatorname{arctg}\frac{n+1}{n^2}\right)^n (z+2)^n.$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\ln\cos\frac{1}{3^n}\right) z^n.$

20.5. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (1+i)^{3n}}{(n+1)(n+2)} z^n.$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-i}{2}\right)^n z^{2n}.$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2+i\sqrt{5})^n}{(3-i\sqrt{7})^{2n}} (z-i)^{3n}.$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, z^n}{(1+i)(1+2i)\ldots(1+ni)}.$

20.6. Найти интервал сходимости степенного ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right)(x+1)^n.$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{n^2}{2^n}\right)(x-3)^n.$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n}{n^n}(x-1)^{2n}.$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin\frac{1}{3^n}\right)(x-3)^n.$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{n^2+3}{n^2\sqrt{3}+1}\right)^{-n}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^n.$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{nx}{e}\right)^n.$

Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость в концах интервала сходимости (20.7—20.11):

20.7. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\sqrt{n}}.$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n (x+2)^n.$

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}.$ 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, 2n+3}{3n^2+4} x^{2n+1}.$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n.$ 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^4+3}{n^3+4n}}\,(x+2)^n.$

20.8. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+(-3)^n}{n+1} x^n$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n+1}} \ln \frac{3n-2}{3n+2}$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{2n+1}-\sqrt[3]{2n-1}}{\sqrt{n}} (x+3)^n$.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a}-1) x^n$, $a>0$. 5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n (n^3+2)(x-1)^{2n}$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 4^{n^2} (x+1)^{n^2}$.

20.9. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} (x+2)^n$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{n^2}}{n^n}$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) (x-1)^n$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{n} (x+1)^n$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2\cos(\pi n/4))^n x^n}{\ln^2(n+1)}$.

20.10. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^\alpha}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^\alpha x^n$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right) x^n$, $a>0$, $b>0$.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n}$, $a>0$, $b>0$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\ldots(a-(n-1))}{n!} x^n$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^\alpha (x-1)^n$.

20.11. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+n+1}} (x-1)^n$. 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\sin n}\right)^n$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n (x-1)^n$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^{\nu(n)}}{n} (1-x)^n$, $\nu(n)$ — число цифр числа n.

20.12. Найти область сходимости степенного ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{a^{\sqrt{n}}}$, $a>0$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n$, $a>1$.

20.13. Определить область сходимости гипергеометрического ряда:

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\ldots n\ \ \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n+\ldots$$

Исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость в концах интервала сходимости.

20.14. Найти область сходимости ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{\ln^n x}{3^n(n+1)}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^n}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^n}$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n\cos^n x$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}\operatorname{tg}^n x$.

20.15. Пусть радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ равен R. Найти радиус сходимости степенного ряда:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^k z^n$, $k\in\mathbb{N}$. 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^{kn}$, $k\in\mathbb{N}$.

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{1+|c_n|} z^n$.

20.16. Пусть радиусы сходимости степенных рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ равны R_1 и R_2 соответственно. Найти условие, которому должен удовлетворять радиус сходимости R степенного ряда:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)x^n$. 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$.

20.17. Доказать, что степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ сходится равномерно на любом отрезке, лежащем внутри его интервала сходимости.

20.18. Пусть

$$l = \varliminf_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \qquad L = \varlimsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

R — радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Доказать, что $l \leqslant R \leqslant L$.

20.19. Доказать, что степенные ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ имеют один и тот же радиус сходимости.

20.20. Доказать, что если функция $f(z)$ представима в круге $|z - z_0| < R$, где $R > 0$, сходящимся к ней степенным рядом $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, то:

1) Для n-го остатка этого ряда справедлива асимптотическая формула

$$r_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = o((z - z_0)^n),$$

т. е.

$$\left| \frac{r_n(z)}{(z - z_0)^n} \right| \to 0 \quad \text{при} \quad z \to z_0.$$

2) Коэффициенты c_n степенного ряда определяются однозначно (единственность разложения регулярной функции в степенной ряд).

20.21. Найти радиус сходимости R степенного ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, если:

1) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + a^2}$, $a \neq 0$. 2) $f(z) = \dfrac{1}{z^m + a}$, $a \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$.

3) $f(z) = \dfrac{1}{3z^4 + 10z^2 + 3}$. 4) $f(z) = \dfrac{1}{2z^3 - 6z^2 + z - 3}$.

20.22. Найти радиус сходимости R степенного ряда

$$\frac{1}{P(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

не находя коэффициентов a_n, если:

1) $P(x) = x^2 - x - 2$, $x_0 = 0$. 2) $P(x) = x^2 + 1$, $x_0 = -1$.
3) $P(x) = x^2 - x - 6$, $x_0 = 1$. 4) $P(x) = x^2 - x + 1$, $x_0 = 2$.

5) $P(x)=2x^2+3x-2$, $x_0=-1/2$. 6) $P(x)=x^3-8$, $x_0=-3$.

20.23. Доказать, что если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится в точке z_0, то он равномерно сходится на отрезке, соединяющем точку $z=0$ с точкой $z=z_0$.

20.24. Пусть сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ и S — его сумма. Обозначим

$$S_n=a_0+a_1+\ldots+a_n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$\sigma_n=\frac{S_0+S_1+\ldots+S_n}{n+1}.$$

Доказать, что:

1) Для всех $x\in(0;\ 1)$ сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

2) Для всех x таких, что $|x|<\min(1;\ R)$, где R — радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, выполняются равенства:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n,$$

$$S-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(S-S_n)x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_n x^n.$$

20.25. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S, то существует

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=S.$$

Справедливо ли обратное утверждение?

20.26. Пусть $a_n\geqslant 0$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ и существует

$$\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=S$$

Доказать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n=S.$$

20.27. Доказать, что если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $x\in(0;\ 1)$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\ldots+na_n}{n}=0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=A,$$

то

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A.$$

20.28. Пусть радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равен 1 и $a_n > 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Доказать, что:

1) Если сумма $f(x)$ этого ряда ограничена на промежутке $[0; 1)$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится и

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

2) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = +\infty.$$

20.29. Пусть степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится на интервале $(0; 1)$, а его сумма равна $f(x)$. Если существует $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = A$, то говорят, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *суммируем методом Пуассона — Абеля*, а число A называют *«обобщенной (в смысле Пуассона — Абеля) суммой»* данного числового ряда. Показать, что следующие ряды суммируемы по методу Пуассона — Абеля, и найти соответствующие обобщенные суммы:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. 2) $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta, \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta, \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$.

20.30. Доказать, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем по методу средних арифметических (см. задачу **16.47**), то он суммируем и по методу Пуассона — Абеля к той же сумме (*теорема Фробениуса*).

20.31. Доказать, что если ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ суммируемы по методу Пуассона — Абеля к суммам A и B соответственно, то и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_n + a_n b_0)$, т. е. произведение данных рядов, суммируем по методу Пуассона — Абеля к сумме AB.

20.32. Пусть $a_n > 0$, $b_n > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$. Доказать, что:

1) Если

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = A$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^n} = A.$$

2) Если

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_n}{B_n} = A,$$

где

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k,$$

и если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ расходится, то

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^n} = A.$$

§ 21. Ряд Тейлора

1. Понятие ряда Тейлора. Остаточный член ряда Тейлора. Если функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в точке x_0 производные всех порядков, то степенной ряд

$$f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \qquad (1)$$

называется *рядом Тейлора функции f в точке x_0*.

В случае, когда $x_0 = 0$, ряд (1) называют *рядом Маклорена.*

Если функция f регулярна в точке x_0, т. е. представляется в некоторой окрестности точки x_0 сходящимся к этой функции степенным рядом

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < \rho, \quad \rho > 0,$$

то функция f бесконечно дифференцируема в окрестности точки x_0 и в этой окрестности равна сумме своего ряда Тейлора (1) и, следовательно, коэффициенты a_n степенного ряда задаются формулами

$$a_0 = f(x_0), \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Обратное неверно: существуют функции, бесконечно дифференцируемые в окрестности точки x_0, ряд Тейлора (1) для которых не сходится при $x \neq x_0$ к $f(x)$. Обозначим

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \qquad r_n(x) = f(x) - S_n(x)$$

и назовем $r_n(x)$ *остаточным членом ряда Тейлора для функции* f *в окрестности точки* x_0 (или *в точке* x_0). Тогда если функция $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна на интервале $\Delta = (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, то для любого $x \in \Delta$ остаточный член можно представить:

а) *в интегральной форме*

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x - t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt;$$

б) *в форме Лагранжа* —

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где ξ принадлежит интервалу с концами x_0 и x;

в) *в форме Коши* —

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(1 - \theta)^n (x - x_0)^{n+1}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Теорема. Если функция f и все ее производные ограничены в совокупности на интервале $\Delta = (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in \Delta$ и для $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$, то функция f представляется в каждой точке $x \in \Delta$ сходящимся к ней рядом Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{2}$$

2. Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена.

1. Показательная функция:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{3}$$

2. Гиперболические функции:

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \tag{4}$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{5}$$

3. Тригонометрические функции:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \tag{6}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{7}$$

Ряды (3)—(7) сходятся для всех $x \in (-\infty; +\infty)$, т. е. радиус сходимости каждого из этих рядов равен $+\infty$.

4. Степенная функция:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{\alpha}^{n} x^{n}, \tag{8}$$

где

$$C_{\alpha}^{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}.$$

Если $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq k$ $(k \in \mathbb{N})$, то радиус сходимости ряда (8) равен 1.

Важные частные случаи формулы (8):

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n}, \tag{9}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} x^{n}. \tag{10}$$

5. Логарифмическая функция:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n}}{n}, \tag{11}$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n}}{n}. \tag{12}$$

Радиус сходимости каждого из рядов (9)—(12) равен 1.

Пример 1. Используя формулы (8)—(10), доказать, что:

1) $$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \quad |x|<1. \tag{13}$$

2) $$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n, \quad |x|<1. \tag{14}$$

3) $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}, \quad |x|<1. \tag{15}$$

4) $$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}x^{2n}, \quad |x|<1. \tag{16}$$

△ 1) Заменяя в формуле (10) x на x^2, получаем степенной ряд (13), радиус сходимости которого равен 1.

2) Так как

$$C_{-2}^{n}=\frac{-2(-2-1)(-2-2)\dots(-2-(n-1))}{n!}=(-1)^n(n+1),$$

то, заменяя в формуле (8) x на $-x$ и полагая $\alpha=-2$, получаем ряд (14), сходящийся при $|x|<1$.

3) Заметим, что

$$C_{-1/2}^{n}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}=$$
$$=\frac{(-1)^n\,1\cdot 3\dots(2n-1)}{2^n n!}=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}.$$

Полагая в формуле (8) $\alpha=-1/2$ и заменяя x на $-x^2$, получаем ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}(-x^2)^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n},$$

радиус сходимости которого равен 1. Отсюда, учитывая, что

$$2^n n!=2\cdot 4\cdot 6\dots(2n)=(2n)!!,$$

получаем разложение (15).

4) Так как

$$C_{1/2}^{n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)\frac{1}{n!}=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\dots(2n-3)}{2^n n!}=$$
$$=(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}, \quad n\geqslant 2 \quad \text{и} \quad C_{1/2}^{1}=1/2,$$

то из формулы (8) следует равенство (16). ▲

3. Приемы и методы разложения функций в ряд Тейлора. Способы нахождения коэффициентов ряда Тейлора аналогичны рассмотренным в [1], § 18. Отметим, что обычно коэффициенты ряда Тейлора находят с помощью формул (3)—(12), применяя различные приемы: представление данной функции в виде суммы более простых функций, замена переменной, почленное дифференцирование и интегрирование ряда, метод неопределенных коэффициентов и др.

Пример 2. Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(x)=\frac{3x+8}{(2x-3)(x^2+4)}.$$

△ Представим рациональную функцию $f(x)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{3x+8}{(2x-3)(x^2+4)}=\frac{A}{2x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Отсюда находим

$$3x+8=A(x^2+4)+(Bx+C)(2x-3).$$

Приравнивая в этом равенстве коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений, из которой найдем $A=2$, $B=-1$, $C=0$. Поэтому

$$f(x)=\frac{2}{2x-3}-\frac{x}{x^2+4}=-\frac{2}{3\left(1-\frac{2x}{3}\right)}-\frac{x}{4\left(1+\frac{x^2}{4}\right)}.$$

Используя разложения (9) и (13), получаем

$$f(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{4^{n+1}},$$

или

$$f(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}}-\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+2}\right)x^{2n+1}.$$

Радиус сходимости ряда равен 3/2. ▲

Пример 3. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=2$ функцию $f(x)=\ln(4+3x-x^2)$.

△ Так как $4+3x-x^2=(4-x)(x+1)$, то, полагая $x-2=$ $=t$, получаем

$$f(x)=g(t)=\ln(2-t)(3+t)=\ln 6+\ln\left(1-\frac{t}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{t}{3}\right).$$

Используя формулы (11) и (12), находим

$$g(t)=\ln 6-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{3^n n},$$

откуда получаем

$$f(x)=\ln 6+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left((-1)^{n-1}3^{-n}-2^{-n}\right)(x-2)^n,$$

радиус сходимости ряда равен 2. ▲

Пример 4. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = \pi/4$ функцию $f(x) = \sin^4 x$.

△ Так как

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

то

$$f(x) = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{8},$$

т. е.

$$f(x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$$

Обозначим $t = x - \pi/4$, тогда $x = t + \pi/4$,

$$\cos 2x = -\sin 2t, \quad \cos 4x = -\cos 4t$$

и поэтому

$$f(x) = g(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{8}\cos 4t.$$

Используя формулы (6) и (7), получаем

$$g(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!}t^{2n+1} - \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{2n}t^{2n}}{(2n)!},$$

откуда находим

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} 2^{4n-3}}{(2n)!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n}.$$

Радиус сходимости ряда равен $+\infty$. ▲

При разложении функций в ряд Тейлора часто используют почленное дифференцирование и интегрирование рядов.

Например, формулу (14) можно получить, почленно дифференцируя ряд (9), а разложение (11) — почленным интегрированием ряда (10). В § 19 (пример 2) было доказано с помощью почленного интегрирования ряда (13), что

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}. \tag{17}$$

Радиус сходимости ряда (17) равен 1.

Аналогично, почленно интегрируя ряд (15), получаем ряд

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \tag{18}$$

радиус сходимости которого равен 1.

Пример 5. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$ и найти радиус сходимости ряда:

1) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$. 2) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x+3}{x-3}$.

$\triangle$ 1) Заметим, что

$$\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

и воспользуемся разложением

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}, \tag{19}$$

которое получается из формулы (15) заменой x^2 на $-x^2$. Интегрируя ряд (19), получаем

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \tag{20}$$

радиус сходимости ряда равен 1.

2) Так как

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2}\cdot\left(-\frac{6}{(x-3)^2}\right)=-\frac{3}{x^2+9}=-\frac{1}{3\left(1+\frac{x^2}{9}\right)},$$

то из (13) следует, что

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{3^{2n+1}}.$$

Интегрируя полученный ряд, находим

$$\int_0^x f'(t)\,dt=f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^{2n+1}}\int_0^x t^{2n}\,dt,$$

или

$$f(x)=f(0)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^{2n+1}}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

где

$$f(0)=\operatorname{arctg}(-1)=-\pi/4.$$

Радиус сходимости этого ряда равен 3. $\blacktriangle$

При разложении функций в ряд Тейлора иногда бывает удобно применить метод неопределенных коэффициентов ([1], § 18).

Приведем пример для иллюстрации этого метода.

Пример 6. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

Запишем ряд Маклорена для $f(x)$ в виде

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^{2n}. \tag{21}$$

Доказать, что коэффициенты B_n (*числа Бернулли*) можно найти при $n \geqslant 2$ из рекуррентных соотношений

$$C_{n+1}^0 B_0 + C_{n+1}^1 B_1 + C_{n+1}^2 B_2 + \ldots + C_{n+1}^{n-1} B_{n-1} + C_{n+1}^n B_n = 0, \quad (22)$$

где C_{n+1}^k — биномиальные коэффициенты ($C_{n+1}^0 = 1$),

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -1/2.$$

$\triangle$ Из (21) и (3) следует, что

$$1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n\right). \quad (23)$$

Так как $B_0 = f(0) = 1$ и коэффициенты при x^n $(n \geqslant 1)$ в левой части равенства (23) равны нулю, то

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{1}{(n+1-k)!} = 0,$$

откуда, используя формулу

$$C_{n+1}^k = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!},$$

получаем

$$(n+1)! \sum_{k=0}^{n} B_k C_{n+1}^k = 0.$$

Равенство (22) доказано. $\blacktriangle$

Замечание. Можно показать, что $B_{2k+1} = 0$ $(k \in \mathbb{N})$, а радиус сходимости ряда (21) равен 2π (см. с. 384).

4. Элементарные функции комплексного переменного. Показательная, гиперболические и тригонометрические функции для комплексных z определяются соответственно формулами

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (24)$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad (25)$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (26)$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad (27)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (28)$$

Ряды (24)—(28) сходятся во всей комплексной плоскости (радиус сходимости каждого из этих рядов равен $+\infty$).

Заменяя в равенстве (24) z сначала на iz, а затем на $-iz$, получаем

$$e^{iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n z^n}{n!},\qquad e^{-iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n i^n z^n}{n!}.$$

Так как

$$i^{2k}=(-1)^k,\quad i^{2k+1}=(-1)^k i\quad (k\in\mathbb{N}),$$

то

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},\qquad \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

откуда, используя формулы (27) и (28), получаем

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\qquad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \tag{29}$$

Из равенств (29) следует, что

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z. \tag{30}$$

Отметим, что для любых комплексных z_1 и z_2 справедливо равенство

$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}, \tag{31}$$

которое можно доказать с помощью почленного перемножения рядов. Из равенства (31), в частности, следует, что если $z=x+iy$, где x, y — действительные числа, то

$$e^z=e^{x+iy}=e^x e^{iy}.$$

Отсюда, используя формулу (30) при $z=y$, получаем

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y). \tag{32}$$

Из равенства (32) следует, что

$$e^{z+2\pi i}=e^z,$$

т. е. e^z — периодическая функция с периодом $2\pi i$. Поэтому для каждого комплексного $z\neq 0$ уравнение

$$e^w=z \tag{33}$$

имеет бесчисленное множество решений вида

$$w+i2\pi n,$$

где $n\in\mathbb{Z}$, а w — одно из решений уравнения (33). Если

$$w=u+iv,$$

то

$$z=e^w=e^u(\cos v+i\sin v),$$

откуда

$$|z|=e^u,\qquad u=\ln|z|,\qquad \arg z=v.$$

Пусть φ — какое-нибудь значение аргумента числа z, тогда

$$v = \varphi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, все решения уравнения (33) (их обозначают символом $\operatorname{Ln} z$) задаются формулой

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\varphi + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{34}$$

Уравнение (33) можно рассматривать как равенство, которое определяет функцию $w = w(z)$, обратную к показательной функции e^z. Из (34) следует, что функция $w(z) = \operatorname{Ln} z$ (*логарифмическая функция*) является многозначной

Если значения аргумента числа z выбирать на полуинтервале $(-\pi; \pi]$, то значение $\operatorname{Ln} z$ определится однозначно Однозначная функция, ставящая в соответствие числу z указанное значение $\operatorname{Ln} z$, обозначается $\ln z$. Итак, если

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \text{где} \quad -\pi < \varphi \leqslant \pi,$$

то

$$\ln z = \ln r + i\varphi. \tag{35}$$

Из равенства (35) следует, что если $z = x + iy$ и $-\pi < y \leqslant \pi$, то

$$\ln e^z = z.$$

Если $|z - 1| \leqslant 1$, $z \neq 0$, то функцию $\ln z$ можно разложить в степенной ряд:

$$\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}.$$

Заменив в этом разложении z на $z + 1$, получим

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \quad |z| \leqslant 1, \quad z \neq -1. \tag{36}$$

Отметим еще, что если

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2},$$

где $-\pi/2 < \varphi_1 \leqslant \pi/2$, $-\pi/2 < \varphi_2 \leqslant \pi/2$, то

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2, \quad \ln(z_1/z_2) = \ln z_1 - \ln z_2.$$

Пример 7. Разложить в степенной ряд в окрестности точки $z = 0$ функцию $f(z) = e^z \cos z$.

$\triangle$ Для нахождения искомого разложения можно перемножить ряды (24) и (27). Однако для эффективного вычисления коэффициентов степенного ряда для $f(z)$ удобнее использовать формулу (29) для функции $\cos z$. Применяя равенство (31), получаем

$$f(z) = e^z\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{z(1+i)} + e^{z(1-i)}\right).$$

Так как

$$1+i=\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}, \qquad 1-i=\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4},$$

то по формуле (24) находим

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n/2}}{n!}\left(\frac{e^{i\pi n/4}+e^{-i\pi n/4}}{2}\right)z^n,$$

или

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n/2}}{n!}\cos\frac{\pi n}{4}\cdot z^n.$$

Ряд сходится во всей комплексной плоскости. ▲

З а м е ч а н и е. При вычислении радиуса сходимости R степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n=f(z)$$

часто вместо формулы Коши — Адамара (§ 20), применяется формула

$$R=\min|z_k-a|,$$

где минимум берется по всем особым точкам функции комплексного переменного $f(z)$ (см. § 20, п. 2).

В частности, для функции $f(z)=z/(e^z-1)$, рассмотренной в примере 6, особыми точками являются корни уравнения $e^z=1$. Это уравнение, согласно формуле (34), имеет корни

$$z_k=2k\pi i, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Ближайшими к точке $a=0$ являются точки $2\pi i$ и $-2\pi i$, поэтому $R=|2\pi i|=2\pi$, т. е. радиус сходимости ряда (21) равен 2π.

5. Решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x), \tag{37}$$

и будем искать решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y_1, \tag{38}$$

где x_0, y_0, y_1 — заданные числа (*задача Коши*).

Если функции p, q, f представляются степенными рядами вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n,$$

сходящимися к этим функциям в некоторой окрестности точки x_0 (регулярны в точке x_0), то существует единственное решение задачи Коши (37)—(38), представимое в виде степенного ряда

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \tag{39}$$

сходящегося в некоторой окрестности точки x_0.

Находя из равенства (39) с помощью дифференцирования степенные ряды для y', y'', подставляя в уравнение (37) вместо y, y', y'', p, q, f их разложения в степенные ряды и производя соответствующие арифметические действия над степенными рядами, запишем уравнение (37) в виде равенства двух степенных рядов.

Из полученного равенства можно последовательно найти коэффициенты ряда (39) и тем самым решить задачу Коши.

Пример 8. Найти решение уравнения

$$y''-xy=0, \tag{40}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$1)\qquad y(0)=1, \quad y'(0)=0. \tag{41}$$

$$2)\qquad y(0)=0, \quad y'(0)=1. \tag{42}$$

△ Будем искать решение уравнения (40) в виде степенного ряда

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{43}$$

Тогда

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}=2a_2+\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n,$$

$$xy=\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n,$$

и уравнение (40) примет вид

$$2a_2+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n=\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в этом тождестве, получаем

$$a_2=0, \quad (n+1)(n+2)a_{n+2}=a_{n-1}, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{44}$$

Так как $a_2=0$, то из рекуррентной формулы (44) следует, что $a_5=0$, $a_8=0$ и, вообще,

$$a_{3n-1}=0, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{45}$$

Из этой же формулы находим

$$a_{3n}=\frac{a_0}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\dots((3n-1)\cdot 3n)}, \quad a_{3n+1}=\frac{a_1}{(3\cdot 4)(6\cdot 7)\dots(3n(3n+1))}. \tag{46}$$

Если выполняются условия (41), то из (43) следует, что $a_0=1$, $a_1=0$, а если выполняются условия (42), то $a_0=0$, $a_1=1$.

Обозначим y_1 и y_2 решения уравнения (40), удовлетворяющие начальным условиям (41) и (42) соответственно. Тогда из равенств (45) и (46) следует, что

$$y_1=1+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)}+\ldots+\frac{x^{3n}}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\ldots((3n-1)3n)}+\ldots \tag{47}$$

$$y_2=x+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^7}{(3\cdot 4)(6\cdot 7)}+\ldots+\frac{x^{3n+1}}{(3\cdot 4)(6\cdot 7)\ldots(3n(3n+1))}+\ldots \tag{48}$$

Заметим, что ряды (47) и (48) сходятся при любых $x\in\mathbb{R}$, а решение уравнения (40), удовлетворяющее любым начальным условиям, является линейной комбинацией решений y_1 и y_2. ▲

6. Нахождение сумм рядов и интегралов. Различные способы вычисления сумм числовых и функциональных рядов рассмотрены в § 13, 19, 20.

При вычислении сумм числовых рядов иногда удается представить ряд в виде линейной комбинации известных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2, \tag{49}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}, \tag{50}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}, \tag{51}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}. \tag{52}$$

Равенства (49) и (52) доказаны в § 20 (пример 5), а равенства (50) и (51) можно получить, например, с помощью ряда Фурье для функции x^2 (см. задачу **22.45**).

Пример 9. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^n$.

△ В § 20 (пример 4) было показано, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n=\frac{x}{(1-x)^2},\qquad |x|<1.$$

Дифференцируя почленно этот ряд, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}=\frac{(1-x)^2+2x(1-x)}{(1-x)^4}=\frac{1+x}{(1-x)^3},$$

откуда находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, \qquad |x|<1. \blacktriangle$$

Пример 10. Вычислить сумму $f(x)$ степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)},$$

а затем с помощью метода Абеля (§ 20, (11)) найти сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}.$$

△ Дважды дифференцируя почленно степенной ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$$

и используя разложение (13), находим

$$f''(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}x^{2(n-1)} = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{2}{1+x^2}, \qquad |x|<1.$$

Откуда, последовательно интегрируя дважды, получаем

$$f'(x) = 2\operatorname{arctg} x + C,$$

$$f(x) = 2x\operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2) + Cx + C_1.$$

Заметим, что $f(0)=f'(0)=0$ и поэтому $C=C_1=0$. Следовательно,

$$f(x) = 2x\operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2),$$

т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)} = 2x\operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2).$$

Так как данный степенной ряд сходится при $x=1$, а функция f непрерывна в точке $x=1$, то, применив формулу (11) § 20, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} = \frac{\pi}{2} - \ln 2.$$

Этот же результат можно получить, используя равенства (49) и (52). ▲

Пример 11. Вычислить интеграл

$$J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx.$$

△ Используя разложение (11), получаем

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n},$$

откуда находим

$$J=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Из равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

и формул (50) и (51) следует, что $J=\pi^2/12$. ▲

7. Приближенные вычисления значений функций и интегралов с помощью ряда Тейлора.

Пример 12. Доказать справедливость равенства

$$\ln(m+1)=\ln m+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2m+1)^{2n+1}},\qquad m\in\mathbb{N},\quad (53)$$

и с помощью этого равенства вычислить $\ln 2$ и $\ln 3$ с точностью до 10^{-5}.

△ Используя разложения (11) и (12), находим

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\qquad |x|<1,\quad (54)$$

откуда при $x=1/(2m+1)$ получаем равенство (53). Обозначим

$$R_p(x)=2\sum_{n=p}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

и воспользуемся при $x>0$ неравенством

$$|R_p(x)|\leqslant\frac{2x^{2p+1}}{(2p+1)(1-x^2)}.$$

Отсюда, при $x=1/3\,(m=1)$ получаем $R_p\leqslant 10^{-5}$ при всех $p\geqslant 5$, а при $x=1/5\,(m=2)$ находим $R_p\leqslant 10^{-5}$ для всех $p\geqslant 3$. По формуле (53) имеем

$$\ln 2\approx 2\sum_{n=0}^{4}\frac{1}{(2n+1)\,3^{2n+1}}\approx 0{,}69315,$$

$$\ln 3\approx\ln 2+2\sum_{n=0}^{2}\frac{1}{(2n+1)\,5^{2n+1}}\approx 1{,}09861.\ ▲$$

Пример 13. Вычислить с точностью до 0,001 интеграл

$$J=\int_0^1 e^{-x^2}\,dx.$$

△ Используя формулу (3), получаем

$$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!},$$

откуда находим

$$J=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}.$$

Полученный ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница (§ 15). Поэтому для его m-го остатка

$$r_m=\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}$$

справедливо неравенство

$$|r_m|\leqslant\frac{1}{(m+1)!\,(2m+3)}.$$

Так как неравенство $|r_m|\leqslant 0{,}001$ выполняется при $m\geqslant 4$, то

$$J\approx\sum_{n=0}^{4}\frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216},$$

откуда $J\approx 0{,}747$. ▲

21.1. Используя разложения (3)—(7), доказать следующие формулы, справедливые для всех x:

1) $e^{ax}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{ax_0}\frac{a^n}{n!}(x-x_0)^n.$

2) $a^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n,\qquad a>0.$

3) $\operatorname{ch} ax=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n}}{(2n)!}x^{2n}.$

4) $\sin ax=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$

21.2. Используя разложения (8), (13), (16), (19), доказать, что:

1) $\dfrac{1}{a+bx}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n b^n}{a^{n+1}}x^n, \quad |x|<\left|\dfrac{a}{b}\right|, \quad ab\neq 0.$

2) $\dfrac{1}{x^2+a^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{a^{2(n+1)}}x^{2n}, \quad |x|<|a|, \quad a\neq 0.$

3) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}=\dfrac{1}{a}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{a^{2n+1}(2n)!!}x^{2n}, \quad |x|<a, \quad a>0.$

4) $\sqrt{a^2+x^2}=a+\dfrac{x^2}{2a}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!\,a^{2n-1}}x^{2n}, \quad |x|<a,$

$a>0.$

21.3. Используя разложения (11)—(12), доказать, что:

1) $\ln(a+bx)=\ln a+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)^n\dfrac{x^n}{n}, \quad |x|<\dfrac{a}{|b|},$

$a>0, \quad b\neq 0.$

2) $\ln\dfrac{a+x}{a-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{2n+1}\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2n+1}, \quad |x|<a, \quad a>0.$

Используя формулы (3)—(20), разложить функцию в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда (**21.4—21.12**):

21.4. 1) e^{-x^2}. 2) $\dfrac{x^2}{(1+x)^2}$. 3) $\dfrac{1}{(1-x^3)^2}$. 4) $(1-x^2)^{-3/2}$.

5) $\sin\dfrac{x^2}{3}$. 6) $\operatorname{ch}(x\sqrt{2})$. 7) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-2x}}$. 8) $\sqrt{1-x^2}$.

21.5. 1) $e^{2x}+2e^{-x}$. 2) $(1+x)e^{-x}$. 3) $x^2\ln(4+x^2)$.

4) $(1-x)\ln(1-x)$. 5) $\ln\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}$. 6) $(1+x^2)\operatorname{arctg}x$.

7) $\dfrac{1}{2}(\operatorname{sh}x+\sin x)$. 8) $\arccos x$.

21.6. 1) $\dfrac{5x-4}{x+2}$. 2) $\dfrac{1}{x^2-2x-3}$. 3) $\dfrac{1}{2x^2+5x-3}$.

4) $\dfrac{3x+4}{x^2+x-6}$. 5) $\dfrac{5-2x}{x^2-5x+6}$. 6) $\dfrac{1}{(x^2+2)^2}$.

7) $\dfrac{x}{(x+1)(x^2-1)}$. 8) $\dfrac{1}{5-4x^2-x^4}$.

21.7. 1) $\dfrac{1}{3x^4+10x^2+3}$. 2) $\dfrac{x}{2x^4+5x^2+2}$. 3) $\dfrac{1}{(1-x^2)(x^2+4)}$.

4) $\dfrac{2x^2+x+3}{(1-x)^2(2+x)}$. 5) $\dfrac{1}{1-x-x^2}$. 6) $\dfrac{1}{1+x+x^2}$.

21.8. 1) $\dfrac{1}{x^3+x^2+3x+3}$. 2) $\dfrac{1}{x^3+x^2-4x-4}$. 3) $\dfrac{x-2}{x^3+x^2+2x+2}$.

4) $\dfrac{1}{x^4+x^3+x^2+x+1}$.

21.9. 1) $\ln\dfrac{3-2x}{2+3x}$. 2) $\ln(12-x-x^2)$.

3) $\ln\dfrac{2+x^2}{\sqrt{1-2x^2}}$. 4) $\ln\dfrac{|x^2-2|}{x^2+1}$.

5) $\ln\dfrac{2+x^2}{1-x}$. 6) $(x^2+5)\ln\dfrac{9-x^2}{4-x^2}$.

21.10. 1) $\ln\dfrac{2x+1}{x^2-4x+4}$. 2) $\ln\dfrac{x^2-8x+16}{x+8}$.

3) $\ln\dfrac{10+3x-x^2}{4-3x}$. 4) $\ln\sqrt[7]{3-x+6x^2-2x^3}$.

21.11. 1) $\cos^2 x$. 2) $\sin 3x \sin 5x$. 3) $\sin x\cos^2 x$.

4) $x\sin 2x\cos 3x$. 5) $\sin^3 x$. 6) $x\cos^3 2x$.

21.12. 1) $x^2\operatorname{ch}^2 x$. 2) $x\operatorname{sh}^2 x$. 3) $\operatorname{ch}^3 x$. 4) $\sin^5 x$.

21.13. Доказать, что если $a>0$, то

$$\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)=\ln a+\frac{x}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!\,a^{2n+1}(2n+1)}x^{2n+1}.$$

Найти радиус сходимости этого ряда.

Разложить в ряд Маклорена функцию и найти радиус сходимости R ряда (**21.14—21.16**):

21.14. 1) $x\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$. 2) $x\ln\left(x^2+\sqrt{9+x^4}\right)$.

3) $\ln\left(x^3+\sqrt{9+x^6}\right)$. 4) $\ln\left(x^3+\sqrt{64+x^6}\right)$.

5) $(x^2-1)\arcsin 2x^2$. 6) $x^2\arccos 2x$.

7) $\ln\left(e^{1+2x}\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)\right)$.

21.15. 1) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$. 2) $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$.

3) $2x\operatorname{arctg} x-\ln(1+x^2)$. 4) $-\frac{3}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$.

5) $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$. 6) $\ln\left(\pi\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\right)+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$.

21.16. 1) $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$.

2) $\left(\frac{1}{2}+x\right)e^{-2x}-\left(\frac{1}{2}-x\right)e^{2x}$.

3) $\ln\left((2+x)^{2+x}\right)+\ln\left((2-x)^{2-x}\right)$.

4) $x\sqrt{x^2+4}+4\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$.

5) $5+\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

21.17. Доказать следующие формулы:

1) $\frac{1}{4}(e^x+e^{-x}+2\cos x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$, $\quad -\infty<x<+\infty$.

2) $\frac{1}{3}\left(e^x+2e^{-x/2}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$, $\quad -\infty<x<+\infty$.

3) $\frac{x^2+2x}{4}+\frac{1}{2}(1-x^2)\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n(n+2)}$, $\quad |x|<1$.

4) $\frac{3}{4}x^2-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}(1-x)^2\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)}$,

$|x|<1$.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда (**21.18—21.21**):

21.18. 1) $\frac{1}{x^2-5x+6}$, $\quad x_0=1$. $\qquad$ 2) $\frac{1}{(x^2-2x+3)^2}$, $\quad x_0=1$.

3) $\frac{1}{(x^2-6x+18)^2}$, $\quad x_0=3$. $\qquad$ 4) $\frac{x^3-3x^2+4x-1}{x^2-2x+2}$, $\quad x_0=1$.

21.19. 1) $\frac{1}{\sqrt{x^2-12x+40}}$, $\quad x_0=6$. $\qquad$ 2) $\frac{1}{\sqrt{x^2-10x+29}}$, $\quad x_0=5$.

3) $\frac{1}{\sqrt{x^2-6x+18}}$, $\quad x_0=3$. $\qquad$ 4) $\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+8}}$, $\quad x_0=2$.

5) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-6x+36}}$, $\quad x_0=3$. $\qquad$ 6) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-8x+24}}$, $\quad x_0=4$.

21.20. 1) $(x+1)\cos^2 x$, $\quad x_0=-1$.

2) $(2x+1)\sin x\sin(x+1)$, $\quad x_0=-1/2$.

3) $\sin^3 x$, $\quad x_0=\pi/4$. $\qquad$ 4) $\cos^4 x$, $\quad x_0=-\pi/2$.

21.21. 1) $\ln(x^2+2x+2)$, $\quad x_0=-1$. $\qquad$ 2) $\ln(x^2-4x+6)$, $\quad x_0=2$.

3) $\ln(x^2-9x+20)$, $\quad x_0=3$. $\qquad$ 4) $\ln(x^2-10x+30)$, $\quad x_0=5$.

5) $\ln\frac{x^2-2x+3}{2-x}$, $\quad x_0=1$.

21.22. Перемножив соответствующие ряды, разложить функцию в ряд Маклорена и найти радиус сходимости полученного ряда:

1) $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$. $\qquad$ 2) $\frac{e^x}{1-x}$. $\qquad$ 3) $\frac{\operatorname{arctg} x}{1-x}$.

4) $\ln^2(1-x)$. $\qquad$ 5) $(\operatorname{arctg} x)^2$.

21.23. С помощью дифференцирования ряда (9), доказать, что:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad |x|<1.$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}x^n = \frac{1}{(1-x)^4}, \quad |x|<1.$

21.24. Используя формулы (17) и (18), разложить в ряд Маклорена функцию $f^{(3)}(x)$ и найти радиус сходимости полученного ряда, если:

1) $f(x)=\operatorname{arctg} x.$ 2) $f(x)=\arcsin x.$

3) $f(x)=\frac{1}{8}x^2\arcsin 4x.$

Разложить в ряд Маклорена данную функцию, используя ряд Маклорена для ее производной. Найти радиус сходимости полученного ряда (20.25—20.32):

21.25. 1) $\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}.$ 2) $\operatorname{arctg}\frac{x+1/2}{x-1/2}.$

3) $\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{x+6}.$ 4) $\operatorname{arctg}\frac{2-x}{1+2x}.$

21.26. 1) $\operatorname{arctg}\frac{2+x^2}{2-x^2}.$ 2) $\operatorname{arctg}\frac{3-4x^2}{6+2x^2}.$

3) $\operatorname{arctg}\frac{2-2x^2}{1+4x^2}.$ 4) $\operatorname{arctg}\frac{6+x^2}{3-2x^2}.$

5) $x^2\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{3}+3x^2}{x^2-1}.$ 6) $x^3\operatorname{arctg}\frac{2-\frac{1}{2}x^3}{1+x^3}.$

21.27. 1) $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}.$ 2) $\operatorname{arctg}(x+\sqrt{1+x^2}).$

3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\,x}{1-x^2}.$ 4) $x^2\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

21.28. 1) $\operatorname{arcctg}\frac{2x^3}{1-x^6}.$ 2) $\operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

3) $\operatorname{arcctg}\frac{2x^2}{\sqrt{1-4x^4}}.$ 4) $\operatorname{arcctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}.$

21.29. 1) $\arcsin\frac{2x}{1+x^2}.$ 2) $\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$

3) $1+\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{16+x^4}}.$ 4) $2x\arcsin\frac{2x^3}{\sqrt{1+4x^6}}.$

5) $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}).$

21.30. 1) $\frac{1}{8}\arccos\frac{4x^2}{\sqrt{1+16x^4}}$. 2) $x\arccos\frac{x^2}{\sqrt{4+x^4}}$.

3) $\arccos\frac{x^2}{\sqrt{16+x^4}}$.

21.31. 1) $\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$. 2) $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$. 3) $\int\limits_0^x t^2\operatorname{sh} t\,dt$.

4) $\int\limits_0^x \frac{1-\operatorname{ch} t}{t}\,dt$. 5) $\int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,dt$.

21.32. 1) $\int\limits_0^x \frac{\ln(1+4t)}{t}\,dt$. 2) $\int\limits_0^x \ln\frac{1+t}{1-t}\,\frac{dt}{t}$. 3) $\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.

4) $\int\limits_0^x \frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^4}}$. 5) $\int\limits_0^x \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+t^2}}$. 6) $\int\limits_x^1 \ln\frac{3+t}{3-t}\,dt$.

21.33. Найти первые четыре (отличные от нуля) члена ряда Маклорена данной функции:

1) $\ln(1+e^x)$. 2) $(1+x)^x$. 3) $\int\limits_0^x \frac{t\,dt}{\ln(1+t)}$.

4) $e^{\sin x}$. 5) $e^{\operatorname{tg} x}$. 6) $e^{\arcsin x}$.

21.34. Показать, что функция

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

является решением дифференциального уравнения $y'-xy=0$.

21.35. Показать, что функция

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}$$

является решением дифференциального уравнения $xy'=(x+1)y$.

21.36. Показать, что функция

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$$

является решением дифференциального уравнения $xy''+y'-y=0$.

21.37. Показать, что функция

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!!}$$

является решением дифференциального уравнения $y''-xy'-y=0$.

21.38. Показать, что функция

$$y=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{((2n)!!)^2}+\ldots$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению $xy''+y'+xy=0$.

21.39. Показать, что функция

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению $y^{(4)}-y=0$.

21.40. Найти разложение в ряд Маклорена решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям:

1) $y'-y=0,\quad y(0)=1.$
2) $(1+x^2)y'-1=0,\quad y(0)=0.$
3) $y''+\lambda^2 y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=\lambda.$
4) $y''+xy=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$
5) $(1-x^2)y''-xy'=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$
6) $(1-x^2)y''-5xy'-4y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$

21.41. Найти первые четыре (отличные от нуля) члена ряда

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,$$

сумма которого удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''-xy'+y=e^x$ и начальным условиям $y(0)=1,\ y'(0)=0.$

21.42. Найти первые четыре (отличные от нуля) члена ряда

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n,$$

сумма которого удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''=(y')^2+xy$ и начальным условиям $y(1)=1,\ y'(1)=0.$

21.43. Найти первые пять (отличных от нуля) членов ряда

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,$$

сумма которого удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'=x^3+y^2$ и начальному условию $y(0)=1.$

21.44. Пользуясь тем, что функция

$$y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению $(1-x^2)y' - xy = 1$ и условию $y(0)=0$, доказать, что

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1}, \qquad |x| < 1.$$

21.45. Разложить в ряд Маклорена функцию и найти радиус сходимости R полученного ряда:

1) $\dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}$. 2) $\dfrac{x \sin \alpha}{1-2x\cos\alpha + x^2}$.

3) $\dfrac{x\cos\alpha - x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$. 4) $\ln(1-2x\cos\alpha + x^2)$.

5) $\arccos(1-2x^2)$. 6) $\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^2$.

21.46. Пусть $f(x) = \operatorname{arth} x$ — функция, обратная к функции $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$. Разложить $f(x)$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости ряда.

21.47. Доказать формулы:

1) $$\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\right) \frac{x^{2n}}{n+1},$$
$$|x| < 1.$$

2) $$\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2 = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right) \frac{x^n}{n+2},$$
$$|x| < 1.$$

3) $$\operatorname{arctg} x \cdot \ln(1+x^2) =$$
$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| < 1.$$

4) $$\frac{1}{2x(1-x^2)} \ln\frac{1+x}{1-x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\right) x^{2n},$$
$$|x| < 1.$$

5) $$\frac{1}{6}\ln(1-x^3) - \frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{x+2} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2}, \qquad |x| < 1.$$

6) $\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{3}\ln(1-x)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{x+2}=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3n+1},\quad |x|<1.$$

21.48. Доказать формулы:

1) $(\arcsin x)^3=$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12\cdot(2n)!}{(2n+1)(n!)^2}\left(1+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1},\quad |x|<1.$$

2) $\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1},\quad |x|<1.$

3) $\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!}(-1)^{n-1}x^{2n},$

$$|x|<1.$$

4) $\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=$

$$=x-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}(n!)^2}{2n(2n+1)!}x^{2n+1},\quad |x|<1.$$

21.49. Используя разложение

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n,$$

где

$$B_1=1,\quad B_{2k+1}=0,\quad k\in\mathbb{N}$$

(пример 5), доказать, что:

1) $x\operatorname{ctg}x=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}x^{2n},\quad |x|<\pi.$

2) $\ln\dfrac{\sin x}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n-1}B_{2n}}{n(2n)!}x^{2n},\quad |x|<\pi.$

3) $\operatorname{tg}x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n}(1-2^{2n})}{(2n)!}B_{2n}x^{2n-1},\quad |x|<\pi.$

4) $\dfrac{x}{\sin x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2-2^{2n}}{(2n)!}B_{2n}x^{2n},\quad |x|<\pi.$

5) $\ln\cos x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{n(2n)!}B_{2n}x^{2n},\quad |x|<\pi/2.$

21.50. Пусть разложение в ряд Маклорена функции $1/\cos x$ записано в виде

$$\frac{1}{\cos x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{E_{2n}}{(2n)!}x^{2n}.$$

Доказать, что

$$E_0=1,\qquad E_0+C_{2n}^2E_2+C_{2n}^4E_4+\ldots+C_{2n}^{2n}E_{2n}=0,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

21.51. Доказать, что

$$\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{E_{2n}}{(2n+1)(2n)!}x^{2n+1},\qquad |x|<\frac{\pi}{2},$$

где коэффициенты E_{2n} определены в задаче **21.50.**

21.52. Пользуясь определением функций комплексного переменного $\cos z$ и $\sin z$ (формулы (27) и (28)), доказать, что:

1) $\sin z\cdot\cos z=\frac{1}{2}\sin 2z$. 2) $\sin^2 z+\cos^2 z=1$.

21.53. Пользуясь определением функций комплексного переменного $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ (формулы (25) и (26)), доказать, что:

1) $\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=1$. 2) $\operatorname{ch} 2z=\operatorname{ch}^2 z+\operatorname{sh}^2 z$.

21.54. Разложить в ряд по степеням z функции:

1) $e^z\sin z$. 2) $\operatorname{ch} z\cos z$.

3) $e^{z\operatorname{ctg}\alpha}\cos z$, $\sin\alpha\neq 0$. 4) $e^{z\cos\alpha}\cos(z\sin\alpha)$.

21.55. Применяя почленное дифференцирование, вычислить сумму ряда:

1) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$

2) $x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n}+\ldots$

21.56. Применяя интегрирование, вычислить сумму ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$. 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$.

Вычислить сумму ряда (**21.57—21.61**):

21.57. 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n x}{n!}$. 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln^n x}{2^n n!}$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n+1}$.

5) $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) x^n$. 6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$.

21.58. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2) x^n$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n(n+1) x^n$.

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n+1) x^{3n}}{n!}$. 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+1)}{(2n)!} x^{2n}$.

5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n$. 6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n$.

21.59. 1) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$.

2) $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \ldots$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}$.

5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{4n+1}}{4n+1}$. 6) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$.

21.60. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^n$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}$.

3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$. 4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{(n-1)(n+2)}$.

5) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}$. 6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!}$.

21.61. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n)!} (2x)^{2n}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$.

21.62. Коэффициенты ряда $1 + x + 2x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 13x^5 + 24x^6 + \ldots$ обладают тем свойством, что каждый коэффициент (начиная с четвертого) равен сумме трех предыдущих. Найти сумму этого ряда.

Вычислить сумму числового ряда (21.63—21.65):

21.63. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$. 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n+1)}{n!}$.

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$.

5) $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \ldots$

6) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \ldots$

21.64. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (n+1)^2}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (n+1)^2 (n+2)^2}$.

3) $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} + \ldots$

4) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$. 6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$.

21.65. 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$. 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)}$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+3)}$. 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3n+1)}$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(3n+1)}$.

21.66. Пусть $a_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$) и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ расходится. Найти сумму ряда

$$\frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} \cdot \frac{a_3}{a_4+x} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{(a_2+x)(a_3+x)\ldots(a_{n+1}+x)} + \ldots,$$

предполагая, что $x > 0$.

21.67. Найти сумму ряда

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \ldots + \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} + \ldots$$

21.68. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} \text{ при } |x| < 1 \text{ и при } |x| > 1.$$

21.69. Найти сумму ряда

$$\frac{1!}{x+1}+\frac{2!}{(x+1)(x+2)}+\ldots+\frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}+\ldots,$$

где $x \neq -k$ $(k \in \mathbb{N})$.

21.70. С помощью разложения подынтегральной функции в ряд вычислить интеграл:

1) $\int\limits_0^1 \ln\frac{1}{1-x}\,dx$. 2) $\int\limits_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x)\,dx$.

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2\pi x}-1}\,dx$. 4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^x+1}$.

21.71. Пользуясь соответствующими разложениями, вычислить с точностью до 10^{-4} следующие значения функций:

1) $\cos 1°$. 2) $\cos 10°$. 3) $\sin 10°$. 4) $\sin 1°$.

5) $\sqrt[3]{130}$. 6) $\ln 1{,}2$.

21.72. Вычислить с точностью до 10^{-3} следующие значения функций:

1) $\operatorname{tg} 9°$. 2) $\sqrt[3]{500}$. 3) $\operatorname{arctg}(\pi/10)$.

4) $\sqrt[3]{68}$. 5) $\ln 5$. 6) $\arcsin(1/3)$.

21.73. Вычислить с точностью до 10^{-5} следующие значения функций:
1) $\sin 18°$. 2) e.

21.74. Используя равенство $\pi/6 = \arcsin(1/2)$, вычислить число π с помощью ряда Маклорена для функции $\arcsin x$ с точностью до 10^{-4}.

21.75. Используя равенство

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239},$$

вычислить число π с точностью до 10^{-9}.

21.76. Используя ряд Маклорена для $f(x)$, вычислить интеграл $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ с точностью до 10^{-3}, если:

1) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$. 2) $f(x)=\sqrt[3]{x}\cos x$. 3) $f(x)=\cos x^2$.

4) $f(x)=\frac{\operatorname{sh} x}{x}$. 5) $f(x)=\sin x^2$. 6) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.

21.77. Вычислить с точностью до 10^{-3} следующие интегралы:

1) $\int\limits_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx$. 2) $\int\limits_2^4 e^{1/x}\,dx$. 3) $\int\limits_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$.

4) $\int\limits_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$. 5) $\int\limits_5^{10} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx$. 6) $\int\limits_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{x}\,dx$.

7) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$. 8) $\int\limits_0^1 x^x\,dx$.

21.78. Доказать, что если существуют числа $\delta > 0$, $\lambda > 0$ такие, что для всех $x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ и для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $|f^{(n)}(x)| \leqslant \lambda^n$, то в каждой точке x из интервала $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ функция $f(x)$ представляется сходящимся к ней рядом Тейлора (1).

21.79. Пусть существует постоянная $M > 0$ такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|f^{(n)}(x_0)| \leqslant M$. Следует ли отсюда, что:

1) Ряд Тейлора (1) сходится на некотором интервале $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$?

2) Функция $f(x)$ представляется в некоторой окрестности точки x_0 сходящимся к ней рядом Тейлора?

21.80. Доказать, что для функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

можно составить ряд Маклорена, но сумма этого ряда не совпадает с $f(x)$ при $x \neq 0$.

21.81. Пусть

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Верно ли, что $S_n(x) \rightrightarrows \sin x$, $x \in \mathbb{R}$?

21.82. Доказать, что если для коэффициентов степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ выполняются неравенства $|a_n| < \frac{M}{n!}$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$, где $M > 0$ — постоянная, то:

1) Сумма $f(x)$ этого ряда бесконечно дифференцируема в любой точке $a \in \mathbb{R}$.

2) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ при любом $x \in \mathbb{R}$.

21.83. Пусть функция f бесконечно дифференцируема на отрезке $[-1;\ 1]$ и $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$ и для всех

$x \in [-1; 1]$. Доказать, что в интервале $(-1, 1)$ функция $f(x)$ представляется сходящимся степенным рядом.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

21.84. Доказать, что если функция f бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям: 1) существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in \mathbb{R}$ и для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|f^{(n)}(x)| \leqslant M\cdot$ 2) $f(1/n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, то $f(x) \equiv 0$.

21.85. Доказать, что ряд Маклорена для функции

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \cos n^2 x$$

сходится лишь при $x = 0$.

§ 22. Тригонометрические ряды Фурье

1. Разложение функций в тригонометрический ряд Фурье. Ряд вида

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

называется *тригонометрическим рядом*. Его *частичными суммами*

$$S_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

являются последовательные конечные линейные комбинации тригонометрической системы функций

$$1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \tag{2}$$

Система функций (2) обладает *свойством ортогональности*:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = 0, \qquad n \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\, dx = 0, \qquad n \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx\, dx = 0, \qquad n, m = 0, 1, 2, \ldots$$

Отметим также следующие равенства:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В этом параграфе будут рассматриваться функции f, определенные на некотором отрезке $[a; b]$ кроме, быть может, конечного множества его точек, которое может быть пустым, и интегрируемые по Риману на любом отрезке, содержащемся в отрезке $[a; b]$ и не содержащем точек указанного конечного множества. Для таких функций определено понятие несобственного интеграла. Если сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$, то функция f называется *абсолютно интегрируемой* на отрезке $[a; b]$.

Если функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi; \pi]$, то тригонометрический ряд (1), коэффициенты которого (называемые *коэффициентами Фурье* функции f) определяются по формулам

$$\left.\begin{aligned} &a_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\\ &b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad n\in\mathbb{N}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

называется *рядом Фурье* функции f, или, подробнее, ее *тригонометрическим рядом Фурье*. В этом случае пишут

$$f\sim a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{4}$$

Частичные суммы $S_n(x)$ ряда Фурье функции f обозначают также $S_n(x; f)$.

Если функция f четная, то

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n=0, \qquad n\in\mathbb{N},$$

а если — нечетная, то

$$a_n=0,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \qquad b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\ n\in\mathbb{N}.$$

Коэффициенты Фурье любой абсолютно интегрируемой функции стремятся к нулю при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=0. \tag{5}$$

Теорема 1. Ряд Фурье кусочно гладкой *) на отрезке $[-\pi; \pi]$ функции f сходится в каждой точке интервала $(-\pi; \pi)$

*) Функция называется *кусочно гладкой* на некотором отрезке, если она сама и ее производная имеют лишь конечное число точек разрыва на этом отрезке, причем все они — точки разрыва первого рода.

к значению

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

(в частности, в точке непрерывности функции f к ее значению в этой точке), а в точках $x=-\pi$ и $x=\pi$ к значению

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

2. Комплексная форма ряда Фурье. С помощью *формул Эйлера*

$$\left.\begin{aligned}\cos nx&=\frac{1}{2}(e^{nxi}+e^{-nxi}),\\ \sin nx&=\frac{1}{2i}(e^{nxi}-e^{-nxi})\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

тригонометрический ряд (1) можно записать в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{7}$$

где

$$c_0=a_0,\quad c_n=\frac{1}{2}(a_n-b_n i),\quad c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+b_n i),\qquad n\in\mathbb{N},$$

откуда видно, что

$$c_{-n}=\bar{c}_n.$$

Если ряд (1) является рядом Фурье функции f, то

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx,\qquad n\in\mathbb{Z}. \tag{8}$$

Ряд (7) с коэффициентами (8) называют *рядом Фурье в комплексной форме* функции f и пишут

$$f\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}. \tag{9}$$

Если функция $f(x)$, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, принимает комплексные значения,

$$f(x)=u(x)+iv(x)$$

и функции $u(x)$ и $v(x)$ абсолютно интегрируемы на отрезке $[-\pi;\ \pi]$, то ряд (7), коэффициенты которого определяются по формулам (8), называется *рядом Фурье* функции f. В этом случае коэффициенты c_n и c_{-n} (называемые *комплексными коэффициентами Фурье* функции f), вообще говоря, уже не являются комплексно сопряженными как в случае, когда функция f принимает только действительные значения.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\operatorname{ch} x$, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$. Построить график суммы ряда.

△ Вычислим коэффициенты Фурье функции $f(x)=\operatorname{ch} x$ (при вычислении воспользуемся результатом, полученным в примере 20 § 6):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{ch} x\,dx=\frac{\operatorname{sh} x}{\pi}\Big|_0^\pi=\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{ch} x\cos nx\,dx=(-1)^n\frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi(1+n^2)},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

В силу четности функции f все коэффициенты $b_n=0$, $n\in\mathbb{N}$. Согласно теореме 1, ряд Фурье функции f на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ сходится к самой функции f:

$$\operatorname{ch} x=\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{1+n^2}\cos nx\right),\qquad -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$$

На рис. 39 сплошной линией изображен график суммы ряда Фурье функции $\operatorname{ch} x$, а штрихами — график самой функции $\operatorname{ch} x$ вне отрезка $[-\pi;\ \pi]$. ▲

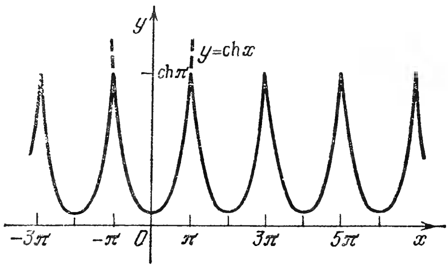

Рис. 39

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\operatorname{sh} x$, $-\pi<x<\pi$. Построить график суммы ряда.

△ Вычислим коэффициенты Фурье. Интегрируя по частям и используя снова результат, полученный в примере 20 § 6, будем иметь

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sh} x\sin nx\,dx=-\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \operatorname{sh} x\,d\cos nx=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\left(\operatorname{sh} x\cos nx\Big|_0^\pi-\int_0^\pi\operatorname{ch} x\cos nx\,dx\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\left((-1)^n\operatorname{sh}\pi-\frac{(-1)^n\operatorname{sh}\pi}{1+n^2}\right)=(-1)^{n-1}\frac{2n\operatorname{sh}\pi}{\pi(1+n^2)},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

В силу нечетности функции $\operatorname{sh} x$ все коэффициенты a_n, $n=0, 1, 2, \ldots$, равны нулю. Согласно теореме 1, ряд Фурье функции $\operatorname{sh} x$ на интервале $(-\pi;\ \pi)$ сходится к самой функции:

$$\operatorname{sh} x=\frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}\sin nx,\qquad -\pi<x<\pi,$$

а в точках $x=-\pi$ и $x=\pi$ его сумма равна

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{\operatorname{sh}(-\pi)+\operatorname{sh}\pi}{2}=0.$$

На рис. 40 сплошными линиями изображен график суммы ряда Фурье функции $\operatorname{sh} x$, а штрихами график самой функции вне отрезка $[-\pi;\ \pi]$. ▲

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию, получающуюся периодическим продолжением с периодом 2π из функции

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2},\qquad 0\leqslant x<2\pi, \tag{9}$$

и доказать с помощью этого разложения, что

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots \tag{10}$$

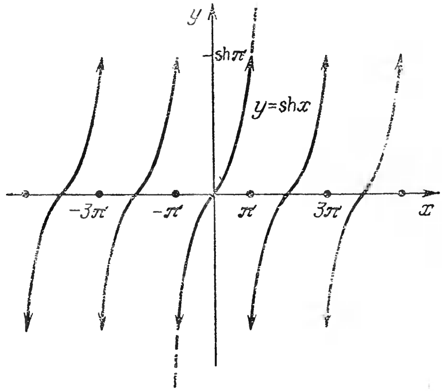

Рис. 40

(ряд, стоящий в правой части этой формулы, называется *рядом Лейбница*).

△ При периодическом продолжении с периодом 2π функции (9) получится функция, отличающаяся от нечетной только значением в нуле. Поэтому для нее $a_n=0$, $n=0, 1, 2, \ldots,$ а

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,dx=-\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi(\pi-x)\,d\cos nx=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}(\pi-x)\cos nx\Big|_0^\pi-\frac{1}{\pi n}\int_0^\pi\cos nx\,dx=\frac{1}{n}.$$

Таким образом,

$$\frac{\pi-x}{2}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}. \tag{11}$$

Из теоремы 1 явствует, что на интервале $(0;\ 2\pi)$ выполняется равенство

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\qquad 0<x<2\pi. \tag{12}$$

При $x=0$ и $x=2\pi$ это равенство уже не имеет места. График суммы ряда Фурье (11) изображен на рис. 41.

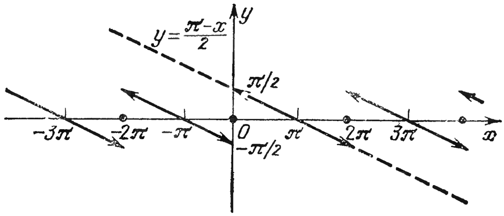

Рис. 41

Из равенства (12) при $x = \pi/2$ следует равенство (10). Выведем его и другим способом, получив из (12) еще два интересных разложения. Заменив в (12) x на $2x$ и разделив обе части получившегося равенства на 2, получим

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k}, \quad 0 < x < \pi.$$

Вычтя это равенство из равенства (12), будем иметь

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin (2k-1)x}{2k-1}, \quad 0 < x < \pi.$$

Положив здесь $x = \pi/2$, получим соотношение (10). ▲

Если ряд Фурье функции, абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi; \pi]$, сходится на отрезке $[-\pi; \pi]$, то он сходится во всех точках числовой оси $\mathbb{R}$ и его сумма является 2π-периодической функцией на $\mathbb{R}$. Поэтому ряды Фурье вида (1) называют также *рядами Фурье периодических функций с периодом* 2π.

Теория рядов Фурье 2π-периодических функций переносится на случай периодических функций, имеющих любой период $2l$, с помощью линейного отображения

$$y = \frac{\pi}{l} x, \quad -l \leqslant x \leqslant l, \quad -\pi \leqslant y \leqslant \pi,$$

отрезка $[-l; l]$ на отрезок $[-\pi; \pi]$. *Рядом Фурье функции f, абсолютно интегрируемой на отрезке* $[-l; l]$, называется ряд

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \tag{13}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &a_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\,dx, \\ &b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Если функция f четная, то

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad b_n = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

а если f — нечетная, то

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Если функция f имеет период $2l$, то при вычислении ее коэффициентов Фурье можно интегрировать по любому отрезку длины $2l$, т. е. для любого числа $c \in \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$\left.\begin{aligned} &a_0 = \frac{1}{2l}\int_{c-l}^{c+l} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{c-l}^{c+l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \\ &b_n = \frac{1}{l}\int_{c-l}^{c+l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Комплексная форма ряда Фурье (13) имеет вид

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{n\pi x i/l}, \tag{16}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,e^{-n\pi x i/l}\,dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{17}$$

Пример 4. Найти комплексную форму ряда Фурье периодической с периодом π функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases}$$

и сумму полученного ряда в точке $x = \pi$.

△ Находим коэффициенты Фурье (здесь $2l = \pi$):

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos x\, e^{-2nxi}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin x - 2ni\cos x}{1-4n^2}\,e^{-2nix}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi}\,\frac{2ni + e^{-n\pi i}}{1-4n^2} = \frac{2ni + (-1)^n}{\pi(1-4n^2)}.$$

Следовательно,

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2ni + (-1)^n}{1-4n^2}\,e^{2inx}.$$

На интервале $(0; \pi)$ ряд сходится к функции $f(x)$, в точке $x=\pi$ — к $\frac{f(+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{1}{2}$. ▲

Представление функции f, заданной на некотором отрезке $[a; b]$, в виде

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n x}{l}+b_n\sin\frac{\pi n x}{l}\right) \qquad (18)$$

(при каком-либо выборе l), справедливом для всех точек отрезка $[a; b]$, кроме, быть может, конечного их множества, называется *разложением функции в тригонометрический ряд* вида (13). Если при этом все $a_n=0$, $n=0, 1, \ldots$, то говорят, что функция f *раскладывается в ряд по синусам* (дуг, кратных $\pi x/l$), а если все $b_n=0$, $n\in\mathbb{N}$, то — *по косинусам* (дуг, кратных $\pi x/l$).

Для кусочно гладкой на отрезке $[a; b]$ функции f за счет выбора различных l имеется бесконечно много ее разложений вида (18). Задача разложения кусочно гладкой на отрезке $[a; b]$ функции f в ряд вида (18) имеет однозначное решение, если дана тригонометрическая система

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\quad \sin\frac{\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos\frac{n\pi x}{l},\quad \sin\frac{n\pi x}{l},\ \ldots$$

(т. е. дано значение l), по которой следует разложить функцию f, и если функция f может быть продолжена с отрезка $[a; b]$ (быть может, с видоизменением ее значения в точках $x=a$ и $x=b$) на всю числовую ось в $2l$-периодическую функцию F. В этом случае коэффициенты a_n, b_n в разложении (18) будут являться коэффициентами Фурье функции F.

Пример 5. Доказать, что кусочно гладкая на отрезке $[0; l]$ функция может быть разложена на этом отрезке в ряд вида (18): 1) по синусам, 2) по косинусам.

△ Пусть функция f кусочно гладкая на интервале $[0; l]$. Если продолжить функцию f с полуинтервала $(0; l]$ на полуинтервал $[-l; 0)$ нечетным образом и положить

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & 0<x\leqslant l,\\ 0, & x=0,\\ -f(-x), & -l\leqslant x<0,\end{cases}$$

то функция F будет кусочно гладкой на отрезке $[-l; l]$ и потому, согласно теореме 1, может быть разложена на этом отрезке в ряд (18). В силу нечетности функции F в этом ряду будут иметься только члены с синусами. На отрезке $[-l; l]$ указанный ряд будет разложением заданной функции f по синусам.

Если продолжить функцию f с отрезка $[0; l]$ четным образом на отрезок $[-l; 0]$, то продолженная функция, согласно теореме 1, будет также раскладываться на отрезке $[-l; l]$ в ряд Фурье, а так как она четная, то этот ряд содержит только члены с косинусами и ясно, что на отрезке $[0;\ l]$ он дает разложение функции f по косинусам. ▲

Пример 6. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $2l$ функцию f, если $f(x)=x$ при $a \leqslant x < a+2l$. Выяснить, для каких значений x будет справедливо это разложение? Чему будет равна сумма ряда Фурье в остальных точках?

△ Найдем коэффициенты Фурье функции f (см. (15)):

$$a_0=\frac{1}{2l}\int\limits_a^{a+2l} x\,dx=\left.\frac{x^2}{4l}\right|_a^{a+2l}=a+l,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int\limits_a^{a+2l} x\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{2l}{n\pi}\sin\frac{n\pi a}{l},$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int\limits_a^{a+2l} x\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=-\frac{2l}{n\pi}\cos\frac{n\pi a}{l},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Таким образом,

$$f(x)\sim a+l+\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}-\cos\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right]=$$
$$=a+l+\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{l}(a-x).$$

Сумма получившегося ряда в точках $x\in(a;\ a+2l)$ равна x, в точках $x=a$ и $x=a+2l$ равна

$$\frac{f(a+0)+f(a+2l-0)}{2}=a+l,$$

а в остальных точках числовой оси сумма в силу ее $2l$-периодичности находится из ее значений в точках отрезка $[a;\ a+2l]$. ▲

Если не оговорено что-либо другое, то разложение в ряд Фурье кусочно гладкой на отрезке $[a;\ b]$ функции f означает представление ее в виде ряда Фурье общего вида (13) с периодом $2l=b-a$, сходящегося, согласно теореме 1, к функции f во всех точках интервала $(a;\ b)$, в которых она непрерывна.

Разложение в ряд Фурье функций, зависящих от $\sin x$ и $\cos x$, удается иногда получить с помощью формул Эйлера:

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\qquad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}. \tag{19}$$

Для этого следует подставить в формулу, задающую рассматриваемую функцию, выражения (19) для косинуса и синуса, и получившуюся функцию от $z=e^{ix}$ разложить в ряд по степеням z, а затем вернуться к переменной x с помощью формулы

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x.$$

В результате получится искомое разложение заданной функции в ряд Фурье.

Пример 7. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\frac{a\sin x}{1-2a\cos x+a^2},\quad |a|<1,\quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi. \tag{20}$$

△ Согласно формулам Эйлера (19), имеем

$$\cos x=\frac{z^2+1}{2z},\qquad \sin x=\frac{z^2-1}{2zi}, \tag{21}$$

где $z=e^{ix}$. Подставим выражения для синуса и косинуса (21) в формулу (20) и представим получившуюся рациональную функцию параметра a в виде суммы двух дробей следующим образом:

$$\frac{a\sin x}{1-2a\cos x+a^2}=\frac{a(z^2-1)}{2i(1-az)(z-a)}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-az}-\frac{1}{1-a/z}\right).$$

Поскольку

$$|az|=|ae^{ix}|=|a|<1,$$
$$|a/z|=|ae^{-ix}|=|a|<1,$$

то дроби $1/(1-az)$ и $1/(1-a/z)$ можно разложить в степенные ряды (эти дроби представляют собой суммы бесконечно убывающих геометрических прогрессий). В результате получится ряд Фурье функции (20) в комплексной форме:

$$\frac{a\sin x}{1-2a\cos x+a^2}=$$
$$=\frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a^nz^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}\right)=\frac{1}{2i}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a^n\left(e^{inx}-e^{-inx}\right)\right).$$

Заметив, что

$$\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}=\sin nx$$

будем иметь

$$\frac{a\sin x}{1-2a\cos x+a^2}=\sum_{n=1}^{\infty}a^n\sin nx.\ ▲$$

Пример 8. Разложить в ряд Фурье неограниченную периодическую функцию

$$f(x)=\ln|2\cos(x/2)|. \tag{22}$$

△ 1-й способ. Непосредственно вычислим коэффициенты Фурье функции (22). Функция f четная, поэтому $b_n=0$, $n\in\mathbb{N}$,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)dx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)dx.$$

Сделав во втором интеграле замену переменного $x=\pi-t$, убедимся, что $a_0=0$. При вычислении коэффициентов a_n, $n\in\mathbb{N}$, проинтегрируем по частям и сделаем замену переменного x на $\pi-x$:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^\pi+$$

$$+\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \frac{\sin nx\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\,dx=(-1)^{n-1}\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi\frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,dx.$$

Представив подынтегральную функцию в виде суммы

$$\frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}+\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

и использовав для вычисления интеграла от каждого слагаемого тождества

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx,$$

$$\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\cos kx,$$

будем иметь

$$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Поэтому

$$\ln\left|2\cos\frac{x}{2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n},\qquad x\neq\pi(2k+1),\quad k\in\mathbb{Z}. \quad (23)$$

2-й способ. Применим для разложения в ряд Фурье функции (22) метод, основанный на применении формул Эйлера (19). Положив $z=e^{ix}$, $-\pi<x<\pi$ (следовательно, $z\neq-1$), в силу формул (19), будем иметь

$$\ln\left|2\cos\frac{x}{2}\right|=\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)=\ln\frac{1+e^{ix}}{e^{ix/2}}=$$

$$=\ln(1+e^{ix})-\ln e^{ix/2}=\ln(1+z)-\frac{ix}{2}.$$

Заметив, что $|z|=|e^{ix}|=1$, $z\neq-1$ и $z^n=e^{inx}=\cos nx+$ $+i\sin nx$, получим, разложив в степенной ряд логарифм

$\ln(1+z)$ (см. § 21),

$$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{e^{inx}}{n}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}.$$

В результате будем иметь

$$\ln\left|2\cos\frac{x}{2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n}+i\left(-\frac{x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}\right). \tag{24}$$

Поскольку в левой части этого равенства стоит действительное число, мнимая часть его правой части равна нулю:

$$-\frac{x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}=0, \tag{25}$$

и, следовательно, из формулы (24) следует разложение (23).

Отметим, что попутно получилось разложение в ряд Фурье функции $x/2$. Действительно, из равенства (25) имеем

$$\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n},\qquad -\pi<x<\pi. \ \blacktriangle$$

Периодическую с периодом $2l$ функцию, абсолютно интегрируемую на отрезке $[-l;\ l]$ (или, что равносильно, на любом отрезке $[a;\ a+2l]$, $a\in\mathbb{R}$), коротко будем называть *$2l$-периодической абсолютно интегрируемой на периоде функцией.*

22.1. Разложить в ряд Фурье функции:

1) $\sin^2 x$. 2) $\cos^3 x$. 3) $\sin^4 x$.

22.2. Каков будет ряд Фурье для тригонометрического полинома

$$T_n(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)?$$

22.3. Найти частичную сумму $S_3(x;\ f)$ ряда Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}0, & -l<x\leqslant 0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant l/2,\\ l/2, & l/2\leqslant x\leqslant l,\end{cases}$$

периодически продолженной с периодом $2l$.

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, указать промежутки, в которых сумма ряда Фурье равна функции $f(x)$, и найти сумму ряда в указанной точке x_0 (22.4—22.11):

22.4. $f(x)=x, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi, \quad x_0=\pi.$

22.5. $f(x)=\begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & -\pi \leqslant x < 0; \end{cases} \quad x_0=0.$

22.6. $f(x)=\begin{cases} \pi/4, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ -\pi/4, & -\pi \leqslant x < 0; \end{cases} \quad x_0=0.$

22.7. $f(x)=\begin{cases} a, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ -a, & -\pi \leqslant x < 0; \end{cases} \quad x_0=0.$

22.8. $f(x)=\pi+x, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi, \quad x_0=\pi.$

22.9. $f(x)=|x|, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi, \quad x_0=\pi.$

22.10. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi \leqslant x < 0, \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi; \end{cases} \quad x_0=-\pi.$

22.11. $f(x)=\begin{cases} -2x, & -\pi < x \leqslant 0, \\ 3x, & 0 < x \leqslant \pi; \end{cases} \quad x_0=\pi.$

22.12. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\operatorname{sign} x$, $-\pi < x < \pi$ и, пользуясь полученным разложением, найти сумму ряда Лейбница

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на указанном промежутке, длина промежутка является периодом (22.13—22.26):

22.13. $f(x)=\begin{cases} A, & 0 < x < l, \\ A/2, & x=l, \\ 0, & l < x < 2l, \end{cases}$ на интервале $(0,\ 2l)$.

22.14. $f(x)=|x|$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

22.15. $f(x)=\begin{cases} ax, & -\pi < x < 0, \\ bx, & 0 \leqslant x < \pi, \end{cases}$ на интервале $(-\pi;\ \pi)$.

22.16. $f(x)=\begin{cases} a, & -\pi/2 < x < \pi/2, \\ b, & \pi/2 \leqslant x < 3\pi/2, \end{cases}$ на интервале $(-\pi/2;\ 3\pi/2)$.

22.17. $f(x)=x+\operatorname{sign} x$ на интервале $(-\pi;\ \pi)$.

22.18. $f(x)=\pi^2-x^2$ на интервале $(-\pi;\ \pi)$.

22.19. $f(x)=x^3$ на интервале $(-\pi;\ \pi)$.

22.20. $f(x)=e^{ax}, \quad a \neq 0,$ на интервале $(-\pi;\ \pi)$.

22.21. $f(x)=e^{2|x|}$ на интервале $(-\pi;\ \pi)$.

22.22. $f(x)=\sin ax$, $a\notin\mathbb{Z}$, на интервале $(-\pi;\ \pi)$.

22.23. $f(x)=\cos ax$, $a\notin\mathbb{Z}$, на отрезке $[-\pi;\ \pi]$. Доказать с помощью получившегося разложения, что

$$\operatorname{ctg} x=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-\pi^2n^2}.$$

22.24. $f(x)=x\sin x$ на отрезке $[-\pi;\ \pi]$.

22.25. $f(x)=x\cos x$ на отрезке $[-\pi/2;\ \pi/2]$.

22.26. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ \sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\end{cases}$ на отрезке $[-\pi;\ \pi]$.

22.27. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом 2 функцию f, если $f(x)=x$, $x\in(1;\ 3)$. Нарисовать график суммы ряда.

22.28. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x^2$, $-1\leqslant x\leqslant 1$, периодически продолженную с периодом 2. Нарисовать график суммы ряда.

22.29. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & 1<x<2,\\ 3-x, & 2\leqslant x<3,\end{cases}$$

периодически продолженную на всю числовую ось с периодом 3. Нарисовать график суммы ряда.

22.30. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\pi-2x$, $0<x\leqslant\pi$, продолжив ее на отрезок $[-\pi;\ 0]$: 1) четным образом, 2) нечетным образом. Нарисовать в обоих случаях графики суммы рядов.

22.31. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[0;\ \pi]$ и продолженную на отрезок $[-\pi;\ 0]$ четным образом. Нарисовать графики суммы рядов:

1) $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant\pi/2,\\ \pi/2, & \pi/2<x\leqslant\pi.\end{cases}$

2) $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$, $0\leqslant x\leqslant\pi$.

Разложить в ряд Фурье следующие периодические функции (**22.32—22.39**):

22.32. $f(x)=\operatorname{sign}(\cos x)$. **22.33.** $f(x)=\arcsin(\cos x)$.

22.34. $f(x)=\arcsin(\sin x)$. **22.35.** $f(x)=x-[x]$.

22.36. $f(x)=(x)$ — расстояние от x до ближайшего целого числа.

22.37. $f(x)=|\cos x|$. **22.38.** $f(x)=|\sin x|$.

22.39. $f(x)=|\cos(x/2)|$.

22.40. Разложить функцию $f(x)=x$, $0\leqslant x\leqslant\pi$, в ряд Фурье по косинусам.

22.41. Разложить функцию $f(x)=\cos 2x$, $0\leqslant x\leqslant\pi$, в ряд Фурье по синусам.

22.42. Разложить в ряд Фурье на $(0;\ \pi)$ по косинусам функцию

$$f(x)=\begin{cases}\pi/2-x, & 0<x<\pi/2,\\ 0, & \pi/2\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

22.43. Разложить в ряд Фурье на интервале $(0;\ \pi)$ по синусам функцию

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi/2,\\ 0, & \pi/2<x<\pi.\end{cases}$$

22.44. Разложить функцию

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$$

в ряд Фурье по косинусам на отрезке $[0;\ 2]$.

22.45. Разложить функцию $f(x)=x^2$ в ряд Фурье:

1) На отрезке $[-\pi;\ \pi]$ по косинусам.
2) На интервале $(0;\ \pi)$ по синусам.
3) На интервале $(0;\ 2\pi)$ по синусам и косинусам.

Пользуясь этими разложениями, найти суммы рядов:

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\qquad S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2},\qquad S_3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

22.46. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}$, $0\leqslant x\leqslant 1$: 1) по косинусам, 2) по синусам.

22.47. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию

$$f(x)=x\sin x,\quad 0\leqslant x\leqslant\pi.$$

22.48. Доказать, что

$$\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2},\qquad 0\leqslant x\leqslant\pi.$$

Указание. Воспользоваться результатами задач **22.40** и **22.45**.

22.49. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x)=e^x$ на интервале $(0;\ \ln 2)$.

22.50. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\pi/2,\\ 0, & \pi/2<x<\pi.\end{cases}$$

22.51. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<1, \\ 2-x, & 1\leqslant x<2. \end{cases}$$

22.52. Разложить функцию $f(x)=e^{ax}$, $0<x<\pi$: 1) в ряд Фурье по косинусам, 2) в ряд Фурье по синусам.

22.53. Разложить функцию $f(x)=\sin ax$, $0\leqslant x\leqslant\pi$, в ряд Фурье по косинусам.

22.54. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию

$$f(x)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant x\leqslant a, \\ 0, & a<x\leqslant\pi. \end{cases}$$

22.55. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию

$$f(x)=\begin{cases} 1-x/2a, & 0\leqslant x\leqslant 2a, \\ 0, & 2a<x\leqslant\pi. \end{cases}$$

22.56. Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^4}=\frac{1}{96}\pi(\pi-2x)(\pi^2+2\pi x-2x^2),\qquad 0\leqslant x\leqslant\pi.$$

22.57. Найти ряд Фурье в комплексной форме функции

$$f(x)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant x\leqslant\pi, \\ -1, & \pi<x\leqslant 2\pi. \end{cases}$$

22.58. Разложить в ряд Фурье в комплексной форме периодическую с периодом 2π функцию $f(x)=e^x$, $-\pi<x<\pi$, $f(\pi)=\operatorname{ch}\pi$.

22.59. Разложить в ряд Фурье в комплексной форме периодическую с периодом 3 функцию

$$f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<1, \\ 0, & 1<x<3, \end{cases}\qquad f(0)=f(1)=1/2.$$

22.60. Разложить в ряд Фурье с помощью комплексной формы ряда Фурье функции:

1) $f(x)=\dfrac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}$, $\quad |a|<1$.

2) $f(x)=\dfrac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}$, $\quad |a|<1$.

22.61. Разложить в ряд Фурье неограниченные периодические функции:

1) $f(x)=\ln|\sin(x/2)|$. 2) $f(x)=\ln|\operatorname{tg}(x/2)|$.

22.62. Использовав разложение функции $f(x)=x$ в ряд Фурье (см. задачу 22.4), доказать, что:

1) $x\sin x = 1-\frac{1}{2}\cos x - 2\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2-1}; \qquad -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$

2) $x\cos x = -\frac{1}{2}\sin x + 2\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin nx}{n^2-1}, \qquad -\pi<x<\pi.$

22.63. Использовав разложение функции $\ln|2\cos(x/2)|$ в ряд Фурье (см. пример 6), доказать, что:

1) $\sin x\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{4}\sin x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}\sin nx,$

$-\pi<x<\pi.$

2) $\cos x\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cos x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2-1}\cos nx,$

$-\pi<x<\pi.$

22.64. Доказать, что если абсолютно интегрируемая на отрезке $[-\pi;\pi]$ функция f удовлетворяет условию:

1) $f(x+\pi)=f(x)$, то $a_{2n-1}=b_{2n-1}=0$, $n\in\mathbb{N}$.

2) $f(x+\pi)=-f(x)$, то $a_0=0$, $a_{2n}=b_{2n}=0$, $n\in\mathbb{N}$.

22.65. Доказать, что если абсолютно интегрируемая на отрезке $[0;\pi]$ функция f удовлетворяет условию $f(\pi-x)=f(x)$, то ее коэффициенты Фурье обладают следующими свойствами:

1) При разложении f в ряд Фурье по косинусам $a_{2n-1}=0$, $n\in\mathbb{N}$.

2) При разложении f в ряд Фурье по синусам $b_{2n}=0$, $n\in\mathbb{N}$.

22.66. Как следует продолжить абсолютно интегрируемую на отрезке $[0;\pi/2]$ функцию на отрезок $[-\pi;\pi]$, чтобы ее ряд Фурье имел вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)x?$$

22.67. Как следует продолжить абсолютно интегрируемую на отрезке $[0;\pi/2]$ функцию на отрезок $[-\pi;\pi]$, чтобы ее ряд Фурье имел вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(2n-1)x?$$

22.68. Разложить функцию $f(x)=x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ в ряд Фурье на отрезке $[0;\pi/2]$:

1) По системе $\{\cos(2n-1)x\}$, $n\in\mathbb{N}$.

2) По системе $\{\sin(2n-1)x\}$, $n\in\mathbb{N}$.

22.69. Доказать, что кусочно гладкая на отрезке $[0; l]$ функция может быть разложена в ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l}.$$

22.70. Доказать, что кусочно гладкая на отрезке $[0; l]$ функция может быть разложена в ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \cos \frac{2n\pi x}{l}.$$

22.71. Доказать при $0 < x < \pi$ равенства:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3} = \frac{\pi x}{8}(\pi - x).$

2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{8}\cos^2 x - \frac{1}{3}\cos x.$

22.72. Какими особенностями обладают коэффициенты Фурье функции периода 2π, если ее график:

1) Имеет центр симметрии в точках $(0; 0)$ и $(\pm\pi/2; 0)$?

2) Имеет центр симметрии в начале координат и оси симметрии $x = \pm\pi/2$?

22.73. Как связаны между собой коэффициенты Фурье a_n, b_n и α_n, β_n функций f и g, если $f(-x) = g(x)$?

22.74. Как связаны между собой коэффициенты Фурье a_n, b_n и α_n, β_n функций f и g, если $f(-x) = -g(x)$?

22.75. Доказать, что ряд Фурье конечной линейной комбинации 2π-периодических, абсолютно интегрируемых на периоде функций равен такой же линейной комбинации рядов Фурье заданных функций.

22.76. Пусть f — 2π-периодическая функция, абсолютно интегрируемая на периоде. Доказать, что если a_n^*, b_n^* — коэффициенты Фурье функции $f^*(x) = f(x+h)$, а a_n, b_n — коэффициенты Фурье функции f, то

$$a_0^* = a_0, \qquad a_n^* = a_n \cos nh + b_n \sin nh,$$
$$b_n^* = b_n \cos nh - a_n \sin nh.$$

В задачах 22.77—22.79 $f = u + iv$ — 2π-периодическая функция, абсолютно интегрируемая на периоде и $f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$.

22.77. Доказать, что

$$f(x+\alpha) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n e^{in\alpha}) e^{inx}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

22.78. Доказать, что если $k \in \mathbb{Z}$, то

$$f(x)\, e^{ikx} \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n-k} e^{inx}.$$

22.79. Доказать, что

$$\bar{f} \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{c}_{-n} e^{inx}.$$

22.80. Пусть функции f и g — 2π-периодические, $|f|^2$ и $|g|^2$ интегрируемы (в несобственном смысле) на отрезке $[-\pi;\ \pi]$,

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad g \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{inx}.$$

Доказать, что тогда произведение fg является 2π-периодической, абсолютно интегрируемой на периоде функцией и если

$$fg \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k_n e^{inx}, \quad \text{то} \quad k_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m d_{n-m}.$$

22.81. Доказать, что

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n} = \begin{cases} x - [x] & \text{для нецелых } x, \\ 1/2 & \text{для целых } x. \end{cases}$$

Указание. Воспользоваться разложением (11) в примере 3.

22.82. Доказать, что для любого $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, выполняется равенство

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x - \pi n} + \frac{1}{x + \pi n} \right).$$

Указание. Воспользоваться результатом задачи **22.23**.

22.83. Доказать, что если функция f непрерывно дифференцируема на отрезке $[x;\ x+\pi]$, то

$$f(x+\pi) - f(x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x}^{x+\pi} f(t) \cos((2n+1)(t-x))\, dt$$

(*Стеклов*).

22.84. Пусть a_n, b_n — коэффициенты Фурье функции, равной e^x на интервале $(-\pi;\ \pi)$. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{2n+1} \cos(2n+1)x + b_{2n+1} \sin(2n+1)x)$$

при $x \in (-\pi;\ \pi)$.

22.85. Доказать, что коэффициенты Фурье a_n, b_n абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ функции стремятся к нулю при $n \to \infty$ (*Риман*).

---

3. Сходимость рядов Фурье. Ядро Дирихле и интеграл Дирихле. Ядро Фейера и суммы Фейера. Функция

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt$$

называется *ядром Дирихле*. Пусть f — 2π-периодическая, абсолютно интегрируемая на периоде функция и $S_n(x)$ — частичная сумма порядка n ее ряда Фурье (она называется также *суммой Фурье порядка n* функции f), тогда

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x+t)\, dt. \tag{26}$$

Средние арифметические сумм Фурье

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_n(x)}{n+1}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{27}$$

называются *суммами Фейера*, а средние арифметические ядер Дирихле

$$\Phi_n(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \ldots + D_n(x)}{n+1}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{28}$$

— *ядрами Фейера*.

Если в некоторой точке x существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x), \tag{29}$$

то ряд Фурье функции f называется *суммируемым в точке x методом средних арифметических* к значению предела (29).

Положим

$$f(x, r) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{30}$$

В силу стремления коэффициентов Фурье к нулю ряд (30) сходится для всех $r \in [0;\ 1)$. Если в некоторой точке x существует конечный предел $\lim\limits_{r\to 1-0} f(x, r)$, то ряд Фурье функции f называется *суммируемым* в рассматриваемой точке *по методу Пуассона — Абеля* к значению, равному указанному пределу.

Пример 9. Доказать формулу (26).

Δ Подставив в сумму Фурье

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

выражения (3) для коэффициентов Фурье, получим

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x)\,f(t)\,dt.$$

Сделав в получившемся интеграле замену переменного $u=t-x$, получим формулу (26). ▲

22.86. Доказать, что ядро Дирихле D_n является четной непрерывной 2π-периодической функцией, $D_n(0)=n+1/2$,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt=1$$

и при $t\neq 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, имеет место равенство

$$D_n(t)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin(t/2)}.$$

22.87. Доказать, что если f — 2π-периодическая, абсолютно интегрируемая на периоде функция и $S_n(x)$ — ее сумма Фурье порядка n, то:

1) $S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} D_n(t)\,[f(x+t)+f(x-t)]\,dt.$

2) Для любого $\delta\in(0;\pi)$ и любого $x\in\mathbb{R}$ имеет место асимптотическое равенство

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} D_n(t)\,[f(x+t)+f(x-t)]\,dt+o(1),\qquad n\to\infty.$$

22.88. Доказать, что если f — 2π-периодическая, абсолютно интегрируемая на периоде функция, то существование и значение предела последовательности ее сумм Фурье $S_n(x)$ в каждой точке $x_0\in\mathbb{R}$ зависит только от существования и значения предела при $n\to\infty$ интеграла

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} D_n(t)\,[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\,dt,$$

где δ — сколь угодно малое положительное число (это утверждение называется *принципом локализации рядов Фурье*).

22.89. Пусть f — 2π-периодическая функция, абсолютно интегрируемая на периоде. Доказать, что если x_0 является точкой непрерывности или точкой разрыва первого рода и при некотором $\delta > 0$ сходится интеграл

$$\int\limits_0^\delta \frac{|f_{x_0}^*(t)|}{t}\,dt,$$

где

$$f_x^*(t) = f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0),$$

то ряд Фурье функции f в точке x_0 сходится к значению

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

(*признак Дини*).

22.90. Доказать, что если f — 2π-периодическая, абсолютно интегрируемая на периоде функция, а в точке $x \in \mathbb{R}$ существуют предельные значения $f(x+0)$, $f(x-0)$ и односторонние производные $f'_+(x)$, $f'_-(x)$, то ряд Фурье функции f сходится в этой точке к значению $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

22.91. Функция f, определенная в некоторой окрестности U точки x, называется *удовлетворяющей условию Гёльдера степени* $\alpha > 0$ в этой точке, если существуют односторонние пределы $f(x+0)$, $f(x-0)$ и такая постоянная $c > 0$, что для всех $h > 0$, для которых $x+h \in U$ и $x-h \in U$, выполняются неравенства

$$|f(x+h) - f(x+0)| < ch^\alpha, \quad |f(x-h) - f(x-0)| < ch^\alpha.$$

Доказать, что если 2π-периодическая, абсолютно интегрируемая на периоде функция f удовлетворяет в точке x условию Гёльдера степени $\alpha > 0$, то ее ряд Фурье сходится в этой точке и его сумма равна

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

22.92. Доказать, что если 2π-периодическая, абсолютно интегрируемая на периоде функция имеет в окрестности данной точки ограниченную производную, то ряд Фурье функции сходится в этой точке к значению функции.

22.93. Доказать, что ядро Фейера Φ_n является четной непрерывной 2π-периодической функцией,

$$\Phi_n(0) = (n+1)/2, \qquad \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt = 1$$

и при $t \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, имеет место равенство

$$\Phi_n(t) = \frac{\sin^2((n+1)t/2)}{2(n+1)\sin^2(t/2)}.$$

22.94. Доказать, что ядро Фейера Φ_n для любого $\delta > 0$ удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} \max_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \Phi_n(t) = 0.$$

22.95. Доказать: если функция непрерывна на отрезке $[-\pi; \pi]$ и принимает на его концах равные значения, то последовательность ее сумм Фейера равномерно сходится на этом отрезке к рассматриваемой функции.

22.96. Доказать, что если f — 2π-периодическая, абсолютно интегрируемая на периоде функция, имеющая в точке x пределы слева и справа $f(x \pm 0)$, то (см. обозначения (27))

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

22.97. Доказать, что если 2π-периодическая, абсолютно интегрируемая на периоде функция f непрерывна в точке x и ряд Фурье функции f сходится в этой точке, то его сумма равна $f(x)$.

22.98. Доказать, что если функция f непрерывна на отрезке $[-\pi; \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен

$$T(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$$

такой, что для всех $x \in [-\pi; \pi]$ выполняется неравенство $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$ (*Вейерштрасс*).

22.99. Доказать, что для функции $f(x; r)$ (см. (30)) имеет место формула

$$f(x; r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2}\, dt$$

(*Пуассон*).

22.100. Доказать, что если 2π-периодическая, абсолютно интегрируемая на периоде функция f имеет в точке x пределы слева и справа $f(x \pm 0)$, то

$$\lim_{r\to 1-0} f(x; r) = \lim_{r\to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2}\, dt = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

т. е. ряд Фурье функции f суммируем методом Пуассона — Абеля к значению $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

22.101. Доказать, что если f — 2π-периодическая, непрерывная функция, то $f(x, r)$ равномерно стремится на всей числовой оси к функции f при $r \to 1-0$.

22.102. Доказать, что:

1) $$\operatorname{sign} x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}, \qquad -\pi < x < \pi.$$

2) Частичные суммы $S_n(x)$ ряда Фурье функции $\operatorname{sign} x$ имеют максимум при $x_n = \pi/(2n)$ и

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_n) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx > 1.$$

22.103. Доказать, что для любой функции f вида

$$f(x) = g(x) + c\operatorname{sign}(x - x_0), \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi,$$

где постоянная $c \neq 0$, $|x_0| < \pi$, g — непрерывно дифференцируемая на отрезке $[-\pi; \pi]$ функция, в точке $x = x_0$ имеет место *явление Гиббса*: если $S_n(x)$ — сумма Фурье порядка n функции f, то либо

$$\varliminf_{\substack{n\to\infty\\ x\to x_0-0}} S_n(x) < f(x_0-0) \leqslant f(x_0+0) < \varlimsup_{\substack{n\to\infty\\ x\to x_0+0}} S_n(x),$$

либо

$$\varlimsup_{\substack{n\to\infty\\ x\to x_0-0}} S_n(x) > f(x_0-0) \geqslant f(x_0+0) > \varliminf_{\substack{n\to\infty\\ x\to x_0+0}} S_n(x).$$

22.104. Функция

$$\bar{D}_n(x) = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$$

называется *сопряженным ядром Дирихле*. Доказать, что:

1) $$\bar{D}_n(x) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin(x/2)}, \qquad x \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2) $|D_n(x)| < \pi/2|x|$, $\quad |\bar{D}_n(x)| \leqslant \pi/|x|$, $\quad 0 < |x| \leqslant \pi$.

22.105. Числа

$$L_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\,dt$$

называются *константами Лебега*. Доказать, что:

1) $$L_n = \frac{2}{\pi}J_n + O(1), \quad n\to\infty, \quad \text{где} \quad J_n = \int_0^{\pi}\left|\frac{\sin nt}{t}\right|dt.$$

2) $$L_n \sim \frac{4}{\pi^2}\ln n, \quad n \to \infty.$$

22.106. *Рядом, сопряженным к тригонометрическому ряду* (1), называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-b_n \cos nx + a_n \sin nx).$$

Пусть ряд (1) является рядом Фурье функции f. Доказать, что в этом случае частичные суммы $\overline{S}_n(x; f)$ сопряженного ряда могут быть записаны в виде

$$\overline{S}_n(x; f) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{D}_n(t-x)\, dt,$$

где $\overline{D}_n(x)$ определена в задаче **22.104**.

22.107. Доказать, что если f — интегрируемая по Риману на отрезке $[-\pi; \pi]$ функция и, следовательно, существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in [-\pi; \pi]$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$, то

$$|S_n(x; f)| \leqslant cM \ln n, \quad |\overline{S}_n(x; f)| \leqslant cM \ln n,$$

$|x| \leqslant \pi$, где c — некоторая абсолютная постоянная.

22.108. Пусть f — 2π-периодическая, абсолютно интегрируемая на периоде функция и

$$\omega(\delta; f) = \sup_{0 \leqslant |h| \leqslant \delta} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|\, dx$$

(функция $\omega(\delta; f)$ называется *интегральным модулем непрерывности функции* f). Доказать, что для комплексных коэффициентов Фурье c_n функции f выполняются неравенства

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{4\pi} \omega(\pi/n; f), \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

22.109. В предположениях предыдущей задачи доказать, что для коэффициентов Фурье a_n и b_n функции f, принимающей только действительные значения, выполняются неравенства

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \omega(\pi/n; f), \qquad |b_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \omega(\pi/n; f), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

---

4. Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Абсолютная и равномерная сходимость рядов Фурье. Если функция f непрерывна и кусочно дифференцируема на отрезке $[-\pi; \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$,

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

то ряд Фурье производной f' получается из ряда Фурье функции f почленным дифференцированием:

$$f' \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx). \tag{31}$$

Кроме того, при сделанных предположениях ряд Фурье функции f сходится к ней на всем отрезке $[-\pi; \pi]$ равномерно и абсолютно.

Если функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi; \pi]$, то функция

$$F(x) = \int_0^x (f(t) - a_0)\, dt \tag{32}$$

непрерывна на $[-\pi; \pi]$, $F(-\pi) = F(\pi)$, ряд Фурье функции F равномерно сходится к $F(x)$ на $[-\pi; \pi]$ и находится формальным интегрированием от нуля до x ряда Фурье функции $f(x) - a_0$:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx\right). \tag{33}$$

Пример 10. Доказать: если все коэффициенты Фурье непрерывной периода 2π функции равны нулю, то сама функция тождественно равна нулю.

△ Из формул (32)—(33) и условий $a_0 = 0$, $a_n = b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, следует, что для любого $x \in [-\pi; \pi]$ имеет место равенство

$$\int_0^x f(t)\, dt = -a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx + b_n (1 - \cos nx)}{n} = 0.$$

Дифференцируя его, получим $f(x) \equiv 0$. ▲

Пример 11. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \ln(1 - 2a\cos x + a^2), \qquad |a| < 1.$$

△ Для производной

$$f'(x) = \frac{2a \sin x}{1 - 2a\cos x + a^2}$$

заданной функции $f(x)$ мы уже получили разложение в ряд Фурье в примере 7:

$$f'(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx.$$

Проинтегрировав это равенство, получим

$$\ln(1 - 2a\cos x + a^2) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \cos nx + c.$$

Положив $a=0$, будем иметь $c=0$. Поэтому

$$\ln(1-2a\cos x+a^2)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}\cos nx. \blacktriangle$$

22.110. Доказать, что если тригонометрический ряд сходится равномерно, то он является рядом Фурье своей суммы.

22.111. Являются ли нижеследующие тригонометрические ряды рядами Фурье:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^\alpha}$, $\alpha>1$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$.

22.112. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\int_0^x \ln\sqrt{\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|}\,dt, \qquad -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$$

22.113. Доказать, что если тригонометрический ряд имеет подпоследовательность частичных сумм, равномерно сходящуюся на отрезке $[-\pi;\pi]$ к некоторой функции, то этот ряд является ее рядом Фурье.

22.114. Доказать, что если непрерывная кусочно гладкая на отрезке $[-\pi;\pi]$ функция f принимает на его концах равные значения, то ее ряд Фурье сходится к ней абсолютно и равномерно на отрезке $[-\pi;\pi]$.

22.115. Не вычисляя коэффициентов ряда Фурье на $(-\pi;\pi)$ функции $f(x)=\pi x-x|x|$, выяснить, сходится ли этот ряд равномерно. Построить графики сумм продифференцированного и дважды продифференцированного рядов.

22.116. Исходя из разложения

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}, \qquad -\pi<x<\pi,$$

получить почленным интегрированием разложения в ряд Фурье функций x^2, x^3 и x^4.

22.117. Доказать, что тригонометрический ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{\ln n}$$

является, а ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$$

не является рядом Фурье.

22.118. Доказать: что если две непрерывные периода 2π функции имеют одинаковые коэффициенты Фурье, то эти функции тождественно равны.

22.119. Доказать: если функция f непрерывна на отрезке $[-\pi; \pi]$ и ее ряд Фурье сходится равномерно на этом отрезке, то в любой точке отрезка $[-\pi; \pi]$ сумма ряда равна функции f в этой точке.

22.120. Доказать: если функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi; \pi]$,

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

— ее ряд Фурье, то для любых точек $x' \in [-\pi; \pi]$ и $x'' \in [-\pi; \pi]$ справедливо равенство

$$\int_{x'}^{x''} f(x)\,dx = \int_{x'}^{x''} a_0\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x'}^{x''} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,dx.$$

22.121. Проинтегрировав почленно разложение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \qquad 0 < x < 2\pi,$$

получить формулу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6}.$$

22.122. Доказать: если функция f имеет на отрезке $[-\pi; \pi]$ непрерывные производные до порядка $k-1$ включительно и кусочно непрерывную производную порядка $k \geqslant 1$, причем $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, k-1$, то:

1) Коэффициенты Фурье функции f удовлетворяют неравенствам

$$|a_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \qquad |b_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

где ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2$ сходится.

2) Ряд Фурье функции f равномерно и абсолютно сходится на отрезке $[-\pi; \pi]$ к функции f и

$$|f(x) - S_n(x; f)| \leqslant \frac{\delta_n}{n^{k-1/2}}, \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi,$$

где $\lim\limits_{n \to \infty} \delta_n = 0$.

22.123. Определить точный порядок убывания коэффициентов Фурье функции

$$f(x) = x^{10}, \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

22.124. Доказать: если функция f имеет на отрезке $[-\pi; \pi]$ непрерывные производные до порядка $k-1$ включительно и интегрируемую по Риману производную порядка $k \geqslant 1$, причем

$$f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi), \quad j = 0, 1, \ldots, k-1,$$
$$|f^{(k)}(x)| \leqslant c_k, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi,$$

то

$$|f(x) - S_n(x; f)| \leqslant Ac_k \frac{\ln n}{n^k}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi,$$

где A — абсолютная постоянная. Указание. Воспользоваться результатом задачи **22.122.**

22.125. Доказать: если функция $f = u + iv$ имеет на отрезке $[-\pi; \pi]$ непрерывные производные до порядка $k-1$ включительно и $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, кусочно непрерывную производную порядка $k \geqslant 1$ и

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad f^{(k)} \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^{(k)} e^{inx},$$

то

$$c_n = c_n^{(k)}/(in)^k.$$

22.126. Доказать, что для комплексных коэффициентов Фурье c_n 2π-периодической, абсолютно интегрируемой на периоде функции f имеют место формулы

$$c_n = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right)\right] e^{-inx}\,dx.$$

22.127. Пусть функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi; \pi]$ и удовлетворяет условию Гёльдера степени α, $0 < \alpha \leqslant 1$, на отрезке $[a; b] \subset [-\pi; \pi]$, т. е.

$$|f(x'') - f(x')| \leqslant c|x'' - x'|^\alpha, \quad x', x'' \in [a; b].$$

Доказать, что на любом отрезке $[c; d]$, $a < c < d < b$, ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно.

22.128. Доказать: если 2π-периодическая, абсолютно интегрируемая на периоде функция имеет на отрезке $[a; b]$ ограниченную производную, то на любом отрезке $[\alpha; \beta]$, $a < \alpha < \beta < b$, ряд Фурье функции сходится к ней равномерно.

22.129. Пусть функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi; \pi]$ и непрерывна на отрезке $[a; b] \subset [-\pi; \pi]$. Доказать: если интеграл

$$\int_0^\delta \frac{|f_x^*(t)|}{t}\,dt,$$

где

$$f_x^*(t) = f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0),$$

при некотором $\delta > 0$ сходится равномерно относительно $x \in [a; b]$, то ряд Фурье функции сходится к ней равномерно на $[a; b]$. Определение равномерной сходимости интеграла см., например, [2], с. 122.

• **22.130.** Доказать: если последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю, то ряд

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx:$$

1) сходится на всей числовой оси, кроме, быть может, точек вида $x = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; 2) при любом $\delta > 0$ сходится равномерно на отрезке $[\delta; 2\pi - \delta]$.

22.131. Доказать: если последовательность $\{b_n\}$ монотонно стремится к нулю, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$: 1) сходится на всей числовой оси; 2) при любом $\delta > 0$ сходится равномерно на отрезке $[\delta; 2\pi - \delta]$.

22.132. Доказать: если последовательность $\{b_n\}$ убывает, то для равномерной сходимости на отрезке $[0; 2\pi]$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} nb_n = 0$.

22.133. Привести пример тригонометрического ряда, который сходится равномерно на отрезке $[-\pi; \pi]$, но не сходится абсолютно во всех точках этого отрезка.

22.134. Доказать, что последовательность $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right\}$ ограничена на всей числовой оси.

22.135. Доказать, что если последовательность $\{b_n\}$ убывает, а последовательность $\{nb_n\}$ ограничена, то частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ ограничены в совокупности, т. е. существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in [-\pi; \pi]$ и всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx\right| \leqslant c.$$

22.136. Пусть f — непрерывная функция с периодом 2π. Выразить коэффициенты Фурье A_n, B_n свертки

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t)\, dt$$

через коэффициенты Фурье a_n, b_n функции f.

22.137. Найти выражение коэффициентов Фурье A_n, B_n функции Стеклова

$$f_h(x) = \frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt, \qquad h > 0,$$

через коэффициенты Фурье a_n, b_n 2π-периодической, абсолютно интегрируемой на периоде функции f.

---

5. **Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Сходимость рядов Фурье в смысле среднего квадратического.** Если квадрат функции f интегрируем *) (вообще говоря, в несобственном смысле) на отрезке $[-\pi; \pi]$, то

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x;\ f)]^2\,dx = \min_{T_n(x)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2\,dx, \tag{34}$$

где минимум в правой части берется по всем тригонометрическим многочленам

$$T_n(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$$

степени не выше n.

Если a_0, a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}$, — коэффициенты Фурье функции f, то справедливо *равенство Парсеваля*:

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{35}$$

Пример 12. Пусть квадрат функции f интегрируем на отрезке $[-\pi;\ \pi]$. Доказать равенство

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x;\ f))^2\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left(2a_0^2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\right). \tag{36}$$

$\triangle$ Возведя в квадрат подынтегральное выражение в левой части равенства и интегрируя его, получим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x;\ f))^2\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right)\right)^2 dx =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx + \pi\left(2a_0^2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\right) -$$

---

*) В этом разделе рассматриваются функции с действительными значениями.

$$-2\left(a_0\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx\right)\right)\underset{(3)}{=}$$

$$\underset{(3)}{=}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx+\pi\left(2a_0^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right)-2\pi\left(2a_0^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right)=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\pi\left(2a_0^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right). \ ▲$$

Из формул (35)—(36) следует, что для любой функции, квадрат которой интегрируем на отрезке $[-\pi; \pi]$, ряд Фурье этой функции сходится к ней в смысле среднего квадратичного на этом отрезке, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n(x;\ f))^2\,dx=0. \tag{37}$$

Пример 13. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[0; \pi]$ и имеет производную, квадрат которой интегрируем на этом отрезке. Доказать: если

$$\int_0^{\pi}f(x)\,dx=0, \tag{38}$$

то справедливо равенство

$$\int_0^{\pi}(f(x))^2\,dx\leqslant\int_0^{\pi}(f'(x))^2\,dx \tag{39}$$

△ В силу условия (38), разложение функции f по косинусам на отрезке $[0; \pi]$ имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ (т. е. $a_0=0$), поэтому $f'(x)\sim-\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n\sin nx$. Поскольку $a_n^2\leqslant n^2a_n^2$, $n\in\mathbb{N}$, то из равенства Парсеваля для функций f и f':

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x))^2\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2,\qquad \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(f'(x))^2\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}n^2a_n^2,$$

сразу следует неравенство (39). ▲

Пример 14. Использовав разложение (12) функции $f(x)=(\pi-x)/2$ в ряд Фурье, найти с помощью равенства Парсеваля сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

△ В силу равенств (12) и (35), имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^{2\pi} dx - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x\,dx + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{\pi^2}{6}. \ ▲$$

22.138. С помощью равенства Парсеваля для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \alpha, \\ 0, & \alpha < |x| < \pi, \end{cases}$$

найти суммы рядов

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \quad \text{и} \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$$

22.139. Пусть квадрат функции f интегрируем на отрезке $[-\pi;\ \pi]$. Доказать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_{n+1}(x;\ f))^2\,dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x;\ f))^2\,dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

22.140. Доказать, что если все коэффициенты Фурье функции f с интегрируемым на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ квадратом равны нулю, то $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx = 0$. В частности, если при этом функция f непрерывна, то $f(x) = 0$ на отрезке $[-\pi;\ \pi]$.

В задачах **22.141** и **22.142** квадраты функций f и g интегрируемы на отрезке $[-\pi;\ \pi]$:

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$g \sim \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx).$$

22.141. Доказать: если $a_0 = \alpha_0$, $a_n = \alpha_n$, $b_n = \beta_n$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\,dx = 0.$$

В частности, если при этом функции f и g непрерывны, то $f(x) = g(x)$ на отрезке $[-\pi;\ \pi]$.

22.142. Доказать, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,dx = 2a_0\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n).$$

22.143. Пусть функции f и g имеют интегрируемые квадраты на отрезке $[-\pi;\ \pi]$. Доказать, что ряд Фурье произведения fg функций f и g может быть получен почленным перемножением рядов Фурье этих функций.

22.144. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[0;\ \pi]$, имеет производную, квадрат которой интегрируем на этом отрезке, и $f(0) = f(\pi) = 0$. Доказать, что тогда

$$\int_0^{\pi}(f(x))^2\,dx \leqslant \int_0^{\pi}(f'(x))^2\,dx.$$

22.145. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi;\ \pi]$, имеет производную, квадрат которой интегрируем на этом отрезке, $f(-\pi) = f(\pi)$ и $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$. Доказать, что тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx \leqslant \int_0^{\pi}(f'(x))^2\,dx.$$

---

6. Суммирование тригонометрических рядов. Иногда удается вычислить сумму сходящегося тригонометрического ряда, сведя его к степенному ряду, сумму которого можно найти. Идея этого метода состоит в следующем: если ряды

$$p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos nx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin nx \tag{40}$$

сходятся на отрезке $[-\pi;\ \pi]$, кроме, быть может, конечного множества точек, то на том же множестве значений переменной x сходится ряд

$$p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos nx + i\sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin nx = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n, \qquad z = e^{ix}. \tag{41}$$

Поскольку он сходится в некоторых точках единичной окружности $|z| = 1$, то он сходится в открытом круге $|z| < 1$ и его сумма

$$f(z) = f(re^{i\varphi}) = p_0 + \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n, \qquad z = re^{i\varphi}, \tag{42}$$

при $0 < |z| = r < 1$ является аналитической функцией. Если

$$u(x) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos nx, \qquad v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin nx,$$

то согласно второй теореме Абеля для тех точек x, в которых ряды (40) сходятся, имеет место равенство

$$u(x)+iv(x)=f(e^{ix}). \tag{43}$$

Когда удается найти функцию f в явном виде (т. е. выразить ее через элементарные функции) и вычислить ее значение, стоящее в правой части равенства (43), то тем самым удается найти и суммы рядов (40).

Пример 15. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}. \tag{44}$$

△ Наряду с рядом (44), который сходится при $x\neq 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}. \tag{45}$$

Этот ряд сходится на всей числовой оси. В данном случае для функции $f(z)$ (см. (42)) имеем

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=-\ln(1-z)=\ln\frac{1}{1-z},\qquad |z|\leqslant 1,\quad z\neq 1.$$

Следовательно, обозначая сумму ряда (44) через $u(x)$, а сумму ряда (45) через $v(x)$, получим

$$u(x)+iv(x)=\ln\frac{1}{1-e^{ix}},\qquad 0<x<2\pi. \tag{46}$$

Преобразуем выражение, стоящее под знаком логарифма:

$$\frac{1}{1-e^{ix}}=\frac{1}{(1-\cos x)-i\sin x}=$$

$$=\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}-2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\,\frac{1}{\sin\frac{x}{2}-i\cos\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2\sin(x/2)}\left(\sin\frac{x}{2}+i\cos\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sin(x/2)}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right].$$

Таким образом, модуль числа $1/(1-e^{ix})$ равен $1/2\sin(x/2)$, а аргумент $(\pi-x)/2$. Поэтому из равенства (46) будем иметь

$$u(x)+iv(x)=\ln\frac{1}{1-e^{ix}}=\ln\frac{1}{2\sin(x/2)}+i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=$$

$$=-\ln(2\sin(x/2))+i(\pi-x)/2.$$

Откуда сразу находится сумма ряда (44):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = u(x) = -\ln(2\sin(x/2)), \qquad 0 < x < 2\pi.$$

Заметим, что заодно мы доказали, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \qquad 0 < x < 2\pi. \ \blacktriangle$$

Найти суммы следующих рядов (22.146—22.178):

22.146. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$. **22.147.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$.

22.148. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)!}$.

22.149. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)!}$.

22.150. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\cos 2nx}{(2n)!}$ **22.151.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\sin 2nx}{(2n)!}$.

22.152. $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n(n+1)}$.

22.153. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$.

22.154. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\cos nx}{n^2-1}$.

22.155. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\sin nx}{n^2-1}$. **22.156.** $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n}{n^2-1} \cos nx$.

22.157. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n}{n^2-1} \sin nx$.

22.158. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\cos nx}{(n+1)(n+2)}$.

22.159. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{(n+1)(n+2)}$.

22.160. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n^2+a^2)}$.

22.161. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n(n^2+a^2)}$.

22.162. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)x}{n}$.

22.163. $\frac{\cos 2x}{1\cdot 2}+\frac{\cos 3x}{2\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 4}+\ldots$

22.164. $\frac{\cos 2x}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\cos 3x}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$

22.165. $\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\ldots$

22.166. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$.

22.167. $\frac{\cos 3x}{1\cdot 3\cdot 5}-\frac{\cos 5x}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{\cos 7x}{5\cdot 7\cdot 9}-\ldots$

22.168. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}$.

22.169. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.

22.170. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)2n}$.

22.171. $\cos x+\frac{1}{2}\frac{\cos 3x}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\cos 5x}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\cos 7x}{7}+\ldots$

22.172. $\sin x+\frac{1}{2}\frac{\sin 3x}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\sin 5x}{5}+\ldots$

22.173. $\frac{\cos x}{1\cdot 2}+\frac{1}{2}\frac{\cos 3x}{3\cdot 4}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\cos 5x}{5\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\cos 7x}{7\cdot 8}+\ldots$

22.174. $\frac{\sin x}{1\cdot 2}+\frac{1}{2}\frac{\sin 3x}{3\cdot 4}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\sin 5x}{5\cdot 6}+\ldots$

22.175. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}\cos nx, \quad |a|<1.$

22.176. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \sin nx}{n}$.

22.177. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha \sin nx}{n}, \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$

22.178. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{r^n \sin nx}{n}, \qquad |r| \leqslant 1.$

§ 23. Асимптотические представления функций

1. Асимптотические равенства. Часто бывает полезно для функции f, заданной в окрестности конечной или бесконечно удаленной точки x_0, найти в каком-то смысле более простую функцию (например, элементарную, если функция не была элементарной) асимптотически равную ей.

Пример 1. Доказать, что

$$\int_0^x \frac{\sin^2 t}{t}\,dt \sim \frac{1}{2}\ln x, \qquad x \to +\infty. \tag{1}$$

$\triangle$ Разбив промежуток интегрирования от 0 до x на два промежутка: от 0 до 1 и от 1 до x, а затем применив формулу $\sin^2 t = (1-\cos 2t)/2$, получим

$$\int_0^x \frac{\sin^2 t}{t}\,dt = \int_0^1 \frac{\sin^2 t}{t}\,dt + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos 2t}{t}\,dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin^2 t}{t}\,dt + \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos 2t}{t}\,dt. \tag{2}$$

Поскольку $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^2 t}{t}\,dt$ — константа, а интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t}\,dt$ сходится, то из равенства (2) следует, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\displaystyle\int_0^x \frac{\sin^2 t}{t}\,dt}{\ln x} = 1.$$

Это означает, что выполнено асимптотическое равенство (1). $\blacktriangle$

Доказать асимптотические равенства (**23.1—23.6**):

23.1. $\displaystyle\int_2^x \frac{dt}{t^{\iota}\ln^\beta t} \sim -\frac{1}{\alpha x^\alpha \ln^\beta x}, \qquad x \to +\infty, \qquad \alpha < 0, \qquad \beta \in \mathbb{R}.$

23.2. $\displaystyle\int_0^x t^\alpha e^{-1/t}\,dt \sim x^{\alpha+2} e^{-1/x}, \qquad x \to +0.$

23.3. $\displaystyle\int\limits_a^x \frac{(\ln t)^\alpha}{\sqrt{t^2+1}}\,dt \sim \frac{(\ln x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \qquad x\to+\infty, \qquad \alpha>-1, \ a>1.$

23.4. $\displaystyle\int\limits_x^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t+1}}\,e^{-t}\,dt \sim \frac{1}{2\sqrt{x}}\,e^{-x}(\sin x+\cos x), \qquad x\to+\infty.$

23.5. $\displaystyle\int\limits_x^{+\infty} \sqrt{t^2+1}\,\sin e^t\,dt \sim xe^{-x}\cos e^x, \qquad x\to+\infty.$

23.6. $\displaystyle\int\limits_0^x \sqrt{t^2+1}\,e^t\sin t\,dt \sim \frac{1}{2}\,xe^x(\sin x-\cos x), \qquad x\to+\infty.$

23.7. Найти элементарную функцию, асимптотически равную при $x\to+\infty$ интегралу

$$\int\limits_1^x \frac{\sin^4 t}{t}\,dt.$$

23.8. Доказать, что

$$\int\limits_x^{+\infty} \cos t^2\,dt = -\frac{\sin x^2}{2x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right), \qquad x\to+\infty.$$

23.9. Доказать, что

$$\int\limits_x^{+\infty} \sin t^2\,dt = \frac{\cos x^2}{2x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right), \qquad x\to+\infty.$$

23.10. Доказать, что

$$\int\limits_x^{+\infty} \sin t^m\,dt = \frac{\cos x^m}{mx^{m-1}} + O\left(\frac{1}{x^{2m-1}}\right), \qquad x\to+\infty, \qquad m>1.$$

23.11. Доказать *формулу Стирлинга*:

$$\Gamma(s+1) \sim \sqrt{2\pi}\,e^{-s}s^{s+1/2}, \qquad s\to+\infty,$$

где

$$\Gamma(s+1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^s\,dx, \qquad s>-1,$$

— *гамма-функция.*

23.12. Доказать: если неотрицательная, непрерывная, не равная тождественно нулю функция f имеет при $t>1$ период T:

$$f(t+T)=f(t), \quad T>0,$$

то

$$\int\limits_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt \asymp \ln x, \qquad x\to+\infty.$$

23.13. Доказать, что

$$\int\limits_1^x \frac{\ln(1+\cos^2 t)}{t}\,dt \asymp \ln x, \qquad x \to +\infty.$$

---

2. Степенные асимптотические ряды. Пусть функция f определена при $x \geqslant a$. Ряд вида

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + \ldots \tag{3}$$

называется *степенным асимптотическим рядом* (или *асимптотическим разложением*) *функции f при $x \to +\infty$*, если его частичная сумма

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} \tag{4}$$

удовлетворяет условию

$$f(x) - S_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \qquad x \to +\infty, \qquad n = 0,\ 1,\ \ldots \tag{5}$$

Это условие равносильно существованию конечных пределов

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a_0, \qquad \lim_{x \to +\infty} x^n (f(x) - S_{n-1}(x)) = a_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

которые представляют собой коэффициенты ряда (3). Отсюда следует единственность разложения функции в степенной асимптотический ряд.

Если ряд (3) является асимптотическим рядом функции f, то пишут

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \qquad x \to +\infty.$$

Пример 2. Найти асимптотическое разложение при $x \to +\infty$ для функции

$$f(x) = \int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t}\,dt, \qquad x > 0, \tag{7}$$

и доказать, что оно расходится для всех $x > 0$.

△ Проинтегрировав по частям n раз, получим

$$f(x) = \int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t}\,dt = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} + (-1)^n n! \int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\,dt. \tag{8}$$

Положив

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k},$$

будем в силу (8) иметь

$$|f(x) - S_n(x)| = n! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\, dt.$$

Проинтегрировав еще раз по частям, получим

$$|f(x) - S_n(x)| = \frac{n!}{x^{n+1}} - (n+1)! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+2}}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n!}{x^{n+1}} = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \qquad x \to +\infty.$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

является асимптотическим рядом для функции (7). Его расходимость для всех $x > 0$ следует, например, из признака Даламбера. ▲

23.14. Найти асимптотический ряд для функции $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$.

Установить следующие асимптотические разложения при $x \to +\infty$ (**23.15**—**23.16**):

23.15. $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt \sim \frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - \ldots$

23.16. $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{x^2-t^2}\, dx \sim \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2x^3} + \frac{1\cdot 3}{2^3x^5} - \ldots$

23.17. Доказать, что если ряд (3) сходится к некоторой функции, то он является и асимптотическим разложением этой функции при $x \to +\infty$.

23.18. Доказать, что для того, чтобы ряд (3) являлся асимптотическим рядом при $x \to +\infty$ для функции f, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x) - S_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \qquad x \to +\infty, \qquad n \in \mathbb{N},$$

где $S_n(x)$ — частичная сумма ряда (3).

23.19. Доказать, что если

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \qquad g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}, \qquad x \to +\infty, \tag{9}$$

то для любых чисел λ и μ имеет место

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda a_n + \mu b_n}{x^n}, \qquad x \to +\infty.$$

23.20. Доказать, что если имеют место асимптотические разложения (9), то

$$f(x) g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^n}, \qquad x \to +\infty,$$

где

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

23.21. Доказать, что если

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \qquad x \to +\infty,$$

и $a_0 \neq 0$, то функция $1/f(x)$ также имеет асимптотическое разложение

$$\frac{1}{f(x)} \sim \frac{1}{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{x^n}, \qquad x \to +\infty,$$

где коэффициент d_n, $n \in \mathbb{N}$, этого разложения выражается через коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

23.22. Доказать: если функция f непрерывна при $x \geqslant a > 0$ и имеет асимптотическое разложение, начинающееся с члена порядка $1/x^2$:

$$f(x) \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \qquad x \to +\infty,$$

то

$$\int_x^{+\infty} f(t)\, dt \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)\, x^{n-1}}, \qquad x \to +\infty,$$

т. е. в указанном случае асимптотический ряд можно почленно интегрировать.

23.23. Доказать, что если функция f раскладывается в асимптотический ряд

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \qquad x \to \infty \tag{10}$$

и если она имеет при $x \geqslant a$ непрерывную производную, которая также раскладывается при $x \to +\infty$ в асимптотический ряд, то этот ряд получается формальным почленным дифференцированием ряда (10):

$$f'(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_n}{x^{n+1}}, \quad x \to +\infty.$$

23.24. Доказать: если функция f имеет асимптотическое разложение (3) без свободного члена ($a_0 = 0$), то его можно формально потенцировать, т. е. асимптотическое разложение функции $e^{f(x)}$ при $x \to +\infty$ можно получить, если в ряде

$$e^{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f(x))^n}{n!}$$

заменить функцию f ее асимптотическим разложением (3), формально произвести возведение в степень и объединить подобные члены.

23.25. Найти асимптотическое разложение (3) для функции $f(x) = e^{-x} \sin e^x$, $x \to +\infty$, и доказать, что производная $f'(x)$ не раскладывается в степенной асимптотический ряд при $x \to +\infty$.

23.26. Найти асимптотическое разложение (3) при $x \to +\infty$ для функции

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k}{x+k}, \quad 0 < c < 1.$$

---

3. Общие асимптотические ряды. Последовательность функций $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, определенных в некоторой проколотой окрестности точки x_0 (конечной или бесконечно удаленной), называется асимптотической последовательностью при $x \to x_0$, если для всех n имеет место соотношение

$$\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x)), \quad x \to x_0.$$

Примером асимптотических последовательностей при $x \to x_0$ являются последовательности $\varphi_n(x) = (x - x_0)^n$, если x_0 — конечная точка, и $\varphi_n(x) = x^{-n}$, если $x_0 = +\infty$ или $x_0 = -\infty$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — асимптотическая последовательность при $x \to x_0$. Ряд

$$a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + \ldots \tag{11}$$

называется *асимптотическим рядом* (или *асимптотическим разложением*) *при* $x \to x_0$ заданной функции f, определенной в некоторой проколотой окрестности точки x_0, если его частичные суммы

$$S_n(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x)$$

удовлетворяют условию: для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ имеет место асимптотическое равенство

$$f(x) - S_n(x) = o(\varphi_n(x)), \quad x \to x_0.$$

23.27. Доказать, что следующие последовательности являются асимптотическими (последовательность $\{\alpha_n\}$ строго возрастает):

1) $\{(x - x_0)^n\}, \quad x \to x_0.$

2) $\{1/x^n\}, \quad x \to +\infty.$

3) $\{1/x^{\alpha_n}\}, \quad x \to +\infty.$

4) $\{x^{\alpha_n}\}, \quad x \to 0.$

5) $\{\ln^{\alpha_n} x\}, \quad x \geqslant 1, \quad x \to +\infty.$

6) $\{x^{\alpha_n} e^{-x}\}, \quad x \to +\infty.$

23.28. Доказать, что если $\{\varphi_n(x)\}$ — асимптотическая при $x \to x_0$ последовательность, то для того, чтобы ряд (11) являлся асимптотическим разложением функции f при $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x) - S_n(x) = O(\varphi_{n+1}(x)), \quad x \to x_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

23.29. Доказать, что если $\varphi_n(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$, $n = 0, 1, \ldots$, а f раскладывается при $x \to x_0$ в асимптотический ряд (11), то его коэффициенты последовательно определяются по формулам

$$a_0 = \lim_{x \to x_0} f(x), \quad a_n = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\varphi_n(x)} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k(x) \right).$$

23.30. Разложить при $x \to +\infty$ в асимптотический ряд функцию

$$F(x; \alpha) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt, \quad x > 0, \quad \alpha > 0.$$

Доказать, что действительной и мнимой частью интеграла $\frac{1}{2} F(x^2; 1/2)$ являются *неполные интегралы Френеля*

$$\int_x^{+\infty} \cos t^2 \, dt, \qquad \int_x^{+\infty} \sin t^2 \, dt.$$

23.31. Найти асимптотическое разложение *неполной гамма-функции*

$$\Gamma(s; x) = \int_x^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} \, dt, \quad x > 0.$$

§ 24. Бесконечные произведения

Пусть задана числовая последовательность $\{p_n\}$ и пусть

$$P_n = p_1 p_2 \ldots p_n = \prod_{k=1}^{n} p_k.$$

Тогда, если существует конечный или определенного знака бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty} P_n, \qquad (1)$$

то его называют *бесконечным произведением членов последовательности* $\{p_n\}$ и обозначают

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n \quad \text{или} \quad p_1 p_2 \ldots p_n \ldots$$

Таким образом,

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} p_k. \qquad (2)$$

Если предел (1) конечен и не равен нулю, то говорят, что бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ *сходится*, в противном случае (в частности, когда предел (1) не существует), что оно *расходится*. Если предел (1) равен нулю, то говорят, что бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ *расходится к нулю*.

Сходимость бесконечного произведения (2) положительных сомножителей $p_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, тесно связана со сходимостью ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n, \qquad (3)$$

получающегося формальным логарифмированием данного бесконечного произведения.

Бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n, \quad p_n > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

называется *абсолютно сходящимся*, если абсолютно сходится ряд (3).

Примером бесконечного произведения является следующее представление синуса в произвольной точке x:

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right). \qquad (4)$$

Пример 1. Найти $\prod\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+x^{2^n}\right)$.

▲ Поскольку в данном случае $P_n=(1+x)\ldots(1+x^{2^n})$, то $(1-x)P_n=(1-x^2)(1+x^2)\ldots\left(1+x^{2^n}\right)=\ldots=1-x^{2^{n+1}}$.

Поэтому

$$P_n=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x},$$

и если $|x|<1$, то

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+x^{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1}{1-x},$$

а если $|x|\geqslant 1$, $x\neq 1$, то

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+x^{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=+\infty.$$

При $x=1$ получим $2\cdot 2\ \ldots\ 2\ \ldots=+\infty$. Таким образом,

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+x^{2^n}\right)=\begin{cases}1/(1-x), & |x|<1,\\ +\infty, & |x|\geqslant 1.\end{cases}\ \blacktriangle$$

Пример 2. Доказать *формулу Валлиса*

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}. \tag{5}$$

▲ Проинтегрировав неравенство

$$\sin^{2n+1}x\leqslant\sin^{2n}x\leqslant\sin^{2n-1}x$$

от 0 до $\pi/2$, получим

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx\leqslant\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx\leqslant\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}x\,dx,$$

и поскольку (см. задачу **6.208**)

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},\qquad\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}x\,dx=\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

то

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{\pi}{2}<\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

Отсюда

$$x_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \overset{\text{def}}{=} y_n.$$

В силу этих неравенств

$$y_n - x_n = \frac{1}{2n}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2n}\frac{\pi}{2} \to 0$$

при $n \to \infty$, и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$, т. е. отрезки $[x_n; y_n]$ содержат точку $\pi/2$ и их длины стремятся к нулю. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \pi/2, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = \pi/2. \tag{6}$$

Поскольку

$$x_n = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\ldots 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)(2n+1)} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1},$$

то первое из равенств (6) и означает справедливость формулы Валлиса (5). △

24.1. Выяснить, сходятся или расходятся бесконечные произведения:

1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. 2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$. 3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n}$.

Доказать равенства (**24.2**—**24.11**).

24.2. $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$.

24.3. $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}$.

24.4. $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)=\frac{1}{3}$.

24.5. $\prod\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)=2$.

24.6. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{2}{\pi}$.

24.7. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)=\frac{\pi}{4}$.

24.8. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\frac{2}{\pi}$.

Указание. В задачах **24.7** и **24.8** воспользоваться формулой Валлиса (5).

24.9. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}$. **24.10.** $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch}\frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sh} x}{x}$.

24.11. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3n-1}\,\frac{3n}{3n+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

24.12. Доказать, что если бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится, то сходятся и все его остаточные произведения $\prod\limits_{m=n}^{\infty} p_m$, $n \in \mathbb{N}$, и если сходится хотя бы одно *остаточное произведение* $\prod\limits_{m=n}^{\infty} p_m$ и $p_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, то сходится и бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$.

24.13. Доказать, что если бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} p_m = 1$.

24.14. Доказать: если бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится и $Q_n = \prod\limits_{m=n+1}^{\infty} p_m$, то $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n = 1$.

24.15. Доказать, что если бесконечное произведение сходится, то, начиная с некоторого номера, все его сомножители имеют один и тот же знак.

24.16. Доказать, что для того, чтобы бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$, $p_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, сходилось, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n$, и что при выполнении этого условия

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = e^S, \quad \text{где} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n.$$

24.17. Следует ли из сходимости бесконечных произведений $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\prod\limits_{n=1}^{\infty} q_n$, $p_n > 0$, $q_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, сходимость произведений:

1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n)$. 2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$. 3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n q_n$. 4) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (p_n/q_n)$?

24.18. Доказать: если для всех n $u_n \neq -1$ и для всех n, начиная с некоторого, выполняется неравенство $u_n > 0$ (или $u_n < 0$), то для сходимости бесконечного произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$: 1) необходимо, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$; 2) необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

24.19. Доказать, что бесконечное произведение

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots$$

сходится, а ряд

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots$$

расходится.

24.20. Доказать: если $u_n \neq -1$ для всех n и если сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2,$$

то сходится и бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n).$$

24.21. Доказать, что бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$, где

$$u_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{k}}, & n = 2k-1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k\sqrt{k}}, & n = 2k, \end{cases}$$

сходится, а оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ расходятся.

24.22. Доказать, что для того, чтобы бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$, $p_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n = -\infty$.

24.23. Доказать, что если $-1 < u_n < 0$, $n \in \mathbb{N}$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n) = 0$.

24.24. Доказать, что если $-1 < u_n < 0$, $n \in \mathbb{N}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ расходится, то $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n) = 0$.

24.25. Доказать, что если бесконечное произведение абсолютно сходится, то оно сходится.

24.26. Доказать, что абсолютно сходящееся бесконечное произведение не зависит от порядка сомножителей.

24.27. Доказать, что для того, чтобы бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$, $p_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, сходилось, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое n_0, что для всех $n > n_0$ и всех $k > 0$ выполнялось неравенство

$$\left| \prod_{m=n}^{n+k} p_m - 1 \right| < \varepsilon.$$

24.28. Доказать, что для абсолютной сходимости бесконечного произведения $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$, где $u_n \neq -1$ для всех n, необходимо и достаточно, чтобы абсолютно сходился ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

24.29. Доказать, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{1 + \frac{1}{n}} = e^{C},$$

где C — постоянная Эйлера:

$$C = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

24.30. Доказать, что если $\mathrm{F}(k)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода (см. задачи **6.230** и **6.231**), то

$$\mathrm{F}(k) = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + k_n), \quad k_n = \frac{1 - \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}{1 + \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}, \quad k_0 = k, \quad |k| < 1.$$

24.31. Найти $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e}$.

24.32. Выяснить, сходится или расходится бесконечное произведение

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{\beta + n}{\alpha + n}, \quad \alpha > \beta,$$

и можно ли говорить о его значении?

Доказать сходимость и найти следующие бесконечные произведения (24.33—24.36):

24.33. $\prod\limits_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-4}{n^2-1}$.

24.34. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)$.

24.35. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$.

24.36. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a^{(-1)^n/n}, \quad a>0$.

24.37. Доказать, что $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n^x}\right)=0, \quad 0<x\leqslant 1$.

Исследовать сходимость следующих бесконечных произведений (24.38—24.45):

24.38. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

24.39. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

24.40. $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)$.

24.41. $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$.

24.42. $\prod\limits_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$.

24.43. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

24.44. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$.

24.45. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n}$.

Выяснить, при каких значениях x сходятся бесконечные произведения (24.46—24.55):

24.46. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n^x}\right)$.

24.47. $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n^x}\right)$.

24.48. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x/n}$.

24.49. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{x}{c+n}\right)e^{x/n}, \quad c>0$.

24.50. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1-x^n)$.

24.51. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$.

24.52. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right)$.

24.53. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)e^{(x/\sqrt{n})+(x^2/2n)}$.

24.54. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(x/n)}{x/n}\right)^p$ **24.55.** $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\ln(n+x)-\ln n}$.

24.56. Доказать абсолютную сходимость бесконечного произведения:

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right), \quad x\neq m\pi, \quad m\in\mathbb{Z}.$$

Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость следующие бесконечные произведения (**24.57—24.63**):

24.57. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$. **24.58.** $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$.

24.59. $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n}}{\ln n}\right)$. **24.60.** $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

24.61. $\prod_{n=1}^{\infty}n^{(-1)^n}$. **24.62.** $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$.

24.63. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{n}\right)$.

24.64. При каких значениях x бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)$ сходится, абсолютно сходится, расходится, расходится к нулю?

24.65. Пусть $0<x_n<\pi/2$, $n\in\mathbb{N}$. Доказать, что бесконечные произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos x_n \quad \text{и} \quad \prod_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}$$

сходятся тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$.

24.66. Доказать, что бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)$, $|\alpha_n|<\pi/4$, сходится, если абсолютно сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$.

24.67. Доказать, что

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)=\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})}, \qquad 0<q<1$$

(*Эйлер*).

24.68. Доказать асимптотическое равенство

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}, \quad n \to \infty.$$

24.69. Доказать, что

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\left(\frac{2n-1}{2} \pi \right)^2} \right).$$

Указание. Воспользоваться разложением синуса в бесконечное произведение (см. (4)).

24.70. Доказать, что:

1) Бесконечное произведение

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}}$$

абсолютно сходится при всех $x \neq m$, $m = 0, -1, -2, \ldots$

2) $\Gamma(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n! n^x}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$.

3) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (*Эйлер*).

24.71. Доказать, что

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{Cx} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n},$$

где C — постоянная Эйлера (*Вейерштрасс*). Указание. Воспользоваться результатом задачи **24.29**.

24.72. Доказать, что

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi/\sin \pi x.$$

Указание. Воспользоваться результатом задачи **24.70**.

24.73. Пусть $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ (*дзета-функция Римана*) и p_n, $n \in \mathbb{N}$, — последовательные простые числа. Доказать, что

$$\zeta(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}.$$

24.74. Доказать, что бесконечное произведение

$\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$, где p_n $(n \in \mathbb{N})$ — последовательные простые числа, расходятся (*Эйлер*).

24.75. Доказать, что последовательность

$$x_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$$

имеет конечный не равный нулю предел a. Получить отсюда *формулу Стирлинга*:

$$n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n} (1 + \varepsilon_n), \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Указание. $a = x_1 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Для нахождения значения a воспользоваться формулой Валлиса (5).

24.76. Пусть функции f_n непрерывны на отрезке $[a; b]$, $|f_n(x)| \leqslant c_n$, $a \leqslant x \leqslant b$, $n \in \mathbb{N}$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится. Доказать, что:

1) Функция $F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(x))$ непрерывна на отрезке $[a; b]$.

2) Если функции f_n непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a; b]$ и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(x)}{1 + f_n(x)}$$

равномерно сходится на $[a; b]$, то функция $F(x)$ также непрерывно дифференцируема на $[a; b]$ и

$$F'(x) = F(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(x)}{1 + f_n(x)}.$$

ОТВЕТЫ

Глава I. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Общие приемы и методы интегрирования

1.1. 1) $\sqrt{x}-\cos(x+1)+\cos 2$. 2) $2\ln|x|+\dfrac{3}{x}+4$. 3) $\dfrac{x|x|}{2}+6$.

1.2. 1) $\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}-x^2+C$. 2) $\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{2x^3}{3}+x+C$. 3) $-\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{4}{x}+2\ln|x|+C$. 4) $\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$. 5) $\dfrac{8}{15}x(\sqrt[8]{x^7})+C$. 6) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{7}}+C$. 7) $\dfrac{1}{2\sqrt{15}}\ln\left|\dfrac{x\sqrt{3}-\sqrt{5}}{x\sqrt{3}+\sqrt{5}}\right|+C$.
8) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\dfrac{8}{7}}\right|+C$. 9) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+13}\right)+C$. 10) $16x-\dfrac{36}{5}\sqrt[3]{4x^5}+\dfrac{18}{7}\sqrt[3]{2x^7}-\dfrac{x^3}{3}+C$. 11) $\arcsin\dfrac{x}{2}+2\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)+C$.
12) $\dfrac{2^{2x}e^x}{1+2\ln 2}+C$. 13) $-\dfrac{1}{5^x\ln 5}-\dfrac{1}{2^x\ln 2}+C$. 14) $\dfrac{1}{6\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{x+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}\right|-\dfrac{1}{3x}+C$. 15) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin x}{2}+C$. 16) $-\operatorname{ctg}x-x+C$. 17) $x-\operatorname{th}x+C$.
18) $x-\operatorname{cth}x+C$.

1.3. 1) Неверно. 2) Верно. 3) Неверно.
1.5. Указание. См. [1], задача **13.173**, $\alpha=2$.

1.6. 1) $\dfrac{|x|^3}{3}+C$. 2) $\dfrac{(1+x)|1+x|}{2}+\dfrac{(1-x)|1-x|}{2}+C$.

$$3)\ F(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{7}{2}x^2-6x+C, & \text{если}\quad x<2;\\[2mm] \dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{7}{2}x^2+6x-\dfrac{20}{3}+C, & \text{если}\quad x\geqslant 2.\end{cases}$$

$$4)\ F(x)=\begin{cases}-e^{-x}+2+C, & \text{если}\quad x<0;\\ e^x+C, & \text{если}\quad x\geqslant 0.\end{cases}$$

$$5)\ F(x)=\begin{cases}1-\operatorname{ch}x+C, & \text{если}\quad x<0;\\ \operatorname{ch}x-1+C, & \text{если}\quad x\geqslant 0.\end{cases}$$

$$6)\ F(x)=\begin{cases}x-\dfrac{x^3}{3}+C, & \text{если}\quad |x|\leqslant 1;\\[2mm] x-\dfrac{x|x|}{2}+\dfrac{1}{6}\operatorname{sign}x+C, & \text{если}\quad |x|>1.\end{cases}$$

$$7)\ F(x)=\begin{cases}x+C, & \text{если}\quad |x|\leqslant 1;\\ (x^3+2\operatorname{sign}x)/3+C, & \text{если}\quad |x|>1.\end{cases}$$

8) $\frac{[x]}{\pi}\left([x]-(-1)^{[x]}\cos\pi x\right)+C.$

1.7. 1) $\frac{1}{a}e^{ax}+C.$ 2) $-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C.$ 3) $\frac{1}{a(\alpha+1)}(ax+b)^{\alpha+1}+C,$ если $\alpha\neq-1$; $\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C,$ если $\alpha=-1$. 4) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4a}\sin 2(ax+b)+C.$ 5) $\frac{x\cos 2b}{2}+\frac{\sin 2ax}{4a}+C.$ 6) $\frac{x\cos b}{2}-\frac{\sin(2x+b)}{4a}+C.$

1.8. 1) $\frac{1}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{7}{5}}\,x\right)+C.$ 2) $\frac{1}{18}\ln\left|\frac{3x+5}{1-3x}\right|+C.$

3) $\frac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{4x-5}{\sqrt{31}}+C.$ 4) $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{3x-5}{5x-3}\right|+C.$

5) $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|+C.$

6) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C.$

7) $\ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right)+C.$

8) $\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{21}}+C.$

1.10. 1) $\ln|3x^2-7x+1|+C.$

2) $\frac{3}{10}\ln(2-3x+5x^2)-\frac{11}{5\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{10x-3}{\sqrt{31}}+C.$

3) $\frac{1}{2}\ln|x^2-x-1|-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|+C.$

4) $\frac{1}{5}\ln(5x^2-x+2)-\frac{8}{5\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\frac{10x-1}{\sqrt{39}}+C.$ 5) $3\sqrt{x^2-4x+5}+C.$

6) $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3}+\frac{5}{4}\ln\left(2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}\right)+C.$

7) $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\arcsin\frac{2x-1}{2}+C.$ 8) $-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2-x^4}+$ $+\frac{3}{4}\arcsin\frac{2x^2-1}{\sqrt{5}}+C.$ 9) $-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3+7x^2}+\sqrt{3}}{|x|}+C.$

10) $2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}+C.$ 11) $\frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{8}\arcsin(2x-1)+C.$

12) $\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+5}+2\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right)+C.$

1.11. 1) $\frac{1}{2}(1-x^2)^{-1}+C.$ 2) $-\frac{1}{15}(x^5+2)^{-3}+C.$ 3) $\frac{1}{11}(1-x)^{-11}-$ $-\frac{1}{10}(1-x)^{-10}+C.$ 4) $\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|+C.$

5) $\ln|x^3-x+1|+C.$ 6) $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2+1}{x^2+5}\right|+C.$ 7) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{\sqrt{2}\,x}+C.$

8) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-\sqrt{2}\,x+1}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}+C.$

1.12. 1) $\frac{2}{9}\sqrt{(x^3+1)^3}+C.$ 2) $\frac{2}{5}\sqrt{(1+x)^5}-\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}+C.$

3) $\frac{1}{5}\sqrt{(x^2-1)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3}+C$. 4) $\frac{2}{35}(5x^3+6x^2+8x+16)\sqrt{x-1}+C$.
5) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln|1+\sqrt[3]{x+1}|+C$. 6) $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+$ $+4\ln(1+\sqrt[4]{x})+C$. 7) $\ln\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6}+C$. 8) $-\frac{\sqrt{(9-x^2)^5}}{45x^5}+C$.
9) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$. 10) $\frac{2x^2-1}{3x^3}\sqrt{1+x^2}+C$.

1.13. 1) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$. 2) $\frac{1}{2}e^{2x^2+2x-1}+C$. 3) $x-\frac{1}{3}\ln(1+e^{3x})+C$.
4) $-x-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+2\ln\left(1+\sqrt{e^x}\right)+C$. 5) $2e^{\sqrt{x}}+C$. 6) $\arcsin(e^x/2)+C$.
7) $2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+C=-2\arcsin e^{-x/2}+C_1$. 8) $\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}+1}\right)+$ $+C$. 9) $\frac{\arcsin 2^x}{\ln 2}+C$. 10) $\frac{4}{7}\sqrt[4]{(1+e^x)^7}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{(1+e^x)^3}+C$.
11) $\ln|\operatorname{th}(x/2)|+C$. 12) $2\operatorname{arctg}e^x+C$. 13) $\frac{1}{2}(\operatorname{ch}^2 x-\ln(1+\operatorname{ch}^2 x))+C$.
14) $\frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x-\frac{1}{5}\operatorname{th}^5 x+C$.

1.14. 1) $\frac{1}{3}\ln^3 x+C$. 2) $\ln|\ln\ln x|+C$. 3) $\ln x-\ln 2\cdot\ln|\ln x+2\ln 2|+C$.
4) $-\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}+C$. 5) $\frac{2}{3}(\ln x-2)\sqrt{1+\ln x}+C$.
6) $-\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}-2\arcsin\frac{\ln x+2}{\sqrt{5}}+C$.

1.15. 1) $\frac{1}{7}\sin^7 x+C$. 2) $-\ln(1+\cos x)+C$. 3) $-\sin\frac{1}{x}+C$.
4) $\ln|\sin x|+C$. 5) $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$. 6) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}}+C, |x|<\frac{\pi}{2}$.
7) $-2\cos\sqrt{x}+C$. 8) $2\left(\frac{1}{11}\sin^4 x-\frac{2}{7}\sin^2 x+\frac{1}{3}\right)\sqrt{\sin^3 x}+C$.
9) $\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x}-2\sqrt{\cos x}+C$. 10) $-\sqrt{1+2\cos x}+C$.
11) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}|+C$. 12) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}\sin x)+C$.
13) $\frac{1}{8}\sqrt{25\sin^2 x+9\cos^2 x}+C$. 14) $\sqrt{2\sin^2 x-1}+C$. 15) $-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\operatorname{ctg}^3 x}+C$.
16) $-\ln(2+\cos x+\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1})+C$. 17) $\sin\ln x+C$. 18) $\frac{1}{4}\ln^2\operatorname{tg}x+C$.
19) $e^{\operatorname{tg}x}+\ln|\operatorname{tg}x|+C$. 20) $2\operatorname{arctg}\sqrt{e^{\sin x}-1}+C=-2\arcsin e^{-(\sin x)/2}+C_1$.

1.16. 1) $\ln|\arcsin x|+C$. 2) $\frac{2}{3}\arcsin^{3/2}x+C$. 3) $-\frac{1}{6}\arccos^3 2x+C$.
4) $-\frac{1}{2}\ln^2\arccos x+C$. 5) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 x+C$. 6) $-\frac{3}{4}\operatorname{arcctg}^{4/3}x+C$.
7) $(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2+C$. 8) $\operatorname{arctg}^2 e^x+C$.

1.17. 1) $-e^{-x}(x+1)+C$. 2) $\dfrac{2^x(x\ln 2-1)}{\ln^2 2}+C$. 3) $x\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x+C$. 4) $\dfrac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C$. 5) $x\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)-\sqrt{x^2+4}+C$. 6) $\dfrac{x^2}{2}\ln\left|1+\dfrac{1}{x}\right|-\dfrac{1}{2}\ln|x+1|+\dfrac{x}{2}+C$. 7) $\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\ln x-\dfrac{1}{\alpha+1}\right)+C$, если $\alpha\neq-1$; $\dfrac{1}{2}\ln^2 x+C$, если $\alpha=-1$. 8) $\left(\dfrac{x^3}{3}-x^2+3x+\dfrac{13}{3}\right)\ln(x+1)-\dfrac{x^3}{9}+\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{13}{3}x+C$.

1.18. 1) $\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x-\dfrac{x}{1+x^2}\right)+C$. 2) $\dfrac{1}{16}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}+\dfrac{2x}{4+x^2}\right)+C$.

1.19. 1) $\dfrac{x}{5}\sin(5x-7)+\dfrac{1}{25}\cos(5x-7)+C$. 2) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x}{4}\sin 2x-\dfrac{1}{8}\cos 2x+C$. 3) $x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+C$. 4) $\dfrac{x}{2}\operatorname{tg} 2x+\dfrac{1}{4}\ln|\cos 2x|-\dfrac{x^2}{2}+C$. 5) $-x\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}+C$. 6) $\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|-\cos x\cdot\ln\operatorname{tg} x+C$.

1.20. 1) $x\operatorname{arctg} x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. 2) $\dfrac{1}{5}\left((5x-2)\arccos(5x-2)-\sqrt{-25x^2+20x-3}\right)+C$. 3) $\dfrac{x+(x^2+1)\operatorname{arcctg} x}{2}+C$. 4) $\dfrac{x^3}{3}\arcsin 2x+\dfrac{2x^2+1}{36}\sqrt{1-4x^2}+C$. 5) $\dfrac{x^4-1}{4}\operatorname{arctg} x-\dfrac{x^3}{12}+\dfrac{x}{4}+C$. 6) $-\dfrac{\arcsin x}{x}-\ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}+C$. 7) $(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$. 8) $-x-\sqrt{1-x^2}\arccos x+C$. 9) $\dfrac{x}{9}(3-x^2)-\dfrac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\arcsin x+C$. 10) $4\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}\arcsin(x/2)+C$.

1.21. 1) $\left(x^2-\dfrac{20}{3}x+\dfrac{38}{9}\right)\dfrac{e^{3x}}{3}+C$. 2) $\left(\dfrac{x^2}{\ln 2}-\dfrac{2x}{\ln^2 2}+\dfrac{2}{\ln^3 2}\right)2^x+C$. 3) $\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{x^2}{2}\right)\cos 2x+\dfrac{x}{2}\sin 2x+C$. 4) $(x^2-x+3)\operatorname{sh} x-(2x-1)\operatorname{ch} x+C$.
5) $(x^4-10x^2+21)\sin x+4x(x^2-5)\cos x+C$.
6) $\left(-x^5+\dfrac{4x^3}{5}-\dfrac{24x}{125}\right)\dfrac{\cos 5x}{5}+\left(x^4-\dfrac{12x^2}{25}+\dfrac{24}{625}\right)\dfrac{\sin 5x}{5}+C$.

1.23. 1) $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C$. 2) $-\dfrac{8}{27}x^{-3/2}\left(\dfrac{9}{4}\ln^2 x+3\ln x+2\right)+C$. 3) $-\dfrac{1}{2x^2}\left(\ln^3 x+\dfrac{3}{2}\ln^2 x+\dfrac{3}{2}\ln x+\dfrac{3}{4}\right)+C$. 4) $x\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-2\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+2x+C$. 5) $x\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$. 6) $\dfrac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}^2 x-x\operatorname{arctg} x+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$.

1.24. 1) $\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\dfrac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C$.

2) $\dfrac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{x^2+a^2}-\dfrac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$.

3) $\dfrac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C$. 4) $\dfrac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C$.

5) $\dfrac{\sin x+(\ln 3)\cos x}{1+\ln^2 3}\,3^x+C.$ 6) $\dfrac{\sin 2x-5\cos 2x}{13\sqrt{2}}\,e^{3x}+C.$

7) $\dfrac{\sin x \operatorname{sh} x-\cos x \operatorname{ch} x}{2}+C.$ 8) $\dfrac{\sin 2x-\cos 2x-2}{8}\,e^{-2x}+C.$

9) $\dfrac{a^2+4b^2-a^2\cos 2bx-2ab\sin 2bx}{2a(a^2+4b^2)}\,e^{ax}+C.$

10) $\dfrac{x\sin x+(1-x)\cos x}{2}\,e^x+C.$

11) $\dfrac{(x-1)^2\sin x+(x^2-1)\cos x}{2}\,e^x+C.$

12) $\dfrac{(4-10x)\sin 2x-(5x+3)\cos 2x+25(x-1)}{50}\,e^x+C.$

13) $\dfrac{(\sin\ln x-\cos\ln x)\,x}{2}+C.$ 14) $\dfrac{(\sin\ln x+\cos\ln x)\,x}{2}+C.$

15) $\dfrac{(3\sin\ln x-\cos\ln x)\,x^3}{10}+C.$ 16) $\dfrac{x-\sqrt{1-x^2}}{2}\,e^{\arccos x}+C.$

1.25. 1) $J_n=\dfrac{1}{a}\,x^n e^{ax}-\dfrac{n}{a}\,J_{n-1}.$ 2) $J_n=x\ln^n x-nJ_{n-1}.$

3) $J_n=\dfrac{x^{\alpha+1}\ln^n x}{\alpha+1}-\dfrac{n}{\alpha+1}\,J_{n-1}.$ 4) $J_n=\dfrac{x^{n-1}\sqrt{x^2+a}}{n}-\dfrac{n-1}{n}\,aJ_{n-2}.$

5) $J_n=-\dfrac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\dfrac{n-1}{n}\,J_{n-2}.$ 6) $J_n=\dfrac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+$ $+\dfrac{n-1}{n}\,J_{n-2}.$ 7) $J_n=\dfrac{\operatorname{ch} x\operatorname{sh}^{n-1}x}{n}-\dfrac{n-1}{n}\,J_{n-2}.$ 8) $J_n=\dfrac{\operatorname{sh} x\operatorname{ch}^{n-1}x}{n}+$ $+\dfrac{n-1}{n}\,J_{n-2}.$ 9) $J_n=-\dfrac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\dfrac{n-2}{n-1}\,J_{n-2}.$

10) $J_n=\dfrac{\operatorname{sh} x}{(n-1)\operatorname{ch}^{n-1}x}+\dfrac{n-2}{n-1}\,J_{n-2}.$

1.26. 1) $-(x^8+8x^7+8\cdot 7x^6+8\cdot 7\cdot 6x^5+\ldots+8!\,x+8!)\,e^{-x}+C.$
2) $(\ln^4 x-4\ln^3 x+12\ln^2 x-24\ln x+24)\,x+C.$
3) $\left(\ln^3 x-\dfrac{3}{4}\ln^2 x+\dfrac{3}{8}\ln x-\dfrac{3}{32}\right)\dfrac{x^4}{4}+C.$ 4) $\dfrac{1}{16}\left(\left(\dfrac{8}{3}\,x^5-30x^3+405x\right)\times\right.$ $\left.\times\sqrt{x^2+9}-3645\ln\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)\right)+C.$ 5) $\dfrac{3\cos^4 x+4\cos^2 x+8}{15}\sin x+C.$

6) $-\dfrac{8\sin^4 x+10\sin^2 x+15}{96}\sin 2x+\dfrac{5x}{16}+C.$ 7) $-\dfrac{\cos x}{4\sin^4 x}-\dfrac{3\cos x}{8\sin^2 x}+$ $+\dfrac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|+C.$ 8) $\dfrac{\operatorname{sh} x}{6\operatorname{ch}^6 x}+\dfrac{5\operatorname{sh} x}{24\operatorname{ch}^4 x}+\dfrac{5\operatorname{sh} x}{16\operatorname{ch}^2 x}+\dfrac{5}{8}\operatorname{arctg} e^x+C.$

1.27. 1) $-\dfrac{1}{2}(x^2+1)\,e^{-x^2}+C.$ 2) $2(\sqrt{x}-1)\,e^{\sqrt{x}}+C.$ 3) $2(x^{5/2}-5x^2+$ $+20x^{3/2}-60x+120x^{1/2}-120)\,e^{\sqrt{x}}+C.$ 4) $(\ln\ln x-1)\ln x+C.$

5) $\sqrt{x^2+1}\ln\dfrac{x}{e}-\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}+C.$ 6) $2\sqrt{x+1}\,(\ln(x^2-1)-4)-$ $-4\sqrt{2}\ln\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}+C.$ 7) $2(2-x)\cos\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+C.$

8) $\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x}}{2}\sin(2\sqrt{x})+\frac{1}{4}\cos(2\sqrt{x})+C.$ 9) $\frac{x}{10}(5+\cos(2\ln x)+$ $+2\sin(2\ln x))+C.$ 10) $-(x+\operatorname{ctg} x\cdot\ln(e\sin x))+C.$ 11) $\sin x\ln(1+\sin^2 x)-$ $-2\sin x+2\operatorname{arctg}\sin x+C.$ 12) $\frac{x-2}{x+2}e^x+C.$

1.28. 1) $\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}x^2-\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+C.$ 2) $-x+\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})-$ $-e^{-x}\operatorname{arcctg}e^x+C.$ 3) $-\frac{1}{2}(\operatorname{sign}x)\sqrt{x^2-1}+\frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x}+C.$ 4) $2\sqrt{x+1}\operatorname{arctg}\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})+C.$ 5) $x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}-$ $-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C.$ 6) $-2\operatorname{sign}(1-x)\sqrt{x}+(1+x)\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}+C.$

1.29. $f(x)=2\sqrt{x}+C.$

1.30. $f(x)=\begin{cases} x+1+C, & \text{если } x\leqslant 0;\\ e^x+C, & \text{если } x>0.\end{cases}$

1.31. $f(x)=C-\frac{x^2}{2},\ g(x)=\sin x-\frac{x^4}{2}-C.$

1.32. 1) $f(x)=\frac{x}{2}+1-C,\quad g(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+C, & \text{если } x>0,\\ \frac{x}{2}-x^3+C, & \text{если } x\leqslant 0.\end{cases}$

2) $f(x)=\frac{x^4}{12}-\frac{\cos x}{2}+C,\quad g(x)=\begin{cases}\frac{x^4}{12}+\frac{\cos x}{2}-C, & \text{если } x>0;\\ \frac{x^4}{12}-\frac{\cos x}{2}+1-C, & \text{если } x\leqslant 0.\end{cases}$

§ 2. Интегрирование рациональных функций

2.1. 1) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C.$ 2) $\frac{2}{5}\ln|x-2|+\frac{1}{10}\ln|2x+1|+C.$ 3) $\ln(x^2+6x+13)+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C.$ 4) $x+3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C.$ 5) $\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{2}\ln|x-2|+\frac{3}{2}\ln|x+2|+C.$ 6) $x+3\ln(x^2-6x+10)+$ $+8\operatorname{arctg}(x-3)+C.$

2.2. 1) $\frac{1}{12}\ln\frac{|(x-1)(x+3)^3|}{(x+2)^4}+C.$ 2) $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C.$ 3) $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(2x-1)^2(2x-5)^3}{2x+3}\right|+C.$ 4) $\frac{1}{15}\ln\frac{|(x-2)^7(3x-1)^3|}{(x+1)^{10}}+C.$ 5) $\frac{1}{33}\ln\left|\frac{(3x+1)^9(2x-3)^2}{x^{11}}\right|+C.$ 6) $\ln\left|\frac{(x-1)^3}{(x-2)(x+2)^2}\right|+C.$ 7) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C.$ 8) $\frac{1}{12}\ln\frac{(x+1)^4|x-2|^5}{(x-1)^4|x+2|^5}+C.$ 9) $\frac{1}{60}\ln\frac{(x-3)^2|x+2|^3}{(x+3)^2|x-2|^3}+C.$

10) $\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x(x-2)(x+1)\sqrt{|x^2-1|}}{x+2}\right|+C.$

2.3. 1) $\frac{x^4}{4}+\frac{4}{3}x^3+6x^2+30x-\frac{27}{x-2}+72\ln|x-2|+C.$

2) $\frac{3}{2}(x+1)^{-1}+\frac{1}{4}\ln|(x+1)(x-1)^3|+C.$ 3) $-\frac{1}{2}(x-1)^{-1}+$ $+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C.$ 4) $-(x-1)^{-2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C.$

5) $x-\frac{8(9x^2+12x+5)}{3(x+1)^3}-8\ln|x+1|+C.$ 6) $\frac{x^2}{2}+2x-\frac{9}{4}(x-1)^{-1}-$ $-\frac{1}{4}(x-1)^{-2}+\frac{1}{8}\ln|(x-1)^{31}(x+1)|+C.$ 7) $-\frac{1}{2}x^{-1}-\frac{2}{3}(x+1)^{-1}+$ $+\frac{1}{36}\ln\left|\frac{(x-2)(x+1)^{44}}{x^{45}}\right|+C.$ 8) $\frac{16-21x-6x^2}{250(x-2)(x+3)^2}-$ $-\frac{3}{625}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|+C.$ 9) $\frac{x^3+x}{8(1-x^2)^2}-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$

10) $\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right|+C.$ 11) $\frac{x^{-4}}{4}+\ln|x-1|+C.$

12) $-\frac{3x^2+3x-2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C.$

2.4. 1) $\frac{1}{14}\ln\frac{x^2+4x+4}{4x^2+8x+7}+\frac{2}{7\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+2}{\sqrt{3}}+C.$

2) $\frac{1}{6}\ln\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$ 3) $\frac{3}{2}\ln(x^2+2)-2\ln|x-1|+$ $+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$ 4) $\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}\ln|x^3+2|+C.$ 5) $x-\frac{18}{7}\ln|x+3|-$ $-\frac{3}{14}\ln(x^2+x+1)+\frac{5\sqrt{3}}{7}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$ 6) $x-\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)-$ $-2\ln|x+1|+3\operatorname{arctg}(x+1)+C.$ 7) $\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln\frac{(x-1)^2}{2x^2-2x+1}-$ $-3\operatorname{arctg}(2x-1)+C.$ 8) $\frac{x^2}{2}-x+\ln\frac{x^2-4x+5}{|x+1|}+4\operatorname{arctg}(x-2)+C.$

2.5. 1) $\frac{3}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$

2) $-x+\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$ 3) $\frac{1}{52}\ln|x-3|-\frac{1}{20}\ln|x-1|+$ $+\frac{1}{65}\ln(x^2+4x+5)+\frac{7}{130}\operatorname{arctg}(x+2)+C.$ 4) $2\ln|x-3|-\ln|x+1|-$ $-\frac{1}{2}\ln(3x^2-4x+6)+\frac{2}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{3x-2}{\sqrt{14}}+C.$ 5) $\frac{1}{6}\ln|x+1|-$ $-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

6) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{6}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$

2.6. 1) $\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

2) $\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C.$

3) $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

4) $\frac{1}{10}\ln\frac{3x^2-5x+2}{3x^2+5x+2}+C$. 5) $\frac{1}{6}\ln\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

6) $\frac{\sqrt{3}}{12}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}\,x+1}{x^2-\sqrt{3}\,x+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}x^3+C$.

$$7)\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\alpha_k\cdot\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\alpha_k}{\sin\alpha_k}-\cos\alpha_k\cdot\ln\sqrt{x^2-2x\cos\alpha_k+1}\right)+C,$$

где $\alpha_k=\frac{2k-1}{2n}\pi$.

2.7. 1) $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}-\frac{1}{2(x+1)}+C$. 2) $\frac{1}{x+2}+\ln|x+2|-$ $-\frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{11}}+C$. 3) $\frac{1}{6}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+2x+1}-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\times$ $\times\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$. 4) $\frac{1}{4}\ln(x^4+x^3+2x^2)-\frac{2}{x}-\frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+C$.
5) $\frac{1}{3(1-x)}+\frac{1}{6}\ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}+\frac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. 6) $\frac{1}{8}\ln\frac{x^2+1}{(x-1)^2}-$ $-\frac{7}{4(x-1)^2}+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x+C$. 7) $\frac{1}{4}\ln|x^4-1|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2(x-1)}+C$.
8) $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+2x+1}{2x^2-4x+5}-\frac{2}{x}+C$. 9) $\frac{1}{6}\ln\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-$ $-\frac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{6(x+1)}+C$. 10) $\frac{-15x^4+5x^2-3}{15x^5}-\operatorname{arctg}x+C$.

2.8. 1) $\frac{5}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg}x+C$. 2) $\frac{x^3-2x^2+x+3}{x^2-2x+2}+$ $+2\ln(x^2-2x+2)+\operatorname{arctg}(x-1)+C$. 3) $\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+$ $+\frac{x}{x^2+x+1}-2\ln(x^2+x+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. 4) $\frac{3-4x}{2(x^2+1)}+$ $+\frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{(x^2+1)}-4\operatorname{arctg}x+C$. 5) $\frac{3x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2}+\frac{17}{8}\operatorname{arctg}x+C$.
6) $\frac{2x^3-6x^2+8x-9}{2(x^2-2x+2)^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+2}+\operatorname{arctg}(x-1)+C$.

2.9. 1) $\frac{3x^2-x}{4(x-1)(x^2+1)}+\frac{1}{4}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x+C$.
2) $-\frac{3x^2+2}{2x(x^2+1)}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+C$. 3) $\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}+$ $+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$. 4) $-\frac{57x^4+103x^2+32}{8x(x^2+1)^2}-\frac{57}{8}\operatorname{arctg}x+C$.
5) $\frac{2x^6-3x^2}{4(x^4-1)}+\frac{3}{8}\ln\frac{|x^2-1|}{x^2+1}+C$. 6) $\frac{x+1}{2(x^2+x+1)^2(1-x)}+C$.
7) $-\frac{(x^2+1)^2}{(x+1)(x^2+x+1)^2}+C$. 8) $-\frac{2x^3+1}{3x^3(x^3+1)}+\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right|+C$.
9) $\frac{x}{1+x+x^5}+C$. 10) $\frac{1}{5(x^5+1)}+\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x^5}{x^5+1}\right|+C$.

2.10. 1) $\frac{(x-1)^3}{3}+\frac{4x+2}{3(x^2+x+1)}$. 2) $\frac{x}{3(1-x^3)}$. 3) $\frac{x^3+3x^2+18x+16}{216(x^2+2x+10)^2}$.

4) $\dfrac{15x^5+40x^3+33x}{48(x^2+1)^3}$. 5) $\dfrac{10x^4-25x^2+12}{36x(2x^2-3)^2}$.

6) $\dfrac{-(486x^5-357x^4+810x^3+315x^2-312x+448)}{1922(x^3+x+1)^2}$.

2.11. 1) $P_n^{(n)}(a)=0$. 2) $a+2b+3c=0$. 3) $ac_1+ca_1=\dfrac{bb_1}{2}$.

§ 3. Интегрирование иррациональных функций

3.1. 1) $x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)+C$. 2) $2\sqrt{x}-x-\ln(2\sqrt{x}+1)+C$. 3) $x+4\sqrt{x+1}+4\ln|\sqrt{x+1}-1|+C$. 4) $\dfrac{x}{2}(\sqrt{x^2-1}-x)-\dfrac{1}{2}\ln|\sqrt{x^2-1}+x|+C$. 5) $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{t^2+t+1}{t^2-2t+1}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}+\dfrac{2t}{t^3-1}+C$, $t=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$. 6) $-\dfrac{4t^3}{t^4+1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{t^2+\sqrt{2}\,t+1}{t^2-\sqrt{2}\,t+1}-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\dfrac{t^2-1}{\sqrt{2}\,t}+C$, $t=\sqrt[4]{\dfrac{4-x}{x}}$.

3.2. 1) $2\sqrt{x+4}+2\ln\left|\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C$. 2) $\ln|1+3\sqrt[3]{x}|+C$. 3) $\dfrac{4}{45}(x-2)(5x+8)\sqrt[4]{x-2}+C$. 4) $\dfrac{3}{4}\left(t^4-2t^2-\ln|t-1|+\dfrac{5}{2}\ln(t^2+t+2)-\dfrac{9}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{2t+1}{\sqrt{7}}\right)+C$, $t=\sqrt[3]{x+2}$. 5) $\dfrac{1}{2}(x-2)\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C$. 6) $\dfrac{5}{4}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{4/5}-\dfrac{5}{9}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{9/5}+C$. 7) $-3\sqrt[6]{\dfrac{x-5}{x-7}}+C$. 8) $\dfrac{n}{b-a}\sqrt[n]{\dfrac{x-b}{x-a}}+C$.

3.4. 1) $3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C$. 2) $\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. 3) $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[6]{2x+1}+3\ln|\sqrt[6]{2x+1}-1|+C$. 4) $\dfrac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2}-\dfrac{4}{1+\sqrt[4]{x}}+C$. 5) $\ln|x|-\dfrac{3}{2}\ln(1+\sqrt[6]{x})-\dfrac{9}{4}\ln(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x})+\dfrac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{1-4\sqrt[6]{x}}{\sqrt{7}}+C$. 6) $\sqrt{x}+\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}+\dfrac{3}{4}\sqrt[6]{x}+3\sqrt[12]{x}+\dfrac{12}{5}\ln|1-\sqrt[12]{x}|-\dfrac{3}{40}\ln(1+2\sqrt[12]{x}+2\sqrt[6]{x})-\dfrac{9}{20}\operatorname{arctg}(1+2\sqrt[12]{x})+C$.

3.5. 1) $\dfrac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}-\dfrac{11}{8}\arcsin\dfrac{1-2x}{\sqrt{5}}+C$. 2) $x\sqrt{x^2-2x+5}-5\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5})+C$. 3) $\left(\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{5x}{12}-\dfrac{1}{24}\right)\sqrt{x^2+x+1}+\dfrac{7}{16}\ln\left(x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C$. 4) $\dfrac{2x^2+x+7}{6}\sqrt{x^2+2x-1}-$

$-2\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x-1}|+C.$ 5) $\dfrac{x^2-14x+111}{3}\sqrt{x^2+4x+3}-$

$-66\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}|+C.$ 6) $\dfrac{2x-1}{4}\sqrt{3-4x+4x^2}+$

$+\dfrac{1}{2}\ln(2x-1+\sqrt{3-4x+4x^2})+C.$ 7) $\dfrac{2x^2+x+1}{6}\sqrt{x^2+2x+2}-$

$-\dfrac{1}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+C.$

8) $\dfrac{x^3+2x}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln(x+\sqrt{x^2+4})+C.$

3.6. $4a(ca_1+bb_1)=8a^2c_1+3b^2a_1.$

3.8. 1) $-\dfrac{2x^2+5x+19}{6}\sqrt{1+2x-x^2}+4\arcsin\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}+C.$

2) $\left(\dfrac{x^3}{4}-\dfrac{7x^2}{6}+\dfrac{95x}{24}-\dfrac{145}{12}\right)\sqrt{x^2+4x+5}+\dfrac{35}{8}\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+5})+C.$

3) $\left(\dfrac{x^5}{6}-\dfrac{5x^3}{24}+\dfrac{5x}{16}\right)\sqrt{x^2+1}-\dfrac{5}{16}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C.$

4) $\dfrac{1}{8}\left(x^7+\dfrac{7x^5}{6}+\dfrac{35x^3}{24}+\dfrac{35x}{16}\right)\sqrt{x^2-1}+\dfrac{35}{128}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C.$

3.9. 1) $\ln\dfrac{x}{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}+C.$ 2) $\ln\dfrac{x+1}{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}+C.$

3) $\dfrac{3x-1}{2x^2}\sqrt{2x^2+2x+1}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1+\sqrt{2x^2+2x+1}}{x}+C.$

4) $\dfrac{\sqrt{x^2-2x-1}}{4(x-1)^2}-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{x-1}+C.$

3.10. 1) $\dfrac{x+2}{3\sqrt{x^2+4x+7}}+C.$ 2) $\dfrac{8(2x+1)}{9\sqrt{x^2+x+1}}-\dfrac{2}{27}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)^3+C.$

3) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^3+\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^5+C.$ 4) $\dfrac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}+C.$

3.11. 1) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{2}\,x}{\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{2}\,x}\right|+C.$

2) $\dfrac{1}{\sqrt{14}}\ln\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{6x^2+10}+\sqrt{7}}+C.$

3.12. 1) $\ln\dfrac{\sqrt{x^2+2x+4}-1}{\sqrt{x^2+2x+4}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2x^2+4x+8}}{x+1}+C.$

2) $2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2(x^2+x+1)}}{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{1+x+\sqrt{2(x^2+x+1)}}{1+x-\sqrt{2(x^2+x+1)}}\right|+C.$

3) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{3(x^2+x+1)}-\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{x^2-x+1}}\right|+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{2}(1-x)}+C.$

4) $\dfrac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{2x^2-x+2}}{\sqrt{7}(x+1)}+\dfrac{1}{4\sqrt{14}}\ln\left|\dfrac{2\sqrt{4x^2-2x+4}-\sqrt{7}(1-x)}{2\sqrt{4x^2-2x+4}+\sqrt{7}(1-x)}\right|+C.$

3.13. 1) $3\ln\left(x+\dfrac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right)+\ln\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}\right)+C.$

2) $\sqrt{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right)-\ln\frac{2-x+2\sqrt{x^2-x+1}}{x}+C$.

3) $\frac{1}{3\sqrt{3}}\ln\frac{1-x+\sqrt{3(x^2+2x+3)}}{x+2}-\frac{1}{3\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{2}(x+2)+\sqrt{3(x^2+2x+3)}}{x-1}+C.$

4) $\frac{1}{2}\ln\frac{x+8+4\sqrt{x^2+x+4}}{x}-\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{x+3+\sqrt{6(x^2+x+4)}}{x-1}-$
$-\frac{1}{4}\ln\frac{7-x+4\sqrt{x^2+x+4}}{x+1}+C.$ 5) $-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+$
$+\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+\frac{1}{2}\ln\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+C.$

6) $-\frac{1+x}{2}\sqrt{1+2x-x^2}+2\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}\,x}{x+1}+C.$

7) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(x^2+1)}-x}{\sqrt{x^2+2}}+C.$ 8) $\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}+$
$+\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{2}(x-1)}-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}+C.$

9) $\sqrt{1+x+x^2}+\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2}+C.$

3.14. 1) $2\ln|x-\sqrt{x^2-x+1}|-\frac{3}{2}\ln|2x-1-2\sqrt{x^2-x+1}|-$
$-\frac{3}{2(2x-1-2\sqrt{x^2-x+1})}+C.$ 2) $\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+$
$+\frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{1+x}+C.$

3) $\ln\left|1-\frac{x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\right|-2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}+C.$

4) $\frac{2\sqrt{5}}{25}\ln\left|\frac{2t+\sqrt{5}+1}{2t-\sqrt{5}+1}\right|+\frac{2(4t-3)}{5(t^2+t-1)}+C,\ t=\sqrt{x^2+x}-x.$

5) $2\,\frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x}+\ln|2\sqrt{1+x+x^2}+1+2x|+C.$

6) $\frac{5}{18(t+1)}+\frac{1}{6(t+1)^2}+\frac{17}{108}\ln|t+1|-\frac{3}{4}\ln|t-1|+$
$+\frac{16}{27}\ln|t-2|+C,\ t=\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}.$

3.16. 1) $\frac{1}{2}(x+2\sqrt{x}-\sqrt{x+x^2}-\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}))+C.$

2) $-\sqrt{\frac{1-\sqrt{2x-3}}{1+\sqrt{2x-3}}}+C=\frac{\sqrt{2x-3}-1}{\sqrt{4-2x}}+C.$

3.17. 1) $6x^{1/6}+3x^{1/3}+2x^{1/2}+6\ln|x^{1/6}-1|+C.$

2) $\frac{6}{5}x^{5/6}-4x^{1/2}+18x^{1/6}+3x^{1/6}(1+x^{1/3})^{-1}-21\operatorname{arctg}x^{1/6}+C.$

3) $-\frac{3}{2}(1+x^{1/3})^{-2}+C.$ 4) $\frac{4}{9}(1+x^{1/4})^{-9}-\frac{1}{2}(1+x^{1/4})^{-8}+C.$

3.18. 1) $\frac{3}{11}(x+1)^{11/3}-\frac{3}{4}(x+1)^{8/3}+\frac{3}{5}(x+1)^{5/3}+C.$

2) $\frac{12}{13}\left(1+x^{1/4}\right)^{13/3}-\frac{18}{5}\left(1+x^{1/4}\right)^{10/3}+\frac{36}{7}\left(1+x^{1/4}\right)^{7/3}-3\left(1+x^{1/4}\right)^{4/3}+$ $+C$. 3) $\frac{12}{7}\left(1+x^{1/4}\right)^{7/3}-3\left(1+x^{1/4}\right)^{4/3}+C$. 4) $\frac{6}{7}\left(1+x^{1/3}\right)^{7/2}-\frac{18}{5}\left(1+x^{1/3}\right)^{5/2}+$ $+6x^{1/3}\left(1+x^{1/3}\right)^{1/2}+C$. 5) $\frac{3}{5}\left(1+x^{2/3}\right)^{5/2}+\left(1-2x^{2/3}\right)\left(1+x^{2/3}\right)^{1/2}+C.$

6) $\frac{1}{6}\ln\frac{t-1}{t+1}+\frac{1}{12}\ln\frac{t^2-t+1}{t^2+t+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C,$ $t=\sqrt[6]{x^6+1}.$

3.19. 1) $-\frac{3x^3+4}{8x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}+C$. 2) $-\frac{\sqrt[3]{(2-x^3)^2}}{4x^2}+C.$

3) $\frac{1}{6}\ln\frac{t^2+t+1}{t^2-2t+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C,\ t=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$. 4) $\frac{t}{2(t^3+1)}-$ $-\frac{1}{12}\ln\frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C,\quad t=\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}.$

3.20. $q=0,\quad q=\frac{2}{k},\quad k=\pm1,\ \pm2,\ \ldots$

3.21. $\left(\frac{1}{9}x^7-\frac{7}{54}x^4+\frac{14}{81}x\right)t^2-\frac{7}{243}\ln\frac{t^2+tx+x^2}{t^2-2tx+x^2}+\frac{14}{81\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+x}{\sqrt{3}\,x}+C,$ $t=\sqrt[3]{1+x^3}.$

3.22. 1) $\frac{2x^4-1}{6x^6}\sqrt{1+x^4}+C$. 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{\sqrt{2}\,x}{x^2+1}+C$. 3) $\arcsin\frac{x^2+1}{(x+1)^2}+C.$

4) $\ln\left(x-\frac{1}{x}+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{x^4+3x^3-2x^2-3x+1}}{x}\right)+C.$

3.23. $x=\lambda+t^2$, где λ — действительный корень многочлена $P_3(x)$.

3.27. 1) $\frac{1}{27}(E(\arcsin 3x;\ 2/3)-F(\arcsin 3x;\ 2/3))+C.$

2) $-\frac{1}{\sqrt{6}}F\left(\arcsin\sqrt{1-4x^2};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C$. 3) $\frac{1}{5}F\left(\arcsin\frac{5x}{\sqrt{1+25x^2}};\ \sqrt{21}/5\right)+C.$

4) $\frac{41}{20}F(\varphi;\ 4/5)+\frac{5}{4}E(\varphi;\ 4/5)+C,\ \varphi=\arcsin\sqrt{1-\frac{1}{16x^2}}.$

5) $-\frac{1}{3}F\left(\arcsin 3\sqrt{(1-x^2)/8};\ \frac{\sqrt{8}}{9}\right)+C.$

6) $-\frac{4}{\sqrt[4]{3}}F\left(\arccos\frac{x+1-\sqrt{3}}{x+1+\sqrt{3}};\ \sqrt{2+\sqrt{3}}/2\right)+C.$

§ 4. Интегрирование трансцендентных функций

4.1. 1) $\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\sin 4x}{8}+C$. 2) $\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 6x}{12}+C$. 3) $\frac{\sin 5x}{10}+$ $+\frac{\sin 3x}{6}+C$. 4) $-\frac{\cos(4x+1)}{8}-\frac{\cos(2x+3)}{4}+C$. 5) $\frac{\cos 6x}{24}-$ $-\frac{\cos 4x}{16}-\frac{\cos 2x}{8}+C$. 6) $\frac{\sin 9x}{36}+\frac{\sin 7x}{28}+\frac{\sin 3x}{12}+\frac{\sin x}{4}+C.$

7) $-\frac{\sin(x+1)}{4}+\frac{\sin(3x+1)}{6}-\frac{\sin(5x+1)}{20}+C$. 8) $\frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{16}+$ $+\frac{\sin 4x}{16}+\frac{\sin 6x}{24}+\frac{\sin 10x}{80}+C$.

4.2. 1) $\frac{\operatorname{sh} 8x}{16}-\frac{\operatorname{sh} 6x}{12}+C$. 2) $\frac{\operatorname{ch}^3 x}{3}-\operatorname{ch} x+C$. 3) $\frac{x}{4}+\frac{\operatorname{sh} 2x}{8}+$ $+\frac{\operatorname{sh} 4x}{16}+\frac{\operatorname{sh} 6x}{24}+C$. 4) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\operatorname{sh} 2x+C$.

4.3. 1) $\frac{2}{\cos x}+C$. 2) $\ln|\cos x|-\cos 2x+C$. 3) $\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{4\sin^4 x}+C$. 4) $\frac{1}{8}\ln(\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x)+C$.

4.4. 1) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$. 2) $\frac{\cos^7 x}{7}-\frac{\cos^5 x}{5}+C$. 3) $\frac{\sin^9 x}{9}-$ $-\frac{\sin^{11} x}{11}+C$. 4) $\frac{\sin^8 2x}{16}-\frac{\sin^{10} 2x}{10}+\frac{\sin^{12} 2x}{24}+C$. 5) $\sin x\cos^2 x+$ $+\frac{2\sin^5 x}{5}+C$. 6) $-\frac{16\cos^7 x}{7}+\frac{24\cos^5 x}{5}-3\cos^3 x+C$.

4.5. 1) $\frac{\operatorname{ch}^4 x}{4}+C$. 2) $\frac{\operatorname{sh}^5 x}{5}+\frac{\operatorname{sh}^3 x}{3}+C$. 3) $\frac{32}{5}\operatorname{sh}^5\frac{x}{2}+\frac{64}{7}\operatorname{sh}^7\frac{x}{2}+$ $+\frac{32}{9}\operatorname{sh}^9\frac{x}{2}+C$. 4) $\frac{2}{5}\operatorname{ch}^5 x-\operatorname{ch}^3 x+\operatorname{ch} x+C$.

4.6. 1) $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}+C$. 2) $\frac{3x}{8}-\frac{\sin 8x}{16}+\frac{\sin 16x}{128}+C$. 3) $\frac{5x}{16}+$ $+\frac{\sin 6x}{12}+\frac{\sin 12x}{64}-\frac{\sin^3 6x}{144}+C$. 4) $\frac{24x-8\sin 4x+\sin 8x}{2048}+\frac{\sin^5 2x}{320}+C$.

4.7. $\frac{1}{10}\sin^7 x\cos^3 x+\frac{3}{80}\sin^7 x\cos x-\frac{1}{160}\sin^5 x\cos x-\frac{1}{128}\sin^3 x\cos x-$ $-\frac{3}{256}\sin x\cos x+\frac{3x}{256}+C$.

4.8. 1) $\frac{\operatorname{sh} 8x}{64}-\frac{x}{8}+C$. 2) $\frac{3x}{8}+\frac{\operatorname{sh} 2x}{4}+\frac{\operatorname{sh} 4x}{32}+C$. 3) $\frac{\operatorname{sh}^3 2x}{48}+$ $+\frac{\operatorname{sh} 4x}{64}-\frac{x}{16}+C$. 4) $\frac{\operatorname{sh}^3 x}{24}-\frac{\operatorname{sh} 2x}{32}+\frac{x}{16}+C$.

4.9. 1) $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$. 2) $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}-$ $-\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$. 3) $\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\frac{1}{\sin x}+\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+C$. 4) $\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right|-\frac{3}{2}\cos x-\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x}+C$.

4.10. 1) $\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{\operatorname{ch} x}+C$. 2) $-\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{\operatorname{ch} x}-\frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x}+C$. 3) $\frac{\operatorname{sh} x}{4\operatorname{ch}^4 x}+\frac{3\operatorname{sh} x}{8\operatorname{ch}^2 x}+\frac{3}{4}\operatorname{arctg} e^x+C$. 4) $\frac{3}{2}\operatorname{sh} x-\frac{\operatorname{sh}^3 x}{2\operatorname{ch}^2 x}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\operatorname{sh} x+C$.

4.11. 1) $-\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4}+C$. 2) $\frac{\sin^2 x}{2}-\frac{1}{2\sin^2 x}-2\ln|\sin x|+C$. 3) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln|\operatorname{tg} x|+C$. 4) $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+2\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C$. 5) $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-$

$-\operatorname{ctg} x+C$. 6) $\dfrac{\operatorname{tg}^9 x}{9}+\dfrac{2\operatorname{tg}^7 x}{7}+\dfrac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+C$. 7) $\dfrac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-$ $-\ln|\cos x|+C$. 8) $\dfrac{\operatorname{tg}^5 x}{5}-\dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+\operatorname{tg} x-x+C$.

4.12. 1) $\dfrac{\operatorname{th}^5 x}{5}+C$. 2) $\dfrac{\operatorname{sh}^4 x}{4}+\operatorname{sh}^2 x+\ln|\operatorname{sh} x|+C$. 3) $\dfrac{1}{2}\operatorname{th}\dfrac{x}{2}-$ $-\dfrac{1}{6}\operatorname{th}^3\dfrac{x}{2}+C$. 4) $\operatorname{th} x+2\operatorname{cth} x-\dfrac{\operatorname{cth}^3 x}{3}+C$. 5) $\ln\operatorname{ch} x-\dfrac{\operatorname{th}^2 x}{2}+C$. 6) $x-\operatorname{th} x-(\operatorname{th}^3 x)/3+C$.

4.13. 1) $\dfrac{1}{6(3\cos x-1)^2}+C$. 2) $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}+\dfrac{1}{2(1+\cos x)}+C$. 3) $\dfrac{\cos x}{2}-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\ln\left|\dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{1+\sqrt{2}\cos x}\right|+C$. 4) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\cos^2 x-\cos x+1}{(\cos^2 x+\cos x+1)^3}-$ $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{1+2\cos^2 x}+C$. 5) $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{(3-\operatorname{ch} x)^{10}}{\operatorname{ch}^4 x}+C$.

6) $\ln(\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{ch} x+1)+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{ch} x+1}{\sqrt{3}}+C$.

4.14. 1) $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{5-\sin x}{1-\sin x}+C$. 2) $\dfrac{1}{4}\ln(3+4\sin^2 x)+C$. 3) $\sin x-$ $-\dfrac{2}{\sin x}-6\operatorname{arctg}\sin x+C$. 4) $\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}-2\operatorname{arctg}\sin x+C$.

5) $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\operatorname{sh} x-\dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{sh} x}{2}+C$.

6) $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{\operatorname{sh}^2 x-\operatorname{sh} x+1}{\operatorname{sh}^2 x+2\operatorname{sh} x+1}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{sh} x-1}{\sqrt{3}}+C$.

4.15. 1) $(x+3\ln|\sin x-3\cos x|)/10+C$. 2) $\ln|\sin x+\cos x|+C$.

3) $x\cos a-2\sin a\ln\left|\sin\dfrac{x+a}{2}\right|+C$. 4) $\dfrac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}x+$ $+\dfrac{ba_1-ab_1}{a^2+b^2}\ln|a\cos x+b\sin x|+C$. 5) $\dfrac{5x}{3}-\dfrac{2}{3}\ln(2\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x)+C$.

6) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\operatorname{sh} 2x}{4}+\dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{2}+C$. 7) $\dfrac{aa_1-bb_1}{a^2-b^2}x+\dfrac{ab_1-ba_1}{a^2-b^2}\ln|a\operatorname{ch} x+b\operatorname{sh} x|+C$, если $a^2\neq b^2$; $\dfrac{a_1\pm b_1}{2a}x+\dfrac{a_1\mp b_1}{4a}\operatorname{sh} 2x+\dfrac{b_1\mp a_1}{2a}\operatorname{sh}^2 x+C$, если $b=\pm a$.

4.16. 1) $\dfrac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{tg} x+1}{\sqrt{7}}+C$, $|x|<\dfrac{\pi}{2}$.

2) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg} x+1+\sqrt{2}}{\operatorname{tg} x+1-\sqrt{2}}\right|+C$. 3) $\dfrac{1}{2-\operatorname{tg} x}+C$.

4) $\dfrac{1}{\sqrt{30}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{5}{6}}\operatorname{tg} x\right)+C$. 5) $\dfrac{1}{2\sqrt{13}}\ln\left|\dfrac{2\operatorname{tg} x+3-\sqrt{13}}{2\operatorname{tg} x+3+\sqrt{13}}\right|+C$.

6) $\dfrac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\operatorname{arctg}\dfrac{c\operatorname{tg} x+b}{\sqrt{ac-b^2}}+C$, если $ac>b^2$;

$-\dfrac{1}{c\operatorname{tg} x+b}+C$, если $ac=b^2$; $\dfrac{1}{2\sqrt{b^2-ac}}\ln\left|\dfrac{c\operatorname{tg} x+b-\sqrt{b^2-ac}}{c\operatorname{tg} x+b+\sqrt{b^2-ac}}\right|+C$, если $ac < b^2$. 7) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{th} x - 2}{3\operatorname{th} x - 1}\right| + C$. 8) $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{th} x - 2}{\sqrt{5}} + C$.

9) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{th} x - 2}{\operatorname{th} x + 2}\right| + C$. 10) $\frac{1}{\operatorname{th} x + 6} + C$.

4.17. 1) $\frac{1}{68}(17\ln|\sin x| - \ln|\sin x + 4\cos x| - 4x) + C$.

2) $\frac{5}{9}\ln(2 + \operatorname{th} x) - \frac{1}{18}\ln(1 - \operatorname{th} x) - \frac{1}{2}(1 + \operatorname{th} x) - \frac{2}{3(\operatorname{th} x + 2)} + C$.

4.18. 1) $\frac{1}{2}(\operatorname{tg} x + \ln|\operatorname{tg} x|) + C$. 2) $\frac{1}{6}\ln\frac{(\operatorname{tg} x + 1)^2}{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1} +$ $+ \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{3}} + C$. 3) $\operatorname{arctg}\operatorname{tg}^2 x + C$. 4) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}} + C$.

5) $\frac{1}{2b^2}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{a^2\operatorname{tg}^2 x + b^2} + \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} x\right)\right) + C$, если $a \neq 0$ и $b \neq 0$; $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3a^4} + C$, если $a \neq 0$, $b = 0$; $\frac{\operatorname{tg} x}{b^4} + C$, если $a = 0$, $b \neq 0$.

6) $\operatorname{arctg}((\operatorname{tg} 2x)/2) + C$. 7) $-x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\operatorname{th} x + 1}{\sqrt{2}\operatorname{th} x - 1}\right| + C$.

8) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sh} 2x} + C$. 9) $\operatorname{arctg}(2\operatorname{th}^2 x - 1) + C = \operatorname{arctg}\operatorname{sh}^2 x + C_1$.

10) $\frac{3\operatorname{th} x}{4(\operatorname{th}^2 x + 2)} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{2}} + C$.

4.19. 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right| + C$. 2) $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right| + C$.

3) $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} e^x\sqrt{3} + C$. 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{e^x - \sqrt{3}}{e^x + \sqrt{3}}\right| + C$.

5) $\frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\operatorname{arctg}\frac{a\operatorname{th}(x/2) + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} + C$, если $b^2 < a^2$;

$\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}\ln\left|\frac{a\operatorname{th}(x/2) + b - \sqrt{b^2 - a^2}}{a\operatorname{th}(x/2) + b + \sqrt{b^2 - a^2}}\right| + C$, если $b^2 > a^2$;

$\frac{1}{a}(\operatorname{sh} x \mp \operatorname{ch} x) + C$, если $b = \pm a$. 6) $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\varphi}{2}\right)\right| + C$,

где φ удовлетворяет условиям $\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

4.20. $\frac{2\sin x - \cos x}{10(2\cos x + \sin x)^2} + \frac{1}{10\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x + \operatorname{arctg} 2}{2}\right| + C$.

4.21. 1) $\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}(x/2) + \sqrt{5}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}(x/2) - \sqrt{5}}\right| + C$. 2) $\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$.

3) $\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg}(x/2) - 1}{\sqrt{15}} + C$. 4) $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}(x/2) - 1}{\sqrt{3}} -$ $- \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}(x/2) - 1}{2\sqrt{2}} + C$. 5) $\frac{2}{3\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{th}(x/2)}{\sqrt{11}} + C$.

6) $\dfrac{1}{3\sqrt{5}} \ln \dfrac{(\operatorname{th}(x/2)-2+\sqrt{5})^2\,|\,2\operatorname{th}(x/2)-1-\sqrt{5}\,|}{(\operatorname{th}(x/2)-2-\sqrt{5})^2\,|\,2\operatorname{th}(x/2)-1+\sqrt{5}\,|}+C.$

7) $\dfrac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} \ln \left|\dfrac{c\operatorname{th}(x/2)-b+\sqrt{b^2+c^2}}{c\operatorname{th}(x/2)-b-\sqrt{b^2+c^2}}\right|+C.$

8) $\dfrac{2\operatorname{sign} c}{\sqrt{c^2-a^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{c-a}{c+a}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)+C,$ если $|c|>a;$

$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-c^2}} \ln \left|\dfrac{\sqrt{a-c}\operatorname{tg}(x/2)+\sqrt{a+c}}{\sqrt{a-c}\operatorname{tg}(x/2)-\sqrt{a+c}}\right|,$ если $|c|<a;$ $\dfrac{1}{a}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+C,$ если $c=a;$ $-\dfrac{1}{a}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}+C,$ если $c=-a.$

4.22. 1) $\dfrac{1}{1-\varepsilon^2}\left(\dfrac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)-\dfrac{\varepsilon\sin x}{1+\varepsilon\cos x}\right)+C.$

2) $\dfrac{\varepsilon\sin x\,(\varepsilon^2-3\varepsilon\cos x-4)}{2(\varepsilon^2-1)^2(1+\varepsilon\cos x)^2}+\dfrac{\varepsilon^2+2}{2(\varepsilon^2-1)^{5/2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{\varepsilon-1}\operatorname{tg}(x/2)+\sqrt{\varepsilon+1}}{\sqrt{\varepsilon-1}\operatorname{tg}(x/2)-\sqrt{\varepsilon+1}}\right|+C.$

4.23. 1) $\ln|1+\operatorname{tg}(x/2)|+C.$ 2) $\dfrac{2}{3+9\operatorname{tg}(x/2)}+C.$

3) $\dfrac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{tg}(x/2)+1}{\sqrt{15}}+C.$ 4) $\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}(x/2)-5}{\operatorname{tg}(x/2)-3}\right|+C.$

5) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\operatorname{th}(x/2)+1}{\operatorname{th}(x/2)-3}\right|+C=-\dfrac{1}{2}\ln(1+2e^{-x})+C.$ 6) $\dfrac{1}{5}\ln|5\operatorname{th}(x/2)+3|+C.$

7) $\dfrac{1}{\sqrt{c^2-a^2+b^2}}\ln\left|\dfrac{(c-a)\operatorname{th}(x/2)-b+\sqrt{c^2-a^2+b^2}}{(c-a)\operatorname{th}(x/2)-b-\sqrt{c^2-a^2+b^2}}\right|+C,$ если $a\neq c;$

$\dfrac{1}{b}\ln\left|c+b\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right|+C,$ если $a=c.$

8) $\dfrac{2}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\dfrac{(c-a)\operatorname{tg}(x/2)+b}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}+C.$

4.24. $A=\dfrac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},\quad B=\dfrac{ba_1-ab_1}{a^2+b^2},\quad C=c_1-c\dfrac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}.$

4.25. 1) $-x+2\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}(x/2)}{\operatorname{tg}(x/2)+1}\right|+C.$

2) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\ln(\cos x+\sin x+\sqrt{2})-\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)+C.$

3) $\dfrac{2}{5}x-\dfrac{1}{5}\ln|4\cos x+3\sin x-2|+\dfrac{4}{5\sqrt{21}}\ln\left|\dfrac{2\sqrt{3}\operatorname{tg}(x/2)-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2\sqrt{3}\operatorname{tg}(x/2)-\sqrt{3}-\sqrt{7}}\right|+C.$

4) $\dfrac{3}{5}x-\dfrac{4}{5}\ln|2\cos x-\sin x-3|+\dfrac{6}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{5\operatorname{tg}(x/2)+1}{2}+C.$

5) $(\cos 2a)\,x-2(\sin 2a)\ln|\sin((x+a)/2)|-2(\sin^2 a)\operatorname{ctg}((x+a)/2)+C.$

6) $\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{3}\ln|2\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}x-1|+\dfrac{2}{3}\ln|2\operatorname{th}(x/2)-1|+C.$

7) $\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}\ln|4\operatorname{ch}x+5\operatorname{sh}x+6|-\dfrac{1}{3\sqrt{5}}\ln\left|\dfrac{2\operatorname{th}(x/2)-5+3\sqrt{5}}{2\operatorname{th}(x/2)-5-3\sqrt{5}}\right|+C.$

4.26. 1) $\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x+\operatorname{arctg}2}{2}\right|-2\sin x-\cos x\right)+C.$ 2) $3\cos x-$ $-\sin x+2\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)\right|+C.$ 3) $\dfrac{1}{5}\Big(\sin x+3\cos x+$

$+\dfrac{8}{\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x+\operatorname{arctg}2}{2}\right|\Bigg)+C.$ 4) $\dfrac{1}{a^2+b^2}\Bigg((aa_1+bb_1-ac_1)\sin x+$ $+(ba_1-ab_1-bc_1)\cos x+\dfrac{a^2c_1+b^2a_1-abb_1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x+\varphi}{2}\right|\Bigg)+C$, где φ удовлетворяет условиям $\sin\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

5) $\dfrac{1}{8}\left(5\operatorname{sh}x-3\operatorname{ch}x-\dfrac{15}{4}\ln\left|\dfrac{3\operatorname{th}(x/2)+1}{\operatorname{th}(x/2)+3}\right|\right)+C.$

6) $\dfrac{1}{8}\left(5\operatorname{sh}x-3\operatorname{ch}x-\dfrac{17}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{5\operatorname{th}(x/2)+3}{4}\right)+C.$

4.27. 1) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{\cos x}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{2+\sin x}{2-\sin x}+C.$

2) $\dfrac{11}{25}(4\cos x+3\sin x)^{-1}+\dfrac{2}{125}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x+\operatorname{arctg}(4/3)}{2}\right|+C.$

3) $\dfrac{1}{\sqrt{b-a}}\left(\dfrac{a_1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{b-a}{a}}\sin x\right)+\dfrac{b_1}{2\sqrt{b}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{b-a}\cos x-\sqrt{b}}{\sqrt{b-a}\cos x+\sqrt{b}}\right|\right)+C.$

4) $\dfrac{1}{a^2+b^2}\left(\dfrac{ab_1-ba_1}{a\cos x+b\sin x}+\dfrac{aa_1+bb_1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x+\varphi}{2}\right|\right)+C$, где $\sin\varphi=$ $=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

5) $\dfrac{1}{\sqrt{21}}\ln\dfrac{\sqrt{7}\operatorname{ch}x-\sqrt{3}}{\sqrt{7}\operatorname{ch}x+\sqrt{3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{7}\operatorname{sh}x}{2}+C.$

6) $-\dfrac{1}{7}\left(\dfrac{5}{4\operatorname{ch}x+3\operatorname{sh}x}+\dfrac{4}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{4\operatorname{th}(x/2)+3}{\sqrt{7}}\right)+C.$

4.28. $A=\dfrac{a_1(a-\lambda_2)+b_1b}{b(\lambda_2-\lambda_1)}$, $B=\dfrac{a_1(a-\lambda_1)+b_1b}{b(\lambda_1-\lambda_2)}$.

4.29. 1) $\dfrac{3}{5}\operatorname{arctg}(\sin x-2\cos x)+\dfrac{\sqrt{6}}{60}\ln\dfrac{\sqrt{6}+2\sin x+\cos x}{\sqrt{6}-2\sin x-\cos x}+C.$

2) $\dfrac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{6}+2\sin x-2\cos x}{\sqrt{6}-2\sin x+2\cos x}\right|-\dfrac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}-2\sin x-2\cos x}{\sqrt{2}+2\sin x+2\cos x}\right|+C.$

4.30. 1) $\dfrac{1}{8}\operatorname{tg}^2(x/2)+\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}(x/2)+\dfrac{1}{4}\ln|\operatorname{tg}(x/2)|+C.$

2) $\dfrac{1}{6}\ln|\operatorname{tg}(x/2)|+\dfrac{5}{6}\ln|\operatorname{tg}(x/2)-3|-\dfrac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}(x/2)-1|+C.$

3) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}(x/2)}+\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}(x/2)}\right|+C.$

4) $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{(\operatorname{tg}(x/2)+1)^2}{\operatorname{tg}^2(x/2)-\operatorname{tg}(x/2)+1}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{tg}(x/2)-1}{\sqrt{3}}+C.$

5) $\dfrac{1}{3}(5\ln|\operatorname{th}(x/2)-3|-2\ln|\operatorname{th}(x/2)|)+C.$

6) $\dfrac{2}{3}\ln\dfrac{(\operatorname{th}(x/2)-2)^2}{\operatorname{th}^2(x/2)+2\operatorname{th}(x/2)+4}-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{th}(x/2)+1}{\sqrt{3}}+C.$

4.31. 1) $-\dfrac{3}{80}\cos^{4/3}x(20-16\cos^2x+5\cos^4x)+C.$

2) $\dfrac{5}{28}\sin^{4/5}x(7-2\sin^2x)+C.$ 3) $\dfrac{3(5+\cos^2x)}{5\sqrt[3]{\cos x}}+C.$

4) $\frac{1}{4}\ln\frac{(1-\sin x)(1+\sqrt[3]{\sin x})^3}{(1+\sin x)(1-\sqrt[3]{\sin x})^3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[3]{\sin^2 x}-1}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\sin x}}+C.$

5) $\frac{3}{55}\operatorname{sh}^{5/3}x\,(11+5\operatorname{sh}^2 x)+C.$ 6) $\frac{3}{7}\operatorname{ch}^{1/3}x\,(\operatorname{ch}^2 x-7)+C.$

4.32. 1) $\frac{\sqrt{2\operatorname{tg}x}}{5}(5+\operatorname{tg}^2 x)+C.$ 2) $\frac{\operatorname{tg}^2 x-3}{3\sqrt{2\operatorname{tg}x}}+C.$

3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sin x+\cos x-\sqrt{\sin 2x}|+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\sin 2x}}{\cos x-\sin x}+C.$

4) $2\sqrt{\operatorname{tg}x}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\operatorname{tg}x+\sqrt{2\operatorname{tg}x}+1}{\operatorname{tg}x-\sqrt{2\operatorname{tg}x}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\operatorname{tg}x}}{\operatorname{tg}x-1}+C.$

5) $\frac{3}{55}\operatorname{th}^{5/3}x\,(11-5\operatorname{th}^2 x)+C.$ 6) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\operatorname{th}x}}{1-\sqrt{\operatorname{th}x}}\right|-\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{th}x}+C.$

4.33. 1) $-\frac{2}{n\cos\varphi}\cos^n\frac{x+\varphi}{2}\sin^{-n}\frac{x-\varphi}{2}+C.$

2) $-\frac{2}{n\operatorname{ch}\varphi}\operatorname{ch}^n\frac{x-\varphi}{2}\operatorname{sh}^{-n}\frac{x+\varphi}{2}+C.$

4.34. $J_3=\cos a\,(2\cos 2a-1)\,x+\sin a\left(\frac{\sin((x-a)/2)}{\sin((x+a)/2)}\right)^2+$
$+2\sin 2a\frac{\sin((x-a)/2)}{\sin((x+a)/2)}-2\sin a\,(2\cos 2a+1)\ln|\sin((x+a)/2)|+C.$

4.35. 1) $\operatorname{arctg}(2\operatorname{sh}x)+C.$ 2) $\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\ln|1-e^x|-\frac{1}{6}\ln(2+e^x)+C.$

3) $x-\frac{1}{2}\ln\left((1+e^x)\sqrt{1+e^{2x}}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}e^x+C.$ 4) $x-\ln|1-e^x|+$
$+\frac{1}{1-e^x}+\frac{1}{2(1-e^x)^2}+\frac{1}{3(1-e^x)^3}+C.$ 5) $\frac{1}{4\operatorname{sh}1}(e^{-x}+$
$+\operatorname{ch}1(x-\ln(1+e^x\operatorname{ch}1)))+C.$ 6) $-\ln\left(\frac{1}{2}+e^{-x}+\sqrt{1+e^{-x}+e^{-2x}}\right)+C.$

7) $\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}+2\ln\left(2+e^x+\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\right)-\arcsin\frac{2-e^{-x}}{\sqrt{5}}+C.$

8) $\frac{1}{4}\ln\frac{(\sqrt{1+e^x}-1)(1-\sqrt{1-e^x})}{(\sqrt{1+e^x}+1)(1+\sqrt{1-e^x})}-\frac{\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x}}{2}e^{-x}+C.$

4.36. 1) $-\left(1+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x^2}+C.$ 2) $\frac{e^{2x}}{4}+(x-1)e^x-\frac{x}{2}+C.$

3) $\ln|\sin x|-x\operatorname{ctg}x+C.$ 4) $2\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|-x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C.$

5) $\frac{x}{6}(3\cos x-\cos 3x)+\frac{1}{18}(\sin 3x-9\sin x)+C.$ 6) $\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{3}{4}\cos^2 x+$
$+5\cos x+x\sin x\left(6+\frac{3}{2}\cos x\right)-3x^2\left(\frac{1}{4}+\cos x\right)-\frac{1}{4}x^4+C.$

7) $\frac{1}{2}e^x((x^2-1)\sin x-(x-1)^2\cos x)+C.$

8) $\frac{1}{4}e^{ax}\left(\frac{3(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}-\frac{a\sin 3bx-3b\cos 3bx}{a^2+9b^2}\right)+C.$

4.37. 1) $\ln\frac{\sqrt{1-x+x^2}}{x}-\frac{\ln(1-x+x^2)}{x}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

2) $(1+e^x)\ln(1+e^{-x})+x+C.$

3) $x\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)-\frac{1}{2}(x-\arcsin x)+C.$

4) $\frac{2x^2\sqrt{x}}{125}(25\ln^2 x-20\ln x+8)+C.$

4.38. 1) $(x-1)\operatorname{arctg}(1/(x-1))+\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)+C.$

2) $\frac{1}{2}(x^2\operatorname{arctg}(x+1)-x+\ln(x^2+2x+2))+C.$

3) $\frac{1}{100}\left((50x^2-9)\arccos(5x-2)-(5x+6)\sqrt{20x-25x^2-3}\right)+C.$

4) $\frac{1}{8}\left((x^8-1)\operatorname{arctg}x-\frac{x^7}{7}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+x\right)+C.$

4.39. 1) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{x-x^2}+(2x-1)\arcsin\sqrt{x}\right)+C.$ 2) $\frac{1}{3}\left(\ln(1+x)-x+\right.$ $\left.+2x\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)+C.$ 3) $\frac{1}{9}\left(x^3-3x-3(1-x^2)^{3/2}\arccos x\right)+C.$

4) $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C.$

4.40. 1) $x-e^{-x}\arcsin e^x-\ln\left(1+\sqrt{1-e^{2x}}\right)+C.$ 2) $\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\times$ $\times e^{\arcsin x}+C.$ 3) $(x^2+1)e^{\operatorname{arctg}x}+C.$ 4) $\frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg}x}+C.$

4.41. 1) $(\sin x)/x+C.$ 2) $e^x/\sin x+C.$ 3) $x/\ln x+C.$ 4) $x/(1+\ln x)+C.$

5) $\left(1-\frac{4}{x}\right)e^x+C.$ 6) $e^x/(1+x^2)+C.$ 7) $-\frac{x^2+x+1}{x^3}e^{-x}+C.$

8) $\frac{x+2}{x^2+x}e^x+C.$

4.42. $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!}=0.$

4.43. 1) $\operatorname{li}(e^x)+C.$ 2) $e^{-x}+\operatorname{li}(e^{-x})+C.$

3) $e^4\operatorname{li}(e^{2x-4})-e^2\operatorname{li}(e^{2x-2})+C.$ 4) $\frac{1}{2}\left(9\operatorname{li}(e^{3x})-\frac{3x+1}{x^2}e^{3x}\right)+C.$

5) $e^x\ln|x|-\operatorname{li}(e^x)+C.$ 6) $\frac{1}{2}\left(\operatorname{li}(x)-\frac{x(1+\ln x)}{\ln^2 x}\right)+C.$ 7) $\operatorname{li}(x^{101})+C.$

8) $64e^4\operatorname{li}\left(\frac{x^2}{e^4}\right)+\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x+3\ln x+\frac{21}{2}-\frac{32}{\ln x-2}\right)+C.$

4.44. 1) $2\operatorname{Si}(x)+\frac{\cos x}{x}+C.$ 2) $-\frac{9}{2}\operatorname{Si}(x)-\frac{\sin 3x+3x\cos 3x}{2x^2}+C.$

3) $\frac{1}{2}\operatorname{Si}(x^2)+C.$ 4) $\frac{1}{4}(3\operatorname{Si}(x)-\operatorname{Si}(3x))+C.$

4.45. 1) $\sqrt{\frac{\pi}{2e}}\,\Phi_0(2x+1)+C.$ 2) $\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{(b^2-ac)/a}\,\Phi_0\left(\sqrt{\frac{2}{a}}(ax+b)\right)+C.$

3) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{\pi}\,\Phi_0(\sqrt{2}\,x)-xe^{-x^2}\right)+C.$ 4) $-\frac{1}{x}e^{-x^2}-2\sqrt{\pi}\,\Phi_0(\sqrt{2}\,x)+C.$

5) $e\sqrt{2\pi}\,\Phi_0\left(x+\frac{1}{x}\right)+C.$

6) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(e^2\Phi_0\left(\sqrt{2}\,x+\frac{\sqrt{2}}{x}\right)+e^{-2}\Phi_0\left(\sqrt{2}\,x-\frac{\sqrt{2}}{x}\right)\right)+C.$

4.46. 1) $\frac{1}{\sqrt{8}}F(x;\ 1/2)+C.$ 2) $\frac{5}{8}E(x;\ 4/5)-\frac{9}{40}F(x;\ 4/5)+C.$

3) $\frac{1}{\sqrt{2}}F(\arcsin(\sqrt{2}\sin x);\ 1/\sqrt{2})+C.$ 4) $-F\left(\arcsin\frac{2\cos(x/2)}{\sqrt{3}};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+C.$

4.47. 1) $-\cos x\,\mathrm{Si}(x)+\frac{1}{2}\mathrm{Si}(2x)+C.$ 2) $x\,\mathrm{li}(x)-\mathrm{li}(x^2)+C.$

3) $x\Phi_0(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}+C.$ 4) $\frac{x^2}{2}\mathrm{Si}(x)+\frac{x\cos x-\sin x}{2}+C.$

5) $x\,\mathrm{Si}(ax)\,\mathrm{Si}(bx)+\frac{1}{a}\cos ax\,\mathrm{Si}(bx)+\frac{1}{b}\cos bx\,\mathrm{Si}(ax)-\frac{1}{2a}(\mathrm{Si}((a+b)x)+$ $+\mathrm{Si}((b-a)x))-\frac{1}{2b}(\mathrm{Si}((a+b)x)+\mathrm{Si}((a-b)x))+C.$ 6) $\frac{x^2-1}{2}\Phi_0(x)+$ $+\frac{x}{2\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}+C.$ 7) $\sqrt{2\pi}\ln|\Phi_0(x)|+C.$ 8) $\sqrt{\pi/2}\,\Phi_0^2(x)+C.$

9) $e^{x^2/2}\Phi_0(x)-x/\sqrt{2\pi}+C.$ 10) $-e^{-x^2/2}\Phi_0(x)+\frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_0(\sqrt{2}\,x)+C.$

11) $x\Phi_0^2(x)+\sqrt{2/\pi}\,e^{-x^2/2}\Phi_0(x)-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Phi_0(\sqrt{2}\,x)+C.$

12) $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\mathrm{li}(e^{-x^2})-\frac{1}{x}e^{-x^2/2}\Phi_0(x)-\sqrt{\pi/2}\,\Phi_0^2(x)+C.$

13) $(\ln|x|-1)\left(x\Phi_0(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\mathrm{li}(e^{-x^2/2})+C.$

§ 5. Интегрирование разных функций

5.1. $\frac{x^3}{3}-2x^2+12x-36\ln|x+3|+C.$

5.2. $\frac{1}{4}\ln(2x^2-x+1)+\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{7}}+C.$

5.3. $x+\frac{25\ln|x+5|-49\ln|x+7|}{2}+C.$

5.4. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-3x+\frac{3}{x+1}+5\ln|x+1|+C.$

5.5. $\frac{x^3}{3}-4x+8\operatorname{arctg}(x/2)+C.$

5.6. $\frac{1}{12}\ln\frac{x^2-2x+4}{(x+2)^2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$

5.7. $\frac{1}{14}\ln\frac{(x+1)^2}{9x^2+6x+4}+\frac{2}{7\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{\sqrt{3}}+C.$

5.8. $\ln\frac{(x-3)^2}{x^2-5x+7}-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-5}{\sqrt{3}}+C.$

5.9. $\frac{3}{2}\ln(x^2+2)-2\ln|x-1|+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

5.10. $x+\frac{8}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|-\frac{1}{3(x-1)}+C.$

5.11. $\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\ln|x-2|+\frac{1}{8}\ln(2x^2-x+2)+\frac{\sqrt{15}}{12}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{15}}+C.$

5.12. $\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2-2x+1}{2x^2-2x+1}-3\operatorname{arctg}(2x-1)+C.$

5.13. $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C.$

5.14. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C.$

5.15. $\frac{35}{4}\ln\left|\frac{x+7}{x+5}\right|-\frac{37x+210}{2(x^2+12x+35)}+C.$

5.16. $\frac{1}{24}\ln\left|\frac{x^3}{x^3+8}\right|+C.$

5.17. $\frac{1}{3(1-x)}+\frac{1}{3}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-2x+1}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

5.18. $\frac{1}{(1-x)}+\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5)+\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$

5.19. $x+\frac{2x}{x^2+4}-3\operatorname{arctg}(x/2)+C.$

5.20. $\frac{1}{18}\ln(9x^2+1)+\ln(x^2+4)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x/2)+C.$

5.21. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{\sqrt{3}\,x}+C.$

5.22. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2+3x+2}{\sqrt{3}\,x}+C.$

5.23. $\frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}+\operatorname{arctg}x+C.$

5.24. $\ln(1+x^2+x^4)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{\sqrt{3}\,x}+C.$

5.25. $\frac{5}{3}x^3-3\ln|x^5+3x^2-1|+C.$

5.26. $\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+2x+1}{x^2+x+1}+\frac{5\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

5.27. $\frac{1}{21}(8\ln|x^3+8|-\ln|x^3+1|)+C.$

5.28. $\frac{4x^3+6x^2+8x+3}{6(x^2+x+1)^2}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

5.29. $\frac{1}{49}\ln|x^7/(x^7+7)|+C.$

5.30. $\frac{1}{32x}-\frac{1}{48x^3}-\frac{x}{128(x^2+4)}+\frac{5}{256}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$

5.31. $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}\,x+1}{x^2-\sqrt{3}\,x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{\sqrt{3}\,x}+C.$

5.32. $\frac{1}{32}\left(\frac{7x^5-11x}{(x^4-1)^2}+\frac{21}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{21}{2}\operatorname{arctg}x\right)+C.$

5.33. $\frac{1}{18}\left(\frac{1}{3+x^6}-\frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{3}{x^6}\right)\right)+C.$

5.34. $\frac{1}{8}\left(\frac{x^4}{x^8+1}+\operatorname{arctg} x^4\right)+C.$

5.35. $-\frac{1}{10}\left(\frac{x^5+2}{x^{10}+2x^5+2}+\operatorname{arctg}(x^5+1)\right)+C.$

5.36. $6\sqrt[6]{x}-3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-6\ln\left(1+\sqrt[6]{x}\right)+C.$

5.37. $\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3}-\ln\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)\right)+C.$

5.38. $6\sqrt[6]{x}-12\operatorname{arctg}\left(\sqrt[6]{x}/2\right)+C.$

5.39. $\frac{1}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3x}}{1-x}+C.$

5.40. $6\sqrt[6]{x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$

5.41. $\ln\frac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x+2+\sqrt{x+1}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{3}}+C.$

5.42. $\ln(1+x)-3\ln\left(1+\sqrt[3]{1+x}\right)-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{1+x}+C.$

5.43. $\left(1+\sqrt[4]{2x-1}\right)^2+2\ln\left|1-\sqrt[4]{2x-1}\right|+C.$

5.44. $(\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x}-\arcsin\sqrt{x}+C.$

5.45. $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin x+C.$

5.46. $\ln\left|\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)/x\right|+C.$

5.47. $\sqrt{x^2-1}/x+C.$

5.48. $-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}+\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}\right)+C.$

5.49. $\frac{1}{5}(x^2-1)^{5/2}+\frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2}+C.$

5.50. $\left(\frac{x^5}{6}-\frac{x^3}{6}-x\right)\sqrt{4-x^2}+4\arcsin(x/2)+C.$

5.51. $\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{3+2x-x^2}}{|x-1|}+C.$

5.52. $\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{(x-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{|x-1|}\right)+C.$

5.53. $\frac{1}{8}\left(\frac{3x^2+6x+5}{(x+1)^4}\sqrt{x^2+2x}-3\arcsin\frac{1}{|x+1|}\right)+C.$

5.54. $\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{1-x}-2\arcsin\frac{1}{x-2}+C.$

5.55. $\frac{x^2-2}{3}\sqrt{1+x^2}+C.$ 5.56. $\frac{2x^2-1}{3x^3}\sqrt{1+x^2}+C.$

5.57. $\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}\,x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}\,x}\right|+C.$

5.58. $\frac{2x^2+x+7}{6}\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C.$

5.59. $\frac{2x-1}{4}\sqrt{4x^2-4x+3}+\frac{1}{2}\ln\left(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}\right)+C.$

5.60. $\frac{x+2}{2}\sqrt{1-4x-x^2}+\frac{5}{2}\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C.$

5.61. $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+C.$

5.62. $(4x-14)/(9\sqrt{7x-x^2-10})+C.$

5.63. $$\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{4x^2+4x+3}}{\sqrt{5}}+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{35}}\ln\frac{\sqrt{7(4x^2+4x+3)}-\sqrt{5}(2x+1)}{\sqrt{x^2+x+2}}+C.$$

5.64. $(3t^2-1)/(6t^3)+C,\quad t=\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)/x.$

5.65. $\frac{3}{2+4t}+2\ln t-\frac{3}{2}\ln(1+2t)+C,\quad t=x+\sqrt{x^2+x+1}.$

5.66. $$\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{36}+\frac{7x}{144}-\frac{37}{288}\right)\sqrt{x^2+x+1}-\frac{(3x+2)x^3}{18}+$$
$$+\frac{1}{64}\ln\left(1+2\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)\right)+C.$$

5.67. $\frac{1}{12}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{12}+C.$

5.68. $\frac{1}{4}\ln\frac{t^2-2t+1}{t^2+t+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C,\quad t=\sqrt[3]{x^2+1}.$

5.69. $\frac{1}{8}(1+x^3)^{8/3}-\frac{1}{5}(1+x^3)^{5/3}+C.$

5.70. $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{|t-1|}-t+C,\quad t=\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x}.$

5.71. $-\frac{t}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{10}+C,\quad t=\sqrt{1-x^{-4}}.$

5.72. $\ln\left(\left(1+x^2+\sqrt{1+3x^2+x^4}\right)/|x|\right)+C.$

5.73. $\frac{1}{4}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^4}}{x^2}-\frac{\sqrt{1-x^4}}{4x^4}+C.$ 5.74. $2\sqrt{(x-2)/(x-1)}+C.$

5.75. $\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{t^2-2t+1}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C,\quad t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$

5.76. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+x^4}+\sqrt{2}\,x}{|x^2-1|}+C.$

5.77. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{x^4+1}-\sqrt{2}\,x}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{2}\,x}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x^4+1}{2x^2}}+C.$

5.78. $\arcsin\left((x^2+1)/(8|x|)\right)+C.$

5.79. $\frac{1}{18}\ln\frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1}-\frac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C,\quad t=\frac{\sqrt[3]{3+4x^3}}{x}.$

5.80. $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+2x^4}+x}{\sqrt[4]{1+2x^4}-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+2x^4}}{x}+C.$

5.81. $\frac{\sin 3x}{6}-\frac{\sin 7x}{14}+C.$

5.82. $\frac{1}{4}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 6x}{6}\right)+C.$

5.83. $\frac{1}{4}\left(\frac{\operatorname{ch} 6x}{6}-\frac{\operatorname{ch} 4x}{4}-\frac{\operatorname{ch} 2x}{2}\right)+C.$

5.84. $\operatorname{tg} x+\frac{1}{\cos x}+C=2(1-\operatorname{tg}(x/2))^{-1}+C_1=\operatorname{tg}((2x+\pi)/4)+C.$

5.85. $\ln(1+\sin x)+C.$

5.86. $x-\operatorname{tg} x+\frac{1}{\cos x}+C.$

5.87. $\frac{1}{4}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 4x}{8}+\frac{\sin 6x}{6}-\frac{\sin 8x}{16}\right)+C.$

5.88. $\frac{1}{4}\left(x-\frac{\sin 12x}{12}-\frac{\sin^3 6x}{9}\right)+C.$

5.89. $\frac{1}{6}\sin^6 x-\frac{1}{8}\sin^8 x+C.$ 5.90. $\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+C.$

5.91. $\frac{1}{128}\left(3x-\operatorname{sh} 4x+\frac{\operatorname{sh} 8x}{8}\right)+C.$

5.92. $\frac{\operatorname{ch}^7 x}{7}-\frac{\operatorname{ch}^5 x}{5}+C.$ 5.93. $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{3\sin^3 x}+C.$

5.94. $\frac{\sin^3 x}{3}-2\sin x-\frac{1}{\sin x}+C.$ 5.95. $\frac{3x}{2}+\frac{\operatorname{sh} 2x}{4}-\operatorname{cth} x+C.$

5.96. $-\frac{1}{\operatorname{sh} x}-\frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\operatorname{sh} x+C.$

5.97. $(\operatorname{tg}^3 x)/3+C.$ 5.98. $-x-\operatorname{ctg} x+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x+C.$

5.99. $\ln|\cos x|+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+\frac{1}{6}\operatorname{tg}^6 x+C.$

5.100. $x-\operatorname{cth} x-\frac{1}{3}\operatorname{cth}^3 x+C.$

5.101. $\frac{1}{2}\ln((\sin^2 x)/|4\sin^2 x-1|)+C.$

5.102. $\frac{5}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{2x+\pi}{4}\right|-\frac{3}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x}+C.$

5.103. $\frac{1}{5\operatorname{ch}^5 x}-\frac{4}{3\operatorname{ch}^3 x}+C.$ 5.104. $4\ln|\operatorname{sh} x|-\frac{1}{2}\operatorname{cth}^2 x+C.$

5.105. $x-\ln|5\cos x+2\sin x|+C.$

5.106. $\frac{1}{7}(4x+3\ln|4\operatorname{ch} x-3\operatorname{sh} x|)+C.$

5.107. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1+\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}+C,\quad |x|<\frac{\pi}{2}.$

5.108. $\frac{1}{8}\left(2x+\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} 2x}{3}\right)+C,\quad |x|<\frac{\pi}{4}.$

5.109. $\ln|\operatorname{tg}(x/2)|-2\ln\left|\frac{3\sin x+1}{\sin x}\right|+C.$

5.110. $\ln|\operatorname{tg}(x/2)|+\sqrt{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)+\sqrt{3}}{\operatorname{tg}(x/2)-\sqrt{3}}\right|+C.$

5.111. $x+\cos x+2\ln(1+\sin x)+\operatorname{tg}((2x-\pi)/4)+C.$

5.112. $\frac{2}{3}\ln|\sin^3 x+\cos^3 x|+C.$

5.113. $\frac{7}{5}\operatorname{arctg}\operatorname{sh}x-\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1+2\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}\right|+$
$+\frac{2}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\operatorname{th}(x/2)-2+\sqrt{5}}{\operatorname{th}(x/2)-2-\sqrt{5}}\right|+C.$ **5.114.** $\ln(2+\operatorname{sh}^2x)+C.$

5.115. $\frac{1}{2}(\ln|\sin x+\cos x|-\sin x\cos x-\cos^2x)+C.$

5.116. $\frac{1}{25}\left(4x-3\ln|\sin x+2\cos x|+\frac{10}{2+\operatorname{tg}x}\right)+C.$

5.117. $\frac{1}{32}\ln(1+4\operatorname{ctg}^2x)-\frac{1}{8}\operatorname{ctg}^2x+C.$

5.118. $\frac{3\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}-\frac{\operatorname{tg}x}{4\operatorname{tg}^2x+8}+C,\quad |x|<\frac{\pi}{2}.$

5.119. $-\frac{4}{3+3\operatorname{tg}^3x}+C.$ **5.120.** $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(x/2)+1}{2}+C,\quad |x|<\pi.$

5.121. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3\sin x-5\cos x}{\sin x-\cos x}\right|+C.$

5.122. $F(x)=\begin{cases}\sin x+\cos x+C, & \text{если } x\in(0;\ \pi/4],\\ 2\sqrt{2}-(\sin x+\cos x)+C, & \text{если } x\in(\pi/4;\ \pi).\end{cases}$

5.123. $\sqrt{2}\ln\operatorname{ctg}((\pi-x)/4)+C.$

5.124. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+e^{2x}}+\ln\left(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}}\right)\right)+C.$

5.125. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}\operatorname{ch}x+\sqrt{\operatorname{ch}2x}\right)+C.$

5.126. $-\frac{4\sqrt{2}}{5}\sqrt{\operatorname{ctg}^5x}+C.$ **5.127.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin^2x}}{|\cos x|}+C.$

5.128. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln\left(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x}\right)+C.$

5.129. $\frac{1}{2}(\sin x^2-x^2\cos x^2)+C.$ **5.130.** $\ln|\sin x|-x\operatorname{ctg}x-\frac{x^2}{2}+C.$

5.131. $x\operatorname{tg}(x/2)+\ln(1+\cos x)+C.$ **5.132.** $\frac{x}{1+\cos x}-\operatorname{tg}(x/2)+C.$

5.133. $\frac{1}{6}\left(4\ln|\sin x|-\frac{2x\cos x}{\sin^3x}-\frac{4x\cos x}{\sin x}-\frac{1}{\sin^2x}\right)+C.$

5.134. $\frac{1}{3}\left(\arcsin\frac{\sin x}{2}-\frac{x\cos x}{\sqrt{4-\sin^2x}}\right)+C.$

5.135. $e^x-\ln(1+e^x)+C.$ **5.136.** $x+2/(1+e^x)+C.$

5.137. $-\left(\frac{x+1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln^2 2}\right)2^{-x}+C.$

5.138. $\frac{xe^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)+C.$ **5.139.** $e^x/(x+1)+C.$

5.140. $2(x\sqrt{x}-3x+6\sqrt{x}-6)e^{\sqrt{x}}+C.$

5.141. $\frac{1}{3}\sqrt{(e^x+e^{2x})^3}-\frac{1}{8}(1+2e^x)\sqrt{e^x+e^{2x}}+$
$+\frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{1+e^x}+\sqrt{e^x}\right)+C.$ **5.142.** $e^{e^x}+C.$

5.143. $e^x\operatorname{tg}(x/2)+C.$ **5.144.** $\frac{1}{8}(\cos 2x-\sin 2x-2)e^{-2x}+C.$

5.145. $\arcsin \ln x + C$. **5.146.** $\frac{1}{27} x^3 (9 \ln^2 x - 6 \ln x + 2) + C$.

5.147. $-x^{-1} (\ln^2 x + 2 \ln x + 2) + C$.

5.148. $\frac{x^4 - 81}{4} \ln \left| \frac{x+3}{x-3} \right| + \frac{x^3}{2} + \frac{27x}{2} + C$.

5.149. $\frac{1}{x} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| - \frac{1}{2} \ln \frac{|x^2 - 4|}{x^2} + C$.

5.150. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| - \frac{\ln |x|}{x+2} + C$. **5.151.** $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{\ln |x|}{2+2x^2} + C$.

5.152. $2 \operatorname{arctg} x - (\ln (1 + x^2))/x + C$.

5.153. $\frac{1}{4} \ln \frac{1 - x + x^2}{1 + x^2} - \frac{\ln (1 - x + x^2)}{2(1 + x^2)} - \operatorname{arctg} x +$
$+ \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C$.

5.154. $2 \sqrt{x-1} (\ln x - 2) + 4 \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} + C$.

5.155. $2 \sqrt{1-x} (4 - \ln (1 - x^2)) - 2\sqrt{2} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{2} - \sqrt{1-x}} + C$.

5.156. $(\ln |x|)/\sqrt{x^2 - 1} + \arcsin (1/x) + C$.

5.157. $\operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} - (\ln |x + \sqrt{x^2 - 1}|)/x + C$.

5.158. $-x + \sqrt{x^2+1} \ln \left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$.

5.159. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \ln \left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) + C$.

5.160. $\left(\frac{1}{2} - \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}}\right) \sqrt{1-x^2} - \ln \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} + \frac{1}{2} \arcsin x + C$.

5.161. $x^x + C$. **5.162.** $(\ln x) \sin \ln x + \cos \ln x + C$.

5.163. $\sqrt{1 + \cos^2 x} - \cos x \ln \left(\cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x}\right) + C$.

5.164. $\frac{5}{6} (\operatorname{arctg} x)^{6/5} + C$. **5.165.** $\frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} + \frac{(x^2+1)^2}{4} \operatorname{arcctg} x + C$.

5.166. $\ln \frac{x^2}{1 + 4x^2} - \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x} + C$.

5.167. $2x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x - \ln (1 + x^2) + C$.

5.168. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x - x \left(1 - \frac{x^2}{3}\right) \operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{6} + \frac{2}{3} \ln (1 + x^2) + C$.

5.169. $\frac{(x^2 - 1) \operatorname{arcctg} x - x}{4(x^2 + 1)} + C$.

5.170. $\frac{x+3}{4} \sqrt{2x - x^2} + \frac{2x^2 - 3}{4} \arcsin (x - 1) + C$.

5.171. $\frac{1}{3} x^3 \arccos 2x - \frac{1}{36} (1 + 2x^2) \sqrt{1 - 4x^2} + C$.

5.172. $\ln ((1 + \sqrt{1 - x^2})/|x|) - (\arccos x)/x + C$.

5.173. $x \arcsin^3 (x/3) + 3 \sqrt{9 - x^2} (\arcsin^2 (x/3) - 2) - 6x \arcsin (x/3) + C$.

5.174. $\frac{x^4}{4} \arccos (1/x) - \frac{x^2 + 2}{12} \sqrt{x^2 - 1} + C$.

5.175. $\frac{2(x^2 + 1) \operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x} + C$.

5.176. $x \operatorname{arctg}(1-\sqrt{x})+\sqrt{x}+\ln(x-2\sqrt{x}+2)+C$.

5.177. $(x-2)\operatorname{arcctg}\sqrt{1-x}-\sqrt{1-x}+C$.

5.178. $2\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}-\ln(1+x)+C$.

5.179. $\dfrac{\arcsin^2 x-x^2}{4}+\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{2}\arcsin x+C$.

5.180. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x+\dfrac{1}{2}\ln(1-x^2)+C$.

5.181. $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}+C$.

5.182. $\dfrac{1}{2}\arcsin^2 x-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\ln|x|+C$.

5.183. $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\arcsin\sqrt{1-x}-\dfrac{2}{9}(x+2)\sqrt{1-x}+C$.

5.184. $2\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+C$.

5.185. $\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{1-x}-\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}+C$.

5.186. $-\dfrac{1}{9}\left(x^3+6x+3(x^2+2)\sqrt{1-x^2}\arccos x\right)+C$.

5.187. $x\arccos\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}+\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$.

5.188. $\dfrac{\arccos(x\sqrt{x})}{3(1-x^3)}+\dfrac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{1-x^3}}+C$.

5.189. $(\sin x)\operatorname{arctg}\sin x-\dfrac{1}{2}\ln(1+\sin^2 x)+C$.

5.190. $(\operatorname{tg} x)\arcsin\operatorname{tg} x+\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}+C$.

5.191. $e^x\arcsin e^x+\sqrt{1-e^{2x}}+C$.

5.192. $\operatorname{ch} x\arcsin e^x+\dfrac{\sqrt{1-e^{2x}}-x}{2}+\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{1-e^{2x}}\right)+C$.

5.193. $\operatorname{ch} x\operatorname{arctg}\operatorname{sh} x-x+C$.

5.194. $(x+1)e^{\operatorname{arctg} x}/\left(2\sqrt{1+x^2}\right)+C$.

5.195. $x-\ln(1+e^x)-\dfrac{2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x}}-(\operatorname{arctg}\sqrt{e^x})^2+C$.

5.196. $x-\operatorname{arctg} x+\left(\dfrac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\dfrac{x}{2}\right)(\ln(1+x^2)-1)+C$.

5.197. $\dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C$, если $b^2<4ac$; $-\dfrac{2}{2ax+b}+C$, если $b^2=4ac$; $\dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\dfrac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+C$, если $b^2>4ac$.

5.198. $\dfrac{1}{a+b^2}\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{(x+b)^2}{x^2+a}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{a}}\right)+C$, если $a>0$; $\dfrac{\ln|x+b|}{a+b^2}+\dfrac{1}{2\sqrt{-a}}\left(\dfrac{\ln|x-\sqrt{-a}|}{\sqrt{-a}+b}+\dfrac{\ln|x+\sqrt{-a}|}{\sqrt{-a}-b}\right)+C$, если $a<0$, $b^2\neq -a$; $\dfrac{1}{4b^2}\ln\left|\dfrac{x-b}{x+b}\right|+\dfrac{1}{2b}\dfrac{1}{x+b}+C$, если $a<0$, $b^2=-a$.

5.199. $\frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|-\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)}+C.$

5.200. $\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}-\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)+C,$ если $a^2\neq b^2$; $\frac{1}{2b^2}\left(\frac{x}{x^2+b^2}+\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}\right)+C,$ если $a^2=b^2$.

5.201. $x+(a-b)\left(n\ln|x+b|-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}C_n^{k-1}\left(\frac{a-b}{x+b}\right)^k\right)+C.$

5.202. $\frac{1}{2na^{2n-1}}\left(\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\cos\frac{k\pi}{n}\ln\left(x^2-2ax\cos\frac{k\pi}{n}+a^2\right)-\right.\right.$ $\left.\left.-2\sin\frac{k\pi}{n}\operatorname{arctg}\frac{x-a\cos(k\pi/n)}{a\sin(k\pi/n)}\right)\right)+C.$

5.203. $x+2\frac{c-d}{a}\left(\sqrt{ax+b}-d\ln|\sqrt{ax+b}+d|\right)+C.$

5.204. $\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(\sqrt{a}\,x+\sqrt{ax^2+b}\right)+C,$ если $a>0$; $\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\sqrt{-\frac{a}{b}}\,x+C,$ если $a<0$.

5.205. $\arcsin\frac{2x-a-b}{|a-b|}+C.$

5.206. $\frac{2x+a+b}{4}\sqrt{x^2+(a+b)x+ab}-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\ln\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}\right)+C.$

5.207. $\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{|x|}{\sqrt{a}+\sqrt{x^2+a}}+C,$ если $a>0$; $\frac{\operatorname{sign}(-x)}{x}+C,$ если $a=0$; $\frac{1}{\sqrt{-a}}\arccos\frac{\sqrt{-a}}{|x|}+C,$ если $a<0$.

5.208. $\frac{1}{|a|\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{|\sqrt{b^2-a^2}\,x+|a|\sqrt{b^2-x^2}|}+C,$ если $a^2<b^2$; $-\frac{x}{b^2\sqrt{b^2-x^2}}+C,$ если $a^2=b^2$; $\frac{1}{|a|\sqrt{a^2-b^2}}\arccos\frac{\sqrt{a^2-b^2}\,x}{|b|\sqrt{a^2-x^2}}+C,$ если $a^2>b^2$.

5.209. $\frac{1}{a\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{b^2-a^2}\,x}{a\sqrt{x^2+b^2}}+C,$ если $a^2<b^2$; $\frac{x}{b^2\sqrt{x^2+b^2}}+C,$ если $a^2=b^2$; $\frac{1}{2a\sqrt{a^2-b^2}}\ln\left|\frac{a\sqrt{x^2+b^2}+\sqrt{a^2-b^2}\,x}{a\sqrt{x^2+b^2}-\sqrt{a^2-b^2}\,x}\right|+C,$ если $a^2>b^2$.

5.210. $\frac{1}{n\sqrt{a}}\ln\frac{\sqrt{x^n+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^n+a}+\sqrt{a}}+C,$ если $a>0$; $\frac{2}{n\sqrt{-a}}\arccos\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{x^n}}+C,$ если $a<0$.

5.211. $\frac{n}{b-a}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}+C,$ если $a\neq b$; $\frac{1}{b-x}+C,$ если $a=b$.

5.212. $\frac{x}{4}+\frac{\sin 2ax}{8a}+\frac{\sin 2bx}{8b}+\frac{\sin 2(a-b)x}{16(a-b)}+\frac{\sin 2(a+b)x}{16(a+b)}+C$, если $a^2\neq b^2$; $\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2bx}{4b}+\frac{\sin 4bx}{32b}+C$, если $a^2=b^2$.

5.213. $\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|+C$, если $a\neq b+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\operatorname{ctg}(x+b)+C$, если $a=b+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

5.214. $\frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|+C$, если $a\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C$, если $a=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+C$, если $a=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

5.215. $\frac{2}{a^2-1}\operatorname{arctg}\left(\frac{a-1}{a+1}\operatorname{tg}(x/2)\right)+C$, если $a\neq\pm 1$; $\frac{1}{2}\operatorname{tg}(x/2)+C$, если $a=1$; $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}(x/2)+C$, если $a=-1$; $|x|<\pi$.

5.216. $\frac{x}{2a}+\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{a-1}{a+1}\operatorname{tg}(x/2)\right)+C$, $|x|<\pi$, если $a\neq 0$, $a\neq -1$; $\sin x+C$, если $a=0$; $-x/2+C$, если $a=-1$.

5.217. $\operatorname{ctg} a\ln\left|\frac{\cos x}{\cos(x+a)}\right|-x+C$, если $a\neq\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\operatorname{tg} x-x+C$, если $a=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

5.218. $\frac{x}{a-1}-\frac{1}{(a-1)\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{a}}+C$, если $a>0$, $a\neq 1$; $\frac{x}{a-1}-\frac{1}{2(a-1)\sqrt{-a}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x-\sqrt{-a}}{\operatorname{tg} x+\sqrt{-a}}\right|+C$, если $a<0$; $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$, если $a=1$; $-\operatorname{ctg} x-x+C$, если $a=0$.

5.219. $\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{b\operatorname{tg} x}{a}+C$, $|x|<\frac{\pi}{2}$.

5.220. $\frac{1}{a^2+b^2}\,\frac{a\sin x-b\cos x}{a\cos x+b\sin x}+C$.

5.221. $\frac{1}{a^2+1}\left(\ln|a\cos x+\sin x|+x\frac{a\operatorname{tg} x-1}{a+\operatorname{tg} x}\right)+C$.

5.222. $\frac{\operatorname{tg} x}{a(a+(ax+b)\operatorname{tg} x)}+C$.

5.223. $\frac{x\sin x+\cos x}{b((ax-b)\sin x+(a+bx)\cos x)}+C$, если $b\neq 0$; $\frac{\sin x-x\cos x}{a^2(x\sin x+\cos x)}+C$, если $b=0$.

5.224. $\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}e^x\right)+C$, если $ab>0$; $\frac{1}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{b+\sqrt{-ab}\,e^x}{b-\sqrt{-ab}\,e^x}\right|+C$, если $ab<0$.

5.225. $\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{\sqrt{a+be^x}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+be^x}+\sqrt{a}}+C$, если $a>0$;

$\frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a+be^x}}{\sqrt{-a}} + C$, если $a < 0$.

5.226. $\frac{\operatorname{ch}(a+b)x}{2(a+b)} + \frac{\operatorname{ch}(a-b)}{2(a-b)} + C$, если $a^2 \neq b^2$; $\frac{\operatorname{ch} 2bx}{4b} + C$, если $a = b$: $-\frac{\operatorname{ch} 2bx}{4b} + C$, если $a = -b$.

5.227. $\frac{2}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}} \operatorname{arctg} \frac{(b-a)\operatorname{th}(x/2)+c}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}} + C$, если $b^2 > a^2 + c^2$; $\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2-b^2}} \ln \frac{(a-b)\operatorname{th}(x/2)+\sqrt{a^2+c^2-b^2}-c}{(a-b)\operatorname{th}(x/2)-\sqrt{a^2+c^2-b^2}-c} + C$, если $b^2<a^2+c^2$, $a \neq b$; $\frac{1}{c} \ln|b + c\operatorname{th}(x/2)| + C$, если $b^2 < a^2 + c^2$, $a = b$: $\frac{2}{-c+(a-b)\operatorname{th}(x/2)} + C$, если $b^2 = a^2 + c^2$, $a \neq b$; $\frac{1}{b} \operatorname{th} \frac{x}{2} + C$, если $a = b$, $c = 0$.

5.228. $\frac{a \operatorname{ch} ax \cos bx + b \operatorname{sh} ax \sin bx}{a^2+b^2} + C$.

5.229. $x \ln|x^2+a| - 2x + 2\sqrt{a} \operatorname{arctg}(x/\sqrt{a}) + C$, если $a > 0$; $x \ln|x^2+a| - 2x + \sqrt{-a} \ln\left|\frac{x+\sqrt{-a}}{x-\sqrt{-a}}\right| + C$, если $a \leqslant 0$.

5.230. $-\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+a})}{x} + \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a}}{|x|} + C$, если $a > 0$; $-\frac{\ln|x+\sqrt{x^2+a}|}{x} + \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{-a}} + C$, если $a < 0$; $-\frac{1+\ln(2x)}{x} + C$, если $a = 0$.

5.231. $2(\ln x - 2)\sqrt{x+a} + 2\sqrt{a} \ln \frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}} + C$, если $a \geqslant 0$; $2(\ln x - 2)\sqrt{x+a} + 4\sqrt{-a} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{-a}} + C$, если $a < 0$.

5.232. $x^a \ln^b x + C$.

5.233. $-\frac{\arcsin x}{2a(1+ax^2)} + \frac{1}{2a\sqrt{a+1}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a+1}\,x}{\sqrt{1-x^2}} + C$, если $a > -1$, $a \neq 0$; $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right) \arcsin x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C$, если $a = 0$; $-\frac{\arcsin x}{2a(1+ax^2)} + \frac{1}{4a\sqrt{-a-1}} \ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{-a-1}\,x}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{-a-1}\,x}\right| + C$, если $a < -1$; $\frac{\arcsin x}{2(1-x^2)} - \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}} + C$, если $a = -1$.

5.234. $\frac{x \operatorname{arctg} x}{b\sqrt{ax^2+b}} - \frac{1}{b\sqrt{a-b}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ax^2+b}{a-b}} + C$, если $a > b$; $\frac{x \operatorname{arctg} x + 1}{b\sqrt{b}\sqrt{x^2+1}} + C$, если $a = b$; $\frac{x \operatorname{arctg} x}{b\sqrt{ax^2+b}} - \frac{1}{2b\sqrt{b-a}} \ln \frac{|\sqrt{ax^2+b}-\sqrt{b-a}|}{\sqrt{ax^2+b}+\sqrt{b-a}} + C$, если $a < b$.

Глава II. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 6. Определенный интеграл

6.1. $\sigma_n = 9/2$. **6.2.** 1) $16\frac{1}{4} + \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}$. 2) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$. 3) $\frac{10230 \cdot 2^{10/n}}{n(2^{10/n}-1)}$. **6.3.** $\frac{gT^2}{2} + v_0 T$. **6.4.** 1) $e-1$. 2) 1. 3) $\sin x$. 4) $\frac{1}{2}$. **6.5.** 15/4. **6.6.** $\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$. **6.7.** $\ln(b/a)$. **6.8.** 1) 0, если $|\alpha| < 1$ и 2) $\pi \ln \alpha^2$, если $|\alpha| > 1$. **6.17.** $\frac{b-a}{2}(f(a) - f(b))$. **6.36.** 1) Второй больше первого. 2) Первый больше второго. 3) Первый больше второго. 4) Второй больше первого. **6.40.** Нет. **6.41.** Нет. **6.54.** 1) 0. 2) $-\sin a^2$. 3) $\sin b^2$. 4) $2x\sqrt{1+x^4}$. 5) $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$. 6) $-\sin x \cos(\pi \cos^3 x) - \cos x \cos(\pi \sin^3 x)$. **6.55.** 15/4. **6.56.** 0. **6.57.** $\frac{3}{4}(2\sqrt[3]{2}-1)$. **6.58.** $\frac{3}{2}(2\sqrt[3]{2}-1)$.
6.59. 7/3. **6.60.** $-10/3$. **6.61.** 19/15. **6.62.** 2. **6.63.** $\pi/6$. **6.64.** $\pi/3$. **6.65.** 1. **6.66.** 45/4. **6.67.** $e(e-1)$. **6.68.** $3/\ln 2$. **6.69.** $\ln 2$. **6.70.** $(\ln 3)/2$. **6.71.** $\pi/12$. **6.72.** $\ln 2$. **6.73.** $\ln 1{,}5$. **6.74.** π. **6.75.** π. **6.76.** $\frac{\pi}{6} + \frac{8\sqrt{3}}{27}$. **6.77.** $\frac{1}{3}(2 - 3\,\mathrm{ch}\,2 + \mathrm{ch}^3 2)$. **6.78.** $\frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\,(4/7)$. **6.79.** $11/2 + 7\ln 2$. **6.80.** $2\ln(4/3) - 1/2$. **6.81.** $\frac{1}{6}\ln(2/5)$. **6.82.** $2 - \ln 5$. **6.83.** $\pi/4$. **6.84.** $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$. **6.85.** $\pi/(2\sqrt{2})$. **6.86.** $4 - 2\ln 3$. **6.87.** $7 + 2\ln 2$. **6.88.** $2 - \ln 2$. **6.89.** $\frac{1}{2}(e - e^{1/4})$. **6.90.** $\sin 1$. **6.91.** $\pi/4$. **6.92.** $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. **6.93.** $\mathrm{arctg}\, e - \pi/4$. **6.94.** $5\sqrt{2}/12$. **6.95.** $\frac{1}{12}\,\mathrm{sh}\,2 + 1/6$. **6.96.** $\ln 2$. **6.97.** $\pi/(3\sqrt{3})$. **6.98.** $1 - 2/e$. **6.99.** $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36} + \frac{1}{2}\ln(3/2)$. **6.100.** $3\ln 3 - 2$. **6.101.** $2\ln 2 - 3/4$. **6.102.** $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$. **6.103.** $\pi^3 - 6\pi$. **6.104.** $(e^{\pi} - 2)/5$. **6.105.** $\frac{e(\sin 1 - \cos 1)}{2}$. **6.106.** 1. **6.109.** 1) 5/6. 2) $t/2$. **6.110.** $\frac{1}{3} - \frac{t}{2}$, если $t < 0$; $\frac{1}{3} - \frac{t}{2} + \frac{t^3}{3}$, если $0 \leqslant t \leqslant 1$; $\frac{t}{2} - \frac{1}{3}$, если $t > 1$. **6.115.** 2/3. **6.119.** 1) $2/\pi$. 2) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$. 3) e^{-1}. 4) 2. 5) 16. 6) $\pi/6$. **6.120.** $\int_a^b f(x)\,dx$. **6.121.** 1) $\frac{5}{6}\pi$. 2) $\pi/\sqrt{3}$. 3) $x + 1/2$. 4) $1/\ln 2$. **6.122.** 1) 1. 2) $\pi^2/4$. 3) 0. 4) 1. **6.125.** Да. **6.127.** 0. **6.128.** 0. **6.129.** $\pi/2$. **6.130.** 0.

6.131. 0. **6.132.** $6\sin(\pi/9)$. **6.133.** $2\sqrt{3}$. **6.134.** $(e^4-1)/2$. **6.135.** $\pi/16$. **6.136.** $(4-\pi)/2$. **6.137.** $\frac{1}{2}\ln(e/2)$. **6.138.** π. **6.139.** $1/4$. **6.140.** 4π. **6.141.** 1. **6.142.** $\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}+1$. **6.143.** $2(\sqrt{2}-1)$. **6.144.** $2\operatorname{arctg} e+\frac{1}{2}\ln((e^2+1)/2)$. **6.145.** $2\pi\sqrt{3}/9$. **6.146.** $(\operatorname{arctg}(1/\sqrt{2})-\operatorname{arctg}(1/\sqrt{6}))/\sqrt{2}$. **6.147.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$. **6.148.** $-\frac{468}{7}$. **6.149.** $\arcsin\frac{1}{3}-\frac{\pi}{6}$. **6.150.** $\frac{29}{270}$. **6.151.** $\frac{1}{6}$. **6.152.** $\frac{3}{8}\ln 2-\frac{225}{1024}$. **6.153.** $\frac{8}{3}\ln 2-7/9$. **6.154.** $\frac{n^{n+1}}{n+1}\ln n-\frac{n^{n+1}-1}{(n+1)^2}$. **6.155.** $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **6.156.** $8191/26$. **6.157.** $\pi/4$. **6.158.** $\frac{3}{5}(e^{\pi}-1)$. **6.159.** $2(1-e^{-1})$. **6.160.** $5e^3/27$. **6.161.** $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$. **6.162.** $\sqrt{3}/(8a^2)$. **6.163.** $\frac{\ln 3}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. **6.164.** $\frac{\pi}{8}\ln 2$. **6.165.** $\pi/\sqrt{a^2-b^2}$. **6.166.** $\pi/(2|\sin\alpha|)$. **6.167.** $\frac{3}{2}e^{5/2}$. **6.168.** $4n$. **6.181.** $f(x+\beta)-f(x+\alpha)$. **6.182.** $a^2(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))\operatorname{sign} a$. **6.184.** $\pi/2$, если $|\alpha|\leqslant 1$; и $\pi/(2\alpha^2)$, если $|\alpha|>1$. **6.185.** 2, если $|\alpha|\leqslant 1$, и $2/|\alpha|$, если $|\alpha|>1$.
6.187. $2\pi/\sqrt{1-\varepsilon^2}$. **6.188.** $\frac{1}{\sqrt{ab}}\ln\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}$. **6.189.** $\pi\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **6.190.** $2\sqrt{2}\,\pi$. **6.191.** $\operatorname{arctg}(32/27)-2\pi$. **6.192.** $\pi^2/4$. **6.193.** $200\sqrt{2}$. **6.194.** $4\pi/ab$. **6.196.** $\pi/\sqrt{ac-b^2}$. **6.202.** 2. **6.204.** 1) $\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^2}{3}-\frac{1}{2}\right)$. 2) $\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^2}{3}+\frac{1}{2}\right)$. **6.205.** 1) 0, если n — четное; π, если n — нечетное. 2) $(-1)^n\pi$. **6.207.** 1) $8/15$. 2) $3\pi/16$. 3) $5\pi/32$.

6.215. $(-1)^n\left(\frac{\pi}{4}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right)$. **6.216.** $\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{2n-k}}{(n-k+1)}+(-1)^{n+1}\ln 2\right)=\frac{(-1)^n}{2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}-\ln 2\right)$. **6.221.** A. **6.225.** 1) $|x|$. 2) $\arccos(\cos x)$. 3) $x[x]+\frac{[x]([x]+1)}{2}$. 4) $\frac{x^2}{2}[x]-\frac{[x]([x]+1)(2[x]+1)}{12}$. 5) $\frac{1}{\pi}\arccos x(\cos\pi x)$. **6.226.** $\frac{1}{2}(|x+l|-|x-l|)$. **6.227.** 1) -1. 2) $14-\ln(7!)$. 3) $30/\pi$. 4) $-\pi^2/4$. 5) $\ln(n!)$. 6) $-\operatorname{th}(\pi/2)$. **6.232.** $1(1+x)$.

§ 7. Вычисление площадей плоских фигур и длин кривых

7.1. 1) 2. 2) $\ln(a/b)$. 3) $1-e^{-a}$. 4) $a^2\operatorname{sh}(x_0/a)$. 5) $125/12$. 6) $1/6$. 7) $1+\pi^2/8$. 8) $\sqrt{2}-1$. 9) $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{8}$. **7.2.** 1) $a+(1-a)/\ln a$. 2) $\frac{a^2-1}{a}-\frac{(a-1)^2}{a\ln a}$. 3) $2a^2(\sqrt{3}-\pi/3)$. 4) $\pi/2$. 5) $1/3+\ln(\sqrt{3}/2)$. 6) 9.

7) $\ln 4 - 2e^{-1}$. 8) $\frac{1}{\pi} - \frac{1}{8}$. 9) $6\ln 2 - 2{,}5$. 10) $\frac{5}{3}\sqrt{2}$. **7.3.** 1) 36. 2) $a^4/12$. 3) 0,1. 4) 9/4. 5) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$. 6) $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$. 7) $(3\pi - 2)a^2/6$. 8) $5(\operatorname{arctg}(1/2) + \operatorname{arctg} 3) + \frac{15}{2}\ln 2 - 7$. 9) 4. 10) $1 - e^{-a^2}(1 + a^2)$. **7.4.** 1) $18e^{-2} - 2$. 2) $2\pi + 4/3$. 3) $\pi/6$. 4) $0{,}5(1 + e^{-\pi})e^{-\pi n}$. 5) $16/3 + 2\pi$. 6) 44/15. 7) $\frac{2\alpha}{1-\alpha^2} + \frac{a^{1+\alpha}}{\alpha+1} + \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$. 8) $(\alpha - 1)/(\alpha + 1)$. 9) $\pi\sqrt{ab}$. **7.5.** 1) 1/12. 2) $32\sqrt{6}/3$. 3) 16/3. 4) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$. 5) $\sqrt{2} - 1$. 6) $\frac{2}{\pi} + \frac{1}{2}$. 7) $(1 - \ln 2)/\ln 2$. 8) $(45\ln 3 - 24)/\ln 9$. **7.6.** 1) $(1 + \ln 3)/3$. 2) $20/9 - \ln 3$. 3) 37/48. 4) $(2\pi + \sqrt{3})/3$. 5) $6\pi - 6\arcsin(\sqrt{8}/3) - 4\sqrt{2}/9$. 6) $\log_4 e - 1/4$. 7) $\frac{2\alpha}{\alpha^2-1} + \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. 8) $12\ln 2 - 6\ln 3 + 1$. **7.7.** 8/5. **7.8.** 9/2. **7.9.** 1) 9/4. 2) 9/4. **7.10.** $k = p$. **7.12.** $-y_0 a \ln\frac{a + \sqrt{a^2 - y_0^2}}{y_0} + \frac{1}{2}y_0\sqrt{a^2 - y_0^2} + \frac{1}{2}a^2\arccos\frac{y_0}{a}$. **7.19.** 125/48. **7.20.** $16p^2/3$. **7.21.** 1) $4p^3/3$. 2) 12. 3) $a^2\arcsin\frac{x_0}{a} + \frac{x_0^3}{6p}$. 4) $\frac{4}{3}h\sqrt{\frac{2pqh}{p+q}}$. 5) $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2pq}{p+q}}\left(x_0 - \frac{y_0^2}{2(p+q)}\right)^{3/2}$. 6) $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2pq}{q-p}}\left(y_0 + \frac{x_0^2}{2(q-p)}\right)^{3/2}$. **7.22.** 1) $\frac{4}{\alpha+2}a^{\alpha+2}$. 2) 1/2. 3) $4a^2/3$. 4) $3\pi a^2/4$. 5) $\pi a^2/8$. 6) $(\pi - 2)a^2/2$. 7) 8/3. **7.23.** $\pi/4$. **7.25.** 1) πab. 2) $3\pi(a^2 - b^2)^2/(8ab)$. 3) $3\pi a^2/8$. 4) $\pi r^2 n(n+1)$. 5) $\pi r^2 n(n-1)$. 6) $3\pi a^2/2$. **7.26.** $3\pi a^2$. **7.27.** $a^2(4\pi^3 + 3\pi)/3$. **7.28.** $\pi a^2 k(k+2)$. **7.29.** 1) $a^5/60$. 2) $8a^5/15$. 3) 8. 4) 1/3. 5) $(4 - \pi)/4$. 6) $4a^2/3$. 7) $a^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\right)$. 8) $a^2\left(\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi - 4\ln(2 + \sqrt{3})\right)$. **7.30.** 1) $\frac{a^2}{24\pi^2}(\varphi_2^3 - \varphi_1^3)$. 2) $\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\varphi_1} - \frac{1}{\varphi_2}\right)$. 3) $\frac{R^2}{4k}(e^{2k\varphi_2} - e^{2k\varphi_1})$. **7.31.** $(n^3 - (n-1)^3)\pi a^2/3$. **7.32.** 1) $2\pi n a^2$. 2) $\frac{a^2}{2\pi n(n+1)(n+2)}$. 3) $\frac{R^2 e^{4\pi k n}(e^{4\pi k} - 1)^2}{4k}$. **7.33.** 1) $2\sqrt{3}\,a^2/3$. 2) $\pi a^2/4$. 3) $3\pi a^2/2$. 4) $\pi(a^2 + 2b^2)/2$. 5) $\pi a^2/8$. 6) $\pi a^2/2$. 7) $\pi a^2/4$. 8) $\pi a^2/4$. 9) $\frac{p^2}{2(1-e^2)^{3/2}}\left(\arccos\frac{e + \cos\varphi_0}{1 + e\cos\varphi_0} - \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\varphi_0}{1 + e\cos\varphi_0}\right)$. 10) $\frac{p^2}{2(e^2-1)^{3/2}} \times \left(\ln\frac{e + \cos\varphi_0 - \sqrt{e^2-1}\sin\varphi_0}{1 + e\cos\varphi_0} + \frac{e\sqrt{e^2-1}\sin\varphi_0}{1 + e\cos\varphi_0}\right)$. **7.34.** 1) $a^2(3\pi + 4)/12$. 2) $17\pi/4$. 3) $3a^2\sqrt{3}/4$. 4) $a^2\arcsin(b/a) - b\sqrt{a^2 - b^2}$. 5) $6a^2\operatorname{arctg}\sqrt{b/(a-b)} - 2(2b + 3a)\sqrt{b(a-b)}$. **7.35.** 1) $2a^2$. 2) $(3\sqrt{3} - \pi)/3$. 3) a^2. 4) $a^2(2\pi + 3\sqrt{3})/12$. 5) $a^2(2\pi + 3\sqrt{3} - 6)/3$.

7.36. 1) $a^2 t_0^3/6$. 2) $\frac{a^2}{4}\left(\operatorname{arctg} t_0 - \frac{t_0}{1 + t_0^2}\right)$.

7.37. 1) $(4\pi + 3\sqrt{3})/2$. 2) $(2\pi - 3\sqrt{3})/2$.

7.38. 1) $2a^2\mathrm{E}(k)$, $k=c^2/a^2$. 2) $2c^2(\mathrm{E}(k)-(1-k^2)\,\mathrm{K}(k))$, $k=a^2/c^2$.

7.39. $|ab|/6$. 7.40. $(ab\arcsin(x_0/a)+x_0y_0)/2$. 7.41. $ab\left(\arccos\lambda-\lambda\sqrt{1-\lambda^2}\right)$.

7.42. $\dfrac{ab}{2}\arcsin\dfrac{x_0}{a}$.

7.43. $\dfrac{x_0y_0}{2}-\dfrac{ab}{2}\ln\left(\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}\right)$.

7.44. $2ab\left(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\right)$. 7.45. $\dfrac{ab}{2}\ln\left(\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}\right)$.

7.46. 1) $p^3/3$. 2) $(\pi-2)/2\sqrt{2}$. 3) $45/4-12\ln 2$. 7.47. $2\pi/\sqrt{AC-B^2}$.

7.48. 1) $a^2(\ln 4-3/4)$. 2) $a^2\left(\dfrac{5}{4}\arcsin\dfrac{3}{5}-\ln 2\right)$. 3) $2ab\arcsin\dfrac{a-b}{a+b}$. 4) $\dfrac{a^4-1}{2a^2}-2\ln a$. 5) $ab(12-3\sqrt{3}-2\pi)/12$. 6) $a^2(3/\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2}))$.

7.49. $25\pi+40\sqrt{3}\ln 2$. 7.50. 1) $(3\pi-4)/(3\pi+4)$. 2) $\dfrac{\sqrt{3}(\pi-2)+\ln(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\pi+2)-\ln(2+\sqrt{3})}$.

7.51. $2ab(\pi-\arcsin((a^2-b^2)/(a^2+b^2))=4ab\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{b}{a}$. 7.52. $4-3\ln 3$.

7.53. 1) $4(\pi+\sqrt{3})$. 2) $6(\pi+\sqrt{3})$. 3) $(7\pi-5\sqrt{3})/4$. 4) $(3\sqrt{3}-\pi)/3$.

7.54. 1) $\pi\sqrt{2}\,a^2$. 2) a^2. 3) $\pi(a^2+b^2)/2$. 4) $\pi a^2/8\sqrt{2}$. 5) $a^2(3\sqrt{3}-\pi)/3$.

7.55. 1) $3a^2/2$. 2) $a^2\left(\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\pi-4\ln(2+\sqrt{3})\right)$.

7.56. $x=\mathrm{ch}\,2s$, $y=\mathrm{sh}\,2s$. 7.57. $\pi(2R^2+a^2)/2$.

7.58. 1) $r=\left(\dfrac{n-2}{2na}\varphi\right)^{1/(n-2)}$. 2) $r=\sqrt{S_0/k}\,e^{\varphi/4k}$.

7.59. $y=cx^{(1-\alpha)/\alpha}$, $c>0$.

7.61. 1) 74. 2) 14/3. 3) $\arcsin(3/4)$. 4) 335/27. 5) 134/27. 6) $(3\sqrt{3}-1)$. 7) 232/15. 8) 25/3. 9) $\sqrt{3}\left(2-\sqrt{x_0}-\sqrt{x_0^3}\right)$. 10) $\dfrac{\mathrm{sign}\,\alpha}{2\sqrt{\alpha(\alpha-2)}}\left(x_0^{\alpha}-x_0^{2-\alpha}\right)$. 11) 10,8.

7.62. $\alpha=(n+1)/n$, $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 0, -1$.

7.63. 1) $\mathrm{sh}\,a$. 2) $\mathrm{sh}\,2a$. 3) $\sqrt{b^2-1}-\sqrt{a^2-1}$. 4) $\ln((\mathrm{sh}\,b)/\mathrm{sh}\,a)$.

7.65. 1) $\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)$. 2) $6\sqrt{2}+\ln(3+2\sqrt{2})$. 3) $4\sqrt{2}+4\ln(\sqrt{2}+1)$. 4) $\sqrt{5}+4\ln((\sqrt{5}+1)/2)$.

7.66. $\dfrac{|y_0|}{2p}\sqrt{y_0^2+p^2}+\dfrac{p}{2}\ln\dfrac{\sqrt{y_0^2+p^2}+|y_0|}{p}$.

7.69. 1) $4+(\ln 3)/4$. 2) $2+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{3}$. 3) $4\sqrt{2}+\ln((9+4\sqrt{2})/7)$. 4) $3+\ln 2$. 5) $2(1+\ln 1,5)$. 6) $\ln 3$. 7) $\ln(2+\sqrt{3})$. 8) $\ln(2+\sqrt{3})$.

7.70. 1) $(\pi+1)/4$. 2) $(2+\sqrt{3}\ln(2+\sqrt{3}))/2$. 3) $1/\sqrt{2}$. 4) $2\sqrt{2}\left(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\right)$. 5) 7/6. 6) $2\left(e^{x_0/2}-1\right)$. 7) $2a\ln(a/(a-x_0))-x_0$. 8) $a\ln(a/x_0)$. 9) $\sqrt{2}(5+4\ln 2)$.

7.71. $f(x)=a-k+k\,\mathrm{ch}(x/k)$.

7.72. 1) $6a$. 2) $4(a^3-b^3)/ab$. 3) $8a$. 4) $a\varphi_0^2/2$. 5) $\dfrac{1}{2}\left((\mathrm{ch}\,2t_0)^{3/2}-1\right)$. 6) $\dfrac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}a\left(e^{\alpha\varphi_0}-1\right)$. 7) t_2-t_1. 8) $\mathrm{sh}^2\,t_0$. 9) $-a\ln\sin t_0$.

7.73. $\int\limits_{t_1}^{t_2} |f'''(t) + f'(t)|\, dt.$

7.74. 1) $\pi^3/3$. 2) $8r\dfrac{\alpha+1}{\alpha}\sin^2\dfrac{\alpha t_0}{4}$. 3) $8r\dfrac{\alpha-1}{\alpha}\sin^2\dfrac{\alpha t_0}{4}$. 4) $6a$. 5) $8abr/(a+b)$.

7.76. 1) $48a$. 2) 26.

7.77. 1) $(2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5}))/4$. 2) $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})$. 3) $2a\left(5 + \dfrac{5}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right)$. 4) $((a^2\cos^2 t_0 + b^2\sin^2 t_0)^{3/2} - a^3)/(b^2 - a^2)$. 5) $10 - \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$.

7.78. 1) $4/3\sqrt{3}$. 2) 8. 3) $a/\sqrt{3}$. **7.79.** 1) t_0. 2) $\ln t_0$. **7.80.** $y = 16a/9$. **7.81.** $4\pi\sqrt{a/g}$.

7.82. 1) πa. 2) $a\sqrt{1 + \dfrac{1}{k^2}}\,(e^{k\varphi_2} - e^{k\varphi_1})$. 3) $8a$. 4) $8(2-\sqrt{3})$. 5) $2a$. 6) $a\left(\varphi_0 + \operatorname{th}\dfrac{\varphi_0}{2}\right)$.

7.83. $e^{2k\pi}$. **7.84.** $a\sqrt{1+k^2}/k$. **7.85.** 1) $3\pi a/2$. 2) $16a/3$. 3) $15\pi a/8$.

7.86. 1) $2a\dfrac{(2k)!!}{(2k-1)!!}$, $n = 2k$. 2) $\pi a\dfrac{(2k+1)!!}{(2k)!!}$, $n = 2k+1$.

7.87. $2p(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1))$. **7.88.** 1) $12\sqrt{3}\,a$. 2) $a(7\sqrt{2} + 3\ln(\sqrt{2}+1))$.

7.89. 1) $a\left(\varphi_0\sqrt{1+\varphi_0^2} + \ln\left(\varphi_0 + \sqrt{1+\varphi_0^2}\right)\right)/2$. 2) $8a(5\sqrt{5}-1)/3$. 3) $1423a/15$. 4) $\dfrac{a}{2}\left(205 - \dfrac{81}{4}\ln 3\right)$. 5) $a\left(\dfrac{27}{20} + \ln 2\right)$.

7.91. 1) t_0. 2) $\left(r_0^2 - 1 + 2\ln r_0\right)/4$. 3) $\left(r_2^2 - r_1^2\right)/2a$. 4) $\pi(b-a)/2$.

7.92. $r = ce^{a\varphi}$, $c > 0$.

7.94. 1) 8. 2) $\dfrac{a}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1) + a$. 3) $4(a+b) - 4ab/(a+b)$. **7.95.** πa.

7.96. $7a$. **7.97.** $\dfrac{1}{a^2+b^2}\left(\left((a^2x_0)^{2/3} + (b^2y_0)^{2/3}\right)^{3/2} - a^3\right)$.

7.98. 1) $\dfrac{a}{k}E(\omega x_0, k)$, $k = \dfrac{a\omega}{\sqrt{1+a^2\omega^2}}$. 2) $\dfrac{a+b}{2}E\left(\dfrac{\pi - t_0}{2}, \dfrac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right)$. 3) $aF\left(\varphi, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\varphi = \arcsin(\sqrt{2}\sin\varphi_0)$. 4) $aE(\varphi, e)$, $e = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, $\varphi = \arcsin\left(\dfrac{x_0}{a}\right)$. 5) $\dfrac{b^2}{c}F\left(\varphi, \dfrac{1}{e}\right) - cE\left(\varphi, \dfrac{1}{e}\right) + \dfrac{x_0}{a}\sin\varphi$, $c = \sqrt{a^2+b^2}$, $e = c/a$, $x_0 = \dfrac{a}{b}\sqrt{b^2+y_0^2}$, $\varphi = \arcsin\dfrac{cy_0}{b\sqrt{x_0^2e^2 - a^2}}$.

7.99. 1) $4aE(\pi/2, e) = 4a\mathbf{E}(e)$, $e = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. 2) $4aF(\pi/2, 1/\sqrt{2}) = 4a\mathbf{K}(1/\sqrt{2})$. 3) $4(a+b)E(\pi/2, 2\sqrt{ab}/(a+b)) = 4(a+b)\mathbf{E}\left(\dfrac{2\sqrt{ab}}{(a+b)}\right)$. 4) $2naE(\pi/2, \sqrt{n^2-1}/n) = 2na\mathbf{E}(\sqrt{n^2-1}/n)$.

7.103. 1) $x = a\cos(s/a)$, $y = a\sin(s/a)$. 2) $x = a\ln((s+\sqrt{s^2+a^2})/a)$, $y = \sqrt{s^2+a^2}$. 3) $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$.
4) $x = (r_0 + s\cos\alpha)\cos t$, $y = (r_0 + s\cos\alpha)\sin t$, $t = \frac{1}{k}\ln\left(1+\frac{s}{r_0}\cos\alpha\right)$, $\alpha = \operatorname{arcctg} k$. 5) $x = 2r\left(\arccos\left(1-\frac{s}{4r}\right) - \left(1-\frac{s}{4r}\right)\sqrt{\frac{s}{4r}\left(2-\frac{s}{4r}\right)}\right)$, $y = s\left(1-\frac{s}{8r}\right)$. 6) $x = \frac{3}{2}((s+1)^{2/3}-1)$, $y = ((s+1)^{2/3}-1)^{3/2}$.

7.104. 1) $R = (s^2+a^2)/a$. 2) $R = ks$. 3) $R^2 = 2as$. 4) $R^2 = a^2(e^{2s/a}-1)$. 5) $R^2 + (s-4a)^2 = 4a^2$. 6) $4R^2 + (s-6r)^2 = 36r^2$. 7) $R^2 + 4(s-3r)^2 = 36r^2$. 8) $9R^2 + (s-4a)^2 = 16a^2$. 9) $2Rs = 1$.

7.107. 1) $x^2+y^2 = a^2$. 2) $r = e^{\varphi}/\sqrt{2}$. 3) $y = \operatorname{ch} x$. 4) $x = \frac{1}{2}(\cos t + t\sin t)$, $y = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$. 5) $x = \frac{1}{4}(t-\sin t)$, $y = \frac{1}{4}(1-\cos t)$. 6) $x = \frac{4}{3}\cos^3 t$, $y = \frac{4}{3}\sin^3 t$. 7) $r = (1+\cos\varphi)/4$. 8) $x = \cos t + \ln\operatorname{tg}(t/2)$, $y = \sin t$.
9) $x = \int\limits_1^t \frac{\cos\alpha}{\alpha}\,d\alpha$, $y = \int\limits_1^t \frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha$.

7.108. 1) $\sqrt{a^2+b^2}\,t_0$. 2) $(z_2-z_1)\sqrt{\frac{(k^2+1)}{k}\frac{a^2}{b^2}+1}$.
3) $(a/3)(\sqrt{t_2}(3+2t_2) - \sqrt{t_1}(3+2t_1))$. 4) $2at_0$. 5) $8\sqrt{2}\,a$.
6) $\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sh} t_0$. 7) $2\operatorname{sh} t_0$. 8) 10. 9) $2a\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

7.109. 1) $t_2^2 - t_1^2 + \ln\left(\frac{t_2}{t_1}\right)$. 2) $\sqrt{2}(3t_0+t_0^3)$. 3) $a\left(t_0+\frac{2}{3}b^2t_0^3\right)$.

7.110. 1) $a\sqrt{2} - \sqrt{a^2+b^2} + a\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b(\sqrt{2}+1)}$.
2) $\frac{a}{2}\left(t_0\sqrt{1+2t_0^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}\,t_0+\sqrt{1+2t_0^2}\right)\right)$.
3) $\frac{a}{2m^2}\left(mt_0\sqrt{1+m^2t_0^2} + \ln\left(mt_0+\sqrt{1+m^2t_0^2}\right)\right)$, $m = a/\sqrt{a^2+b^2}$.

7.111. $4\sqrt{2}\,RE\left(\frac{\pi}{2}, 1/\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2}\,RE(1/\sqrt{2})$.

7.112. 1) $9a$. 2) 126. 3) 36. 4) $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{z_0}{a}}(2z_0+3a)$. 5) $2+\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$.
6) $\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{x_0}{a}}(x_0+3a) = \sqrt{2}\,z_0$. 7) $\frac{3}{4\sqrt{2}}\left(x_0\sqrt[3]{\frac{x_0}{a}} + 2a\sqrt[3]{\left(\frac{x_0}{a}\right)^2}\right) = \sqrt{2}\,z_0$. 8) $a\sin(y_0/a) + \frac{a}{4}\ln\frac{1+\sin\left(\frac{y_0}{a}\right)}{1-\sin\left(\frac{y_0}{a}\right)} = x_0+z_0$. 9) $\pi\sqrt{2}\,a$.

7.113. $x = a\cos(s/\sqrt{a^2+b^2})$, $y = a\sin(s/\sqrt{a^2+b^2})$, $z = bs/\sqrt{a^2+b^2}$.

7.114. 1) $k = a/(a^2+b^2)$, $\varkappa = b/(a^2+b^2)$. 2) $k = \varkappa = a/(2a^2+s^2)$.
3) $k = -\varkappa = \sqrt{2}/(4+s^2)$. 4) $k = \varkappa = a\sqrt{2}/(4a^2+s^2)$.

§ 8. Вычисление объемов и площадей поверхностей

8.1. 1) πpa^2. 2) $\pi a^3/2$. 3) π. 4) $\frac{3\pi ab^4}{7}$. 5) $\pi^2/4$. 6) $\frac{\pi a^2}{2}\left(b+\frac{a}{2}\operatorname{sh}\frac{2b}{a}\right)$. 7) $\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2a}(1+2a)\right)$. 8) $\pi(2-5/e)$. 9) $\pi^3/2$.

8.2. 1) $\pi^2(2a^2+b^2)/\omega$. 2) $\frac{\pi^3 \operatorname{sh} a}{2a(\pi^2+a^2)}e^{(2n-1)a}$. 3) $\frac{\pi}{2}\ln 3$. 4) $\frac{\pi(\pi+2)}{8a^3}$. 5) $\pi(6-8\ln 2)$. 6) $3\pi(96\ln 2-61)/8$.

8.3. 1) $\frac{5\pi}{6}$. 2) $\frac{\pi(\pi-2)}{4}$. 3) 20π. 4) $\frac{\pi a^5}{20(\sqrt{p}+\sqrt{q})^4}$. 5) $\pi\left(\frac{6}{\ln^2 2}-\frac{5}{2\ln 2}-4\right)$.

8.4. 1) $\frac{4}{3}\pi ab^2$. 2) $\frac{\pi b^2}{3a^2}h^2(h+3a)$. 3) $\frac{2\pi b^2}{3a^2}h(h^2+3a^2)$. 4) $\frac{\pi R^3(10-3\pi)}{6}$. 5) $\pi a^3(24\ln 2-16)/3$. 6) $\pi a^3(24\ln 4-31)/24$. 7) $\pi a^3(35-24\ln 4)/24$.

8.5. 1) $\pi(15-16\ln 2)/2$. 2) $\pi a^3(6\ln 2-4)/3$. 3) $\pi a^3(4\ln 4-3)/81$. 4) $\pi a^3(17-24\ln 2)/3$. **8.6.** 1) 4π. 2) 8π. 3) $\pi^2/12$. 4) $\pi^2(4\pi^2-15)/24$. 5) $\frac{12\pi pq}{5}\sqrt[3]{pq^2}$. 6) $\frac{\pi pq}{p+q}a^2$. 7) $\frac{\pi pq}{q-p}a^2$. 8) $\pi a^3(6-8\ln 2)$.

8.7. 1) $\frac{2\pi ab^2}{3}\left(\left(1+\frac{h^2}{b^2}\right)^{3/2}-1\right)$. 2) $\pi a^5/120p^2$. 3) 70π. 4) $2\pi^2r^2a$. 5) $36\pi^2$. 6) $8\pi a^3/3$. **8.10.** 1) $2\pi k^2(b-a)$. 2) $\pi(e-1)$. 3) $\pi\ln 2$. 4) $8\pi/3$. 5) $(8n+2)\pi^2$. 6) $4\pi a^3b/3p$. 7) $2\pi a^2b$. **8.11.** 1) $\pi(1-\sin 1)$. 2) $\pi(\pi^2-8)/4$. 3) $4\pi^3$. 4) $(25\pi^3+8\pi^2-8\pi)/4$. 5) $\pi a^3(50-15\pi)/3$. 6) $128\pi/15$.

8.12. 1) а) $\pi(b-a)^5/30$; б) $\pi(b+a)(b-a)^3/6$. 2) а) $\pi^2/2$; б) $2\pi^2$. 3) а) $\pi(\pi^2-8)/4$; б) $\pi^2/4$. 4) а) $(\pi+2)a^3/8$; б) $\pi a^3\ln 2$. 5) а) $\pi^2a^3/4$; б) $\pi a^3(\ln 2-0{,}5)$. 6) а) $4\pi(44-27\ln 3)$; б) $4\pi(27-5\sqrt{3}\pi)/3$. 7) а) $\frac{2\pi a^5}{5p^2}$; б) $4\pi a^4/(3p)$. 8) а) $32\pi p^3/15$; б) $4\pi p^3/3$. 9) а) $4\pi(2+9\ln 3)$; б) $3\pi(2\ln 3-1)\ln 3$. 10) а) $\frac{\pi^3}{2}+\frac{3\pi^2}{8}$; б) $\pi^3/2$. **8.13.** 1) $4\pi ab^2/3$. 2) $4\pi a^2b/3$. **8.14.** 1) $32\pi ab^2/105$. 2) $32\pi a^2b/105$.

8.15. 1) $2\pi(1+5\ln 2)/5$. 2) $13\pi/30$. 3) $433\pi/15$. **8.16.** 1) $\pi^3-4\pi$. 2) π^2. **8.17.** $3\pi^2/(8\sqrt{2})$. **8.18.** 1) $\frac{272}{15}\pi p^3$. 2) $45\pi p^3/4$. 3) $64\pi p^3\sqrt{2}/15$.

8.19. $2\pi a^3(9\sqrt{3}-4\pi)/3$. **8.20.** 1) $\pi a^3(16-3\sqrt{3})/24$. 2) $\pi a^3(2\pi-3\sqrt{3})/3$. **8.21.** $y=x^{3/2}$. **8.22.** $y=cx^{(1-\lambda)/2\lambda}$, $c>0$. **8.23.** $\pi r^2h/2$. **8.24.** $\pi D^2h/8$.

8.25. $\pi D^2h/8$. **8.26.** $\pi r^2(H+h)/2$. **8.27.** $2\pi r^3\left(\sin\alpha-\frac{\sin^3\alpha}{3}-\alpha\cos\alpha\right)$.

8.28. 1) $\frac{\pi h}{3}\left(3R^2-3z_0^2-3z_0h-h^2\right)$. 2) $\pi R^3\left(2-\sqrt{2}\right)/3$. 3) $\frac{\pi R^3}{9\sqrt{3}}(6\sqrt{3}-5)$.

8.29. 1) $4\pi p^3/15$. 2) $2\pi\left(6-2\sqrt{3}\operatorname{arsh}\sqrt{3}\right)$. 3) $\pi\left(27-4\sqrt{3}\pi\right)/3$.

8.30. $16\pi ah^2/15$. **8.31.** $\pi h(8D^2+4Dd+3d^2)/60$.

8.32. 1) $\pi h(3a^2+h^2(1-e^2))/6$. 2) $4\pi a^3/(3(1-e^2))$.

8.33. 1) $\pi h(3a^2-(e^2-1)h^2)/6$. 2) $4\pi a^3/(3(e^2-1))$. **8.34.** $71\pi a^3/210$. **8.35.** $2\pi\sqrt{5}a^3/75$. **8.37.** $4\pi p^3k^5/(15\sqrt{1+k^2})$.

8.38. $2\pi a(a^2\sin^2\alpha\cos\alpha+3h^2\cos\alpha)/3$. **8.39.** 1) $\pi V/\sqrt{3}$. 2) $7\pi V\sqrt{2}/6$. **8.40.** 1) $92\pi\sqrt{2}/(35a^3)$. 2) $5\pi/(4a^3)$. **8.41.** 1) $6\pi/7$. 2) $3\pi/4$. **8.42.** 1) $8\pi a^3/15$. 2) $\pi^2a^3/2$. **8.43.** 1) $5\pi^2a^3$. 2) $6\pi^3a^3$. 3) $\pi a^3(9\pi^2-16)/6$. 4) $7\pi^2a^3$.

8.44. 1) $32\pi a^2b/105$. 2) $3\pi^2a^2b/4$. **8.45.** 1) $(26\sqrt{2}+16)\pi a^3/105$. 2) $116\pi/105$.

8.46. 1) $8\pi a^3(3\ln 2-2)/3$. 2) $2\pi a^3(10-3\pi)/3$. **8.47.** 1) $(\pi a^3/24)(24\ln 4-1)$. 2) $2\pi^2a^3/3$. **8.48.** $1:25$. **8.49.** 1) $64\pi/35$. 2) $64\pi/105$. **8.50.** 1) $\pi a^3(6\ln 2-4)/3$. 2) $4\pi a^3/3$. **8.53.** 1) $2(\pi^4-6\pi^2)a^3/3$. 2) $2\pi/3$. 3) $4\pi a^3/21$. 4) $2\pi^2a^3$. 5) $\pi a^3/15$. 6) $64\pi a^3/105$. 7) $\dfrac{2\pi a^3}{3(9k^2+1)}(e^{3k\pi}+1)e^{6k\pi n}$. 8) $\pi a^3/24$. 9) $3\pi a^3/8$.

8.54. 1) $8\pi a^3/3$. 2) $\pi a^3(51-64\ln 2)/4$. 3) $\dfrac{\pi(2+e)}{3(1+e)^2}p^3$. 4) $(\pi a^3/12)\times\times(3\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)-2)$. 5) $\pi^2a^3/4$. 6) $16\sqrt{3}\pi^2a^3/9$. 7) $2\pi a^3(9\ln 1{,}5-2)/9$. 8) $\pi^2a^3/(2\sqrt{2})$. **8.55.** 1) $\pi(a+l)^4/(6a)$. 2) $\pi(a-l)^4/(6a)$. 3) $4\pi l(l^2+a^2)/3$.

8.56. 1) $4\pi a^3/15$. 2) $32\sqrt{2}\pi a^3/105$. 3) $\sqrt{3}\pi a^3/4$. 4) $\sqrt{3}\pi a^3/8$. 5) $\pi a^3(16+5\pi)/4$. 6) $\pi a^3(3\pi-8)/3$. 7) $4\pi p^3/15$. 8) $\sqrt{2}\pi^2a^3/8$.

8.57. 1) $\pi a^3(51-32\ln 4)$. 2) $(4\pi a^3/3)(6\ln(2+\sqrt{3})+3\sqrt{3}-4\pi)$.

8.58. $13\pi^2a^3/4$. **8.59.** 1) $(\sqrt{2}\pi a^3/24)(3\ln(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2})$. 2) $\sqrt{2}\pi^2a^3/8$.

8.60. 1) $2\pi a^3/3$. 2) $2\pi a^3/3$. 3) $4\pi a^3/21$. 4) $\dfrac{\pi a^3}{2\sqrt{2}}\left(\ln(\sqrt{2}+1)-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$. 5) $2\pi a^3(3-\ln 4)$. **8.61.** 1) $\pi^2a^3/16$. 2) $4\pi a^3/3$. 3) $8\pi a^3/15$. 4) $4\pi a^3(16\sqrt{2}-9)/105$. 5) $8\pi a^3/105$. **8.62.** $\pi^2a^3/4$. **8.63.** 1) $2\pi abH$. 2) $\pi abH/3$. 3) $\pi abH^2/c$. 4) $\dfrac{4}{3}\pi abc$. 5) $(2\pi ab/3c^2)H(H^2+3c^2)$. 6) $(\pi ab/3c^2)H^2(H+3c)$.

8.64. 1) $4a^3/15$. 2) $4\sqrt{2}\pi a^3/3$. 3) $\pi a^2\left(b+\dfrac{a}{2}\operatorname{sh}\dfrac{2b}{a}\right)$. 4) $\pi a^3/2$. 5) $4\pi a^3/3$. 6) $\pi abc/2$. 7) $8\pi a^2b/3$. **8.65.** 1) $2abH/3$. 2) $8a^3(k_2-k_1)/15$. 3) $16abc/15$. 4) $4abc/3$. 5) $(3\pi-4)abH/9$. 6) $\pi a^3/4$. **8.66.** $SH/3$. **8.67.** $r^3\operatorname{ctg}\alpha\left(\dfrac{1}{3}\sin^3\varphi+\dfrac{1}{2}\sin\varphi\cos^2\varphi-\dfrac{\varphi}{2}\cos\varphi\right)$. **8.68.** $\dfrac{\pi a^3\operatorname{tg}^2\alpha}{3(1-\operatorname{tg}^2\alpha)^{3/2}}$. **8.69.** $(3\pi+4):(3\pi-4)$.

8.70. 1) $16abc/3$. 2) $16\sqrt{ab}\,a^2/15$. 3) $\pi abc/6$. 4) $a^2b/2$. 5) $23\pi abc/81$. 6) $64\pi/3$. 7) 22π. **8.71.** $8a^2b/3$. **8.72.** $\dfrac{h}{3}\left(a_1b_1+a_2b_2+\dfrac{1}{2}(a_1b_2+a_2b_1)\right)$. **8.73.** $V/2$. **8.75.** $16r^3/(3\sin\alpha)$. **8.76.** $(4r^3\operatorname{ctg}\alpha)/3$. **8.77.** $8(2-\sqrt{2})r^3$. **8.78.** $\pi R^2H/2$.

8.79. $3:1$. **8.80.** $2\pi Rh$. **8.81.** 1) $98\pi/3$. 2) $\pi(10^{3/2}-1)/27$. 3) $\pi\left(\sqrt{2}-e^{-a}\sqrt{1+e^{-2a}}-\ln\dfrac{e^{-a}+\sqrt{1+e^{-2a}}}{1+\sqrt{2}}\right)$.

4) $2\pi a\left(b+\dfrac{a}{2}\operatorname{sh}(2b/a)\right)$. 5) $2\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$.

6) $(\pi a^2/8)(3\ln(\sqrt{2}+1)+7\sqrt{2})$. 7) $(\pi/9)(7\sqrt{2}+3\ln(\sqrt{2}+1))$. 8) $\pi\left(\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{a^4+1}}{a^2}+\ln\dfrac{\sqrt{a^4+1}+a^2}{\sqrt{2}+1}\right)$. 9) $\pi\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}-2}\right)$.

8.82. 1) $\pi(-5-9\ln 2+16\ln 3)/6$. 2) $\pi(\operatorname{sh}4-4e^{-2})/8$. 3) $\pi(185+144\ln 1{,}5)/144$. 4) $\pi(20+9\ln 3)/9$. 5) $\pi(11\sqrt{2}+7\ln(\sqrt{2}+1))/8$. 6) $\dfrac{\pi a^2}{6}(11-9\sqrt{3}+2\pi(2\sqrt{3}-1))$. **8.84.** $2\pi a^2(20-9\ln 3)/9$. **8.85.** $2\pi p^2(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$. **8.87.** 1) $56\pi/3$. 2) $62\pi/3$. 3) $\pi(e^3+3e-4)/3$. 4) $2\pi a(a-b)$. **8.88.** 1) $(2\pi/3p)((p^2+b^2)^{3/2}-p^3)$. 2) $2\pi a(a+b\operatorname{sh}/(b/a)-a\operatorname{ch}(b/a))$. 3) $2\pi(2\sqrt{2}-1)/3$. **8.89.** $(\pi R/6h^2)((4h^2+R^2)^{3/2}-R^3)$.

8.90. $(5/128\sqrt[3]{10})(14\sqrt{5}+17\ln(2+\sqrt{2}))\approx 0{,}9461$.

8.91. 1) $4\sqrt{2}\,\pi e^{(4n+1)\pi}(\operatorname{ch}\pi)/5$. 2) $128\pi a^2/5$. 3) $4\pi a(a-y_0)$. 4) $59{,}2\pi$. 5) $\dfrac{15\pi}{8}(4+\ln 5)$. **8.92.** 1) $18\pi^2a^2$. 2) $24\pi a^2$. **8.93.** 1) $\pi/2$. 2) $10\sqrt{2}\,\pi/3$.

8.94. 1) $4\pi a^2/3$. 2) $2\pi(3\pi-4)a^2/3$. **8.95.** 1) $6\pi^2a^2$. 2) $3\pi(\pi^2-4)a^2$.

8.96. 1) 12π. 2) $184\sqrt{6}\,\pi/15$. 3) $\dfrac{4\pi}{5}(32\sqrt{3}+\sqrt{6})$. **8.97.** 1) $3\pi a^2$. 2) $96\sqrt{3}\,\pi a^2/5$. **8.98.** 1) $64\pi a^2/3$. 2) $16\pi^2a^2$. 3) $32\pi a^2/3$. 4) $\dfrac{8}{3}\pi(3\pi-4)a^2$. 5) $16(2\sqrt{2}-1)\pi a^2/3$. **8.99.** 1) $12\pi a^2/5$. 2) $12\pi a^2$. **8.100.** $4\pi^2ab$.

8.101. 1) $8\pi+\dfrac{4\pi}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$. 2) $2\pi+(8\pi^2)/(3\sqrt{3})$. **8.102.** 48π.

8.103. 1) $\pi/2$. 2) $10\sqrt{2}\,\pi/3$. **8.104.** $5\pi(4+\ln 5)/32$. **8.105.** 1) $2\pi(3\pi-4)/3$. 2) $4\pi/3$. **8.106.** 1) $3\pi a^2$. 2) $56\sqrt{3}\,\pi a^2/5$. **8.107.** $4\pi R^2(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)$.

8.108. 1) $2\pi b\left(b+\dfrac{a}{e}\arcsin e\right)$, $e=\sqrt{a^2-b^2}/a$.

2) $2\pi b\left(b+\dfrac{a^2}{2be}\ln\dfrac{1+e}{1-e}\right)$, $e=\sqrt{b^2-a^2}/b$. **8.109.** $2\pi(6+\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1))$.

8.110. 1) $\pi ab\left(\lambda\sqrt{\lambda^2e^2-1}-b/a-\dfrac{1}{e}\ln\dfrac{\lambda e+\sqrt{\lambda^2e^2-1}}{e+\sqrt{e^2-1}}\right)$, $e=\sqrt{a^2+b^2}/a$.

2) $\dfrac{2\pi a^2}{e}\left(e\sqrt{\lambda^2-1}\sqrt{\lambda^2e^2-1}+(e^2-1)\ln\left(\dfrac{e\sqrt{\lambda^2-1}+\sqrt{e^2\lambda^2-1}}{\sqrt{e^2-1}}\right)\right)$, $e=\sqrt{a^2+b^2}/a$.

8.111. $a=0$, $S_{\min}=4\pi(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1))$.

8.112. 1) $16\pi(3k-4+(4-2k)^{3/2})a^2/3$. 2) $k=3/2$, $S_{\min}=8\pi a^2$.

8.113. 1) $4\pi R^2(2\sin\beta-\sin\alpha-(2\beta-\alpha)\cos\beta)$. 2) $\beta=\alpha/2$, $S_{\min}=16\pi R^2\sin(\alpha/2)\sin^2(\alpha/4)$. **8.114.** $(\pi p^2/12\sqrt{5})(7\sqrt{2}-8+3\ln(\sqrt{2}+1))$.

8.115. 1) $3\pi a^2(4\sqrt{2}-1)/5$. 2) $6\pi a^2\sqrt{2}$.

8.116. $\pi\sin\alpha\left(b\sqrt{b^2+a^2\operatorname{ctg}^2\alpha}+a^2\operatorname{ctg}^2\alpha\ln\dfrac{b+\sqrt{b^2+a^2\operatorname{ctg}^2\alpha}}{a\operatorname{ctg}\alpha}\right)$.

8.117. $\pi a^2(4+\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))/\sqrt{6}$. **8.118.** 1) $4\pi^2a^2$. 2) $2\pi(2-\sqrt{2})$. 3) $4\pi a^2$. 4) $56\pi a^2/3$. **8.119.** 1) $32\pi a^2/5$. 2) $96\pi a^2/5$. 3) $84\pi a^2/5$.

8.120. 1) $4\pi a^2\left(1+\dfrac{2}{3}\cos^2\alpha-\dfrac{1}{15}\cos^4\alpha\right)$, $\alpha=\arccos\dfrac{b}{a}$.

2) $\dfrac{4\pi b^2}{15}\left(24-16\sin\beta-\dfrac{\sin^4\beta}{1+\sin\beta}\right)$, $\beta=\arccos(a/b)$.

8.121. 1) $4\pi a^2(2-\sqrt{2})$. 2) $4\sqrt{2}\,\pi a^2$. 3) $8\pi a^2$. **8.122.** 1) $2ah$. 2) $(h/(12b^2))((a^2+4b^2)^{3/2}-a^3)$. 3) $\dfrac{ah}{2}\left(1+\dfrac{1-e^2}{2e}\ln\dfrac{1+e}{1-e}\right)$, $e=\sqrt{a^2-b^2}/a$. 4) $\dfrac{bh}{2}\left(\sqrt{1-e^2}+\dfrac{1}{e}\arcsin e\right)$, $e=\sqrt{b^2-a^2}/b$. 5) $\sqrt{2}(\ln(2+\sqrt{3})+2\sqrt{3})$. **8.123.** 1) $\sqrt{2}\operatorname{sh}2\pi$. 2) $37/15$. 3) $20a^2$. **8.124.** $4R^2$. **8.125**. $8r^2$. **8.126.** $24(2-\sqrt{2})r^2$. **8.127.** $16r^2/\sin\alpha$. **8.128.** 1) $8Rr\,E(\pi/2, r/R)=8Rr\mathbf{E}(r/R)$. 2) $4(R^2\mathbf{E}(r/R)-(R^2-r^2)\mathbf{K}(r/R))$.

§ 9. Применение интеграла к решению физических задач

9.1. $y = \pm\sqrt{2px + C}$, $C \in \mathbb{R}$; $y = \sqrt{2px}$. **9.2** $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. **9.3.** $y = -e^{\pm(a-x)/a}$. **9.4.** $mx^2 - ny^2 = m - n$. **9.5.** $y = x^{-n/m}$. **9.6.** $(x - x_0)^2 + y^2 = a^2$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

9.7. $|x - C| = -a(\cos t + \ln \operatorname{tg}(t/2))$, $|y| = a \sin t$, $0 < t < \pi/2$.

9.8. $y = 2$, $x^2 + (y-1)^2 = 1$. **9.9.** $\dfrac{a_0}{\nu^2}\left(1 - \left(1 + \dfrac{\nu v_0}{a_0}\right) e^{-\nu v_0/a_0}\right)$.

9.10. $r = 2\pi v_0/\omega$, $s = \dfrac{4v_0}{\omega}\left(\sqrt{3} + \dfrac{\pi}{6}\right)$. **9.11.** $\dfrac{W}{F}\left(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)\right)$.

9.12. $s(T) = \varphi^2(T)$, $\varphi(T) = \displaystyle\int_0^T \omega(t)\,dt$; $s = 2\pi^2 R$. **9.13.** $8r$. **9.14.** 1) $16r/3$. 2) $16r$.

9.15. 1) $M_x = b\sqrt{a^2 + b^2}/2$, $M_y = a\sqrt{a^2 + b^2}/2$. 2) $M_x = 2a^2$, $M_y = 0$. 3) $M_x = 0$; $M_y = \dfrac{9\sqrt{5}}{4} + \dfrac{1}{8}\ln(2 + \sqrt{5})$. 4) $M_x = 0$, $M_y = -\dfrac{p^2}{8}\left(\sqrt{2} + 5\ln(1 + \sqrt{2})\right)$. 5) $M_x = b\left(b + \dfrac{a}{e}\arcsin e\right)$, $M_y = 0$, $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$. 6) $M_x = \dfrac{a^2}{4}(\operatorname{sh} 2 + 2)$, $M_y = a^2(\operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1 + 1)$.

9.16. 1) $M_x = \dfrac{ab}{2e}\left(e\sqrt{1 - e^2} + \arcsin e\right)$, $M_y = \dfrac{a^2}{2}\left(1 + \dfrac{1 - e^2}{2e}\ln\dfrac{1 + e}{1 - e}\right)$, $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. 2) $M_x = M_y = \dfrac{3}{5}a^2$. 3) $M_x = 32a^2/3$, $M_y = 8\pi a^2$. **9.17.** 1) $M_x = 2a^2$, $M_y = \pi a^2$. 2) $M_x = 0$, $M_y = 32a^2/5$. 3) $M_x = \dfrac{\sqrt{2}}{5}(1 - e^{4\pi})a^2$, $M_y = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}(e^{4\pi} - 1)a^2$. **9.19.** 1) $x_C = \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}R$, $y_C = 0$. 2) $x_C = y_C = 2a/5$. 3) $x_C = 0$, $y_C = (a \operatorname{sh}(2b/a) + 2b)/4\operatorname{sh}(b/a)$. 4) $x_C = \dfrac{27 - 16\ln 2 - 4\ln^2 2}{8(3 + \ln 4)}$, $y_C = \dfrac{20}{3(3 + \ln 4)}$. 5) $x_C = \pi a$, $y_C = 4a/3$. 6) $x_C = y_C = 4a/5$. 7) $x_C = -\dfrac{a}{5}\,\dfrac{2e^{2\pi} + e^{\pi}}{e^{\pi} - e^{\pi/2}}$, $y_C = \dfrac{a}{5}\,\dfrac{e^{2\pi} - 2e^{\pi}}{e^{\pi} - e^{\pi/2}}$.

9.22. $(a^2 + ab + b^2)\,l/3$. **9.23.** 1) $\dfrac{1}{3}\left((1+e)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right)$. 2) $\dfrac{1}{4}(2\alpha - \sin 2\alpha)R^3$. 3) $\pi R(2a^2 + R^2)$. **9.24.** $I_x = 256a^3/15$, $I_y = 16\left(\pi^2 - \dfrac{128}{45}\right)a^3$. **9.26.** $ah^2/6$. **9.27.** 1) πR^3. 2) $\pi a R^2$. **9.28.** 1) $M_x = ab^2/6$, $M_y = a^2 b/6$. 2) $M_x = \pi/4$, $M_y = 0$. 3) $M_x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\sqrt{3}}{8}$, $M_y = \pi(3\sqrt{3} - \pi)/6$. 4) $M_x = M_y = 3/20$. 5) $M_x = \dfrac{2}{5} + \dfrac{\pi}{4}$, $M_y = \ln 2 - 1/4$. 6) $M_x = pa^2/2$, $M_y = 2\sqrt{2p}\,a^{5/2}/5$. 7) $M_x = 2ab^2/3$, $M_y = 0$. 8) $M_x = 5\pi a^3/2$, $M_y = 3\pi^2 a^3$. 9) $M_x = \pi a^3(\pi^2 - 6)/3$, $M_y = a^3(4 - \pi^2)$. 10) $M_x = 0$, $M_y = 5\pi a^3/4$. **9.29.** $h/3$. **9.30.** На оси симметрии на расстоянии $\dfrac{b(3\pi h + 8b)}{6(4h + \pi b)}$ от центра прямоугольника в сторону полукруга. **9.31.** На оси симметрии на расстоянии $\dfrac{4(R^3 - r^3)}{3\pi(R^2 - r^2)}$ от центра.

9.32. $\frac{h}{3}\frac{a+2b}{a+b}$. **9.33.** $\alpha=10$. **9.34.** 1) $x_C=0$, $y_C=4R/3\pi$. 2) $x_C=\frac{n+1}{n+2}b$, $y_C=\frac{n+1}{2(2n+1)}ab^n$. 3) $x_C=0$, $y_C=2h/5$. 4) $x_C=5a/7$, $y_C=5a/16$. 5) $x_C=\pi/2$, $y_C=\pi/8$. 6) $x_C=0$, $y_C=\frac{2b+a\,\mathrm{sh}\,(2b/a)}{8\,\mathrm{sh}\,(b/a)}$. 7) $x_C=0$, $y_C=\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{8(3\sqrt{3}-\pi)}$. 8) $x_C=\frac{\pi^2+12\pi-12}{3(\pi+4)}$, $y_C=5\pi/6(\pi+4)$. 9) $x_C=y_C=9p/10$. **9.35.** 1) $x_C=y_C=a/5$. 2) $x_C=16/5$, $y_C=-1$. 3) $x_C=28/75$, $y_C=92/105$. 4) $x_C=5a/8$, $y_C=0$. 5) $x_C=4a/3\pi$, $y_C=4b/3\pi$. 6) $x_C=y_C=256a/315\pi$. 7) $x_C=\pi a$, $y_C=5a/6$. 8) $x_C=4a/3\pi$, $y_C=4(a+b)/3\pi$. **9.36.** $x_C=10/21$, $y_C=5/3$. **9.37.** На оси симметрии на расстоянии $\frac{2\sin\alpha}{3\alpha}r$ от центра. **9.38.** 1) $x_C=6(4-\pi^2)a/\pi^3$, $y_C=2(\pi^2-6)a/\pi^2$. 2) $x_C=5a/6$, $y_C=0$. 3) $x_C=\pi a\sqrt{2}/8$, $y_C=0$. 4) $x_C=y_C=128a/105\pi$. 5) $x_C=0$, $y_C=\pi/2$. **9.39.** На оси симметрии на расстоянии $(4\pi-3\sqrt{3})R/(4\pi+6\sqrt{3})$ от центра круга. **9.42.** $y=ax^{n-2}$, $a\in\mathbb{R}$, $a>0$. **9.43.** $I_x=ab^3/12$, $I_y=a^3b/12$. **9.44.** $\frac{a^3b}{12}+ab\left(c+\frac{a}{2}\right)^2$. **9.45.** $\pi R^4/4$. **9.46.** $\pi R^2(R^2+4a^2)/4$. **9.47.** 1) $ah^3/12$. 2) $ah^3/4$. 3) $ah^3/36$. **9.48.** $\pi R^4/8$. **9.49.** $I_a=\pi ab^3/4$, $I_b=\pi a^3b/4$. **9.50.** 1) $I_x=2ah^3/7$, $I_y=4a^3h/15$. 2) $I_x=32a^4/105$, $I_y=8a^4/5$. **9.51.** $\frac{1}{2}\left(n(2n^2-1)\sqrt{1-n^2}+\arcsin n\right)R^4$, $n=h/R$. **9.52.** $a^4/12$. **9.53.** $5\sqrt{3}a^4/16$. **9.54.** 1) $(\alpha-\sin\alpha)R^4/8$. 2) $(\alpha+\sin\alpha)R^4/8$. 3) $(2\alpha-\sin 2\alpha)R^4/16$. **9.55.** $h/4$. **9.56.** $3R/8$. **9.57.** На оси конуса на расстоянии $\frac{h}{4}\frac{R^2+2Rr+3r^2}{R^2+Rr+r^2}$ от большего основания. **9.58.** 1) $2h/5$. 2) $h/3$. **9.59.** $x_C=2a/3$, $y_C=z_C=0$. **9.60.** $x_C=y_C=z_C=3a/8$. **9.61.** $x_C=y_C=0$, $z_C=7h/9$. **9.62.** На оси вращения на расстоянии $3(1+\cos\alpha)R/8$ от центра круга. **9.63.** $R/2$. **9.64.** 1) $h/3$. 2) $\frac{h}{3}\frac{\sqrt{h^2+R^2}}{R+\sqrt{h^2+R^2}}$. **9.65.** $h/3$. **9.66.** 1) $\pi R^2h^3/30$. 2) $2\pi R^5/15$. **9.67.** $8\pi R^5/15$. **9.68.** 1) $\pi hR^4/2$. 2) $\pi h(R^4-r^4)/2$. 3) $\pi hR^4/10$. 4) $\frac{\pi h}{10}\frac{R^5-r^5}{R-r}$. 5) $\pi hR^4/6$. 6) $56\pi/15$. 7) $10\pi p^2h^3/3$.

9.69. 1) $\pi(e^4-1)/8$. 2) $4\pi(3-e)$. **9.70.** 1) $8\pi ab^4/15$. 2) $8\pi a^4b/15$. **9.71.** $\pi^2dr^2(4d^2+3r^2)/2$. **9.72.** 1) $\pi hR^2(3R^2+4h^2)/12$. 2) $\pi hR^2(3R^2+2h^2)/60$. **9.73.** 1) На оси конуса на расстоянии $4\sqrt{3}\,r/9$ от большего основания. 2) На оси конуса на расстоянии $\sqrt{3}\,r/3$ от большего основания. **9.74.** 1) На оси симметрии на расстоянии $h/2$ от плоскостей сечений. 2) На оси вращения на расстоянии $29\sqrt{3}\,R/105$ от вершины. **9.75.** 1) $x_C=0$, $y_C=\pi R/4$, $z_C=\pi h/8$. 2) $x_C=0$, $y_C=5R/8$, $z_C=5h/16$. **9.76.** 1) $2\pi hR^3$. 2) $\pi R^3\sqrt{R^2+h^2}/2$. 3) $8\pi R^4/3$. **9.81.** 1) $4\pi^2rd$. 2) $2\pi^2r^2d^2$. **9.82.** $2\pi^2abd$. **9.83.** На оси симметрии на расстоянии $\frac{2r\sin(\alpha/2)}{\alpha}$ от центра. **9.84.** На оси симметрии на расстоянии $4r/3\pi$ от центра. **9.85.** $S=6\pi da$, $V=\sqrt{3}\,\pi da^2/2$. **9.86.** $S=\pi na^2\,\mathrm{ctg}\,(\pi/n)$, $V=\frac{\pi}{4}na^3\,\mathrm{ctg}^2(\pi/n)$. **9.87.** $S=4\sqrt{2}\,\pi a^2\sin\varphi$,

$V=\sqrt{2}\,\pi a^3 \sin\varphi$. **9.88.** $\pi a^3/2$. **9.89.** $S=32\pi^2a^2$, $V=12\pi^3a^3$. **9.90.** $S=6\sqrt{2}\,\pi a^2$, $V=3\sqrt{2}\,\pi^2a^3/8$. **9.91.** 2. **9.92.** $ml^2\omega^2/6$. **9.93.** $mr^2\omega^2/4$. **9.94.** $\rho ab^3\omega^2/3$. **9.95.** $mb^2\omega^2/6$. **9.96.** $\pi\rho R^2(R^2+4d^2)\omega^2/8$. **9.97.** $\rho ah^3\omega^2/24$. **9.98.** $mr^2\omega^2/4$. **9.99.** $mR^2\omega^2/5$. **9.100.** $m(R^2+l^2/3)\omega^2/4$. **9.101.** $m(2r^2+5(l+r)^2)/10$. **9.102.** $3m(r^2+4h^2)\omega^2/40$. **9.103.** 1) $\rho gah^2/2$. 2) $2h/3$. **9.104.** $\rho gab(b+2h)/2$. **9.105.** $\rho gab^2/6$. **9.106.** 1) $\rho gab^2/3$. 2) $3b/4$. **9.107.** 1) $\rho gh^2(2a+b)/6$. 2) $\dfrac{h}{2}\dfrac{3a+b}{2a+b}$. **9.108.** 1) $\pi\rho ghr^2$. 2) $h+\dfrac{r^2}{8h}$. **9.109.** $2\rho ga^2b/3$. **9.110.** $\rho gab\times\times\left(h+\dfrac{b}{2}\sin\alpha\right)$. **9.111.** $\dfrac{V}{a}\ln\dfrac{R+aT}{R}$. **9.112.** $\dfrac{VT}{\alpha R_0(\theta_2-\theta_1)}\ln\dfrac{1+\alpha\theta_2}{1+\alpha\theta_1}$. **9.113.** $4\pi\rho_0(a^2R^2+2Ra+2)/a^3$. **9.114.** $\theta(t)=\theta_{\text{ср}}+(\theta_0-\theta_{\text{ср}})e^{-kt}$. **9.115.** 1 час. **9.116.** $m(t)=n-(n-m)e^{pt/V}$. **9.117.** $T=-(\ln 2)/\ln(1-0{,}01n)$. **9.118.** $b\left(1-e^{-k(a-b)t}\right)\Big/\left(1-\dfrac{b}{a}e^{-k(a-b)t}\right)$. **9.119.** $\mu(t)==\mu_0/(\mu_0+(1-\mu_0)e^{kt})$. **9.120.** $\dfrac{16384}{16385}\approx 0{,}99994$. **9.121.** 1) $I=I_0e^{-Rt/L}$. 2) $I=\dfrac{V}{R}\left(1-e^{-Rt/L}\right)$. **9.122.** $\gamma Mm/b\sqrt{a^2+b^2}$ *). **9.123.** $2\gamma\rho m/l$. **9.124.** 1) $\sqrt{10}\,\gamma mM/(60a^2)$. 2) $AD=3a/2$, $m_D=8\sqrt{10}\,M/9$. **9.125.** $2\gamma\rho m/h$. **9.126.** $2\gamma m\alpha$. **9.127.** $2Mm\gamma/\pi r^2$. **9.128.** $2\pi\gamma\rho mar/(a^2+r^2)^{3/2}$.

9.129. $2\pi\gamma\rho m\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\right)$. **9.130.** $2\pi\gamma\rho m/a$. **9.131.** $-q/\pi\varepsilon_0 a$.

9.132. $h(v_1-v_2)/v_1v_2\ln(v_1/v_2)$. **9.133.** $\dfrac{7}{3}\sqrt{\dfrac{2R}{g}}$. **9.134.** $\dfrac{T}{2ak}\ln\dfrac{a+\omega_0}{a-\omega_0}$, $a=\sqrt{M/k}$. **9.135.** $2\omega_0 l/3gk$. **9.136.** $m_0e^{-(v_1-v_0)/u}$. **9.137.** $u\ln(M/m)$. **9.138.** $\dfrac{m_0}{\mu}\left(v_0-u+ue^{-v_0/u}\right)$. **9.139.** $m_1\left(1-e^{\lambda(T)}\right)^{-1}$, $\lambda(T)=(v_1-v_0+gT)/u$. **9.140.** $m(t)=m_0e^{-\lambda(t)}$, $\lambda(t)=gRt/uv_0(R+v_0t)$. **9.141.** 1) $\dfrac{1}{\alpha^3}\times\times\left(v_0+\dfrac{3m_0g}{5kr_0}(\alpha^5-1)\right)$. 2) $\dfrac{1}{\alpha^3}\left(v_0+\dfrac{3m_0g}{4kr_0^2}(\alpha^4-1)\right)$. **9.142.** 1) $\dfrac{9}{5}k_2\sqrt[3]{k_1a^5}$. 2) $\dfrac{27}{7}k_2\sqrt[3]{k_1^2a^7}$. 3) $\dfrac{32}{5}k_2\sqrt{k_1a^5}$. **9.143.** 1) $\dfrac{pH}{2}\ln 2$. 2) $\dfrac{pH}{\varkappa-1}(2^{\varkappa-1}-1)$.

9.144. 1) $\dfrac{p_1p_2}{p_2-p_1}\ln(p_2/p_1)$. 2) $\dfrac{p_1}{\varkappa-1}\,\dfrac{(p_2/p_1)^{(\varkappa-1)/\varkappa}-1}{1-(p_1/p_2)^{1/\varkappa}}$.

9.145. $\dfrac{qq_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_2}-\dfrac{1}{R_1}\right)$. **9.146.** mgR. **9.147.** 1) $Gh^2/2(H-h)$. 2) $G(H-h)/2$. **9.148.** $GH/6$. **9.149.** 1) $h_1\geqslant 0{,}5H$. 2) $h_1\geqslant 5h+0{,}5H$. **9.150.** $\pi\rho ghR^2(H-h/2)$. **9.151.** $GR(1+4/3\pi)$. **9.152.** $\pi\rho gR^2H^2/12$. **9.153.** 1) $\pi\rho gR^4/4$. 2) $\pi\rho gR^2H^2/6$. **9.154.** $\dfrac{2}{3}\sqrt{2g}\,b\left((H+h)^{3/2}-H^{3/2}\right)$.

9.155. $\dfrac{\pi R^2}{S}\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$. **9.156.** $(2+\sqrt{2})\,t$ мин. **9.157.** $\dfrac{\pi R^2}{5S}\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$.

9.158. $r=C\sqrt[4]{h}$ — радиус поперечного сечения на высоте h.

---

*) γ — постоянная закона тяготения.

9.159. $\frac{\pi}{\omega} U_0 I_0 \cos\varphi$, $\varphi_{\max}=0$. **9.160.** $U_0/\sqrt{2}$. **9.161.** 1) $LI_0^2/2$. 2) $\frac{LV^2}{R^2}(\ln 2 - 3/8)$. **9.162.** $(\tau/\ln 2)\ln(\tau V^2/(\tau V^2 - 3cm\theta_0 R\ln 2))$. **9.163.** $ESl^2/2L$. **9.164.** $\rho g L^2/2E$. **9.165.** $Pl^2/4l_0$. **9.166.** $\Delta l = Pl/\pi RrE$, $U = P^2 l/2\pi RrE$. **9.167.** $\rho g H^2(R+2r)/6ER$. **9.168.** 1) $S(x) = \frac{P}{\sigma_0} e^{\gamma(l-x)/\sigma_0}$. 2) $S(x) = \frac{P}{\sigma_0} e^{-\gamma(l-x)/\sigma_0}$.

9.169. 1) $\frac{2}{3}\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}\mu\omega P$. 2) $\frac{\mu}{2}\omega P(R+r)$. **9.170.** $T_{\max} = T_1 e^{\mu\varphi_0}$. **9.171.** $T = 2\sqrt{l/g}\,F(\pi/2,\ k) = 2\sqrt{l/g}\,\mathrm{K}(k)$, $k = \sin(\alpha/2)$; $T \approx \pi\sqrt{l/g}$. **9.172.** $r = \sqrt{(kI/E)\sin 2\varphi}$.

§ 10. Приближенное вычисление интегралов. Оценки интегралов

10.1. 1) а) 4/9, 1/18; б) 5/8, $-1/8$; в) 109/216, 1/216. 2) а) $\pi\sqrt{2}/4$, $1-\pi\sqrt{2}/4 = -0{,}1107\ldots$; б) $\pi/4$, $1-\pi/4 = 0{,}2146\ldots$; в) $\pi(2\sqrt{2}+1)/12$, $1-\pi(2\sqrt{2}+1)/12 \approx -0{,}00228$. **10.2.** а) $\delta = 80{,}8$, $\Delta_0 - \delta = 119{,}2$; б) $\delta = 163{,}2$, $\Delta_0 - \delta = 236{,}8$; в) $\delta = 128/15$, $\Delta_0 - \delta = 0$. **10.3.** а) $\delta \approx 1{,}08$, $\Delta_0 - \delta \approx 3{,}84$; б) $\delta \approx 2{,}27$, $\Delta_0 - \delta \approx 7{,}58$; в) $\delta \approx 0{,}43$, $\Delta_0 - \delta \approx 2{,}2$. **10.4.** 1) $-6{,}3555$. 2) $-6{,}1390$. 3) $-6{,}2859$. **10.5.** 1) 0,9464. 2) 0,9454. 3) 0,9461. **10.6.** 1) 1,219; $2\cdot 10^{-4}$. 2) 1,218; $3\cdot 10^{-3}$. 3) 1,218951; 10^{-5}. **10.7.** 1) 6,37. 2) 2,023. 3) 1,603. 4) 0,23. 5) 16,1. 6) 0,822. **10.8.** 1) 2,16. 2) 2,002. 3) 0,3296. 4) 3,482. 5) 0,8350. 6) 4,6677. 7) 1,4675. **10.9.** 1) 2,4859. 2) 0,837. 3) 0,8821. 4) 16,5. 5) 0,8225. 6) 5,4024. 7) 0,2288. **10.10.** 1) 1,37039. 2) 0,91597. **10.11.** 1) 0,74686; 0,74682. 2) 0,8788; 0,8862. **10.12.** 1) а) 1,35067, 1,35064; б) 1,467463; 1,467462. 2) а) 1,685742; 1,685750; б) 1,993875; 1,995299; в) 2,270833; 2,280373. **10.13.** 1) $0 < \Delta < 0{,}16$. 2) $0 < \Delta < 0{,}053$. 3) $-3{,}59\cdot 10^{-2} < \Delta < 0$. 4) $5{,}3\cdot 10^{-5} < \Delta < 1{,}9\cdot 10^{-2}$. 5) $1{,}67\cdot 10^{-2} < \Delta < 0{,}82$. 6) $9{,}12\cdot 10^{-5} < \Delta < 8{,}06\cdot 10^{-3}$. **10.14.** 1) $-1{,}67 < \Delta < -2{,}28\cdot 10^{-3}$. 2) $-9{,}77\cdot 10^{-3} < \Delta < -1{,}29\cdot 10^{-3}$. 3) $-6{,}95\cdot 10^{-3} < \Delta < 1{,}61\cdot 10^{-5}$. 4) $-9{,}59\cdot 10^{-3} < \Delta < 3{,}12\cdot 10^{-3}$. 5) $-7{,}37\cdot 10^{-3} < \Delta < 0$. **10.15.** 1) $-1{,}3\cdot 10^{-5} < \Delta < -0{,}91\cdot 10^{-5}$. 2) $1{,}01\cdot 10^{-5} < \Delta < 8{,}23\cdot 10^{-4}$. 3) $-1{,}042\cdot 10^{-3} < \Delta < -1{,}08\cdot 10^{-6}$. 4) $-1{,}02\cdot 10^{-2} < \Delta < -3{,}26\cdot 10^{-5}$. 5) $-0{,}667\cdot 10^{-5} < \Delta < 0{,}472\cdot 10^{-5}$. 6) $1{,}45\cdot 10^{-7} < \Delta < 5{,}13\cdot 10^{-6}$. **10.16.** 1) 1/20. 2) $\pi/42$. 3) 1/50. 4) 1/8. **10.17.** 1) 1. 2) 3/55. 3) 1/13. 4) 1/18. **10.18.** 1) $\pi/4$. 2) 1/6. 3) 0,1. 4) 1/5. **10.19.** 1,2763, $|\Delta| < 0{,}1615$. **10.20.** 1) 3,746. 2) 0,497. 3) 2,099. 4) 0,524. 5) 0,461. 6) 1,253. **10.21.** 1) 0,916. 2) 2,320. 3) 0,636. 4) 2,682. 5) 0,882. 6) 0,647. **10.22.** 1) 1,610. 2) 2,00027. 3) 2,796. 4) 1,14778. 5) 0,88137. 6) 3,66088. 7) 2,9783. **10.23.** 1) 0,35023. 2) 4,647. 3) 0,7535. 4) 1,228. 5) 2,302. 6) 0,2400. 7) 0,17048. 8) 0,6736. 9) 0,9775. 10) 1,7866. **10.24.** $2\pi R^2$. **10.26.** 4,9348. **10.27.** 1) 9,2936. 2) 4,7262. 3) 4,3676. **10.28.** 5,881; $|\Delta| < 3{,}43\cdot 10^{-4}$. **10.29.** 50,81. **10.30.** 21,477 ($h = 0{,}25$). **10.31.** 4,734 ($h = 0{,}2$). **10.54.** $a > b$. **10.56.** 1) $1/200\pi \approx 0{,}001592$. 2) $-1/40\pi^2 \approx -0{,}002533$. 3) 0,23357. 4) $0{,}19\pi \approx 0{,}597$. **10.58.** 0,16369. **10.59.** 0,90452. **10.62.** 3,3. **10.65.** 0,946082, $0 < \Delta < \frac{1}{3}\cdot 10^{-6}$. **10.66.** 0,235886, $|\Delta| < 0{,}5\cdot 10^{-4}$. **10.67.** 5,6553. **10.68.** 1,91. **10.69.** 1) 1,82. **10.70.** 0,874. **10.78.** $297/272e^4 \approx 0{,}0200$. **10.79.** 0,238. **10.85.** 1,008. **10.88.** 8,625. **10.89.** 0,02792.

Глава III. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 11. Несобственные интегралы от неограниченных функций

11.1. 2. **11.2.** Расходится. **11.3.** $2\ln 3$. **11.4.** Расходится. **11.5.** $\frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3})$. **11.6.** $9\pi/4$. **11.7.** $1/\ln 2$. **11.8.** Расходится. **11.9.** Расходится. **11.10.** $-3/2$. **11.11.** 4. **11.12.** Расходится. **11.13.** $-2e^{-1}$. **11.14.** Расходится. **11.15.** $\pi^2/8$. **11.16.** $\sqrt{2\pi}$. **11.17.** 625/187. **11.18.** $2\ln(\sqrt{2}-1)$. **11.19.** $\pi/2$. **11.20.** $\frac{\pi}{2} - \arcsin(3/4)$. **11.21.** $\pi/\sqrt{15}$. **11.22.** $\pi/(4\sqrt{15})$. **11.23.** $\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)$. **11.24.** 2, если $b \leqslant a$; $(2a)/b$, если $b > a$. **11.25.** $(n-1)!!/n!!$, если n — нечетное; $((n-1)!!\pi)/(n!!\cdot 2)$, если n — четное. **11.26.** $\frac{\pi}{8}(b-a)(a+3b)$. **11.27.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\pi + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$. **11.28.** $\pi/\sqrt{2}$. **11.29.** $\sqrt{2}$. **11.30.** $2\sqrt{\pi}$. **11.31.** 7/9. **11.32.** $5\pi/3$. **11.33.** $((-1)^n n!)/(\alpha+1)^{n+1}$. **11.34.** $-(\pi\ln 2)/2$. **11.35.** $-(\pi^2\ln 2)/2$. **11.36.** $(-1)^{n-1}\pi/(4n)$. **11.37.** $2\sqrt{2}/5$. **11.38.** 10/7. **11.39.** $\pi(a+b)/2$. **11.40.** $33\pi/2$. **11.41.** 2. **11.42.** 1. **11.43.** 2. **11.44.** $(\pi\ln 2)/2$. **11.45.** 4π. **11.46.** 8/3. **11.47.** 12π. **11.48.** 2. **11.49.** $2+\frac{\pi}{2}$. **11.50.** 1) $\pi/4$. 2) $\frac{1}{\pi}$. **11.51.** π. **11.52.** $16\pi^2$. **11.57.** Сходится. **11.58.** Сходится. **11.59.** Сходится. **11.60.** Расходится. **11.61.** Расходится. **11.62.** Сходится. **11.63.** Сходится. **11.64.** Сходится. **11.65.** Расходится. **11.66.** Расходится. **11.67.** Сходится. **11.68.** Сходится. **11.69.** Расходится. **11.70.** Сходится. **11.71.** Сходится. **11.72.** Сходится. **11.73.** Сходится. **11.74.** Расходится. **11.75.** Сходится. **11.76.** Расходится. **11.77.** Сходится. **11.78.** $\alpha < 3$. **11.79.** $\alpha < 7$. **11.80.** $\alpha \leqslant 1/2$. **11.81.** $\alpha = 1/2$. **11.82.** $\sigma < 3$. **11.83.** $\alpha < 4$. **11.84.** $\sigma = 1$. **11.85.** $\alpha = \pm\sqrt{2}$. **11.86.** $\alpha > 0$. **11.87.** $\alpha < 1$. **11.88.** $\alpha < -2$. **11.89.** $\alpha \neq 0$. **11.90.** $\alpha > -2$. **11.91.** $\alpha < 2$. **11.92.** $\alpha < 4$. **11.93.** $\alpha < -2/3$. **11.94.** $\alpha < 0$, $0 < \alpha < 2$. **11.95.** $\alpha < -1$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha > 2$. **11.96.** $\alpha \leqslant 0$, $\alpha \geqslant 1$. **11.97.** $\alpha > -1$, $\beta > -1$. **11.98.** $\alpha > -1$, $\beta > -1$. **11.99.** $\alpha > -1$, $\beta > -1$. **11.100.** $\alpha > -1$, $\beta > -2$. **11.101.** $\beta < 1$, α — любое число; $\beta = 1$, $\alpha < -1$. **11.102.** $\beta < 1$, $\alpha > 0$; $\beta > 1$, $0 < \alpha < 1$. **11.103.** Сходится условно. **11.104.** Расходится. **11.105.** Сходится условно. **11.106.** Сходится условно. **11.107.** Сходится абсолютно при $\alpha > -1$, условно при $-2 < \alpha \leqslant -1$. **11.108.** Сходится абсолютно при $\alpha > -1$, условно при $-2 < \alpha \leqslant -1$. **11.109.** Сходится абсолютно при $\alpha < 1$, условно при $1 \leqslant \alpha < 3/2$. **11.110.** Сходится абсолютно при $\alpha > -1$, условно при $-3 < \alpha \leqslant -1$. **11.111.** Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, условно при $0 < \alpha \leqslant 1$. **11.112.** Сходится абсолютно при $\alpha < 1$, условно при $1 \leqslant \alpha < 2$. **11.113.** Сходится абсолютно при $\alpha > -1$, условно при $-2 < \alpha \leqslant -1$. **11.114.** Сходится абсолютно при $\alpha < 1$, условно при $1 \leqslant \alpha < 2$. **11.115.** Сходится абсолютно при $\alpha > 0$, условно при $-1 < \alpha \leqslant 0$. **11.116.** Сходится абсолютно при $\alpha > -2$, условно при $-3 < \alpha \leqslant -2$. **11.117.** Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, условно при $\alpha < -1$. **11.118.** Сходится абсолютно при $\alpha < 1$, при $\alpha \geqslant 1$ расходится. **11.119.** Сходится условно при $\alpha > -1$, при $\alpha \leqslant -1$ расходится. **11.120.** Сходится абсолютно при $\beta < 1$,

$\alpha<1$; условно при $\beta<1$, $1\leqslant\alpha<2$. **11.125.** $\ln 2$ **11.126.** $1/9$. **11.127.** Если $n=1$, то $\ln((b-c)/(c-a))$; если $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$, то $\frac{1}{n-1}\left((a-c)^{1-n}-(b-c)^{1-n}\right)$; если $n=2k$, $k\in\mathbb{N}$, то интеграл не существует. **11.128.** $\ln 2$. **11.129.** $-\pi\ln 2$. **11.130.** $-(\ln 3)/4$. **11.131.** $\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\ln\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}$. **11.132.** $\alpha>-1$.

§ 12. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

12.1. $1/2$. **12.2.** $\pi/4$. **12.3.** Расходится. **12.4.** $1/(3e^2)$. **12.5.** Расходится. **12.6.** Расходится. **12.7.** Расходится. **12.8.** $2\pi/\sqrt{31}$. **12.9.** Расходится. **12.10.** 1. **12.11.** $1/\ln^2 2$. **12.12.** Расходится. **12.13.** Расходится. **12.14.** π. **12.15.** $\pi/2$. **12.16.** $1/120$. **12.17.** $-\pi/6$. **12.18.** $\pi/4$. **12.19.** $2(1-\ln 2)$.

12.20. $\frac{\ln 7}{6}+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$. **12.21.** $\pi/(2\sqrt{2})$. **12.22.** $1/9$. **12.23.** 6. **12.24.** $\frac{1}{2}e^{\pi/2}$. **12.25.** $\arcsin(1/\sqrt{5})$. **12.26.** $2/3$. **12.27.** $\pi\sqrt{3}/9$. **12.28.** $13\pi/4$. **12.29.** $b/(a^2+b^2)$. **12.30.** $a/(a^2+b^2)$.

12.31. $2b^2/(a(a^2+4b^2))$. **12.32.** $n!$ **12.33.** $4\pi/(3\sqrt{3})$.

12.34. $\frac{(2n-3)!!\,\pi a^{n-1}}{(2n-2)!!\,(ac-b^2)^{n-1/2}}$. **12.35.** $3\pi/4$. **12.36.** $2\pi/(3\sqrt{3})$. **12.37.** $\pi\sqrt{3}/18$.

12.38. $\frac{3\ln 2}{2}-\frac{\pi(3+2\sqrt{3})}{4}$. **12.39.** 0. **12.40.** 0. **12.41.** 0. **12.42.** $\pi/4$.

12.43. 1. **12.44.** $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$. **12.45.** $\frac{\pi}{2}-1$. **12.46.** 24. **12.47.** 1) $\pi/5$. 2) $\pi/(\alpha+2)$.

12.48. $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$. **12.49.** $\frac{1}{2}\frac{e^\pi+1}{e^\pi-1}$. **12.50.** $\pi^2/2$. **12.51.** 1) $\pi^3/(4(1+\pi^2))$. 2) $\frac{\pi e^{2\pi}}{5(e^{2\pi}-1)}$.

12.52. $\pi\left(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right)$. **12.53.** 4π. **12.64.** Сходится. **12.65.** Расходится. **12.66.** Сходится. **12.67.** Сходится. **12.68.** Расходится. **12.69.** Сходится. **12.70.** Сходится. **12.71.** Сходится. **12.72.** Сходится. **12.73.** Сходится. **12.74.** Расходится. **12.75.** Расходится. **12.76.** Расходится. **12.77.** Сходится. **12.78.** Сходится. **12.79.** Сходится. **12.80.** Расходится. **12.81.** Расходится. **12.82.** $\alpha>0$. **12.83.** $\alpha>1$. **12.84.** $\alpha>1$. **12.85.** $\alpha>1$. **12.86.** Расходится при всех значениях α. **12.87.** $\alpha<0$. **12.88.** $\alpha>\sqrt{2}+1$. **12.89.** $1<\alpha<2$. **12.90.** $50<\alpha<102$. **12.91.** $-9/2<\alpha<-3/4$. **12.92.** $\alpha<-2$. **12.93.** $\alpha>-1$. **12.94.** $\alpha>2/5$. **12.95.** $1/2<\alpha<1$. **12.96.** $\alpha>2$. **12.97.** $\alpha\geqslant 0$. **12.98.** $2<\alpha<4$. **12.99.** $0<\alpha<2$. **12.100.** $\alpha>1/2$. **12.101.** $\alpha>1/2$. **12.102.** $\beta<-1/2$, α — любое; $\beta=-1/2$, $\alpha<-1$. **12.103.** $\beta<-1/3$, α — любое; $\beta=-\frac{1}{3}$, $\alpha<-1$. **12.104.** $\alpha>1$, $\beta<1$. **12.105.** $\alpha>-1$, $\beta-\alpha>1$. **12.106.** $\min(\alpha,\beta)<1$, $\max(\alpha,\beta)>1$. **12.107.** $\alpha>-1$, $\beta>-1$, $\alpha+\beta<-1$. **12.108.** $\alpha<0$, $\beta<1/2$. **12.109.** $\beta-\alpha<1$, $\beta\geqslant 0$. **12.110.** $\beta-\alpha>1$, $\beta-4\alpha<0$.

12.111. $\alpha+\beta<1$, $\alpha>-4$. **12.112.** $\alpha>\max(1,\beta)$. **12.113.** Сходится условно. **12.114.** Сходится условно. **12.115.** Сходится условно. **12.116.** Сходится условно. **12.117.** Сходится условно. **12.118.** Сходится условно. **12.119.** Расходится. **12.120.** Сходится условно. **12.121.** Сходится условно. **12.122.** Сходится условно. **12.123.** Сходится условно. **12.124.** Сходится условно. **12.125.** Сходится условно. **12.126.** Сходится условно. **12.127.** Сходится условно. **12.128.** Расходится. **12.129.** Сходится абсолютно при $\alpha < 2$, условно при $2 \leqslant \alpha < 3$. **12.130.** Сходится абсолютно при $\alpha < -1$, условно при $-1 \leqslant \alpha \leqslant 0$. **12.131.** Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, условно при $\alpha \leqslant 1$. **12.132.** Сходится абсолютно при $\alpha < -1$, условно при $-1 \leqslant \alpha < 0$. **12.133.** Сходится абсолютно при $\alpha < -1$, условно при $-1 \leqslant \alpha < 0$. **12.134.** Сходится абсолютно при $\alpha < -1$, условно при $-1 \leqslant \alpha < 0$. **12.135.** Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, условно при $0 < \alpha \leqslant 1$. **12.136.** Сходится абсолютно при $\alpha > 2$, условно при $0 < \alpha \leqslant 2$. **12.137.** Сходится абсолютно при $\alpha > 2$, условно при $-1 < \alpha \leqslant 2$. **12.138.** Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, условно при $1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1$. **12.139.** Сходится абсолютно при $\alpha > 3$, условно при $0 < \alpha \leqslant 3$. **12.140.** Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, условно при $-1 < \alpha \leqslant 1$. **12.141.** Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, условно при $0 < \alpha \leqslant 1$. **12.142.** Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, условно при $0 < \alpha \leqslant 1$. **12.143.** Сходится абсолютно при $\alpha < 0$, условно при $0 \leqslant \alpha < 1$. **12.144.** Сходится абсолютно при $-2 < \alpha < -1$, условно при $-1 \leqslant \alpha < 0$. **12.145.** Сходится абсолютно при $0 < \alpha < 1$, условно при $1 \leqslant \alpha < 2$. **12.146.** Сходится абсолютно при $-1 < \alpha < 0$, условно при $-2 < \alpha \leqslant -1$. **12.147.** Сходится условно при $\alpha = 2/\pi$. **12.148.** Сходится условно при $\alpha = 1/2$. **12.149.** Сходится абсолютно при $\alpha > -2$, $\alpha + 1 < \beta$, сходится условно при $\alpha > -2$, $\alpha < \beta \leqslant \alpha + 1$. **12.150.** Сходится абсолютно при $-1 < (\alpha+1)/\beta < 0$, сходится условно при $0 \leqslant (\alpha+1)/\beta < 1$.

12.158. $\ln(\beta/\alpha)$. **12.159.** $\frac{\pi}{2}\ln(\alpha/\beta)$. **12.160.** $\ln\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\ln 2$. **12.161.** $-\frac{\ln 2}{2}$.

12.163. 0. **12.164.** $\ln(\beta/\alpha)$. **12.165.** $\alpha\beta\ln(\beta/\alpha)$. **12.166.** $\ln\left(\sqrt{|\alpha^2-\beta^2|}/\beta\right)$. **12.168.** Не следует; например, $f(x) = \cos x^2$. **12.171.** Не следует; в качестве $f(x)$ можно взять непрерывную функцию, равную нулю вне отрезков $[n - 1/n^2;\ n + 1/n^2]$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, равную единице при $x = 2, 3, 4, \ldots$ и линейную на отрезках $[n - 1/n^2;\ n]$ и $[n;\ n + 1/n^2]$. **12.172.** В качестве $f(x)$ можно взять, например, сумму функции e^{-x} и функции, построенной в ответе к задаче **12.171.** **12.173.** Например, $f(x) = x\cos x^4$. **12.174.** В качестве $f(x)$ можно взять непрерывную функцию, равную нулю вне отрезков $\left[n - \frac{1}{n^3};\ n + \frac{1}{n^3}\right]$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, равную n при $x = n$ и линейную на отрезках $\left[n - \frac{1}{n^3};\ n\right]$ и $\left[n;\ n + \frac{1}{n^3}\right]$. **12.175.** Не следует, например: $f(x) = (\sin x)/x$, $\varphi(x) = \operatorname{sign}((\sin x)/x)$. **12.176.** Сходится, но признак Дирихле неприменим.

12.179. $\alpha = -\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)\,dt$. **12.192.** 0. **12.193.** Не существует. **12.194.** 0. **12.195.** π.

12.196. $13\pi/\sqrt{17}$. **12.197.** 0. **12.198.** 0. **12.199.** $-\ln 2$.

Глава IV. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 13. Свойства сходящихся рядов

13.1. 1) $S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n$, $S = 1/2$. 2) $S_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$, $S = 3/4$. 3) $S_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{2\cdot 3^n} - \frac{1}{4\cdot 5^n}$. $S = 3/4$. 4) $S_n = \frac{51}{8} - \frac{3}{2^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{8\cdot 3^{n-1}}$, $S = 51/8$. 5) $S_n = \frac{5}{36}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$, $S = 5/36$.

13.2. 1) $S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}$, $S = 1/3$; 2) $S_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right)$, $S = 1/3$. 3) $S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$, $S = 1/4$.

4) $S_n=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right)$, $S=1/60$.

5) $S_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a(a+1)(a+2)}-\frac{1}{(a+n)(a+n+1)(a+n+2)}\right)$, $S=$ $=1/3a(a+1)(a+2)$.

13.3. 1) $S_n=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)$, $S=1/4$. 2) $S_n=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5n+3}\right)$, $S=1/15$. 3) $S_n=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6n+1}\right)$, $S=1/6$. 4) $S_n=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7n+4}\right)$, $S=1/28$.

13.4. 1) $S_n=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$, $S=3/4$. 2) $S_n=\frac{1}{3}-$ $-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}\right)$, $S=1/3$. 3) $S_n=-\frac{1}{12}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n+3}\right)$, $S=-1/12$. 4) $S_n=\frac{2}{21}-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{6n+1}+\frac{1}{6n+7}\right)$, $S=2/21$.

13.5. 1) $S_n=\frac{1}{32}-\frac{4n+3}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$, $S=1/32$. 2) $S_n=$ $=\frac{23}{1200}-\frac{5n+23}{10(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}$, $S=23/1200$.

3) $S_n=1-1/(n+1)^2$, $S=1$; 4) $S_n=\frac{1}{8}(1-1/(2n+1)^2)$, $S=1/8$. 5) $S_n=$ $=\sqrt{n/(n+1)}$, $S=1$; 6) $S_n=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$, $S=1-\sqrt{2}$.

13.6. 1) $S_n=\ln((n+1)/2n)$, $S=-\ln 2$. 2) $S_n=\ln((n+2)/3n)$, $S=-\ln 3$. 3) $S_n=\ln(2(n^2+n+1)/3n(n+1))$, $S=\ln(2/3)$. 4) $S_n=$ $=\ln((2n+1)/(n+1))$, $S=\ln 2$. 5) $S_n=\frac{1}{2}(\sin 2-\sin(1/2^{n-1}))$, $S=\frac{1}{2}\sin 2$.

6) $S_n=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2^n}-\cos\alpha\right)$, $S=\sin^2(\alpha/2)$. 7) $S_n=1-1/(n+2)!$, $S=1$. 8) $S_n=\operatorname{arctg}(n/(n+1))$, $S=\pi/4$.

13.8. 1) 5/36. 2) $-1/36$. 3) 1/90. 4) 31/18. **13.9.** 1) $(-1+i)/4$. 2) $(1+2i)/5$. 3) $1+\frac{1}{2}i$. 4) $-1+i$. **13.10.** 1) $\frac{a(\cos\alpha-a)}{1-2a\cos\alpha+a^2}$. 2) $\frac{a\sin\alpha}{1-2a\cos\alpha+a^2}$. **13.19.** 1) Расходится. 2) Может как сходиться, так и расходиться.

§ 14. Ряды с неотрицательными членами

14.2. 1) Сходится. 2) Сходится. 3) Сходится. 4) Расходится. 5) Сходится. 6) Сходится. 7) Расходится. 8) Сходится. **14.3.** 1) Расходится. 2) Сходится. 3) Сходится. 4) Сходится. 5) Сходится. 6) Сходится. 7) Сходится. 8) Расходится. **14.4.** 1) Расходится. 2) Сходится. 3) Сходится. 4) Расходится. 5) Расходится. 6) Сходится. 7) Сходится. 8) Сходится. **14.5.** 1) Сходится. 2) Расходится. 3) Сходится. 4) Сходится. 5) Расходится. 6) Сходится. 7) Сходится. 8) Сходится. **14.6.** 1) Сходится. 2) Расходится. 3) Расходится. 4) Сходится. 5) Сходится. 6) Сходится. 7) Расходится. 8) Сходится. **14.7.** 1) $\alpha>1/2$. 2) $\alpha>1/3$. 3) $\alpha>1/2$. 4) $\alpha>1/2$. 5) $\alpha>1/2$. 6) $\alpha>1$. 7) $\alpha>1/2$. 8) $\alpha>1/2$. **14.8.** 1) $\alpha>2/3$. 2) $\alpha>1/4$. 3) $\alpha>1/2$. 4) $\alpha>1/2$. 5) $\alpha>1/4$. 6) $\alpha>1/2$. 7) $\alpha>3$. 8) $\alpha>4$. 9) $\alpha>1/4$. 10) $\alpha<1$. 11) $\alpha>-1/3$. 12) $\alpha>1/2$.

14.9. 1) $\alpha > 1/2$. 2) $\alpha > 1/2$. 3) $\alpha > 1/2$. 4) $\alpha > 1/4$. 5) $\alpha > 1/2$. 6) $\alpha > 1$. 7) $\alpha > 1/2$. 8) $\alpha > 1/3$. **14.10.** 1) $\alpha > 3/2$. 2) $\alpha > 5$. 3) $\alpha > 1$. 4) $\alpha > 2/3$. 5) $\alpha > 1/2$. 6) $\alpha > 1$. 7) $\alpha > 1/6$. 8) $\alpha > 1/3$. **14.11.** 1) $\alpha > e$. 2) $\alpha < -1$. 3) $\alpha = -1$. 4) $\alpha = -1$. 5) $\alpha = 0$. 6) $\alpha = 1$. 7) $\alpha < 1$. 8) $\alpha < 0$. **14.12.** 1) $\alpha > -1$. 2) $\alpha = 1$. 3) $\alpha > 1/2$. 4) $\alpha < 1$. 5) $\alpha > 1/2$. 6) $\alpha < 1$. 7) $\alpha > 1/4$. 8) $\alpha < -1/2$. **14.13.** 1) $\alpha < 2$. 2) $\alpha = 1/\sqrt{2}$ и $\alpha = -1/\sqrt{2}$. 3) $\alpha > 1/3$. 4) $\alpha > 0$. 5) $\alpha > 1/2$. 6) При всех $\alpha > 0$. 7) При всех $\alpha > 0$. **14.14.** 1) Сходится. 2) Сходится. 3) Расходится. 4) Сходится. 5) Расходится. 6) Сходится. 7) Расходится. 8). Расходится. **14.15.** 1) $\alpha \geqslant 1/2$. 2) $\alpha > 0$. 3) $\alpha < -1$. 4) $\alpha > 1$. 5) $\alpha > 1$. 6) $\alpha < -2$. 7) $\alpha < -1$. 8) $\alpha > 1$. 9) $\alpha > 1/2$. 10) $\alpha < -1$. **14.17.** $a^2 = bc$. **14.18.** 1) Сходится. 2) Сходится. 3) Сходится. 4) Сходится при $a < e$, расходится при $a > e$. 5) Признак Даламбера не решает вопроса о сходимости данного ряда. 6) Сходится. 7) Сходится. 8) Расходится. **14.19.** 1) Расходится. 2) Расходится. 3) Сходится. 4) Сходится. 5) Расходится. 6) Сходится. 7) Расходится. 8) Сходится. **14.20.** 1) Сходится. 2) Сходится. **14.21.** 1) Сходится. 2) Сходится. 3) Сходится, если $0 < a < 1$, и расходится, если $a \geqslant 1$. 4) Сходится. 5) Сходится. 6) Расходится. 7) Сходится. 8) Сходится. **14.22.** 1) Сходится. 2) Сходится. 3) Сходится. 4) Признак Коши не решает вопроса о сходимости данного ряда. 5) Сходится при любом α. 6) Сходится. **14.23.** 1) Расходится. 2) Сходится, если $\alpha/2 + \beta > 1$, и расходится, если $\alpha/2 + \beta \leqslant 1$. 3) Сходится, если $\alpha(b - a) > 1$, и расходится, если $\alpha(b - a) \leqslant 1$. 4) Сходится, если $\alpha > 1$, и расходится, если $\alpha \leqslant 1$. 5) Сходится. 6) Сходится, если $\alpha + \beta > 2$, и расходится, если $\alpha + \beta \leqslant 2$. 7) Расходится. 8) Расходится. **14.24.** 1) Сходится. 2) Расходится. 3) Сходится. 4) Сходится. 5) Расходится. 6) Расходится. 7) Расходится. 8) Сходится. **14.25.** 1) Сходится. 2) Сходится. 3) Сходится. 4) Расходится. 5) Сходится. 6) Сходится при любом α. 7) Сходится. 8) Расходится. 9) Сходится при $\alpha > 1$ (β — любое) и при $\alpha = 1$, если $\beta > 1$. **14.26.** 1) Сходится. 2) Сходится. 3) Расходится. 4) Сходится. 5) Сходится. 6) Сходится. 7) Сходится, если $\beta > \alpha + 1$, и расходится, если $\beta \leqslant \alpha + 1$. 8) Сходится, если $b > a + c$, и расходится, если $b \leqslant a + c$. **14.27.** 1) Расходится. 2) Сходится. 3) Сходится. 4) Сходится. 5) Сходится. 6) Расходится. 7) Сходится. 8) Расходится. **14.28.** 1) Расходится. 2) Сходится при $\alpha > 2$ и расходится при $\alpha \leqslant 2$. 3) Сходится при $\alpha > 2$ и расходится при $\alpha \leqslant 2$. 4) Сходится при любом β, если $\alpha > 1$, а также при $\beta > 1$, если $\alpha = 1$; при других значениях α и β расходится. **14.30.** Сходится. **14.33.** 1) Сходится. 2) Сходится. 3) Расходится. 4) Сходится. **14.39.** Нет. **14.44.** а) Да. б) Нет.

§ 15. Абсолютно и неабсолютно сходящиеся ряды

15.3. 1) Сходится. 2) Сходится. 3) Сходится. 4) Сходится. 5) Сходится. 6) Сходится. 7) Расходится. 8) Сходится. **15.4.** 1) Сходится. 2) Сходится. 3) Сходится. 4) Сходится. 5) Сходится. 6) Расходится. 7) Сходится. 8) Сходится. **15.5.** 1) Сходится условно. 2) Сходится абсолютно. 3) Сходится условно. 4) Сходится условно. 5) Сходится условно. 6) Сходится условно. **15.6.** 1) Сходится условно. 2) Сходится условно. 3) Расходится. 4) Сходится условно. 5) Расходится. 6) Сходится условно. **15.7.** 1) Сходится условно. 2) Сходится условно. 3) Сходится условно. 4) Расходится. 5) Сходится условно. 6) Сходится условно. **15.8.** 1) Сходится. 2) Сходится. 3) Расходится. 4) Сходится. 5) Расходится. 6) Сходится. **15.9.** 1) Сходится. 2) Сходится. 3) Сходится. 4) Расходится. 5) Расходится. 6) Сходится. **15.10.** Абсолютно сходится при $p > m + 1$, условно сходится при $p = m+1$. **15.11.** Расходится. **15.12.** 1) а) $\alpha > 1$; б) $0 < \alpha \leqslant 1$. 2) а) Нет; б) $\alpha \neq k$, $k \in \mathbb{N}$. 3) а) $\alpha > 1$; б) $0 < \alpha \leqslant 1$. 4) а) $\alpha > 1$; б) $1/2 < \alpha \leqslant 1$. 5) а) $\alpha > 1$; б) $0 < \alpha \leqslant 1$. 6) а) $\alpha > 2$; б) $1 < \alpha \leqslant 2$. **15.13.** 1) а) $\alpha > 1$; б) $1/2 < \alpha \leqslant 1$. 2) а) $\alpha > 1$; б) $0 < \alpha \leqslant 1$. 3) а) $\alpha > 1$; б) $0 < \alpha \leqslant 1$. 4) а) $\alpha > 2$; б) $0 < \alpha \leqslant 2$. 5) а) $\alpha \geqslant 0$; б) $-1 < \alpha < 0$. 6) а) $\alpha > 1$; б) α — любое. **15.14.** 1) а) $\alpha \neq \frac{\pi}{2} +$

$+\pi m,\ m\in Z$; б) $\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in Z$. 2) а) $\frac{\pi}{4}+\pi m<\alpha<\frac{3}{4}\pi+\pi m$, $m\in Z$; б) $\alpha=\pi m+\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4}$, $m\in Z$. 3) а) $\alpha>1$: б) $\alpha=1$. 4) а) $\alpha>1$; б) $\alpha=1$. **15.15.** 1) а) $\beta>\alpha+1$; б) $\alpha<\beta\leqslant\alpha+1$. 2) а) $\alpha>1,\ \beta>1$; б) $0<\alpha=\beta\leqslant 1$. 3) а) $\alpha>1,\ \beta>1$; б) $0<\alpha=\beta\leqslant 1$. **15.20.** 1) $\frac{3}{2}\ln 2$. 2) $\frac{1}{2}\ln 2$. 3) 0. **15.25.** Нет. Пример: $a_n=\frac{2+(-1)^n}{n}$. **15.26.** Нет. Пример: $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, $b_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$.

§ 16. Разные задачи на сходимость рядов

16.1. 1) 5/4. 2) 3/4. 3) 1. 4) 3/2. **16.2.** 1) 1. 2) 5/2.

16.3. 1) $c_n=\begin{cases}\dfrac{b^n-a^n}{b-a}, & b\neq a,\\ na^{n-1}, & b=a.\end{cases}$ 2) $c_n=\frac{n}{n+1}q^n$. 3) $c_n=\frac{5^{n-1}}{(n-1)!}$.

4) $c_n=2^{n-1}/(n-1)!$. 5) $c_n=(-1)^n2^{2n-2}/(2n-1)!$. **16.4.** 1) Да. 2) Нет. **16.11.** 1) $n_0=1000$. 2) $n_0=31$. 3) $n_0=10$. 4) $n_0=6$. **16.12.** 1) $n>10^6$. 2) $n\geqslant 6$. 3) $n\geqslant 7$. 4) $n\geqslant 5$. **16.13.** 1) $r_n\sim 1/(2n^2)$. 2) $r_n\sim 1/(4n^4)$. 3) $r_n\sim 1/(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}$. **16.14.** $a_n=\frac{1}{n\ln(n+1)\ln^2(n+2)}$. **16.15.** 1) Сходится. 2) Расходится. 3) Сходится. **16.17.** 1) $\alpha>2$. 2) $\alpha>2$.

16.20. Нет. Пример: $a_n=\begin{cases}1/n^2, & \text{если } n\neq m^2,\ m\in\mathbb{N},\\ 1/n, & \text{если } n=m^2,\ m\in\mathbb{N}.\end{cases}$ **16.22.** 1) Нет, $a_n=1/n$. 2) Да. 3) Нет; $a_n=n$.

16.23. $$1-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\ldots-\underbrace{\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}-\ldots-\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}}_{n}+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots$$

16.48. 1) $\sigma_{2k-1}=1/2$, $\sigma_{2k}=(k+1)/(2k+1)$, $\sigma=1/2$.

2) $\sigma_n=\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right)^2$, $\sigma=0$.

3) $\sigma_n=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}-\frac{\sin(n+2)\theta-\sin\theta}{4(n+1)\sin^2(\theta/2)}$, $\sigma=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}(\theta/2)$.

Глава V. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

§ 17. Сходимость и равномерная сходимость функциональных последовательностей

17.1. 1) $f(x)=0$. 2) $f(x)=x^4$. 3) $f(x)=x^2/3$. 4) $f(x)=|x|$.

5) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } 0<x<1,\\ \dfrac{\pi}{2}(x-1), & \text{если } x\geqslant 1.\end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } 0\leqslant x<1,\\ x, & \text{если } 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

17.2. 1) $f(x)=0$. 2) $f(x)=1/(2x)$. 3) $f(x)=\ln x$. 4) $f(x)=1/x^2$. 5) $f(x)=(\ln x)/2$. 6) $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } 0\leqslant x<1, \\ x, & \text{если } 1\leqslant x<2, \\ x^2/2, & \text{если } x\geqslant 2. \end{cases}$

17.5. 1) Сходится равномерно к $f(x)=0$. 2) Сходится равномерно к $f(x)=0$. 3) Сходится равномерно к $f(x)=0$. 4) Сходится равномерно к $f(x)=0$. 5) Сходится равномерно к $f(x)=0$. 6) Сходится равномерно к $f(x)=0$. **17.6.** 1) Сходится равномерно к $f(x)=x$. 2) Сходится равномерно к $f(x)=0$. 3) Сходится равномерно к $f(x)=\operatorname{tg} x$. 4) Сходится равномерно к $f(x)=0$. 5) Сходится равномерно к $f(x)=|x|$. 6) Сходится равномерно к $f(x)=\sin(x/2)$. **17.7.** 1) Сходится неравномерно к $f(x)=0$. 2) Сходится неравномерно к $f(x)=0$. 3) Сходится неравномерно к $f(x)=0$. 4) Сходится равномерно к $f(x)=1$. 5) Сходится неравномерно к $f(x)=0$. 6) Сходится равномерно к $f(x)=\ln x$. **17.8.** 1) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 к $f(x)=0$. 2) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 к $f(x)=x^2/2$. 3) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=0$. 4) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 к $f(x)=\pi/2$. 5) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 к $f(x)=0$. 6) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 к $f(x)=1$. **17.9.** 1) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 к $f(x)=1$. 2) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=0$. 3) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 к $f(x)=0$. 4) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 к $f(x)=0$. 5) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 к $f(x)=0$. 6) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=1/x^3$. **17.10.** 1) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=1/x$. 2) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 к $f(x)=-\pi/2$. 3) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=1/x^2$. 4) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=1$. 5) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=0$. 6) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=0$. **17.11.** 1) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=1/x$. 2) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=1$. 3) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 к $f(x)=x$. 4) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=1$. 5) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=0$. 6) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=0$. **17.12.** 1) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=0$. 2) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=0$. 3) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=0$. 4) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=1/x^2$. 5) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=2\ln x$. 6) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 к $f(x)=0$. **17.13.** 1) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 к $f(x)=0$. 2) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 к $f(x)=1$. 3) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 к $f(x)=\pi/4$. 4) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 к $f(x)=x^2$. 5) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 к $f(x)=1/x$. 6) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=0$. **17.14.** 1) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=x$. 2) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=0$. 3) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=\pi/4$. 4) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 к $f(x)=0$. 5) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=0$. 6) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=1/x$. **17.15.** 1) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=0$. 2) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 к $f(x)=0$. 3) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=0$. 4) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=0$. 5) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2 к $f(x)=0$. 6) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 к $f(x)=\ln 3$. **17.16.** 1) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 к $f(x)=0$. 2) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 к $f(x)=x/2$. 3) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 к $f(x)=0$. 4) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 к $f(x)=e^{-x}$. 5) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 к $f(x)=(\ln x)/2$. 6) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2 к $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } 0\leqslant x<1, \\ x, & \text{если } x\geqslant 1. \end{cases}$

17.17. Сходится на множестве $(0; +\infty)$ к

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } 0<x<1, \\ 1/2, & \text{если } x=1, \\ 1, & \text{если } x>1. \end{cases}$$

На E_1 и E_4 — равномерно, на E_2, E_3, E_5 — неравномерно.

17.18. 1) Сходится при $\alpha>0$ к $f(x)=0$, сходится равномерно при $\alpha>1$. 2) Сходится при $\alpha\leqslant 2$ к

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } \alpha<2, \\ x, & \text{если } \alpha=2, \end{cases}$$

сходится равномерно при $\alpha<1$. 3) Сходится при $\alpha\leqslant 1$ к

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } \alpha<1, \\ x, & \text{если } \alpha=1, \end{cases}$$

сходится равномерно при $\alpha<1/2$. 4) Сходится при любом $\alpha\in\mathbb{R}$ к $f(x)=0$, сходится равномерно при $\alpha<1/2$. 5) Сходится при любом $\alpha\in\mathbb{R}$ к $f(x)=0$, сходится равномерно при $\alpha>-1$. 6) Сходится при $\alpha\leqslant 0$ к

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } \alpha<0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } \alpha=0, \end{cases}$$

сходится равномерно при $\alpha<0$. 7) Сходится при $\alpha\leqslant 1$ к

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } \alpha<1, \\ 1/x, & \text{если } \alpha=1, \end{cases}$$

неравномерно. 8) Сходится при $\alpha>0$ неравномерно. 9) Сходится при $\alpha\leqslant 1$ к

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } \alpha<1, \\ 1/(2\sqrt{x}), & \text{если } \alpha=1, \end{cases}$$

сходится равномерно при $\alpha<1/2$. **17.19.** Сходится неравномерно.

§ 18. Сходимость и равномерная сходимость рядов

18.1. 1) Сходится абсолютно при $|x|>1$. 2) Сходится абсолютно при всех $x\in\mathbb{R}$. 3) Сходится абсолютно при $x>0$. 4) Сходится абсолютно при всех $x\in\mathbb{R}$. 5) Сходится абсолютно при $x<-3$ и $x>-1$, сходится условно при $x=-3$. 6) Сходится абсолютно при $1/e\leqslant x\leqslant e$. **18.2.** 1) Сходится абсолютно при $2<|x|<\sqrt{6}$. 2) Сходится абсолютно при $x>1$. 3) Сходится абсолютно при $|x|>\sqrt{e}$. 4) Сходится абсолютно при $x\neq 0$. 5) Сходится абсолютно при $-2<x<-2+e^{-1}$ и при $x>e-2$. 6) Сходится абсолютно на отрезках $|x-k\pi|\leqslant\pi/4$, $k\in\mathbb{Z}$ **18.3.** Сходится абсолютно при $|x|<\sqrt{e-2}$. 2) Сходится абсолютно при $|x|>1$, условно при $x=-1$. 3) Сходится абсолютно при $x>0$. 4) Сходится абсолютно при $|x|\neq 1$, сходится условно при $x=-1$. 5) Сходится абсолютно при $-1/2<x<7/2$. 6) Сходится абсолютно на отрезках $|x-k\pi|\leqslant\pi/6$, $k\in\mathbb{Z}$. **18.4.** 1) Сходится условно при $x\neq 2k\pi (k\in\mathbb{Z})$. 2) Сходится условно при всех $x\in\mathbb{R}$. 3) Сходится абсолютно при $x\geqslant 0$ и при $x=-\pi k$, $k\in\mathbb{N}$. 4) Сходится абсолютно на интервалах $2k\pi<x<(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, сходится условно в точках $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. 5) Сходится абсолютно при $|x|<3$. 6) Сходится абсолютно при $|x|<2$.

18.5. 1) Сходится при $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$. 2) Сходится абсолютно при $x > 1$. 3) Сходится абсолютно при $|x| > 1$. 4) Сходится абсолютно при $|x| < 1$. 5) Сходится абсолютно при $x \neq 0$. 6) Сходится абсолютно при $|x| < 1$. **18.6.** 1) Сходится условно при всех $x \in \mathbb{R}$. 2) Сходится условно при $x \geqslant 0$. 3) Сходится абсолютно при всех $x \in \mathbb{R}$. 4) Сходится абсолютно при $x \geqslant 0$, сходится условно при $-1 < x < 0$. 5) Сходится абсолютно при $|x| > 1$. 6) Сходится абсолютно при $x \neq -1$. **18.13.** 1) Сходится равномерно. 2) Сходится равномерно. 3) Сходится равномерно. 4) Сходится равномерно. 5) Сходится равномерно. 6) Сходится равномерно. **18.14.** 1) Сходится равномерно. 2) Сходится равномерно. 3) Сходится равномерно. 4) Сходится равномерно. 5) Сходится равномерно. 6) Сходится равномерно.

18.15. 1) Сходится равномерно. 2) Сходится равномерно. 3) Сходится равномерно. 4) Сходится равномерно. 5) Сходится равномерно. 6) Сходится равномерно. **18.16.** 1) Сходится равномерно. 2) Сходится равномерно. 3) Сходится равномерно. 4) Сходится равномерно. 5) Сходится равномерно. 6) Сходится равномерно. **18.17.** 1) Сходится равномерно. 2) Сходится равномерно. 3) Сходится равномерно. 4) Сходится равномерно. 5) Сходится равномерно. 6) Сходится равномерно. **18.18.** 1) Сходится неравномерно. 2) Сходится неравномерно. 3) Сходится неравномерно. 4) Сходится неравномерно. 5) Сходится неравномерно. 6) Сходится неравномерно. **18.19.** 1) Сходится неравномерно. 2) Сходится неравномерно. 3) Сходится неравномерно. 4) Сходится неравномерно. 5) Сходится неравномерно. 6) Сходится неравномерно.

18.20. 1) Сходится неравномерно. 2) Сходится неравномерно. 3) Сходится неравномерно. 4) Сходится неравномерно. 5) Сходится неравномерно. 6) Сходится неравномерно. **18.21.** 1) Сходится равномерно. 2) Сходится равномерно. 3) Сходится равномерно. 4) Сходится равномерно. 5) Сходится равномерно. 6) Сходится равномерно. **18.22.** 1) Сходится равномерно. 2) Сходится равномерно. 3) Сходится равномерно. 4) Сходится равномерно. 5) Сходится неравномерно. 6) Сходится неравномерно. **18.23.** 1) Сходится равномерно. 2) Сходится равномерно. 3) Сходится неравномерно. 4) Сходится равномерно. 5) Сходится равномерно. 6) Сходится равномерно. **18.28.** 1) Сходится неравномерно. 2) Сходится равномерно. 3) Сходится равномерно. 4) Сходится равномерно. 5) Сходится неравномерно. 6) Сходится равномерно. **18.29.** 1) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 2) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 3) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 4) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 5) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2. 6) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2.

18.30. 1) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 2) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2. 3) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2. 4) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2. 5) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2. 6) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2. **18.31.** 1) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 2) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2. 3) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2. 4) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 5) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2. 6) Сходится равномерно на E_1 и E_2. **18.32.** 1) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 2) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2. 3) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 4) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 5) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 6) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. **18.33.** 1) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2. 2) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 3) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 4) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2. 5) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 6) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. **18.34.** 1) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2. 2) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2. 3) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 4) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2. 5) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 6) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2.

18.35. 1) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 2) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2. 3) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 4) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 5) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 6) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. **18.36.** 1) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 2) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 3) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2. 4) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2. 5) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 6) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. **18.37.** 1) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 2) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 3) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2. 4) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2. 5) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 6) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. 7) Сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2. 8) Сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2. **18.38.** $\alpha > 2$. **18.39.** 1) Сходится неравномерно. 2) Сходится неравномерно. **18.44.** Нет. **18.49.** Нет. Пример: $u_n(x) = \dfrac{\sin \pi n x}{n}$.

§ 19. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов

19.2. 3/4. **19.3.** $\pi/2$. **19.4.** π. **19.7.** Да. **19.8.** 1) $E = [e^{-1}; e]$, f непрерывна на E. 2) $E = \mathbb{R}$, f непрерывна на E. 3) $E = (-1; 1)$, f непрерывна на E. 4) $E = \mathbb{R}$, f непрерывна на E. **19.9.** 1) $E = \mathbb{R}$, f дифференцируема на E. 2) $E = [0, +\infty)$, f дифференцируема на E. 3) $E = \mathbb{R}$, f дифференцируема на E. 4) $E = \mathbb{R}$, f дифференцируема на E, за исключением $x = 0$. **19.24.** Нет. **19.25.** Да. **19.26.** Да. **19.27.** $\alpha < 2$. **19.28.** Может. Пример:

$$f_n(x) = \frac{1}{n} g(x), \text{ где } g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \\ 1, & \text{если } x \text{ рационально.} \end{cases}$$

19.29. Да. **19.40.** 1) $\pi^2/6$. 2) $-\dfrac{1}{2}\ln 2$. 3) -1. 4) 1.

§ 20. Степенные ряды

20.1. 1) $R = 1$. 2) $R = 1/3$. 3) $R = 2$. 4) $R = 4$. 5) $R = 0$. 6) $R = e^3$. **20.2.** 1) $R = 1$. 2) $R = \infty$. 3) $R = e$. 4) $R = \infty$. 5) $R = 1/\sqrt[4]{2}$. 6) $R = \sqrt[5]{3}$. **20.3.** 1) $R = 4$. 2) $R = \infty$. 3) $R = \infty$. 4) $R = k^{-k}$. 5) $R = 1$. 6) $R = 1$. **20.4.** 1. $R = e$. 2) $R = 1/2$. 3) $R = e$. 4) $R = e^2$. 5) $R = 1/e$. 6) $R = 9$. **20.5.** 1) $R = 1/(4\sqrt[4]{2})$. 2) $R = \sqrt[4]{2}$. 3) $R = 2\sqrt[3]{2/3}$. 4) $R = 1$. **20.6.** 1) $-2 < x < 0$. 2) $1 < x < 5$. 3) $1 - \sqrt{e/2} < x < 1 + \sqrt{e/2}$. 4) $0 < x < 6$. 5) $\pi/6 < x < \pi/2$. 6) $-1 < x < 1$. **20.7.** 1) $R = 1$, $0 < x < 2$. При $x = 0$ и $x = 2$ абсолютно сходится. 2) $R = 3/2$, $-7/2 < x < -1/2$. При $x = -7/2$ и $x = -1/2$ расходится. 3) $R = 1$, $-1 < x < 1$. При $x = 1$ сходится условно, при $x = -1$ расходится. 4) $R = 1$, $-1 < x < 1$. При $x = -1$ и $x = 1$ сходится условно. 5) $R = 3$, $-2 < x < 4$. При $x = -2$ сходится условно, при $x = 4$ расходится. 6) $R = 1$, $-3 < x < -1$. При $x = -3$ и $x = -1$ расходится. **20.8.** 1) $R = 1/5$, $-1/5 < x < 1/5$. При $x = -1/5$ сходится условно, при $x = 1/5$ расходится. 2) $R = 1$, $-2 < x < 0$. При $x = -2$ и $x = 0$ сходится абсолютно. 3) $R = 1$, $-4 < x < -2$. При $x = -4$ и $x = -2$ сходится абсолютно. 4) $R = 1$, $-1 < x < 1$. При $x = -1$ сходится условно, при $x = 1$ расходится. 5) $R = 1/\sqrt{3}$, $1 - 1/\sqrt{3} < x < 1 + 1/\sqrt{3}$. При $x = 1 \pm 1/\sqrt{3}$ расходится. 6) $R = 1/4$, $-5/4 < x < -3/4$. При $x = -5/4$ и $x = -3/4$ расходится. **20.9.** 1) $R = 1/2$, $-5/2 < x < -3/2$. При $x = -5/2$ и

$x=-3/2$ расходится. 2) $R=1$, $-4<x<-2$. При $x=-4$ и $x=-2$ сходится абсолютно. 3) $R=e$, $-e<x<e$. При $x=\pm e$ расходится. 4) $R=1$, $0<x<2$. При $x=0$ и $x=2$ расходится. 5) $R=1/3$, $-4/3<x<-2/3$. При $x=-4/3$ и $x=-2/3$ расходится. 6) $R=1/3$, $-1/3<x<1/3$. При $x=\pm 1/3$ расходится. **20.10.** 1) $R=1$, $0<x<2$. При $x=0$ сходится абсолютно, если $\alpha>1$, и условно, если $0<\alpha\leqslant 1$. При $x=2$ сходится абсолютно, если $\alpha>1$, и расходится, если $\alpha\leqslant 1$. 2) $R=1$, $-1<x<1$. При $x=-1$ сходится абсолютно, если $\alpha>2$, и условно, если $0<\alpha\leqslant 2$. При $x=1$ сходится абсолютно, если $\alpha>2$, и расходится, если $\alpha\leqslant 2$. 3) $R=\min(1/a;\ 1/b)$, $-R<x<R$. При $x=-R$ сходится абсолютно, если $a<b$, и условно, если $a\geqslant b$. При $x=R$ сходится абсолютно, если $a<b$, и расходится, если $a\geqslant b$. 4) $R=\max(a;\ b)$, $-R<x<R$. При $x=\pm R$ расходится. 5) $R=1$, $-1<x<1$. При $x=-1$ сходится абсолютно, если $a\geqslant 0$, и расходится, если $a<0$. При $x=1$ сходится абсолютно, если $a\geqslant 0$, и условно, если $-1<a<0$. 6) $R=2^\alpha$, $-2^\alpha+1<x<2^\alpha+1$. При $x=-2^\alpha+1$ сходится абсолютно, если $\alpha>2$, и расходится, если $\alpha\leqslant 2$. При $x=2^\alpha+1$ сходится абсолютно, если $\alpha>2$, и условно, если $0<\alpha\leqslant 2$. **20.11.** 1) $R=1$, $0<x<2$. При $x=0$ и $x=2$ сходится абсолютно. 2) $R=1$, $-1<x<1$. При $x=\pm 1$ сходится условно. 3) $R=0$, $x=0$. 4) $R=1$, $0<x<2$. При $x=0$ расходится, а при $x=2$ сходится условно. 5) $R=1$, $0<x<2$. При $x=0$ расходится, а при $x=2$ сходится условно. **20.12.** 1) $-1<x<1$. 2) Если $a>1$, то $0\leqslant x\leqslant 2$, а если $a\leqslant 1$, то $0<x<2$. 3) $-\infty<x<+\infty$. **20.13.** Интервал сходимости $-1<x<1$. При $x=-1$ сходится абсолютно, если $\gamma-(\alpha+\beta)>0$, и сходится условно, если $-1<\gamma-(\alpha+\beta)\leqslant 0$. При $x=1$ сходится абсолютно, если $\gamma-(\alpha+\beta)>0$, и расходится, если $\gamma-(\alpha+\beta)\leqslant 0$. **20.14.** 1) $e^{-3}<x\leqslant e^3$. 2) $x>0$. 3) $|x-1|>1/2$. 4) $x>-1$. 5) $\pi/3+\pi k<x<2\pi/3+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 6) $|x-k\pi|<\pi/4$, $k\in\mathbb{Z}$. **20.15.** 1) R^k. 2) $\sqrt[k]{R}$. 3) $\max(R;\ 1)$. **20.16.** 1) $R\geqslant\min(R_1;\ R_2)$. 2) $R\geqslant R_1R_2$. **20.21.** 1) $R=|a|$. 2) $R=\sqrt[m]{|a|}$. 3) $R=1/\sqrt{3}$. 4) $R=1/\sqrt{2}$. **20.22.** 1) $R=1$. 2) $R=\sqrt{2}$. 3) $R=2$. 4) $R=\sqrt{3}$. 5) $R=1$. 6) $R=\sqrt{7}$. **20.25.** Нет. **20.29.** 1) $A=1/2$. 2) $A=\begin{cases}0, & \text{если } \theta\neq 0,\\ +\infty, & \text{если } \theta=0.\end{cases}$

3) $A=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}(\theta/2), & \text{если } \theta\neq 0,\\ 0, & \text{если } \theta=0.\end{cases}$

§ 21. Ряд Тейлора

21.4. 1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$, $R=\infty$. 2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^{n+2}$, $R=1$.

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{3n}$, $R=1$. 4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$, $R=1$.

5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2(2n+1)}}{3^{2n+1}(2n+1)!}$, $R=\infty$. 6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(2n)!}x^{2n}$, $R=\infty$.

7) $\displaystyle x^3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+3}$, $R=\dfrac{1}{2}$. 8) $\displaystyle 1-\frac{x^2}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^{n2}$ $R=1$.

21.5. 1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{n!}(2^{n-1}+(-1)^n)x^n$, $R=\infty$. 2) $1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!}x^n$, $R=\infty$.

3) $x^2\ln 4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2(n+1)}}{n4^n}$, $R=2$,

4) $-x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, $R=1$. 5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{3(2n+1)}$, $R=1$.

6) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$, $R=1$. 7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$, $R=\infty$.

8) $\frac{\pi}{2}-x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $R=1$.

21.6. 1) $-2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7(-1)^{n-1}}{2^n}x^n$, $R=2$.

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}((-1)^{n+1}-3^{-(n+1)})x^n$, $R=1$.

3) $\sum_{n=0}^{\infty}((-1/3)^{n+1}-2^{n+1})x^n/7$, $R=1/2$. 4) $\sum_{n=0}^{\infty}((-1)^n 3^{-(n+1)}-2^{-n})x^n$, $R=2$. 5) $\sum_{n=0}^{\infty}(2^{-(n+1)}+3^{-(n+1)})x^n$, $R=2$.

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+2}}x^{2n}$, $R=\sqrt{2}$. 7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}x^n$, $R=1$.

8) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-(-5)^{-n-1}}{6}\right)x^{2n}$, $R=1$.

21.7. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\operatorname{sh}(n\ln 3)\cdot\frac{x^{2n-2}}{4}$, $R=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\operatorname{sh}(n\ln 2)\cdot\frac{2x^{2n-1}}{3}$, $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\right)\cdot\frac{x^{2n}}{5}$, $R=1$.

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n+1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)x^n$, $R=1$.

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} + (-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}\right)$,

$R = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2x^n}{\sqrt{3}} \sin\frac{2\pi(n+1)}{3}$, $R=1$.

21.8. 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right)\frac{x^{2n}}{4} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}} - 1\right)\frac{x^{2n+1}}{4}$, $R=1$.

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\cdot\left(\frac{1}{2^{n+3}}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3\cdot 2^{n+3}}\right)x^n$, $R=1$.

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = \begin{cases} -1, & \text{если } n=2k, \\ 1+\dfrac{(-1)^k}{2^{k+1}}, & \text{если } n=2k+1; \end{cases}$ $R=1$.

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{5n} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{5n+1}$, $R=1$.

21.9. 1) $\ln\frac{3}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\frac{x^n}{n}$, $R=\frac{2}{3}$.

2) $\ln 12 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4^{-n} - 3^{-n}}{n}x^n$, $R=3$.

3) $\ln 2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{-n}+2^{n-1}}{n}x^{2n}$, $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4) $\ln 2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}((-1)^n - 2^{-n})\frac{x^{2n}}{n}$, $R=1$.

5) $\ln 2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2k-1}, & \text{если } n=2k-1, \\ \dfrac{1}{2k}+\dfrac{(-1)^{k-1}}{k2^k}, & \text{если } n=2k; \end{cases}$ $R=1$.

6) $5\ln\frac{9}{4} + \left(\frac{25}{36}+\ln\frac{9}{4}\right)x^2 +$

$+\sum\limits_{n=2}^{\infty} x^{2n}\left(\frac{5}{n}(4^{-n}-9^{-n}) + \frac{1}{n-1}(4^{1-n}-9^{1-n})\right)$, $R=2$.

21.10. 1) $-2\ln 2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}((-1)^{n+1}2^n + 2^{1-n})\frac{x^n}{n}$, $R=\frac{1}{2}$.

2) $\ln 2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}((-2)^{-n}-2)\frac{x^n}{n4^n}$, $R=4$.

3) $\ln\frac{5}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}-\frac{1}{5^n}+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\frac{x^n}{n},\quad R=\frac{4}{3}.$

4) $\frac{1}{7}\ln 3-\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}+\frac{1}{14}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n+1}-3^{-2n}}{n}x^{2n}, R=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

21.11. 1) $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n!)}x^{2n},\quad R=\infty.$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n-1}}{(2n)!}(1-2^{4n})x^{2n},\quad R=\infty.$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4(2n)!}(1+3^{2n+1})x^{2n+1},\quad R=\infty.$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{2n+1}-1}{2(2n+1)!}x^{2n+2},\quad R=\infty.$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3(3^{2n}-1)}{4(2n+1)!}x^{2n+1},\quad R=\infty.$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^n2^{2(n-1)}}{(2n)!}(1+3^{2n-1})x^{2n+1},\quad R=\infty.$

21.12. 1) $x^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}x^{2n+2}}{(2n)!},\quad R=\infty.$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n)!},\quad R=\infty.$ 3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(1+3^{2n-1})}{4(2n)!}x^{2n},\quad R=\infty.$

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{5(-1)^n}{16(2n+1)!}(5^{2n}-3^{2n+1}+2)x^{2n+1},\quad R=\infty.$

21.13. *a.*

21.14. 1) $x\ln\sqrt{2}+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{x^{2n}}{2n-1},\quad R=\sqrt{2}.$

2) $x\ln 3+\frac{x^3}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{3^{2n+1}(2n+1)(2n)!!}x^{4n+3},\quad R=\sqrt{3}.$

3) $\ln 3+\frac{x^3}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!\,3^{2n+1}(2n+1)}x^{6n+3},\quad R=\sqrt[3]{3}.$

4) $3\ln 2+\frac{1}{8}\left(x^3+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^{7n}(2n+1)\,n!}x^{6n+3}\right),\quad R=2.$

5) $-2x^2+2x^4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!\,2^{2n+1}}{(2n)!!\,(2n+1)}(x^{4n+4}-x^{4n+2}),\quad R=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

6) $\frac{\pi}{2}x^2-2x^3-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!\;x^{2n+3}}{(n!)^2\,(2n+1)},\qquad R=\frac{1}{2}.$

7) $1+2x+x^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)}x^{4n+2},\qquad R=1.$

21.15. 1) $1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{x^{2n+2}}{2n+1},\qquad R=1.$

2) $-1+\frac{\pi}{2}x-\frac{x^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!\,x^{2n+2}}{(2n+2)!!\,(2n+1)},\qquad R=1.$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\,(2n-1)}x^{2n},\qquad R=1.$

4) $-\frac{3}{2}+x-\frac{x^3}{6}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n+1)\,(2n)!!}x^{2n+1},\qquad R=1.$

5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1},\qquad R=1.\qquad$ 6) $\ln\pi+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{2^{4n}\,(4n+1)},\qquad R=2.$

21.16. 1) $-1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{x^{2n+2}}{2n+1},\qquad R=1.$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^{2n+2}}{(2n+1)!}x^{2n+1},\qquad R=\infty.$

3) $4\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n\,(2n-1)\,2^{2n-1}},\qquad R=2.$

4) $4\ln 2+4x+\frac{x^3}{6}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,(2n-3)!!}{2^{3n-2}\,n!\,(2n+1)}x^{2n+1},\qquad R=2.$

5) $5+x+\frac{x^3}{6}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n\,(2n+1)\,n!}x^{2n+1},\qquad R=1.$

21.18. 1) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-2^{-(n+1)}\right)(x-1)^n,\qquad R=1.$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,2^{-(n+2)}\,(n+1)\,(x-1)^{2n}.\qquad R=\sqrt{2}.$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(n+1)\,9^{-(n+2)}\,(x-3)^{2n},\qquad R=3.$

4) $1+(x-1)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x-1)^{2n}, \quad R=1.$

21.19. 1) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{n!\,2^{3n+1}}(x-6)^{2n}, \quad R=2.$

2) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{n!\,2^{3n+1}}(x-5)^{2n}, \quad R=2.$

3) $\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{3\cdot 18^n\,n!}(x-3)^{2n}, \quad R=3.$

4) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^{3n+1}\,n!}(x-2)^{2n}, \quad R=2.$

5) $\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,1\cdot 4\ldots(3n-2)}{3^{4n+1}\,n!}(x-3)^{2n}, \quad R=3\sqrt{3}.$

6) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,1\cdot 4\ldots(3n-2)}{2\cdot 24^n\,n!}(x-1)^{2n}, \quad R=2\sqrt{2}.$

21.20. 1) $\frac{1+\cos 2}{2}(x+1)+\cos 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^{2n-1}}{(2n)!}(x+1)^{2n+1}+$

$$+\sin 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^{2n}(x+1)^{2n+2}}{(2n+1)!}, \quad R=\infty.$$

2) $-(1-\cos 1)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,2^{2n}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{(2n)!}, \quad R=\infty.$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^n}{4\sqrt{2}\,(2n+1)!}(1+3^{2n})\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}+$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^n}{4\sqrt{2}\,(2n)!}(1-3^{2n-1})\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}, \quad R=\infty.$$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^{2n-1}}{(2n)!}(2^{2n-2}-1)\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^{2n}, \quad R=\infty.$

21.21. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x+1)^{2n}, \quad R=1.$

2) $\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{n2^n}, \quad R=\sqrt{2}.$

3) $\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^{-n}}{n}(x-3)^n, \quad R=1.$

4) $\ln 5+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^{2n}}{n5^n}, \quad R=\sqrt{5}.$

5) $\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)(x-1)^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n+1}}{2n+1}, \quad R=1.$

21.22. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n, \quad R=1.$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)x^n, \quad R=1.$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right)(x^{2n-1}+x^{2n}), \quad R=1.$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad R=1.$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)\frac{x^{2n}}{n}, \quad R=1.$

21.24. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2n(2n-1)x^{2n-2}, \quad R=1.$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!\,(2n+1)}{2^n n!}x^{2n}, \quad R=1.$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+3)!!\,2^{3n}}{n!\,(2n+1)}(n+1)x^{2n}, \quad R=1/4.$

21.25. 1) $\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad R=1.$

2) $-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}, \quad R=1/2.$

3) $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}, \quad R=3.$

4) $\operatorname{arctg}2+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad R=1.$

21.26. 1) $\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)\,2^{2n+1}}, \quad R=\sqrt{2}.$

2) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n+1}x^{4n+2}}{(2n+1)\,3^{2n+1}}, \quad R=\sqrt{3/2}.$

3) $\operatorname{arctg}2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,2^{2n+1}}{2n+1}x^{4n+2}, \quad R=1/\sqrt{2}.$

4) $\operatorname{arctg}2+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)\,3^{2n+1}}, \quad R=\sqrt{3}.$

5) $-\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)x^2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,3^{2n+1}}{2n+1}x^{4n+4}, \quad R=\frac{1}{\sqrt{3}}.$

6) $x^3\operatorname{arctg}2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,x^{6n+6}}{2\,(2n+1)\,4^{n}}, \quad R=\sqrt[3]{2}.$

21.27. 1) $\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!\,x^{2n+1}}{(n!)^2\,(2n+1)}, \quad R=\frac{1}{2}.$

2) $\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2\,(2n-1)}x^{2n-1}, \quad R=1.$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1}+\frac{x^{4n+3}}{4n+3}\right), \quad R=1.$

4) $x^3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{x^{2n+3}}{2n+1}, \quad R=1.$

21.28. 1) $\frac{\pi}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\,(-1)^{n+1}}{2n+1}x^{6n+3}, \quad R=1.$

2) $\frac{\pi}{2}-x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!\,x^{2n+1}}{(2n+1)\,(2n)!!}, \quad R=1.$

3) $\frac{\pi}{2}-2x^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!\,2^{2n+1}}{(2n+1)\,n!}x^{4n+2}, \quad R=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

4) $\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!\,x^{2n+1}}{2^{n+1}\,n!\,(2n+1)}, \quad R=1.$

21.29. 1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\,(-1)^{n}}{2n+1}x^{2n+1}, \quad R=1.$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\,x^{2n+1}}{2n+1}, \quad R=1.$

3) $1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{4n+2}\frac{1}{2n+1}, \quad R=2.$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{n+1} x^{6n+4}}{2n+1}, \quad R=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$

5) $2x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad R=1.$

21.30. 1) $\frac{\pi}{16}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{4n-1}}{2n+1}x^{4n+2}, \quad R=\frac{1}{2}.$

2) $\frac{\pi}{2}x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{4n+3}}{4^n(4n+2)}, \quad R=\sqrt{2}.$

3) $\frac{\pi}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)2^{4n+2}}, \quad R=2.$

21.31. 1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}, \quad R=\infty.$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}, \quad R=\infty.$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+4}}{2(n+2)(2n+1)!}, \quad R=\infty.$

4) $-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n(2n)!}, \quad R=\infty.$

5) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}, \quad R=1.$

21.32. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4^n}{n^2}x^n, \quad R=\frac{1}{4}.$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)^2}, \quad R=1.$

3) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!\,x^{4n+1}}{(2n)!!\,(4n+1)}, \quad R=1.$

4) $\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^{n+1}n!(2n+1)}x^{4n+2}, \quad R=1.$

5) $\frac{x^3}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!\,x^{2n+3}}{(2n)!!\,(2n+3)}$, $R=1$.

6) $10\ln 2-5\ln 3-x\ln 3-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)\,3^{2n+1}}$, $R=3$.

21.33. 1) $\ln 2+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^4}{192}+\ldots$ 2) $1+x^2-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{6}x^4+\ldots$

3) $x+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{36}+\frac{x^4}{96}+\ldots$ 4) $1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\ldots$

5) $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\ldots$ 6) $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots$

21.40. 1) $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$. 2) $y=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\operatorname{arctg} x$.

3) $y=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\sin\lambda x$.

4) $y=1-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}-\frac{x^9}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}+\ldots$

5) $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\arcsin x$. 6) $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}$.

21.41. $y=1+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{40}x^5+\ldots$

21.42. $y=1+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{6}(x-1)^3+\frac{1}{8}(x-1)^4+\ldots$

21.43. $y=1+x+x^2+x^3+\frac{5}{4}x^4+\ldots$

21.45. 1) $\sum_{n=0}^{\infty}x^{16n}-\sum_{n=0}^{\infty}x^{16n+1}$, $R=1$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin n\alpha$, $R=1$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos n\alpha$, $R=1$.

4) $-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n}x^n$, $R=1$.

5) $2\operatorname{sign} x\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$, $R=1$.

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n}$, $R=1$.

21.46. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $R=1$.

21.54. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2}\sin(\pi n/4)}{n!} z^n$. 2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(4n)!} z^{4n}$.

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{\sin^n \alpha}\cdot\frac{z^n}{n!}$. 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n!} z^n$.

21.55. 1) $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $|x|<1$. 2) $-\ln(1-x^2)$, $|x|<1$.

21.56. 1) $(1+x)/(1-x)^3$, $|x|<1$. 2) $(1+2x^2)e^{x^2}$.

21.57. 1) x, $x>0$. 2) $1/\sqrt{x}$, $x>0$. 3) $\ln(1/(1-x))$, $-1\leqslant x<1$.

4) $x^2/(1-x)^2$, $|x|<1$. 5) $(1+x)/(1-x)^2$, $|x|<1$. 6) $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}-1$, $|x|\leqslant 1$.

21.58. 1) $x(3-x)/(1-x)^3$, $|x|<1$. 2) $2x/(1+x)^3$, $|x|<1$.

3) $(1+3x^3)e^{x^3}$. 4) $\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\cos x-\frac{x}{2}\sin x$.

5) $e^{x/2}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1\right)$. 6) $\left(x^2+1+\frac{1}{x}\right)e^{-x}-\frac{1}{x}$.

21.59. $(1-x)^{-1/2}$, $-1\leqslant x<1$. 2) $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1/3}-1$, $-2\leqslant x<2$.

3) $1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x)$, $|x|\leqslant 1$. 4) $2x\operatorname{arctg} x-\ln(1+x^2)$, $|x|\leqslant 1$.

5) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+2x}{1-2x}$, $|x|<\frac{1}{2}$.

6) $\frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}$, $|x|<1$.

21.60. 1) $\frac{x(x+1)(x^2+10x+1)}{(1-x)^5}$, $|x|<1$.

2) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2x}-\frac{(1-x)^2}{2x^2}\ln(1-x)$, $|x|\leqslant 1$.

3) $\frac{1}{3}\ln\frac{1+x}{\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$, $-1<x\leqslant 1$.

4) $\frac{1}{3}\ln(1+x)+\frac{1}{3x^3}\left(\frac{x^2}{2}-x-\frac{x^3}{3}+\ln(1+x)\right)$, $-1<x\leqslant 1$.

5) $\cos\sqrt{x}$, если $x\geqslant 0$; $\operatorname{ch}\sqrt{-x}$, если $x<0$.

6) $\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\operatorname{sh}\sqrt{x}-\operatorname{ch}\sqrt{x}\right)$, если $x\geqslant 0$:

$\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{|x|}}\sin\sqrt{|x|}-\cos\sqrt{|x|}\right)$, если $x<0$.

21.61. $2(\arcsin x)^2$, $|x|\leqslant 1$. 2) $e^{\cos x}\sin(\sin x)$.

21.62. $(1-x-x^2-x^3)^{-1}$, $|x|<1$. **21.63.** 1) $2e$. 2) $3e^2$. 3) $\frac{1}{2}(\cos 1-\sin 1)$.

4) $3/2$. 5) $\pi/2$. 6) $1/\sqrt{2}$.

21.64. 1) $\frac{\pi^2}{3}-3$. 2) $\frac{\pi^2}{4}-\frac{39}{16}$. 3) $2\ln 2-1$. 4) $\ln 2-\frac{1}{2}$. 5) $2(1-\ln 2)$.

6) $\frac{2}{3}\ln 2-\frac{5}{18}$. **21.65.** 1) $2\ln 2$. 2) $\frac{\pi}{2}-\ln 2$. 3) $\frac{8}{9}-\frac{2}{3}\ln 2$.

4) $\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$. 5) $3-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}-\frac{3}{2}\ln 3$. 6) $3-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}-2\ln 2$.
21.66. a_1/x. **21.67.** $x/(1-x)$ при $|x|<1$ и $1/(1-x)$ при $|x|>1$.
21.68. $x^2/(x-1)^2$ при $|x|<1$ и $x/(x-1)^2$ при $|x|>1$. **21.69.** $1/(x-1)$, $x>1$. **21.70.** 1) 1. 2) $2-\frac{\pi^2}{6}$. 3) 1/24. 4) $\pi^2/12$.

21.71. 1) 0,9998. 2) 0,9848. 3) 0,1736. 4) 0,0175. 5) 5,0658. 6) 0,1823. **21.72.** 1) 0,158. 2) 7,937. 3) 0,304. 4) 4,082. 5) 1,609. 6) 0,340. **21.73.** 1) 0,30903. 2) 2,71828. **21.74.** 3,1416. **21.75.** 3,141592654. **21.76.** 1) 0,946. 2) 0,608. 3) 0,905. 4) 1,057. 5) 0,310. 6) 0,927. **21.77.** 1) 3,057. 2) 2,835. 3) 0,488. 4) 0,337. 5) 0,384. 6) 0,507. 7) 0,119. 8) 0,783. **21.79.** 1) Да. 2) Нет. **21.81.** Нет.

§ 22. Тригонометрические ряды Фурье

22.1. 1) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$. 2) $\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$. 3) $\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$.
22.2. Совпадает с $T_n(x)$.

22.3. $$l\left(\frac{3}{16}+\left(-\frac{1}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{l}+\frac{2+\pi}{2\pi^2}\sin\frac{\pi x}{l}\right)+\left(-\frac{1}{2\pi^2}\cos\frac{2\pi x}{l}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{4\pi}\sin\frac{2\pi x}{l}\right)+\left(-\frac{1}{9\pi^2}\cos\frac{3\pi x}{l}+\frac{-2+3\pi}{18\pi^2}\sin\frac{3\pi x}{l}\right)\right).$$

22.4. $x=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$, $-\pi<x<\pi$; 0. **22.5.** $f(x)=\frac{1}{2}+$
$+\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$, $0<|x|<\pi$: 1/2.

22.6. $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$, $0<|x|<\pi$: 0.

22.7. $f(x)=\frac{4a}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$, $0<|x|<\pi$; 0.

22.8. $f(x)=\pi+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$, $-\pi<x<\pi$; π.

22.9. $|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$; π.

22.10. $f(x)=\frac{\pi}{4}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left((1-(-1)^n)\frac{\cos nx}{\pi n^2}+(-1)^n\frac{\sin nx}{n}\right)$, $-\pi<x<\pi$; $\pi/2$. **22.11.** $f(x)=\frac{5\pi}{4}-5\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left((1-(-1)^n)\frac{\cos nx}{\pi n^2}+(-1)^n\frac{\sin nx}{n}\right)$, $-\pi<x<\pi$; $5\pi/2$. **22.12.** $\operatorname{sign} x=\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$.

22.13. $\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\sin\frac{2n-1}{l}\pi x.$

22.14. $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$

22.15. $\frac{(b-a)\pi}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\left((b-a)(1-(-1)^n)\frac{\cos nx}{\pi n^2}+(-1)^n(a+b)\frac{\sin nx}{n}\right).$

22.16. $\frac{a+b}{2}+\frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos(2n-1)x.$

22.17. $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}(1+\pi)}{n}\sin nx.$

22.18. $\frac{2}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx.$

22.19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx.$

22.20. $\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}a\pi\left(\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(a\cos nx-n\sin nx)\right).$

22.21. $\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{2\pi}-1}{n^2+4}\cos nx.$

22.22. $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{n^2-a^2},\quad -\pi<x<\pi.$

22.23. $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\left(\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2-n^2}\right).$

22.24. $1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx.$

22.25. $\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx.$

22.26. $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}.$ 22.27. $2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n\pi}\sin\pi nx.$

22.28. $\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\pi nx.$ 22.29. $\frac{2}{3}-\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin^2\frac{\pi n}{3}\cos\frac{2\pi nx}{3}.$

22.30. 1) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$ 2) $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n}.$

22.31. 1) $\frac{3\pi}{8}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)\cos nx$. 2) $\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

22.32. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}\cos nx=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos(2k+1)x$.

22.33. $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$. **22.34.** $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x$.

22.35. $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{n}$. **22.36.** $\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(4n-2)\pi x}{(2n-1)^2}$.

22.37. $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos 2nx}{4n^2-1}$. **22.38.** $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$.

22.39. $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}\cos nx$. **22.40.** $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

22.41. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)\sin(2n-1)x}{(2n-3)(2n+1)}$. **22.42.** $\frac{\pi}{8}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin^2\frac{\pi n}{4}\cos nx$.

22.43. $\frac{1}{2}\sin x+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k}{4k^2-1}\sin 2kx$.

22.44. $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$.

22.45. 1) $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$. 2) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi^2}{n}-\frac{2(1-(-1)^n)}{n^3}\right)\sin nx$.

3) $\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{\pi\sin nx}{n}\right)$, $S_1=\frac{\pi^2}{6}$; $S_2=\frac{\pi^2}{12}$; $S_3=\frac{\pi^2}{8}$.

22.46. 1) $\frac{1}{3}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\pi nx$.

2) $\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{4}{\pi^2(2n-1)^2}\right)\frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}-\frac{\sin 2\pi nx}{2n}\right)$.

22.47. $\frac{\pi}{2}\sin x-\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx$.

22.49. $\frac{1}{\ln 2}+2\ln 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos n\pi-1}{\ln^2 2+n^2\pi^2}\cos\frac{\pi nx}{\ln 2}$.

22.50. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n}\sin nx.$

22.51. $\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{\pi(2n+1)x}{2}.$

22.52. 1) $\frac{e^{a\pi}-1}{a\pi}+\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{a\pi}-1}{a^2+n^2}\cos nx,\ 0\leqslant x\leqslant\pi.$

2) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(1-(-1)^n e^{a\pi})\frac{n}{a^2+n^2}\sin nx,\ 0<x<\pi.$

22.53. Если a — нецелое, то

$$\sin ax=\frac{2\sin^2\frac{a\pi}{2}}{\pi a}+\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n\cos\pi a)}{a^2-n^2}\cos nx;$$

если a целое и четное: $a=2m$, то

$$\sin 2mx=\frac{8m}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2m)^2-(2n-1)^2};$$

а если $a=2m-1$ — нечетное, то

$$\sin(2m-1)x=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2m-1}+2(2m-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(2m-1)^2-(2n)^2}\right).$$

22.54. $\frac{2}{\pi}\left(\frac{a}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n}\cos nx\right).$ **22.55.** $\frac{2a}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin na}{na}\right)^2\cos nx\right).$

22.57. $f\sim-\frac{2i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(2n+1)x}}{2n+1}.$

22.58. $f(x)=\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-in}e^{inx}.$

22.59. $f(x)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'\,\frac{1-e^{-2\pi ni/3}}{n}e^{2\pi nxi/3}$ ($\sum'$ означает, что суммирование не распространяется на значение $n=0$).

22.60. 1) $1+2\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos nx,\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos nx,\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$

22.61. 1) $-\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n},\ x\neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

2) $\ln|\operatorname{tg}(x/2)| = -2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}$, $x \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

22.66. $f(-x) = f(x)$; $f(\pi - x) = -f(x)$.

22.67. $f(-x) = -f(x)$; $f(\pi - x) = f(x)$.

22.68. 1) $-2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\left(1 + \frac{4(-1)^n}{(2n-1)\pi}\right)\cos(2n-1)x$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2} + \frac{8}{\pi(2n-1)^3}\right)\sin(2n-1)x$.

22.72. 1) $a_n = 0$, $b_{2k-1} = 0$. 2) $a_n = 0$, $b_{2k} = 0$.

22.73. $\alpha_n = a_n$, $\beta_n = -b_n$. **22.74.** $\alpha_n = -a_n$, $\beta_n = b_n$.

22.84. $(e^x - e^{x+\pi})/2$ при $x \in (-\pi;\ 0)$, $1 - (e^{\pi} + e^{-\pi})/2$ при $x = 0$ и $(e^x - e^{x-\pi})/2$ при $x \in (0;\ \pi)$.

22.111. 1) Да. 2) Да. 3) Да. 4) Нет.

22.112. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$. **22.115.** Да.

22.116. 1) $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$. 2) $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{6-\pi^2 n^2}{n^3}\sin nx$.

3) $\frac{\pi^4}{5} + 8\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{6-\pi^2 n^2}{n^4}\cos nx$.

22.123. $a_n = c/n^2 + o(1/n^2)$. **22.133.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \ln n}$.

22.136. $A_0 = a_0^2$, $A_n = a_n^2 + b_n^2$, $B_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

22.137. $A_0 = a_0$, $A_n = a_n \frac{\sin nh}{nh}$, $B_n = b_n \frac{\sin nh}{nh}$, $n \in \mathbb{N}$.

22.138. $\alpha(\pi - \alpha)/2$; $(\pi^2 - 3\pi\alpha + 3\alpha^2)/6$.

22.146. $e^{\cos x}\cos(\sin x)$. **22.147.** $e^{\cos x}\sin(\sin x)$.

22.148. $\sin(\cos x)\operatorname{ch}(\sin x)$. **22.149.** $\cos(\cos x)\operatorname{sh}(\sin x)$.

22.150. $\cos(\cos x)\operatorname{ch}(\sin x)$. **22.151.** $\sin(\cos x)\operatorname{sh}(\sin x)$.

22.152. $(1 + \cos x)\ln(2\cos(x/2)) + \frac{1}{2}x\sin x$.

22.153. $\frac{1}{2}x(1 + \cos x) - \sin x \ln(2\cos(x/2))$.

22.154. $\frac{1}{2}\left(1 - x\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right)$. **22.155.** $\sin x \ln(2\cos(x/2)) - \frac{1}{4}\sin x$.

22.156. $\cos x \ln(2\cos(x/2)) - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos x$. **22.157.** $\frac{1}{2}\left(x\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)$.

22.158. $(\cos x + \cos 2x)\ln(2\cos(x/2)) + \frac{x}{2}(\sin x + \sin 2x) - \cos x$.

22.159. $(\sin x+\sin 2x)\ln(2\cos(x/2))-\dfrac{x}{2}(\cos x+\cos 2x)-\sin x.$

22.160. $\dfrac{1}{2a^2}(\pi-x-\pi\,\mathrm{ch}\,ax+\pi\,\mathrm{cth}\,a\pi\,\mathrm{sh}\,ax).$

22.161. $\dfrac{1}{2a^2}\left(\dfrac{\pi\,\mathrm{sh}\,ax}{\mathrm{sh}\,a\pi}-x\right).$ **22.162.** $\cos x\ln(2\cos x)+x\sin x$, если $0\leqslant x<\pi/2$, и $\cos x\ln(2\,|\cos x\,|)+(x-\pi)\sin x$, если $\pi/2<x\leqslant\pi$.

22.163. $(1-\cos x)\ln(2\sin(x/2))-\dfrac{\pi-x}{2}\sin x+\cos x.$

22.164. $(1-\cos x)\ln(2\sin(x/2))+\dfrac{3}{4}\cos x-\dfrac{1}{2}.$

22.165. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}\sin x.$ **22.166.** $\dfrac{\pi x}{8}(\pi-x).$

22.167. $\dfrac{\pi}{8}\cos^2 x-\dfrac{1}{3}\cos x.$ **22.168.** $\pi/4$, если $0\leqslant x<\pi/2$, и $-\pi/4$, если $\pi/2<x\leqslant\pi$. **22.169.** $\dfrac{1}{4}\ln\mathrm{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right).$

22.170. $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}(\cos x\ln(2\cos x)+x\sin x)$, если $0\leqslant x<\pi/2$, и $-\dfrac{\pi}{4}-$ $-\dfrac{1}{2}(\cos x\ln(2\,|\cos x\,|)+(x-\pi)\sin x)$, если $\pi/2<x\leqslant\pi$.

22.171. $\arcsin\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}=\arccos\sqrt{\sin x},\ 0\leqslant x\leqslant\pi.$

22.172. $\ln\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{\sin x}\right)=\mathrm{arsh}\sqrt{\sin x},\ 0\leqslant x\leqslant\pi.$

22.173. $\arcsin\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}+\sqrt{2\sin x}\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos x.$

22.174. $\ln\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{\sin x}\right)-\sqrt{2\sin x}\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin x.$

22.175. $-\dfrac{1}{2}\ln(1-2a\cos x+a^2).$ **22.176.** $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sin((x+\alpha)/2)}{\sin((x-\alpha)/2)}\right|.$

22.177. $\pi/4$, если $0<x<2\alpha$; 0, если $2\alpha<x<2\pi-2\alpha$; $-\pi/4$, если $2\pi-2\alpha<x<2\pi$. **22.178.** $\mathrm{arctg}\,\dfrac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}.$

§ 23. Асимптотические представления функций

23.7. $\dfrac{3}{8}\ln x.$ **23.14.** Все члены асимптотического ряда равны нулю. **23.25.** Все члены асимптотического ряда функции f равны нулю.

23.26. $a_n=(-1)^{n-1}\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{n-1}c^k.$

23.30. $\dfrac{ie^{ix}}{x^{\alpha}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{(ix)^n}.$

23.31. $e^{-x}x^s\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}{x^n}.$

§ 24. Бесконечные произведения

24.1. 1) Расходится к нулю. 2) Расходится к нулю. 3) Сходится. **24.17.** 1) Нет. 2) Да. 3) Да. 4) Да. **24.31.** 0. **24.32.** Расходится к нулю. **24.33.** 1/4. **24.34.** 2. **24.35.** 3/7. **24.36.** $a^{-\ln 2}$. **24.38.** Расходится к нулю. **24.39.** Сходится. **24.40.** Расходится к нулю. **24.41.** Сходится при любых p. **24.42.** Расходится к нулю. **24.43.** Сходится. **24.44.** Сходится. **24.45.** Сходится. **24.46.** Сходится при $x > 1$, расходится при $x \leqslant 1$. **24.47.** Сходится при $x > 1$, расходится при $x \leqslant 1$. **24.48.** Сходится при любых $x \neq -k$, $k \in \mathbb{N}$. **24.49.** Сходится при любых $x \neq$ [illegible] $+ k$, $k \in \mathbb{N}$. **24.50.** Сходится при $|x| < 1$. **24.51.** Сходится при $|x| < 2$. **24.52.** Сходится при $|x| > e$. **24.53.** Сходится при любых $x \neq \sqrt{k}$, $k \in \mathbb{N}$. **24.54.** Сходится при любых p и любых $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **24.55.** Расходится. **24.57.** Сходится, но не абсолютно. **24.58.** Расходится. **24.59.** Расходится. **24.60.** Расходится. **24.61.** Расходится. **24.62.** Сходится, но не абсолютно. **24.63.** Сходится, но не абсолютно. **24.64.** Абсолютно сходится при $x > 1$; сходится, но не абсолютно при $1/2 < x \leqslant 1$; **расходится к нулю при $0 < x \leqslant 1/2$; расходится при $x \leqslant 0$.**

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость/Под ред. Л. Д. Кудрявцева. — М.: Наука, 1984.
2. Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. 1, 2. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1983.
3. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 1, 2. — М.: Высшая школа, 1981.
4. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — 9-е изд. — М.: Наука, 1977.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2, 3. — 5-е изд. — М.: Наука, 1969.
6. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 1.— 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1982; ч. 2. — 2-е изд. — М.: Наука, 1980.
7. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. — М.: Наука, 1979.
8. Зорич В. А. Математический анализ. Т. 1. — М.: Наука, 1981; т. 2. — М.: Наука, 1984.
9. Рудин У. Основы математического анализа. — М.: Мир, 1966.
10. Полиа Г., Сеге Г. — Задачи и теоремы анализа. Ч. 1, 2. — М.: Наука, 1978.
11. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И., Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1981.
12. Сборник задач по математике для втузов/Под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. — Т. 1. — М.: Наука, 1981; т. 2 — М.: Наука, 1981; т. 3. — М.: Наука, 1984.
13. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Задачник. — М.: Наука, 1982.
14. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1982.
15. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. — Сборник задач по высшей математике. Т. 1. — М.: Физматгиз, 1958; т. 2 — М.: Физматгиз, 1959.
16. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980.

1р. 40 к.