

С. Х. СИРАЖДИНОВ
Г. П. МАТВИЕВСКАЯ

**АЛ-ХОРЕЗМИ-
ВЫДАЮЩИЙСЯ
МАТЕМАТИК
И АСТРОНОМ
СРЕДНЕВЕКОВЬЯ**



С. Х. СИРАЖДИНОВ
Г. П. МАТВИЕВСКАЯ

**АЛ-ХОРЕЗМИ
ВЫДАЮЩИЙСЯ
МАТЕМАТИК
И АСТРОНОМ
СРЕДНЕВЕКОВЬЯ**

Пособие для учащихся

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
1983

ББК 20г
С40

Рецензенты:

академик АН УССР Б. В. Гнеденко,
доктор физ.-мат. наук Б. А. Розенфельд.

Сираждинов С. Х., Матвиевская Г. П.
С40 Ал-Хорезми — выдающийся математик и астроном средневековья: Пособие для учащихся. — М.: Просвещение, 1983. — 79 с., ил. — (Люди науки).

Книга знакомит старшеклассников с жизнью и творчеством выдающегося ученого Средней Азии IX в., раскрывает роль его трудов в развитии арифметики, алгебры, геометрии, математической географии, астрономии. Издание приурочено к 1200-летию юбилею ученого.

С 4306020400—458 176—83

ББК 20г
51(09)

I.

Полное имя ал-Хорезми — Абу Абдаллах (или Абу Джафар) Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми. В переводе с арабского языка это означает: отец Абдаллаха (или отец Джафара), Мухаммад, сын Мусы из Хорезма. Иногда — в соответствии с арабским написанием — его называют ал-Хуваризми.

Биографических сведений об ал-Хорезми история почти не сохранила. До нас не дошли даже точные даты его рождения и смерти. Известно лишь, что он родился в конце восьмого века, а умер во второй половине девятого, точнее после 847 г. Сейчас условно принято считать годом его рождения 783 г., а годом смерти 850 г.

В некоторых исторических источниках ал-Хорезми назван «ал-маджуси», т. е. маг. Из этого заключают, что его предки были магами — жрецами зороастрийской религии, распространенной на территории Средней Азии.

РОДИНА АЛ-ХОРЕЗМИ

Родиной ученого был Хорезм — обширный район Средней Азии, которому соответствует современная Хорезмская область Узбекской ССР (центр — г. Ургенч), часть Каракалпакской АССР той же республики и Ташаузская область Туркменской ССР. В исторических источниках нет упоминания о конкретном месте рождения ал-Хорезми, но некоторые косвенные соображения позволяют допустить, что он происходил из древней Хивы.

В Хорезме к началу IX в. сложились традиции древней и самобытной культуры. Свидетельство этому мы находим в трудах средневековых восточных историков. Великий средне-

азиатский ученый Абу Райхан ал-Беруни¹ (973—1048) относил начало летосчисления хорезмийцев к 1292 г. до н. э. Он же дал краткое описание истории Хорезма.

Более подробные сведения о древней истории этого края получены благодаря археологическим раскопкам, которые начали проводиться здесь в советское время. Ценные находки археологов, дополняющие сообщения средневековых писателей, позволили составить представление о высокоразвитой цивилизации древнего Хорезма².

На территории Хорезма обнаружены остатки грандиозной оросительной системы. Она была создана задолго до начала нашего летосчисления — во II тысячелетии до н. э. По словам К. Маркса, «климатические условия и своеобразие поверхности... сделали систему искусственного орошения при помощи каналов и ирригационных сооружений основой восточного земледелия»³. Развитое поливное хозяйство Хорезма определило высокий уровень всей экономики этого района.

В старинных книгах встречаются сообщения о больших, хорошо укрепленных городах Хорезма — его древней столице Кят (сейчас г. Беруни), Гургандже (современный г. Куля-Ургенч) и др. Так, например, Абу Райхан ал-Беруни писал об огромном замке Фир, построенном вблизи Кята на берегу Амударьи в начале IV в. Окруженный тремя рядами высоких стен, он был виден на расстоянии десяти миль⁴. Ал-Беруни рассказывает, что река постепенно разбила и разрушила эту крепость, унося ее с собой каждый год «по кускам» [1, с. 48].

Советские археологи обнаружили в Хорезме развалины многочисленных крепостей, дворцов и других построек. Размеры этих сооружений и мастерство древних зодчих вызывают удивление и восхищение даже в наши дни.

В городах Хорезма работали ремесленники, которые создали замечательные образцы прикладного искусства. При раскопках найдены также великолепные произведения древних художников и скульпторов.

Хорезмийские купцы вели оживленную торговлю с Индией и Китаем, Ближним Востоком, Кавказом и Восточной Европой. Они вывозили меха, скот, рыбу. В исторических хрониках не раз отмечались их предприимчивость и любознательность, заставлявшая их совершать далекие путешествия.

¹ В литературе наряду с распространенным написанием имени ученого Беруни встречается: Бируни, Бейруни, Байруни.

² В конце предлагаемой книги помещен список литературы, ссылки на которую даны в квадратных скобках.

³ Древнехорезмийской цивилизации посвящена книга С. П. Толстова [14].
⁴ Маркс К. Британское владычество в Индии. — В кн.: Маркс К., Энгельс Ф. Избр. произвед. в двух томах. М., 1955, т. 1, с. 305.

⁴ 1 арабская миля, которую имел в виду ал-Беруни, приблизительно равна 1973 м.

Уже в очень отдаленные времена хорезмийцы владели письменностью. Памятники этой письменности были обнаружены при археологических раскопках и расшифрованы советскими учеными.

У нас нет достоверных сведений ни о науках, известных древним хорезмийцам, ни об уровне развития этих наук. Но история научной мысли находится в неразрывной связи с экономической, социальной и культурной историей общества. Поэтому можно не сомневаться в том, что уже в древности в Хорезме сформировались основы точных наук. Достижения хорезмийцев в области хозяйственной жизни были бы невозможны без определенных познаний в математике, геодезии, астрономии и т. д.

Например, строительство каналов, крепостей, многоэтажных дворцов требовало не только практических навыков, но и умения точно производить нивелировку местности и выполнять сложные вычисления и измерения. Путешествия в дальние страны через пустыни были бы невозможны без умения ориентироваться по звездам, т. е. без овладения начатками астрономии.

Развитие астрономии стимулировалось также потребностями поливного земледелия. При планировании сельскохозяйственных работ, зависящих от сезонных изменений в природе, в частности от паводков, был необходим календарь. Создание же календаря требует основательного знакомства с закономерностями видимого движения небесных тел. В этом можно убедиться на примере древнего Вавилона, считающегося родиной астрономической науки. Хорезмийцы разработали собственную календарную систему. Ее подробно описал ал-Беруни в своем труде «Памятники минувших поколений». Сейчас археологи обнаружили подлинные документы календарного содержания, относящиеся к III в. Они подтверждают сообщения ал-Беруни. Более того, открыты развалины древней астрономической обсерватории Кой-Крылган-кала (рис. 1, а, б, в).

Ал-Беруни засвидетельствовал, что хорезмийцы производили астрономические наблюдения. Они дали собственные названия созвездиям пояса Зодиака и хорошо знали карту звездного неба. Ал-Беруни писал о познаниях, которыми располагают «земледельцы и пахари во всяком месте и селении о начале полевых работ и о других вещах», и заключал: «Ведь те, для кого крышей служит одно лишь небо и кого не прикрывает ничто другое, над кем постоянно, в одном и том же порядке, всходят и заходят звезды, связывают с ними начало своих дел и знание времени» [1, с. 259].

О развитии начатков астрономии свидетельствуют и распространённые в Хорезме астрологические верования. Как и в других странах Востока, в Средней Азии астрологией занимались служители религиозных культов. Они были, по сущест-

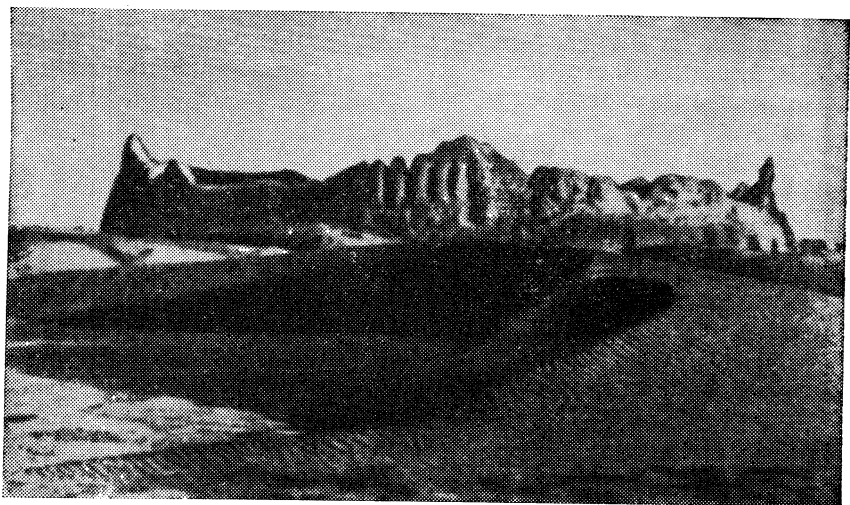


Рис. 1а.

Кой-Крылган-кала — древняя астрономическая обсерватория.
Вид памятника

ву, первыми астрономами, систематически наблюдавшими звезды. Об этом рассказывают письменные памятники зороастрийской и манихейской религий.

В начале VIII в. Средняя Азия, включая Хорезм, была захвачена арабскими войсками. Война несла с собой много разрушений и жертв. Завоеватели, стремясь внедрить новую религию — ислам, искореняли все, что было связано с религиями, распространенными в Средней Азии в домусульманский период. Подверглись уничтожению и памятники культуры.

Абу Райхан ал-Беруни рассказал об этом тяжелом времени в истории своей родины — Хорезма. Он писал, что арабский наместник в Средней Азии Кутейба ибн Муслим уничтожил «людей, которые хорошо знали хорезмийскую письменность, ведали их преданиями и обучали наукам, существовавшим у хорезмийцев, и подверг их всяческим терзаниям» [1, с. 48]. По словам ал-Беруни, Кутейба «погубил хорезмийских писцов, убил священнослужителей и сжег их книги и свитки», после чего «хорезмийцы остались неграмотными и полагались в том, что им нужно, на память» [1, с. 63]. Именно поэтому до нас дошло так мало письменных памятников древнего Хорезма.

Однако культурные традиции, сложившиеся в Хорезме много веков назад, не были уничтожены. Нанесенные войнами раны постепенно заживали. Начали складываться условия для нового подъема духовной жизни народа. Он начался в Средней Азии в IX в.

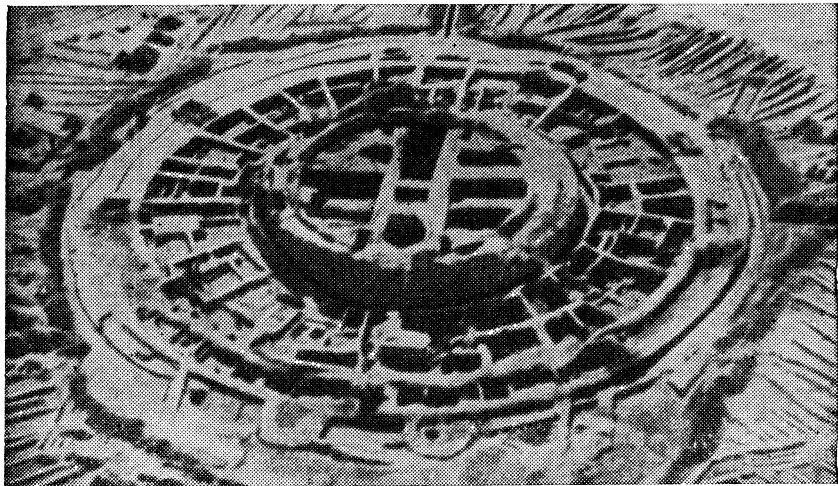


Рис. 16.
Кой-Крылган-кала. Раскопки. Вид с самолета

Этот период ознаменовался большими достижениями в области точных наук. Среди тех хорезмийцев, которые прославили родину своими трудами, в первую очередь должен быть назван Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми. Решающую роль в формировании его как ученого, несомненно, сыграли древние традиции хорезмийской науки, нашедшие замечательное продолжение в его творчестве.

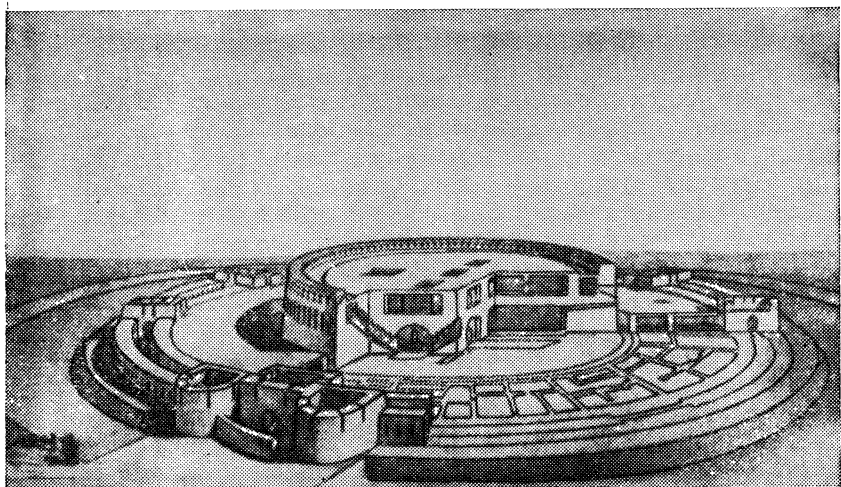


Рис. 1в.
Кой-Крылган-кала. Реконструкция памятника.

БАГДАД

Ал-Хорезми принадлежал к тем среднеазиатским ученым, которые были привлечены для работы в столицу арабского халифата Багдад. Таких ученых было немало. Среди современников ал-Хорезми, живших в Багдаде, можно назвать, например, знаменитых астрономов Абу-л-Аббаса Ахмада ал-Фаргани и Ахмада ибн Абдаллаха ал-Марвази, известного под именем Хабаши ал-Хасиб. Первый из них происходил из Ферганы, другой — из Мерва.

Багдад был основан в 60-х гг. VIII в. халифом ал-Мансуром из династии Аббасидов, правившим с 754 по 775 г. Новая столица государства, занимавшего в то время огромную территорию, быстро стала важным центром торговли, науки и культуры. Этот город отличался от других своей планировкой. Он имел форму круга с диаметром, приблизительно равным 2 км. Его окружала двойная крепостная стена с четырьмя воротами, направленными на север, юг, восток и запад. Город, куда приезжали из самых разных областей халифата, был многолюдным и оживленным, славился своими базарами. Здесь находились двор халифа, в руках которого была сосредоточена государственная власть, и многочисленные чиновники, осуществлявшие эту власть на практике.

Управлять огромным государством было нелегко. Правители халифата поняли, что их экономические и военные планы нельзя воплотить в жизнь, если не будут освоены те знания, которыми владели покоренные народы. Поэтому повелители всемерно содействовали развитию науки. В Багдаде возникла крупная научная школа, которая привлекала к себе выдающихся ученых из разных стран. Была создана библиотека, пополнявшаяся ценными научными трудами.

Особое внимание в это время проявлялось к достижениям древнегреческой и эллинистической науки. Сочинения классиков античности собирались и переводились на арабский язык. Для покупки рукописей снаряжались специальные экспедиции. Особый интерес вызывали точные науки — математика, астрономия, геодезия, математическая география. Были переведены «Начала» Евклида, «Альмагест» Птолемея, «Сферика» Менелая и др. Изучались также и индийские астрономические сочинения. Однако багдадские ученые VIII — IX вв. были не только переводчиками и комментаторами. Они занимались также самостоятельными исследованиями и достигли замечательных результатов в разных областях знания.

Преемники халифа ал-Мансура продолжали оказывать науке покровительство. Его внук Харун ар-Рашид, который правил с 786 по 809 г., известен (правда, в очень идеализированном виде) по сказкам «Тысячи и одной ночи». Наибольшего расцвета наука в Багдаде достигла при сыне Харуна ар-Раши-

да — халифе ал-Мамуне, правившем с 813 по 833 г. При нем был основан «Дом мудрости» (байт ал-хикма) — учреждение, выполнявшее функции Академии наук. При «Доме мудрости» находилась богатая библиотека старинных рукописей и астрономическая обсерватория.

В Багдаде, в числе других ученых этой академии, работал долгие годы ал-Хорезми. Известный историк X в. ан-Надим сообщает, что Мухаммад ибн Муса, уроженец Хорезма, был привлечен в «Дом мудрости» халифа ал-Мамуна.

До 813 г. ал-Мамун был наместником восточных провинций и жил в Мерве. Не исключено, что здесь он и встретился с ал-Хорезми, а впоследствии пригласил его в Багдад.

В одном из своих сочинений ал-Хорезми с похвалой отзывался об ал-Мамуне. Он отмечал его «любовь к науке и стремление приближать к себе ученых, простирая над ними крыло своего покровительства и помогая им в разъяснении того, что для них неясно, и в облегчении того, что для них затруднительно» [14, с. 26].

Неизвестно, насколько активным было в действительности личное участие ал-Мамуна в научной работе, но не вызывает сомнения, что ученые, работавшие при «Доме мудрости», внесли огромный вклад в математику, астрономию и другие науки. Они провели, например, измерение длины градуса меридиана для того, чтобы уточнить величину окружности Земли, найденную в древности. Было найдено значение дуги 1° , близкое к истинному (≈ 111 км). Историки считают, что в этой работе принимал участие и ал-Хорезми.

О багдадском периоде его жизни подробных сведений тоже не сохранилось. Имеются сообщения о том, что он совершил два путешествия: одно — в страну хазар, а другое — в Византию. Однако трудно утверждать, что эти сведения достоверны.

Наиболее поздняя дата, связанная с именем ал-Хорезми, — 847 г. В этом году умер халиф ал-Васик, и ал-Хорезми упоминается среди лиц, присутствовавших при его кончине.

Таким образом, мы видим, что фактов из жизни великого среднеазиатского ученого сохранилось очень мало. Поэтому историки науки должны основываться главным образом на исследовании его трудов. Многообразные научные интересы ал-Хорезми касались математики, теоретической и практической астрономии, географии и истории. Не все труды, написанные ал-Хорезми, сохранились. Некоторые из них, упомянутые средневековыми писателями, впоследствии были утрачены.

Географический трактат ал-Хорезми «Книга картины Земли» является первым известным трудом по географии на арабском языке. Он оказал сильное влияние на дальнейшее развитие этой науки в странах Востока.

Большое внимание ал-Хорезми уделял астрономии. Главная его задача в этой области — составление зиджа, т. е. астрономических и тригонометрических таблиц, необходимых для решения задач теоретической и практической астрономии. В этом сочинении впервые в литературе на арабском языке была дана таблица синусов и введен тангенс. Зидж ал-Хорезми пользовался большой популярностью не только на Востоке, но и в Европе. На него ссылались крупнейшие восточные астрономы. В начале XII в. он был переведен на латынь и стал после этого доступен европейским ученым. Кроме зиджа ал-Хорезми описал календарные системы разных народов.

Ал-Хорезми принадлежат важные заслуги в развитии практической астрономии. Он написал трактат об устройстве и применении астролябии — основного инструмента, служившего в средние века для наблюдения звездного неба. В списке его сочинений, который привел в X в. ан-Надим, назван также трактат о солнечных часах.

Наибольшую славу в истории науки ал-Хорезми принесли его математические труды. Он является автором двух знаменитых трактатов — по арифметике и алгебре, каждый из которых сыграл огромную роль в дальнейшем развитии математики. Подробнее об их содержании и значении будет сказано ниже.

Имеются сведения также о труде ал-Хорезми по истории. Он был озаглавлен «Книга истории» или «Книга летосчисления» и упоминался в нескольких средневековых сочинениях. Поэтому ал-Хорезми причисляют к наиболее ранним историкам, писавшим на арабском языке.

Прежде чем перейти к характеристике творчества ал-Хорезми в различных областях науки, приведем его собственные слова, в которых он выразил свое отношение к труду ученого. В начале алгебраического трактата он пишет: «Ученые прошлых времен и ушедших народов не переставали писать книги по различным разделам науки и отраслям философии, имея в виду тех, кто будет после них, рассчитывая на награду соразмерно своим силам и надеясь, что они будут вознаграждены славой и памятью и им достанется из правдивых уст похвала, по сравнению с которой ничтожны взятые ими на себя труды и тяготы, принятые ими для раскрытия сокровенных тайн науки. Один из них опередил других в том, что не разрабатывалось до него, и оставил это в наследие тем, кто придет после него. Другой комментирует труды его предшественников и этим облегчает трудности, открывает закрытое, освещает путь и делает это более доступным. Или же это человек, который находит в некоторых книгах изъяны и соединяет разъединенное, думая хорошо о своем предшественнике, не заносясь перед ним и не гордясь тем, что сделал» [15, с. 25].

Сам ал-Хорезми опередил многих своих современников в

разработке новых научных вопросов и в то же время сделал немало для пропаганды и популяризации достижений своих предшественников. Благодарные потомки, которым он освещал путь в науку, по достоинству оценили его заслуги и прославили его имя. Крупный современный историк науки Дж. Сартон назвал ал-Хорезми «величайшим математиком своего времени и, если принять во внимание все обстоятельства, одним из величайших всех времен».

Сообщаемые восточными историками сведения о сочинениях ал-Хорезми не всегда совпадают. Поэтому современные исследователи были вынуждены тщательно проанализировать эти сведения, сопоставив их с сохранившимися рукописями трудов ал-Хорезми, их средневековых латинских переводов, а также ранних восточных и европейских обработок этих трудов. Сейчас установлено, что ал-Хорезми был автором следующих сочинений:

1) «Книга об индийской арифметике» (или «Книга об индийском счете»);

2) «Краткая книга об исчислении алгебры и алмукабалы»;

3) «Астрономические таблицы (зидж)»;

4) «Книга картины Земли»;

5) «Книга о построении астролябии»;

6) «Книга о действиях с помощью астролябии»;

7) «Книга о солнечных часах»;

8) «Трактат об определении эры евреев и их праздниках»;

9) «Книга истории».

Из этих сочинений до нас дошло только семь — в текстах, принадлежащих либо самому ал-Хорезми, либо его средневековым комментаторам.

Изучение этих трудов, а также анализ сочинений современников и последователей ал-Хорезми позволили составить достаточно полное представление о научном наследии великого ученого. Хорошо известна теперь и судьба этого наследия в европейских странах, где оно было воспринято еще в XII в. и активно повлияло на становление математической науки.

Ниже мы приводим обзор основных результатов, полученных ал-Хорезми в арифметике, алгебре, геометрии, а также в астрономии, географии и геодезии. Нужно заметить, что в средние века астрономия, помогавшая решению важных практических задач, находилась в центре внимания ученых. Тригонометрия рассматривалась как вводный раздел астрономии. Тесно были связаны с наукой о звездном небе также география и геодезия.

Сочинение ал-Хорезми об арифметике сыграло важнейшую роль в истории математической науки. В нем впервые была систематически изложена арифметика, основанная на десятичной позиционной системе счисления с применением нуля, т. е. та арифметика, которая в наши дни представляется столь обычной и естественной. Она возникла в Индии, и поэтому ал-Хорезми, а вслед за ним и другие средневековые математики называли ее индийской. Долгое время она не выходила за пределы Индии, и только благодаря книге ал-Хорезми эта арифметика получила широкое распространение в странах Ближнего и Среднего Востока, а затем и в Европе.

Мысль о том, что каждое число может быть изображено с помощью девяти знаков 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и специального символа 0 для обозначения пустого разряда, кажется сейчас чрезвычайно простой. Однако в действительности люди пришли к ней далеко не сразу. Чтобы яснее понять всю важность этой идеи, коротко остановимся на истории систем счисления.

О СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

История математики знает различные системы нумерации. Некоторые из них давно ушли в прошлое, другие продолжают применяться и в настоящее время. Системы нумерации можно подразделить на позиционные и непозиционные.

В позиционных системах счисления число изображается с помощью набора символов, каждый из которых принимает значение в зависимости от того, какое место он занимает в записи. Так, в привычной нам десятичной позиционной сис-

теме счисления каждое число может быть представлено в виде:

$$a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

где $a_i = 0, 1, 2, \dots, 9$. Сокращенно мы записываем его так: $a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$. При этом имеется в виду, что каждый знак a_i может обозначать единицы, десятки, сотни и т. д., в зависимости от места, на котором он стоит в указанной записи. Например, записывая число 3243, мы понимаем, что цифра 3, стоящая слева, обозначает три тысячи, а стоящая справа — три единицы.

В непозиционных системах счисления значения символов, которые применяются для изображения чисел, не зависят от их места («позиции») в записи. Числа натурального ряда как бы разбиваются на отдельные участки. Для обозначения первых чисел каждого участка вводятся специальные знаки. Любое число может быть записано в виде комбинации этих знаков. Хорошо знакомый нам пример непозиционной системы счисления дает римская нумерация. Единица изображается вертикальной чертой. Далее вводятся знаки для следующих чисел: пять — V, десять — X, пятьдесят — L, сто — C, пятьсот — D, тысяча — M. Тогда, например, число 1758 запишется в виде MDCCCLVIII.

Непозиционные системы счисления были широко распространены у различных народов древности. Так, древние египтяне пользовались системой, в которой единица, десять, сто, тысяча изображались особыми символами — иероглифами.

К непозиционным системам счисления относятся многочисленные алфавитные системы. Знаками, которыми обозначаются числа от единицы до девяти, а также десятки и сотни, в этих системах служат буквы того или иного алфавита. Известны греческая ионическая нумерация, древнеславянская (кириллица и глаголица), арабская (абджад или джумал), армянская, грузинская и другие системы счисления.

Алфавитные системы оказываются неудобными, когда нужно производить арифметические операции с большими числами. Именно здесь проявляется недостаток непозиционных систем счисления по сравнению с позиционными.

Наиболее ранним примером позиционной системы нумерации является древневавилонская *шестидесятеричная* система, которой пользовались еще за 2000 лет до н. э. В древнем Вавилоне для записи чисел применялись два знака, напоминающих форму клина. Вертикальный клин обозначал единицу, а знак, сходный с клином, расположенным горизонтально, обозначал десять. Числа от 1 до 59 изображались с помощью комбинации этих знаков: в записи слева направо следовали сначала десятки, затем единицы. Число 60 опять обозначалось вертикальным клином, который теперь представлял со-

бой единицу более высокого разряда. Таким образом, числа от 60 до 60^2 — 1 изображались так же, как и числа первого разряда, т. е. от 1 до 59. Говорят, что запись не имела абсолютного характера. О каком именно числе идет речь в данной записи, можно было понять, исходя из условия задачи. Это объясняется тем, что в древневавилонской позиционной системе счисления отсутствовал знак, обозначающий пустой разряд и соответствующий нашему 0.

Такой знак впервые появился (очевидно, в VI в.) в Индии, которая стала родиной современной позиционной десятичной нумерации. Отсюда система распространилась на запад, но это произошло не сразу. Для того чтобы достоинства новой системы стали очевидны всем, нужно было в понятной форме, просто и доходчиво разъяснить ее принципы. Активным пропагандистом «индийской арифметики» и явился ал-Хорезми.

До него в странах Ближнего и Среднего Востока бытовали различные способы обозначения чисел и методы вычислений. В деловых операциях широко применялся так называемый «ручной», или «пальцевой», счет, имевший древнее происхождение. Пальцам, суставам, различным загибам пальцев, жестам рук придавались определенные числовые значения, и люди умели производить с их помощью необходимые арифметические действия. Этим видом счета пользовались представители разных народов. Его приемы излагались в европейских учебниках вплоть до XVI — XVII вв.¹

Для обозначения чисел применялись также буквы арабского алфавита. Однако наиболее прочно в обиход вошли староарабские вычислительные методы. Числа и выкладки записывались не с помощью знаков, а *словами*. Особенно отличались староарабские вычислительные методы от индийских в учении о дробях.

После появления трактата ал-Хорезми об индийской арифметике математики получили возможность сравнить между собой все эти методы и определить, какой из них был наиболее удобным для решения практических задач.

ИЗЛОЖЕНИЕ АРИФМЕТИКИ У АЛ-ХОРЕЗМИ

Подлинный арабский текст арифметического трактата ал-Хорезми сейчас утерян. Однако его содержание хорошо известно нам по латинскому переводу, выполненному еще в XII в. В это время в Испании активно работала группа ученых, которые переводили наиболее известные на Востоке сочинения с арабского языка на латинский. Они стремились познакомить Европу с лучшими достижениями восточной науки. В числе

¹ Об истории пальцевого счета см., например, [4; 17].

первых математических трудов был переведен трактат ал-Хорезми об индийской арифметике.

Этот латинский перевод дошел до наших дней в единственной рукописи, которая хранится в Кембридже. Она страдает многими недостатками: в ней встречаются описки, пробелы, отсутствует конец текста. Чтобы составить более точное представление о трактате ал-Хорезми, исследователи изучили рукописи еще двух латинских сочинений, написанных тоже в XII в.: «Книга введения Алхоризма в астрономическое искусство, составленная магистром А.» и «Книга Алгоризма о практике арифметики».

Первое из них приписывают известному переводчику Аделарду из Бата, работавшему около 1120—1130 гг. Уроженец Англии, он учился и преподавал в Париже, написал несколько сочинений по философии, математике и астрономии. Он долго путешествовал по Италии, Малой Азии, Северной Африке, Испании с целью изучения восточной науки. Аделард из Бата перевел с арабского на латинский язык несколько трудов по математике и астрономии, в том числе «Начала» Евклида и астрономические таблицы ал-Хорезми. Возможно, что ему принадлежал и упомянутый выше перевод арифметического трактата ал-Хорезми.

Второе сочинение принадлежит видному ученому из Толедо Иоанну Испанскому, который работал во второй половине XII в. «Книга Алгоризма о практике арифметики» является, возможно, переводом какой-то арабской обработки арифметического трактата ал-Хорезми.

В этих сочинениях дано подробное изложение труда ал-Хорезми, а сформулированные им правила разъясняются на многочисленных примерах. Сопоставив все эти рукописи, современные ученые смогли полностью восстановить содержание трактата ал-Хорезми и выяснить его роль в истории математики¹.

Латинский перевод трактата заглавия не имеет. Он начинается словами «*Dixit Algorizmi*», что означает: «Сказал Алгоризми» (рис. 2). Имя ал-Хорезми в латинской транскрипции звучало как *Algorizmi*, а иногда *Algorismus*, *Algorismus* или *Algorithmus*. Его сочинение очень скоро получило в Европе большую популярность и имя автора стало нарицательным: «алгорисмсм» или «алгоритмом» средневековые европейские математики называли всю «индийскую» арифметику, основанную на десятичной позиционной системе счисления. Позднее это слово стало обозначать всякую систему вычислений, выполненных по определенному правилу. Термин «алгоритм» прочно вошел в современную математику: он означает точное предписание о выполнении в определенном порядке некоторой

¹ Подробнее см.: в работах А. П. Юшкевича [16; 17].

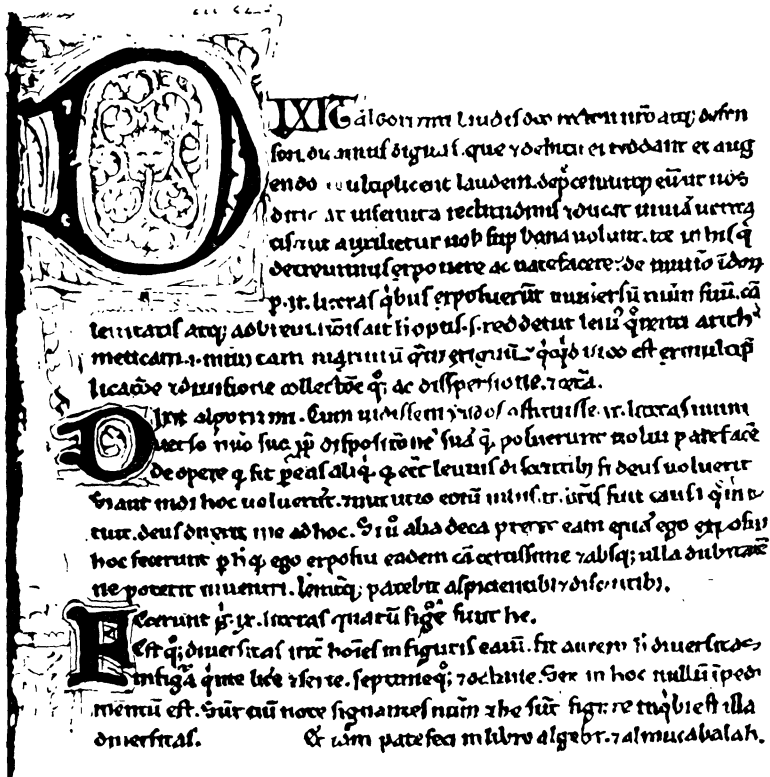


Рис. 2.

Первая страница латинского текста арифметического трактата ал-Хорезми (Кембриджская рукопись XIV в.)

системы операций, позволяющее решать совокупность задач определенного класса.

Текст латинского перевода арифметического трактата ал-Хорезми впервые был опубликован в 1857 г. На русском языке он издан в 1964 г. в Ташкенте¹.

В начале сочинения ал-Хорезми говорит, что написал его для того, чтобы разъяснить основы индийской арифметики. Индийцы, по его словам, пользовались девятью буквами, «которыми они выражали любое число ради удобства и краткости, облегчая дело тому, кто изучает арифметику». Этот способ записи чисел, считает ал-Хорезми, позволяет с легкостью производить действия сложения, вычитания, умножения, деления и т. д.

В первом разделе трактата подробно объясняется принцип записи чисел с помощью девяти знаков, принимающих значе-

¹ См. [15].

ние в зависимости от того, в каком разряде они находятся. Ал-Хорезми вводит понятие единицы и говорит, что «всякое число составляется из единиц» и что «единица находится в каждом числе». Далее он подразделяет все числа на разряды. Первым является разряд единиц, который составляют числа от 1 до 9. Эти числа могут быть получены из единицы путем ее удвоения, утроения и т. д. Каждое из них превышает предыдущее на единицу.

Второй разряд — это разряд десятков. Единицей в нем служит десять и всякое число данного разряда получается удвоением, утроением и т. д. десяти. Каждое число разряда десятков превышает предыдущее на десять. Затем следуют разряды сотен, тысяч и т. д. Ал-Хорезми пишет, что всякая единица высшего разряда составлена из десяти единиц предшествующего ему разряда; число же, которое является десятью единицами низшего разряда, будет единицей для следующего.

Особое внимание ал-Хорезми уделяет способу записи чисел в этой системе с помощью особого знака для обозначения пустого разряда. Разряд единиц в записи должен стоять первым, а дальше разряды следуют справа налево. Чтобы изобразить число десять, индийцы, как говорит ал-Хорезми, ставили во втором разряде единицу, а в первом — «маленький кружок, наподобие \bigcirc , чтобы по нему знали, что разряд единиц пуст и что в нем нет никакого числа...».

Аналогично следует поступать и дальше. «В четвертом разряде, — пишет ал-Хорезми, — перед цифрой ставятся три кружка, чтобы показать, что это в четвертом разряде, точно так же, как во втором разряде ставится один кружок, а в третьем два, чтобы показать, что это разряды десятков и сотен».

О знаке, обозначающем пустой разряд, ал-Хорезми говорит в другом сочинении, как о «кружке, который есть ничто». Позднее математики, писавшие на арабском языке, вместо кружка стали употреблять точку.

Ал-Хорезми разъясняет очень подробно не только как записываются большие числа, но и то, как нужно произносить их. С нашей точки зрения, предлагаемый им способ очень неудобен, но он применялся еще долгое время спустя. Число 1 180 703 051 492 863 читается так: тысяча тысяч тысяч тысяч тысяч пять раз и сто тысяч тысяч тысяч тысяч четыре раза и восемьдесят тысяч тысяч тысяч тысяч четыре раза и семьсот тысяч тысяч тысяч три раза и три тысячи тысяч тысяч три раза и пятьдесят одна тысяча тысяч два раза и четыреста тысяч и девяносто две тысячи и восемьсот шестьдесят три.

В следующих разделах сочинения ал-Хорезми разъясняет способы вычислений согласно правилам «индийской арифме-

тики». В его время и гораздо позже (вплоть до XIV в.) восточные математики производили арифметические операции на счетной доске, покрытой песком или пылью. Поэтому «индийскую арифметику» тогда часто называли «счетом с помощью доски и пыли». В одной из арабских энциклопедий XIV в. мы читаем: «Счет с помощью доски и пыли учит методам вычислений посредством девяти знаков. Эти девять знаков приписываются индийцам. Польза их состоит в облегчении и ускорении вычислительных операций, прежде всего астрономических».

Вычисления производились при помощи острой палочки. Промежуточные выкладки стирались. Принципиальной разницы между правилами действий, производившихся на доске, покрытой пылью, и правилами действий на бумаге, разумеется, нет. Но когда бумага повсеместно заменила счетную доску, математик стал сохранять все промежуточные выкладки, постепенно зачеркивая ненужное. Такие записи были крайне громоздкими. Они применялись и в европейской математике. Лишь постепенно люди пришли к той удобной форме вычислений, которая общепринята сегодня.

Вначале ал-Хорезми дает правило сложения и вычитания. Оно разъясняется длинно и многословно. Мы приведем только начало, чтобы показать, насколько трудно было научить людей, еще не овладевших новой системой счисления, производить такие простые, как сейчас кажется, действия.

Ал-Хорезми пишет: «Если ты хочешь прибавить число к числу или отнять число от числа, поставь оба числа в два ряда, т. е. одно под другим, и пусть будет разряд единиц под разрядом единиц и разряд десятков под разрядом десятков. Если захочешь сложить оба числа, т. е. прибавить одно к другому, то прибавишь каждый разряд к разряду того же рода, который над ним, т. е. единицы к единицам, десятки к десяткам. Если в каком-нибудь из разрядов, т. е. в разряде единиц или десятков, или в каком-нибудь другом соберется десять, ставь вместо них единицу и выдвигай ее в верхний ряд, т. е. если ты имеешь в первом разряде, который есть разряд единиц, десять, сделай из них единицу и подними ее в разряд десятков, и там она будет означать десять. Если от числа осталось что-нибудь, что ниже десяти, или если само число ниже десяти, оставь его в том же разряде. А если ничего не останется, поставь кружок, чтобы разряд не был пуст, но пусть будет в нем кружок, который займет его, чтобы не случилось так, что, если он будет пуст, разряды уменьшатся и второй будет принят за первый, и так ты обманешься в своем числе. То же самое ты сделаешь во всех разрядах».

Правило вычитания иллюстрируется примерами: $6422 - 3211 = 3211$ и $1144 - 144 = 1000$. Ал-Хорезми подробно разъясняет ход вычисления.

В латинской рукописи трактата отсутствует пример, в котором цифры вычитаемого больше соответствующей цифры уменьшаемого. Этот пробел восполняется по рукописи Иоанна Севильского. Здесь приводятся примеры: 12 025—3604 и 1000—15. Чтобы произвести вычитание в этом случае, в записи уменьшаемого постепенно стирались цифры, которые по ходу дела заменялись цифрами разности.

Так, в первом из этих примеров нужно расположить вычитаемое под уменьшаемым, т. е.

$$\begin{array}{r} 12025 \\ 3604 \end{array}$$

Вычитание производится начиная с высших разрядов. Так как 3 больше 2, то из разряда десятков тысяч заимствуется единица. Из 12 вычитается 3 и результат 9 записывается в уменьшаемом вместо 12. Запись приобретает вид:

$$\begin{array}{r} 9025 \\ 604 \end{array}$$

Дальше нужно из разряда тысяч заимствовать единицу и вычесть 6 из 10. Тогда в разряде тысяч останется 8 единиц, а в разряде сотен — 4 единицы. Стирая соответствующие цифры и заменяя их полученными, будем иметь новую запись:

$$\begin{array}{r} 8425 \\ 4 \end{array}$$

Наконец, после вычитания 4 из 5 получим окончательный результат: 8421.

После действий сложения и вычитания у ал-Хорезми следуют особые действия «удвоения» и «раздвоения». Впоследствии они фигурировали и во многих других восточных и европейских учебниках арифметики. Вероятно, умножение и деление на 2 выделялись как особые арифметические операции из-за того, что эти действия играли большую роль в процедуре извлечения квадратного корня.

Далее ал-Хорезми описывает правила умножения и деления, столь же подробно, как и предыдущие. Запись производится на доске, промежуточные результаты стираются. Чтобы умножить одно число на другое, «необходимо, чтобы одно из них было взято кратным соответственно единицам другого». О делении говорится, что оно «подобно умножению», но «обратное ему»; если умножение можно определить, как повторное сложение, то деление сводится к повторному вычитанию. Ал-Хорезми рекомендует выучить таблицу умножения: «И если ты захочешь умножить какое-нибудь число на другое с помощью индийских букв, необходимо запомнить умножение чисел, которые имеются между единицей и девятью, друг на друга, совпадают ли эти числа или они различны».

При вычислении на доске, покрытой пылью, было трудно проверить правильность промежуточных результатов, стиравшихся по ходу дела. Поэтому в восточных учебниках арифметики, начиная с трактата ал-Хорезми, особое место занимало так называемое правило проверки с помощью 9, которым раньше пользовались индийские математики. Оно применялось для проверки правильности окончательного результата арифметических действий. Правило основано на том, что остаток от деления всякого числа на 9 равен остатку от деления на 9 суммы значений цифр этого числа.

Вводилось понятие «мерила» числа. Для этого складывались значения всех цифр числа и из суммы последовательно вычиталось 9. Остаток и назывался «мерилом». В случае сложения «мерила» слагаемых складывались, их сумма делилась на 9 и рассматривался остаток от деления: если действие произведено правильно, он должен быть равен «мерилу» суммы данных чисел.

Например, $5482 + 654 = 6136$. «Мерило» первого слагаемого есть 1 (так как $5 + 4 + 8 + 2 = 19$, $19 = 2 \cdot 9 + 1$); «мерило» второго слагаемого есть 6 (так как $6 + 5 + 4 = 15$, $15 = 9 + 6$). Сумма их равна 7. «Мерило» суммы есть 7 (так как $6 + 1 + 3 + 6 = 16$, $16 = 9 + 7$). Поскольку получены равные числа, т. е. $1 + 6 = 7$, то действие произведено без ошибок.

Аналогично рассуждали и в отношении других арифметических действий. Восточные математики не оговаривали, что «правило девятки» дает только необходимое, но не достаточное условие правильности решения.

Ал-Хорезми дал это правило в общем виде для действий удвоения и умножения, не приводя числовых примеров. Если несколько модернизировать язык трактата, то правило проверки умножения звучит так: «Если ты хочешь помножить какое-нибудь число на другое и хочешь проверить, раздели число на девять, а то, что осталось, сохрани. Снова раздели другое число на девять и то, что осталось меньше девяти, сохрани. Затем умножь то, что осталось от первого, на то, что осталось у тебя от второго. Из того, что получилось, отбрось девятки, если они там есть, и заметь то, что осталось. После этого помножь одно умножаемое на другое и раздели то, что получилось, на девять. Если остаток сойдется с тем, что я сказал тебе заметить, знай, что ты нашел. Если же не сойдется, разумеешь, что ошибся».

Следующий раздел трактата посвящен арифметике дробей. Ал-Хорезми рассматривает сначала шестидесятеричные дроби, имеющие вид:

$$\frac{a_1}{60} + \frac{a_2}{60^2} + \dots + \frac{a_m}{60^m}.$$

Он говорит, что индийцы делят единицу на 60 частей, назы-

ваемых минутами, минуту делят на 60 секунд, секунду — на 60 терций и т. д. до бесконечности; единицу они называют градусом.

Шестидесятеричные дроби применялись также раньше в эллинистических странах, особенно при астрономических вычислениях. Ими пользовался, например, великий астроном древности Птолемей (II в.) в своем знаменитом «Алмагесте». Что касается хорошо известных нам десятичных дробей, то они вошли в математику гораздо позже. В Средней Азии их открыл и применил в XV в. знаменитый самаркандский математик Гияс ад-Дин Джамшид ал-Каши. В Европе независимо от него их ввел С. Стевин в XVII в.

Вначале ал-Хорезми разъясняет операцию умножения дробей. Каждую из перемножаемых дробей он переводит в единицы низшего шестидесятеричного разряда; затем перемножает числители, как обычные числа, записанные в десятичной системе счисления. Полученный результат опять переводится в шестидесятеричную дробь. Аналогично производятся действия сложения, вычитания, удвоения и раздвоения шестидесятеричных дробей.

В последней части этого раздела ал-Хорезми переходит к действиям с обыкновенными дробями, но рукопись латинского перевода здесь обрывается.

Отсутствует также и заключительный раздел, в котором ал-Хорезми изложил правило извлечения квадратного корня из целых чисел. Он восстановлен по трактату Иоанна Испанского. Оказалось, что метод ал-Хорезми совпадал с тем, который ранее применялся для извлечения квадратных корней в Индии и был описан математиком V в. Ариабхаттой. Этот метод основан на разложении квадрата двучлена

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

существенную роль в нем играют действия удвоения и раздвоения¹.

СОЧИНЕНИЕ АЛ-ХОРЕЗМИ И ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ АРИФМЕТИКИ

После появления трактата ал-Хорезми об индийской арифметике изложенные в нем методы начали быстро распространяться среди математиков и астрономов стран Ближнего и Среднего Востока. Конечно, эти методы не сразу вытеснили те традиционные вычислительные приемы, которые вошли здесь в обиход в более ранний период.

¹ Подробнее этот метод описан, например, в [8].

Еще долго в практике повседневной жизни, в торговых и финансовых операциях применялись староарабские способы счета. Это касалось в особенности вычислений с обыкновенными дробями: они представлялись в виде сумм и произведений долей единицы, которые носили специальные наименования. Староарабские арифметические приемы излагались, например, в сочинениях крупнейших математиков X — XI вв. Абу-л-Вафы ал-Бузджани и Абу Бакра Мухаммада ал-Караджи¹.

Долгое время, наряду с записью чисел «при помощи девяти индийских знаков», математики выражали числа словами или с помощью алфавитного обозначения. Арабское буквенное изображение чисел носит название «джумал» или «абджад». Каждой букве арабского алфавита придается числовое значение (рис. 3):

ا	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ك	ل	م	ن	س	ع	ف	ص	ق	
20	30	40	50	60	70	80	90	100	
ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ	غ	
200	300	400	500	600	700	800	900	1000	

Рис. 3.

Арабское буквенное изображение чисел.

Для запоминания применяются специальные мнемонические правила. При записи чисел соответствующие буквы ставятся справа налево, как обычно в арабском письме. Напри-

мер, число 43 имеет вид م ج , число 783 — ف ج ز ,

число 1983 — غ ظ ف ج .

Однако способ записи чисел, изложенный ал-Хорезми, и «индийская арифметика» все же быстро завоевали главенствующее положение в математике. Относительно формы цифр, фигурировавших в его трактате, точных сведений не сохранилось. Но, по-видимому, они не отличались существенно от цифр, которые применяют и в наши дни народы, пользующиеся арабской графикой (см. рис. 4):

¹ См. [17].

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۰		۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0		1 2 3 4 5 6 7 8 9

Рис. 4.

Восточноарабские и западноарабские цифры.

В западноевропейской математике символы, обозначающие девять знаков и пустой разряд, приобрели иной вид. Они произошли от тех цифр, которые были распространены в западных областях арабского мира и носили название «губар». Постепенно изменяясь, эти знаки превратились в современные цифры, которые мы называем арабскими.

Арифметический трактат ал-Хорезми оказал огромное влияние на развитие науки в странах Востока, а затем и в Европе. Он стал основным образцом, по которому в течение многих столетий писали учебники по арифметике восточные ученые. По этому образцу составили свои знаменитые арифметические сочинения Абу-л-Хасан ан-Насави (ок. 970 — ок. 1070), Насир ад-Дин ат-Туси (1201—1274), Гияс ад-Дин Джамшид ал-Каши (ум. ок. 1430), Ала ад-Дин Али ал-Кушчи (ум. ок. 1475).

Внедрение десятичной позиционной системы счисления обеспечило быстрый прогресс в области вычислительной математики. В этой области ученым Ближнего и Среднего Востока, работавшим в IX—XV вв., принадлежит много важных достижений. Они разработали приемы извлечения корней любой степени, применили правило, носящее теперь название бинома Ньютона, к любому натуральному показателю, открыли десятичные дроби и т. д. Замечательным доказательством их успехов может быть вычисление числа π с семнадцатью десятичными знаками: выдающийся математик XV в. Гияс ад-Дин Джамшид ал-Каши, работавший в знаменитой обсерватории Улугбека в Самарканде, сумел показать, что

$$2\pi \approx 6,2831853071795865.$$

Важнейшая заслуга в развитии вычислительной математики принадлежала ал-Хорезми, который понял преимущества десятичной позиционной системы счисления и положил начало ее широкому распространению.

В Европе арифметический трактат ал-Хорезми, переведенный на латинский язык, также положил начало новому периоду в развитии математики. До XII в. здесь, как и на Востоке, был широко распространен пальцевой счет, особенно в торговых кругах. Большой популярностью пользовались вычисления на абаке — счетном приборе, напоминающем наши счеты.

В ранних европейских сочинениях числа обычно изображались римскими цифрами. Римская нумерация укоренилась так прочно, что после введения арабских цифр операции с числами, записанными в новой системе, долго разъяснялись с помощью римского обозначения.

Благодаря трактату ал-Хорезми Европа познакомилась с арифметикой, основанной на десятичной позиционной системе счисления и получившей название «алгорисм». Сначала не все приняли ее с готовностью. Приверженцам новой арифметики — «алгорисмикам» — пришлось вести упорную борьбу с «абацистами», придерживавшимися прежних приемов счета. Довольно долго обе системы существовали на равных началах. Однако преимущества новых вычислительных методов завоевывали им все новых сторонников не только среди ученых, но и в торговых кругах.

В XII и особенно в XIII вв. появились сочинения, в которых разъяснялись правила «алгорисма». Важнейшим среди них была «Книга абак» выдающегося ученого XIII в. Леонардо Пизанского. В ней «индийская» арифметика целых и дробных чисел излагалась последовательно и подробно. Говоря о способе записи чисел с применением «числовых знаков индийцев», Леонардо располагает их справа налево — по арабскому образцу. Он пишет: «Девять индийских знаков суть: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. С помощью этих знаков и знака 0, который по-арабски называется цефирум, можно написать любое число». Ноль по арабски обозначается словом «ас-сифр», что значит «пустой», и в Европе термин «цифра» долго применялся в этом значении.

В XIV—XV вв. индийская арифметика получила повсеместное распространение среди купцов и практиков-вычислителей. Сначала она прочно утвердилась в Италии, а затем — в Германии и Франции.

Алгебраический трактат ал-Хорезми дошел до нас в арабской копии: в Оксфорде хранится рукопись, переписанная в 1342 г. Ее текст был опубликован в 1831 г. вместе с английским переводом. С тех пор этот текст не раз переиздавался и переводился на европейские языки, в том числе и на русский.

Кроме арабского оригинала, существуют два средневековых латинских перевода, которые были выполнены в XII в.

Первый из них принадлежал крупному ученому и переводчику Роберту Честерскому. Он перевел трактат ал-Хорезми в 1145 г. Автор другого перевода — Герардо Кремонский. Эти переводы сразу завоевали популярность среди европейских математиков.

В настоящее время алгебраическое сочинение ал-Хорезми изучалось многими исследователями, которые установили, что оно сыграло в истории математики не меньшую роль, чем его арифметический трактат. С этим сочинением обычно связывают начало современной алгебры.

Конечно, было бы неверно думать, что до ал-Хорезми алгебры вообще не существовало. Решать простейшие алгебраические задачи люди научились в глубокой древности. Однако на раннем этапе развития алгебры эти приемы разъяснялись для отдельных конкретных задач, они не были сформулированы в виде общих правил, составляющих единую научную теорию. Позднее такая теория была создана, но ее методы — геометрические — значительно отличались от тех, с которыми знакомится в наши дни ученик средней школы.

Книга ал-Хорезми занимает в истории математики особое место потому, что в ней впервые алгебра была представлена как наука об общих методах решения числовых линейных и квадратных уравнений. Правда, форма изложения этих мето-

дов сейчас непривычна: во времена ал-Хорезми буквенная символика еще не была введена и поэтому все правила даются им в словесном выражении. По существу же его рассуждения вполне понятны и близки современному математике.

КРАТКИЙ ОБЗОР ИСТОРИИ АЛГЕБРЫ ДО АЛ-ХОРЕЗМИ

Чтобы яснее представить себе, какую роль сыграл ал-Хорезми в истории алгебры, нужно хотя бы вкратце остановиться на достижениях его предшественников в этой области.

Самые ранние из известных сейчас примеров решения уравнений были обнаружены после расшифровки древневавилонских математических текстов, относящихся ко второму тысячелетию до н. э. Эти клинописные тексты, нанесенные на глиняные таблички, часто содержат формулировку и решение алгебраических задач.

Вот пример такой задачи: *«Длина и ширина. Длину и ширину я перемножил, и образовалась площадь. То, на сколько длина больше ширины, я прибавил к площади, и получилось 183. Опять сложил длину ширину и получил 27. Спрашивается: длина, ширина и площадь»*. Если применить современные обозначения, то условие задачи можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} x + y = 27, \\ xy + (x - y) = 183. \end{cases}$$

Далее следует решение, которое представляет собой рецепт, предписывающий, какие арифметические действия и в какой последовательности нужно произвести.

Обоснование этих действий, а тем более какие-либо доказательства в древневавилонских текстах отсутствуют. Однако их внимательный анализ позволил сделать вывод о том, что математики того времени владели общими приемами решения линейных и квадратных уравнений, а также систем уравнений с двумя неизвестными. Другими словами, в древнем Вавилоне существовали зачатки числовой алгебры. Эти алгебраические традиции впоследствии прочно вошли в математику Ближнего и Среднего Востока.

Для решения задач, сводящихся к линейным уравнениям, уже в древности были разработаны некоторые специальные приемы. К ним относилось «правило ложного положения», вошедшее в практическую арифметику и фигурировавшее впоследствии под названием «фальшивого правила».

Правило одного ложного положения, с помощью которого решались уравнения вида $ax = b$, сводится к следующему:

неизвестному x придается некоторое значение x_1 (ложное положение), для которого $ax_1 = b_1$; вычисляется и затем

$$x = x_1 \frac{b}{b_1}.$$

Многочисленные примеры применения этого правила для решения задач типа $ax + bx + \dots + cx = d$ встречаются в древнеегипетских математических папирусах. Так, в папирусе Ринда имеется задача: «Количество и его четвертая часть дают 15».

Предлагается сначала взять в качестве решения 4; тогда, согласно условию, $4 + 1 = 5$. Далее следует произвести действия: $15 : 5 = 3$ и $4 \cdot 3 = 12$. Искомое количество есть 12.

Это правило широко применялось также древними математиками Индии, а впоследствии — учеными средневекового Ближнего и Среднего Востока и Европы.

Уравнения вида $ax + b = c$ издавна решались с помощью правила двух ложных положений. Суть его состоит в том, что неизвестному даются два «ложных» значения: x_1 и x_2 . Тогда получим: $ax_1 + b = c + d_1$ и $ax_2 + b = c + d_2$, где d_1 и d_2 — возникшие при этом «ошибки». Отсюда $a(x_1 - x) = d_1$ и $a(x_2 - x) = d_2$, далее $\frac{x_1 - x}{x_2 - x} = \frac{d_1}{d_2}$ и, наконец, $x = \frac{x_1 d_2 - x_2 d_1}{d_2 - d_1}$.

В древнем Китае с помощью правила двух ложных положений решались также системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Здесь оно носило название «правило избытка — недостатка». В средние века в арабской литературе оно было известно, как «правило двух ошибок». Большой популярностью оно пользовалось в европейских странах, где включалось в учебники вплоть до XVIII в.

Китайские математики разработали также оригинальный метод для решения системы линейных уравнений с произвольным числом неизвестных.

Все указанные приемы применялись для решения вычислительных задач, возникавших чаще всего непосредственно в повседневной практической жизни. На раннем этапе истории науки, в период зарождения математики, она представляла собой совокупность подобных приемов. Отсутствовали общие понятия и утверждения, а главное — доказательство, которое является основным инструментом современной математической науки. С VI в. до н. э. начался новый этап ее истории — период элементарной математики. В это время в Древней Греции она превратилась в строгую логическую науку, основанную на доказательстве. Появились первые математические теории. К их числу относилась древнегреческая геометрическая алгебра.

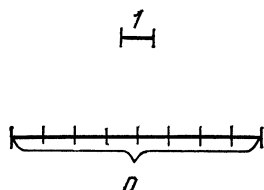


Рис. 5.

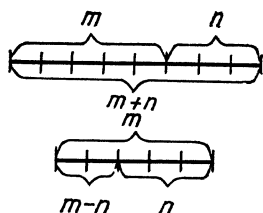


Рис. 6

Основой этого исчисления послужила геометрическая арифметика пифагорейцев, в которой для представления чисел и разъяснения их свойств использовались геометрические образы. Если определенный фиксированный отрезок принят за единицу, то каждое целое число n может быть представлено некоторым отрезком, длина которого равна n единичным отрезкам (рис. 5).

Сумма и разность чисел m и n представляется отрезком, имеющим длину, соответственно равную $m+n$ и $m-n$ единицам (рис. 6). Произведение двух чисел m и n изображалось прямоугольником, сторонами которого служат отрезки, представляющие эти числа (рис. 7).

Пифагорейцы понимали под числом совокупность единиц, т. е. натуральное число, а единицу считали неделимой. Поэтому понятие дроби было чуждо их арифметике. Теорию дробей заменяла теория отношений целых чисел. В основу определения отношения двух чисел было положено понятие их общего делителя, или общей меры отрезков, изображающих эти числа.

Долгое время считалось, что любые два отрезка соизмеримы, т. е. всегда имеют общую меру. Из этого исходили пифагорейцы при доказательстве известных им теорем арифметики и геометрии. Однако примерно в середине V в. до н. э. было сделано важнейшее для истории математики открытие: было доказано, что существуют несоизмеримые отрезки, примером которых являются сторона и диагональ квадрата. Сейчас мы говорим, что диагональ квадрата со стороной, равной 1, выражается иррациональным числом $\sqrt{2}$. Но в древнегреческой математике под числом понимались только натуральные числа, понятия же иррационального числа не существовало. Поэтому открытие несоизмеримости поставило математиков в чрезвычайно трудное положение.

Выход из затруднения был найден благодаря созданию геометрической алгебры, которая оперирует не с числами, а с геометрическими величинами. Величины также изображаются отрезками, но они уже не обязательно соизмеримы: их отношения могут быть выражены не только рациональными, но и иррациональными числами.

Операции сложения, вычитания, умножения производятся так же, как и в геометрической арифметике. Делению же величин соответствует геометрическое построение, носившее название «приложение площадей». Пусть даны три величины, изображаемые отрезка-

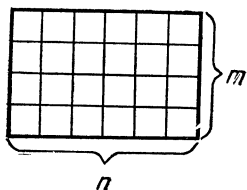


Рис. 7

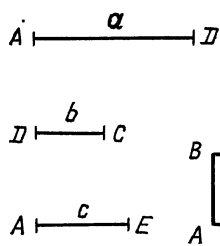


Рис. 8

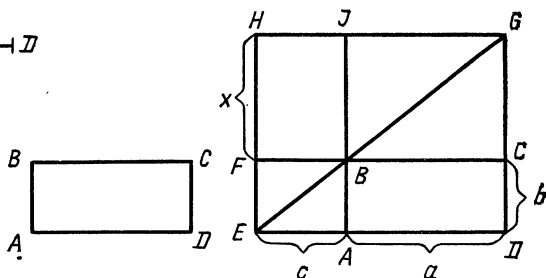


Рис. 9

ми $a=AD$, $b=DC$, $c=AE$ (рис. 8). Если требуется разделить величину ab на величину c , т. е. решить линейное уравнение $ab=cx$, то эта задача формулировалась следующим образом: *приложить к отрезку c прямоугольник $ABCD$ со сторонами a и b .*

Решение сводится к построению прямоугольника cx , равновеликого заданному прямоугольнику $ABCD$. Откладываем на продолжении одной из его сторон, например AD , отрезок $AE=c$ (рис. 9). Из E возводим перпендикуляр, который продолжим до пересечения в точке F с продолжением стороны BC . Диагональ BE полученного прямоугольника $EFBA$ продолжим до пересечения с продолжением стороны DC . Обозначим точку пересечения через G и возведем из нее перпендикуляр GH .

Наконец, продолжив EF и AB до пересечения с GH , получим прямоугольники $EHGD$ и $FHIB$. Прямоугольник $FHIB$ является искомым. Действительно, он равновелик данному прямоугольнику $ABCD=ab$, так как они оба получаются из равных треугольников EHG и EDG путем вычитания равных площадей ($\triangle IBG=\triangle BGC$, $\triangle EFB=\triangle BEA$). Так как $FB=HI=c$, то отрезок $x=FH=BI$ дает решение линейного уравнения: $cx=ab$.

Геометрическим путем были установлены такие алгебраические тождества, как

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \\ ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ ab &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \text{ и др.}\end{aligned}$$

Доказательство первого из них проводится следующим образом. Пусть даны отрезки $AB=a$ и $BC=b$ (рис. 10). Построим квадраты $ADEB=a^2$, $AFHC=(a+b)^2$ и продолжим BE и

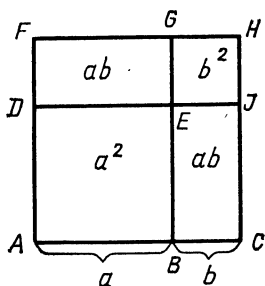


Рис. 10

DE до пересечения с FH и CH в точках G и I . Тогда $DFGE = BEIC = ab$. $EGHI = b^2$.

Следовательно,

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Геометрическая алгебра позволяла решать и квадратные уравнения. Решение сводилось к некоторому построению с помощью циркуля и линейки.

Например, для решения уравнения $ab = x^2$ строилось среднее геометрическое x между данными величинами a и

b . Рассуждения основываются на тождестве

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Имея его в виду, поставленную задачу сводим к следующей:

$$x^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Далее применяется теорема Пифагора.

Пусть $AD = a$, $DB = b$ и $AB = a + b$ (рис. 11). Проводим окружность с диаметром AB и центром в точке C , так что $AC = CB = \frac{a+b}{2}$. Возводим из D перпендикуляр и продолжаем его до пересечения с окружностью в точке E . Строим треугольник CDE , в котором

$$CE = AC = \frac{a+b}{2}, \quad CD = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}.$$

Отсюда

$$x^2 = DE^2 = CE^2 - CD^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Таким образом, найдено решение уравнения $ab = x^2$.

Квадратные уравнения вида

$$x^2 - ax = b^2,$$

$$x^2 + ax = b^2$$

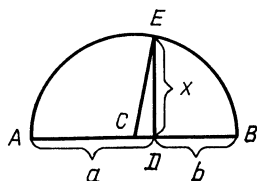


Рис. 11

решались геометрическим путем с применением метода приложения площадей. Это требовало более сложных построений с помощью циркуля и линейки.

Из сказанного видно, что геометрическая алгебра греков представляла собой строгую математическую теорию и

позволяла решать уравнения первой и второй степни. Но в то же время ясно, что применявшиеся при этом методы, опирающиеся на построения с помощью циркуля и линейки, чрезвычайно громоздки и неудобны. Нетрудно понять поэтому, какую важную роль в истории математики сыграло сочинение, в котором в основу теории линейных и квадратных уравнений были положены не геометрические, а арифметические соображения. Таким сочинением и был алгебраический трактат ал-Хорезми. После него алгебру начали излагать способом, близким к современному. Освободившись от неудобств, связанных с геометрическим языком, эта наука получила возможность быстрого развития.

Ал-Хорезми строил свою теорию не на пустом месте. Он обобщил все достижения алгебраистов, работавших до него. В его книге сказывается влияние древних арифметико-алгебраических традиций, продолжавших существовать на Востоке. В позднеэллинистический период они нашли отражение и в греческой математике. Свидетельствует об этом замечательное сочинение Диофанта Александрийского — «Арифметика», — написанное в III в.

У Диофанта алгебра впервые была изложена на арифметической основе. Он ввел особые названия для неизвестной величины и ее степеней, сформулировал основные алгебраические правила, классифицировал уравнения. Но сочинение Диофанта, по-видимому, не повлияло непосредственно на ал-Хорезми. Насколько сейчас известно, оно было впервые переведено на арабский язык в X в., т. е. спустя столетие после того, как ал-Хорезми написал свою книгу.

АЛГЕБРА У АЛ-ХОРЕЗМИ

Алгебраический трактат ал-Хорезми известен под заглавием: «Краткая книга восполнения и противопоставления» (по арабски: «Китаб мухтасар ал-джабр вал-мукабала»). Трактат состоит из двух частей — теоретической и практической. В первой из них излагается теория линейных и квадратных уравнений, а также затрагиваются некоторые вопросы геометрии. Во второй части алгебраические методы применены к решению конкретных хозяйственно-бытовых, торговых и юридических задач.

Во введении ал-Хорезми говорит о том, что побудило его взяться за написание сочинения: «Я составил краткую книгу об исчислении алгебры и алмукабалы, заключающую в себе простые и сложные вопросы арифметики, ибо это необходимо людям при дележе наследства, составлении завещаний, разделе имущества и судебных делах, в торговле и всевозможных сделках, а также при измерении земель, проведении каналов,

геометрии и прочих разновидностях подобных дел». Таким образом, подчеркивается, что с помощью алгебраических методов можно решать различные прикладные задачи.

Далее ал-Хорезми показывает, какие числа применяются в алгебре. Если арифметика оперирует с обычными числами, которые «составляются из единиц», то в алгебре фигурируют числа особого вида — неизвестная величина, ее квадрат (в современных обозначениях x и x^2) и свободный член уравнения.

Неизвестную величину ал-Хорезми называет термином «корень» (джизр) и дает следующее определение: *«Корень — это всякая вещь, умножаемая на себя, будь то число, равное или большее единицы, или дробь, меньшая ее»*. Такое определение, не совсем понятное современному читателю, связано с тем, что при решении уравнений всегда искали не только x , но и x^2 . Поэтому неизвестная рассматривалась как корень из квадрата неизвестной. В определении подчеркивается также, что неизвестная может принимать как целые, так и дробные значения. Термин «корень», применяемый ал-Хорезми, является, по всей вероятности, переводом санскритского слова «мула» («корень растения»), которым обозначали неизвестную в уравнении индийские математики. Позднее в арабской литературе для той же цели применяли термин «вещь» («шай»).

Квадрат неизвестной назван словом «имущество» («мал») и определяется как «то, что получается из корня при его умножении на себя».

Свободный член уравнения — «простое число» — ал-Хорезми называет «дирхемом», т. е. денежной единицей.

Далее он переходит к классификации линейных и квадратных уравнений. В настоящее время она представляется совершенно излишней, так как все частные случаи объединяются с помощью записи $ax^2 + bx + c = 0$, где коэффициенты a , b и c могут принимать положительные, отрицательные и нулевые значения. Но во времена ал-Хорезми дело обстоит иначе: не существовало не только буквенного обозначения, но и понятия отрицательного числа. Поэтому уравнение имело смысл только в том случае, если все его коэффициенты были положительны.

Ал-Хорезми выделяет следующие шесть видов уравнений:

1) «квадраты равны корням», что в современной записи означает $ax^2 = bx$;

2) «квадраты равны числу», т. е. $ax^2 = c$;

3) «корни равны числу», т. е. $ax = c$;

4) «квадраты и корни равны числу», т. е. $ax^2 + bx = c$;

5) «квадраты и числа равны корням», т. е. $ax^2 + c = bx$;

6) «корни и числа равны квадрату», т. е. $bx + c = ax^2$.

Для каждого из этих видов даются примеры:

$$1) \quad x^2 = 5x, \quad \frac{1}{3} x^2 = 4x;$$

$$2) \quad x^2 = 3, \quad 5x^2 = 80, \quad \frac{1}{2} x^2 = 18;$$

$$3) \quad x = 3, \quad 4x = 20, \quad \frac{1}{2} x = 10;$$

$$4) \quad x^2 + 10x = 39, \quad 2x^2 + 10x = 48, \quad \frac{1}{2} x^2 + 5x = 28;$$

$$5) \quad x^2 + 21 = 10x;$$

$$6) \quad 3x + 4 = x^2.$$

Для того чтобы данное уравнение привести к одному из указанных типов, ал-Хорезми вводит два особых действия, названия которых фигурируют в заглавии книги. Первое из них — это ал-джабр (восполнение). Оно состоит в перенесении отрицательного члена из одной части уравнения в другую. Именно от этого термина возникло современное слово «алгебра».

Второе действие — ал-мукабала (противопоставление) — состоит в сокращении равных членов в обеих частях уравнения.

Кроме того, требовалось, чтобы коэффициент при старшем члене был равен единице. Позднее в некоторых сочинениях восточных ученых фигурировали даже особые алгебраические действия — «дополнения» (ал-такмил) и «приведение» (ар-рад). Первое из них состояло в умножении всех членов уравнения на величину, обратную коэффициенту a в уравнении $ax^2 + bx + c = d$, если $a > 1$. Второе означало аналогичную операцию в случае, если $a < 1$. Встречался также специальный термин (ал-хатт), обозначающий действие деления коэффициентов уравнения на общий множитель.

Чтобы разъяснить, как применялись правила ал-джабр и ал-мукабала, приведем одну из задач, которые решал ал-Хорезми. Он формулировал ее следующим образом: «Ты разделил десять на две части, затем умножил каждую часть на себя, затем сложил их и прибавил к ним разность между частями до умножения, и в сумме получилось пятьдесят четыре дирхема». Одну из частей числа 10 он принимает за неизвестную «вещь». Тогда другая — это «десять без вещи». В современных обозначениях условие задачи запишется так:

$$(10 - x)^2 + x^2 + (10 - x) - x = 54.$$

Далее предлагается последовательно произвести действия:

$$100 - 20x + x^2 + x^2 + 10 - x - x = 54,$$

$$110 + 2x^2 - 22x = 54.$$

Затем ал-Хорезми пишет: «После восполнения и противопоставления ты скажешь: сто десять дирхемов и два квадрата равны пятидесяти четырем дирхемам и двадцати двум вещам», т. е.

$$110 + 2x^2 = 54 + 22x.$$

Теперь необходимо сделать коэффициент при старшем члене равным единице. «Приведи два квадрата к одному квадрату, — говорит ал-Хорезми, — т. е. возьми половину всего, что у тебя. Получится: пятьдесят пять дирхемов и квадрат равны двадцати семи дирхемам и одиннадцати вещам». Иными словами, предлагается разделить на 2 все коэффициенты уравнения, получив при этом:

$$55 + x^2 = 27 + 11x.$$

Наконец, нужно сделать последний шаг: «Вычти двадцать семь из пятидесяти пяти, останется двадцать восемь дирхемов и квадрат, равные одиннадцати вещам». Таким образом, уравнение приведено к каноническому виду:

$$28 + x^2 = 11x.$$

На этом примере мы наглядно убеждаемся в удобстве привычной нам символики, без которой сейчас алгебра кажется немислимой. Ал-Хорезми приходилось намного труднее, чем нам: все преобразования он должен был выражать в громоздкой словесной форме, но тем не менее он неизменно получал правильный результат.

Словесно формулировались и правила решения уравнений. Так, чтобы решить уравнение пятого вида ($ax^2 + c = bx$), ал-Хорезми предлагает сначала «раздвоить число корней», результат «умножить на равное ему», потом вычесть из этого данное число дирхемов и, наконец, извлечь корень из полученной разности и вычесть его из половины числа корней. Иными словами, нужно произвести следующие действия:

$$1) \frac{b}{2}; \quad 2) \left(\frac{b}{2}\right)^2; \quad 3) \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c;$$

$$4) \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}; \quad 5) \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

Таким образом, ал-Хорезми получает корень уравнения $x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$. Он указывает, что корнем будет

$$\text{также } x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

Кроме того, он говорит: «Знай, что, если в этой главе ты раздвоил число корней и умножил его на равное ему и произ-

ведение оказалось меньше числа дирхемов, сложенных с квадратом, задача невозможна». Действительно, в случае, если $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < c$, уравнение $ax^2 + c = bx$ имеет два мнимых корня.

С точки зрения современников ал-Хорезми, не знавших о существовании мнимых чисел, уравнение в этом случае решения не имеет.

Если же упомянутое произведение, т. е. $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, «в точности равно числу дирхемов, корень квадрата равен половине числа корней без сложения и вычитания». Это значит, что при $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c$ рассматриваемое уравнение будет иметь один (двойной) корень $x = \frac{b}{2}$.

Как мы видим, теоретически ал-Хорезми признавал существование двух корней квадратного уравнения. Однако на практике он пользовался только одним из них. Нулевое решение уравнения $ax^2 = bx$ он, как и математики более позднего времени (вплоть до XVII в.), не рассматривал.

Правило решения уравнения вида $ax^2 + c = bx$ ал-Хорезми разъясняет на примере

$$x^2 + 21 = 10x.$$

Он получает:

$$x_{1,2} = \frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = 5 \pm \sqrt{25 - 21} = 5 \pm \sqrt{4} = 5 \pm 2;$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 7.$$

Кроме того, как и в других случаях, определяются и квадраты найденных корней: $x_1^2 = 9$, $x_2^2 = 49$.

Приведем полный текст решения этого уравнения: «...Если, например, ты скажешь: квадрат и двадцать один дирхем равны десяти его корням, то это означает: если прибавить к квадрату двадцать один дирхем, получится равное десяти корням этого квадрата. Правило его таково: раздвой число корней, получится пять. Умножь это на равное ему, будет двадцать пять. Вычти из этого двадцать один, которые, как сказано, были с квадратом, останется четыре. Извлеки из этого корень, будет два. Вычти это из половины числа корней, т. е. пяти, останется три, — это и будет корень квадрата, который ты искал. Его квадрат — девять; если хочешь прибавить этот корень к половине числа корней, будет семь, — это тоже корень квадрата, который ты искал; его квадрат — сорок девять».

Таким образом, ал-Хорезми словесно выражает правила решения в радикалах уравнений всех шести канонических ви-

$6\frac{1}{4}$		$6\frac{1}{4}$
	x^2	B
$6\frac{1}{4}$	A	$6\frac{1}{4}$

Д

Рис. 12

дов. Однако он считает необходимым дать также строгое доказательство этих правил для 4-го, 5-го и 6-го видов, когда решение не сводится к простому извлечению корня. Такое доказательство, с его точки зрения, можно было дать, только пользуясь средствами геометрической алгебры.

Доказательство для уравнения $ax^2 + bx = c$ проводится на примере $x^2 + 10x = 39$ двумя способами.

Первый способ состоит в построении квадрата AB со стороной, равной искомому «корню», т. е. x (рис. 12). На продолжениях его сторон строим четыре квадрата, каждый из которых имеет сторону, равную $\frac{10}{4}$, а также четыре прямоугольника со сторонами x и $\frac{10}{4}$. Площадь каждого квадрата равна $6\frac{1}{4}$, а каждого прямоугольника $\frac{10}{4}x$. В результате мы получили новый квадрат с площадью

$$x^2 + 4 \cdot \frac{10}{4}x + 4 \left(\frac{10}{4}\right)^2 = x^2 + 10x + 25.$$

Так как по условию $x^2 + 10x = 39$, то площадь полученного квадрата равна $39 + 25 = 64$. Сторона его есть 8; но по построению она равна $x + 2 \cdot \frac{10}{4}$. Таким образом, $x + 2 \cdot \frac{10}{4} = 8$, откуда $x = 3$.

При втором способе доказательства строится квадрат со стороной x , а на продолжениях его сторон — большой квадрат, составленный двумя прямоугольниками со сторонами x и 5 и квадратом со стороной 5 (рис. 13). Площадь большого квадрата равна $x^2 + 2(5x) + 25 = x^2 + 10x + 25 = 64$. Сторона его равна $x + 5$. Следовательно, $x + 5 = 8$, откуда $x = 3$.

Если воспользоваться современной алгебраической терминологией, то легко видеть, что первое геометрическое построение равносильно следующему рассуждению: пусть дано $x^2 + px = q$; тогда

$$x^2 + 4 \left(\frac{p}{4}x\right) + 4 \left(\frac{p}{4}\right)^2 = q + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

$$\left(x + 2 \cdot \frac{p}{4}\right)^2 = q + 4 \left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

$$x + 2 \cdot \frac{p}{4} = \sqrt{q + 4 \left(\frac{p}{4}\right)^2},$$

$$x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}.$$

Во втором случае

$$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2},$$

$$x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}.$$

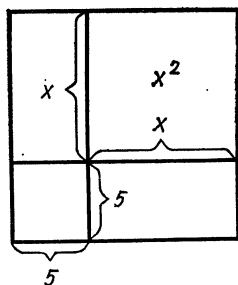


Рис. 13

Таким образом, ал-Хорезми получил геометрическое доказательство правила решения уравнения 4-го вида. Хотя оно дано для частного случая, но по существу имеет общий характер. Аналогично доказаны правила для 5-го и 6-го видов.

В следующем разделе книги ал-Хорезми, озаглавленном «Глава об умножении», даются правила умножения одночленов и двучленов. Они выражаются словесно и сопровождаются числовыми примерами.

Так, он говорит: «Если десять без единицы умножаются на десять без единицы, то десять на десять — это сто, вычитаемая единица на десять — это вычитаемые десять, снова вычитаемая единица на десять — это вычитаемые десять, все это вместе — восемьдесят, а вычитаемая единица на вычитаемую единицу — это прибавляемая единица, и все это вместе — восемьдесят один». Или в современной записи:

$$\begin{aligned} (10-1)(10-1) &= 100 + (-1) \cdot 10 + (-1) \cdot 10 + \\ &+ (-1) \cdot (-1) = 100 - 10 - 10 + 1 = 80 + 1 = 81. \end{aligned}$$

Приводятся и другие примеры, в том числе

$$(10-x)(10+x) = 10 \cdot 10 - 10x + 10x - xx = 100 - x^2.$$

Ал-Хорезми пишет: «Если скажут: десять без вещи умножены на десять с вещью, скажи: десять на десять — это сто, вычитаемая вещь на десять — это вычитаемые десять вещей, вещь на десять — это прибавляемые десять вещей, вычитаемая вещь на вещь — это вычитаемый квадрат, и все это вместе — сто дирхемов без квадрата».

Здесь применяются правила знаков, идущие от Диофанта. Вместо положительных и отрицательных чисел фигурируют «прибавляемые» и «вычитаемые» члены. В таком виде эти правила формулировали во всех учебниках алгебры до того, как были введены отрицательные числа (XVI в.).

В «Главе об увеличении и уменьшении» также словесно излагаются правила действий над иррациональными корнями.

Иррациональный корень во времена ал-Хорезми и гораздо позже называли «глухим» (по-арабски — «асамм», по-латински — *surdus*); при этом имелось в виду, что его значение невозможно выразить, т.е. произнести название целого числа или дроби.

Ал-Хорезми разъясняет на примерах, как производятся операции с корнями: их сложение и вычитание, умножение числа на корень, вынесение множителя из-под радикала, умножение и деление корней. Среди приведенных им примеров отметим следующие:

$$(\sqrt{200} - 10) + (20 - \sqrt{200}) = 10,$$

$$(20 - \sqrt{200}) - (\sqrt{200} - 10) = 30 - 2\sqrt{200} = 30 - \sqrt{800},$$

$$2\sqrt{x} = \sqrt{2 \cdot 2x} = \sqrt{4x},$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{9} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9} = \sqrt{9 \cdot \frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2},$$

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \sqrt{2\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2},$$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{50},$$

$$2\sqrt{9} \cdot 3\sqrt{4} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{36} = 36$$

и др.

Так как ал-Хорезми не владел системой обозначений, подобной нашей, все выкладки проводились в словесной форме.

Так, рассматривая примеры $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$ и $\frac{2\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$, он пишет: «Если ты

хочешь разделить корень из четырех на корень из девяти, раздели четыре на девять, будет четыре девятых единицы, корень из этого сравним с единицей, — это две трети единицы. Если ты хочешь разделить два корня из девяти на корень из четырех или другого квадрата, удвой корень из девяти, согласно тому, как я учил тебя производить произвольное умножение, и раздели это на четыре или на то, что хочешь разделить, поступая так, как поступал я».

Хотя из-за отсутствия символики это рассуждение громоздко, по существу оно носит вполне алгебраический характер. Однако ал-Хорезми и здесь считает нужным доказать с помощью геометрии правильность своих выводов для некоторых примеров. Только тогда они представляются ему убедительными. Таким образом, мы еще раз видим, насколько сильными были в то время древние традиции геометрической алгебры.

Следующие три главы книги ал-Хорезми представляют собой сборник алгебраических задач. Среди них — группа задач

о делении числа 10 на две части при некоторых условиях. Они сводятся к квадратным уравнениям, например:

$$1) \frac{10-x}{x} + \frac{x}{10-x} = 2 \frac{1}{6};$$

(«Ты разделил десять на две части и разделил одну на другую и наоборот, и в сумме все это оказалось двумя и одной шестой дирхема»);

$$2) \frac{1}{2} \cdot \frac{5x}{10-x} + 5x = 50;$$

(«Ты разделил десять на две части, затем умножил одну из частей на пять и разделил ее на другую, затем половину того, что у тебя получилось, прибавил к умноженному на пять, и получилось пятьдесят дирхемов»);

$$3) 10x = (10-x)^2$$

(«Ты разделил десять на две части, затем умножил одну из них на десять, а другую часть умножил на себя, и они оказались равны»).

Такого рода задачи прочно вошли в учебники алгебры, написанные математиками, которые жили значительно позже ал-Хорезми. Традиционными стали и рассматривавшиеся им уравнения:

$$x^2 + 21 = 10x, \quad x^2 + 10x = 39.$$

Условия многих задач взяты из практики, например: *«Работник, месячный заработок которого десять дирхемов, работал шесть дней. Какова его доля?»* (решение сводится к следующему:

$$30 : 10 = 6 : x, \quad 60 = 30x, \quad x = 2).$$

Другая задача: *«Ты разделил дирхем между людьми, каждому из которых достается вещь, затем к ним присоединился человек, и ты разделил дирхем между всеми ними, и каждому из них достается меньше, чем при первом разделе, на одну шестую дирхема»*. Если первоначальное число людей обозначить через x , то условие задачи запишется в виде:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{6}.$$

Решая уравнение, ал-Хорезми получает, что вначале денежная сумма, равная одному дирхему, была разделена между двумя людьми.

Задачи на раздел имущества составляют содержание всей второй части сочинения ал-Хорезми, которая называется «Книга о завещаниях». В свое время она служила практическим руководством для юристов, занимавшихся разделом на-

следства. Дело в том, что согласно мусульманскому законодательству каждый член семьи наследует строго определенную долю оставленного имущества. В конкретных случаях, например если какая-то часть наследства завещалась постороннему человеку при определенных условиях, задача осложнялась. Выйти из затруднения помогала алгебра: вопрос сводился к решению линейного уравнения.

Ал-Хорезми рассматривает разнообразные задачи о разделе наследства, нередко с весьма сложными условиями. Приведем наиболее простой пример: *«Человек умер, оставив двух сыновей, и завещал треть своего имущества другому человеку. Он оставил десять дирхемов наличными и отданное в долг, равное доле одного из сыновей»*.

Следуя рассуждению ал-Хорезми, обозначим долг через x . Тогда все имущество равно $10 + x$. Так как все три наследника получают равные доли, то $\frac{10 + x}{3} = x$, откуда $x = 5$.

Алгебраические методы ал-Хорезми применяет и в главе, посвященной геометрии. Ее содержание мы рассмотрим отдельно.

ЗНАЧЕНИЕ «АЛГЕБРЫ» АЛ-ХОРЕЗМИ

Историки математики немало спорили об источниках алгебры ал-Хорезми. В XIX в. многие считали, что она создавалась главным образом под влиянием индийской математики. Основным доводом для них служили высказывания самого ал-Хорезми и его современников, которые высоко ценили достижения индийцев в арифметике и алгебре.

Другие были убеждены, что ал-Хорезми развивал идеи греческой геометрической алгебры, но при этом широко использовал индийские методы.

Взгляды на историю алгебры существенно изменились после того, как в 30-х гг. нашего столетия ученые расшифровали большое число древневавилонских математических текстов на глиняных табличках, найденных при археологических раскопках. Стало понятно, что в странах Востока зачатки числовой алгебры существовали уже в глубокой древности. Сложившиеся здесь традиции впоследствии развивались учеными эллинистического периода—Героном, Диофантом и др.—и нашли завершение в сочинении ал-Хорезми.

Ал-Хорезми блестяще изложил теорию квадратных уравнений, которая уже с успехом применялась в его время. Например, недавно исследователи обнаружили и изучили трактат по алгебре, который составил тогда же Абдал-Хамид ибн Турк ал-Хуттали. Алгебраическое сочинение написал и другой современник ал-Хорезми, также работавший в Багдаде,—

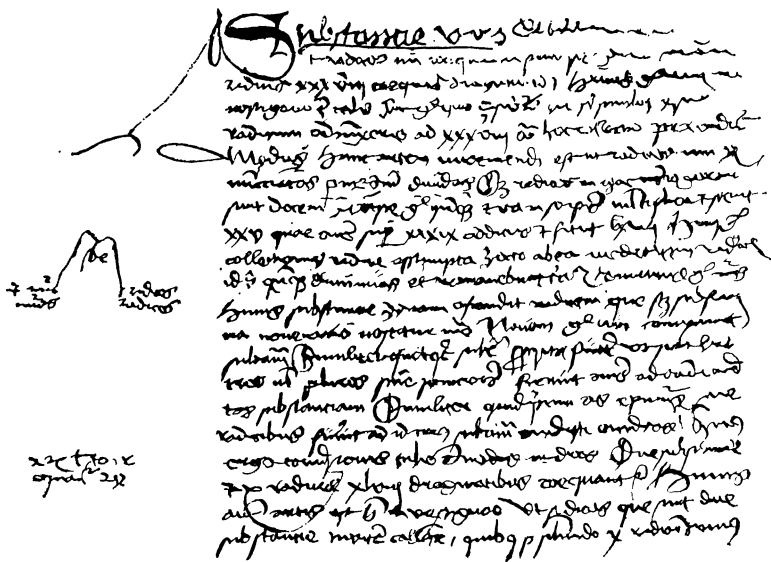


Рис. 14.

Фрагмент латинской рукописи алгебраического трактата ал-Хорезми

крупнейший математик и астроном Сабит ибн Корра ал-Харрани. Но математики, по-видимому, нашли, что книга ал-Хорезми превосходит по своим методическим достоинствам все другие книги такого рода. Этим объясняется, что она стала образцом, на котором учились и которому подражали алгебраисты более позднего времени.

Большое влияние ал-Хорезми испытал на себе Абу Камил Шуджа ибн Аслам (ок. 850—950) — автор «Книги о восполнении и противопоставлении» («Книга об алгебре и ал-мукабале») и других математических трудов. Он излагал алгебру так же, как ал-Хорезми, и разъяснял правила на заимствованных у него примерах. Но Абу Камил развил дальше учение своего предшественника и, в частности, широко применил алгебраические методы к решению задач геометрии. В сочинении «О пятиугольнике и десятиугольнике» он ищет стороны правильных вписанных многоугольников. Такие задачи решались еще в «Началах» Евклида, но там требовалось найти сторону многоугольника построением с помощью циркуля и линейки. Абу Камил подходит к вопросу по-новому: он вычисляет длину стороны, выражая ее через известный диаметр круга. Для этого решается соответствующее квадратное уравнение.

Важную роль в развитии алгебры сыграл выдающийся ученый X—XI вв. Абу Бакр Мухаммад ал-Караджи (или ал-Кархи), который опирался на труды ал-Хорезми и Абу Камила. Многие заимствованные у ал-Хорезми формулировки правил и задачи (например, $x^2 + 10x = 39$, $x^2 + 21 = 10x$) стали традиционными и позже вошли почти во все учебники по алгебре.

Интересно заметить, что термин «ал-джабр» уже на средневековом Востоке стал обозначать не только конкретное действие, но и целую область математики — алгебру. Уже Сабит ибн Корра назвал тех, кто решает уравнения численным методом, «людьми алгебры», т. е. алгебраистами. Позднее это название применял великий математик и поэт Омар Хайям (1048—1131), который занимает важное место в истории алгебры.

Алгебраический трактат ал-Хорезми, как и арифметический, был в числе первых сочинений по математике, переведенных в Европе с арабского языка на латынь (рис. 14). На ал-Хорезми ссылался выдающийся итальянский математик XIII в. Леонардо Пизанский в алгебраическом разделе своей «Книги абака», о которой мы уже говорили. И в более позднее время ученые обсуждали сочинение ал-Хорезми. Комментарий к нему написал выдающийся голландский математик XVI в. Адриан ван Роумен (1561—1615).

В Европе вплоть до XVI в. алгебру называли «искусством алгебры и алмукабалы» (или «большим искусством», противопоставляя его «малому», т. е. практической арифметике). Долго сохранялось также много арабских алгебраических терминов в переводе на латынь или на народные европейские языки. Так, неизвестную в уравнении, как и у ал-Хорезми, называли «вещь» (по-латински — *res*, а по-итальянски — *cosa*); квадрат неизвестной — «имущество» (по-латински — *census*) и т. д. Последним сочинением, в заглавии которого мы находим оба термина, введенные ал-Хорезми, была книга французского математика XVI в. Г. Госселена «О великом искусстве или таинственном разделе чисел, которое обычно называется алгеброй или алмукабалой»; она была опубликована в Париже в 1577 г.

Унаследованное от восточных математиков учение о линейных и квадратных уравнениях стало той основой, на которой развивалась алгебра в Европе. Постепенно сформировалась алгебраическая символика: для обозначения неизвестной и ее степеней, а позднее и коэффициентов стали систематически применять буквы; специальные знаки были введены для алгебраических операций. В XVI в. выдающиеся итальянские математики Сципион дель Ферро (ум. в 1526), Николо Тарталья (1500—1557) и Джироламо Кардано (1501—1576) сделали следующий важнейший шаг в развитии алгебры — нашли решение кубического уравнения в радикалах.

IV.

Математики Ближнего и Среднего Востока в средние века уделяли большое внимание геометрии. Особый интерес вызывали «Начала» Евклида. Это классическое произведение было переведено на арабский язык уже в конце VIII — начале IX в. По нему изучали геометрию, его обсуждали и комментировали. Восточные ученые не только усвоили учение Евклида, но и стремились уточнить и творчески развить его. Больших успехов они достигли, например, разрабатывая теорию параллельных линий.

Но наряду с вопросами теории их занимали и проблемы практической геометрии. Такие проблемы постоянно приходилось решать землемерам, ремесленникам, строителям. Поэтому математики писали специальные сочинения, которые служили руководствами для практиков. В них обычно не было доказательств, а приводились только определения основных геометрических понятий и правила измерения фигур и тел. Правила обычно разъяснялись на многочисленных конкретных примерах.

Впервые в литературе на арабском языке такое собрание сведений, необходимых в практической, хозяйственной деятельности человека, дал ал-Хорезми. Этим вопросам посвящен геометрический раздел его «Алгебры». Он носит название «Глава об измерении». Основное внимание в ней уделено вопросам измерения фигур.

Вначале ал-Хорезми вводит понятие единичной площади и дает правила вычисления площади квадрата, треугольника и ромба. Он рассматривает равносторонний треугольник, но формулирует правило, справедливое для треугольника любого вида: «Если перемножить высоту и половину основания, на которое падает высота, получится площадь этого треуголь-

ника». Относительно ромба ал-Хорезми говорит: «Если ты умножишь одну из диагоналей на половину другой, получишь его площадь».

Далее он переходит к рассмотрению круга, останавливаясь сначала на определении длины окружности. Приводятся три правила, соответствующие различным значениям отношения длины окружности к диаметру, т. е. числа π .

Первое правило формулируется следующим образом: «Каждый круг таков, что, если ты умножишь диаметр на три и одну седьмую, получится окружность, ограничивающая его».

Значение $\pi = 3\frac{1}{7} = 3,1428$, предлагаемое здесь, применялось еще в древности Архимедом.

Однако ал-Хорезми замечает, что «это выражение не необходимо» и что «у геометров по этому вопросу имеются два другие выражения». Одно из них получается из правила: «Ты умножишь диаметр на равное ему и на десять и извлечешь корень из того, что получилось, получится окружность». Другими словами, $c = \sqrt{10} d$, где c — длина окружности, d — диаметр. Здесь $\pi = \sqrt{10} \approx 3,16227$. Это значение встречалось раньше в сочинениях индийских математиков, и в частности у Брахмагупты (VII в.).

Наконец, третье выражение для π применялось астрономами. Ал-Хорезми пишет: «Ты умножаешь диаметр на шестьдесят две тысячи восемьсот тридцать два, а затем делишь это на двадцать тысяч, тогда частное — это окружность», т. е.

$c = \frac{62\,832}{20\,000} d$. Значение $\pi = \frac{62\,832}{20\,000} = 3,1416$ имеет, по-видимому,

также индийское происхождение: оно было известно математику и астроному V в. Ариабхате. Ал-Хорезми отмечает, что все указанные значения π почти равны между собой: «Все это близко друг к другу».

Далее определяется площадь круга: «Каждый круг таков, что половина диаметра, умноженная на половину окружности, — его площадь». Иначе говоря, $S = \frac{d}{2} \cdot \frac{c}{2} = r \cdot \pi r$, где S —

площадь круга, r — его радиус. Это правило ал-Хорезми обосновывает тем, что «всякий многоугольник с равными углами и сторонами, как треугольник, квадрат, пятиугольник и т. д., таков, что если ты умножишь половину его обвода на половину диаметра наибольшего круга, вписанного в него, то получишь его площадь». Таким образом, он утверждает, что площадь любого описанного правильного многоугольника можно вычислить как произведение половины его периметра на радиус вписанного круга. Следовательно, круг рассматривается весьма большое число сторон.

Приводится и другое правило нахождения площади круга:

«Каждый круг таков, что, если ты умножишь его диаметр на себя и вычтешь из этого одну седьмую и половину одной седьмой, получится его площадь, соответствующая первому правилу». Это значит, что

$$S = d^2 - \frac{1}{7} d^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} d^2 = \frac{11}{14} d^2,$$

откуда следует: $\pi = 3 \frac{1}{7}$.

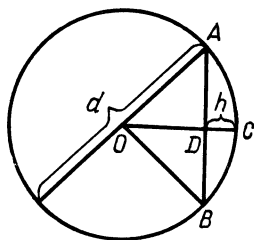


Рис. 15

Затем ал-Хорезми вычисляет площадь сегмента круга, которую он называет площадью, соответствующей дуги. Для этого вводится длина s дуги AB , хорда a и высота сегмента $DC = h$, носившая название «стрела дуги» (рис. 15). Диаметр круга d определяется по правилу: «Умножь половину хорды на себя, раздели это на стрелу и прибавь частное к стреле, сумма — это диаметр круга этой дуги», т. е.

$$d = \frac{a^2}{4h} + h.$$

Далее приводится правило определения площади сегмента S' для двух случаев:

1) если сегмент меньше, чем полукруг, то

$$S' = \frac{d}{2} \cdot \frac{S}{2} - \left(\frac{d}{2} - h \right) \frac{a}{2};$$

2) если сегмент больше, чем полукруг, то

$$S' = \frac{d}{2} \cdot \frac{S}{2} + \left(h - \frac{d}{2} \right) \frac{a}{2}.$$

Следующий вопрос, который рассматривает ал-Хорезми, касается объемов тел — параллелепипеда, кругового цилиндра, призмы, конуса, пирамиды.

Относительно параллелепипеда (который называется «четырёхугольным телом») он говорит: «Если умножить длину на ширину, а затем на высоту, получится объем».

Объем цилиндра, треугольной, четырехугольной и т. д. призмы определяется умножением площади основания на высоту. «Если же тело не четырехугольное, — пишет ал-Хорезми, — а круглое, треугольное или иное, но его грани параллельны высоте, его мера такова: измерь его плоскую фигуру, т. е. узнай ее площадь, умножь это на глубину, и получится объем».

Конусы и пирамиды измеряются по следующему правилу: «Что касается конусов треугольного, квадратного и круглого, то они таковы, что произведение трети площади их основания на высоту есть их объем».

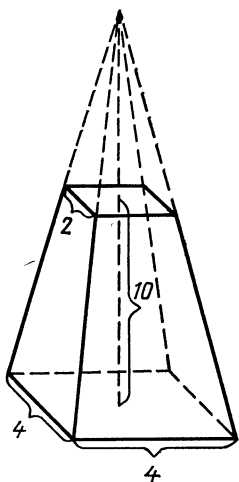


Рис. 16

В конце геометрического раздела книги ал-Хорезми рассматривает также правило вычисления объема усеченной квадратной пирамиды с данными основаниями и высотой. Пусть высота усеченной пирамиды $h=10$, сторона нижнего основания $a_1=4$, а верхнего $a_2=2$ (рис. 16). Высота неусеченной пирамиды H определяется следующим образом:

$$\frac{h}{H} = \frac{a_1 - a_2}{a_1}, \quad \frac{10}{H} = \frac{2}{4}, \quad H = 20.$$

Тогда объем неусеченной пирамиды $V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 20 = 106 \frac{2}{3}$, а объем верхней пирамиды $V_1 = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 10 = 13 \frac{1}{3}$.

Искомый объем усеченной пирамиды v определяется как разность этих двух объемов:

$$v = V - V_1 = 106 \frac{2}{3} - 13 \frac{1}{3} = 93 \frac{1}{3}.$$

Наиболее подробно ал-Хорезми останавливается на вопросах, связанных с измерением треугольников и четырехугольников. Он начинает с формулировки и доказательства теоремы Пифагора. Это единственный в сочинении случай, когда геометрическое предложение доказано строго в духе «Начал» Евклида. Однако доказательство проводится только для равнобедренного прямоугольного треугольника.

Ал-Хорезми пишет: «Знай, что каждый прямоугольный треугольник таков, что если умножить каждую из его коротких сторон на себя, то сумма произведений равна произведению длинной стороны на себя».

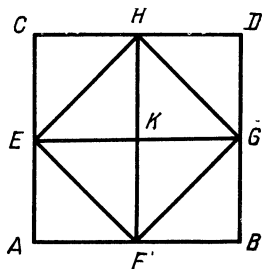


Рис. 17

Воспроизводим ход его рассуждения. Построим квадрат $ACDB$ (рис. 17). Разделим сторону AC пополам в точке E и проведем $EG \perp AC$. Затем разделим пополам сторону AB в точке F и проведем из нее $FH \perp AB$. Тогда данный квадрат будет разбит на четыре меньших квадрата, равных между собой. Проводим диагонали FE, EH, HG, GF , пересекающие каждый из этих квадратов на два равных прямоугольных равнобедренных треугольника. В результате данный

большой квадрат оказывается разбитым на восемь таких треугольников, равных между собой. Следовательно, четыре из них составляют квадрат $EHGF$, равный половине большого квадрата.

Рассмотрим теперь квадрат $AЕКF$. По словам ал-Хорезми, «линия AF , умноженная на себя, — это площадь двух треугольников и AE , умноженная на себя, — площадь равных им треугольников. Поэтому сумма этих площадей — это четыре треугольника». С другой стороны, площадь четырех треугольников равна площади квадрата $EHGF$, сторона которого есть EF . Таким образом, $AE^2 + AF^2 = EF^2$, что и требовалось доказать.

Ал-Хорезми ограничивается этим наглядным доказательством частного случая теоремы Пифагора, но, как видно из дальнейшего, считает ее доказанной и для общего случая.

Следующий раздел геометрической главы сочинения ал-Хорезми посвящен классификации четырехугольников и вычислению их площадей. Выделено пять видов четырехугольников: 1) квадрат, 2) прямоугольник, 3) ромб, 4) параллелограмм, не являющийся прямоугольником, 5) четырехугольник с разными сторонами и углами.

Правила вычисления площадей и примеры к ним сформулированы так, что они могут служить руководством для практиков-землемеров.

Например, относительно измерения квадрата и прямоугольника ал-Хорезми пишет: «Что касается четырехугольников с равными сторонами и прямыми углами или с разными сторонами и прямыми углами, то, чтобы получить их площадь, умножь длину на ширину, то, что получится, и есть площадь. Например, каждая сторона четырехугольного участка земли есть пять локтей, тогда его площадь — двадцать пять локтей. Вот чертеж этого (рис. 18).

Второй: длина четырехугольного участка земли — восемь локтей и восемь локтей, а ширина — шесть и шесть. Тогда, чтобы получить его площадь, умножь шесть на восемь, получится сорок восемь локтей. Это и есть его площадь. Вот чертеж этого (рис. 19)».

Площадь ромба с известными сторонами вычисляется для двух случаев, когда заданы: 1) обе диагонали и 2) только одна диагональ. Правило разъясняется на примерах и иллюстрируется чертежом. «Что касается ромба, все

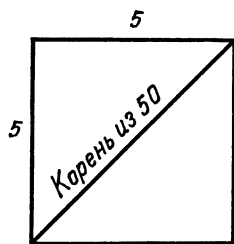


Рис. 18

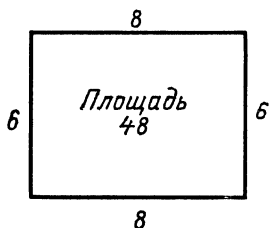


Рис. 19

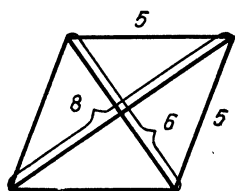


Рис. 20

равные стороны которого по пять локтей, одна из диагоналей — восемь, а другая — шесть локтей, то знай, — учит ал-Хорезми, — что его площадь определяется по его двум диагоналям или по одной из них. Если известны обе диагонали, то произведение одной из них на половину другой есть площадь, т. е. умножь восемь на три или четыре на шесть, получится двадцать четыре локтя, это и есть площадь. Если же известна одна диагональ, то тебе известны два треугольника, у каждого из которых две стороны по пяти локтей, а третья сторона — диагональ. Их площадь вычисляется согласно правилам вычисления площадей треугольников. Вот чертеж этого (рис. 20)».

Параллелограмм ал-Хорезми называет ромбоидом. По его определению, у этой фигуры «длина и ширина разные и углы разные, но две длины равны и две ширины также равны». Ее площадь, как и площадь произвольного четырехугольника, предлагается вычислять по «правилам вычисления площадей треугольников при помощи диагоналей». Приводится чертеж, разъясняющий это правило для ромбоида (рис. 21).

Далее ал-Хорезми классифицирует треугольники, а затем вычисляет их площади, применяя для этого алгебраические методы. Треугольники бывают трех видов: прямоугольные, остроугольные и тупоугольные. Для первых справедлива теорема Пифагора: если a и b — катеты, а c — гипотенуза, то $a^2 + b^2 = c^2$. Ал-Хорезми повторяет приведенную выше формулировку.

Для остроугольных треугольников он утверждает: «Если ты умножишь каждую из их коротких сторон на себя, то сумма будет больше произведения длинной стороны на себя», т. е. $a^2 + b^2 > c^2$. Аналогично сформулировано правило для тупоугольных треугольников: $a^2 + b^2 < c^2$.

Правило вычисления площади прямоугольного треугольника иллюстрируется примером: «Сторона прямого угла — шесть локтей, другая его сторона — восемь локтей, а гипотенуза — десять; вычисление таково: умножь шесть на четыре, получится двадцать четыре локтя, это и есть его площадь».

Площадь остроугольного и тупоугольного треугольника ал-Хорезми определяет «при помощи высоты и места падения камня» и дает следующее разъяснение этому правилу: «Знай, что в каждом треугольнике с двумя равными сторонами высота, проведенная от них к основанию, падает под прямым углом и попадает в точности в середину основания,

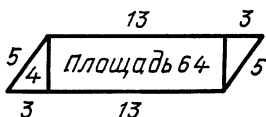


Рис. 21

если же стороны разные, то место падения камня не совпадает с серединой основания». При решении применяются алгебраические методы.

В качестве первого примера приводится остроугольный треугольник со сторонами, равными десяти локтям (рис. 22). Для определения высоты BD следует воспользоваться теоремой Пифагора и произвести следующие действия:

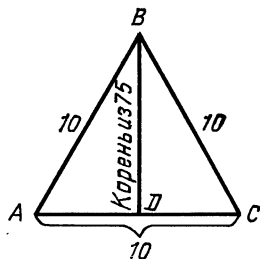


Рис. 22

1) $5^2 = 25$; 2) $10^2 = 100$;

3) $100 - 25 = 75$; 4) $BD = \sqrt{75}$.

Далее ал-Хорезми говорит: «Если ты хочешь узнать площадь, то умножь корень из семидесяти пяти на половину основания, т. е. пять, или, умножив пять на равное им, умножь корень из семидесяти пяти на корень из двадцати пяти. Умножь семьдесят пять на двадцать пять, получится тысяча восемьсот семьдесят пять. Извлеки корень, получится его площадь. Это — сорок три с небольшим», т. е. площадь треугольника есть

$$5 \sqrt{75} = \sqrt{75 \cdot 25} = \sqrt{1875} \approx 43,3.$$

Более сложным будет решение в случае остроугольного треугольника с разными сторонами и углами. Ал-Хорезми рассматривает треугольник ABC (рис. 23), у которого $AB=13$, $BC=15$, $AC=14$.

Пусть BD — высота; это значит, что «место падения камня» определяется точкой D .

Решение проводится следующим образом: «Место падения камня попадает на расстоянии, равном вещи, от одной из двух сторон, какой ты хочешь; пусть эта вещь примыкает к стороне в тринадцать локтей. Умножим ее на равное ей, получится квадрат; отнимем это от тринадцати, умноженных на равное этому, т. е. ста шестидесяти девяти, получится сто шестьдесят девять без квадрата. Мы знаем, что корень из этого — это высота. То, что осталось у нас от основания, т. е. четырнадцать без вещи, умножь на равное этому, получится сто девяносто шесть и квадрат без двадцати восьми вещей. Вычтем это из пятнадцати, умноженных на себя, останется двадцать девять дирхемов и двадцать восемь вещей без квадрата. Корень из этого — высота».

Иными словами, ал-Хорезми полагает $AD=x$ и составляет квадратное уравнение. Он пользуется при этом теоремой Пифагора, применяя ее к прямоугольным тре-

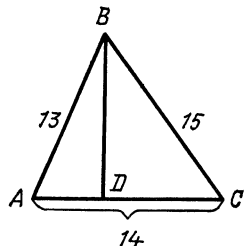


Рис. 23

угольникам ADB и BDC . В первом из них

$$BD^2 = AB^2 - AD^2 = 13^2 - x^2 = 169 - x^2.$$

В другом треугольнике

$$\begin{aligned} BD^2 &= BC^2 - DC^2 = 15^2 - (14 - x)^2 = \\ &= 225 - (196 - 28x + x^2) = 29 + 28x - x^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$169 - x^2 = 29 + 28x - x^2.$$

Ал-Хорезми предлагает произвести действие противопоставления. «Тогда, — пишет он, — квадрат встретится с квадратом и оба квадрата уничтожатся, останется: двадцать девять и двадцать восемь вещей равны ста шестидесяти девяти», т. е.

$$169 = 29 + 28x.$$

Далее говорится: «Вычти двадцать девять из ста шестидесяти девяти, останется: сто сорок равно двадцати восьми вещам», т. е.

$$140 = 28x.$$

Отсюда «одна вещь — это пять, это и есть место падения камня, примыкающее к стороне в тринадцать локтей», т. е. $x = 5$.

Затем ал-Хорезми определяет высоту данного треугольника:

$$BD = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12,$$

а затем — его площадь: «Умножь высоту на половину основания, т. е. семь, будет восемьдесят четыре. Это и есть площадь треугольника».

Геометрическая глава сочинения ал-Хорезми завершается следующей задачей об измерении земельного участка: «Если скажут: у треугольного участка земли две стороны — десять и десять локтей, а основание — двенадцать локтей; внутри него квадратный участок земли. Какова каждая сторона квадрата?» Иначе говоря, требуется определить сторону квадрата $DEFG$, вписанного в равнобедренный треугольник ABC , основание которого $AC = 12$, стороны $AB = BC = 10$.

Вначале определяется площадь S данного треугольника. Находим его высоту BK :

$$BK = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8.$$

Тогда площадь $\triangle ABC$ есть $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$.

Сторона вписанного квадрата принимается за x (за «вещь»), находятся площади S_1 и S_2 прямоугольных треуголь-

ников ADE и CGF , которые равны между собой, а затем S_3 — площадь треугольника EBF , находящегося «над квадратом».

Так как $AD = GC = 6 - \frac{x}{2}$, $DE = GF = x$, то

$$S_1 = S_2 = \frac{1}{2} \left(6 - \frac{x}{2} \right) x = 3x - \frac{x^2}{4}.$$

Так как $BL = BK - x = 8 - x$, $EF = x$,

то

$$S_3 = \frac{1}{2} x (8 - x) = 4x - \frac{x^2}{2}.$$

Площадь вписанного квадрата $S_4 = x^2$.

Таким образом,

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4,$$

откуда получаем уравнение:

$$48 = 3x - \frac{x^2}{4} + 3x - \frac{x^2}{4} + 4x - \frac{x^2}{2} + x^2.$$

$$48 = 10x,$$

$$x = 4 \frac{4}{5}.$$

После ал-Хорезми вопросы практической геометрии рассматривали в своих трудах многие выдающиеся восточные математики. Среди них — бану Муса ибн Шакир, т. е. сыновья Мусы ибн Шакира: Мухаммад, Хасан и Ахмад. Они работали в Багдаде в конце IX в. и занимались математикой, астрономией, механикой. Им принадлежит «Книга трех братьев по геометрии», которая стала известна в Европе в XII в. и была переведена на латынь.

Так же, как и ал-Хорезми, изложил геометрию живший в X в. выдающийся ученый Абу-л-Вафа ал-Бузджани. Геометрии посвящен большой раздел его «Книги о том, что нужно знать писцам, деловым людям и прочим лицам из науки арифметики» и трактат «Книга о том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений». В том же духе написаны геометрические главы сочинения уже упоминавшегося математика X — XI вв. — ал-Караджи.

Влияние геометрического раздела труда ал-Хорезми сказывается и гораздо позже — в знаменитых энциклопедических сочинениях, написанных в XIII и XV вв.: первое из них — «Солнечный трактат об арифметике» Хасана ибн Мухаммада ан-Найсабури, второе — «Ключ арифметики» Гияс ад-Дина Джамшида ал-Каши.

АСТРОНОМИЯ

Астрономия занимала ведущее место среди точных наук на средневековом Востоке, так как она была необходима для практики. Без нее нельзя было обойтись ни в орошаемом земледелии, ни в морской и сухопутной торговле. Поэтому уже в VIII в. в Багдаде и других городах халифата начались интенсивные астрономические исследования.

Большое внимание уделялось переводу на арабский язык древнегреческих и индийских сочинений по астрономии. Был переведен и внимательно изучался «Алмагест» Птолемея (II в.). Этот труд, обобщивший достижения античных ученых, явился фундаментом всей средневековой астрономической теории.

Сильное влияние на развитие астрономии в странах Ближнего и Среднего Востока оказала наука Индии. Средневековые историки рассказывают, что в 773 г. в Багдад из Индии прибыл человек, хорошо осведомленный в астрономических теориях. Через него багдадские ученые познакомились с сиддхантами — индийскими сочинениями, в которых приводились сведения по математике и астрономии. Он дал краткое изложение одного из них в специально написанном трактате, который затем по приказу халифа ал-Мансура был переведен на арабский язык. Этот перевод позднее называли Большим Синдхиндом.

Уже в VIII в. производились астрономические наблюдения в обсерватории, построенной в Дамаске. Особенно широко они развернулись в Багдаде после того, как в 829 г. здесь была сооружена большая обсерватория при «Доме мудрости». Ученые составляли астрономические таблицы и стремились, чтобы они были точнее, чем таблицы их предшественников. Для этого требовались более совершенные астрономические инстру-

менты. В конструировании астролябий, квадрантов, солнечных часов восточные мастера достигли высокого искусства.

В IX в. появились первые самостоятельные труды по астрономии на арабском языке. Среди них значительное место занимали зиджи — сборники астрономических и тригонометрических таблиц, нужных для решения многих задач практической астрономии. С помощью этих таблиц вычислялись положения светил на небесной сфере, определялись моменты начала солнечных и лунных затмений и т. п. Они служили для измерения времени. В зиджах таблицы дополнялись подробными теоретическими разъяснениями.

К числу первых зиджей относится зидж ал-Хорезми. Это сочинение принесло ему славу при жизни и высоко ценилось астрономами более поздних времен. Средневековые историки пишут, что оно существовало в двух вариантах, но, когда они были составлены, неизвестно.

В арабском подлиннике зидж ал-Хорезми не сохранился. Мы знакомы с этим сочинением по латинскому переводу 1126 г., принадлежащему Аделарду из Бата. К сожалению, он выполнен не с самого сочинения ал-Хорезми, а с его обработки, которую составил в конце X — начале XI в. Маслама ибн Ахмад ал-Маджрити — арабский ученый, работавший в Испании. Ал-Маджрити старался точно следовать оригиналу, но изменил некоторые астрономические величины, которые ал-Хорезми привел для широты Багдада; в тексте ал-Маджрити они пересчитаны относительно Кордовы. Латинский перевод этих таблиц получил широкое распространение в Европе и послужил здесь основой астрономических исследований. В настоящее время он издан, переведен на английский язык и внимательно изучен историками науки.

Зидж ал-Хорезми комментировали многие ученые Ближнего и Среднего Востока. Среди них был выдающийся среднеазиатский астроном Абу-л-Аббас Ахмад ал-Фаргани, автор знаменитого труда «Начала астрономии», также ставшего известным в Европе в XII в. Ал-Фаргани был современником ал-Хорезми и тоже работал в Багдаде. Его комментарий к зиджу ал-Хорезми до нас не дошел, но в свое время пользовался большой популярностью.

Оказались утерянными и три объемистых сочинения Абу Райхана ал-Беруни, посвященные этому зиджу. Об их содержании можно судить по высказываниям самого ал-Беруни в других трудах. Он обсуждал и обосновывал таблицы, приведенные ал-Хорезми, защищал их от несправедливой критики некоторых астрономов. В то же время он стремился уточнить данные ал-Хорезми и исправить те, которые казались ему ошибочными. Внимание ал-Беруни к зиджу ал-Хорезмишний раз доказывает, каким высоким авторитетом пользовалось

это сочинение у самых крупных восточных астрономов через полтора столетия после того, как оно было написано.

Сейчас известен комментарий к зиджу ал-Хорезми, который составил ученый X в. Ахмад ибн Мусанна. Он помогает исследователям точнее восстановить содержание зиджа.

Труд ал-Хорезми представляет большой интерес для тех, кто изучает историю восточной астрономии. Ученые IX в., работавшие в Багдаде, старались объединить теории античных астрономов с индийскими астрономическими теориями и учениями, распространенными в доисламском Иране. Ал-Хорезми в своем зидже подробно разъяснял методы, которые были разработаны в Индии. Эти методы дополняли теорию Птолемея, ставшую основой астрономии Ближнего и Среднего Востока.

Мы не будем подробно останавливаться на содержании зиджа ал-Хорезми. Чтобы понять его, нужно сначала основательно познакомиться с той моделью мира, на которой Птолемей объяснил движение небесных тел. Ал-Хорезми, как и другие астрономы его времени, исходил из этой — геоцентрической — системы мира. Со времени Коперника (1473—1543) стало ясно, что птолемеева система мира не соответствует действительности: согласно этой системе в центре мира находится Земля, а небесная сфера с Солнцем и другими светилами совершает равномерные круговые движения вокруг нее. Сейчас всем известно, что Земля является одной из планет солнечной системы, вращающихся вокруг Солнца. Но хотя ошибочность птолемеевой системы мира доказана, нельзя забывать, что предложенная им механическая модель была удобной для астрономических расчетов. Ею с успехом пользовались для того, чтобы объяснить видимое движение Солнца, Луны, планет и вычислять их сферические координаты в тот или иной момент времени. Модель эта достаточно сложна и мало знакома современному читателю. Поэтому мы опишем содержание сочинения ал-Хорезми только в самых общих чертах.

Зидж ал-Хорезми состоит из 37 глав. Подобно другим зиджам, он начинается разделом о хронологии и календаре. Этот раздел считался необходимым для руководства по практической астрономии, потому что разные народы в разное время пользовались различными календарными системами. Существовали солнечные, лунные, лунно-солнечные календари. Начало отсчета в той или иной календарной системе, т. е. начало летосчисления, было приурочено к некоторому произвольно выбранному событию. Поэтому существовало множество различных эр и историки разных народов датировали одно и то же событие по-разному, в соответствии с принятой у них эрой. Это касалось и астрономии, где точная датировка наблюдения какого-либо небесного явления играет важную роль. Поэтому астроном должен был уметь сопоставлять между собой хронологические и астрономические таблицы, составлен-

ные для разных календарных систем, и уметь переводить одну из этих систем в другую. Авторы зиджей уделяли поэтому большое внимание хронологии и описанию различных эр. Абу Райхан ал-Беруни, например, посвятил этим вопросам один из своих главных трудов — «Памятники минувших поколений».

В зидже ал-Хорезми о хронологии и календарях речь идет в первых пяти главах. Вначале (1-я глава) он дает описание арабского лунного календаря. Во второй главе рассматривается солнечный, юлианский календарь — календарь «румов», т. е. римлян и византийцев.

Затем ал-Хорезми сопоставляет между собой различные эры. Среди них одна из древнейших эр, существовавших в Индии, — *эра Калиюга*, или «железный век»; ал-Хорезми называет ее «эрой потопа». Начало ее приходилось на 3101 г. до н. э. *Селевкидская эра*, или «эра Александра», которая связывалась с именем Селевка — одного из полководцев Александра Македонского, начиналась 1 октября 312 г. до н. э. *Эра хиджры*, принятая в странах ислама, была введена халифом Омаром в 634—644 гг.; ее начало отнесено к 16 июля 622 г. Кроме того, в зидже ал-Хорезми рассматривается *христианская эра* и *испанская эра*; последняя применялась в Испании в V—XV вв. и начиналась 1 января 37 г. до н. э.

Особое внимание ал-Хорезми к вопросам хронологии подтверждается тем, что он посвятил им отдельное сочинение.

В третьей главе зиджа приводятся таблицы, в которых указано время (год, месяц, день, час, минуты) наблюдения положений Солнца, Луны и планет, а в следующей — таблицы для определения начала арабских месяцев.

Пятая глава содержит правила перевода дат из одной эры в другую.

В шестой главе, озаглавленной «О подразделении кругов»¹, ал-Хорезми объясняет общепринятое у астрономов подразделение эклиптики, т. е. круга на небесной сфере, по которому Солнце перемещается в течение года. Этот круг, называемый также поясом Зодиака, делится на 12 частей — по числу созвездий, находящихся на нем. Это следующие созвездия: Рыбы, Близнецы, Дева, Стрелец, Овен, Рак, Весы, Козерог, Телец, Лев, Скорпион, Водолей. Они определяют соответствующие знаки Зодиака.

Ал-Хорезми пишет, что эклиптика «подразделяется на 12 знаков, знак — на 30 градусов, некоторые называют их частями, градус — на 60 минут, минута — на 60 секунд, секунда — на 60 терций».

¹ Она имеется в русском переводе в книге «Математические трактаты» [15, с. 89]. Там же (с. 89—93) дан перевод 23-й и 28-й глав зиджа ал-Хорезми.

Это подразделение очень важно для астрономических вычислений. Но ал-Хорезми, по существу, излагает здесь принципы градусного измерения любого круга, на которых основывается тригонометрия.

Следующие главы (7—22) посвящены описанию видимого движения Солнца, Луны и планет. Изложение иллюстрируется многочисленными таблицами.

В нескольких главах (24—27) ал-Хорезми касается астрономических вопросов, связанных с географией (например, с определением географической широты места).

Большой интерес представляют главы зиджа, посвященные тригонометрии (гл. 23 и 28). Эта наука долго представляла собой вспомогательный раздел астрономии. В трудах ученых средневекового Ближнего и Среднего Востока она постепенно превратилась в самостоятельную математическую дисциплину. Один из первых шагов в этом направлении сделал ал-Хорезми.

Древнегреческие ученые разработали своеобразную «тригонометрию хорд» и пользовались ею в астрономических вычислениях. В круге с центром O вместо линии синуса AB рассматривалась хорда AC центрального угла α . Очевидно, что

$$\text{хорда } \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2},$$

но функции \sin в древности не знали. Единственной тригонометрической величиной, известной тогда, была хорда.

«Тригонометрию хорд» применял Птолемей в «Алмагесте». Он получил известные нам основные тригонометрические соотношения, но сформулировал их с помощью одного понятия — хорды. Например, вместо формулы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

приводилось равносильное ей соотношение

$$(\text{хорда } \alpha)^2 + [\text{хорда } (180^\circ - \alpha)]^2 = d^2,$$

где d — диаметр круга. Хотя с помощью «тригонометрии хорд» можно было решать задачи, возникающие в астрономии, пользоваться ею было крайне неудобно.

Хорды были заменены синусами в индийской математике. Кроме линии синуса, индийцы ввели линию косинуса OB и обращенного синуса BD . Обращенный синус — разность между радиусом и линией косинуса — назывался также «стрелой дуги»; впоследствии он получил латинское название *sinus versus*.

Ал-Хорезми в своем зидже впервые в арабоязычной литературе пользуется понятиями синуса и обращенного синуса. «Здесь следует знать, — пишет он, — что синус бывает плоский и обратный». Он приводит таблицу синусов и правила

пользования ею. Дальше разъясняется, как с помощью этой таблицы найти синус и обращенный синус по данной дуге и обратно — дугу по данному синусу.

Радиус круга принимался равным 60, а значения синуса в таблицах давались в шестидесятеричных дробях. Правило определения обращенного синуса, приведенное ал-Хорезми, в современных обозначениях выглядит так: если обозначить линию обращенного синуса дуги α через $\sin \text{vers } \alpha$, то

$$\begin{aligned}\sin \text{vers } \alpha &= 60 - \sin(90^\circ - \alpha) \text{ при } \alpha < 90^\circ, \\ \sin \text{vers } \alpha &= 60 + \sin(90^\circ - \alpha) \text{ при } \alpha > 90^\circ.\end{aligned}$$

Если радиус круга, как принято сейчас, взять равным 1, то это правило примет вид:

$$\sin \text{vers } \alpha = 1 - \cos \alpha,$$

где соответственно $\cos \alpha > 0$ и $\cos \alpha < 0$.

Разъяснив правила пользования таблицей синусов, ал-Хорезми говорит: «Всякий, кто стремится познать астрономическую науку, изучит это изложение со всем вниманием... Если же кто-нибудь спросит, каким образом таким-то значениям приписываются такие-то синусы и наоборот, пусть знает, что по поводу причины этого правила следует обратиться к «Алмагесту» Птолемея» [15, с. 90]. Мы видим отсюда, что ал-Хорезми был хорошо знаком и с индийской и с греческой тригонометрией.

В обработке зиджа ал-Хорезми, принадлежащей ал-Маджрити, приведены также таблицы котангенса (называвшегося «прямой тенью») и тангенса (называвшегося «обращенной тенью»). Возможно, что их вставил в текст ал-Маджрити. Но может быть, они были и в зидже самого ал-Хорезми, так как его современник — среднеазиатский астроном Хабашиб ал-Хасиб — приводил такие таблицы в своем сочинении. Значит, ими уже умели пользоваться в Багдаде во времена ал-Хорезми.

Термины «прямая тень» и «обращенная тень», обозначающие линии котангенса и тангенса, пришли в математику из древней науки о солнечных часах — гномоники. Для определения времени люди научились следить за изменяющейся в течение дня длиной тени, которую отбрасывает шест, вертикально воткнутый в землю. Этот шест, называвшийся гномоном, иногда прикрепляли перпендикулярно стене, так что он располагался горизонтально. Гномон обычно разбивали на 7 или 12 равных частей, измеряя затем этими частями длину отбрасываемой им тени.

Правило, которое ал-Хорезми дает для нахождения «прямой тени» — котангенса угла α , в современных обозначениях имеет вид:

$$\text{ctg } \alpha = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin \alpha} 12.$$

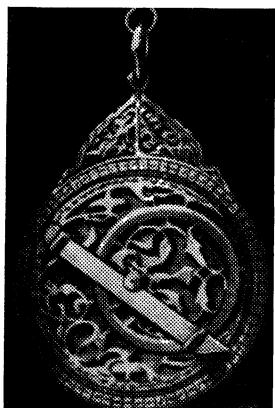


Рис. 24.
Астролябия. XV в.

Множитель 12 появляется здесь в связи с тем, что измерительный шест подразделяется на 12 частей.

Аналогичное правило приводится для «обращенной тени», которую ал-Хорезми выражает в долях единицы:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sin (90^{\circ} - \alpha)}.$$

В последних главах зиджа (29—37) рассматриваются такие астрономические вопросы, как вычисление скорости движения светил, определение размеров Солнца и Луны, моментов наступления их затмений и т. д.

Кроме зиджа, ал-Хорезми написал и другие труды по астрономии. Большое внимание он уделял астрономическим наблюдениям и инструментам, с помощью которых эти наблюдения можно было производить наиболее точно.

Два трактата он посвятил астролябии — переносному астрономическому инструменту, широко распространенному на Ближнем и Среднем Востоке (рис. 24). «Книга о построении астролябии» («Китаб амал ал-астурлаб»), которая упоминается в средневековых списках сочинений ал-Хорезми, до нашего времени не дошла. Сохранился в арабской копии другой его трактат — «Книга о применении астролябии» («Китаб ал-амал би-л-астурлаб»). В нем подробно изложены правила пользования этим сложным инструментом, описаны виды астролябий, известные во времена ал-Хорезми, приводится много примеров решения задач практической астрономии с помощью астролябии.

Ал-Хорезми был одним из первых астрономов, которые писали об астролябии и старались популяризировать ее среди практиков. Позднее появилось много сочинений об этом инструменте на арабском языке. В трактате ал-Хорезми дано также первое известное описание другого астрономического инструмента — синус-квадранта.

Известно, что ал-Хорезми написал сочинение о солнечных часах.

ГЕОГРАФИЯ

С математическими и астрономическими трудами восточных ученых были тесно связаны сочинения по географии.

Путешествия по суше и морю требуют точного знания маршрута и умения ориентироваться на местности в каждой

точке пути. Нужно знать расстояния между географическими пунктами и направление, в котором нужно двигаться, чтобы достигнуть намеченной цели в кратчайший срок. Для этого необходимо иметь перед собой географическую карту. Потребность в ней человек ощутил в очень отдаленные времена.

Но создание географической карты связано с немалыми трудностями. Прежде всего при этом выпуклая поверхность шарообразной Земли должна быть изображена на плоскости. Иначе говоря, при первых же попытках начертить карту человек столкнулся со сложной математической задачей — с проектированием сферы на плоскость. Нелегкими были и астрономические задачи, возникавшие в этой связи. Требовалось, в частности, точно определить географическую широту и долготу места, что требовало больших познаний в астрономии.

Первая удачная попытка решить эти задачи связывается с именем великого древнегреческого математика и астронома Гиппарха (II в. до н. э.), но точных сведений о составленной им карте и методах, которые он применял, не сохранилось. Его идеи были развиты учеными более позднего времени. Все географические познания древних были обобщены во II в. в трудах Марина Тирского и Птолемея — автора знаменитого «Алмагеста».

На основы математической географии, которые были разработаны в период античности, опирались средневековые ученые Ближнего и Среднего Востока. Автором первого географического труда, положившего начало их деятельности в этой области науки, был Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми.

Его сочинение, озаглавленное «Книга картины Земли» («Китаб сурат ал-ард»), сохранилось в единственной арабской рукописи, которая хранится в библиотеке г. Страсбурга. Ее обнаружили и начали изучать только в конце XIX в. Этот труд ал-Хорезми вызвал большой интерес исследователей (К. Наллино, Х. Мжик, Э. Хонигман, В. В. Бартольд, И. Ю. Крачковский и др.), которые показали, что он сыграл важнейшую роль в развитии географии. По словам академика В. В. Бартольда, «Книга картины Земли» положила начало арабской географической науке.

Ал-Хорезми впервые на арабском языке подробно описал известную в то время обитаемую часть Земли и дал ее карту с указанием координат важнейших населенных пунктов, с изображением морей, островов, гор, рек и т. д. Раньше арабы, конечно, располагали определенными практическими познаниями в области географии, но эти познания не были объединены в научную систему и касались главным образом Аравийского полуострова.

Ал-Хорезми опирался на греческие сочинения — «Географию» Птолемея и, как считают некоторые ученые, возможно, на географический трактат Марина Тирского. Однако «Книга

картины Земли» не является простым переводом трудов предшественников, а представляет собой оригинальное произведение, содержащее много совершенно новых данных. Академик И. Ю. Крачковский заметил, что в нем ал-Хорезми показал себя не менее самостоятельным ученым, чем в математических работах.

Сочинение было написано, по-видимому, в связи с теми работами в области геодезии и географии, которые проводились в Багдаде при халифе ал-Мамуне. Цель работ заключалась в уточнении размеров Земли, вычисленных ранее греческими учеными. Для этого была непосредственно измерена длина одного градуса земного меридиана. Измерения проводились на ровной местности в пустыне группой крупных багдадских ученых-астрономов с помощью специально изготовленных инструментов. По всей видимости, активное участие в этой важной работе принимал и ал-Хорезми.

Закончена «Книга картины Земли» была около 840 г., так как в ней упоминается расположенный недалеко от Багдада город Самарра, куда при наследниках ал-Мамуна перенесли на некоторое время столицу халифата. Строительство же Самарры началось только в 836 г.

По античной традиции ал-Хорезми подразделял часть Земли, считавшуюся тогда обитаемой (ойкумену), на семь «климатов». «Климаты» — это широтные пояса, отличающиеся друг от друга продолжительностью летнего дня (дня летнего солнцестояния) на полчаса. У ал-Хорезми они ограничены географическими параллелями $16^{\circ}27'$, 24° , $30^{\circ}22'$, 36° , 41° , 45° , 48° . Здесь он проявил оригинальность по сравнению с греческими предшественниками, которые давали несколько иные границы «климатов».

Для каждого «климата» ал-Хорезми привел таблицы координат городов, дал описание гор, морей, островов и рек. Он указал широты и долготы 489 населенных пунктов. Из них многие заимствованы у Птолемея, но другие даны в уточненном виде. Например, он исправил приведенные Птолемеем координаты граничных пунктов Средиземного моря, уменьшив его протяженность с запада на восток на 10° . Наиболее существенные дополнения к карте мира Птолемея, сделанные ал-Хорезми, касаются Средней Азии. Он привел новые сведения о городах этого региона, изменил описание рек и т. д.

Четыре географические карты, имеющиеся в сохранившейся рукописи «Книги картины Земли», являются, по словам И. Ю. Крачковского, «древнейшими дошедшими до нас памятниками арабской картографии». Приводя античные названия местностей, ал-Хорезми указывает также названия, которые употреблялись в его время. Основываясь на трудах предшественников, он в то же время вносит много нового в географическое описание Земли и ее изображение.

Сочинение ал-Хорезми послужило основой для последующей работы ученых средневекового Ближнего и Среднего Востока в области географии, геодезии и картографии. На него опирался, в частности, Абу Райхан ал-Беруни, который в своем «Каноне Мас'уда» привел таблицу географических координат более чем 600 населенных пунктов.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Представление о том, что Земля имеет форму шара, сложилось в середине I тысячелетия до нашей эры у греческих ученых. Они поставили задачу — вычислить размеры этого шара, и в частности определить длину его окружности. Уже в древности были разработаны некоторые методы решения указанной задачи.

Теоретическую основу для научного определения длины окружности Земли впервые дал Эратосфен (ок. 276—194 до н. э.). Суть его метода состоит в следующем: на поверхности Земли измеряется расстояние между двумя пунктами, находящимися на одном меридиане (т. е. такими пунктами, что один из них расположен по отношению к другому точно в южном направлении). В этих пунктах одновременно определяется высота Солнца в полдень и находится разность полученных значений. Она выражает в градусах величину дуги меридиана между пунктами. Так как длина этой дуги известна, то, зная, какую часть окружности она составляет, можно найти длину всей окружности.

Одним из пунктов, которые выбрал Эратосфен, была Александрия, вторым — город Сиена (теперь Ассуан). Он знал, что расстояние между ними равно 5000 стадиям¹, а найденная им величина дуги меридиана составляла $7\frac{1}{5}^{\circ}$, т. е. $\frac{1}{50}$ долю длины окружности. Он заключил, что, следовательно, длина окружности Земли равна 250 000 стадиям.

Методы, применявшиеся древними греками для определения размеров Земли, а также полученные ими результаты были известны багдадским ученым, работавшим при дворе халифа ал-Мамуна. Но они не могли положить эти результаты в основу своих вычислений, потому что не знали соотношения между стадией и единицами длины, применявшимися в арабских странах. Это объяснялось тем, что в древности не было строго установленной длины стадии, и как теперь известно, в разных районах применялись различные единицы измерения с таким названием; насчитывалось до шести видов

¹ Эратосфенова стадия — единица длины, равная приблизительно 148,5 м.

стадий, в большей или меньшей степени отличавшихся друг от друга.

Так как поэтому данные, полученные греческими учеными, доверия не вызывали, а точное знание длины земной окружности требовалось для решения многих теоретических и практических задач, было решено произвести независимые измерения. Их описал в своей «Геодезии» Абу Райхан ал-Беруни.

По приказу ал-Мамуна искусные ремесленники специально изготовили соответствующие инструменты, а ученые занялись поисками места для проведения землемерных работ. Была выбрана гладкая равнина около города Синджара, расположенного западнее Мосула. Здесь был определен пункт, в котором измерили полуденную высоту Солнца. Затем ученые разделились на две группы, из которых одна двинулась к северу, а другая к югу. Первую возглавил Халид ал-Мерверруди — известный астроном, уроженец города Мервар-Руд. Второй группой руководил математик и астроном Али ибн Иса ал-Астурлаби. Двигаясь строго по меридиану, ученые измеряли пройденный путь и полуденную высоту Солнца, по которой определяется широта места. Так каждая группа продвинулась на 1 градус широты и нашла определенное значение длины градуса земного меридиана. Оказалось, что эти значения несколько расходились: согласно данным, полученным одной группой, один градус меридиана Земли равен 56 милям¹, вторая же группа нашла, что эта величина несколько больше, а именно $56\frac{2}{3}$ миль.

Следует отметить, что для истории измерения Земли чрезвычайно важен тот факт, что багдадские ученые впервые непосредственно измерили длину отрезка меридиана (в противоположность Эратосфену, который сам производил соответствующие астрономические наблюдения, но не проверял данных о расстоянии между Александрией и Сиеной).

Судя по всему, в этих работах, которые, по мнению современных исследователей, знаменовали начало нового этапа в истории геодезии, принимал участие и ал-Хорезми. Хотя в письменных источниках его имя особо не упоминается, но трудно допустить, что он мог остаться в стороне от работ, теснейшим образом связанных с тематикой его трудов. Поэтому биографы ал-Хорезми смело причисляют его к группе ученых, занимавшихся измерением длины градуса земного меридиана.

¹ Арабская миля ≈ 1973 м.

Соответствующее значение 1 градуса земного меридиана (110 488 м) достаточно близко к современному (около 111 км).

МАТЕМАТИКИ И АСТРОНОМЫ ХОРЕЗМА X—XIII вв.

Мы уже говорили о том, какое большое влияние оказали труды ал-Хорезми на развитие науки в странах Востока и Запада. Здесь мы расскажем немного подробнее о математиках — уроженцах Хорезма, работавших здесь в X — XIII вв. Все они испытали на себе влияние своего великого земляка, заложившего фундамент, на котором строились точные науки на Востоке в средние века.

Спустя столетие после ал-Хорезми, во второй половине X в., работал другой выдающийся уроженец Хорезма — Абу Абдаллах Мухаммад ибн Ахмад ибн Юсуф ал-Хорезми, автор энциклопедического труда «Ключи наук» (мафатих ал-улум), написанного после 976 г. Он принадлежал к административным кругам при дворе Саманидов и отличался широкой образованностью. Об этом свидетельствует его сочинение, задуманное как справочник для чиновников по всем вопросам, с которыми они сталкивались в своей практической деятельности. Академик И. Ю. Крачковский назвал «Ключи наук» одним из интереснейших первоисточников для проникновения во все стороны жизни этой эпохи.

Абу Абдаллах ибн Ахмад ал-Хорезми дал определение и разъяснил содержание всех существовавших в то время наук, включая математику и астрономию, с которыми он, по-видимому, был знаком очень основательно.

Арифметика в «Ключах наук» подразделяется на теоретическую и практическую: первая из них занимается некоторыми вопросами теории чисел, вторая обобщает все то, что связано с решением задач, возникающих в астрономии, а также землемерии, торговле и т. д.

В практической арифметике Абу Абдаллах ибн Ахмад ал-Хорезми выделяет прежде всего «индийскую арифметику»

(«хисаб ал-хинд»), которая была изложена впервые его великим предшественником. В качестве второго раздела упомянуто исчисление с помощью букв арабского алфавита («хисаб ал-джумал», иначе называемое «абджад»), которое применяют астрономы и вычислители. Третьим разделом практической арифметики названа алгебра, которая определяется как «искусство искусств для вычисления и прекрасный метод решения трудных задач», особенно полезный при разделе наследства и коммерческих сделках. Абу Абдаллах ибн Ахмад ал-Хорезми описывает также другие вычислительные приемы, которыми пользовались восточные математики, однако заключает, что «наиболее красивым и общим» является исчисление ал-джабр ва-л-мукабала.

Немалое внимание уделено в «Ключах наук» геометрии, различным вопросам астрономии, а также музыке, которая в средние века считалась математической дисциплиной.

Выдающимся хорезмийским ученым X — XI вв. был Абу Наср Мансур ибн Али Ибн Ирак, учитель и воспитатель великого ал-Беруни. Он оставил важный след в истории науки стран Востока, в особенности астрономии и тесно с ней связанной тригонометрии.

Биография Ибн Ирака в подробностях неизвестна. Он родился, по-видимому, около 961—965 гг. и провел большую часть жизни в Хорезме. До 995 г., по сохранившимся сведениям, Ибн Ирак жил в Кяте — столице хорезмшахов, находящейся в то время в расцвете. Будучи представителем династии хорезмшахов Иракидов, он перенес немало лишений после ее падения в 995 г.

В Кяте Ибн Ирак начал научные исследования, которые принесли ему широкую известность далеко за пределами Хорезма. В доме Ибн Ирака получил воспитание и начальное образование Абу Райхан ал-Беруни, всегда отзывавшийся о своем учителе с глубоким уважением и поддерживавший с ним тесные научные связи. Ал-Беруни пишет, что эти связи установились с самого начала его занятий математикой, когда Ибн Ирак познакомил его со своей библиотекой и с результатами своих исследований. Ал-Беруни свидетельствует о справедливости учителя при решении различных научных споров, его предельной скромности, уме, больших знаниях и великолепной памяти.

Вместе с ал-Беруни в результате политических потрясений, постигших Хорезм в начале XI в., Ибн Ирак оказывается в новой столице — Гургандже, а после 1017 г. — в Газне, центре владений Махмуда Газнави. Этот деспотичный правитель, подчинивший себе многие государства, собрал при своем дворе многих поэтов и ученых, в том числе Беруни и Ибн Ирака. Дата смерти Ибн Ирака точно не установлена. Различные ис-

точники позволяют утверждать, что он умер между 1034 и 1036 гг.

Ибн Ирак является автором более чем двадцати сочинений, которые пользовались заслуженной популярностью не только среди современников, но и много времени спустя. Их неоднократно цитировал, например, выдающийся математик и астроном XIII в. Насир ад-Дин ат-Туси. Упоминает труды Ибн Ирака и живший в XVII в. Хаджжи Халифа, автор библиографического словаря «Раскрытие сомнений относительно названий книг и наук» («Кашф аз-зуннун фи асам ал-кутуб ва ал-фанун»).

К наиболее важным трудам Ибн Ирака, широко известным в средние века, принадлежал его «Шахский Алмагест» («Ал-маджисти аш-шахи»), рукописи которого, к сожалению, либо погибли, либо пока не обнаружены. О содержании этого сочинения сейчас можно судить по цитатам из него, которые приводят другие ученые, в том числе ал-Беруни и Насир ад-Дин ат-Туси.

Другой труд Ибн Ирака, сыгравший серьезную роль в истории математики и астрономии, — это его комментарии к сочинению «Сферика» знаменитого древнегреческого ученого Менелая Александрийского (I — II вв.). Обработка «Сферики», принадлежащая Ибн Ираку, высоко ценилась на Востоке. Сейчас «Сферика» продолжает оставаться одним из важнейших источников по истории древней и средневековой астрономии.

Это и другие сочинения Ибн Ирака имели огромное значение для развития тригонометрии. В них мы встречаем доказательство и применение теоремы синусов для плоских и сферических треугольников — чрезвычайно важной теоремы, заменившей в восточной математике теорему Менелая о «шести величинах», или «фигуру секущих» («шакл ал-кита»). Введение теоремы синусов означало большой шаг вперед в истории математики и астрономии. Впервые ее доказали, наряду с Ибн Ираком, Абу-л-Вафа ал-Бузджани и Абу Махмуд ал-Ходжанди для разных случаев. Поэтому вопрос о приоритете в ее открытии, широко обсуждавшийся современниками, остался неясным. Беруни в «Книге ключей науки астрономии о том, что происходит на поверхности сферы» решает этот вопрос в пользу своего учителя.

Многие сочинения Ибн Ирака по математике и астрономии, сохранившиеся в рукописях, оставались фактически неизвестными. Только после того, как сравнительно недавно в Хайдарабаде был опубликован арабский текст пятнадцати его трактатов, они стали доступны исследователям. Сейчас они изучаются учеными разных стран и готовятся к печати в переводе на русский язык. Это позволит в полной мере оценить научные заслуги замечательного среднеазиатского математика Абу Насра Ибн Ирака.

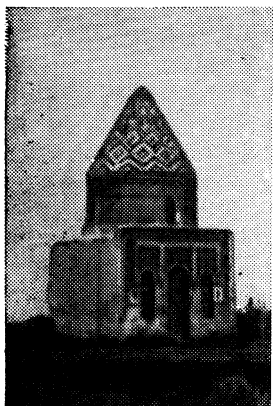


Рис. 25.

Куня-Ургенч

Немеркнувшую славу Хорезму (рис. 25—32) принес его великий уроженец Абу Райхан ал-Беруни (973—1048). Роль Беруни в различных областях науки, в том числе астрономии и математики, в настоящее время всесторонне освещена. Особенно много исследований, посвященных его творчеству, появилось в советской и зарубежной литературе в связи с тысячелетним юбилеем великого ученого, широко отмеченным мировой общественностью в 1973 г.

В Академии наук УзССР ведется большая работа по дальнейшему изучению научного наследия ал-Беруни. Особенно важное значение имеет издание собрания его сочинений на русском и узбекском языках. Вышли из печати

труды ал-Беруни «Памятники минувших поколений», «Индия», «Геодезия», «Фармакогнозия», монументальное астрономическое сочинение «Канон Мас' уда», трактат «Вразумление начаткам науки о звездах». Все они содержат ценные сведения по математике и астрономии средних веков и дополняют наше представление о хорезмийском ученом, чей универсальный гений оставил неизгладимый след в истории науки.

Ал-Беруни почерпнул немало знаний из трудов ал-Хорезми¹. На сведения по математике и астрономии, полученные у него, мы встречаем многочисленные ссылки в сочинениях ал-Беруни. Несколько трактатов он посвятил анализу зиджа ал-Хорезми. В своих географических исследованиях он опирался на его «Книгу картины Земли». В списке трудов ал-Беруни, который составлен им самим, упоминается трактат «Памятка по счету синдскими и индийскими цифрами». В нем шла речь об «индийской арифметике», первым пропагандистом которой был Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми.

Следует сказать и о том, что в столице Хорезма Гургандже рядом с Абу Райханом ал-Беруни и Абу Насром Ибн Ираком некоторое время работал другой великий среднеазиатский ученый — энциклопедист Абу Али Ибн Сина (980—1037), тысячелетний юбилей которого торжественно отмечался в 1980 г. Он также много занимался математикой и астрономией и оставил важный след в развитии этих наук. В автобиографии Ибн Сина писал, что его математическое образование началось с изучения «индийской арифметики»: он был специально отдан в обучение к купцу, сведущему в этой науке.

¹ Вопрос о влиянии ал-Хорезми на ал-Беруни специально исследовал П. Г. Булгаков [3].



Рис. 26.

Панорама современной Хивы, богатой древними памятниками и во многом сохранившей облик города средневекового Хорезма.

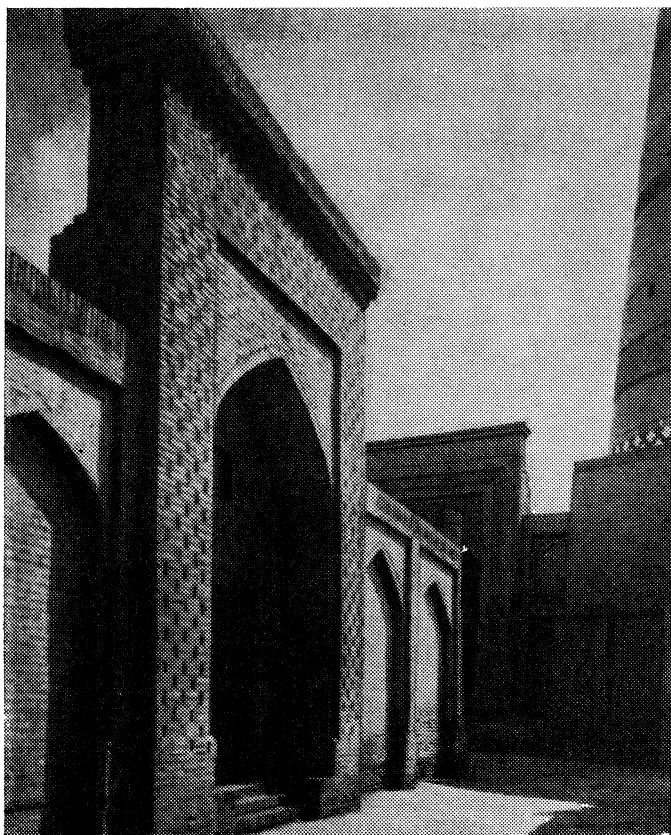


Рис. 27.

Улочка Хивы

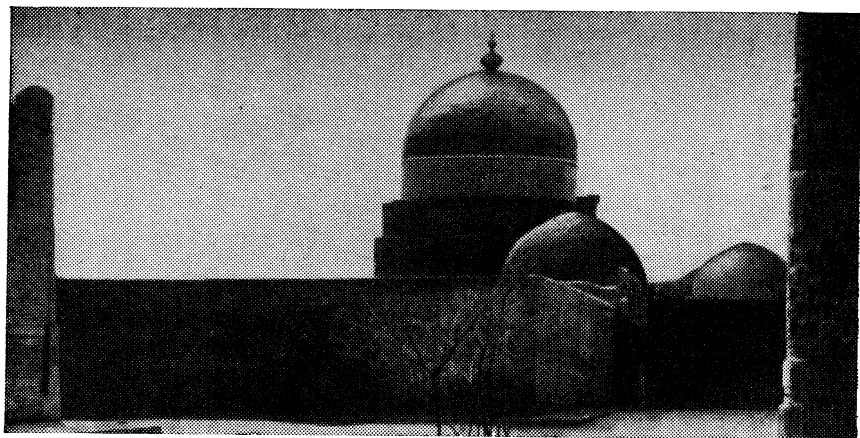


Рис. 28.
Мавзолей.
Пахлаван -
Махмуд

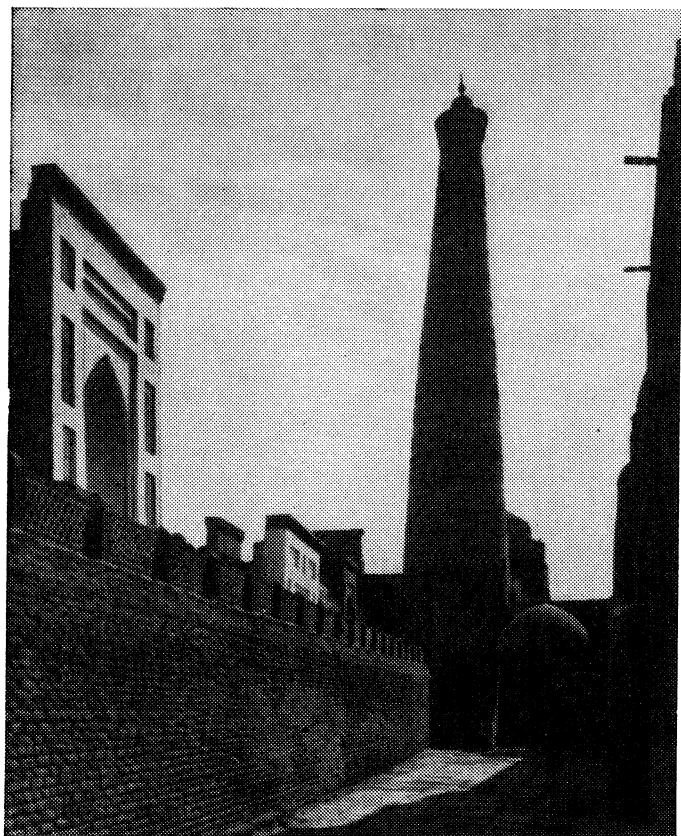


Рис. 29.
Минарет
Ислам-
Ходжа

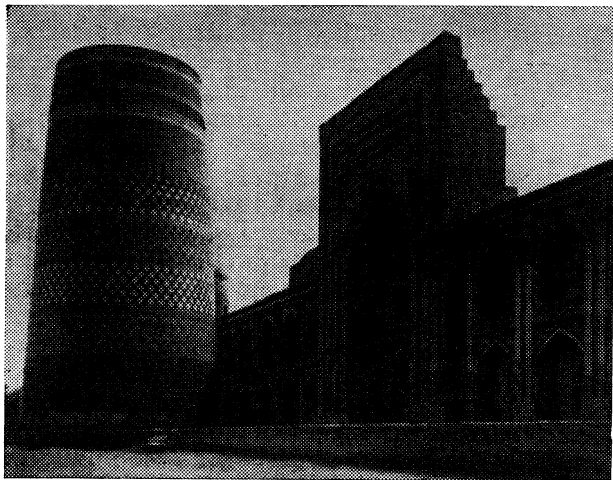


Рис. 30.
Медресе
Мухаммед Амин-
хана и минарет
Кольта-минор

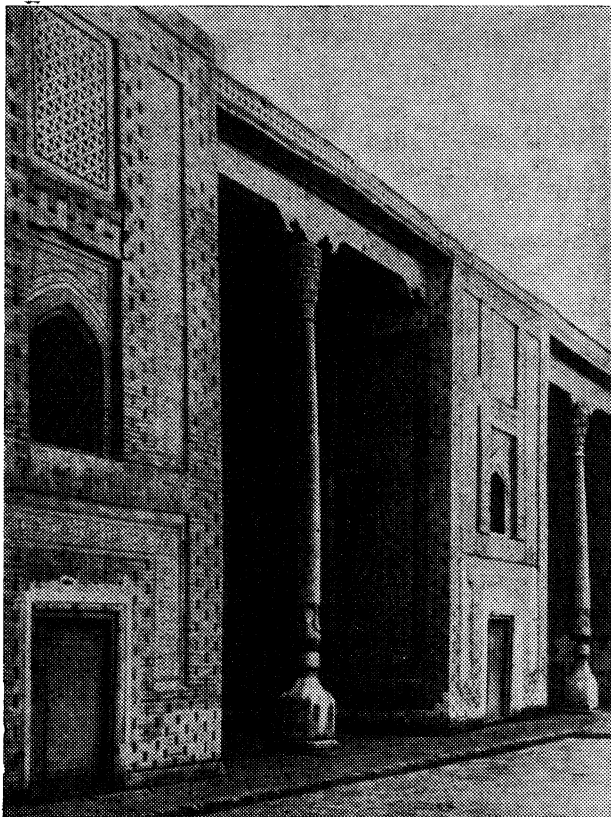


Рис. 31.
Таш-Хаули.
Айваны

К числу выдающихся уроженцев Хорезма относится астроном и математик XII — XIII вв. Махмуд ибн Мухаммад ибн Умар ал-Чагмини. Почти никакими сведениями о его жизни мы, к сожалению, сейчас не располагаем. Известно, что учился он в Самарканде, где получил, по-видимому, широкое образование. Он занимался также врачебной деятельностью и составил комментарий к «Канону» Ибн Сины.

Среди сочинений ал-Чагмини наибольшую известность приобрел трактат «Избранное по астрономии» («Мулаххас фи-л-хайат»), написанный по образцу зиджей. В нем кратко изложены сведения по астрономии и географии. Труд ал-Чагмини получил всеобщее признание и долгое время служил учебником астрономии. О его популярности говорит большое число сохранившихся рукописей, находящихся в различных библиотеках мира. Как свидетельствует выдающийся математик XV в. Джамшид Гияс ад-Дин ал-Каши, трактат ал-Чагмини изучался в прославленной самаркандской школе Улугбека. Комментарий к нему написал один из ведущих ученых этой школы — Кази-заде Руми.

ОБ ИСТОРИИ ИЗУЧЕНИЯ ТРУДОВ АЛ-ХОРЕЗМИ

Западные ученые по достоинству оценили труды ал-Хорезми еще в средние века. Эти труды стали известны в XII в. Они принадлежали к первым сочинениям по математике и астрономии, переведенным с арабского языка на латинский, который в средневековой Европе играл роль международного научного языка.

Переводом трудов ал-Хорезми занимались крупнейшие переводчики XII в.: Аделард из Бата, Герардо Кремонский, Роберт из Честера, Иоанн Севильский. Тогда же появились сочинения, представлявшие собой обработки трактатов ал-Хорезми.

Как переводы, так и их обработки арифметического и алгебраического трактатов получили широкое распространение и стали популярными учебными пособиями.

О важнейшей роли ал-Хорезми в истории алгебры писали выдающиеся алгебраисты эпохи Возрождения Дж. Кардано (1501—1576) и Н. Тарталья (1500—1557), с именами которых связано начало нового этапа в развитии алгебраической науки (решение кубического уравнения в радикалах). Оба они называют Мухаммада ибн Мусу создателем алгебры. Кардано в своем знаменитом алгебраическом сочинении, озаглавленном «Великое искусство», поставил ал-Хорезми на восьмое

место в ряду выделенных им величайших гениев человечества.

Высоко оценил роль ал-Хорезми в развитии науки и крупнейший английский математик XVII в. Дж. Валлис (1616—1703) в «Трактате об алгебре», опубликованном в 1685 г.

В XVIII в. имя ал-Хорезми часто упоминалось в научной литературе, и ученые уже составили общее впечатление о его трудах.

Однако серьезное изучение этих трудов началось только в начале XIX в. В это время историки науки проявили глубокий интерес к сочинениям математиков и астрономов Востока. Они приступили к расшифровке и переводу рукописей этих сочинений, написанных на санскрите, арабском, персидском и других восточных языках.

К числу первых арабских математических рукописей, которые были внимательно изучены, относилась рукопись алгебраического трактата ал-Хорезми. В 1831 г. Ф. Розен издал ее текст вместе с английским переводом. После этого сочинение стало доступно широким кругам математиков и историков математики, которые смогли теперь дать подробный анализ его содержания.

В 1857 г. известный итальянский историк математики Б. Бонкомпаньи опубликовал латинский текст средневекового перевода «Книги об индийской арифметике» ал-Хорезми. Эта публикация сразу вызвала отклики историков математики. В 1859 г. вышла из печати посвященная ей работа видного немецкого математика и арабиста Ф. Вёпке, исследования которого сыграли важную роль в изучении истории восточной науки. В этой работе затронуты многие вопросы, связанные с математическим творчеством Мухаммада ибн Мусы ал-Хорезми. Особое внимание Ф. Вёпке уделил проблеме возникновения десятичной позиционной системы нумерации и современной арифметики. Он назвал ее «одной из наиболее трудных и в то же время наиболее интересных проблем истории математических наук».

К середине XIX в. ученые познакомились и с астрономическим трудом ал-Хорезми, о котором они знали из арабских энциклопедий. В 1846 г. выдающийся французский геометр М. Шаль, с увлечением занимавшийся историей математики, обнаружил две латинские рукописи зиджа ал-Хорезми в переводе Аделарда из Бата. Он внимательно изучил их и опубликовал результаты своего исследования в «Докладах Парижской Академии наук». М. Шаль дал очень высокую оценку роли ал-Хорезми в истории астрономии и тригонометрии. Он отметил, например, что в зидже ал-Хорезми мы находили «в первый раз применение синуса вместо хорд, которыми пользовались греки в своей тригонометрии», и что «этому прославленному ученому принадлежит счастливая идея тако-

го крайне полезного усовершенствования». В то время это было важным историко-научным открытием.

Новый материал, полученный при изучении рукописей трудов ал-Хорезми, сразу нашел отражение в курсах истории математики. Особенно важное значение имела книга известного немецкого математика Г. Ганкеля «К истории математики в древности и в средние века», которая вышла из печати в 1874 г. В ней собраны все ставшие известными к тому времени сведения о математических трудах ал-Хорезми и дан анализ содержания этих трудов.

Книга Г. Ганкеля послужила основой других работ. На нее опирался при написании раздела о математике в странах Ближнего и Среднего Востока М. Кантор — автор большого четырехтомного сочинения «Лекции по истории математики» (первый том вышел в 1894 г.). Он подробно обсудил спорные вопросы, которые возникли у исследователей математического творчества ал-Хорезми к началу XX в. Нужно заметить, что многие из этих вопросов до сих пор не получили окончательного ответа и продолжают обсуждаться учеными разных стран.

К началу XX в. значительно расширились представления о творческом вкладе Мухаммада ибн Мусы ал-Хорезми и в другие области знания. Важное значение имело открытие географического трактата «Книга картины Земли». Первое серьезное исследование этого сочинения принадлежало крупному итальянскому арабисту и историку науки К. Наллино.

Итоги изучения творчества ал-Хорезми, которое провели ученые XIX в., подвел швейцарский историк математики и астрономии Г. Зутер в работе «Математики и астрономы арабов и их труды», опубликованной в 1900 г. И в других своих исследованиях этот замечательный ученый проявил большой интерес к ал-Хорезми.

В частности, Г. Зутер принял активное участие в издании астрономического труда ал-Хорезми. Это сочинение после открытия его М. Шалем не переставало привлекать внимание историков науки. В 1914 г. Г. Зутер опубликовал латинский текст зиджа ал-Хорезми, завершив незаконченную многолетнюю работу датского ученого А. Бьёрнбо, скончавшегося в 1912 г. Он доказал также, что латинский перевод был выполнен не с оригинального текста ал-Хорезми, а основывается на обработке Масламы ал-Маджрити.

Опубликованный Г. Зутером текст зиджа ал-Хорезми был издан в переводе на английский язык в 1962 г. крупным современным историком математики и астрономии О. Нейгебауером. Исследованием зиджа по арабским источникам занимается другой виднейший историк науки Э. С. Кеннеди, посвятивший астрономическому учению ал-Хорезми несколько работ.

В 20-х годах нашего столетия профессор Эрлангенского университета Э. Видеман, которому принадлежат важные исследования по истории физико-математических наук в странах Ближнего и Среднего Востока, обнаружил арабскую рукопись трактата ал-Хорезми о применении астролябии. Точнее говоря, это рукопись сочинения другого выдающегося среднеазиатского ученого IX в. ал-Фаргани, но в нем приводится большой отрывок из упомянутого трактата. Этот отрывок, в котором даются правила действий с астролябией, опубликовал в переводе на немецкий язык И. Франк в 1922 г.

Таким образом, в XX в. интерес к научному наследию ал-Хорезми не ослабевает. Его труды продолжают изучать и публиковать на разных языках. Разделы, посвященные его творчеству, имеются во всех современных курсах истории математики. Опубликованы многочисленные статьи на разных языках мира, в которых дается анализ его трудов. Большое внимание по-прежнему вызывают его арифметический и алгебраический трактаты.

Книге ал-Хорезми об индийской арифметике и средневековым сочинениям по «алгорисму» посвящена сейчас большая литература. Текст кембриджской латинской рукописи был переиздан в 1963 г. К. Фогелем. Ученые внимательно проанализировали этот текст и сравнили его с текстом латинских трактатов по «алгорисму» (А. П. Юшкевич, К. Фогель и др.). Это позволило сделать важные выводы о путях развития арифметики в Европе.

Глубокое исследование «Алгебры» ал-Хорезми принадлежит немецкому арабисту Ю. Рушке (1917 г.), который внес значительные исправления в изданный в 1831 г. перевод текста. Несколько статей посвятили этому сочинению американские ученые С. Гандц и Л. Ч. Карпинский. В частности, Карпинский изучил латинский перевод «Алгебры» ал-Хорезми, принадлежащий Роберту из Честера, и опубликовал его с английским переводом в 1915 г.

В настоящее время алгебраический трактат Мухаммада ибн Мусы ал-Хорезми, как и его книга об индийской арифметике, упоминается сейчас в каждом курсе истории математики. Подробно он рассматривается в работах, посвященных истории алгебры, и в целом ряде специальных исследований, предметом которых является этот труд ал-Хорезми. С него начинается описание путей развития средневековой алгебры на Ближнем и Среднем Востоке, фундаментом которой с полным основанием считают этот трактат. К нему возвращаются и при изложении истории математики в Европе в средние века и в эпоху Возрождения. Но с какой бы точки зрения ни подходил историк науки к анализу этого сочинения, оно всегда вызывает самую высокую оценку.

Очень характерно высказывание американского историка

математики Л. Карпинского, подробно исследовавшего многие вопросы, связанные с творчеством ал-Хорезми. Он писал, что «Алгебра» ал-Хорезми «на протяжении столетий пользовалась широкой популярностью в оригинале, а в течение последующих веков ее популярность расширилась благодаря переводам и адаптациям. Изучение содержания этого труда представляет собой экскурс в средневековое мышление.

При исследовании текста в форме, возможно более близкой к оригиналу, мы находим причину долго длившейся потребности в нем как для восточного, так и для западного ума, его интереса как для англичанина, немца и итальянца, так и для араба. Даже сегодня преподаватели элементарной математики могут найти эту книгу плодотворной: геометрические решения квадратных уравнений, предложенные арабским автором более тысячи лет назад, могут быть с пользой применены в наших школах».

При исследовании алгебраического трактата еще в начале XIX в. возник целый ряд спорных вопросов, которые обсуждаются в историко-математической литературе вплоть до наших дней. Из них можно указать следующие:

- 1) об источниках «Алгебры» ал-Хорезми;
- 2) о его роли в истории алгебры на средневековом Востоке (в частности, обсуждается вопрос о том, был ли он действительно автором первого сочинения по алгебре на арабском языке);
- 3) о геометрическом разделе «Алгебра» и его источниках;
- 4) о задачах на раздел наследства: анализ содержания и научное значение этой главы;
- 5) терминология ал-Хорезми (в особенности о терминах «ал-джабр» и «ал-мукабала», об их происхождении и значении);
- 6) о средневековых латинских переводах «Алгебры» ал-Хорезми и их значении в истории математики в Европе.

Русская литература об ал-Хорезми к настоящему времени весьма обширна. Сведения о нем приводятся уже в дореволюционных книгах по истории математики В. В. Бобынина и М. Е. Ващенко-Захарченко. Большое внимание уделили ал-Хорезми советские исследователи (В. В. Бартольд, И. Ю. Крачковский, А. П. Юшкевич, Т. Н. Кары-Ниязов, Б. А. Розенфельд, И. Я. Депман и др.), исследовавшие разные стороны его творчества.

В 1964 г. в Ташкенте был опубликован русский перевод математических трактатов ал-Хорезми¹. Сейчас Академия наук Узбекской ССР готовит к печати второе, дополненное, издание этих трактатов, а также сочинения ал-Хорезми по астрономии и географии на русском и узбекском языках.

¹ См. [15].

Особенно важны для изучения математического наследия ал-Хорезми работы А. П. Юшкевича. Творчество великого хорезмийского ученого рассматривалось в его статье «О математике народов Средней Азии в IX—XV вв.», вышедшей в 1951 г. Подробный анализ арифметического трактата ал-Хорезми А. П. Юшкевич дал работе, специально посвященной этому сочинению¹. Она была опубликована в 1954 г., а в 1964 г. вышла в переработанном и дополненном издании на немецком языке. Сведения об ал-Хорезми приводятся и в других исследованиях А. П. Юшкевича. Эти сведения были обобщены в его книге «История математики в средние века»², опубликованной в 1961 г. и переведенной на немецкий, французский и чешский языки.

Заканчивая краткий обзор литературы о Мухаммаде ибн Мусе ал-Хорезми, напомним, что крупный исследователь Дж. Сартон назвал именем ал-Хорезми очень важный период истории науки — всю первую половину IX в.

На родине ал-Хорезми — в Хорезме, как и во всей Средней Азии, после установления Советской власти начался небывалый ранее подъем культуры и науки. Народы, являющиеся потомками древних хорезмийцев — узбеки, туркмены и др., — дали миру многих крупных ученых, широко известных своими трудами далеко за пределами нашей страны. Высокого уровня развития достигла в Средней Азии математика.

В 1979 г. родина ал-Хорезми принимала у себя участников конференции по современной теории алгоритмов и ее приложениям, которую организовали в г. Ургенче АН СССР и АН УзССР на базе Института кибернетики АН УзССР. Гости, среди которых было много выдающихся специалистов по математической логике и теории алгоритмов, отдали дань уважения памяти Мухаммада ибн Мусы ал-Хорезми. В докладе, посвященном его творчеству, австрийский профессор Земанек сказал: «Мы можем высказать только одно пожелание: чтобы через тысячу лет те, кто будет открывать для себя кого-либо из нас, посмотрели бы на созданное нами с таким же уважением, с каким мы сегодня смотрим на ал-Хорезми и его коллег по «Дому мудрости».

Сейчас научная общественность готовится отметить 1200-летний юбилей ал-Хорезми, который будет отпразднован в 1983 г. Созданы Всесоюзная и Республиканская юбилейные комиссии, а также комиссия АН УзССР. Всесоюзную комиссию возглавляет вице-президент АН СССР, академик П. Н. Федосеев, республиканскую — председатель Совета Министров УзССР Н. Д. Худайбердиев; в состав комиссий входят

¹ См. [16].

² См. [17].

А. У. Салимов, академик А. С. Садыков и другие выдающиеся общественные и научные деятели.

Разработана программа мероприятий по достойной встрече знаменательной даты. Будут опубликованы комментированные переводы на русский и узбекский языки всех сохранившихся сочинений ал-Хорезми, а также сборник исследований работ, посвященных его творчеству. К участию в этой работе привлекаются ученые, работающие в Институте математики АН УзССР, Институте востоковедения АН УзССР и в других научных учреждениях Советского Союза. В Москве и Ташкенте будут проведены торжественные заседания общественности, а в Хиве, на родине ал-Хорезми, — научная сессия, посвященная великому среднеазиатскому ученому.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бируни (Беруни). Памятники минувших поколений. — Избр. произведения/Пер. и примеч. М. А. Салье. Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1957, т. I, с. 487.
2. Булгаков П. Г. Жизнь и труды Беруни. Ташкент: Фан, 1972, 428 с.
3. Булгаков П. Г. Беруни и Хорезми. — В кн.: Математика и астрономия в трудах ученых средневекового Востока/Под ред. С. Х. Сираджиднова. Ташкент: Фан, 1977, с. 17—22.
4. Депман И. Я. История арифметики. Пособие для учителей. 2-е изд., испр. М.: Просвещение, 1965, 415 с. с ил.
5. Депман И. Я. Рассказы о старой и новой алгебре. Л.: Детская литература, 1967, 144 с. с ил. (Школьная б-ка. Для средней школы).
6. Крачковский И. Ю. Арабская географическая литература. — Избр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1957, т. IV, 919 с. с ил.
7. Матвиевская Г. П. К истории математики Средней Азии. Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1962, 125 с. (АН УзССР, Ин-т математики им. В. И. Романовского).
8. Матвиевская Г. П. Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке. Ташкент: Фан, 1967, 341 с. с ил. (АН УзССР, Ин-т математики им. В. И. Романовского).
9. Матвиевская Г. П. Развитие учения о числе в Европе до XVII в. Ташкент: Фан, 1971, 231 с. с ил. (АН УзССР, Ин-т математики им. В. И. Романовского).
10. Розенфельд Б. А., Рожанская М. М., Соколовская З. К. Абу-р-Райхан ал-Бируни. М.: Наука, 1973, 271 с. с черт. (АН СССР, научно-биограф. серия).
11. Розенфельд Б. А., Сергеева Н. Д. Об астрономических работах ал-Хорезми. — В кн.: Историко-астрономические исследования. Вып. 13. М.: Наука, 1977, с. 201—218.
12. Салье М. А. Мухаммед аль-Хорезми — великий узбекский ученый. Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1954, 27 с.
13. Сираджиднов С. Х., Матвиевская Г. П. Абу Райхан Беруни и его математические труды. Пособие для учащихся. М.: Просвещение, 1978, 95 с. (Люди науки).
14. Толстов С. П. По следам древнехорезмийской цивилизации. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1948, 322 с. с ил. и картами.
15. Ал-Хорезми Мухаммад. Математические трактаты/Пер. Ю. Х. Копелевич и Б. А. Розенфельда; Коммент. Б. А. Розенфельда/Под ред. Г. П. Матвиевской. Ташкент: Изд-во Наука УзССР, 1964, 130 с. (АН УзССР, Ин-т востоковедения им. Бируни).
16. Юшкевич А. П. Арифметический трактат Мухаммеда бен Муса ал-Хорезми. — Труды Ин-та истории естествозн. и техники АН СССР. М., 1954, с. 85—127.
17. Юшкевич А. П. История математики в средние века. М.: Физматгиз, 1961, 448 с. с ил.

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми занимает важное место среди ученых Средней Азии, имена которых вошли в историю точного естествознания. В IX в. — на заре расцвета средневековой восточной науки — ученый внес большой вклад в развитие арифметики и алгебры. Велики его заслуги в астрономии и математической географии. Труды ал-Хорезми в течение нескольких столетий оказывали сильное влияние на ученых Востока и Запада и долго служили образцом при написании учебников математики.

Исследованием творчества ал-Хорезми занимались многие историки науки. Ему посвящена обширная литература на разных языках мира. Научная общественность готовится отметить 1200-летний юбилей великого ученого.

Предлагая вниманию читателя эту книгу, мы хотим еще раз обратить его внимание на личность ал-Хорезми — выдающегося ученого и пропагандиста математических знаний. Учитель математики, стремящийся оживить преподавание своего предмета с помощью исторических иллюстраций, может найти в его трудах интересный материал. Сочинения ал-Хорезми дают ответ на многие вопросы, касающиеся возникновения основных понятий арифметики и алгебры, а также ранней истории этих математических дисциплин.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I.	ЖИЗНЬ И ТВОРЧЕСТВО АЛ-ХОРЕЗМИ	3
	Родина ал-Хорезми	—
	Багдад	8
Глава II.	АРИФМЕТИЧЕСКИЙ ТРАКТАТ АЛ-ХОРЕЗМИ	12
	О системах счисления	—
	Изложение арифметики у ал-Хорезми	14
	Сочинение ал-Хорезми и дальнейшее развитие арифметики	21
Глава III.	РОЛЬ АЛ-ХОРЕЗМИ В РАЗВИТИИ АЛГЕБРЫ	25
	Краткий обзор истории алгебры до ал-Хорезми	26
	Алгебра у ал-Хорезми	31
	Значение «Алгебры» ал-Хорезми	40
Глава IV.	ГЕОМЕТРИЯ У АЛ-ХОРЕЗМИ	43
Глава V.	ТРУДЫ АЛ-ХОРЕЗМИ ПО АСТРОНОМИИ И ГЕОГРАФИИ	52
	Астрономия	—
	География	58
	Геодезические исследования	61
Глава VI.	О НАУЧНОМ НАСЛЕДИИ АЛ-ХОРЕЗМИ	63
	Математики и астрономы Хорезма X—XIII вв.	—
	Об истории изучения трудов ал-Хорезми	70
	Литература	77
	Послесловие	78

*Сагды Хасанович Сираждинов,
Галина Павловна Матвиевская*

**АЛ-ХОРЕЗМИ — ВЫДАЮЩИЙСЯ МАТЕМАТИК
И АСТРОНОМ СРЕДНЕВЕКОВЬЯ**

Редактор Э. К. В и к у л и н а
Художественный редактор Е. Н. К а р а с и к
Технический редактор М. И. С м и р н о в а
Корректоры Л. П. М и х е е в а, Н. И. Н о в и к о в а

ИБ № 7317

Сдано в набор 30.08.82. Подписано к печати 30.03.83. Формат 60×90^{1/16}. Бум. типограф. № 2. Гарнит. школьная. Печать высокая. Усл. печ. л. 5. Усл. кр.-отт. 5,50. Уч.-изд. л. 4,70: Тираж 180 000 экз. Заказ 1426. Цена 15 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 150014, Ярославль, ул. Свободы, 97.

Люди науки

Весной 1983 года научная общественность страны готовится отметить 1200-летний юбилей выдающегося ученого и пропагандиста математических знаний Мухаммада ибн Мусы ал-Хорезми.

Книга, написанная двумя известными советскими учеными — вице-президентом АН Узбекской ССР, академиком АН Узбекской ССР, доктором физико-математических наук, математиком С. Х. Сираждиновым и доктором физико-математических наук, историком математики Г. П. Матвиевской, посвящена математическому творчеству одного из наиболее замечательных ученых средневекового Востока Мухаммада ал-Хорезми.

Учитель математики, стремящийся оживить преподавание своего предмета с помощью историко-математических сведений, найдет в этой книге немало интересного материала о возникновении основных понятий арифметики и алгебры, а также о ранней истории этих математических дисциплин.

